COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
29 Gennaio 2015

Esercizio 1. [9 punti] Dato il sistema a tempo-continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+s^2}{s(1+s)^2}$$

se ne traccino i diagrammi di Bode e Nyquist (individuando per quest'ultimo asintoti ed intersezioni con gli assi). Si studi, inoltre, la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 0$), utilizzando il Criterio di Nyquist, e si individui il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$ nei vari casi.

Esercizio 2. [6 punti] Dato il sistema a tempo-continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2},$$

i) si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$ tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0 con $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.01$ (errore a regime al gradino), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 0.01$ rad/s e margine di fase $m_\phi \simeq 90°$;

ii) si progetti un compensatore stabilizzante di tipo PID $C_2(s)$ tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.01$ (errore a regime alla rampa lineare), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 100$ rad/s e margine di fase $m_\phi \simeq 90°$.

Esercizio 3. [10 punti] Dato il sistema a tempo-continuo di funzione di trasferimento

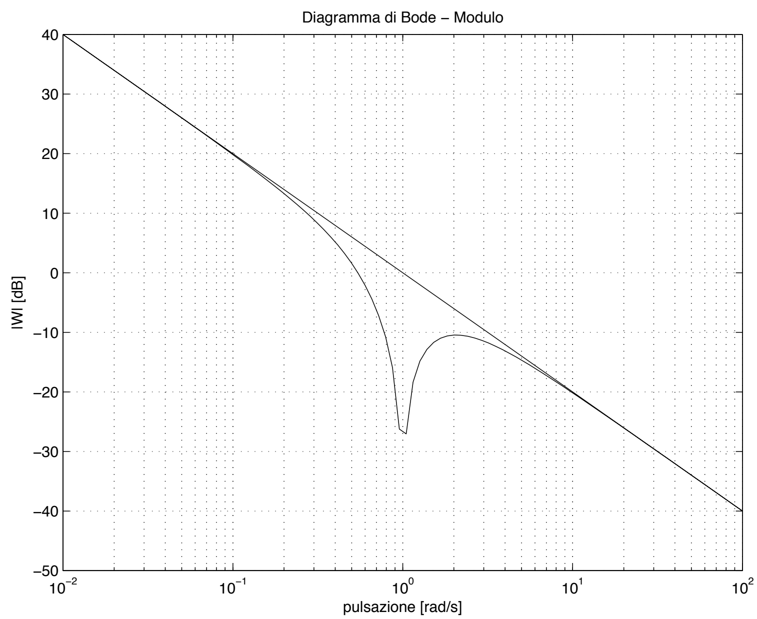
$$G(s) = \frac{s^2-2s+2}{(s+1)^3},$$

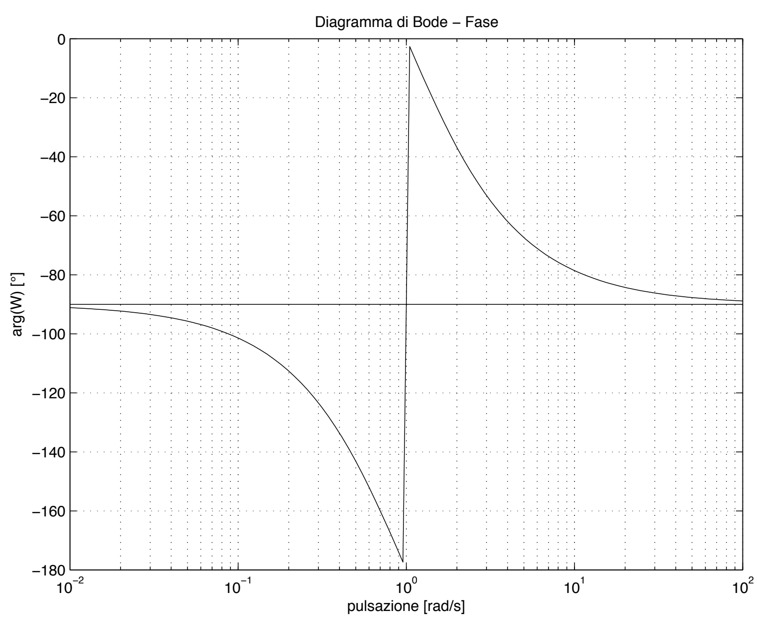
- tracciare i luoghi negativo e positivo, determinandone asintoti e punti doppi;
- studiare la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando le intersezioni del luogo con l'asse immaginario;
- studiare la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ ricorrendo a Routh.

