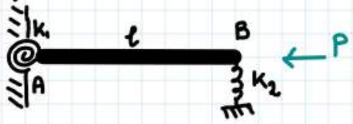
ESERCIZI INSTABILITÀ CON ELASTICITÀ CONCENTRATA e/o DIFFUSA

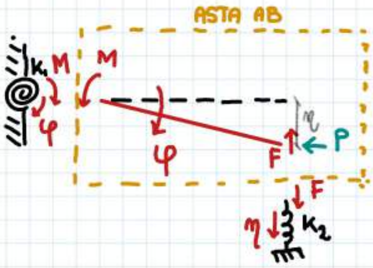
① Determinare il carico critico dell'asta rigida AB, vincolata come riportato:



K_1 = rigidezza molla rotazionale in A

K_2 = rigidezza molla longitudinale in B

Si ipotizzi $\operatorname{sen}\varphi \sim \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi \sim \varphi$, $\cos\varphi \sim 1$



$M = \varphi \cdot K_1$

$F = \eta \cdot K_2 = \varphi \ell K_2$

Devo determinare la configurazione perturbata: Ipotizzo una rotazione in A φ varia, e valuto le reazioni che nascono nelle molle e le conseguenti reazioni delle molle sull'asta AB. Risolvo quindi l'equilibrio statico dell'asta:

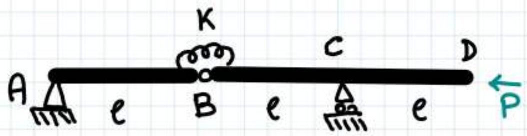
$\circlearrowleft M(A) = M + F\cdot\ell - P\cdot\eta = 0 \qquad K_1\varphi + K_2\varphi\ell^2 - P\cdot\varphi\ell = 0$

$\varphi(K_1 + K_2\ell^2 - P\ell) = 0 \qquad \varphi = 0$ soluzione banale (= configurazione indeformata)

$P_{cr} \Rightarrow K_1 + K_2\ell^2 - P_{cr}\ell = 0$

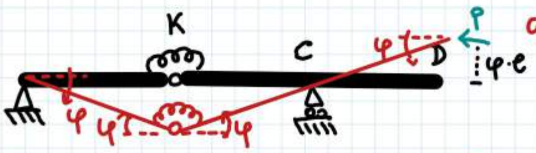
$$P_{cr} = \frac{K_1 + K_2\ell^2}{\ell}$$

② Determinare il carico critico dell'asta rigida BD:



K = rigidezza molla rotazionale interna in B

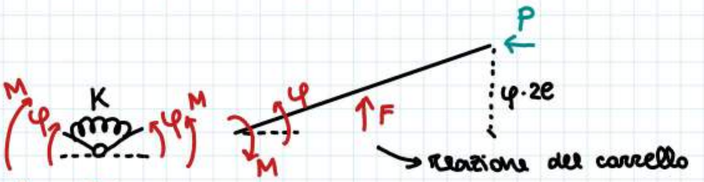
Si ipotizzi $\operatorname{sen}\varphi \sim \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi \sim \varphi$, $\cos\varphi \sim 1$



configurazione perturbata

Eq. intera struttura: ricavo F in f^ne di φ:

$\circlearrowleft M(A) = F\cdot 2\ell + P\cdot\varphi\ell = 0 \qquad F = -\frac{P\varphi}{2}$



$\Delta\varphi = 2\varphi$

$M = K\cdot\Delta\varphi = K\cdot 2$

Eq. asta BD:

$\circlearrowleft M(B) = -M + F\cdot\ell + P\cdot 2\varphi\ell = -K\cdot 2\varphi - \frac{P\varphi\ell}{2} + P2\varphi\ell = 0$

