Soluzioni del II homework

A1. Il punto di equilibrio di Σ corrispondente a uscita di equilibrio $\bar{y} = 80$ è $(\bar{x}, \bar{u})$ con:

$$\bar{x} \simeq \begin{bmatrix} 375.0694 \\ 170.4861 \\ 129.6000 \end{bmatrix}, \qquad \bar{u} \simeq 18.7535.$$

A2.

- le equazioni del sistema linearizzato attorno al p. di eq. sono:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = A\delta_x + b\delta_u \\ \delta_y = c\delta_x + d\delta_u \end{cases} \quad \text{con } A \simeq \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & -0.11 & 0 \\ 0 & -0.001 & -0.0233 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c \simeq [0 \;\; 0 \;\; 0.6173], \quad d = 0$$

e con $\delta_x(t) := x(t) - \bar{x}$, $\delta_u(t) := u(t) - \bar{u}$ e $\delta_y(t) := y(t) - \bar{y}$.

- il p. di eq. è sia stabile sia asintoticamente stabile.
- la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno al p. di eq. è:

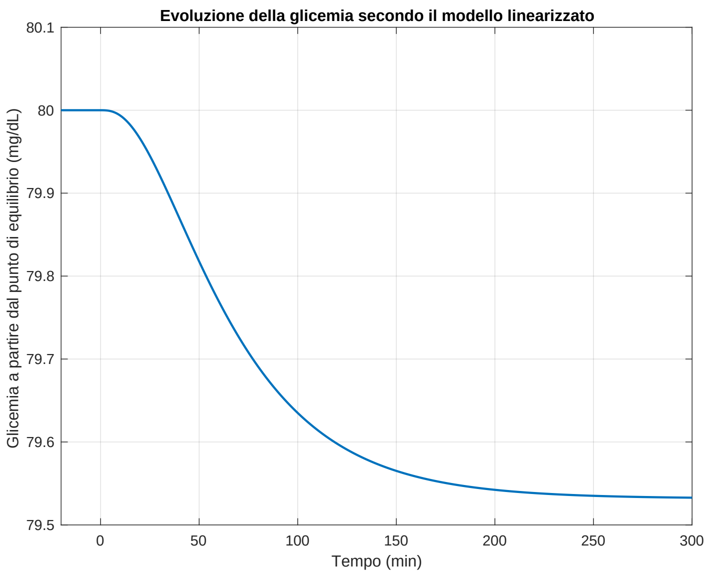
$$W(s) \simeq \frac{-0.000032}{(s + 0.05)(s + 0.11)(s + 0.0233)}$$

- il sistema linearizzato attorno al p. di eq. è BIBO stabile.

B1. Per un paziente di 80 kg il modello linearizzato attorno al punto di equilibrio corrispondente a uscita di equilibrio $\bar{y} = 80$ mg/dL è $\begin{cases} \dot{\delta}_{x,80} = A_{80}\delta_{x,80} + b_{80}\delta_{u,80} \\ \delta_y = c_{80}\delta_{x,80} + d_{80}\delta_{u,80} \end{cases}$ dove $A_{80} = A,\ b_{80} = b,\ c_{80} = (1/80)c,\ d_{80} = 0$ e con $\delta_{x,80}(t) := x(t) - 80 \cdot \bar{x}$, $\delta_{u,80}(t) := u(t) - 80 \cdot \bar{u}$ e $\delta_y(t) := y(t) - \bar{y}$. La corrispondente funzione di trasferimento è $W_{80}(s) = \frac{1}{80}W(s)$.

B2. L'evoluzione della glicemia del paziente di 80 kg prevista dal modello linearizzato nel corso delle 5 ore successive a $t_0 = 0$ è $y(t) \simeq 80 + (0.1049\mathrm{e}^{-0.11t} - 0.7491\mathrm{e}^{-0.05t} + 1.1124\mathrm{e}^{-0.0233t} - 0.4682) \cdot 1(t)$ dove $t \in [0, 300]$ rappresenta il tempo misurato in minuti.

