FISICA 2 - RIASSUNTO

QUESTI APPUNTI SONO STATI PRESI SEGUENDO IL PROF. LORENZO FORTUNATO E IL LIBRO DI FISICA 2 DI ZOTTO.

CAPITOLO 1: FENOMENI ELETTRICI

1. INTRODUZIONE

SPERIMENTALMENTE SI OSSERVA CHE ALCUNI MATERIALI, SE VENGONO STROFINATI, SONO IN GRADO DI ATTIRARE OGGETTI LEGGERI (es. una bacchetta di vetro attiva della bachelite o una bacchetta di plastica attiva pezzettini di carta)

QUESTI FENOMENI NON SONO CLASSIFICABILI COME RISULTATO DELL'INTERAZIONE TRA CORPI DOVUTO A FORZE GIÀ NOTE DALLA FISICA 1, QUINDI È NECESSARIO IPOTIZZARE L'ESISTENZA DI UNA NUOVA FORZA, LA FORZA ELETTRICA.

2. CARICA ELETTRICA

COSÌ COME L'INTERAZIONE GRAVITAZIONALE AVVIENE PERCHÉ I CORPI POSSIEDONO UNA MASSA m, L'INTERAZIONE ELETTROSTATICA AVVIENE PERCHÉ I CORPI POSSIEDONO UNA CARICA ELETTRICA q.

IN NATURA ESISTONO 2 TIPI DI MATERIALI:

→ ISOLANTI: SI CARICANO FACILMENTE (es. plastica, vetro, gas, olio...)

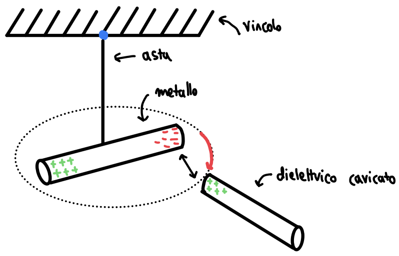
→ CONDUTTORI: È DIFFICILE CARICARLI (es. metalli, acqua)

LA FORZA ELETTRICA PUÒ ESSERE:

→ ATTRATTIVA: TRA CARICHE DELLO STESSO SEGNO

→ REPULSIVA: TRA CARICHE DI SEGNO OPPOSTO

INDUZIONE ELETTROSTATICA



SUPPONIAMO DI APPENDERE UNA BACCHETTA METALLICA AD UN SUPPORTO IN MODO CHE SIA LIBERA DI RUOTARE SU SE STESSA. POI AVVICINIAMO AD ESSA UNA BACCHETTA DI ISOLANTE.

→ SE LA BACCHETTA È NEUTRA, NON AVVIENE ALCUN EFFETTO

→ SE LA BACCHETTA È CARICA, IL METALLO VIENE ATTRATTO DA ESSA INDIPENDENTEMENTE DAL SEGNO DELLA CARICA

QUESTO PERCHÉ LA CARICA NEGATIVA PRESENTE SUL METALLO VIENE ATTRATTA DALLA CARICA POSITIVA SULLA BACCHETTA (O VICEVERSA), MENTRE LE CARICHE POSITIVE SUL METALLO SI ALLONTANANO.

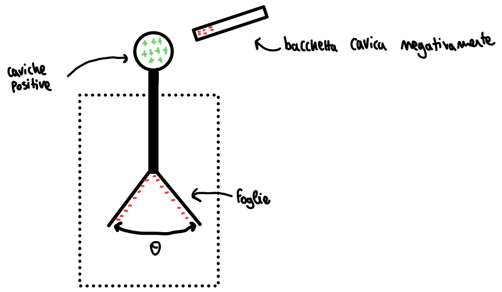
QUESTO EFFETTO DI SEPARAZIONE DELLA CARICA AVVIENE SOLO NEI CONDUTTORI, DOVE LA CARICA È LIBERA DI MUOVERSI NEL MATERIALE. NON AVVIENE PER GLI ISOLANTI.

ELETTROSCOPIO A FOGLIE

È UNO STRUMENTO PER LA MISURA DELLA CARICA ELETTRICA. ESSO CONSISTE IN UN'ASTA METALLICA TERMINANTE CON FOGLIE METALLICHE MOLTO SOTTILI E LEGGERE, IL TUTTO IN UN CONTENITORE DI VETRO ERMETICO.

