Quiz 4

Domanda **1**

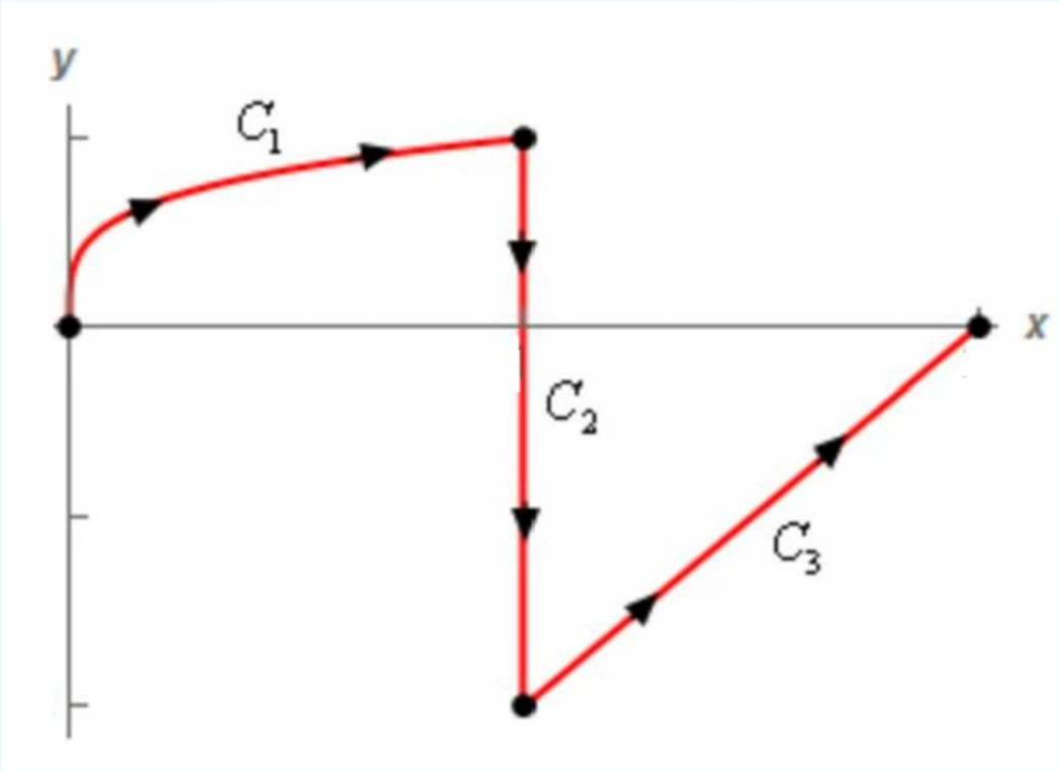
Risposta corretta

Contrassegna domanda

Siano :

- C_1 la curva cartesiana $x = 7y^4, y \in [0,1]$;
- C_2 il segmento verticale da $(7,1)$ a $(7,-14)$;
- C_3 il segmento da $(7,-14)$ a $(14,0)$.

Il disegno qui sotto è puramente indicativo.



Calcolare l'integrale in ds di $9y^5$ sulla *giustapposizione* dei tre cammini C_1, C_2, C_3, dato da

$$\int_{C_1} 9y^5\,ds + \int_{C_2} 9y^5\,ds + \int_{C_3} 9y^5\,ds.$$

Scegliere l'*approssimazione* (non troncatura) migliore del risultato.

- -23921690,198961 ✔
- -29343457,350040
- Altro
- -12857879,118545
- -16941426,447687
- -16941453,000000
- -23958832,598906

$C_1: x = 7y^4,\ y \in [0,1]$
$C_2: (7,1) \to (7,-14)$
$C_3: (7,-14) \to (14,0)$

CALCOLARE $\int_{C_1} 9y^5\, ds + \int_{C_2} 9y^5\, ds + \int_{C_3} 9y^5\, ds$

SOL. L'INTEGRALE SULLA GIUSTAPPOSIZIONE DEI 3 CAMMINI È DATO DA:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} N(r(t))\,|r'(t)|\, dt}$$