$\varphi(-2K - \frac{P\ell}{2} + 2P\ell) = 0 \qquad \varphi = 0$ soluz. banale

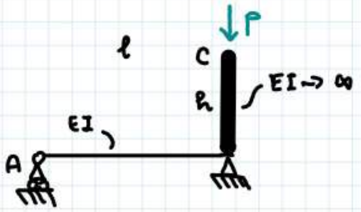
$P_{cr} \rightarrow \quad -2K - \frac{P_{cr}\ell}{2} + 2P_{cr}\ell = 0 \qquad P_{cr}\left(\frac{3}{2}\ell\right) = 2K$

$$P_{cr} = \frac{4}{3}\frac{K}{\ell}$$

NB: i vincoli interni sono sempre correlati a spostamenti o rotazioni RELATIVI $(\Delta u, \Delta v, \Delta\varphi)$

Una molla rotazionale INTERNA genera un momento dato dalla molla pari a $M = \Delta\varphi\cdot K$. Il $\Delta\varphi$ è dato dalla somma delle rotazioni subite dall'asta AB e l'asta BD in B.

③ Determinare il carico critico per il sistema AB infinitamente rigido, vincolato come in figura:

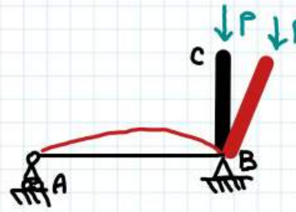


AB = trave con rigidità EI

BC = asta infinitamente RIGIDA

P = carico di compressione

La configurazione perturbata (in rosso) risulterà:



L'elasticità della trave AB porterebbe l'asta BC a tornare nella posizione iniziale imperturbata.

Possiamo quindi assumere che la trave AB sia EQUIVALENTE ad una CERNIERA con MOLLA ROTAZIONALE di rigidezza K, cioè la sua RIGIDEZZA FLESSIONALE, legata all'angolo (schemi elementari), dove l'asta rigida genera su AB un effetto di momento concentrato M:

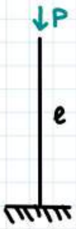
$$\varphi = \frac{M\ell}{3EI} \qquad \varphi = \frac{M}{K} = \underbrace{\frac{\ell}{3EI}}_{K^{-1}} M \qquad \boxed{K = \frac{M}{\varphi} = \frac{3EI}{\ell}} \Rightarrow$$

Risolvo quindi lo schema semplificato per ricavare il carico critico P_{cr}:

$K = \dfrac{3EI}{\ell}$

$$\circlearrowleft + \; M - P\cdot h \operatorname{sen}\varphi = 0 \qquad \text{se } \varphi \text{ piccolo} \quad M - Ph\varphi = 0 \qquad K\cdot\varphi - Ph\varphi = 0 \qquad \boxed{P_{cr} = \frac{K}{h} = \frac{3EI}{\ell h}}$$

④ Determinare il carico critico assiale che può sopportare in sicurezza un ausilio riportato in figura, incastrato ad un estremo. Assumere l'ausilio come un'asta snella flessibile.



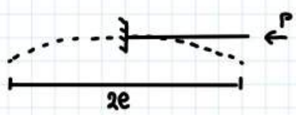
$\ell = 1{,}20$ m

sezione: $R = 20$ mm

$\delta = 2$ mm

$$\boxed{N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}}$$

$\ell_0 = 2\ell$ per la configurazione scelta



materiale $E = 70$ GPa $= 70000$ MPa

coeff di sicurezza: 2

$I = \pi\delta R^3 = 50265{,}5 \text{ mm}^4$

$$N_{cr} = \frac{\overset{7\cdot 10^4}{\pi^2 (70000)}(50265{,}5)}{4\cdot \underset{144\cdot 10^4}{1440000}} \cong \boxed{6\text{ kN}}$$

N massimo ammissibile $N_a = \dfrac{N_{cr}}{2} = 3$ kN

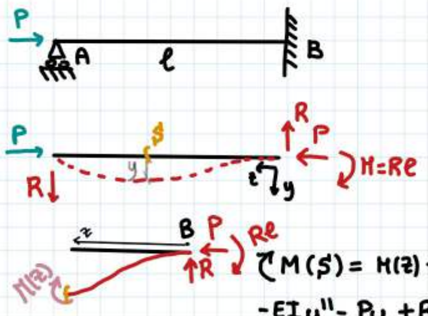
L'ausilio può essere caricato al massimo con 3kN (~300 kg)

Quale sarebbe il carico massimo se si considera invece il raggiungimento dei limiti elastici (sempre stesso coeff di sicurezza)?

