Quiz di algebra lineare e geometria

Spazi vettoriali, sottospazi vettoriali, vettori linearmente dipendenti, insiemi di generatori

- Sappiamo che un campo K è anche uno spazio vettoriale. Ma, in generale, uno spazio vettoriale V è un campo?
  - **No**
    - In generale uno spazio vettoriale non è un campo. Infatti in un campo è definita l'operazione di moltiplicazione di due elementi e dato un elemento $a \neq 0$ deve esistere il suo inverso a^{-1}. In uno spazio vettoriale invece è definita la somma di vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare, ma non è definito il prodotto di due vettori (quindi sicuramente dato un vettore $v \neq 0$ non ha alcun senso parlare del suo inverso v^{-1}).
  - Sì
- Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai vettori $v = (a, b)$ con $a \geq 0$ e $b \geq 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Non è un sottospazio vettoriale in quanto non contiene l'opposto di un vettore. Infatti se $v = (a, b)$ è un vettore con $a \geq 0$ e $b \geq 0$ il suo opposto $-v = (-a, -b)$ ha le componenti ≤ 0, quindi non appartiene all'insieme in questione.
- Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai vettori $v = (2a, 3a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
  - **Vero**
    - È un sottospazio vettoriale in quanto è chiuso per le operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare. Infatti se $v = (2a, 3a)$ e $w = (2b, 3b)$, si *ha* $v + w = \big(2(a + b), 3(a + b)\big)$ e per ogni scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\lambda v = \big(2(\lambda a), 3(\lambda a)\big)$.
  - Falso
- Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai vettori $v = (a, a^2)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Questo sottoinsieme non è un sottospazio vettoriale in quanto non è chiuso per l'operazione di addizione. Ad esempio, per $a = 2$ si ottiene il vettore $v_1 = (2, 4)$ e per $a = 3$ si ottiene il vettore $v_2 = (3, 9)$. La loro somma è il vettore $v_1 + v_2 = (5, 13)$ che però non appartiene all'insieme dato, visto che 13 non è uguale a 5^2.
- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ due vettori non nulli e non paralleli sono linearmente indipendenti.
  - **Vero**
    - Dire che i vettori v e w non sono paralleli significa che non esiste alcun $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $v = \lambda w$. Quindi nessuno dei due vettori è combinazione lineare dell'altro e pertanto i due vettori sono linearmente indipendenti.
  - Falso
- In uno spazio vettoriale V se ho tre vettori e nessuno di questi è parallelo a uno degli altri due, allora i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.
  - Vero
  - **Falso**

        - Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ prendiamo i vettori $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1)$. I tre vettori dati hanno tutti direzioni diverse ma $v_3 = v_1 + v_2$, quindi tali vettori sono linearmente dipendenti.
- Se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori linearmente dipendenti, allora sicuramente v_1 si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_2 e v_3.
    - Vero
    - **Falso**
        - Certamente uno dei tre vettori si può scrivere come combinazione lineare degli altri due, ma potrebbe non essere il primo. Ad esempio, i vettori $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (0, 2)$ sono linearmente dipendenti e si ha $v_3 = 2v_2 + 0v_1$, ma non è certo possibile scrivere v_1 come combinazione lineare di v_2 ev_3.
- Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (0, 2, a)$. Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ essi sono linearmente dipendenti?
    - $a = 0$
    - $\boldsymbol{a = 5}$
        - Per $a = 5$ si verifica che $v_3 = 2v_2 - v_1$
    - per nessun valore di a
    - $a = 3$
- Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, -1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 1, a, 3)$, $v_3 = (0, 2, -1, 3)$. Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ essi sono linearmente dipendenti?
    - $a = -2$
    - $a = 0$
    - $\boldsymbol{a = 4}$
        - Per $a = 4$ si verifica che $v_3 = 3v_1 + 2v_2$
    - per nessun valore di a
    - $a = -5$
- In $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1, -1, 2)$ e $v_2 = (0, 2, 1)$ formano un sistema di generatori.
    - Vero
    - **Faso**
        - Ad esempio, il vettore $(1, 0, 0)$ non si può scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2.

