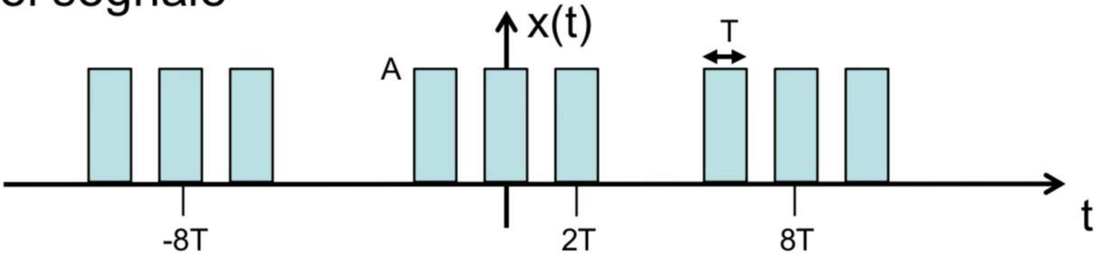
Lezione 16 - 15/04/2024

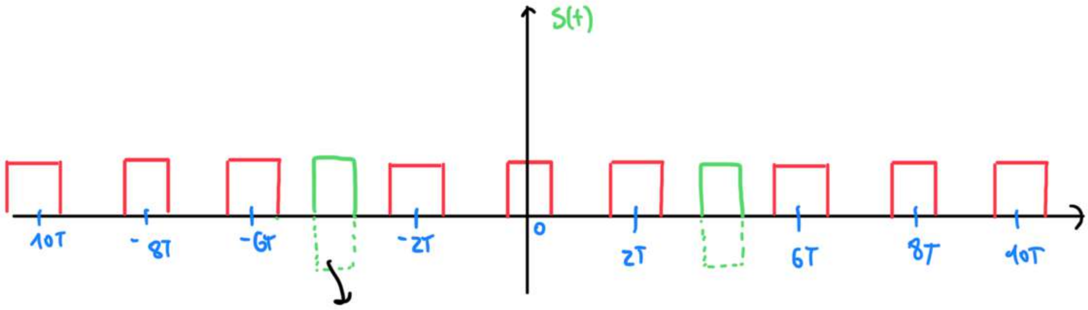
Es 2

Calcolare i coefficienti della serie di Fourier, valor medio e potenza del segnale



usiamo la regola del periodo (slide 35)

IDEA: QUESTO SEGNALE ASSOMIGLIA A UN'ONDA QUADRA A CUI E' STATA TOLTA UNA PARTE



$$y(t) = \text{rep}_{8T}\, \text{rect}\left(\frac{t-4T}{T}\right) \qquad T_y = 8T \quad d_y = \frac{1}{8}$$

$$s(t) = x(t) - y(t)$$

S_K $\qquad \omega_0 = \omega_s = \omega_y = \frac{2\pi}{8T}$

$X_m = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{m}{2}\right) \qquad \omega_x = \frac{2\pi}{2T}$

$$Y_K = \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right) \cdot \underbrace{e^{-jK\omega_0 4T \cdot \frac{2\pi}{8T}}}_{e^{-j\pi K} = (-1)^K} \qquad \omega_y = \frac{2\pi}{8T}$$

↑ bisogna aggiungere la traslazione

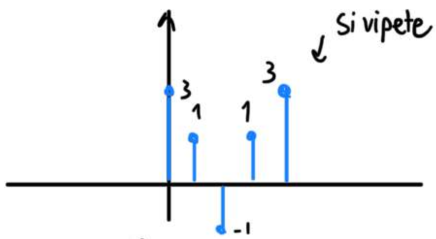
$$X_K = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{m}{2}\right) & K = 4m \leftarrow m = \frac{K}{4} \\ 0 & K \neq 4m \end{cases} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{8T}$$

