

TERMODINAMICA

- **Bilancio di massa:** $\dot{m} = \sum \dot{m}^{in} - \sum \dot{m}^{out}$, con $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$ la portata di massa
- **Legge dei gas perfetti:** $PV = nRT$
- **Lavoro di espansione/compressione:** $\underline{W}_{ec} = - \int P A dx = - \int P dV$
- **Lavoro di flusso:** $\dot{\underline{W}}_{flow} = (P\dot{V})^{in}\dot{m}^{in} - (P\dot{V})^{out}\dot{m}^{out}$
- **Lavoro di shaft (rotazione):** $\underline{W}_{shaft} = \int V dP$
- **Flusso di calore:** $\dot{Q} = \frac{dU}{dT}$, con U l'energia interna
- **Bilancio di energia per un sistema chiuso (1° principio TD):** $\Delta U = Q + W_{ec}$
- **Bilancio di energia in stato stazionario di un sistema aperto:** $0 = \sum [U + PV + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}]^{in}\dot{m}^{in} - \sum [U + PV + \frac{v^2}{2g_c} + \frac{gz}{g_c}]^{out}\dot{m}^{out} + \dot{\underline{Q}} + \dot{\underline{W}}_S$
- **Entalpia:** $H \equiv U + PV = Q + W_S$
- **Relazione di Mayer:** $C_p = R + C_v$, con $C_p \equiv (\frac{dH}{dT})_{P=cost.}$ e $C_v \equiv (\frac{dU}{dT})_{V=cost.}$
- **Energia interna ed Entalpia per gas ideali:** $\Delta U = \int C_v(T) dT$ e $\Delta H = \int C_p(T) dT$
- **Equazioni per un processo reversibile in un sistema chiuso per un gas ideale:**
 - in funzione di T e V: $dW = -RT \frac{dV}{V}$; $dQ = C_v dT + RT \frac{dV}{V}$
 - in funzione di T e P: $dW = -RdT + RT \frac{dP}{P}$; $dQ = C_p dT - RT \frac{dP}{P}$
 - in funzione di V e P: $dW = -PdV$; $dQ = \frac{C_v}{\gamma(VdP)} + \frac{C_p}{R(PdV)}$
- **Processo isotermico (T cost.):**
 - $\Delta U = \Delta H = 0$
 - $W = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = -nRT \ln \frac{P_1}{P_2}$
 - $Q = \Delta U - W = -W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln \frac{P_1}{P_2}$
 - $\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln \frac{P_1}{P_2}$
- **Processo isobaro (P cost.):**
 - $\Delta U = \int C_v(T) dT = nC_v(T_2 - T_1)$
 - $\Delta H = \int C_p(T) dT = nC_p(T_2 - T_1)$
 - $W = -P(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$
 - $Q = \Delta U - W = \Delta H = nC_p(T_2 - T_1)$
 - $\Delta S = nC_p \ln \frac{V_2}{V_1} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_1}$
- **Processo isocoro (V cost.):**
 - $\Delta U = \int C_v(T) dT = nC_v(T_2 - T_1)$
 - $\Delta H = \int C_p(T) dT = nC_p(T_2 - T_1)$
 - $W = -PdV = 0$
 - $Q = \Delta U - W = \Delta H = nC_v(T_2 - T_1)$
 - $\Delta S = nC_v \ln \frac{T_2}{T_1} = nC_p \ln \frac{P_2}{P_1}$

- **Processo adiabatico** ($Q = 0$):

- $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{R}{C_v}}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{R}{C_p}}$ $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{C_p}{C_v}}$
- $\Delta U = \int C_v(T) dT = nC_v(T_2 - T_1)$
- $\Delta H = \int C_p(T) dT = nC_p(T_2 - T_1)$
- $W = \Delta H = \int C_v(T) dT = nC_v(T_2 - T_1)$
- $\Delta Q = 0$
- $\Delta S = 0$

- **Entropia:**

- Macroscopica: $dS = \frac{dQ_{rev}}{T_{sys}}$
- Microscopica: $S_i = k \ln p_i$ oppure $\Delta S = k \ln \frac{p_2}{p_1}$, dove p_i è il numero di microstati e $k = \frac{R}{Na}$ è la costante di Boltzmann