Vettori linearmente dipendenti, insiemi di generatori, basi, dimensione, equazioni dei sottospazi vettoriali, intersezione, somma e somma diretta di sottospazi vettoriali

- Prendendo quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ essi saranno linearmente dipendenti?
    - **Sì, sempre.**
        - I quattro vettori devono necessariamente essere linearmente dipendenti. Infatti $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 e il numero di vettori linearmente indipendenti non può essere maggiore della dimensione dello spazio vettoriale.
    - Dipende da come scelgo i vettori
- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Una delle seguenti affermazioni è corretta:
    - se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti allora $k \geq n$
    - se $k \leq n$ allora $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti
    - **se $\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_k}$ sono linearmente indipendenti allora $\boldsymbol{k \leq n}$**
        - In uno spazio vettoriale il numero di vettori linearmente indipendenti è sempre minore o uguale della dimensione dello spazio stesso.

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Una delle seguenti affermazioni è corretta:
  - se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono un insieme di generatori di V allora $k \leq n$
  - **se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono un insieme di generatori di V allora $k \geq n$**
    - In uno spazio vettoriale il numero di vettori che formano un insieme di generatori è sempre maggiore o uguale della dimensione dello spazio stesso.
  - se $k \geq n$. allora $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono un insieme di generatori di V
- Dati tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ tali che nessuno di essi è parallelo a uno degli altri due, il sottospazio vettoriale da essi generato ha necessariamente dimensione 3.
  - Vero
  - **Falso**
    - Infatti, ad esempio, i vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (1,1,0)$ sono tali che nessuno di essi è parallelo a uno degli altri due. Tuttavia il sottospazio da essi generato è formato dai vettori del tipo $(a, b, 0)$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ ed ha quindi dimensione 2.
- In $\mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$ ha dimensione:
  - 1
  - 2
  - **3**
    - Dall'equazione $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$ si può ricavare $x_1 = 2x_3 - x_4$ la quale ha infinite soluzioni che dipendono da TRE parametri liberi di variare (x_2, x_3, x_4). Questo implica che la dimensione di tale sottospazio è 3.
- In $\mathbb{R}^3$ il sottospazio U di equazione $x_2 = 0$ ha dimensione:
  - 0
  - **2**
    - I vettori di tale sottospazio devono avere $x_2 = 0$ ma x_1 e x_3 sono indeterminati. Quindi U contiene tutti i vettori del tipo $(a, 0, b)$ al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Questo significa che U ha dimensione 2.
  - 1
- Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Se U e W sono in somma diretta, allora deve necessariamente essere $U + W = \mathbb{R}^n$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Dire che U e W sono in somma diretta significa solo che la loro intersezione è $\{0\}$. Non viene fornita nessuna informazione sulle loro dimensioni o sulla somma delle loro dimensioni.
- Siano U_1, U_2, W sottospazi vettoriali di V. Se $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ allora deve necessariamente essere $U_1, = U_2$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Se $V = \mathbb{R}^2$ e se prendiamo U_1 il sottospazio generato dal vettore $(1, 0)$, U_2 il sottospazio generato dal vettore $(0, 1)$ e W il sottospazio generato dal vettore $(1, 1)$, si ha $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = \mathbb{R}^2$ ma $U_1 \neq U_2$.

- Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, entrambi di dimensione 2 e tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$. Allora è sempre possibile trovare un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U2 \oplus W = \mathbb{R}^4$.
    - **Vero**
        - Un tale sottospazio W esiste sempre! Se U_1 è generato da due vettori u_1, u_2 e U_2 è generato da due vettori u_3, u_4 allora è sufficiente prendere due vettori w_1, w_2 tali che i vettori u_1, u_2, w_1, w_2 siano linearmente indipendenti e, analogamente, i vettori u_3, u_4, w_1, w_2 siano linearmente indipendenti. Il sottospazio W generato dai vettori w_1, w_2 soddisfa le richieste.
    - Falso
- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U_1, U_2 sottospazi di V, con $\dim U_1 = 5$ e $\dim U_2 = 2$. Una delle seguenti affermazioni è vera.
    - $U_1 \cap U_2$ può avere dimensione 3 e in tal caso si ha $\dim(U_1 + U_2) = 4$
    - $U_1 \cap U_2$ può avere dimensione 0 e in tal caso U_1 e U_2 sono in somma diretta
    - **La dimensione di $\boldsymbol{U_1 \cap U_2}$ può essere solo 1 oppure 2**
        - $U_1 \cap U_2$ non può avere dimensione 0 altrimenti $U_1 + U_2$avrebbe dimensione $5 + 2 = 7$, il che è impossibile dato che V ha dimensione 6.

