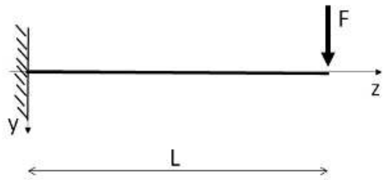
**BIOMECCANICA A.A. 2024-25**
**STATI TENSIONALI E DEFORMATIVI DI SISTEMI DI TRAVI**

## 1. CALCOLO DELLA DEFORMATA FLESSIONALE

Si calcoli l'abbassamento e la rotazione nella sezione d'estremità della struttura in figura, soggetta alla forza concentrata F, mediante il procedimento di integrazione dell'equazione della linea elastica. Si consideri una rigidezza flessionale costante pari a EJ.




In base alle condizioni di equilibrio il momento flettente in una sezione generica di ascissa z è pari a:

$$M(z) = -F(L-z)$$

Richiamando la relazione tra momento e curvatura

$$M = -EJy''$$

si può scrivere:

$$-F(L-z) = -EJy''$$

ottenendo quindi l'equazione differenziale:

$$y'' = \frac{FL}{EJ} - \frac{Fz}{EJ}$$

Procedendo con l'integrazione doppia si ricavano gli andamenti della rotazione dell'asse della trave e del suo spostamento trasversale:

$$y' = \frac{FL}{EJ}z - \frac{1}{2}\frac{Fz^2}{EJ} + C_1$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{FL}{EJ}z^2 - \frac{1}{6}\frac{Fz^3}{EJ} + C_1 z + C_2$$

Le costanti di integrazione sono determinate attraverso l'imposizione delle condizioni di vincolo:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{FL}{EJ}\cdot 0 - \dfrac{1}{2}\dfrac{F\cdot 0^2}{EJ} + C_1 = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{FL}{EJ}\cdot 0^2 - \dfrac{1}{6}\dfrac{F\cdot 0^3}{EJ} + C_1\cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Gli andamenti di rotazione e abbassamento sono quindi dati da:

$$y'(z) = \frac{FL}{EJ}z - \frac{1}{2}\frac{Fz^2}{EJ}$$

$$y(z) = \frac{1}{2}\frac{FL}{EJ}z^2 - \frac{1}{6}\frac{Fz^3}{EJ}$$

In corrispondenza della sezione di estremità libera si realizzano i valori massimi, che sono pari a:

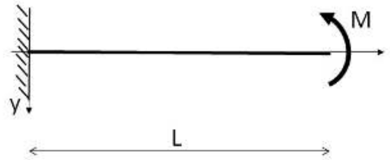
$$y'(L) = \frac{FL}{EJ}L - \frac{1}{2}\frac{FL^2}{EJ} = \frac{FL^2}{EJ}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{FL^2}{EJ}$$

$$y(L) = \frac{1}{2}\frac{FL}{EJ}L^2 - \frac{1}{6}\frac{FL^3}{EJ} = \frac{FL^3}{EJ}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\frac{FL^3}{EJ}$$

L'andamento qualitativo della deformata è rappresentato nella seguente figura.


## 2. CALCOLO DELLA DEFORMATA FLESSIONALE

Si calcoli la traslazione verticale e la rotazione nella sezione d'estremità della struttura in figura, soggetta alla coppia M, mediante il procedimento di integrazione dell'equazione della linea elastica. Si consideri una rigidezza flessionale costante pari a EJ.




Sulla trave agisce un momento flettente costante e positivo pari a M. L'equazione della linea elastica è quindi data da:

$$EJy'' = -M$$

Integrando si ottiene:

$$EJy' = -Mz + C_1$$

$$EJy = -\frac{1}{2}Mz^2 + C_1 z + C_2$$

Le condizioni di vincolo consentono di scrivere:

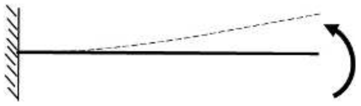
$$\begin{cases} EJy'(0) = 0 \\ EJy(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -M \cdot 0 + C_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Nella sezione di estremità si avrà pertanto una rotazione antioraria e una traslazione verso l'alto dati da:

$$y' = -\frac{ML}{EJ}$$

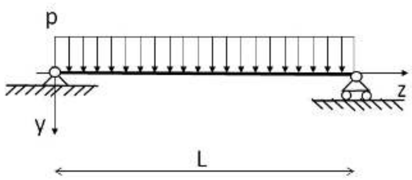
$$y = -\frac{ML^2}{2EJ}$$

L'andamento della deformata è disegnato in forma qualitativa nella figura seguente:



## 3. CALCOLO DELLA DEFORMATA FLESSIONALE

Si calcoli l'abbassamento nella sezione di mezzeria della struttura in figura mediante il procedimento di integrazione dell'equazione della linea elastica. Si consideri una rigidezza flessionale costante pari a EJ.




