Esercizi Tutorato Algebra

chiara.malerba@studenti.unipd.it

a.a. 2022/2023

Esercitazione del 15 Maggio 2023

- Sia data la matrice al variare di $h \in \mathbb{R}$:
$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  - Al variare di h dire se la matrice A_h e' diagonalizzabile o meno (sul campo dei numeri reali).
  - Trovare per ogni $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicita' maggiore di uno tutti gli autospazi.
  - Per $h = 3$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_3P$ sia diagonale.
  - Per gli $\bar{h}$ del punto precedente mostrare che $(A_{\bar{h}})^3 = 0$. Per tali $\bar{h}$, e' $A_{\bar{h}}$ simile alla matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$
  - Si determini il valore di t in modo che il vettore $v = (1, 1, -1)$ sia un autovettore di A.
  - Per il valore di t trovato al punto precendente si determino gli autovalori e gli autovettori di A e si dica se A e' diagonalizzabile.
  - E' possibile trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A? Perche'?
  - Esiste una matrice non diagonale simile alla matrice A?

- Si consideri la matrice
$$A_(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ t+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dove t e' un parametro reale.
  - Si dica per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.
  - Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicita' maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente e' diagonalizzabile.
  - Si determini il valore di t per il quale esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice $A_{(t)}$.

- Dati i vettori di $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente 1 come unico autovalore, con molteplicita' algebrica 3, e tale che $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$.
  - Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
  - Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.
  - Si determini l'autospazio relativo all'autovalore 1 e si dica se f e' diagonalizzabile.
  - Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia triangolare superiore.