

Lezione 3

- ① Si consideri il sistema rappresentato in figura in cui $m_1 = 8 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$, e i coefficienti di attrito dinamico fra le masse e il tavolo sono $\mu_1 = 0.5$ e $\mu_2 = 0.3$ per i corpi 1 e 2, rispettivamente. Le masse sono collegate da cavi inestensibili e di massa nulla. Si supponga che la puleggia abbia massa nulla e sia senza attrito.

1. Trovare il valore della massa m affinchè il sistema si muova di moto uniforme.
2. In tali condizioni si determini il valore della tensione T_2 .

Sempre nelle condizioni di cui al punto 1, si supponga che quando la massa m raggiunge il pavimento la velocità istantanea del sistema sia in modulo pari a $v_0 = 1 \text{ m/s}$. In quell'istante T_1 diventa nulla e l'attrito arresta il moto delle due masse sul tavolo.

3. Quando i corpi si sono arrestati, la loro distanza è diminuita? Se sì, di quanto?

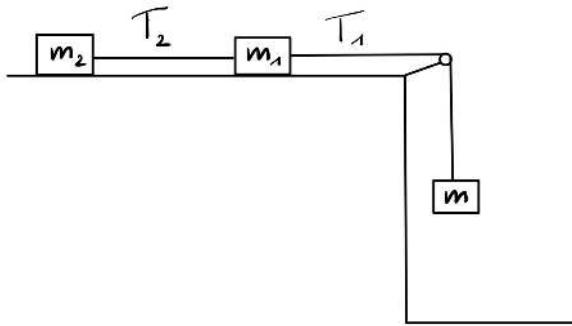


Figura 1: Rappresentazione grafica Esercizio 1

- ② Un corpo puntiforme viene lanciato lungo un piano inclinato, dal basso verso l'alto, con velocità iniziale $v_0 = 5 \text{ m/s}$. L'angolo di inclinazione del piano inclinato rispetto all'orizzonte è pari a $\theta = 30^\circ$, mentre il coefficiente di attrito dinamico fra corpo e piano è $\mu_d = 0.3$. Sapendo che il corpo parte dal punto più basso del piano inclinato e che il piano inclinato ha una lunghezza $l = 1.10 \text{ m}$, determinare:

1. La quota massima raggiunta dal corpo;
2. La velocità con la quale il corpo torna al suolo.

[Qualora il corpo si fermi lungo il piano inclinato, l'attrito statico non è sufficiente a tenere il corpo fermo nel punto di inversione del moto]

- ③ Tre palline aventi massa $m_1 = m_2 = m = 500 \text{ g}$ e $m_3 = 2m$ sono appese al soffitto come mostrato in figura tramite cordicelle ideali (inestensibili, flessibili e di massa trascurabile) e una molla anch'essa ideale di costante elastica $k = 250 \text{ N/m}$ e lunghezza a riposo $l_0 = 20 \text{ cm}$.

1. Determinare di quanto è allungata la molla quando il sistema si trova in equilibrio statico.

A un certo istante la cordicella tra le palline 2 e 3 viene tagliata.

2. Determinare se durante il moto della pallina 2 la pallina 1 si sposterà dalla sua posizione originaria o rimarrà in quiete.

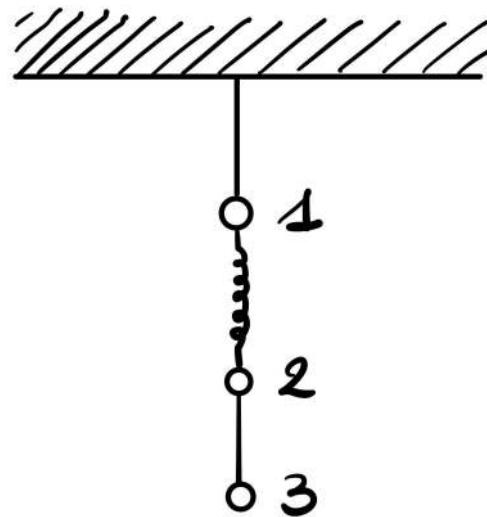


Figura 2: Rappresentazione grafica Esercizio 3

- ④ La superficie piana superiore di un cuneo è inclinata di un angolo $\theta = 25^\circ$ rispetto all'orizzontale; su di essa è appoggiato un corpo di massa $m = 2 \text{ kg}$. Come mostra la figura, al corpo sono agganciati gli estremi di due molle ideali che hanno la stessa lunghezza a riposo e costanti elastiche $k_1 = 20 \text{ N/cm}$ e $k_2 = 10 \text{ N/cm}$; gli altri estremi delle molle sono ancorati, tramite supporti, alla superficie del cuneo. Si supponga che quando il corpo è equidistante dai supporti di ancoraggio (come nella disposizione di figura) entrambe le molle siano a riposo. Trascurando ogni attrito, determinare:

