ESERCIZI SCHEDA 6

ESERCIZIO 1

ⓐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}}$ Termini positivi (numeratore e denominatore positivi)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n^2}+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = 0$$

È soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

Dai passaggi precedenti si nota che:

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}+n\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \sim \frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

per $n \to +\infty$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ è una serie armonica convergente.

Per criterio del confronto asintotico, le due serie hanno lo stesso comportamento.

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge.

(b) $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^5(\log^2 k+\log k+1)}$$ Termini positivi (tutti i logaritmi lo sono)

$$\frac{1}{k^5(\log^2 k+\log k+1)} \sim \frac{1}{k^5 \log^2 k}$$ per $k \to +\infty$

Per la serie armonica generalizzata:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^5 \log^2 k}$$ converge

Per il criterio del confronto asintotico, le due serie hanno lo stesso comportamento.

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge.

(c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+e^{-n}+\sin n+\log n}{n^5+n^{7/3}}$$ Il denominatore è positivo. L'unico termine che può dare un segno negativo è $\sin n$, ma, se confrontato con gli altri addendi:

$n+\sin n$ può essere ALMENO 0, dato che l'indice di partenza è $n=1$ e $\sin n \in [-1, 1]$.

I termini sono positivi.

$$\frac{n+e^{-n}+\sin n+\log n}{n^5+n^{7/3}} \sim \frac{n}{n^5} = \frac{1}{n^4}$$ per $n \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$ è una serie armonica convergente.

Per il criterio del confronto asintotico, le due serie hanno lo stesso comportamento.

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge.

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n^{\alpha} \arctan\left(\frac{1}{n^3}\right)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ Tutti i termini sono positivi.

$\arctan k \sim k$ per $k \to 0$

$\downarrow$

$\arctan\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3}$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow n^{\alpha} \arctan\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim n^{\alpha} \cdot \frac{1}{n^3} = n^{\alpha-3}$ per $n \to +\infty$

Si ricava una serie armonica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha-3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

Questa serie $\begin{cases} \text{converge se } 3-\alpha > 1 \iff \alpha < 2 \\ \text{diverge se } 3-\alpha \le 1 \iff \alpha \ge 2 \end{cases}$

Per criterio del confronto asintotico, la serie di partenza si comporta allo stesso modo.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n^4+2n} - n^2}{\sqrt{n}}}_{\text{termini positivi}} \underbrace{\sin(\sqrt[7]{n})}_{\text{cambia segno}}$

Non so che segno abbiano i termini (non è detto che la serie sia a termini con segno alterno), quindi studio l'assoluta convergenza.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}\sin(\sqrt[7]{n})\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}\right|\cdot|\sin(\sqrt[7]{n})|$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}|\sin(\sqrt[7]{n})|$$

Noto che vale sempre:

$$\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}\underbrace{|\sin(\sqrt[7]{n})|}_{\text{AL PIÙ} = 1} \leq \frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}$$

Analogamente all'esercizio 1.a: $\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}} \sim \frac{\cancel{2}\cancel{n}}{\cancel{2}n^{\cancel{2}}\sqrt{n}} =$

$$= \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

Data la serie armonica convergente e per il criterio del confronto asintotico, la serie di termini $\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}$ converge

Per il criterio del confronto, anche la serie di termini $\frac{\sqrt{n^4+2n}-n^2}{\sqrt{n}}|\sin(\sqrt[7]{n})|$ converge.

Ho trovato assoluta convergenza per la serie e questa implica convergenza semplice.

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge.

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}\sin(\alpha n!)$ per $\alpha \in \mathbb{R}$

Studio l'assoluta convergenza.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| e^{-n} \sin(\alpha n!) \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} \left| \sin(\alpha n!) \right|$$

Si ha sempre: $e^{-n} \left| \sin(\alpha n!) \right| \leq e^{-n}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$ è a termini positivi

Osservo che questa è una serie geometrica convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \quad \text{passo } \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow cv$$

Per il criterio del confronto, anche la serie di termini $e^{-n} \left| \sin(\alpha n!) \right|$ converge.

Ho trovato assoluta convergenza per la serie e questa implica convergenza semplice.

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge.

9) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log(e^{3k}+5)}{k^2+k\log k+9}$ I termini sono definitivamente positivi

$$\frac{\log(e^{3k}+5)}{k^2+k\log k+9} = \frac{\log\left[e^{3k}\left(1+\frac{5}{e^{3k}}\right)\right]}{k^2+k\log k+9} = \frac{\log(e^{3k})+\log\left(1+\frac{5}{e^{3k}}\right)}{k^2+k\log k+9} =$$

$$= \frac{3k+\log\left(1+\frac{5}{e^{3k}}\right)}{k^2+k\log k+9} \sim \frac{3k}{k^2} = \frac{3}{k} \quad \text{per } k \to +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{k} = 3\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$ è una serie armonica divergente.

