

**COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI**  
**Ingegneria dell'Informazione**  
**1 Settembre 2015**

**Esercizio 1.** [9.5 punti] Dato il sistema a tempo-continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{(1 + 0.01s^2)(s + 1)}{s^2(1 - 0.02s + 0.01s^2)(1 + 0.01s)},$$

se ne traccino i diagrammi di Bode e Nyquist. Si studi, inoltre, la stabilità BIBO di  $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$  utilizzando il Criterio di Nyquist, e si individui il numero di poli a parte reale positiva di  $W(s)$ .

**Esercizio 2.** [10 punti] Data la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante:

$$G(s) = \frac{(s + 6)^2}{s(s + 1)^2},$$

è richiesto di tracciare i luoghi positivo e negativo, determinando punti doppi (valori approssimati), asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, e deducendo quindi per quali valori reali di  $K$  il sistema retroazionato è BIBO-stabile.

**Esercizio 3.** [6 punti] Data

$$G(s) = \frac{10}{(s + 1)^2}$$

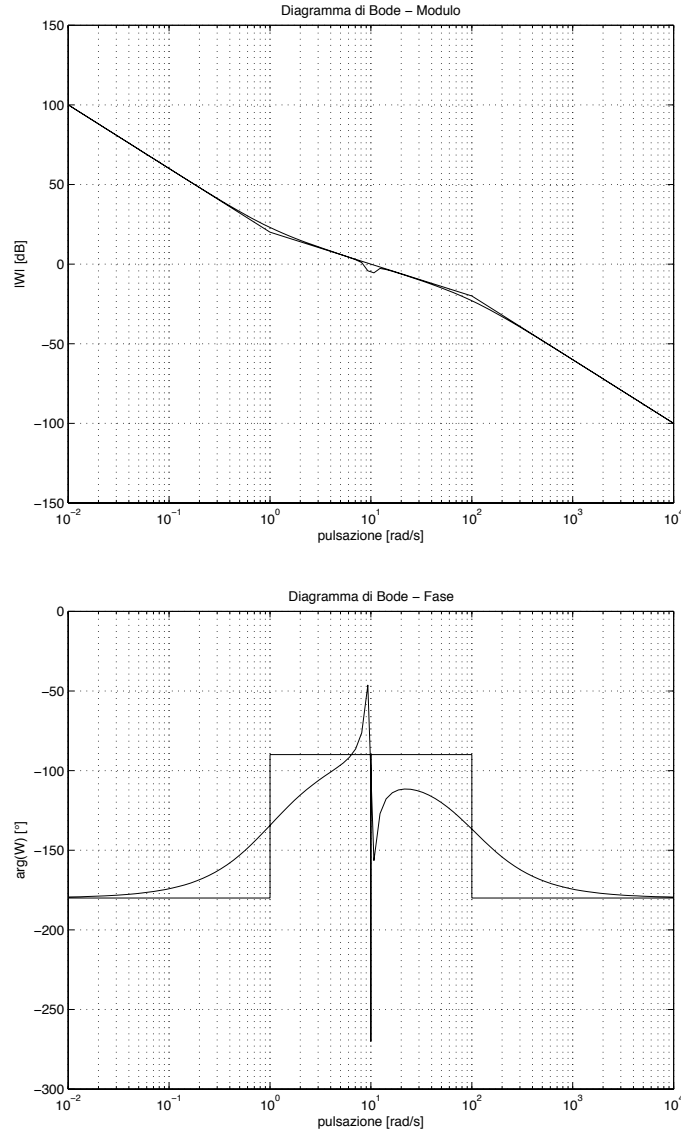
è richiesto il progetto di due controllori stabilizzanti,  $C_1(s)$  e  $C_2(s) \in \mathbb{R}(s)$ , in modo tale che

- $C_1(s)$  sia proprio e garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con  $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.01$  al gradino, mentre il sistema in catena aperta abbia  $\omega_a \simeq 1$  rad/s,  $m_\phi \simeq 45^\circ$ ;
- $C_2(s)$  sia un PID (eventualmente un P, PI o PD) e garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1, con  $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.001$  alla rampa lineare, mentre il sistema in catena aperta abbia  $\omega_a \simeq 100$  rad/s,  $m_\phi \simeq 90^\circ$ .