1. La compressione/allungamento delle molle (specificare lo stato di ognuna) nel caso di cuneo e corpo entrambi in quiete;
2. Con quale accelerazione a (costante) il cuneo deve muoversi verso sinistra affinchè il corpo si mantenga in quiete rispetto al cuneo in posizione equidistante dai supporti.

Supponendo poi che il contatto tra corpo e cuneo presenti attrito con un coefficiente di attrito statico μ_s , calcolare:

3. Il minimo valore di μ_s , $\mu_{s,\min}$, affinchè il corpo possa rimanere in quiete nella posizione di figura quando il cuneo accelera verso sinistra con accelerazione $2a$, con a identica a quella calcolata al punto 2.

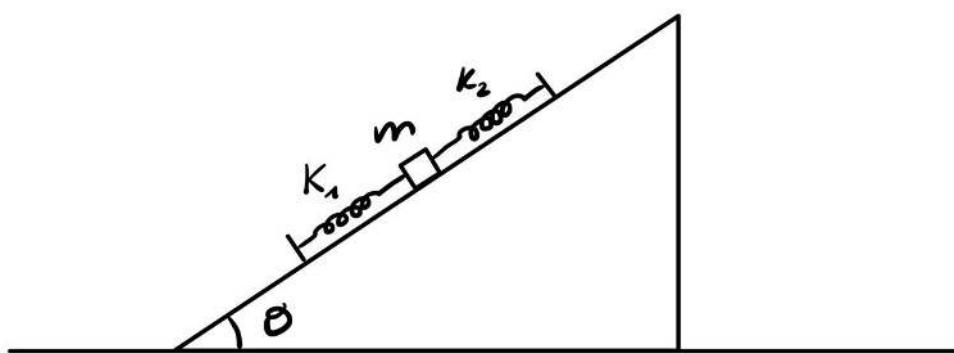
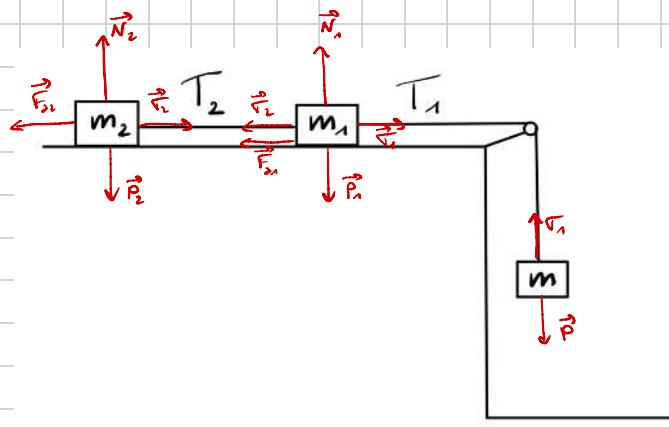


Figura 3: Rappresentazione grafica Esercizio 5

ES. 1



Le equazioni del moto per le tre masse sono

$$\begin{cases} m_2 \ddot{a}_2 = T_2 - \mu_2 N_2 \\ m_1 \ddot{a}_1 = T_1 - T_2 - \mu_1 N_1 \\ m \ddot{a} = mg - T_1 \end{cases}$$

Dove $\begin{cases} N_1 = m_1 g \\ N_2 = m_2 g \end{cases}$ sono reazioni normali regate sicché $1 < 2$

→ Dal momento che le tre accelerazioni sono uguali (dato che le corde sono inestensibili): $\ddot{a}_1 = \ddot{a}_2 = \ddot{a}$

Somminiamo le tre equazioni membro a membro, ottenendo

$$(m_1 + m_2 + m_3) \ddot{a} = mg - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g$$

E ponendo $\ddot{a}=0$ (moto uniforme), ricaviamo

$$m = \mu_2 m_2 + \mu_1 m_1 = 3.8 \text{ Kg}$$

In queste condizioni la tensione T_2 sarà

$$T_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g = 17.7 \text{ N} \quad (\text{ricavato ponendo } \ddot{a}=0)$$

Quando m toccherà terra, saranno che $T_1 \rightarrow 0$, quindi i corpi 1 e 2 proseguiranno decelerando per via delle forze di attrito.

