Esercizi Tutorato Algebra

chiara.malerba@studenti.unipd.it

a.a. 2022/2023

Esercitazione del 25 Maggio 2023

- Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Si determinino i valori di a e b per i quali le matrici A e B sono simili
  - Per i valori di a e b trovati nel primo punto, si determini una matrice invertibile P tale che $A = PBP^{-1}$

- Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, e'

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  Si dimostri che g e' non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D =^t PGP$.

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di una matrice (rispetto alle basi canoniche):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

  Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$g(v) \cdot w = v \cdot f(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3$$

  - Calcolare $g(2, 3, 1)$.
  - Scrivere la matrice di g rispetto alle basi canoniche.
  - Determinare una base di $Ker(f)$ e una base di $Im(f)$.

- Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale) sia V il sottospazio generato dai vettori di $v_1 = (2, 0, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 1)$ e $v_3 = (1, -2, -1, 0)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.

- Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (1, -1, 2, 3)$ e sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U.

  - Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.
  - Utilizzando il procedimento di Gram-Schimdt, si trasformi la base trovata nel punto primo in una base ortogonale.
  - Dato il vettore $v = (3, -1, 5, 2)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v = v_1 + v_2$.
  - Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi e' il nucleo di f?