

La polarizzazione del campo elettromagnetico

Corso di Bioelettromagnetismo

Laurea in Ingegneria Biomedica

A.A. 2023/2024

1.1 Introduzione

In questa dispensa sono raccolti i fondamenti riguardanti la polarizzazione del campo elettromagnetico e la rappresentazione attraverso vettori complessi dei vettori sinusoidali.

La polarizzazione del campo elettromagnetico (da non confondere con la polarizzazione del mezzo \bar{P} definita da $\bar{d} = \epsilon_0 \bar{e} + \bar{P}$) è una proprietà fondamentale che distingue i campi elettromagnetici da molte altre grandezze fisiche. Essenzialmente rappresenta il fatto che il campo elettrico e quello magnetico sono grandezze vettoriali. In questa dispensa si studierà esclusivamente la polarizzazione del campo elettrico, essendo quella del campo magnetico derivabile allo stesso modo.

In molti problemi di elettromagnetismo la conoscenza della polarizzazione può diventare imprescindibile affinché un dispositivo o un sistema possano funzionare nel modo corretto. Alla fine di questa dispensa si daranno alcuni esempi applicativi per comprendere quest'ultima affermazione.

1.2 Polarizzazione di un'onda monocromatica

Si consideri il vettore campo elettrico di un'onda monocromatica sinusoidale, ovvero un'onda in cui tutte le componenti variano nel tempo con legge sinusoidale. In un dato punto \bar{r} dello spazio, il generico campo elettrico sinusoidale può essere espresso come segue:

$$\bar{e}(t, \bar{r}) = \sum_{n=1}^3 \hat{x}''_n E_n(\bar{r}) \cos(\omega t + \phi_{E_n}(\bar{r})); \quad (1.1)$$

dove \hat{x}''_n , $n = 1, 2, 3$, sono i versori di un qualsiasi sistema di riferimento cartesiano ortogonale, $E_n \in \mathcal{R}$ e $\phi_{E_n} \in [0, 2\pi]$ per $n = 1, 2, 3$.

La precedente relazione può essere riscritta sviluppando il coseno attraverso le formule della trigonometria e riordinando opportunamente i ter-

mini:

$$\begin{aligned}
 \bar{e}(t, \bar{r}) &= \sum_{n=1}^3 \hat{x}''_n E_n(\bar{r}) (\cos \omega t \cos \phi_{En}(\bar{r}) - \sin \omega t \sin \phi_{En}(\bar{r})) = \\
 &= \left(\sum_{n=1}^3 \hat{x}''_n E_n(\bar{r}) \cos \phi_{En}(\bar{r}) \right) \cos \omega t - \left(\sum_{n=1}^3 \hat{x}''_n E_n(\bar{r}) \sin \phi_{En}(\bar{r}) \right) \sin \omega t = \\
 &= \bar{E}^r(\bar{r}) \cos \omega t - \bar{E}^i(\bar{r}) \sin \omega t.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove $\bar{E}^r(\bar{r})$, $\bar{E}^i(\bar{r})$ sono vettori reali, indipendenti dal tempo. Il vettore campo elettrico dato dalla 1.1 presenta quindi tre fondamentali proprietà:

- 1) in ogni istante t , $\bar{e}(t, \bar{r})$ giace nel piano individuato dai vettori $\bar{E}^r(\bar{r})$ e $\bar{E}^i(\bar{r})$; questo piano prende il nome di *piano di polarizzazione*;
- 2) essendo ogni singola componente del vettore periodica, la traiettoria percorsa da $\bar{e}(t, \bar{r})$ nel piano di polarizzazione è una curva chiusa;
- 3) la curva chiusa è un'ellisse.

Le prime due proprietà sono ovvie, osservando la relazione 1.2; si vuole ora dimostrare la terza. A tale scopo si introduce sul piano di polarizzazione un sistema di riferimento $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$, così che si possa porre (da questo punto in poi si omette la dipendenza dei vettori dal punto \bar{r} per semplicità di notazione) $\bar{E}^r = E_x^r \hat{x}' + E_y^r \hat{y}'$ ed $\bar{E}^i = E_x^i \hat{x}' + E_y^i \hat{y}'$, ossia:

$$\begin{aligned}
 \bar{e}(t) &= (E_x^r \cos \omega t - E_x^i \sin \omega t) \hat{x}' + (E_y^r \cos \omega t - E_y^i \sin \omega t) \hat{y}' = \\
 &= e'_x(t) \hat{x}' + e'_y(t) \hat{y}'.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

La stessa equazione, riscritta in forma matriciale, diventa:

$$\begin{pmatrix} e'_x(t) \\ e'_y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} E_x^r & -E_x^i \\ E_y^r & -E_y^i \end{pmatrix}}_* \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}}_{**}. \tag{1.4}$$

Si vede allora che il luogo dei punti descritti da $\bar{e}(t)$ è una circonferenza (**) distorta e rotata secondo una trasformazione lineare (*): quindi un'ellisse. Per questo si è soliti dire che un campo monocromatico ha *polarizzazione ellittica*.

