COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
2 Luglio 2018

Esercizio 1. [9.5 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{(1+100s^2)\left(1-\frac{s}{10}\right)}{s^2\left(1-\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, calcolando eventuali asintoti ed intersezioni con gli assi;

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ (determinandone l'eventuale numero di poli a parte reale positiva e/o nulla) al variare di k in $\mathbb{R}, k \neq 0$.

[**Suggerimento**: per il tracciamento corretto del diagramma di Nyquist si suggerisce di tenere in considerazione il segno di parte reale e immaginaria al variare di ω].

Esercizio 2. [10 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-4/3}{(s+4)(s^2-2s+2)}$$

è richiesto il tracciamento dei luoghi (positivo e negativo), con individuazione di asintoti, punti doppi ed intersezioni con l'asse immaginario (compreso il calcolo dei corrispondenti valori di k). Si deduca quindi se e per quali valori di k la funzione retroazionata $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ risulta BIBO stabile.
[**Nota**: il calcolo dei valori di k corrispondenti ai punti doppi è un po' noioso. L'importante è valutare se si tratta di valori positivi o negativi]

Esercizio 3. [5.5 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 100\frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$$

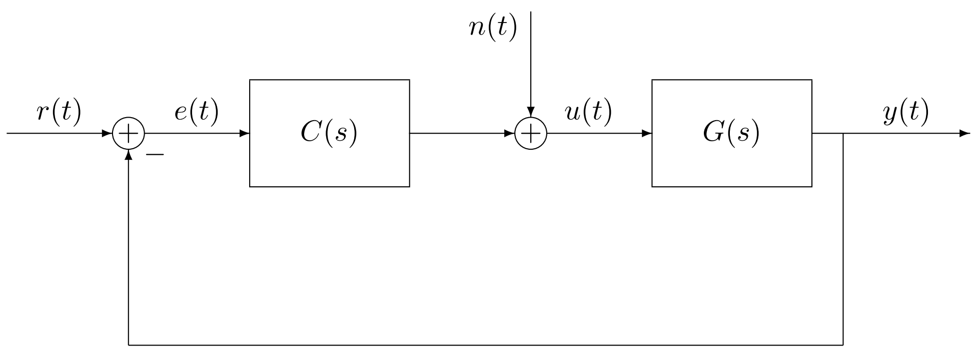
i) si progetti un controllore proprio e stabilizzante $C_1(s) \in \mathbb{R}(s)$ che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$ tipo 0 e relativo errore a regime (al gradino) $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.1$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 100$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

ii) si progetti un controllore stabilizzante $C_2(s) \in \mathbb{R}(s)$ di tipo PID (eventualmente P, PD, PI) che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C_2(s)G(s)}{1+C_2(s)G(s)}$ tipo 1 e relativo errore a regime (alla rampa lineare) $e_{rp}^{(2)} \simeq 1$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 100\sqrt{10}$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

Teoria. [3.5+1+1.5 punti] Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione e si assuma che $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ sia una funzione propria, con $G(0) \neq 0$, e che $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ sia un controllore proprio, progettato in modo tale che il sistema di funzione di trasferimento $W(s)$ sia proprio e BIBO stabile e soddisfi a certe specifiche. Si assuma che sul sistema agisca un disturbo a gradino:

$$n(t) = n_0 \delta_{-1}(t).$$

i) Si derivino in modo dettagliato condizioni necessarie e sufficienti su $C(s)$ e/o $G(s)$ affinché tale disturbo costante, a regime, non eserciti alcun effetto sull'uscita del sistema.