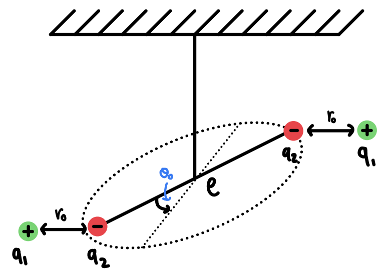
AVVICINANDO IL CORPO CARICATO PER STROFINIO L'INDUZIONE ELETTROSTATICA COMPORTA CHE CARICHE OPPOSTE SI PRESENTANO SUL POMOLO E CARICHE DELLO STESSO SEGNO SI ADDENSANO SULLE FOGLIE, CHE SI ALLONTANANO TRA LORO PER EFFETTO DELLA REPULSIONE.

LA MISURA DELL'ANGOLO θ TRA LE FOGLIE CONSENTE UNA MISURA DELLA CARICA ELETTRICA.



3. LEGGE DI COULOMB

AVENDO A DISPOSIZIONE UNO STRUMENTO DI MISURA DELLA CARICA E' POSSIBILE VALUTARE LA FORZA CHE SI ESERCITA TRA LE CARICHE. LA DETERMINAZIONE PUO' ESSERE FATTA UTILIZZANDO UN PENDOLO DI TORSIONE DETTO BILANCIA DI COULOMB (simile alla bilancia di Cavendish vista in Fisica 1). SI IPOTIZZANO LE CARICHE STATICHE, QUINDI VIENE VALUTATA LA FORZA ELETTROSTATICA.



ALL'EQUILIBRIO IL MOMENTO DELLA FORZA DI INTERAZIONE TRA I CORPI CARICHI E IL MOMENTO DELLA FORZA ELASTICA DI TORSIONE SONO UGUALI

$$\vec{M} = c\,\theta_0$$

DOVE:
- $\vec{M}$ E' IL MOMENTO MECCANICO ESERCITATO DALLA FORZA $\vec{F}$
- c E' LA COSTANTE ELASTICA
- θ_0 E' L'ANGOLO DI ROTAZIONE

L'ANALISI DELL'ESPERIMENTO PERMETTE DI STABILIRE CHE VALE LA LEGGE DI COULOMB:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r_0^2}\,\vec{u}_r}$$

DOVE:
- $\vec{F}$ E' LA FORZA ESERCITATA TRA LE 2 CARICHE, ATTRATTIVA SE ESSE SONO DI SEGNO OPPOSTO E REPULSIVA SE SONO DELLO STESSO SEGNO.
- ε_0 E' LA COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO, VALE $\varepsilon_0 \simeq 8.85\cdot10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$
- q_1 E q_2 SONO LE CARICHE
- r_0 E' LA DISTANZA RADIALE TRA DI ESSE

NB. QUESTA LEGGE VALE SOLO PER CARICHE FISSE E PUNTIFORMI

CAPITOLO 2: CAMPO E POTENZIALE ELETTROSTATICO

1. INTRODUZIONE

LA LEGGE DI COULOMB, CHE DEFINISCE LA FORZA ELETTROSTATICA, E' FORMALMENTE IDENTICA ALLA FORZA GRAVITAZIONALE CON LA SOSTITUZIONE DELLA MASSA DEI CORPI CON LA LORO CARICA. E' QUINDI POSSIBILE PROCEDERE ALLA DEFINIZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO, IN MODO DEL TUTTO ANALOGO ALLA DEFINIZIONE DEL CAMPO GRAVITAZIONALE, COME LUOGO DELLO SPAZIO IN CUI VIENE ESERCITATA LA FORZA ELETTROSTATICA E ASSOCIARVI UN POTENZIALE ELETTROSTATICO. LE PROPRIETA' GENERALI DELLA FORZA GRAVITAZIONALE E DELLA FORZA ELETTROSTATICA SONO OVVIAMENTE IDENTICHE

2. CAMPO ELETTROSTATICO

CONSIDERIAMO UN CORPO PUNTIFORME DI MASSA m, CARICATO CON LA QUANTITA' DI CARICA q NELLO SPAZIO VUOTO (ovvero dove le dimensioni dei corpi sono trascurabili rispetto alle loro distanze). PORTIAMO DALL'INFINITO UNA CARICA DI PROVA q' E MISURIAMO IN OGNI PUNTO P DELLO SPAZIO, INTENSITA' E DIREZIONE DELLA FORZA CHE SI ESERCITA TRA LE CARICHE q E q', COSTRUENDO UNA MAPPA DEL VETTORE FORZA ELETTROSTATICA

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q'}{r^2}\hat{u}_r$$

DOVE $\hat{u}_r$ E' IL VERSORE DI UN SISTEMA DI COORDINATE POLARI CON ORIGINE NEL PUNTO O DELLO SPAZIO DOVE E' POSTO IL CORPO m.

IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ DOVUTO ALLA CARICA q E' DEFINITO COME FORZA SU CARICA UNITARIA:

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q' \to 0}\frac{\vec{F}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{u}_r}$$

ESSO E' INDIPENDENTE DALLA CARICA DI PROVA q', CHE NE RIVELA SOLAMENTE LA PRESENZA.

UNA QUALSIASI CARICA DI PROVA q' SUBISCE LA FORZA ELETTROSTATICA $\boxed{\vec{F} = q' \cdot \vec{E}}$

LA DEFINIZIONE DI CAMPO ELETTROSTATICO IMPLICA CHE:

- $q > 0 \longrightarrow \vec{E}$ E' CONCORDE A $\hat{u}_r$
- $q < 0 \longrightarrow \vec{E}$ E' OPPOSTO A $\hat{u}_r$

VI SONO 4 POSSIBILI SITUAZIONI:

$$\begin{cases} q > 0 & \vec{E} \text{ CONCORDE A } \hat{u}_r \\ q' > 0 & \vec{F} \text{ CONCORDE A } \hat{u}_r \end{cases} \Longrightarrow \vec{E} \text{ CONCORDE A } \vec{F}$$

$$\begin{cases} q > 0 & \vec{E} \text{ CONCORDE A } \hat{u}_r \\ q' < 0 & \vec{F} \text{ OPPOSTO A } \hat{u}_r \end{cases} \Longrightarrow \vec{E} \text{ OPPOSTO A } \vec{F}$$

$$\begin{cases} q < 0 & \vec{E} \text{ OPPOSTO A } \hat{u}_r \\ q' > 0 & \vec{F} \text{ OPPOSTO A } \hat{u}_r \end{cases} \Longrightarrow \vec{E} \text{ CONCORDE A } \vec{F}$$

$$\begin{cases} q < 0 & \vec{E} \text{ OPPOSTO A } \hat{u}_r \\ q' < 0 & \vec{F} \text{ CONCORDE A } \hat{u}_r \end{cases} \Longrightarrow \vec{E} \text{ OPPOSTO A } \vec{F}$$

3. QUANTIZZAZIONE DELLA CARICA

POICHÉ LE CARICHE SONO SPOSTAMENTI DI PROTONI O ELETTRONI, QUALSIASI CARICA MISURATA È MULTIPLO DELLA CARICA ELEMENTARE e

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$$

CIOÈ 1 COULOMB È LA CARICA DI $N = \frac{1}{e}$ CARICHE ELEMENTARI.

4. PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

NEL CASO IN CUI PIÙ CARICHE $q_1, q_2, \dots q_i$ SIANO PRESENTI NELLO SPAZIO, CIASCUNA DI ESSE È SORGENTE DI UN CAMPO ELETTROSTATICO:

$$E_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\hat{u}_{\vec{r}_i}$$

PER CUI CIASCUNA DI ESSE ESERCITA SULLA CARICA DI PROVA q' NEL PUNTO P LA FORZA ELETTROSTATICA:

$$\vec{F}_i = q'\vec{E}_i$$

E LA FORZA NETTA SUBITA DALLA CARICA DI PROVA È DATA DALLA SOMMA VETTORIALE DI QUESTE FORZE:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q' \cdot \vec{E}_i = q' \sum_i \vec{E}_i = q' \cdot \vec{E}$$

QUINDI IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ GENERATO NEL PUNTO P DAL SISTEMA DI CARICHE È UNICO E DATO DALLA SOMMA VETTORIALE DEI CAMPI ELETTROSTATICI GENERATI DA CIASCUNA SORGENTE DI CAMPO COME SE FOSSE INDIPENDENTE DALLA PRESENZA DELLE ALTRE CARICHE NELLO SPAZIO.

