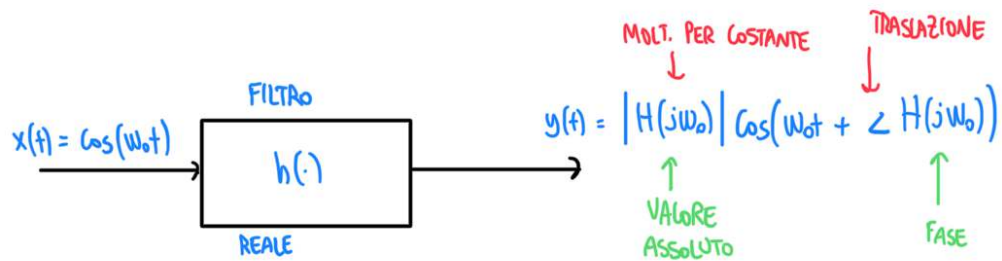


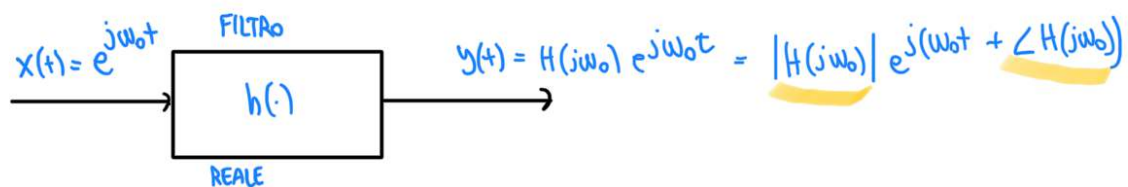
Lezione 21 - 3/05/2023

IERI ABBIAMO TROVATO QUESTA PROPRIETÀ FONDAMENTALE: (che c'è anche nel compito)



⇒ UN FILTRO REALE NON DISTORCE LE SINUSOIDI

LA STESSA COSA VALE PER GLI ESPONENZIALI COMPLESSI:

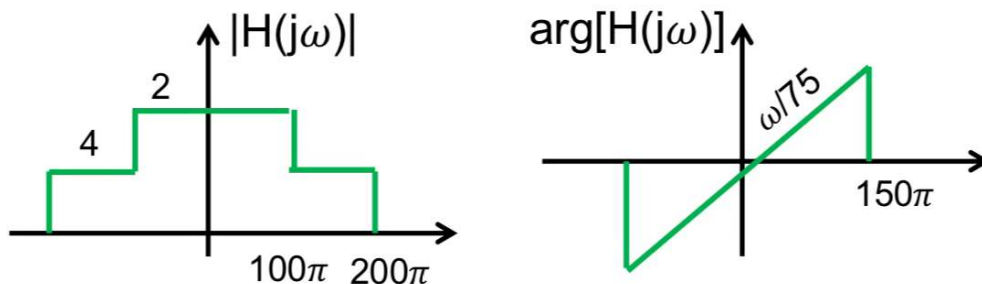


⇒ UN FILTRO REALE NON DISTORCE GLI ESPONENZIALI COMPLESSI A FASE LINEARE

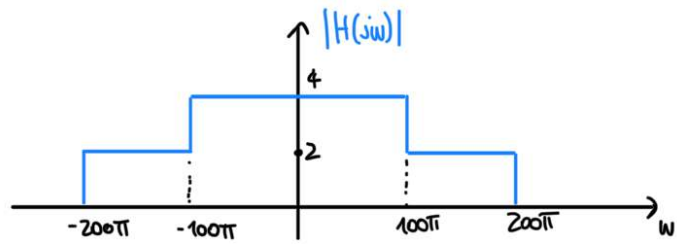
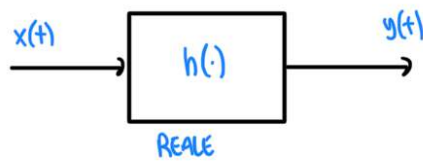
Facciamo un esercizio sfruttando questa proprietà:

Es 2

Dato l'ingresso $x(t) = \cos(50\pi t) + 5 \cos(120\pi t)$ calcolare la risposta al filtro $h(t)$. Il filtro distorce il segnale?