1) $\boxed{C_1}$: $r_1 = (7y^4, y)$, $y \in [0,1]$
$r_1' = (28y^3, 1)$
$|r_1'| = \sqrt{28^2 y^6 + 1} = \sqrt{784y^6+1}$

$$\Rightarrow \int_{C_1} 9y^5 \sqrt{784y^6+1}\, dy = \int_0^1 9y^5 \sqrt{784y^6+1}\, dy = 9\int_0^1 y^5 \sqrt{784y^6+1}\, dy$$

$$= \frac{9}{4704}\int_1^{785} \sqrt{t}\, dt = \frac{9}{4704}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{785} = \frac{1}{784}\left(785\sqrt{785} - 1\right)$$

PONGO: $\begin{cases} t = 784y^6+1 \\ dt = 4704y^5+1 \end{cases}$

2) $\boxed{C2}$: PARAMETRIZZO r_2: $r_2(t) = (7,y)$, $y \in [1,-14]$
$r_2'(t) = (0,1)$
$|r_2'(t)| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

$$\Rightarrow \int_{-14}^{1} 9y^5 = 9\int_{-14}^{1} y^5 = \left[\frac{9y^6}{6}\right]_{-14}^{1} = \frac{9}{16} - \frac{9 \cdot 14^6}{6} = -\frac{22\,588\,605}{2}$$

[IN TEORIA DOVREBBE ESSERE DA 1 A -14, MA SE FACESSI COSÌ NON VIENE. INVECE, SE FACCIO DA -14 A 1 VIENE ALLA PERFEZIONE. NON SO IL PERCHÉ, AVEVO CHIESTO A VARGIOLU DURANTE LA CORREZIONE, TUTTAVIA NON HA SAPUTO DARMI UNA RISPOSTA]

3) $\boxed{C3}$: PER PARAMETRIZZARE r_3 DEVO TROVARE L'EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER $A=(7,-14)$ E $B=(14,0)$.
DEVO DETERMINARE m e q

$\boxed{m}$: $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{14}{7} = 2$

$\boxed{q}$: $y = 2x + q$
$\to y - 2x = q \to q = -28$
SOST. PUNTO B

→ L'EQUAZIONE DELLA RETTA È: $y = -2x - 28 \rightarrow x = -\frac{y}{2} - 14$

$$r_3(t) = \left(-\frac{y}{2} - 14, y\right), \quad y \in [-14, 0]$$
$$r_3'(t) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$
$$|r_3'(t)| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\rightarrow \int_{-14}^{0} 9y^5 \sqrt{\frac{5}{4}}\, dy = \left[9\sqrt{\frac{5}{4}}\, \frac{y^6}{6}\right]_{-14}^{0} = -9\sqrt{\frac{5}{4}}\, \frac{14^6}{6} = -5\,647\,152\sqrt{5}$$

ORA SOMMO I 3 RISULTATI:

$$\int_{C_1} 9y^5 + \int_{C_2} 9y^5 + \int_{C_3} 9y^5 = -23921690,198961$$ ✓

Domanda 2
Risposta corretta
Contrassegna domanda

Rispondere alle seguenti domande.

Un campo C^1 irrotazionale su un dominio è conservativo	FALSO	✔
Un campo continuo radiale su $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è conservativo.	VERO	✔
L'integrale di un campo su un cammino coincide con l'integrale dello stesso campo sul cammino inverso	FALSO	✔
Un campo continuo conservativo è un campo gradiente	VERO	✔
Siano $F, G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ due campi, con F conservativo. Allora $F + G$ è conservativo se e solo se G è conservativo.	VERO	✔
Un campo continuo gradiente è conservativo	VERO	✔

Your answer is correct.

1) FALSO: PER LA PROPOSIZIONE 5.8, UN CAMPO CONSERVATIVO + C^1 È IRROTAZIONALE, MA IL VICEVERSA IN GENERALE È FALSO. LO È SE D È UN APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO.