(carico normale centrato)

$\sigma_y = 300$ MPa $\quad \sigma_{amm} = \dfrac{\sigma_y}{2} = 150$ MPa $\qquad A = 2\pi\delta R = 251 \text{ mm}^2 \qquad N = \sigma_{amm}\cdot A = 37650\,N \sim 37.7$ kN $\quad$ **10 volte più grande!**

5 Calcolare il carico critico per una trave snella AB incastro-carrello (con dimostrazione)



$\circlearrowleft M(\xi) = M(z) + R\ell - Rz - Py(z) = 0$

$\left(\chi = \frac{M}{EI} = -y''\right)$

$M(z) = -y''EI$

$-EIy'' - Py + R(\ell - z) = 0$

$\frac{P}{EI} = \alpha^2$ $\quad y'' + \alpha^2 y = \frac{R}{EI}(\ell - z)$ $\quad$ Eq^{ne} diff 2° ordine non omogenea

Soluzione omogenea associata: $C_1 \operatorname{sen} \alpha z + C_2 \cos \alpha z$

Soluzione particolare: $\bar{y}$ = Polinomio grado 1 → per il metodo della somiglianza la soluzione particolare sarà:

$\left.\begin{array}{l}\bar{y} = Az + B \\ \bar{y}' = A \\ y'' = 0\end{array}\right\}$ la soluzione particolare soddisfa l'eq^{ne} diff:

$y'' + \alpha^2 y = \frac{R}{EI}(\ell - z)$

$0 + \alpha^2(Az + B) = \frac{R\ell}{EI} - \frac{Rz}{EI}$

$\alpha^2 A = -\frac{R}{EI}$ $\quad A = \frac{EI}{P}\left(-\frac{R}{EI}\right) = -\frac{R}{P}$

$\alpha^2 B = \frac{R\ell}{EI}$ $\quad B = \frac{EI}{P}\frac{R\ell}{EI} = \frac{R\ell}{P}$

$\bar{y} = \frac{R}{P}(\ell - z)$

Soluzione generale: $y = C_1 \operatorname{sen} \alpha z + C_2 \cos \alpha z + \frac{R}{P}(\ell - z)$

3 incognite, 3 cond. a contorno:

$\begin{cases} y(0) = 0 & C_2 + \frac{R\ell}{P} = 0 \\ y'(0) = 0 & C_1\alpha - \frac{R}{P} = 0 \\ y(\ell) = 0 \end{cases}$ $\Big\}\ C_2 = -C_1\alpha\ell$

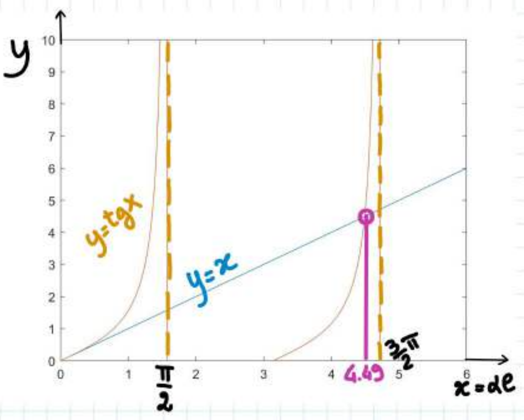
$y(\ell) = 0 \longrightarrow C_1 \operatorname{sen} \alpha\ell + C_2 \cos \alpha\ell = 0 \quad C_1(\operatorname{sen} \alpha\ell - \alpha\ell \cos \alpha\ell) = 0 \longrightarrow C_1 = 0$ soluzione banale

