Dispensa teoria – A.A. 2024/2025

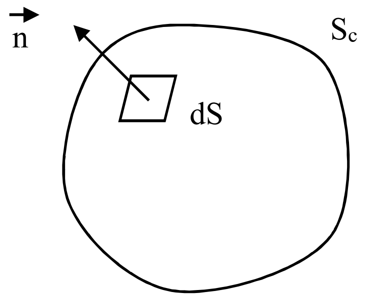
prof. Daniele Desideri

Padova, settembre 2024

Capitolo 1. CARICA ELETTRICA E CORRENTE ELETTRICA

1.1 Legge di continuità

Si consideri una regione di spazio racchiusa da una superficie chiusa S_c, orientata secondo il versore normale $\vec{n}$ con verso uscente dalla superficie stessa.



Si consideri la totale corrente $i_{usc}(t)$ uscente da tale superficie S_c:

$$i_{usc}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_{usc}}{\Delta t} = \frac{dq_{usc}(t)}{dt}$$

Nell'ipotesi di conservazione della carica, la carica netta Δq_{usc} uscente da S_c nel tempo Δt è opposta alla variazione della carica Δq_{int} contenuta all'interno di S_c. Si ha pertanto che $\Delta q_{usc} = -\Delta q_{int}$ e quindi

$$i_{usc}(t) = -\frac{dq_{int}(t)}{dt} .$$

La legge di continuità afferma che la totale corrente $i_{usc}(t)$ uscente da una superficie chiusa S_c è opposta alla derivata temporale della carica $q_{int}(t)$ contenuta all'interno di S_c.

1.1.1 Campo di corrente solenoidale

Si consideri una superficie chiusa S_c in quiete (si prenda come riferimento il sistema di riferimento fisso, indicato comunemente come il sistema di riferimento di laboratorio, solidale con la Terra – questa scelta per il sistema di riferimento si mantiene anche nel seguito, tranne nei casi espressamente indicati) a regime stazionario (densità di carica e densità di corrente sono costanti rispetto al tempo in ogni punto dello spazio). Come conseguenza della legge di continuità, si ha che è nulla la totale corrente uscente da S_c:

$$I_{usc} = 0$$

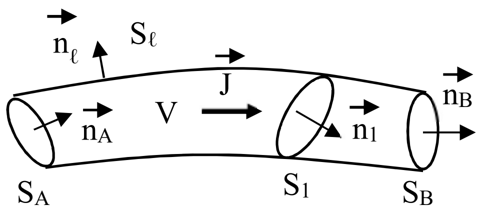
Utilizzando la relazione che la corrente è il flusso del vettore $\vec{J}$ attraverso la superficie orientata in quiete a cui la corrente si riferisce, si ha che a regime stazionario è nullo il flusso di $\vec{J}$ uscente da una qualsiasi superficie chiusa. Questo si esprime dicendo che a regime stazionario il vettore $\vec{J}$ è solenoidale, o in modo equivalente, che a regime stazionario il campo di corrente è <u>solenoidale</u>.

1.1.2 Tubo di flusso per il vettore densità di corrente

A regime stazionario, come indicato, vale che il campo di corrente è solenoidale.

Si consideri un conduttore in quiete percorso da corrente circondato da un materiale isolante elettrico (un materiale in cui non vi è conduzione di corrente elettrica). Si consideri un tratto di tale conduttore (tratto delimitato dalle superfici generiche S_A e S_B) con $\vec{J}$ vettore densità di corrente (come mostrato in figura). Le due sezioni generiche (S_A e S_B) tagliano tutto il conduttore.

Si consideri il volume del conduttore racchiuso tra queste due superfici e la superfice laterale (S_ℓ) del tratto di conduttore compresa tra S_A e S_B. Tale volume è quindi racchiuso dalla superficie chiusa S_c data da S_A più S_B più S_ℓ. Sia V il volume racchiuso da S_c. Dalla superficie laterale del conduttore non passano cariche elettriche (esternamente è presente un materiale isolante elettrico) e quindi le cariche elettriche passano solo da S_A e S_B.



A regime stazionario, la corrente uscente dalla superficie chiusa S_c è nulla. Tale corrente uscente I_{usc} è (presi i riferimenti delle correnti sulle superfici concordi con le orientazioni delle superfici di figura):

$$I_{usc} = -\,I(S_A) + I(S_B) + I(S_\ell) = 0\ .$$

Dato che, come indicato, $I(S_\ell) = 0$, si ha infine:

$$I(S_A) = I(S_B)\ .$$

Analogamente, se si considera ora un'altra superficie (ad esempio S_1 in figura) che taglia completamente il conduttore, orientata S_1 in modo concorde con S_B, si ottiene che: $I(S_1) = I(S_B)$.

Pertanto risulta che la corrente elettrica a regime stazionario, fissato il suo verso di riferimento per il conduttore, ha lo stesso valore per qualunque sezione si consideri che taglia completamente il conduttore. Pertanto ci si riferirà alla <u>corrente del conduttore</u>, senza specificare la sezione. In questo senso si dice che il conduttore costituisce un <u>tubo di flusso per</u>

il vettore densità di corrente, cioè è una regione di spazio dove il moto delle cariche è canalizzato.

Capitolo 2. CAMPO ELETTRICO E TENSIONE ELETTRICA

2.1 Legge di Coulomb

Due cariche elettriche puntiformi disposte in quiete nel vuoto risentono ciascuna di una forza dovuta all'interazione tra le due cariche: tale forza è descritta dalla legge di Coulomb.

La forza esercitata da una carica sull'altra è: diretta secondo la retta congiungente le due cariche; attrattiva fra le due cariche nel caso di cariche di segno opposto, repulsiva fra le due cariche nel caso di cariche dello stesso segno; di modulo inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra le due cariche e direttamente proporzionale al prodotto delle due cariche.

Si consideri pertanto, nel vuoto, una carica puntiforme q posta in quiete nel punto Q e una carica puntiforme q_0 posta in quiete nel punto P (Fig. 2.1)

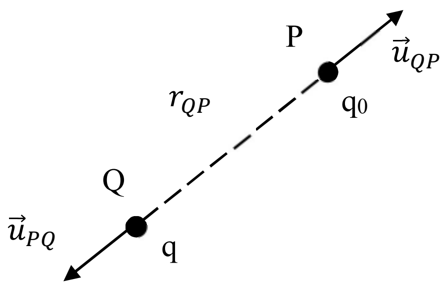


Fig. 2.1

La legge di Coulomb afferma che la carica q esercita su q_0 una forza $\vec{F}_c(P)$, data dalla relazione seguente:

$$\vec{F}_c(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_{QP}^2}\,\vec{u}_{QP}$$

dove $\vec{u}_{QP}$ è il versore orientato da Q verso P, r_{QP} è la distanza fra Q e P. La costante ε_0 è detta permittività (o costante dielettrica) del vuoto. Inoltre la carica q_0 esercita su q in Q una forza $\vec{F}_c(Q)$ uguale e opposta a quella che la carica q esercita su q_0 in P:

$$\vec{F}_c(Q) = -\vec{F}_c(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r_{QP}^2}\,\vec{u}_{PQ}$$

Nel vuoto $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$. In merito all'unità di misura, si osserva che: $C^2/(Nm^2) = C^2/(Jm) = F/m$, dove si è introdotto il farad $F = C^2/J$.

2.1.1 Campo elettrostatico

Si consideri la legge di Coulomb nel modo seguente. Nel vuoto, la carica q sia, come già considerato, una carica puntiforme fissa in Q. La carica q_0 sia una carica puntiforme che sia spostata in differenti punti diversi da Q: in ciascuno di essi la si tenga fissa e si consideri la forza che agisca su di essa dovuta all'interazione con la carica q. Si esplora in questo modo lo spazio intorno alla carica q. La carica q_0 è ora detta carica "esploratrice" o carica "di prova".

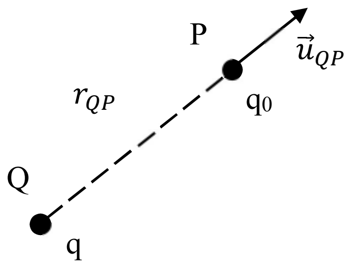


Fig. 2.2

Dividendo la forza $\vec{F}_c(P)$ che agisce sulla carica di prova q_0 per il valore q_0 della carica di prova, si introduce la forza elettrica specifica coulombiana $\vec{E}_c(P)$:

$$\vec{E}_c(\mathrm{P}) = \frac{\vec{F}_c(\mathrm{P})}{q_0}$$

che quindi, dalla legge di Coulomb, risulta pari a:

$$\vec{E}_c(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q)}{r_{QP}^2}\vec{u}_{QP}$$

ed è indipendente dal valore della carica puntiforme di prova.

$\vec{E}_c(P)$ è una grandezza vettoriale, funzione dei punti dello spazio: è un campo vettoriale. È chiamato campo elettrostatico (o campo elettrico coulombiano o campo coulombiano). Il modulo di $\vec{E}_c$ si misura in N/C = (Nm)/(Cm)= J/(Cm) = V/m, cioè volt su metro, con volt: V = J/C.

Il campo elettrostatico ha quindi come "sorgente" la carica q (carica-sorgente).

Si vede sperimentalmente che il campo elettrostatico prodotto da più (un numero finito) cariche puntiformi (cariche-sorgente) in quiete nel vuoto è pari alla somma vettoriale dei campi elettrostatici prodotti da ciascuna carica singolarmente: vale il principio di sovrapposizione.

Si ha quindi, nel caso di

i) carica-sorgente puntiforme: $\vec{E}_c(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Q)}{r_{QP}^2}\vec{u}_{QP}$

ii) N cariche-sorgente puntiformi: $\vec{E}_c(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N} \frac{q_k(Q_k)}{r_{Q_kP}^2}\vec{u}_{Q_kP}$

Considerando una situazione di carica-sorgente distribuita con densità volumetrica, il campo elettrostatico si ottiene considerando puntiforme la carica dq contenuta in un volumetto dV centrato nel punto Q ($dq=\rho_c(Q)dV$) e facendo la somma vettoriale dei campi elettrostatici prodotti da ciascuna carica dq (cioè applicando il principio di sovrapposizione). Si ha:

$$\vec{E}_c(\mathrm{P}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_c(Q)}{r_{QP}^2}\,\vec{u}_{QP}\,dV$$

Qui e nel seguito non si considerano per semplicità i casi di carica-sorgente distribuita con densità superficiale e/o densità lineare.

Con condizione elettrostatica si intende che le cariche elettriche sono tutte statiche, cioè sono tutte in quiete nello spazio e con valore costante nel tempo.

Osservazione. Il campo elettrostatico è stato introdotto considerando una carica puntiforme q (carica-sorgente). Nella realtà però la carica q non sarà puntiforme: ad esempio può essere su una sferetta conduttrice. Allora, se si ha la carica q su una sferetta conduttrice, la presenza della carica di prova q_0 determina una perturbazione della distribuzione di q sulla sferetta per l'interazione di natura elettrica fra cariche. L'azione di disturbo inoltre varia con il valore della carica di prova q_0. Pertanto la definizione operativa di campo elettrostatico viene data solitamente aggiungendo a quanto sopra la condizione di far tendere a zero il valore della carica q_0.

$$\vec{E}_c(\mathrm{P}) = \lim_{q_0\to 0}\frac{\vec{F}_c(\mathrm{P})}{q_0}$$

Il passaggio al limite ($q_0\to 0$) annulla l'effetto di perturbazione della carica di prova. Si osserva che il limite di $q_0\to 0$ va inteso in senso "macroscopico", cioè la carica di prova si fa decrescere fino a valori di gran lunga minori del valore della/e carica/che sorgente/i.

2.2 Materiale in equilibrio elettrostatico

Un corpo materiale è costituito da "tantissime" cariche positive e negative, compresenti. In generale ci sono corpi conduttori, semiconduttori e isolanti, con cariche che possono essere libere di muoversi nel materiale (si pensi agli elettroni liberi di muoversi in un conduttore metallico) e cariche che invece non lo sono (si pensi a un materiale isolante elettrico, le cui cariche sono legate a posizioni di equilibrio e sono permessi solo "piccoli spostamenti" rispetto all'equilibrio).

Ipotizzando che nella situazione finale di equilibrio, con le cariche ferme ovunque (sono cioè in equilibrio elettrostatico), sia nota la distribuzione di tali cariche, l'analisi di tale situazione si riconduce a quanto già illustrato: si calcola il campo elettrostatico prodotto nel vuoto da tutte queste cariche.

Tuttavia, le cariche elettriche esterne e interne a un generico corpo interagiscono fra di loro, determinando una situazione di equilibrio che in generale non è possibile assegnare a priori, ma sarà il risultato da determinare tenendo conto delle forze elettriche coulombiane e dei vincoli a cui le cariche sono soggette nei corpi. Pertanto è necessario introdurre dei metodi per risolvere tali problemi. Si introducono brevemente ad esempio il caso di un conduttore metallico in equilibrio elettrostatico e il modello di materiale uniforme.

2.2.1 Conduttore metallico in equilibrio elettrostatico

Si consideri un conduttore metallico in equilibrio elettrostatico. Ha all'interno un campo elettrostatico nullo (altrimenti ci sarebbero elettroni in movimento, in contrasto con la condizione di equilibrio elettrostatico).

2.2.2 Materiale uniforme

Un materiale soggetto a un campo vettoriale viene caratterizzato dalle sue proprietà. Un materiale (o mezzo) è detto uniforme se è omogeneo (le sue proprietà non variano al variare del punto), lineare (le sue proprietà non dipendono dall'intensità del campo vettoriale) e isotropo (le sue proprietà non dipendono dalla direzione del campo vettoriale).

Il modello di materiale uniforme è un modello semplice e ha molte applicazioni.

2.3 Proprietà del campo elettrostatico

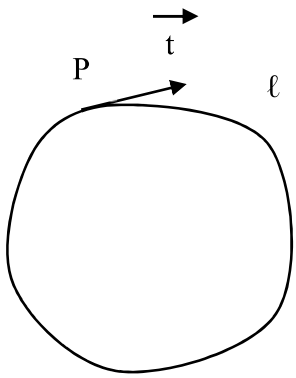
Il campo elettrostatico è conservativo: è nullo il suo integrale di linea calcolato su una qualsiasi linea chiusa ℓ. Si consideri cioè una qualsiasi linea chiusa ℓ, la si orienti e si indichi con $\vec{t}$ il versore tangente alla linea orientata, nel generico punto P della linea, avente verso concorde con l'orientazione della linea: è nullo l'integrale di linea del campo elettrostatico. Matematicamente si esprime tale proprietà con:

$$\oint_{\ell} \vec{E}_c \cdot \vec{t} d\ell = 0$$

Il simbolo $\oint$ indica che l'integrale viene calcolato lungo un percorso chiuso (si chiama anche *circuitazione*).

Tale proprietà è vera per il campo elettrostatico, per qualunque distribuzione di densità di carica volumetrica: ci si riferisce alla modellizzazione di corpi che occupano ciascuno un volume finito e ciascuno è rappresentato mediante la densità di carica volumetrica, funzione limitata e generalmente continua.

Nel caso di carica puntiforme, il risultato che è nulla la circuitazione del campo elettrostatico per una qualunque linea chiusa si applica per qualunque linea che non passa per la carica puntiforme; si applica anche per linee che passano per la carica puntiforme, intendendo la circuitazione come valore principale dell'integrale secondo Cauchy (si rimanda ai testi specialistici per gli approfondimenti).



Dalla proprietà che è nulla la circuitazione del campo elettrostatico su una qualsiasi linea chiusa, ne consegue che il suo integrale su una qualsiasi linea aperta dipende solo dalla posizione degli estremi della linea e non dal percorso di integrazione.

Si consideri allora una generica linea aperta ℓ e si indichino con A e B gli estremi di tale linea. Come detto, l'integrale del campo elettrostatico lungo tale linea aperta dipende solo dalla posizione degli estremi e non dal percorso lungo cui la linea si sviluppa. Si può allora introdurre una funzione scalare (il potenziale elettrostatico V) tale che l'integrale del campo elettrostatico è pari alla differenza tra i valori che la funzione scalare V assume in A e in B:

$$\int_{A,\ell}^{B} \vec{E}_c \cdot \vec{t} d\ell = \int_{A}^{B} \vec{E}_c \cdot \vec{t} d\ell = \mathrm{V(A)} - \mathrm{V(B)}$$

Il potenziale elettrostatico V(P) è un campo scalare, cioè una quantità scalare funzione del punto dello spazio. È definito a meno di una quantità costante: è stato introdotto come una differenza fra due potenziali. L'unità di misura del potenziale elettrostatico è il volt.

È equivalente la scrittura con pedice: $V_A - V_B$ equivale a V(A) – V(B).

2.3.1 Lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}_c$ (variazione di energia potenziale)

Si consideri il caso utilizzato per la legge di Coulomb di una carica puntiforme q, nel vuoto, posta in quiete nel punto Q e una carica puntiforme q_0 posta in quiete nel punto P. Si agisca con una forza esterna applicata alla carica q_0 in modo da spostare molto lentamente (al limite con velocità e accelerazione nulle) la carica q_0 da P a R, lungo una linea ℓ, attraverso una successione di stati di equilibrio ciascuno dei quali con energia cinetica nulla. In questo modo il lavoro compiuto dalla forza esterna è esattamente opposto a quello compiuto dalla forza $\vec{F}_c = q_0\vec{E}_c$. Il lavoro compiuto da una forza è l'integrale di linea della forza e quindi il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}_c$ nello spostare la carica q_0 da P a R lungo la linea ℓ è:

$$\int_{P,\ell}^{R} \vec{F_c} \cdot \vec{t} \mathrm{d}\ell$$

Dalla relazione $\vec{F_c} = q_0\vec{E_c}$ e dalla proprietà che il campo elettrostatico è conservativo, si ottiene:

$$\int_{P,\ell}^{R} \vec{F_c} \cdot \vec{t} \mathrm{d}\ell = q_0 \int_{P,\ell}^{R} \vec{E_c} \cdot \vec{t} \mathrm{d}\ell = q_0 \int_{P}^{R} \vec{E_c} \cdot \vec{t} \mathrm{d}\ell = q_0[\mathrm{V(P)} - \mathrm{V(R)}]$$

La relazione ottenuta vale anche nella situazione di più (un numero finito) cariche-sorgente puntiformi in quiete nel vuoto e vale anche nel caso di un insieme di cariche-sorgente distribuite con densità volumetrica ρ_c limitata e generalmente continua.

Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F_c}$ per portare q_0 da P a R non dipende quindi dal percorso per andare da P a R, ma dipende solamente dalle posizioni di partenza P e di arrivo R della carica q_0. Si può allora introdurre una funzione, l'energia potenziale (elettrostatica), tale che il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F_c}$ quando la carica q_0 si sposta da P a R è l'opposto della corrispondente variazione di energia potenziale. Se la forza $\vec{F_c}$ compie un lavoro positivo, l'energia potenziale diminuisce; se la forza $\vec{F_c}$ compie un lavoro negativo, l'energia potenziale aumenta.

Si è così introdotta l'energia potenziale (elettrostatica) del sistema di cariche (dipende soltanto dallo stato del sistema, cioè dalla configurazione delle cariche).

2.4 Campo elettrico

Si consideri una carica elettrica puntiforme "di prova" q_0, in quiete in un punto P, in presenza di altre cariche (cariche-sorgente) che si muovono. La carica di prova risente di una forza $\vec{F_e}(P,t)$ che è proporzionale al valore q_0 della carica di prova.