**Teoria.** [5 punti] Assumendo noto il Teorema dell'Indicatore Logaritmico, si enunci e dimostri il criterio di stabilità di Nyquist nella sua formulazione più restrittiva. Quindi si spieghino, senza dimostrazione, le modifiche da apportare qualora il diagramma di Nyquist vada all'infinito e/o passi per il punto critico  $s = -1$ .

# SOLUZIONI

## Esercizio 1. Diagrammi di Bode:



Il diagramma dei moduli esibisce un picco di antirisonanza infinito (anche se il diagramma in questione lo mostra finito e molto piccolo!) per  $\omega = 10$  rad/s. Esso scende con pendenza  $-40$  dB/decade da  $+\infty$  (per  $\omega = 0^+$ ) fino a 20 dB (in corrispondenza di  $\omega = 1$  rad/s, dove la pendenza cambia e diventa di  $-20$  dB/decade), poi scende fino a  $-\infty$  (per  $\omega = 10$  rad/s). Da lì risale e, raggiunto un massimo relativo (che rimane sotto la linea degli 0 dB), ridiscende verso  $-\infty$  (diagramma asintotico rettilineo di pendenza prima  $-20$  dB/decade e poi  $-40$  dB/decade, a partire da  $\omega = 100$  rad/s). Invece la fase parte da  $-180^\circ$ , sale fino a quasi  $0^\circ$  in  $\omega = 10$  rad/s, dove una discontinuità la porta quasi a  $-180^\circ$ , per poi risalire un po' e portarsi infine a regime al valore di  $-180^\circ$ . I diagrammi di Bode sopra riportati sono estremamente scadenti, presumibilmente per problemi numerici. Per

questa ragione riportiamo di seguito anche i diagrammi reali forniti da Matlab senza gli asintotici, dove l'andamento di modulo e fase sono molto più precisi:

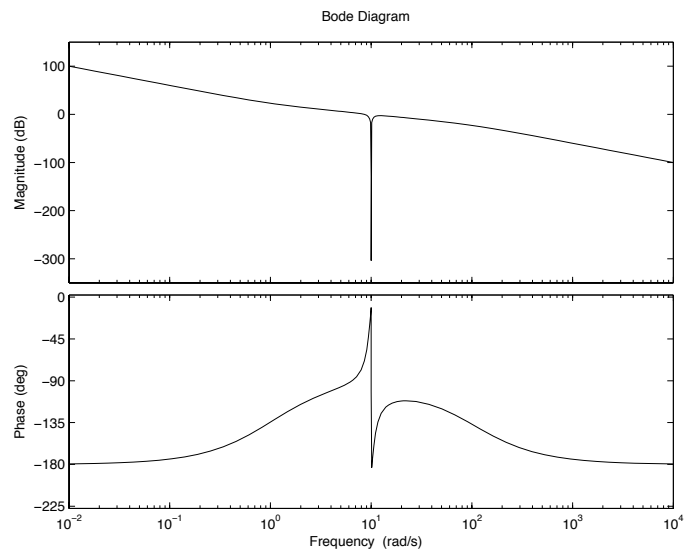
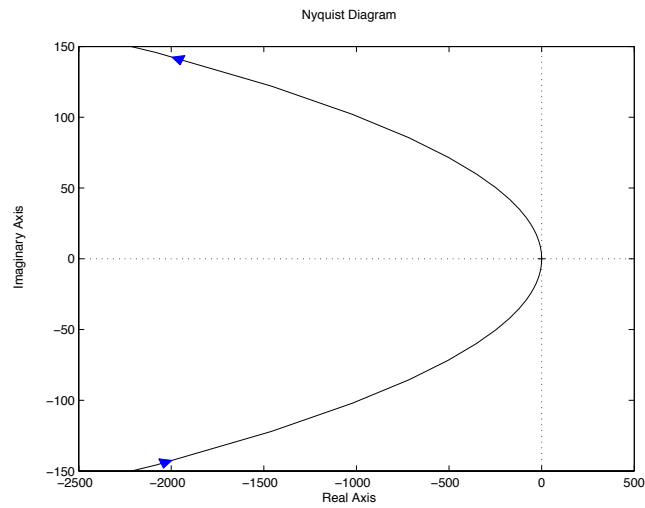
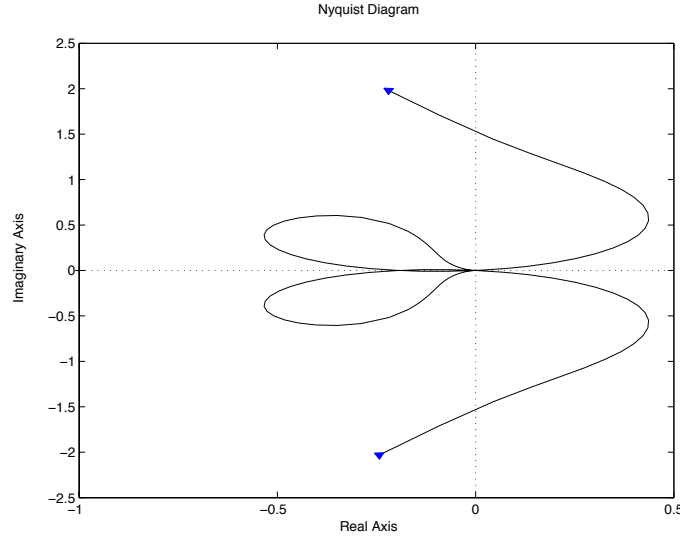