$\operatorname{sen} \alpha\ell - \alpha\ell \cos \alpha\ell = 0 \quad \operatorname{tg} \alpha\ell = \alpha\ell$ (*)

(*) si ottiene solo per via numerica o grafica.

per via grafica: $\alpha\ell = x$ $\quad x = \operatorname{tg} x$ intersezione tra la retta $y = x$ e $y = \operatorname{tg} x \longrightarrow \alpha\ell = 4.49$

$\alpha = \frac{4.49}{\ell} = \sqrt{\frac{P}{EI}}$



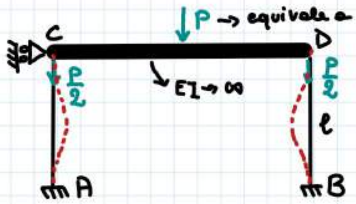
$P_{cr} = \frac{(4.49)^2}{\ell^2} EI$ $\quad 4.49^2 \cong 2.05\pi^2$

$P_{cr} = \frac{2.05\pi^2}{\ell^2} EI$ $\quad$ NB $\frac{2.05}{\ell^2} = \frac{1}{\ell_0^2}$ con $\ell_0 \cong 0.7\ell$

$P_{cr} = \frac{\pi^2}{(0.7\ell)^2} EI$

6 Calcolare il carico critico su uno dei due elementi flessibili (AC o BD), quando l'asta CD caricata risulta essere infinitamente rigida. Ipotizzare un carico P in mezzeria a CD.

Nel caso di carico ripartito, grazie alla simmetria:



P_{cr} ?

$$P'_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2/4} \qquad \ell_0 \to \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2$$

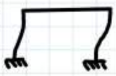
$$P'_{cr} = \frac{P}{2} \qquad \frac{P}{2} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$$P_{cr} = \frac{8\pi^2 EI}{\ell^2}$$

NB AC e BD si riconducono allo schema della trave incastro-incastro con $\ell_0 = \frac{\ell}{2}$

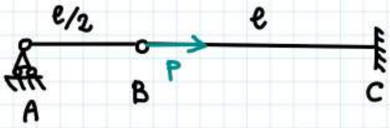
E se avessi avuto cerniera in A e B? $\left(P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}\right)$

E se rimuovo il carrellino? (i nodi in sommità si spostano)



$\left(P_{cr} = \frac{2\pi^2 EI}{\ell^2}\right)$

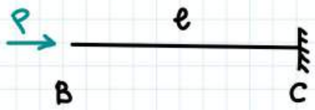
7 Calcolare il carico critico per la struttura riportata, avente sez. circolare cava ($R_{est} = 4mm$, $R_{int} = 2mm$)
$E = 100\ GPa$, $\ell = 150\ mm$



NB Il carico di punta P è una FORZA ESTERNA applicata al nodo B. In generale si ripartirebbe su entrambe le travi, tali da generare un SALTO pari a P nel diagramma di N. In questo caso però, AB NON PUÒ avere un carico assiale, in quanto questo dovrebbe scaricarsi nel carrello, il quale però può solo dare reazioni verticale ⇒ il carico P viene preso tutto da BC.

Inoltre, essendoci una cerniera interna in B e un carrello in A, nel momento in cui la trave BC si instabilizza, AB segue lo spostamento di B, senza dare nessun contributo.

⇒ Posso quindi studiare l'asta BC come una MENSOLA caricata con carico di punta:



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2} \qquad \ell_0 = 2\ell$$

$$P_{cr} = \frac{(3.1416)^2 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 188{,}5}{\underbrace{(2 \cdot 150)^2}_{45 \cdot 10^3}} = 4134\ N$$

$$I = \frac{1}{4}\pi\left(R_{est}^4 - R_{int}^4\right) = \frac{1}{4}\pi\left((4)^4 - (2)^4\right) = 188{,}5\ mm^4$$