Dividendo la forza $\vec{F_e}(\mathrm{P,t})$ per la carica di prova, si introduce la forza elettrica specifica $\vec{E}(\mathrm{P,t})$:

$$\vec{E}(\mathrm{P,t}) = \frac{\vec{F_e}(\mathrm{P,t})}{q_0}$$

che è detta <u>campo elettrico</u>.

Osservazione 1. A proposito dell'influenza che la carica di prova può esercitare sulle cariche-sorgente, si può ripetere quanto già detto per il campo elettrostatico e quindi definire il campo elettrico attraverso un passaggio al limite per $q_0 \to 0$ (in senso "macroscopico"). Si ha:

$$\vec{E}(\mathrm{P,t}) = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F_e}(\mathrm{P,t})}{q_0}$$

Osservazione 2. Si considerano i seguenti casi.

i) Condizione elettrostatica. Si osserva che se le cariche-sorgente sono in quiete nello spazio e con valore costante nel tempo si ha la condizione elettrostatica e quindi il campo elettrico coincide con il campo elettrostatico: $\vec{E}(\mathrm{P}) = \vec{E}_c(P)$.

ii) Regime stazionario. In ogni punto dello spazio i fenomeni elettromagnetici sono indipendenti dal tempo. Densità di carica e densità di corrente sono stazionarie (cioè costanti rispetto al tempo) in ogni punto dello spazio. La carica in generale è in moto; un conduttore sarà in generale percorso da corrente stazionaria non nulla e in esso può essere presente un campo elettrico stazionario non nullo.

L'esperienza mostra che il campo elettrico stazionario è conservativo e ha come sorgente la carica (densità volumetrica di carica costante rispetto al tempo). Dalla densità volumetrica di carica costante rispetto al tempo, il campo elettrico stazionario si calcola usando la stessa relazione introdotta col campo elettrostatico.

iii) Condizioni variabili generiche. La densità di carica e il campo di corrente variano nel tempo con legge qualsiasi. Il campo elettrico in generale non è conservativo.

2.5 Campo elettrico e induzione magnetica

Si consideri ora una carica elettrica puntiforme di prova q_0, in moto con velocità $\vec{v}$ in un punto P, in presenza di altre cariche (cariche-sorgente) che si muovono. La carica di prova risente in generale di una forza $\vec{\mathrm{F}}(P,t)$ che è proporzionale al valore q_0 della carica di prova. Dividendo la forza $\vec{\mathrm{F}}(P,t)$ per il valore q_0 della carica di prova si introduce la forza elettrica specifica:

$$\frac{\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{P},\mathrm{t})}{q_0} = \vec{E}(\mathrm{P},\mathrm{t}) + \vec{v} \times \vec{B}(\mathrm{P},\mathrm{t})$$

dove $\vec{E}(P,t)$ è il campo elettrico precedentemente introdotto con cariche-sorgente che si muovono e carica di prova in quiete in P e si è così introdotta la forza elettrica specifica $\vec{v} \times \vec{B}$. L'induzione magnetica $\vec{B}(P,t)$ è un campo vettoriale (il modulo di $\vec{B}$ si misura in tesla T = Vs/m^2).

Si ha il campo elettromagnetico, termine che si riferisce al fenomeno elettromagnetico, combinazione degli aspetti elettrici e magnetici.

2.6 Tensione elettrica

Sia data una linea ℓ aperta, in quiete, orientata mediante un versore $\vec{\mathrm{t}}$. Si definisce tensione elettrica v(t) l'integrale di linea del campo elettrico:

$$v(t) = \int_{\ell} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} d\ell$$

La linea è marcata da un verso di percorrenza detto riferimento della tensione.

Come la corrente è stata definita rispetto a una superficie orientata e l'orientazione fissa il riferimento della corrente, così la tensione è definita rispetto a una linea orientata e l'orientazione fissa il riferimento della tensione.

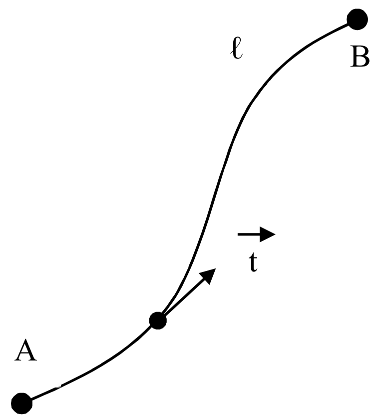
I due estremi della linea aperta si possono indicare, per esempio, con due lettere (per esempio, A e B). L'orientazione della linea data dal versore $\vec{t}$ indica quale dei due estremi è il punto di inizio e qual è quello di fine.

Dato che il campo elettrico in generale non è conservativo, la tensione dipende dagli estremi (cioè il punto di inizio e quello di fine) e dal percorso che si segue per andare da un estremo all'altro.

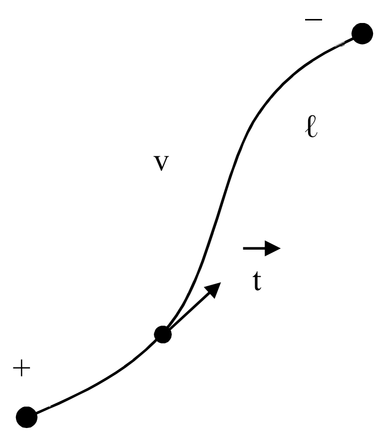
Data la linea ℓ, si possono evidenziare gli estremi della linea indicandoli, in modo ordinato, a pedice della tensione v. La tensione si scrive allora nella forma:

$$v_{AB}(t) = \int_{A,\ell}^{B} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} d\ell$$

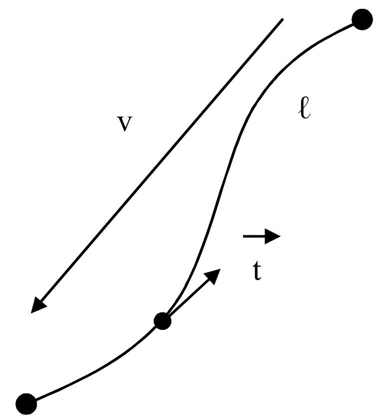
I due pedici A e B in $v_{AB}(t)$, come detto, sono ordinati: il primo pedice indica il punto di inizio e il secondo pedice quello di fine. Pertanto $v_{AB}(t)$ indica che la linea è orientata da A verso B (cioè che il versore $\vec{t}$ è diretto da A a B). Il fatto che il percorso è individuato dalla linea ℓ è indicato in modo esplicito nell'integrale: si può anche indicare nella tensione v(t), ma questo non viene qui fatto per non appesantire la notazione.



Al posto dei pedici, spesso si mette un segno "+" in corrispondenza del punto di inizio e un segno "–" in corrispondenza del punto di fine, come indicato nella figura seguente.



Talvolta il riferimento è dato da una freccia diretta dal punto di fine verso il punto di inizio, come indicato nella figura seguente.



Nel seguito, per indicare il riferimento della tensione, si utilizzeranno o i pedici (coppia ordinata) o i segni + e –.

Data la linea ℓ, utilizzando i pedici, come detto, la tensione si scrive nella forma:

$$v_{AB}(t) = \int_{A,\ell}^{B} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} d\ell$$

Invertendo il riferimento della tensione, il valore della tensione cambia di segno. Infatti invertire il riferimento della tensione vuol dire:

-) invertire il versore tangente alla linea ($\vec{t}^* = -\vec{t}$);

-) invertire il verso positivo dell'ascissa curvilinea (ds = – dℓ);

-) andare da B ad A, cioè B diventa il punto di inizio e A quello di fine: il valore dell'integrale definito cambia di segno invertendo gli estremi di integrazione.

Si ottiene pertanto:

$$v_{BA}(t) = \int_{B,\ell}^{A} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t}^{*} ds = \int_{B,\ell}^{A} \vec{E}(P,t) \cdot \left(-\vec{t}\right)(-d\ell) = - \int_{A,\ell}^{B} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} d\ell = -v_{AB}(t)$$

L'integrale di linea di una forza elettrica specifica è detto lavoro elettrico specifico (svolto da tale forza specifica lungo la linea). Dato che il campo elettrico è una forza elettrica specifica, l'integrale di linea del campo elettrico (cioè la tensione elettrica) è un lavoro elettrico specifico.

L'unità di misura della tensione è il volt V.

2.6.1 Tensione elettrica e differenza di potenziale

Come già indicato, dato che il campo elettrico in generale non è conservativo, la tensione in generale dipende sia dagli estremi della linea che dal percorso che la linea identifica per andare da un estremo all'altro. La tensione elettrica non è quindi, in generale, una differenza di potenziale.

A regime stazionario, come già indicato, il campo elettrico è conservativo e quindi a regime stazionario la tensione è una differenza di potenziale (d.d.p.):

$$V_{AB} = V(A) - V(B) = V_A - V_B$$

2.6.2 Linea chiusa: forza elettromotrice data dalla circuitazione del campo elettrico e forza elettromotrice mozionale

Si consideri una linea ℓ chiusa in quiete. In generale il campo elettrico non è conservativo: il suo integrale di linea calcolato su una linea chiusa dipende dalla linea ed è in generale diverso da zero. Tale integrale è la forza elettromotrice (f.e.m.) data dalla circuitazione del campo elettrico:

$$f.e.m. \, data \; dalla \; circuitazione \; del \; campo \; elettrico = \oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{t} d\ell$$

Osservazione. Il fenomeno dell'elettromagnetismo è descritto mediante i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ che sono strettamente legati fra di loro. Senza approfondire l'argomento ulteriormente, si è comunque già visto che una carica elettrica puntiforme di prova q_0 in un punto P, all'istante t, risente di una forza di natura elettromagnetica:

$$\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{P,t}) = q_0\vec{E}(\mathrm{P,t}) + q_0\vec{v} \times \vec{B}(\mathrm{P,t})$$

Si considera il caso di una carica che è in un conduttore filiforme che identifica una linea chiusa (si ricorda che un conduttore filiforme è caratterizzato da una dimensione, l'asse curvilineo ℓ). Il conduttore filiforme si muove con velocità $\vec{v}_\ell$ (la velocità $\vec{v}_\ell$ in generale è variabile lungo il conduttore filiforme: il conduttore filiforme si può deformare). In generale si considerano due termini:

$$f.e.m.\,data\ dalla\ circuitazione\ del\ campo\ elettrico = \oint_{\ell} \vec{E} \cdot \vec{t} d\ell$$

$$f.e.m.\,mozionale = \oint_{\ell} \vec{v}_{\ell} \times \vec{B} \cdot \vec{t} d\ell$$

Si osserva che la velocità $\vec{v}$ della carica nel conduttore filiforme è pari alla somma della velocità ($\vec{v}_{\ell}$) del conduttore filiforme/linea e della velocità ($\vec{v}'$) della carica rispetto al conduttore filiforme (dovuto a un moto relativo della carica rispetto al conduttore filiforme, moto che avviene lungo il conduttore filiforme):

$$\vec{v} = \vec{v}_{\ell} + \vec{v}'$$

Inoltre vale che:

$$\vec{v}' \times \vec{B} \cdot \vec{t} = 0$$

in quanto sono paralleli $\vec{v}'$ e $\vec{t}$.

Quando il conduttore filiforme/linea è in quiete ci si riferisce solo alla f.e.m. data dalla circuitazione del campo elettrico; quando il conduttore filiforme/linea è in moto (eventualmente deformandosi) si aggiunge a tale termine la f.e.m. che dipende dalla velocità $\vec{v}_{\ell}$ ed è detta perciò *f.e.m. mozionale*.

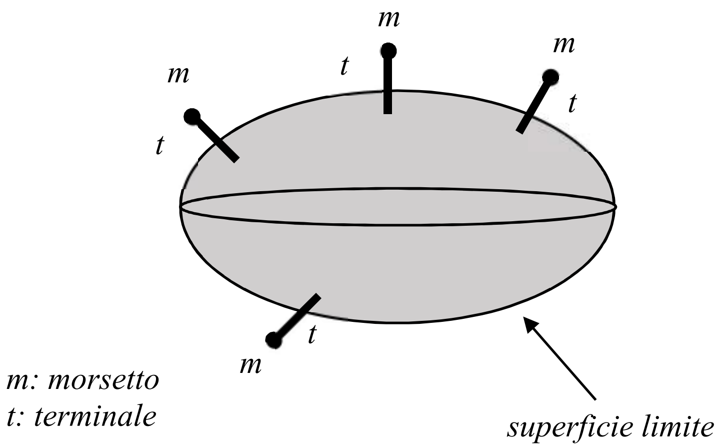
Capitolo 3. INTRODUZIONE AL MODELLO RETI ELETTRICHE

3.1 Introduzione

Per l'analisi dei fenomeni elettromagnetici, in forma generale, si utilizzano relazioni fra grandezze vettoriali che dipendono dallo spazio e dal tempo.

In molte applicazioni, è sufficiente un'analisi del comportamento dei componenti, presi ciascuno "nel suo complesso", che interagiscono tra di loro. Non si cerca quindi una soluzione ovunque. Si studia il modello di un insieme di componenti collegati fra di loro.

Un componente è un oggetto limitato da una superficie chiusa detta superficie limite. Da tale superficie limite emergono due o più (in generale: un numero finito $n \geq 2$) tratti (detti terminali). La terminazione di ciascun terminale è detta morsetto.



Le grandezze che vengono utilizzate per studiare il comportamento del componente sono due grandezze scalari: la corrente e la tensione. A ciascun terminale è associata una corrente e per la superficie limite non ci sono altre correnti oltre a quelle dei terminali. Per ciascuna coppia di morsetti è considerata la tensione, prendendo linee di valutazione esterne (o tangenti) alla superficie limite del componente.

In merito alle relazioni che si possono scrivere tra correnti e quelle relative alle tensioni, si consideri innanzitutto la condizione di regime stazionario. A regime stazionario, si è già visto che valgono le proprietà che il campo di corrente è solenoidale e il campo elettrico è conservativo. Tali proprietà valgono ovunque nello spazio.

Il regime variabile quasi-stazionario si introduce secondo il modello di seguito specificato, nelle linee fondamentali, relativo ai componenti e alla interconnessione dei componenti con tensioni e correnti variabili nel tempo.

Sostanzialmente, il modello che si sta introducendo di reti elettriche a regime variabile quasi-stazionario è il seguente. A regime variabile quasi-stazionario, le proprietà del regime stazionario non valgono più ovunque ma valgono ancora calcolando le totali correnti uscenti da superfici chiuse che non intersecano superfici limite dei componenti e calcolando l'integrale di linea del campo elettrico per linee che non intersecano superfici limite dei componenti. La rete elettrica è data da componenti che sono collegati tra di loro.

Si precisa ora il modello con qualche dettaglio in più per i componenti e per la interconnessione dei componenti.

i) Componenti

Il regime variabile quasi-stazionario si verifica quando, rimanendo esternamente (o tangenti) alla superficie limite di un qualunque componente, le correnti e le tensioni sono funzioni del tempo, in modo tale che, nel generico istante t, considerando le correnti ai terminali dei componenti, la totale corrente uscente dalla superficie limite del componente è nulla (per la superficie limite non ci sono altre correnti oltre a quelle dei terminali) e considerando le tensioni rimanendo esternamente (o tangenti) alle superfici limite, tutte le tensioni fra coppie di morsetti sono differenze di potenziale (assumendo che ogni morsetto sia equipotenziale).

Si evidenzia che, in regime variabile quasi-stazionario, all'interno delle superfici limite tali proprietà possono non valere.

Alcune precisazioni ulteriori. Si è parlato di correnti e di tensioni come grandezze rispettivamente "ai terminali" e "fra coppie di morsetti". Nella pratica spesso i terminali sono elementi metallici, spesso di forma cilindrica con lunghezza maggiore del diametro, che si possono considerare equipotenziali. Pertanto nel modello si assume equipotenziale ciascun terminale, morsetto incluso. Sono allora equivalenti le espressioni "tensione fra coppia di morsetti" e "tensione fra coppia di terminali". Inoltre, come sopra indicato, a regime variabile quasi-stazionario, al terminale è associata una corrente del terminale senza specificare la sezione: ha cioè lo stesso valore per qualunque sezione del terminale che si consideri.

In questo modo le correnti e le tensioni sono grandezze rispettivamente "ai terminali" e "fra coppie di morsetti"; sono grandezze scalari di numero finito e sono grandezze o costanti (regime stazionario: I, V) o dipendenti solamente dal tempo (regime variabile quasi-stazionario: i(t), v(t)).

ii) Interconnessione dei componenti

I componenti sono collegati fra di loro formando così i circuiti elettrici.

I collegamenti sono effettuati in corrispondenza dei morsetti: i punti di collegamento sono detti nodi.

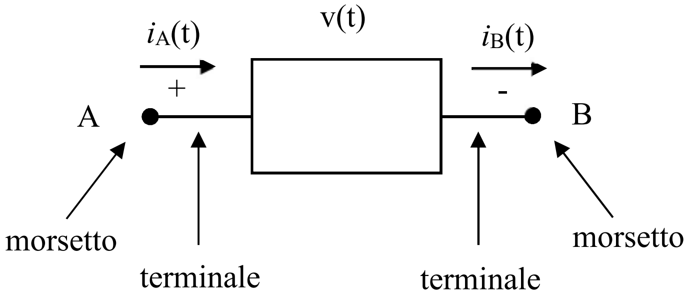
In regime variabile quasi-stazionario, i morsetti in comune in un nodo hanno tutti lo stesso potenziale; inoltre per ogni nodo vale che è nulla la totale corrente uscente da un nodo.

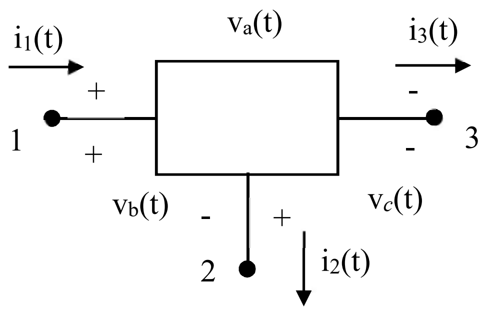
Il modello della rete elettrica che si sta introducendo è detto *modello a parametri concentrati* o *modello a costanti concentrate*.

Tale modello utilizza una schematizzazione, di seguito descritta.

3.2 Componenti

Nella schematizzazione ogni componente è rappresentato, in generale, da una "superficie chiusa" (un rettangolo, ad esempio), da cui emergono tratti filiformi (detti terminali), ciascuno dei quali ha per estremo un punto (detto morsetto). A ciascun terminale si associa una corrente elettrica con il suo riferimento e a ogni coppia di morsetti (o terminali) si associa una tensione con il suo riferimento.





Nelle due figure precedenti sono riportate, rispettivamente, la schematizzazione di un componente a 2 terminali e di un componente a 3 terminali (con i riferimenti scelti ad arbitrio).

Si chiama corrente entrante quella che reca il riferimento diretto verso l'interno del componente; uscente nel caso contrario (riferimento diretto verso l'esterno).

Se il componente ha 2 terminali è detto bipolo; se ne ha 3 è detto tripolo; se ne ha 4 è detto quadripolo; in generale, se ha *n* terminali è detto n-polo.

3.2.1 Proprietà fondamentali degli n-poli

Gli n-poli hanno le seguenti due proprietà fondamentali.