L’andamento del momento flettente è stato ricavato in un precedente esercizio, ottenendo:

$$M(z)=\frac{1}{2}pLz-\frac{1}{2}pz^2$$

Considerando la relazione tra momento e curvatura si perviene alla seguente equazione differenziale:

$$EJy''=\frac{1}{2}pz^2-\frac{1}{2}pLz$$

L’integrazione doppia consente di ricavare:

$$EJy'=\frac{1}{6}pz^3-\frac{1}{4}pLz^2+C_1$$
$$EJy=\frac{1}{24}pz^4-\frac{1}{12}pLz^3+C_1z+C_2$$

Le condizioni al contorno determinate dai vincoli impongono che nelle sezioni z=0 e z=L gli abbassamenti siano nulli:

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y(L)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{24}p\cdot 0^4-\frac{1}{12}pL\cdot 0^3+C_1\cdot 0+C_2=0 \\ \frac{1}{24}p\cdot L^4-\frac{1}{12}pL\cdot L^3+C_1\cdot L+C_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{24}pL^3 \\ C_2=0 \end{cases}$$

L’andamento dello spostamento trasversale è quindi dato da:

$$y(z)=\frac{1}{EJ}\left(\frac{1}{24}pz^4-\frac{1}{12}pLz^3+\frac{1}{24}pL^3z\right)$$

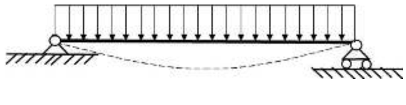
In corrispondenza della sezione di mezzeria si ottiene:

$$y\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{pL^4}{EJ}\left(\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{384}\frac{pL^4}{EJ}$$

Si noti come nella sezione di simmetria risulta nulla, come risulta da:

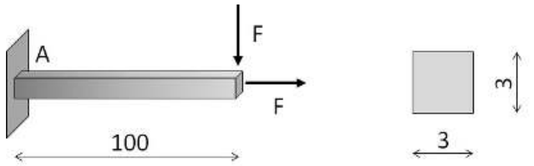
$$y\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{pL^3}{EJ}\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\right)=0$$

Ciò è coerente con la simmetria della struttura e del carico rispetto all’asse di simmetria. La deformata è disegnata qualitativamente nella seguente figura.



## 4. STATI TENSIONALI E DEFORMABILITÀ

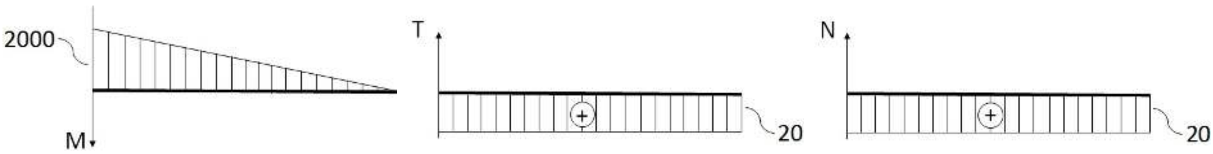
Si calcoli il regime deformativo indotto dalle forze F = 20 N agenti sulla struttura in figura (misure in mm), composta da una lega di Titanio con modulo elastico E=110'000 MPa, ipotizzando un comportamento elastico. Si calcolino, inoltre, le massime tensioni normali e tangenziali agenti nella sezione più sollecitata, verificando l’ammissibilità del comportamento elastico. Per la lega di Titanio si assumano limiti elastici pari a $\sigma_{sn}$=800 MPa e $\tau_{sn}$=462 MPa. Si considerino le sole deformabilità flessionale e assiale, trascurando la deformabilità tagliante della trave.




I valori di area e di momento d'inerzia della sezione sono:

$$A = 3^2 = 9\,\text{mm}^2 \qquad J = \frac{1}{12}3^4 = 6.75\,\text{mm}^4$$

Il regime delle sollecitazioni è indicato nei seguenti diagrammi, con valori di momento espressi in Nmm e valori di taglio e sollecitazione assiale espressi in N:




Lo sforzo assiale costante induce un allungamento massimo della sezione di estremità libera pari a:

$$\xi = \frac{N}{EA}L = \frac{20}{110'000 \cdot 9} \cdot 100 = 0.002\,\text{mm}$$

L'abbassamento della medesima sezione indotto dalla flessione è dato da:

$$\eta = \frac{FL^3}{3EJ} = \frac{20 \cdot 100^3}{3 \cdot 110'000 \cdot 6.75} = 8.99\,\text{mm}$$

La rotazione (oraria) è invece pari a:

$$\varphi = \frac{FL^2}{2EJ} = \frac{20 \cdot 100^3}{3 \cdot 110'000 \cdot 6.75} = 0.1347$$

angolo pari a circa 7.7°.
La sezione con maggiore momento flettente è quella all'incastro. In tale sezione i punti con valore massimi di tensione normale sono posti nei bordi superiore e inferiore della sezione. Al bordo superiore si ha:

$$\sigma_{sup} = \frac{N}{A} + \frac{M}{J}y_{sup} = \frac{20}{9} + \frac{-2000}{6.75}(-1.5) = 2.2 + 444.4 = 446.6\,\text{MPa}$$

Al bordo inferiore si ha invece:

$$\sigma_{sup} = \frac{N}{A} + \frac{M}{J}y_{sup} = \frac{20}{9} + \frac{-2000}{6.75}(+1.5) = 2.2 - 444.4 = -442.2\,\text{MPa}$$

In tali punti le tensioni tangenziali sono nulle e i valori di tensione normale possono confrontarsi direttamente con il limite elastico di 800 N/mm$^2$. Essendo inferiori a tale valore, il comportamento in tali punti è elastico. Nelle altre sezioni le tensioni normali saranno comprese nei limiti sopra indicati per la sezione d'incastro, poiché il momento flettente si riduce spostandosi verso la sezione d'estremità libera.
La massima tensione tangenziale si ha in corrispondenza dell'asse neutro della flessione. Il momento statico di metà sezione rispetto a tale asse è:

$$S = 3 \cdot 1.5 \cdot \frac{1.5}{2} = 3.375\,\text{mm}^3$$

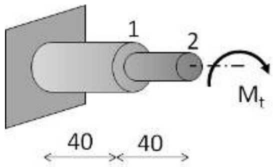
In base alla formula di Jourawsky si ottiene pertanto:

$$\tau = \frac{TS}{Jb} = \frac{20 \cdot 3.375}{6.75 \cdot 3} = 3.3\,\text{MPa}$$

valori del tutto trascurabili rispetto ai limiti elastici. In base agli andamenti delle tensioni normali e delle tensioni tangenziali sulla sezione si può ritenere che anche nei punti dove sono presenti entrambe le componenti il regime di tensioni sia nei limiti del comportamento elastico.