Funzioni lineari, nucleo e immagine, matrice di una funzione lineare, operazioni sulle matrici

- Per quale valore di t la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x, y) = 2x - 3y + txy$ è lineare?
    - Per ogni valore di t
    - **Per $\boldsymbol{t = 0}$**
    - Per $t = 1$
- Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x, a coefficienti reali. La funzione che ad ogni polinomio $p(x) \in V$ associa la sua derivata $p'(x)$ è una funzione lineare.
    - **Vero**
        - L'operazione di derivazione è lineare! Infatti la derivata della somma di due funzioni è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni, e la derivata del prodotto di una costante k per una funzione $f(x)$ è uguale al prodotto di k per la derivata $f'(x)$.
    - Falso
- Sia $f: V \to W$ una funzione lineare e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vettori linearmente indipendenti. I vettori $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2), \dots, w_k = f(v_k)$ sono linearmente indipendenti?
    - **Sì, se il nucleo di $\boldsymbol{f}$ è $\{\mathbf{0}\}$**
        - Se f non è iniettiva potremmo avere due vettori linearmente indipendenti v_1 e v_2 per i quali si ha $f(v_1) = f(v_2)$.
    - Sì, ma solo se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono una base di V
    - Sì, sempre
- Sia $f: V \to W$ una funzione lineare e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ un sistema di generatori di V. I vettori $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2), \dots, w_k = f(v_k)$ sono un sistema di generatori di W?
    - **Sì, ma solo se $\boldsymbol{f}$ e suriettiva**
        - Infatti, in generale, le immagini tramite f di un sistema di generatori di V sono un sistema di generatori dell'immagine di f e non del codominio$W$. Naturalmente se f è suriettiva l'immagine di f coincide con il codominio W.
    - Sì, ma solo se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono una base di V
    - Sì, sempre

- Siano $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ due funzioni lineari. Il nucleo della funzione composta $g \circ f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ deve necessariamente avere dimensione ≥ 1?
  - **Sì, indipendentemente da f e g**
    - Dato che l'immagine di f è contenuta in $\mathbb{R}^3$, il nucleo di f deve avere almeno dimensione 1, quindi esiste sicuramente un vettore non nullovv tale che $f(v) = 0$. Si ha allora $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(0) = 0$, quindi v appartiene anche al nucleo di $g \circ f$ il quale deve avere pertanto dimensione ≥ 1.
  - No, può anche avere dimensione 0
- Sia $f: V \to V$ una funzione lineare. Una delle seguenti affermazioni è vera.
  - Se f è iniettiva non è detto che sia anche suriettiva
  - Se f è suriettiva non è detto che sia anche iniettiva
  - **Se f è iniettiva allora deve essere anche suriettiva**
    - Sappiamo che la somma della dimensione del nucleo di f e della dimensione dell'immagine di f è uguale alla dimensione di V. Se f è suriettiva la dimensione dell'immagine di f è uguale alla dimensione di V. Questo implica che il nucleo di f è uguale a $\{0\}$ e quindi f è iniettiva.
- Esiste una funzione lineare $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che il nucleo di a è uguale all'immagine di f.
  - Vero
  - **Falso**
    - Una tale funzione non può esistere. Infatti sappiamo che la somma della dimensione del nucleo di f e dell'immagine di f deve essere uguale a 5 (che è la dimensione di $\mathbb{R}^5$). Se il nucleo di f fosse uguale all'immagine di f allora entrambi dovrebbero avere dimensione $\frac{5}{2}$, che non è un numero intero.
- Esiste una funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che il nucleo di f è uguale all'immagine di f.
  - **Vero**
    - Una tale funzione esiste. Ad esempio, f può essere definita come segue. Siano e_1, e_2, e_3, e_4 i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ e poniamo $f(e_1) = 0, f(e_2) = 0, f(e_3) = e_1, f(e_4) = e_2$. Da questa definizione si vede che il nucleo di f è generato dai vettori e_1, e_2 e l'immagine di f, che è generata dalle immagini dei vettori della base canonica, è anch'essa generata da e_1, e_2, quindi l'immagine di f è uguale al nucleo di f
  - Falso
- Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita ponendo $f(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$. Sia $v_1 = (1,1), v_2 = (2, -1)$. La matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori v_1, v_2 è:
  - $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$
    - Si ha $f(v_1) = f(1,1) = (-1,5) = 3v_1 - 2v_2$, quindi gli elementi della prima COLONNA della matrice cercata sono 3 e -2. Si ha poi $f(v_2) = f(2, -1) = (7, -2) = 1v_1 + 3v_2$, quindi gli elementi della seconda COLONNA della matrice cercata sono 1 e 3.
  - $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
  - $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Esistono matrici non nulle A e B tali che la matrice prodotto AB sia nulla.
  - **Vero**
    - Come esempio possiamo prendere le matrici seguenti: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
  - Falso