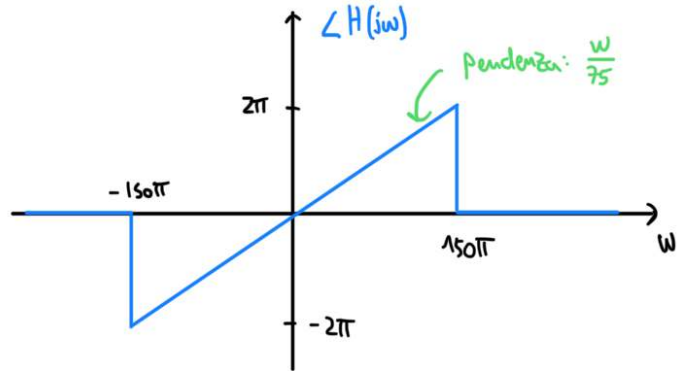
ESERCIZIO 2:



$$x(t) = \cos(50\pi t) + 5 \cos(120\pi t)$$

RICHIESTE:

- $y(t) = ?$
- IL FILTRO DISTORCE IL SEGNALE?



Sol. MI CALCOLO MODULO E FASE ALE PULSAZIONI DI $x(t)$, CIOE' 50π E 120π

$$|H(j50\pi)| = 4$$

$$\angle H(j50\pi) = \frac{50}{75}\pi$$

$$|H(j120\pi)| = 2$$

$$\angle H(j120\pi) = \frac{120}{75}\pi$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 4 \cos\left(50\pi t + \frac{50\pi}{75}\right) + 2 \cdot 5 \cos\left(120\pi t + \frac{120}{75}\pi\right) \\ &= 4 \cos\left(50\pi \left(t + \frac{1}{75}\right)\right) + 2 \cdot 5 \cos\left(120\pi \left(t + \frac{1}{75}\right)\right) \end{aligned}$$

\downarrow traslat \downarrow traslat

IL FILTRO DISTORCE IL SEGNALE? SI, PERCHE' LE COSTANTI MOLTIPLICATIVE SONO DIVERSE

Facciamo un esercizio sulla cosiddetta deconvoluzione

Es 3

Un filtro $h(t)$ mappa il segnale $x(t) = \text{triang}(t/3)$ nel segnale $y(t) = \text{triang}((t+2)/3) + 2 \text{triang}(t/3) + 4 \text{triang}((t-1)/3)$. Identificare $h(t)$, $H(j\omega)$, e la risposta al gradino $1(t)$. Il filtro è BIBO stabile?



$$x(t) = \text{triangle}\left(\frac{t}{3}\right)$$

$$y(t) = \text{triangle}\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2\text{triangle}\left(\frac{t}{3}\right) + 4\text{triangle}\left(\frac{t-1}{3}\right)$$

- 1) $H(j\omega)$?
- 2) $h(t)$?
- 3) BIBO-STABILE ?
- 4) $z(t) = h * 1(t)$

SOL. 1) NEL DOMINIO DELLA PULSAZIONE, $Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega) \rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

QUINDI, CI CALCOLIAMO LE TF $X(j\omega)$ E $Y(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{3 \cancel{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega 3}{2\pi}\right)} \cdot e^{j2\omega} + 2 \cdot 3 \cancel{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi} 3\right)} + 4 \cdot 3 \cancel{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega 3}{2\pi}\right)} e^{-j\omega}}{3 \cancel{\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot 3\right)}}$$

