Esercizi Tutorato Algebra

chiara.malerba@studenti.unipd.it

a.a. 2022/2023

Esercitazione dell'11 Maggio 2023

1. Dati i vettori $v1 = (2, -3, 1, 0)$ e $v2 = (0, -1, 1, -1)$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $Ker(f) = Im(f) =< v1, v2 >$.

   - Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di R^4.
   - Si dimostri che f possiede l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 4, ma che essa non è diagonalizzabile.

2. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v1, v2, v3, v4\}$ e sia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ la funzione lineare definita da $f(v1) = 2v1 + 3v2, f(v2) = 3v1 + 2v2, f(v3) = v1 + 3v3 + 2v4, f(v4) = 2v1 - v2 + 2v3 + 3v4$. Si determinino tutti gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.
3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(v1) = w1, f(v2) = w2ef(v3) = w3$, ove $v1 = (1, 2, 3), v2 = (2, -1, 0), v3 = (0, -1, 1), w1 = (6, 4, 10), w2 = (5, -1, 4), w3 = (-1, -2, -3)$.
   - Si scriva la matrice di una tale f rispetto alla base canonica di R^3.
   - Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
   - Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.
4. Siano dati i vettori $v1 = (1, 1, 1), v2 = (2, 0, 1), v3 = (1, 1, 3)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(v1) = 3v1, f(v2) = 2v2ef(v3) = 2v3 + 2v2$.
   - Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
   - Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
   - Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.
5. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -t & 3+t & -t \\ 3-t & t & 3-t \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$ si stabilisca se esistono dei valori di t reali per i quali A è invertibile e si determini per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tali valori si determini una matrice diagonale D e una invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.