Funzioni lineari, nucleo e immagine, matrice di una funzione lineare, cambiamento di basi, sistemi lineari, riduzione di una matrice in forma a scala

- Esistono delle matrici A e B tali che $AB = I$ ma $BA \neq I$.
  - **Vero**
    - Ad esempio, se prendiamo $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ si ha $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Falso
- Date due matrici A e B si ha, in generale, ${}^T(AB) = {}^TA^TB$.
  - Vero
  - **Falso**
    - La formula corretta è ${}^T(AB) = {}^TB^TA$.
- Per quale valore di t la seguente matrice non ha rango 3? $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$
  - $t = 3$
  - $\boldsymbol{t = 4}$
    - Per $t = 4$ la seconda colonna è uguale al quadruplo della prima colonna meno il triplo della terza.
  - $t = 0$
- Se A è una matrice quadrata tale che $A^2 = 0$ allora la matrice $I - A$ è invertibile.
  - **Vero**
    - Infatti se $A^2 = 0$ si ha $(I - A)(I + A) = I - A + A - A^2 = I$, quindi la matrice $I + A$ è l'inversa di $I - A$.
  - Falso
- Sia A una matrice reale quadrata di ordine n, con $n \geq 2$. Siano P e Q matrici reali quadrate invertibili di ordine n. Allora la matrice $A' = PAQ$ ha lo stesso rango di A.
  - **Vero**
    - Infatti in tal caso le matrici A e A' rappresentano la stessa funzione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto a basi diverse del dominio e del codominio (le matrici P e Q, e le loro inverse P^{-1} e Q^{-1}, sono le matrici di cambiamento di base). Pertanto il rango di A e il rango di A' sono entrambi uguali alla dimensione dell'immagine di f.
  - Falso
- Sia V uno spazio vettoriale reale e $f: V \to V$ una funzione lineare. Sia $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V e indichiamo con A la matrice di f rispetto alla base v. Supponiamo che $A = aI$, ove I è la matrice identica e $a \in \mathbb{R}$. Allora la matrice A' di f rispetto ad una qualunque altra base $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ di V deve necessariamente essere uguale alla matrice A.
  - **Vero**
    - Le matrici A e A' sono legate dall'uguaglianza $A' = PAP^{-1}$, per una qualche matrice invertibile P (la matrice di cambiamento di base). Se $A = aI$ si ha: $A' = PAP^{-1} = PaIP^{-1} = aPIP^-1 = aPP^{-1} = aI$, quindi A e A' sono uguali.
  - Falso

- Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ due basi di V. Le colonne della matrice di cambiamento di base $M_v^{v'}(id)$ sono:
    - **le coordinate dei vettori $\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_n}$ rispetto alla base $\boldsymbol{v_1', v_2', \dots, v_n'}$**
        - Si vada a rivedere la definizione della matrice $P = M_v^{v'}(id)$ negli appunti.
    - le coordinate dei vettori $v_1', v_2', \dots, v_n'$ rispetto alla base $v_1, v_2, \dots, v_n$
- Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ due basi di V. La matrice di cambiamento di base $M_v^{v'}(id)$ agisce nel modo seguente:
    - **$\boldsymbol{M_v^{v'}(id)}$ moltiplica il vettore colonna delle coordinate di un vettore $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathbf{v} = \{\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_n}\}$ e dà come risultato il vettore colonna delle coordinate di $\boldsymbol{u}$ rispetto alla base $\mathbf{v}' = \{\boldsymbol{v_1', v_2', \dots, v_n'}\}$**
        - Si vada a rivedere la definizione della matrice $P = M_v^{v'}(id)$ negli appunti.
    - $M_v^{v'}(id)$ moltiplica il vettore colonna delle coordinate di un vettore u rispetto alla base $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ e dà come risultato il vettore colonna delle coordinate di u rispetto alla base $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Una matrice triangolare superiore è sempre una matrice a scala.
    - Vero
    - **Falso**
        - La matrice seguente è triangolare superiore ma non è in forma a scala: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- Un sistema lineare in cui sono presenti più incognite che equazioni ha sempre infinite soluzioni.
    - Vero
    - **Falso**
        - Ad esempio, il sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$ non ammette soluzioni.