Per criterio del confronto asintotico, questa serie e quella di partenza si comportano allo stesso modo, quindi la serie di partenza diverge.

h) $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2+7}{k^3\log^2 k + k^4 \log\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$ serie a termini positivi.

$$\frac{k^2+7}{k^3\log^2 k + k^4 \log\left(1+\frac{1}{k}\right)} \sim \frac{k^2}{k^3\log^2 k} = \frac{1}{k\log^2 k} \quad \text{per } k\to+\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\log^2 k}$$ è una serie armonica generalizzata convergente.

Per criterio del confronto asintotico, questa serie e quella di partenza si comportano allo stesso modo, quindi la serie di partenza converge.

i) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n\log n}$$

Studio l'assoluta convergenza.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{n\log n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}\left|\sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right|$$

Si ha sempre: $$\frac{1}{n\log n}\left|\sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{n\log n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$ è una serie armonica convergente.

Per il criterio del confronto, anche la serie di termini $\frac{1}{n\log n}\left|\sin\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right|$ converge.

Ho trovato assoluta convergenza per la serie e questa implica convergenza semplice.

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge.

(l) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\exp\left(\tan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)-1} \quad \text{per } \alpha > 0$$

Riscrivo l'espressione usando i polinomi di Taylor:

- $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to +\infty$

$$\Rightarrow \cos\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \cos\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\Rightarrow 1-\cos\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

- $\tan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ per $n \to +\infty$

$$\Rightarrow \exp\left(\tan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$= 1 + \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1-\cos\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\exp\left(\tan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)-1} = \frac{\frac{1}{8n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} \sim \frac{\frac{1}{8n^4}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{8n^{4-\alpha}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{8n^{4-\alpha}} \begin{cases} \text{converge se } 4-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 3 \\ \text{diverge se } 4-\alpha \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq 3 \end{cases}$$

Per criterio del confronto asintotico, la serie di partenza si comporta alla stessa maniera.

ESERCIZIO 2

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k + 3^k}{k^3 2^k + 2^{2k}}$$

Tutti i termini sono positivi.

ⓐ Studio il limite per $k \to +\infty$ di $\sqrt[k]{a_k}$:

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{e^k + 3^k}{k^3 2^k + 2^{2k}}} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{3^k\left(1 + \frac{e^k}{3^k}\right)}{2^{2k}\left(1 + \frac{k^3}{2^k}\right)}}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \frac{3}{2^2} \underbrace{\sqrt[k]{\frac{\left(1 + \frac{e^k}{3^k}\right)}{\left(1 + \frac{k^3}{2^k}\right)}}}_{\to 1} = \frac{3}{4} < 1$$

$\Downarrow$

Per il criterio della radice asintotica, la serie converge.

(b) Osservo che:

$$\frac{e^k + 3^k}{k^3 2^k + 2^{2k}} \sim \frac{3^k}{2^{2k}} = \frac{3^k}{4^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Per criterio del confronto asintotico, la serie di partenza ha lo stesso carattere di:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$ che è una serie geometrica convergente

ESERCIZIO 3

(a) $$\sum_{k=2}^{+\infty} 3^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k$$

Calcoliamo il limite a $+\infty$ dei termini a_k:

$$\lim_{k \to +\infty} 3^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k = \lim_{k \to +\infty} \overset{\to +\infty}{3^k} \underbrace{\left(1 + \frac{-1}{k}\right)^k}_{\to e^{-1}} = +\infty \cdot e^{-1} = +\infty$$

Non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

$\Rightarrow$ La serie diverge.

ⓑ $$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(\tan\alpha)^{2k}}{(2+3k)^{k/2}} \qquad \text{con } \alpha \geq 0$$

Tutti i termini sono positivi:
- NUM: è un quadrato (≥ 0)
- DEN: è una radice con radicando positivo (>0)

Se $\alpha = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$, la serie converge per forza, in quanto si sommano solo termini nulli.

Per $\alpha \neq n\pi$ studio il carattere della serie con il criterio della radice asintotica:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{(\tan\alpha)^{2k}}{(2+3k)^{k/2}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\tan^2\alpha}{\sqrt{2+3k}} = 0$$

valore finito fissato

Per il criterio della radice asintotica, la serie converge $\forall \alpha \geq 0$.