Il relativo grafico è:



Ragionamenti e i passaggi per ottenere la soluzione

A. I punti di equilibrio corrispondenti a uscita di equilibrio $\bar{y} = 80$ mg/dL si ottengono risolvendo il seguente sistema nelle incognite x_1, x_2, x_3 e u:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -k_a x_1(t) + u(t) \\ k_a x_1(t) - k_d x_2(t) \\ e - [k_{c0} + k_{ci} x_2(t)] x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{x_3(t)}{V} = \bar{y} \end{cases}$$

dove $\bar{y} = 80$ mg/dL è il valore fisiologico dell'uscita attorno a cui si desidera linearizzare il sistema.

Si vede facilmente che il sistema ammette un'unica soluzione e quindi c'è un solo punto di equilibrio corrispondente all'uscita fisiologica $\bar{y} = 80$. Risolvendo il sistema otteniamo tale punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$. Si ha:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_d \frac{e/(V\bar{y}) - k_{c0}}{k_a k_{ci}} \\ \frac{e/(V\bar{y}) - k_{c0}}{k_{ci}} \\ V\bar{y} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 375.0694 \\ 170.4861 \\ 129.6000 \end{bmatrix}, \qquad \bar{u} = k_d \frac{e/(V\bar{y}) - k_{c0}}{k_{ci}} \simeq 18.7535.$$

Definiamo gli scostamenti $\delta_x(t)$, $\delta_u(t)$ e $\delta_y(t)$ dei segnali $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ dai loro valori di equilibrio. Il sistema linearizzato è dato da

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = A\delta_x + b\delta_u \\ \delta_y = c\delta_x + d\delta_u \end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} A \ &:= \ \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} = \begin{bmatrix} -k_a & 0 & 0 \\ k_a & -k_d & 0 \\ 0 & -k_{ci} x_3 & -[k_{c0} + k_{ci} x_2] \end{bmatrix}\Bigg|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} \\ &= \begin{bmatrix} -k_a & 0 & 0 \\ k_a & -k_d & 0 \\ 0 & -k_{ci} V\bar{y} & -e/(V\bar{y}) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & -0.11 & 0 \\ 0 & -0.001 & -0.0233 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$b := \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché l'equazione di uscita del sistema originale è lineare, il calcolo dei parametri c e d non necessita di fare derivate: l'equazione di uscita per gli incrementi ha gli stessi parametri

$$c = [0 \ \ 0 \ \ 1/V] \simeq [0 \ \ 0 \ \ 0.6173], \qquad d = 0$$

dell'equazione originale. Si noti che la matrice A è triangolare e quindi i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale di A. Tali elementi sono tutti reali e negativi; pertanto, il sistema è asintoticamente stabile e quindi anche semplicemente stabile e BIBO stabile. Di conseguenza, il punto di equilibrio del sistema non lineare originale è anch'esso asintoticamente stabile e quindi anche semplicemente stabile.

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è:

$$W(s) = c(sI - A)^{-1}b = \frac{1}{\pi_A(s)}[0 \;\; 0 \;\; 1/V] \begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ -k_a k_{ci} V \bar{y} & \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-k_a k_{ci} \bar{y}}{\pi_A(s)},$$

e, sostituendo i valori numerici,

$$W(s) \simeq \frac{-0.000032}{(s + 0.05)(s + 0.11)(s + 0.0233)}.$$

B.

