PREAPPELLO 1° TURNO ING. INFORMATICA

QUESITO 1

$$\vec{F}(x,y) = (2-6xy, -3x^2-6y^2)$$

$$r(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t), \; t \in [0,\pi]$$

$$\int_r \vec{F} \cdot dr \, ?$$

SOL. DEVO TROVARE UNA PRIMITIVA DI F E POI SOSTITUIRE GLI ESTREMI

$$\boxed{\int_r \vec{F} \cdot dr = U(r(b)) - U(r(a))}$$

[O, IN ALTERNATIVA, USARE LA DEFINIZIONE, MA SI DIVENTA MATTI...

$$\int_0^{\pi} F_1(r(t))|r'(t)| + F_2(r(t))|r'(t)| \, dt$$
]

DEVO TROVARE U TALE CHE:
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2-6xy$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -3x^2-6y^2$$

$$\int 2-6xy \, dx = 2x - 3x^2y + c(y)$$

$$\int -3x^2-6y^2 \, dy = -3x^2y - 6\frac{y^3}{3} = -3x^2y - 2y^3 + c(x)$$

$\rightarrow$ LA PRIMITIVA CERCATA È $U = -3x^2y - 2y^3 + 2x$

$$\left[\frac{\partial U}{\partial x} = 2-6xy \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -3x^2-6y^2 \right]$$

$$U(r(b)) - U(r(a)) = \left[-3e^{2\pi}\cancel{\sin^2(\pi)}\, e^{\pi}\cos\pi - 2e^{3\pi}\cos^3\pi + \cancel{2e^{\pi}\sin\pi}\right]$$

$$-\left[-3e^0 \cancel{\sin(0)} \cdot e^0 \cos^0 - 2e^0\cos 0 + 2e^0 \cos 0\right]$$

$$= -2e^{3\pi} + 2$$ V

QUESITO 2

Question **3**
Correct
Flag question

Sia α il circuito costituito dal bordo dell'insieme $\{(x,y):\ 1 \le x \le 2,\ e^x \le y \le e^{x^2}\}$ orientato positivamente e $\vec{F}(x,y) = (x \log y, 0)$.
[Attenzione: c'è scritto e^{x^2} e NON e^{2x} !]

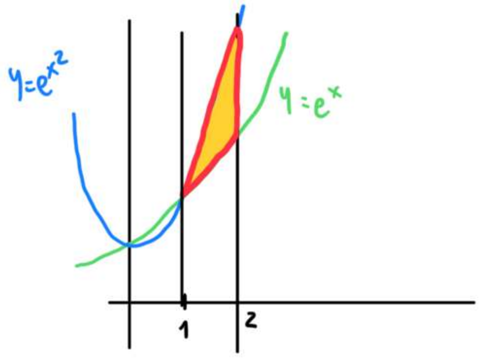
Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}(x,y) \cdot d\alpha$

Scegliere il risultato più vicino.

Select one:

a. -1.4167 ✔ $-\frac{17}{12}$

α: $\{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ e^x \le y \le e^{x^2}\}$



$\vec{F}(x,y) = (x \log y, 0)$

CALCOLARE $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}(x,y)\, d\alpha$

SOL. USO LA FORMULA DI GREEN:

$$\boxed{\int_{\partial^+ \alpha} \vec{F}(x,y)\, dx\, dy = \int_D \partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y)\, dx\, dy}$$

$$\int_1^2 \int_{e^x}^{e^{x^2}} 0 - \frac{x}{y}\, dy\, dx = \int_1^2 \int_{e^x}^{e^{x^2}} -\frac{x}{y}\, dy\, dx = \int_1^2 \Big[-x \log(y)\Big]_{e^x}^{e^{x^2}} dx =$$

$$\int_1^2 \Big[-x \log e^{x^2} + x \log e^x\Big] dx = \int_1^2 -x^3 + x^2\, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$\left[-4 + \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right] = -4 + \frac{8}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{17}{12}$$ ✓

QUESITO 4

Question **4**
Correct
Flag question

L'ascensore dell'Empire State Building può sostenere al massimo un peso pari a 1 700 Kg; se viene superato tale peso l'ascensore si blocca. 25 turisti vogliono salire insieme in cima al grattacielo. Se il peso dei turisti è una variabile aleatoria di media 70 Kg e **varianza** 16 Kg, determinare la probabilità che l'ascensore non si blocchi.