2) VERO:

3) FALSO: $\int_a^b F\,dr = -\int_b^a F\,dr$ È L'INVERSO

4) VERO: PER PROPOSIZIONE 5.7, UN CAMPO CONTINUO È CONSERVATIVO $\Longleftrightarrow$ È UN CAMPO GRADIENTE

5) VERO:

6) VERO: PER PROPOSIZIONE 5.7

Domanda **3**
Risposta corretta
Contrassegna domanda

Sia $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ campo C^1 **irrotazionale**. Quali delle seguenti affermazioni sono vere, indipendentemente dal campo dato? Si perde 25% per risposta errata.

Scegli una o più alternative:

- [ ] a. La circuitazione di F sul disco di centro l'origine e raggio 1 è uguale zero
- [ ] b. F è conservativo
- [x] c. F è conservativo sul semipiano $x > 0$ ✔
- [x] d. La circuitazione di F sul disco di centro (2,2) e raggio 1 è uguale zero ✔
- [ ] e. F è un campo gradiente

Your answer is correct.

Le risposte corrette sono: La circuitazione di F sul disco di centro (2,2) e raggio 1 è uguale zero
, F è conservativo sul semipiano $x > 0$

Risposta corretta

Punteggio di questo invio: 0,50/0,50.

$F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ CAMPO C^1 IRROTAZIONALE

a. FALSO: NON E' DETTO CHE IL CAMPO SIA CONSERVATIVO
b. FALSO: STESSO MOTIVO
c. VERO: PERCHE' SE F: C^1 IRROTAZ. SU UN APERTO D SEMPLICEMENTE CONNESSO E' LOCALMENTE CONSERVATIVO
d. VERO: F E' LOCALMENTE CONSERVATIVO IN QUEL SOTTOINSIEME
e. FALSO: F NON E' LOCALMENTE CONSERVATIVO IN QUEL SOTTOINSIEME

Question **4**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $F(x,y) = \left(\frac{7(y^2-x^2)-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2(x^2-y^2)-14xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$.

Sia poi $r(t) = (\cos t, 10\sin^2 t), t \in [0, \pi/2]$. Calcolare l'integrale di F su r.

Answer:

Check

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{7(y^2-x^2)-4xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2(x^2-y^2)-14xy}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad , \quad r(t) = (\cos t, 10\sin^2 t), t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

CALCOLARE INTEGRALE DI F SU r

SOL. 1) OSSERVO CHE F E' UN CAMPO GRADIENTE, PERCHE' E' SCRITTO NELLA FORMA DI UNA DERIVATA DI UNA PRIMITIVA. INFATTI CON IL METODO DELLE INTEGRAZIONI PARZIALI BISOGNA TROVARE UNA FUNZIONE U TALE CHE:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(U) = F_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y}(U) = F_2(x,y) \end{cases}$$

2) TROVIAMO QUESTA PRIMITIVA U DI $F(x,y)$: O FACCIO L'INTEGRALE DI $F(x,y)$ IN dx E POI dy (MA E' ABBASTANZA DIFFICILE), OPPURE NOTO CHE E' LA DERIVATA DI UN RAPPORTO E VADO A OCCHIO:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)}{g(x)}\right] = \frac{F'(x)g(x) - F(x)g'(x)}{g^2(x)} \longrightarrow$$

DEDUCO CHE: $g(x) = x^2+y^2$
$F(x) = 7x+2y$

QUINDI LA PRIMITIVA E': $U = \frac{7x+2y}{x^2+y^2}$ (SE DERIVO U RISPETTO A X E Y OTTENGO $F(x,y)$ DI PARTENZA)

[SE NON VEDO LA PRIMITIVA AD OCCHIO: BISOGNA FARE UN SISTEMA. LA PRIMITIVA U E' NELLA FORMA:

$$U = \frac{F(x)+h(y)}{x^2+y^2} = \frac{ax+by}{x^2+y^2}$$

ORA FACCIO UN SISTEMA CON LE DERIVATE AL NUMERATORE PER TROVARE a E B:

$$\begin{cases} a(x^2+y^2) - (ax+by)2x = 7y^2-7x^2-4xy \\ b(x^2+y^2) - (ax+by)2y = 2x^2-2y^2-14xy \end{cases}$$