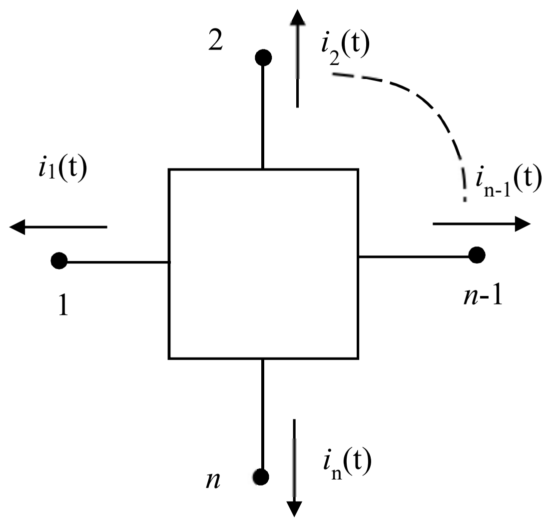
1) È nulla in ogni istante la somma delle correnti uscenti ai terminali dell'n-polo, cioè prese tutte le correnti ai terminali dell'n-polo con il riferimento uscente (come indicato in figura):

$i_1(t) + i_2(t) + \ldots + i_n(t) = 0$

2) La tensione fra una qualsiasi coppia di morsetti (o terminali) è una differenza di potenziale:

$v_{ij}(t) = V_i(t) – V_j(t)$

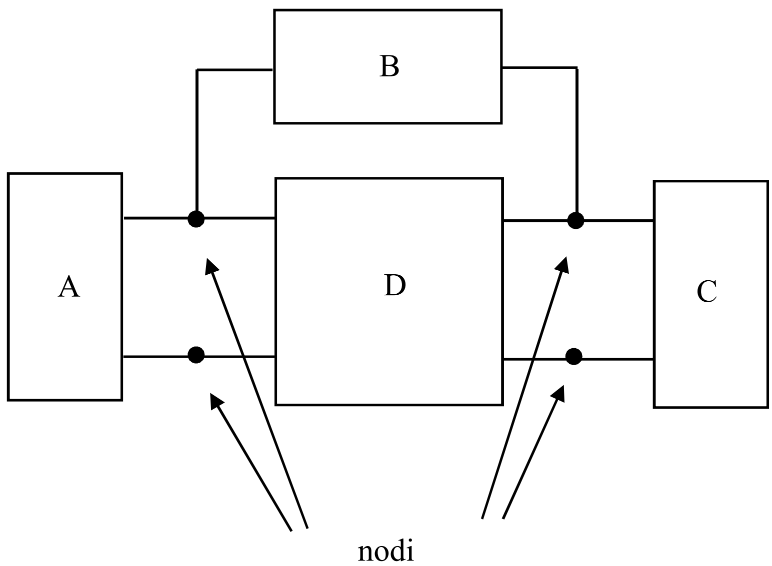
dove con "i" e "j" sono indicati i morsetti "i" e "j" dell'n-polo e con $V_i(t)$ e $V_j(t)$ si sono indicati, al tempo t, rispettivamente il potenziale del morsetto i-esimo e j-esimo.



3.3 Interconnessione dei componenti

I componenti sono collegati fra di loro. I collegamenti sono effettuati in corrispondenza dei morsetti. I punti di collegamento sono detti <u>nodi</u>.

I morsetti in comune in un nodo hanno tutti lo stesso potenziale e per il nodo vale la solenoidalità del campo di corrente.



In figura, un esempio di rete con tre bipoli (A, B, C) e un quadripolo (D). Sono indicati i nodi.

3.4 Rete elettrica

La rete elettrica è data da componenti che sono collegati fra di loro.

Si hanno due aspetti caratterizzanti la rete elettrica:

- la tipologia, cioè i tipi di componenti che costituiscono la rete elettrica;

- la topologia, cioè il modo in cui i componenti sono interconnessi.

Si ribadisce che si ammette che le grandezze, variabili col tempo, adatte a descrivere il comportamento della rete sono le correnti (una per ciascun terminale) e le tensioni (una per ciascuna coppia di morsetti)

Si è così introdotto il modello delle *reti elettriche a parametri concentrati* (o *a costanti concentrate*), in regime stazionario o in regime variabile quasi-stazionario.

3.5 Bipolo

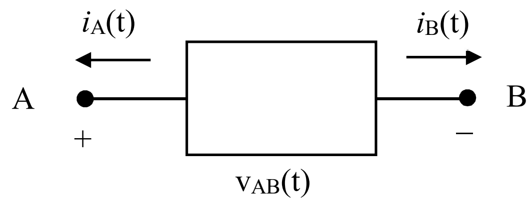
Il bipolo è un n-polo con n = 2. Quanto detto per l'n-polo vale anche per il bipolo: i bipoli hanno pertanto le due proprietà fondamentali già indicate per un n-polo, con n = 2.

1) È nulla in ogni istante la somma delle correnti uscenti ai terminali del bipolo, cioè prese tutte le correnti ai terminali del bipolo con il riferimento uscente (come indicato in figura):

$i_A(t) + i_B(t) = 0$

2) La tensione fra i due morsetti (o terminali) del bipolo è una differenza di potenziale:

$v_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t)$



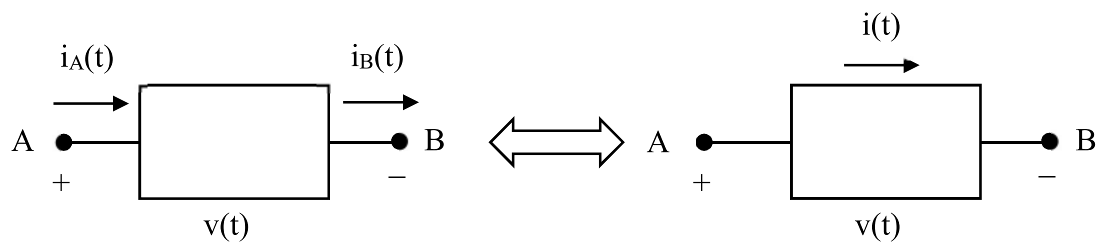
Si osserva che se si prendono le due correnti con il riferimento opposto al caso precedente, cioè entranti nel bipolo, il valore di entrambe le correnti cambia di segno e quindi la loro somma è ancora pari a zero. Pertanto la proprietà indicata per le correnti si può dire, in modo equivalente a quello precedentemente indicato:

-) è nulla in ogni istante la somma delle correnti entranti ai terminali del bipolo.

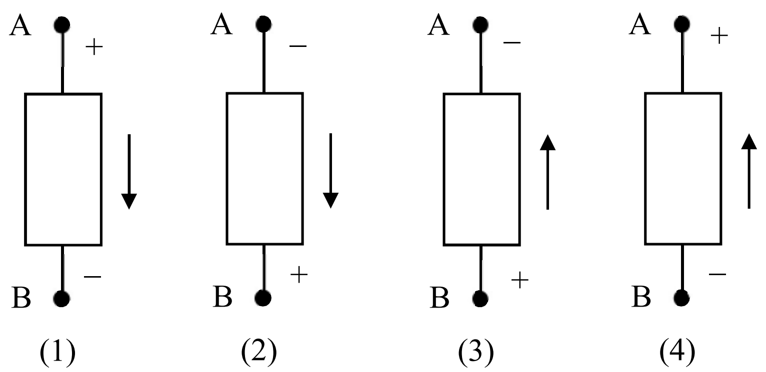
Inoltre, dato un bipolo, presa la corrente a un terminale con riferimento entrante nel bipolo e la corrente all'altro terminale con riferimento uscente, si può anche dire che:

-) per un bipolo, in ogni istante la corrente entrante a un terminale è uguale alla corrente uscente all'altro terminale.

Dato che in ogni istante la corrente entrante a un terminale è pari alla corrente uscente all'altro terminale, al bipolo si attribuisce un valore unico di corrente di entrambi i terminali. Con i riferimenti di figura, vale che: $i_A(t) = i_B(t)$. Pertanto si utilizza un valore unico di corrente: $i(t) = i_A(t) = i_B(t)$, con unico riferimento di corrente (che in A è quello di $i_A(t)$ e in B è quello di $i_B(t)$. Pertanto nel seguito il bipolo è caratterizzato da una corrente e una tensione.



Dato un bipolo, di morsetti A e B, per la tensione si può scegliere che il riferimento positivo sia in A oppure in B e per la corrente si può scegliere che il riferimento sia entrante dal terminale avente estremo il morsetto A o dal terminale avente estremo il morsetto B. Sono complessivamente quattro soluzioni diverse possibili. In figura sono riportati i quattro casi.



Considerando invece l'orientazione reciproca dei riferimenti di tensione e di corrente, si osserva che le combinazioni possibili sono due. Casi (1) e (3) di figura: corrente entrante nel bipolo al terminale col riferimento + della tensione: è detta <u>convenzione dell'utilizzatore</u> (o <u>convenzione degli utilizzatori</u>). Casi (2) e (4) di figura: corrente uscente dal bipolo al terminale col riferimento + della tensione: è detta <u>convenzione del generatore</u> (o <u>convenzione dei generatori</u>). Si passa da una convenzione all'altra invertendo il verso di riferimento della tensione a parità di verso di riferimento della corrente oppure invertendo il verso di riferimento della corrente a parità di verso di riferimento della tensione.

3.5.1 Potenza elettrica per un bipolo in regime variabile quasi-stazionario

In regime variabile quasi-stazionario, si consideri un bipolo, con tensione v(t) e corrente i(t). Si consideri il prodotto di queste due grandezze:

$$p(t) = v(t)\ i(t)$$

Il termine p(t) così introdotto è la potenza (elettrica). La relazione sarà giustificata nel prossimo paragrafo. Unità di misura della potenza p(t): VA = J/s = W. L'unità di misura è il watt (simbolo W).

La potenza calcolata con la convenzione dell'utilizzatore ha un valore; calcolata con la convenzione del generatore ha il valore opposto. Infatti la potenza può essere con riferimento entrante o con riferimento uscente: i due valori sono opposti. Quando la potenza è calcolata con la convenzione dell'utilizzatore è calcolata con riferimento entrante nel bipolo (al riguardo si veda quanto riportato nel prossimo paragrafo). Si dice che la potenza è la potenza entrante. Quando la potenza è calcolata con la convenzione del generatore è calcolata con riferimento uscente dal bipolo. Si dice che la potenza è la potenza uscente.

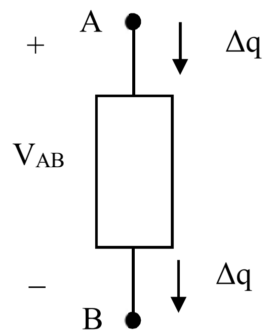
La potenza (sia quella entrante che quella uscente) è un numero reale, dotato di segno, variabile nel tempo. In regime stazionario è costante e si indicherà con una lettera maiuscola (P).

La potenza entrante è anche detta potenza assorbita; la potenza uscente è anche detta potenza erogata. In alcuni testi si preferisce indicare con il termine di potenza assorbita la potenza entrante positiva e con potenza erogata la potenza uscente positiva.

3.5.2 Potenza elettrica per un bipolo

Si consideri un bipolo (di terminali A e B) a regime stazionario. Il bipolo è collegato in un circuito.

Si supponga che una carica Δq attraversi il bipolo nell'intervallo di tempo Δt, entrando dal terminale A e uscendo dal terminale B. I terminali A e B sono rispettivamente al potenziale V(A) e V(B).



Si considera il campo elettrico stazionario $\vec{E}$ che è conservativo e la relativa forza che agisce sulla carica Δq che è $\vec{F}_e = \Delta q\vec{E}$.

Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F_e}$ per spostare la carica Δq attraverso il bipolo dal terminale A al terminale B è pari a:

$$\Delta q\,[V(A) - V(B)] = V_{AB}\,\Delta q$$

Tale lavoro può essere positivo, nullo o negativo.

Come già visto in elettrostatica (e vale anche in condizioni stazionarie dove il campo elettrico è conservativo), il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F_e}$ per spostare la carica è l'opposto della corrispondente variazione di energia potenziale del sistema di cariche.

Se il lavoro per spostare la carica Δq attraverso il bipolo dal terminale A al terminale B è positivo, si ha una corrispondente diminuzione dell'energia potenziale: si ha un lavoro positivo entrante nel bipolo. Se il lavoro per spostare la carica Δq attraverso il bipolo dal terminale A al terminale B è negativo, si ha un corrispondente aumento dell'energia potenziale: si ha un lavoro negativo entrante nel bipolo (o equivalentemente un lavoro positivo uscente dal bipolo).

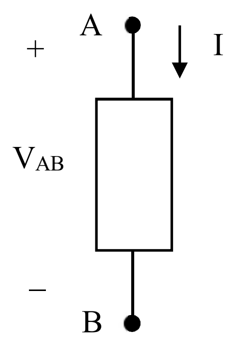
Pertanto si è ottenuto che il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F_e}$ relativo allo spostamento della carica Δq, nell'attraversamento del bipolo, dal terminale A al terminale B (pari a: $V_{AB}\,\Delta q$) è il lavoro (elettrico) entrante nel bipolo (sia esso positivo, nullo o negativo). Pertanto considerando la carica Δq che nell'intervallo di tempo Δt entra nel bipolo dal terminale A ed esce dal terminale B, il lavoro elettrico entrante nel bipolo è pari a:

$$\Delta L_{entr} = V_{AB}\,\Delta q$$

In merito al <u>riferimento della tensione</u> V_{AB}, si ricorda che i pedici (coppia ordinata) corrispondono ai segni + al primo pedice e – al secondo pedice.

In merito al <u>riferimento della corrente</u> I, visto che si considera la carica Δq entrante nel bipolo dal terminale A nel tempo Δt, si prende il riferimento della corrente entrante nel bipolo dal terminale A (come indicato in figura seguente) e si ha che:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



Si introduce la <u>potenza</u> P entrante nel bipolo che è il lavoro elettrico entrante nel bipolo per unità di tempo. Per l'analisi fatta, è:

$$P_{entr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L_{entr}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_{AB}\Delta q}{\Delta t} = V_{AB} I$$

cioè è il prodotto fra la tensione e la corrente con la convenzione degli utilizzatori.

Si passi ora al regime variabile quasi-stazionario.

A regime stazionario è stata introdotta la potenza elettrica, che dipende dalle grandezze elettriche (tensione e corrente) ai terminali del bipolo. Si ricorda che per tali grandezze, in regime variabile quasi-stazionario, considerando il bipolo preso nel suo complesso (rimanendo esternamente (o tangenti) alla sua superficie limite), valgono le proprietà del regime stazionario di corrente entrante a un terminale uguale a quella uscente all'altro terminale e tensione tra i terminali che è una differenza di potenziale. Si giustifica così la validità della relazione per un bipolo in regime variabile quasi-stazionario:

$$p(t) = v(t)i(t)$$

e la potenza è entrante se si adotta la convenzione dell'utilizzatore, è uscente se si adotta la convenzione del generatore.

Nota. La relazione trovata sulla potenza elettrica si può ottenere in modo più completo utilizzando le relazioni generali del campo elettromagnetico e il modello di bipolo in regime variabile quasi-stazionario (al riguardo, si rimanda ai testi specialistici).

3.6 Bipolo passivo

Dato un bipolo in regime variabile quasi-stazionario, si ha che:

$$p(t) = \frac{dL(t)}{dt}$$

con potenza p(t) e lavoro elettrico L(t) entrambi entranti nel bipolo (o entrambi uscenti dal bipolo).

Come per la potenza, il lavoro elettrico L(t) è entrante se si adotta la convenzione dell'utilizzatore, mentre è uscente se si adotta la convenzione del generatore. Integrando la relazione sopra riportata da $-\infty$ al generico istante t e utilizzando la relazione p(t)=v(t)i(t):

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} p(t')dt' = \int_{-\infty}^{t} v(t')i(t')dt'$$

Un bipolo si dice passivo se il lavoro elettrico entrante (quindi con la convenzione dell'utilizzatore) è non negativo per qualunque istante t considerato ($L(t) \geq 0$ con la convenzione dell'utilizzatore).

Se un bipolo non è passivo, si dice che è un bipolo attivo.

La relazione che fornisce $L(t)$ ha come istante iniziale di integrazione l'istante $-\infty$. Convenzionalmente è l'istante di "fabbricazione" del componente, cioè l'istante di inizio.

Un bipolo passivo, può avere una p(t) entrante positiva, nulla o negativa, ma l'integrale di tale potenza entrante dalla fabbricazione del bipolo a un generico istante t deve essere sempre non negativa. Questo vuol dire che un bipolo passivo può dissipare il lavoro elettrico entrante (è tipico il caso di dissipazione sotto forma di calore) e/o lo può accumulare sotto forma di energia interna e restituire entro i limiti di quanto ha accumulato. Un bipolo passivo non può fornire lavoro elettrico convertendolo da forme energetiche non elettriche (es. meccanica, termica, chimica).

Esempio. Un bipolo che ha potenza nulla in ogni istante è un bipolo passivo.

3.7 Porta elettrica

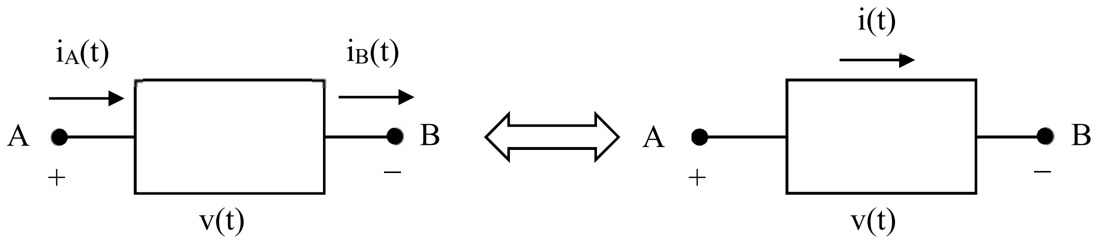
Dato un n-polo, può accadere che la corrente entrante a un terminale sia uguale a quella uscente a un altro terminale, qualunque sia l'istante temporale t di analisi. Tale coppia di terminali è detta porta elettrica o porta.

A una porta si attribuisce un valore unico di corrente (di entrambi i terminali): è detta corrente di porta. La tensione tra i due morsetti (o terminali) è detta tensione di porta.

Esempio. I morsetti di un bipolo sono una porta. Con i riferimenti indicati in figura, vale infatti che:

$$i_A(t) = i_B(t) = i(t)$$

Un bipolo ha quindi una corrente di porta e una tensione di porta.

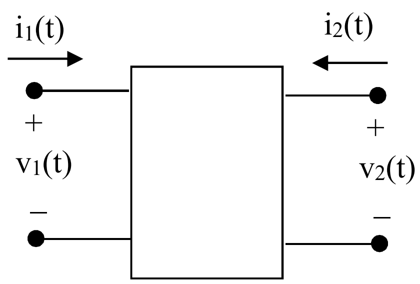


3.8 M-bipolo

È un caso particolare di n-polo. È un n-polo costituito solamente da porte elettriche. Il numero delle porte elettriche è indicato con *m*. Le grandezze elettriche che caratterizzano un m-bipolo sono le m correnti di porta e le m tensioni di porta.

Un m-bipolo ha pertanto n = 2m terminali, raggruppati in m porte. Per m = 1 è il *bipolo*. Per m = 2 è detto *doppio bipolo*. Per m = 3 è detto triplo bipolo.

