COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI e FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Ingegneria dell'Informazione - Ingegneria Elettronica
25 Gennaio 2021

Esercizio 1. [11.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(1+s^2)(1-s)}{s\left(1+\frac{s^2}{100}\right)}$$

è richiesto di

i) tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;

ii) tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$, individuando asintoti (per quelli obliqui è sufficiente il coefficiente angolare) ed intersezioni con gli assi;

iii) studiare la stabilità BIBO del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare del parametro reale K, ricorrendo al Criterio di Nyquist. Per i valori di K per cui non c'è stabilità, si discuta il numero di poli a parte reale positiva e/o nulla.

Esercizio 2. [8 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2(s+4)}$$

è richiesto il tracciamento del luogo delle radici positivo e negativo, calcolando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e studiando di conseguenza la stabilità BIBO al variare di K sui numeri reali del sistema retroazionato $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$.
È anche richiesta l'analisi della stabilità BIBO, se possibile, mediante la tabella di Routh-Hurwitz.

Esercizio 3. [7 punti] Data il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+10s)}$$

è richiesto

i) il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ proprio che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con errore di regime permanente al gradino $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-3}$, mentre il sistema in catena aperta abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 1$ rad/s e margine di fase $m_\phi \simeq 90°$;

ii) il progetto di un controllore stabilizzante $C_2(s)$ di tipo PID (eventualmente solo P, PI, o PD) che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1, con errore di regime permanente alla rampa lineare $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.01$, mentre il sistema in catena aperta abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 1000$ rad/s e margine di fase $m_\phi \simeq 90°$.

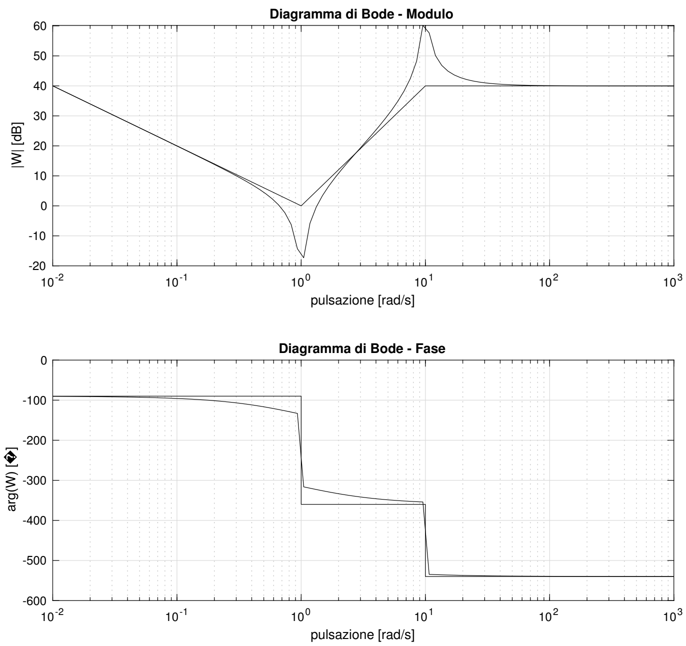
Teoria. [4.5 punti] Sia $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ una funzione razionale propria con guadagno di Evans $K_E = 1$, ovvero

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

con $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$ monici e $\deg d(s) \geq \deg n(s)$. Si dica che cos'è un punto doppio del luogo delle radici e si derivi l'equazione dei candidati punti doppi.
Si spieghi perchè una soluzione di tale equazione può non essere un punto doppio del luogo distinguendo i vari casi.

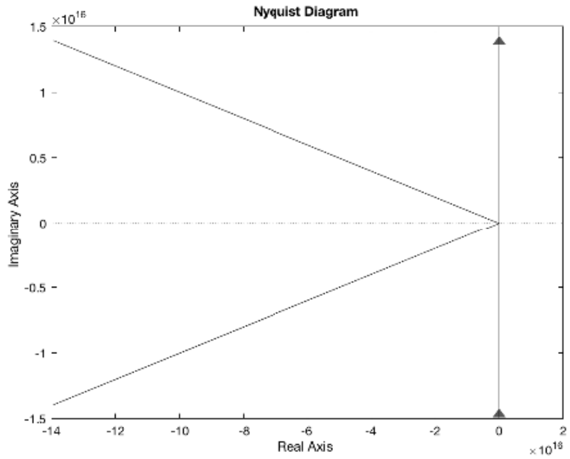
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Il diagramma di Bode è illustrato in figura

