ESERCIZI SCHEDA 9

PARTE a

ESERCIZIO 1

$$\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4} - \arctan x \qquad \forall x > -1$$

$$\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\pi}{4} - \arctan x = 0$$

Considero la funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\pi}{4} - \arctan x$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $\lim_{x \to -1^-} \arctan\left(\overset{\to \frac{-2}{0^-} \to +\infty}{\frac{x-1}{x+1}}\right) + \frac{\pi}{4} - \arctan x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$
- $\lim_{x \to -1^+} \arctan\left(\underset{\to \frac{-2}{0^+} \to -\infty}{\frac{x-1}{x+1}}\right) + \frac{\pi}{4} - \arctan x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} =$

$\Bigg\}$ discontinuità di I specie

$\downarrow$

$f(x) \in C^{(0)}((-1,+\infty))$
$f(x) \in C^{(0)}((-\infty,-1))$

$\Downarrow$

$f(x) \in C^{(1)}((-1,+\infty))$
$f(x) \in C^{(1)}((-\infty,-1))$

Calcolo la derivata di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + 0 - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\cancel{(x+1)^2}}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} \cdot \frac{2}{\cancel{(x+1)^2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}_{1}x^2+\cancel{2}_{1}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x)$ è una funzione costante

Noto che: $f(0) = \arctan(-1) + \frac{\pi}{4} - \arctan(0)$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 0 = 0$$

$f(x)$ è costante ed è nulla nell'intervallo $(-1, +\infty)$, quindi l'equivalenza di partenza è vera.

Esercizio 2

Dimostrare $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \geq 0$ con:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3}, \qquad g(x) = \arctan x, \qquad h(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

Noto che: $f(0) = g(0) = h(0) = 0$

Osservo delle "funzioni differenza":

- $(g-f)(x) = \arctan x - x + \frac{x^3}{3}$

$$\Rightarrow (g-f)'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} + x^4}{1+x^2} = \frac{x^4}{1+x^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

Questa derivata ci dice che $(g-f)(x)$ è crescente per $x > 0$, quindi dalla differenza nulla in $x=0$, ne deriva che $g(x) - f(x) > 0$ per valori positivi di x.

- $(h-g)(x) =$

$$\Rightarrow (h-g)'(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \arctan x = 1 - x^2 + x^4 - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - \cancel{x^4} + \cancel{x^4} + x^8 - \cancel{1}}{1+x^2} = \frac{x^8}{1+x^2} > 0 \quad \forall x > 0$$

Si traggono le stesse conclusioni per $h(x) - g(x)$.

Per proprietà transitiva si può concludere: $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \geq 0$

Esercizio 3

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{k-4}{k^2+2}$$

Studio la convergenza assoluta:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| (-1)^k \frac{k-4}{k^2+2} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{k-4}{k^2+2} \right|$$

Osservo che: $\left| \frac{k-4}{k^2+2} \right| = \frac{|k-4|}{|k^2+2|} \sim \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$ per $k \to +\infty$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k}$ è una serie armonica divergente.

Per criterio del confronto asintotico, la serie di partenza diverge assolutamente.

Studio la convergenza semplice tramite il criterio di Leibniz:

- $\lim_{k \to +\infty} \frac{k-4}{k^2+2} = 0$
- per studiare la decrescita studio la derivata della funzione associata alla successione a_k:

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2+2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+2-2x(x-4)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^2+2-2x^2+8x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+8x+2}{(x^2+2)^2}$$

$$\frac{-x^2+8x+2}{(x^2+2)^2} > 0 \iff -x^2+8x+2 > 0$$
$$\iff x^2-8x-2 < 0$$

$$\Delta = 64+8 = 72 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm 6\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4-3\sqrt{2} < x < 4+3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow f'(x) < 0$ per $x \to +\infty$

$\Rightarrow f(x)$ è strettamente decrescente per $x \to +\infty$

Per criterio di Leibniz, la serie è semplicemente convergente.

Esercizio 4

$$f(x) = e^{x^5+10x}$$

$f(x)$ è composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R}$, quindi $f(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

$$f'(x) = (5x^4+10)\,e^{x^5+10x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è iniettiva.

$\Rightarrow f(x)$ è invertibile.

Osservo che:

$$f(x) = e^{x^5+10x} = 1 \iff x^5+10x = 0 \iff x(x^4+10) = 0 \iff x = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

Teorema sulla derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=f^{-1}(1)} = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

ESERCIZIO 5

a) $f(x) = e^{x^7+14x}$

$f(x)$ è composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R}$, quindi $f(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$.

$f'(x) = (7x^6+14)\,e^{x^7+14x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è iniettiva.

$\Rightarrow$ $f(x)$ è invertibile.

Osservo che:

$$f(x) = e^{x^7+14x} = 1 \iff x^7+14x = 0 \iff x(x^6+14) = 0 \iff x = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = 0$$

Teorema sulla derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=f^{-1}(1)} = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=0} = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

b) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2+1}$ $\quad$ $f(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, in quanto composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{12x^2(x^2+1) - 2x \cdot 4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{\cancel{12x^4} + 12x^2 - \cancel{12x^4}}{(x^2+1)^2} = \frac{12x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

In $x=0$ si ha $f'(x)=0$, quindi si ha solo un flesso a tangente orizzontale.

$\Rightarrow$ $f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è iniettiva.

$\Rightarrow$ $f(x)$ è invertibile.

$$\frac{4x^3}{x^2+1} = 2 \iff 4x^3 = 2x^2 + 2$$
$$\iff 2x^3 - x^2 - 1 = 0$$

polinomio divisibile per $(x-1)$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 - x^2 + 0x - 1 & x-1 \\ \hline
2x^3 - 2x^2 & 2x^2 + x + 1 \\ \hline
\quad x^2 + 0x - 1 & \\
\quad x^2 - x & \\ \hline
\qquad x - 1 & \\
\qquad x - 1 & \\ \hline
\qquad\quad / &
\end{array}$$

$$\iff (x-1)\underbrace{(2x^2+x+1)}_{\Delta = -7 < 0} = 0 \iff x-1=0 \iff x=1$$

$$\Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

Teorema sulla derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(2) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(2)} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=1} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3}$$

c

$f(x) = x^7 + x \qquad f(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$

$f'(x) = 7x^6 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è iniettiva.

$\Rightarrow f(x)$ è invertibile.

$x^7 + x = 0 \iff x(x^6+1) = 0 \iff x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$

Teorema sulla derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(0) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(0)} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=0} = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

d

$f(x) = x^{11} + 8x \qquad f(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R})$

$f'(x) = 11x^{10} + 8 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è iniettiva.

$\Rightarrow f(x)$ è invertibile.

$x^{11} + 8x = 9 \iff x = 1$ (facilmente osservabile) $\Rightarrow f(1) = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = 1$

Teorema sulla derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(9) = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(9)} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=1} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{19}$$

Esercizio 6

a $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 100$ $\qquad$ $\text{dom} f = \mathbb{R}$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

Studio il segno della derivata:

$-6x^2 + 6x + 12 \geq 0$

$x^2 - x - 2 \leq 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$

$-1 \leq x \leq 2$

$f'(x) \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x)$ è crescente $\iff -1 \leq x \leq 2$

Scelgo $\alpha = 2$.

b Stesso risultato del punto precedente, in quanto le funzioni differiscono solo di una costante.

