COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
28 Giugno 2016

Esercizio 1. [10.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+s^2}{s(1-s)^3}$$

è richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$, individuando asintoti ed intersezioni con gli assi;
- studiare la stabilità del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare del parametro reale K, ricorrendo al Criterio di Nyquist;
- per i valori di K per cui non c'è stabilità, si discuta il numero di poli a parte reale positiva e/o nulla.

Esercizio 2. [8 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s-6)}$$

è richiesto il tracciamento del luogo delle radici positivo e negativo, calcolando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, e studiando di conseguenza la stabilità al variare di K sui numeri reali del sistema retroazionato $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$.

Esercizio 3. [7 punti] Data il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^3}$$

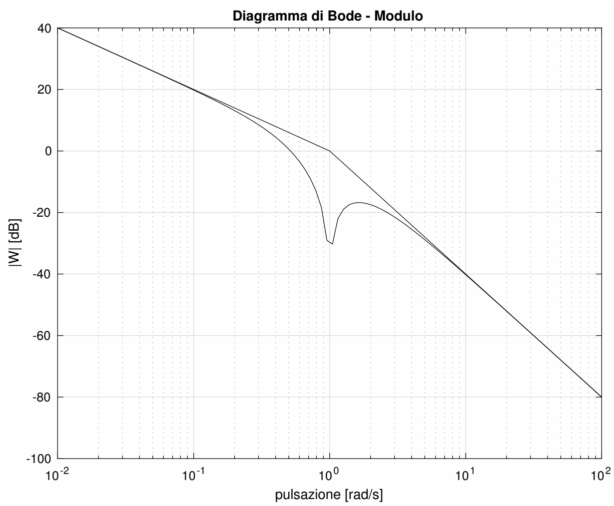
è richiesto

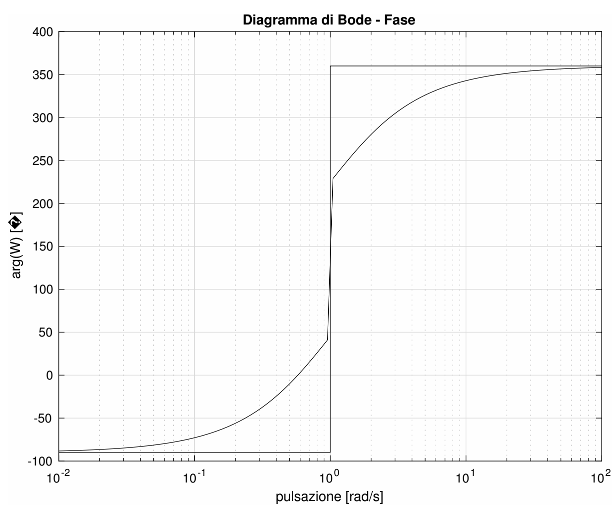
- il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ proprio che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-3}$ al gradino, mentre il sistema in catena aperta abbia $\omega_a \simeq 100\sqrt{10}$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$;
- il progetto di un controllore stabilizzante $C_2(s)$ di tipo PID (eventualmente solo P, PI, o PD) che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1, con $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.01$ alla rampa lineare, mentre il sistema in catena aperta abbia $\omega_a \simeq 1000$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5 punti] Dato un sistema di funzione di trasferimento propria $G(s) \in \mathbb{R}(s)$, sia $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema ottenuto da $G(s)$ per retroazione unitaria negativa. Assumendo $W(s)$ propria, BIBO stabile e priva di zeri in 0, si dimostri che $W(s)$ è di tipo k se e solo se $G(s)$ contiene esattamente k integratori, e si determini l'espressione dell'errore a regime permanente al segnale canonico cui il sistema risponde con errore finito e non nullo.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Il diagramma di Bode asintotico del modulo ha pendenza -20dB/dec prima di $\omega = 1$ rad/s e -40dB/dec dopo, mentre il diagramma reale ha un picco di antirisonanza infinito in $\omega = 1$ rad/s. La fase asintotica passa invece da $-90°$ a $360°$ in $\omega = 1$, mentre quella reale sale da $-90°$ fino a $+45°$ in $\omega = 1$, dove una discontinuità di $180°$ la riporta a $225°$, per poi salire fino a $360°$.





