I prova in itinere di FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Si possono utilizzare **solo** articoli di cancelleria (penna, matita, etc.), fogli bianchi e un computer o tablet con una sola finestra aperta sulla pagina moodle con l'esame. Non si possono, in particolare, tenere fotocopie di alcun tipo, appunti, quaderni, etc.

Durata della prova: 70 minuti

- **Domanda 1.** Si consideri il polinomio

$$P(s) = s^6 + 3s^5 - s^4 + 4s^3 + s^2 + s + 1.$$

Si ha:

1. Tutti gli zeri di $P(s)$ hanno parte reale minore di -1;
2. $P(s)$ è un polinomio di Hurwitz;
3. GIUSTA $P(s)$ non è un polinomio di Hurwitz;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. I segni del primo e del terzo coefficiente del polinomio $P(s)$ sono discordi. Pertanto, $P(s)$ non è un polinomio di Hurwitz.

- **Domanda 2.** Si consideri un sistema Σ di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s^5+2s^4+s^2+s+K}$ dove K è un parametro reale.

1. Σ è BIBO stabile per ogni $K > 0$;
2. Σ è BIBO stabile per ogni $K \in (0, 45/4)$;
3. GIUSTA Qualunque sia il valore del parametro reale K, Σ non è BIBO stabile;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Il terzo coefficiente del polinomio $P(s) := s^5 + 2s^4 + s^2 + s + K$ è nullo per ogni valore di K. Pertanto, $W(s)$ non è BIBO stabile.

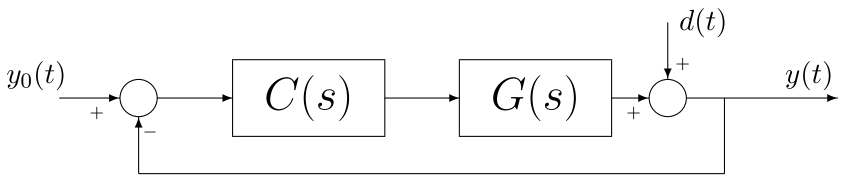
- **Domanda 3.** Si consideri un sistema Σ di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{s+1}$ e sia $y(t)$ la sua risposta indiciale. Si ha:

  1. GIUSTA $y(t) = [1 - \mathrm{e}^{-t}]1(t)$;
  2. $y(t) = [1 - \mathrm{e}^{t}]1(t)$;
  3. $y(t) = [1 + \mathrm{e}^{-t}]1(t)$;
  4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

  Motivazione della risposta. Si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}[(1/s)W(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}] = [1 - \mathrm{e}^{-t}]1(t).$$

- **Domanda 4.** Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove $G(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$ e $C(s) = \dfrac{3}{2\,s+3}$.

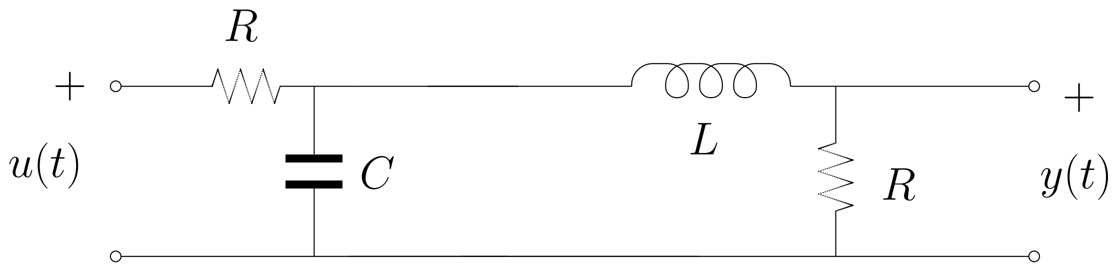


  Indicando con $W(s)$ la funzione di trasferimento da y_0 a y e con $W_d(s)$ la funzione di trasferimento da d a y, si ha:

  1. $W(s) = \frac{3s+1}{2s^2+10s+9}$ e $W_d(s) = \frac{1}{2s^2+10s+9}$
  2. GIUSTA $W(s) = \frac{3(s+1)}{2s^2+10s+9}$ e $W_d(s) = \frac{2s^2+7s+6}{2s^2+10s+9}$
  3. $W(s) = \frac{1}{2s^2+10s+9}$ e $W_d(s) = \frac{3}{2s^2+10s+9}$
  4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

  Motivazione della risposta. Calcolando $W = \frac{CG}{1+CG}$ e $W_d = \frac{1}{1+CG}$ si ottengono facilmente i risultati riportati.

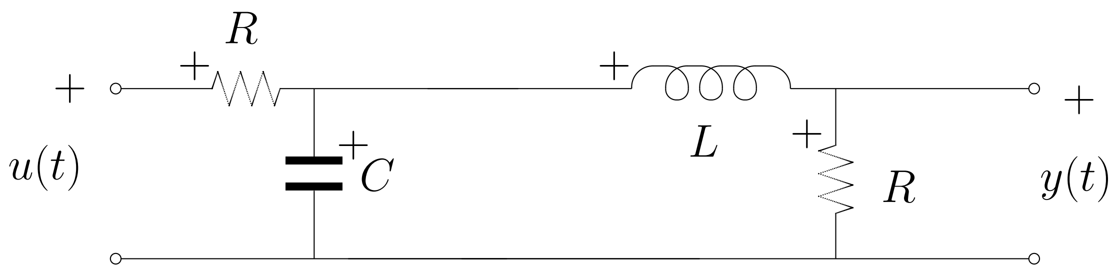
- **Domanda 5.** Si vuole progettare un filtro con la struttura rappresentata in figura, dove R, L e C sono parametri positivi costanti.



Si consideri la tensione $u(t)$ applicata come ingresso del filtro e la tensione $y(t)$ (a morsetti di uscita aperti) come uscita. Sia $H(s)$ la funzione di trasferimento del filtro. Si ha:

1. $H(s) = \frac{\frac{1}{CL}}{s^2+\left(\frac{1}{RC}-\frac{R}{L}\right)s+\frac{1}{CL}}$;
2. GIUSTA $H(s) = \frac{\frac{1}{CL}}{s^2+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)s+\frac{2}{CL}}$;
3. $H(s) = \frac{\frac{1}{CL}}{s^2+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)s}$;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Si adottino le seguenti scelte dei segni delle tensioni nei vari elementi R, L e C.



Si utilizzi inoltre la convenzione degli utilizzatori per fissare il segno positivo delle correnti. Sia v_C la tensione ai capi di C e i_L la corrente che scorre su L e si fissi il vettore di stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

Si ha

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}\left[\frac{u - v_C}{R} - i_L\right] = \frac{1}{C}\left[\frac{u - x_1}{R} - x_2\right]$$

e

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} v_L = \frac{1}{L}[v_C - R i_L] = \frac{1}{L}[x_1 - R x_2]$$

Inoltre

$$y = R i_L = R x_2.$$

Pertanto le equazioni di stato sono:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad R] x \end{cases}$$

Risulta ora immediato calcolare la f. di t.

$$\begin{aligned} H(s) &= [0 \quad R] \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & +\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{[0 \quad R] \begin{bmatrix} \star & \star \\ \frac{1}{L} & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}}{\left(s + \frac{1}{RC}\right)\left(s + \frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right) s + \frac{2}{LC}} \end{aligned}$$

- **Domanda 6.** Si consideri il sistema

$$\Sigma : \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0] x + u \end{cases}$$

Sia $H(s)$ la funzione di trasferimento del filtro. Si ha:

