ESERCIZI TUTORATO

1. Si determini per quali valori di $t \in R$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((0,1,-1)^T) = (3,-1,0)^T, f((-2,1,3)^T = (-t,-1,t+3)^T$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(1; t^2+3t; -2)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{4}$ si considerino i sottospazi $U_1 =< u_1; u_2; u_3; u_4 >$, ove $u_1 = (1;-1,0;2)^T, u_2 = (2,1,-1,2)^T, u_3 = (1,-4,1;4)^T, u_4 = (-3,-3,2,-2)^T$ U_2 di equazioni $3x_1 - 4x_2 = 0$ e $5x_1 + 7x_2 = 0$.

   - Si determini una base di U_1 e una base di U_2. Si determini, se esiste, una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $U_1 =< v_1, v_2 >, U_2 =< v_3, v_4 >$.
   - Dati $w_1 = (2,-1,3), w_2 = (1,1,2), w_3 = (5,-4,t)$, si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(u_1) = w_1, g(u_2) = w_2, g(u_3) = w_3$. Si dica inoltre se tale g è unica.

3. Date due basi:

$$V = \{(1,2,-1)^T, (0,1,2)^T, (1,2,0)^T\}$$
$$V' = \{(-1,-2,+1)^T, (0,-2,1)^T, (0,-1,1)^T\}$$

   Trovare $M^V_{V'}(id)$.

4. Siano V e W due spazi vettoriali, sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di V e $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di W. Indichiamo con $f : V \to W$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(v_1 - v_3) = w_1 - 2w_2 - 2w_3, f(v_1 + v_3) = w_1 + 2w_2, f(v_1 - v_2 + v_3) = w_2, f(v_1 - v_3 + v_4) = 5w_1 - 4w_3$$

   (a) Si dica se f è univocamente determinata rispetto alle condizioni date e si scriva la matrice di f rispetto alle basi date

   (b) Si determinino una base per $ker f$ e una per $Im f$

   (c) Si determini $f^{-1}(w_1 + w_3)$