ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 01.07.2024

TEMA 1 (svolgimento)

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|e^{\frac{1}{x-2}}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.
(a). Il dominio è: $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Segno: $f(x) \geq 0$ su $\mathrm{dom} f$ perché f è prodotto di due funzioni nonnegative. No simmetrie apparenti.
Osserviamo che la funzione puó essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x > 2 \\ (2-x)e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

(b). Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Per il teorema sull'algebra dei limiti e per il limite della funzione composta, abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0.$$

Inoltre per il teorema del cambio di variabile nei limiti e per il teorema sulla gerarchia degli infiniti abbiamo

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \begin{pmatrix} \text{cambio} \\ \frac{1}{x-2} = y \end{pmatrix} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} = \infty;$$

la funzione presenta un asintoto verticale per $x \to 2^+$.
Calcoliamo, se esistono, gli eventuali asintoti obliqui per $x \to \infty$ e per $x \to \infty$. Per $x \to \infty$ abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$$

ed anche

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x\to\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1\right) - 2e^{\frac{1}{x-2}} \right] \\ &= \lim_{x\to\infty} \left[x\left(1 + \frac{1}{x-2} + o\left(\frac{1}{(x-2)}\right) - 1\right) - 2e^{\frac{1}{x-2}} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{x-2} + o(1) - 2e^{\frac{1}{x-2}} \right] \\ &= -1; \end{aligned}$$

la retta $y = x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.
Passiamo allo studio per $x \to -\infty$. Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{x} e^{\frac{1}{x-2}} = -1$$

ed anche

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x\to-\infty} \left[x \left(1 - e^{\frac{1}{x-2}} \right) + 2e^{\frac{1}{x-2}} \right] \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left[x \left(1 - 1 - \frac{1}{x-2} + o\left(\frac{1}{(x-2)} \right) \right) + 2e^{\frac{1}{x-2}} \right] \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{-x}{x-2} + o(1) + 2e^{\frac{1}{x-2}} \right] = 1;
\end{aligned}$$

la retta $y = -x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to \infty$.
(c). Per il terema sulla derivabilità della funzione composta e per quello sull'algebra delle derivate abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} \left[1 - \frac{x-2}{(x-2)^2} \right] = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x-3}{x-2} & \text{per } x > 2 \\ e^{\frac{1}{x-2}} \left[-1 - \frac{2-x}{(x-2)^2} \right] = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{-x+3}{x-2} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

Ne deduciamo: f è strettamente decrescente su $(-\infty, 2)$ e su $(2, 3]$, è strettamente crescente su $[3, \infty)$, presenta un punto di minimo relativo in $x = 3$, non assume né il minimo né il massimo assoluto, ha estremo superiore pari a ∞ ed estremo inferiore pari a 0. Inoltre i limiti della derivata sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f'(x) &= \lim_{x\to 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x-3}{x-2} = -\infty \\
\lim_{x\to 2^-} f'(x) &= \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} \frac{-x+3}{x-2} = 0.
\end{aligned}$$

(d). Segue grafico.

