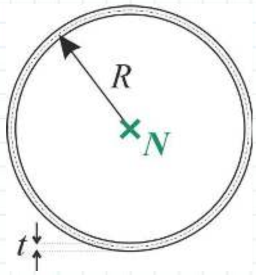
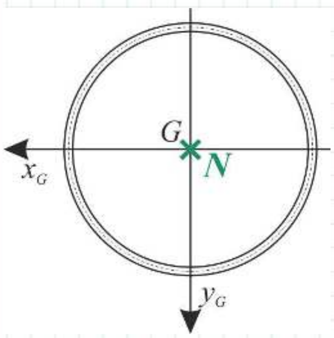
Esercizi svolti sul solido di de Saint Venant



ESERCIZIO 1

Con riferimento alla figura riportata, si valuti quale debba essere lo spessore minimo t della sezione sottile affinché quest'ultima sia verificata, se caricata con una forza normale N di compressione pari a 50 N. La tensione ammissibile è pari a σ_{amm} = 180 MPa. Determinare quindi, per tale sezione, quali risulterebbero essere le deformazioni risultanti, assumendo che il materiale possa descriversi mediante legame costitutivo elastico, lineare, omogeneo e isotropo, con modulo elastico E = 10 GPa e coefficiente di Poisson ν= 0.3. Si dotti un raggio medio della sezione sottile (raggio della linea media) uguale a 1,5 mm.

SVOLGIMENTO



Con riferimento ad un sistema di riferimento centrale (assi x_G y_G baricentrici e principali), è possibile affermare che le tensioni risultanti da un carico normale centrato sono descrivibili secondo la seguente formula:

$\sigma_z = \frac{N}{A}$ con σ_z = tensione normale (lungo z) e A = area della sezione.

σ_z deve essere inferiore a σ_{amm} per rispettare i requisiti di verifica della sezione. Al massimo $\sigma_z = \sigma_{amm}$.

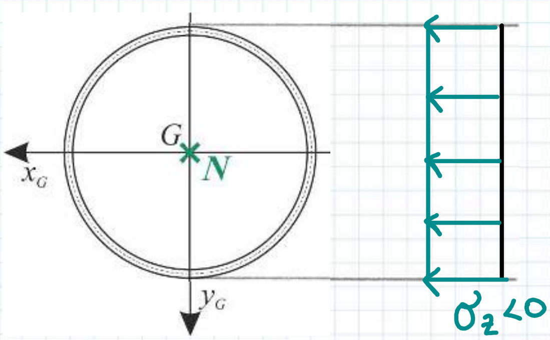
Area sezione sottile → $A = 2\pi R t$ $\quad \sigma_{amm} = \sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{N}{2\pi R t} \Rightarrow t = \frac{N}{2\pi R \sigma_{amm}} = \frac{50}{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 180} = 0.029\,mm$

Deformazioni (se $\sigma_z = \sigma_{amm}$) NB N compressione, $\sigma_z < 0$

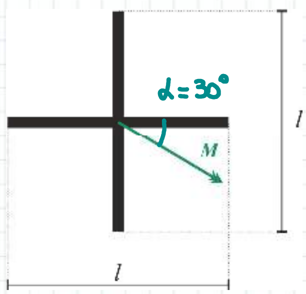
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E}\sigma_z \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}\sigma_z \end{aligned}\right\} + \frac{0.3}{10 \cdot 10^3} \cdot 180 = 0{,}0054 \quad 0{,}54\% \text{ (allungamento)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = -\frac{180}{10 \cdot 10^3} = -0.018 \quad -1{,}8\% \text{ (accorciamento)}$$

Andamento e verso delle tensioni normali σ_z:



tensioni costanti di compressione agenti su tutta la sezione

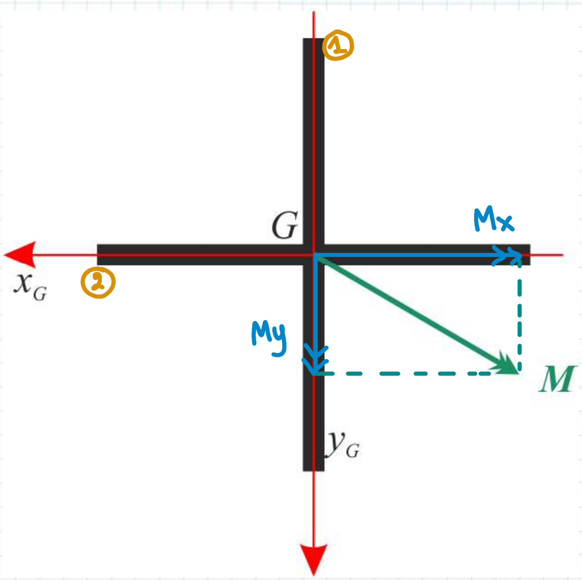


ESERCIZIO 2

Con riferimento alla sezione in figura, si valuti lo stato tensionale risultante a seguito di un momento deviato M = 100 Nmm. Si riportino i valori massimi e minimi di tensione e si rappresenti andamento e verso. Nota una tensione ammissibile pari a σ_{amm} = 160 MPa, valutare se la sezione risulta verificata per tale sollecitazione applicata. Si commentino le formule utilizzate e i risultati ottenuti.
Si consideri la lunghezza l pari a 7 mm e lo spessore δ = 0,5 mm.

SVOLGIMENTO

Si può notare che la sezione in esame presenta due assi di simmetria assiale retta ortogonali tra loro, pertanto questi sono assi principali d'inerzia, e la loro intersezione coincide con il baricentro. Il momento deviato M può essere scomposto in un contributo $M_x = M\cos\alpha$ e $M_y = M\sin\alpha$ in modulo, con verso di M_x negativo.



Le tensioni normali σ_z saranno quindi date da:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-M\cos\alpha}{I_x} y - \frac{M\sin\alpha}{I_y}$$ (Formula di Navier)

Dove I_x e I_y sono i momenti d'inerzia assiali principali.

L'equazione dell'asse neutro (luogo dei punti in cui $\sigma_z = 0$):

$$-\frac{\cancel{M}\cos\alpha}{I_x} y - \frac{\cancel{M}\sin\alpha}{I_y} x = 0 \qquad y = -tg\alpha \frac{I_x}{I_y} x \quad ⊛$$

$y = -0.577\,x$ → eq^{ne} asse neutro, coincidente con direzione di M (perché sezione giroscopica)

I punti maggiormente sollecitati sono $A(0, -\frac{l}{2})$ e $B(0, l/2)$:

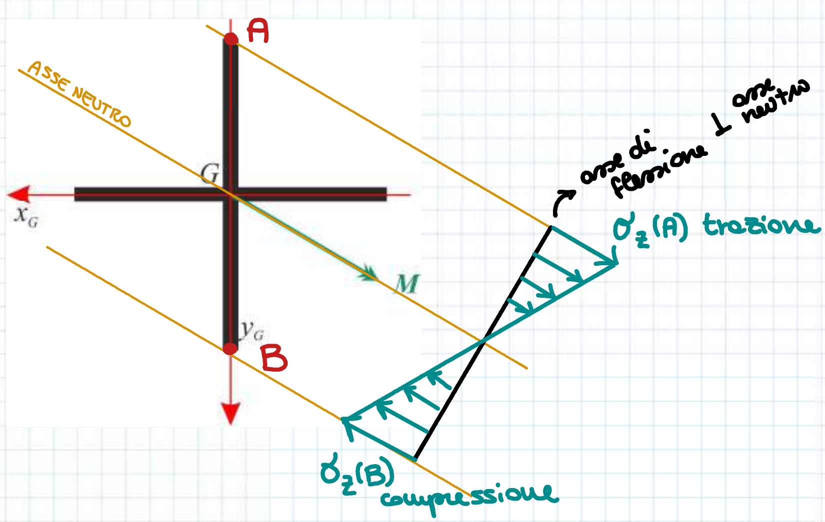
$$\sigma_z(A) = \frac{-M\cos\alpha}{I_x} \cdot \left(-\frac{l}{2}\right) - \frac{M\sin\alpha}{I_y} \cdot 0 = \frac{100 \cdot \cos 30°}{14,29} \cdot \frac{7}{2} = +21,21 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z(B) = -\frac{M\cos\alpha}{I_x}\left(\frac{l}{2}\right) = -21,21 \text{ MPa}$$