## 5. DEFORMABILITÀ TORSIONALE

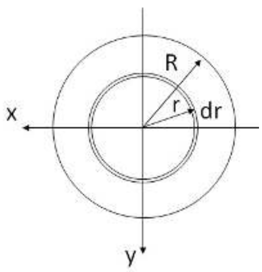
Si calcoli la rotazione nelle sezioni 1 e 2 della struttura in figura (dimensioni in mm), composta da sezioni circolari di diametro 10 mm e 8 mm, incastrata ad un estremo e soggetta ad un momento torcente $M_t$ di 15 kNmm nell'estremità libera. Si consideri la struttura composta da una lega di Titanio avente modulo elastico E=110'000 MPa, coefficiente di Poisson $\nu$=0.33 e limite elastico delle tensioni tangenziali pari a $\tau_{sn}$=364 MPa.




Per il calcolo della deformazione è necessario ricavare il momento polare delle sezioni:

$$J_p = \int_A r^2 dA$$

Per una sezione generica di raggio R il calcolo può essere fatto come segue.




Considerata una corona circolare di raggio r e spessore dr, la sua area è $2\pi r \cdot dr$ e l'integrale precedente può essere espresso come:

$$J_p = \int_0^R 2\pi r \cdot r^2 dr = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \frac{2\pi}{4}\left[r^4\right]_0^R = \frac{\pi}{2}R^4$$

Per la sezione di 10 mm di diametro si ottiene quindi:

$$J_p = \frac{\pi}{2}R^4 = \frac{\pi}{2}5^4 = 981.7\,\text{mm}^4$$

Per la sezione di 8 mm di diametro si ha invece

$$J_p = \frac{\pi}{2}R^4 = \frac{\pi}{2}4^4 = 402.1\,\text{mm}^4$$

Il modulo elastico tangenziale si ricava come:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{110'000}{2(1+0.33)} = 41'353\,\text{MPa}$$

Ipotizzando un comportamento elastico, la sezione intermedia ruota rispetto alla sezione di incastro di un angolo pari a:

$$\theta_1 = \frac{M_t}{GJ_p} L_1 = \frac{15'000 \cdot 40}{41'353 \cdot 981.7} = 0.0148$$

La rotazione della sezione libera è data da:

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{M_t}{GJ_p} L_2 = 0.0148 + \frac{15'000 \cdot 40}{41'353 \cdot 402.1} = 0.0148 + 0.0361 = 0.051$$

Gli angoli sono espressi in radianti.
Le massime tensioni tangenziali si realizzano nei punti di massimo diametro delle sezioni. Nel tratto dall'incastro alla sezione 1 si ha:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_p} R = \frac{15'000 \cdot 5}{981.7} = 76.4\ \mathrm{N/mm^2}$$

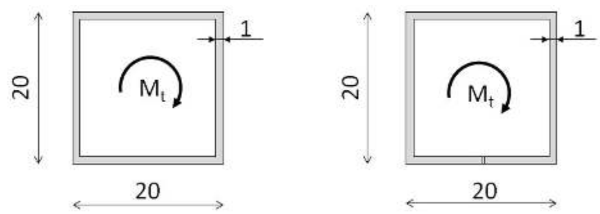
Nel tratto compreso tra le sezioni 1 e 2 risulta invece.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_p} R = \frac{15'000 \cdot 4}{402.1} = 149.2\ \mathrm{N/mm^2}$$

Poiché le massime tensioni sono inferiori al limite elastico, l'ipotesi di comportamento elastico della struttura in base alla quale sono state calcolate le rotazioni è corretta.

## 6. TENSIONI TANGENZIALI INDOTTE DA MOMENTO TORCENTE SU SEZIONI IN PARETE SOTTILE

Si calcolino le massime tensioni tangenziali indotte da un momento torcente $M_t$ pari a 0.1 kNm agente sulle sezioni in parete sottile rappresentate in figura (dimensioni in mm).




La sezione a sinistra è di tipo chiuso, per cui la tensione massima si ottiene in base alla formula di Bredt:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2\Omega\delta_{min}}$$

dove $\Omega$ è l'area racchiusa dalla linea media della sezione e $\delta_{min}$ lo spessore minimo delle pareti della sezione. Dato che lo spessore è costante si ottiene:

$$\tau = \frac{100'000}{2\left[(20-1)\cdot(20-1)\right]\cdot 1} = 138.5\ \mathrm{MPa}$$

La sezione a destra è di tipo aperto e la tensione tangenziale massima è data da:

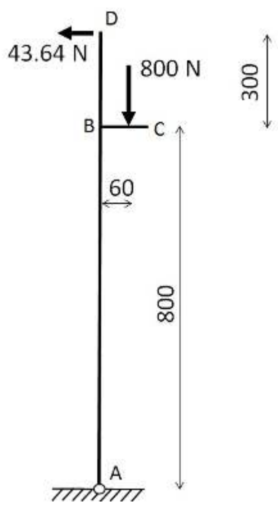
$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}\sum_i a_i \cdot b_i^3} \cdot b_{max}$$

