Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 5

I seguenti problemi sono stati presi dalle prove parziali del 2014 e del 2011

(1) Un punto materiale P è attaccato per mezzo di un adesivo alla circonferenza di una ruota di raggio R = 0.4 m che può ruotare liberamente attorno al suo asse orizzontale fisso passante per O. Inizialmente il punto è fermo in A nel punto più basso della circonferenza. Ad un certo istante la ruota si mette in moto di rotazione attorno al suo asse, soggetta ad una accelerazione angolare costante, e P inizia a muoversi. La forza di adesione dell'adesivo con cui P è attaccato alla circonferenza della ruota ha un valore massimo, che viene raggiunto quando P ha una accelerazione centripeta istantanea di modulo $a_N = 16$ m/s^2 ed ha compiuto una rotazione complessiva pari a $\Delta\theta = 2\pi/3$ rad; in quell'istante il punto P si stacca dalla ruota. Determinare:

1. il modulo a dell'accelerazione del corpo un istante prima del distacco;
2. il vettore accelerazione $\vec{\boldsymbol{a}}'$ del corpo un istante dopo il distacco;
3. il tempo t, dall'istante del distacco, impiegato da P a raggiungere il punto H di massima altezza;
4. la massima altezza h rispetto all'asse O della ruota raggiunta da P.

[*Il motore che agisce sull'asse della ruota è in grado di compensare la forza di gravità che agisce sul punto materiale, che quindi si muove effettivamente sulla circonferenza con un moto circolare uniformemente accelerato.*]

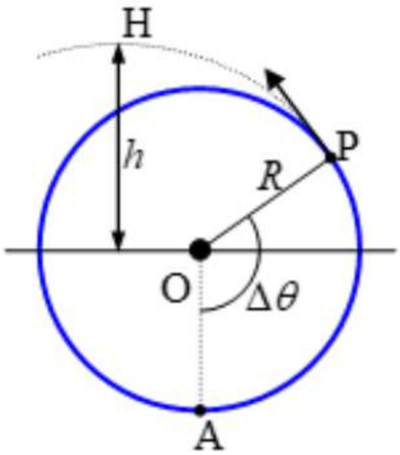


Figura 1: Rappresentazione grafica problema 1

(2) Un corpo A di dimensioni trascurabili e massa m_A si trova ad altezza h = 0.4 m rispetto al suolo su un piano liscio inclinato di un angolo $\theta = 33°$ rispetto all'orizzontale. Il corpo è collegato verso l'alto ad una fune inestensibile ideale tesa parallela al piano inclinato, il cui altro estremo è fissato al suolo passando attraverso il sistema di carrucole ideali mostrato nella Figura 2. Una delle carrucole del sistema è libera di muoversi nella direzione verticale, e ad essa è fissato tramite un'altra fune ideale un corpo di dimensioni trascurabili e massa m_B inizialmente appoggiato al suolo. Determinare:

1. il minimo valore del rapporto m_A/m_B tale per cui B rimanga appoggiato al suolo.

Nell'ipotesi che il rapporto $m_A/m_B = 2$ calcolare:

2. il modulo a_A dell'accelerazione del corpo A;
3. il modulo $v_{B,max}$ della massima velocità raggiunta da B.
4. il minimo valore $T_{s,min}$ della tensione di rottura che deve avere la fune che collega la carrucola al soffitto in figura affinché la stessa carrucola non cada nell'ipotesi che $m_A = 2$ kg.

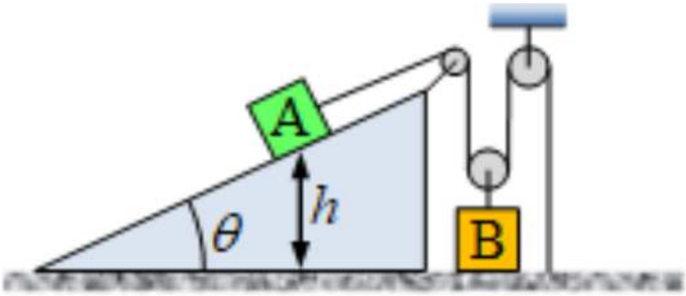


Figura 2: Rappresentazione grafica problema 2

(3) Una molla orizzontale di costante elastica $k = 400$ N/m è vincolata ad un estremo; all'altro estremo è attaccato un corpo A di dimensioni trascurabili e massa $m_A = 2$ kg che mantiene la molla compressa di $\Delta x = 0.12$ m. Un corpo B di massa $m_B = 1.5$ kg è appoggiato ad A dal lato opposto della molla, e i due corpi sono inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio. Ad un certo istante, si sblocca il sistema e i due corpi si mettono in movimento a seguito dell'azione della molla. Dopo che la molla ha superato la posizione corrispondente alla sua lunghezza a riposo, B prosegue lungo il piano mentre A rimane attaccato alla molla. Determinare:

1. la massima ampiezza Δx_A del moto oscillatorio di A dopo il distacco di B.

