Quiz 13

Question **1**

Not complete

Flag question

Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori -2,-1,0,1; la variabile Y assume i valori 0,1,2. La densità congiunta $p_{(X,Y)}$ vale:

$$p_{(X,Y)}(-2,0) = 1/37, \quad p_{(X,Y)}(-1,0) = 3/37, \quad p_{(X,Y)}(0,0) = 5/37, \quad p_{(X,Y)}(1,0) = 5/37,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,1) = 2/37, \quad p_{(X,Y)}(-1,1) = 4/37, \quad p_{(X,Y)}(0,1) = 1/37, \quad p_{(X,Y)}(1,1) = 4/37,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,2) = 1/37, \quad p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/37, \quad p_{(X,Y)}(0,2) = 2/37, \quad p_{(X,Y)}(1,2) = ?.$$

Dopo aver trovato il valore di $p_{(X,Y)}(1,2)$, indicare qui sotto il valore di $P(XY \leq 0 \mid X > -2)$.

Answer:

Check

$Im(X) = \{-2, -1, 0, 1\}$

$Im(Y) = \{0, 1, 2\}$

$P(XY \leq 0 \mid X > -2)$

$P_{xy}(-2,0) = 1/37$	$P_{xy}(-2,1) = 2/37$	$P_{xy}(-2,2) = 1/37$
$P_{xy}(-1,0) = 3/37$	$P_{xy}(-1,1) = 4/37$	$P_{xy}(-1,2) = 2/37$
$P_{xy}(0,0) = 5/37$	$P_{xy}(0,1) = 1/37$	$P_{xy}(0,2) = 2/37$
$P_{xy}(1,0) = 5/37$	$P_{xy}(1,1) = 4/37$	$P_{xy}(1,2) = ?$

SOL. 1) TROVO PRIMA $P(X=1, Y=2)$

PER TROVARE $P_{x,y}(1,2)$ IO SO CHE LA SOMMA DI TUTTE LE $P_{x,y}(x,y)$ DEVE FARE 1.

$$P_{xy}(1,2) = 1 - P(\text{TUTTI GLI ALTRI PUNTI})$$
$$= 1 - \left[\frac{1}{37} + \frac{3}{37} + \frac{5}{37} + \frac{2}{37} + \frac{4}{37} + \frac{1}{37} + \frac{4}{37} + \frac{1}{37} + \frac{2}{37} + \frac{2}{37}\right]$$
$$= 1 - \frac{30}{37} = \frac{7}{37} \checkmark$$

2) $P(XY \leq 0, X > -2)$

USO LA FORMULA DELLA PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$\boxed{P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}}$$

$$\rightarrow P(XY \leq 0 \mid X > -2) = \frac{P(XY \leq 0 \wedge X > -2)}{P(X > -2)}$$

DEVO SOMMARE I $P_{x,y}(x,y)$ CHE HANNO $X \cdot Y \leq 0$

$$= \frac{P_{xy}(-1,0) + P_{xy}(-1,1) + P_{xy}(-1,2) + P_{xy}(0,0) + P_{xy}(0,1) + P_{x,y}(0,2) + P_{xy}(1,0)}{P_{xy}(-1,0) + P_{xy}(-1,1) + P_{xy}(-1,2) + P_{xy}(0,0) + P_{xy}(0,1) + P_{x,y}(0,2) + P_{xy}(1,0) + P_{xy}(1,1) + P_{xy}(1,2)}$$

DEVO SOMMARE I $P_{x,y}(x,y)$ CHE HANNO $X > -2$, CIOÈ TUTTI TRANNE $X = -2$

$$= \frac{\frac{3+4+2+5+1+2+5}{37}}{\frac{3+4+2+5+1+2+5+4+7}{37}} = \frac{\frac{22}{37}}{\frac{33}{37}} = \frac{22}{37} \cdot \frac{37}{33} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3} = 0.6666 \checkmark$$

Question **2**

Not complete

Flag question

Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori -2,-1,0,1; la variabile Y assume i valori 0,1,2. La densità congiunta $p_{(X,Y)}$ vale:

$$p_{(X,Y)}(-2,0) = 1/43, \quad p_{(X,Y)}(-1,0) = 3/43, \quad p_{(X,Y)}(0,0) = 5/43, \quad p_{(X,Y)}(1,0) = 5/43,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,1) = 2/43, \quad p_{(X,Y)}(-1,1) = 4/43, \quad p_{(X,Y)}(0,1) = 1/43, \quad p_{(X,Y)}(1,1) = 4/43,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,2) = 1/43, \quad p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/43, \quad p_{(X,Y)}(0,2) = 2/43, \quad p_{(X,Y)}(1,2) = 13/43.$$

Calcolare la covarianza di X, Y.