ⓒ $$\sum_{k=2}^{+\infty} \alpha^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \qquad \text{con } \alpha \geq 0$$

Dal ragionamento fatto al punto 3_a, si evince che la condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta solamente per $\alpha \in [0, 1)$.

Per $\alpha \geq 1$ la serie diverge.

Per $\alpha = 0$, la serie è sommatoria di termini nulli, quindi converge

Per $\alpha \in (0,1)$, studio il carattere della serie col criterio della radice asintotica:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\alpha^k\left(1-\frac{1}{k}\right)^k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \alpha\left(1+\frac{-1}{k}\right) = \alpha < 1 \iff \alpha\in(0,1)$$

$\Downarrow$

La serie converge per il criterio della radice asintotica.

$\Rightarrow$ La serie $\begin{cases} \text{converge se } \alpha\in[0,1) \\ \text{diverge se } \alpha \geq 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 4

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[3k^2\log\left(\frac{2k^2+2}{2k^2+1}\right)\right]^k$$

Studio il carattere della serie col criterio della radice asintotica:

$$\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} 3k^2\log\left(\frac{2k^2+2}{2k^2+1}\right) = \lim_{k\to+\infty} 3k^2\log\left(\frac{2k^2+1+1}{2k^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} 3k^2\log\left(1+\frac{1}{2k^2+1}\right) = \lim_{k\to+\infty} 3k^2\left(\frac{1}{2k^2+1}+o\left(\frac{1}{2k^2+1}\right)\right) =$$

per $k\to+\infty$

$$= \lim_{k\to+\infty} \underbrace{\frac{3k^2}{2k^2+1}}_{\to \frac{3}{2}} + \underbrace{o\left(\frac{3k^2}{2k^2+1}\right)}_{\to 0} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$$ Per criterio della radice asintotica la serie diverge.

ESERCIZIO 5

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 a^n}{n^a + 2^n + 5^n} \quad \text{con } a>0$$

Osservo che: $\dfrac{n^2 a^n}{n^a + 2^n + 5^n} \sim \dfrac{n^2 a^n}{5^n} = n^2 \left(\dfrac{a}{5}\right)^n$

Studio il carattere della serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 a^n}{5^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{a}{5}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(5/a)^n} = 0 \iff a<5$$

Quindi, se $a \geq 5$, non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

$\Rightarrow$ Se $a \geq 5$, la serie diverge e per criterio del confronto asintotico lo fa anche quella di partenza

Per $a \in (0,5)$ studio il carattere della serie col criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 \left(\frac{a}{5}\right)^{\cancel{n+1}}}{n^2 \cancel{\left(\frac{a}{5}\right)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{5} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}_{\to 1} = \frac{a}{5}$$

Per $a<5$, $\frac{a}{5}<1 \Rightarrow$ La serie converge e così si comporta anche la serie di partenza per criterio del confronto asintotico.

$\Rightarrow$ La serie $\begin{cases} \text{converge se } \alpha < 5 \\ \text{diverge se } \alpha \geq 5 \end{cases}$

ESERCIZIO 6

a) $$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \left(\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha} \right) \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| (-1)^k \left(\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha} \right) \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha}$$

perché termini positivi

Si dimostra facilmente che per $\alpha \leq 0$ non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza (basti fare il $\lim_{k \to +\infty} |a_k|$)

Osservo che:

$$\left(\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha} \right) \cdot \frac{\sqrt{k^\alpha + 1} + \sqrt{k^\alpha}}{\sqrt{k^\alpha + 1} + \sqrt{k^\alpha}} = \frac{\cancel{k^\alpha} + 1 - \cancel{k^\alpha}}{\sqrt{k^\alpha + 1} + \sqrt{k^\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^\alpha \left(1 + \frac{1}{k^\alpha} \right)} + \sqrt{k^\alpha}} \sim \frac{1}{2 k^{\alpha/2}}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^{\alpha/2}} \quad \text{converge per } \frac{\alpha}{2} > 1 \iff \alpha > 2$$

Si ha quindi $\begin{cases} \text{assoluta convergenza per } \alpha > 2 \\ \text{assoluta divergenza per } \alpha \leq 2 \end{cases}$

Assoluta convergenza implica convergenza semplice

$\Rightarrow$ La serie di partenza converge per $\alpha > 2$

Anche per la convergenza semplice non si ha $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$ se $\alpha \leq 0$.

