A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 2 settembre 2021

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (2, 0, -1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $v_3 = (3, 1, 0, 2)$, $v_4 = (0, 2, 3, 1)$.

(a) Ridurre in forma a scala la matrice le cui **righe** sono i vettori v_1, v_2, v_3, v_4. Dedurre da ciò la dimensione e una base di V.

(b) Sia $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Trovare una base di W e una base di $V \cap W$.

Soluzione. (a) e (b) Consideriamo la matrice le cui righe sono i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, con a fianco la matrice identica:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Riducendola a forma a scala usando solo operazioni elementari sulle righe otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Da ciò si deduce che $\dim V = 2$ e una base di V è formata dai vettori v_1 e v_2. Si deduce anche che $\dim U = 2$ e una base di U è formata dai vettori $(-2, -1, 1, 0)$ e $(-1, -2, 0, 1)$.

(c) Dall'equazione di W si ricava $x_1 = -x_2 + 2x_3$, da cui segue che $\dim W = 3$ e una base di W è formata dai vettori $w_1 = (-1, 1, 0, 0)$, $w_2 = (2, 0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 0, 1)$.
Per trovare una base di $V \cap W$ consideriamo la matrice le cui righe sono i vettori w_1, w_2, w_3, v_1, v_2, con a fianco la matrice identica:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Riducendola a forma a scala usando solo operazioni elementari sulle righe otteniamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Dai numeri presenti nell'ultima riga si deduce che

$$w_1 + w_2 + w_3 - v_1 - v_2 = 0$$

e quindi

$$w_1 + w_2 + w_3 = v_1 + v_2$$

Si verifica infatti che $w_1+w_2+w_3 = v_1+v_2 = (1,1,1,1)$. Da ciò si conclude che $\dim(V\cap W) = 1$ e una base di $V \cap W$ è formata dal vettore $(1,1,1,1)$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(b) Scrivere la matrice della funzione composta $f \circ f$. Trovare una base del nucleo di $f \circ f$ e una base dell'immagine di $f \circ f$.

(c) Trovare gli autovalori di A e una base degli autospazi. Dire se A è diagonalizzabile.

Soluzione. (a) La matrice A ha rango 3. Il nucleo di f ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(-1,0,0,1)$. Una base dell'immagine di f è formata dalle prime 3 colonne di A.

(b) La matrice della funzione composta $f \circ f$ è

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A^2 ha rango 2. Il nucleo di $f\circ f$ ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $(0,0,1,0)$ e $(-1,0,0,1)$. Una base dell'immagine di $f \circ f$ è formata dalle prime 2 colonne di A^2.

(c) Il polinomio caratteristico di A è $x^2(x-1)^2$, quindi gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, entrambi con molteplicità 2.
Per l'autovalore $\lambda = 0$ l'autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_1 = (-1,0,0,1)$.
Per l'autovalore $\lambda = 1$ l'autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_2 = (0,0,0,1)$.
Da ciò si deduce che la matrice A non è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = M(2,\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali definiamo un prodotto scalare ponendo, per $A, B \in M(2,\mathbb{R})$,

$$A \cdot B = \operatorname{Tr}(AB^T)$$

(Tr indica la *traccia* di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale).

(a) Calcolare esplicitamente il prodotto scalare delle matrici $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ e verificare che la formula ottenuta è analoga a quella del prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$.

(b) Sia U il sottospazio generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $W = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$, ove $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di W.

Soluzione. (a) Dalla definizione si ha:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} &= \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 & a_1b_3 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_2 & a_3b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4\end{aligned}$$

Questo non è altro che il classico prodotto scalare dei vettori (a_1, a_2, a_3, a_4) e $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$.
(b) Consideriamo la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Richiedendo che il prodotto scalare tra la matrice X e la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ sia zero si ottiene l'equazione $2x_1 + x_3 - x_4 = 0$. Analogamente, richiedendo che il prodotto scalare tra la matrice X e la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sia zero si ottiene l'equazione $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$. Risolvendo il sistema formato da queste due equazioni si trova

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}\, x_1 + x_3 \\ x_4 = 2x_1 + x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che $\dim U^\perp = 2$ e una base di $U^\perp$ è formata dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

Richiedendo che $AB = BA$ si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} a_2 = -a_3 \\ a_4 = a_1 + a_3 \end{cases}$$

da cui si ricava che $\dim W = 2$ e una base di W è data dalle matrici

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $w_1 \cdot w_2 = 1$, quindi le matrici w_1 e w_2 non sono tra loro ortogonali. Poniamo allora $w_1' = w_1$ e $w_2' = w_2 + \alpha w_1'$. Richiedendo che $w_1' \cdot w_2' = 0$ si ricava

$$\alpha = -\frac{w_1 \cdot w_2}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{1}{2}$$

quindi

$$w_2' = w_2 - \frac{1}{2}\, w_1 = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Le matrici

$$w_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2' = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

formano una base ortogonale di W.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $A = (5, 0, 5)$ e il piano $\pi : 2x - y + z = 3$.

(a) Determinare la distanza $\operatorname{dist}(A, \pi)$ di A dal piano π e il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano π' parallelo al piano π e tale che $\operatorname{dist}(A, \pi') = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(A, \pi)$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, parallela al piano π e ortogonale al vettore $v = (1, 2, -3)$.

(d) Dato il punto $B = (7, -6, -2)$ trovare il punto $B' \in r$ di minima distanza da B.

Soluzione. (a) Un vettore ortogonale al piano $\pi : 2x - y + z = 3$ è $n_\pi = (2, -1, 1)$. Le equazioni parametriche della retta s passante per A e ortogonale al piano π sono

$$s : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

Intersecando la retta s con il piano π (cioè mettendo a sistema le equazioni di s con l'equazione di π) si trova $t = -2$, da cui si ricavano le coordinate del punto $A' = (1, 2, 3)$. Si ha poi

$$\operatorname{dist}(A, \pi) = \operatorname{dist}(A, A') = \|(4, -2, 2)\| = 2\|n_\pi\| = 2\sqrt{6}.$$

(b) Dato che $\operatorname{dist}(A, \pi) = 2\|n_\pi\|$, si deve avere $\operatorname{dist}(A, \pi') = \|n_\pi\|$. Ci sono due piani paralleli a π che soddisfano a tale richiesta e sono i piani π'_1 e π'_2 passanti rispettivamente per i punti $A_1 = A - n_\pi = (3, 1, 4)$ e $A_2 = A + n_\pi = (7, -1, 6)$. Le equazioni cartesiane di tali piani sono:

$$\pi'_1 : 2x - y + z = 9, \qquad \pi'_2 : 2x - y + z = 21.$$

(c) Un vettore direttore della retta r è $v_r = n_\pi \times v = (1, 7, 5)$. Le equazioni parametriche della retta r sono quindi

$$r : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 0 + 7t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$

(d) Il generico punto R della retta r ha coordinate $R = (5 + t, 7t, 5 + 5t)$. Consideriamo il vettore $R - B = (-2 + t, 6 + 7t, 7 + 5t)$ e imponiamo la condizione di ortogonalità con il vettore $v_r = (1, 7, 5)$:

$$(R - B) \cdot v_r = 0.$$

Da questa equazione si ricava $t = -1$, per cui il punto B' cercato ha coordinate $B' = (4, -7, 0)$.