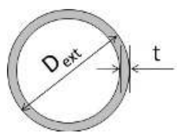
dove $a_i$ e $b_i$ rappresentano lunghezza e spessore dei vari elementi che compongono la sezione, mentre $b_{max}$ è lo spessore maggiore tra questi elementi. Dato che lo spessore è costante si ottiene:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\frac{1}{3}\sum_i a_i \cdot b_i^3} \cdot b_{max} = \frac{100'000}{\frac{1}{3}\left[3\cdot\left(19\cdot 1^3\right)+2\cdot\left(9.5\cdot 1^3\right)\right]} \cdot 1 = 3947.4\,\text{MPa}$$

## 7. VERIFICA DI RESISTENZA DI UNA STAMPELLA

Con riferimento alla stampella in figura (con dimensioni espresse in mm) e soggetta alla condizione di carico indicata si verifichi se gli stati tensionali agenti nelle sezioni maggiormente sollecitate sono compatibili con il comportamento elastico della struttura. Si consideri la struttura composta da tubi di sezione circolare cava, con diametro esterno $D_{ext}$=20 mm e spessore t=1.5 mm. Si utilizza una lega d'acciaio con tensione normale di snervamento $\sigma_{sn}$=285 N/mm$^2$ e tensione tangenziale di snervamento $\tau_{sn}$=164.5 N/mm$^2$.




Il diametro interno della sezione si calcola come:

$$D_{int}^2 = D_{ext} - 2t = 20 - 2\cdot 1.5 = 17\,\text{mm}$$

L'area della sezione resistente A è data da:

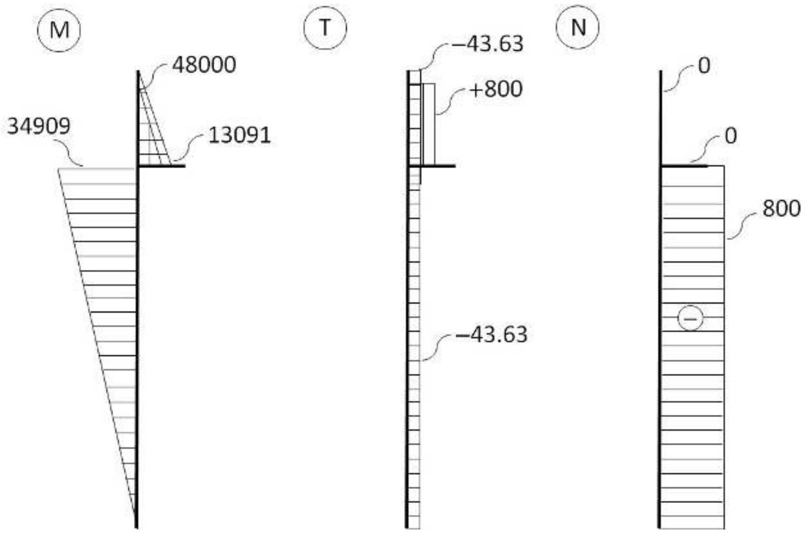
$$A = \frac{\pi}{4}\left(D_{ext}^2 - D_{int}^2\right) = \frac{\pi}{4}\left(20^2 - 17^2\right) = 87.1\,\text{mm}^2$$

Il momento d'inerzia J e il momento resistente W sono ricavati come:

$$J = \frac{\pi}{64}\left(D_{ext}^4 - D_{int}^4\right) = \frac{\pi}{4}\left(20^4 - 17^4\right) = 3754\,\text{mm}^4$$

$$W = \frac{J}{D_{ext}/2} = \frac{3754}{10} = 375.4\,\text{mm}^3$$

Il regime delle sollecitazioni è già stato calcolato in un esercizio precedente, fornendo:




dove i valori di momento flettente sono espressi in Nmm e quelli di taglio e sollecitazione assiale in N. Le sezioni maggiormente sollecitate sono la sezione del tratto B-C adiacente al nodo B (sez. I) e la sezione del tratto A-B adiacente al nodo B (sez. II).

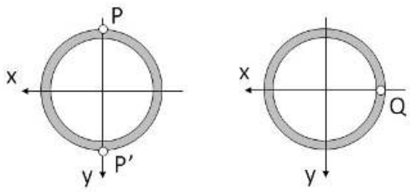
Nella sez. I sono presenti le seguenti componenti di sollecitazione:

$$M = 48'000\,\text{Nmm} \qquad T = 800\,\text{N}$$

Le massime tensioni normali sono individuate nei punti P, P' della seguente figura e valgono:

$$\text{in P}: \qquad \sigma_{max,+} = \frac{M}{W} = +\frac{48'000}{375.4} = +127.9\,\text{N/mm}^2$$

$$\text{in P'}: \qquad \sigma_{max,-} = \frac{M}{W} = -\frac{48'000}{375.4} = -127.9\,\text{N/mm}^2$$




In tali punti le tensioni tangenziali risultano nulle. Poiché il comportamento della lega d'acciaio è simmetrico in trazione e compressione, i valori precedenti debbono essere confrontati con il medesimo limite elastico, che coincide con la tensione di snervamento. Poiché entrambi i valori precedenti sono inferiori (in modulo) al valore di 285 N/mm$^2$, si deduce che in tali punti la struttura si comporta in regime elastico. Il rapporto:

$$\gamma = \frac{\sigma_{sn}}{\sigma_{max,+}} = \frac{285}{127.9} = 2.22$$

ha il significato di coefficiente di sicurezza rispetto alla condizione di snervamento perché con il proprio valore rappresenta quanto distanti si è dal limite del comportamento elastico.
Le massime tensioni tangenziali si verificano nei punti dell'asse neutro x della flessione, ad esempio nel punto Q della precedente figura. Il valore della tensione tangenziale si può ottenere con la formula di Jourawsky:

$$\tau = \frac{TS}{Jb}$$

dove S è il momento statico di metà della sezione rispetto all'asse neutro della flessione e b è la lunghezza complessiva della corda che taglia la sezione in corrispondenza dell'asse nutro (cioè 2t, essendo t lo spessore della sezione). Indicati con $R_{ext}$ e $R_{int}$ i raggi interno ed esterno, il momento statico della sezione è dato da:

$$S = \frac{2}{3}\left(R_{ext}^3 - R_{int}^3\right) = \frac{2}{3}\left(10^3 - 8.5^3\right) = 257.3\,\text{mm}^2$$