B1. L'unica cosa che cambia rispetto al modello normalizzato è il valore dei parametri k_{ci}, e e V che diventano

$k_{ci} = (1/80) \cdot 8 \cdot 10^{-6} = 10^{-7}$ $(\mu\mathrm{UI})^{-1} \cdot \mathrm{min}^{-1}$
$e = 80 \cdot 3.015 = 241.2$ (mg)$\cdot$min^{-1}
$V = 80 \cdot 1.62 = 129.6$ dL

Pertanto, il punto di equilibrio che indichiamo con $(\bar{x}_{80}, \bar{u}_{80})$ è semplicemente $(\bar{x}_{80}, \bar{u}_{80}) = (80\bar{x}, 80\bar{u})$:

$$\bar{x}_{80} = 80\bar{x} \simeq 80 \begin{bmatrix} 375.0694 \\ 170.4861 \\ 129.6000 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 30006 \\ 13639 \\ 10368 \end{bmatrix}, \qquad \bar{u}_{80} = 80\,\bar{u} = k_d \frac{e/(V\bar{y}) - k_{c0}}{k_{ci}} \simeq 1500.$$

Attenzione: mentre $\bar{u}$ è normalizzato rispetto al peso del paziente (ed è quindi misurato in (μUI/kg) min^{-1}), $\bar{u}_{80}$ è misurato in (μUI) min^{-1}.

Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio è dato da

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{x,80} = A_{80}\delta_{x,80} + b_{80}\delta_{u,80} \\ \delta_y = c_{80}\delta_{x,80} + d_{80}\delta_{u,80} \end{cases}$$

dove

$$A_{80} = A \simeq \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 \\ 0.05 & -0.11 & 0 \\ 0 & -0.001 & -0.0233 \end{bmatrix}, \; b_{80} = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; c_{80} = (1/80)c \simeq [0 \;\; 0 \;\; 0.0077], \; d_{80} = 0$$

e dove $\delta_{x,80}(t) := x(t) - \bar{x}_{80}$, $\delta_{u,80}(t) := u(t) - \bar{u}_{80}$ mentre $\delta_y(t) := y(t) - \bar{y}$ rimane quello di prima.

In pratica, il modello rimane invariato eccetto che per un fattore (1/80) nell'equazione di uscita che viene compensato dal fatto che anche la dose di insulina iniettata è pari alla dose normalizzata (valida "per ciascun kg di paziente") moltiplicata per il peso in kg del paziente. La funzione di trasferimento è:

$$W_{80}(s) = c_{80}(sI - A_{80})^{-1}b_{80} = \frac{1}{80}W(s) \simeq \frac{-0.0000004}{(s + 0.05)(s + 0.11)(s + 0.0233)}.$$

Come c'era da aspettarsi anche la funzione di trasferimento viene divisa per il fattore 80: ciò è compensato dal fatto che la dose di insulina iniettata è pari alla dose normalizzata (valida "per ciascun kg di paziente") moltiplicata per il peso in kg del paziente (in questo caso 80). In conclusione, a patto di ricordarsi di dosare l'insulina iniettata moltiplicando la dose del modello normalizzato per il peso in kg del paziente, il modello normalizzato può essere utilizzato in modo indipendente dal peso del paziente.

B2. Nel punto di equilibrio l'ingresso è $\bar{u}_{80} = 1500$ (μUI) min^{-1} e, dall'istante $t_0 = 0$ aumenta del 10% e diventa $u(t) = 1.1 \cdot 1500$ (μUI) min^{-1}. Dunque, $\delta_{u,80}(t) = (1.1 - 1) \cdot 1500 \cdot 1(t) = 150 \cdot 1(t)$ e la corrispondente trasformata di Laplace è $\Delta_{u,80}(s) = \frac{150}{s}$. Pertanto la trasformata dell'uscita $\delta_y(t)$ è

$$\Delta_y(s) = \frac{150}{s} W_{80}(s) \simeq \frac{-0.00006}{s(s+0.05)(s+0.11)(s+0.0233)}$$

