ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \Big\{x \in \mathbb{R},\ \ x-2 \neq 0\Big\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{x-2}) & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ \arctan(\frac{-x}{x-2}) = -\arctan(\frac{x}{x-2}) & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{x-2} > 0 \iff x > 2, \qquad \text{mentre} \qquad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{x-2} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x < 2.$$

Dalla relazione (1) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-2}}{=} \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-2}}{=} \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-2}}{=} \lim_{y\to 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-2}}{=} \lim_{y\to-1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

In particolare ne deduciamo che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R}\backslash\{0,2\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\Big(\arctan(\frac{x}{x-2})\Big)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x^2+(x-2)^2};$$

pertanto, per (1), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{x^2+(x-2)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ \\ \dfrac{2}{x^2+(x-2)^2} & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ne deduciamo: $\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \mp\frac{1}{2}$ e quindi $f'_+(0) = -\frac{1}{2}$, $f'_-(0) = \frac{1}{2}$. Di consequenza, f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente decrescente in $(0, 2)$ ed in $(2, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è punto di minimo locale, $f(0) = 0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

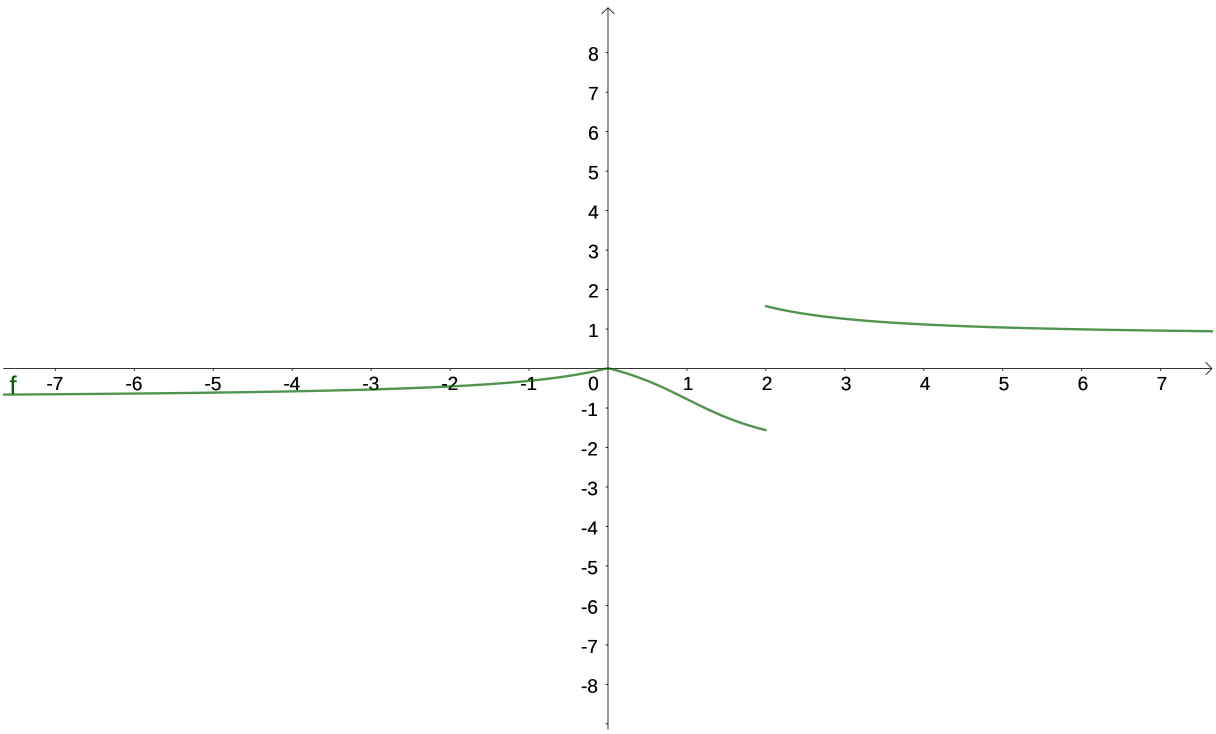

Figure 1: La funzione del Tema 1

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 2)^k}{k^2+3}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\log a+2)^k}{k^2+3} = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(\log a+2)^k}{k^2+3}\right| = 0 \iff |\log a + 2| \leq 1;$$

pertanto la condizione necesssaria è verificata se, e solo se, $e^{-3} \leq a \leq e^{-1}$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left|\frac{(\log a+2)^k}{k^2+3}\right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a+2|^k}{k^2+3}. \tag{3}$$

