

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione ed Elettronica
27 Gennaio 2020

Esercizio 1. [9.5 punti] Data

$$G(s) = 10 \frac{(1 + 10s)(1 + s^2)}{s(1 + s)^2 \left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

- i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;
- ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (non è richiesto il calcolo di eventuali asintoti ma una stima delle eventuali intersezioni con gli assi ottenibile dal confronto dei diagrammi di Bode di modulo e fase);
- iii) si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

al variare di K in \mathbb{R} , $K \neq 0$.

Suggerimento: nell'eventualità in cui non si sia stati in grado di determinare la/le intersezione/i con l'asse reale al punto precedente, la/le si indichi con un simbolo/dei simboli e si faccia riferimento ad esso/essi per discutere la stabilità BIBO di $W(s)$.

Esercizio 2. [9.5 punti] Data

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 18}{(s^2 + 3)(s + 6)}$$

e sapendo che $s = -3$ è punto doppio del luogo, si traccino i luoghi positivo e negativo, individuando asintoti, punti doppi, intersezioni con l'asse immaginario e ricorrendo alla tabella di Routh per determinare la posizione di alcuni rami (ci sono situazioni in cui l'analisi precedente non è sufficiente per decidere se alcuni rami sono interamente contenuti nel semipiano reale positivo, in quello negativo o attraversano l'asse immaginario). Infine, si determini il numero di poli a parte reale positiva e/o nulla (e di conseguenza la BIBO stabilità di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$) al variare del parametro reale K .

Esercizio 3. [6.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1 + 10s}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}$$

è richiesto

- i) il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 1 ed errore a regime alla rampa lineare $e_{rp}^{(2)}$ pari a 0.01, ed alla funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 100$ rad/s, $m_\phi \simeq 90^\circ$.

- ii) il progetto di un controllore stabilizzante $C_2(s)$ di tipo PID (eventualmente P, PI o PD) che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 1 ed errore a regime alla rampa lineare $e_{rp}^{(2)}$ pari a 0.01, ed alla funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 10.000$ rad/s, $m_\phi \simeq 90^\circ$.

Teoria. [5 + 0.5 punti] Sia $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ una funzione razionale propria con guadagno di Evans $K_E = 1$, ovvero

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

con $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$ monici e coprimi e $\deg d(s) \geq \deg n(s)$. Si enunci e dimostri la regola che determina quali punti dell'asse reale appartengono al luogo positivo e al luogo negativo di $G(s)$.

Si dimostri che se il grado relativo $n - m = \deg d(s) - \deg n(s)$ di $G(s)$ vale 2 e valgono le seguenti condizioni:

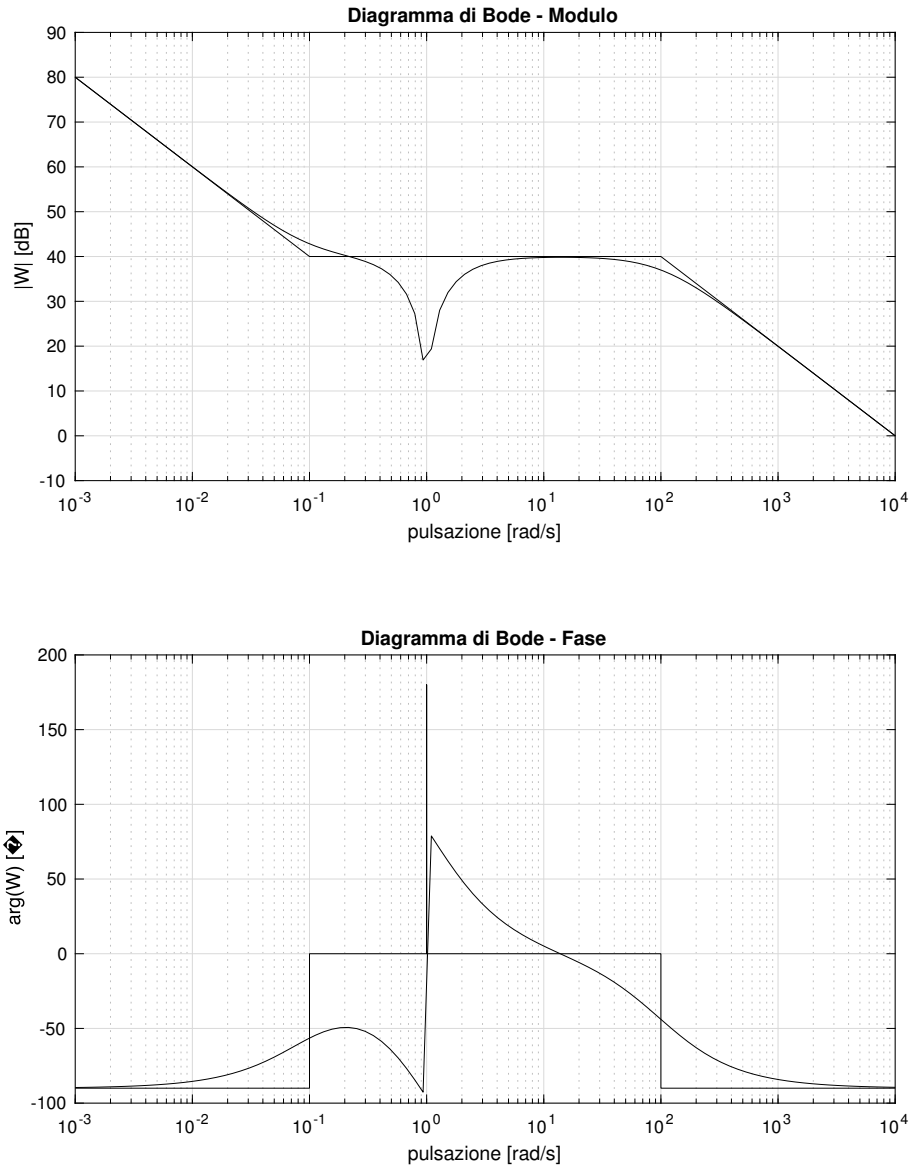
(a) tutti gli zeri di $G(s)$ hanno parte reale negativa e

(b) $\sum_{i=1}^n p_i < \sum_{i=1}^m z_i$

allora $W(s)$ è certamente BIBO stabile per K positivo e sufficientemente grande.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) I diagrammi di Bode sono in figura