Si ottiene quindi:

$$\tau = \frac{TS}{Jb} = \frac{800 \cdot 257.3}{3754 \cdot 3} = 18.3\,\text{N/mm}^2$$

Nei punti di massima tensione tangenziale le tensioni normali sono nulle. Il precedente valore può quindi essere confrontato direttamente con il limite di snervamento 164.5 N/mm$^2$, rispetto al quale risulta largamente inferiore. Anche in questi punti la struttura si comporta quindi in modo elastico.
Nei punti in cui si è in compresenza di tensione normale e tensione tangenziale si deve verificare il comportamento elastico utilizzando un opportuno criterio di resistenza. Per la sezione in esame si può ragionevolmente pensare che dati gli andamenti delle tensioni normali e di quelle tangenziali non ci siano punti nei quali la combinazione dei due valori dia un comportamento non elastico. Per ulteriori approfondimenti si rimanda ad uno studio dei criteri di resistenza per materiali.

Nella sez. II sono presenti le seguenti componenti di sollecitazione:

$$M = 48'000\,\text{Nmm} \qquad T = 43.64\,\text{N} \qquad N = -800\,\text{N}$$

Le tensioni normali sono legate ad un regime di pressoflessione, per cui nel punto massima compressione si avrà:

$$\sigma_{max,-} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{-800}{375.4} + \frac{-34'912}{375.4} = -9.2 - 93.0 = -102.2\,\text{N/mm}^2$$

$$\sigma_{max,+} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{-800}{375.4} + \frac{34'912}{375.4} = -9.2 + 93.0 = +83.8\,\text{N/mm}^2$$

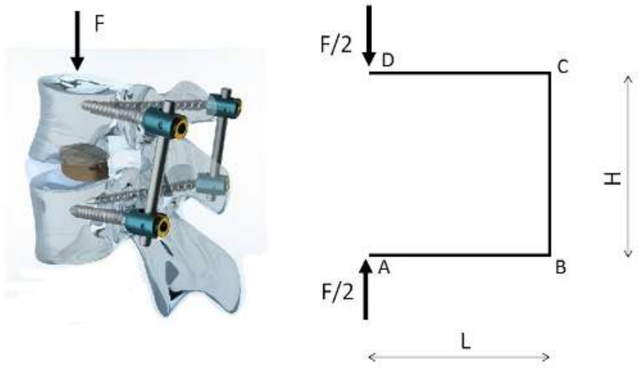
Anche in questi punti le tensioni tangenziali sono nulle per cui i valori precedenti sono da confrontare con il valore snervamento di 285 N/mm$^2$. Essendo inferiori il comportamento è elastico.
Per quanto detto in precedenza le massime tensioni tangenziali sono date da:

$$\tau = \frac{TS}{Jb} = \frac{43.64 \cdot 257.3}{3754 \cdot 3} = 1.0\,\text{N/mm}^2$$

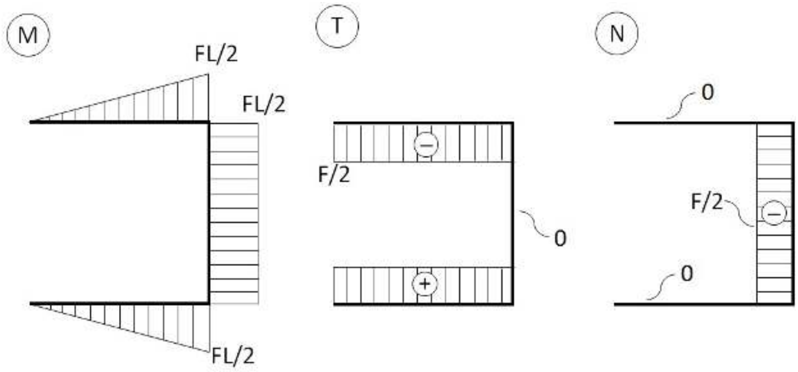
Il valore è del tutto trascurabile, anche nella verifica di punti della sezione dove vi sia la compresenza di tensioni normali e tangenziali.
Poiché la stampella è composta da sezioni costanti e avendo verificato le sezioni di massime sollecitazioni si può affermare che si comporta in regime elastico sotto l'azione dei carichi indicati.
Si consideri che nella verifica di resistenza di ogni struttura devono essere anche valutate le connessioni tra parti differenti, siano esse realizzate tramite saldature, incollature o altri sistemi.

## 8. PROBLEMA 'INVERSO'

Con riferimento al regime di sollecitazione indotto sul fissatore spinale rappresentato in figura, problema già studiato in un precedente esercizio. Si calcoli il valore minimo della forza di compressione che determina il raggiungimento della tensione limite nell'elemento di collegamento verticale. Si supponga che questo sia composto da una sezione circolare con diametro D pari a 8 mm. Si ipotizzi di adottare una lega di Titanio con valore limite di snervamento pari a $\sigma_{sn}$=660 MPa. Si consideri che le lunghezze delle viti peduncolari siano tali da ipotizzare L = 35 mm.