Answer:

Check

$Im\,X = \{-2,-1,0,1\}$
$Im\,Y = \{0,1,2\}$

$P_{xy}(-2,0) = 1/43$ $\quad P_{xy}(-2,1) = 2/43$ $\quad P_{xy}(-2,2) = 1/43$
$P_{xy}(-1,0) = 3/43$ $\quad P_{xy}(-1,1) = 4/43$ $\quad P_{xy}(-1,2) = 2/43$
$P_{xy}(0,0) = 5/43$ $\quad P_{xy}(0,1) = 1/43$ $\quad P_{xy}(0,2) = 2/43$
$P_{xy}(1,0) = 5/43$ $\quad P_{xy}(1,1) = 4/43$ $\quad P_{xy}(1,2) = 13/43$

CALCOLARE $Cov[X,Y]$

SOL. LA COVARIANZA E' DATA DA

$$\boxed{Cov[X,Y] = E[X,Y] - N_x N_y}$$

PER CALCOLARLA, CI SERVONO DEGLI ALTRI PARAMETRI, CHE SONO:

- VALORE ATTESO

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i P_x(x_i)}$$

- DENSITA' MARGINALE

$$\boxed{P_x(a) = \sum_{y \in Im(y)} P_{x,y}(a,y)}$$

- VALORE ATTESO DI UNA COMPOSTA DI V.A.

$$\boxed{E[g(x,y)] = \sum_{x \in Im X,\, y \in Im(y)} g(x,y)\, P(X=x,\ Y=y)}$$

1. TROVO $E[X]$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i P_x(x_i)$$

$Im\,X = \{-2,-1,0,1\}$

- $P_x(-2) = P_{x,y}(-2,0) + P_{x,y}(-2,1) + P_{x,y}(-2,2) = \frac{1}{43} + \frac{2}{43} + \frac{1}{43} = \frac{4}{43}$

- $P_x(-1) = P_{x,y}(-1,0) + P_{x,y}(-1,1) + P_{x,y}(-1,2) = \frac{3}{43} + \frac{4}{43} + \frac{2}{43} = \frac{9}{43}$

- $P_x(0) = P_{x,y}(0,0) + P_{x,y}(0,1) + P_{x,y}(0,2) = \frac{8}{43}$ (ma tanto non serve ...)

- $P_x(1) = P_{x,y}(1,0) + P_{x,y}(1,1) + P_{x,y}(1,2) = \frac{5}{43} + \frac{4}{43} + \frac{13}{43} = \frac{22}{43}$

$\Rightarrow E[X] = -2 \cdot \frac{4}{43} - 1 \cdot \frac{9}{43} + 1 \cdot \frac{22}{43} = \frac{5}{43}$

2. TROVO $E[Y]$

- $P_y(0) =$ (non mi serve)

- $P_y(1) = P_{x,y}(-2,1) + P_{x,y}(-1,1) + P_{x,y}(0,1) + P_{x,y}(1,1) = \frac{2}{43} + \frac{4}{43} + \frac{1}{43} + \frac{4}{43} = \frac{11}{43}$

- $P_y(2) = P_{x,y}(-2,2) + P_{x,y}(-1,2) + P_{x,y}(0,2) + P_{x,y}(1,2) = \frac{1}{43} + \frac{2}{43} + \frac{2}{43} + \frac{13}{43} = \frac{18}{43}$

$\Rightarrow E[Y] = 0 \cdot P_y(0) + 1 \cdot P_y(1) + 2 \cdot P_y(2) = 1 \cdot \frac{11}{43} + 2 \cdot \frac{18}{43} = \frac{47}{43}$