Si dimostra che un campo polarizzato ellitticamente, riferito ad un sistema $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ parallelo agli assi principali dell'ellisse, può essere scritto in forma matriciale come segue (si veda la figura 1.1):

$$\bar{e}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t + \phi) \\ \pm b \sin(\omega t + \phi) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

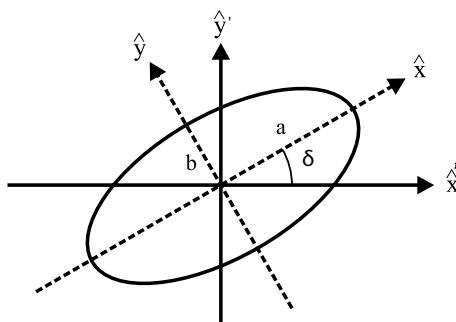


FIGURE 1.1. Ellisse di polarizzazione.

dove ϕ è una fase, ininfluyente per quanto riguarda la polarizzazione, mentre a, b sono due costanti reali e positive che rappresentano la lunghezza dei semiassi dell'ellisse. I diversi segni davanti a b indicano i due possibili sensi di rotazione del vettore nel piano. Prendendo il segno $+$ il senso di rotazione coincide con quello di una vite di tipo destrorso che avanza nella direzione dell'asse \hat{z}' , uscente dal piano di polarizzazione \hat{x}', \hat{y}' . A tale polarizzazione viene per convenzione assegnato il nome di *polarizzazione ellittica destrorsa* (o destrorsa). Nell'altro caso invece la polarizzazione è detta *ellittica sinistrorsa* (o levogira).

E' utile anche osservare che esistono alcuni casi degeneri. Quando $a \neq 0, b = 0$ oppure $a = 0, b \neq 0$ l'ellisse degenera in una retta parallela rispettivamente all'asse \hat{x} oppure all'asse \hat{y} ; in questi casi la polarizzazione è detta *rettilinea*. Ancora, se $a = b$, allora l'ellisse degenera in una circonferenza e la polarizzazione è *circolare* (destrorsa o sinistrorsa a seconda del segno nella 1.5).

Per proseguire l'analisi, conviene ora passare ad una diversa rappresentazione delle grandezze in esame, che risulta più comoda e maneggevole nel caso del regime sinusoidale, ovvero alla rappresentazione con i vettori complessi (detta anche rappresentazione di Steinmetz). Tali vettori saranno ampiamente usati durante il corso ed in questa dispensa se ne analizzano le principali proprietà.

1.3 Vettori complessi

Come è noto dal corso di Elettrotecnica è possibile rappresentare grandezze scalari (ad esempio la tensione $v(t)$ o la corrente $i(t)$), variabili con legge si-

sinusoidale attraverso un fasore, ossia un numero complesso, indipendente dal tempo. L'operazione che permette di ricavare la grandezza temporale a partire dal fasore è quella del calcolo della parte reale del fasore moltiplicato per $\exp(j\omega t)$ dove ω è la pulsazione del segnale. Ricordando ad esempio il caso della tensione:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} [V \exp(j\omega t)], \quad (1.6)$$

dove il fasore

$$V = V_0 \exp(j\phi) \in \mathbb{C}, \quad (1.7)$$

ha *modulo* $|V| = V_0$ e *fase* $\angle V = \phi$ (Nota: fasore al valore massimo, a differenza dell'Elettrotecnica dove si usano fasori ai valori efficaci; ciò introduce un fattore 0.5 nella formula per il calcolo della potenza complessa) .

Si vuole ora estendere questa rappresentazione al caso del campo elettrico o magnetico; le grandezze da rappresentare sono vettori reali a tre componenti, ognuna variabile in modo sinusoidale, ma che può avere un fattore di sfasamento diverso (come nella relazione 1.1).