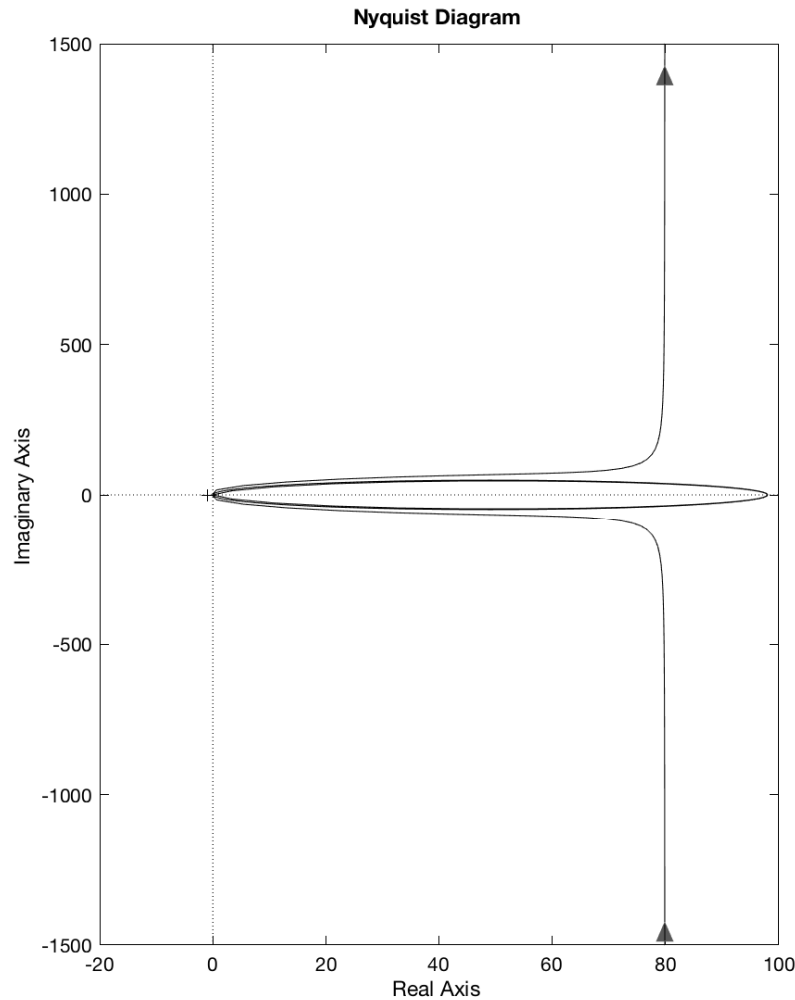


Il modulo di Bode (asintotico) scende con pendenza -20dB/dec fino a 40 dB per $\omega = 10^{-1}$ rad/s, poi prosegue piatto fino ad $\omega = 100$ rad/s, dove riprende a scendere con pendenza -20 dB/dec . Il modulo reale evidenzia un picco di antirisonanza infinito (anche se la figura lo rappresenta erroneamente finito) per $\omega = 1$ rad/s, poi risale e raggiunge un tratto orizzontale di valore 40 dB e poi riscende con pendenza -20 dB/dec .

La fase di Bode (asintotica) parte da -90° ed in $\omega = 10^{-1}$ rad/s sale di 90° . In corrispondenza a $\omega = 10^0 = 1$ rad/s i diagrammi asintotici dei due termini che hanno punto di spezzamento per tale pulsazione si compensano perfettamente e quindi l'asintotico non subisce nessuna variazione. Poi, in $\omega = 10^2$ rad/s la fase scende di 90° portandosi a -90° .

La fase reale sale da -90° fino a poco meno di -45° , poi per effetto del polo doppio in -1 inizia a scendere. Quando si riporta ad un valore prossimo a -90° subentra il termine trinomio con smorzamento nullo, i.e., $1 + s^2$, che alza la fase istantaneamente di 180° . Infine l'ultimo termine binomio corrispondente al polo semplice e stabile in -100 porta giù la fase gradualmente a -90° .

ii) Il diagramma di Nyquist è in figura



Si vede che il diagramma di Nyquist relativo alle pulsazioni positive parte per $\omega = 0^+$ dal punto improprio parallelamente al semiasse immaginario negativo, poi si porta vicino al semiasse reale positivo con modulo che cala. Il modulo continua a calare e il diagramma si trova a passare attraverso l'origine (per $\omega = 1$) che taglia parallelamente all'asse immaginario dal basso verso l'alto. Successivamente il diagramma ruota in verso orario con modulo che prima cresce portandosi ad un massimo relativo $A \approx 100$ (40 dB nel diagramma dei moduli) e poi va a zero gradualmente mentre la fase si porta a -90° . Si noti

che confrontando modulo e fase nei diagrammi di Bode, si nota che quando la fase assume valore 0° (all'incirca attorno a $\omega = 10$ rad/s) il modulo vale circa 40 dB, ovvero 100, quindi il diagramma attraversa l'asse reale solo in 100.

iii) Si noti preliminarmente che $n_{G_+} = 0$. L'analisi del numero di giri (aggiunta la parte relativa alle ω negative ed il semicerchio di raggio infinito percorso in senso orario) conduce facilmente a determinare i seguenti casi:

- $K > 0$: si ha $N = 0$ e $n_{G_+} = 0$ da cui $n_{W_+} = 0$;
- $K < -\frac{1}{A} \approx -\frac{1}{100}$: si ha $N = -3$ e $n_{G_+} = 0$ da cui $n_{W_+} = 3$;
- $K = -\frac{1}{A} \approx -\frac{1}{100}$: la $W(s)$ ha due poli immaginari puri (e uno reale positivo);
- $-\frac{1}{100} \approx -\frac{1}{A} < K < 0$: si ha $N = -1$ e $n_{G_+} = 0$ da cui $n_{W_+} = 1$.

In definitiva, si ha sempre instabilità tranne per $K > 0$.

