A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Siano $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,0,-2) \in \mathbb{R}^3$.
Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = (3,0,-5)$, v_2 è un autovettore relativo all'autovalore 2 e $f(v_3) = (5,2,-5)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sia nel dominio che nel codominio).

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

(c) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di f usando prima la matrice A e poi la matrice B. Come mai usando A oppure B si trovano risultati diversi per le basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$, visto che entrambe le matrici corrispondono alla **stessa** funzione f?

(d) Sia $w = (3,t,-5)$. Utilizzando la matrice B si determini per quale valore di t si ha $w \in \operatorname{Im}(f)$. Per tale valore di t trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ -3 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 2$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (2,0,a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,2,0,-1)$, $u_2 = (0,-4,3,4)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (0,5,3,4)$ su U.

(d) Sia $w = (2,-1,0,2)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1,1,2,0)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (0,1,-1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $3x - z = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1^{o} appello — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Siano $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$.
Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = (3, 0, 7)$, v_2 è un autovettore relativo all'autovalore -1 e $f(v_3) = (6, 2, 12)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sia nel dominio che nel codominio).

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

(c) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di f usando prima la matrice A e poi la matrice B. Come mai usando A oppure B si trovano risultati diversi per le basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$, visto che entrambe le matrici corrispondono alla **stessa** funzione f?

(d) Sia $w = (t, -1, 1)$. Utilizzando la matrice B si determini per quale valore di t si ha $w \in \operatorname{Im}(f)$. Per tale valore di t trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -4 & t & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = -5$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (0, 1, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 0, -1, 1)$, $u_2 = (3, 1, -1, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (4, 2, -1, -3)$ su U.

(d) Sia $w = (3, -1, 2, 2)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1, 0, 1, 2)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (1, 0, 1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $x + y = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

C

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1^o appello — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Siano $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$.
Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = (1, 0, -3)$, v_2 è un autovettore relativo all'autovalore -2 e $f(v_3) = (1, 2, 3)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sia nel dominio che nel codominio).

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

(c) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di f usando prima la matrice A e poi la matrice B. Come mai usando A oppure B si trovano risultati diversi per le basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$, visto che entrambe le matrici corrispondono alla **stessa** funzione f ?

(d) Sia $w = (2, 2, t)$. Utilizzando la matrice B si determini per quale valore di t si ha $w \in \operatorname{Im}(f)$. Per tale valore di t trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ t & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 6$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (1, -1, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 1, -2)$, $u_2 = (2, -3, 1, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (1, 3, 5, 1)$ su U.

(d) Sia $w = (2, -1, 2, 3)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1, 2, 0, 1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z + 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (2, -1, 0) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $x + z = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Siano $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = (-1, 0, -1)$, v_2 è un autovettore relativo all'autovalore 1 e $f(v_3) = (1, 2, -1)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sia nel dominio che nel codominio).

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

(c) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di f usando prima la matrice A e poi la matrice B. Come mai usando A oppure B si trovano risultati diversi per le basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$, visto che entrambe le matrici corrispondono alla **stessa** funzione f ?

(d) Sia $w = (1, 4, t)$. Utilizzando la matrice B si determini per quale valore di t si ha $w \in \operatorname{Im}(f)$. Per tale valore di t trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 3$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (-1, 2, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, -1, 0)$, $u_2 = (1, -3, -5, 1)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (3, -2, 1, -4)$ su U.

(d) Sia $w = (1, 3, -2, 1)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (2, 0, 1, -1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (2, 0, -1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $2x + y = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.