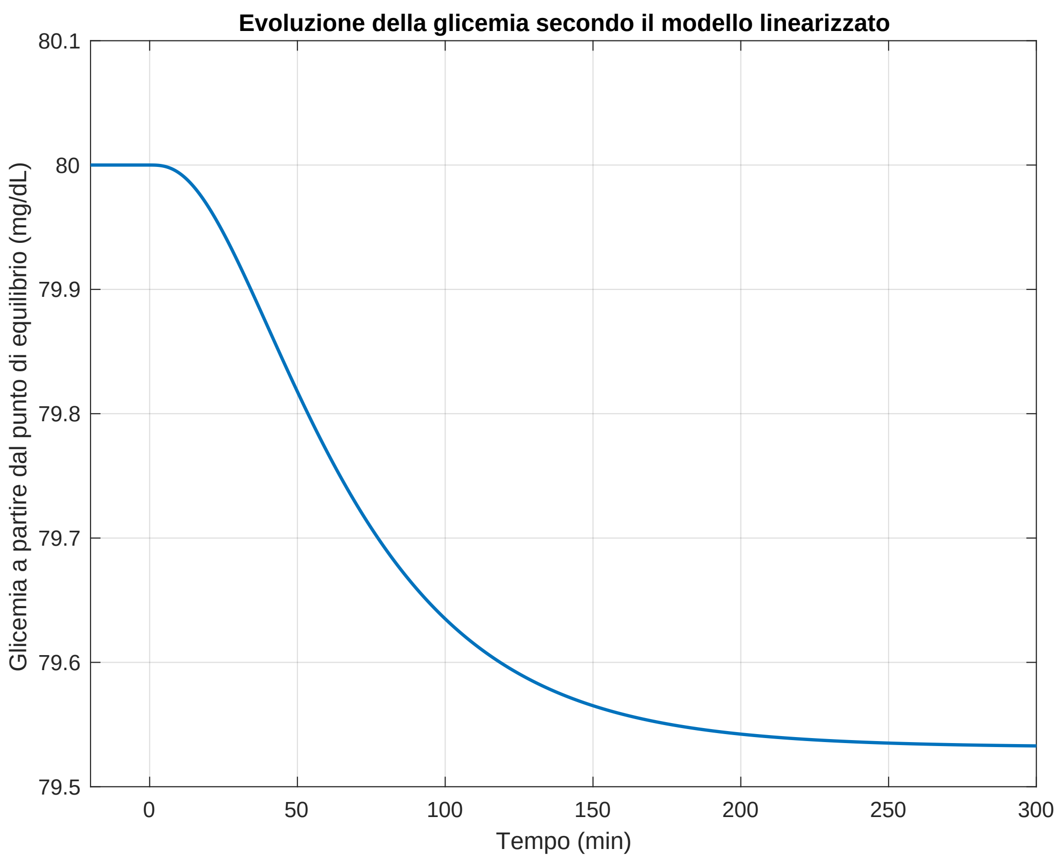
e quindi

$$\delta_y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\delta_y(t)] \simeq \left(-0.4682 + 0.1049\,\mathrm{e}^{-0.11t} - 0.7491\,\mathrm{e}^{-0.05t} + 1.1124\,\mathrm{e}^{-0.0233t}\right) \cdot 1(t).$$

Infine,

$$y(t) = \bar{y} + \delta_y(t) \simeq 80 + \left(-0.4682 + 0.1049\,\mathrm{e}^{-0.11t} - 0.7491\,\mathrm{e}^{-0.05t} + 1.1124\,\mathrm{e}^{-0.0233t}\right) \cdot 1(t).$$

Il relativo grafico è riportato di seguito.



