COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
25 Gennaio 2018

Esercizio 1. [9 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1+s^2}{s(1+2s)\left(1-\frac{s}{2}\right)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuandone asintoti ed intersezioni con gli assi;

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ (determinandone l'eventuale numero di poli a parte reale positiva e/o nulla), al variare di $K \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

Esercizio 2. [10 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+2)(s-2)}{(s+5)^2(s+a)}$$

i) determinare a sapendo che $s=-1$ è punto doppio del luogo;

ii) determinare asintoti, punti doppi, intersezioni con l'asse immaginario del luogo [Suggerimento: per il calcolo esplicito dei punti doppi sfruttare l'informazione data al punto precedente, ovvero che $s=-1$ è uno di essi];

iii) tracciare i luoghi positivo e negativo e determinare per quali K reali $W(s)$ è BIBO stabile.

Esercizio 3. [3.5 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+\frac{s}{0.1}}{(1+0.2s+s^2)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

progettare un controllore stabilizzante $C(s)$ di tipo P, PI, PD o PID, che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 1, $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.1$ (alla rampa lineare), e alla funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 100$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

Esercizio 4. [3.5 punti] Dato un processo di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{A}{s^2+s+B}$$

determinare, se esistono, i valori di A e B sapendo che il sistema risponde, a partire da condizioni iniziali nulle, all'ingresso causale

$$u(t) = [4 + \sqrt{2}\sin(t)]\delta_{-1}(t)$$

con uscita (forzata) di regime permanente

$$y_{rp}(t) = [4 + 2\sin(t + \phi)]\delta_{-1}(t)$$

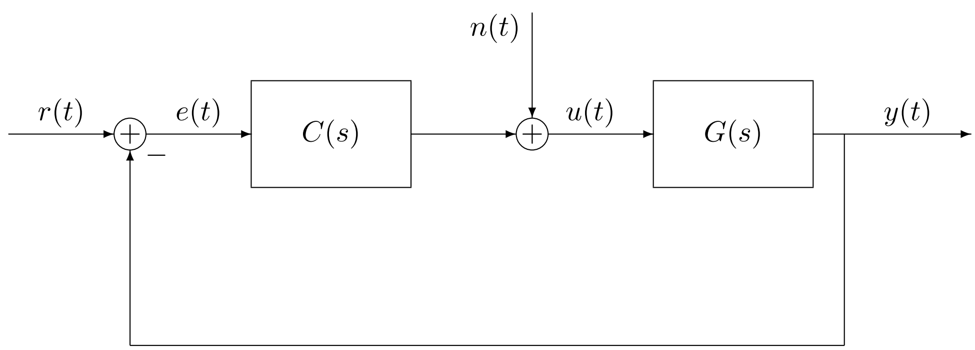
per qualche ϕ. Come cambierebbe la precedente risposta se il segnale di uscita a regime fosse

$$y_{rp}(t) = [-4 + 2\sin(t)]\delta_{-1}(t)?$$

Teoria. [4+1 punti] Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione e si assuma che $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ sia una funzione propria, con $G(0) \neq 0$, e che $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ sia un controllore proprio, progettato in modo tale che il sistema di funzione di trasferimento $W(s)$ sia proprio e BIBO stabile e soddisfi a certe specifiche. Si assuma che sul sistema agisca un disturbo a gradino:

$$n(t) = n_0\delta_{-1}(t).$$

Si derivino in modo dettagliato condizioni necessarie e sufficienti su $C(s)$ e/o $G(s)$ affinché tale disturbo, a regime, non eserciti alcun effetto sull'uscita del sistema.