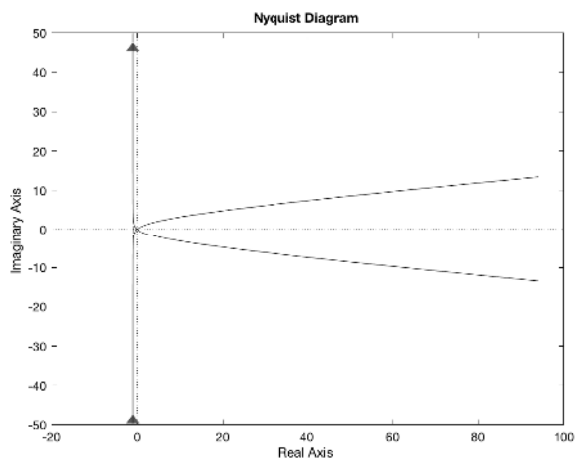


Il diagramma dei moduli asintotico parte con una pendenza di -20db/dec e arriva nell'origine per $\omega = 1$ rad/s, poi sale con pendenza +40db/dec fino a $\omega = 10$ rad/s dove diventa piatto con valore dell'ordinata pari a +40db. Il diagramma dei moduli reale esibisce un picco di antirisonanza infinito per $\omega = 1$ rad/s ed un picco di risonanza infinito per $\omega = 10$ rad/s. Il diagramma delle fasi asintotico parte da $-90°$ e sale a $0°$ per $\omega = 1$ rad/s; poi scende a $-180°$ per $\omega = 10$ rad/s. Il diagramma delle fasi reale scende da $-90°$ fino a $-135°$, per poi risalire a $+45°$ con una prima discontinuità, poi ridiscende verso $0°$, ma prima di raggiungere $0°$ una seconda discontinuità lo porta a quasi $-180°$, che vengono poi raggiunti asintoticamente.

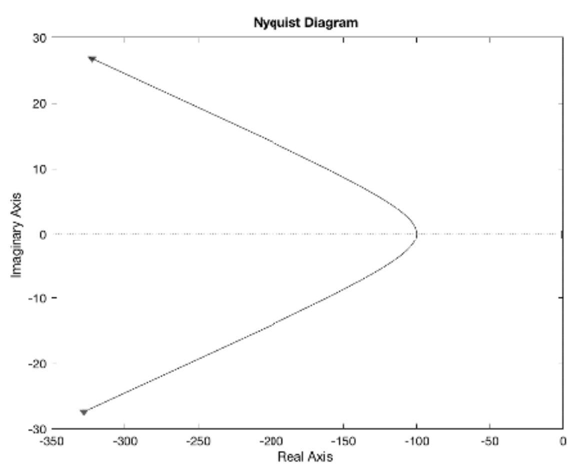
ii) Il diagramma di Nyquist arriva dall'infinito verticalmente dal basso (III quadrante), attraversa l'origine con tangente la bisettrice (I quadrante) e va all'infinito con direzione quasi orizzontale verso destra, per poi rispuntare dall'infinito a sinistra (III quadrante), e terminare nel punto $s = -100$.



Dettaglio per valori di $|\omega|$ piccoli $(0.02 < |\omega| < 7)$:



Dettaglio per valori di $|\omega|$ grandi $(12 < |\omega| < +\infty)$:



Il calcolo delle intersezioni con gli assi porge

$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{1-\frac{\omega^2}{100}}\left(-1-\frac{j}{\omega}\right) = \left[\frac{\omega^2-1}{1-\frac{\omega^2}{100}}\right] + j\left[\frac{\omega^2-1}{\omega(1-\frac{\omega^2}{100})}\right]$$

e prova che l'asintoto verticale è centrato in $s = -1$ $(-1 - j\infty)$, e che parte reale ed immaginaria si annullano solo contemporaneamente e solo per $\omega = 1$. Per $\omega = 10$ abbiamo due asintoti obliqui con coefficiente angolare $\frac{1}{10}$ (asintoti quasi orizzontali).