Esercizio 7

$f(x) = x^{\sqrt{x}} = \exp\{\log(x^{\sqrt{x}})\} = \exp\{\sqrt{x}\log x\} = e^{\sqrt{x}\log x}$ $\qquad$ $\text{dom} f: (0, +\infty)$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}\log x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{\sqrt{x}\log x}\left(\frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}\log x}$$

Studio il segno della derivata:

$$\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}\log x} \geq 0 \iff \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} \geq 0$$

$$N(x) \geq 0 \iff \log x + 2 \geq 0 \iff \log x \geq -2 \iff x \geq \frac{1}{e^2}$$

$$D(x) > 0 \iff 2\sqrt{x} > 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{e^2}$$

$\Rightarrow f(x)$ è crescente $\iff x \geq \frac{1}{e^2} \quad \Rightarrow$ Scelgo $\boxed{\alpha = \frac{1}{e^2}}$

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} = 2^{\sqrt{2}} \iff x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^{\sqrt{2}} \Rightarrow f^{-1}(2^{\sqrt{2}}) = 2$$

Teorema sulla derivazione della funzione inversa:

$$(f^{-1})'(2^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=f^{-1}(2^{\sqrt{2}})} = \frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=2} = \frac{1}{f'(2)} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{(\log 2 + 2)2^{\sqrt{2}}}}$$

Esercizio 8

$$f(x) = x^{\left(\frac{1}{x}-1\right)} = x^{\frac{1-x}{x}} = \exp\left\{\frac{1-x}{x}\log x\right\} = e^{\frac{1-x}{x}\log x} \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty)$$

Calcolo i limiti a 0^+ e a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \exp\left\{\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\to -1}\underbrace{\log x}_{\to +\infty}\right\} = e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left\{\underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\to +\infty}\underbrace{\log x}_{\to -\infty}\right\} = e^{-\infty} = 0^+$$

Studio il segno della derivata:

$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{x}\log x}\left(\frac{\cancel{-x}-1+\cancel{x}}{x^2}\log x + \frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

$$= e^{\frac{1-x}{x}\log x}\left(\frac{1-x-\log x}{x^2}\right)$$

$$e^{\frac{1-x}{x}\log x}\left(\frac{1-x-\log x}{x^2}\right) > 0 \iff \frac{1-x-\log x}{x^2} > 0$$

$$\iff \log x < 1-x$$

$$\iff x < 1$$

Non riesco a risolvere questa disequazione. Mi accorgo che i membri sono uguali per $x=0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ è crescente per $x<1$. $\Rightarrow$ Presenza di un massimo in $x=1$

$$f(1) = 1^{\left(\frac{1}{1}-1\right)} = 1^0 = 1$$

Dai limiti e dallo studio della derivata noto che la funzione cresce da 0 (valore che non assume) fino ad 1 per poi decrescere asintoticamente fino a 0 per $x \to +\infty$.

$$\Rightarrow \quad f((0,+\infty)) = (0,1]$$

Esercizio 9

$e^x > x^2+1$

$e^x - x^2 - 1 > 0$ Considero la funzione $f(x) = e^x - x^2 - 1$

Studio il segno della derivata della funzione:

$f(x) = e^x - x^2 - 1$ Non riesco a studiare il segno.

$f'(x) = e^x - 2x$ Non riesco a studiare il segno.

$f''(x) = e^x - 2 > 0 \iff x > \ln 2 \Rightarrow f'(x)$ è crescente per $x > \ln 2$ e decrescente per $x < \ln 2$

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x - 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x - 2x = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \underbrace{\frac{2x}{e^x}}_{\to 0}\right) = e^{+\infty} = +\infty$$

$f'(x)$ ha un minimo in $x = \ln 2$

$\longrightarrow f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$

Si evince che $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

$e^x - x^2 - 1 = 0$ in $x = 0 \Rightarrow$ per $x > 0$: $e^x - x^2 - 1 > 0$

$e^x > x^2 + 1$

Esercizio 10

Ricordo che $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

per $x \to 0$

a

$$f_1(x) = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \boxed{(-1)^n x^n} \quad \text{per } x \to 0$$

$$f_2(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3!}x^3 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\cdot\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}\cdot\frac{x^4}{4!} + \frac{105}{32}\cdot\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1\cdot 3}{2^3}\cdot\frac{x^3}{3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\cdot\frac{x^4}{4!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5}\cdot\frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \boxed{1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{2^{n+2}(n+2)!}} \quad \text{per } x \to 0$$

$$f_3(x) = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + \frac{(-2)(-3)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 + \dots$$

$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot n x^n}$$

$$f_4(x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + \frac{2\cdot 1}{2!}x^2 + \underbrace{\frac{2\cdot 1\cdot 0}{3!}x^3 + \frac{2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{4!}}_{\text{Termini nulli}}$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

Non si calcola un polinomio di Taylor in questi casi per $\alpha \geq 0$

b

$$f(x) = (a+x)^\alpha = \left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]^\alpha = a^\alpha\left(1+\frac{x}{a}\right)^\alpha =$$

$$= a^\alpha\left(1 + \alpha\frac{x}{a} + \alpha(\alpha-1)\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots\right) = \boxed{a^\alpha + a^\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}(\alpha-k)\left(\frac{x}{a}\right)^n} \quad \text{per } x \to 0$$

ⓒ $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$ per $x\to 0$

$f(x) = (1-x)^\alpha = 1-\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + (-1)^n\binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$ per $x\to 0$

Esercizio 11

ⓐ $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(\sqrt{x})-2+\sqrt{x}}{x^2+x^3}$

*) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow \cos(\sqrt{x}) = 1-\frac{x}{2}+o(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)-2+\sqrt{x}}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{2}-x+o(x)-\cancel{2}+\sqrt{x}}{x^2+x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x^2+o(x^2)} = +\infty$$

ⓑ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2\sin x}$

*) $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per $x\to 0$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\cancel{x}}{x^2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3-\frac{x^5}{6}+o(x^5)} = -\frac{1}{6}$$

ⓒ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3-x^2+\log(1+x^2)}$

*) $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$

*) $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

*) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$

$\Rightarrow \log(1+x^2) = x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\cancel{x}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4)} = \frac{1}{2}$$

d

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\cos x-e^x}{\log(1+x)-x}$$

*) $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per $x\to 0$

*) $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$

*) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$

*) $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+\cancel{1}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{1}-\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\cancel{x}-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 2$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{x}{x^2+1}}-x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

*) $e^{\frac{x}{x^2+1}} = 1+\frac{x}{x^2+1}+o\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

$= 1+\frac{x}{x^2+1}+o\left(\frac{1}{x}\right)$

*) $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(1+\frac{x}{x^2+1}-x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x\left(\cancel{1}+\frac{x}{x^2+1}-\cancel{1}+\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

8

$$\lim_{x\to1^+}\left[\cos(x-1)+\sin(x-1)\right]^{\frac{1}{\arctan^2(x-1)}}$$

cambio di variabile:

$z = x-1 \qquad \lim_{x\to1^+} z = 0^+$

$\Rightarrow z\to0^+$

$$\lim_{z\to0^+}(\cos z+\sin z)^{\frac{1}{\arctan^2 z}} =$$

$$= \lim_{z\to0^+}\exp\left\{\frac{\log(\sin z+\cos z)}{\arctan^2 z}\right\}$$

*) $\sin z = z+o(z)$ per $z\to0^+$

*) $\cos z = 1-\frac{z^2}{2}+o(z^2)$ per $z\to0^+$

$$\Rightarrow \log(\sin z+\cos z) = \log\left(z+o(z)+1-\frac{z^2}{2}+o(z^2)\right) =$$

$$= \log(1+z+o(z)) \quad \text{per } z\to0^+$$

*) $\log(1+z) = z+o(z)$ per $z\to0^+$

*) $\arctan z = z+o(z)$ per $z\to0^+$

$$\Rightarrow \arctan^2 z = (z+o(z))^2 = z^2+2z\,o(z)+o(z^2) = z^2+o(z^2)$$

per $z\to0$

$$= \lim_{z\to0^+}\exp\left\{\frac{z+o(z)}{z^2+o(z^2)}\right\} = e^{+\infty} = +\infty$$

Esercizio 12

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+(x^2+x)) - \log(1+x) - \alpha x^2}{\sinh(e^{-1/x}) + x^2}$$