Diagramma di Nyquist e suo particolare:





Essendo  $N = 0$  e  $n_{G_+} = 2$ , non si ha stabilità BIBO ( $n_{W_+} = 2$ ).

**Esercizio 2.** L'equazione dei punti doppi conduce facilmente a

$$(s + 1)(s + 6)(s^2 + 17s + 6) = 0$$

da cui, oltre alle soluzioni *banali*  $s = -1$  (per  $K = 0$ ) e  $s = -6$  (per  $K = \infty$ ), si hanno le due soluzioni reali

$$s = -\frac{17 + \sqrt{265}}{2} \simeq -16.64, \quad s = -\frac{17 - \sqrt{265}}{2} \simeq -0.36.$$

Poichè l'unico tratto dell'asse reale che appartiene al luogo positivo è banalmente il semi-asse reale negativo (quello positivo appartiene al luogo negativo), entrambi i punti doppi determinati appartengono al luogo positivo. Gli asintoti sono pure i due semiassi reali (uno per ciascun luogo), e per determinare le intersezioni con l'asse immaginario basta imporre

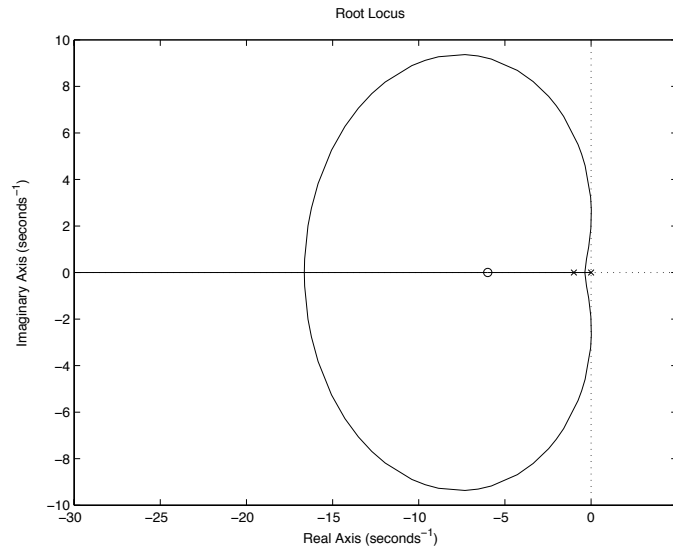
$$j\omega(1 + j\omega)^2 + K(6 + j\omega)^2 = 0 \Rightarrow j\omega(1 + 12K - \omega^2) + [36K - \omega^2(K + 2)] = 0.$$