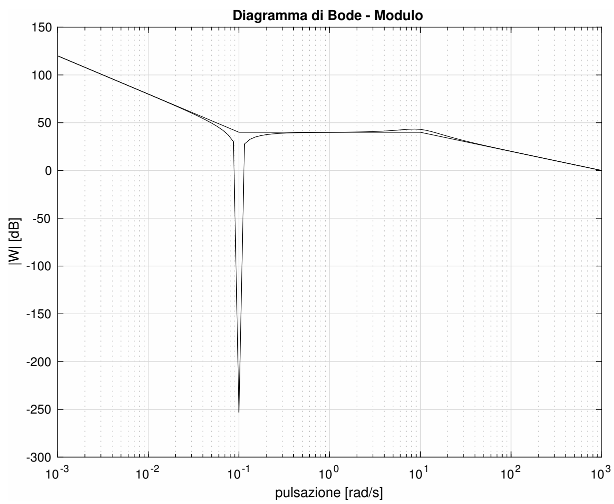
ii) Come cambierebbe la precedente risposta se il disturbo fosse sinusoidale del tipo

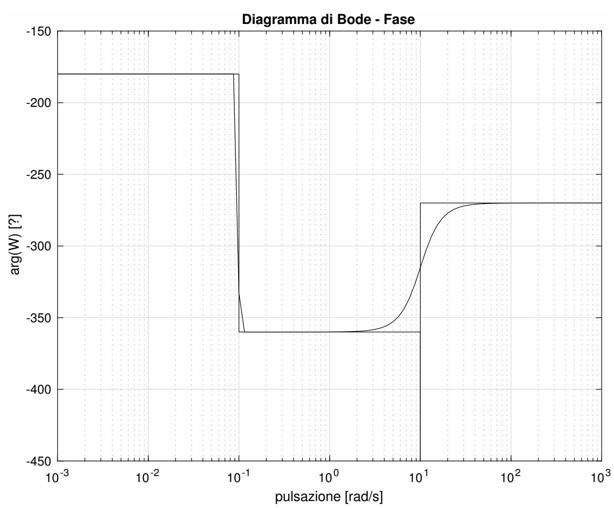
$$n(t) = n_0 \cos(\omega_0 t)\delta_{-1}(t)?$$

iii) Si determinino condizioni su $C(s)$ e/o $G(s)$ affinché un segnale $s(t) = \cos(\omega_o t)\delta_{-1}(t)$, se applicato all'ingresso del sistema retroazionato (i.e., assumendo $r(t) = s(t)$), causi un'uscita a regime esattamente uguale ad $s(t)$, e se applicato come disturbo (ovvero assumendo $n(t) = s(t)$) causi a regime un'uscita nulla, cioè venga completamente eliminato.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Il diagramma di Bode dei moduli parte decrescente con pendenza di -40 dB/decade, poi presenta un picco di antirisonanza infinito per $\omega = 0.1$ rad/s (sebbene nella figura sotto appaia finito), dopo il quale risale verso una zona piatta di valore 40 dB (il picco all'incirca per $\omega = 10$ rad/s è praticamente trascurabile: infatti nel termine trinomio al denominatore lo smorzamento vale $\xi = -1/2$) e infine scende fino a $-\infty$ (in dB) con pendenza -20 dB/decade. Il diagramma di Bode delle fasi parte da $-180°$ poi, per $\omega = 0.1$ rad/s ha un salto di $-180°$ (ma anche $180°$ sarebbero andati bene). Successivamente il diagramma ha una transizione per $\omega = 10$ rad/s di $90°$ verso l'alto, passando da $-360°$ a $-270°$.