In un m-bipolo le variabili di interesse sono le m correnti di porta e le m tensioni di porta. In un doppio bipolo si hanno due correnti di porta e due tensioni di porta, come indicato in figura.



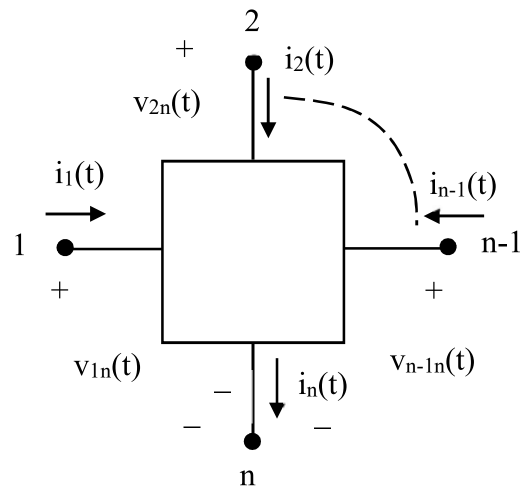
3.9 N-polo trattato come un m-bipolo

Un n-polo può essere trattato come un m-bipolo, con m = n–1. Infatti, si sceglie un generico terminale dell'n-polo (ad esempio l'n-esimo) come terminale di riferimento (terminale comune). Il morsetto corrispondente è detto morsetto comune. Si assume riferimento concorde (ad esempio entrante) per le correnti agli altri terminali e riferimento opposto per la corrente al terminale comune. Si ha:

$i_1(t) + i_2(t) + \ldots + i_{n-1}(t) = i_n(t)$

Questa relazione suggerisce che la corrente al terminale comune può essere vista come il "ritorno" comune delle correnti degli altri terminali: n–1 porte, ciascuna con un morsetto che è uno dei primi n–1 morsetti e l'altro morsetto è il morsetto comune.

Le tensioni delle n–1 porte sono quelle tra ciascuno dei primi n–1 morsetti e quello comune.



L'n-polo è quindi caratterizzato dalle n–1 correnti e dalle n–1 tensioni sopra indicate, cioè preso un terminale/morsetto come terminale/morsetto comune, dalle correnti agli altri terminali e dalle tensioni tra ciascuno degli altri morsetti e il morsetto comune. Tutte le altre tensioni e correnti dell'n-polo si ricavano da queste n–1 correnti e n–1 tensioni.

Infatti dalle n–1 correnti sopra indicate si ottiene la corrente al terminale comune dalla relazione sulle correnti di un n-polo. Inoltre, per la proprietà che ciascuna delle tensioni fra due morsetti di un n-polo è una differenza di potenziale fra i potenziali dei relativi morsetti (ad esempio: $v_{ij}(t) = V_i(t) – V_j(t)$), si ottiene che la tensione fra qualunque coppia di morsetti dell'n-polo si ottiene da due delle n–1 tensioni sopra indicate. Infatti, ad esempio:

$v_{ij}(t) = V_i(t) – V_j(t) = [V_i(t) – V_n(t)] – [V_j(t) – V_n(t)] = v_{in}(t) – v_{jn}(t).$

Capitolo 4. ELEMENTI DI TEORIA DEI GRAFI

Si fa inizialmente riferimento a una rete di bipoli. L’estensione a una rete di n-poli, sarà fatta successivamente. Con riferimento alle reti di bipoli, si introducono i seguenti elementi di teoria dei grafi.

Grafo connesso

Un grafo si dice connesso quando, dati due nodi, si può sempre passare dall'uno all'altro muovendosi lungo i suoi lati. Un grafo non connesso consta di più parti separate ciascuna delle quali connessa.

Nel caso di grafo non connesso costituito da due o più parti separate, è ovvio che se le parti non si influenzano, vuol dire che non è in realtà un circuito ma sono più circuiti che non si influenzano, ciascuno costituito da una delle parti presa da sola. Nel caso di una rete di bipoli si ha questo e quindi si farà riferimento a un grafo connesso nella trattazione di una rete di bipoli.

Saranno quindi introdotti gli elementi di topologia delle reti (maglia, insieme di taglio, albero e coalbero) su un grafo connesso.

Nel caso invece di una rete generale di n-poli, ha interesse il caso di una rete avente grafo non connesso. Più avanti si presenterà come si traccia il grafo in questo caso, estendendo l’analisi di un grafo connesso al caso di una rete generale di n-poli (anche con grafo non connesso).

Capitolo 5. GRAFO DI UNA RETE DI N-POLI

Fino ad adesso si è fatto riferimento a una rete di bipoli, avente grafo connesso. Si vuole adesso estendere i concetti introdotti per una rete generale di m-bipoli e/o di n-poli.

Si osserva che un generico n-polo è sempre riconducibile a un m-bipolo: come già mostrato, per ciascun n-polo si prende un morsetto come morsetto comune e si riconduce l’n-polo alle (n–1) porte che hanno in comune il morsetto dell’n-polo scelto come morsetto comune.

Si può allora tracciare il grafo, mettendo un lato per ogni porta, invece che per ogni bipolo. Il grafo che si ottiene può essere connesso oppure non connesso. Sul grafo connesso o su ciascuna parte connessa del grafo non connesso, si applicano i concetti di maglia, insieme di taglio, albero e coalbero. La rete nel complesso è data dall’insieme delle parti non connesse e quindi si metteranno assieme le analisi svolte per ciascuna parte connessa.

Nel seguito quindi si farà riferimento a una generica rete di n-poli, intendendo che il suo grafo ottenuto associando un lato a ogni porta o è un grafo connesso oppure è formato da più parti ciascuna connessa. In quest’ultimo caso, l’analisi è relativa a ciascuna parte connessa. L’analisi per la rete di n-poli con grafo non connesso risulta quindi mettendo assieme tutte le analisi fatte su ciascuna parte connessa.

5.1 Grafo non connesso

Si precisa quanto sopra introdotto sui sistemi di equazioni indipendenti nelle tensioni e nelle correnti, per il caso generale di una rete avente grafo non connesso.

Sia data una rete di n-poli e si consideri il suo grafo costituito da p parti ciascuna connessa. Per ciascuna parte connessa, per esempio la k-esima, formata da n_k nodi e da ℓ_k lati, si applica quanto sopra indicato relativamente ai concetti di albero e coalbero e quindi dalle LKC si scrivono (n_k - 1) equazioni indipendenti ai nodi e dalle LKT si scrivono (ℓ_k - n_k + 1) equazioni indipendenti alle maglie. Sommando tutte le relazioni su tutte le p parti separate connesse, si ottiene che dalle LKC si hanno un numero di equazioni indipendenti pari a:

$$\sum_{k=1}^{p}(n_h - 1) = n - p$$

dove con n si è indicato il numero dei nodi del grafo nel suo complesso. Dalle LKT si hanno un numero di equazioni indipendenti pari a:

$$\sum_{k=1}^{p}(\ell_k - n_k + 1) = \ell - n + p$$

dove con ℓ si è indicato il numero dei lati del grafo nel suo complesso.

La somma delle relazioni che derivano dalle LKC e LKT risulta pari ℓ, numero delle porte, cioè numero dei lati del grafo.

Capitolo 6. ANALISI DELLE RETI DI BIPOLI

Sia data una rete di ℓ bipoli in regime stazionario o variabile quasi-stazionario, avente grafo connesso. Tale rete ha 2ℓ incognite, le tensioni e le correnti degli ℓ bipoli.

Si passi al corrispondente grafo. Utilizzando le LKC e le LKT si ottengono ℓ equazioni indipendenti: dalla LKC si possono scrivere n-1 equazioni e dalla LKT si possono scrivere m = ℓ - n + 1 equazioni fra di loro indipendenti. Tali ℓ equazioni dipendono solo dalla topologia della rete (**equazioni topologiche**) e non dipendono dal tipo di componenti presenti. Sono relazioni lineari e omogenee.

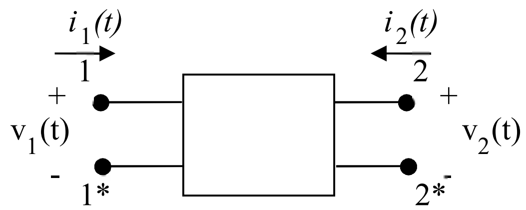
Si aggiungano ora le ℓ equazioni dei bipoli, cioè le **equazioni tipologiche**. Queste ℓ equazioni sono fra di loro indipendenti, in quanto ciascuna coinvolge la tensione e/o la corrente di un lato "specifico" ogni volta diverso dagli altri. Per bipoli generici, le relazioni dei bipoli possono essere non lineari.

Combinando le equazioni che derivano dalle leggi di Kirchhoff con le equazioni dei bipoli, si ottiene un sistema di 2ℓ equazioni, strutturate in due sottosistemi ciascuno di ℓ equazioni. Occorre verificare però se le 2ℓ equazioni del sistema complessivo sono indipendenti e se quindi il sistema ha soluzione unica. Le ℓ equazioni che si ottengono dalle leggi di Kirchhoff sono legate alla **topologia**, mentre le ℓ equazioni dei bipoli sono di **tipologia**: i due sistemi sono quindi **"costruiti" in modo indipendente**. Ma in generale non è detto che il sistema di 2 ℓ equazioni sia un sistema di equazioni indipendenti e quindi non è detto che la soluzione esista o, se esiste, sia unica. Nel seguito, in generale, **si assume l'esistenza e unicità della soluzione**.

Capitolo 7. DOPPI BIPOLI

7.1 Aspetti generali

Un doppio bipolo è un componente a due porte, ciascuna caratterizzata da una tensione e da una corrente. Non si considerano (e di solito non interessano) le tensioni esistenti fra i morsetti delle due porte. In figura, una porta (porta 1) è identificata dalla coppia di morsetti 1 e 1*; l'altra porta (porta 2) dalla coppia di morsetti 2 e 2*.



Un doppio bipolo, in generale, fissa due relazioni di legame fra le quattro grandezze delle due porte (cioè fra le due tensioni e le due correnti alle due porte). Dato che ci sono due relazioni di legame, restano due gradi di libertà. Due delle quattro grandezze sono quindi dette *grandezze indipendenti*; tramite le due relazioni di legame si ottengono le altre due grandezze (*grandezze dipendenti*).

Ci sono casi in cui si possono scegliere come grandezze indipendenti due qualunque fra le quattro grandezze delle due porte: in questi casi sono possibili sei scelte diverse.

Ad esempio, se si possono prendono come grandezze indipendenti le correnti e quindi si possono esprimere le tensioni in funzione delle correnti, si avrà (la dipendenza dal tempo delle tensioni e correnti di porta si sottintende):

$$\begin{cases} v_1 = f_1(i_1, i_2) \\ v_2 = f_2(i_1, i_2) \end{cases}$$

In alcune situazioni non è invece possibile scegliere come grandezze indipendenti due qualunque fra le quattro grandezze delle due porte.

Di seguito, si considera il caso semplice ma importante di doppio bipolo ideale inerte di ordine zero.

7.2 Doppio bipolo ideale inerte di ordine zero

Un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero è un doppio bipolo avente relazioni tipologiche lineari a coefficienti costanti e tali che se le due grandezze indipendenti sono nulle sono nulle anche le due grandezze dipendenti.

Per le prossime relazioni, si assume la convenzione degli utilizzatori a entrambe le porte.

Come detto, le possibili scelte di grandezze indipendenti sono sei. Si ottengono quindi sei possibili *rappresentazioni*. Uno specifico doppio bipolo ideale inerte di ordine zero può non ammettere tutte le sei rappresentazioni.

Per semplicità di scrittura, nelle relazioni delle sei possibili rappresentazioni, la dipendenza dal tempo sarà sottintesa per le tensioni e correnti di porta.

1) Rappresentazione controllata in corrente

In questa rappresentazione, le grandezze indipendenti sono i_1 e i_2; quelle dipendenti sono v_1 e v_2. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}$$

Sono due relazioni lineari a coefficienti (R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}) costanti (non dipendono dal tempo). Inoltre se le due grandezze indipendenti sono nulle, sono nulle anche le due grandezze dipendenti.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

dove si è introdotta la *matrice di resistenza* $[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$.

I quattro termini della matrice di resistenza sono detti *parametri di resistenza* e sono rispettivamente:

$$R_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} ; \quad R_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} ; \quad R_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} ; \quad R_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} .$$

L'unità di misura per tutti i quattro parametri di resistenza è l'*ohm*.

2) Rappresentazione controllata in tensione

In questa rappresentazione, le grandezze indipendenti sono v_1 e v_2; quelle dipendenti sono i_1 e i_2. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases}$$

Sono due relazioni lineari a coefficienti (G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}) costanti (non dipendono dal tempo). Inoltre se le due grandezze indipendenti sono nulle, sono nulle anche le due grandezze dipendenti.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

dove si è introdotta la *matrice di conduttanza* $[G] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$.

I quattro termini della matrice di conduttanza sono detti *parametri di conduttanza* e sono rispettivamente:

$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0} \; ; \; G_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0} \; ; \; G_{21} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0} \; ; \; G_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0} .$$

L'unità di misura per tutti i quattro parametri di conduttanza è il *siemens*.

Relazione tra la rappresentazione controllata in corrente e quella controllata in tensione. La matrice di resistenza e la matrice di conduttanza sono una l'inversa dell'altra.

3) Prima rappresentazione ibrida

In questa rappresentazione, le grandezze indipendenti sono i_1 e v_2; quelle dipendenti sono v_1 e i_2. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

Sono due relazioni lineari a coefficienti (h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}) costanti (non dipendono dal tempo). Inoltre se le due grandezze indipendenti sono nulle, sono nulle anche le due grandezze dipendenti.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

dove si è introdotta la *prima matrice ibrida* $[h] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$.

I quattro termini della prima matrice ibrida sono detti *parametri ibridi* e sono rispettivamente:

$$h_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \; ; \; h_{12} = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} \; ; \; h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} \; ; \; h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0} .$$

L'unità di misura per i quattro parametri ibridi non è la stessa ed è rispettivamente: ohm per h_{11}, siemens per h_{22}, mentre h_{12} e h_{21} sono adimensionali.

4) Seconda rappresentazione ibrida

In questa rappresentazione, le grandezze indipendenti sono v_1 e i_2; quelle dipendenti sono i_1 e v_2. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{i}_1 = \mathrm{g}_{11} \mathrm{v}_1 + \mathrm{g}_{12} \mathrm{i}_2 \\ \mathrm{v}_2 = \mathrm{g}_{21} \mathrm{v}_1 + \mathrm{g}_{22} \mathrm{i}_2 \end{cases}$$

Sono due relazioni lineari a coefficienti (g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}) costanti (non dipendono dal tempo). Inoltre se le due grandezze indipendenti sono nulle, sono nulle anche le due grandezze dipendenti.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}_1 \\ \mathrm{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{g}_{11} & \mathrm{g}_{12} \\ \mathrm{g}_{21} & \mathrm{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{i}_2 \end{bmatrix} = [\mathrm{g}] \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 \\ \mathrm{i}_2 \end{bmatrix}$$

dove si è introdotta la *seconda matrice ibrida* $[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$.

I quattro termini della seconda matrice ibrida sono detti *parametri ibridi* e sono rispettivamente:

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0} \;;\; g_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0} \;;\; g_{21} = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0} \;;\; g_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{v_1=0}.$$

L'unità di misura per i quattro parametri ibridi non è la stessa ed è rispettivamente: siemens per g_{11}, ohm per g_{22}, mentre g_{12} e g_{21} sono adimensionali.

Relazione tra la prima e la seconda rappresentazione ibrida. La prima e la seconda matrice ibrida sono l'una l'inversa dell'altra.

5) Prima rappresentazione di trasmissione

In questa rappresentazione, le grandezze indipendenti sono v_2 e $-i_2$; quelle dipendenti sono v_1 e i_1. Si evidenzia che per motivi pratici, avendo assunto la convenzione degli utilizzatori a entrambe le porte, conviene considerare $-i_2$ come variabile indipendente invece di i_2. Nella pratica infatti, quando si utilizzano la prima e la seconda rappresentazione di trasmissione, di solito si utilizza alla porta 2 la convenzione dei generatori. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_1 = Av_2 + B(-i_2) \\ i_1 = Cv_2 + D(-i_2) \end{cases}$$

Sono due relazioni lineari a coefficienti (A, B, C, D) costanti (non dipendono dal tempo). Inoltre se le due grandezze indipendenti sono nulle, sono nulle anche le due grandezze dipendenti.

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

dove si è introdotta la *prima matrice di trasmissione* $[T] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

I quattro termini della prima matrice di trasmissione sono detti *parametri di trasmissione* e sono rispettivamente:

$$A = \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \;;\; B = -\left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{v_2=0} \;;\; C = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{i_2=0} \;;\; D = -\left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_2=0}.$$

L'unità di misura per i quattro parametri di trasmissione non è la stessa ed è rispettivamente: ohm per B, siemens per C, mentre A e D sono adimensionali.

6) Seconda rappresentazione di trasmissione

In questa rappresentazione, le grandezze indipendenti sono v_1 e i_1; quelle dipendenti sono v_2 e $-i_2$. Come già evidenziato, per motivi pratici, avendo assunto la convenzione degli utilizzatori a entrambe le porte, conviene considerare $-i_2$ come variabile dipendente invece di i_2. Nella pratica infatti, quando si utilizzano la prima e la seconda rappresentazione di trasmissione, di solito si utilizza alla porta 2 la convenzione dei generatori. Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_2 = A'v_1 + B'i_1 \\ -i_2 = C'v_1 + D'i_1 \end{cases}$$

Sono due relazioni lineari a coefficienti (A′, B′, C′, D′) costanti (non dipendono dal tempo). Inoltre se le due grandezze indipendenti sono nulle, sono nulle anche le due grandezze dipendenti. In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [T'] \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

dove si è introdotta la *seconda matrice di trasmissione* $[T'] = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$.

I quattro termini della seconda matrice ibrida sono detti *parametri di trasmissione* e sono rispettivamente:

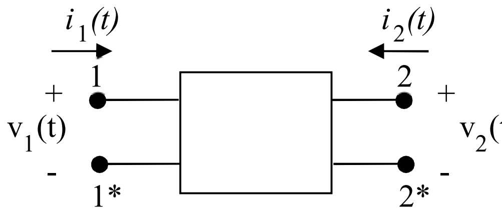
$$A' = \left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \quad ; \quad B' = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{v_1=0} \quad ; \quad C' = -\left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{i_1=0} \quad ; \quad D' = -\left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_1=0} .$$

L'unità di misura per i quattro parametri ibridi non è la stessa ed è rispettivamente: ohm per B′, siemens per C′, mentre A′ e B′ sono adimensionali.

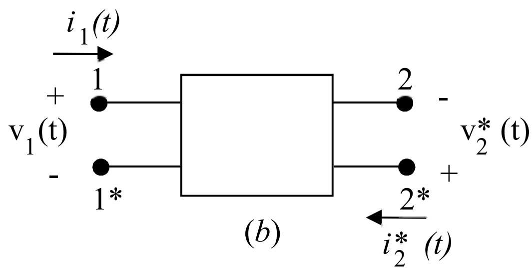
Relazione tra la prima e la seconda rappresentazione di trasmissione. La prima e la seconda matrice di trasmissione sono l'una l'inversa dell'altra.

7.3 Precisazione sulla rappresentazione di un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero

La seguente precisazione è svolta facendo riferimento, fra le sei rappresentazioni, alla rappresentazione controllata in corrente.