iii) Chiudendo con i cerchi all'infinito ed analizzando la posizione del diagramma di Nyquist rispetto al punto critico $-\frac{1}{K}$, si hanno i seguenti casi (notando che $n_{G_+} = 0$ e quindi che $n_{W_+} = -N$)

$$\begin{array}{lll} K < 0 & \Rightarrow & n_{W_+} = 3 \\ 0 < K < \frac{1}{100} & \Rightarrow & n_{W_+} = 0 \\ K = \frac{1}{100} & \Rightarrow & W(s) \text{ impropria} \\ K > \frac{1}{100} & \Rightarrow & n_{W_+} = 1 \end{array}$$

Quindi la $W(s)$ è BIBO stabile se e solo $0 < K < \frac{1}{100}$, mentre per $K = \frac{1}{100}$ il denominatore diventa $s^2 + 99s + 1$ ed ha quindi due poli negativi, tuttavia l'essere non BIBO stabile deriva dall'essere $W(s)$ impropria.

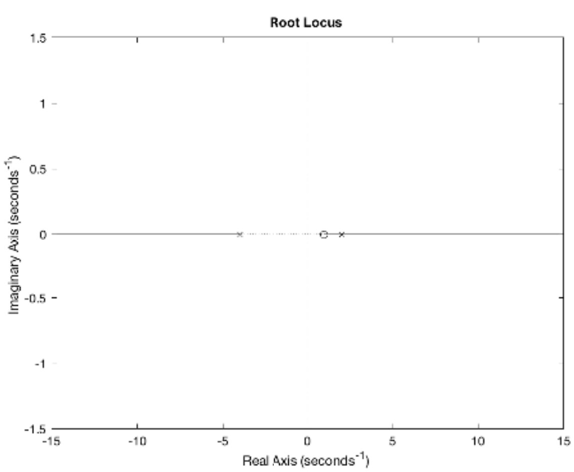
Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi porge

$$(s-2)(2s^2+s+2) = 0$$

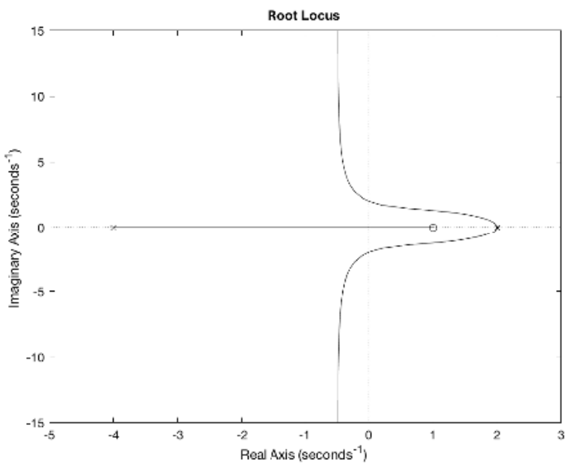
che ha come radici $s = 2$ ed altre due radici complesse coniugate. Il punto doppio $s = 2$ è banale ($K = 0$), mentre i due complessi non sono accettabili (dal momento che il grado del denominatore è < 4 non ci possono essere punti doppi complessi). Quindi, in definitiva, non ci sono punti doppi nel luogo.
Il centro della stella di asintoti è in $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; gli asintoti hanno direzioni $\pi/2$ e $3\pi/2$ nel luogo positivo, 0 e π nel luogo negativo. Le intersezioni con gli assi porgono

$$d(j\omega) + Kn(j\omega) = (16-K) + j\omega(4-\omega^2+K-16) = 0 \;\Rightarrow\; K = 16,\ \omega = 0, \pm 2$$

Il luogo negativo ha solo tratti sull'asse reale: uno va da $+2$ verso $+\infty$, un altro da $+2$ verso $+1$, il terzo da -4 verso $-\infty$. Quindi abbiamo sempre due poli positivi ed uno negativo.



Il luogo positivo ha un ramo reale che va da -4 verso $+1$, attraversando l'asse immaginario per $K = 16$ in $s = 0$, mentre gli altri due, complessi, partono da $+2$ e vanno verso gli asintoti verticali centrati in $s = -\frac{1}{2}$, attraversando l'asse immaginario sempre per $K = 16$ in $s = \pm 2j$. Quindi abbiamo due poli a parte reale positiva ed uno negativo per $0 \leq K < 16$, uno positivo e due a parte reale negativa per $K > 16$, mentre per $K = 16$ abbiamo tre poli sull'asse immaginario ($s = 0, \pm 2j$, che corrisponde al polinomio $d(s) + Kn(s) = s(s^2 + 4)$).