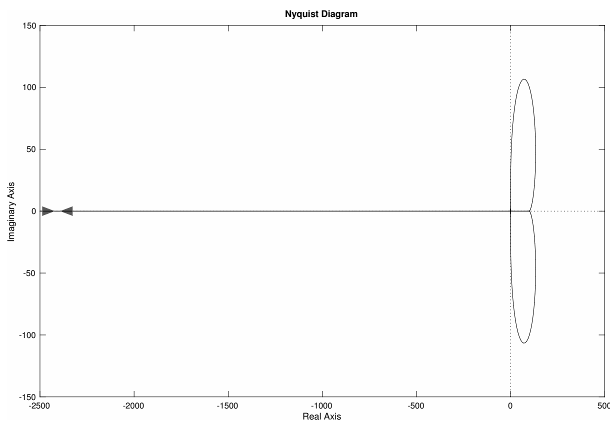


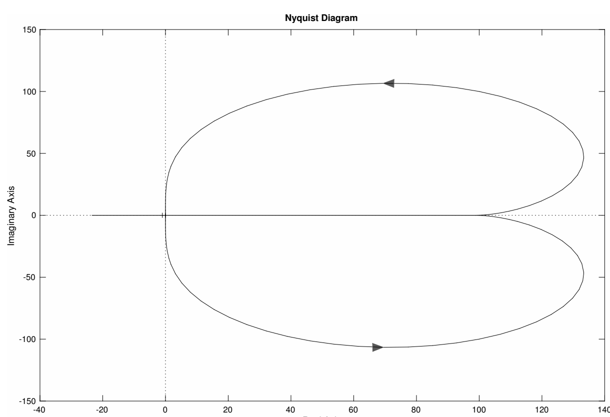
ii) Dopo alcuni passaggi si trova:

$$G(j\omega) = \frac{100\ \omega^2 - 1}{\omega^2 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{100}\right)^2 + \frac{\omega^2}{100}\right]} + j\frac{\omega(100\ \omega^2 - 1)}{1000 \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{100}\right)^2 + \frac{\omega^2}{100}\right]}$$

La parte reale si annulla per $\omega = 0.1$ e per tal valore si annulla anche la parte immaginaria (attraversamento dell'origine). Inoltre la parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ e per tal valore la parte reale vale $-\infty$. Per tracciare correttamente i rami del diagramma di Nyquist per valori di ω molto piccoli ($|\omega| < 0.1$) è sufficiente notare che per valori di ω positivi e piccoli sia parte reale che parte immaginaria sono negative.

Qui di seguito viene riportato il diagramma di Nyquist completo e un suo dettaglio per valori di $|\omega| \geq 0.09$ rad/sec. Dalle figure non è chiaro, tuttavia l'analisi precedente ha provato che il diagramma arriva dall'infinito restando nel III quadrante fino al passaggio per l'origine, e che non essendoci altre intersezioni con gli assi ed essendo la fase positiva, dopo l'attraversamento dell'origine, il tratto finale non può che compiere un cappio che si richiude nell'origine, restando confinato nel I quadrante. Tale osservazione è fondamentale per la corretta valutazione del numero di giri che ci apprestiamo a fare.





iii) Osserviamo preliminarmente che $n_{G+} = 2$. La chiusura del diagramma all'infinito porta ad un cerchio di raggio infinito in verso orario. Se $-\frac{1}{k} < 0$, ovvero $k > 0$, allora $N = 0$ e quindi $W(s)$ ha $n_{W+} = 2$ poli a parte reale positiva e pertanto non è BIBO stabile. Se $k < 0$ invece $N = -1$, da cui segue $n_{W_+} = 3$ e quindi $W(s)$ ha tre poli a parte reale positiva e non è BIBO stabile. Morale: $W(s)$ non è mai BIBO stabile.

Esercizio 2. Osserviamo preliminarmente che $n = 3$ e $m = 1$ quindi sia nel luogo positivo che nel luogo negativo ci sono due rami che vanno al punto improprio (con direzioni $\pi/2$ e $-\pi/2$ nel luogo positivo, e con direzioni 0 e π nel luogo negativo), mentre il baricentro

(centro stella degli asintoti) è

$$(x_B, 0) = \left(-\frac{5}{3}, 0\right).$$

L'equazione dei punti doppi porge, dopo semplici calcoli

$$(-2s)(s^2 - s - 16/3) = 0$$

le cui soluzioni sono $s = 0, s = 2.2078$ e $s = -1.2078$. Essi corrispondono rispettivamente (conti più noiosi) a $k = 6$, $k = -10.4703$ e $k = 8.3780$. Quindi il primo e il terzo punto doppio corrispondono al luogo positivo mentre il secondo al luogo negativo.