Funzioni lineari e matrici, operazioni elementari, calcolo del rango di una matrice, eliminazione di Gauss, sistemi di equazioni lineari, determinanti

- Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In questo caso è possibile trovare una base $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ del dominio tale che la matrice di f rispetto alla base v del dominio e alla base canonica del codominio sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    - **Vero**
        - Osserviamo che la matrice A ha rango 2, quindi l'immagine di f ha dimensione 2 e il nucleo di f ha dimensione 1. Risolvendo il sistema $AX = 0$ troviamo che il vettore $(1, 1, -1)$ appartiene al nucleo di f, cioè $f(1, 1, -1) = (0, 0, 0)$. Dire che la matrice di f rispetto alla base $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ del dominio e alla base canonica del codominio è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ significa che $f(v_1) = (1, 0, 0)$, $f(v_2) = (0, 1, 0)$ e $f(v_3) = (0, 0, 0)$. Come vettore v_3 possiamo quindi scegliere il vettore $v_3 = (1, 1, -1)$ che appartiene al nucleo di f. Per trovare il vettore v_1 dobbiamo risolvere il sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Questo sistema ha infinite soluzioni e una possibile scelta di v_1 è $v_1 = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$.

Analogamente per trovare il vettore v_2 dobbiamo risolvere il sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Questo sistema ha infinite soluzioni e una possibile scelta di v_2 è $v_2 = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$.

- Falso

- Il rango di una matrice A è:
  - il numero di righe non nulle di A
  - **il numero di colonne lineamenti indipendenti di A**
  - **il numero di righe linearmente indipendenti di A**
  - **il numero di righe non nulle in una forma a scala di A**
  - il numero di colonne non nulle di A
  - il numero di colonne non nulle in una forma a scala di A
- Volendo determinare il rango di una matrice mediante la riduzione in forma a scala si possono effettuare operazioni elementari sia sulle righe che sulle colonne.
  - **Vero**
    - Ciò deriva dal fatto che in ogni matrice il rango per righe (numero di righe linearmente indipendenti) è sempre uguale al rango per colonne (numero di colonne linearmente indipendenti).
  - Falso
- Sia A una matrice $m \times n$. Allora:
  - Rango$(A) = \max\{m, n\}$
  - Rango$(A) = \mathrm{mmin}\{m, n\}$
  - **Rango$(A) \leq \min\{m, n\}$**
    - Il rango di A è uguale al numero di colonne (o righe) linearmente indipendenti.
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo è un sottospazio vettoriale.
  - Vero
  - **Falso**
    - L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo $AX = B$ (cioè con $B \neq 0$) non contiene il vettore nullo $X = 0$, quindi non può essere un sottospazio vettoriale.
- Il sistema lineare $AX = B$ ha soluzione se e solo se:
  - Rango$(A) <$ rango$(A|B)$
  - Rango$(A|B) =$ rango$(A) + 1$
  - **Rango$(A) =$ rango$(A|B)$**
    - Questo è l'enunciato del teorema di Rouché-Capelli.
- Un sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni se e solo se:
  - B appartiene allo spazio generato dalle righe di A
  - **B appartiene allo spazio generato dalle colonne di A**
    - Dire che $B = AX$ equivale a dire che B è combinazione lineare delle colonne di A.
- Volendo calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & t \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ utilizzando l'eliminazione di Gauss, per quale valore di t non è posibile determinare A^{-1}?
  - $t = -1$
  - **$t = 3$**
    - Solo per $t = 3$ la matrice ha rango 1, quindi non è invertibile.
  - $t = 6$
  - $t = 0$