3. TROVO $E[X \cdot Y]$

$$E[X \cdot Y] = \sum_{x \in \mathrm{Im}X,\, y \in \mathrm{Im}Y} x \cdot y \cdot P(X = x, Y = y)$$

$$= -2 \cdot 0 \cdot \cancel{P_{x,y}}(-2,0) - 1 \cdot 0 \cdot \cancel{P_{x,y}}(-1,0) + 0 \cdot 0 \cdot P_{x,y}\cancel{(0},0) + 1 \cdot 0 \cdot \cancel{P_{x,y}}(1,0) - 2 \cdot 1 \cdot P_{x,y}(-2,1)$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot P_{x,y}(-1,1) + 0 \cdot 1 \cdot \cancel{P_{x,y}}(0,1) + 1 \cdot 1 \cdot P_{x,y}(1,1) - 2 \cdot 2 \cdot P_{x,y}(-2,2) - 1 \cdot 2 \cdot P_{x,y}(-1,2) + 0 \cdot \cancel{2} \cdot P_{x,y}(0,2)$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot P_{x,y}(1,2) = -2 \cdot \frac{2}{43} - 1 \cdot \cancel{\frac{4}{43}} + 1 \cdot \cancel{\frac{4}{43}} - 4 \cdot \frac{1}{43} - 2 \cdot \frac{2}{43} + 2 \cdot \frac{13}{43} = \frac{14}{43}$$

4. FINALMENTE METTO ASSIEME TUTTI I PEZZI PER TROVARE LA COVARIANZA

$$\mathrm{Cov}[X,Y] = E[X,Y] - E[X]E[Y] = \frac{14}{43} - \frac{5}{43} \cdot \frac{47}{43} = 0.1984$$

Question **3**

Not complete

Flag question

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la densità congiunta di (X, Y), così definita:

- $c(x^2 + xy)$ se $0 \leq y \leq x \leq 1$
- 0 altrimenti

Calcolare

$$P\left(X^2 < Y \mid X < \frac{1}{2}\right).$$

Answer:

Check

SIA $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ DENSITÀ CONGIUNTA DI (X,Y):

$$\begin{cases} c(x^2+xy) & \text{SE } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

CALCOLARE $P\left(X^2 < Y \mid X < \frac{1}{2}\right)$

SOL. QUANDO HO UNA VARIABILE CONGIUNTA CONTINUA, BISOGNA RAGIONARE CON GLI INTEGRALI.

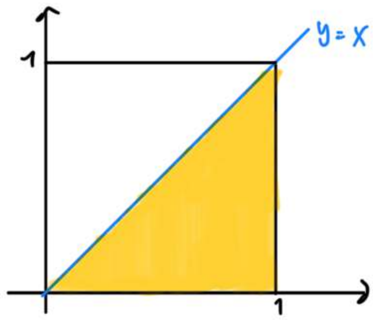
1. PER TROVARE C, USO LA PROPRIETÀ DELLA VARIABILE CONGIUNTA CONTINUA, CIOÈ CHE L'INTEGRALE DELLA FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ SU TUTTO $\mathbb{R}^2$ DEVE ESSERE UGUALE A 1

PROPRIETÀ VAR. CONGIUNTA CONTINUA

$$\boxed{f_{X,Y} \ge 0: \int_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1}$$

DENSITÀ

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c = \dfrac{1}{\text{Area}(C)} & \text{SE } (x,y) \in C \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}}$$



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+xy) & \text{SE } 0 \le y \le x \le 1 \rightarrow \begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,x] \end{cases} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

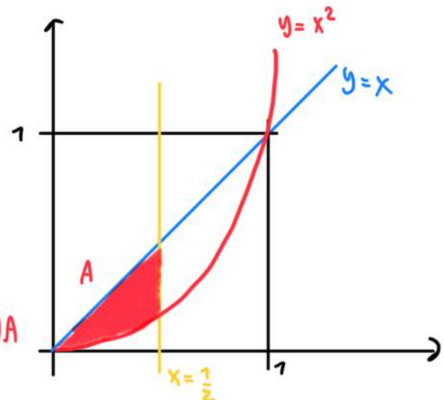
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \rightarrow c \underbrace{\int_0^1 \int_0^x (x^2+xy)\,dy\,dx}_{\frac{3}{8}} = 1$$

PER MANCANZA DI VOGLIA USO WOLFRAM PER CALCOLARE L'INTEGRALE. OTTENGO:

$$c \cdot \frac{3}{8} = 1 \rightarrow c = \frac{8}{3}$$

2. TROVO $P\left(X^2 < Y, X < \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(X^2 \le Y \mid X < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X^2 < Y \cap X < \frac{1}{2}\right)^{①}}{P\left(X < \frac{1}{2}\right)^{②}}$$