TRASPORTO BIOLOGICO

- **Densità molare**: $\rho = \frac{n}{V}$
- **Densità di massa**: $\rho = \frac{m}{V}$
- **Frazione molare**: $x_i = \frac{n_i}{n_{TOT}} = \frac{p_i}{p_{TOT}} = \frac{C_i}{C_{TOT}}$
- **Frazione di massa**: $x_i = \frac{m_i}{m_{TOT}}$
- **Concentrazione di massa soluto**: $C_i = \frac{m_i}{V_{soluzione}}$
- **Concentrazione molare soluto**: $C_i = \frac{\rho}{MW} = \frac{n_i}{V_{soluzione}}$, con MW il peso molecolare
- **Portata molare**: $M_i = -Q(C_i^{out} - C_i^{in})$
- **Viscosità cinematica**: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, con μ la viscosità dinamica e ρ la densità
- **Numero di Reynolds**: $Re = \frac{\rho L v}{\mu} = \frac{L v}{\nu}$, dove L e v sono rispettivamente la lunghezza e la velocità caratteristiche. Se $Re < 2100$ il flusso è laminare, se $Re > 4000$ il flusso è turbolento.
 - Condotto cilindrico: $L = \text{diametro}$ e $v = \langle v \rangle$, quindi $Re = \frac{\rho d \langle v \rangle}{\mu}$ ($v_{max} = \frac{\Delta P r^2}{4\mu L}$ e siccome $\langle v \rangle = \frac{1}{2}v_{max} \rightarrow Q = \frac{\Delta P r^4}{8\mu L}$ che è l'equazione di Poiseuille)
 - Condotto rettangolare: $L = D_h = \frac{2wh}{w+h}$ diametro idraulico e $v = \langle v \rangle$, con w la larghezza del condotto e h l'altezza; quindi $Re = \frac{\rho D_h \langle v \rangle}{\mu}$ ($v_{max} = \frac{\Delta P h^2}{8\mu L}$ e siccome $\langle v \rangle = \frac{2}{3}v_{max} \rightarrow Q = \frac{2}{3}\langle v \rangle wh$)
- **Numero di Peclet**: $Pe = \frac{vL}{D_{ij}}$, dove L e v sono rispettivamente la lunghezza e la velocità caratteristica, D_{ij} il coefficiente di diffusione molecolare. Se $Pe < 1$, è maggiore la diffusione rispetto alla convezione, se $Pe > 1$, domina la convezione.
- **Stream lines**: $\frac{dr}{v} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$, dove \mathbf{v} è il campo di velocità costante.
- **Shear stress (Legge di Newton sulla viscosità)**: $\tau_{yx} = \frac{\mu}{\gamma_x} = \mu \frac{dv_x}{dy}$, dove γ_x è lo shear rate e τ_{yx} è lo sforzo di taglio perpendicolare a y nella direzione di x .
 - In un piano scorrevole: $\tau_{yx} = \frac{\mu v}{h}$
 - In un condotto rettangolare: $\tau_{yx} = \frac{-\Delta P}{L} y \Big|_{y=-\frac{h}{2}} = \frac{\Delta P h}{2L}$

- In un condotto cilindrico: $\tau_{rz} = \frac{-\Delta P r}{2L}$
- **Reologia dei fluidi non newtoniani, viscosità apparente**: $\eta_{app} = \frac{\tau_{yx}}{\dot{\gamma}_x} = m|\dot{\gamma}_x|^{n-1}$ (se $n = 1$ il fluido è newtoniano con $m = \mu$, se $n < 1$ è un fluido pseudoplastico, se $n > 1$ è un fluido dilatante).
- **Reologia e flusso del sangue, misurazione della viscosità del sangue**: $\gamma_r = \frac{dv_z}{dr} \approx \frac{\langle v \rangle}{2R} = \frac{Q}{2\pi R^3}$, con R il raggio del condotto. Il rapporto $\frac{Q}{2\pi R^3}$ è la *velocità ridotta* U , allora $\gamma_r = kU$, dove k è una costante che per i fluidi newtoniani vale $k = 8$
- **Diffusione in soluzioni concentrate**: $J_{ix} = \frac{-D_{ij}C}{RT} \nabla(\mu_i)$, con $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i$ il potenziale chimico del componente i -esimo e $a_i = \gamma \cdot x_i$ l'attività del componente i -esimo. Quindi $J_{ix} = \frac{-D_{ij}C}{RT} \nabla(\ln \gamma \cdot x_i)$.
- **Diffusione nel gas**: $N_1 = -CD_{ij} \nabla(x_1) + (N_1 + N_2)$. Di solito $N_2 = 0$, quindi $N_{1y} = \frac{-CD_{ij}}{1-x_1} \cdot \frac{dx_1}{dy}$. $\frac{dx_1}{1-x_1} = \ln(1-x_1) = C_1 y + C_2$ che si trovano con le condizioni al contorno.
- **Prima legge di Fick per soluzioni diluite**: J_{ix} (o N_{ix} , per $v = 0$) = $-D_{ij} \frac{dC_i}{dx}$ (in tutte le direzioni si considera il gradiente di concentrazione).
 - Per gas ideali: $J_i = -CD_{ij} \nabla(x_i)$
 - Quando c'è la convezione oltre alla diffusione: $N_i = -D_{ij} \nabla(C_i) + C_i \mathbf{v}_s$, con \mathbf{v}_s la velocità del solvente.
- **Diffusione in stato stazionario in una dimensione**: In coordinate rettangolari $\frac{\delta C_i}{\delta t} = \frac{-\delta N_{ix}}{\delta x} + R_i$, con R_i le reazioni chimiche.
- **Diffusione in stato stazionario in una dimensione (seconda legge di Fick)**: $\frac{\delta C_i}{\delta t} = \frac{\delta^2 C_i}{\delta x^2}$
In stato stazionario il primo membro è nullo perché è tutto costante rispetto al tempo; se quindi il primo membro è uguale a zero, anche la derivata seconda è uguale a zero e quindi $C_i = Ax + B$ e A e B sono costanti che si trovano con le condizioni al contorno. Si trova che il flusso diffusivo del soluto attraverso le membrane è: $N_{ix} = -D_{i,eff} \frac{dC_i}{dx} = \frac{D_{i,eff}(\phi)}{L \cdot (C_0 - C_L)}$
- **Pressione valida solo per flussi laminari di fluidi newtoniani**: $\Delta P = 32\mu \langle v \rangle \frac{L}{D^2}$, con D il diametro del condotto.
- **Conservazione della massa/materia, equazione di continuità**: $\frac{\delta \rho}{\delta t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$
- **Conservazione della massa per fluidi incomprimibili**: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (ρ è costante)
- **Conservazione della massa per una miscela, bilancio in termini molari**: $\frac{\delta C_i}{\delta t} = -\nabla \cdot N_i + R_i$
- **Conservazione della massa per soluzioni diluite**: $\frac{\delta C_i}{\delta t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(C_i) = D_{ij} \nabla^2(C_{ij}) + R_i$
- **Flusso diffusivo e convettivo allo strato limite**: $N_{iy}(y=0) \sim \frac{D_{ij}C_0}{L} \cdot Sc^{\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{1}{2}}$. In termini di coefficiente di trasporto medio di materia $N_{iy}(y=0) = km \cdot \Delta C_i$
- **Coefficiente di trasporto di materia medio**: $k_m = \frac{1}{S} \int_S k_{loc} dS$
 - k_{loc} di flussi laminari lungo un piatto piano: $0.323 \frac{D_{ij}}{z} \cdot Sc^{\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{1}{2}}$
 - k_{loc} di flussi laminari in un cilindro: $3.657 \frac{D_{ij}}{diametro}$
 - k_{loc} di flussi laminari in un canale: $3.1058 \frac{D_{ij}}{4H} \cdot \left(\frac{\langle v \rangle H^2}{4D_{ij}z}\right)^{\frac{1}{3}}$, con $2H$ l'altezza del canale
- **Legge di Henry**
 - in funzione della concentrazione molare del soluto: $C = kP$