LA RELAZIONE CHE NE DERIVA:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

È NOTA COME PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

5. CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA

GENERALMENTE NON SI HA UNA SINGOLA CARICA PUNTIFORME, MA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA DI CARICA SU UN CORPO ESTESO C. QUINDI PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE È DATO DALLA SOMMA DEI CAMPI ELETTRICI DI TUTTE LE SUE CARICHE ELEMENTARI (CIOÈ TRAMITE L'OPERAZIONE DI INTEGRALE).

LE DISTRIBUZIONI DI CARICHE POSSONO ESSERE LINEARI, PIANE O VOLUMETRICHE, E LA CARICA TOTALE q SU UN CORPO PUÒ ESSERE CALCOLATA COME:

$$\boxed{q = \int_C dq}$$

DOVE dq È LA CARICA PRESENTE IN UN ELEMENTO INFINITESIMO DEL CORPO, OVVERO:

$$\begin{cases} dq = \lambda(x)\, d\ell & \text{PER DISTRIBUZIONI LINEARI DI CARICA} \\ dq = \sigma(x,y)\, dA & \text{PER DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI DI CARICA} \\ dq = \rho(x,y,z)\, dV & \text{PER DISTRIBUZIONI VOLUMETRICHE DI CARICA} \end{cases}$$

CIASCUNO DEGLI ELEMENTI INFINITESIMI È ASSIMILABILE A UNA CARICA PUNTIFORME dq, FISSATA NEL PUNTO $O(x,y,z)$, ED È SORGENTE DEL CAMPO ELETTROSTATICO:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{u}_r$$

DOVE r È LA DISTANZA DEL GENERICO PUNTO P NELLO SPAZIO DALLA POSIZIONE O IN CUI È STATA POSTA dq.

APPLICANDO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, IL CAMPO ELETTROSTATICO NEL PUNTO P DOVUTO A TUTTA LA DISTRIBUZIONE DI CARICA È QUINDI LA SOMMA SU TUTTI GLI ELEMENTI INFINITESIMI DI CARICA, OVVERO L'INTEGRALE:

$$E_P = \int_C dE = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\,dq\cdot\hat{u}_r$$

NEL CASO DI UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA VOLUMETRICA CHE OCCUPA IL VOLUME V, UTILIZZANDO LA DENSITÀ DI CARICA CHE DEVE ESSERE VALUTATA IN TUTTI I PUNTI O DI COORDINATE (x,y,z) DEL CORPO, IL CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}_P$ NEL PUNTO P DI COORDINATE (x',y',z') DIVENTA

$$\vec{E}_P = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(0)}{r^2}\vec{u}_r = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x,y,z)}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u}_r$$

CIOÈ È NECESSARIO IL CALCOLO DI TRE INTEGRALI TRIPLI, UNO PER CIASCUNA COMPONENTE E_x, E_y, E_z.
SE LA DISTRIBUZIONE NON È UNIFORME E/O IL CORPO NON È SIMMETRICO, MI FERMO QUI E USO UN CALCOLATORE.
ALTRIMENTI POSSO CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA DISTRIBUZIONI PARTICOLARI (es. SFERA, CILINDRO, FILO...).

6. POTENZIALE ELETTROSTATICO DI CARICHE PUNTIFORMI

LA FORZA ELETTROSTATICA COULOMBIANA CHE SI ESERCITA FRA CARICHE PUNTIFORMI È UNA FORZA CENTRALE, PER CUI È CONSERVATIVA E SI PUÒ QUINDI DEFINIRE UNA ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA U_e, FUNZIONE DELLA POSIZIONE, ASSOCIATA ALLA FORZA ELETTROSTATICA E DEFINITA DALLA RELAZIONE:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U_e$$

POICHÉ ESISTE SOLO LA COMPONENTE RADIALE DELLA FORZA LA RELAZIONE È SEMPLICEMENTE:

$$F_r = -\frac{dU_e}{dr} \implies dU_e = -F_r\,dr$$

OVVERO, PONENDO $U_e(\infty) = 0$:

$$U_e = -\int_\infty^r F_r\,dr = -\int_\infty^r \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DALLA CARICA PUNTIFORME q E' DATO DA

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = -\nabla\left(\frac{U_e}{q'}\right)$$

