ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 1

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2, \tag{1}$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

(b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

(c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) > 1$ definitivamente per $x \to 1$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

(b) Enunciare il teorema di caratterizzazione delle costanti.

(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $y'(x) = \frac{2y(x)}{x}$ su $(0,1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-2}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 2)^k}{k^2 + 3}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 - \alpha x - x^2) + \sin x}{\cosh x - 1}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{2\sin x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\,dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 2

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3, \tag{1}$$

   dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

   (b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

   soddisfa l'equazione (1).

   (c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) < 4$ definitivamente per $x \to \infty$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

   (b) Enunciare il teorema sull'algebra delle derivate.

   (c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $2y'(x) = \frac{y(x)}{x}$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{2-x}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 3)^k}{k^2+2}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\alpha x - x^2) + \sinh x}{\cos x - 1}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\,dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 3

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3, \tag{1}$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

(b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

(c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) < 4$ definitivamente per $x \to -\infty$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

(b) Enunciare il teorema di Rolle.

(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $xy'(x) = 2y(x)$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{3-x}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 4)^k}{k^2+1}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\alpha x + x^2) - \sin x}{1 - \cosh x}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1 + 2x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\, dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione – Canali B e D

Appello del 20.01.2025

Scrivete il/la vostro/a docente di riferimento e il numero di tema nei fogli che consegnate!

Parte di Teoria - TEMA 4

1. (a) Scrivere la definizione del seguente limite

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 2, \tag{1}$$

dove $f(x)$ è una funzione reale di variabile reale.

(b) Utilizzando la definizione precedente e giustificando la risposta, stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

soddisfa l'equazione (1).

(c) Mostrare che se f soddisfa l'equazione (1), allora $f(x) < 4$ definitivamente per $x \to -1$.

2. (a) Scrivere la definizione di funzione derivabile;

(b) Enunciare il teorema di Lagrange.

(c) Scrivere l'integrale generale dell'equazione $2y'(x) = \frac{y(x)}{2x}$ su $(0, 1)$.

Tempo: 30 min.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 20.01.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x|}{x-3}\right).$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Al variare di $a \in (0, +\infty)$, studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\log a + 1)^k}{k^2 + 4}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + \alpha x + x^2) - \sinh x}{1 - \cos x}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri $f_\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x + x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\, dx$.

ii) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$