NUMERATORE: *) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

*) $\log(1+(x^2+x)) = x^2+x - \frac{1}{2}(x^2+x)^2 + o((x^2+x)^2)$

$= x + x^2 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$

$= x + \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

$\Rightarrow \log(1+(x^2+x)) - \log(1+x) - \alpha x^2 =$

$= \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \alpha x^2 =$

$= (1-\alpha)x^2 + o(x^2)$

DENOMINATORE: *) $e^{-\frac{1}{x}} \to 0$ per $x \to 0$

$\Rightarrow \sinh(e^{-\frac{1}{x}}) = e^{-\frac{1}{x}} + o(e^{-\frac{1}{x}}) = o(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{R}$

→ Se si ha $a^{-\frac{1}{x}}$, questa funzione presenta un ordine di infinitesimo maggiore di qualsiasi funzione polinomiale x^n con $n \in \mathbb{R}$:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$ cambio di variabile: $z = \frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to 0^+} z = +\infty$

$\Rightarrow z \to +\infty$

$\lim_{z\to+\infty} \frac{a^{-z}}{\left(\frac{1}{z}\right)^n} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^n}{a^z} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a^{-\frac{1}{x}} = o(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sinh(e^{-\frac{1}{x}}) + x^2 = o(x^n) + x^2 = (\text{scelgo } n=2) = x^2 + o(x^2)$

Risolvo: $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = 1-\alpha$

ESERCIZIO 13

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\arctan x}-1}{\sin^2(2x)+\log(1+\sqrt{2}x)+ax}$$

NUMERATORE: $(\cos x)^{\arctan x} = \exp\{\arctan x \cdot \log(\cos x)\}$

$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$\log\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$

$\arctan x = x+o(x)$ per $x\to 0$

$= \exp\left\{(x+o(x))\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)\right\}$

$= \exp\left\{-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{8}+o(x^5)+o(x^3)+o(x^5)+o(x^5)\right\}$

$= \exp\left\{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right\} = 1-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow (\cos x)^{\arctan x}-1 = \cancel{1}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)-\cancel{1} = -\frac{x^3}{2}+o(x^3)$

DENOMINATORE: *) $\sin(2x) = 2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o((2x)^3) = 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$ per $x\to 0$

*) $\log(1+\sqrt{2}x) = \sqrt{2}x-\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}+o((\sqrt{2}x)^2)$

$= \sqrt{2}x-x^2+o(x^2)$ per $x\to 0$

$$\Rightarrow \sin^2(2x) + \log(1+\sqrt{2}x) + ax =$$

$$= \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2 + \sqrt{2}x - x^2 + o(x^2) + ax =$$

$$= 4x^2 + \frac{16}{9}x^6 + o(x^6) + o(x^4) + o(x^6) - \frac{8}{3}x^4 + \sqrt{2}x - x^2 + o(x^2) + ax =$$

$$= (a+\sqrt{2})x + 3x^2 + o(x^2)$$

Risolvo il limite originale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{(a+\sqrt{2})x + 3x^2 + o(x^2)} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Esercizio 14

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\sin n}{n^3}}{n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right)}$$

NUMERATORE: *) $\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$ per $n \to +\infty$ $\left(\frac{1}{n} \to 0^+\right)$

$$\Rightarrow 1 - n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) + \frac{\sin n}{n^3} =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\sin n}{n^3} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

DENOMINATORE: *) $\arctan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ per $n \to +\infty$ $\left(\frac{1}{n} \to 0^+\right)$

$$\Rightarrow n^\alpha \arctan\left(\frac{1}{n}\right) = n^\alpha\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{\alpha-1} + o(n^{\alpha-1}) = \frac{1}{n^{1-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)$$

Risolvo il limite di partenza:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^{1-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}\left(1+o(1)\right)}{\frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1+o(1)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n^{\alpha+1}} \cdot \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha<-1 \\ \frac{1}{2} & \text{per } \alpha=-1 \\ 0 & \text{per } \alpha>-1 \end{cases}$$

Esercizio 15

a

$$f(x)=e^x = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} \qquad \text{per } x\to x_0$$

$$T_{n,1} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^{(k)}(1)\frac{(x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)(1)\frac{(x-1)^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e\,\frac{(x-1)^k}{k!} = e\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-1)^k}{k!}$$

b

$$f(x)=\sin x$$

$$T_{n,1} = \sum_{k=0}^{n} (\sin x)^{(k)}(1)\cdot\frac{(x-1)^k}{k!}$$

$$= \sin 1 + \cos 1\cdot(x-1) - \sin 1\,\frac{(x-1)^2}{2!} - \cos 1\cdot\frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$$

ⓒ $f(x) = \log x$

$$T_{n,1} = \sum_{k=0}^{n} (\log x)^{(k)}(1) \cdot \frac{(x-1)^k}{k!}$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} - \frac{6(x-1)^4}{4!} + \dots$$

$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

ESERCIZIO 16

ⓐ $f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f^{(1)}(x) = \cos x \, e^{\sin x} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 1 \cdot e^0 = 1$

$f^{(2)}(x) = -\sin x \, e^{\sin x} + \cos^2 x \, e^{\sin x} = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x) \Rightarrow f^{(2)}(0) = e^0(1-0) = 1$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \, e^{\sin x} - \sin x \cos x \, e^{\sin x} - 2\cos x \sin x \, e^{\sin x} + \cos^3 x \, e^{\sin x}$

$\overset{!}{=} e^{\sin x} \cos x \, (\cos^2 x - \sin x - 2\sin x - 1)$

$\Rightarrow f^{(3)}(0) = e^0 \cdot 1 \cdot (1 - 0 - 0 - 1) = 0$

$T_{3,0}(x) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0$

ⓐ $f(x) = \log(1 + \sin^2 x) \Rightarrow f(0) = \log 1 = 0$

$f^{(1)}(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} = \frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2 x} \Rightarrow f^{(1)}(0) = 0$

$$f^{(2)}(x) = \frac{2\cos(2x)(1+\sin^2 x) - \sin(2x)\cdot 2\sin x\cos x}{(1+\sin^2 x)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = 2$$

$$= \frac{2\cos(2x)(1+\sin^2 x) - 2\sin^2(2x)}{(1+\sin^2 x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{\left[-4\sin(2x)(1+\sin^2 x) + 2\cos(2x)\cdot 2\sin x\cos x - 4\sin(2x)\cos(2x)\cdot 2\right](1+\sin^2 x)^2}{(1+\sin^2 x)^2} +$$

$$+ \frac{-2\sin x\cos x\cdot\left[2\cos(2x)(1+\sin^2 x) - 2\sin^2(2x)\right]}{(1+\sin^2 x)^2} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 0$$

$$T_{3,0}(x) = \sum_{k=0}^{3} f^{(k)}(0)\cdot\frac{x^h}{k!} = 2\cdot\frac{x^2}{2!} = x^2 \Rightarrow \log(1+\sin^2 x) = x^2 + o(x^3) \text{ per } x\to 0$$

PARTE b

Le parti in viola non sono necessarie, ma sono utili se volete disegnare un bel grafico!

STUDIO 1_A

$f(x) = |\arctan(\log x)|$

DOMINIO: $x > 0 \Rightarrow \text{dom} f = (0, +\infty)$

SIMMETRIE: Il dominio non è simmetrico, quindi la funzione non è né pari né dispari.

INTERSEZIONI: con l'asse x $\rightarrow$ $|\arctan(\log x)| = 0 \iff \arctan(\log x) = 0$
$\iff \log x = 0$
$\iff x = 1$

con l'asse y non ce ne sono, in quanto $0 \notin \text{dom} f$.

SEGNO: $|\arctan(\log x)| \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \neq 1$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to 0^+} |\arctan(\underbrace{\log x}_{\to -\infty})| = \left|-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} |\arctan(\underbrace{\log x}_{\to +\infty})| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow \text{asintoto orizzontale } y = \frac{\pi}{2} \text{ per } x \to +\infty$$

CONTINUITÀ: La funzione è composizione di funzione, quindi vale $f(x) \in C^{(0)}(\text{dom} f)$.