DA CUI, DEFINENDO IL POTENZIALE ELETTROSTATICO DELLA CARICA PUNTIFORME:

$$\boxed{V = \frac{U_e}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

SI TROVA LA RELAZIONE TRA CAMPO E POTENZIALE ELETTROSTATICO:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

DATA LA DEFINIZIONE DI LAVORO E LA SUA RELAZIONE CON L'ENERGIA POTENZIALE IN UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVE, DA QUANTO FINORA RICAVATO IL LAVORO DELLA FORZA ELETTROSTATICA RISULTA, PER UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO DELLA CARICA q':

$$\begin{cases} dW = -dU_e = -q'dV \\ dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = q'\cdot\vec{E}\cdot d\vec{r} \end{cases}$$

PER CUI LA DIFFERENZA DI POTENZIALE ELETTROSTATICO TRA 2 PUNTI P E P' E' DATA DA:

$$dV = -E\cdot dr$$

SE SONO ADIACENTI, OPPURE NEL CASO I 2 PUNTI SIANO A DISTANZA FINITA, DA

$$V(P') - V(P) = -\int_P^{P'}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

IL POTENZIALE ELETTROSTATICO SI MISURA IN VOLT $[V]$, CON $[V] = \frac{[J]}{[C]}$

7. POTENZIALE ELETTROSTATICO DI DISTRIBUZIONI DI CARICA

CONSIDERANDO UN SISTEMA DI CARICHE PUNTIFORMI, CIASCUNA DI ESSE ESERCITA UNA FORZA CONSERVATIVA, PER LA QUALE E' QUINDI POSSIBILE DEFINIRE UN CAMPO ELETTROSTATICO E UN POTENZIALE ELETTROSTATICO NEL PUNTO P_1 CHE PER L'i-ESIMA CARICA SONO:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_{r_i} \qquad \text{E} \qquad V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}$$

LEGATI FRA LORO DALLA RELAZIONE

$$\vec{E}_i = -\vec{\nabla}V_i$$

IL CAMPO NEL PUNTO P E' UNICO ED E' DATO DALLA SOVRAPPOSIZIONE DEI CAMPI COULOMBIANI:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i(-\vec{\nabla}V_i) = -\vec{\nabla}\left(\sum_i V_i\right) = -\vec{\nabla}V$$

E QUINDI IL POTENZIALE ELETTROSTATICO IN P SI OTTIENE COME SOMMA SCALARE DEI POTENZIALI ELETTROSTATICI ASSOCIATI A CIASCUNA CARICA, SORGENTE DEL CAMPO, IN P

$$V = \sum_i V_i = \sum_i \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i} \right)$$

L'ESTENSIONE ALLE DISTRIBUZIONI DI CARICA CONTINUE E STATICHE E' IMMEDIATA. INFATTI, COME PER IL CAMPO ELETTROSTATICO, SI PUO' CONSIDERARE UN ELEMENTO INFINITESIMO DEL CORPO SUL QUALE E' PRESENTE LA CARICA dq E AL QUALE E' ASSOCIATO IL POTENZIALE NEL PUNTO P:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r}$$

PER CUI, PER IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI, IL POTENZIALE NEL PUNTO P DOVUTO A TUTTA LA DISTRIBUZIONE DI CARICA:

$$V_P = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r}$$

NEL CASO DI DISTRIBUZIONI VOLUMETRICHE:

$$V_P = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r} = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(x,y,z)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \, dx\,dy\,dz$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO PUO' ESSERE DETERMINATO SUCCESSIVAMENTE DERIVANDO LA FUNZIONE POTENZIALE $V(x,y,z)$ USANDO LA RELAZIONE CAMPO - POTENZIALE, OSSIA:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \longrightarrow E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

8. ENERGIA POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE

LA RELAZIONE CHE DEFINISCE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA PER CARICHE PUNTIFORMI:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r}$$

IMPLICA CHE AD UNA COPPIA DI CARICHE q E q' POSTE A DISTANZA r VIENE ASSOCIATA UN'ENERGIA POTENZIALE INTRINSECA, DOVUTA ALLA FORZA DI INTERAZIONE TRA ESSE. E' EVIDENTE CHE SE NELLO SPAZIO ESISTE UN SISTEMA DI CARICHE, TALE ENERGIA POTENZIALE E' ASSOCIATA A CIASCUNA COPPIA DI CARICHE E QUINDI IL SISTEMA POSSIEDE UN'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA INTRINSECA OTTENUTA SOMMANDO SU TUTTE LE COPPIE:

$$U_e = \sum_{i<j} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right)$$

E' ANCHE POSSIBILE CONSIDERARE LA SOMMATORIA ESTESA A TUTTE LE COPPIE, PURCHE' SI PONGA $i \neq j$. TUTTAVIA IN QUESTO MODO L'ENERGIA VIENE COMPUTATA 2 VOLTE PER OGNI COPPIA, QUINDI SI DEVE INTRODURRE UN FATTORE $\frac{1}{2}$ CHE NE TENGA CONTO.