Teoria. [5 punti] Si discutano i motivi che giustificano l'utilizzo della trasformazione bilineare nel caso dei sistemi a tempo discreto. Quindi, si spieghi quando e perché la versione continua $\tilde{G}(s)$ corrispondente ad una data $G(z)$ discreta risulta impropria, propria ma non strettamente propria, oppure strettamente propria. Infine, si enunci e dimostri il Criterio di Routh nella sua versione a tempo discreto.

SOLUZIONI

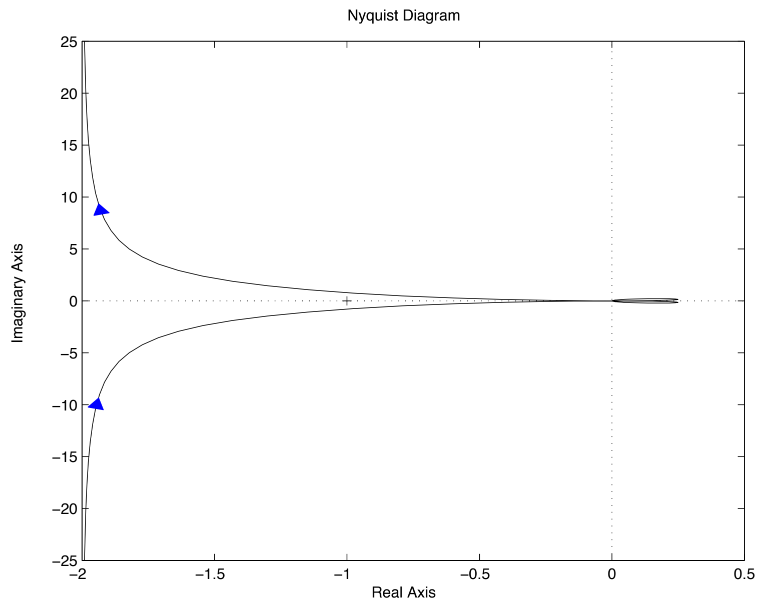
Esercizio 1. Diagrammi di Bode:

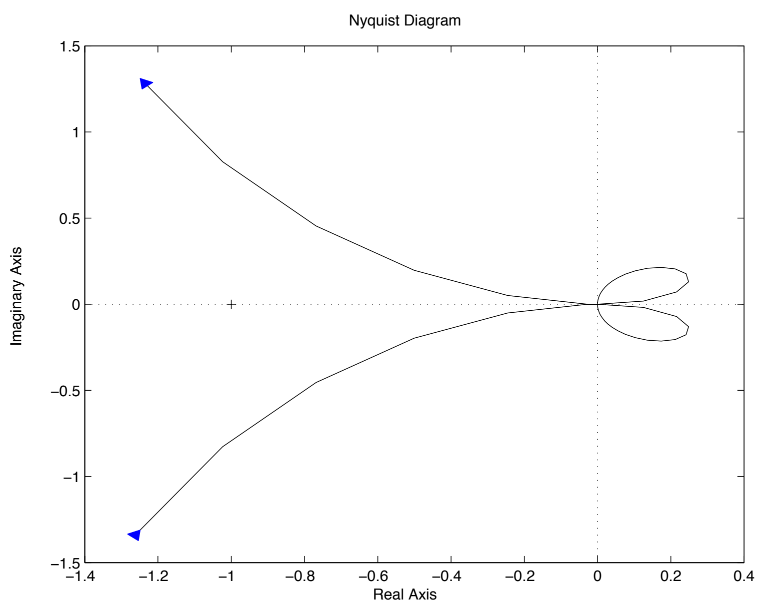




Il diagramma dei moduli esibisce un picco di antirisonanza infinito (anche se il diagramma in questione lo mostra finito!). Esso scende da $+\infty$ a $-\infty$ (in corrispondenza di $\omega = 1$), poi risale e, raggiunto un massimo, ridiscende verso $-\infty$ (diagramma asintotico rettilineo di pendenza -20 dB/decade, visto il posizionamento di poli e zeri non nulli sullo stesso punto di spezzamento). Invece la fase fase parte da $-90°$, scende fino a $-180°$ in $\omega = 1$, dove una discontinuità la porta a $0°$, per poi ridiscendere verso $-90°$.