Rispondere (il riquadro è sotto la tabella). Riportare le 4 cifre decimali.

1700 Kg $\qquad\qquad$ $\mu = 70$ Kg

25 turisti $\qquad\qquad$ $\sigma^2 = 16$ Kg

SOL. PER IL TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE: (COROLLARIO 8.25 p. 102)

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \to \Phi(a) \quad \text{PER } n \to +\infty$$

$$\to P(X_1 + \ldots + X_n \leq a) \approx P\left(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \leq a\right) = P\left(Z \leq \frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$a = 1700$ Kg

$n = 25$ turisti

$\mu = 70$ (media)

$\sigma^2 = 16$ (varianza)

$$\to P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{25} - 25\mu}{\sqrt{25\sigma^2}} \leq 1700\right) \to \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

$$\to \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \Phi\left(\frac{1700 - 1750}{\sqrt{25 \cdot 16}}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

V

QUESITI 5 E 6

Question **5**
Correct
Flag question

Sia (X, Y) variabile congiunta continua con densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)/7} & x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Determinare c. Al solito calcolarlo con la calcolatrice e troncare a 4 decimali!

[Questa seconda domanda vale 1/3 del punteggio delle due domande di questa pagina]

Answer: 0.0204 ✔

The correct answer is: 0.0204

Question **6**
Correct
Flag question

Sia (X, Y) variabile congiunta continua con densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ce^{-(x+y)/7} & x > 0, y > 0, \\ 0 \text{ altrimenti,} & \end{cases}$$

dove c è il valore trovato sopra. Calcolare $P(X + Y \leq 4)$.

[Questa seconda domanda vale 2/3 del punteggio delle due domande di questa pagina]

Answer: 0.1125 ✔

The correct answer is: 0.1126

$$F_{x,y}(x,y) = \begin{cases} ce^{-\frac{(x+y)}{7}} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

SOL. 1) PER TROVARE c DEVO PORRE

$$\boxed{\iint_D c\, F_{x,y}(x,y)\, dx\,dy = 1}$$ (PERCHÉ È UNA FUNZIONE DI PROBABILITÀ)

$$\rightarrow \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} c\, e^{-\frac{x+y}{7}}\, dx\,dy = 1 \rightarrow c = \frac{1}{\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+y)}{7}}\, dx\,dy}$$

CALCOLO

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+y)}{7}}\, dx\,dy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{7}} e^{-\frac{y}{7}}\, dx\,dy = \int_0^{+\infty} -7e^{-\frac{y}{7}}\left[e^{-\frac{x}{7}}\right]_0^{+\infty} dy$$

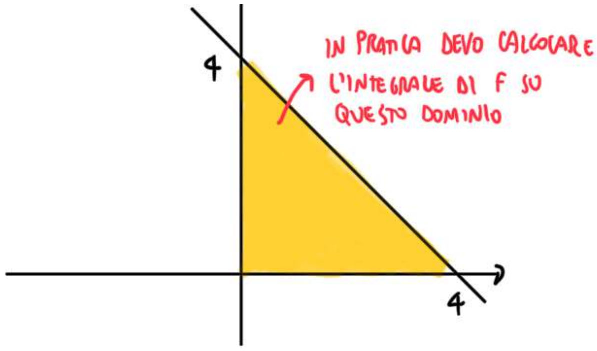
$$= \int_0^{+\infty} -7e^{-\frac{y}{7}}\left[\overset{0}{e^{-\infty}} - \overset{1}{e^{0}}\right] dy = \int_0^{+\infty} 7e^{\frac{y}{7}}\, dy = -49\int_0^{+\infty} -\frac{1}{7} e^{\frac{y}{7}} dy$$

$$= 49\left[e^{-\frac{y}{7}}\right]_0^{+\infty} = -49\left[e^{-\infty} - e^{0}\right] = 49$$

$$\rightarrow c = \frac{1}{49} = 0{,}0204$$ ✔

2) CALCOLARE $P(X+Y \leq 4)$

SOL. $X+Y \leq 4 \rightarrow Y \leq 4-X$



$$\rightsquigarrow \int_0^4 \int_0^{-x+4} \frac{1}{49} e^{\frac{-x-y}{7}} \, dy \, dx = 0.1126 \checkmark$$

$\downarrow$

QUI HO USATO WOLFRAM. TUTTAVIA IL CALCOLO DELL'INTEGRALE È ANALOGO AL PUNTO 1.