Nel suo moto, B dapprima supera un tratto di piano orizzontale scabro di lunghezza $l = 0.35$ m e coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.08$, poi sale lungo una rampa liscia posta nel piano verticale; dopo l'arresto istantaneo nel punto di massima altezza, B ripercorre il percorso al contrario fino ad urtare A. Determinare

2. la massima altezza h raggiunta da B lungo la rampa;
3. la velocità v_B di B un istante prima di urtare A (assumere che B abbia già attraversato tutto il tratto scabro prima di incontrare A).

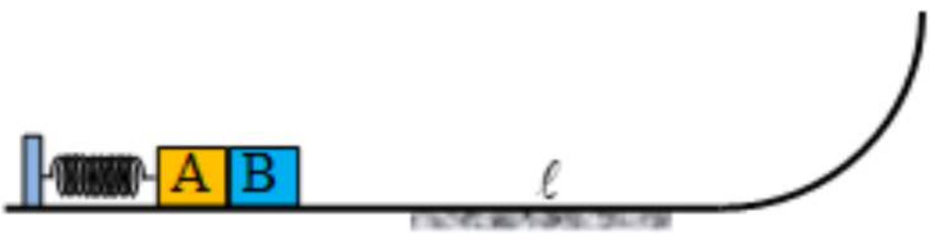


Figura 3: Rappresentazione grafica problema 3

(4) Una rampa di massa M è costituita da un tratto inclinato liscio AB seguito da un tratto orizzontale scabro BC di lunghezza $l = 0.5$ m e coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0.15$, e da un altro tratto orizzontale liscio CD; nel tratto CD c'è una molla ideale con costante elastica $k = 80$ N/m parallela

al piano e vincolata all'estremità D della rampa. La rampa è libera di scorrere senza attrito su un piano orizzontale. Inizialmente un corpo di massa m = 0.4 kg è vincolato all'estremo superiore A della rampa ad una altezza h = 0.8 m da B e tutto il sistema è in quiete. Ad un certo istante il corpo è lasciato libero di muoversi. Determinare:

1. il modulo v_M della velocità della rampa nell'istante di massima compressione della molla a seguito dell'urto con il corpo;
2. la massima compressione Δx_{max} della molla;
3. il numero N di volte in cui il corpo attraversa completamente il tratto BC (indipendentemente dal verso del moto);
4. la variazione Δx_{CM} della posizione del centro di massa del sistema tra l'istante in cui il corpo si ferma e l'istante iniziale del moto.

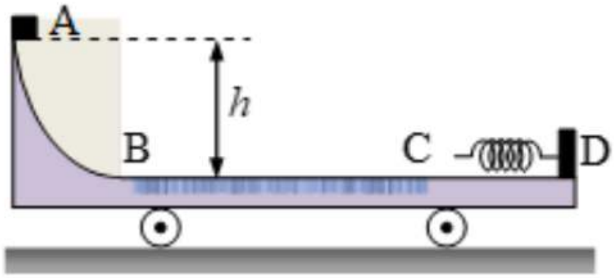
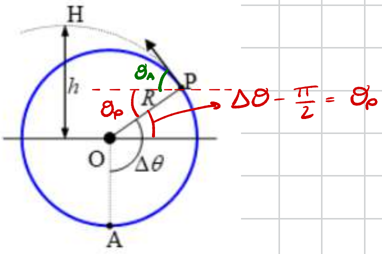