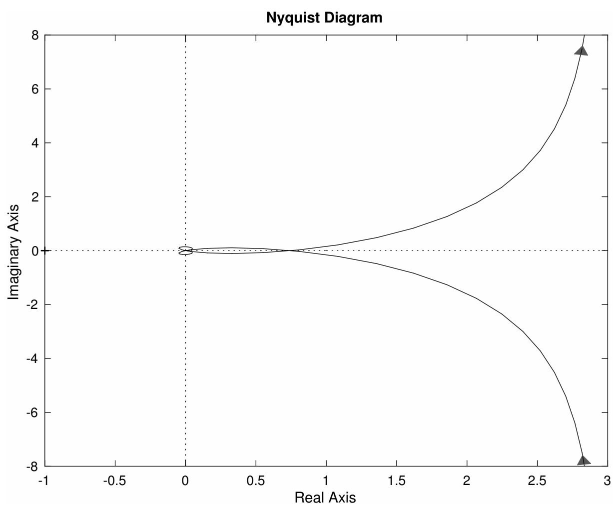
Si noti che il picco (nel diagramma di Bode delle ampiezze) che appare finito è in realtà illimitato verso il basso.

Calcolando $G(j\omega)$ si ottiene

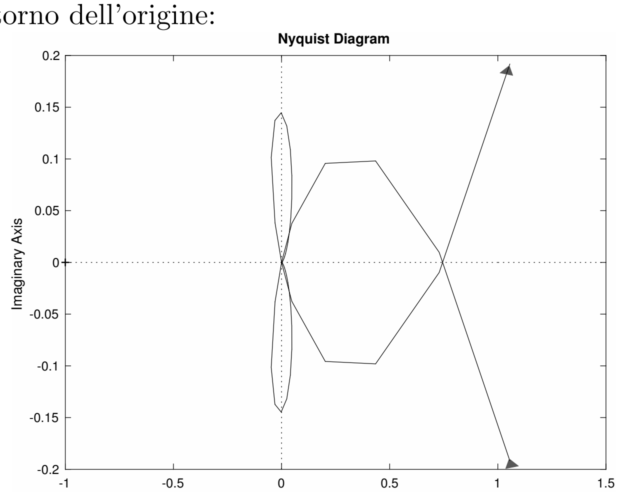
$$G(j\omega) = \frac{(3-\omega^2)(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^3} + j\frac{(3\omega^2-1)(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^3}$$

La parte reale si annulla per $\omega = 1$ (dove si annulla anche quella immaginaria, quindi il diagramma passa per l'origine) e per $\omega = \sqrt{3}$, dove vale $G(j\omega) = -j\frac{1}{4\sqrt{3}}$, mentre quella immaginaria per $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (oltre ad $\omega = 1$), dove vale $G(j\omega) = \frac{3}{4}$. Infine, per $\omega \to 0^+$, la parte immaginaria tende a $-\infty$, mentre quella reale a $+3$, da cui la presenza di un asintoto verticale centrato in $+3$.

Nyquist arriva dall'infinito in basso, con asintoto quello appena calcolato, attraversa l'asse reale per $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nel punto $s = \frac{3}{4}$, si porta nel primo quadrante e con tangente la bisettrice del primo quadrante passa per $s = 0$ per $\omega = 1$, quindi rispunta nel terzo quadrante con la stessa direzione, attraversa l'asse immaginario per $\omega = \sqrt{3}$ in $s = -j\frac{1}{4\sqrt{3}}$, si porta nel quarto quadrante ed infine torna asintoticamente in $s = 0$ per $\omega \to +\infty$, con tangente orizzontale. In figura il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$:



Dettaglio nell'intorno dell'origine:



Prendiamo ora in esame la stabilità BIBO del sistema retroazionato con K variabile. Valutando il numero di giri attorno a $-\frac{1}{K}$, dopo aver aggiunto il semicerchio orario all'infinito dovuto al polo in $s = 0$, si trova $N = 0$ per $K > 0$, mentre $N = +1$ per $K < -\frac{4}{3}$ e $N = -1$ per $0 > K > -\frac{4}{3}$. Poichè $n_{G_+} = 3$, si ha $n_{W_+} = 2, 3, 4$, a seconda che sia $K < -\frac{4}{3}$, $K > 0$, $0 > K > -\frac{4}{3}$, quindi non si ha mai BIBO stabilità ed un numero di poli a parte reale positiva pari a $2, 3, 4$ nei tre casi indicati.