La parte immaginaria si annulla per  $\omega = 0$  e per  $\omega^2 = 1 + 12K$ . Sostituendo ciascuna di queste espressioni nella parte reale, si ottiene nel primo caso  $K = 0$  (corrispondente a  $\omega = 0$ ), e nel secondo  $12K^2 - 11K + 2 = 0$ , che porge le soluzioni  $K = \frac{1}{4}$  (che corrisponde a  $\omega = \pm 2$ ) e  $K = \frac{2}{3}$  (che corrisponde a  $\omega = \pm 3$ ). Quindi determiniamo tre intersezioni, quella *banale* corrispondente alla partenza di un ramo di entrambi i luoghi dall'origine per  $K = 0$ , e due ulteriori intersezioni che riguardano il luogo positivo. Concludendo:

- nel luogo negativo, un ramo va semplicemente da  $s = 0$  verso  $s = +\infty$  muovendosi sull'asse reale, mentre gli altri due rami si muovono con simmetria coniugata nel piano complesso, spostandosi da  $s = -1$  verso  $s = -6$ , e senza mai intersecare l'asse immaginario (dall'analisi precedente), quindi abbiamo sempre due poli di  $W(s)$  a parte reale negativa ma uno reale positivo, il che preclude la stabilità BIBO;

- nel luogo positivo, due rami si muovono sull'asse reale uno verso l'altro, partendo da  $s = 0$  ed  $s = -1$  ed incontrandosi nel punto doppio  $s \simeq -0.36$ , poi i due rami escono nel piano complesso con simmetria coniugata, e tagliano una prima volta l'asse immaginario in  $s = \pm 2j$  per  $K = \frac{1}{4}$ , poi lo tagliano una seconda volta in  $s = \pm 3j$  per  $K = \frac{2}{3}$ , ed infine si dirigono verso il punto doppio  $s \simeq -16.64$ , dopodichè i rami si muovono sull'asse reale, uno verso lo zero  $s = -6$  e l'altro verso  $s = -\infty$ . Infine, il terzo ramo si muove semplicemente sull'asse reale da  $s = -1$  verso  $s = -6$ . È chiaro che c'è stabilità BIBO sia per  $0 < K < \frac{1}{4}$ , che per  $K > \frac{2}{3}$ , visto che solo in tali casi i tre rami sono tutti a sinistra dell'asse immaginario<sup>1</sup>.

Nel seguito vediamo il luogo positivo (siccome il valore massimo assunto dalla parte reale è pari a circa 0.02, il luogo appare molto schiacciato sull'asse immaginario e non si riesce a visualizzare l'effettivo doppio attraversamento dell'asse immaginario stesso)



ed il luogo negativo:

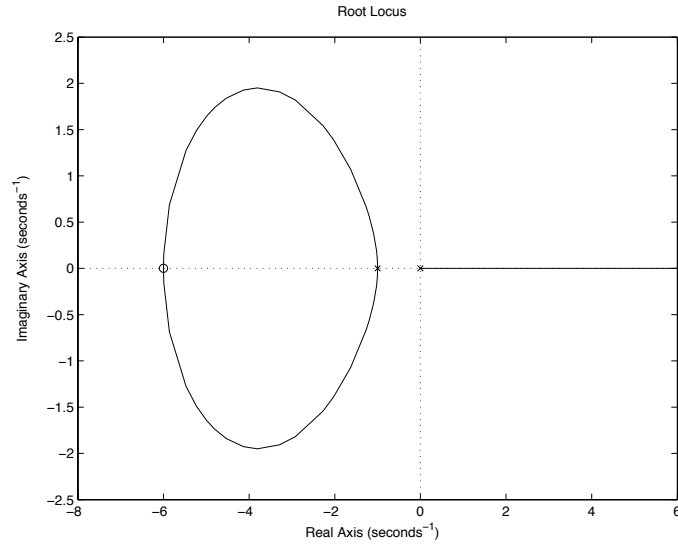
<sup>1</sup>**Parte non richiesta:** per essere certi che  $W(s)$  sia invece instabile per  $\frac{1}{4} \leq K \leq \frac{2}{3}$ , dovremmo essere certi che l'asse immaginario sia effettivamente attraversato, visto che a priori si potrebbe toccare l'asse immaginario con tangente verticale, rimanendo sempre a sinistra di questo. Per ragioni di continuità, è sufficiente analizzare cosa accade in un qualunque valore di  $K$  intermedio, ad esempio  $K = \frac{1}{2}$ . In tal caso si ha

$$W(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2 + \frac{1}{2}(s+6)^2} = \frac{(s+6)^2}{s^3 + \frac{5}{2}s^2 + 7s + 18}$$