- Nella permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ quante sono le inversioni presenti?
    - 3
    - 4
    - **5**
        - Nel dettaglio, si ha: $1 < 2$ ma $\sigma(1) = 4 > \sigma(2) = 1$; $1 < 4$ ma $\sigma(1) = 4 > \sigma(4) = 2$; $1 < 5$ ma $\sigma(1) = 5 > \sigma(5) = 3$; $3 < 4$ ma $\sigma(3) = 5 > \sigma(4) = 2$; $3 < 5$ ma $\sigma(3) = 5 > \sigma(5) = 3$.
- Il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è uguale a:
    - **7**
        - Per calcolare il determinante di una matrice 3×3 si può usare, ad esempio, la regola di Sarrus.
    - 0
    - 5

Determinanti, autovalori, autovettori, diagonalizzazione di una matrice

- Moltiplicando tutti gli elementi di una matrice quadrata per uno stesso numero α il determinante della matrice risulta moltiplicato per α.
    - Vero
    - **Falso**
        - Infatti se moltiplichiamo una riga (oppure una colonna) per α il determinante risulta moltiplicato per α. Ma se A è una matrice quadrata di ordine n e la moltiplichiamo per α allora ciascuna delle n righe viene moltiplicata per α e, di conseguenza, il determinante di A risulta moltiplicato per α^n.
- Se A è una matrice quadrata di ordine n si ha $\det(-A) = -\det(A)$.
    - Vero
    - **Falso**
        - Infatti se moltiplichiamo una riga (oppure una colonna) per -1 il determinante risulta moltiplicato per -1. Ma se A è una matrice quadrata di ordine n e la moltiplichiamo per -1, cioè consideriamo la matrice $-A$, allora ciascuna delle n righe viene moltiplicata per -1 e, di conseguenza, si ha $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.
- Se due matrici quadrate di ordine n hanno lo stesso determinante allora sono simili.
    - Vero
    - **Falso**
        - Quello che è vero è che se due matrici quadrate sono simili allora hanno lo stesso determinante (ma non vale il viceversa). Ad esempio le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso determinante ma non sono simili.
- Se una funzione lineare $f: V \to V$ non è iniettiva allora il determinante della matrice di f rispetto a una qualunque base di V è uguale a 0.
    - **Vero**
        - Infatti se f non è iniettiva allora non è invertibile e, di conseguenza, anche la matrice di f (rispetto a una qualunque base di V) non è invertibile e pertanto deve avere determinante $= 0$ (altrimenti sarebbe invertibile).
    - Falso

- Se una funzione lineare $f: V \rightarrow V$ è suriettiva allora il determinante della matrice di f rispetto a una qualunque base di V è necessariamente diverso da 0.
    - **Vero**
        - Infatti se f è suriettiva allora è anche iniettiva, quindi è biiettiva e quindi è invertibile. Di conseguenza anche la matrice di f (rispetto a una qualunque base di V) deve essere invertibile e pertanto il suo determinante deve essere $\neq 0$.
    - Falso
- Esistono matrici quadrate di ordine n, diverse dalla matrice identica, che sono simili alla matrice identica.
    - Vero
    - **Falso**
        - Se una matrice quadrata A è simile alla matrice identica I, allora deve necessariamente essere $A = I$. Infatti affermare che A è simile a I significa che esiste una matrice invertibile P tale che $A = PIP^{-1}$. Ma in tal caso si ha $A = PIP^{-1} = PP^{-}1 = I$.
- Se due matrici quadrate di ordine n, A e B, sono entrambe diagonalizzabili, allora ciò significa che A e B sono simili.
    - Vero
    - **Falso**
        - Infatti se due matrici sono simili allora devono avere lo stesso polinomio caratteristico (e quindi gli stessi autovalori). Dire che A e B sono entrambe diagonalizzabili significa che ciascuna di esse è simile a una matrice diagonale, ma gli elementi sulla diagonale (cioè gli autovalori di A e B) potrebbero essere diversi.
- Se v_1 e v_2 sono autovettori di $f: V \rightarrow V$ allora sicuramente anche $v_1 + v_2$ è un autovettore di f.
    - Vero
    - **Falso**
        - In generale la somma di due autovettori non è un autovettore. Solo nel caso in cui v_1 e v_2 appartengono allo stesso autospazio (cioè sono autovettori relativi allo stesso autovalore) si ha che ogni combinazione lineare di v_1 e v_2 appartiene ancora allo stesso autospazio.
- Se due matrici quadrate A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
    - Vero
    - **Falso**
        - Quello che è vero è che se due matrici quadrate sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico (ma non vale il viceversa). Ad esempio le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili.
- Se λ è un autovalore di una matrice quadrata A allora, per ogni intero $n \geq 1$, λ^n è un autovalore di A^n.
    - **Vero**
        - Infatti se v è un autovettore associato all'autovalore λ, si ha $Av = \lambda v$. Di conseguenza si ha anche $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$ e, analogamente, $A^3 v = A(A^2 v) = A(\lambda^2 v) = \lambda^2 Av = \lambda^3 v$, ecc. In questo modo si dimostra che $A^n v = \lambda^n v$ e dunque λ^n è un autovalore di A^n.
    - Falso