Per $\alpha > 0$ si ha:

- $\lim_{k \to 0} \left(\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha}\right) = 0$ (Lo si vede dal punto precedente)

- $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sqrt{(k+1)^\alpha + 1} - \sqrt{(k+1)^\alpha}}{\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha}} \cdot \left(\sqrt{(k+1)^\alpha + 1} - \sqrt{(k+1)^\alpha}\right)$$

razionalizzo numeratore e denominatore

$$= \frac{\sqrt{k^\alpha + 1} + \sqrt{k^\alpha}}{\cancel{k^\alpha} + 1 - \cancel{k^\alpha}} \cdot \frac{\cancel{(k+1)^\alpha} + 1 - \cancel{(k+1)^\alpha}}{\sqrt{(k+1)^\alpha + 1} + \sqrt{(k+1)^\alpha}}$$

$$= \frac{\sqrt{k^\alpha + 1} + \sqrt{k^\alpha}}{\sqrt{(k+1)^\alpha + 1} + \sqrt{(k+1)^\alpha}} < 1 \Rightarrow a_{k+1} < a_k$$

La serie converge per il criterio di Leibniz $\forall \alpha > 0$.

b) $$\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k^\alpha} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right) \qquad \text{con } \alpha \geq 0$$

Studio l'assoluta convergenza:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k^\alpha} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right) \right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right)$$

Osservo che $\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right) \sim \frac{3}{\sqrt{k}}$ per $k \to +\infty$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \cdot \frac{3}{\sqrt{k}} = 3 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$\rightarrow$ converge se $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ diverge se $\alpha + \frac{1}{2} \leq 1 \iff \alpha \leq \frac{1}{2}$

Per criterio del confronto asintotico si ha che la serie si comporta alla stessa maniera, quindi:

si ha $\begin{cases} \text{assoluta convergenza per } \alpha > \frac{1}{2} \\ \text{assoluta divergenza per } \alpha \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Per la convergenza semplice osservo che:

- $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^\alpha} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right) = \lim_{k \to +\infty} \frac{3}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}} = 0$ se $\alpha + \frac{1}{2} > 0 \iff \alpha > -\frac{1}{2}$ $\iff \alpha \geq 0$

- $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)^\alpha} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k+1}}\right)}{\frac{1}{k^\alpha} \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right)} = \underbrace{\boxed{\left(\frac{k}{k+1}\right)^\alpha}}_{<1\ \forall \alpha \geq 0} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k+1}}\right)}{\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right)}}}_{<1}$$

Per il criterio di Leibniz, la serie converge per $\alpha \geq 0$.

(c) $$\sum_{k=2}^{+\infty} (\cos(k\pi)) \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

$\underset{=\pm 1}{\cos(k\pi)}$ rende i termini della serie a segni alterni.

Studio la convergenza assoluta della serie:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left| (\cos(k\pi)) \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \right| = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

Osservo che: $\left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k}$ per $k \to +\infty$

Per studiare il carattere della serie $\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k}$ uso il criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^{\cancel{k+1}} \cdot \frac{1}{k+1}}{\cancel{\left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^{k}}_{1} \cdot \frac{1}{k}} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right) \cdot \underbrace{\frac{k}{k+1}}_{\to 1} = \frac{3-a}{a^2+1}$$

$$\frac{3-a}{a^2+1} < 1 \iff 3-a < a^2+1$$
$$\iff a^2+a-2>0$$
$$\iff (a+2)(a-1)>0 \iff a<-2 \lor a>1$$

Per criterio del confronto asintotico, la serie converge assolutamente per $a < -2 \lor a > 1$

Dal criterio del rapporto asintotico non si può dire nulla per $a = 1 \land a = 2$

In convergenza assoluta si ottiene per entrambi i valori la serie:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$ che è asintotica ad una serie armonica divergente.

Quindi si ha: $\begin{cases} \text{convergenza assoluta per } a < -2 \lor a > 1 \\ \text{divergenza assoluta per } -2 \leq a \leq 1 \end{cases}$

Col criterio di Leibniz cerco di dimostrare la convergenza semplice:

- $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right) \cdot \frac{k}{k+1} < 1 \qquad \forall k \in [2, +\infty)$$

$$\iff \frac{3-a}{a^2+1} \leq 1 \iff a \leq -2 \lor a \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

- $$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{3-a}{a^2+1}\right)^k \underbrace{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}_{\to 0} = 0 \iff \frac{3-a}{a^2+1} \leq 1$$

Quindi si ha: $\begin{cases} \text{convergenza semplice per } a \leq -2 \lor a \geq 1 \\ \text{divergenza semplice per } -2 < a < 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 7