Diagramma di Nyquist e suo particolare:



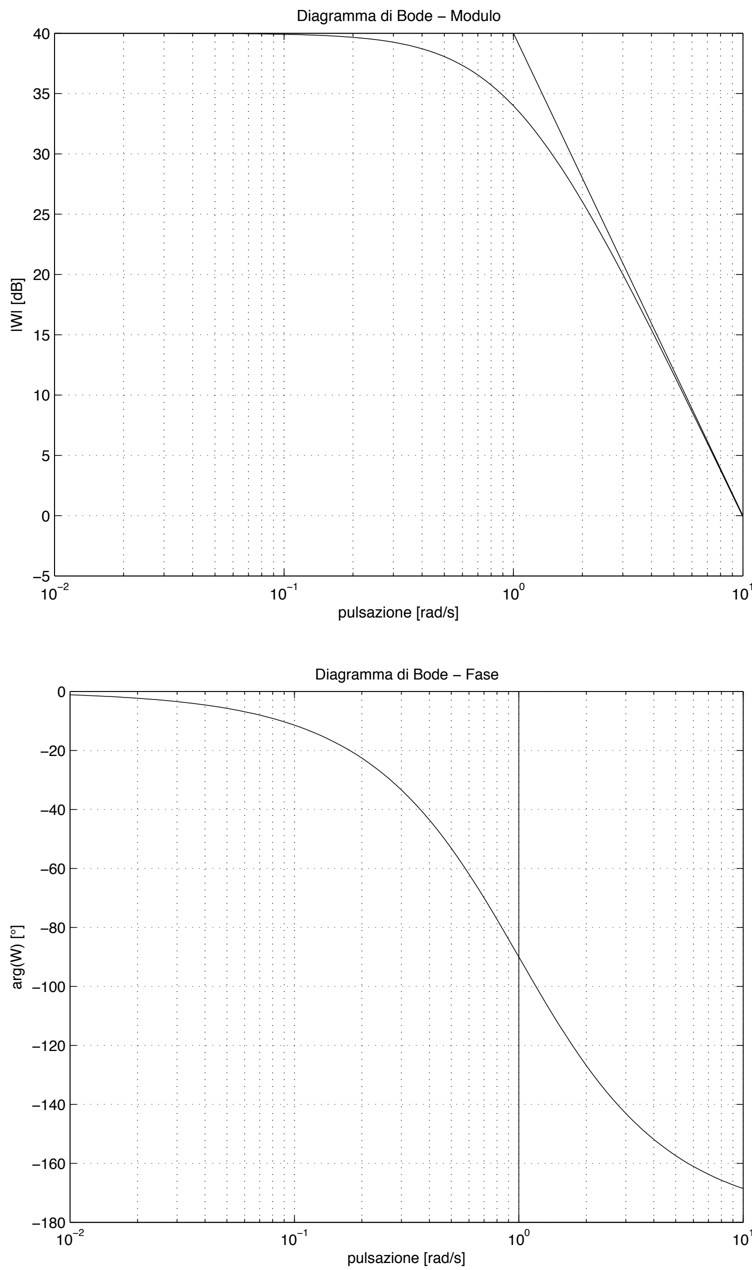


Calcolando $G(j\omega)$ si ha

$$G(j\omega) = 2\frac{\omega^2 - 1}{(1+\omega^2)^2} - j\frac{(\omega^2-1)^2}{\omega(1+\omega^2)^2}$$

da cui parte reale ed immaginaria si annullano solo (e contemporaneamente) in $\omega = 1$. Si vede quindi che l'asintoto è verticale e passante per $s = -2$. Nyquist arriva dal basso lungo la direzione asintotica, attraversa l'origine per $\omega = 1$ con tangente orizzontale, passando dal terzo al quarto quadrante, dove compie ora una curva pseudo-circolare (cappio) che si richiude asintoticamente nell'origine con tangente verticale. Aggiunta l'immagine speculare per le pulsazioni negative, ed il semicerchio all'infinito dovuto al polo nell'origine, si vede che Nyquist non circonda il punto $-\frac{1}{k}$ se $k > 0$ (quindi $N = 0$), mentre fa un giro orario attorno a $-\frac{1}{k}$ se $k < 0$ (quindi $N = -1$). Essendo $n_{G_+} = 0$, si ha quindi stabilità ($n_{W_+} = 0$) per $k > 0$, ed instabilità altrimenti, con un polo reale positivo (ed uno negativo) se $k < 0$.