Come già discusso, nella configurazione di carico allo studio si considera che la forza di compressione sia ripartita in modo uguale tra le due parti che costituiscono il fissatore. L’elemento di giunzione verticale è soggetto ad uno stato di presso-flessione, deducibile dai diagrammi di sollecitazione già ricavati.




In una sezione generica dell’elemento verticale la tensione normale sarà quindi data da:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} y$$

dove y è la distanza del punto considerato dall’asse baricentrico. Dato che la lega di Titanio ha comportamento simmetrico a trazione e compressione, basta considerare il punto che presenta le maggiori tensioni normali in modulo. Questo sarà sul bordo compresso dal momento flettente, dove si sommano gli effetti di compressione a quelli indotti dallo sforzo assiale. Di seguito si considerano le differenti quantità in modulo, per semplificare il calcolo.

$$\sigma_{max} = \frac{F/2}{A} + \frac{FL/2}{J}\frac{D}{2}$$

Si ricava quindi il valore della forza di compressione F:

$$F = \frac{\sigma_{max}}{\frac{1}{2A} + \frac{LD}{4J}}$$

La massima forza applicabile sul fissatore si ottiene ponendo la tensione massima pari al valore di 660 MPa.
Per la sezione circolare si ha:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} 8^2 = 53.4\,\text{mm}^2$$

$$J = \frac{\pi}{64} D^4 = \frac{\pi}{4} 8^4 = 201.0\,\text{mm}^4$$

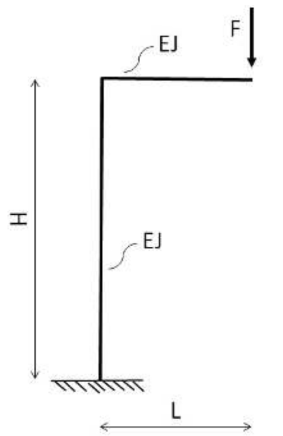
Si ottiene quindi:

$$F_{max} = \frac{\sigma_{sn}}{\frac{1}{2A}+\frac{LD}{4J}} = \frac{660}{\frac{1}{2\cdot 50.2}+\frac{35\cdot 8}{4\cdot 201}} = 1842.4\ \text{N}$$

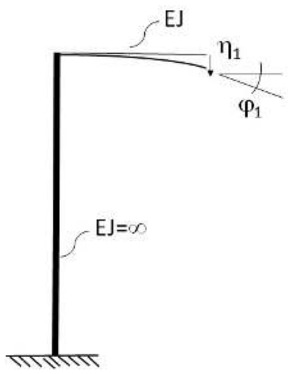
Si noti che la dimensione H non rientra nella formula con la quale si determina la massima forza di compressione. L'altezza H ha influenza invece la deformabilità del sistema.

## 9. CALCOLO DELLA DEFORMABILITÀ FLESSIONALE

Si calcolino le componenti di traslazione e di rotazione dell'estremità libera della struttura seguente, deformabile per sola flessione e avente rigidezza flessionale EJ costante.




Il calcolo può essere fatto considerando la sovrapposizione degli effetti deformativi sull'elemento verticale e su quello orizzontale. Assumendo l'elemento verticale come rigido, la deformata risulta data da:

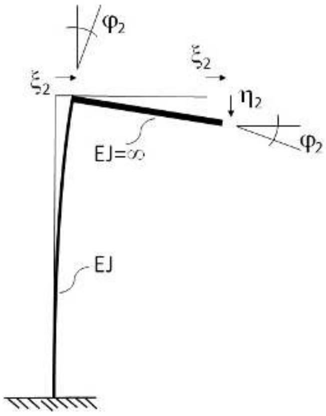



In tale ipotesi, l'elemento orizzontale è soggetto ad una forza concentrata all'estremità per cui risultano una rotazione oraria e un abbassamento rispettivamente pari a:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{FL^2}{EJ}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3}\frac{FL^3}{EJ}$$

Considerando ora l'elemento orizzontale come rigido, la deformazione del sistema è data dalla flessione dell'elemento verticale, che si può considerare soggetto nella sua estremità superiore ad una forza verticale F verso il basso e a un momento FL orario. La forza verticale determina una sollecitazione assiale e non genera deformazioni flessionali.




La sezione d'estremità superiore dell'elemento verticale ruota in verso orario e trasla orizzontalmente verso destra con le seguenti quantità:

$$\varphi_2 = \frac{(FL)H}{EJ}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}\frac{(FL)H^2}{EJ}$$

Considerando l'elemento orizzontale come rigido, l'estremità di quest'ultimo si sposta verso destra e ruota delle medesime quantità. In aggiunta, si realizza una traslazione verso il basso pari a:

$$\eta_2 = \varphi_2 L = \frac{(FL)H}{EJ}L = \frac{FHL^2}{EJ}$$

Le componenti complessive di traslazione e rotazione dell'estremità libera della struttura sono quindi date da:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{2}\frac{FL^2}{EJ} + \frac{FHL}{EJ}$$

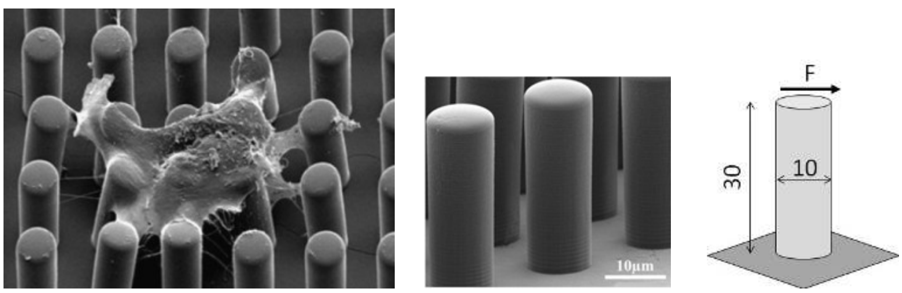
$$\xi = \xi_2 = \frac{1}{2}\frac{FLH^2}{EJ}$$

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{1}{3}\frac{FL^3}{EJ} + \frac{FHL^2}{EJ}$$

La rotazione è in verso orario, la traslazione orizzontale verso destra e la traslazione verticale verso il basso.