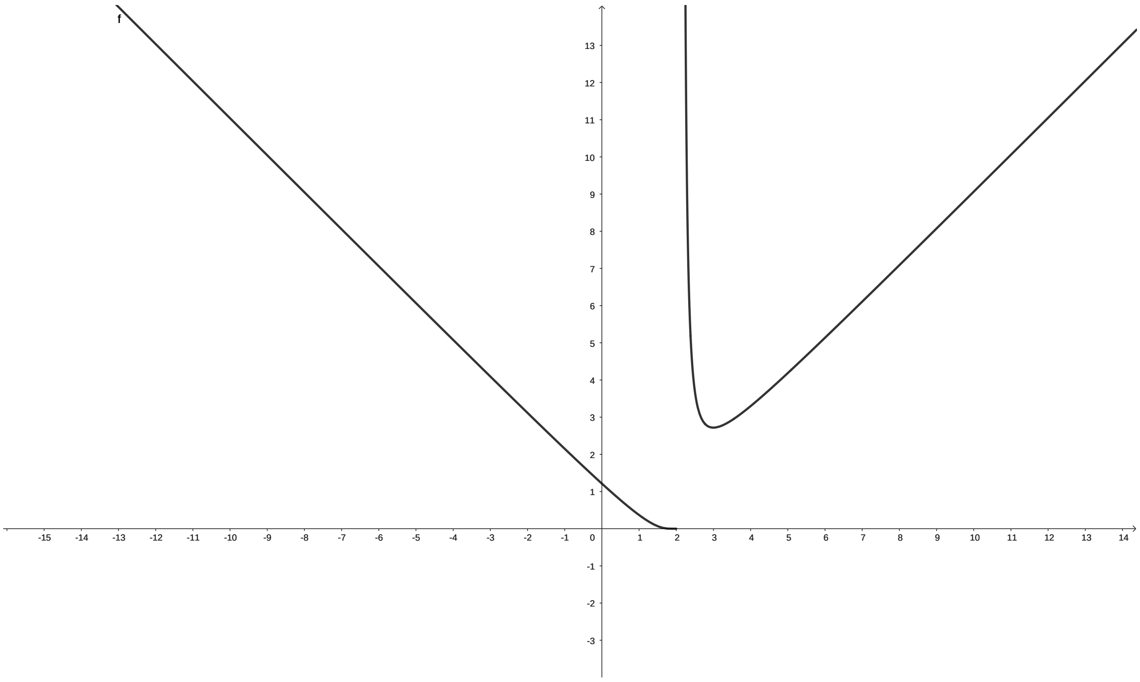

Figure 1: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\left(\frac{z+3i}{i}\right)^4 = -16$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. Operando la sostituzione

$$w = \frac{z+3i}{i}$$

otteniamo

$$w^4 = -16.$$

Poiché il numero -16 ha modulo pari a 16 e argomento pari a $-\pi$, per la regola di soluzione della radici n-esime otteniamo che le soluzioni w hanno:

$$\text{modulo} = \sqrt[4]{16} = 2, \qquad \arg w = \frac{-\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$

Quindi abbiamo

$$w_0 = 2e^{i\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \qquad w_1 = 2e^{3i\pi/4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$w_2 = 2e^{5i\pi/4} = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad w_3 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{7i\pi/4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Torniamo alla variabile z:
0. $\frac{z+3i}{i} = w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ dà $z_0 = -\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i$,
1. $\frac{z+3i}{i} = w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ dà $z_1 = -\sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i$,
2. $\frac{z+3i}{i} = w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ dà $z_2 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i$,

3. $\frac{z+3i}{i} = w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ dà $z_3 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i$.
In conclusione, le soluzioni dell'equazione sono

$$z_0 = -\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i,\ z_1 = -\sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i,\ z_2 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i,\ z_3 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i.$$

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a + 1}{n^2 + 1} a^n.$$

Svolgimento. Osservo che il termine $\frac{n^a+1}{n^2+1}a^n$ è sempre strettamente positivo; posso pertanto applicare tutti i criteri per le serie a segno positivo. Per poter applicare il criterio del rapporto, calcoliamo

$$\lim_n \left[\frac{(n+1)^a + 1}{n^a + 1} \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} \frac{a^{n+1}}{a^n} \right] = a.$$

Per il criterio suscritto possiamo concludere che la serie è convergente per $a \in (0, 1)$ ed è divergente per $a > 1$.
Il caso $a = 1$ va trattato separatamente; sostituiamo $a = 1$ nella legge della serie ed otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+1}.$$

Osserviamo che per $n \to \infty$ vale: $\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ e che quest'ultimo è il termine della serie armonica (che è divergente). Per il criterio del rapporto asintotico deduciamo che anche la serie iniziale con $a = 1$ è divergente.
In conclusione la serie è convergente per $a \in (0, 1)$ mentre è divergente per $a \in [1, \infty)$.

Esercizio 4 (punti 8) Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x - 4} \mathrm{d}x$$

[*Suggerimento:* si ricorda la sostituzione $t = \tan(x/2)$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.]

Svolgimento. Usando la formula trigonometrica $\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ (N.B.: questa formula non è un cambio di variabile nell'integrale) e poi operando la sostituzione $t = \tan(x/2)$ otteniamo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x - 4} \mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{-4t^2 + 6t - 4}\, dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2 - \frac{3}{2}t + 1}\, dt.$$

Studiamo l'integrale indefinito. Il denominatore è un polinomio di secondo grado senza soluzioni reali; può essere scritto come

$$t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}.$$

Allora abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^2 - \frac{3}{2}t + 1} &= \int \frac{dt}{\left(t-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \int \frac{dt}{\frac{7}{16}\left[\left(\frac{t-\frac{3}{4}}{\sqrt{7}/4}\right)^2 + 1\right]} = \frac{16}{7}\int \frac{dt}{\left[\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t - \frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right]} \\
&= \begin{pmatrix} \text{sostituzione} \\ z = \frac{4}{\sqrt{7}}t - \frac{3}{\sqrt{7}} \\ dt = \frac{\sqrt{7}}{4}dz \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{7}}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{4}{\sqrt{7}}\arctan z \\
&= \frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t - \frac{3}{\sqrt{7}}\right).
\end{aligned}
$$

In conclusione, valgono le seguenti uguaglianze

$$
\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x - 4}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2 - \frac{3}{2}t + 1} = -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t - \frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right]_{t=-1}^{t=1} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - \arctan\left(-\sqrt{7}\right)\right] \\
&= -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \arctan\left(+\sqrt{7}\right)\right] = -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

dove nella terz'ultima e nella penultima uguaglianza abbiamo usato rispettivamente la disparità della funzione arctan e la proprietà $\arctan(a) + \arctan(1/a) = \pi/2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.