Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 11

1 Una massa m = 0.128 kg di un gas perfetto (peso molecolare $\mu = 32$ g) è contenuta in un recipiente cilindrico verticale di area di base A = 250 cm^2 le cui pareti sono completamente permeabili al calore. Un pistone di massa M = 51 kg, senza attrito, chiude il cilindro e sta inizialmente in posizione di equilibrio. Quando sul pistone si aggiunge un corpo di massa M' = 20.4 kg, l'equilibrio si ristabilisce dopo che il pistone si è abbassato di un'altezza h = 20 cm. Determinare:

1. il volume e la densità del gas nello stato iniziale e in quello finale;
2. la temperatura dell'ambiente circostante.

2 Si abbia un recipiente cilindrico con pareti adiabatiche di area di base A = 500 cm^2, in cui sono contenute n moli di un gas ideale biatomico (vedi Figura 1). La parte superiore del cilindro è chiusa tramite un pistone a tenuta (anch'esso adiabatico) di massa M = 50 kg che può scorrere liberamente in verticale. Sul pistone è poggiato un corpo di massa m = 60 kg. Sapendo che la temperatura del gas è T_0 = 300 K e che il pistone è ad una distanza h_0 = 100 cm dal fondo del recipiente, determinare:

1. il numero di moli n di gas contenute nel recipiente.

Successivamente al gas viene fornita (lentamente) una quantità di calore Q = $5 \cdot 10^3$ J; determinare:

2. i valori finali della temperatura del gas T_1 e della quota del pistone h_1;
3. la variazione di energia interna ΔE_{int}.

Infine, supponendo che la massa del corpo poggiato sul pistone venga aumentata (lentamente) fino a riportare la quota del pistone al suo valore iniziale h_0, calcolare:

4. la massa finale m_f del corpo e la temperatura finale T_f del gas.

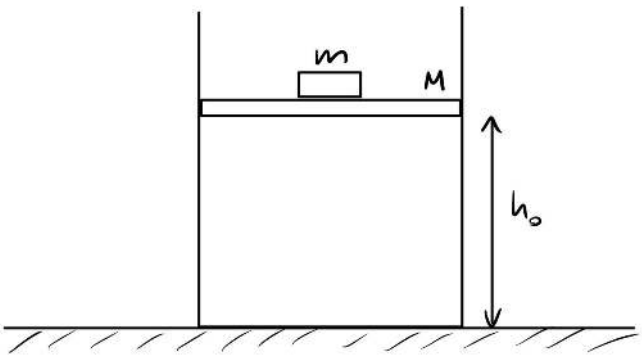

Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 2.

3 Un recipiente cilindrico ad asse verticale, di sezione interna $A = 4\ dm^2$ e massa $M = 100$ kg, è chiuso superiormente da un pistone a tenuta di sezione A e massa trascurabile, che può scorrere verticalmente con attrito trascurabile. Recipiente e pistone sono costituiti da un materiale adiabatico. Il recipiente contiene n moli di un gas ideale biatomico e l'ambiente circostante è alla pressione atmosferica normale p_0. In queste condizioni (stato 0) il pistone si trova ad una distanza $h_0 = 40$ cm dal fondo e il gas è ad una temperatura $T_0 = 300$ K (vedi Figura 2).

1. Calcolare n.

Poi, si estrae lentamente calore dal gas fino a che il pistone si porta alla distanza $h_1 = 30$ cm dal fondo (stato 1).

2. Determinare il calore Q estratto dal gas nella trasformazione e la sua nuova temperatura T_1

Successivamente, il pistone viene lentamente tirato verso l'alto (tramite una forza applicata a esso) fino a che il recipiente non si stacca dal pavimento (stato 2).

3. Calcolare la distanza finale h_2 a cui si porta il pistone dal fondo del recipiente e la nuova temperatura T_2 del gas.