QUESTO PASSAGGIO NON E' BANALE

$$S_K = \begin{cases} X_K - Y_K = \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right) - \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right)\cancel{(-1)^K}^{\,1} = \frac{3}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right) & K = 4m \\ -Y_K = -\frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right)(-1)^K = \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right)(-1)^{K+1} & K \neq 4m \end{cases}$$

Possiamo scrivere anche:

$$S_K = \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right) \cdot \begin{cases} 3 & K = 4m \\ (-1)^{K+1} & K \neq 4m \end{cases}$$



l'altra volta avevamo trovato:

$$S_K = \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{K}{8}\right)\left(1 + \cos\left(\frac{K\pi}{2}\right)\right)$$

QUALE STRADA ERA LA PIÚ FACILE ? LA PRIMA CHE ABBIAMO SEGUITO (REGOLA DERIVATA)
QUESTA STRADA HA UN PASSAGGIO NON PROPRIO SEMPLICE DA VEDERE (passaggio cerchiato in giallo)

Es 1

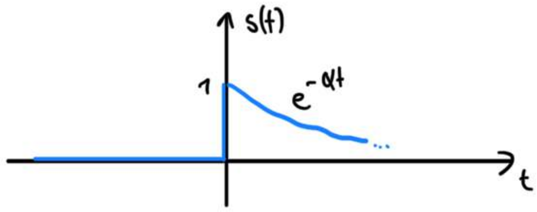
Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali

- **Esponenziale** unilatero $s(t) = e^{-at}\, 1(t)$, $a>0$
- Esponenziale bilatero $s(t) = e^{-a|t|}$, $a>0$
- **Rettangolo** $s(t) = \text{rect}(t)$
- **Delta** di Dirac $\delta(t)$

ESERCIZIO 1a

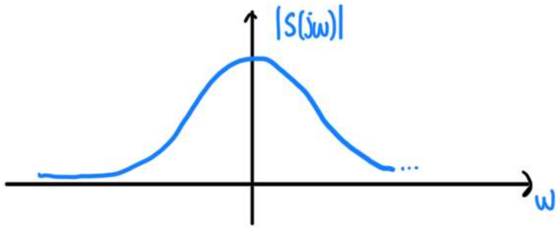
$s(t) = 1(t)\, e^{-at}$

$S(j\omega) = ?$



$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{0-1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega}$$

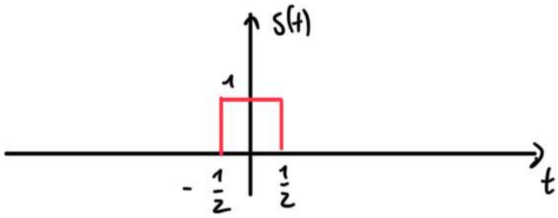


PROVARE A DISEGNARLO SU MATLAB

ESERCIZIO 1c

$s(t) = rect(t)$

$S(j\omega) = ?$



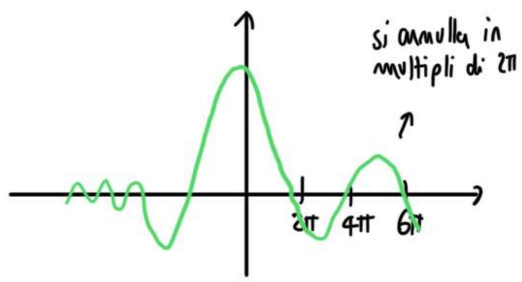
$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}}{-j\omega} = \frac{-e^{-j\frac{\omega}{2}} + e^{j\frac{\omega}{2}}}{j\omega} = \frac{2j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\frac{\pi}{\pi}\right)}{\frac{\omega}{2\pi}\pi} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

RISULTATO IMPORTANTE: IL rect HA COME TRASFORMATA DI FOURIER IL sinc

$$\boxed{rect(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)}$$



ESERCIZIO 1d

$s(t) = \delta(t)$
$S(j\omega) = ?$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1}$$ (SEGNALE COSTANTE CHE VALE 1)

ESERCIZIO

$s(t) = 1$
$S(j\omega) = ?$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = ?$$ questo integrale non è risolvibile.