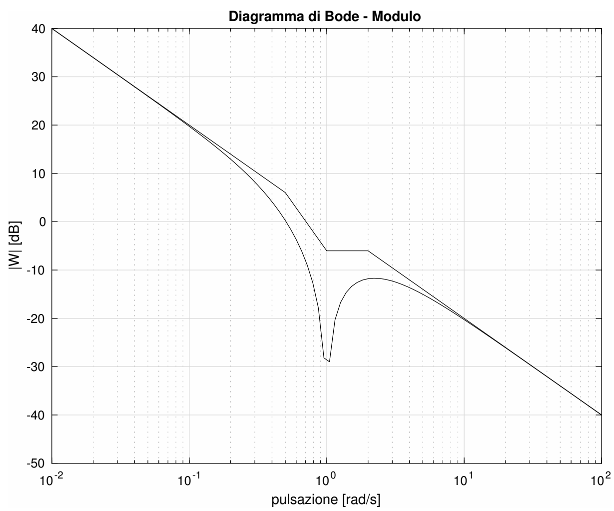


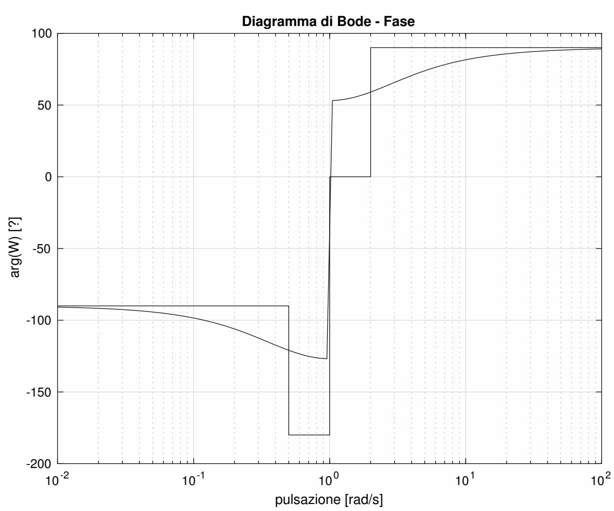
Come cambierebbe la precedente risposta se il disturbo fosse sinusoidale del tipo

$$n(t) = n_0\cos(\omega_0 t + \phi)\delta_{-1}(t)?$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Il diagramma di Bode dei moduli è sempre decrescente, eccezion fatta per un picco di antirisonanza infinito (sebbene nella figura sotto appaia finito), dopo il quale appare una salita verso un massimo relativo. Il diagramma di Bode delle fasi scende da $-90°$ verso $-180°$, senza raggiungerli, poi ha una discontinuità di $+180°$, ed infine sale verso $+90°$.

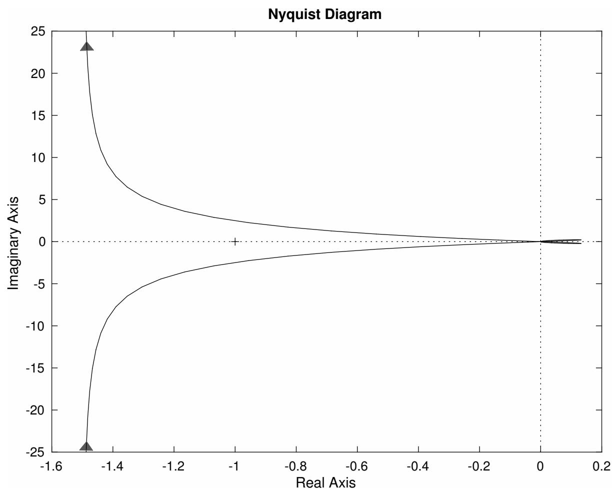


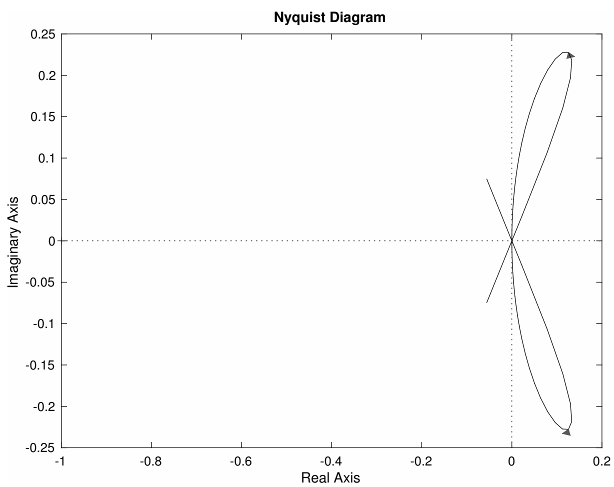


ii) Uno studio di $G(j\omega)$ porge

$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2 + \frac{9}{4}\omega^2}\left[-\frac{3}{2} - j\frac{1+\omega^2}{\omega}\right]$$

da cui l'asintoto verticale in $s = -\frac{3}{2}$ (proveniente dal basso), e l'unica intersezione con gli assi nell'origine per $\omega = 1$, con tangente con angolo compreso tra $-180°$ e $-90°$. Il diagramma rispunta nel primo quadrante e, formando un piccolo cappio, ritorna nell'origine con tangente verticale ($+90°$) per $\omega \to +\infty$. Qui di seguito viene riportato il diagramma di Nyquist completo e un suo dettaglio per valori di $|\omega| \geq 0.9$ rad/sec.





iii) La chiusura del diagramma all'infinito prova che $N = 0$ attorno a $s = -\frac{1}{K}$ se $K > 0$, mentre $N = -1$ se $K < 0$. Quindi (da $n_{G_+} = 1$) ne consegue che $n_{W_+} = 1$ se $K > 0$, ed $n_{W_+} = 2$ se $K < 0$. Nessun valore di K garantisce quindi la stabilità BIBO.

Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi porge

$$(s+5)[(s+2)(s-2)(3s+5+2a) - 2s(s+5)(s+a)] = 0$$

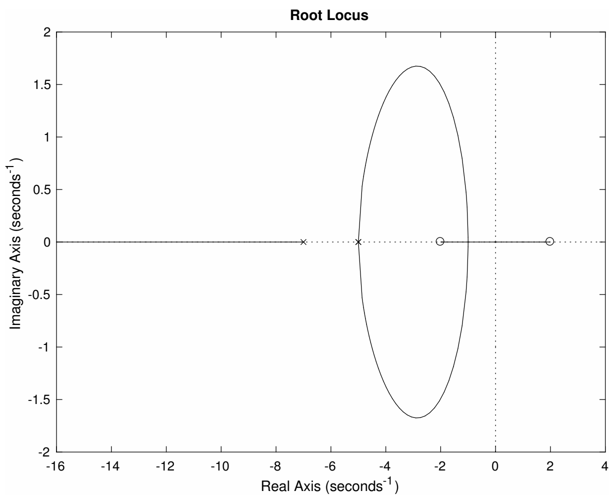
ed imponendo che $s = -1$ soddisfi, si trova facilmente $a = 7$, da cui

$$(s+5)(s^3 - 5s^2 - 82s - 76) = 0 \ \Rightarrow \ (s+5)(s+1)(s^2 - 6s - 76) = 0$$

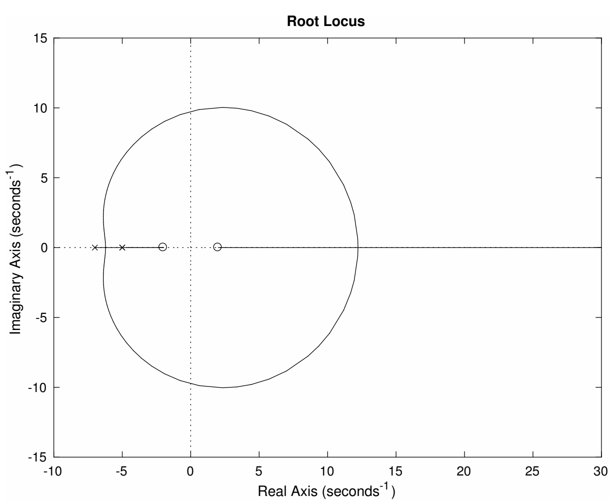
dove si è sfruttata la divisibilità del termine di grado 3 per $s+1$. I punti doppi, tutti reali, sono quindi $s = -5, -1, 3 \pm \sqrt{85} \simeq 12.2, -6.2$ (il primo banale - $K = 0$ - il secondo nel luogo positivo e gli altri 2 nel luogo negativo, come si verifica dall'analisi dei tratti dell'asse reale appartenenti ai luoghi positivo/negativo). Calcolando le intersezioni con l'asse immaginario, ponendo quindi $s = j\omega$ in $(s+5)^2(s+7) + K(s+2)(s-2) = 0$, si trova

$$[(175 - 17\omega^2) - K(4+\omega^2)] + j\omega(95 - \omega^2) = 0 \ \Rightarrow \ (\omega = 0, K = \frac{175}{4}),\ (\omega = \pm\sqrt{95}, K = -\frac{160}{11})$$

mentre gli asintoti sono chiaramente il semiasse reale negativo (positivo) nel luogo positivo (negativo). Nel luogo positivo, un ramo va da $s = -7$ verso $-\infty$, gli altri 2 escono nel piano complesso dal polo doppio $s = -5$ e rientrano nell'asse reale nel punto doppio $s = -1$, per poi dirigersi uno verso $s = -2$ e l'altro verso $s = +2$, attraversando l'asse immaginario in $s = 0$ per $K = \frac{175}{4}$. Quindi BIBO stabilità per $0 \leq K < \frac{175}{4}$.