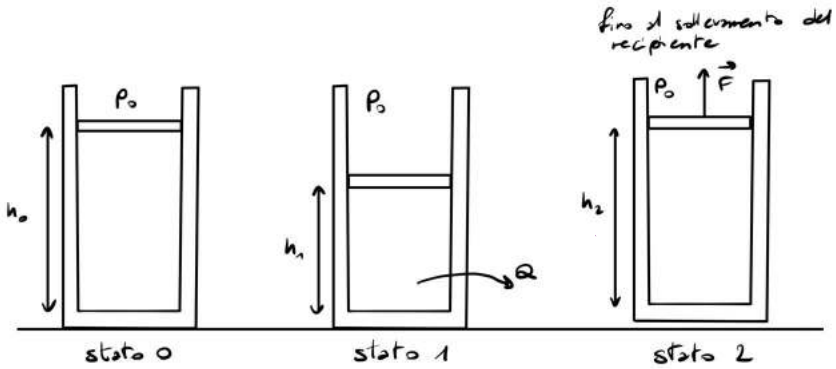

Figura 2: Rappresentazione grafica esercizio 3.

4 Si abbia un cilindro ad asse verticale con pareti adiabatiche (altezza $H = 100$ cm e area di base A) e si supponga che al suo interno sia posto un pistone a tenuta, avente una massa $m = 200$ kg, libero di scorrere verticalmente (attrito trascurabile). Il pistone è costituito da un materiale permeabile al calore e divide il cilindro in due scomparti in cui vi sono n_1 e n_2 moli di uno stesso gas ideale monoatomico. Nello stato iniziale (schematizzato in Figura 3) il sistema è in equilibrio meccanico e termodinamico, e la sua temperatura è pari a $T_i = 400$ K; in tale stato gli scomparti 1 e 2 hanno uguale volume. Supponendo che il volume del pistone sia trascurabile rispetto a quello del recipiente e che sia $n_1 = 2$ mol, determinare:

1. il numero di moli n_2 di gas presenti nello scomparto 2.

Successivamente, il pistone viene abbassato lentamente fino a far dimezzare il volume dello scomparto 1. Trascurando la capacità termica del pistone, determinare:

2. la temperatura finale T_f del sistema.

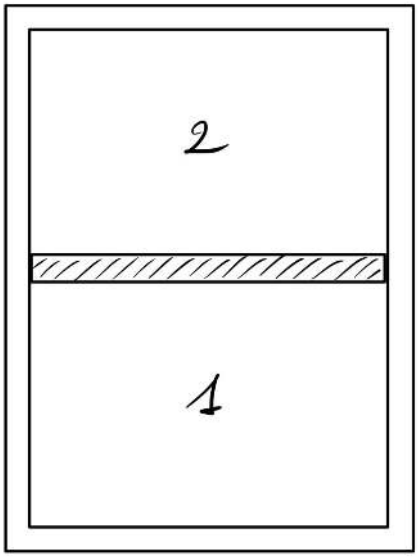

Figura 3: Rappresentazione grafica esercizio 4.

5 In un recipiente cilindrico, dotato di pistone, è contenuto un volume $V_1 = 12.5$ L di azoto (gas biatomico) alla pressione di 1 atm in equilibrio termico con l'ambiente. Agendo sul pistone il gas viene compresso, reversibilmente e adiabaticamente, fino ad un volume $V_2 = V_1/2$. Atteso un tempo sufficientemente lungo affinchè il gas ritorni ad essere in equilibrio termico con l'ambiente, restando il suo volume pari a V_2, il gas viene fatto espandere, reversibilmente e isotermicamente, fino a riportarlo al volume V_1. Nel complesso di trasformazioni si determini:

1. il lavoro L fatto dal pistone sul gas;
2. il calore Q scambiato dal gas con l'ambiente.