Prodotto scalare di vettori, angoli, aree, volumi, ortogonalità tra vettori e tra sottospazi, proiezioni ortogonali

- Se $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono due vettori paralleli, si ha sempre $\| v + w \| = \| v \| + \| w \|$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Infatti se prendiamo, ad esempio, $w = -v$ allora v e w sono paralleli ma si ha $\| v + w \| = \| v - v \| = 0$ mentre $\| v \| + \| w \| = \| v \| + \| -v \| = 2 \| v \|$.
- Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli a due a due ortogonali, cioè tali che $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $i \neq j$. Allora essi sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^n$.
  - **Vero**
    - n vettori a due a due ortogonali in $\mathbb{R}^n$ formano una base ortogonale.
  - Falso
- Siano $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ vettori di $\mathbb{R}^2$ e sia P il parallelogramma di lati v e w. L'area di P è uguale al valore assoluto del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
  - **Vero**
  - Falso
- Se $S \subset \mathbb{R}^n$ non è un sottospazio vettoriale e se poniamo $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | v \cdot u = 0, \forall u \in S\}$ $S^\perp$ è comunque un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
  - **Vero**
    - Infatti se v e w sono vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di S, allora anche $av + bw$ è ortogonale a tutti i vettori di S, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Questo significa che $S^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
  - Falso
- Se $S \subset \mathbb{R}^n$ non è un sottospazio vettoriale e se poniamo $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | v \cdot u = 0, \forall u \in S\}$ allora si ha $(S^\perp)^\perp = S$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Non si può avere $(S^\perp)^\perp = S$ per il semplice fatto che $(S^\perp)^\perp$ è sempre un sottospazio vettoriale mentre in questo caso S non lo è.
- Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha $(U + W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Questa affermazione è falsa, in generale. Ad esempio, se U e W sono due rette distinte in $\mathbb{R}^3$, allora $U + W$ è un piano e quindi $(U + W)^\perp$ è una retta (perpendicolare a tale piano). Invece $U^\perp$ è un piano e $W^\perp$ è un altro piano e quindi $U^\perp + W^\perp$ è la somma di due piani che non è certo uguale a una retta.
- Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha $(U \cap W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
  - Vero
  - **Falso**
    - Questa affermazione è falsa, in generale. Ad esempio, se U e W sono due piani distinti in $\mathbb{R}^3$, allora $U \cap W$ è una retta e quindi $(U \cap W)^\perp$ è un piano (perpendicolare a tale retta). Invece $U^\perp$ è una retta e $W^\perp$ è un'altra retta e quindi $U^\perp \cap W^\perp$ è l'intersezione di due rette che non è certo uguale a un piano.

- Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Siano u_1 e u_2 le proiezioni ortogonali di v_1 e v_2 su U. Allora la proiezione ortogonale di $v_1 + v_2$ su U è data dalla somma $u_1 + u_2$.
  - **Vero**
    - Infatti la funzione che associa a ogni vettore la sua proiezione ortogonale su un sottospazio è una funzione lineare.
  - Falso
- In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $v = (2, -1, 0)$ e $w = (1, 1, -2)$. L'area del parallelogramma determinato dai vettori v e w è:
  - $\boldsymbol{\sqrt{29}}$
  - $\sqrt{15}$
  - $\sqrt{34}$
  - $\sqrt{27}$
- In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $v = (1, 0, 1)$ e $w = (0, 1, -1)$. L'angolo compreso tra i vettori v e w è:
  - **120 gradi**
    - Ricordiamo che vale la formula $v \cdot w = \| v \| \| w \| \cos \phi$, ove ϕ è l'angolo compreso tra i due vettori.
  - 90 gradi
  - 30 gradi
  - 60 gradi