Per quel che riguarda le intersezioni con l'asse immaginario, ponendo $d(j\omega) + kn(j\omega) = 0$ si ottiene

$$\left(-2\omega^2 + 8 - \frac{4k}{3}\right) + j\omega(k - 6 - \omega^2)] = 0$$

che corrisponde al sistema di equazioni

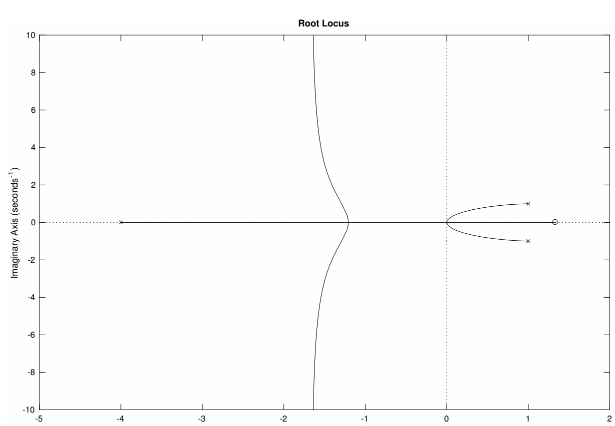
$$\begin{cases} -2\omega^2 + 8 - \frac{4k}{3} &= 0 \\ \\ \omega(k - 6 - \omega^2) &= 0. \end{cases}$$

Ora la seconda equazione si annulla per $\omega = 0$, che sostituito nella prima porta a $k = 6$ (consistente con il risultato sui punti doppi trovato prima), e per $\omega^2 = k - 6$ che sostituito nella prima equazione porta a

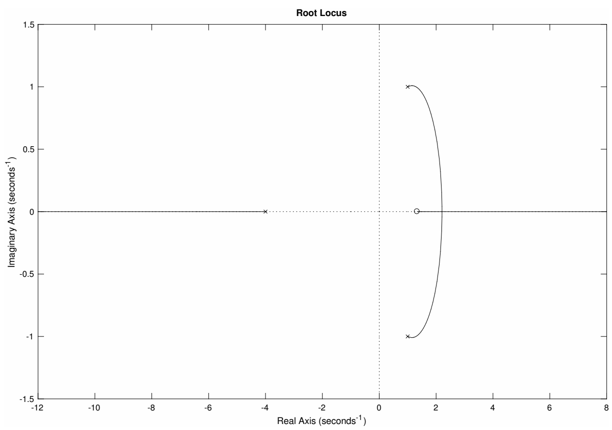
$$-2(k - 6) + 8 - \frac{4k}{3} = 0$$

che ha come unica soluzione $k = 6$. Per tale valore l'equazione $\omega^2 = k - 6$ porta a $\omega = 0$. Quindi l'unica intersezione con l'asse immaginario è nell'origine per $k = 6$.

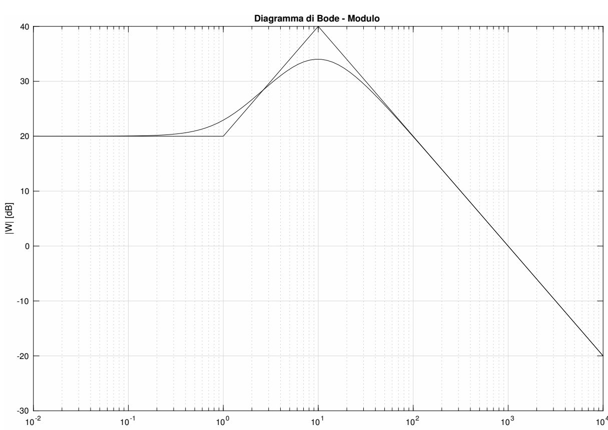
Il luogo positivo è quindi il seguente. Si vede che l'unico tratto dell'asse reale che appartiene al luogo è l'intervallo $[-4, 4/3]$. Dai due poli complessi coniugati $1 \pm j$ partono due rami che vanno nell'origine e da lì si dipartono due rami: uno va allo zero $4/3$, l'altro si muove lungo l'asse reale e in $s = -1.8629$ incontra il ramo uscente da -4. Tali rami si staccano dall'asse reale e vanno ai due asintoti verticali. Poichè per $k > 0$ c'è sempre almeno un ramo nel semipiano reale positivo, $W(s)$ non è BIBO stabile per nessun valore di $k > 0$.

