Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 24 aprile 2010

Esercizio 1. Si risponda alle seguenti domande (**NOTA BENE: affinché il compito venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno due delle seguenti tre domande**):

[V] [F] Un sistema di equazioni lineari (a coefficienti reali) può avere un insieme di soluzioni costituito da due vettori.

[V] [F] Una funzione lineare trasforma sempre vettori linearmente indipendenti del suo dominio in vettori linearmente indipendenti del codominio.

[V] [F] Affinché una matrice abbia rango 1, essa deve avere una sola riga.

Esercizio 2. Siano U e V sottospazi di $\mathbb{R}^8$, con $\dim U = 6$ e $\dim V = 5$.

[V] [F] Se $U + V = \mathbb{R}^8$ allora $\mathbb{R}^8$ è somma diretta di U e V.

[V] [F] Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^8$.

[V] [F] Deve necessariamente essere $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 5$.

Esercizio 3. Si scriva il numero complesso $z = \dfrac{1+i^7}{(2+i)^2}$ nella forma $a + ib$.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (2, 0, 1, -1), \quad u_2 = (1, 1, 2, 0), \quad u_3 = (4, -2, -1, -3),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + 2z = 0$.
(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1 + t, 1, 3, -1)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.
(f) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f^{-1}(W) = U$ (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(1, 0, 1) = (3, 0, 6), \quad f(0, 1, 1) = (0, 2, 2), \quad f(1, 1, 0) = (1, 4, 6).$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(c) Si stabilisca se $\mathbb{R}^3$ è *somma diretta* di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Si determini per quale valore di t il vettore $v_t = (2, 3, t)$ appartiene all'immagine di f.
(e) Per il valore di t trovato nel punto precedente si determini $f^{-1}(v_t)$.

Esercizio 6. Siano dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (1, 1, 3)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = 3v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3 + 2v_2$.
(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 24 aprile 2010

Esercizio 1. Si risponda alle seguenti domande (**NOTA BENE: affinché il compito venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno due delle seguenti tre domande**):

[V] [F] Affinché una matrice abbia rango 1, essa deve avere una sola riga.

[V] [F] Un sistema lineare può avere il vettore nullo come soluzione.

[V] [F] Una funzione lineare trasforma sempre vettori linearmente indipendenti del suo dominio in vettori linearmente indipendenti del codominio.

Esercizio 2. Siano U e V sottospazi di $\mathbb{R}^8$, con $\dim U = 6$ e $\dim V = 5$.

[V] [F] Se $U + V = \mathbb{R}^8$ allora $\mathbb{R}^8$ è somma diretta di U e V.

[V] [F] Deve necessariamente essere $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 5$.

[V] [F] Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^8$.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (0, 2, -1, 2), \quad u_2 = (1, 3, -1, 1), \quad u_3 = (-2, 0, -1, 4),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x - y + z = 0$.
(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1, 1 + t, -2, 3)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.
(f) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f^{-1}(W) = U$ (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 4. Siano dati i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 3)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = 2v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_3 + 2v_2$.
(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(1, 1, 0) = (4, -2, 0), \quad f(0, -1, 1) = (-4, 3, 2), \quad f(1, 0, -1) = (2, -3, -4).$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(c) Si stabilisca se $\mathbb{R}^3$ è *somma diretta* di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Si determini per quale valore di t il vettore $v_t = (t, 2, 1)$ appartiene all'immagine di f.
(e) Per il valore di t trovato nel punto precedente si determini $f^{-1}(v_t)$.

Esercizio 6. Si scriva il numero complesso $z = \dfrac{2 - i^7}{(1 + 2i)^2}$ nella forma $a + ib$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 24 aprile 2010

Esercizio 1. Si risponda alle seguenti domande (**NOTA BENE: affinché il compito venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno due delle seguenti tre domande**):

V F Un sistema lineare può avere il vettore nullo come soluzione.

V F Affinché una matrice abbia rango 1, essa deve avere una sola riga.

V F Un sistema di equazioni lineari (a coefficienti reali) può avere un insieme di soluzioni costituito da due vettori.

Esercizio 2. Siano U e V sottospazi di $\mathbb{R}^8$, con $\dim U = 6$ e $\dim V = 5$.

V F Deve necessariamente essere $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 5$.

V F Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^8$.

V F Se $U + V = \mathbb{R}^8$ allora $\mathbb{R}^8$ è somma diretta di U e V.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (1, -1, 0, 2), \quad u_2 = (1, 0, -1, 1), \quad u_3 = (1, 3, -4, -2),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + 2y + w = 0$.
(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1 + t, -1, 1, 1)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.
(f) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f^{-1}(W) = U$ (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 4. Si scriva il numero complesso $z = \dfrac{2 + i^5}{(3 - i)^2}$ nella forma $a + ib$.

Esercizio 5. Siano dati i vettori $v_1 = (2, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = -2v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3 - v_2$.
(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(0, 1, -1) = (-1, 3, 5), \quad f(1, 1, 0) = (-2, 3, 4), \quad f(-1, 0, 1) = (5, -2, 1).$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(c) Si stabilisca se $\mathbb{R}^3$ è *somma diretta* di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Si determini per quale valore di t il vettore $v_t = (0, -3, t)$ appartiene all'immagine di f.
(e) Per il valore di t trovato nel punto precedente si determini $f^{-1}(v_t)$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 24 aprile 2010

Esercizio 1. Si risponda alle seguenti domande (**NOTA BENE: affinché il compito venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno due delle seguenti tre domande**):

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Una funzione lineare trasforma sempre vettori linearmente indipendenti del suo dominio in vettori linearmente indipendenti del codominio.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Un sistema di equazioni lineari (a coefficienti reali) può avere un insieme di soluzioni costituito da due vettori.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Data una matrice quadrata con determinante diverso da zero, scambiando due righe il determinante diventa uguale a zero.