Per $|\log a+2| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (3) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a + 2| \leq 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a+2|^k}{k^2+3} \leq \frac{1}{k^2+3}$$

e quindi la serie in (3) converge per confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+3}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2+3} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \to \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a + 2| \leq 1$ cioé per $e^{-3} \leq a \leq e^{-1}$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-3}$ ed $a = e^{-1}$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-3} \leq a \leq e^{-1}$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cosh x$ dà

$$\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1+u)$ (sostituendovi $u = -\alpha x - x^2$; sostituzione consentita perché $u \to 0$ per $x \to 0^+$) e $\sin x$, abbiamo

$$\log(1-\alpha x - x^2) + \sin x = -\alpha x - x^2 - \frac{(-\alpha x - x^2)^2}{2} + o((-\alpha x - x^2)^2) + x + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x + x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\log(1-\alpha x - x^2) + \sin x = (1-\alpha)x + \left(-1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(1-\alpha)>0\ (\alpha<1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x-x^2)+\sin x}{\cosh x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x+o(x)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = +\infty$$

$$(1-\alpha)<0\ (\alpha>1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x-x^2)+\sin x}{\cosh x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x+o(x)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -\infty$$

$$(1-\alpha)=0\ (\alpha=1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x-x^2)+\sin x}{\cosh x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1-\frac{\alpha^2}{2})x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = -3.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\,dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (*i*). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\sin x+1}\,dx \underset{y=2\sin x+1}{=} \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{2}[\log|y|]_{y=1}^{y=3} = \frac{\log 3}{2}.$$

(*ii*). Abbiamo $f \in C^0((0,1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x=0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0,1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{2\sin x + x^\alpha} = x^{-\alpha}\frac{\cos x}{2x^{-\alpha}\sin x+1}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0,\frac{\pi}{2}]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x\to 0+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.
Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per $\sin x$ e quella per $\cos x$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1+o(x)}{2x+o(x)+x^\alpha} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Quindi per $x \to 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x} \quad \forall\alpha>1, \qquad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x} \quad \text{per } \alpha=1, \qquad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \forall\alpha<1.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha \geq 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{2-x}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \Big\{x \in \mathbb{R},\ \ x - 2 \neq 0\Big\} = \mathbb{R}\backslash\{2\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{2-x}) & \text{se } x > 0, x \neq 2 \\ \arctan(\frac{-x}{2-x}) = -\arctan(\frac{x}{2-x}) & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{2-x} > 0 \iff x < 2, \qquad \text{mentre} \qquad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{2-x} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x > 2.$$

Dalla relazione (4) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{2-x}}{=} \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{2-x}}{=} \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{2-x}}{=} \lim_{y\to-1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{2-x}}{=} \lim_{y\to 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}.$$

In particolare ne deduciamo che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R}\backslash\{0, 2\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\Big(\arctan(\frac{x}{2-x})\Big)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(2-x)^2}} \cdot \frac{2-x+x}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2+(2-x)^2};$$

pertanto, per (4), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+(2-x)^2} & \text{se } x>0, x\neq 2 \\[2ex] \dfrac{-2}{x^2+(2-x)^2} & \text{se } x<0. \end{cases} \tag{5}$$

Ne deduciamo: $\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\frac{1}{2}$ e quindi $f'_+(0) = \frac{1}{2}$, $f'_-(0) = -\frac{1}{2}$. Di consequenza, f non è derivabile in $x=0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente crescente in $(0,2)$ ed in $(2,+\infty)$. In particolare $x=0$ è punto di massimo locale, $f(0)=0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