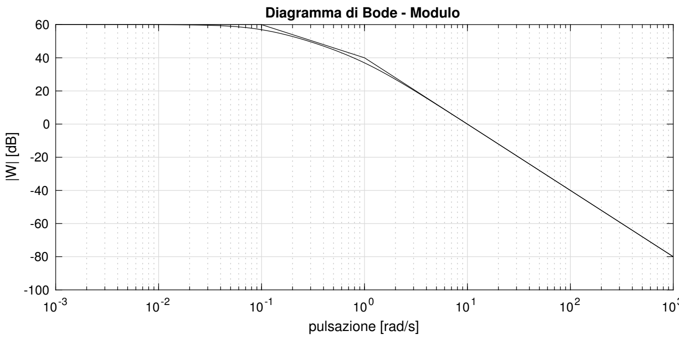


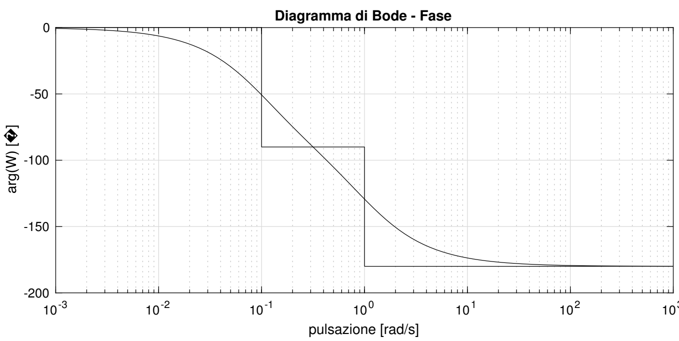
Il polinomio $d(s) + Kn(s)$ vale

$$s^3 + (K - 12)s + (16 - K)$$

e quindi non possiamo MAI ottenere alcuna informazione da Routh (che non sia l'assenza di stabilità per ogni K), in quanto la tabella non è mai completabile, essendo sempre nullo il termine di secondo grado.

Esercizio 3. i) Assumiamo come precompensatore $C'(s) = 1000$ per sistemare l'errore a regime (invece il tipo è già a posto), dopodichè il diagramma di Bode esibisce una $\omega_a \simeq 10$ rad/s e il margine di fase alla pulsazione desiderata $m_\phi(\omega_a^*)$ è circa 45°.