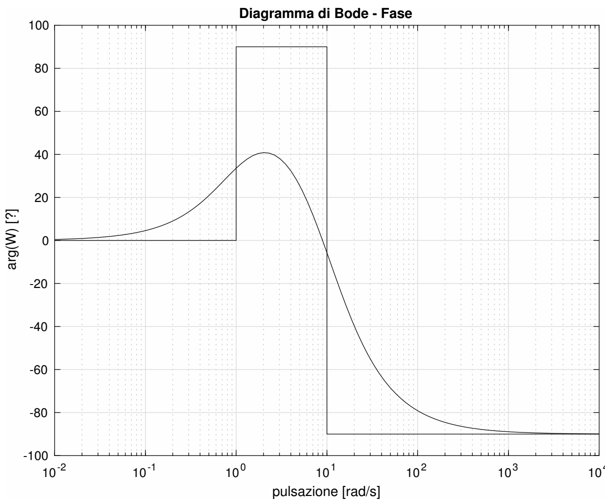


Nel luogo negativo i tratti dell'asse reale che appartengono al luogo sono $(-\infty, -4]$ e $[4/3, +\infty)$. Un ramo parte da $s = -4$ e va verso $-\infty$. Dai due poli complessi coniugati $1 \pm j$ partono gli altri due rami e vanno in $s = 2.8629$; da lì si dipartono due rami: uno va allo zero $4/3$, l'altro si muove lungo l'asse reale verso $+\infty$. Siccome questi due rami non entrano mai nel semipiano reale negativo, ne consegue che ci sono 2 rami interamente contenuti nel semipiano reale positivo, e pertanto $W(s)$ non è BIBO stabile per nessun valore di $k, 0$.



Esercizio 3. i) Per sistemare la specifica su tipo ed errore a regime è sufficiente assumere $C_1'(s) = \frac{1}{10}$.

