Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 3

21/03/2024

Esercizio 1

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo:

$$f(1,0,0) = (2,-1,0), \quad f(0,1,0) = (1,-1,1), \quad f(0,1,-1) = (0,2,2)$$

Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcolare inoltre le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f e esibire delle basi di tali sottospazi.

Esercizio 2

Siano V e W due spazi vettoriali, con basi rispettivamente date da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$. Scrivere la matrice, rispetto alle basi date, della funzione lineare $f : V \to W$ definita da:

$$f(v_1) = w_1 - w_2 \qquad f(v_2) = 2w_2 - 6w_3 \qquad f(v_3) = -2w_1 + 2w_2 \qquad f(v_4) = w_2 - 3w_3$$

Si trovi poi la dimensione e una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$. Si dica anche se $w_1 + w_2 + w_3 \in Im(f)$.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(1,1,0,0) = (3,1,2), \quad f(1,0,1,0) = (2,0,2), \quad f(0,1,0,0) = (-1,-2,1), \quad f(0,0,1,1) = (1,-1,2)$$

.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini una base di $Ker(f)$ e di $Im(f)$.

(c) Si determini una base di $Ker(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Esercizio 4

Sia $u_t = (1, t, 1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da $f(x, y, z) = (x - y + 2z)u_t$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica.

(b) Trovare una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

Esercizio 5

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (x - 2y - z, -x + 2z, 2x - 6y - z)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Trovare una base di $Ker(f)$ e $Im(f)$.

(c) Scrivere la matrice B che esprime la funzione f rispetto alla base formata dai vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (0, 0, 1)$ (usare questa base sia per il dominio che per il codominio di f).