A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

2^o^ Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(-2, -6, 4)$ come ultima riga.

(a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A.

(b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che
$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$
dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

(c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia
$$B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -12 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -6 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (2, -1), w_2 = (1, 1)\}$. Sia $f\colon V \to W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è
$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & t \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w_1', w_2'\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w_1', w_2'\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.

(d) Si dica se, per qualche valore di t, esiste una matrice D tale che $A\,D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, -4, 4, -5)$ sul sottospazio U.

(b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (2, 0, -1, 1)$. Si determini una base di U'.

(c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (3, 0, t, 0)$ sia la proiezione ortogonale di v su L.

(d) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette
$$r : \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x - z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} (2 - t)x + y - z + t = 0 \\ tx - y - 3 - t = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

(c) Dopo aver posto $t = -1$ si consideri il punto $P = (10, 10, 13)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S. Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

2º Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(2,4,-2)$ come seconda riga.

(a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A.

(b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che
$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$
dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

(c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia
$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (3,1), w_2 = (1,2)\}$. Sia $f\colon V \to W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -3 & t & 9 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w_1', w_2'\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w_1', w_2'\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.

(d) Si dica se, per qualche valore di t, esiste una matrice D tale che $A\,D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (4,-5,-3,5)$ sul sottospazio U.

(b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (1,2,0,-1)$. Si determini una base di U'.

(c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (0,-5,0,t)$ sia la proiezione ortogonale di v su L.

(d) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette
$$r: \begin{cases} x - y + z + 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + (t+3)y - z - 1 = 0 \\ x + ty - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

(c) Dopo aver posto $t = -2$ si consideri il punto $P = (-14, 7, -2)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S. Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

2º Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(3,-6,9)$ come ultima riga.

(a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A.

(b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che

$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

(c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A-\alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A-\alpha I$ sia

$$B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 6 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V=\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1,e_2,e_3\}$ e $W=\mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1=(2,-3), w_2=(2,1)\}$. Sia $f\colon V\to W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è

$$A = \begin{pmatrix} t & 6 & 4 \\ 3 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W.

(b) Si determini, al variare di $t\in\mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w_1', w_2'\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w_1', w_2'\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.

(d) Si dica se, per qualche valore di t, esiste una matrice D tale che $A\,D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 3. Sia $U\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $3x_1+2x_2-x_3+x_4=0$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v=(4,5,-2,6)$ sul sottospazio U.

(b) Sia $U'\subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w=(2,-1,1,0)$. Si determini una base di U'.

(c) Si determini per quali valori di $t\in\mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L\subset\mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v'=(4,0,0,t)$ sia la proiezione ortogonale di v su L.

(d) Sia $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x-y-4z-5=0 \\ y+z-2=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y-(t+3)z+t+2=0 \\ x-3z+1=0 \end{cases}$$

(a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

(c) Dopo aver posto $t=2$ si consideri il punto $P=(21,0,10)$. Si determini un punto $R\in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S. Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, N. Rodinò, R. Sánchez

2º Appello — 7 luglio 2015

Esercizio 1. Si scriva l'unica matrice simmetrica A di rango 1 che ha $(2, 4, -4)$ come seconda riga.

(a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A.

(b) Si scrivano due matrici ortogonali distinte P e R tali che

$$A = PDP^{-1} \text{ e } A = RDR^{-1},$$

dove D è una matrice diagonale [**Attenzione:** P e R devono essere diverse non solo per il cambiamento di segno di alcuni coefficienti!]

(c) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \alpha I$ è invertibile. Si determini il valore di α in modo tale che la matrice inversa di $A - \alpha I$ sia

$$B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si considerino gli spazi vettoriali $V = \mathbb{R}^3$ con la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $W = \mathbb{R}^2$ con la base $\{w_1 = (2, 1), w_2 = (-1, 3)\}$. Sia $f\colon V \to W$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi date, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ -1 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche di V e di W.

(b) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Si dica per quale valore di t esiste una base $\{w'_1, w'_2\}$ di W tale che la matrice C di f rispetto alla base canonica di V e alla base $\{w'_1, w'_2\}$ di W abbia la prima riga nulla. Si dia un esempio di una base siffatta.

(d) Si dica se, per qualche valore di t, esiste una matrice D tale che $A\,D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (5, 7, -4, -4)$ sul sottospazio U.

(b) Sia $U' \subset U$ il sottospazio vettoriale formato da tutti i vettori di U che sono ortogonali al vettore $w = (0, 1, -2, 1)$. Si determini una base di U'.

(c) Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 1, tale che il vettore $v' = (0, t, -4, 0)$ sia la proiezione ortogonale di v su L.

(d) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che a ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ associa la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile (si può rispondere senza calcolare la matrice di f).

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + 4y - z - 7 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + (t+2)y - z + t - 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica per quali valori di t le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Per il valore di t per il quale r e s sono parallele, si scriva l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

(c) Dopo aver posto $t = -1$ si consideri il punto $P = (11, -2, -1)$. Si determini un punto $R \in r$ tale che la retta passante per P e R intersechi la retta s in un punto S. Si determinino inoltre le coordinate di tale punto S.