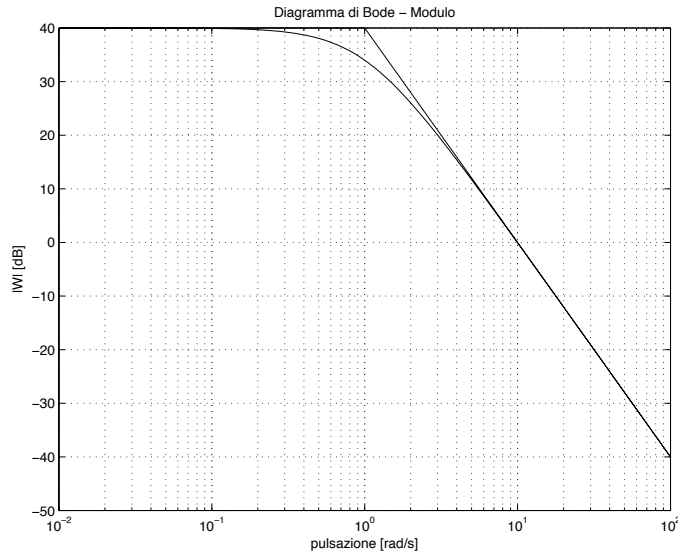
ed applicando Routh al polinomio  $s^3 + \frac{5}{2}s^2 + 7s + 18$  si trova la tabella

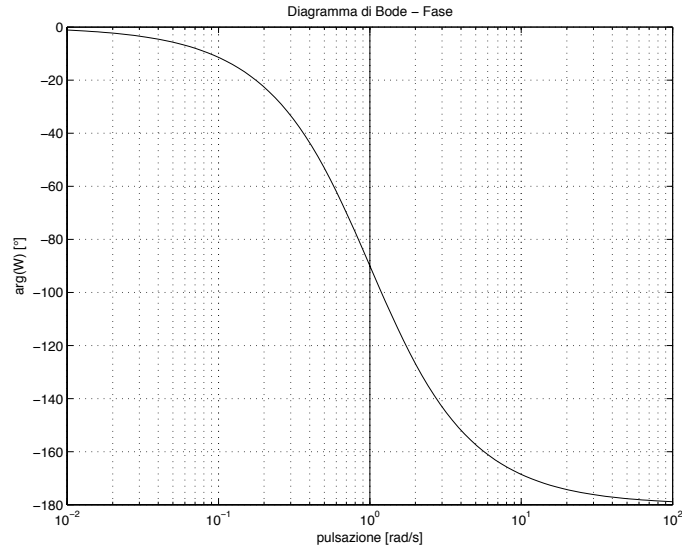
$$\begin{array}{cc} 1 & 7 \\ \frac{5}{2} & 18 \\ -\frac{1}{5} & \\ 18 & \end{array}$$

che conferma la presenza di due poli instabili (a parte reale positiva) oltre che di un polo reale negativo.



**Esercizio 3.** Il primo compensatore richiede  $C'_1(s) = 10$  per l'errore al gradino, e il diagramma di Bode di  $10G(s)$  evidenzia una pulsazione di attraversamento  $\omega_a \simeq 10$  rad/s ed un margine di fase  $m_\phi$ , alla pulsazione di attraversamento desiderata, pari a circa  $90^\circ$ .