DERIVATA PRIMA, DERIVABILITÀ, INTERVALLI DI CRESCITA / DECRESCITA, PUNTI STAZIONARI:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\log x) & \text{se } x \geq 1 \\ -\arctan(\log x) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\log^2 x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\,(1+\log^2 x)} & \text{se } x>1 \\[2ex] -\dfrac{1}{1+\log^2 x} \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x\,(1+\log^2 x)} & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

Verifico la derivabilità in $x=1$:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f'_+(1) = 1 \\ \bullet\ f'_-(1) = -1 \end{array}\right\} \text{punto angoloso in } x=1.$$

Definisco le due rette tangenti a destra e a sinistra:

DESTRA: $y = f'_+(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \iff y = x-1$

SINISTRA: $y = f'_-(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \iff y = 1-x$

Per $x \neq 1 \wedge x \in \text{dom} f$, la funzione è composizione di funzioni derivabili, quindi, $f(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

Per $x>1$: $\dfrac{1}{x\,\cancel{(1+\log^2 x)}} > 0 \iff \dfrac{1}{x} > 0 \iff x>0 \implies f'(x)>0$ se $x>1$.

Per $0<x<1$: $-\dfrac{1}{x\,\cancel{(1+\log^2 x)}} > 0 \iff -\dfrac{1}{x} > 0 \iff x<0 \implies f'(x)<0$ se $0<x<1$

	0		1	
$f'(x)$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ è decrescente se } 0<x<1 \\ f(x) \text{ è crescente se } x>1 \end{array}\right.$$

Per $x=1$, la funzione presenta un punto di minimo. Il minimo è $(1,0)$.

Derivata in $x=0$: $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x+x\log^2 x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-1}{\frac{1}{y}+\frac{(-\log y)^2}{y}} = -\infty$

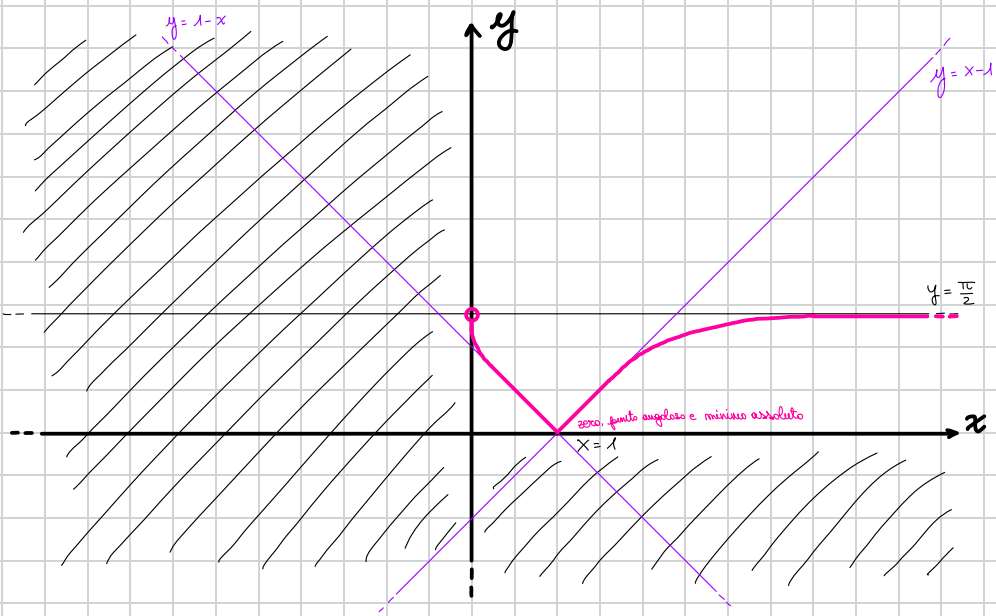
cambio di variabile: $y=\frac{1}{x} \Rightarrow y\to+\infty$

DERIVATA SECONDA, FLESSI, CONCAVITÀ E CONVESSITÀ:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-\left(1+\log^2 x + \cancel{x}\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)}{x^2(1+\log^2 x)^2} = -\frac{(\log x+1)^2}{x^2(1+\log^2 x)^2} & \text{se } x>1 \\ \frac{(\log x+1)^2}{x^2(1+\log^2 x)^2} & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

Evidentemente: $\begin{cases} f''(x)>0 & \text{se } 0<x<1 \\ f''(x)<0 & \text{se } x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ è convessa se } 0<x<1 \\ f(x) \text{ è concava se } x>1 \end{cases}$

$x=1$ non è punto di derivabilità, quindi non presenta un flesso.



STUDIO 1_B

$$f(x) = \log\left(\frac{x+5}{|x-5|}\right) - \frac{x+5}{|x-5|}$$

DOMINIO: $\begin{cases} x \neq 5 \\ \frac{x+5}{|x-5|} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 5 \\ x+5 > 0 \Rightarrow x > -5 \end{cases}$ $\quad \text{dom} f = (-5, +\infty) \setminus \{5\}$

SIMMETRIE: La funzione non può essere né pari né dispari, in quanto il dominio non è simmetrico rispetto a 0.

INTERSEZIONI: con l'asse y $\rightarrow$ $y = \log\left(\frac{5}{|-5|}\right) - \frac{5}{|-5|} = \log 1 - 1 = -1$

Studio brevemente l'andamento della funzione $f(z) = \log z - z$ (dom: $z > 0$)

$$f'(z) = \frac{1}{z} - 1 = \frac{1-z}{z} \geq 0 \qquad \begin{array}{l} 1 - z \geq 0 \iff z \leq 1 \\ z > 0 \iff z > 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(z) > 0 & \text{se } 0 < z \leq 1 \\ f'(z) < 0 & \text{se } z > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ è crescente se } 0 < z < 1 \\ f(x) \text{ vede un massimo in } z = 1 \\ f(x) \text{ è decrescente se } z > 1 \end{cases}$$

$f(1) = \log 1 - 1 = -1 \rightsquigarrow$ Il massimo della funzione è negativo e quindi non ci sono intersezioni con l'asse x.

SEGNO: Dallo studio di $f(z) = \log z - z$ si evince che $f(x) < 0 \ \forall x \in \text{dom} f$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to -5^+} \left(\log\left(\frac{x+5}{|x-5|}\right) - \frac{x+5}{|x-5|} \right) = \log(0^+) - 0 = -\infty \rightarrow$$ asintoto verticale destro per $x \to -5^+$

$$\lim_{x\to 5^-}\left(\log\left(\frac{x+5}{|x-5|}\right)-\frac{x+5}{|x-5|}\right)=+\infty-\infty \quad \text{forma indeterminata}$$

cambio di variabile: $y=\frac{x+5}{|x-5|}$ $\quad \lim_{x\to 5^-} y=+\infty$

$$\lim_{y\to+\infty}(\log y-y)=\lim_{y\to+\infty} y\left(\frac{\log y}{y}-1\right)=-\infty$$

$\to 0$ per gerarchia

Analogamente:

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\log\left(\frac{x+5}{|x-5|}\right)-\frac{x+5}{|x-5|}\right)=-\infty$$

$\Rightarrow$ Asintoto verticale per $x\to 5$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\log\left(\frac{x+5}{|x-5|}\right)-\frac{x+5}{|x-5|}\right)=\log 1-1=-1 \to$$ asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ (destro).

CONTINUITÀ: La funzione è composizione di funzione, quindi vale $f(x)\in C^{(0)}(\mathrm{dom} f)$.

