ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|^{\frac{2}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a). Dominio. Per determinarlo basta $x \neq 0$; quindi dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Segno. $f(x) = 0 \iff x = 2$, $f(x) > 0 \iff x \in (0, \infty) \setminus \{2\}$, $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$.
Simmetrie. $f(-x) = \frac{|-x-2|^{\frac{2}{3}}}{-x} = -\frac{|x+2|^{\frac{2}{3}}}{x} \neq f(x), -f(x)$. La funzione non è né pari né dispari.
(b). Valgono

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;$$

la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to \infty$ sia per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty;$$

in $x = 0$ si ha un asintoto verticale.
(c). Per i teoremi sull'algebra delle funzioni derivabili e quello sulla derivabilità della funzione composta abbiamo $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, 2\})$. La eventuale derivabilità in $x = 2$ va studiata separatamente. Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x+6}{3(x-2)^{1/3}x^2} & x \in (2, \infty) \\ \frac{x-6}{3(2-x)^{1/3}x^2} & x \in (-\infty, 2) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

ne deduciamo

$$\lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to2^-} f'(x) = -\infty;$$

in $x = 2$ la funzione presenta una cuspide.
Inoltre valgono: $f'(x) = 0 \iff x = 6$, $f'(x) > 0 \iff x \in (2, 6)$, $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (6, \infty)$. Ne deduciamo che la funzione presenta un punto di minimo locale in $x = 2$, un punto di massimo locale in $x = 6$ e che la funzione è crescente nell'intervallo $[2, 6]$, ed è decrescente (separatamente!) negli intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, 2]$, $[6, \infty)$. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente.
(d). Un abbozzo del grafico è in figura.

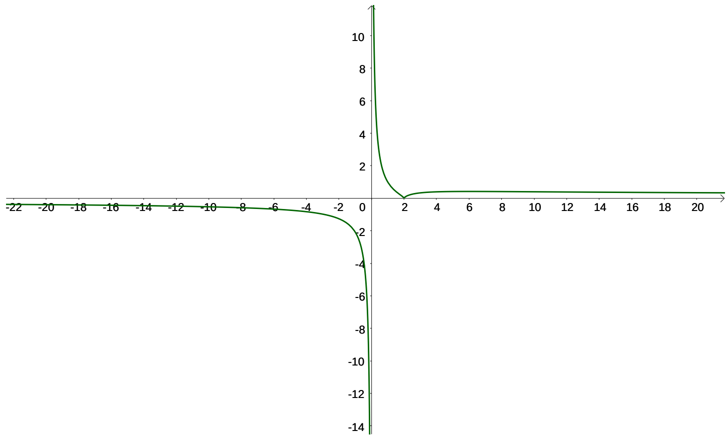

Figure 1: Il grafico di f del Tema 1.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{\sqrt{k}}.$$

Svolgimento. Condizione necessaria per la covergenza $\iff$ $\lim_{k\to\infty} \frac{|b|^k}{\sqrt{k}} = 0$ $\iff$ (per il teorema sulla gerarchia degli infiniti) $\iff$ $|b| \leq 1$ $\iff$ $-1 \leq b \leq 1$.
Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|b|^k}{\sqrt{k}}$. Applicando il criterio del rapporto asintotico otteniamo:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b|^{k+1}}{\sqrt{k+1}} \frac{\sqrt{k}}{|b|^k} = |b| \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = |b|.$$

Ne deduciamo che la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $|b| < 1$. Per $|b| = 1$, cioè per $b = \pm 1$, va fatto uno studio separato.
Se $b = 1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ed è una serie armonica generalizzata. Diverge semplicemente ed assolutamente.
Se $b = -1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$. Essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$; per lo studio fatto per $b = 1$ sappiamo che quest'ultima serie diverge. Quindi la serie iniziale diverge assolutamente. Studiamone la convergenza semplice applicando il criterio di Leibniz. A questo scopo osserviamo che la cond. necessaria è verificata e che $\frac{1}{\sqrt{k}}$ è definitivamente decrescente perché inversa di una successione crescente. Pertanto il criterio di Leibniz assicura che la serie è semplicemente convergente.
In conclusione: convergenza assoluta $\iff$ $-1 < b < 1$, convergenza semplice $\iff$ $-1 \leq b < 1$.