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}}$$

Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x^n|}{3^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{3^n \sqrt{n+1}}$$

Uso il criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{|x|^{\cancel{n}+1}}{3^{\cancel{n}+1}\sqrt{n+2}}}{\dfrac{\cancel{|x|^n}}{\cancel{3^n}\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{3} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}_{\to 1} = \frac{|x|}{3}$$

$$\frac{|x|}{3} < 1 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

Per il criterio del rapporto asintotico, non posso dire nulla per $x = \pm 3$.
Vado a sostituire i valori nella serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{3^n \sqrt{n+1}} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Osservo che: $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ per $n \to +\infty$

Per criterio del confronto asintotico, la serie ha lo stesso carattere di:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$ che è una serie armonica divergente

Quindi si ha: $\begin{cases} \text{convergenza assoluta per } -3 < x < 3 \\ \text{divergenza assoluta per } x \leq -3 \lor x \geq 3 \end{cases}$

Per studiare la convergenza semplice, si può usare lo stesso criterio, che però è valido solo per serie a termini definitivamente positivi, quindi applicabile per $x > 0$:

si ottiene convergenza semplice per $0 < x < 3$.

Se $x = 0$, la serie è somma di termini nulli, quindi converge.

Se $x < 0$, la serie è a termini con segno alterno:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-x)^n}{3^n \sqrt{n+1}} \Rightarrow a_n = \frac{(-x)^n}{3^n \sqrt{n+1}}$$

Studio la convergenza semplice tramite il criterio di Leibniz:

- $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{-x}{3} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}}_{<1} < 1 \iff -\frac{x}{3} \leq 1 \iff x \geq -3$
- $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{(-x)^n}{3^n \sqrt{n+1}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = 0 \iff 0 < -\frac{x}{3} \leq 1$

$$\iff -3 \leq x < 0$$

Quindi si ha: $\begin{cases} \text{convergenza semplice per } -3 \leq x < 3 \\ \text{divergenza semplice per } x < -3 \lor x \geq 3 \end{cases}$

Esercizio 8

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[(2k)!]^2}{\exp\left(k^{1+\alpha}\right)} \qquad \text{con } \alpha>0$$

Studio la serie col criterio del rapporto asintotico:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{[(2k+2)!]^2}{\exp[(k+1)^{1+\alpha}]}}{\dfrac{[(2k)!]^2}{\exp\left(k^{1+\alpha}\right)}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{(2k+2)!}{(2k)!}\right)^2 \cdot e^{k^{1+\alpha}-(k+1)^{1+\alpha}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} [(2k+2)(2k+1)]^2 \cdot e^{k^{1+\alpha}-(k+1)^{1+\alpha}}$$

$$[(2k+2)(2k+1)]^2 \cdot e^{k^{1+\alpha}-(k+1)^{1+\alpha}} \sim 16k^4 \cdot e^{k^{1+\alpha}-(k+1)^{1+\alpha}}$$

per $k \to +\infty$

$$= \lim_{k\to+\infty} 16k^4 \cdot e^{k^{1+\alpha}-(k+1)^{1+\alpha}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} 16k^4 e^{k^{1+\alpha}-k^{1+\alpha}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1+\alpha}}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} 16k^4 e^{k^{1+\alpha}\left[1-\left(1+\frac{1}{k}\right)^{1+\alpha}\right]}$$

Applico per questo termine la notazione exp{log}.

$$= \lim_{k\to+\infty} 16k^4 e^{k^{1+\alpha}\left[1-\exp\left\{(1+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}\right]}$$

Considero il solo esponente:

$$\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{per } k\to+\infty$$

$$\Rightarrow (1+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1+\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\exp\left\{\frac{1+\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right\}=1+\frac{1+\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow e^{k^{1+\alpha}\left[1-\exp\left\{(1+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}\right]}=e^{k^{1+\alpha}\left[\cancel{1}-\cancel{1}-\frac{1+\alpha}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right]}$$

$$=e^{-(1+\alpha)k^{\alpha}+o\left(\frac{1}{k^{-\alpha}}\right)}\sim e^{-(1+\alpha)k^{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}16k^4e^{k^{1+\alpha}\left[1-\exp\left\{(1+\alpha)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}\right]}=\lim_{k}16k^4e^{-(1+\alpha)k^{\alpha}}$$

$$=\lim_{k}\frac{16k^4}{e^{(1+\alpha)k^{\alpha}}}=0$$

per gerarchia

$\Rightarrow$ La serie converge $\forall\alpha>0$.