Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin

4º Appello — 8 febbraio 2010

Esercizio 1. (a) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 2, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ e $w_1 = (2, 0, 1)$, $w_2 = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$, si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle w_1, w_2 \rangle$. Se una tale funzione esiste si dica se essa è unica e se ne determini il rango. Si scriva inoltre la matrice di una tale f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si consideri il vettore $w = (t, 2, -1)$. Si stabilisca per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ si ha $w \in \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(e_1 + e_2) = e_1 + e_2 + e_3 + 2e_4 \qquad f(e_3 + e_4) = 2e_1 + 4e_2 + 2e_3 - e_4$$
$$f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 + e_3 - 2e_4 \qquad f(e_3 - e_4) = 2e_1 - 4e_2 + 2e_3 + e_4$$

ove e_1, e_2, e_3, e_4 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si stabilisca se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.
(b) Si determini una base ortogonale di V (se essa esiste).
(c) Si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.
(d) Si stabilisca se in V esistono vettori isotropi.

Esercizio 4. (a) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche. Dato il vettore $u = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$, si determini $f^{-1}(u)$. La funzione f è invertibile?
(b) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 1, 1)$ e $C = (0, 2, 2)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.
(b) Dato il punto $D = (5, -3, 12)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π.
(c) Si verifichi che il punto H appartiene alla retta r passante per A e B.
(d) Si determini la distanza del punto C dalla retta r passante per A e B.
(e) Dato il piano $\sigma : 2x + y - z = 1$, si determini l'angolo formato dai piani π e σ.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin

4$^{\text{o}}$ Appello — 8 febbraio 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(e_1 + e_2) = 2e_1 + 5e_2 + 2e_3 - 4e_4 \qquad f(e_3 + e_4) = -e_1 + 2e_2 - e_3 - e_4$$
$$f(e_1 - e_2) = 2e_1 - 5e_2 + 2e_3 + 4e_4 \qquad f(e_3 - e_4) = -e_1 - 2e_2 - e_3 + e_4$$

ove e_1, e_2, e_3, e_4 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si stabilisca se f è diagonalizzabile.

Esercizio 2. (a) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche. Dato il vettore $u = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$, si determini $f^{-1}(u)$. La funzione f è invertibile?
(b) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, 1, -1)$, $B = (2, 2, 1)$ e $C = (1, 3, 0)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C.
(b) Dato il punto $D = (6, 3, 1)$, si determini la sua proiezione ortogonale H sul piano π.
(c) Si verifichi che il punto H appartiene alla retta r passante per A e B.
(d) Si determini la distanza del punto C dalla retta r passante per A e B.
(e) Dato il piano $\sigma : 3x - y + 2z = 1$, si determini l'angolo formato dai piani π e σ.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica se g è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.
(b) Si determini una base ortogonale di V (se essa esiste).
(c) Si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.
(d) Si stabilisca se in V esistono vettori isotropi.

Esercizio 5. (a) Dati i vettori $v_1 = (0, 2, 1, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$ e $w_1 = (3, 1, 0)$, $w_2 = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$, si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle w_1, w_2 \rangle$. Se una tale funzione esiste si dica se essa è unica e se ne determini il rango. Si scriva inoltre la matrice di una tale f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si consideri il vettore $w = (t, -1, 2)$. Si stabilisca per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ si ha $w \in \mathrm{Im}(f)$.