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(x - \sin x)^\alpha}{(x+6)\sqrt{x+2}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\, dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (i). Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_0(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x+6)\sqrt{x+2}}dx = \left(\text{sost. } x+2=t^2\right) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2+4)\sqrt{t^2}}(2t)dt \\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2)^2+1}dt = (\text{sost. } t/2 = z) = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{z^2+1}dz = [\arctan z]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\
&= \arctan(\sqrt{3}/2) - \arctan(\sqrt{2}/2).
\end{aligned}$$

(ii). La funzione f_α è sempre $C^0((0,1])$ quindi presenta un unico punto di (eventuale) integrazione impropria in $x=0$. Inoltre su $(0,1]$ la funzione è positiva. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Per $x \to 0^+$, usando lo sviluppo di MacLaurin del sin vale

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{3\alpha}}{3^\alpha(6)\sqrt{2}}$$

e quindi l'integrale è convergente $\iff$ $3\alpha > -1$ cioè per $\alpha > -1/3$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Svolgimento. (i). Il polinomio caratteristico è: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1$ con molteplicità 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$y(t) = (A + Bt)\,e^t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = ae^{2t}$. Imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione della EDO iniziale, otteniamo $(4a - 4a + a)e^{2t} = e^{2t}$ e quindi $a = 1$. Pertanto la soluzione generale della EDO iniziale è

$$y(t) = (A + Bt)\,e^t + e^{2t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(ii). Abbiamo $y(t) = (A + Bt)\,e^t + e^{2t}$ e $y'(t) = (A + B + Bt)\,e^t + 2e^{2t}$; quindi

$$\begin{aligned}
y(0) &= 1 \iff A + 1 = 1 \iff A = 0 \\
y'(0) &= 0 \iff B + 2 = 0 \iff B = -2.
\end{aligned}$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -2te^t + e^{2t}.$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$.

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che $z = 0$è soluzione. Cerchiamo ora soluzioni $z \neq 0$. Queste (eventuali) soluzioni possono essere scritte in forma esponenziale $z = \rho e^{i\theta}$ dove $\rho = |z| \in (0, \infty)$ è il modulo di z mentre $\theta \in [0, 2\pi)$ è l'argomento principale di z. Allora $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$. Pertanto l'equazione diventa

$$\rho^3 e^{i3\theta} = \rho^2 e^{-i2\theta}.$$

Studiamone i moduli: $\rho^3 = \rho^2$ che ha soluzioni $\rho = 0$ (già studiato) e $\rho = 1$. Per $\rho = 1$, l'equazione diventa $e^{i3\theta} = e^{-i2\theta}$ cioè $e^{i5\theta} = 1$ ed ha come soluzione le radici quinte dell'unità: $e^{i\theta_k}$ con $\theta_k = (2k\pi)/5$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
In conclusione le soluzioni della equazione iniziale sono:

$$z = 0, z = e^{i\theta_k}, \qquad \text{con } \theta_k = (2k\pi)/5, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x+2|^{\frac{2}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a). Dominio. Per determinarlo basta $x \neq 0$; quindi dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Segno. $f(x) = 0 \iff x = -2$, $f(x) > 0 \iff x \in (0, \infty)$, $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \setminus \{-2\}$.
Simmetrie. $f(-x) = \frac{|-x+2|^{\frac{2}{3}}}{-x} = -\frac{|x-2|^{\frac{2}{3}}}{x} \neq f(x), -f(x)$. La funzione non è né pari né dispari.
(b). Valgono