Si definisce quindi un fasore di tipo vettoriale, rappresentativo del vettore reale in regime monocromatico sinusoidale, il quale è dato da:

$$\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{n=1}^3 \hat{x}_n E_n(\bar{r}) \exp(j\phi_{En}(\bar{r})). \quad (1.8)$$

Infatti, si può verificare facilmente che la relazione che lega il vettore \bar{E} al vettore reale \bar{e} è semplicemente una estensione della relazione di tipo scalare 1.6, ossia:

$$\bar{e}(t, \bar{r}) = \operatorname{Re} [\bar{E}(\bar{r}) \exp(j\omega t)] \quad (1.9)$$

Il vettore \bar{E} , che dipende solo dalla posizione e non dal tempo, ha quindi tre componenti (una per ogni asse reale) che sono numeri complessi di modulo E_n e fase ϕ_{En} , ossia è un *vettore complesso*.

Si definiscono qui brevemente alcune proprietà dei vettori complessi, che verranno utilizzate spesso durante il Corso. Come si vedrà ci sono varie differenze fra le proprietà di questi vettori e quelle, già note allo Studente, dei vettori reali. Bisogna quindi avere una certa cautela prima di trarre conclusioni sulle caratteristiche dei vettori sulla scorta delle nozioni sui vettori reali.

L'insieme dei vettori complessi $\bar{A} \in \mathbb{C}^3$ è uno spazio vettoriale definito sul corpo dei numeri complessi \mathbb{C} ; le operazioni di somma di vettori e prodotto di uno scalare (in questo caso un numero complesso) per un vettore sono le usuali operazioni di somma componente per componente e prodotto fra ogni

componente e lo scalare. In tale spazio vettoriale può essere introdotto un *prodotto interno* e quindi una *norma*. Il prodotto interno $\langle | \rangle$ fra due vettori complessi \bar{A} e \bar{B} viene definito da

$$\langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* = \sum_{n=1}^3 A_n B_n \exp[j(\phi_{An} - \phi_{Bn})]. \quad (1.10)$$

L'operazione di coniugio del secondo vettore si rende necessaria affinché tale prodotto interno possa effettivamente definire una norma (ossia una applicazione su \mathcal{R}). Infatti la norma, o modulo del vettore \bar{A} , è dato da

$$|\bar{A}| = \sqrt{\langle \bar{A} | \bar{A} \rangle} = \sqrt{\bar{A} \cdot \bar{A}^*} = \sqrt{\sum_{n=1}^3 A_n^2} \quad (1.11)$$

il quale è sempre un numero reale.

Accanto alla definizione della norma, possono essere definiti, in analogia con lo spazio dei vettori reali, i concetti di vettori complessi paralleli, ortogonali e di proiezione di un vettore complesso su un altro vettore complesso. In particolare due vettori \bar{A} e \bar{B} si dicono paralleli se esiste un *numero complesso* λ tale per cui:

$$\bar{A} = \lambda \bar{B} \quad (1.12)$$

Due vettori sono invece ortogonali se il loro prodotto interno è nullo, ossia:

$$\langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* = 0 \quad (1.13)$$

Infine la proiezione di un vettore complesso \bar{A} su un vettore complesso \bar{B} è data da:

$$A_B = \langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* \quad (1.14)$$

ed è quindi uno scalare (complesso). Nel dominio dei vettori reali i concetti di vettori paralleli e ortogonali sono ben noti; nel dominio dei vettori complessi il loro significato è invece diverso.

Tornando al vettore complesso rappresentativo del campo elettrico 1.8, usando la 1.2 e 1.9, è facile verificare che esso può anche essere scritto come:

$$\bar{E} = \bar{E}^r + j\bar{E}^i = \text{Re} [\bar{E}] + j\text{Im} [\bar{E}] \quad (1.15)$$

e quindi

$$\bar{e}(t) = \text{Re} [\bar{E}] \cos(\omega t) - \text{Im} [\bar{E}] \text{sen}(\omega t), \quad (1.16)$$

Si osservi che i vettori \bar{E}^r ed \bar{E}^i non sono in generale ortogonali fra loro; risulta quindi più comodo esprimere il vettore complesso non rispetto ad

essi ma piuttosto in base ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale qualsiasi nel piano di polarizzazione. In tal caso si può scrivere

$$\bar{E} = E'_x \hat{x}' + E'_y \hat{y}' , \quad (1.17)$$

dove

$$E'_x = \langle \bar{E} | \hat{x}' \rangle = \bar{E} \cdot \hat{x}'^* = \bar{E} \cdot \hat{x}' , \quad (1.18)$$

$$E'_y = \langle \bar{E} | \hat{y}' \rangle = \bar{E} \cdot \hat{y}'^* = \bar{E} \cdot \hat{y}' , \quad (1.19)$$

dove l'ultimo passaggio in entrambe le relazioni precedenti sfrutta il fatto che i versori della base cartesiana ortogonale sono vettori reali.