$$U_e = \sum_{i \neq j} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right)$$

IN QUESTA FORMA L'ENERGIA PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{i\neq j}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}\right) = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$$

PERCHÉ IL TERMINE

$$V_i = \sum_{j\neq i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{ij}}$$

È IL POTENZIALE ELETTROSTATICO DEL SISTEMA DI CARICHE NEL PUNTO OCCUPATO DA q_i, ESSENDO LA SOVRAPPOSIZIONE DEL POTENZIALE DOVUTO A TUTTE LE CARICHE DIVERSE DA ESSA. SE LA DISTRIBUZIONE DI CARICA È CONTINUA, L'ENERGIA ELETTROSTATICA DEL SISTEMA È:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V V\,dq = \frac{1}{2}\int_V V(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

ESISTE UNA DIFFERENZA SOSTANZIALE FRA QUESTA ESPRESSIONE E QUELLA PRECEDENTEMENTE RICAVATA PER UN SISTEMA DI CARICHE. L'ESPRESSIONE:

$$U_e = \sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}\right)$$

È L'ENERGIA DI INTERAZIONE FRA LE CARICHE, CORRISPONDENTE AL LAVORO FATTO PER PORTARE DA DISTANZA INFINITA NEL CAMPO ELETTROSTATICO DELLA CARICA q_i LE ALTRE CARICHE, ESCLUDENDO L'ENERGIA INTRINSECA DELLA CARICA q_i, MENTRE L'ESPRESSIONE

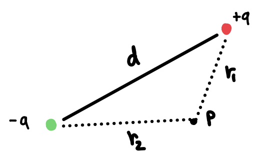
$$U_e = \frac{1}{2}\int_V V(x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

È L'ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA DI CARICHE, PERCHÉ INTEGRANDO IL POTENZIALE DOVUTO A TUTTA LA DISTRIBUZIONE DI CARICA SI INCLUDE SIA L'ENERGIA DI INTERAZIONE CHE L'ENERGIA INTRINSECA, NECESSARIA A COSTRUIRE LE SORGENTI DI CAMPO.

L'ORIGINE DELLA DIFFERENZA RISIEDE NEL FATTO CHE NEL CASO CONTINUO LE SORGENTI DI CAMPO SONO FORMATE DA CARICHE INFINITESIME DISTRIBUITE SU VOLUMI ESTESI, MENTRE NEL CASO DISCRETO LE SORGENTI SONO PUNTIFORMI: L'ENERGIA NECESSARIA A COSTRUIRE UNA SORGENTE DI CAMPO PUNTIFORME È CHIARAMENTE INFINITA, DOVENDO COSTRINGERE MOLTE CARICHE INFINITESIME A DISTANZA NULLA

9. DIPOLO ELETTRICO

UN DIPOLO ELETTRICO È DEFINITO COME UN SISTEMA COSTITUITO DA 2 CARICHE PUNTIFORMI EGUALI E OPPOSTE q E $-q$, SEPARATE DALLA DISTANZA FISSA d.



a) POTENZIALE ELETTROSTATICO

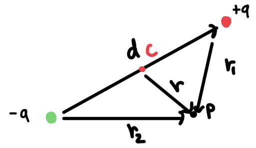
IL POTENZIALE ELETTROSTATICO IN UN PUNTO P DELLO SPAZIO È DATO DALLA SOMMA ALGEBRICA DEI POTENZIALI ELETTROSTATICI, RISPETTO A INFINITO DOVUTI ALLE 2 CARICHE SEPARATAMENTE

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1 r_2 (r_1+r_2)}$$

MOLT. E DIVIDO PER (r_2+r_1)