Domanda facoltativa

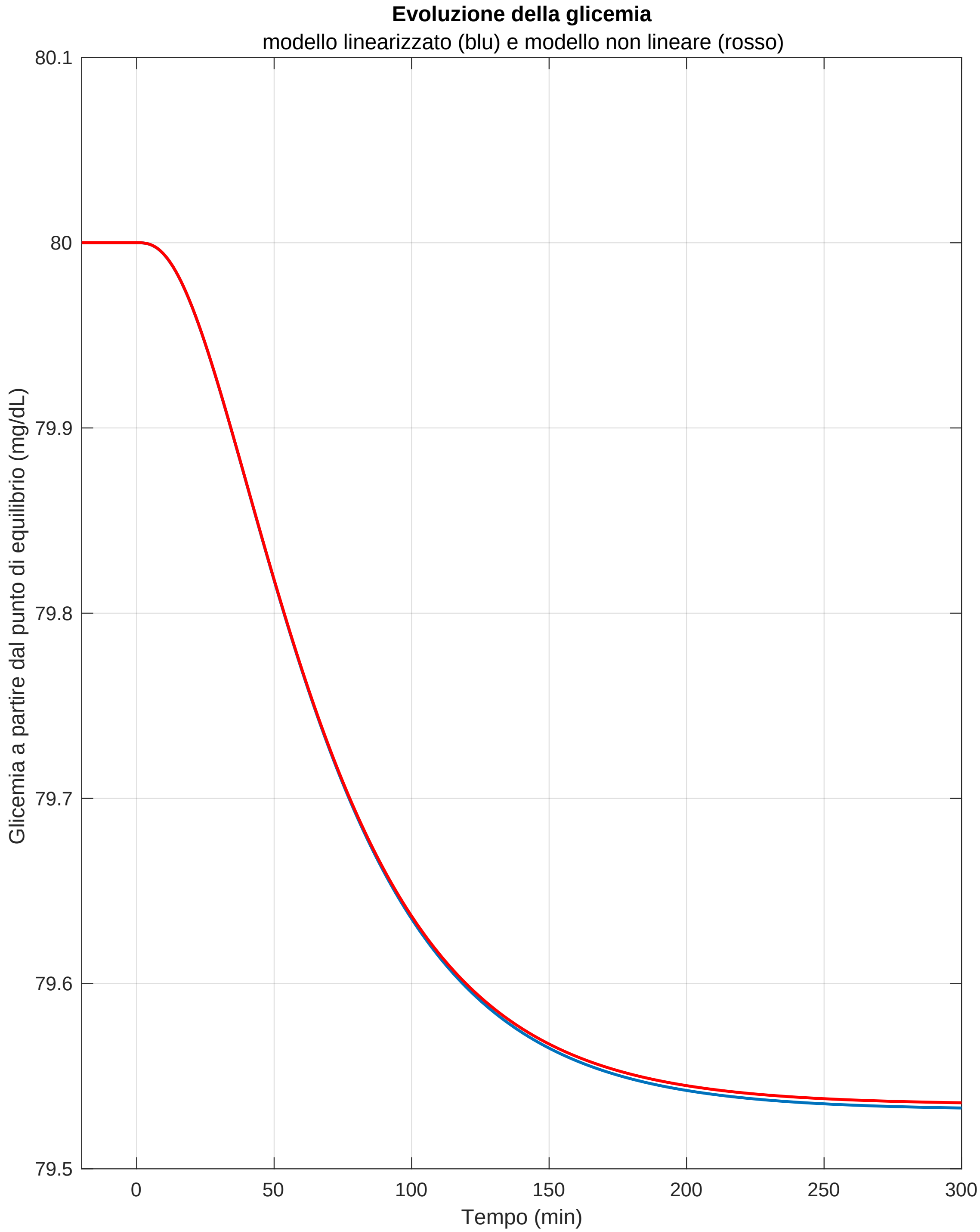
Si tratta di simulare l'evoluzione del sistema non lineare a partire dallo stato iniziale $x(0) = \bar{x}_{80}$ e con ingresso costante pari a $1.1 \cdot \bar{u}_{80} = 1650$ (μUI) min^{-1}. Il codice riportato esegue la simulazione.

```
clear all
close all

k_a=0.05
k_d=0.11
k_c0=0.0219
k_ci=8 * 10^(-6)
e=3.015
V=1.62

%Calcolo il punto di equilibrio
y_b=80

x_1b=k_d *(e/(V* y_b)-k_c0)/(k_a*k_ci)
x_2b=(e/(V * y_b)-k_c0)/k_ci
x_3b=V *y_b

u_b=k_d*(e/(V *y_b)-k_c0)/k_ci


%Calcolo la traiettoria di y(t) giustapponendo un tratto di 20 minuti prima
%dell'istante zero in cui y e` costantemente al valore di equilibrio al
%tratto di 5 ore (300 minuti) in cui y(t) e` dato dalla formula calcolata
%con l'antitrasformata di Laplace.
y=[];
for t=-20:0.05:0
    y=[y 80];
end

for t=0.05:0.05:300
    y=[y 80-0.4682+0.1049*exp(-0.11*t)-0.7491*exp(-0.05*t)+1.1124*exp(-0.0233*t)];
end

%Disegno il grafico dell'uscita ottenuta con il modello lineare
t=[-20:0.05:300];
plot(t,y,'LineWidth',1.5)
```

```
axis([-20, 300, 79.5, 80.1])
grid


%calcolo i parametri per il paziente di 80 kg
k_ci=8 * 10^(-6)/80
e=3.015 *80
V=1.62 *80


x0=80*[x_1b;x_2b;x_3b]; %stato di equilibrio per il paziente di 80 kg
x=x0 %inizialmente la traiettoria di stato contiene solo lo stato iniziale
Tf=300;
x_1c=x0(1); %prima componente dello stato al tempo corrente
x_2c=x0(2); %seconda componente dello stato al tempo corrente
x_3c=x0(3); %terza componente dello stato al tempo corrente

u=1650; %ingresso (costante)
delt=0.05 %intervallo di discretizzazione dell'eq. differenziale

for t=0:delt:Tf-delt  %in ciascun istante ...

x1p=-k_a*x_1c +u; %si calcola la derivata della prima componente dello stato ...
