COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
22 Giugno 2012

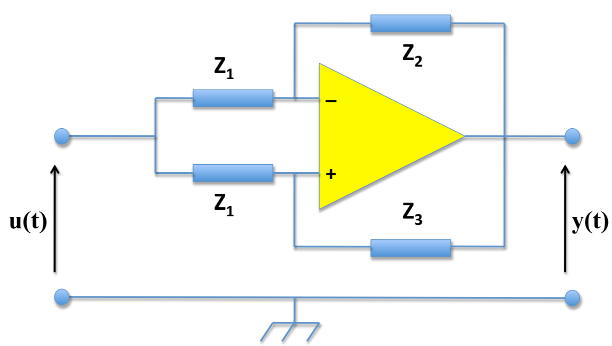
Esercizio 1. (punti 10) Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 100\,\frac{s^2+1}{s(s+0.1)(s-10)^2}.$$

1. Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema (**punti 4.5**);

2. Si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$ (**Nota.** Non è richiesto il calcolo esplicito di asintoti e/o intersezioni con gli assi) (**punti 5.5**).

Esercizio 2. (punti 9) Si consideri il seguente schema, in cui $Z_1(s), Z_2(s), Z_3(s)$ sono generiche impedenze



1. Nell'ipotesi di operazionale ideale, si calcoli la FDT $W_{id}(s)$ (**punti 2**);

2. Nell'ipotesi di operazionale reale caratterizzato da $Y(s) = K[V_+(s) - V_-(s)]$ $(K > 0)$, e nel caso particolare in cui $Z_1(s)$ sia una resistenza di valore R, mentre $Z_2(s)$ e $Z_3(s)$ siano condensatori di capacità C e αC rispettivamente, con $RC = 1$ e $\alpha > 0$, si calcoli la FDT $W_r(s)$ (**punti 3.5**);

3. Si studi la stabilità di $W_r(s)$ per K molto elevato (ma comunque finito), al variare del parametro $\alpha > 0$. Cosa cambierebbe in tale analisi se si scambiassero i morsetti $+$ e $-$? (**punti 3.5**).

Esercizio 3. (punti 7) Dato il processo di FDT

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$$

si progettino 2 compensatori stabilizzanti, $C_1(s)$ e $C_2(s)$, soddisfacenti le seguenti specifiche: entrambi devono garantire che il tipo sia 1 e l'errore di regime permanente alla rampa lineare sia $e_{rp} = 0.01$, ed inoltre

1. $C_1(s)$ garantisca $\omega_a \simeq 0.1$ rad/s e $m_\phi \simeq 90^o$ (**punti 3.5**);
2. $C_2(s)$ sia di tipo PID e garantisca $\omega_a \simeq 1000$ rad/s e $m_\phi \simeq 90^o$ (**punti 3.5**).

Teoria. (solo per 9 CFU) (punti 5)

1. Si definiscano i concetti di tipo e relativo errore di regime permanente di un generico sistema di funzione di trasferimento $W(s)$ (**punti 2**);
2. Si dimostri, a scelta, **UNA** delle seguenti caratterizzazioni (**punti 3**):
   - che, per un generico sistema di FDT $W(s)$, il tipo e l'errore di regime permanente sono esprimibili in termini di $W(0), W^{(1)}(0), \ldots$, per sistemi di tipo $0, 1$ e 2;
   - che, per un sistema di FDT $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da un sistema di funzione di trasferimento $G(s)$(così che $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$), il tipo e l'errore di regime permanente sono esprimibili in termini del numero di integratori (poli nell'origine) presenti in $G(s)$.

   Nota. É **facoltativo** dimostrare entrambe le caratterizzazioni precedenti. Chi riesce a dimostrarle entrambe, prende (al massimo) **punti 1** in più (cioé tale esercizio teorico puó arrivare fino a **punti 6**).