Figura 4: Rappresentazione grafica problema 4

ES. 1



a) Per calcolare il modulo dell'accelerazione bisogna considerare quali sono le componenti che vi contribuiscono.
Prendendo spunto dalle coordinate polari, avremo una componente radiale (corrispondente all'accelerazione centripeta che già conosciamo) e una tangenziale (da determinare).
Per quanto riguarda quest'ultima, non conosciamo la durata del moto, ma sappiamo che nel tratto circolare percorre $\Delta\theta = 2\pi/3$ prima di raggiungere $a_N = 16\ m/s^2$, ovvero

$$a_N = \omega^2 R \rightarrow \omega^2 = \frac{a_N}{R}$$

Trattandosi dal punto di vista angolare di un moto uniformemente accelerato

$$\Delta\theta = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\theta_0}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\omega_0}} t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2\Delta\theta}{\alpha}}$$

$$\omega = \alpha t = \alpha\sqrt{\frac{2\Delta\theta}{\alpha}} = \sqrt{2\alpha\Delta\theta}$$

E quindi, sfruttando la relazione di prima (per ω^2)

$$\omega^2 = 2\alpha\Delta\theta = \frac{a_N}{R} \rightarrow \alpha = \frac{a_N}{2R\Delta\theta} = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{a_N}{R}$$

Da cui $a_T = \alpha R = \frac{3}{4\pi}\cdot a_N$

$$\rightarrow a = \sqrt{\frac{9}{16\pi^2}\cdot a_N^2 + a_N^2} = a_N\sqrt{\frac{9}{16\pi^2}+1} = 16.4\ m/s^2$$

(Nelle soluzioni allegate si sfrutta la formula $\omega^2 = \alpha 2\Delta\theta$)

b) Dopo il distacco, P non è più vincolato alla ruota ed è quindi soggetto alla sola forza peso

$$\rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

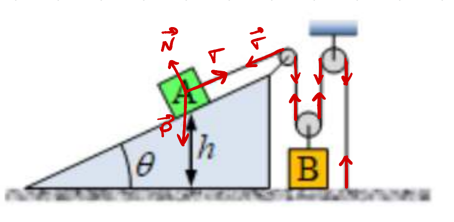
c) Per quanto riguarda la velocità lineare di distacco, questa sarà $v_0 = \omega R$
Consideriamo $\theta_P = \Delta\theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \theta_A = \frac{\pi}{2} - \left(\Delta\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \Delta\theta \rightarrow v_{0y} = v_0 \sin(\pi - \Delta\theta) = v_0 \sin(\Delta\theta)$

$$\rightarrow v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - gt = \omega R \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) - gt$$

Ad y_{max} abbiamo che $v_{y\,max} = 0 \rightarrow t_{max} = \frac{\omega R \sin\frac{2}{3}\pi}{g} = 0.224\ s$

d) $h = R\sin\theta_P + v_{0y}\sin\theta_A \cdot t_{max} - \frac{1}{2}g t_{max}^2 = R\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \omega R \sin(\pi - \Delta\theta)\cdot t_{max} - \frac{1}{2} g t_{max}^2 = 0.445\ m$

ES. 2



a) Prendiamo per ogni massa il sistema di riferimento solidale alla direzione descritta dalla fune in quel punto. Se l'oggetto B rimane appoggiato al suolo, significa che la reazione vincolare $N_B \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -T + m_A g \sin\theta = 0 \rightarrow T = m_A g \sin\theta \\ 2T + N_B - m_B g = 0 \rightarrow 2 m_A g \sin\theta + N_B - m_B g = 0 \end{cases}$$

$$N_B = m_B g - 2 m_A g \sin\theta \geq 0 \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} \leq \frac{1}{2\sin\theta} = 0.918$$

b) Consideriamo equazioni del tutto simili a quelle riportate in precedenza

$$\begin{cases} m_A g \sin\theta - T = m_A a_A \rightarrow T = m_A g \sin\theta - m_A a_A \\ 2T - m_B g = m_B a_B = m_B \frac{a_A}{2} \rightarrow 2 m_A g \sin\theta - 2 m_A a_A - m_B g = m_B \frac{a_A}{2} \end{cases}$$

$$a_A \left(\frac{m_B}{2} + 2 m_A \right) = 2 m_A g \sin\theta - m_B g \rightarrow a_A = \frac{2 m_A g \sin\theta - m_B g}{\frac{m_B}{2} + 2 m_A}$$

$$= \frac{2 \frac{m_A}{m_B} g \sin\theta - g}{\frac{1}{2} + 2 \frac{m_A}{m_B}}$$

$$= \frac{2}{9} \left(4 \sin\theta - 1 \right) g = 2.57 \ m/s^2$$

c) I corpi A e B raggiungeranno la loro velocità massima alla fine del moto accelerato positivamente, ovvero alla fine del piano inclinato. Possiamo sfruttare la conservazione dell'energia meccanica