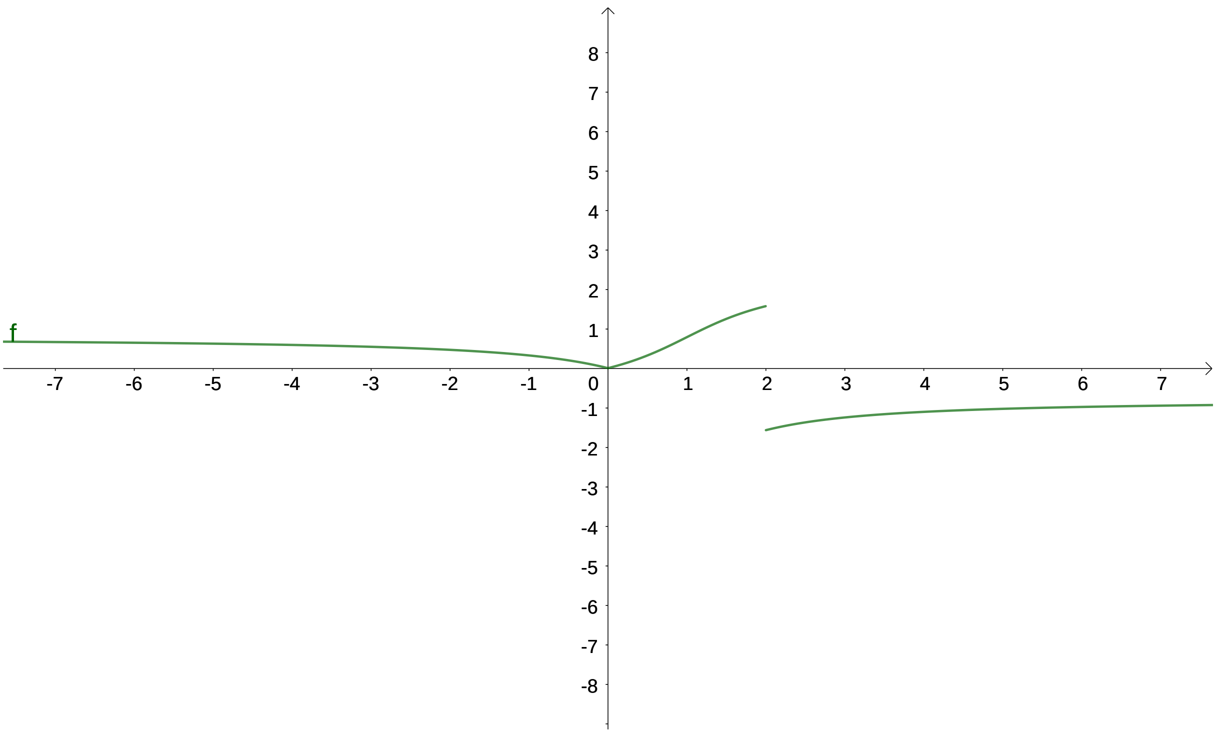

Figure 2: La funzione del Tema 2

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0,+\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a+3)^k}{k^2+2}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\log a+3)^k}{k^2+2} = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(\log a+3)^k}{k^2+2}\right| = 0 \iff |\log a+3| \le 1;$$

pertanto la condizione necesssaria è verificata se, e solo se, $e^{-4} \le a \le e^{-2}$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left|\frac{(\log a+3)^k}{k^2+2}\right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a+3|^k}{k^2+2}. \tag{6}$$

Per $|\log a+3| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (6) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a+3| \le 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a+3|^k}{k^2+2} \le \frac{1}{k^2+2}$$

e quindi la serie in (6) converge per confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+2}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2+2} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \to \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a+3| \le 1$ cioé per $e^{-4} \le a \le e^{-2}$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-4}$ ed $a = e^{-2}$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-4} \le a \le e^{-2}$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cos x$ dà