Esercizio 4. (solo per 7 CFU) (punti 7) Data

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+2}$$

é richiesto di

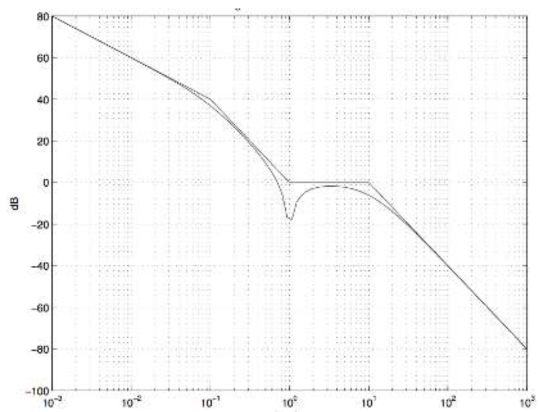
1. Tracciare il luogo delle radici positivo, individuando asintoti e punti doppi (**punti 3**);
2. Determinare le intersezioni del luogo con l'asse immaginario, e discutere quindi per quali valori di $K > 0$ l'anello chiuso è stabile (**punti 2**);
3. Determinare per quali valori di K l'anello chiuso è privo di modi oscillatori **punti 1**);
4. Quando l'anello chiuso ha almeno un polo a parte reale nulla, individuare i suoi modi (**punti 1**).

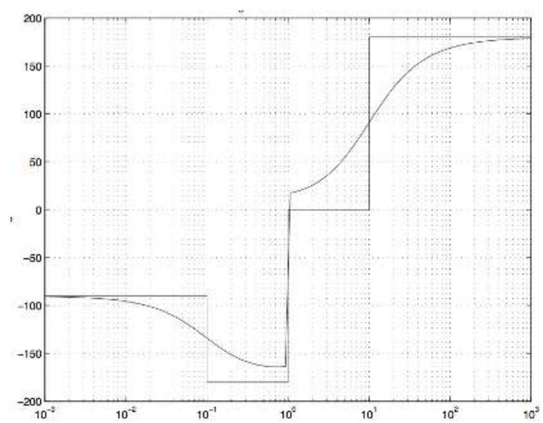
Nota. I punti in gioco sono lievemente sovrabbondanti per 7 CFU (rispetto a 9 CFU). Verrá quindi operato un (lievissimo) scalamento per rendere il totale pari a 31.5 invece che a 33 punti (chi fa il compito da 9 CFU puó al massimo ottenere 31 o 32 a seconda che faccia o meno la domanda facoltativa sull'esercizio di teoria).

SOLUZIONI

Esercizio 1.

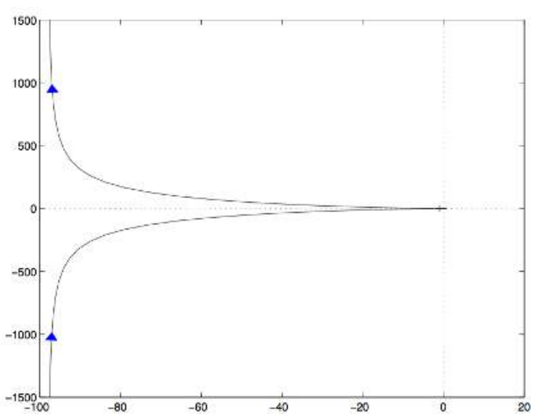
1. **[4.5 punti]** È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:
$$G(s) = 10\,\frac{1+s^2}{s\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1-\frac{s}{10}\right)^2}.$$
Pertanto $K_B = 10$ e la risposta in frequenza presenta un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$), un polo reale negativo in $-10^{-1} = -0.1$ ($1/T_1 = 0.1$ e $\mu_1 = 1$), un polo reale positivo doppio in 10 ($1/T_2 = -10$ e $\mu_2 = 2$) ed una coppia di zeri immaginari coniugati con $\omega'_n = 1$ (e $\xi = 0$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

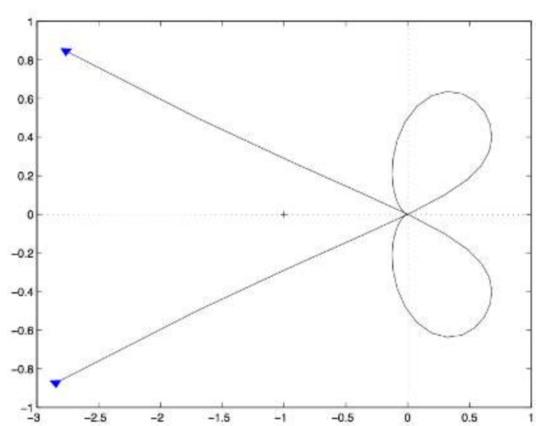




Per motivi numerici il picco (verso il basso) in corrispondenza alla pulsazione $\omega = 1$ rad/s appare finito mentre è infinito, in quanto $|G(j1)| = 0$ e quindi $|G(j1)|_{dB} = -\infty$.