(*a*)



(*b*)

Si consideri un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero e si ipotizzi, ad esempio, che ammetta la rappresentazione controllata in corrente. Si convenzionino le due porte con la convenzione degli utilizzatori. Nel caso (*a*) di figura, si scrivano le relazioni della rappresentazione controllata in corrente. Vale:

$$\begin{cases} v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

Analogamente, nel caso (*b*) di figura, dove ancora le due porte sono convenzionate con la convenzione degli utilizzatori, si ha (mettendo un asterisco sui parametri di resistenza per evidenziare che sono quelli del caso (*b*)):

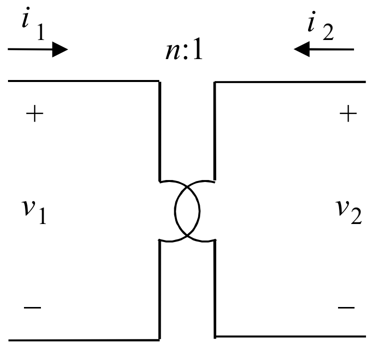
$$\begin{cases} v_1 = R_{11}^* i_1 + R_{12}^* i_2^* \\ v_2^* = R_{21}^* i_1 + R_{22}^* i_2^* \end{cases}$$

Dato che $v_2^* = -v_2$ e $i_2^* = -i_2$, dalle ultime relazioni si ottiene:

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}^* i_1 - R_{12}^* i_2 \\ v_2 = -R_{21}^* i_1 + R_{22}^* i_2 \end{cases}$$

Confrontando le relazioni del caso (*a*) e del caso (*b*), si ottiene che $R_{11} = R_{11}^*$, $R_{22} = R_{22}^*$, $R_{12} = -R_{12}^*$ e $R_{21} = -R_{21}^*$. Quindi le relazioni del caso (*a*) (scritte con le variabili v_1, i_1, v_2, i_2) e quelle del caso (*b*) (scritte con le variabili v_1, i_1, v_2^*, i_2^*) hanno due parametri di resistenza (quelli con pedice 12 e 21) che differiscono per il segno. Pertanto, oltre alla convenzione degli utilizzatori alle due porte, si osserva che fissato arbitrariamente il riferimento positivo della tensione su uno dei due morsetti alla porta 1, con la scelta sulla porta 2 del riferimento positivo della tensione su un morsetto si ha per il doppio bipolo un valore per R_{12} e per R_{21}, mentre con la scelta opposta si ottengono per tali termini i valori opposti.

Capitolo 8. TRASFORMATORE IDEALE



Nelle reti elettriche, il trasformatore ideale è un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero, che, con le due porte convenzionate da utilizzatore, ha relazioni (che valgono in regime stazionario o variabile quasi-stazionario):

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\dfrac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

dove n è un parametro costante adimensionale detto "rapporto di trasformazione".

Matrici di rappresentazione. Le relazioni sopra riportate non consentono una scelta delle correnti alle due porte come variabili indipendenti, né delle tensioni. Non è quindi possibile una rappresentazione controllata in corrente o in tensione e non ci sono quindi le matrici di resistenza e di conduttanza. Sono possibili le altre quattro rappresentazioni; tra esse è immediata la prima rappresentazione di trasmissione, con $A = n$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/n$.

Alcune proprietà del trasformatore ideale.

a) E' trasparente alla potenza (o conserva la potenza). In ogni istante la totale potenza entrante è nulla.

$$p(t)_{\text{entrante}} = p_1(t)_{\text{entrante}} + p_2(t)_{\text{entrante}} = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = nv_2(t)\,[-1/n]\,i_2(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$$

Si ha cioè che la potenza che entra da una porta è pari a quella che esce dall'altra porta.

b) E' passivo. Dato che è trasparente alla potenza, è passivo.

c) Amplifica tensioni o correnti, tranne che nel caso $|n|= 1$. Infatti, tranne che nel caso $|n| = 1$, il trasformatore amplifica la tensione o la corrente passando da una porta all'altra, conservando la potenza.

Capitolo 9. GENERATORI PILOTATI (O CONTROLLATI)

I generatori ideali di tensione e di corrente, già visti, impongono rispettivamente il valore della tensione o della corrente su un lato e tale imposizione è fatta in modo indipendente dall'altra grandezza del lato e da ogni altra grandezza di rete. Per questo sono detti generatori ideali indipendenti.

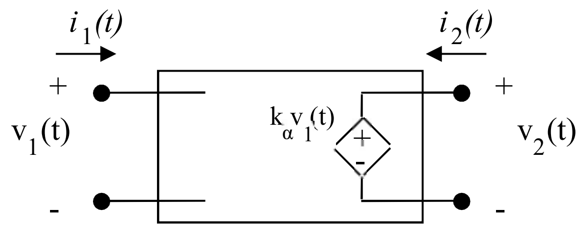
Si considerano ora i generatori pilotati (o controllati o dipendenti) che sono utilizzati in elettronica.

Il generatore pilotato è un doppio bipolo che impone il valore della tensione o della corrente su un lato (lato 2) (grandezza impressa) e tale imposizione è fatta in modo indipendente dall'altra grandezza di quel lato ma in modo dipendente da un'altra grandezza della rete, cioè dipende dalla tensione o dalla corrente di un altro lato della rete (lato 1) (grandezza di controllo).

E' un doppio bipolo. Alla porta 1 c'è un circuito ideale aperto se la grandezza di controllo è una tensione oppure un cortocircuito ideale se la grandezza di controllo è una corrente. Alla porta 2 c'è la grandezza impressa pilotata che può essere una tensione o una corrente.

Si presentano i quattro casi dei generatori pilotati lineari, che sono doppi bipoli ideali inerti di ordine zero.

1) **Generatore di Tensione Pilotato (o controllato) in Tensione (GTPT)**.



La porta 1 è un circuito ideale aperto e quindi vale la relazione: $i_1(t) = 0$.

La porta 2 ha una tensione che dipende dalla tensione presente alla porta 1, tramite il parametro costante k_α. Quindi la tensione alla porta 2 può essere fatta variare agendo sulla tensione che si ha alla porta 1. Vale quindi la relazione: $v_2(t) = k_\alpha\, v_1(t)$.

Le due relazioni del GTPT sono quindi:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = k_\alpha v_1 \end{cases}$$

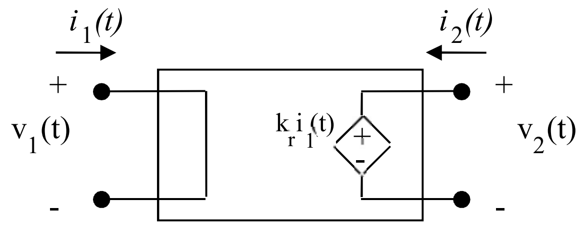
Tali relazioni suggeriscono quindi la seconda rappresentazione ibrida, che qui applicata e combinata con le relazioni del GTPT fornisce:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

2) G**eneratore di Tensione Pilotato (o controllato) in Corrente (GTPC)**.

La porta 1 è un cortocircuito ideale e quindi vale la relazione: $v_1(t) = 0$.

La porta 2 ha una tensione che dipende dalla corrente presente alla porta 1, tramite il parametro costante k_r. Quindi la tensione alla porta 2 può essere fatta variare agendo sulla corrente che si ha alla porta 1. Vale quindi la relazione: $v_2(t) = k_r\, i_1(t)$.



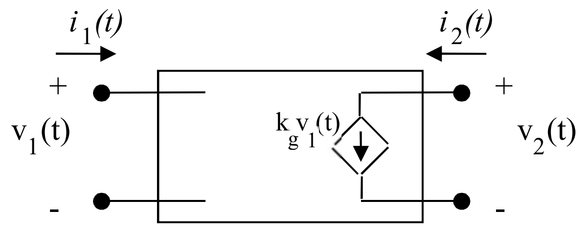
Le due relazioni del GTPC sono quindi:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = k_r i_1 \end{cases}$$

Tali relazioni suggeriscono quindi la rappresentazione controllata in corrente, che qui applicata e combinata con le relazioni del GTPC fornisce:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

3) G**eneratore di Corrente Pilotato (o controllato) in Tensione (GCPT)**.



La porta 1 è un circuito ideale aperto e quindi vale la relazione: $i_1(t) = 0$.

La porta 2 ha una corrente che dipende dalla tensione presente alla porta 1, tramite il parametro costante k_g. Quindi la corrente alla porta 2 può essere fatta variare agendo sulla tensione che si ha alla porta 1. Vale quindi la relazione: $i_2(t) = k_g\, v_1(t)$.

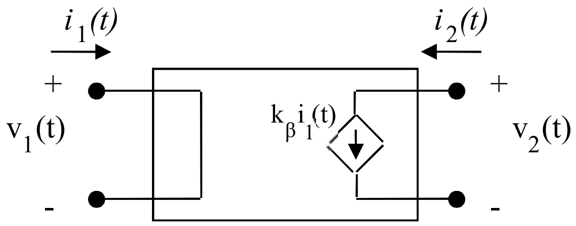
Le due relazioni del GCPT sono quindi:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = \mathrm{k_g} v_1 \end{cases}$$

Tali relazioni suggeriscono quindi la rappresentazione controllata in tensione, che qui applicata e combinata con le relazioni del GCPT fornisce:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{k_g} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

4) G**eneratore di Corrente Pilotato (o controllato) in Corrente (GCPC)**.



La porta 1 è un cortocircuito ideale e quindi vale la relazione: $v_1(t) = 0$.

La porta 2 ha una corrente che dipende dalla corrente presente alla porta 1, tramite il parametro costante k_β. Quindi la corrente alla porta 2 può essere fatta variare agendo sulla corrente che si ha alla porta 1. Vale quindi la relazione: $i_2(t) = k_\beta\, i_1(t)$.

Le due relazioni del GCPC sono quindi:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = k_\beta i_1 \end{cases}$$

Tali relazioni suggeriscono quindi la prima rappresentazione ibrida, che qui applicata e combinata con le relazioni del GCPC fornisce:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Capitolo 10. RETE COSTITUITA DA GIT, GIC, RESISTORI IDEALI E DOPPI BIPOLI IDEALI INERTI DI ORDINE ZERO IN REGIME STAZIONARIO

Si consideri una rete a regime stazionario costituita da generatori ideali di tensione (GIT), generatori ideali di corrente (GIC), resistori ideali e doppi bipoli ideali inerti di ordine zero.

Su tale rete si possono scrivere le LKC, le LKT e le equazioni tipologiche.

Il sistema che si ottiene dalle LKC, LKT ed equazioni tipologiche è un sistema lineare, dove i termini noti del sistema sono costituiti dalle tensioni impresse e dalle correnti impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente. Infatti, è un sistema di 2ℓ equazioni lineari a coefficienti costanti in 2ℓ incognite. Il sistema può essere scritto in forma matriciale come:

$$[A]\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [B]$$

I termini della matrice [A] sono i coefficienti (costanti) del sistema di 2ℓ equazioni. I termini del vettore colonna [B] sono i termini noti del sistema di 2ℓ equazioni, cioè sono i valori

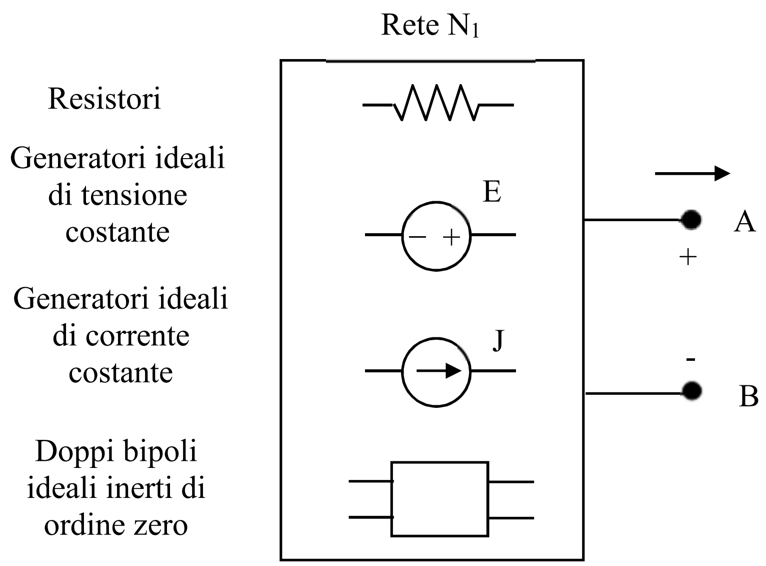
0, E, J. Se le 2ℓ equazioni sono linearmente indipendenti, la matrice [A] è invertibile e la soluzione esiste ed è unica. Si ottiene così:

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [A]^{-1}[B]$$

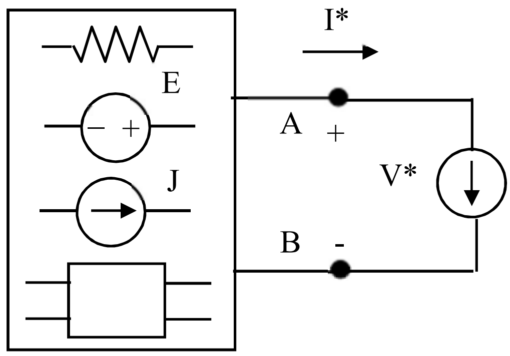
Vale la sovrapposizione degli effetti: la soluzione si può ottenere facendo agire uno alla volta (oppure a blocchi, purché alla fine tutti abbiano agito una e una sola volta) i generatori ideali di tensione e di corrente (i resistori ideali e i doppi bipoli ideali inerti di ordine zero restano sempre presenti).

Si applicano i teoremi dei generatori equivalenti (Thévenin e Norton).

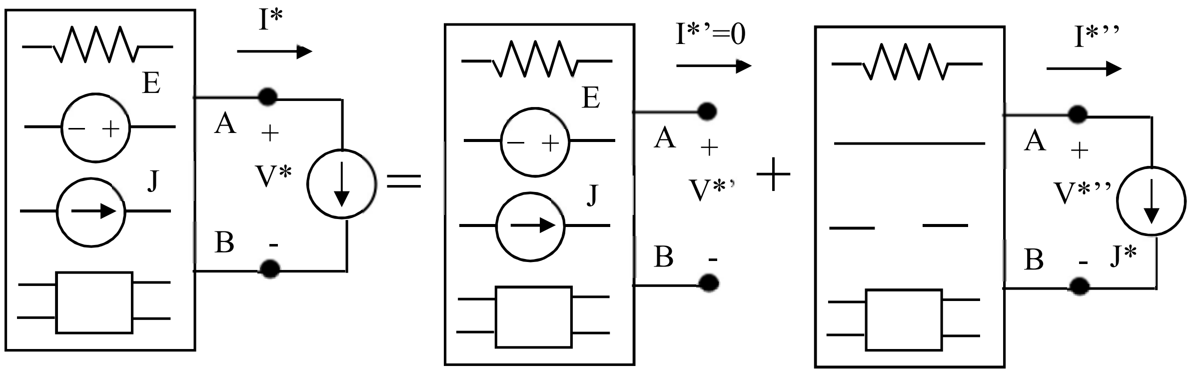
Data una rete N_1 formata da GIT, GIC, resistori ideali e doppi bipoli ideali inerti di ordine zero accessibile solo da due terminali (A e B), la rete N_1 si può considerare come un bipolo avente per morsetti (o terminali) A e B. La situazione è schematizzata in figura. I teoremi dei generatori equivalenti dimostrano che il bipolo equivalente ai morsetti A e B è la serie di un GIT e un resistore ideale (Thevenin) o il parallelo di un GIC e un resistore ideale (Norton). L'ipotesi che la rete N_1 sia accessibile solo da due terminali (A e B) vuol dire che non esistono altre interazioni fra N_1 e l'esterno, oltre alla tensione e alla corrente della porta AB. Ciò implica che i doppi bipoli ideali inerti di ordine zero coinvolti nel calcolo del bipolo equivalente hanno le grandezze alle due porte tutte presenti in N_1.



Per la dimostrazione, si applica alla porta AB un GIC con corrente impressa J*=I* (nell'ipotesi che la soluzione esista e sia unica). Si ottiene il punto di lavoro (V*,I*). La corrente impressa ha un valore generico e quindi si sta considerando un generico punto di lavoro della rete N_1.



La relazione fra V* e I* si calcola applicando alla rete così ottenuta la sovrapposizione degli effetti. Si fanno agire tutti i generatori ideali tranne solo il GIC J* (V*') e quindi si fa agire solo il GIC J* azzerando tutti gli altri generatori ideali (V*'').



Si ha: V*' = V_0.

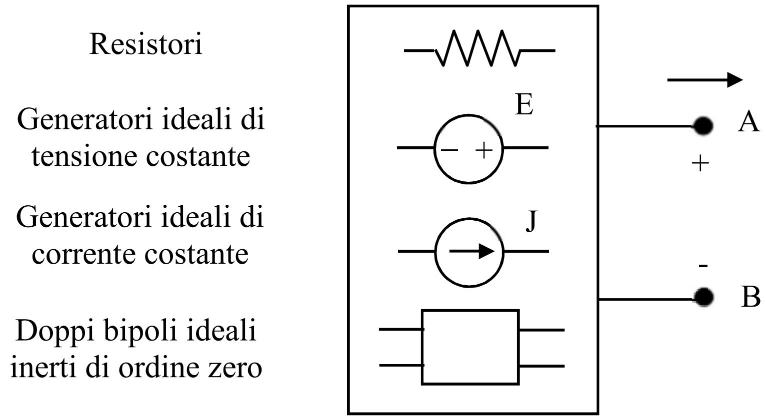
Per V*'', si annullano i generatori ideali di tensione e di corrente (non toccando quindi i resistori e i doppi bipoli ideali inerti di ordine zero). Si può dimostrare che la parte di rete contenente i resistori e i doppi bipoli ideali inerti di ordine zero è equivalente a un resistore ideale R_{eq}. Si ha: $V^{*''} = -R_{eq} J^* = -R_{eq} I^*$.

Si ottiene così la relazione della serie di un GIT e un resistore ideale: $V^* = V_0 - R_{eq} I^*$.

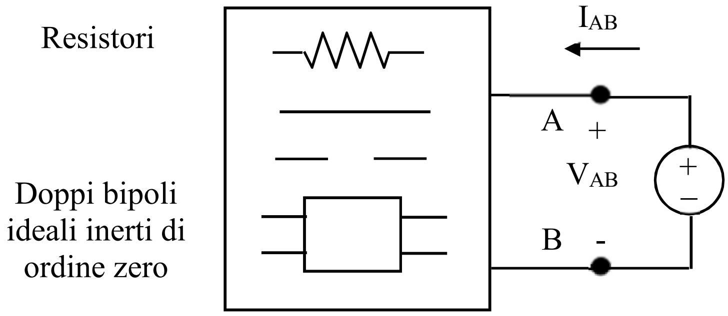
Per la dimostrazione del teorema di Norton, si procede in modo analogo a quanto fatto per il teorema di Thevenin, con la differenza che all'inizio della dimostrazione si applica alla porta AB non un GIC ma un GIT (nell'ipotesi che la soluzione esista e sia unica) e quindi la dimostrazione prosegue in modo coerente con l'aver applicato alla porta AB un GIT.

Osservazione

Un modo di calcolare la resistenza equivalente alla porta AB è il seguente. Nelle condizioni sopra indicate, alla porta AB a cui si applica il teorema di Thévenin/Norton (nell'ipotesi che la rete N_1 ammetta funzionamento a vuoto e in cortocircuito), si calcolano la tensione a vuoto e la corrente di cortocircuito. Il loro rapporto, avendo utilizzato alla porta la convenzione dei generatori (si veda in figura) è il valore della resistenza equivalente.