6 Una macchina reversibile utilizza come fluido n = 2.5 mol di un gas perfetto biatomico che esegue il ciclo costiuito dalle seguenti tre trasformazioni: 1) dallo stato iniziale ($p_1 = 15$ atm e $T_1 = 100$ °C) il gas viene fatto espandere isotermicamente fino a che il suo volume si porta a $V_2 = 4V_1$; 2) seguendo una trasformazione isobara il gas viene portato sull'adiabatica passante per lo stato iniziale; 3) lungo tale adiabatica il gas viene infine riportato allo stato iniziale. Si determini:

1. il lavoro L e il calore Q scambiati dal gas in un ciclo;
2. il rapporto tra il lavoro compiuto e il calore *assorbito* dal gas nel ciclo;
3. la variazione di entropia $\Delta S_{2,3}$ lungo la trasformazione isobara.

ES. 1

Nello stato iniziale abbiamo

$$p = \frac{Mg}{A} + p_0 \; ; \qquad V = A h_0 \; ; \qquad n = \frac{m}{\mu}$$

dove p_0 è la pressione atmosferica, h_0 è la quota a cui si trova il pistone e m è la massa del gas espressa in grammi. Quindi dall'equazione di stato dei gas ideali possiamo ricavare

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{\left(\frac{Mg}{A} + p_0\right) A h_0}{\frac{m}{\mu} R} = \left[\frac{Mg}{A} + p_0\right] \frac{\mu A h_0}{m R}$$

Nello stato finale, essendo il cilindro permeabile al calore, la temperatura rimane la stessa e quindi potremo scrivere

$$T = \left[\frac{(M+M')g}{A} + p_0\right] \frac{\mu A (h_0 - h)}{m R}$$

Uguagliando le ultime due relazioni, ricaviamo

$$h_0 = \frac{M + M' + \frac{A}{g} p_0}{M'} h = 3.23 \, m$$

e calcoliamo le densità del gas nei due stati

$$\rho_{in} = \frac{m}{A h_0} = 1.58 \cdot 10^{-3} \, Kg/m^3 , \qquad \rho_{fin} = \frac{m}{A(h_0 - h)} = 1.69 \cdot 10^{-3} \, Kg/m^3$$

Infine, la temperatura è

$$T = \left[\frac{Mg}{A} + p_0\right] A h_0 \frac{\mu}{m R} = 295 \, K \approx 22 \, °C$$

ES. 2

Il pistone esercita sul gas una pressione pari a

$$p = p_0 + \frac{(M+m)g}{A}$$

Dove p_0 è la pressione atmosferica. Questa (essendo il pistone in equilibrio) deve essere anche la pressione del

gas, perciò

$$pV_0 = nRT_0 \Rightarrow \left[p_0 + \frac{(M+m)g}{A}\right] A h_0 = nRT_0$$

$$\Rightarrow n = \frac{\left[p_0 A + (M+m)g\right] h_0}{RT_0} = 2.46 \text{ mol}$$

dove il volume V_0 del gas abbiamo sostituito Ah_0.
Mentre il gas riceve il calore Q_1 si espande seguendo una trasformazione isobara. La conseguente variazione di temperatura è

$$Q = nc_p \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{nc_p} = \frac{2Q}{7nR}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che, essendo il gas biatomico, è $c_p = \frac{7}{2}R$. La temperatura T_1 è quindi pari a

$$T_1 = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{2Q}{7nR} = 370 \text{ K}$$

Da cui $\frac{\cancel{n}\cancel{R}T_i}{V_i} = \frac{\cancel{n}\cancel{R}T_f}{V_f}$ ← Perché $pV = nRT$

Corrispondentemente, per la quota finale del pistone abbiamo (ricordando che, se $p = \text{cost}$, allora anche $\frac{nRT}{V} = \text{cost}$)

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow \frac{h_0}{h_1} = \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow h_1 = \frac{T_1}{T_0} h_0 = 123 \text{ cm}$$