2. **[5.5 punti]** Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è (assieme ad un suo dettaglio in prossimità del cerchio unitario):





Aggiungendo il semicerchio orario all'infinito dovuto al polo in $s = 0$, si vede chiaramente come il diagramma di Nyquist non compie giri attorno a $-1 + j0$, ovvero $N = 0$. Poichè $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = 0$ implica $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. Calcoliamo prima $V_+(s)$ e $V_-(s)$. Dal bilancio delle correnti sul nodo + si trova

$$\frac{U(s) - V_+(s)}{Z_1(s)} = \frac{V_+(s) - Y(s)}{Z_3(s)}$$

che porta a

$$V_+(s) = \frac{Z_3(s)U(s) + Z_1(s)Y(s)}{Z_1(s) + Z_3(s)}.$$

In modo assolutamente analogo si ottiene

$$\frac{U(s) - V_-(s)}{Z_1(s)} = \frac{V_-(s) - Y(s)}{Z_2(s)}$$

che porta a

$$V_-(s) = \frac{Z_2(s)U(s) + Z_1(s)Y(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)}.$$

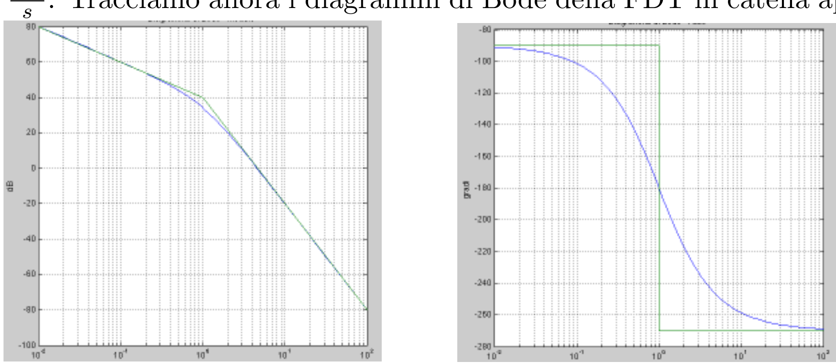
1. **[2 punti]** Nel caso ideale, ponendo $V_+(s) = V_-(s)$, si ottiene facilmente $Y(s) = U(s)$, da cui $W_{id}(s) = 1$.

2. **[3.5 punti]** Nel caso reale, sostituendo $Z_1(s) = R, Z_2(s) = \frac{1}{sC}, Z_3(s) = \frac{1}{\alpha sC}$, ricordando $RC = 1$ e ponendo $Y(s) = K[V_+(s) - V_-(s)]$ si ottiene, dopo alcuni conti e ricordando che $RC = 1$,

$$W_r(s) = \frac{K(1-\alpha)s}{\alpha s^2 + [(1+\alpha) + (1-\alpha)K]s + 1}.$$

3. **[3.5 punti]** Per K elevato, il segno del termine di I grado al denominatore è positivo se $\alpha \leq 1$, mentre è negativo se $\alpha > 1$. Dalla regola dei segni di Cartesio si ha BIBO stabilità per $\alpha \leq 1$, instabilità altrimenti. Lo scambio dei morsetti equivale ad operare lo scambio $K \leftrightarrow -K$, con il che le conclusioni sulla BIBO stabilità sarebbero quasi opposte: stabilità per $\alpha \geq 1$ ed instabilità altrimenti.

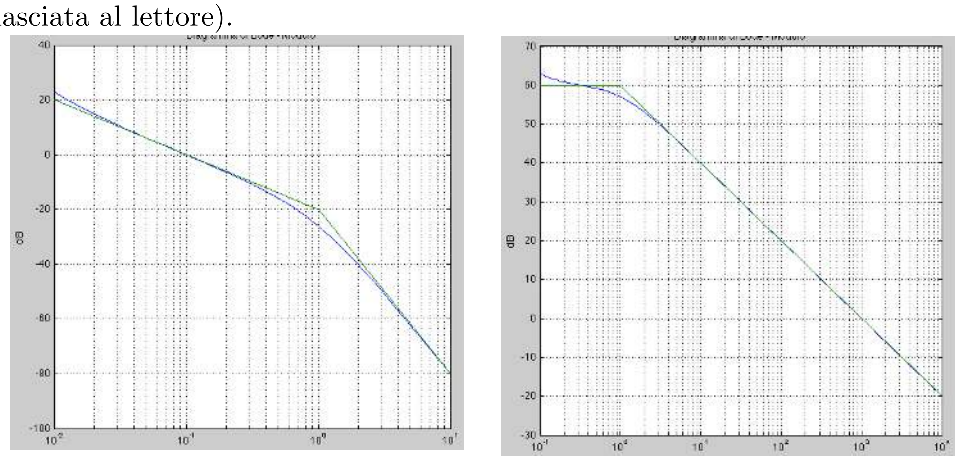
Esercizio 3. In entrambi i casi le richieste su tipo ed e_{rp} impongono la presenza di un polo in 0 e di un guadagno pari a 100 nel controllore. Ciò fa sì che il controllore presenti un fattore $\frac{100}{s}$. Tracciamo allora i diagrammi di Bode della FDT in catena aperta $\frac{100}{s}G(s)$