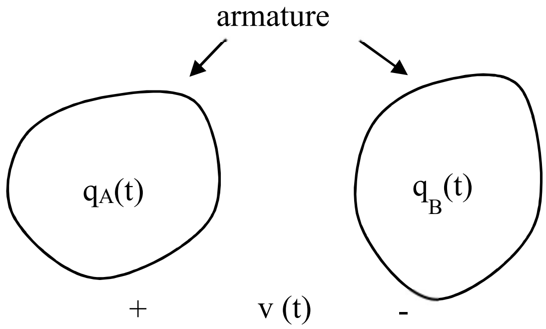
Un altro modo di calcolare la resistenza equivalente alla porta AB è il seguente. Si annullano i GIT e i GIC (restano sempre presenti i resistori ideali e i doppi bipoli ideali inerti di ordine zero) e si applica alla porta AB un GIT o un GIC (nell'ipotesi che la soluzione esista e sia unica). In figura è mostrato il caso in cui si applica un GIT. Si convenzioni la porta della parte di rete contenente i resistori e i doppi bipoli ideali inerti di ordine zero con la convenzione degli utilizzatori: si hanno V_{AB} e I_{AB}. La resistenza equivalente è pari a: $R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}}$.



Capitolo 11. BIPOLO CONDENSATORE

11.1 Il condensatore

Il **condensatore** è formato da una coppia di conduttori di forma generica, detti armature, separati da uno o più dielettrici.



Sulle due armature sono presenti cariche elettriche libere, $q_A(t)$ e $q_B(t)$ rispettivamente, uguali e opposte, cioè:

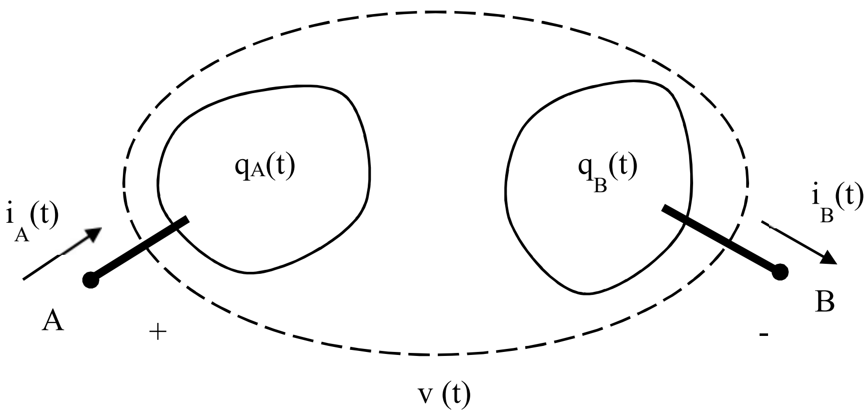
$q_A(t) = -\, q_B(t)$

Si assume che il campo elettrico ovunque, anche se variabile nel tempo, è quello elettrostatico (istante per istante): ciascuna armatura è equipotenziale e fra le due armature c'è una tensione v(t) che è una differenza di potenziale. Il legame esistente fra le cariche e la tensione è la capacità C del condensatore che si definisce pari a:

$$C = \frac{q_A(t)}{v_{AB}(t)} = \frac{q_B(t)}{v_{BA}(t)} = \frac{q(t)}{v(t)}$$

L'unità di misura della capacità è il farad (simbolo F). Si ha che: F = C/V. In ipotesi di condensatore ideale, la capacità C è una costante positiva.

11.2 Bipolo condensatore: schematizzazione



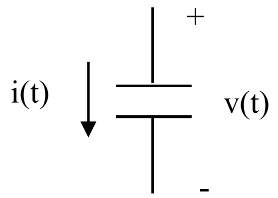
Un condensatore è schematizzabile come un bipolo: il bipolo condensatore.

Dato un condensatore, ciascuna armatura è dotata di un conduttore (terminale) il cui estremo (morsetto) è indicato in figura rispettivamente con A e con B. In tratteggio è indicata la superficie limite del bipolo (che racchiude completamente entrambe le armature) da cui emergono i due terminali. Sulle due armature sono presenti cariche elettriche libere uguali e opposte: $q_A(t) = -q_B(t)$.

Si assume che il campo elettrico ovunque (e quindi in particolare rimanendo esternamente o tangenti alla superficie limite) è quello elettrostatico (istante per istante): ciascuna armatura, con il relativo terminale, è equipotenziale e fra i due morsetti A e B c'è una tensione $v_{AB}(t)$ che è una differenza di potenziale.

Da $q_A(t) + q_B(t) = 0$, si ha che in ogni istante è nulla la totale carica contenuta nella superficie limite. Utilizzando la legge di continuità, si ha che è nulla la totale corrente uscente dalla superficie limite considerata: la corrente entrante a un terminale è uguale a quella uscente all'altro terminale (si assume che non ci siano altre correnti oltre a quelle ai terminali).

Pertanto sono soddisfatte le due proprietà fondamentali di un bipolo. Si ha così il bipolo condensatore. Il simbolo del bipolo condensatore è il seguente.



La relazione del bipolo condensatore, usando la <u>convenzione degli utilizzatori</u>, è:

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$

Tale relazione è una relazione differenziale lineare del primo ordine. Si può integrare, ottenendo, sempre <u>con la convenzione degli utilizzatori</u>, la relazione:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t')dt'$$

Il valore v(0) è il valore della tensione all'istante iniziale di integrazione (t=0). Se si prende come istante iniziale il tempo $t = -\infty$ (cioè al momento in cui il condensatore viene "realizzato") la tensione del condensatore è posta pari a zero (cioè è nulla la tensione iniziale del condensatore al momento in cui è realizzato) e la relazione diventa:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')dt'$$

11.3 <u>Bipolo condensatore: energia immagazzinata</u>

Si consideri un bipolo condensatore a un istante iniziale (t*) in cui il condensatore è scarico, cioè ha carica q(t*) = 0, tensione v(t*) = 0. In questa situazione di condensatore con tensione nulla, si assume nulla l'energia immagazzinata. Tale istante iniziale può essere fissato per semplicità t* = 0. Si consideri ora un generico t successivo all'istante iniziale (e con la capacità C valore costante positivo) e si calcoli il lavoro elettrico entrante nell'intervallo di tempo 0 - t.

$$L_{entr}(0,t) = \int_0^t p_{entr}(t)dt = \int_0^t \underset{conv.\ util.}{v(t)i(t)}dt = \int_{v(0)}^{v(t)} Cvdv = \frac{1}{2}Cv^2(t) - \frac{1}{2}Cv^2(0) =$$
$$= \frac{1}{2}Cv^2(t) \geq 0$$

Partendo dalla condizione di condensatore scarico, si è ottenuto che il lavoro elettrico entrante è non negativo e dipende solo dallo stato finale del condensatore, cioè dal valore della tensione all'istante generico t: non dipende pertanto da come si è arrivati in tale stato finale o, in modo equivalente, non dipende da come sono variate tensione e corrente per arrivare allo stato finale.

Si passi da una situazione di condensatore scarico in t = 0 a quella in $t = t_1$ (con $t_1 > 0$) di condensatore carico, cioè con $v(t_1) \neq 0$ e quindi, a un tempo successivo $t = t_2$ (con $t_2 > t_1$), a una situazione di condensatore nuovamente scarico, cioè con $v(t_2) = 0$. Si vede subito, da quanto sopra detto, che il lavoro elettrico entrante nel condensatore nell'intervallo di tempo fra 0 e t_1 ($L_{entr}(0,t_1)$: lavoro elettrico entrante > 0) è opposto a quello entrante nell'intervallo di tempo fra t_1 e t_2 ($L_{entr}(t_1,t_2)$: lavoro elettrico entrante < 0):

$L_{entr}(0,t_1) = - L_{entr}(t_1,t_2)$

Pertanto il lavoro elettrico entrante > 0 nel condensatore nell'intervallo di tempo fra 0 e t_1 è stato accumulato ed è totalmente restituito nell'intervallo successivo, senza che ci sia stata dissipazione. Tale lavoro è corrispondente a energia immagazzinata (energia elettrostatica o coulombiana o capacitiva) W_C, non negativa. Per un generico istante t vale quindi:

$W_C(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$ joule (simbolo J)

L'energia immagazzinata all'istante t è funzione del valore in quell'istante della tensione v(t), cioè è <u>funzione di stato della tensione</u>. La tensione definisce quindi lo stato energetico del condensatore e pertanto è detta <u>variabile di stato</u> del condensatore.

La potenza entrante $p_{entr}(t)$ è:

$$p_{entr}(t) = \underset{conv.\ utilizz.}{v(t)i(t)} = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2(t)\right) = \frac{d}{dt}W_C(t)$$

Il bipolo condensatore è un bipolo in grado di immagazzinare tutto il lavoro elettrico entrante sotto forma di energia legata alla tensione, con processo reversibile. Dalla definizione data di bipolo passivo, il condensatore è un <u>bipolo passivo.</u>

11.4 <u>Bipolo condensatore a regime stazionario</u>

A regime stazionario, cioè con tutte le grandezze costanti nel tempo, sono nulle le derivate e quindi la relazione del condensatore diventa:

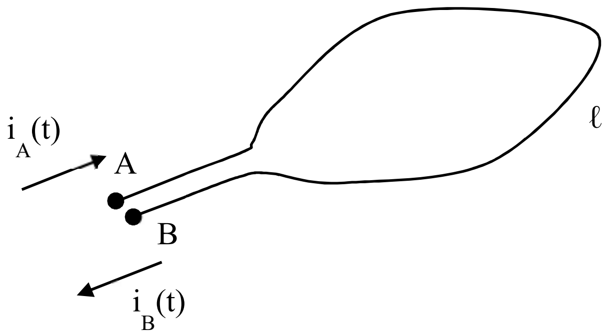
$I = 0, \quad \forall\, V$

A regime stazionario la relazione tensione-corrente di un condensatore è quella di un circuito ideale aperto. Dal punto di vista della determinazione delle tensioni e correnti dei componenti della rete, a regime stazionario, può quindi essere sostituito da un circuito aperto.

Capitolo 12. BIPOLO INDUTTORE

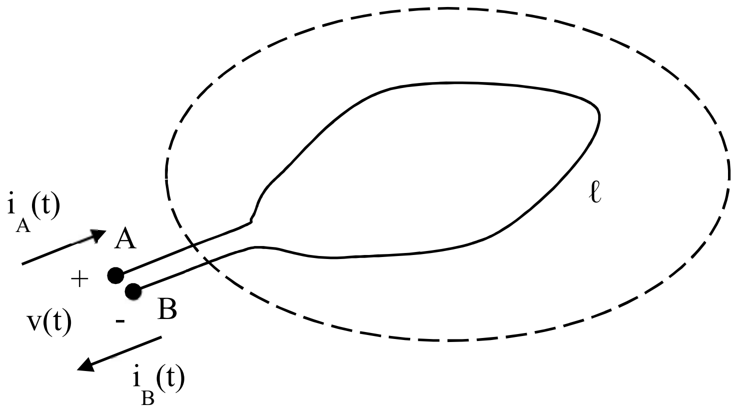
12.1 L'induttore

L'**induttore** è formato da un conduttore che, per semplicità, si può prendere filiforme e che si sviluppa lungo una linea ℓ di forma qualsiasi. La linea è aperta e ha i due tratti finali (i cui estremi sono i morsetti A e B) che sono posti molto vicini; quindi la linea ℓ è praticamente una linea chiusa.



Si assume che la corrente del conduttore rimane sempre la stessa lungo tutto il conduttore e quindi, con i riferimenti indicati in figura, $i_A(t) = i_B(t)$.

12.2 Bipolo induttore: schematizzazione



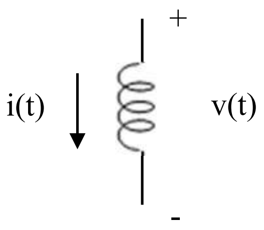
L'induttore è schematizzabile come un bipolo: il bipolo induttore.

Dato un induttore, si introduce una superficie limite del bipolo che racchiude all'interno il conduttore identificato con la linea ℓ, tranne i due terminali (e le relative estremità, cioè i due morsetti A e B), che emergono dalla superficie limite.

Si assume che il campo elettrico, anche se variabile nel tempo, rimanendo esternamente o tangenti alla superficie limite è quello elettrostatico (istante per istante): ciascun terminale si assume equipotenziale e fra i due morsetti A e B c'è una tensione $v_{AB}(t)$ che è una differenza di potenziale, rimanendo esternamente o tangenti alla superficie limite.

Si assume che la corrente del conduttore rimane sempre la stessa lungo tutto il conduttore e quindi la corrente entrante a un terminale è uguale a quella uscente all'altro terminale (si assume che per la superficie limite non ci siano altre correnti oltre a quelle dei terminali).

Sono soddisfatte le due proprietà fondamentali di un bipolo: si ha così il bipolo induttore. Il simbolo del bipolo induttore è il seguente.



La relazione del bipolo induttore, usando la <u>convenzione degli utilizzatori</u>, è:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Con L si indica l'induttanza del bipolo induttore. In ipotesi di induttore ideale, l'induttanza L è una costante positiva. L'unità di misura dell'induttanza è l'henry (simbolo H). Si ha che: H = Vs/A = Ω s.

La relazione del bipolo induttore è una relazione differenziale lineare del primo ordine. Si può integrare, ottenendo, sempre <u>con la convenzione degli utilizzatori</u>, la relazione:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'$$

Il valore i(0) è il valore della corrente all'istante iniziale di integrazione (t=0). Se si prende come istante iniziale il tempo $t = -\infty$ (cioè al momento in cui l'induttore viene "realizzato") la corrente dell'induttore è posta pari a zero (cioè è nulla la corrente iniziale dell'induttore al momento in cui è realizzato) e la relazione diventa:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^t v(t')dt'$$

12.3 <u>Bipolo induttore: energia immagazzinata</u>

Si consideri un bipolo induttore a un istante iniziale (t*) in cui l'induttore è scarico, cioè ha corrente i(t*) = 0. In questa situazione di induttore con corrente nulla, si assume nulla l'energia immagazzinata. Tale istante iniziale può essere fissato per semplicità t* = 0. Si consideri ora un generico t successivo all'istante iniziale (e con l'induttanza L valore costante positivo) e si calcoli il lavoro elettrico entrante nell'intervallo di tempo 0 - t.

$$L_{entr}(0,t) = \int_0^t p_{entr}(t)dt = \int_0^t \underset{conv.\ util.}{v(t)i(t)}dt = \int_{i(0)}^{i(t)} Lidi = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(0) =$$

$$= \frac{1}{2}Li^2(t) \geq 0$$

Partendo dalla condizione di induttore scarico, si è ottenuto che il lavoro elettrico entrante è non negativo e dipende solo dallo stato finale dell'induttore, cioè dal valore della corrente all'istante generico t: non dipende pertanto da come si è arrivati in tale stato finale o, in modo equivalente, non dipende da come sono variate tensione e corrente per arrivare allo stato finale.

Si passi da una situazione di induttore scarico in $t = 0$ a quella in $t = t_1$ (con $t_1 > 0$) di induttore carico, cioè con $i(t_1) \neq 0$ e quindi, a un tempo successivo $t = t_2$ (con $t_2 > t_1$), a una situazione di induttore nuovamente scarico, cioè con $i(t_2) = 0$. Si vede subito, da quanto sopra detto, che il lavoro elettrico entrante nell'induttore nell'intervallo di tempo fra 0 e t_1 ($L_{entr}(0,t_1)$: lavoro elettrico entrante > 0) è opposto a quello entrante nell'intervallo di tempo fra t_1 e t_2 ($L_{entr}(t_1,t_2)$: lavoro elettrico entrante < 0):

$L_{entr}(0,t_1) = - L_{entr}(t_1,t_2)$

Pertanto il lavoro elettrico entrante > 0 nell'induttore nell'intervallo di tempo fra 0 e t_1 è stato accumulato ed è totalmente restituito nell'intervallo successivo, senza che ci sia stata dissipazione. Tale lavoro è corrispondente a energia immagazzinata (energia magnetostatica o magnetica o induttiva) W_L, non negativa. Per un generico istante t vale quindi:

$W_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$ joule (simbolo J)

L'energia immagazzinata all'istante t è funzione del valore in quell'istante della corrente i(t), cioè è <u>funzione di stato della corrente</u>. La corrente definisce quindi lo stato energetico dell'induttore e pertanto è detta <u>variabile di stato</u> dell'induttore.

La potenza entrante $p_{entr}(t)$ è:

$$p_{entr}(t) = \underset{conv.\ utiliz\ .}{v(t)i(t)} = Li(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right) = \frac{d}{dt}W_L(t)$$

Il bipolo induttore è un bipolo in grado di immagazzinare tutto il lavoro elettrico entrante sotto forma di energia legata alla corrente, con processo reversibile. Dalla definizione data di bipolo passivo, l'induttore è un <u>bipolo passivo.</u>

12.4 <u>Bipolo induttore a regime stazionario</u>

A regime stazionario, cioè con tutte le grandezze costanti nel tempo, sono nulle le derivate e quindi la relazione dell'induttore diventa:

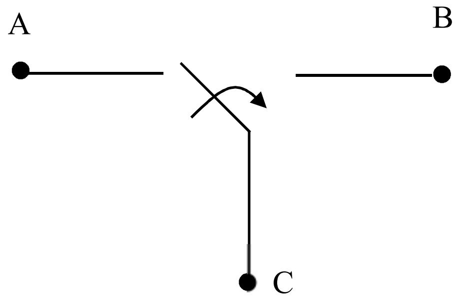
$V = 0, \quad \forall I$

A regime stazionario la relazione tensione-corrente di un induttore è quella di un cortocircuito ideale. Dal punto di vista della determinazione delle tensioni e correnti dei componenti della rete, a regime stazionario, può quindi essere sostituito da un cortocircuito.

Capitolo 13. RETI IN REGIME VARIABILE

13.1 Il deviatore (o commutatore)

Il deviatore (o commutatore) è un tripolo. È illustrato in figura.



All'istante t = t* si ha la commutazione. È un componente che per t < t* ha A e C in cortocircuito e B aperto, mentre per t > t* ha B e C in cortocircuito e A aperto.

13.2 Elementi di analisi di una rete per t>0

Sia consideri per t > 0 (dove in t = 0 si ha l'istante critico) una rete formata da generatori ideali di tensione, generatori ideali di corrente, resistori ideali passivi, induttori ideali e condensatori ideali. Per l'analisi di tale rete, in regime variabile, si scrivono le LKT, le LKC e le equazioni dei bipoli della rete.

Si ottiene un sistema di equazioni che in generale si può scrivere nella forma seguente:

$$\begin{cases} \sum\limits_{h} v_h(t) = 0 \\ \sum\limits_{k} i_k(t) = 0 \\ v(t) = e(t) \\ i(t) = j(t) \\ v_R(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C \dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ v_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Le sommatorie si ottengono dalla scrittura delle LKT e delle LKC linearmente indipendenti; le altre relazioni sono rispettivamente per i generatori ideali di tensione con tensione impressa e(t) variabile nel tempo, per i generatori ideali di corrente con corrente impressa j(t) variabile nel tempo, per i resistori ideali passivi, i condensatori ideali e gli induttori ideali.