La variazione di energia interna si ottiene quindi come

$$\Delta E_{int} = Q - L = Q - p\Delta V = Q - \left[p_0 A + (M+m)g\right](h_1 - h_0) = nc_v \Delta T = 3.59 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Infine, durante il lento aumento della massa del corpo poggiato sul pistone, il gas si comprime adiabaticamente. Confrontando l'attuale stato iniziale (con pressione p e volume $V = Ah_1$) e lo stato finale (con pressione p_f da determinare e volume $V_0 = Ah_0$), possiamo scrivere

$$pV_1^{\gamma} = p_f V_0^{\gamma} \Rightarrow p_f = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma} p = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\gamma} p = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\gamma} \left[p_0 + \frac{(M+m)g}{A}\right] = 1.64 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

dove si è posto $\gamma = c_p/c_v = 7/5 = 1.4$
Corrispondentemente, dovendo essere $p_f = p_0 + \frac{(M+m_f)g}{A}$, si ottiene

$$m_f = \frac{A}{g}(p_f - p_0) - M = 270 \text{ kg}$$

Per la temperatura finale si ha $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_f V_0^{\gamma-1} \Rightarrow T_f = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\gamma-1} T_1 = \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{\gamma-1} T_1 = 402 \text{ K}$

ES. 3

Tenendo presente che il volume iniziale occupato dal gas è pari a $V_0 = A h_0$, il numero di moli sarà

$$n = \frac{p_0 V_0}{R T_0} = \frac{p_0 A h_0}{R T_0} = 0.65 \text{ mol}$$

Durante l'estrazione del calore la pressione dell'ambiente circostante rimane costante e pari a p_0. Pertanto, se nel passare dallo stato 0 allo stato 1 la distanza del pistone dal fondo del recipiente si porta a h_1, possiamo scrivere

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{V_1}{V_0} T_0 = \frac{h_1}{h_0} T_0 = 225 \text{ K}$$

Conseguentemente, tenendo presente che il calore specifico a pressione costante del gas è $c_p = \frac{7}{2} R$, la quantità di calore scambiata dal gas è

$$Q = n c_p (T_1 - T_0) = \frac{7}{2} n R \left(\frac{h_1}{h_0} - 1\right) T_0 = -1.42 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Quindi dal gas viene estratta una quantità di calore $|Q| = 1.42 \cdot 10^3$ J
Quando il sistema raggiunge lo stato 2 (in cui il recipiente non poggia più sul pavimento), che cos'è che sostiene il recipiente? Ovviamente, il peso del recipiente dovrà essere bilanciato dalla risultante delle forze di pressione (diretta verso l'alto) causata dalla variazione di pressione del gas (dovuta alla sua espansione).
L'equilibrio del recipiente comporta

$$(p_0 - p_2) A - Mg = 0 \Rightarrow p_2 = p_0 - \frac{Mg}{A} = 7.68 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Nel passaggio dallo stato 1 allo stato 2, il gas non scambia calore con l'ambiente (recipiente e pistone sono adiabatici): quindi, dato che il pistone viene anche sollevato lentamente, il gas subisce una trasformazione adiabatica reversibile. Pertanto potremo scrivere

$$p_0 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma = \frac{p_0}{p_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{1/\gamma}$$

$$\Rightarrow h_2 = \left(\frac{p_0}{p_2}\right)^{5/7} h_1 = 1.22 \cdot h_1 = 36.6 \text{ cm}$$

dove abbiamo usato il fatto che per un gas biatomico è $\gamma = 7/5$
Analogamente, per le temperature abbiamo

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{2/5} T_1 = 0.923 \cdot T_1 = 208 \text{ K}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$

Se indichiamo con V_1 e V_2 i volumi dei due scomparti, nello stato iniziale del sistema è $V_1 = V_2 = AH/2$. Quindi possiamo scrivere

$$\frac{p_1 AH}{2} = n_1 R T_i \; ; \qquad \frac{p_2 AH}{2} = n_2 R T_i \; ;$$

dove p_1 e p_2 sono le pressioni del gas nei due scomparti.
D'altra parte, l'equilibrio meccanico del pistone ci permette di scrivere la seguente

$$p_1 A = p_2 A + mg \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 - \frac{mg}{A}$$

che inserita nella seconda delle precedenti ci dà

$$\frac{\left(p_1 - \frac{mg}{A}\right) AH}{2} = n_2 R T_i \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{(p_1 AH - mgH)}{2RT_i}$$