1. **[3.5 punti]** Nel primo caso, per garantire che $\omega_a = 0.1$ rad/s, il modulo va abbassato di 60db in corrispondenza a tale pulsazione, così che il diagramma (asintotico e reale) dei moduli attraversi lì l'asse delle ascisse (a 0 dB). Se l'attraversamento avviene con pendenza di -20 dB/dec, il margine di fase è già a posto. A tal fine è sufficiente utilizare una rete ritardatrice, con la coppia polo-zero distante 3 decadi, posizionata prima di ω_a. Ad esempio
$$C_1(s) = \frac{100}{s}\frac{1+100s}{1+10^5 s}$$
ve bene.

2. **[3.5 punti]** Nel secondo caso la struttura del PID è già assegnata: $C_2(s) = \frac{K_i}{s}(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)$, dove la costante K_i deve valere 100 per le considerazioni precedenti. Quindi si tratta di aggiungere 2 zeri di modo che si soddisfi il doppio requisito di aumentare di 180^o il margine di fase e di 140db il modulo in $\omega = 1000$ rad/s. Per la fase basta che i 2 zeri siano prima di 1000, dopodiché esistono infiniti modi di collocare la coppia di zeri. Ad esempio si può mettere uno zero in -0.1 ed uno in -1, il che corrisponde al controllore
$$C_2(s) = \frac{100}{s}(1+10s)(1+s).$$

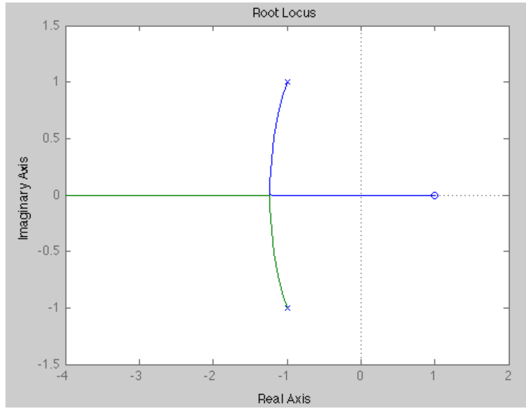
In figura i diagrammi di Bode del modulo per $C_i(s)G(s),\ i = 1,2$ (la verifica sul margine di fase è lasciata al lettore).



Teoria. [2 + 3 + (1) punti] Vedi libro (pag. 164-165-166 e pag. 243-244).

Esercizio 4.

1. **[3 punti]** L'equazione dei punti doppi $s^2 - 2s - 4 = 0$ porge le 2 soluzioni $s = 1+\sqrt{5} > 0$ (cui corrisponde il valore $K = -2(2+\sqrt{5}) < 0$, quindi non accettabile) e $s = 1-\sqrt{5} \simeq -1.24 < 0$ (cui corrisponde il valore $K = 2(\sqrt{5}-2) \simeq 0.47 > 0$, quindi accettabile). L'asintoto è il semiasse reale negativo, da cui il luogo di figura



2. **[2 punti]** Cercando le intersezioni con l'asse immaginario, $d(i\omega)+Kn(i\omega)=0$ porge $(2-K-\omega^2)+i\omega(K+2)=0$, da cui $K=2-\omega^2$ e $\omega(K+2)=0$. La seconda ($K\geq 0$) implica $\omega=0$ che, sostituita nella seconda, porge $K=2$. Quindi si attraversa l'asse in $s=0$ per $K=2$. Si ha quindi stabilità per $0\leq K<2$

3. **[punti 1]** Fino a $K=2(\sqrt{5}-2)\simeq 0.47$ si hanno rami complessi, quindi modi oscillatori sono assenti per $K\geq 0.47$

4. **[punti 1]** Per $K=2$ (unico valore per cui il luogo interseca l'asse immaginario) si ha $d(s)+Kn(s)=d(s)+2n(s)=s(s+4)$, da cui i modi $1=e^{0t}$ e e^{-4t}