Basi ortogonali e ortonormali, forme bilineari simmetriche, matrici delle forme bilineari simmetriche, forme definite positive, negative, indefinite, vettori isotropi

- La funzione $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $g\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 - y_1y_2 + 2x_1y_2$ è una forma bilineare simmetrica.
  - Vero
  - **Falso**
    - Si può verificare che g è bilineare, ma non è simmetrica. Infatti $g\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 - y_1y_2 + 2x_1y_2$ è diverso da $g\big((x_2, y_2), (x_1, y_1)\big) = 3x_2x_1 - y_2y_1 + 2x_2y_1$
- Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ la funzione che associa a due matrici $A, B \in V$ la traccia della matrice prodotto AB (la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale). La funzione g così definita è una forma bilineare simmetrica.
  - **Vero**
    - La verifica che g è una forma bilineare simmetrica consiste in un calcolo diretto.
  - Falso
- Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e sia S l'insieme dei vettori isotropi: $S = \{v \in V |\ g(v, v) = 0\}$. S è sempre un sottospazio vettoriale di V.
  - Vero
  - **Falso**
    - In generale l'insieme dei vettori isotropi non è chiuso per l'operazione di somma. Se v e w sono due vettori isotropi, e quindi si ha $g(v, v) = 0$ e $g(w, w) = 0$, il vettore somma $v + w$ non è isotropo (in generale). Infatti si ha $g(v + w, v + w) = g(v, v) + g(v, w) + g(w, v) + g(w, w) = 2g(v, w)$, che è diverso da zero, in generale.

- Due matrici A e B sono congruenti se esiste una matrice invertibile P tale che:
  - $B = P^{-1}AP$
  - $\boldsymbol{B = P^T AP}$
- Due matrici congruenti G e G' hanno lo stesso determinante.
  - Vero
  - **Falso**
    - Infatti se G e G' sono congruenti esiste una matrice invertibile P tale che $G' = P^T GP$ e pertanto si ha $\det G' = \det(P^T)\det G \det P = (\det P)^2 \det G$.
- Due matrici congruenti G e G' non hanno necessariamente lo stesso determinante, ma $\det G$ e $\det G'$ hanno lo stesso segno.
  - **Vero**
    - Infatti se G e G' sono congruenti esiste una matrice invertibile P tale che $G' = P^T GP$ e pertanto si ha $\det G' = \det(P^T)\det G \det P = (\det P)^2 \det G$. Dato che $(\det P)^2$ è positivo, $\det G$ e $\det G'$ devono necessariamente avere lo stesso segno.
  - Falso
- La matrice $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è:
  - definita negativa
  - definita positiva
  - **indefinita**
    - Basta applicare il criterio che richiede di calcolare i minori principali e di controllarne il segno.
- Sia $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica indefinita. Allora esistono sicuramente dei vettori isotropi non nulli.
  - **Vero**
    - Dato che g è indefinita esiste un vettore v tale che $g(v,v) > 0$ e un vettore w tale che $g(w,w) < 0$. Poniamo $u = av + bw$. Si ha $g(u,u) = g(av + bw, av + bw) = a^2 g(v,v) + 2ab g(v,w) + b^2 g(w,w)$. Ricordando che $g(v,v) > 0$ e $g(w,w) < 0$ è facile verificare che si possono sempre trovare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che si abbia $g(u,u) = 0$, quindi u è un vettore isotropo.
  - Falso
- Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica che associa a due matrici $A, B \in V$ la traccia della matrice prodotto AB (la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale). La forma g è:
  - definita negativa
  - definita positiva
  - **indefinita**
    - Infatti se I è la matrice identica e se poniamo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $g(I,I) = 2$ mentre $g(A,A) = -2$. Questo dimostra che g è identica.
- La forma bilineare simmetrica $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice (rispetto alla base canonica) è $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ è:
  - **degenere**
    - Si ha $\det G = 0$, quindi g è degenere.
  - non degenere