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1+u)$ (sostituendovi $u = -\alpha x - x^2$; sostituzione consentita perché $u \to 0$ per $x \to 0^+$) e $\sinh x$, abbiamo

$$\log(1-\alpha x - x^2) + \sinh x = -\alpha x - x^2 - \frac{(-\alpha x - x^2)^2}{2} + o((-\alpha x - x^2)^2) + x + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x + x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\log(1-\alpha x - x^2) + \sinh x = (1-\alpha)x + \left(-1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(1-\alpha)>0\ (\alpha<1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x-x^2)+\sinh x}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x+o(x)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -\infty$$

$$(1-\alpha)<0\ (\alpha>1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x-x^2)+\sinh x}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x+o(x)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = +\infty$$

$$(1-\alpha)=0\ (\alpha=1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x-x^2)+\sinh x}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1-\frac{\alpha^2}{2})x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-3}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 3.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\,dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+2}\,dx \underset{y=\sin x+2}{=} \int_2^3 \frac{1}{y}\,dy = [\log|y|]_{y=2}^{y=3} = \log(3/2).$$

(ii). Abbiamo $f \in C^0((0,1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x=0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0,1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha} = x^{-\alpha}\frac{\cos x}{x^{-\alpha}\sin x + 2}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0, \frac{\pi}{2}]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x\to 0+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.

Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per $\sin x$ e quella per $\cos x$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1+o(x)}{x+o(x)+2x^\alpha} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Quindi per $x \to 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x} \quad \forall \alpha > 1, \qquad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{3x} \quad \text{per } \alpha = 1, \qquad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2x^\alpha} \quad \forall \alpha < 1.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 1$ e diverge per $\alpha \geq 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{3-x}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \Big\{x \in \mathbb{R},\ \ x - 3 \neq 0\Big\} = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{3-x}) & \text{se } x > 0, x \neq 3 \\ \arctan(\frac{-x}{3-x}) = -\arctan(\frac{x}{3-x}) & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{7}$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{3-x} > 0 \iff x < 3, \qquad \text{mentre} \qquad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{3-x} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x > 3.$$

Dalla relazione (7) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{3-x}}{=} \lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{3-x}}{=} \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{3-x}}{=} \lim_{y\to-1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{3-x}}{=} \lim_{y\to 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}.$$

In particolare ne deduciamo che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R}\backslash\{0, 3\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\Big(\arctan(\frac{x}{3-x})\Big)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(3-x)^2}} \cdot \frac{3-x+x}{(x-2)^2} = \frac{3}{x^2+(3-x)^2};$$

pertanto, per (7), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^2+(3-x)^2} & \text{se } x>0, x\neq 3 \\ \\ \dfrac{-3}{x^2+(3-x)^2} & \text{se } x<0. \end{cases} \tag{8}$$

Ne deduciamo: $\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\frac{1}{3}$ e quindi $f'_+(0) = \frac{1}{3}$, $f'_-(0) = -\frac{1}{3}$. Di consequenza, f non è derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente crescente in $(0, 3)$ ed in $(3, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è punto di massimo locale, $f(0) = 0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