CONSIDERO I QUADRATI:

$$\rightarrow \begin{cases} ax^2+ay^2-2ax^2-2bxy = 7y^2-7x^2-4xy \\ bx^2+by^2-2by^2-2axy = 2x^2-2y^2-14xy \end{cases}$$

$ax^2+ay^2-2ax^2 = 7y^2-7x^2$
$\rightarrow a(-x^2+y^2) = 7(-x^2+y^2) \rightarrow a=7$

$\rightarrow$ SE $bx^2+by^2-2by^2 = 2x^2-2y^2$
$\rightarrow b(x^2-y^2) = 2(x^2-y^2) \rightarrow b=2$]

3) APPLICO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEI CAMPI GRADIENTI: (TEOREMA 5.1 p. 97)

$$\boxed{\int_r F \cdot dr = U[r(b)] - U[r(a)]}$$

$$\Rightarrow \int_r F \cdot dr = U\left[r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - U[r(0)] = \left[\frac{7\cos t + 2(10\sin^2 t)}{\cos^2 t + 100\sin^4 t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7\overset{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 2\left[10\overset{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right]}{\underset{0}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 100\underset{1}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)}} - \frac{7\overset{1}{\cos(0)} + 2[10\overset{0}{\sin(0)}]}{\underset{1}{\cos^2(0)} + 100\underset{0}{\sin^4(0)}} = \frac{2\cdot 10}{100} - 7 = -6.8$$

Question 5 Not complete Marked out of 1.00 Flag question	Sia $F(x, y) = (6x^5 - 7y\sin(7xy), -7x\sin(7xy))$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Sia poi $r(t) = (t^9\log((e-1)t+1) + 18, 729\pi t)$, $t \in [0, 1]$. Calcolare l'integrale di F su r. Suggerimento: può essere utile per semplificare (ma in nessun modo obbligatorio!) scrivere il campo come somma di due campi opportuni... Answer: Check

$\vec{F}(x,y) = [6x^5 - 7y\sin(7xy), -7x\sin(7xy)]$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$r(t) = (t^9 \log[(e-1)t+1] + 18, 729\pi)$, $t \in [0,1]$

SOL. IL PIANO È INTEGRARE PRIMA IN dx E POI IN dy PER TROVARE UNA PRIMITIVA DI F, E POI USARE IL TEOREMA FONDAMENTALE DEI CAMPI GRADIENTE

1) TROVO UNA PRIMITIVA DI $\vec{F}$:

dx: $\int 6x^5 - 7y\sin(7xy)\, dx = x^6 + \cos(7xy) + k(y)$

dy: $\int -7x\sin(7xy)\, dy = \cos(7xy) + h(x)$

$h(x)$ È UNA FUNZIONE CHE DIPENDE SOLO DA x, QUINDI LA SUA DERIVATA RISPETTO A y È 0. IN QUESTO CASO, $h(x) = x^6$

$\Rightarrow$ LA PRIMITIVA È: $U = x^6 + \cos(7xy)$

2) USO IL TEOREMA FONDAMENTALE DEI CAMPI GRADIENTI (TEOREMA 5.1 p. 97)

$$\boxed{\int_r F \cdot dr = U(r(b)) - U(r(a))}$$

- $r(1) = (19, 729\pi)$
- $r(0) = (18, 0)$

$$\Rightarrow \int F \cdot dr = U(r(1)) - U(r(0)) = 19^6 + \cos(7 \cdot 19 \cdot 729\pi) - [18^6 + \cos(0)]$$

$= 13\,033\,656$ ✓

Question 6

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia

$F(x,y,x) = (10e^x \cos(8yz) + 16x, -80e^x z \sin(8yz), 9\cos(9z) - 80e^x y \sin(8yz))$.

Dopo aver determinato la primitiva U di F tale che $U(0,0,0) = 14$, determinare $U\left(1, 0, \frac{\pi}{18}\right)$.

Suggerimento: può essere utile per semplificare (ma in nessun modo obbligatorio!) scrivere il campo come somma di due campi opportuni...