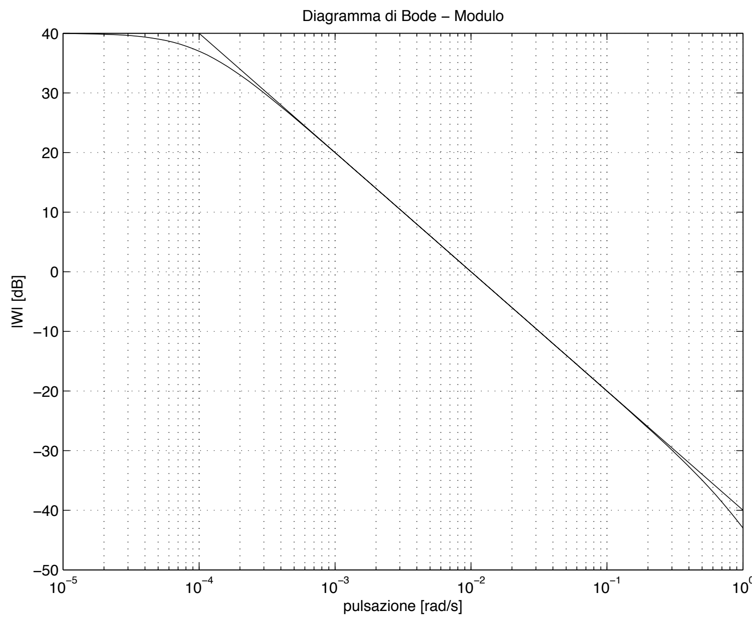
Esercizio 2. i) Il guadagno $K_B \simeq 100$ sistema l'errore a regime. Dal diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s) = 100G(s)$

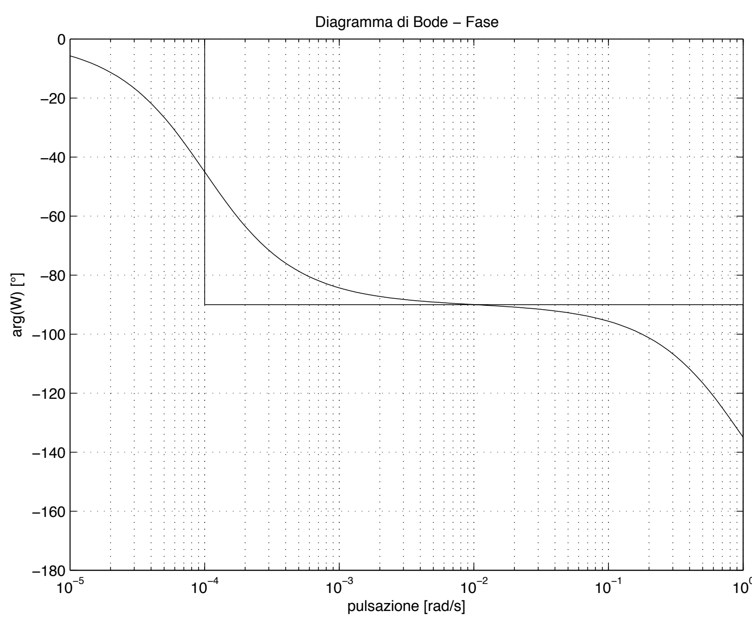


si vede che, essendo $0.01 = \omega_a^{DES} < \omega_a \simeq 10$ e $90° = m_\phi^{DES} < m_\phi(\omega_a^{DES}) \simeq 180°$, è necessaria una rete ritardatrice, in quanto in ω_a^{DES} il guadagno va abbassato di 40dB, e la fase diminuita di circa 90°. Scegliamo pertanto di posizionare il polo 2 decadi prima di ω_a^{DES}, e lo zero sufficientemente alla destra di ω_a^{DES} stessa, ad esempio in $\omega = 1$ rad/s, in modo da creare una cancellazione zero-polo ammissibile. Quindi