$e^{-j\omega}$ - traslazione, traslazione = -2

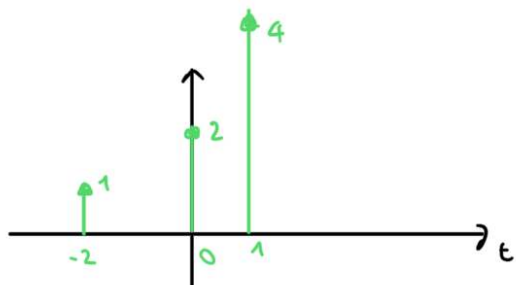
$$= e^{j2\omega} + 2 + 4 e^{-j\omega}$$

$$2) h(t) = \delta(t-2) + 2\delta(t) + 4\delta(t-1)$$

ABBIAMO IMPARATO CHE:

SE NOI CONOSCIAMO IN UN FILTRO L'INGRESSO E L'USCITA, POSSIAMO RICOSTRUIRE LA RISPOSTA IN FREQUENZA CON LA RELAZIONE

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$



- 3) IL FILTRO E' BIBO STABILE ? SI, PERCHE' LA RISPOSTA IMPULSIVA E' ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

$$\int |h(t)| dt = \int h(t) dt = 1 + 2 + 4 = 7 < +\infty \quad \checkmark \text{ E' BS}$$

4) $z(f) = \underline{x \text{ (ASA)}}$

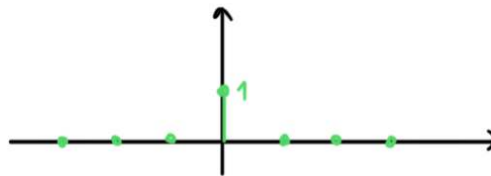
Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

a. l'impulso discreto $\delta(n)$

$$s(n) = \delta(n)$$

$$S(e^{j\theta}) = ?$$



Sol.

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n} \Big|_{n=0} = 1$$

Es 1

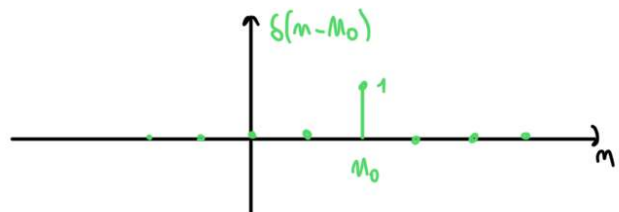
Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

a. l'impulso discreto $\delta(n)$

b. l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$

$$s(n) = \delta(n-n_0)$$

$$S(e^{j\theta}) = ?$$



Sol.

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-n_0) e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n} \Big|_{n=n_0} = e^{-j\theta n_0}$$

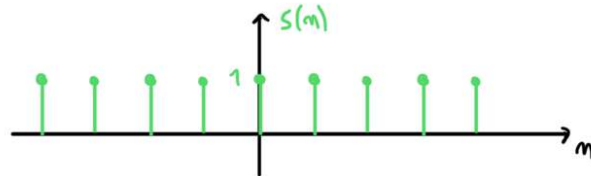
Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

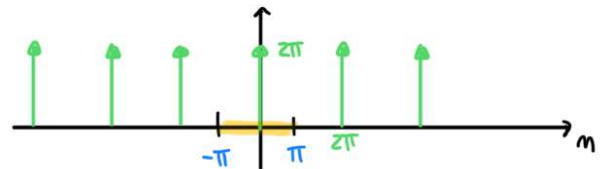
- l'impulso discreto $\delta(n)$
- l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$
- il segnale **costante** $s(n) = 1$

$$s(n) = 1$$

$$S(e^{j\theta}) = ?$$



Sol. $S(e^{j\theta}) = 2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta) = 2\pi \text{rep}_{2\pi} \delta(\theta)$



$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) e^{j\theta n} d\theta = 1$$

$2\pi \delta(\theta)$ perché ci siamo messi in un intervallo che prende solo un δ