Answer:

Check

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 10\,e^x \cos(8yz) + 16x \\ -80\,e^x z \sin(8yz) \\ 9\cos(9z) - 80\,e^x y \sin(8yz) \end{pmatrix}$$

DETERMINARE PRIMITIVA $U(0,0,0) = 14$, CALCOLARE $U\left(1, 0, \frac{\pi}{18}\right)$

SOL. 1. DEVO TROVARE UNA PRIMITIVA U TALE CHE $\nabla U = F(x,y,z)$. QUINDI, DEVO INTEGRARE PARZIALMENTE $\vec{F}(x,y,z)$ IN dx, dy, dz

1) $\boxed{dx}$: $\int 10\,e^x \cos(8yz) + 16x \; dx = 10\,e^x \cos(8yz) + 8x^2 + G(y) + h(z) + K$

DEVO AGGIUNGERE DELLE COSTANTI GENERICHE, PERCHÉ LA LORO DERIVATA RISPETTO A x È NULLA

FACCIO UNA VERIFICA: $\frac{\partial}{\partial x}\left[10\,e^x \cos(8yz) + 8x^2 + K(y) + h(z)\right] = 10\,e^x \cos(8yz) + 16x$

2) $\boxed{dy}$: $\int -80\,e^x z \sin(8yz)\, dy = -10\,e^x \int 8z \sin(8yz)\, dy = 10\,e^x \cos 8yz + 8x^2 + h(z) + K$

FACCIO UNA VERIFICA: $\frac{\partial}{\partial y}\left[10\,e^x \cos(8yz) + 8x^2\right] = -10\,e^x \sin(8yz) \cdot 8z$ ✓

3) $\boxed{dz}$: $\int 9\cos(9z) - 80\,e^x y \sin(8yz)\, dz = \sin(9z) + 10\,e^x \cos(8yz) + 8x^2 + K$

FACCIO UNA VERIFICA: $\frac{\partial}{\partial z}\left[10\,e^x \cos(8yz) + 8x^2\right] = -10\,e^x \sin(8yz) \cdot 8y = -80\,e^x y \sin(8yz)$ ✓

$\Rightarrow$ LA PRIMITIVA È $U = \sin(9z) + 10\,e^x \cos(8yz) + 8x^2 + K$. DEVO DETERMINARE K CON LA CONDIZIONE:

$U(0,0,0) = 14 \rightarrow \sin(0) + 10\,e^0 \cos(0) + 0 + K = 14 \rightarrow 10 + K = 14 \rightarrow K = 4$

$\Rightarrow$ LA PRIMITIVA CERCATA È $U = \sin(9z) + e^x \cos(8yz) + 8x^2 + 4$

3) CALCOLO $U\left(1, 0, \frac{\pi}{18}\right) = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{18}\right) + 10\,e^1 \cos\left(8 \cdot 0 \cdot \frac{\pi}{18}\right) + 8 \cdot 1^2 + 4$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10\,e \cos(0) + 4$

$= 1 + 10e + 8 + 4$

$= 10e + 13$

$= 40.1828$ ✓

Question 7

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare l'integrale di $f(x,y) = yx^8 \cos(yx^9)$ su $R := [0,1] \times [1,3]$.

Answer:

Check

$F(x,y) = yx^8 \cos(yx^9)$ SU $R = [0,1] \times [1,3]$

SOL. USO LA FORMULA DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI (TEOREMA 6.1)

$$\boxed{\int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dy\,dx}$$

$$\to \int_1^3 \left[\int_0^1 yx^8 \cos(yx^9)\,dx \right] dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{9} \sin(yx^9) \right]_0^1 dy = \int_1^3 \frac{1}{9} \sin(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{9} \left[-\cos(y) \right]_1^3 = -\frac{1}{9} \cos(3) + \frac{1}{9} \cos(1) = 0.1700$$

V

Question 8

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f : D := [0,7] \times [0,7] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\forall (x,y) \in D \qquad \begin{cases} 8(x-7)^2 \text{ se } x > y, \\ 8(y-7)^2 \text{ se } x \leq y \end{cases}$$

Calcolare l'integrale

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Esprimere il risultato troncando a due decimali.