DERIVATA PRIMA, DERIVABILITÀ, INTERVALLI DI CRESCITA / DECRESCITA, PUNTI STAZIONARI:

Considero la funzione come composizione:

$$f(x)=f[h(x)]=\log[h(x)]-h(x) \qquad \text{con } h(x)=\frac{x+5}{|x-5|}$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{h(x)}-1\right)\cdot h'(x)=\frac{1-h(x)}{h(x)}\cdot h'(x)$$

$$=\frac{1-\frac{x+5}{|x-5|}}{\frac{x+5}{|x-5|}}\cdot\frac{|x-5|-\mathrm{sgn}(x-5)\cdot(x+5)}{|x-5|^2}$$

$$=\frac{|x-5|-x-5}{x+5}\cdot\frac{|x-5|-\mathrm{sgn}(x-5)\cdot(x+5)}{|x-5|^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } x>5 : & f'(x) = \dfrac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-5}{x+5} \cdot \dfrac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-5}{(x-5)^2} = \dfrac{100}{(x+5)(x-5)^2} \\[2ex] \text{se } -5<x<5 : & f'(x) = \dfrac{\cancel{5}-x-x-\cancel{5}}{x+5} \cdot \dfrac{5-\cancel{x}+\cancel{x}+5}{(5-x)^2} = -20\,\dfrac{x}{(x+5)(x-5)^2} \end{cases}$$

Per $x \in \mathrm{dom} f$, la funzione è composizione di funzioni derivabili, quindi $f(x) \in C^{(1)}(\mathrm{dom} f)$.

Studio per $x>5$:

$$f'(x) \geq 0 : \quad \frac{\cancel{100}^{\,1}}{(x+5)\underbrace{\cancel{(x-5)^2}}_{\text{dato il dominio posso eliminarlo}}} \geq 0 \iff \frac{1}{x+5} \geq 0 \iff x>-5 \Rightarrow f'(x)>0 \text{ se } x>5$$

Studio per $-5<x<5$:

$$f'(x) \geq 0 : \quad \oplus\ \cancel{20}^{\,1}\ \frac{x}{(x+5)\underbrace{\cancel{(x-5)^2}}_{\text{idem}}} \geq 0 \iff \frac{x}{x+5} \leq 0$$

$x \geq 0$

$x+5>0 \iff x>-5$

	-5		0	
$-$		$-$		$+$
$-$		$+$		$+$
$+$		$\ominus$		$+$

$\iff -5 < x \leq 0$

$\Rightarrow f'(x)>0$ se $-5<x\leq 0$

	-5		0		5	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

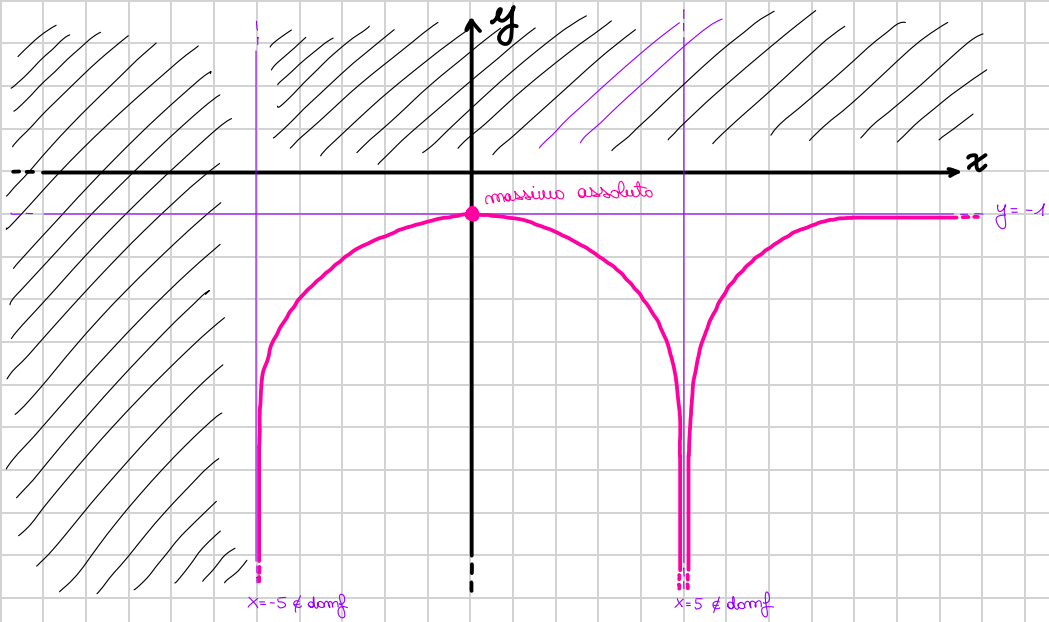
$$\begin{cases} f(x) \text{ è crescente se } -5<x\leq 0 \vee x>5 \\ f(x) \text{ è decrescente se } 0<x<5 \end{cases}$$

Punto di massimo in $x=0$: massimo $(0,-1)$ $\rightarrow$ Dato l'asintoto $y=-1$, è anche massimo assoluto.

DERIVATA SECONDA, FLESSI, CONCAVITÀ E CONVESSITÀ:

Mi risparmio il calcolo della derivata seconda, in quanto non succede nulla di interessante:

$f''(x) < 0 \quad \forall x \in \text{dom} f \Rightarrow f(x)$ è concava $\forall x \in \text{dom} f$



STUDIO 1_C

$$f(x) = \log(e^{2x} - 2e^x - 3) - (e^{2x} - 2e^x - 3)$$

Se compare una variabile z, è sottointeso il cambio di variabile $z = e^{2x} - 2e^x - 3$.

DOMINIO: $e^{2x} - 2e^x - 3 > 0$ pongo $t = e^x$

$$t^2 - 2t - 3 > 0 \iff (t-3)(t+1) > 0$$

$$\iff t < -1 \vee t > 3$$

$$\iff \underbrace{e^x < -1}_{\text{MAI}} \vee e^x > 3$$

$\ln 3 \sim 1{,}099$

$$\iff e^x > 3 \iff x > \ln 3 \Rightarrow \text{dom} f = (\ln 3, +\infty)$$

SIMMETRIE: La funzione non può essere né pari né dispari, in quanto il dominio non è simmetrico rispetto a 0.

INTERSEZIONI: con $y \rightarrow 0 \notin \text{dom} f$, quindi non c'è.

con $x \rightarrow$ nessuna (vedi STUDIO 1_B)

SEGNO: $f(x) < 0 \ \forall x \in \text{dom} f$ (vedi STUDIO 1_B)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to \ln 3^+} \ln(e^{2x} - 2e^x - 3) - (e^{2x} - 2e^x - 3)$$

cambio di variabile:

$$\lim_{x \to \ln 3^+} z = e^{2\ln 3} - 2e^{\ln 3} - 3 \overset{!}{=} 9^+ - 6^+ - 3 = 0^+$$

$$\lim_{z \to 0^+} \ln z - z = -\infty \longrightarrow \text{asintoto verticale per } x \to \ln 3^+$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(e^{2x}) - e^{2x} = \lim_{x \to +\infty} 2x - e^{2x} = \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(\cancel{\frac{2x}{e^{2x}}} - 1\right) = -\infty$$

$\rightarrow 0$ per gerarchia

$e^{2x} - 2e^x - 3 \sim e^{2x}$ per $x \to +\infty$

Potrebbe esserci un asintoto obliquo, cerco di definirlo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = (\text{per asintoticità}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - e^{2x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{e^{2x}}{x} = -\infty$$

Non c'è asintoto obliquo.

CONTINUITÀ: La funzione è composizione di funzione, quindi vale $f(x) \in C^{(0)}(\mathrm{dom} f)$.