## 10. EFFETTI DELLA DEFORMABILITÀ A TAGLIO

Si calcoli la rigidezza trasversale di un micro-pilastro di PDMS di altezza H pari a 30 $\mu$m e diametro D paria 10 $\mu$m, elemento costituente un substrato per lo studio di problemi di meccano-trasduzione di cardiomiociti. Per il PDMS si consideri un modulo elastico longitudinale E pari a 1.38 MPa e un coefficiente di Poisson $\nu$ pari a 0.5.



Il problema si risolve determinando lo spostamento trasversale $\eta$ nell'estremità del micro-pilastro sotto l'azione di una forza trasversale F applicata nella medesima estremità e nel calcolare il rapporto

$$K=\frac{F}{\eta}$$

Descrivendo il micro-pilastro con un modello trave deformabile a flessione e taglio lo spostamento trasversale è pari a :

$$\eta=\frac{FH^3}{3EJ}+\chi\frac{FH}{GA}$$

dove il primo termine a secondo membro è dovuto alla deformabilità flessionale e il secondo termine a quella tagliante. Il fattore di taglio $\chi$ per la sezione in esame (sezione circolare) è pari a 10/9. In base ai dati proposti si ottiene:

$$E=1.38\frac{N}{mm^2}=1.38\cdot\frac{10^6}{10^3\cdot10^3}=1.38\frac{\mu N}{\mu m^2}$$

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{1.38}{2(1+0.5)}=0.46\frac{\mu N}{\mu m^2}$$

$$A=\frac{\pi}{4}D^2=\frac{\pi}{4}10^2=78.54\ \mu m^2$$

$$J=\frac{\pi}{64}D^4=\frac{\pi}{64}10^4=490.87\ \mu m^2$$

$$\eta=F\left(\frac{H^3}{3EJ}+\chi\frac{H}{GA}\right)=F\left(\frac{30^3}{3\cdot1.38\cdot490.87}+\frac{10}{9}\cdot\frac{30}{0.46\cdot78.54}\right)=F(13.286+0.9226)=14.2086\cdot F$$

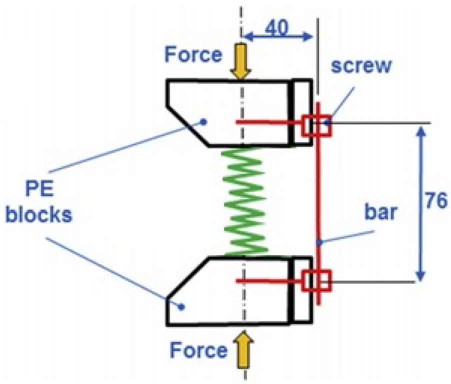
Il termine dovuto alla deformabilità tagliante è pari a circa il 6.5% della deformabilità totale del micro-pilastro. La rigidezza trasversale è pari a:

$$K=\frac{F}{\eta}=\frac{1}{14.2086}=0.2197\frac{\mu N}{\mu m}$$

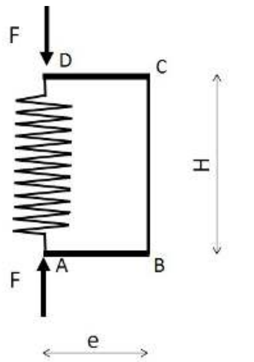
Il calcolo non tiene conto della deformabilità del supporto a cui è vincolato il micro-pilastro, termine che può determinare una rigidezza effettiva minore di quella calcolata.

## 11. STATI TENSIONALI SU UN FISSATORE SPINALE

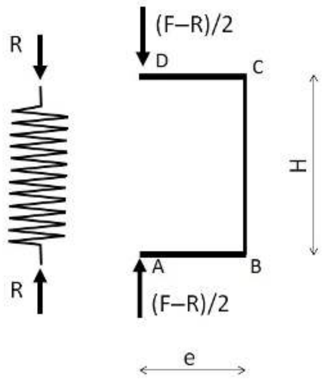
Si calcoli il regime di sollecitazione e tensione sul fissatore spinale in figura, per una forza di compressione F pari a 500 N. I blocchi di materiale polimerico che simulano i corpi vertebrali sono da considerare rigidi e la molla elastica (lineare) rappresenta la risposta a compressione di dischi vertebrali interposti.