Esercizio 2. La funzione di trasferimento $G(s)$ presenta due zeri complessi $-\frac{3}{2} \pm i\frac{3}{2}\sqrt{7}$, due poli immaginari puri in $\pm i\sqrt{3}$ ed un polo reale in -6 . Sviluppando l'equazione dei punti doppi si ottiene

$$s[s^3 + 6s^2 + 69s + 180] = s(s+3)(s^2 + 3s + 60)$$

dove la fattorizzazione si ottiene dividendo il termine di terzo grado per il fattore $s+3$ (che si conosce in quanto il testo afferma che $s = -3$ è punto doppio del luogo). L'equazione non ha altre soluzioni ammissibili oltre a $s = 0, -3$, essendo le altre due radici complesse e il denominatore di $G(s)$ di grado 3. Cercando le intersezioni con l'asse immaginario si trova l'equazione:

$$[K(18 - \omega^2) + 6(3 - \omega^2)] + i\omega(3 - \omega^2 + 3K) = 0$$

Annullando la parte immaginaria si ha $\omega = 0$ oppure $\omega^2 = 3K+3$, che sostituite nella parte reale porgono rispettivamente $K = -1$ e $K(K+1) = 0$, da cui di nuovo $K = -1, \omega = 0$ oppure $K = 0, \omega = \pm\sqrt{3}$.

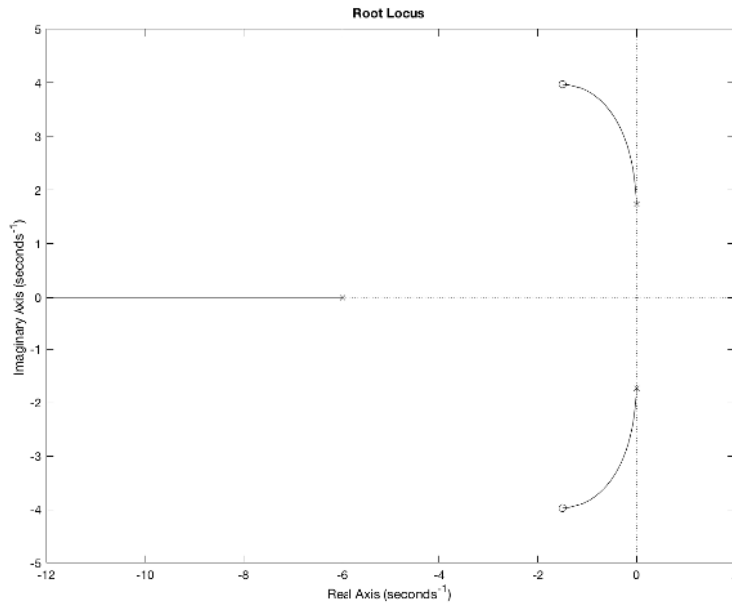
La tabella di Routh per $d(s) + Kn(s) = s^3 + (K+6)s^2 + 3(K+1)s + 18(K+1)$ è

3	1	$3(K+1)$
2	$K+6$	$18(K+1)$
1	$3\frac{K(K+1)}{K+6}$	
0	$18(K+1)$	

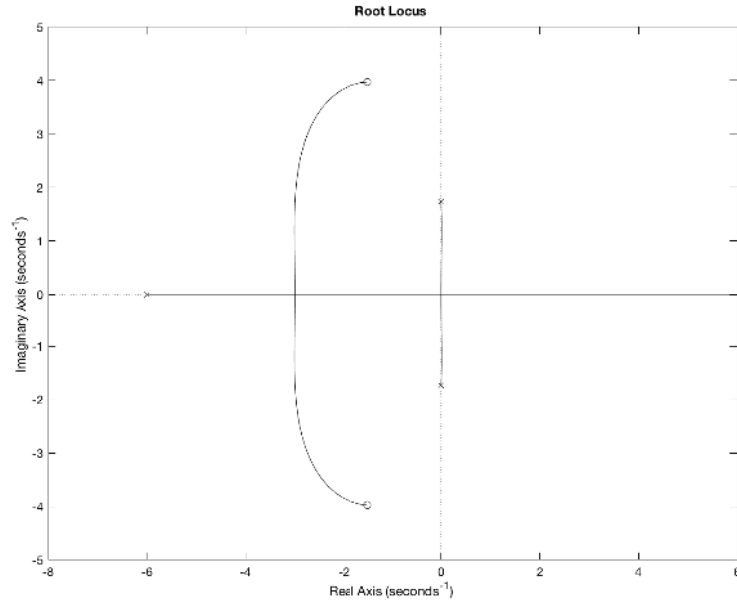
ed un'analisi dei segni della prima colonna al variare di K porge 1 variazione di segno per $K < -6$ e per $-6 < K < -1$, 2 variazioni di segno per $-1 < K < 0$, e nessuna variazione di segno per $K > 0$. I valori $K = 0, -1$ sono già stati trovati nell'analisi delle intersezioni con l'asse immaginario, mentre il valore $K = -6$ non permette il completamento della