USO LA FORMULA DELLA PROBABILITÀ DI UNA VAR. CONGIUNTA CONTINUA

$$\boxed{P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}$$

①: $A = \{(x,y):\ 0 \le x \le \frac{1}{2},\ x^2 \le y \le x\}$

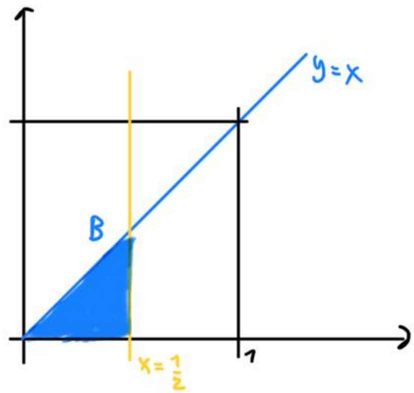
$$P((x,y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = c \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{x^2}^{x} (x^2 + xy)\, dy\, dx = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{x^2}^{x} (x^2 + xy)\, dy\, dx$$

$= \frac{61}{1440}$ (WOLFRAM)

② $B = \{(x,y):\ 0 \le x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le x\}$

$$\Rightarrow \frac{8}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{x} (x^2 + xy)\, dy\, dx = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow P\left(x^2 \le y \mid x < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{①}{②} = \frac{\frac{61}{1440}}{\frac{1}{16}} = 0.6777$$ ✓



FORMULA GENERALE ESERCIZIO 3 (BUTTARE TUTTO SU WOLFRAM ALPHA)

SE DEVO CALCOLARE $P(x^2 < y \mid x < a)$:

$$P(x^2 < y,\ x < a) = \frac{\int_0^{a} \int_{x^2}^{x} (x^2 + xy)\, dy\, dx}{\int_0^{a} \int_0^{x} (x^2 + xy)\, dy\, dx}$$

Question **4**

Not complete

Flag question

Angela e Tiziano arrivano in dipartimento uno indipendentemente dall'altro. Angela arriva alle 8 e X_A minuti, dove X_A è uniformemente distribuita tra le 0 e 25 minuti. Tiziano invece arriva in dipartimento X_T minuti dopo le 8:00 con X_T variabile esponenziale di parametro 0.7. Calcolare la probabilità che Tiziano arrivi in dipartimento prima di Angela.

Answer:

Check

X_A : UNIFORMENTE DISTRIBUITA TRA 0 E 25 MINUTI
X_T : ESPONENZIALE $\lambda = 0.7$

$P(X_T < X_A) = ?$

Sol. USO UN PO' DI COSE:

FORMULA DELLA PROBABILITÀ DI UNA VAR. CONGIUNTA CONTINUA

$$\boxed{P((x,y) \in A) = \int_A f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy}$$

DENSITÀ CONGIUNTA E INDIPENDENZA

(x,y) È UNA CONGIUNTA CONTINUA E x,y SONO INDIPENDENTI	$\Longleftrightarrow$	$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$

DENSITÀ ESPONENZIALE

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{SE } t<0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{SE } t \geq 0 \end{cases}$$

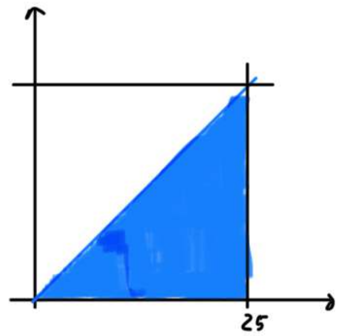
DENSITÀ UNIFORME

$$f_x(x) = F_x'(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x<a \\ \frac{1}{b-a} & \text{SE } x \in [a,b] \\ 0 & \text{SE } x>b \end{cases}$$

$x = X_A$ = tempo di arrivo di Angela dopo le 8 $\sim U(0,25)$
$y = X_T$ = tempo di arrivo di Tiziano dopo le 8 $\sim Exp(0.7)$

$P(0 \leq y \leq x) = ?$

È LA PROBABILITÀ CHE LA CONGIUNTA STIA NELLA REGIONE DEL PIANO A



$P(0 \leq y \leq x) = P((x,y) \in A)$, DOVE $A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x\}$

$= \int_A f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy = \int_A f_x(x)\, f_y(y)\,dx\,dy$