- in funzione della frazione molare del soluto: $P = kx$, dove P è la pressione parziale

- **Trasporto di massa attraverso le membrane**

- portata molare del sangue: $dM_i = -Q_S dC_{iS}$
- portata molare del dializzato: $dM_i = Q_D dC_{iD}$ (caso equicorrente col sangue), $dM_i = -Q_D dC_{iD}$ (caso controcorrente col sangue)
- portata molare dello scambio attraverso la membrana: $dM_i = k_0(C_{iS} - C_{iD})dA_m$ con k_0 il coefficiente di trasporto di massa (conduttanza), il cui reciproco (resistenza) è $\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_D} + \frac{1}{P_m} + \frac{1}{k_S}$, dove k_D è la conduttanza del dializzato, k_S la conduttanza del sangue e P_m la permeabilità della membrana

- **Velocità di reazione**

- Definizione: $R_i = \frac{dN_i}{Vdt} = \frac{dC_i}{dt}$, con V il volume che può essere sostituito con la superficie S a seconda del sistema considerato
- In stato stazionario: $-R_i = \frac{Q(C_{i0} - C_i)}{V}$
- Cinetica di reazione: $R = kC_A^a C_B^b C_C^c$ (gli esponenti si trovano con $a = \frac{\ln R}{\ln C_A}$)
- Reazioni di primo ordine (del tipo $A \rightarrow B + C$): $\frac{-dC_A}{dt} = k_1 C_A$
- Reazioni del secondo ordine (del tipo $A + A \rightarrow A_2$): $\frac{-dC_A}{dt} = k_2 C_A^2$
- Reazioni del secondo ordine (del tipo $A + B \rightarrow AB$): $\frac{-dC_A}{dt} = k_2 C_A C_B$
- Reazioni reversibili (del tipo $A + B \leftrightarrow C$): $\frac{-dC_C}{dt} = k_2 C_A C_B - K_{-1} C_C$
- Reazioni sequenziali (del tipo $A \rightarrow B \rightarrow C$): $\frac{-dC_A}{dt} = k_1 C_A$; $\frac{dC_B}{dt} = k_1 C_A - k_2 C_B$; $\frac{dC_C}{dt} = k_2 C_B$

- **Equazione di Michaelis-Menten (cinetiche enzimatiche):** $R_S = \frac{R_{max} C_S}{K_M + C_S}$, con $K_M = k_{-1} \frac{+k_2}{k_1}$

- **Bilancio di materia per il substrato:** $\frac{\delta C_i}{\delta t} = R_S$