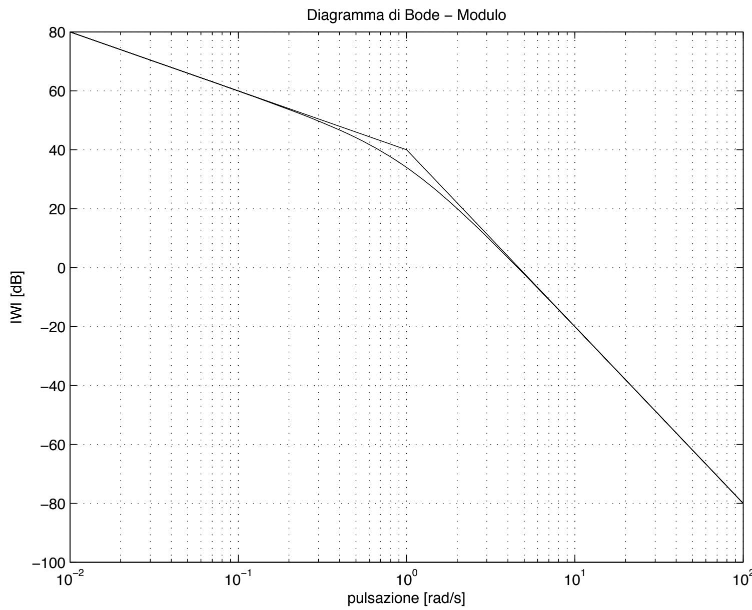
$$C_1(s) = \frac{100(1+s)}{1+10^4 s}$$

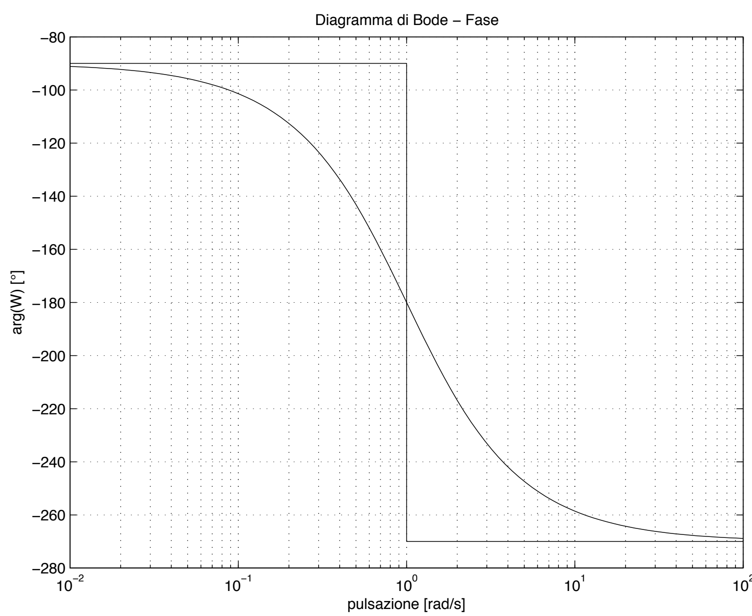
soddisfa tutte le specifiche, ed è stabilizzante per il Criterio di Bode:





ii) Per il PID, oltre al necessario precompensatore $\frac{100}{s}$, che sistema tipo e relativo errore a regime, occorre posizionare 2 zeri. Dal diagramma di Bode per $\frac{100}{s}G(s)$