A seconda che le corde che collegano i due corpi rimangano tese o no, i moduli delle loro decelerazioni saranno uguali o diversi (rispettivamente).

→ Possiamo considerare l'ipotesi che $T_1 \neq 0$. Ripetiamo le equazioni del primo (con $T_1 = 0$ ora), le accelerazioni rimangono identiche, e ottieniamo quindi

$$\begin{cases} m_2 \ddot{a} = T_2 - \mu_2 m_2 g \\ m_1 \ddot{a} = -T_2 - \mu_1 m_1 g \end{cases}$$

Proseguiamo a risolvere il sistema, ottenendo

ordinato sommando le due equazioni membro a membro

$$z = -\frac{(m_1 m_2 + m_2 m_1) g}{m_1 + m_2}$$

$$\tau_2 = (m_2 - m_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Quello che si ottiene è un'accelerazione negativa (in linea con quello che ci si aspetta) e $\tau_2 < 0$, ma questo non ha senso fisico (basta ripensare all'appresentazione grafica, e a cosa comporterebbe ciò sul verso di τ_2)

Di conseguenza le cordi tra 1 e 2 non saranno ferme e ogni corpo decelerà con accelerazione determinata comune come effetto delle forze di attrito da cui risente. Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} m_1 z_1 = -\mu_1 m_1 g \\ m_2 z_2 = -\mu_2 m_2 g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_1 = -\mu_1 g \\ z_2 = -\mu_2 g \end{cases}$$

→ Si fissa che $\tau_2 = 0$ poter avere intuito già a partire dall'osservazione che $\mu_1 > \mu_2$, ovvero il corpo 1 rallenta di più rispetto a 2 (considerando solo la forza di attrito agente lungo la direzione orizzontale)

Di conseguenza, i corpi si fermeranno nel tempo $t_1 = \frac{v_0}{\mu_1 g}$ e $t_2 = \frac{v_0}{\mu_2 g}$, percorrendo gli spazi

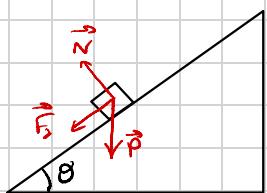
$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} \mu_1 g t_1^2 = \frac{v_0^2}{2 \mu_1 g} = 10.2 \text{ cm}$$

$$s_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} \mu_2 g t_2^2 = \frac{v_0^2}{2 \mu_2 g} = 17.0 \text{ cm}$$

Il corpo 2 percorre una spazio maggiore rispetto al corpo 1, prima di fermarsi. Di conseguenza si misurerà una distanza

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 6.79 \text{ cm}$$

ES. 2



Durante lo slittamento lungo il piano inclinato il corpo, è causa della forza gravitazionale $M \vec{g}$ e della forza di attrito \vec{F}_2 ($|F_2| = \mu_2 N = \mu_2 M g \cos \theta$) opposta al moto, segue un moto uniformemente decelerato. Le leggi orarie di velocità e spazio saranno:

$$v(t) = v_0 + \alpha t; \quad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Prendiamo un sistema di coordinate sul piano inclinato e orientato nel verso del moto, applicando la 2^a legge della dinamica possiamo scrivere che

$$\alpha = -g \sin \theta - \frac{F_2}{M} = -g \sin \theta - \frac{\mu_2 N}{M} = -g (\sin \theta + \mu_2 \cos \theta) = -7.45 \text{ m/s}^2$$

Di conseguenza, all'istante $t^* = -\frac{v_0}{\alpha}$ il corpo si ferma ($v(t^*) = 0$) dopo aver percorso un totale di lunghezza

$$x^* = x(t^*) = v_0 t^* + \frac{1}{2} \alpha (t^*)^2 =$$

$$= -\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \theta + v_0 \cos \theta)} = 1.68 \text{ m}$$

che risulta maggiore delle lunghezze del piano inclinato stesso

- Il corpo raggiunge la sommità del piano in chiaro con velocità non nulla
- Prosegue scendendo con un moto parabolico