Nel luogo negativo, un ramo va da $s = -5$ verso $s = -2$, gli altri 2 rami si muovono sull'asse reale incontrandosi nel punto doppio $3 - \sqrt{85}$, poi escono nel piano complesso ed attraversano l'asse immaginario in $s = \pm j\sqrt{95}$ per $K = -\frac{160}{11}$, quindi rientrano nell'asse reale nel punto doppio $s = 3 + \sqrt{85}$, quindi un ramo va verso $s = 2$, l'altro verso $+\infty$. Quindi BIBO stabilità per $0 \geq K > -\frac{160}{11}$.



In definitiva, si ha BIBO stabilità per $-\frac{160}{11} < K < \frac{175}{4}$.

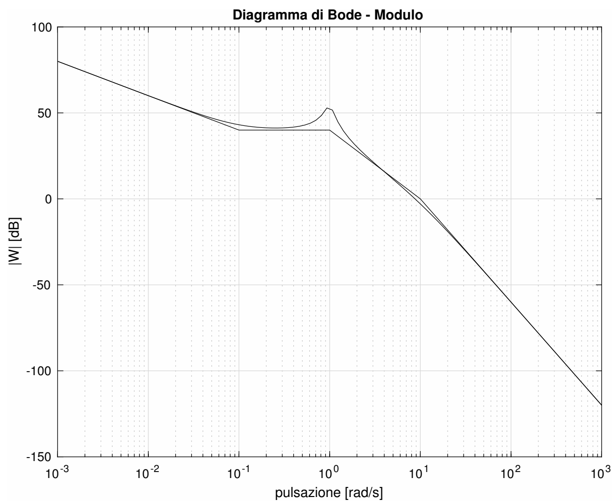
Esercizio 3. Per sistemare la specifica su tipo ed errore a regime dobbiamo introdurre un polo in 0 e attribuire al controllore un guadagno di Bode pari a 10, ovvero il precompensatore deve essere

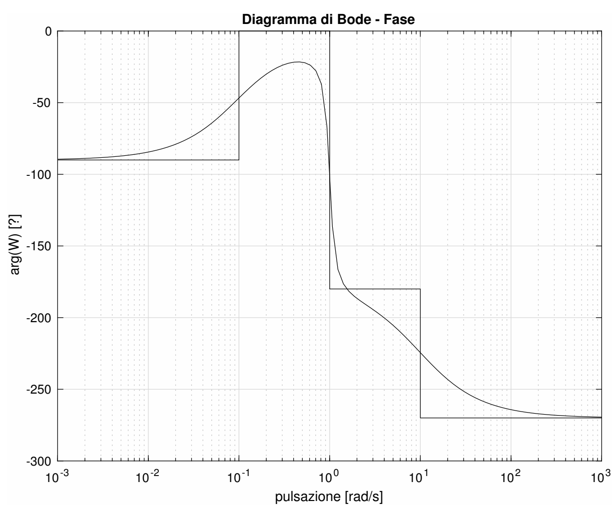
$$C'(s) = \frac{10}{s}.$$

Questo ci dice che dobbiamo necessariamente utilizzare o un controllore PI o un PID. La funzione di trasferimento di $C'(s)G(s)$ è

$$C'(s)G(s) = \frac{10(1+\frac{s}{0.1})}{s(1+0.2s+s^2)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

e i suoi diagrammi di Bode sono:





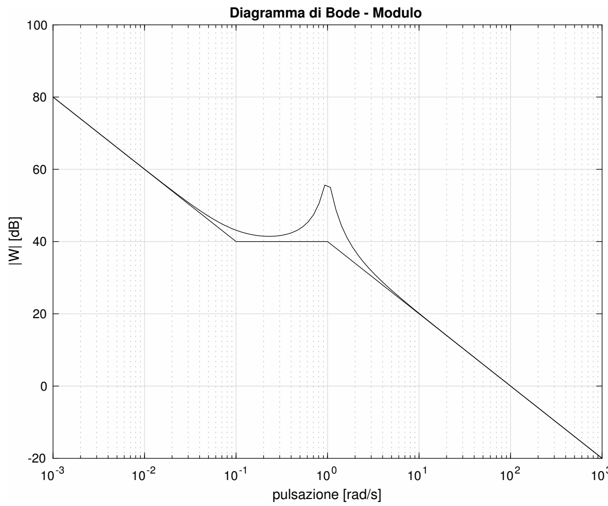
Notiamo che la pulsazione di attraversamento è circa 10 rad/sec, mentre il margine di fase alla pulsazione desiderata, $m_\psi(\omega_A^*)$ è pari a $-90°$. Dobbiamo quindi utilizzare due zeri stabili che alzino in corrispondenza a $\omega_A^* = 100$ rad/sec il modulo di esattamente $M = 60$ dB e la fase di circa $\Phi = 180°$. Prendiamo quindi uno zero una decade prima di $\omega_A^* = 100$ rad/sec e uno zero due decadi prima di $\omega_A^* = 100$ rad/sec:

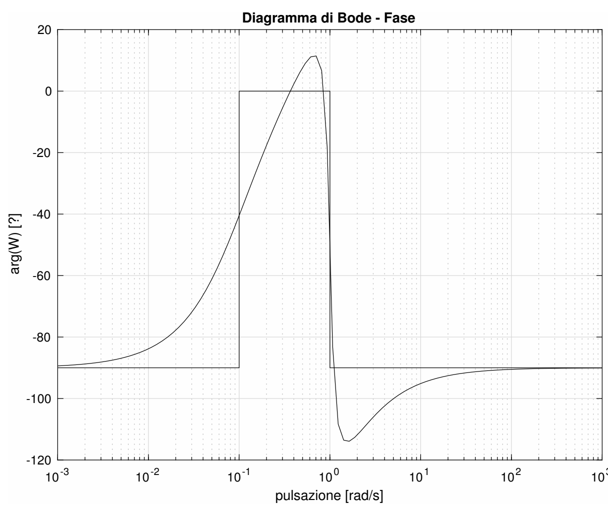
$$C_2''(s) = (1+s)\left(1+\frac{s}{10}\right).$$

Ciò corrisponde al controllore PID

$$C(s) = C_{PID}(s) = \frac{10}{s}(1+s)\left(1+\frac{s}{10}\right) = 11 + \frac{10}{s} + s.$$

Il diagramma di Bode della risultante funzione di trasferimento in catena aperta è:





In base al criterio di Bode, il sistema retroazionato finale risulta BIBO stabile.

Esercizio 4. Chiaramente affinché la risposta di regime permanente esista il sistema deve essere BIBO stabile e quindi $B > 0$. Poiché la risposta di regime permanente al segnale di ingresso dato assume l'espressione

$$y_{rp}(t) = W(0)4 + |W(j)| \sin(t + \arg(W(j))),$$

ne consegue che nel primo caso deve valere

$$W(0) = \frac{A}{B} = 1 \qquad |W(j)| = \frac{|A|}{\sqrt{(B-1)^2+1}} = \sqrt{2}.$$

Dalla prima segue $A = B$ che sostituita nella seconda porta a

$$\frac{|B|}{\sqrt{(B-1)^2+1}} = \sqrt{2}$$

ovvero

$$B^2 = 2[(B-1)^2 + 1] \quad \rightarrow \quad 0 = B^2 - 4B + 4 = (B-2)^2,$$

da cui segue $A = B = 2$.

Nel secondo caso avrei

$$W(0) = \frac{A}{B} = -1 \qquad |W(j)| = \frac{|A|}{\sqrt{(B-1)^2+1}} = \sqrt{2} \qquad \arg(A) - \arg[(B-1)+j] = 0.$$

Dalla prima segue $A = -B$ che sostituita nella seconda porta a

$$\frac{|B|}{\sqrt{(B-1)^2+1}} = \sqrt{2}$$

ovvero

$$B^2 = 2[(B-1)^2 + 1] \quad \rightarrow \quad 0 = B^2 - 4B + 4 = (B-2)^2,$$

da cui segue $-A = B = 2$. Tuttavia la terza condizione, $\arg(A) - \arg[(B-1)+j] = 0$, non è verificata giacché

$$\arg(A) - \arg[(B-1)+j] = \arg(-2) - \arg[1+j] = \pi - \pi/4 \neq 0.$$

Quindi la seconda situazione non è possibile.

Teoria. Per la reiezione ai disturbi costanti veda il Capitolo 9 del Libro di testo, pagine 280-281. Per la seconda parte: sfruttando la teoria della risposta di regime permanente a segnali sinusoidali e sfruttando il risultato (derivato nella prima parte della risposta) che la funzione di trasferimento da disturbo a uscita è

$$W_n(s) := \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)},$$

ed è BIBO stabile, si può desumere che la reiezione dei disturbi sinusoidali di pulsazione ω_0 è possibile se e solo se $W_n(j\omega_0) = 0$ e ciò si verifica se e solo se o $G(j\omega_0) = 0$ oppure $|C(j\omega_0)| = +\infty$, ovvero $C(s)$ ha una coppia di poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_0$.