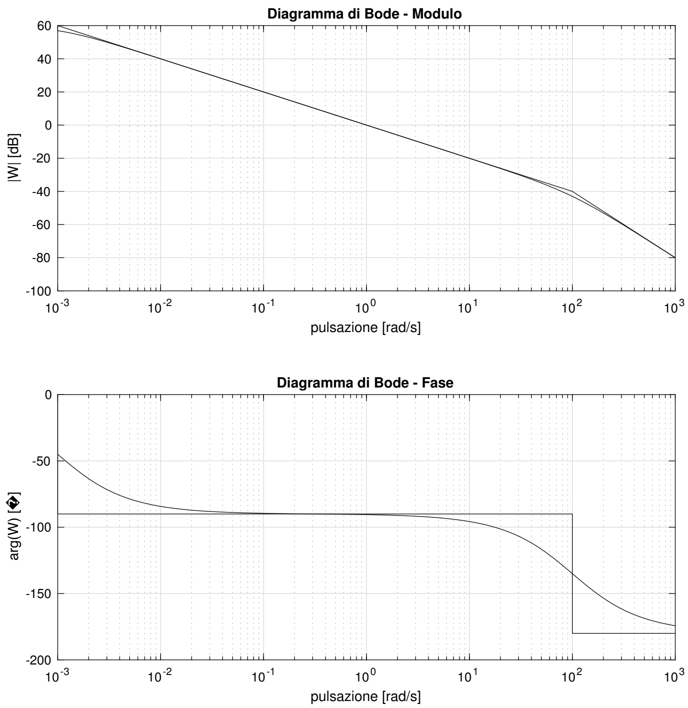




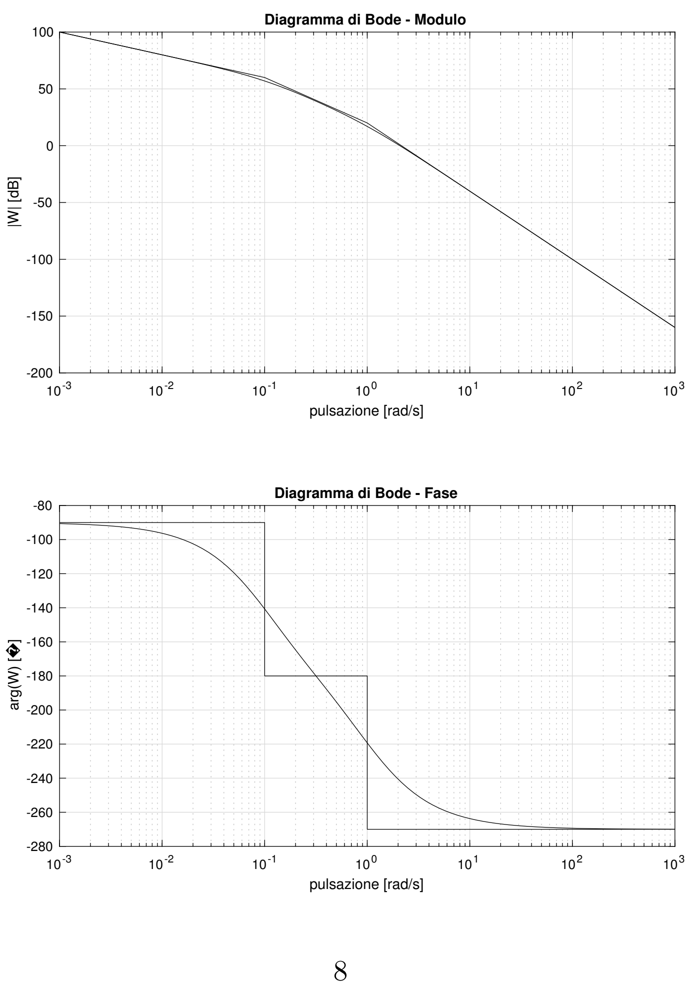
È necessario quindi il ricorso ad una rete a sella, che in ω_a^* faccia scendere di $M = 40$db il modulo ed alzi la fase di $\Phi = 45°$. Questa seconda richiesta implica che lo zero della rete anticipatrice vada posizionato sopra il polo in $s = -1$ di $G(s)$, visto che in quel punto vogliamo l'attraversamento. Il relativo polo $-p$ deve avere punto di spezzamento molto alla destra di 10^0 (ad esempio -100). Si noti che la rete anticipatrice non modifica M, quindi la rete attenuatrice deve abbassare di 40db e per ottenere ciò deve avere il polo che precede lo zero di 2 decadi. Possiamo ad esempio posizionare il polo 3 decadi prima di ω_a^* e lo zero in -0.1. Quindi una possibile soluzione (che porta a due cancellazioni lecite) è

$$C(s) = \frac{1000(1+s)(1+10s)}{(1+1000s)\left(1+\frac{s}{100}\right)}.$$

Il sistema risultante è BIBO stabile per il criterio di Bode.



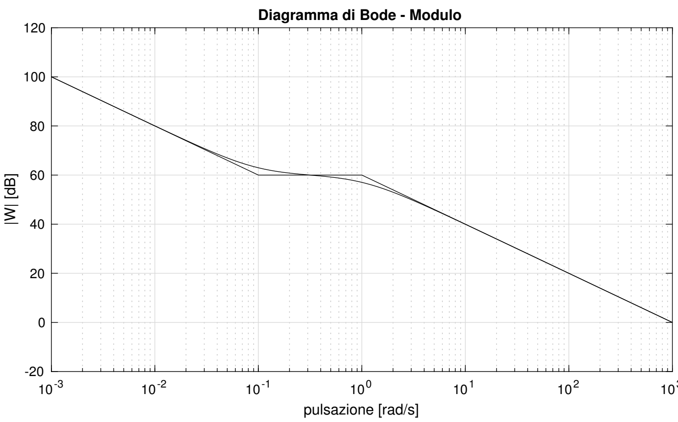
ii) Per soddisfare le specifiche su tipo ed errore a regime inseriamo il precompensatore $C'(s) = \frac{100}{s}$.