Per $K = 0$ i poli di $W(s)$ coincidono con quelli di $G(s)$ (e quindi sono $0, 1, 1, 1$, con un polo nullo e tre positivi) oppure, se si vuole interpretare $W(s) = 0$ per $K = 0$, non abbiamo nessun polo e BIBO stabilità. Per $K = -\frac{4}{3}$, si ha il passaggio per il punto critico per $\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, e quindi due poli immaginari puri $s = \pm j\frac{1}{\sqrt{3}}$. Il polinomio $d(s) - \frac{4}{3}n(s)$ deve quindi essere divisibile per $\left(s^2 + \frac{1}{3}\right)$, ed infatti esso fattorizza come $\left(s^2 + \frac{1}{3}\right)(-s^2 + 3s - 4)$, dove l'altro polinomio di secondo grado ha due radici complesse a parte reale positiva, quindi abbiamo due poli immaginari puri e due a parte reale positiva. Si noti che, più semplicemente, appurato che 2 radici hanno parte reale nulla, le altre 2 devono, per continuità (si pensi al Luogo delle Radici ...), essere a parte reale positiva, visto che se K è leggermente più piccolo o più grande di $-\frac{4}{3}$ si hanno 2 oppure 4 poli a parte reale positiva.

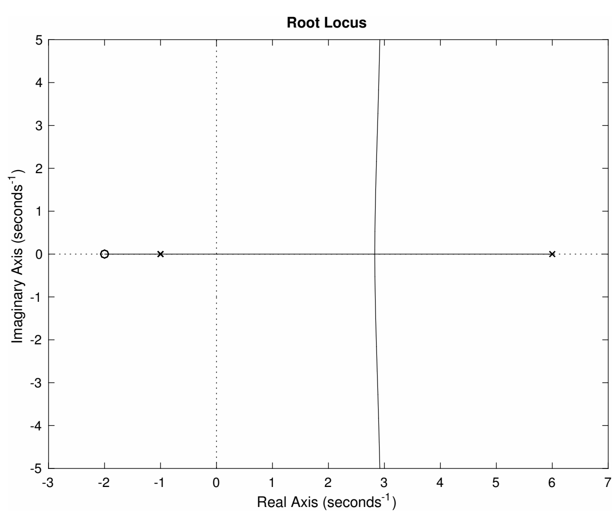
Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi porge facilmente

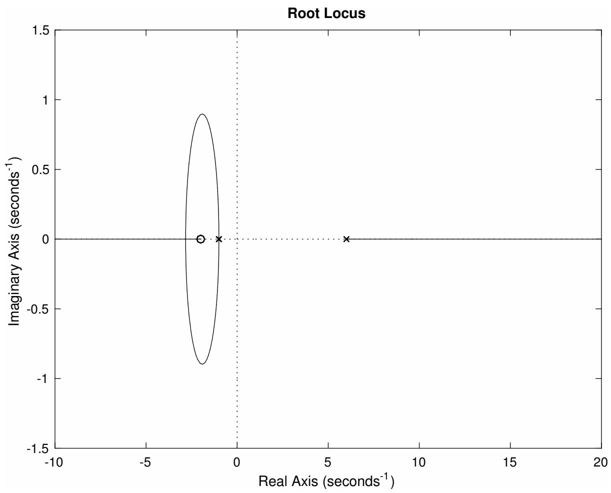
$$(s + 1)(s^2 - 8) = 0$$

che ha tre soluzioni: $s = -1$ (punto doppio iniziale del luogo, $K = 0$), $s = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (corrispondente a $K = 16\sqrt{2} - 13 \simeq 9.6 > 0$, quindi nel luogo positivo), $s = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$ (corrispondente a $K = -16\sqrt{2} - 13 \simeq -35.6 < 0$, quindi nel luogo negativo). Per determinare eventuali intersezioni con l'asse immaginario, poniamo $s = j\omega$ nell'equazione del luogo, ottenendo