Inserendo in quest'ultima l'espressione di p_1 presente nelle prime equazioni descritte, ricaviamo

$$n_2 = \frac{(2RT_i n_1 - mgH)}{2RT_i} = n_1 - \frac{mgH}{2RT_i} = 1.7 \text{ mol}$$

Mentre il pistone viene abbassato lentamente, il calore totale scambiato dal sistema con l'ambiente deve essere nullo. Tuttavia ci saranno degli scambi di calore tra i due scomparti in modo tale che, anche se la temperatura degli scomparti cambierà, essi si manterranno isotermici.
Utilizzando la 1ª legge della termodinamica e indicando con V e V_1 il volume totale e il volume dello scomparto 1, possiamo scrivere

$$0 = dQ = dQ_1 + dQ_2 = \left(dE_{int,1} + dL_1\right) + \left(dE_{int,2} + dL_2\right)$$
$$= n_1 c_v dT + p_1 dV_1 + n_2 c_v dT - p_2 dV_1 = (n_1 + n_2) c_v dT + (p_1 - p_2) dV_1$$

Utilizzando ancora una volta l'equazione dei gas ideali, possiamo scrivere le seguenti

$$\begin{cases} p_1 V_1 = n_1 R T \\ p_2 (V - V_1) = n_2 R T \end{cases} \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = RT\left(\frac{n_1}{V_1} - \frac{n_2}{V - V_1}\right)$$

e quindi, sostituendo nella precedente, abbiamo

$$(n_1 + n_2) c_v dT + RT\left(\frac{n_1}{V_1} - \frac{n_2}{V - V_1}\right) dV_1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n_1+n_2)c_v}{R}\frac{dT}{T} = -\left(\frac{n_1}{V_1} - \frac{n_2}{V-V_1}\right)dV_1$$

Integrando ambo i membri tra gli stati iniziale e finale, si ha

$$\frac{(n_1+n_2)c_v}{R}\int_{T_i}^{T_f}\frac{dT}{T} = -\int_{V_{1,i}}^{V_{1,f}}\left(\frac{n_1}{V_1} - \frac{n_2}{V-V_1}\right)dV_1$$

$$\Rightarrow \frac{(n_1+n_2)c_v}{R}\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\left[n_1\ln\left(\frac{V_{1,f}}{V_{1,i}}\right) + n_2\ln\left(\frac{V-V_{1,f}}{V-V_{1,i}}\right)\right]$$

Tenendo presente che è

$$\frac{V_{1,f}}{V_{1,i}} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{V-V_{1,f}}{V-V_{1,i}} = \frac{3}{2}$$

otteniamo

$$\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = -\frac{R\left[-n_1\ln(2) + n_2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]}{(n_1+n_2)c_v} = -\frac{2\left[-n_1\ln(2) + n_2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]}{3(n_1+n_2)}$$

$$\Rightarrow T_f = T_i\, e^{-\frac{2\left[-n_1\ln 2 + n_2\ln\frac{3}{2}\right]}{3(n_1+n_2)}} = 453\,K$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che è $c_v = \frac{3}{2}R$

$\boxed{\text{ES. 5}}$

Il complesso di trasformazioni costituisce un ciclo. Nel ciclo abbiamo una prima compressione adiabatica reversibile ($1\to2$), poi una trasformazione isocora ($2\to3$) e quindi un'espansione isoterma reversibile ($3\to1$).
Nella trasformazione $1\to2$ deve essere $pV^\gamma = \text{cost.}$ con $\gamma = c_p/c_v = 7/5$ (dato che il gas è biatomico). Il lavoro compiuto in tale trasformazione sarà pari a

$$L_{1\to2} = \int_1^2 p\,dV = p_1V_1^\gamma\int_1^2\frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1V_1^\gamma}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[1-2^{\gamma-1}\right]$$