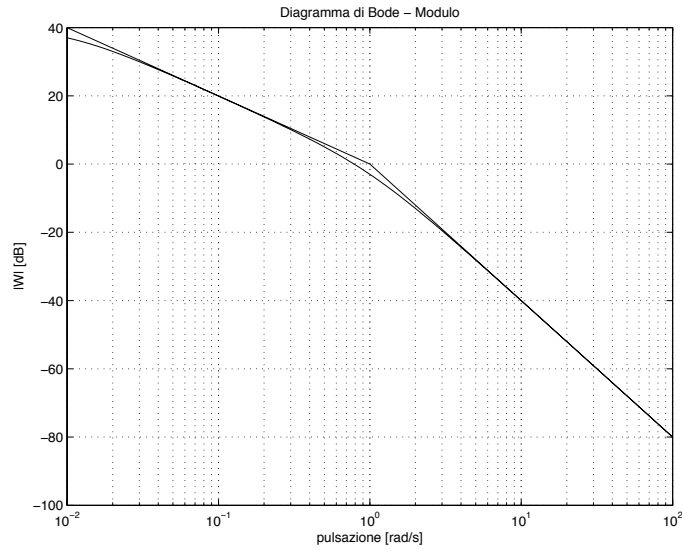


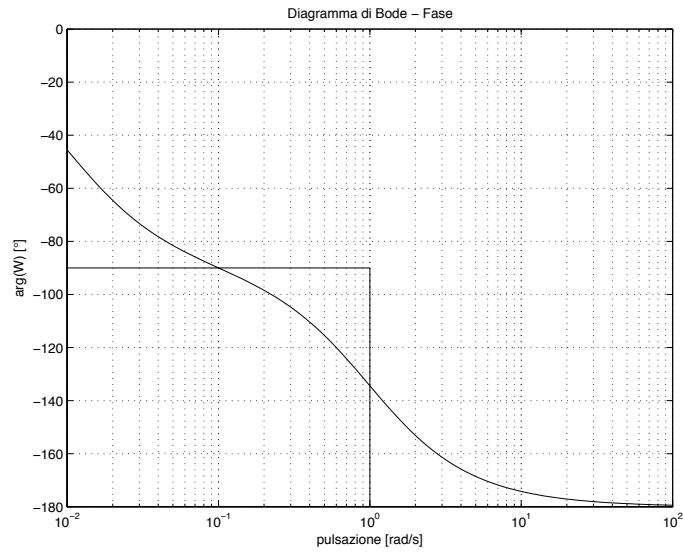


Serve una rete ritardatrice per diminuire  $\omega_a$  e diminuire anche  $m_\phi$ . Posizionando il polo due decadi prima di  $\omega_a^{DES}$ , ed uno zero in  $\omega_a^{DES}$  (per il requisito sulla fase, ed inducendo una cancellazione zero-polo ammissibile), si ottiene quanto richiesto. Il compensatore finale risulta perciò

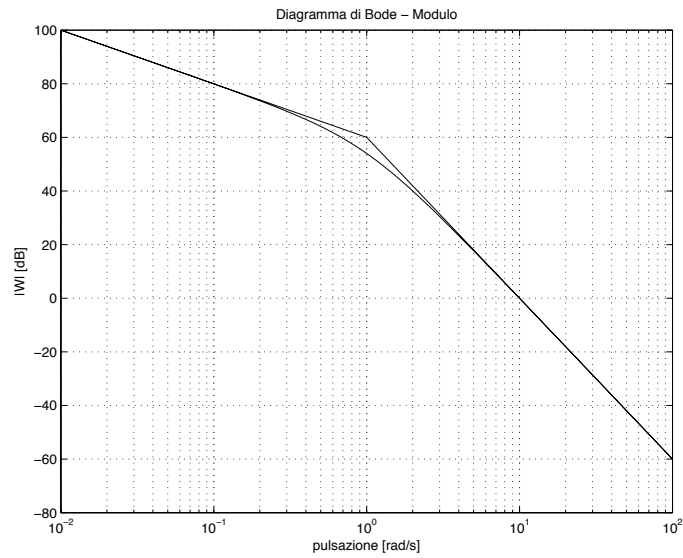
$$C_1(s) = 10 \frac{1+s}{1+100s} \Rightarrow C_1(s)G(s) = 100 \frac{1}{(1+s)(1+100s)}$$

e la stabilità BIBO è garantita dal criterio di Bode.