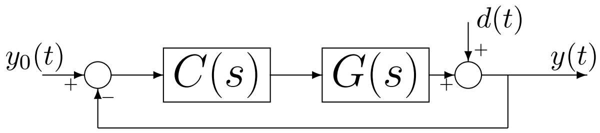
1. $H(s) = \frac{2}{(s-1)(s-3)}$;
2. $H(s) = \frac{2+(s+1)(s+3)}{(s+1)(s+3)}$;
3. $H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$;
4. GIUSTA nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Posso immediatamente escludere la 1. e la 3. perché sono f. di t. strettamente proprie mentre l'ingresso appare esplicitamente nell'equazione di uscita del sistema. Posso anche escludere la 2. perché gli autovalori della matrice di stato del sistema sono 1 e 3 mentre i poli della $H(s)$ riportata al punto 2. sono in -1 e -3.

Alternativamente, si possono svolgere i calcoli e ottenere la f. di t. $H(s)$ corretta che è:

$$H(s) = \frac{-2 + (s-1)(s-3)}{(s-1)(s-3)}$$

- **Domanda 7.** Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove $G(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$ e $C(s) = 20$.



Sia e_r l'errore a regime in corrispondenza a $y_0(t) = t\ 1(t)$ e $d(t) = \frac{1}{2}1(t)$. Si ha:

1. $e_r = 1/20$
2. $e_r = 0$;
3. $e_r = 20$
4. GIUSTA nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. La funzione di trasferimento a catena chiusa è

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{\frac{20}{s(s+1)^2}}{1 + \frac{20}{s(s+1)^2}} = \frac{20}{s(s+1)^2 + 20}$$

ossia

$$W(s) = \frac{20}{s^3 + 2s^2 + s + 20}.$$

Con la tabellina di Routh,

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 20 \\ 1 & -9 & \\ 0 & 20 & \end{array}$$

risulta immediato constatare che la funzione di trasferimento a catena chiusa NON è BIBO stabile e quindi l'errore non ha un valore di regime.

- **Domanda 8.** Si consideri un sistema di funzione di trasferimento $W(s) := \frac{2s+10}{s^2+s+3}$. Sia $y(t)$ la risposta forzata del sistema in corrispondenza ad un ingresso a gradino unitario; sia

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$$

Si ha:

1. GIUSTA $y_\infty = 10/3$;
2. $y_\infty = 3/10$;
3. il limite a secondo membro non esiste o non è finito;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Utilizzando il Criterio di Cartesio si conclude subito che la funzione di trasferimento a catena chiusa è BIBO stabile. Pertanto $\lim_{t\to\infty} y(t) = W(0) = 10/3$.

- **Domanda 9.** Si consideri un sistema lineare Σ di ordine 3. Sia A la matrice di stato di Σ. Sapendo che -1 è un autovalore di A e la sua molteplicità algebrica è 2, si può concludere che:

1. GIUSTA Σ è semplicemente stabile se e solo se nessuno degli autovalori di A ha parte reale positiva;
2. Σ non è asintoticamente stabile;
3. Σ è BIBO stabile se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. In generale sappiamo che un sistema è semplicemente stabile se e solo se:
1) nessuno degli autovalori della relativa matrice di stato A ha parte reale positiva e
2) gli eventuali autovalori di A a parte reale nulla hanno molteplicità algebrica e molteplicità geometrica coincidente.

In questo caso l'unico autovalore a parte reale nulla che può avere A è l'autovalore $\lambda_0 := 0$. Tale autovalore, se presente, ha molteplicità algebrica pari a 1 (perchè la somma delle molteplicità algebriche di tutti gli autovalori di A è pari alla dimensione di A ossia all'ordine del sistema, cioè 3). In tal caso, la molteplicità geometrica di λ_0 è anch'essa uguale a 1. Infatti la molteplicità geometrica è sempre maggiore o uguale a 1 e minore o uguale alla relativa molteplicità algebrica. Pertanto, la condizione 2) è automaticamente soddisfatta e quindi la 1) è necessaria e sufficiente per la stabilità semplice del sistema.