Lezione 8 - 14/03/2024

ESERCIZIO (sui tempi discreti)

$$y(n) = \begin{cases} \text{sign}\left(\frac{1}{x(n)}\right) & x(n) \neq 0 \\ 0 & x(n) = 0 \end{cases} = F(x(n))$$

$$F(u) = \begin{cases} \text{sign}\left(\frac{1}{u}\right) & u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases}$$

stiamo mappando questa funzione

1) CAUSALITÀ?
2) TEMPO INVARIANTE?
3) BIBO STABILITÀ?
4) RISPOSTA IMPULSIVA?
5) LINEARITÀ?

SOL. 1) CAUSALITÀ? SI ✓

Perché per costruire $y(n)$ al tempo n utilizziamo solo $x(n)$, cioè l'informazione sul presente. Quindi stiamo utilizzando un sistema istantaneo

Per definizione UN SISTEMA ISTANTANEO È SIA CAUSALE CHE ANTICAUSALE, quindi possiamo affermare che è causale

2) TEMPO-INVARIANZA? SI ✓

Per studiare la tempo invarianza devo valutare il segnale in $n-n_0$

$$F(x(n-n_0)) \stackrel{?}{=} F(x(n-n_0))$$

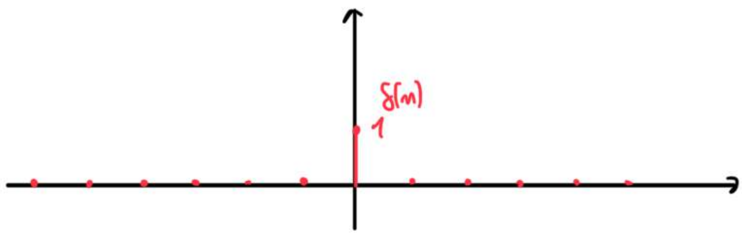
Per definizione tutti i sistemi istantanei sono tempo invarianti, quindi è tempo invariante

3) BIBO-STABILE? SI ✓

Perché i valori in uscita sono contenuti nella funzione segno, che è limitata (Più precisamente i valori di uscita sono 1, 0, -1)

4) RISPOSTA IMPULSIVA

$$h(n) = \begin{cases} \text{sign}\left(\frac{1}{\delta(n)}\right) & \delta(n) \neq 0 \\ 0 & \delta(n) = 0 \end{cases}$$



$h(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \end{cases}$

5) LINEARITÀ? No ✗

Il segno non è una funzione lineare

Ad esempio, se do in input 2 e 4 ottengo sempre 1, che non è una relazione lineare tra ingresso e uscita