x2p=k_a*x_1c- k_d*x_2c;  %la derivata della seconda componente dello stato ...
x3p=e-(k_c0 + k_ci*x_2c)*x_3c;  %e la derivata della terza componente dello stato

x_1c=x_1c+x1p*delt; %si calcola la prima componente dello stato all'istante successivo
x_2c=x_2c+x2p*delt; %la seconda componente dello stato all'istante successivo
x_3c=x_3c+x3p*delt; %e la terza componente dello stato all'istante successivo
xc=[x_1c;x_2c;x_3c]; %si sovrappongono le tre componenti ottenendo lo stato all'istante succe
                     %che diventa il nuovo stato al tempo corrente
x=[x xc]; %si allunga la traiettoria di stato giustapponendo alla traiettoria
          %gia` calcolata fino a questo momento lo stato all'istante successivo
end


%Calcolo la traiettoria di ynl (ossia l'uscita ottenuta con la simulazione
%del modello non lineare) giustapponendo un tratto di 20 minuti (400 campioni) prima
%dell'istante zero in cui y e` costantemente al valore di equilibrio al
%tratto di 5 ore (300 minuti) in cui y(t) e` dato dalla terza componente
%dello stato moltiplicata per 1/V
```

```
ynl=80*ones(1,400);
ynl=[ynl (1/V)*x(3,:)];

% Sovrappongo al grafico dell'uscita ottenuta con il modello lineare il
% grafico dell'uscita ottenuta con il modello non lineare
hold on
t=[-20:0.05:300];
plot(t,ynl,'r','LineWidth',1.5)
title('Evoluzione della glicemia')
subtitle('modello linearizzato (blu) e modello non lineare (rosso)')
xlabel('Tempo (min)')
ylabel('Glicemia a partire dal punto di equilibrio')
```

Il relativo grafico è riportato di seguito.



Risulta evidente che le due curve sono quasi sovrapposte e quindi, in queste condizioni di lavoro, il modello linearizzato descrive con ottima approssimazione l'evoluzione della glicemia prevista dal modello non lineare.