$$2(K - 3 + 2\omega^2) + j\omega(K - 11 - \omega^2) = 0$$

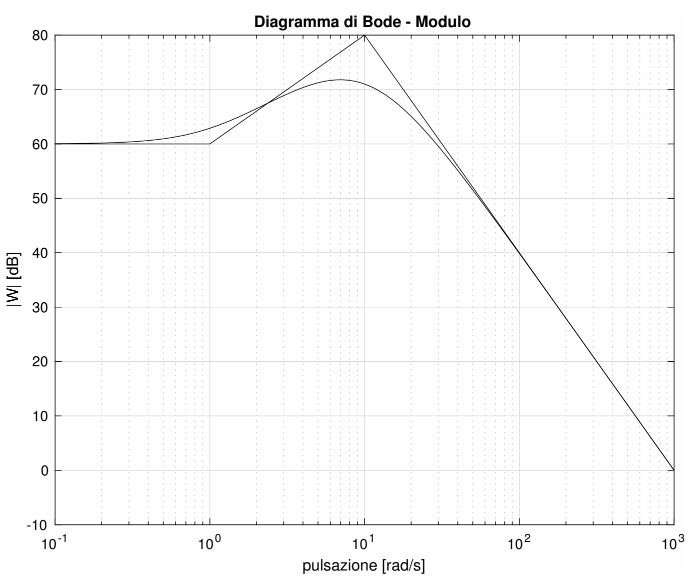
da cui $\omega = 0$ che implica $K = 3$ e $\omega^2 = K - 11$ che implica $K = \frac{25}{3}$, che a sua volta implica $3\omega^2 + 8 = 0$, priva di soluzioni reali. Quindi il luogo interseca l'asse immaginario solo in $s = 0$ per $K = 3 > 0$ (e quindi nel luogo positivo). Infine abbiamo due asintoti verticali centrati in $s = 3$ (coordinata x_B del baricentro) nel luogo positivo, ed i semiassi reali positivo e negativo come asintoti nel luogo negativo. I luoghi positivo e negativo sono indicati in figura

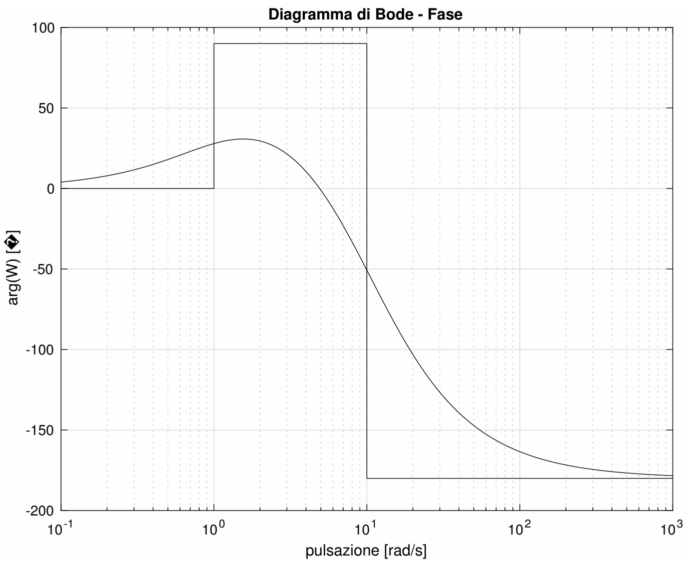




Il luogo positivo ha quindi due rami che, partendo da $s = -1$ e da $s = 6$, si muovono sull'asse reale, attraversando l'origine per $K = 3$, ed incontrandosi nel punto doppio $s = 2\sqrt{2}$ per $K \simeq 9.6$, per poi andare lungo le direzioni degli asintoti verticali senza mai più intersecare l'asse immaginario. Il terzo ramo dal polo $s = -1$ si dirige verso lo zero in $s = -2$. Quindi per ogni $K > 0$ abbiamo almeno un ramo del luogo sul semipiano destro, e non c'è mai stabilità del sistema retroazionato. Il luogo negativo ha invece un ramo che da $s = 6$ si dirige sull'asse reale verso $+\infty$, mentre gli altri due rami escono dal polo doppio $s = -1$ sul piano complesso, rientrano nell'asse reale in $s = -2\sqrt{2}$ per $K \simeq -35.6$, quindi un ramo si dirige verso lo zero in $s = -2$, l'altro verso $-\infty$. In questo caso non ci sono mai intersezioni con l'asse immaginario, e sempre un ramo nel semipiano destro, da cui non c'è mai stabilità del sistema retroazionato neppure per $K < 0$.

