A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 6 febbraio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U_α il sottospazio generato da $u_1 = (2, -1, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1, -2)$, $u_3 = (\alpha, -1, 2, -1)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare la dimensione di U_α al variare di α.

(b) Per il valore di α per cui $\dim U_\alpha = 2$ trovare una base ortogonale di U_α.

(c) Si ponga ora $\alpha = 0$ per tutto il resto dell'esercizio. Trovare una base di $U_0^\perp$.

(d) Nel sottospazio W di equazione $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ si trovi un vettore w tale che la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U_0 sia $u = (1, 0, 1, -1)$.

Soluzione. (a) Il vettore u_3 è combinazione lineare di u_1 e u_2 se e solo se $\alpha = 4$. Pertanto, per $\alpha = 4$ si ha $\dim U_\alpha = 2$ e per $\alpha \neq 4$ si ha $\dim U_\alpha = 3$.

(b) Poniamo ora $\alpha = 4$. Una base di U_α è $\{u_1, u_2\}$. Poniamo $u_1' = u_1$ e $u_2' = u_2 + \lambda u_1$. Imponendo che $u_1' \cdot u_2' = 0$ si trova $\lambda = 5/6$, quindi $u_2' = u_2 + \frac{5}{6}\, u_1$. I vettori u_1' e u_2' sono una base ortogonale di U_α.

(c) Poniamo ora $\alpha = 0$. Una base di U_0 è $\{u_1, u_2, u_3\}$. Richiedendo che un vettore (x_1, x_2, x_3, x_4) sia ortogonale ai vettori u_1, u_2, u_3 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

quindi una base di $U_0^\perp$ è data dal vettore $u^\perp = (0, 1, 1, 1)$.

(d) Il vettore w deve essere del tipo $w = u + \lambda u^\perp = (1, \lambda, 1 + \lambda, -1 + \lambda)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Richiedendo che w soddisfi l'equazione $2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ del sottospazio W si ottiene $\lambda = 2$, per cui il vettore cercato è $w = u + 2u^\perp = (1, 2, 3, 1)$.

Esercizio 2. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \\ -3x_1 + x_2 + t\, x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio e determinare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Ora si ponga $t = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Trovare basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(0, 3, -2)$.

(d) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, -1, 0, 1)$, $v_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ del dominio e alla base canonica del codominio. Determinare una matrice P tale che $B = AP$.

Soluzione. (a) La matrice di f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & t & 1 \end{pmatrix}$$

Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & t+4 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il rango è 2 se e solo se $t = -4$, altrimenti il rango è 3.

(b) Ponendo $t = 0$ la matrice in forma a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Usiamo questa matrice per trovare i vettori del nucleo di f. Si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_4 = 2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Pertanto il nucleo di f ha dimensione 1 e una base è data dal vettore $u = (1, 1, 0, 2)$.
Per quanto riguarda l'immagine di f, questa ha dimensione 3, quindi si ha $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ e quindi come base di $\mathrm{Im}(f)$ possiamo prendere la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Per trovare l'antiimmagine del vettore $(0, 3, -2)$ bisogna risolvere il sistema $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, -2)$. Riducendo la matrice completa in forma a scala e risolvendo il sistema corrispondente si trova

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2\lambda - 2 \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni può essere anche scritto nella forma

$$(0, 0, 1, -2) + \lambda (1, 1, 0, 2).$$

(d) Si ha $f(v_1) = (0, 1, -2)$, $f(v_2) = (-2, -3, 0)$, $f(v_3) = (-3, -4, 3)$, $f(v_4) = (-2, -2, 2)$. Quindi la matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice di cambiamento di base P è la matrice le cui colonne sono le coordinate dei vettori v_1, v_2, v_3, v_4:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ t & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A_t.

(b) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A_t ha autovalori con molteplicità > 1.

(c) Per ciascuno dei valori di t trovati al punto (b) dire se la matrice A_t è diagonalizzabile.

(d) Si dica se esistono dei valori di t per i quali esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_t (la risposta deve essere adeguatamente giustificata).

Soluzione. (a) Il polinomio caratteristico è

$$(4-x)(x^2-4x+3+2t)$$

per cui gli autovalori sono 4, $2+\sqrt{1-2t}$, $2-\sqrt{1-2t}$.

(b) Se $t=1/2$ gli autovalori sono $2,2,4$. L'unico altro caso si ha quando

$$2+\sqrt{1-2t}=4$$

da cui si ricava $t=-3/2$. In questo caso gli autovalori sono $4,4,0$.

(c) Per $t=1/2$ l'autovalore $\lambda=2$ ha molteplicità 2, ma si verifica che l'autospazio corrispondente ha dimensione 1. Questo significa che per $t=1/2$ la matrice non è diagonalizzabile.
Per $t=-3/2$ l'autovalore $\lambda=4$ ha molteplicità 2 e si verifica che l'autospazio corrispondente ha dimensione 2. Questo significa che per $t=-3/2$ la matrice è diagonalizzabile.

(d) Dalla teoria sappiamo che esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_t se e solo se la matrice A_t è simmetrica e questo è il caso se e solo se $t=-2$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P=(1,-1,-1)$ e la retta r di equazioni

$$r:\begin{cases}2x-y-4=0\\2x+z-3=0\end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r e passa per P.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

(c) Sulla retta r trovare il punto H di minima distanza dal punto $A=(5,-3,2)$.

(d) Consideriamo i piani σ che hanno equazione del tipo $2x+\alpha\, y+3z+\beta=0$, con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Trovare i valori di α e β tali che il piano σ contenga la retta r.

Soluzione. (a) L'equazione del fascio di piani di asse r è

$$\lambda(2x-y-4)+\mu(2x+z-3)=0$$

Imponendo il passaggio per il punto P si trova $\lambda=-2\mu$, per cui possiamo prendere $\lambda=2$ e $\mu=-1$. Da ciò si deduce che l'equazione del piano π è la seguente:

$$\pi: 2x-2y-z-5=0.$$

(b) Due punti della retta r sono $R_1=(2,0,-1)$ e $R_2=(3,2,-3)$, quindi un vettore della retta r è $v_r=R_2-R_1=(1,2,-2)$. Il vettore perpendicolare al piano π è $n=(2,-2,-1)$. Un vettore direttore della retta s è quindi dato da $v_s=v_r\times n=(-6,-3,-6)$. Questo vettore è multiplo di $(2,1,2)$, quindi possiamo anche prendere $v_s=(2,1,2)$. Possiamo ora scrivere le equazioni parametriche della retta s:

$$s:\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-1+2t\end{cases}$$

(c) Un punto generico X della retta r è dato da $X=R_1+t\,v_r$, quindi le sue coordinate sono

$$\begin{cases}x=2+t\\y=0+2t\\z=-1-2t\end{cases}$$

Consideriamo il vettore
$$\vec{AX} = X - A = (t - 3, 2t + 3, -2t - 3)$$
e imponiamo la condizione $\vec{AX} \cdot v_r = 0$. Si ottiene l'equazione $9t + 9 = 0$, da cui si ricava $t = -1$. Sostituendo questo valore nelle coordinate di X si ottengono le coordinate del punto $H = (1, -2, 1)$.

(d) Richiedere che il piano σ contenga la retta r equivale a richiedere che σ passi per i punti R_1 e R_2. La condizione di passaggio per R_1 fornisce l'equazione $1 + \beta = 0$. La condizione di passaggio per R_2 fornisce l'equazione $-3 + 2\alpha + \beta = 0$. Risolvendo queste due equazioni si trova $\alpha = 2$ e $\beta = -1$.