Nella trasformazione $2\to3$ il pistone è mantenuto fisso e quindi il lavoro compiuto $L_{2\to3} = 0$. Invece nella $3\to1$ il lavoro compiuto è pari a

$$L_{3\to1} = \int_3^1 p\,dV = nRT_1\int_3^1\frac{dV}{V} = nRT_1\ln\frac{V_1}{V_2} = p_1V_1\ln(2)$$

Il lavoro complessivo è quindi

$$L = L_{1\to2} + L_{2\to3} + L_{3\to1} = p_1 V_1 \left[\frac{1-2^{n-1}}{n-1} + \ln 2 \right] = -134\ J$$

Inoltre, dato che in un ciclo la variazione di energia interna è nulla, per la 1ª legge della termodinamica la quantità complessiva di calore scambiato dal gas deve eguagliare il lavoro fatto. Perciò

$$Q = L = -134\ J$$

$\boxed{\text{ES. 6}}$

Osservando che gli stati 1 e 2 sono alla stessa temperatura, otteniamo

$$V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} = 5.1 \cdot 10^{-3}\ m^3; \qquad V_2 = 4V_1 \Rightarrow p_2 = \frac{nRT_1}{V_2} = \frac{nRT_1}{4V_1} = \frac{1}{4} p_1$$

Lo stato 3 ha volume V_3 ed è sull'adiabatica per lo stato 1. Quindi deve essere

$$p_1 V_1^n = p_2 V_3^n \Rightarrow \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^n = \frac{p_1}{p_2} = 4 \Rightarrow V_3 = V_1 \cdot 4^{1/n} = V_1 \cdot 4^{5/7}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che per un gas biatomico è $n = c_p/c_v = 7/5$. Per la temperatura abbiamo

$$T_3 = \frac{p_2 V_3}{nR} = \frac{\frac{1}{4} p_1 V_1 4^{5/7}}{nR} = \frac{1}{4^{2/7}} T_1$$

Calcoliamo ora i lavori compiuti e i calori scambiati nelle diverse trasformazioni. Nella trasformazione 1→2 (isoterma), sfruttando la prima legge della termodinamica e tenendo conto del fatto che il gas è ideale, possiamo scrivere

$$\Delta E_{int,1,2} = Q_{1,2} - L_{1,2} = 0$$

Quindi

$$Q_{1,2} = L_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 1.07 \cdot 10^6\ J$$

Invece per l'isobara 2→3 si ricava

$$L_{2,3} = p_2 (V_3 - V_2) = -\frac{1}{4} p_1 V_1 \left(4 - 4^{5/7}\right)$$

e

$$Q_{2,3} = n c_p (T_3 - T_2) = \frac{7}{2} nR \left(\frac{1}{4^{2/7}} - 1 \right) T_1 = -8.87 \cdot 10^3 \, J$$

Infine nella trasformazione 3→1 (adiabatica) si ha

$$Q_{3,1} = 0; \quad L_{3,1} = -\Delta E_{int,3,1} = -n c_v (T_1 - T_3) = -\frac{5}{2} nR \left(1 - \frac{1}{4^{2/7}} \right) T_1$$

e perciò, dato che in un ciclo completo il lavoro compiuto e il calore scambiato dal gas si equivalgono, abbiamo

$$L = Q = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,1} = 1.82 \cdot 10^3 \, J$$

Per il rendimento della macchina, osservando che il gas assorbe calore solo lungo l'isoterma 1→2, abbiamo

$$\eta = \frac{L}{|Q_{ass}|} = \frac{L}{Q_{1,2}} = 0.17$$

Per concludere, dato che la trasformazione isobara 2→3 è una trasformazione reversibile, la corrispondente variazione di entropia è pari a

$$\Delta S_{2,3} = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = n c_p \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = n c_p \ln\left(\frac{T_3}{T_1} \right) = -28.8 \, J/K$$