Esercizio 2. Siano U e V sottospazi di $\mathbb{R}^8$, con $\dim U = 6$ e $\dim V = 5$.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^8$.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se $U + V = \mathbb{R}^8$ allora $\mathbb{R}^8$ è somma diretta di U e V.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Deve necessariamente essere $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 5$.

Esercizio 3. Si scriva il numero complesso $z = \dfrac{1 - i^5}{(3 + i)^2}$ nella forma $a + ib$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(1, -1, 0) = (0, -4, 4), \quad f(0, -1, 1) = (-3, -1, -5), \quad f(1, 0, 1) = (1, 1, 1).$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(c) Si stabilisca se $\mathbb{R}^3$ è *somma diretta* di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Si determini per quale valore di t il vettore $v_t = (-1, -2, t)$ appartiene all'immagine di f.
(e) Per il valore di t trovato nel punto precedente si determini $f^{-1}(v_t)$.

Esercizio 5. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (3, -1, 2, 0), \quad u_2 = (1, 0, 2, -1), \quad u_3 = (3, -2, -2, 3),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x - y + 2w = 0$.
(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (2, -1, t + 2, 1)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.
(f) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f^{-1}(W) = U$ (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 6. Siano dati i vettori $v_1 = (-1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 3, 0)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2v_2$, $f(v_3) = 2v_3 - 2v_2$.
(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

PROF. F. BOTTACIN, B. CHIARELLOTTO

1ª Prova di accertamento — 24 aprile 2010

Esercizio 1. Si risponda alle seguenti domande (**NOTA BENE: affinché il compito venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno due delle seguenti tre domande**):

[V] [F] Data una matrice quadrata con determinante diverso da zero, scambiando due righe il determinante diventa uguale a zero.

[V] [F] Un sistema di equazioni lineari (a coefficienti reali) può avere un insieme di soluzioni costituito da due vettori.

[V] [F] Affinché una matrice abbia rango 1, essa deve avere una sola riga.

Esercizio 2. Siano U e V sottospazi di $\mathbb{R}^8$, con $\dim U = 6$ e $\dim V = 5$.

[V] [F] Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^8$.

[V] [F] Deve necessariamente essere $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 5$.

[V] [F] Se $U + V = \mathbb{R}^8$ allora $\mathbb{R}^8$ è somma diretta di U e V.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(-1,-1,0) = (-5,-6,-4), \quad f(1,0,-1) = (3,2,4), \quad f(0,1,-1) = (6,2,10).$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(c) Si stabilisca se $\mathbb{R}^3$ è *somma diretta* di $\operatorname{Ker}(f)$ e di $\operatorname{Im}(f)$.
(d) Si determini per quale valore di t il vettore $v_t = (0,2,t)$ appartiene all'immagine di f.
(e) Per il valore di t trovato nel punto precedente si determini $f^{-1}(v_t)$.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (0,-1,3,2), \quad u_2 = (2,-1,1,0), \quad u_3 = (-6,1,3,4),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x + y + z = 0$.
(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (2, t-3, -2, -2)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.
(f) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f^{-1}(W) = U$ (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 5. Si scriva il numero complesso $z = \dfrac{3 - i^9}{(2-i)^2}$ nella forma $a + ib$.

Esercizio 6. Siano dati i vettori $v_1 = (0,2,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$, $v_3 = (-1,1,0)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = -3v_1$, $f(v_2) = v_2$, $f(v_3) = v_3 - 2v_2$.
(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 24 aprile 2010

Esercizio 1. Si risponda alle seguenti domande (**NOTA BENE: affinché il compito venga valutato è necessario rispondere correttamente ad almeno due delle seguenti tre domande**):

V F Una funzione lineare trasforma sempre vettori linearmente indipendenti del suo dominio in vettori linearmente indipendenti del codominio.

V F Un sistema lineare può avere il vettore nullo come soluzione.

V F Affinché una matrice abbia rango 1, essa deve avere una sola riga.

Esercizio 2. Siano U e V sottospazi di $\mathbb{R}^8$, con $\dim U = 6$ e $\dim V = 5$.

V F Deve necessariamente essere $3 \leq \dim(U \cap V) \leq 5$.

V F Se $U + V = \mathbb{R}^8$ allora $\mathbb{R}^8$ è somma diretta di U e V.

V F Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^8$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$f(0,1,1) = (4,-3,5), \quad f(-1,0,1) = (5,-5,5), \quad f(-1,1,0) = (3,-4,2).$$

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
(c) Si stabilisca se $\mathbb{R}^3$ è *somma diretta* di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.
(d) Si determini per quale valore di t il vettore $v_t = (4, t, 4)$ appartiene all'immagine di f.
(e) Per il valore di t trovato nel punto precedente si determini $f^{-1}(v_t)$.

Esercizio 4. Siano dati i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (-2, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 2)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 3v_2$, $f(v_3) = 3v_3 + v_2$.
(a) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
(c) Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

Esercizio 5. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (2,-1,0,3), \quad u_2 = (1,0,-1,3), \quad u_3 = (1,-2,3,-3),$$

e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y - 2w = 0$.
(a) Si determini la dimensione e una base di U.
(b) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1, 1+t, 1, 0)$ appartiene a U.
(c) Si determinino le equazioni cartesiane di U.
(d) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
(e) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.
(f) Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f^{-1}(W) = U$ (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 6. Si scriva il numero complesso $z = \dfrac{3 + i^9}{(1-2i)^2}$ nella forma $a + ib$.