tabella ma non corrisponde a zeri immaginari.

Il luogo positivo ha 3 rami distinti: due complessi coniugati che si muovono dai poli complessi verso gli zeri complessi (senza intersecare l'asse immaginario e quindi rimanendo nel semipiano sinistro) ed un ramo interamente contenuto nell'asse reale da -6 verso $-\infty$ (asintoto), da cui la stabilità BIBO per ogni $K > 0$ (non per $K = 0$).



Il luogo negativo ha due rami complessi che dai poli complessi raggiungono il punto doppio $s = 0$ per $K = -1$, quindi diventano reali, uno va verso $+\infty$ (asintoto), l'altro si ricongiunge con l'altro ramo che proviene sull'asse reale dal polo reale nel punto doppio $s = -3$ per $K = -2$, per poi uscire sul piano complesso verso i due zeri (senza attraversare l'asse immaginario, quindi restando nel semipiano sinistro). I due rami complessi per K che varia da 0 a -1 stanno a destra dell'asse immaginario (certamente non lo attraversano, non essendoci altre intersezioni oltre a quelle trovate), come conseguenza dell'analisi fatta con Routh (senza la quale avrebbero anche potuto trovarsi a sinistra), per cui in tale intervallo di K c'è un solo ramo nel semipiano sinistro, mentre gli altri due rami stanno nel semipiano destro.