Nel sistema degli assi principali dell'ellisse si verifica, in base alla equazione 1.5, che il vettore complesso diviene:

$$\bar{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = a \exp(j\phi) \hat{x} \mp jb \exp(j\phi) \hat{y} \quad (1.20)$$

Nota l'espressione del vettore complesso nel piano di polarizzazione, la determinazione dello stato di polarizzazione del campo (ossia il discernere se la polarizzazione sia ellittica, rettilinea, circolare, destrorsa o sinistrorsa) si può realizzare ad esempio calcolando il relativo vettore reale (nel dominio del tempo) e disegnando per punti la traiettoria dello stesso. Tale procedimento è tuttavia laborioso. Si può dimostrare però che, senza tornare nel dominio del tempo, direttamente dalla conoscenza del vettore complesso in un punto dello spazio è possibile desumere lo stato di polarizzazione in quel punto.

1.4 Vettori complessi paralleli ed ortogonali

Nel dominio dei vettori complessi, le proprietà di parallelismo e ortogonalità sono di fatto legate alle proprietà di polarizzazione, si dimostra infatti che i vettori reali (nel dominio del tempo) dei campi rappresentati da vettori complessi paralleli godono delle proprietà di:

- a) avere lo stesso stato di polarizzazione (compreso il verso di rotazione);
- b) avere un ugual rapporto fra i semiassi dei rispettivi ellissi.

Il parallelismo nel dominio dei vettori complessi implica quello dei vettori reali rappresentati solo in due casi. Il primo se $\lambda \in \mathcal{R}$; infatti se λ è reale le componenti di un vettore non sono sfasate rispetto a quelle dell'altro. Il secondo caso è quello in cui i vettori complessi sono polarizzati rettilineamente

lungo lo stesso asse; infatti in tale caso i relativi vettori reali rimangono anch'essi diretti lungo lo stesso asse.

Quando invece risulta che due vettori complessi sono ortogonali, si dimostra che essi rappresentano dei campi che:

a) se la polarizzazione è ellittica, hanno la stessa ellitticità ma verso di rotazione opposto, se la polarizzazione è rettilinea hanno polarizzazione rettilinea ortogonale;

b) hanno un rapporto fra i semiassi dei rispettivi ellissi invertito, in pratica dire che il rapporto fra semiassi è invertito significa che i relativi ellissi sono ruotati di 90 gradi.

Quindi vettori ortogonali nel dominio dei vettori complessi corrispondono a campi vettoriali istantaneamente ortogonali nel dominio del tempo solo nel caso di polarizzazione rettilinea.

1.5 Effetti della polarizzazione nelle applicazioni

La polarizzazione è una proprietà importante dei campi elettromagnetici e in molte applicazioni si devono considerare gli effetti ad essa dovuti. Un esempio, nel campo delle antenne, è la condizione di *adattamento in polarizzazione*. Tutte le antenne, in ricezione, mostrano un certo grado di sensibilità rispetto allo stato di polarizzazione del campo incidente. Il caso estremo è rappresentato dalle antenne filiformi, dove il conduttore è in grado di rivelare una differenza di potenziale ai suoi estremi solo per la componente del campo parallela all'asse dell'antenna stessa. Quindi se la polarizzazione dell'onda incidente è rettilinea sull'asse ortogonale a quello dell'antenna, la differenza di potenziale sarà nulla e non si rivela alcun campo. Questo spiega perché le antenne per la ricezione dei segnali televisivi (antenne Yagi) sono costituite da una schiera di antenne filiformi tutte orientate nello stesso modo e poste con il loro asse parallelo al suolo (in quanto la trasmissione è realizzata con stato di polarizzazione rettilinea parallelo al suolo). La polarizzazione è quindi un fattore da considerare a livello progettuale, nel caso di antenne. Si può citare il caso delle sonde di campo elettromagnetico, che devono essere appunto realizzate con almeno due dipoli (o spire) incrociati, i quali misurano le due componenti ortogonali nel piano di polarizzazione. Le sonde migliori utilizzano tre dipoli (o spire) in modo che la misura di ampiezza di campo sia indipendente dall'orientazione della sonda stessa. Anche le antenne ad apertura (ad esempio i riflettori parabolici) possono mostrare problemi di

esercizio dovuti alla polarizzazione. Infatti il campo incidente, che in genere ha una polarizzazione rettilinea, subisce una diversa riflessione a seconda del punto di incidenza sulla parabola, distorto lo stato di polarizzazione del segnale inviato al ricevitore, posto sul fuoco della parabola (effetti di depolarizzazione).