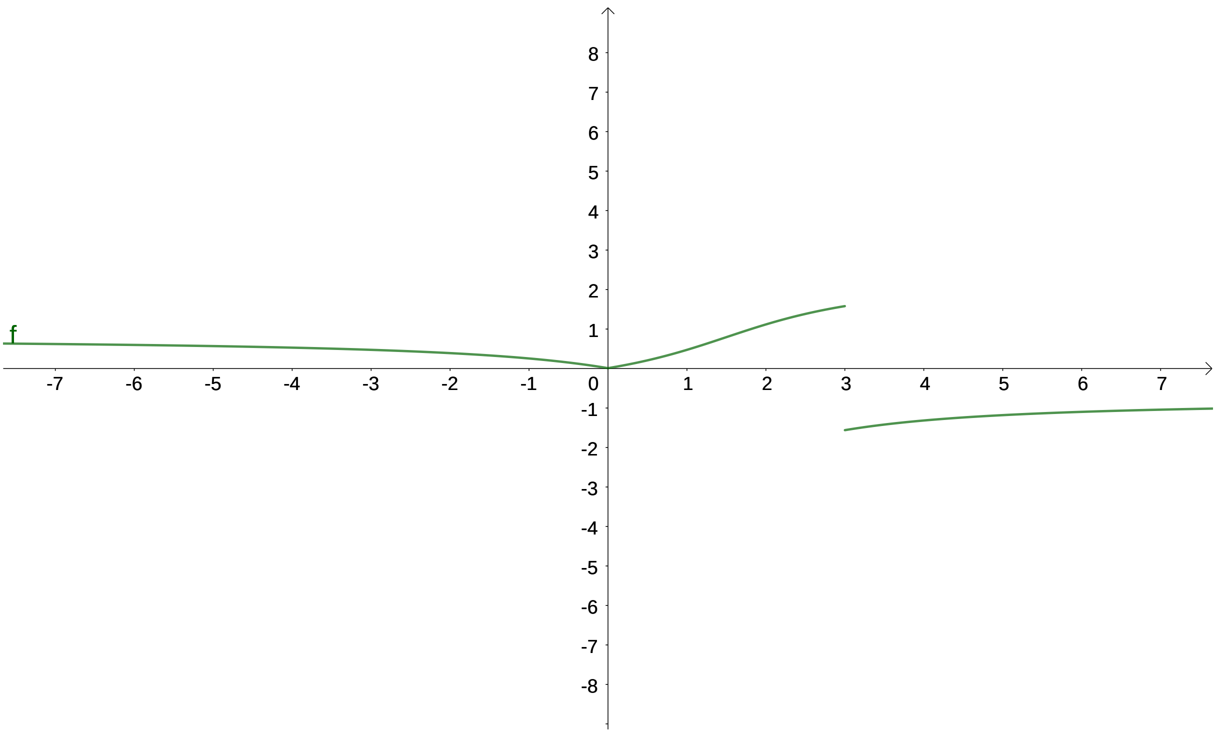

Figure 3: La funzione del Tema 3

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 4)^k}{k^2+1}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\log a+4)^k}{k^2+1}=0 \iff \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(\log a+4)^k}{k^2+1}\right|=0 \iff |\log a+4|\le 1;$$

pertanto la condizione necesssaria è verificata se, e solo se, $e^{-5}\le a\le e^{-3}$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\left|\frac{(\log a+4)^k}{k^2+1}\right|=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|\log a+4|^k}{k^2+1}. \tag{9}$$

Per $|\log a+4|>1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (9) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a+4|\le 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a+4|^k}{k^2+1}\le\frac{1}{k^2+1}$$

e quindi la serie in (9) converge per confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2+1}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2+1}\sim\frac{1}{k^2}$ per $k\to\infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a+4|\le 1$ cioé per $e^{-5}\le a\le e^{-3}$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a=e^{-5}$ ed $a=e^{-3}$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-5}\le a\le e^{-3}$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha>0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sin x}{1-\cosh x}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cosh x$ dà

$$1-\cosh x=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad\text{per } x\to 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1+u)$ (sostituendovi $u=\alpha x+x^2$; sostituzione consentita perché $u\to 0$ per $x\to 0^+$) e $\sin x$, abbiamo

$$\log(1+\alpha x+x^2)-\sin x=\alpha x+x^2-\frac{(\alpha x+x^2)^2}{2}+o((\alpha x+x^2)^2)-x+o(x^2)\qquad\text{per } x\to 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x+x^2)^2)=o(x^2)$ per $x\to 0$, otteniamo

$$\log(1+\alpha x+x^2)-\sin x=(\alpha-1)x+\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)x^2+o(x^2)\qquad\text{per } x\to 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(\alpha-1)>0\ (\alpha>1) \implies \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sin x}{1-\cosh x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\alpha-1)x+o(x)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=-\infty$$

$$(\alpha-1)<0\ (\alpha<1) \implies \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sin x}{1-\cosh x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\alpha-1)x+o(x)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\infty$$

$$(\alpha-1)=0\ (\alpha=1) \implies \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sin x}{1-\cosh x}=\lim_{x\to0^+}\frac{(1-\frac{\alpha^2}{2})x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{-\frac{x^2}{2}}=1.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1+2x^\alpha}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Svolgimento. (*i*). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}\,dx\underset{y=e^x+1}{=}\int_1^{e+1}\frac{1}{y}\,dy=[\log|y|]_{y=1}^{y=e+1}=\log(e+1).$$

