# Premesse

Uno dei modelli più semplici per descrivere l'evoluzione di un'epidemia (per esempio il COVID 19) è il cosiddetto *modello SIR*. In questo modello la popolazione viene suddivisa in tre classi: suscettibili (S), infettivi (I) e rimossi (R).

**S:** I suscettibili sono individui sani che non hanno ancora contratto la malattia e possono ammalarsi.

**I:** Gli infettivi (o infetti) sono gli individui malati (che possono trasmettere la malattia).

**R:** I rimossi sono dati dalla somma di coloro che hanno contratto la malattia e ne sono poi guariti (avendo sviluppato gli anticorpi che li rendono immuni) e dei deceduti a causa della malattia.

L'epidemia evolve con due processi distinti:

*1: contagio.* Ogni volta che un individuo suscettibile viene in contatto con un infettivo ha una certa probabilità di contrarre la malattia e diventare infettivo anch'esso.

*2: guarigione o morte.* Gli infettivi diventano rimossi a causa di guarigione o morte.

**Ipotesi del modello.**

1. Si suppone che l'epidemia duri per un periodo di tempo sufficientemente breve da poter trascurare nascite e morti non dovute all'epidemia stessa. Modelli con questa proprietà si dicono "epidemici" o "a popolazione chiusa".

2. La popolazione totale è sufficientemente numerosa da poter utilizzare numeri reali per indicare il numero di individui di ciascuna classe (naturalmente si tratta di un'approssimazione perché è ovvio che ciascuna classe non può che contenere un numero naturale di individui).

3. Il passaggio da una classe all'altra avviene istantaneamente (anche questa è un'approssimazione).

4. Il contagio avviene quando vi è un contatto diretto di un individuo suscettibile e uno infettivo. In tal caso, l'individuo suscettibile diventa infettivo con una certa probabilità prefissata (che si assume costante: anche questa è un'approssimazione). Si assume anche che tutti gli individui abbiano le stesse probabilità di incontrarsi. Come conseguenza di tutte queste ipotesi si ha che il numero di suscettibili che, nell'unità di tempo, diventano infettivi (per effetto del contagio) è proporzionale al prodotto del numero dei suscettibili per il numero degli infettivi: si indichi con $\beta$ la relativa costante di proporzionalità.

5. Il numero di individui infettivi che, nell'unità di tempo, si spostano nella classe dei rimossi è proporzionale al numero di infettivi: si indichi con $\alpha$ la relativa costante di proporzionalità.

**Considerazione.** Questo modello serve a descrivere l'evoluzione della malattia in assenza di interventi esterni ossia senza azioni di controllo. Il passo successivo (non trattato in questo esercizio) è capire come opportune azioni di controllo (per es. separazione sociale che riduce il rischio di contatto fra infettivi e suscettibili, e quindi trasforma il parametro $\beta$ in un ingresso di controllo, o vaccinazione la quale introduce un ingresso di controllo che permette un passaggio diretto fra la classe dei suscettibili e quella dei rimossi) possano migliorare la situazione.

# Problema

Si scriva il modello SIR in forma di equazioni di un modello di stato senza ingressi scegliendo opportunamente le variabili di stato e considerando come uscita $y(t)$ il numero complessivo di deceduti fino all'istante $t$ assumendo che il 5% dei rimossi sia costituito da individui deceduti a causa della malattia. Supponendo che all'istante iniziale ci sia 1 individuo infettivo (il cosiddetto "paziente zero"), 1 milione di individui suscettibili e nessun rimosso, si scriva un programma (in Matlab o altro linguaggio) che calcola l'evoluzione del numero degli individui nelle tre classi.
A tal fine si assuma che $\alpha = \frac{1}{6}$ giorni$^{-1}$ e si considerino i due casi seguenti:
(i) malattia molto contagiosa: $\beta = \frac{1}{2 \cdot 10^6}$ giorni$^{-1}$ $\cdot$ persone $^{-1}$.
(ii) malattia poco contagiosa: $\beta = \frac{1}{5 \cdot 10^6}$ giorni$^{-1}$ $\cdot$ persone $^{-1}$.
Attenzione alle unità di misura!