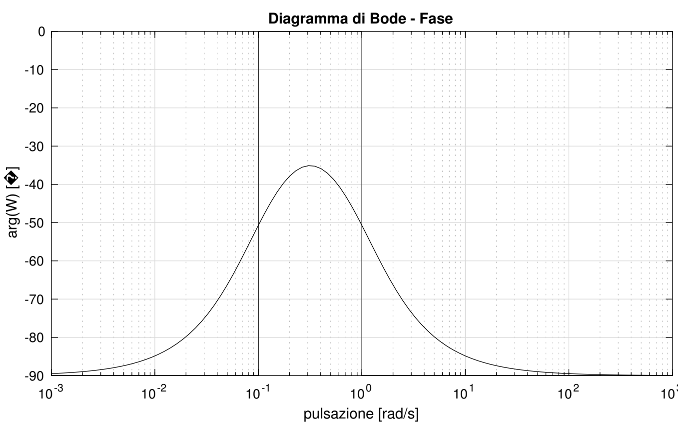


Si vede che per soddisfare le specifiche su tipo ed errore a regime è necessario alzare il modulo in $\omega_a^* = 10^3$ rad/s di ben $M = 160$db, oltre a incrementare il margine di fase di quasi $\Phi = 180°$. È necessaria quindi l'inserzione di due zeri a sinistra di $\omega_a^* = 10^3$ rad/s, ad esempio entrambi 4 decadi prima della ω_a^*, da cui

$$C(s) = \frac{100(1+10s)^2}{s}$$

(che introduce una cancellazione zero-polo lecita). Il sistema risultante è BIBO stabile per il criterio di Bode.





Teoria. Si veda il libro di testo, Capitolo 8, pagine 233-234.
Un punto $\alpha \in \mathbb{C}$ è un punto doppio o in generale multiplo del luogo (positivo o negativo) se è un punto del luogo per cui passano 2 o più rami.
$\alpha \in \mathbb{C}$ è un punto multiplo del luogo se e solo se esiste un valore di $K \in \mathbb{R}$, finito e non nullo, per cui α è zero di $d(s) + Kn(s)$ di molteplicità 2 o superiore a 2.
Ciò si verifica se e solo se esiste un valore di $K \in \mathbb{R}, K \neq 0$, per cui vale

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d(s) + Kn(s)\big|_{s=\alpha} & = & 0 \\ \frac{d}{ds}[d(s)] + K\frac{d}{ds}[n(s)]\big|_{s=\alpha} & = & 0 \end{array} \right.$$

Di conseguenza per trovare i punti multipli del luogo occorre e basta risolvere il sistema di equazioni nelle incognite s e K:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d(s) + Kn(s) & = & 0 \\ \frac{d}{ds}[d(s)] + K\frac{d}{ds}[n(s)] & = & 0. \end{array} \right.$$

Dalla prima equazione otteniamo

$$K = -\frac{d(s)}{n(s)}$$

che sostituita nella seconda porta a

$$\frac{d}{ds}[d(s)] - \frac{d(s)}{n(s)} \frac{d}{ds}[n(s)] = 0$$

da cui segue la cosiddetta *equazione dei candidati punti multipli/doppi*

$$n(s) \cdot \frac{d}{ds}[d(s)] - d(s) \cdot \frac{d}{ds}[n(s)] = 0.$$

Si chiama equazione dei candidati punti doppi perché tra le sue soluzioni troviamo anche le seguenti che non sono punti doppi del luogo:

- gli zeri di $d(s)$ (e quindi i poli di $G(s)$) che corrispondono a $K = 0$;
- gli zeri di $n(s)$ (e quindi gli zeri di $G(s)$) che corrispondono a $K = \pm\infty$;
- eventuali radici (complesse) α per le quali $K = -\frac{d(\alpha)}{n(\alpha)}$ è un numero complesso in senso stretto.

Se α è una soluzione dell'equazione dei candidati punti doppi e $K = -\frac{d(\alpha)}{n(\alpha)} > 0$ allora α è un punto doppio del luogo positivo; se α è una soluzione dell'equazione dei candidati punti doppi e $K = -\frac{d(\alpha)}{n(\alpha)} < 0$ allora α è un punto doppio del luogo negativo.