(*ii*). Abbiamo $f\in C^0((0,1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x=0$. Inoltre, $f\geq0$ su $(0,1]$. Se $\alpha\leq0$,

$$f_\alpha(x)=\frac{e^x}{e^x-1+2x^\alpha}=x^{-\alpha}\frac{e^x}{x^{-\alpha}(e^x-1)+2}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0,1]$ ponendo $f_\alpha(0)=\lim_{x\to0+}f_\alpha(x)=0$. Ne deduciamo che, per $\alpha\leq0$ l'integrale converge.
Per $\alpha>0$, usando la formula di Maclaurin per e^x, abbiamo

$$f_\alpha(x)=\frac{1+o(x)}{x+o(x)+2x^\alpha}\qquad\text{per } x\to0^+.$$

Quindi per $x\to0^+$,

$$f_\alpha(x)\sim\frac{1}{x}\quad\forall\alpha>1,\qquad f_\alpha(x)\sim\frac{1}{3x}\quad\text{per }\alpha=1,\qquad f_\alpha(x)\sim\frac{1}{2x^\alpha}\quad\forall\alpha<1.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha<1$ e diverge per $\alpha\geq1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),\quad \sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-3}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.

(a). Chiaramente il dominio naturale è

$$D := \left\{x \in \mathbb{R},\ \ x-3 \neq 0\right\} = \mathbb{R}\backslash\{3\}.$$

Notiamo che la legge della funzione può essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{x}{x-3}) & \text{se } x > 0, x \neq 3 \\ \arctan(\frac{-x}{x-3}) = -\arctan(\frac{x}{x-3}) & \text{se } x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Inoltre

$$f(x) > 0 \iff \frac{|x|}{x-3} > 0 \iff x > 3, \qquad \text{mentre} \qquad f(x) = 0 \iff \frac{|x|}{x-3} = 0 \iff x = 0;$$

di conseguenza

$$f(x) < 0 \iff x < 3.$$

Dalla relazione (10) deduciamo che f non è né pari né dispari.

(b). Il calcolo dei limiti della funzione (inclusi gli eventuali asintoti) dà

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-3}}{=} \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-3}}{=} \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-3}}{=} \lim_{y\to 1} \arctan(y) = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{y=\frac{|x|}{x-3}}{=} \lim_{y\to-1} \arctan(y) = -\frac{\pi}{4}.$$

In particolare ne deduciamo che $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e che $y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

(c). Per il teorema sulla derivata della funzione composta e quello sull'algebra delle derivate, la funzione f è $C^1(\mathbb{R}\backslash\{0,3\})$. La derivabilità in $x = 0$ andrà studiata separatamente.

Osserviamo che vale

$$\Big(\arctan(\frac{x}{x-3})\Big)' = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(x-3)^2}} \cdot \frac{x-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-3}{x^2+(x-3)^2};$$

pertanto, per (10), deduciamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3}{x^2+(x-3)^2} & \text{se } x>0, x \neq 3 \\ \\ \dfrac{3}{x^2+(x-3)^2} & \text{se } x<0. \end{cases} \tag{11}$$

Ne deduciamo: $\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \mp\frac{1}{3}$ e quindi $f'_+(0) = -\frac{1}{3}$, $f'_-(0) = \frac{1}{3}$. Di consequenza, f non è derivabile in $x=0$ dove presenta un punto angoloso.