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;$$

la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to \infty$ sia per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty;$$

in $x = 0$ si ha un asintoto verticale.
(c). Per i teoremi sull'algebra delle funzioni derivabili e quello sulla derivabilità della funzione composta abbiamo $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, -2\})$. La eventuale derivabilità in $x = -2$ va studiata separatamente. Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x-6}{3(x+2)^{1/3}x^2} & x \in (-2, \infty) \setminus \{0\} \\ \frac{x+6}{3(-2-x)^{1/3}x^2} & x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

ne deduciamo

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -2^-} f'(x) = \infty;$$

in $x = -2$ la funzione presenta una cuspide.
Inoltre valgono: $f'(x) = 0 \iff x = -6$, $f'(x) > 0 \iff x \in (-6, -2)$, $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -6) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty)$. Ne deduciamo che la funzione presenta un punto di minimo locale in $x = -6$, un punto di massimo locale in $x = -2$ e che la funzione è crescente nell'intervallo $[-6, -2]$, ed è decrescente (separatamente!) negli intervalli $(-\infty, -6)$, $[-2, 0)$, $(0, \infty)$. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente.
(d). Un abbozzo del grafico è in figura.

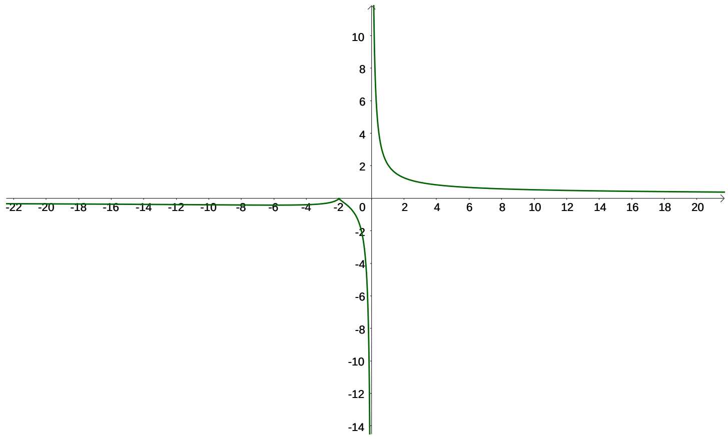

Figure 2: Il grafico di f del Tema 2.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{\sqrt[3]{k}}.$$

Svolgimento. Condizione necessaria per la covergenza $\iff \lim_{k\to\infty} \frac{|b|^k}{\sqrt[3]{k}} = 0 \iff$ (per il teorema sulla gerarchia degli infiniti) $\iff |b| \leq 1 \iff -1 \leq b \leq 1$.
Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|b|^k}{\sqrt[3]{k}}$. Applicando il criterio del rapporto asintotico otteniamo:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b|^{k+1}}{\sqrt[3]{k+1}} \frac{\sqrt[3]{k}}{|b|^k} = |b| \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[3]{k+1}} = |b|.$$

Ne deduciamo che la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $|b| < 1$. Per $|b| = 1$, cioè per $b = \pm 1$, va fatto uno studio separato.
Se $b = 1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ ed è una serie armonica generalizzata. Diverge semplicemente ed assolutamente.
Se $b = -1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$. Essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$; per lo studio fatto per $b = 1$ sappiamo che quest'ultima serie diverge. Quindi la serie iniziale diverge assolutamente. Studiamone la convergenza semplice applicando il criterio di Leibniz. A questo scopo osserviamo che la cond. necessaria è verificata e che $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ è definitivamente decrescente perché inversa di una successione crescente. Pertanto il criterio di Leibniz assicura che la serie è semplicemente convergente.
In conclusione: convergenza assoluta $\iff -1 < b < 1$, convergenza semplice $\iff -1 \leq b < 1$.