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$$\delta(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \text{rep}_{2\pi} \delta(\theta)$$

DELTA E SEGNALE COSTANTE SONO DUALI

$$\delta(n - n_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\theta n_0}$$

REGOLA DI TRASLAZIONE - MODULAZIONE

$$e^{j\theta_0 n} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \text{rep}_{2\pi} \delta(\theta - \theta_0)$$

ESPOENZIALI COMPLESSI E DELTA TRASLATI SONO DUALI

Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

- a. **l'impulso** discreto $\delta(n)$
- b. l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$
- c. il segnale **costante** $s(n) = 1$
- d. la **sinusoide** $s(n) = A \cos(n\varphi_0 + \varphi_1)$

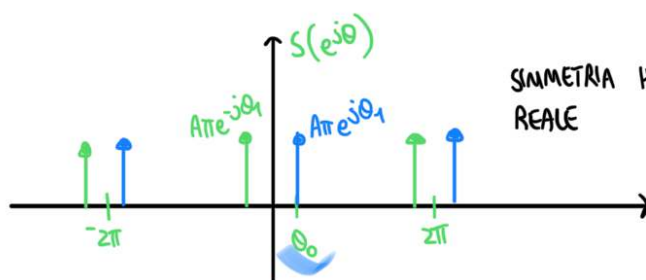
$$s(m) = A \cos(\theta_0 m + \theta_1)$$

$$S(e^{j\theta}) = ?$$

Sol. SCRIVIAMO IL COSENO CON EULERO

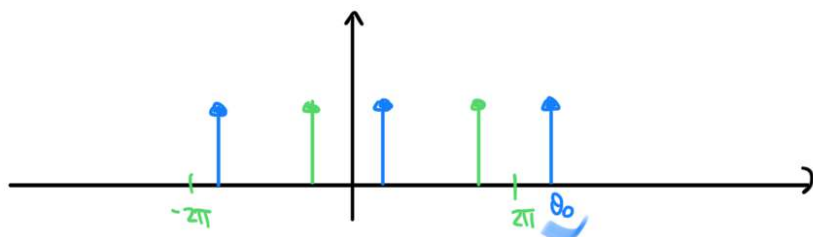
$$s(m) = A \cos(\theta_0 m + \theta_1) = \frac{A}{2} e^{j\theta_1} e^{j\theta_0 m} + \frac{A}{2} e^{-j\theta_1} e^{-j\theta_0 m}$$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{A}{2} e^{j\theta_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j(\theta - \theta_0)m} + \frac{A}{2} e^{-j\theta_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j(\theta + \theta_0)m}$$

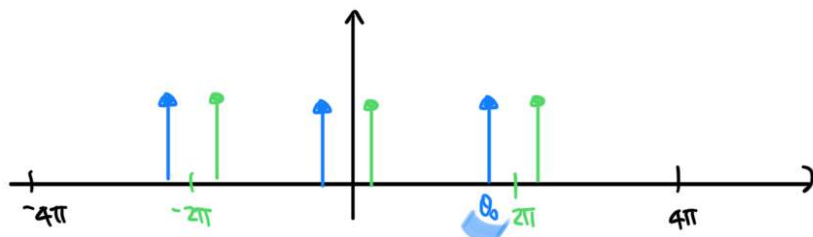


SIMMETRIA HERMITIANA: GIUSTO PERCHÉ IL SEGNALE È REALE

ATTENZIONE: QUI ABBIAMO SUPPOSTO CHE θ_0 FOSSE PICCOLO. SUPPONIAMO CHE SIA GRANDE:



I DUE SEGNALE SONO UGUALI PER EFFETTO DELLA RIPETIZIONE PERIODICA



X ASA (che sicuramente favorisce...):

$$s(m) = \text{rect}\left(\frac{m}{2m_0 + 1}\right)$$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{\sin\left(\theta\left(m_0 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

PROVA A VERIFICARLO