DERIVATA PRIMA, DERIVABILITÀ, INTERVALLI DI CRESCITA / DECRESCITA, PUNTI STAZIONARI:

Considero la funzione come composizione (vedi STUDIO 1_B).

$$f'(x) = \frac{1-h(x)}{h(x)} \cdot h'(x)$$

$$= \frac{1-e^{2x}+2e^{x}+3}{e^{2x}-2e^{x}-3} \cdot \left(2e^{2x}-2e^{x}\right)$$

$$= -\frac{e^{2x}-2e^{x}-4}{(e^{x}-3)(e^{x}+1)} \cdot 2e^{x}(e^{x}-1) = -\frac{2e^{x}(e^{x}-1)(e^{x}-1-\sqrt{5})(e^{x}-1+\sqrt{5})}{(e^{x}-3)(e^{x}+1)}$$

$$e^{x}_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm 5$$

$$f'(x) \geq 0 \iff -\frac{2e^{x}(e^{x}-1)(e^{x}-1-\sqrt{5})\cancel{(e^{x}-1+\sqrt{5})}}{(e^{x}-3)\cancel{(e^{x}+1)}} \geq 0$$

$$\iff \frac{(e^{x}-1)(e^{x}-1-\sqrt{5})}{(e^{x}-3)} \leq 0$$

$e^{x}-1 \geq 0 \iff e^{x} \geq 1 \iff x \geq 0$

$e^{x}-1-\sqrt{5} \geq 0 \iff e^{x} \geq 1+\sqrt{5} \iff x \geq \ln(1+\sqrt{5})$

$e^{x}-3 > 0 \iff e^{x} > 3 \iff x > \ln 3$

		0		$\ln 3$		$\ln(1+\sqrt{5})$	
	$-$		$+$		$+$		$+$
	$-$		$-$		$-$		$+$
	$-$		$-$		$+$		$+$
$f'(x)$:	$-$		$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ se $\ln 3 < x \leq \ln(1+\sqrt{5})$

	$\ln 3$		$\ln(1+\sqrt{5})$	
$f'(x)$	$\nexists$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ è crescente se } \ln 3 < x < \ln(1+\sqrt{5}) \\ f(x) \text{ è decrescente se } x > \ln(1+\sqrt{5}) \end{cases}$

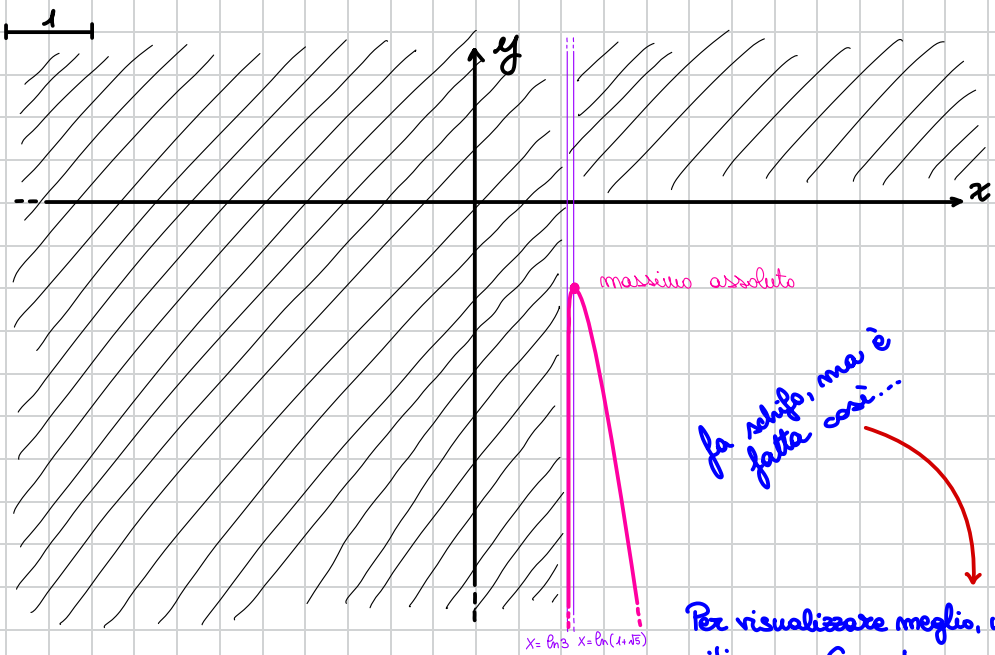
$f(x)$ presenta un massimo in $x = \ln(1+\sqrt{5}) \sim 1,174$ che è anche assoluto.

$$f(\ln(1+\sqrt{5})) = \ln\left(e^{2\ln(1+\sqrt{5})} - 2e^{\ln(1+\sqrt{5})} - 3\right) - \left(e^{2\ln(1+\sqrt{5})} - 2e^{\ln(1+\sqrt{5})} - 3\right)$$

$$= \ln\left[(1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5}) - 3\right] - \left((1+\sqrt{5})^2 - 2(1+\sqrt{5}) - 3\right)$$

$$= \ln\left(1+\cancel{5}+\cancel{2\sqrt{5}}-\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{5}}-\cancel{3}\right) - \left(1+\cancel{2\sqrt{5}}+\cancel{5}-\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{5}}-\cancel{3}\right)$$

$$= \ln(1) - 1 = -1$$



fa schifo, ma è fatta così...

Per visualizzare meglio, usate siti come Geogebra o Wolfram Alpha (molto utile).

STUDIO 1_D

$$f(x) = (1-|x|)\, e^{\frac{1}{2x+2}}$$

DOMINIO: $2x+2 \neq 0 \iff x \neq -1 \Rightarrow \mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

SIMMETRIE: La funzione non può essere né pari né dispari, in quanto il dominio non è simmetrico rispetto a 0.

INTERSEZIONI: con y $\longrightarrow$ $f(0) = 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

con x $\longrightarrow$ $f(x) = 0 \iff (1-|x|)\, \cancel{e^{\frac{1}{2x+2}}} = 0$

$\iff 1-|x| = 0 \iff x = \pm 1$

per $\mathrm{dom} f$: $x = 1$

SEGNO: $f(x) > 0 \iff (1-|x|)\, \cancel{e^{\frac{1}{2x+2}}} > 0 \iff 1-|x| > 0 \iff |x| < 1 \iff -1 < x < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ f(x) < 0 & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (1-|x|)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = \lim_{x \to -\infty} (1+x)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = -\infty$$

Provo a definire l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{1+x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2x+2}}}_{\to 1} = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} (1+x)\, e^{\frac{1}{2x+2}} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2x+2}} + x\left(e^{\frac{1}{2x+2}} - 1\right)$$

cambio di variabile: $y = \frac{1}{2x+2}$ $\iff x = \frac{1}{2y} - 1$ $\quad \lim_{x\to-\infty} y = 0^-$

$$= \lim_{y\to0^-} e^{y} + \left(\frac{1}{2y} - 1\right)\left(e^{y} - 1\right)$$

$$= \lim_{y\to0^-} \underbrace{e^{y}}_{\to 1} + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{e^{y}-1}{y}}_{\to 1} + 1 - \underbrace{e^{y}}_{\to 1} = \frac{3}{2}$$

limite notevole

Asintoto obliquo $y = x + \frac{3}{2}$ per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-|x|)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = \lim_{x\to+\infty} (1-x)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = -\infty$$

Provo a definire l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\to -1} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2x+2}}}_{\to 1} = -1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} (1-x)\, e^{\frac{1}{2x+2}} + x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{2x+2}} - x\left(e^{\frac{1}{2x+2}} - 1\right)$$

stesso cambio di variabile $= \lim_{y\to0^-} \underbrace{e^{y}}_{\to 1} - \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{e^{y}-1}{y}}_{\to 1} - 1 + \underbrace{e^{y}}_{\to 1} = \frac{1}{2}$

limite notevole

Asintoto obliquo $y = -x + \frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} (1-|x|)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = \lim_{x\to-1^-} (1+x)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = 0$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} (1-|x|)\, e^{\frac{1}{2x+2}} = \lim_{x\to-1^+} (1+x)\, e^{\frac{1}{2x+2}}$$

cambio di variabile $y = \frac{1}{1+x}$, $\lim_{x\to-1^+} y = +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y/2}}{y} = +\infty$$ per gerarchia $\to$ Asintoto verticale per $x \to -1^+$

CONTINUITÀ: La funzione è composizione di funzione, quindi vale $f(x) \in C^{(0)}(\mathrm{dom} f)$.