INTRODUCENDO IL VETTORE $\vec{d}$, DI MODULO PARI ALLA DISTANZA TRA LE CARICHE E ORIENTATO DALLA CARICA NEGATIVA ALLA CARICA POSITIVA, SI OSSERVA CHE CONSIDERANDO IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ DI P RISPETTO AL CENTRO C DEL SEGMENTO d, SUSSISTONO LE RELAZIONI:

$$\begin{cases} \vec{r} = \dfrac{\vec{d}}{2} + \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 = \dfrac{\vec{d}}{2} + \vec{r} \end{cases}$$



PERTANTO SI PUÒ SCRIVERE:

$$r_2^2 - r_1^2 = \vec{r}_2\cdot\vec{r}_2 - \vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 = \left(\frac{\vec{d}}{2}+\vec{r}\right)\cdot\left(\frac{\vec{d}}{2}+\vec{r}\right) - \left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right)\left(\vec{r}-\frac{\vec{d}}{2}\right) = \vec{r}\cdot\vec{r} + \vec{d}\cdot\vec{r} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{d}}{4} - \vec{r}\cdot\vec{r} + \vec{d}\cdot\vec{r} - \frac{\vec{d}\cdot\vec{d}}{4} = 2\,\vec{d}\cdot\vec{r}$$

E IL POTENZIALE ELETTROSTATICO IN UN PUNTO P QUALSIASI DELLO SPAZIO È DATO DA:

$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r_1 r_2 (r_1+r_2)}$$

INTRODUCENDO IL VETTORE MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO, ORIENTATO DA $-q$ A $+q$, $\vec{p} = q\cdot\vec{d}$

E SUPPONENDO DI ESSERE SUFFICIENTEMENTE LONTANI IN MODO CHE VALGA $r_2 \sim r_1 \sim r$, IL POTENZIALE ELETTROSTATICO DEL DIPOLO DIVENTA:

angolo tra $\vec{d}$ e $\vec{r}$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cdot r\cdot\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,d\,r\cos\theta}{r^3}$$

b) CAMPO ELETTROSTATICO

IL CAMPO ELETTROSTATICO PUÒ ESSERE DETERMINATO USANDO LA RELAZIONE CAMPO-POTENZIALE ELETTROSTATICO $E = -\vec{\nabla}$ CHE IN COORDINATE POLARI CORRISPONDE ALLE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

[RICORDA: IN COORDINATE POLARI, IL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE $g(r,\theta)$ VALE $\nabla g(r,\theta) = \frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{u}_\theta$]

NEL CASO DI UN DIPOLO ELETTRICO, PER $r \gg d$, LE COMPONENTI DEL CAMPO ELETTROSTATICO SONO:

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = -\dfrac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\dfrac{2}{r^3}\right) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2P\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = -\dfrac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(-\sin\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{P\sin\theta}{r^3} \end{cases}$$

E IL SUO MODULO È

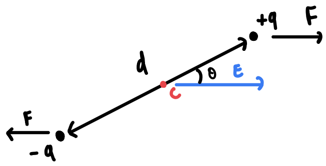
$$4P^2\cos^2\theta + P^2\sin^2\theta = P^2(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) = P^2(3\cos^2\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{4P^2\cos^2\theta}{r^6} + \frac{P^2\sin^2\theta}{r^6}} = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

LA CUI INTENSITÀ DECRESCE RAPIDAMENTE, PRATICAMENTE $\sim \frac{1}{r^3}$

10. ENERGIA POTENZIALE DEL DIPOLO ELETTRICO IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO

CONSIDERIAMO UNA ZONA DELLO SPAZIO IN CUI È PRESENTE UN CAMPO ELETTROSTATICO UNIFORME $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$ IN CUI È IMMERSO UN DIPOLO ELETTRICO DI MOMENTO DI DIPOLO $\vec{p} = q\vec{d}$ CHE FORMA CON IL CAMPO ELETTROSTATICO L'ANGOLO θ, PER CUI $\vec{p} = qd\cos\theta\,\vec{u}_x + qd\sin\theta\,\vec{u}_y$.