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(x - \sin x)^\alpha}{(x+8)\sqrt{x+4}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\, dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (*i*). Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_0(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x+8)\sqrt{x+4}}dx = \big(\text{sost. } x+4=t^2\big) = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{(t^2+4)\sqrt{t^2}}(2t)dt \\ &= 2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2)^2+1}dt = (\text{sost. } t/2=z) = \int_1^{\sqrt{5}/2} \frac{1}{z^2+1}dz = [\arctan z]_1^{\sqrt{5}/2} \\ &= \arctan(\sqrt{5}/2) - \pi/4.\end{aligned}$$

(*ii*). La funzione f_α è sempre $C^0((0,1])$ quindi presenta un unico punto di (eventuale) integrazione impropria in $x=0$. Inoltre su $(0,1]$ la funzione è positiva. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Per $x \to 0^+$, usando lo sviluppo di MacLaurin del sin vale

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{3\alpha}}{3^\alpha(16)}$$

e quindi l'integrale è convergente $\iff 3\alpha > -1$ cioè per $\alpha > -1/3$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Svolgimento. (*i*). Il polinomio caratteristico è: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ che ha soluzione $\lambda = -1$ con molteplicità 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$y(t) = (A + Bt)\, e^{-t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = ae^{2t}$. Imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione della EDO iniziale, otteniamo $(4a + 4a + a)e^{2t} = e^{2t}$ e quindi $a = 1/9$. Pertanto la soluzione generale della EDO iniziale è

$$y(t) = (A + Bt)\, e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(*ii*). Abbiamo $y(t) = (A + Bt)\, e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}$ e $y'(t) = (-A + B - Bt)\, e^{-t} + \frac{2}{9}e^{2t}$; quindi

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \iff A + \frac{1}{9} = 1 \iff A = \frac{8}{9} \\ y'(0) &= 0 \iff -\frac{8}{9} + B + \frac{2}{9} = 0 \iff B = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \left(\frac{8}{9} + \frac{2}{3}t\right) e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}.$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$.

Svolgimento. Come per il Tema 1.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x+2|^{\frac{1}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a). Dominio. Per determinarlo basta $x \neq 0$; quindi dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Segno. $f(x) = 0 \iff x = -2$, $f(x) > 0 \iff x \in (0, \infty)$, $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \setminus \{-2\}$.
Simmetrie. $f(-x) = \frac{|-x+2|^{\frac{1}{3}}}{-x} = -\frac{|x-2|^{\frac{1}{3}}}{x} \neq f(x), -f(x)$. La funzione non è né pari né dispari.
(b). Valgono

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;$$

la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to \infty$ sia per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty;$$

in $x = 0$ si ha un asintoto verticale.
(c). Per i teoremi sull'algebra delle funzioni derivabili e quello sulla derivabilità della funzione composta abbiamo $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, -2\})$. La eventuale derivabilità in $x = -2$ va studiata separatamente. Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x-6}{3(x+2)^{2/3}x^2} & x \in (-2, \infty) \setminus \{0\} \\ \frac{2x+6}{3(-2-x)^{2/3}x^2} & x \in (-\infty, -2). \end{cases}$$

ne deduciamo

$$\lim_{x\to-2^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-2^-} f'(x) = \infty;$$

in $x = -2$ la funzione presenta una cuspide.
Inoltre valgono: $f'(x) = 0 \iff x = -3$, $f'(x) > 0 \iff x \in (-3, -2)$, $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty)$. Ne deduciamo che la funzione presenta un punto di minimo locale in $x = -3$, un punto di massimo locale in $x = -2$ e che la funzione è crescente nell'intervallo $[-3, -2]$, ed è decrescente (separatamente!) negli intervalli $(-\infty, -3)$, $[-2, 0)$, $(0, \infty)$. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente.
(d). Un abbozzo del grafico è in figura.