Dalle leggi orarie elementari de l'istante t_1 in cui il corpo raggiunge la sommità del piano inclinato e le corrispondenti velocità v_1 sono:

$$v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2 = l \rightarrow a t_1^2 + 2 v_0 t_1 - 2l = 0$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2al}}{2} = 0.277 \text{ s}$$

$$\text{E da questo } v_1 = v(t_1) = v_0 + at_1 = 2.93 \text{ m/s}$$

Negli istanti successivi il moto è parabolico; **attorno al tempo all'istante di discesa** possiamo scrivere le nuove leggi orarie seguite dal corpo nel moto parabolico

$$\begin{cases} v_x(t) = v_1 \cos \theta \\ x(t) = l \cos \theta + (v_1 \cos \theta) t \end{cases}$$

VELOCITÀ COSTANTE

$$\begin{cases} v_y(t) = v_1 \sin \theta - gt \\ y(t) = l \sin \theta + (v_1 \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Dalle seconde elementari de l'istante t_2 , in cui il corpo raggiunge la massima quota, e la corrispondente quota y_{\max} sono:

$$\begin{cases} v_y(t_2) = 0 \rightarrow t_2 = \frac{v_1 \sin \theta}{g} = 0.155 \text{ s} \\ y_{\max} = y(t_2) = l \sin \theta + (v_1 \sin \theta) t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0.66 \text{ m} \end{cases}$$

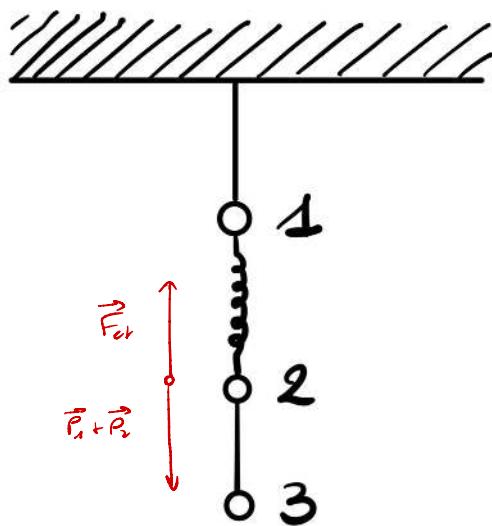
Per quanto riguarda invece l'istante t_3 nel quale il corpo torna al suolo c'è la corrispondente velocità finale, e' la

$$y(t_3) = 0 \rightarrow g t_3^2 - 2(v_1 \sin \theta) t_3 - 2l \sin \theta = 0$$

$$\rightarrow t_3 = \frac{v_1 \sin \theta + \sqrt{v_1^2 \sin^2 \theta + 2gl \sin \theta}}{g} = 0.516 \text{ s}$$

$$\therefore \text{e } v_y(t_3) = v_1 \sin \theta - gt_3 = -3.60 \text{ m/s} \rightarrow v_f = v(t_3) = \sqrt{v_x^2(t_3) + v_y^2(t_3)} = 4.45 \text{ m/s}$$

ES. 3



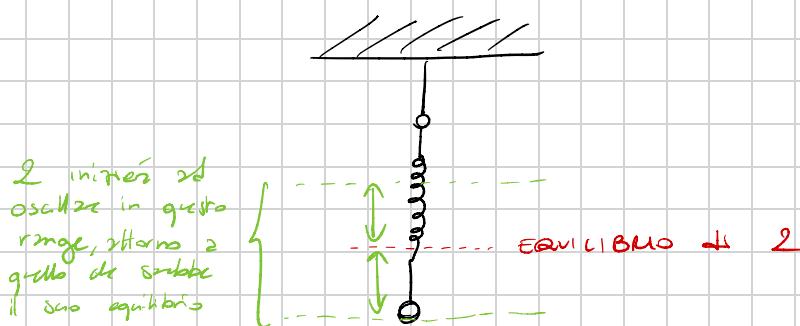
Nella estensione in figura, le forze elastiche balzano il peso complessivo di 2 < 3

$$K\Delta l = (m_2 + m_3)g \rightarrow \Delta l = \frac{3mg}{K} = 5.89 \text{ cm}$$

Quando viene tagliato la corda sotto 2 < 3, avremo che lo ponte 2 non sarà più in equilibrio.

