Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 9

16/05/2024

Esercizio 1

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana $2x + y - z = 0$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Calcolare le equazioni cartesiane e una base di $U^\perp$ rispetto al prodotto scalare canonico.

(c) Dato il vettore $v = (1, 0, 0, 1)$, calcolare le proiezioni ortogonali di v sui sottospazi $U^\perp$ e U.

Esercizio 2

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio vettoriale U di equazione $x + y - z = 0$.
Esprimere il vettore $v = (3, -2, 4)$ come $v_{//} + v_\perp$, con $v_{//} \in U$ e $v_\perp \in U^\perp$.

Esercizio 3

Siano dati i vettori: $v_1 = (1, -1, 0), \quad v_2 = (2, 0, 1), \quad v_3 = (0, -1, 1)$.

(a) Verificare che $\underline{\mathrm{v}} = \{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Ortonormalizzare la base $\underline{\mathrm{v}}$ con il metodo di Gram-Schmidt.

(c) Calcolare le coordinate del vettore $w = (2, -5, 1)$ rispetto alla base ortonormale ottenuta al punto precedente.

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare usuale, si trovi una base ortonormale di $U^\perp$, dove $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Esercizio 5

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, 2, -3, 1)$ e $u_2 = (0, 2, -1, 2)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, 3, -1, 1)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.