Esercizio 3. Nel primo caso si ha (dopo aver adottato $C'(s) = 100$ per sistemare il tipo e l'errore a regime) $\omega_a = 1000$ rad/s e m_ψ di poco superiore a zero gradi.





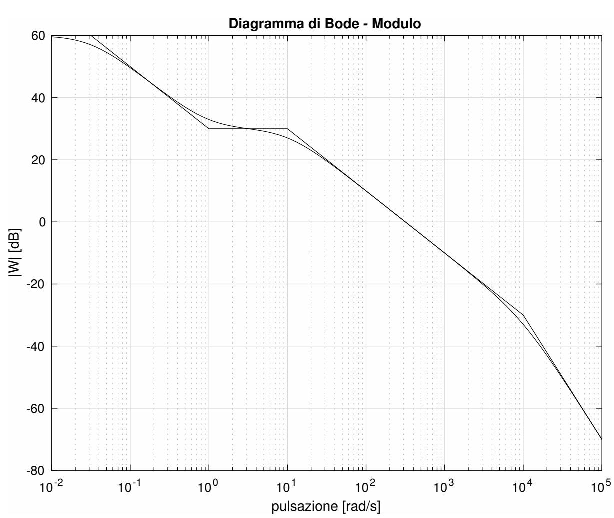
Quindi occorre una rete a sella per abbassare ω_a ed aumentare m_ψ. Una possibile soluzione (che fa ricorso ad uno zero doppio e che abbassa il modulo di 40dB per poi rialzarlo di 20dB) è la seguente

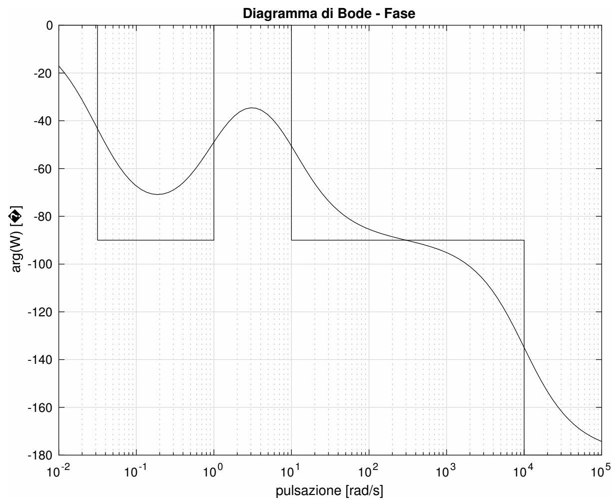
$$C_1(s) = 100\frac{\left(1+\frac{s}{10\sqrt{10}}\right)^2}{(1+\sqrt{10}s)\left(1+\frac{s}{10^4}\right)}$$

che permette il soddisfacimento di tutti i requisiti (stabilità compresa per il Criterio di Bode). Si noti che, cercando di introdurre il massimo numero di cancellazioni zero/polo ammissibili, si perverrebbe ad una diversa soluzione che funzionerebbe altrettanto bene

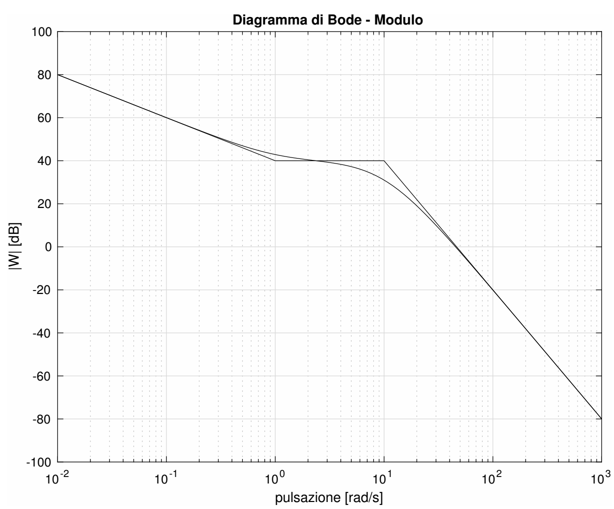
$$C_1(s) = 100\frac{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}{(1+10\sqrt{10}s)\left(1+\frac{s}{10^4}\right)}.$$