$$E_{in} = E_{fin} \rightarrow \frac{m_A}{m_B} g h = \frac{m_B}{m_B} g \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin\theta} + \frac{1}{2} \frac{m_A}{m_B} v_{A,max}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_B}{m_B} v_{B,max}^2$$

$$2gh = g \frac{h}{2\sin\theta} + v_{A,max}^2 + \frac{1}{2} v_{B,max}^2$$

$$2gh \left(1 - \frac{1}{4\sin\theta} \right) = 4 v_{B,max}^2 + \frac{1}{2} v_{B,max}^2$$

$$\rightarrow v_{B,max} = \sqrt{\frac{gh}{9} \left(4 - \frac{1}{\sin\theta} \right)}$$

d) $T_{S,max} = 2T = 2 m_A \left(g \sin\theta - a_A \right) = 11.1 \, N$

ES. 3

a) Il primo punto possiamo risolverlo completamente considerando la conservazione dell'energia

$$E_{in} = E_{fin} \rightarrow \underset{E_i}{\frac{1}{2} k \Delta x^2} = \underbrace{\frac{1}{2}(m_A + m_B) v_0^2}_{\text{UN ISTANTE PRIMA CHE I DUE CORPI SI SEPARINO}} \Rightarrow v_0^2 = \frac{k \Delta x^2}{m_A + m_B}$$

Dopo che i due corpi si sono separati, è come se B si fosse portato via un po' di energia, lasciando A con l'energia totale $\frac{1}{2} m_A v_0^2$

$$\frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{k}{2} \Delta x_A^2 \Rightarrow \Delta x_A = \sqrt{\frac{m_A v_0^2}{k}} = \Delta x \sqrt{\frac{m_A}{m_A + m_B}} = 0.091 m$$

b) La forza di attrito dissiperà parte dell'energia totale di B, e sappiamo quantificarla

$$W_{nc} = \Delta E_m \Rightarrow -\mu m_B g l = \underbrace{m_B g h}_{\text{Energia totale di B dopo aver attraversato il tratto con attrito la prima volta}} - \overbrace{\frac{1}{2} m_B v_0^2}^{\text{Energia totale di B prima di aver attraversato il tratto con attrito}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} - \mu l = \frac{k \Delta x^2}{2g(m_A + m_B)} - \mu l = 0.056 m$$

c) Principio simile a quello appena affrontato

$$W_{nc} = \Delta E_m \Rightarrow -2\mu m_B g l = \underbrace{\frac{1}{2} m v_B^2}_{\text{Energia totale di B dopo aver attraversato 2 volte il tratto con attrito}} - \frac{1}{2} m_B v_0^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{v_0^2 - 4\mu g l} = 0.74 \, m/s$$

ES. 4

Il sistema è costituito da due corpi interagenti, e la risultante delle forze esterne applicate al sistema è nulla

a) Per il teorema delle velocità relative applicato nell'istante di massima compressione della molla

$$v_m = v_m' + v_M$$

Dato che $v_m' = 0$ (nella massima compressione l'oggetto è fermo rispetto alla rampa)

$$\rightarrow v_m = v_M$$

Quindi: $P = cost = 0$, e nel momento di massima compressione

$$P_{max} = m v_m + M v_M = (m + M) v_M = 0 \Rightarrow v_M = 0$$

b) Per questo punto occorre considerare l'energia dissipata dalle forze di attrito

$$W_{nc} = \Delta E_m \rightarrow -\mu m g l = \overbrace{\frac{1}{2} k \Delta x^2}^{\text{En. tot. del sistema dopo aver attraversato il tratto con attrito}} - \underbrace{mgh}_{\text{Energia tot. iniziale}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2mg}{k}(h - \mu l)} = 0.267\ m$$

c) Sapendo che l'energia iniziale è mgh, basterà:

$$mgh = n \cdot \mu m g l \Rightarrow n = \frac{h}{\mu l} = 10.7 \Rightarrow N = 10$$

d) Basta considerare che

$$P = (m + M) v_{cm} = 0 = \text{costante} \Rightarrow v_{cm} = 0 \Rightarrow x_{cm} = \text{COSTANTE} \Rightarrow \Delta x_{cm} = 0$$