È un sistema di 2ℓ equazioni in 2ℓ incognite. Le incognite sono le tensioni v(t) e le correnti i(t) dei lati della rete; i termini noti sono le grandezze impresse e(t) e j(t) dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Le grandezze impresse e(t) e j(t) sono dette **ingressi** della rete; in generale un ingresso viene indicato con x(t). Le grandezze incognite, cioè le tensioni v(t) e le correnti i(t) dei lati della rete sono dette **uscite** o **risposte** della rete; in generale una uscita viene indicata con y(t).

In generale, per la risoluzione del sistema, si combinano le equazioni in modo da scrivere una equazione in una sola incognita. L'equazione in una sola incognita che si ottiene combinando le equazioni del sistema è una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

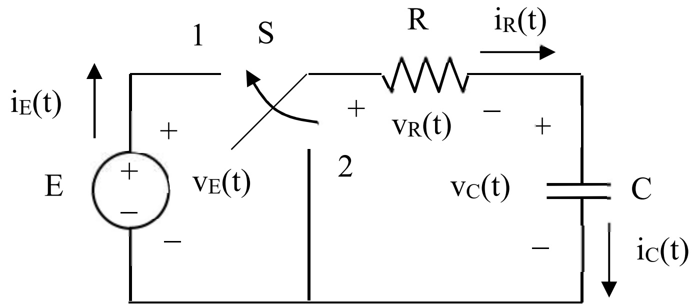
Di seguito si studieranno i casi seguenti:

- generatore di tensione costante con carico ohmico-capacitivo;
- generatore di tensione costante con carico ohmico-induttivo;
- generatore di tensione costante con carico ohmico-induttivo-capacitivo.

Capitolo 14. Generatore di tensione costante con carico ohmico-capacitivo

14.1 Transitorio di carica del condensatore

Si considera il circuito di figura, con R e C costanti positive.



Per t < 0, la rete è a regime stazionario e il commutatore S è in posizione 2. In t = 0 S commuta in posizione 1. Determinare per t > 0 la tensione e la corrente del condensatore ideale.

Analisi per t < 0

Il commutatore S è in posizione 2. La rete è a regime stazionario: il condensatore ideale equivale a un circuito ideale aperto e quindi ha corrente nulla. Anche la corrente I_R del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e, dalla relazione $V_R = R\ I_R$, anche la tensione V_R è nulla.

Dalla LKT sulla maglia che contiene R e C, è nulla anche la tensione ai capi del condensatore ideale. Questo vale per $t < 0$ e quindi anche in $t = 0^-$: $v_C(0^-) = 0$.

Analisi per t = 0

Per i casi qui presentati, all'istante critico vale la continuità della tensione per ogni condensatore ideale della rete e della corrente per ogni induttore ideale. In questo caso in cui è presente un condensatore ideale (e non ci sono induttori ideali), vale quindi: $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Pertanto, dal valore calcolato in $t = 0^-$, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$.

Analisi per t > 0

Per $t > 0$, il commutatore S è in posizione 1. Si scrivono le LKC, le LKT e le equazioni dei bipoli della rete.

$$\begin{cases} v_R(t) + v_C(t) - v_E(t) = 0 \\ i_R(t) = i_C(t) = i_E(t) \\ v_E(t) = E \\ v_R(t) = Ri_R(t) \\ i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

È conveniente risolvere il sistema rispetto a una variabile di stato. In questo caso quindi si sceglie $v_C(t)$.

Nella prima relazione, inserendo le relazioni del resistore ideale passivo e del generatore ideale di tensione e quindi mettendo $i_C(t)$ al posto di $i_R(t)$, si ottiene:

$$\begin{cases} Ri_C(t) + v_C(t) - E = 0 \\ i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

Mettendo adesso nella prima relazione la relazione del bipolo condensatore ideale, si ottiene:

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = E$$

È un'equazione differenziale del primo ordine, a coefficienti costanti.

La soluzione ha forma (si rimanda ai testi della matematica per la dimostrazione):

$$v_C(t) = Ae^{st} + K$$

Inserendo tale soluzione nell'equazione differenziale si ottiene:

$$K = E;\ s = -\frac{1}{RC}$$

La soluzione si scrive quindi nella forma:

$$v_C(t) = Ae^{-\frac{t}{T}} + E$$

avendo introdotto la *costante di tempo* T = RC (unità di misura: s).

Il termine costante della soluzione (E) è una soluzione particolare dell'equazione differenziale; il termine esponenziale $\left(Ae^{-\frac{t}{T}}\right)$ è detto soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione differenziale.

Il valore della costante A si ottiene imponendo alla $v_C(t)$ il valore al limite per $t \to 0^+$. Dato che con l'analisi in t = 0 si è ottenuto che $v_C(0^+) = 0$, si ha:

$$0 = v_C(0^+) = \lim_{t \to 0^+} v_C(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(Ae^{-\frac{t}{T}} + E\right) = A + E$$

Si ottiene: A = – E. Quindi la soluzione è:

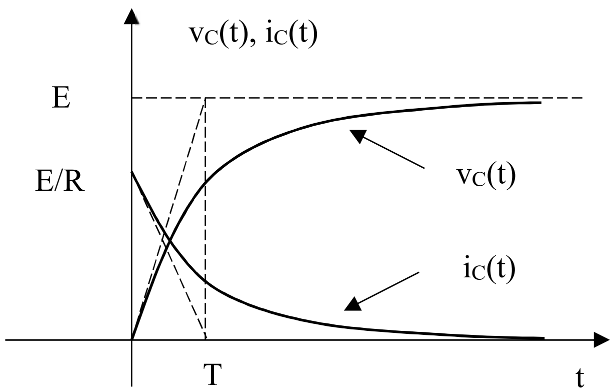
$$v_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \qquad \text{con } T = RC$$

La corrente del condensatore ideale si ottiene, avendo trovato la tensione $v_C(t)$, utilizzando la relazione del condensatore ideale. Si ha quindi:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{CE}{T}\, e^{-\frac{t}{T}} = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Gli andamenti della tensione e della corrente del condensatore ideale sono delle funzioni esponenziali, caratterizzati dalla *costante di tempo* T = RC (unità di misura: s).

Per tracciare il grafico, si fissi il segno di E: ad esempio sia E > 0; i grafici qualitativi della soluzione sono di seguito riportati per t > 0. Si ricorda che la corrente del condensatore ideale è, a meno della costante positiva C, la derivata della tensione del condensatore ideale.



Le relazioni trovate per la tensione e la corrente, per t > 0, mostrano che tensione e corrente sul condensatore ideale tendono con andamento esponenziale a un valore costante, come illustrato in figura. Tale valore costante, per la tensione del condensatore ideale, è il valore finale di carica, pari a E e viene raggiunto in un tempo infinito; per la corrente il valore, per t che tende a infinito, è pari a zero. Si osserva che trascorso un tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo T, la tensione differisce dal valore finale E per circa l'1% e la corrente è ridotta a circa l'1% del valore iniziale E/R.

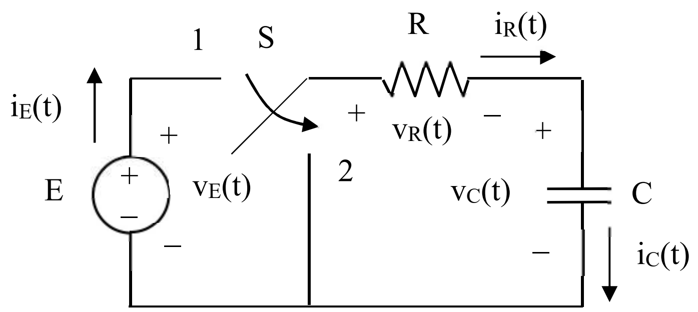
Pertanto nella pratica si assume che la carica avviene in un tempo finito. Si parla di <u>transitorio di carica</u>. Dopo un intervallo di tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo T, di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito e si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari a E e corrente nulla del condensatore ideale.

La soluzione finale trovata per la tensione e corrente del condensatore ideale è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t > 0$. A regime stazionario, il condensatore ideale equivale a un circuito ideale aperto e quindi ha corrente nulla. Anche la corrente del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e dalla relazione del resistore $V_R = R\ I_R$, anche la V_R è nulla. Dalla LKT sulla maglia che contiene E, R e C, la tensione ai capi del condensatore ideale è pari a E.

14.2 <u>Transitorio di scarica del condensatore</u>

Si considera il circuito di figura, con R e C costanti positive.

Per $t < 0$, la rete è a regime stazionario e il commutatore S è in posizione 1. In $t = 0$, S commuta in posizione 2. Determinare per $t > 0$ la tensione e la corrente del condensatore ideale.



Analisi per t < 0

Il commutatore S è in posizione 1. La rete è a regime stazionario: il condensatore ideale equivale a un circuito ideale aperto e quindi ha corrente nulla. Anche la corrente I_R del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e, dalla relazione $V_R = R\ I_R$, anche la tensione V_R è nulla. Dalla LKT sulla maglia che contiene E, R e C, la tensione ai capi del condensatore ideale, con il riferimento indicato in figura, è pari a E. Questo vale per $t < 0$ e quindi anche in $t = 0^-$: $v_C(0^-) = E$.

Analisi per t = 0

Per i casi qui presentati, all'istante critico vale la continuità della tensione per ogni condensatore ideale della rete e della corrente per ogni induttore ideale. In questo caso in cui è presente un condensatore ideale (e non ci sono induttori ideali), vale quindi: $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Pertanto, dal valore calcolato in $t = 0^-$, $v_C(0^+) = v_C(0^-) = E$.

Analisi per t > 0

Per $t > 0$, il commutatore S è in posizione 2. Si scrivono le LKC, le LKT e le equazioni dei bipoli della rete. Il generatore ideale di tensione è rimasto isolato dopo la commutazione e quindi si scrivono solo le relazioni della maglia identificata dai bipoli R e C.

$$\begin{cases} v_R(t) + v_C(t) = 0 \\ i_R(t) = i_C(t) \\ v_R(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C \dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

È conveniente risolvere il sistema rispetto a una variabile di stato. In questo caso quindi si sceglie $v_C(t)$.

Si osserva che le relazioni scritte adesso per la scarica del condensatore sono uguali a quelle scritte nel caso della carica del condensatore nel caso in cui fosse stato $v_E(t) = E = 0$. Si procede pertanto nel modo già illustrato nel caso della carica del condensatore.

Nella prima relazione, inserendo la relazione del resistore ideale passivo e quindi mettendo $i_C(t)$ al posto di $i_R(t)$ e infine utilizzando la relazione del bipolo condensatore ideale, si ottiene:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

È un'equazione differenziale del primo ordine, a coefficienti costanti.

La soluzione ha la forma già indicata nella carica del condensatore con ora E = 0:

$$v_C(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$$

avendo introdotto la *costante di tempo* T = RC (unità di misura: s).

Il valore della costante A si ottiene imponendo alla $v_C(t)$ il valore al limite per $t \to 0^+$. Dato che con l'analisi in t = 0 si è ottenuto che $v_C(0^+) = E$, si ha:

$$E = v_C(0^+) = \lim_{t \to 0^+} v_C(t) = \lim_{t \to 0^+} \left(Ae^{-\frac{t}{T}} \right) = A$$

Si ottiene: A = E. Quindi la soluzione è:

$$v_C(t) = E\, e^{-\frac{t}{T}} \qquad \text{con } T = RC$$

La corrente del condensatore ideale si ottiene, avendo trovato la tensione, utilizzando la relazione del condensatore ideale. Si ha quindi:

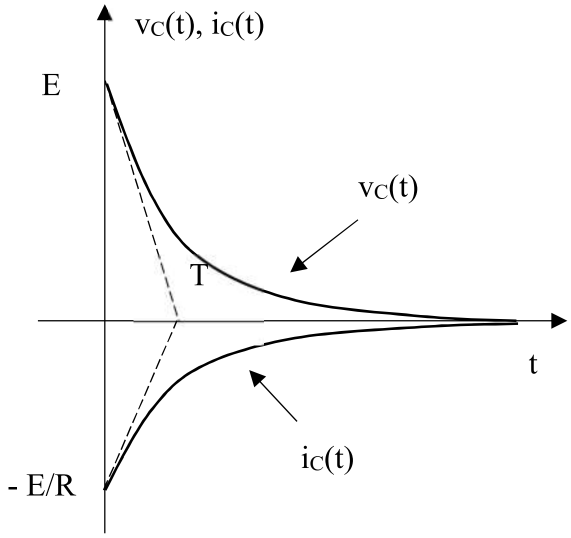
$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{CE}{T}\, e^{-\frac{t}{T}} = -\frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Gli andamenti della tensione e della corrente del condensatore ideale sono delle funzioni esponenziali, caratterizzati dalla *costante di tempo* T = RC (unità di misura: s).

Per tracciare il grafico, si fissi il segno di E: ad esempio sia E > 0; i grafici qualitativi della soluzione sono di seguito riportati per t > 0. Si ricorda che la corrente del condensatore ideale è, a meno della costante positiva C, la derivata della tensione del condensatore ideale.

Le relazioni trovate per la tensione e la corrente del condensatore ideale, per t > 0, mostrano che tensione e corrente tendono con andamento esponenziale a un valore costante, come illustrato in figura. Tale valore costante, per la tensione del condensatore ideale, è il valore finale di scarica, pari a zero e viene raggiunto in un tempo infinito; anche per la corrente del condensatore ideale il valore, per t che tende a infinito, è pari a zero. Si osserva che trascorso un tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo T, la tensione è ridotta a circa l' 1% del valore iniziale E e la corrente, presa in valore assoluto, è ridotta a circa l' 1% del valore iniziale E/R.

Pertanto nella pratica si assume che la scarica avviene in un tempo finito. Si parla di <u>transitorio di scarica</u>. Dopo un intervallo di tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo T, di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito e si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione e corrente del condensatore ideale entrambe nulle.

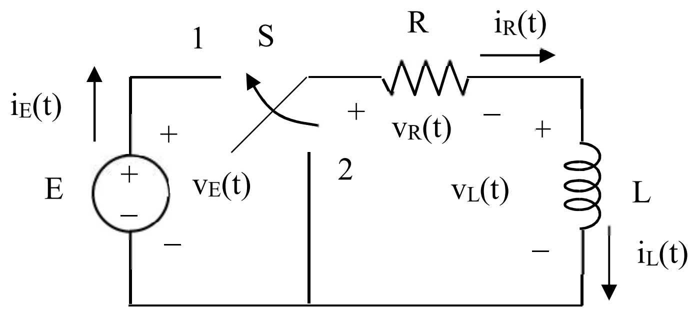


La soluzione finale trovata per la tensione e corrente del condensatore ideale è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per t > 0. A regime stazionario, il condensatore ideale equivale a un circuito ideale aperto e quindi ha corrente nulla. Anche la corrente del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e dalla relazione del resistore $V_R = R\ I_R$, anche la V_R è nulla. Dalla LKT sulla maglia che contiene R e C, la tensione ai capi del condensatore ideale è pari a zero.

Capitolo 15. Generatore di tensione costante con carico ohmico-induttivo

15.1 <u>Transitorio di carica dell'induttore</u>

Si considera il circuito di figura, con R e L costanti positive.



Per t < 0, la rete è a regime stazionario e il commutatore S è in posizione 2. In t = 0 S commuta in posizione 1. Determinare per t > 0 la tensione e la corrente dell'induttore ideale.

Analisi per t < 0

Il commutatore S è in posizione 2. La rete è a regime stazionario: l'induttore equivale a un cortocircuito ideale e quindi ha tensione nulla. Anche la tensione V_R del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e, dalla relazione $V_R = R\, I_R$, anche la corrente I_R è nulla. Quindi è nulla anche la corrente dell'induttore ideale. Questo vale per t < 0 e quindi anche in $t = 0^-$: $i_L(0^-) = 0$.

Analisi per t = 0

Per i casi qui presentati, all'istante critico vale la continuità della tensione per ogni condensatore ideale della rete e della corrente per ogni induttore ideale. In questo caso in cui è presente un induttore ideale (e non ci sono condensatori ideali), vale quindi: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Pertanto, dal valore calcolato in $t = 0^-$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$.

Analisi per t > 0

Per t > 0, il commutatore S è in posizione 1. Si scrivono le LKC, le LKT e le equazioni dei bipoli della rete.

$$\begin{cases} v_R(t) + v_L(t) - v_E(t) = 0 \\ i_R(t) = i_L(t) = i_E(t) \\ v_E(t) = E \\ v_R(t) = R i_R(t) \\ v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

È conveniente risolvere il sistema rispetto a una variabile di stato. In questo caso quindi si sceglie $i_L(t)$.

Nella prima relazione, inserendo le relazioni dei bipoli e mettendo $i_L(t)$ al posto di $i_R(t)$, si ottiene:

$$R i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} - E = 0$$

È un'equazione differenziale del primo ordine, a coefficienti costanti.

La soluzione ha forma (si rimanda ai testi della matematica per la dimostrazione):

$$i_L(t) = Ae^{st} + K$$

Inserendo tale soluzione nell'equazione differenziale si ottiene:

$$K = \frac{E}{R};\ s = -\frac{R}{L}$$

La soluzione si scrive quindi nella forma:

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{T}} + \frac{E}{R}$$

avendo introdotto la *costante di tempo* $T = \frac{L}{R}$ (unità di misura: s).

Il termine costante della soluzione $\left(\frac{E}{R}\right)$ è una soluzione particolare dell'equazione differenziale; il termine esponenziale $\left(Ae^{-\frac{t}{T}}\right)$ è detto soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione differenziale.

Il valore della costante A si ottiene imponendo alla $i_L(t)$ il valore al limite per $t \rightarrow 0^+$. Dato che con l'analisi in t = 0 si è ottenuto che $i_L(0^+) = 0$, si ha:

$$0 = i_L(0^+) = \lim_{t\to 0^+} i_L(t) = \lim_{t\to 0^+} \left(Ae^{-\frac{t}{T}} + \frac{E}{R}\right) = A + \frac{E}{R}$$

Si ottiene: A = – E/R. Quindi la soluzione è:

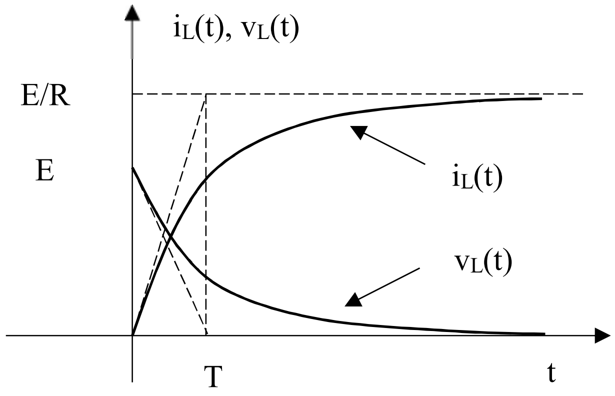
$$i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \qquad \text{con } T = L/R.$$

La tensione dell'induttore ideale si ottiene, avendo trovato la corrente, utilizzando la relazione dell'induttore ideale. Si ha quindi:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{E}{RT}\ e^{-\frac{t}{T}} = E\ e^{-\frac{t}{T}}$$

Gli andamenti della corrente e della tensione dell'induttore ideale sono delle funzioni esponenziali, caratterizzati dalla *costante di tempo* $T = \frac{L}{R}$ (unità di misura: s).