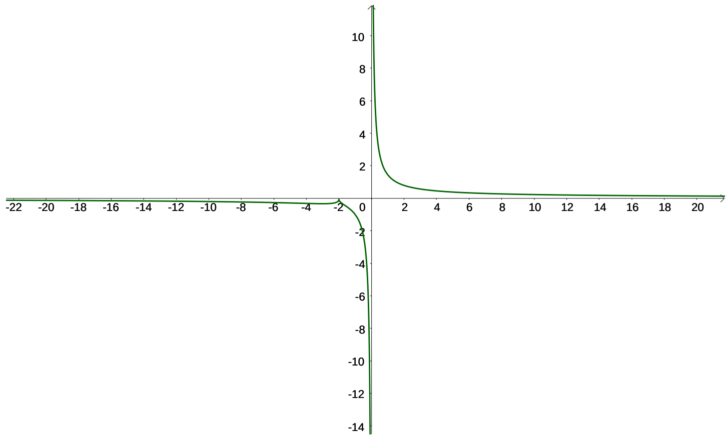

Figure 3: Il grafico di f del Tema 3.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k^{2/3}}.$$

Svolgimento. Condizione necessaria per la covergenza $\iff \lim_{k\to\infty} \frac{|b|^k}{k^{2/3}} = 0 \iff$ (per il teorema sulla gerarchia degli infiniti) $\iff |b| \le 1 \iff -1 \le b \le 1$.
Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|b|^k}{k^{2/3}}$. Applicando il criterio del rapporto asintotico otteniamo:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b|^{k+1}}{(k+1)^{2/3}} \frac{k^{2/3}}{|b|^k} = |b| \lim_{k\to\infty} \frac{k^{2/3}}{(k+1)^{2/3}} = |b|.$$

Ne deduciamo che la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $|b| < 1$. Per $|b| = 1$, cioè per $b = \pm 1$, va fatto uno studio separato.
Se $b = 1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ ed è una serie armonica generalizzata. Diverge semplicemente ed assolutamente.
Se $b = -1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2/3}}$. Essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$; per lo studio fatto per $b = 1$ sappiamo che quest'ultima serie diverge. Quindi la serie iniziale diverge assolutamente. Studiamone la convergenza semplice applicando il criterio di Leibniz. A questo scopo osserviamo che la cond. necessaria è verificata e che $\frac{1}{k^{2/3}}$ è definitivamente decrescente perché inversa di una successione crescente. Pertanto il criterio di Leibniz assicura che la serie è semplicemente convergente.
In conclusione: convergenza assoluta $\iff -1 < b < 1$, convergenza semplice $\iff -1 \le b < 1$.

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(1-\cos x)^\alpha}{(x+8)\sqrt{x+4}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (*i*). Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_0(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x+8)\sqrt{x+4}}dx = \big(\text{sost. } x+4=t^2\big) = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{(t^2+4)\sqrt{t^2}}(2t)dt \\ &= 2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2)^2+1}dt = (\text{sost. } t/2=z) = \int_1^{\sqrt{5}/2} \frac{1}{z^2+1}dz = [\arctan z]_1^{\sqrt{5}/2} \\ &= \arctan(\sqrt{5}/2) - \pi/4.\end{aligned}$$

(*ii*). La funzione f_α è sempre $C^0((0,1])$ quindi presenta un unico punto di (eventuale) integrazione impropria in $x=0$. Inoltre su $(0,1]$ la funzione è positiva. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Per $x \to 0^+$, usando lo sviluppo di MacLaurin del cos vale

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha(16)}$$

e quindi l'integrale è convergente $\iff 2\alpha > -1$ cioè per $\alpha > -1/2$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^{-2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Svolgimento. (*i*). Il polinomio caratteristico è: $\lambda^2+2\lambda+1=0$ che ha soluzione $\lambda=-1$ con molteplicità 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$y(t) = (A+Bt)\,e^{-t}, \qquad A,B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = ae^{-2t}$. Imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione della EDO iniziale, otteniamo $(4a-4a+a)e^{-2t} = e^{-2t}$ e quindi $a=1$. Pertanto la soluzione generale della EDO iniziale è

$$y(t) = (A+Bt)\,e^{-t} + e^{-2t}, \qquad A,B \in \mathbb{R}.$$

(*ii*). Abbiamo $y(t) = (A+Bt)\,e^{-t} + e^{-2t}$ e $y'(t) = (-A+B-Bt)\,e^{-t} - 2e^{-2t}$; quindi

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \iff A+1=1 \iff A=0 \\ y'(0) &= 0 \iff B-2=0 \iff B=2. \end{aligned}$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = 2te^{-t} + e^{-2t}.$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$.