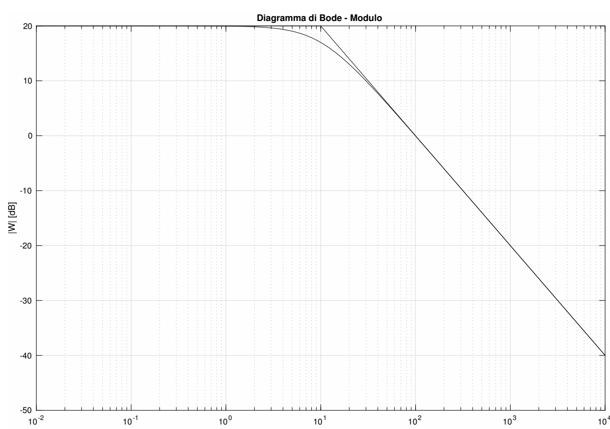


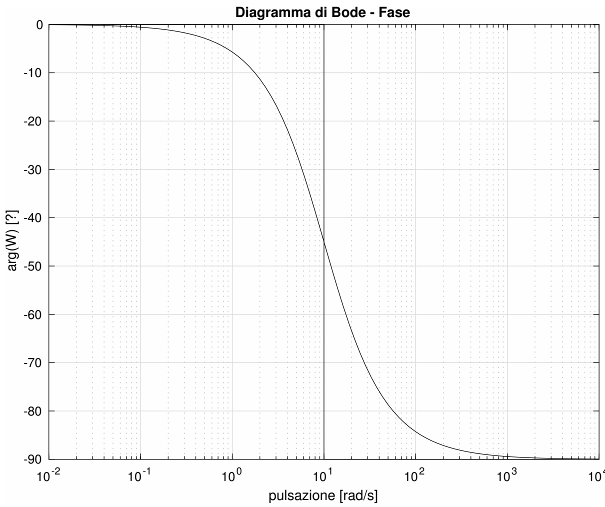


Alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_A^* = 100$ rad/s il modulo di $C_1'(j\omega)G(j\omega)$ vale 20 dB, mentre il margine di fase è a posto. Per ottenere il risultato desiderato è possibile usare una rete ritardatrice con coppia polo-zero distanziata di una decade che abbassi il modulo di 20 dB ma non abbia effetto sulla fase. Una scelta possibile è quella che induce una doppia cancellazione zero-polo e corrisponde a

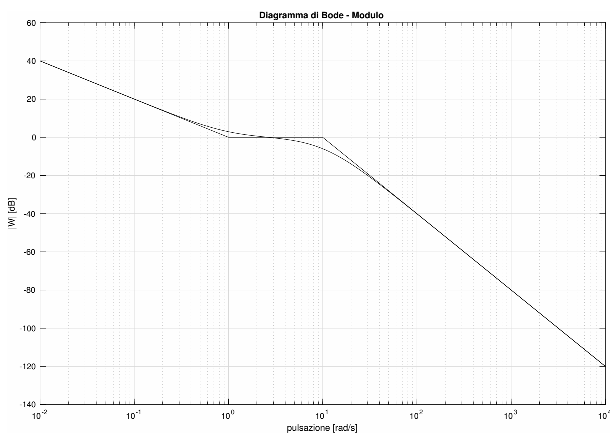
$$C_1(s) = \frac{1}{10}\frac{1+\frac{s}{10}}{1+s} \;\Rightarrow\; C_1(s)G(s) = \frac{10}{1+\frac{s}{10}}.$$

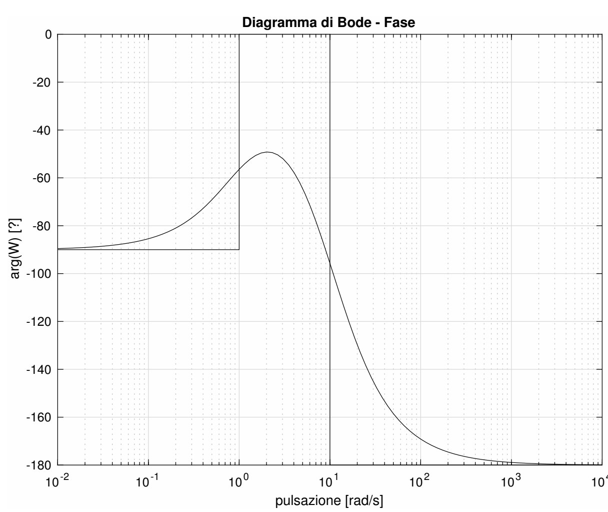
Essa soddisfa tutte le specifiche ed è stabilizzante per il Criterio di Bode.





ii) Scegliamo preliminarmente $C_2'(s) = \frac{1}{100}\frac{1}{s}$ per sistemare tipo ed errore a regime. Questo ci dice che certamente il controllore deve avere l'azione integrale e quindi si tratta o di un PI o di un PID.