Per tracciare il grafico, si fissi il segno di E: ad esempio sia E > 0; i grafici qualitativi della soluzione sono di seguito riportati per t > 0. Si ricorda che la tensione dell'induttore ideale è, a meno della costante positiva L, la derivata della corrente dell'induttore ideale.



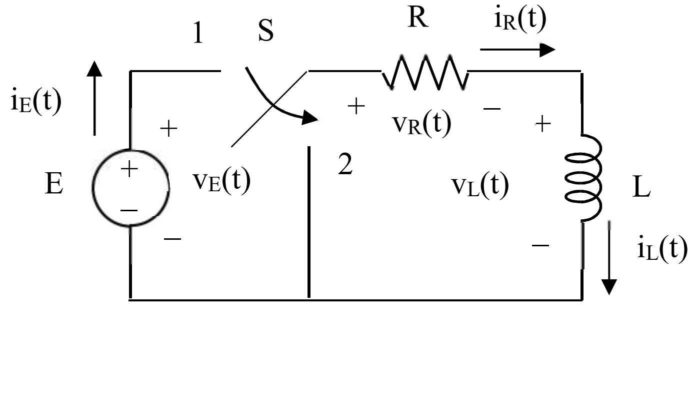
Le relazioni trovate per la corrente e la tensione dell'induttore ideale, per $t > 0$, mostrano che corrente e la tensione tendono con andamento esponenziale a un valore costante, come illustrato in figura. Tale valore costante, per la corrente dell'induttore ideale, è il valore finale di carica, pari a E/R e viene raggiunto in un tempo infinito; per la tensione dell'induttore ideale il valore, per t che tende a infinito, è pari a zero. Si osserva che trascorso un tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo $T=L/R$, la corrente differisce dal valore finale E/R per circa l'1% e la tensione è ridotta a circa l'1% del valore iniziale E.

Pertanto nella pratica si assume che la carica avviene in un tempo finito. Si parla di <u>transitorio di carica</u>. Dopo un intervallo di tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo $T=L/R$, di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito e si può ritenere raggiunta la situazione finale di corrente dell'induttore ideale pari a E/R e tensione nulla dell'induttore ideale.

La soluzione finale trovata per la corrente e tensione dell'induttore ideale è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t > 0$. A regime stazionario, l'induttore ideale equivale a un cortocircuito ideale e quindi ha tensione nulla. Dalla LKT sulla maglia che contiene E, R e L, la tensione V_R del resistore ideale passivo è quindi pari a E e, dalla relazione $V_R = R\ I_R$, la corrente I_R è pari a E/R. Quindi è pari a E/R anche la corrente dell'induttore ideale.

15.2 <u>Transitorio di scarica dell'induttore</u>

Si considera il circuito di figura, con R e L costanti positive.



Per $t < 0$, la rete è a regime stazionario e il commutatore S è in posizione 1. In $t = 0$ S commuta in posizione 2. Determinare per $t > 0$ la tensione e la corrente dell'induttore ideale.

Analisi per t < 0

Il commutatore S è in posizione 1. La rete è a regime stazionario: l'induttore equivale a un cortocircuito ideale e quindi ha tensione nulla. Con i riferimenti indicati in figura si ha che: dalla LKT sulla maglia che contiene E, R e L la tensione V_R del resistore ideale passivo è pari a E; pertanto, dalla relazione $V_R = R\,I_R$, si ottiene che la corrente I_R è pari a E/R e quindi è pari a E/R anche la corrente dell'induttore ideale. Questo vale per $t < 0$ e quindi anche in $t = 0^-$: $i_L(0^-) = E/R$.

Analisi per t = 0

Per i casi qui presentati, all'istante critico vale la continuità della tensione per ogni condensatore ideale della rete e della corrente per ogni induttore ideale. In questo caso in cui è presente un induttore ideale (e non ci sono condensatori ideali), vale quindi: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$. Pertanto, dal valore calcolato in $t = 0^-$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = E/R$.

Analisi per t > 0

Per $t > 0$, il commutatore S è in posizione 2. Si scrivono le LKC, le LKT e le equazioni dei bipoli della rete.

$$\begin{cases} v_R(t) + v_L(t) = 0 \\ i_R(t) = i_L(t) \\ v_R(t) = R i_R(t) \\ v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

È conveniente risolvere il sistema rispetto a una variabile di stato. In questo caso quindi si sceglie $i_L(t)$.

Si osserva che le relazioni scritte adesso per la scarica dell'induttore sono uguali a quelle scritte nel caso della carica dell'induttore nel caso in cui fosse stato $v_E(t) = E = 0$. Si procede pertanto nel modo già illustrato nel caso della carica dell'induttore.

Nella prima relazione, inserendo le relazioni dei bipoli e mettendo $i_L(t)$ al posto di $i_R(t)$, si ottiene:

$$Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$$

È un'equazione differenziale del primo ordine, a coefficienti costanti.

La soluzione ha la forma già indicata nella carica dell'induttore con ora $E = 0$.

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}$$

avendo introdotto la *costante di tempo* $T = \frac{L}{R}$ (unità di misura: s).

Il valore della costante A si ottiene imponendo alla $i_L(t)$ il valore al limite per $t \to 0^+$. Dato che con l'analisi in $t = 0$ si è ottenuto che $i_L(0^+) = E/R$, si ha:

$$\frac{E}{R} = i_L(0^+) = \lim_{t\to 0^+} i_L(t) = \lim_{t\to 0^+}\left(Ae^{-\frac{t}{T}}\right) = A$$

Si ottiene: A = E/R. Quindi la soluzione è:

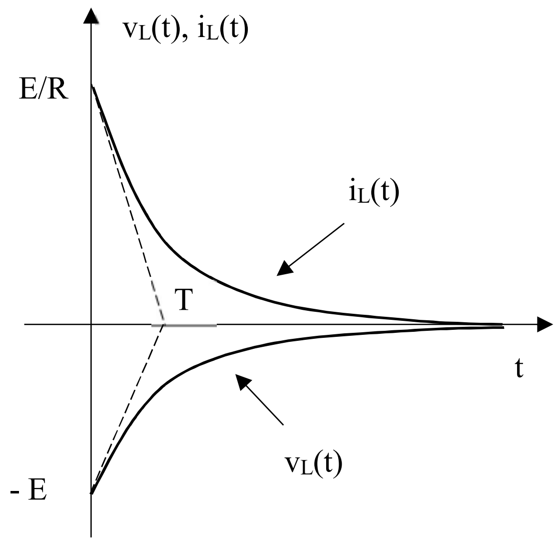
$$i_L(t) = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{T}} \qquad \text{con } T = L/R.$$

La tensione dell'induttore ideale si ottiene, avendo trovato la corrente, utilizzando la relazione dell'induttore ideale. Si ha quindi:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -L\frac{E}{RT}\, e^{-\frac{t}{T}} = -E\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Gli andamenti della corrente e della tensione dell'induttore ideale sono delle funzioni esponenziali, caratterizzati dalla *costante di tempo* $T = \frac{L}{R}$ (unità di misura: s).

Per tracciare il grafico, si fissi il segno di E: ad esempio sia E > 0; i grafici qualitativi della soluzione sono di seguito riportati per t > 0. Si ricorda che la tensione dell'induttore ideale è, a meno della costante positiva L, la derivata della corrente dell'induttore ideale.



Le relazioni trovate per la corrente e la tensione dell'induttore ideale, per t > 0, mostrano che corrente e la tensione dell'induttore ideale tendono con andamento esponenziale a un valore costante, come illustrato in figura. Tale valore costante, per la corrente dell'induttore ideale, è il valore finale di scarica, pari a zero e viene raggiunto in un tempo infinito; anche per la tensione dell'induttore ideale il valore, per t che tende a infinito, è pari a zero. Si osserva che trascorso un tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo T=L/R, la corrente è ridotta a circa l'1% del valore iniziale E/R e la tensione, presa in valore assoluto, è ridotta a circa l'1% del valore iniziale E.

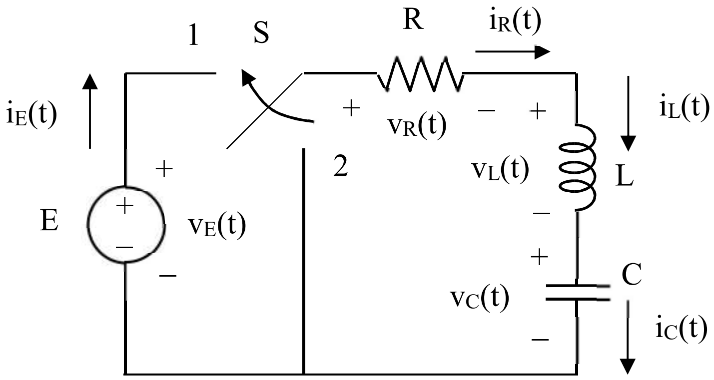
Pertanto nella pratica si assume che la scarica avviene in un tempo finito. Si parla di <u>transitorio di scarica</u>. Dopo un intervallo di tempo pari a circa 4 o 5 volte la costante di tempo

T=L/R, di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito e si può ritenere raggiunta la situazione finale di corrente dell'induttore ideale pari a zero e tensione nulla dell'induttore ideale.

La soluzione finale trovata per la corrente e tensione dell'induttore ideale è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t > 0$. A regime stazionario, l'induttore ideale equivale a un cortocircuito ideale e quindi ha tensione nulla. Dalla LKT sulla maglia che contiene R e L, la tensione V_R del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e, dalla relazione $V_R = R\ I_R$, la corrente I_R è pari a zero. Quindi è pari a zero anche la corrente dell'induttore ideale.

Capitolo 16. Generatore di tensione costante con carico ohmico-induttivo-capacitivo

Si considera il circuito di figura, con R, L e C costanti positive.



Per $t < 0$, la rete è a regime stazionario e il commutatore S è in posizione 2. In $t = 0$ S commuta in posizione 1. Determinare per $t > 0$ la corrente nell'induttore ideale e la tensione ai capi del condensatore ideale.

Analisi per t < 0

Il commutatore S è in posizione 2. La rete è a regime stazionario: l'induttore ideale equivale a un cortocircuito ideale e quindi ha tensione nulla. Il condensatore ideale equivale a un circuito ideale aperto e quindi ha corrente nulla. Anche la corrente I_R del resistore ideale passivo è quindi pari a zero e, dalla relazione $V_R = R\ I_R$, anche V_R è nulla. Dalla LKT sulla maglia che contiene R, L e C è nulla anche la tensione ai capi del condensatore ideale. Questo vale per $t < 0$ e quindi anche in $t = 0^-$: $i_L(0^-) = 0$; $v_C(0^-) = 0$.

Analisi per t = 0

Per i casi qui presentati, all'istante critico vale la continuità della tensione per ogni condensatore ideale della rete e della corrente per ogni induttore ideale. In questo caso in cui sono presenti un induttore ideale e un condensatore ideale, vale quindi: $i_L(0^+) = i_L(0^-)$;

$v_C(0^+) = v_C(0^-)$. Pertanto, dal valore calcolato in $t = 0^-$, le due variabili di stato sono entrambe nulle in $t = 0^+$: $i_L(0^+) = 0$; $v_C(0^+) = 0$.

Analisi per t > 0

Per $t > 0$, il commutatore S è in posizione 1. Si scrivono le LKC, le LKT e le equazioni dei bipoli della rete.

$$\begin{cases} v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_E(t) \\ i_E(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) \\ v_E(t) = E \\ v_R(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \\ v_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Il sistema, come d'uso, è risolto rispetto a una variabile di stato. In questo caso si sceglie $v_C(t)$.

Nella prima relazione, inserendo le relazioni del resistore ideale passivo, dell'induttore ideale e del generatore ideale di tensione e quindi mettendo $i_C(t)$ al posto di $i_R(t)$ e $i_L(t)$, si ottiene:

$$\begin{cases} R i_C(t) + L\dfrac{di_C(t)}{dt} + v_C(t) = E \\ i_C(t) = C\dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

Mettendo adesso nella prima relazione la relazione del bipolo condensatore ideale, si ottiene:

$$LC\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = E$$

È un'equazione differenziale del secondo ordine, a coefficienti costanti. Si introducono i parametri:

$$T = \frac{2L}{R} \; ; \; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il parametro T è una *costante di tempo* (unità di misura: s), mentre il parametro ω_0 è una *pulsazione* (unità di misura: s^{-1}).

Con tali parametri, l'equazione differenziale diventa:

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{2}{T}\frac{dv_c(t)}{dt} + \omega_0^2\, v_c(t) = \frac{E}{LC}$$

Per la soluzione, si distinguono tre casi a seconda del valore del parametro $\frac{1}{\omega_0 T}$ (che è un parametro positivo adimensionale). I tre casi sono:

1) $\frac{1}{\omega_0 T} > 1$ (caso sovrasmorzato);

2) $\frac{1}{\omega_0 T} = 1$ (caso criticamente smorzato);

3) $0 < \frac{1}{\omega_0 T} < 1$ (caso sottosmorzato).

Per i tre casi indicati si può calcolare la soluzione analitica, ma qui si mostra la soluzione in forma solo grafica.

Per i tre casi indicati, si può dimostrare (dalla soluzione analitica) che, come per i transitori di carica del condensatore ideale e dell'induttore ideale precedentemente analizzati, anche adesso la soluzione ha un transitorio (diverso nei tre casi), passato il quale, nella pratica, si può ritenere raggiunta la soluzione finale della tensione del condensatore ideale e della corrente nell'induttore ideale e tale soluzione finale è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t > 0$.

A regime stazionario, l'induttore ideale equivale a un cortocircuito ideale e quindi ha tensione nulla. Il condensatore ideale equivale a un circuito ideale aperto e quindi ha corrente nulla. Anche la corrente I_L dell'induttore ideale e la corrente I_R del resistore ideale passivo sono pari a zero. Dalla relazione $V_R = R\ I_R$, anche la tensione V_R è nulla. Dalla LKT sulla maglia che, per $t > 0$, contiene E, R, L e C, la tensione del condensatore ideale è quindi pari a E.

Pertanto, nei tre casi indicati, la tensione del condensatore ideale vale 0 in $t = 0^+$ e ha valore finale pari a E. La corrente dell'induttore ideale vale 0 in $t = 0^+$ e ha valore finale pari a zero.

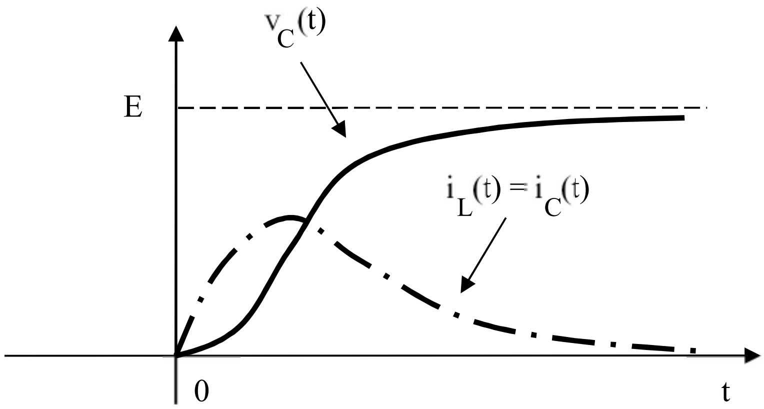
Per tracciare i grafici, si fissi il segno di E: ad esempio sia $E > 0$; i grafici qualitativi della soluzione sono di seguito riportati per $t \geq 0$. Nel tracciamento qualitativo dei grafici si ricordi che la corrente dell'induttore ideale è uguale alla corrente del condensatore ideale e quest'ultima è (a meno del termine C che è una costante positiva) la derivata della tensione del condensatore ideale.

1) **Caso sovrasmorzato: $\frac{1}{\omega_0 T} > 1$**

In questo caso (caso sovrasmorzato) la tensione del condensatore ideale parte da zero, con derivata nulla ($i_C(0^+) = i_L(0^+)=0$) e tende al valore finale E avvicinandosi al valore finale E in modo graduale e regolare. Dovendo partire da zero con derivata nulla e crescere al valore E, prima si ha una crescita con concavità verso l'alto e quindi una crescita con concavità verso il basso. Il punto in cui la concavità cambia è un punto di flesso.

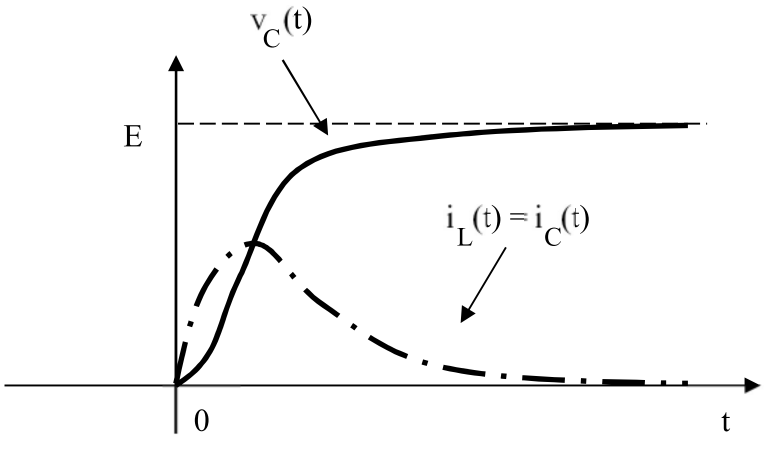
La derivata della tensione, moltiplicata per la costante positiva C, dà l'andamento della corrente del condensatore ideale che è pari alla corrente dell'induttore ideale. In $t = 0^+$ la corrente è nulla; poi è positiva (la tensione cresce) con derivata positiva (la tensione ha concavità rivolta verso l'alto). Si raggiunge un punto di massimo della corrente (punto di flesso della tensione). Quindi la corrente è positiva (la tensione cresce) con derivata negativa e quindi decresce al valore finale pari a zero.

Si può dimostrare che il transitorio è caratterizzato da due costanti di tempo: una delle due costanti di tempo è di valore minore di T; l'altra è di valore maggiore di T. Di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito dopo un tempo pari a circa 5 volte la maggiore fra le due costanti di tempo e dopo tale intervallo di tempo si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari a E e corrente nulla nell'induttore ideale.



2) **Caso criticamente smorzato:** $\frac{1}{\omega_0 T}$ **= 1**

La soluzione analitica è diversa da quella degli altri due casi. Il grafico qualitativo è tuttavia simile a quello del caso sovra smorzato. Di solito nella pratica il transitorio si può considerare esaurito dopo un tempo pari a circa 5 volte la costante di tempo T e dopo tale intervallo di tempo si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari a E e corrente nulla nell'induttore ideale.



3) **Caso sottosmorzato: $0 < \frac{1}{\omega_0 T} < 1$**

In questo caso (caso sottosmorzato) la tensione del condensatore ideale, che parte da zero con derivata nulla e tende al valore finale E, supera nel transitorio il valore E finale e quindi tende al valore E finale mediante oscillazioni smorzate intorno al valore E.

La derivata della tensione del condensatore ideale, moltiplicata per la costante positiva C, dà l'andamento della corrente del condensatore ideale che è pari alla corrente dell'induttore ideale: la corrente, che parte da zero in $t = 0^+$, è massima o minima nei punti di flesso della tensione ed è nulla nei punti di massimo e di minimo della tensione.

Di solito nella pratica il transitorio si può considerare esaurito dopo un tempo pari a circa 5 volte la costante di tempo T e dopo tale intervallo di tempo si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari a E e corrente nulla nell'induttore ideale.