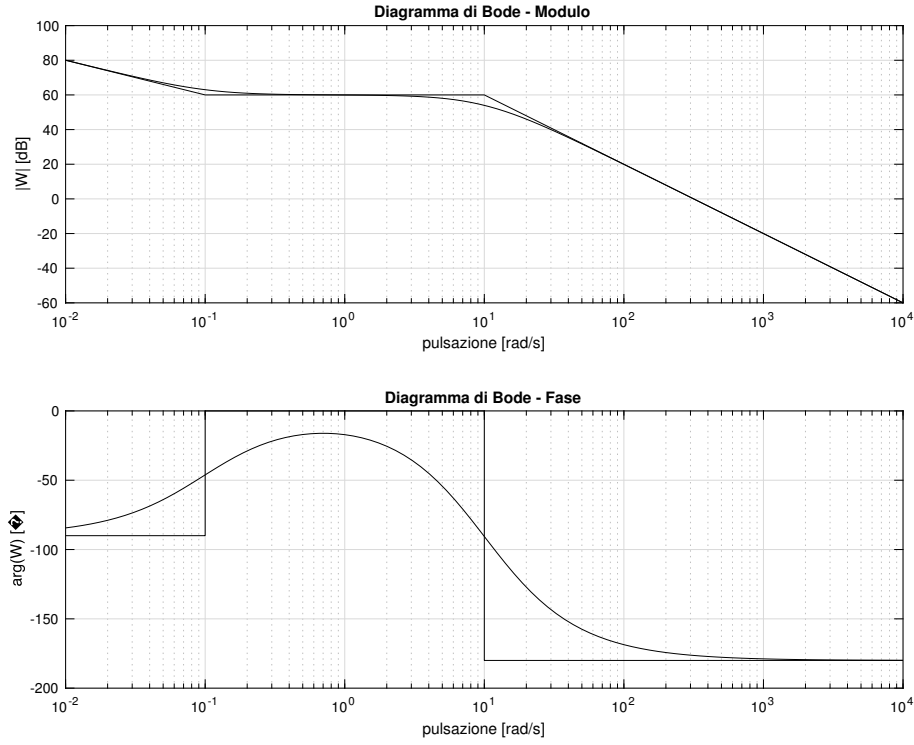


Quindi ne consegue l'instabilità per ogni $K < 0$, più precisamente due poli immaginari puri ed uno negativo per $K = 0$, due poli a parte reale positiva ed uno negativo per $0 > K > -1$, un polo doppio in $s = 0$ ed uno negativo per $K = -1$, ed un polo positivo e due a parte reale negativa per $K < -1$.

Esercizio 3. i) Il requisito a regime impone l'utilizzo di $\frac{10}{s}$, dopodichè il diagramma di Bode di

$$\frac{10}{s}G(s)$$

taglia in $\omega \simeq 100\sqrt{10}$, mentre in $\omega_A \simeq 100$ abbiamo un modulo di +20 dB con un margine di fase di pochi gradi.



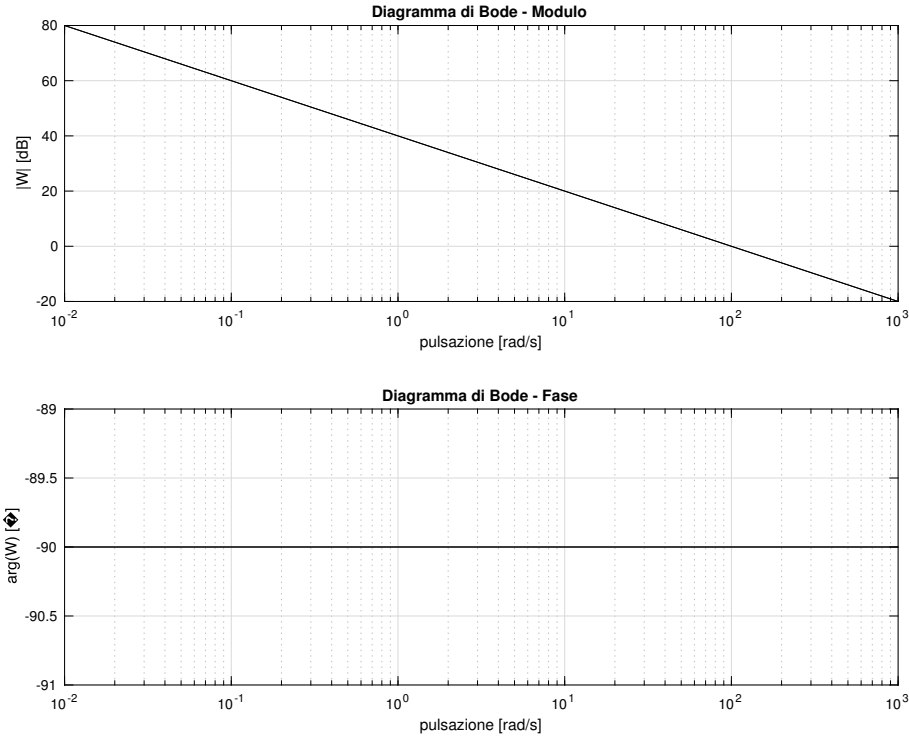
Pertanto è necessaria una rete a sella che causi un abbassamento di modulo di 20 dB e alzi la fase di 90° . A tale risultato possiamo pervenire, ad esempio, scegliendo lo zero della rete anticipatrice 1 decade prima di ω_A e mettendo un polo in alta frequenza (tale polo tuttavia non risulta necessario in quanto il controllore finale risulta comunque proprio a causa dell'integratore). La rete attenuatrice allora deve avere il polo che precede lo zero di due decadi. Possiamo allora scegliere un polo in $-\frac{1}{10}$ e uno zero doppio in -10 , da cui la possibile soluzione seguente

$$C_1(s) = 10 \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}{s(1 + 10s)}$$

che causa tre cancellazioni zero/polo ammissibili e fa sì che

$$C_1(s)G(s) = \frac{100}{s}$$

soddisfi tutti i requisiti, garantendo la BIBO stabilità di $W(s)$ per il Criterio di Bode.



ii) Nel secondo caso, per soddisfare le specifiche su tipo ed errore a regime dobbiamo nuovamente assumere $C_2'(s) = \frac{10}{s}$ ottenendo i medesimi diagrammi di Bode trovati alla fine della prima fase della sintesi per tentativi del punto i). Ciò ci dice che avremo bisogno o di un PI o di un PID.