Answer:

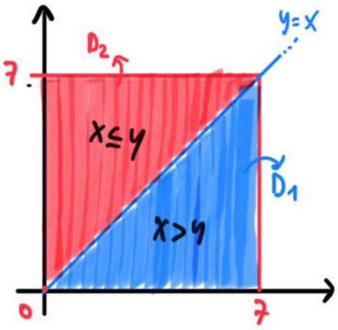
Check

$F: D := [0,7] \times [0,7] \to \mathbb{R}$ DEFINITA DA:

$$\forall (x,y) \in D: \begin{cases} 8(x-7)^2 & \text{se } x > y \\ 8(y-7)^2 & \text{se } x \leq y \end{cases} \quad , \text{ CALCOLARE } \int_D F(x,y)\,dx\,dy$$

SOL. L'INTEGRALE SUL QUADRATO $[0,7] \times [0,7]$ E' DATO DALLA SOMMA DELL'INTEGRALE SUI 2 TRIANGOLI.
($\Rightarrow$ PROPOSIZIONE 6.3.4 PAG. 112, INTEGRALE SU UNIONE DI DOMINI):

$$\boxed{\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} F(x,y)\,dx\,dy + \int_{D_2} F(x,y)\,dx\,dy}$$



$$\to \int_D F(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^7 \int_y^7 \left(8(x-7)^2\right) dx\,dy}_{\substack{D_1:\ x \text{ VA DA } y \text{ A } 7 \\ y \text{ VA DA } 0 \text{ A } 7}} + \underbrace{\int_0^7 \int_x^7 8(y-7)^2\,dy\,dx}_{\substack{D_2:\ y \text{ VA DA } x \text{ A } 7 \\ x \text{ VA DA } 0 \text{ A } 7}}$$

1) $\boxed{D1}$:
$$\int_0^7 \int_y^7 8(x-7)^2\,dx\,dy = \int_0^7 \int_y^7 8(x^2 - 14y + 49)\,dx\,dy = \int_0^7 \int_y^7 8x^2 - 112x + 392\,dx\,dy$$

$$= \int_0^7 \left[\frac{8}{3}x^3 - 112\frac{x^2}{2} + 392x\right]_y^7 dy = \int_0^7 \left[\frac{8}{3}x^3 - 56x^2 + 392x\right]_y^7 dy$$

$$= \int_0^7 \left[\frac{8}{3}7^3 - 56 \cdot 7^2 + 392 \cdot 7 - \frac{8}{3}y^3 + 56y^2 + 392y\right] dy = \int_0^7 \frac{2744}{3} - \frac{8}{3}y^3 + 56y^2 - 392y\,dy$$

$$= \left[\frac{2744}{3}y - \frac{392y^2}{2} + \frac{56y^3}{3} - \frac{8}{3}\frac{y^4}{4}\right]_0^7 = \left[\frac{2744}{3}y - 196y^2 + 56\frac{y^3}{3} - \frac{2}{3}y^4\right]_0^7$$

$$= \frac{2744 \cdot 7}{3} - 196 \cdot 7^2 + \frac{56 \cdot 7^3}{3} - \frac{2 \cdot 7^4}{3} = \frac{4802}{3}$$

2) $\boxed{D2}$:
$$\int_0^7 \int_x^7 8(y-7)^2\,dy\,dx = \int_0^7 \int_x^7 \left[8y^2 - 112y + 392\right] dy\,dx = \int_0^7 \left[\frac{8y^3}{3} - 112\frac{y^2}{2} + 392y\right]_x^7$$

$$= \int_0^7 \frac{2744}{3} - \frac{8}{3}x^3 + 56x^2 - 392x\,dx = \frac{4802}{3}$$

UGUALE A D_1 A LIVELLO DI CALCOLI

IN CONCLUSIONE, $\int_D F(x,y)\,dx\,dy = D_1 + D_2 = \frac{4802}{3} + \frac{4802}{3} = 2 \cdot \frac{4802}{3}$

$= \boxed{3201.33}$ √