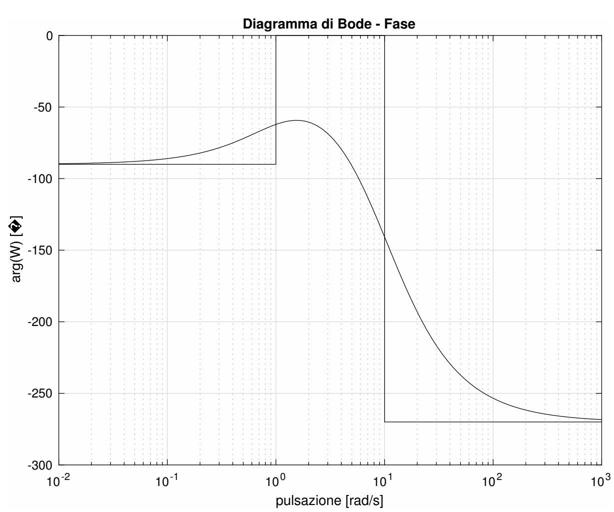
Qui di seguito vengono riportati i diagrammi di Bode in catena aperta ottenuti in corrispondenza alla seconda soluzione:





Nel secondo caso è necessario un termine $C'(s) = \frac{10}{s}$ per sistemare il tipo e l'errore alla rampa, che rende quasi di $-90°$ il margine di fase in $\omega = 1000$ rad/s, per cui sono necessari due zeri (e quindi un PID) per sistemare la fase:

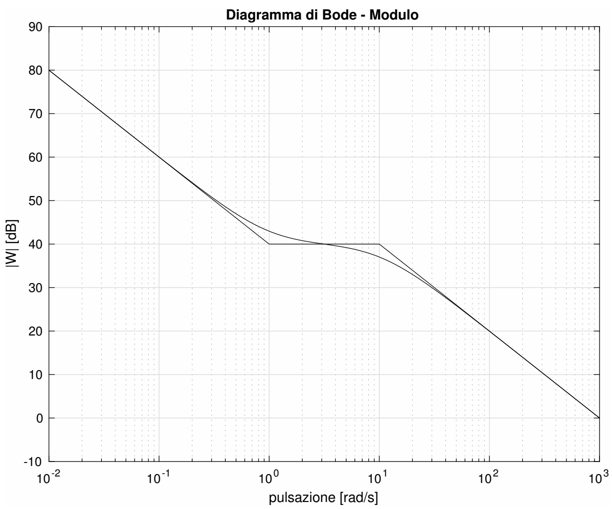


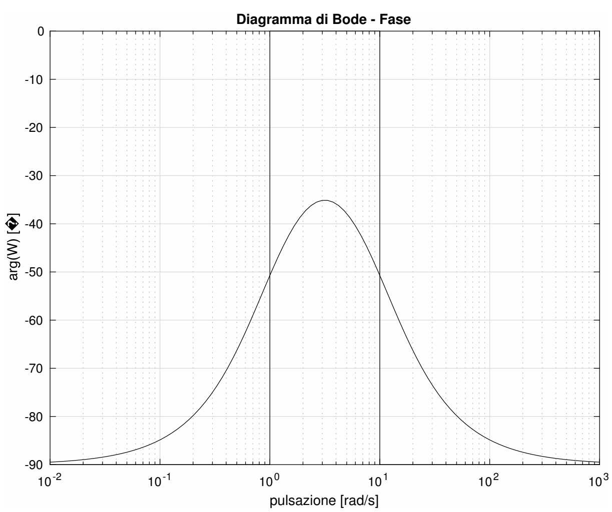


Ad esempio, la soluzione seguente (che introduce una doppia cancellazione zero-polo ammissibile) permette il soddisfacimento di tutti i requisiti (compresa la stabilità per il Criterio di Bode)

$$C_2(s) = 10\frac{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}{s} = \frac{10}{s} + 2 + \frac{s}{10}$$

In figura sono riportati i diagrammi di Bode finali:





Teoria. Vedi Libro di Testo (II Edizione), a pag. 255-256.