Per ciascuno dei due casi si utilizzino le traiettorie calcolate dal programma per determinare:
- la durata dell'epidemia (ossia il tempo dopo il quale il numero di infetti è minore di 1);
- il numero complessivo di deceduti dopo che l'epidemia è terminata;
- il numero di individui che non hanno contratto la malattia dopo che l'epidemia è terminata;

Infine, per ciascuno dei due casi, si tracci il grafico dell'uscita dall'istante iniziale al termine dell'epidemia mettendo in ascissa il tempo in opportune unità di misura e in ordinata $y(t)$.

**Nella prima pagina del documento consegnato si riportino solo i risultati numerici e i grafici richiesti, come nel seguente *template*:**

**Modello di stato**: si riportino le equazioni del modello.

**Caso (i)**:
Durata: X1 giorni
N. complessivo di deceduti: Y1 persone
N. di individui che non hanno contratto la malattia: Z1 persone
GRAFICO1

**Caso (ii)**:
Durata: X2 giorni
N. complessivo di deceduti: Y2 persone
N. di individui che non hanno contratto la malattia: Z2 persone
GRAFICO2

**Nelle pagine successive si riportino i ragionamenti e i passaggi fatti e il programma adeguatamente commentato.**

# Suggerimenti

Per ottenere un programma che calcola la soluzione di un'equazione differenziale del tipo

$$\dot{x} = f(x, u)$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ assegnate e ingresso $u(t)$ noto, si seguano i seguenti passi:
1. Si discretizzi il tempo considerando gli istanti $t_0 = 0$, $t_1$, $t_2$, ... dove gli intervallini fra un istante e il successivo hanno la stessa durata $\delta_t$ che è sufficientemente piccola (si riduca la durata $\delta_t$ di ciascun intervallo fino a che si constata che un'ulteriore riduzione non cambia sostanzialmente la soluzione).
2. Lo stato $x(0) = x_0$ al tempo $t_0 = 0$ è assegnato. Per lo stato al tempo $t_1$, si approssimi la derivata col rapporto incrementale ottenendo $x(t_1) = x_0 + \dot{x}(0)\delta_t = x_0 + f(x_0, u(0))\delta_t$.
3. Si iteri il procedimento ottenendo $x(t_2) = x(t_1) + f(x(t_1), u(t_1))\delta_t$, $x(t_3) = x(t_2) + f(x(t_2), u(t_2))\delta_t$ e così via.

Di seguito, come esempio, è riportato un programma Matlab (debitamente commentato) per il calcolo della soluzione del seguente problema di Cauchy (cioè equazione differenziale con condizione iniziale assegnata) dall'istante iniziale $t_0 = 0$ all'istante finale $t_f = 50$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) \end{bmatrix}, \qquad x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

```
delt=0.001 %si fissa l'ampiezza degli intervallini in modo che una loro diminuzione
           %non comporti variazioni significative della soluzione
x0=[0.1;0]; %si fissa lo stato iniziale
x1=x0(1); %si denota con x1 la prima componente dello stato corrente
x2=x0(2); %si denota con x2 la seconda componente dello stato corrente
x=x0 %inizialmente la traiettoria di stato contiene solo lo stato iniziale
for t=0:delt:50 %in ciascun istante ...
x1p=x2; %si calcola la derivata della prima componente dello stato ...
x2p=-sin(x1);  %e la derivata della seconda componente dello stato
x1=x1+x1p*delt; %si calcola la prima componente dello stato all'istante successivo
x2=x2+x2p*delt; %e la seconda componente dello stato all'istante successivo
xs=[x1;x2]; %si sovrappongono le due componenti
x=[x xs]; %si allunga la traiettoria di stato giustapponendo alla traiettoria
          %già calcolata fino a questo momento lo stato all'istante successivo
end
%Alla fine x e' una matrice con due righe (il numero di componenti dello stato) e
%50002 colonne (il numero di istanti t_i considerati aumentato di 1).
%La prima riga di x contiene la traiettoria della prima componente dello stato.
%Analogamente per la seconda.
```

**Attenzione:** nel codice riportato per la soluzione del problema (0.1) l'istante finale $t_f$ è fissato mentre per l'esercizio si dovrà provare un valore di $t_f$ e aumentarlo fino a che non si vede dalle traiettorie della simulazione che l'epidemia è terminata. Nei due casi (i) e (ii) si troveranno valori molto diversi di $t_f$.