DERIVATA PRIMA, DERIVABILITÀ, INTERVALLI DI CRESCITA / DECRESCITA, PUNTI STAZIONARI:

$$f(x) = \begin{cases} (1-x)e^{\frac{1}{2x+2}} & \text{se } x \geq 0 \\ (1+x)e^{\frac{1}{2x+2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{2x+2}} + (1-x)e^{\frac{1}{2x+2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}(x+1)^2}\right) = -\frac{2x^2+3x+3}{2(x+1)^2} e^{\frac{1}{2x+2}} & \text{se } x > 0 \\ e^{\frac{1}{2x+2}} + \cancel{(1+x)} e^{\frac{1}{2x+2}} \cdot \left(-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}(x+1)^{\cancel{2}}}\right) = \frac{2x+1}{2(x+1)} e^{\frac{1}{2x+2}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per $x \in \mathrm{dom} f \setminus \{0\}$, la funzione è composizione di funzioni derivabili.
Per $x=0$ studio la derivabilità:

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0) = -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} = -\frac{3\sqrt{e}}{2} \\ f'_-(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{punto angoloso per } x=0 \quad (0, \sqrt{e})$$

Trovo le rette tangenti:

DESTRA: $y = f'_+(0)\cdot(x-0) + f(0) \iff y = -\frac{3}{2}\sqrt{e}\,x + \sqrt{e}$

SINISTRA: $y = f'_-(0)\cdot(x-0) + f(0) \iff y = \sqrt{e}\,x + \sqrt{e}$

Studio il segno della derivata per $x > 0$:

$$-\frac{2x^2-3x-3}{\cancel{2}(x+1)^2} \cancel{e^{\frac{1}{2x+2}}} \geq 0 \iff 2x^2+3x+3 \leq 0$$

$\Rightarrow$ MAI

$$\Delta = 9-24 < 0$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x > 0$

Studio il segno della derivata per $x < 0 \wedge x \neq -1$:

$$\frac{2x+1}{\cancel{2}(x+1)} e^{\frac{1}{2x+2}} \geq 0 \iff \frac{2x+1}{x+1} \geq 0$$

$2x+1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

$x+1 > 0 \iff x > -1$

$\Rightarrow x < -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}$

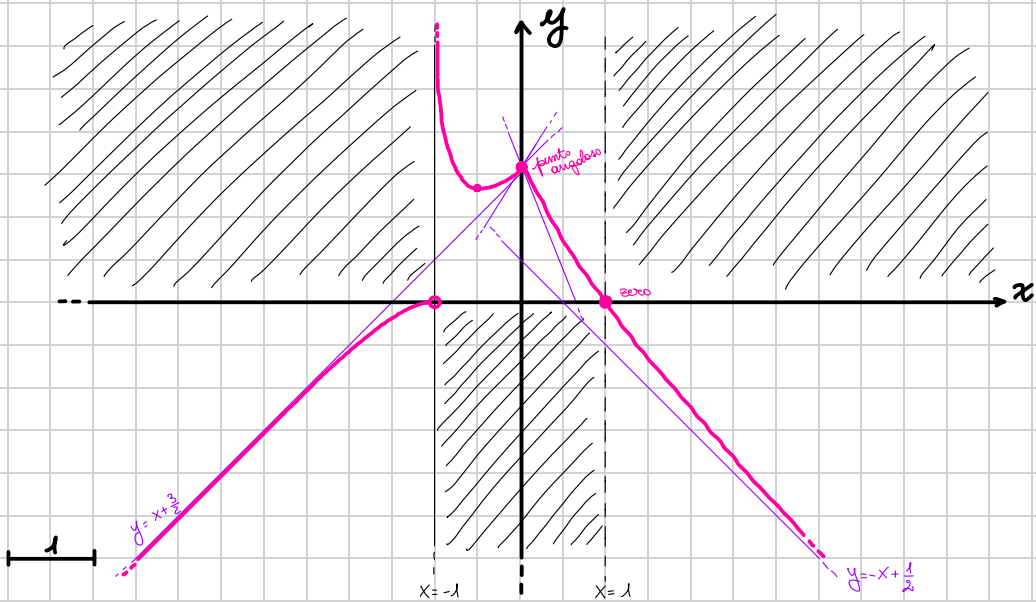
		-1		$-\frac{1}{2}$		0	
$f'(x)$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ è crescente se } x < -1 \vee -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ f(x) \text{ è decrescente se } -1 < x \leq \frac{1}{2} \vee x > 0 \end{cases}$

La funzione presenta un punto di minimo relativo in $x = -\frac{1}{2}$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{-1+2}} = \frac{e}{2} \Rightarrow \text{minimo relativo } \left(-\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$$

Dall'andamento, si nota che il punto angoloso $(0, \sqrt{e})$ è un punto di massimo relativo.



STUDIO 1_E

$$f(x) = |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}}$$

DOMINIO: $|x+3| \neq 0 \iff x \neq -3 \implies \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

SIMMETRIE: La funzione non può essere né pari né dispari, in quanto il dominio non è simmetrico rispetto a 0.

INTERSEZIONI: con y $\longrightarrow$ $f(0) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

SEGNO: $f(x) \geq 0 \iff |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom} f$

$x = -1$ è zero della funzione.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{-(x+1)}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{x+3}}}_{\to 1} = +\infty$$

Provo a definire l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{-\frac{x+1}{x}}_{\to -1} \underbrace{e^{\frac{1}{x+3}}}_{\to 1} = -1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -(x+1)\, e^{\frac{1}{x+3}} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -e^{\frac{1}{x+3}} - x\left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -e^{\frac{1}{x+3}} - (x+3-3)\left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -e^{\frac{1}{x+3}} - (x+3)\left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\right) + 3\left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-e^{\frac{1}{x+3}}}_{\to -1} - \underbrace{\frac{\left(e^{\frac{1}{x+3}}-1\right)}{\frac{1}{x+3}}}_{\to -1} + \underbrace{3\left(e^{\frac{1}{x+3}}-1\right)}_{\to 0} = -2$$

limite notevole

Asintoto obliquo $y=-x-2$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+1)}_{\to+\infty}\, \underbrace{e^{-\frac{1}{x+3}}}_{\to 1} = +\infty$$

Provo a definire l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\to 1}\, \underbrace{e^{-\frac{1}{x+3}}}_{\to 1} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to+\infty} |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} - x$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\, e^{-\frac{1}{x+3}} - x$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x+3}} + x\left(e^{-\frac{1}{x+3}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x+3}} + (x+3-3)\left(e^{-\frac{1}{x+3}}-1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x+3}} + (x+3)\left(e^{-\frac{1}{x+3}}-1\right) - 3e^{-\frac{1}{x+3}} + 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^{-\frac{1}{x+3}}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x+3}}-1}{-\frac{1}{x+3}}}_{\to -1} - \underbrace{3e^{-\frac{1}{x+3}}+3}_{\to -3} = 0$$

Asintoto obliquo $y=x$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} = 2e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} |x+1|\, e^{-\frac{1}{|x+3|}} = 2e^{-\infty} = 0$$

CONTINUITÀ: La funzione è composizione di funzione, quindi vale $f(x) \in C^{(0)}(\mathrm{dom} f)$.