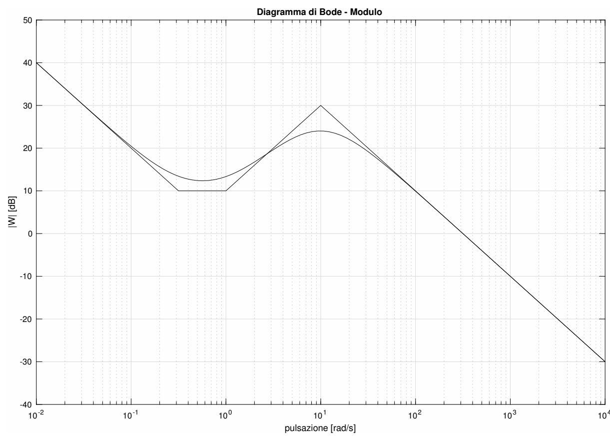


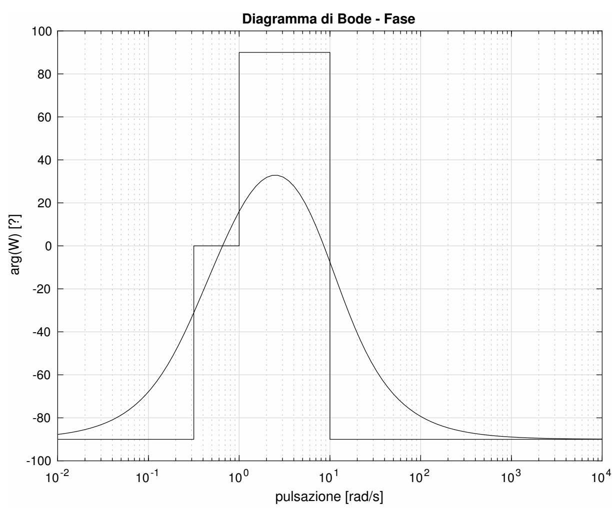


Alla pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_A^* = 100\sqrt{10}$ rad/s il modulo di $C_2'(j\omega)G(j\omega)$ vale -60 dB ed il margine di fase è quasi nullo. È quindi sufficiente inserire uno zero 3 decadi prima di ω_A, ovvero basta un PI

$$C_2(s) = \frac{1}{100}\frac{1+\sqrt{10}s}{s} \quad \Rightarrow \quad C_2(s)G(s) = \frac{(1+s)(1+\sqrt{10}s)}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$$

che soddisfa tutte le specifiche ed è stabilizzante per il Criterio di Bode.





Teoria. i) Per la reiezione ai disturbi costanti si veda il Capitolo 9 del Libro di testo, pagine 280-281.

ii) Sfruttando la teoria della risposta di regime permanente a segnali sinusoidali e sfruttando il risultato (derivato nella prima parte della risposta) che la funzione di trasferimento da disturbo a uscita è

$$W_n(s) := \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)},$$

ed è BIBO stabile (dal momento che $W(s)$ lo è per ipotesi), si può desumere che la reiezione dei disturbi sinusoidali di pulsazione ω_0 è possibile se e solo se $W_n(j\omega_0) = 0$ e ciò si verifica se e solo se o $G(j\omega_0) = 0$ (la $G(s)$ ha una coppia di zeri immaginari in $\pm j\omega_0$) oppure $|C(j\omega_0)| = +\infty$ (la $C(s)$ ha una coppia di poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_0$).

iii) Dall'informazione sulla reiezione del disturbo sinusoidale alla pulsazione ω_0 si deduce che $W_n(j\omega_0) = 0$ e dall'analisi del punto precedente ciò si traduce nel fatto che o $G(j\omega_0) =$

0 oppure $|C(j\omega_0)| = +\infty$. D'altra parte, sempre basandoci sulla teoria della risposta di regime permanente a segnali sinusoidali, il vincolo che il sistema sia in grado di inseguire esattamente a regime il medesimo segnale sinusoidale ci dice che $W(j\omega_0) = 1$. Dalla relazione

$$W(s) = C(s) \cdot W_n(s)$$

valutata in $s = j\omega_0$ segue che chiaramente $C(s)$ ha una coppia di poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_0$.