Si osserva anche che il metodo di soluzione descritto, detto *metodo di Eulero*, è il più semplice possibile: esistono metodi più sofisticati che usano approssimazioni di ordine più elevato del primo. Anche in Matlab sono presenti funzioni già pronte per il calcolo della soluzione di equazioni differenziali con metodi più o meno sofisticati (per esempio, le funzioni `ode45, ode23, ode78` e `ode89`). La scelta del metodo più opportuno dipende dall'equazione differenziale che si considera e richiede considerazioni piuttosto complesse. Ai fini dell'esercizio proposto, è più che sufficiente utilizzare il metodo di Eulero in modo analogo a quanto fatto nell'esempio proposto qui sopra senza dover ricorrere a funzioni esistenti. Inoltre, il metodo proposto può essere immediatamente utilizzato (con le minime variazioni richieste dalla sintassi) con qualsiasi software anche non equipaggiato da routine specifiche per la soluzione di equazioni differenziali.

# Approfondimento e problema di controllo

Questa parte dell'esercizio è del tutto facoltativa, serve solo a chi si è appassionato dell'argomento e desidera cimentarsi con un problema più complesso. La sua eventuale soluzione non comporta punteggio supplementare.

Si consideri ora il caso in cui sono disponibili azioni di controllo. Precisamente, si hanno a disposizione delle risorse che possono essere utilizzate per attuare azioni di controllo che riducono gli effetti dell'epidemia. Le azioni di controllo che si possono attuare sono due:

1. Isolamento sociale: questa azione consente di ridurre il coefficiente $\beta$ attraverso limitazioni delle libertà di movimento delle persone. Questa azione ha un elevato costo economico in termini di mancata produzione e un notevole costo sociale.

2. Vaccinazione: questa azione consente il passaggio diretto dalla categoria dei suscettibili alla nuova categoria dei *vaccinati* costoro non corrono il rischio di contrarre la malattia e quindi di morire a causa della malattia; un'ipotesi del modello è che il rischio di morte legato al vaccino sia trascurabile.

Le risorse complessive disponibili per combattere gli effetti mortali dell'epidemia sono 10 risorse (in opportune unità di misura: per esempio, ogni risorsa è costituita dall'1% del gettito fiscale annuo e quindi si è deciso di investire il 10% del gettito per combattere l'epidemia). Si assuma che servano 60 giorni (2 mesi) per sviluppare e procurare il vaccino; pertanto nei primi 60 giorni dell'epidemia è disponibile la sola azione di isolamento sociale (azione 1.). Si decide di limitare a questi 60 giorni l'utilizzo dell'azione 1. a causa dei costi sociali che essa comporta. L'azione 1. può essere attuata in misura più o meno restrittiva: più restrittiva è l'applicazione più il costo associato è elevato ma anche più significativa è la riduzione del coefficiente $\beta$. Si supponga che il coefficiente $\beta$ si riduca al valore ridotto $\beta_{rid}$ secondo la formula

$$\beta_{rid} := \frac{\beta}{1+u}$$

dove $u$, che è un ingresso di controllo supposto costante nei 60 giorni di applicazione, è la quantità di risorse investite nell'azione 1. Al termine dei 60 giorni è disponibile il vaccino e si inizia una campagna di vaccinazione che dura 120 giorni (4 mesi). Per questa azione rimangono a disposizione $10 - u$ risorse che permettono di vaccinare

$$g := k(10-u), \qquad \text{con } k = 1200,$$

persone al giorno (si supponga che la vaccinazione avvenga in modo uniforme nell'intero arco di ciascuna giornata e che la persona vaccinata diventi istantaneamente immune alla malattia: si tratta di approssimazioni naturalmente).

Al termine dei $60 + 120 = 180$ giorni si interrompe ogni azione di controllo e si aspetta che l'epidemia si esaurisca (si considera che l'epidemia è esaurita quando gli infetti scendono al di sotto di 1 unità).

# Problema (facoltativo)

Si scriva un modello di stato per rappresentare la situazione sopra descritta e si simuli l'evoluzione dell'epidemia facendo variare le risorse $u$ investite nei primi 60 giorni (azione di isolamento sociale) fra un minimo di 0 a un massimo di 10 con una granularità di 0.1 e si determini la ripartizione delle 10 risorse disponibili (con un errore massimo di 0.1 risorse) in modo da minimizzare il numero di deceduti. Una volta fissata la ripartizione nel modo ottimo si determini la durata dell'epidemia e si traccino i grafici che rappresentano il numero di suscettibili, infetti, rimossi e vaccinati nel tempo.