DERIVATA PRIMA, DERIVABILITÀ, INTERVALLI DI CRESCITA / DECRESCITA, PUNTI STAZIONARI:

$$f(x) = |x+1| e^{-\frac{1}{|x+3|}} = \begin{cases} -(x+1) e^{\frac{1}{x+3}} & \text{se } x \leq -3 \\ -(x+1) e^{-\frac{1}{x+3}} & \text{se } x \in (-3,-1) \\ (x+1) e^{-\frac{1}{x+3}} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x+3}} + (-x-1) e^{\frac{1}{x+3}} \left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right) = \frac{-(x+3)^2 + x + 1}{(x+3)^2} e^{\frac{1}{x+3}} = -\frac{x^2+5x+8}{(x+3)^2} e^{\frac{1}{x+3}} & \text{se } x < -3 \\ -e^{-\frac{1}{x+3}} + (-x-1) e^{-\frac{1}{x+3}} \cdot \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{-(x+3)^2 - x - 1}{(x+3)^2} e^{-\frac{1}{x+3}} = -\frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} e^{-\frac{1}{x+3}} & \text{se } x \in (-3,-1) \\ e^{-\frac{1}{x+3}} + (x+1) e^{-\frac{1}{x+3}} \cdot \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)^2 + x + 1}{(x+3)^2} e^{-\frac{1}{x+3}} = \frac{x^2+7x+10}{(x+3)^2} e^{-\frac{1}{x+3}} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

Derivabilità in $x = -1$:

$$\left.\begin{aligned} f'_-(-1) &= -\frac{1-7+10}{2^2} e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{e}}{e} \\ f'_+(-1) &= \frac{\sqrt{e}}{e} \end{aligned}\right\} \text{ punto angoloso in } x=-1$$

DESTRA: $y = f'_+(-1)(x+1) + \cancel{f(-1)} = \frac{\sqrt{e}}{e}(x+1) \rightsquigarrow y = \frac{\sqrt{e}}{e}x + \frac{\sqrt{e}}{e}$

SINISTRA: $y = f'_+(-1)(x+1) + \cancel{f(-1)} = -\frac{\sqrt{e}}{e}(x+1) \rightsquigarrow y = -\frac{\sqrt{e}}{e}x - \frac{\sqrt{e}}{e}$

$\Rightarrow f(x) \in C^{(1)}(\text{dom} f \setminus \{-1\})$

Studio il segno della derivata:

*) $x > -1$: $\frac{x^2+7x+10}{\cancel{(x+3)^2}} \cancel{e^{\frac{1}{x+3}}} \geq 0 \iff x^2+7x+10 \geq 0$ $\quad \Delta = 49-40 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow x \leq -5 \vee x \geq 2$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x > -1$

*) $x \in (-3,-1)$: $\ominus \dfrac{x^2+7x+10}{\cancel{(x+3)^2}} \cancel{e^{-\frac{1}{x+3}}} \geq 0 \iff x^2+7x+10 \leq 0$ $\qquad \Delta = 49-40 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} \Rightarrow -5 \leq x \leq -2$$

*) $x < -3$: $\ominus \dfrac{x^2+5x+8}{\cancel{(x+3)^2}} \cancel{e^{\frac{1}{x+3}}} \geq 0 \iff x^2+5x+8 \leq 0$ $\qquad \Delta < 0$

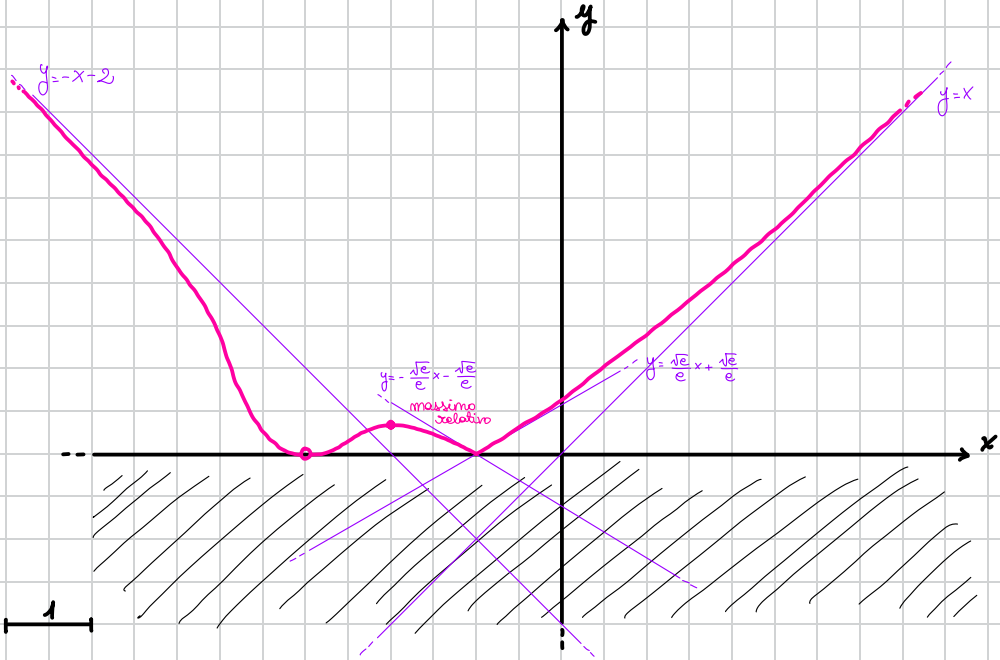
$\Rightarrow f'(x) < 0 \quad \forall x < -3$

		-3		-2		-1	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ è crescente se } -3<x<-2 \vee x>-1 \\ f(x) \text{ è decrescente se } x<-3 \vee -2<x<-1 \end{cases}$

punto di massimo relativo per $x=-2$

$f(-2) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \rightsquigarrow$ massimo $\left(-2, \dfrac{1}{e}\right)$



ESERCIZIO 2

$$f(x) = \log|e^x+4| - \arctan(e^x-5) - \log 4 = \log(e^x+4) - \arctan(e^x-5) - \log 4$$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$ → ESTREMI DEL DOMINIO: $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log(e^x+4) - \arctan(e^x-5) - \log 4$$

$$= \log(e^{-\infty}+4) - \arctan(e^{-\infty}-5) - \log 4$$

$$= \cancel{\log 4} - \arctan(-5) - \cancel{\log 4} = -\arctan(-5) = \arctan 5$$

Asintoto orizzontale $y = \arctan 5$ per $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(e^x+4) - \arctan(e^x-5) - \log 4 = +\infty$$ ⇝ Potrebbe esserci un asintoto obliquo.

Caratterizzazione dell'asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+4) - \arctan(e^x-5) - \log 4}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+4)}{x} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(e^x-5)}{x}}_{\to \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\log 4}{x}}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left[e^x\left(1+\frac{4}{e^x}\right)\right]}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(1+\frac{4}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1}}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\log\left(1+\frac{4}{e^x}\right)}{x}}_{\to 0} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x+4) - \arctan(e^x-5) - \log 4 - x$$

(converto il logaritmo come prima)

$$= \lim_{x\to+\infty} x + \log\left(1+\frac{4}{e^x}\right) - \arctan(e^x-5) - \log 4 - x = -\frac{\pi}{2} - \log 4$$

Asintoto obliquo $y = x - \frac{\pi}{2} - \log 4$ per $x \to +\infty$

Esercizio 3

$f(x) = \arctan(e^x + \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + (e^x + \alpha)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1 + e^{2x} + 2\alpha e^x + \alpha^2) - e^x(2(e^x + \alpha)e^x)}{[1 + (e^x + \alpha)^2]^2}$$

$$= \frac{e^x}{[1 + (e^x + \alpha)^2]^2}(1 + e^{2x} + \cancel{2\alpha e^x} + \alpha^2 - 2e^{2x} - \cancel{2\alpha e^x})$$

$$= \frac{e^x(\alpha^2 + 1 - e^{2x})}{[1 + (e^x + \alpha)^2]^2}$$

$$f''(0) = \frac{1(\alpha + \cancel{1} - \cancel{1})}{[1 + (1 + \alpha)^2]^2} = 0 \iff \alpha = 0$$

Per $\alpha = 0$: $f''(x) = \dfrac{e^x(1 - e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2}$

Perché ci sia un flesso, la derivata seconda deve ANCHE cambiare segno:

$$*) \quad \lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x(1 - e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^0(1 - e^{0^+})}{4} = \frac{1(1 - 1^+)}{4} \overset{!}{=} 0^- < 0$$

*) $\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^0(1-e^{0^-})}{4} = \frac{1(1-1^-)}{4}$

$= 0^+ > 0$

<u>ok</u>