CALCOLO DELLE DENSITÀ MARGINALI $(U(0,25),\ Exp(0.5))$

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{SE } x<0 \\ \frac{1}{25} & \text{SE } x \in [0,25] \\ 0 & \text{SE } x \geq 25 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{SE } y < 0 \\ 0.7\, e^{-0.7} & \text{SE } y \geq 0 \end{cases}$$

DENSITÀ CONGIUNTA (INDIPENDENZA):

$$F_X(x) \cdot F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{25} \cdot 0.7 \cdot e^{-0.7} & \text{SE } \{0 \leq x \leq 25,\ 0 \leq y \leq x\} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$= \int_0^{25} \int_0^{x} \frac{1}{25} \cdot 0.7\, e^{-0.7y}\, dy\, dx = 0.9428$$

V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 4 (MUNIRSI DI WOLPHRAM ALPHA)

SE X_T HA PARAMETRO t (NEL MIO CASO, $t = 0.7$)

RISULTATO: $\int_0^{25} \int_0^{x} \frac{1}{25} \cdot t \cdot e^{-ty}\, dy\, dx$

Question **5**

Not complete

Flag question

Sia (X, Y) congiunta continua con densità $f(x, y) = e^{-x-y}$ se $x, y > 0$, 0 altrimenti. Calcolare la probabilità dell'evento $X + Y < 11/17$.

Answer:

Check

$$F(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{se } x,y>0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases} \quad , \qquad P\left(X+Y < \frac{11}{17}\right)$$

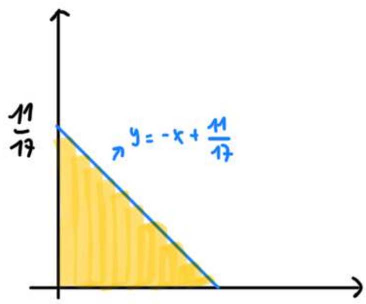
SOL. HO A CHE FARE CON UNA VARIABILE CONGIUNTA CONTINUA, DI DENSITÀ:

$$F_{x,y} = \begin{cases} e^{-x-y} & \text{SE } x,y>0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

USO LA FORMULA DELLA PROBABILITÀ DI UNA VAR. CONGIUNTA CONTINUA

$$\boxed{P((x,y)\in A) = \int_A F_{x,y}(x,y)\,dx\,dy}$$

$$A = \begin{cases} X+Y < \frac{11}{17} \\ X>0 \\ y>0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow A = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le \frac{11}{17},\ 0 \le y \le -x+\frac{11}{17}\right\}$$

PASSO ALL'INTEGRALE

$$P\left(X+Y<\frac{11}{17}\right) = \int_0^{\frac{11}{17}}\int_0^{-x+\frac{11}{17}} e^{-x-y}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{11}{17}} \left[-e^{-x-y}\right]_0^{-x+\frac{11}{17}}$$

$$= \int_0^{\frac{11}{17}} -e^{-\frac{11}{17}} + e^{-x}\,dx = \left[-xe^{-\frac{11}{17}} - e^{-x}\right]_0^{\frac{11}{17}} = -\frac{11}{17}e^{-\frac{11}{17}} - e^{-\frac{11}{17}} + 1$$

$$= 0.1376$$ V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 5 (MUNIRSI DI WOLFRAM ALPHA)

SE DEVO CALCOLARE $P(X+Y<a)$: (NEL MIO CASO, $a = \frac{11}{17}$)

$$P(X+Y<a) = \int_0^a \int_0^{-x-a} e^{-x-y}\,dy\,dx$$

Question 6

Not complete

Flag question

Sia (X, Y) congiunta con densità

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{33}{26}x^2 + \frac{45}{26}y^2 \text{ se } x, y \in [0, 1] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la covarianza di X, Y.