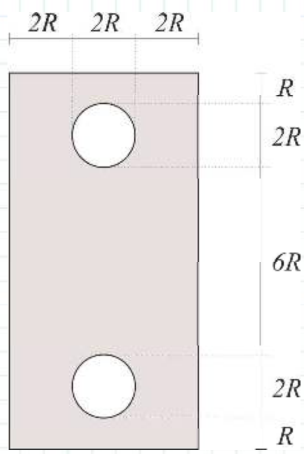
⊛ Calcolo i momenti d'inerzia assiali I_x e I_y della sezione:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = \frac{l^3\delta}{12} + \frac{l\cancel{\delta^3}}{12} = 14,29 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = I_x$$



Data una tensione ammissibile $\sigma_{amm} = 160$ MPa, $|\sigma_z(A)| < \sigma_{amm}$ e $|\sigma_z(B)| < \sigma_{amm}$ quindi la sezione risulta verificata per questa condizione di carico



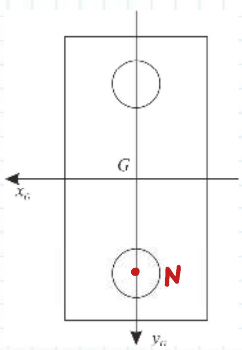
ESERCIZIO 3

Con riferimento alla sezione in figura, si riportano tre varianti di carico. Per ogni caso, si valuti lo stato tensionale risultante, riportando valori, andamento e verso delle tensioni agenti. La sezione risulta sempre verificata (tensione ammissibile pari a σ_{amm} = 140 MPa)? Si commentino le formule utilizzate e i risultati ottenuti. Si consideri la dimensione R pari a 0,25 mm.

(Da es. geometria delle aree. $I_x = 2{,}976\ mm^4$, $I_y = 0{,}838\ mm^4$, $A = 4{,}11\ mm^2$

VARIANTE 1:

N = 55 N



Sistema equivalente:

La doppia simmetria assiale retta permette di identificare il sistema di riferimento centrale e la posizione del baricentro.

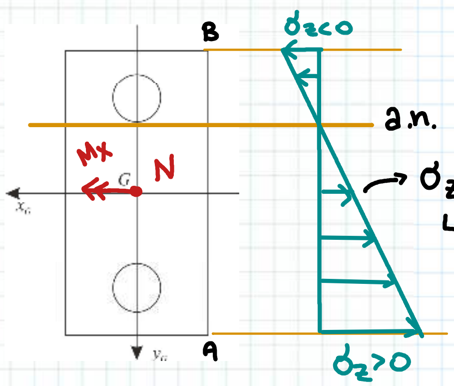
Lo sforzo normale N riportato presenta un'eccentricità rispetto all'asse x, con eccentricità $e_y = 4R$ $M_x = N \cdot e_y$

le tensioni che nascono sono tensioni normali σ_z

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_x} y$$

Eq^{ne} asse neutro (dove $\sigma_z = 0$): $N\left(\frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_x} y\right) = 0$ $\quad \frac{1}{4{,}11} + \frac{4 \cdot 0.25}{2{,}976} y = 0$

$\Rightarrow \quad y = -\frac{1}{4{,}11} \cdot \frac{1}{0{,}336} = -0{,}724\ mm$



σ_z sul baricentro
↳ = N/A

$\sigma_z(G) = N/A = \frac{55}{4{,}11} = 13{,}38$ MPa

$\sigma_z(A) = \frac{N}{A} + \frac{N e_y}{I_x} \cdot 6R = 13{,}38\ \text{MPa} + \frac{55 \cdot 4R}{2{,}976} \cdot 6R =$

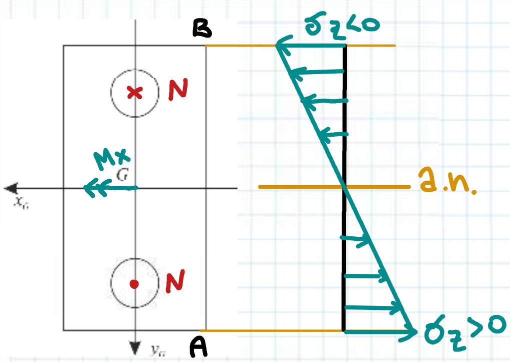
$= 13{,}38\ \text{MPa} + \frac{55 \cdot 1}{2{,}976} \cdot 6 \cdot 0.25 = 13{,}38 + 26{,}72 = 40{,}1$ MPa

$\sigma_z(A) < \sigma_{amm}$

$\Rightarrow$ la sezione è verificata

$\sigma_z(B) = 13{,}38\ \text{MPa} - 26{,}72\ \text{MPa} = -13{,}34\ \text{MPa} > (-\sigma_{amm})$

VARIANTE 2: N = 20 N (Come prima per sist. di rif.)