ESERCIZIO

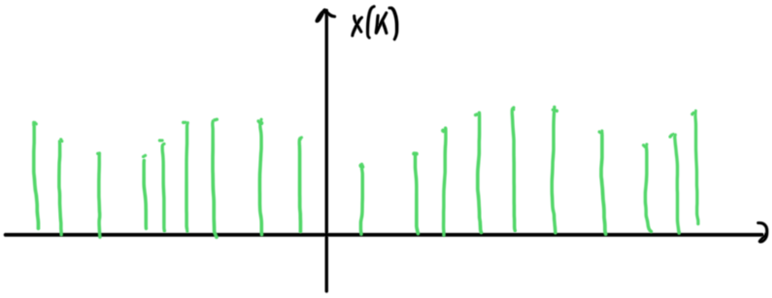
CALCOLARE $z(n) = x * y(n)$

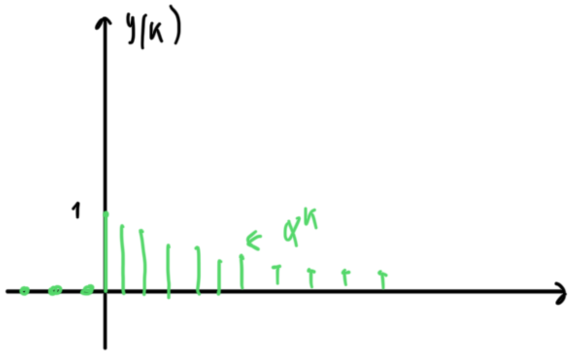
CON $x(n) = A + \cos(\theta_0 n)$

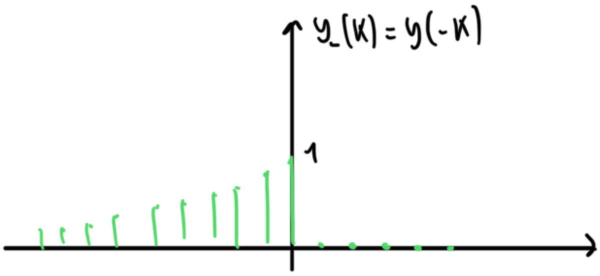
$y(n) = 1_\alpha(n)\,\alpha^n \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| < 1$

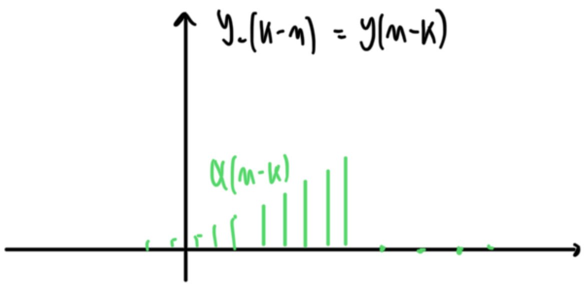
SOL. PER DEFINIZIONE DI CONVOLUZIONE

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y_-(k-n)$$









$$z(n) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(K)\,y(n-K) = \sum_{K=-\infty}^{n} \underbrace{x(K)}_{A+\cos(\theta_0 K)}\, \cancel{y}(n-K) \quad \alpha(n-K)$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{n} \left(A + \cos(\theta_0 K)\right) \alpha^{n-K}$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{n} \left(A + \frac{1}{2}e^{j\theta_0 K} + \frac{1}{2}e^{-j\theta_0 K}\right) \alpha^{n-K} \qquad m = n-K$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha^m \left(A + \frac{1}{2}e^{j\theta_0 (n-m)} + \frac{1}{2}e^{-j\theta_0(n-m)}\right)$$

[noto che le fasi dei numeri complessi sono complessi-coniugati

RICORDA: $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^* = \frac{B+B^*}{2} = \mathrm{Re}[B]$]

$$= \left(\alpha e^{-j\varphi_0}\right)^m = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\varphi_0}}$$

$$= A\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n + \frac{e^{j\varphi_0 n}}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m e^{-j\varphi_0 m} + \frac{e^{-j\varphi_0 n}}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m e^{-j\varphi_0 m} = \left(\alpha e^{j\varphi_0}\right)^m = \frac{1}{1-\alpha e^{j\varphi_0}}$$

$$= \frac{A}{1-\alpha} + \frac{e^{j\varphi_0 n}}{2}\,\frac{1}{1-\alpha e^{-j\varphi_0}} + \frac{e^{-j\varphi_0 n}}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{j\varphi_0}}$$

in un compito è sufficiente fermarsi qui. Noi andiamo un po' avanti per capire un po' meglio)

$$= \frac{A}{1-\alpha} + Re\left[\frac{e^{j\varphi_0 n}}{\underbrace{1-\alpha e^{-j\varphi_0}}_{B = |B|e^{j\varphi_B}}}\right] = \frac{A}{1-\alpha} + Re\left[\frac{e^{j(\varphi_0 n - \varphi_B)}}{|B|\,e^{j\varphi_B}}\right]$$

$$\rightarrow z(n) = \frac{A}{1-\alpha} + \frac{\cos(\varphi_0 n - \varphi_B)}{|B|} = x * y(n)$$

Un sistema LTI con in ingresso un coseno dà un coseno più una costante, molt. per un'opportuna costante. Ciò non è casuale ma lo ritroveremo studiando le trasformate di Fourier (è una proprietà)