A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

2º appello — 4 luglio 2018

Esercizio 1. Fornire un esempio di una matrice 2×2 non nulla che ha 0 come unico autovalore. Mostrare che ogni matrice quadrata N, di ordine 2, che ha 0 come unico autovalore è tale che N^2 è la matrice nulla.

Esercizio 2. Siano A e B due matrici invertibili, ad elementi reali, di ordine n e **congruenti**. È vero o falso che $\det A$ e $\det B$ hanno lo stesso segno? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$f(x_1, \dots, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_4,\ x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 + 2x_4,\ x_1 + x_2 - 2x_3).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e trovare delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $f(U) = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(u) \text{ per qualche } u \in U\}$. È vero che $f(U) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t in modo che il vettore $v = (1, 2, -1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori di A e scrivere delle basi degli autospazi corrispondenti.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$.

(a) Dato il vettore $v_1 = (-1, 1, -2, 1) \in U$ trovare altri due vettori v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $v = (6, -7, -1, 3)$ trovare due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v = u + u'$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + 2z - 5 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano contenente la retta r e ortogonale alla retta s.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P = (2, 1, 1)$ e parallelo alle rette s e t.

(c) Scrivere le equazioni parametriche di una retta parallela al piano di equazione $z = 0$ e incidente le rette r, s e t (ci sono due rette possibili, basta trovarne una).

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

2º appello — 4 luglio 2018

Esercizio 1. Fornire un esempio di una matrice 2×2 non nulla che ha 0 come unico autovalore. Mostrare che ogni matrice quadrata N, di ordine 2, che ha 0 come unico autovalore è tale che N^2 è la matrice nulla.

Esercizio 2. Siano A e B due matrici invertibili, ad elementi reali, di ordine n e **congruenti**. È vero o falso che $\det A$ e $\det B$ hanno lo stesso segno? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$f(x_1, \dots, x_4) = (2x_1 + 2x_3 - 2x_4,\ -x_2 + x_4,\ -x_1 - x_3 + x_4,\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e trovare delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $f(U) = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(u) \text{ per qualche } u \in U\}$. È vero che $f(U) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t in modo che il vettore $v = (1, -3, -1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori di A e scrivere delle basi degli autospazi corrispondenti.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Dato il vettore $v_1 = (1, -1, 1, 2) \in U$ trovare altri due vettori v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $v = (0, 1, -8, 2)$ trovare due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v = u + u'$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 3z - 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano contenente la retta r e ortogonale alla retta s.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P = (1, -1, 1)$ e parallelo alle rette s e t.

(c) Scrivere le equazioni parametriche di una retta parallela al piano di equazione $z = 0$ e incidente le rette r, s e t (ci sono due rette possibili, basta trovarne una).

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

2^o appello — 4 luglio 2018

Esercizio 1. Fornire un esempio di una matrice 2×2 non nulla che ha 0 come unico autovalore. Mostrare che ogni matrice quadrata N, di ordine 2, che ha 0 come unico autovalore è tale che N^2 è la matrice nulla.

Esercizio 2. Siano A e B due matrici invertibili, ad elementi reali, di ordine n e **congruenti**. È vero o falso che $\det A$ e $\det B$ hanno lo stesso segno? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$f(x_1, \dots, x_4) = (x_1 + x_3 - x_4,\, x_2 - x_3,\, x_1 + x_3 - x_4,\, x_1 + x_2 - x_4).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e trovare delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $f(U) = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(u) \text{ per qualche } u \in U\}$. È vero che $f(U) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t in modo che il vettore $v = (2, 1, -2)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori di A e scrivere delle basi degli autospazi corrispondenti.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

(a) Dato il vettore $v_1 = (-2, 1, -1, 1) \in U$ trovare altri due vettori v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $v = (2, 5, 9, -9)$ trovare due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v = u + u'$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y - 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 3y + z + 7 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano contenente la retta r e ortogonale alla retta s.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P = (0, 1, 2)$ e parallelo alle rette s e t.

(c) Scrivere le equazioni parametriche di una retta parallela al piano di equazione $z = 0$ e incidente le rette r, s e t (ci sono due rette possibili, basta trovarne una).

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

2º appello — 4 luglio 2018

Esercizio 1. Fornire un esempio di una matrice 2×2 non nulla che ha 0 come unico autovalore. Mostrare che ogni matrice quadrata N, di ordine 2, che ha 0 come unico autovalore è tale che N^2 è la matrice nulla.

Esercizio 2. Siano A e B due matrici invertibili, ad elementi reali, di ordine n e **congruenti**. È vero o falso che $\det A$ e $\det B$ hanno lo stesso segno? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$f(x_1,\dots,x_4) = (x_1 - x_3 - x_4,\ -2x_1 + 2x_3 + 2x_4,\ 2x_2 + 2x_3,\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e trovare delle basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $f(U) = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(u) \text{ per qualche } u \in U\}$. È vero che $f(U) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t in modo che il vettore $v = (-1, -2, 1)$ sia un autovettore di A.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori di A e scrivere delle basi degli autospazi corrispondenti.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

(a) Dato il vettore $v_1 = (1, 2, 1, -1) \in U$ trovare altri due vettori v_2 e v_3 in modo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $v = (7, -10, 1, 1)$ trovare due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v = u + u'$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r: \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases} \qquad t: \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano contenente la retta r e ortogonale alla retta s.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P = (2, 1, -1)$ e parallelo alle rette s e t.

(c) Scrivere le equazioni parametriche di una retta parallela al piano di equazione $z = 0$ e incidente le rette r, s e t (ci sono due rette possibili, basta trovarne una).