(con lo ponte 2, l'allungamento da equilibrio sarebbe infatti $\Delta l_1 = \frac{m_2 g}{K} = \frac{mg}{K} = 1.96 \text{ cm}$)

$$\frac{\Delta l}{3}$$



→ l'ampiezza di oscillazione è

$$\Delta l - \Delta l_1 = \frac{2mg}{K} = A$$

Ora la differenza tra quanto è allungato lo molla quando la corda viene tagliata e quanto è allungato lo molla nel suo di equilibrio statico con lo solo ponte 2

l'oscillazione è simmetrica rispetto al punto di equilibrio (punto se lo unisce in quiete), e grande, grande lo ponte 2 viene a trovarsi nell'altro estremo dell'oscillazione, lo molla risulta compresso di circa lunghezza

→ Lo molla compie delle oscillazioni di ampiezza "A" attorno al punto di equilibrio

$$\Delta l' = \frac{mg}{K}$$

Essendo un allungamento negativo, significa che lo molla è compresso di $\frac{mg}{K}$

$\Delta l \rightarrow \Delta l$ convergente, nel punto più alto dell'oscillazione, l'allungamento dello molla sarà $\Delta l_1 - A = -\frac{mg}{K}$

→ In tali condizioni, la forza retta sullo ponte 1 è nulla (questa compressione dello molla genera sulla ponte 1 una forza diretta verso l'alto identica al suo peso)

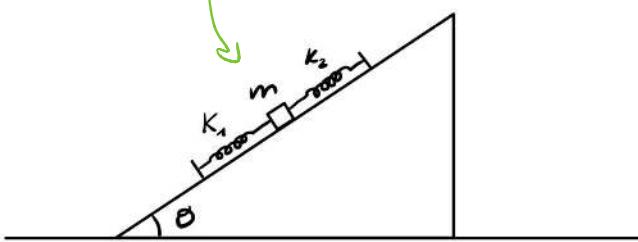
→ Lo ponte 1 rimane sempre fermo

→ Lo ponte 1 rimane fermo perché subito dopo il taglio della corda è che $m_3 < \Delta l$

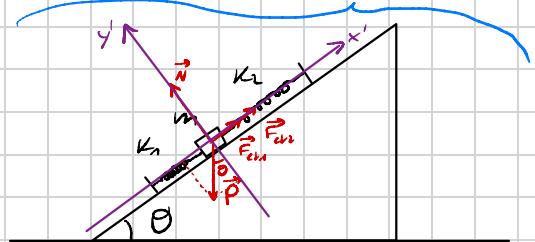
Es. 4

Perché stanno assieme che le due molle hanno la stessa lunghezza a riposo, e che, di conseguenza, quando il corpo è equilibrato da due punti di incastro, le due molle sono entrambe a riposo.

In questo caso assumiamo che entrambe le molle siano a riposo.



In questa situazione assumiamo che il carico sia fermo.



Se il corpo è in equilibrio statico sul carico in quiete allora, nel sistema di riferimento del laboratorio la risultante delle forze che agiscono su di esso deve essere nulla.

→ Se il corpo, come mostrato in figura, risulta spostato verso il basso rispetto all'immagine proposta nel testo del problema

↳ Sarà spostato di un Δx tale che la somma delle forze elastiche delle molle 1 e 2 è eguale alla componente della forza di gravità $mg \sin \theta$ parallela alla superficie del carico.

Consideriamo quindi un sistema di riferimento con un asse parallelo a tale superficie (disegnato in viola).

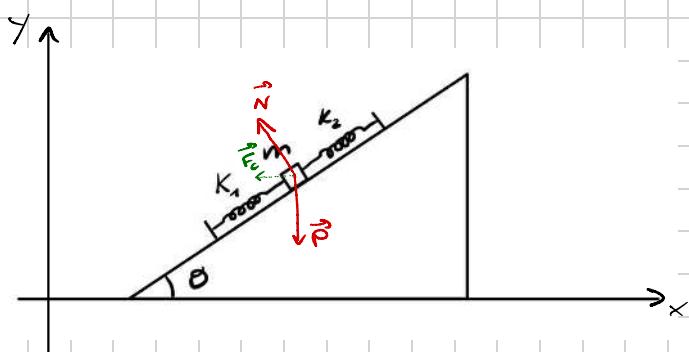
Compressione e allungamento avranno lo stesso valore in molte.

$$K_1 \Delta x + K_2 \Delta x - mg \sin \theta = 0$$

$$\Delta x = \frac{mg \sin \theta}{K_1 + K_2} = 0.276 \text{ cm}$$

Consideriamo ora che il carico si accelerato verso sinistra con accelerazione costante \vec{a} e supponiamo che il corpo sia in quiete rispetto al carico nella posizione descritta nella figura riportata in alto al testo del problema.

Nel sistema di riferimento del laboratorio (sistema inerziale) il corpo si muoverà quindi di moto accelerato con accelerazione \vec{a} dello stesso verso sinistra e quindi la risultante delle forze che agiscono su di esso dovrà essere pari a $m\vec{a}$.