$\Rightarrow$ Devo valutare la RISULTANTE di forze e momenti:

$$\left\{\begin{array}{l} \{R\} = N - N = 0 \\ M = N \cdot 8R \end{array}\right\}$$ Equivalente ad un momento $M_x = N \cdot 8R$.

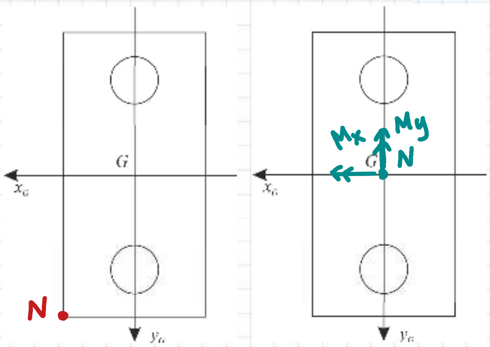
$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$ (formula di Navier) a.n. $y = 0$ $\quad \sigma_z(A)$: $\frac{N \cdot 8R}{I_x} \cdot 6R = \frac{20 \cdot 8 \cdot 0.25}{2{,}976} \cdot 6 \cdot 0{,}25$

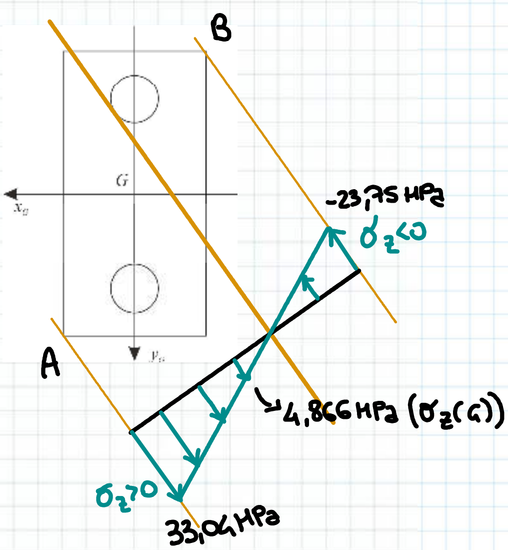
$= 25{,}25\ \text{MPa} < \sigma_{amm}$

$|\sigma_z(B)| = |\sigma_z(A)|$ $\sigma_z(B)$ compressione $< \sigma_{amm}$

La sezione è verificata

VARIANTE 3 : $N = 20\,N$





In questo caso le tensioni σ_z saranno espresse come:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad \text{con } M_x = N e_y = N \cdot 6R \quad \text{e } M_y = M e_x = N \cdot 3R \quad (M_y < 0)$$

A : area sez.

I_x, I_y momenti d'inerzia principali della sezione

Nel sistema equivalente riportato

$$= \frac{N}{A} + \frac{N 6R}{I_x} y + \frac{N 3R}{I_y} x$$

$\sigma_z = 0$ (asse neutro): $\frac{1}{A} + \frac{6R}{I_x} y + \frac{3R}{I_y} x = 0 \qquad y = -\frac{3R}{I_y} \frac{I_x}{6R} x - \frac{1}{A} \frac{I_x}{6R}$

$$y = -1{,}78\,x - 0{,}48$$

σ_z sul baricentro.

$$\sigma_z(G) = \frac{N}{A} = \frac{20}{4{,}11} = 4.866 \text{ MPa} \quad \oplus \text{ trazione}$$

$$\sigma_z(A) = \frac{N}{A} + \frac{N 6R}{I_x} \cdot 6R + \frac{N 3R}{I_y} \cdot 3R = 4{,}866 + \frac{20 \cdot 1{,}5}{2.976} \cdot 1{,}5 + \frac{20 \cdot 0{,}75}{0{,}838} \, 0.75$$

$$= 4.866 + 15{,}12 + 13{,}42 = 33{,}04 \text{ MPa} \quad \oplus \text{ traz.} < \sigma_{amm}$$

$$\sigma_z(B) = \frac{N}{A} + \frac{6NR}{I_x}(-6R) + \frac{3NR}{I_y}(-3R) = 4{,}866 - 15{,}12 - 13{,}42 = -23{,}75 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_z(B)| < \sigma_{amm}$$

$\Rightarrow$ La sezione è verificata