# ANALISI MATEMATICA 1

**Area dell'Ingegneria dell'Informazione**

## Appello del 18.01.2021

# TEMA 1

**Esercizio 1 [8 punti]** Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right);$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) calcolarne la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti estremanti;
(iii) abbozzare il grafico di $f$.

*Svolgimento.* (i). Iniziamo dallo studio del dominio naturale. Il denominatore $x^2 + x + 1 > 0$ è sempre strettamente positivo, in quanto il determinante $\Delta = -3$ è negativo. Considerando anche che il dominio della funzione arctan è tutto $\mathbb{R}$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.
Studiamo il segno di $f$: poichè $x^2 + x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \geq 0$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)\right) = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii). La derivata di $f$ è

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2}\frac{-2x^2-x+x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2\right)(x^2+x+1)^2}(-x^2+1).$$

Dunque

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$$

e

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}.$$

Ne deduciamo che $f$ è cresente nell'intervallo $[-1, 1]$, decrescente in $]-\infty, -1]$ ed in $[1, +\infty[$, quindi $x = -1$ è punto di minimo globale mentre $x = 1$ è punto di massimo globale.

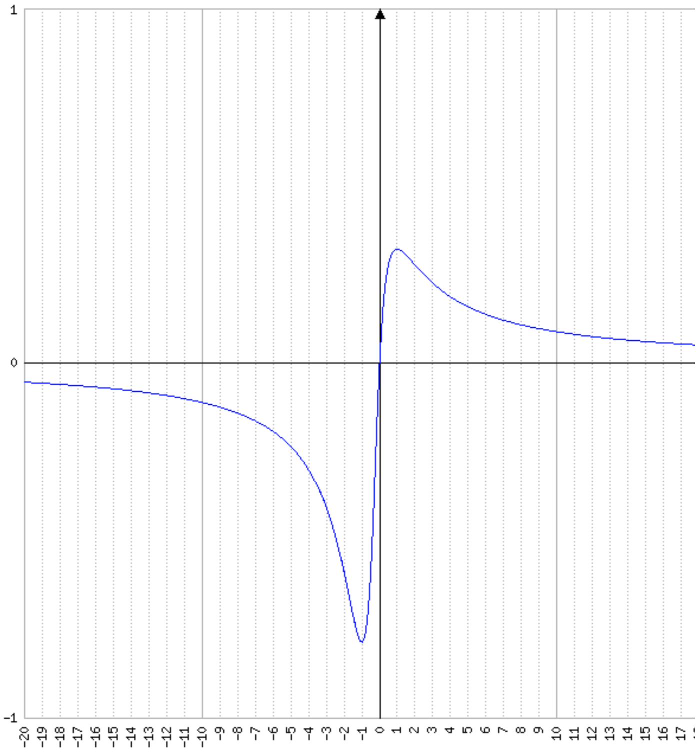


Figure 1: Il grafico di $f$.

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

**Esercizio 2 [8 punti]** Si trovino in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + (-1+i)z^2 - i = 0.$$

Suggerimento: sostituire $w = z^2$.

*Svolgimento.* Con la sostituzione $w = z^2$ si ottiene

$$w^2 + (-1+i)w - i = 0$$

le cui soluzioni sono

$$w_{1,2} = \frac{1 - i + \sqrt{2i}}{2} = \frac{1 - i \pm (1+i)}{2} = \{1,\ -i\}\,.$$

Perciò, le soluzioni sono 4 e coincidono con l'unione delle soluzioni di $z^2 = 1$ e $z^2 = -i$, vale a dire

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Esercizio 3 [8 punti]**
(i) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}.$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

*Svolgimento.* (i).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{2n}} = \left( \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{n}} \right)^2 = e^{-2}.$$

(ii). Poiché la serie è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto asintotico ed il risultato di (i), ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n^{2n}}{(2n)!(n+1)^{2n+2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)n^{2n}}{(n+1)^2(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2+6n+2)n^{2n}}{(n^2+2n+1)(n+1)^{2n}} \\ &= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 4e^{-2}. \end{aligned}$$

Vale $4e^{-2} < 1$; la serie è convergente.

**Esercizio 4 [8 punti]** Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha}.$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza

$$\int_0^{\log 2} f_\alpha(x)\, dx.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx.$$

*Svolgimento.* (a). Si tratta di un integrando a valori positivi quindi possiamo sfruttare il criterio del confronto asintotico. Da

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha} = \frac{1}{x + o(x) + x^\alpha}$$

otteniamo che, per $x \to 0$ la funzione è asintotica a $\frac{1}{x}$ se $\alpha > 1$, a $\frac{2}{x}$ se $\alpha = 1$ e a $\frac{1}{x^\alpha}$ se $\alpha < 1$. Perciò l'integrale converge $\iff$ $\alpha < 1$.

(b) Con la sostituzione $t = e^x$ (cioè $x = \log t$) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{\sinh x + 1} dx = \int_0^{\log 2} \frac{2}{e^x - e^{-x} + 2} dx = \int_1^2 \frac{2}{(t - t^{-1} + 2)t} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t^2 + 2t - 1} dt. \end{aligned}$$

Le radici di $t^2 + 2t - 1 = 0$ sono $-1 \pm \sqrt{2}$, dunque

$$\frac{1}{t^2 + 2t - 1} = \frac{A}{t + 1 - \sqrt{2}} + \frac{B}{t + 1 + \sqrt{2}}$$

per opportuni $A, B \in \mathbb{R}$. Si ha $1 = A(t + 1 + \sqrt{2}) + B(t + 1 - \sqrt{2})$, da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

dunque

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

e perciò $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ne deduciamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx &= \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \frac{1}{t + 1 - \sqrt{2}} dt - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \frac{1}{t + 1 + \sqrt{2}} dt \right) \\ &= \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \log |t + 1 - \sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2} \log |t + 1 + \sqrt{2}| \right]_1^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left( \frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \log \left( \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$