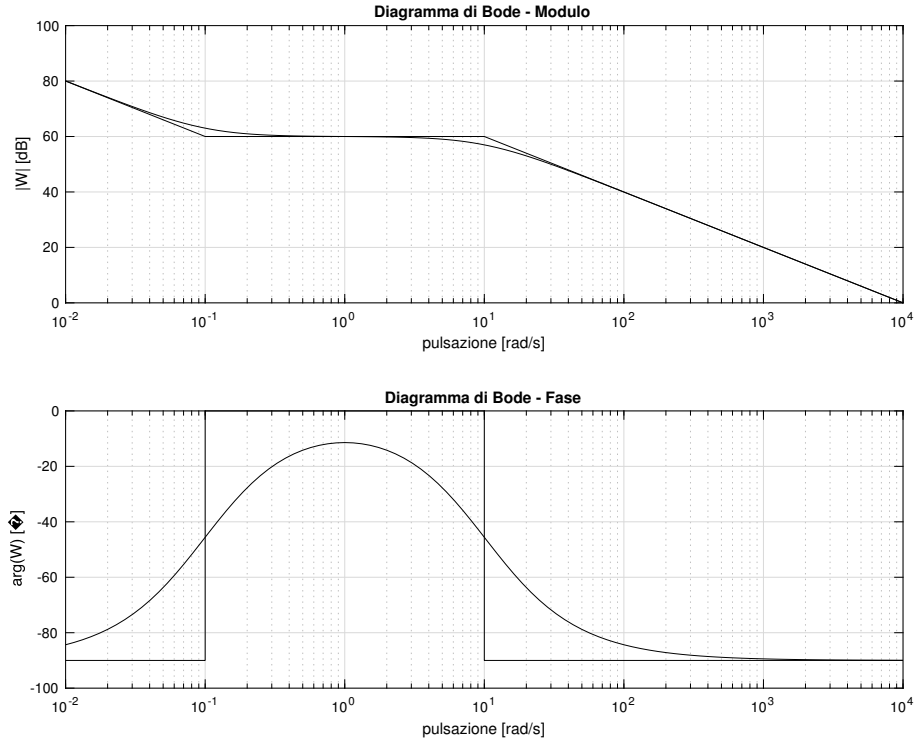
A questo punto bisogna alzare il modulo di 60 dB e la fase di 90° , il che è possibile posizionando un singolo zero 3 decadi prima di ω_A^* e causando, quindi, una cancellazione zero/polo ammissibile. Pertanto un PI è sufficiente ed è il seguente

$$C_2(s) = 10 \frac{1 + \frac{s}{10}}{s} = \frac{10}{s} + 1$$

che fa sì che

$$C_2(s)G(s) = 100 \frac{1 + 10s}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

soddisfi tutti i requisiti, garantendo la BIBO stabilità di $W(s)$ per il Criterio di Bode.



Teoria. Per la regola su quali punti dell'asse reale appartengano al luogo si veda il libro di testo, Capitolo 8, pagine 228-229.

Se il grado relativo di $G(s)$ è 2 avremo nel luogo positivo m rami che vanno agli m zeri e due rami che vanno al punto improprio lungo un asintoto parallelo all'asse immaginario e passante per $(x_B, 0) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}, 0 \right)$. Poiché al crescere di K verso $+\infty$ i rami o sono prossimi agli zeri oppure all'asintoto, se gli zeri sono stabili e l'asintoto sta nel semipiano sinistro, ovvero valgono le condizioni a) e b), allora da un certo K in poi la $W(s)$ è sempre stabile.