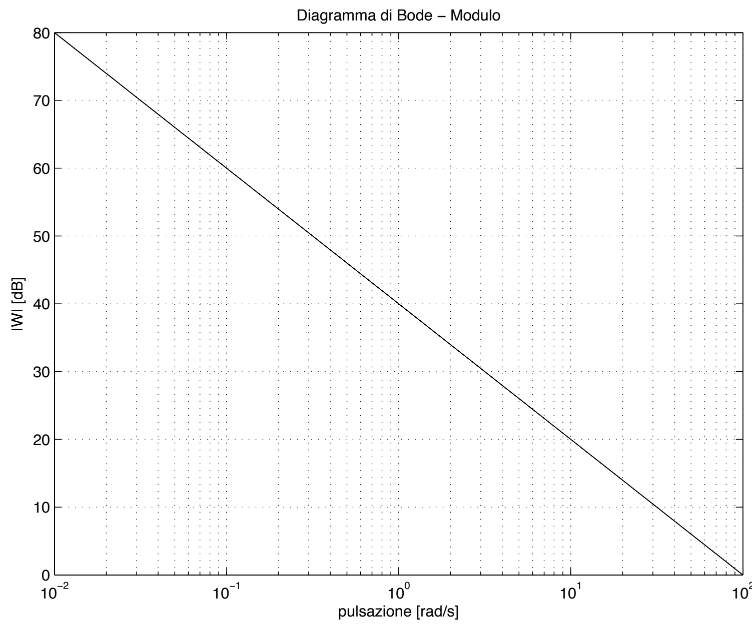


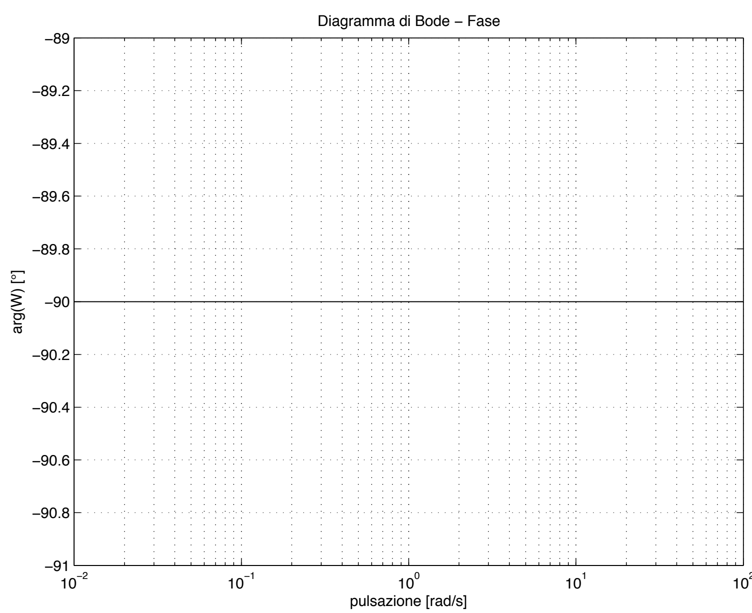


si vede che il modo più semplice è indurre una doppia cancellazione zero-polo, cioé ricorrere a

$$C_2(s) = \frac{100(1+s)^2}{s} = \frac{100}{s} + 200 + 100s$$

che soddisfa a tutte le specifiche richieste.