Answer:

Check

(X,Y) CONGIUNTA CON DENSITÀ

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{33}{26}x^2 + \frac{45}{26}y^2 & \text{SE } x,y \in [0,1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$Cov[X,Y] = ?$

SOL. LA COVARIANZA DI UNA VARIABILE CONGIUNTA CONTINUA È:

$$\boxed{Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]}$$

VA DA SÉ CHE PER CALCOLARE $Cov[X,Y]$ PRIMA DEVO CALCOLARE $E[X,Y]$, $E[X]$, $E[Y]$

[NOTA: PER MANCANZA DI VOGLIA IL CALCOLO DEGLI INTEGRALI È STATO FATTO CON WOLFRAM ALPHA]

1. CALCOLO $E[X]$

$$E[X] = \int_0^1 \int_0^1 x\left(\frac{33}{26}x^2 + \frac{45}{26}y^2\right) dy\, dx = \frac{63}{104}$$

2. CALCOLO $E[Y]$

$$E[Y] = \int_0^1 \int_0^1 y\left(\frac{33}{26}x^2 + \frac{45}{26}y^2\right) dx\, dy = \frac{67}{104}$$

3. CALCOLO $E[XY]$

$$E[XY] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xy\left(\frac{33}{26}x^2 + \frac{45}{26}y^2\right) dx\, dy = \frac{3}{8}$$

4. ORA FINALMENTE SI PUÒ CALCOLARE LA COVARIANZA

$$Cov[XY] = \frac{3}{8} - \frac{67}{104} \cdot \frac{63}{104} = -0.0152$$

✓

Question 7

Not complete

Flag question

Sia (X, Y) congiunta continua con densità $f_{X,Y}(x, y) = \dfrac{c}{(1 + x + y)^{18}}$ se $x, y \geq 0$, 0 altrimenti, dove c è una opportuna costante. Calcolare la covarianza di X, Y.

Answer:

Check

SIA (X,Y) CONGIUNTA CONTINUA, DENSITÀ:

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{(1+x+y)^{18}} & \text{SE } x,y \geq 0 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$Cov[XY] = ?$

SOL. 1. TROVO C. PER FARLO DEVO IMPORRE $c \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

(PERCHÉ È UNA FUNZIONE DI PROBABILITÀ, LA SUA PROBABILITÀ SU TUTTO $\mathbb{R}^2$ DEVE ESSERE 1)

$$\Rightarrow c \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x+y)^{18}}\, dx\, dy = 1$$

RISOLVO

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x+y)^{18}}\, dx\, dy \underset{\text{WOLFRAM}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{272} \quad \rightarrow c \cdot \frac{1}{272} = 1 \rightarrow c = 272$$

2. TROVO LA COVARIANZA $Cov[X,Y]$: USO LA

FORMULA DELLA COVARIANZA DI UNA VARIABILE CONGIUNTA

$$\boxed{Cov[X,Y] = E[XY] - \mu_x \mu_y}$$

FORMULA DEL VALORE ATTESO

$$\boxed{\mu_x = E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_x(x)\, dx}$$

CON 2 VARIABILI:

$$\boxed{\mu_x = E[X] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} x\, f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy}$$

VALORE ATTESO DI UNA FUNZIONE DI 2 VARIABILI CONTINUE

$$\boxed{E[g(x,y)] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y) \cdot f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy}$$

ORA POSSO PROCEDERE CON IL CALCOLO: (GRAZIE AL MIO BRO WOLFRAM ALPHA

$$E[X] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x \left[272 \cdot (1+x+y)^{-18}\right] dy\, dx = \frac{1}{15}$$

$$E[Y] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y\left[272\cdot(1+x+y)^{-18}\right] dx\, dy = \frac{1}{15}$$

$$E[XY] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xy\left[272\cdot(1+x+y)^{-18}\right] dx\, dy = \frac{1}{210}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}[XY] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{210} - \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{15} = 0.0003$$

Question 8

Not yet answered

Flag question

Siano X, Y due variabili discrete delle quali si conoscono le densità marginali p_X e p_Y: è possibile in generale conoscere la loro densità congiunta? Rispondere con un controesempio o con una dimostrazione. Dire in caso negativo in quali casi ciò è possibile (con dimostrazione).

Risposta: no, dalle densità discrete non si può dedurre la densità congiunta. Si veda l'osservazione 9.6 pag. 114 e il conseguente (contro)esempio 9.7

Question **9**

Not yet answered

Flag question

Siano X, Y due variabili aleatorie. Cosa significa dire che (X, Y) è una variabile congiunta continua? E' vero che X e Y sono continue e perché? Come si ottengono le densità marginali? Con dimostrazione.

Question **10**

Not yet answered

Flag question

Sia (X, Y) una variabile congiunta continua con densità $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, dove f_X, f_Y sono le densità marginali rispettivamente di X e di Y. Provare che se $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ allora X, Y sono indipendenti.

Risposta: si veda la dimostrazione della proposizione 9.29 pag. 123