\vec{F}_c rappresenta la risultante delle forze agenti sul corpo.

Quindi è la somma delle forze che agiscono sul corpo (questo è il motivo per cui è stato tralasciato il adorato di verde, per distinguere dalle forze che effettivamente l'oggetto in esame sente).

$$\vec{F}_c = \vec{P} + \vec{N} \rightarrow \vec{m} \vec{a} = \vec{mg} + \vec{N} \rightarrow$$

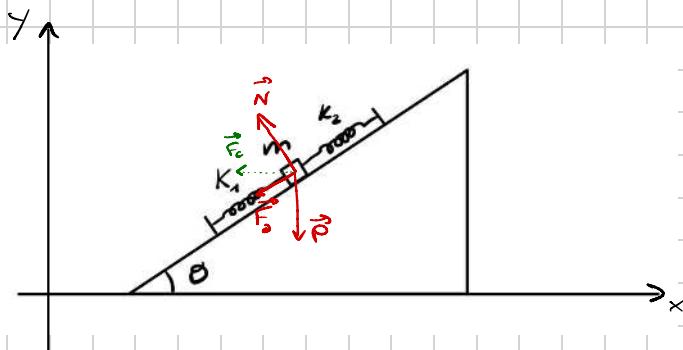
$$\begin{cases} -m a = -N \sin \theta \\ 0 = N \cos \theta - mg \end{cases}$$

Le relazioni scritte in quest'ultimo sistema sono ottenute proiettando le forze rispettivamente su un asse x orizzontale verso destra e un asse y verticale verso l'alto.

Se contengono soluzioni da:

$$N = \frac{mg}{\sin \theta} \rightarrow a = \frac{N}{m} \sin \theta = \frac{1}{m} \cdot \frac{mg}{\sin \theta} \sin \theta = g \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = g \tan(\theta)$$

Nell'ultimo punto del problema il carico accelera verso sinistra con accelerazione $2a$, e a causa dell'attrito statico il corpo rimane in quiete rispetto al carico nello stesso punto dove discute della legge dell'ultimo punto.



Possiamo affrontare tale situazione allo stesso maniera che nel punto precedente.

Nel sistema di riferimento del laboratorio il corpo ha accelerazione $2a$ (lo stesso del carico) e quindi la risultante delle forze agenti su di esso dovrà essere pari a $2ma$. Pertanto

$$\vec{F}_c = 2ma = \vec{mg} + \vec{N} + \vec{F}_s$$

Dove \vec{F}_s è la forza di attrito statico tangente alla superficie del carico e diretta verso il basso (essendo l'accelerazione del carico maggiore di a). Proseguendo tale equazione sugli assi x e y precedentemente individuati si ottiene

$$\begin{cases} -2ma = -N \sin \theta - F_s \cos \theta \\ 0 = N \cos \theta - mg - F_s \sin \theta \end{cases}$$

Da cui si ricava quanto segue

$$\rightarrow F_s = \frac{-mg + N \cos \theta}{\sin \theta} \rightarrow 2ma = N \sin \theta + \frac{N \cos \theta - mg}{\sin \theta} \cos \theta$$

$$2ma \sin \theta = N \sin^2 \theta - mg \cos \theta + N \cos^2 \theta$$

Andando a sostituire al posto di N l'espressione appena ricavata

$$N = 2ma \sin \theta + mg \cos \theta$$

$$\rightarrow F_s = 2ma \cos \theta - mg \sin \theta$$

Quest'ultima relazione sarà utile a punto che

$$F_s \leq \mu_s N \rightarrow \mu_s \geq \frac{F_s}{N} = \frac{2ma \cos \theta - mg \sin \theta}{2ma \sin \theta + mg \cos \theta}$$

E sostituendo il valore di μ_s ottenuto in precedenza otteniamo



RICORDARE CHE $\mu_s \cdot N$ È UN LIMITE SUPERIORE PER LA FORZA DI ATTRITO (ONOREVOLMENTE NON PUÒ SUPERARLO), MA QUESTO NON SIGNIFICA CHE LA FORZA DI ATTRITO STATICO ASSUMA SEMPRE QUEL VALORE!

$$\mu_s = \mu_{s,\min} = \frac{2mg\sin\theta - mg\sin\theta}{2mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + mg\cos\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1 + \tan^2\theta} = 0.325$$