Inoltre f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ mentre è strettamente decrescente in $(0,3)$ ed in $(3,+\infty)$. In particolare $x=0$ è punto di minimo locale, $f(0)=0$, $\sup f(D) = \frac{\pi}{2}$, $\inf f(D) = -\frac{\pi}{2}$. Non vi sono punti di massimo/minimo globali.

(d). Vedi grafico.

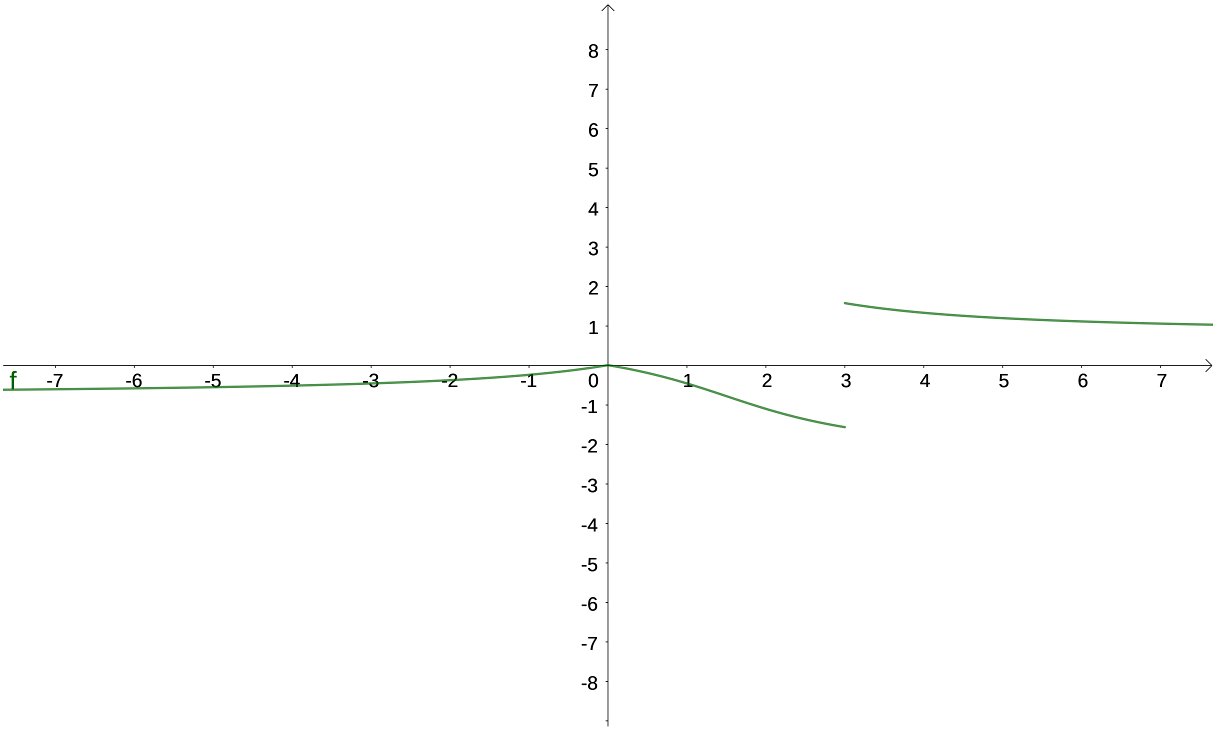

Figure 4: La funzione del Tema 4

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0,+\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a+1)^k}{k^2+4}.$$

Svolgimento. Iniziamo dallo studio della condizione necessaria per la convergenza: per il teorema sulla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\log a+1)^k}{k^2+4} = 0 \iff \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(\log a+1)^k}{k^2+4}\right| = 0 \iff |\log a+1| \le 1;$$

pertanto la condizione necesssaria è verificata se, e solo se, $e^{-2} \le a \le 1$.

Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left|\frac{(\log a+1)^k}{k^2+4}\right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|\log a+1|^k}{k^2+4}. \tag{12}$$

Per $|\log a+1| > 1$, la condizione necessaria non è verificata quindi la serie in (12) diverge (e la serie iniziale non può convergere semplicemente). Invece, per $|\log a+1| \le 1$, abbiamo

$$\frac{|\log a+1|^k}{k^2+4} \le \frac{1}{k^2+4}$$

e quindi la serie in (12) converge per confronto con la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2+4}$ (che è convergente perché $\frac{1}{k^2+4} \sim \frac{1}{k^2}$ per $k \to \infty$). Tenendo anche conto che la convergenza assoluta implica quella semplice, la serie iniziale è sia assolutamente che semplicemente convergente per $|\log a+1| \le 1$ cioé per $e^{-2} \le a \le 1$.

[Da notare: per lo studio della convergenza assoluta si sarebbero potuti applicare efficacemente sia il criterio del rapporto asintotico che quello della radice asintotico; in entrambi i casi, i due valori critici $a = e^{-2}$ ed $a = 1$ sarebbero dovuti essere trattati separatamente.]

Poichè i valori di a per cui è soddisfatta la condizione necessaria coincidono con quelli per cui si ha la convergenza assoluta, non possono esistere valori di a per cui si ha la convergenza semplice ma non quella assoluta.

In conclusione la serie iniziale converge assolutamente per $e^{-2} \le a \le 1$ e converge semplicemente per gli stessi valori.

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x+x^2) - \sinh x}{1-\cos x}.$$

Svolgimento. La formula di Maclaurin per $\cos x$ dà

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Questo suggerisce di sviluppare al secondo ordine anche il numeratore. Usando le formule di Maclaurin per $\log(1+u)$ (sostituendovi $u = \alpha x + x^2$; sostituzione consentita perché $u \to 0$ per $x \to 0^+$) e $\sinh x$, abbiamo

$$\log(1+\alpha x+x^2) - \sinh x = \alpha x + x^2 - \frac{(\alpha x+x^2)^2}{2} + o((\alpha x+x^2)^2) - x + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Osservando che vale $o((\alpha x+x^2)^2) = o(x^2)$ per $x \to 0$, otteniamo

$$\log(1+\alpha x+x^2) - \sinh x = (-1+\alpha)x + \left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Abbiamo quindi i seguenti casi

$$(-1+\alpha)>0\ (\alpha>1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sinh x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1+\alpha)x+o(x)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = +\infty$$

$$(-1+\alpha)<0\ (\alpha<1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sinh x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1+\alpha)x+o(x)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = -\infty$$

$$(-1+\alpha)=0\ (\alpha=1) \implies \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x+x^2)-\sinh x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\frac{\alpha^2}{2})x^2+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{1-\cos x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\,dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Usando il metodo di integrazione per sostituzione abbiamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{-\cos x+2}\,dx \underset{y=-\cos x+2}{=} \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = [\log|y|]_{y=1}^{y=2} = \log 2.$$

(ii). Abbiamo $f \in C^0((0,1])$; quindi l'integrale è improprio nel solo punto $x=0$. Inoltre, $f \geq 0$ su $(0,1]$. Se $\alpha \leq 0$,

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin x}{1-\cos x+x^\alpha} = x^{-\alpha}\frac{\sin x}{x^{-\alpha}-x^{-\alpha}\cos x+1}$$

quindi f_α può essere estesa per continuità su $[0,\frac{\pi}{2}]$ ponendo $f_\alpha(0) = \lim_{x\to 0+} f_\alpha(x) = 0$. Ne deduciamo che, per $\alpha \leq 0$ l'integrale converge.

Per $\alpha > 0$, usando la formula di Maclaurin per $\sin x$ e quella per $\cos x$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{x+o(x)}{x^2/2+o(x^2)+x^\alpha} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Quindi per $x \to 0^+$,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{2}{x^2}\quad \forall \alpha>2, \qquad f_\alpha(x) \sim \frac{2}{3x^2}\quad \text{per } \alpha=2, \qquad f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}}\quad \forall\alpha<2.$$

Per il criterio del confronto asintotico concludiamo che l'integrale iniziale converge per $\alpha < 2$ e diverge per $\alpha \geq 2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$