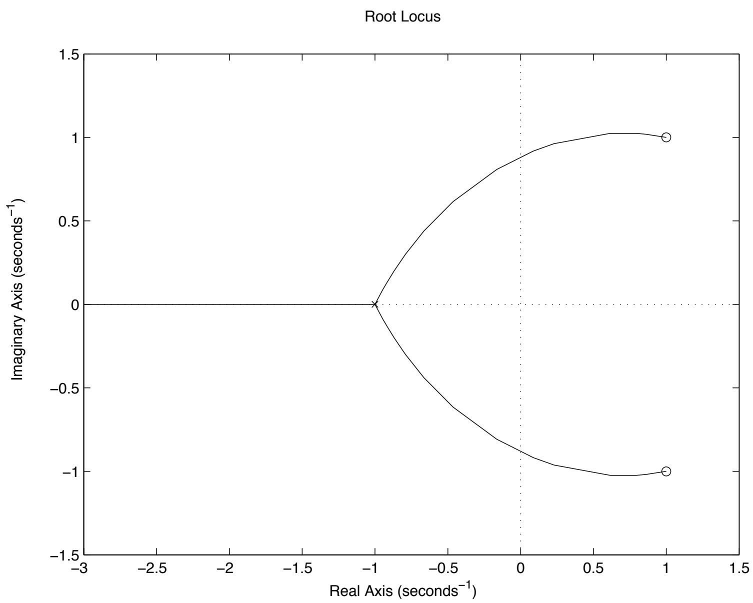




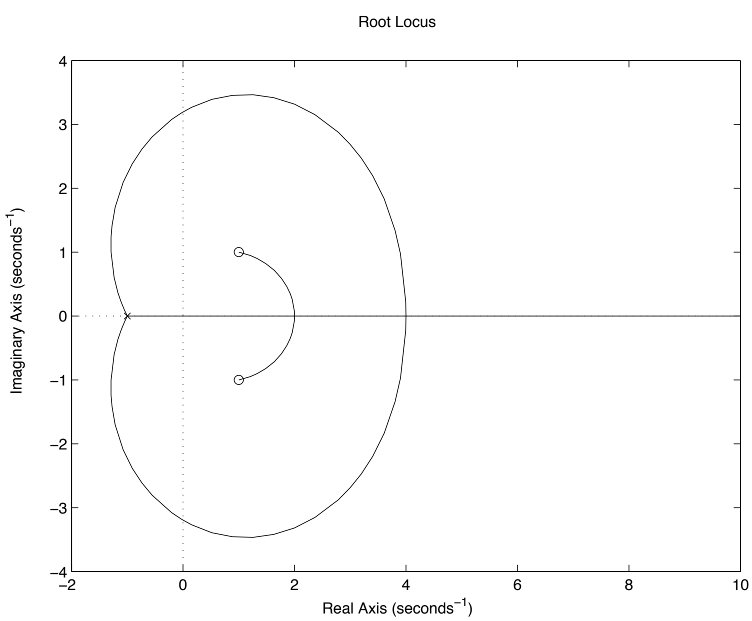
Esercizio 3. Si hanno 2 zeri complessi $s = 1 \pm i$ ed un triplo polo in $s = -1$. L'equazione dei punti doppi porge

$$(s+1)^2(s^2-6s+8) = 0 \Rightarrow s = -1(\text{per } k = 0), s = 2(\text{per } k = -13.5), s = 4(\text{per } k = -12.5)$$

Quindi il luogo positivo ha un ramo sull'asse reale che da $s = -1$ va verso $-\infty$ (unico asintoto), e 2 rami complessi che escono da $s = -1$, attraversano l'asse immaginario e raggiungono asintoticamente i 2 zeri:



Invece il luogo negativo ha 2 rami complessi che attraversano l'asse immaginario e si incontrano nel punto doppio $s = 4$ per $k = -12.5$, quindi 1 ramo prosegue verso $+\infty$ (unico asintoto) e l'altro verso il punto doppio $s = 2$ che viene raggiunto per $k = -13.5$, riunendosi con l'altro ramo che, muovendosi sull'asse reale, proviene da $s = -1$ ed attraversa l'asse immaginario in $s = 0$ (per $k = -0.5$). Infine, i due rami dal punto doppio $s = 2$ escono dall'asse reale e si dirigono asintoticamente verso i 2 zeri.



Tutto ciò è confermato dalla ricerca delle intersezioni con l'asse immaginario. Ponendo infatti $s = i\omega$ in $(s+1)^3 + k(s^2 - 2s + 2) = 0$, si ottiene

$$i\omega(3 - \omega^2 - 2k) + [(1 - 3\omega^2) + (2 - \omega^2)k] = 0$$

Uguagliando a zero la parte immaginaria, si trova $\omega = 0$ (che sostituita nella parte reale porge $k = -0.5$) oppure $\omega^2 = 3 - 2k$, che sostituita nella parte reale porge

$$2k^2 + 5k - 8 = 0 \;\Rightarrow\; k = \frac{-5 \pm \sqrt{89}}{4} \simeq 1.1,\; -3.6 \;\Rightarrow\; \omega \simeq 0.9,\; 3.2$$

per cui l'attraversamento dell'asse immaginario si ha per $k \simeq 1.1$ in $s \simeq \pm 0.9i$ nel luogo positivo, e per $k = -0.5$ in $s = 0$ e per $k \simeq -3.6$ in $s \simeq \pm 3.2i$ nel luogo negativo. Di conseguenza, si ha stabilità BIBO (rami tutti nel semipiano sinistro) se e solo se $-0.5 < k < \frac{\sqrt{89}-5}{4} \simeq 1.1$. Allo stesso risultato si perviene dalla tabella di Routh di $(s+1)^3 + k(s^2 - 2s + 2) = 0$, che è

$$\begin{array}{c|ll} 3 & 1 & 3-2k \\ 2 & 3+k & 1+2k \\ 1 & -\frac{2k^2+5k-8}{3+k} & \\ 0 & 1+2k & \end{array}$$

e la cui prima colonna risulta tutta positiva se e solo se k assume i valori sopracitati.

Teoria. Si veda il Libro di Testo, pag. 341 e successive.