Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3ª Prova di accertamento — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, -1, -4)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -2, 4)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e siano $u, v \in V$ tali che $\|u\| = \|v\|$. Allora:

V | F $\|u - v\| = 0$;

V | F $u + v$ e $u - v$ sono ortogonali;

V | F $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

V | F Se g è definita positiva non esistono sottospazi isotropi diversi da $\{0\}$;

V | F Se g è definita negativa esistono vettori isotropi non nulli;

V | F Se g è indefinita esistono vettori isotropi non nulli.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i piani $\pi_1 : x - 2y + 2z - 4 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 2z - 1 = 0$. Indichiamo con ϕ l'angolo da essi determinato. Allora si ha:

V | F $\cos\phi = 8/9$;

V | F $\cos\phi = \sqrt{6}/9$;

V | F $\cos\phi = \sqrt{11}/11$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3ª Prova di accertamento — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (0, 3, -2)$ e $C = (1, 1, 0)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x - 2y + z = 0$. Si esprima il vettore $v = (2, 3, 1)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i piani $\pi_1 : x + 2y - z + 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y + 2z + 1 = 0$. Indichiamo con ϕ l'angolo da essi determinato. Allora si ha:

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = 7/9$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = \sqrt{6}/9$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = \sqrt{7}/11$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se g è definita negativa esistono vettori isotropi non nulli;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se g è definita positiva non esistono sottospazi isotropi diversi da $\{0\}$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se g è indefinita esistono vettori isotropi non nulli.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e siano $v, w \in V$ tali che $\|v\| = \|w\|$. Allora:

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\|v - w\| = 0$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\|v + w\| = \|v - w\|$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $v + w$ e $v - w$ sono ortogonali.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3ª Prova di accertamento — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (-1, 3, 5)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, -2, 0)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (2, 0, -3)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se g è definita positiva non esistono sottospazi isotropi diversi da $\{0\}$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se g è indefinita esistono vettori isotropi non nulli;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se g è definita negativa esistono vettori isotropi non nulli.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i piani $\pi_1 : -x + y - 2z + 5 = 0$ e $\pi_2 : 2x - 2y + z - 1 = 0$. Indichiamo con ϕ l'angolo da essi determinato. Allora si ha:

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = 3/5$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = \sqrt{6}/3$;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = 3\sqrt{7}/13$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e siano $u, v \in V$ tali che $u + v$ e $u - v$ sono ortogonali. Allora:

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ $u + v$ e $u - v$ hanno la stessa norma;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ u e v sono ortogonali;

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ u e v hanno la stessa norma.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3ª Prova di accertamento — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $3x - y + 2z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -1, 1)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (-1, 2, 1)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 2)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e siano $v, w \in V$ tali che $\|v\| = \|w\|$. Allora:

- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ $\|v + w\| = \|v - w\|$;
- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 4\|w\|^2$;
- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ $\|v - w\| = 0$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se g è definita negativa esistono vettori isotropi non nulli;
- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se g è definita positiva non esistono sottospazi isotropi diversi da $\{0\}$;
- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ Se g è indefinita esistono vettori isotropi non nulli.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i piani $\pi_1 : x + 3y + z + 1 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y - 2z - 1 = 0$. Indichiamo con ϕ l'angolo da essi determinato. Allora si ha:

- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = 4/7$;
- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = \sqrt{6}/11$;
- $\boxed{\text{V}}\boxed{\text{F}}$ $\cos\phi = \sqrt{11}/11$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3ª Prova di accertamento — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $2x - y - 2z = 0$. Si esprima il vettore $v = (-1, 3, 2)$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (-2, -1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$ e $C = (2, -1, 0)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i piani $\pi_1 : x - 4y + z + 3 = 0$ e $\pi_2 : 2x - 2y + z - 2 = 0$. Indichiamo con ϕ l'angolo da essi determinato. Allora si ha:

V | F $\cos\phi = 3/18$;

V | F $\cos\phi = 11\sqrt{2}/18$;

V | F $\cos\phi = \sqrt{13}/13$.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

V | F Se g è definita positiva non esistono sottospazi isotropi diversi da $\{0\}$;

V | F Se g è indefinita esistono vettori isotropi non nulli;

V | F Se g è definita negativa esistono vettori isotropi non nulli.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e siano $u, v \in V$ tali che $u + v$ e $u - v$ sono ortogonali. Allora:

V | F $u + v$ e $u - v$ hanno la stessa norma;

V | F u e v sono ortogonali;

V | F u e v hanno la stessa norma.

Cognome ____________________________ Nome ____________________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria dell'Energia, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

3ª Prova di accertamento — 16 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (1, 3, -1)$, $B = (-1, 2, 0)$ e $C = (2, -1, 1)$. Si determini l'equazione cartesiana del piano π passante per A, B e C. Si determini la retta r passante per A e per il punto medio M del segmento BC. Si determini la retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x+2y-2z = 0$. Si esprima il vettore $v = (2, -1, -1)$ come somma $v = v_1+v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica.

V | F   Se g è definita negativa esistono vettori isotropi non nulli;

V | F   Se g è definita positiva non esistono sottospazi isotropi diversi da $\{0\}$;

V | F   Se g è indefinita esistono vettori isotropi non nulli.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e siano $v, w \in V$ tali che $\|v\| = \|w\|$. Allora:

V | F $\|v + w\| = \|v - w\|$;

V | F $\|v - w\| = 0$;

V | F $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 4\|w\|^2$.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati i piani $\pi_1 : 2x - 2y + z + 5 = 0$ e $\pi_2 : x - 2y + 3z - 2 = 0$. Indichiamo con ϕ l'angolo da essi determinato. Allora si ha:

V | F $\cos\phi = 11/13$;

V | F $\cos\phi = \sqrt{14}/14$;

V | F $\cos\phi = 3\sqrt{14}/14$.