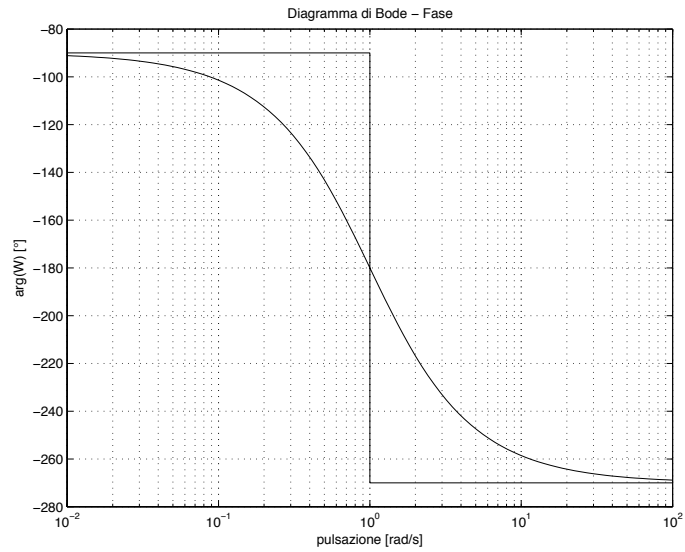




Per progettare  $C_2(s)$ , occorre anzitutto assumere  $C'_2(s) = \frac{100}{s}$ , e il diagramma di Bode di  $\frac{100}{s}G(s)$  evidenzia  $\omega_a \simeq 10$  rad/s ed un margine di fase addirittura negativo (quasi  $-90^\circ$ ).



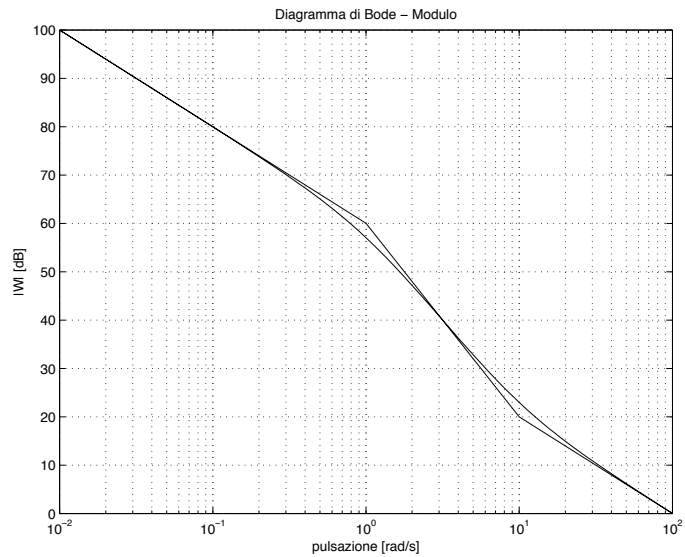


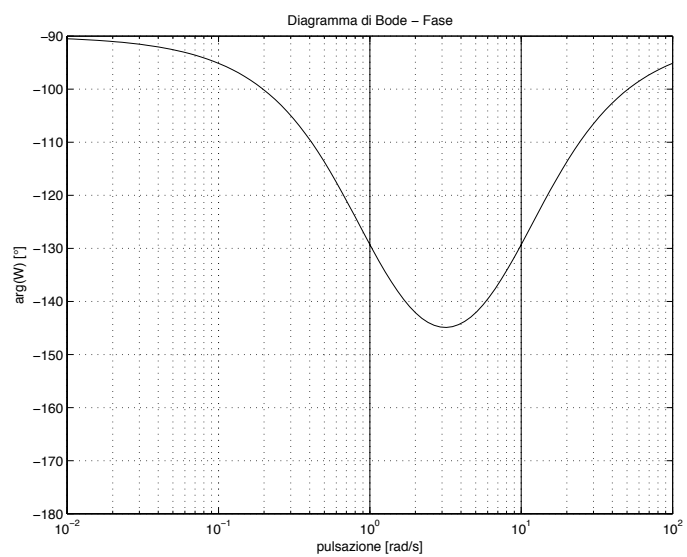


Posizionando uno zero in modo da indurre una cancellazione zero-polo ammissibile, è facile rendersi conto che l'altro zero deve essere piazzato in  $s = -10$ . Quindi una possibile soluzione è

$$C_2(s) = 100 \frac{(1+s) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{s} \Rightarrow C_2(s)G(s) = 1000 \frac{1 + \frac{s}{10}}{s(1+s)}.$$

Il criterio di Bode è applicabile e garantisce la stabilità BIBO.





**Teoria.** Si veda il Libro di Testo (II Edizione), pag. 411-413.