FACCIAMO L'ANTITRASFORMATA DI FOURIER:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\delta(\omega)}_{\text{ANTITRASFORMATA}} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi = 1$$

$$\boxed{1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, \delta(\omega)}$$ DUALITÀ SEGNALE COSTANTE $\longleftrightarrow$ DELTA

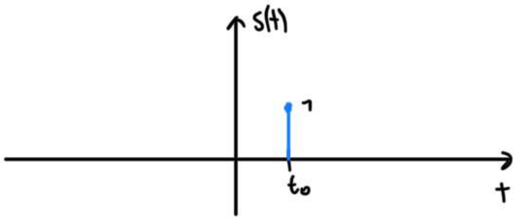
Es 1

Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali

a) **Sinc** $s(t) = \text{sinc}(t)$
b) **Rettangolo** scalato $s(t) = \text{rect}(t/T)$
c) **Sinc** scalato $s(t) = \text{sinc}(t/T)$
d) Segnale **costante** $s(t) = 1$
e) **Delta traslato** $s(t) = \delta(t-t_0)$

ESERCIZIO 1e

$s(t) = \delta(t-t_0)$
$S(j\omega) = ?$



$$x(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 = X(j\omega)$$

$$s(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$ PROPRIETÀ DI TRASLAZIONE

$$S(j\omega) = 1\, e^{-j\omega t_0} \quad = e^{-j\omega t_0}$$

[IN QUESTO CASO ERA PIÙ SEMPLICE DA FARE COSÌ

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$]

ESERCIZIO 1F

$s(t) = e^{j\omega_1 t} \cdot 1$
$S(j\omega) = ?$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega)$$

$$1 \cdot e^{j\omega_1 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1) = S(j\omega)$$ REGOLA DI MODULAZIONE

[CONTROLLO PER ANTITRASFORMATA

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\, e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)\, e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_1 t}$$ V]

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}$$

$$e^{j\omega_1 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)$$ DUALITÀ DELTA $\longleftrightarrow$ SEGNALE ESPONENZIALE TRASLATO

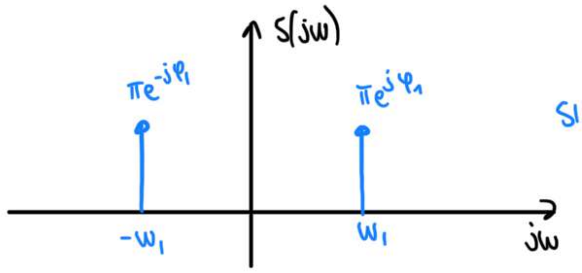
ESERCIZIO 1G

$$s(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$S(j\omega) = ?$$

SOL. IDEA: riscrivo il coseno con Eulero

$$s(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \frac{e^{j\varphi_1}}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{2} e^{-j\omega_1 t}$$

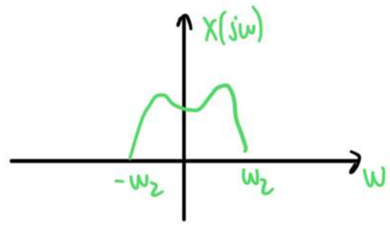
$$S(j\omega) = \frac{e^{j\varphi_1}}{2} 2\pi \delta(\omega - \omega_1) + \frac{e^{-j\varphi_1}}{2} 2\pi \delta(\omega - \omega_1)$$



SIMMETRIA HERMITIANA

ESERCIZIO 1J

$$s(t) = x(t)\underbrace{\cos(\omega_1 t)}_{\frac{1}{2}e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_1 t}}$$



$$s(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_1 t}$$

$$\downarrow \mathcal{F} \quad \downarrow \mathcal{F} \quad \downarrow \mathcal{F}$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega - \omega_1)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + \omega_1))$$