Svolgimento. Come per Tema 1.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.02.2025

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x-2|^{\frac{1}{3}}}{x}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) discutere la derivabilità di f e calcolarne la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento. (a). Dominio. Per determinarlo basta $x \neq 0$; quindi dom $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Segno. $f(x) = 0 \iff x = 2$, $f(x) > 0 \iff x \in (0, \infty) \setminus \{2\}$, $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0)$.
Simmetrie. $f(-x) = \frac{|-x-2|^{\frac{1}{3}}}{-x} = -\frac{|x+2|^{\frac{1}{3}}}{x} \neq f(x), -f(x)$. La funzione non è né pari né dispari.
(b). Valgono

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;$$

la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to \infty$ sia per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty;$$

in $x = 0$ si ha un asintoto verticale.
(c). Per i teoremi sull'algebra delle funzioni derivabili e quello sulla derivabilità della funzione composta abbiamo $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0, 2\})$. La eventuale derivabilità in $x = 2$ va studiata separatamente. Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x+6}{3(x-2)^{2/3}x^2} & x \in (2, \infty) \\ \frac{2x-6}{3(2-x)^{2/3}x^2} & x \in (-\infty, 2) \setminus \{0\}. \end{cases}$$

ne deduciamo

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty;$$

in $x = 2$ la funzione presenta una cuspide.
Inoltre valgono: $f'(x) = 0 \iff x = 3$, $f'(x) > 0 \iff x \in (2, 3)$, $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$. Ne deduciamo che la funzione presenta un punto di minimo locale in $x = 2$, un punto di massimo locale in $x = 3$ e che la funzione è crescente nell'intervallo $[2, 3]$, ed è decrescente (separatamente!) negli intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, 2]$, $[3, \infty)$. La funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente.
(d). Un abbozzo del grafico è in figura.

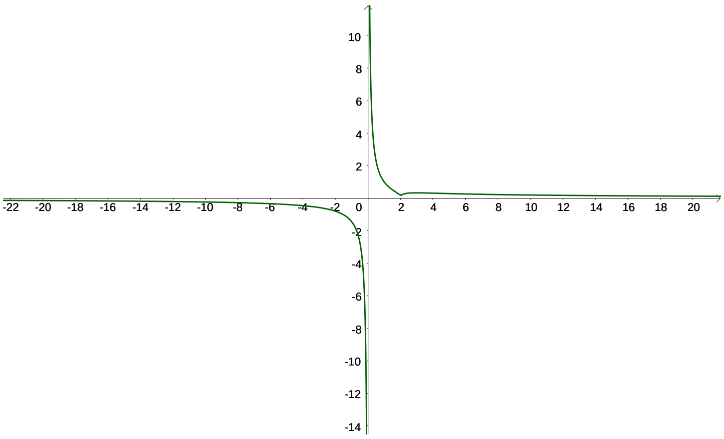

Figure 4: Il grafico di f del Tema 3.