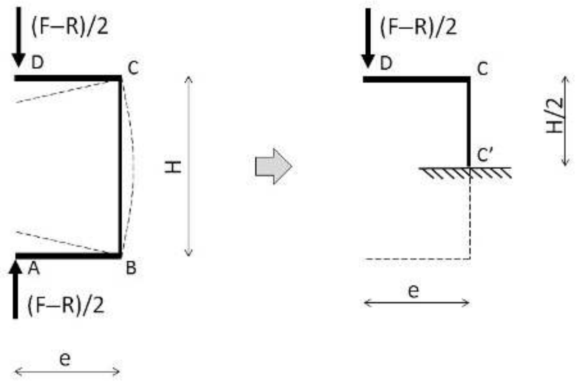
Il fissatore è formato da 4 viti peduncolari ad asse parallelo e due elementi verticali in lega di Titanio ad asse rettilineo e sezione circolare con diametro $\Phi$ pari a 7 mm (si veda la figura dell'esercizio 8 come riferimento). Per la lega di Titanio si consideri un modulo di Young E pari a 110'000 MPa e una tensione limite elastica $\sigma_y$ = 820 MPa. Per la molla si consideri una rigidezza K pari a 190 N/mm.
Il sistema è descritto secondo lo schema indicato in figura




dove i tratti CD e AB sono corpi rigidi e il tratto CB è una trave a rigidezza flessionale EJ. Si ricordi che il fissatore è composto da due elementi del tipo ABCD. Il sistema principale che si ricava dal precedente è il seguente




Si noti che il sistema a destra rappresenta uno solo dei due telai in cui si articola il fissatore, al quale sono state assegnate metà della forza esterna e della reazione della molla, sotto l'ipotesi che forza F e reazione R si distribuiscano simmetricamente tra i due telai.
Il valore della reazione R si determina imponendo che lo spostamento relativo dei punti AD sia pari alla variazione di lunghezza della molla.
Data la simmetria di struttura e di carico, la deformata flessionale del sistema ABCD si presenta pure simmetrica secondo lo schema riportato di seguito, permettendo di studiare la deformabilità attraverso il sistema semplificato riportato a destra:



Il tratto CC’ è una trave incastrata nell’estremità C’ e soggetta ad un momento flettente costante indotto dalla forza applicata in D per il braccio e. Per quanto visto nell’esercizio 9 la trave CC’ subisce una rotazione (antioraria) dell’estremo C pari a

$$\varphi=\frac{(F-R)e}{2}\cdot\frac{H/2}{EJ}=\frac{(F-R)eH}{4EJ}$$

essendo J il momento d’inerzia della sezione. Il punto D si abbassa di una quantità pari a:

$$\eta=\frac{(F-R)eH}{4EJ}\cdot e=\frac{(F-R)e^2H}{4EJ}$$

Considerando lo spostamento simmetrico che si ha nella struttura di partenza in corrispondenza del punto A, si può istituire la seguente equazione di congruenza tra accorciamento della molla e spostamento relativo dei punti D-A:

$$\frac{R}{K}=\frac{(F-R)e^2H}{2EJ}$$

Indicata con $K_f$ la quantità

$$K_f=\frac{2EJ}{e^2H}$$

l’equazione di congruenza si riscrive come

$$\frac{R}{K}=\frac{(F-R)}{K_f}\quad\rightarrow\quad R=F\frac{K}{K+K_f}$$

Il termine $K_f$, rappresenta la rigidezza del fissatore spinale. Si noti che all’aumentare di $K_f$ rispetto a K la forza di compressione sulla molla si riduce e aumentano le sollecitazioni sul fissatore spinale. Sulla base dei dati del problema si ricava:

$$J=\frac{\pi}{64}\Phi^4=\frac{\pi}{64}7^4=117.86\,\text{mm}^4$$

$$K_f=\frac{2\cdot110'000\cdot117.86}{40^2\cdot76}=213.2\,\text{N/mm}$$

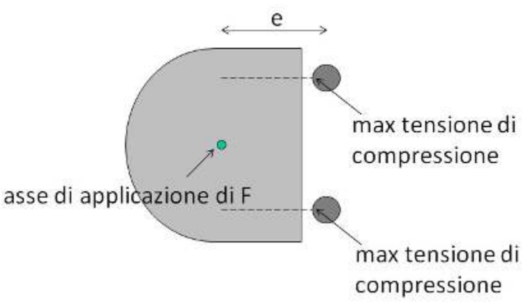
$$R=\frac{190}{190+213.2}\cdot F=0.47\cdot F=0.47\cdot500=235\,\text{N}$$

Tale valore rappresenta il carico di compressione applicato ai dischi intervertebrali interposti. Il fissatore risente invece di una forza di compressione pari a:

$$F-R=500-235=265\,\text{N}$$

che si ripartisce in modo uguale tra i due elementi di cui è costituito.

Lo stato di sollecitazione della barra verticale BC è di presso-flessione, con valori di sforzo assiale e momento flettente costanti. Individuata una sezione generica del tratto BC, la massima tensione in modulo si ha nel punto indicato nella figura seguente sul lato rivolto verso i corpi vertebrali:




La sezione delle barre verticali ha valori di area A e momento resistente W rispettivamente pari a:

$$A=\frac{\pi}{4}\Phi^2=\frac{\pi}{4}7^2=38.48\,\text{mm}^2$$

$$W=J\cdot\frac{2}{\Phi}=117.86\cdot\frac{2}{7}=33.67\,\text{mm}^3$$

Il valore in modulo della massima tensione di compressione è pari a:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{265/2}{38.48} + \frac{265/2 \cdot 40}{33.67} = 3.4 + 157.4 = 160.8\,\text{MPa}$$

con un fattore di sicurezza rispetto alla condizione limite elastica pari a:

$$\gamma = \frac{820}{160.8} = 5.1$$

Nella soluzione del problema si è considerata la sola deformabilità flessionale delle barre verticali che costituiscono il fissatore. Ciò è corretto perché la rigidezza assiale di tali barre è pari a:

$$2 \cdot \frac{EA}{H} = 2 \cdot \frac{110'000 \cdot 38.48}{76} = 111'389.4\,\text{N/mm}$$

valore largamente superiore a K e $K_f$.