Esercizio 2 (punti 8) Studiare, per $b \in \mathbb{R}$, la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b^k}{k^{3/4}}.$$

Svolgimento. Condizione necessaria per la covergenza $\iff \lim_{k\to\infty} \frac{|b|^k}{k^{3/4}} = 0 \iff$ (per il teorema sulla gerarchia degli infiniti) $\iff |b| \leq 1 \iff -1 \leq b \leq 1$.
Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|b|^k}{k^{3/4}}$. Applicando il criterio del rapporto asintotico otteniamo:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|b|^{k+1}}{(k+1)^{3/4}} \frac{k^{3/4}}{|b|^k} = |b| \lim_{k\to\infty} \frac{k^{3/4}}{(k+1)^{3/4}} = |b|.$$

Ne deduciamo che la serie converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $|b| < 1$. Per $|b| = 1$, cioè per $b = \pm 1$, va fatto uno studio separato.
Se $b = 1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/4}}$ ed è una serie armonica generalizzata. Diverge semplicemente ed assolutamente.
Se $b = -1$ allora la serie iniziale è $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{3/4}}$. Essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/4}}$; per lo studio fatto per $b = 1$ sappiamo che quest'ultima serie diverge. Quindi la serie iniziale diverge assolutamente. Studiamone la convergenza semplice applicando il criterio di Leibniz. A questo scopo osserviamo che la cond. necessaria è verificata e che $\frac{1}{k^{3/4}}$ è definitivamente decrescente perché inversa di una successione crescente. Pertanto il criterio di Leibniz assicura che la serie è semplicemente convergente.
In conclusione: convergenza assoluta $\iff -1 < b < 1$, convergenza semplice $\iff -1 \leq b < 1$.

Esercizio 3 (punti 8) Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{(1-\cos x)^\alpha}{(x+6)\sqrt{x+2}}$.

i) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\, dx$. [*Suggerimento:* Usare una sostituzione.]

ii) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (*i*). Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_0(x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{(x+6)\sqrt{x+2}}dx = \left(\text{sost. } x+2=t^2\right) = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(t^2+4)\sqrt{t^2}}(2t)dt \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{4}\frac{1}{(t/2)^2+1}dt = (\text{sost. } t/2=z) = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{z^2+1}dz = [\arctan z]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \arctan(\sqrt{3}/2) - \arctan(\sqrt{2}/2).\end{aligned}$$

(*ii*). La funzione f_α è sempre $C^0((0,1])$ quindi presenta un unico punto di (eventuale) integrazione impropria in $x=0$. Inoltre su $(0,1]$ la funzione è positiva. Possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Per $x \to 0^+$, usando lo sviluppo di MacLaurin del cos vale

$$f_\alpha(x) \sim \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha(6)\sqrt{2}}$$

e quindi l'integrale è convergente $\iff$ $2\alpha > -1$ cioè per $\alpha > -1/2$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri l'equazione

$$y'' - 2y' + y = e^{-2t}.$$

i) Determinare l'integrale generale.

ii) Determinare la soluzione del problema di Cauchy, $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Svolgimento. (*i*). Il polinomio caratteristico è: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ che ha soluzione $\lambda = 1$ con molteplicità 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è:

$$y(t) = (A + Bt)\,e^t, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(t) = ae^{-2t}$. Imponendo che $\bar{y}$ sia soluzione della EDO iniziale, otteniamo $(4a+4a+a)e^{-2t} = e^{-2t}$ e quindi $a = \frac{1}{9}$. Pertanto la soluzione generale della EDO iniziale è

$$y(t) = (A + Bt)\,e^t + \frac{1}{9}e^{-2t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

(*ii*). Abbiamo $y(t) = (A+Bt)\,e^t + \frac{1}{9}e^{-2t}$ e $y'(t) = (A+B+Bt)\,e^t - \frac{2}{9}e^{-2t}$; quindi

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \iff A + \frac{1}{9} = 1 \iff A = \frac{8}{9} \\ y'(0) &= 0 \iff \frac{8}{9} + B - \frac{2}{9} = 0 \iff B = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \left(\frac{8}{9} + \frac{2}{3}t\right)e^t + \frac{1}{9}e^{-2t}.$$

Esercizio 4b (punti 8) (a scelta per iscritti al corso in AA $\leq$ 23/24) Determinare in forma esponenziale tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $z^3 = \overline{z}^2$.

Svolgimento. Come per Tema 1.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$