LE CARICHE CHE COSTITUISCONO IL DIPOLO SUBISCONO LE FORZE $\pm\vec{F} = \pm q\vec{E}$, PER CUI IL SISTEMA SUBISCE GLOBALMENTE L'EFFETTO DI UNA COPPIA DI FORZE EGUALI E OPPOSTE, CHE ORIGINANO IL MOMENTO MECCANICO RISPETTO AL CENTRO DEL DIPOLO:

$$\vec{M}_c = \frac{\vec{d}}{2}\times\vec{F} + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right)\times\left(-\vec{F}\right) = \frac{\vec{d}}{2}\times\vec{F} - \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right)\times\vec{F} = \left[\frac{\vec{d}}{2}-\left(-\frac{\vec{d}}{2}\right)\right]\times\vec{F} = \vec{d}\times\vec{F} = \vec{d}\times\left(q\vec{E}\right) = q\vec{d}\times\vec{E} = \vec{p}\times\vec{E} = -pE\sin\theta\,\vec{u}_z$$

BILINEARITÀ DEL PRODOTTO VETTORIALE: $\lambda\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) = \lambda\vec{v}\times\vec{w} = \vec{v}\times\lambda\vec{w}$

CHE PONE IN ROTAZIONE IL DIPOLO.

IL LAVORO FATTO DAL CAMPO ELETTROSTATICO ESTERNO PER UNA ROTAZIONE θ_1 ALL'ANGOLO θ_2 FRA CAMPO ELETTROSTATICO E MOMENTO DI DIPOLO È:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_z\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -pE\sin\theta\,d\theta = pE\cos\theta_2 - pE\cos\theta_1$$

E DIPENDE SOLO DALLA COORDINATA POLARE θ.

SI PUÒ QUINDI INTRODURRE UN'ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA ALLA POSIZIONE RELATIVA FRA CAMPO ELETTROSTATICO ESTERNO E MOMENTO DI DIPOLO, CHE SIA DIPENDENTE SOLO DA θ. L'ENERGIA POTENZIALE VIENE DEFINITA DALLA RELAZIONE $dW = -dU$, PER CUI CALCOLANDO IL LAVORO INFINITESIMO SI HA:

$$dW = -pE\sin\theta\,d\theta = -d\left(-pE\cos\theta\right) = -dU_e$$

E SCEGLIENDO $U_e = 0$ PER $\theta = \frac{\pi}{2}$, SI OTTIENE CHE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA DI UN DIPOLO POSTO IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO $\vec{E}$ È

$$U_e = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E} \qquad (\theta \text{ È L'ANGOLO TRA } \vec{p} \text{ E } \vec{E})$$

U_e È: $\longrightarrow$ MINIMA PER $\theta = 0$

$\longrightarrow$ MASSIMA PER $\theta = \pi$

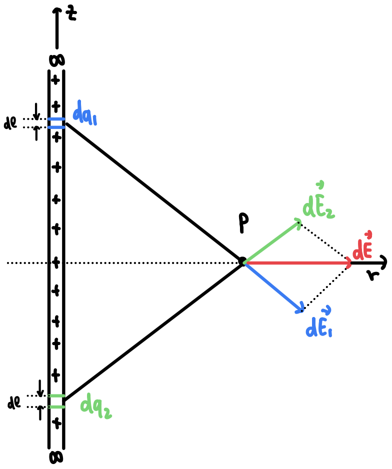
11. CAMPO E POTENZIALE ELETTROSTATICO

CALCOLIAMO IL CAMPO ELETTROSTATICO DI ALCUNE DISTRIBUZIONI DI CARICA:

- FILO RETTILINEO INDEFINITO
- ANELLO (LUNGO L'ASSE NORMALE)
- DISCO (LUNGO L'ASSE NORMALE)

1) FILO RETTILINEO INDEFINITO CARICO UNIFORMEMENTE

SUPPONIAMO UN FILO RETTILINEO UNIDIMENSIONALE SU CUI È DEPOSITATA UNA DENSITÀ LINEARE COSTANTE DI CARICA.
IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DAL FILO IN UN PUNTO P È DOVUTO ALLA SOMMA DEI CONTRIBUTI $d\vec{E}$ DOVUTI AGLI ELEMENTI INFINITESIMI dq LUNGO IL FILO, OVVERO



$dq = \lambda dz$ si è scelto l'asse z in direzione del filo

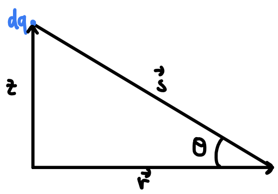
$$\vec{E}_P = \int_C d\vec{E} = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \int_{Filo} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dz}{r^2}\vec{u}$$

CONSIDERIAMO UN SDR IN COORDINATE CILINDRICHE CON L'ASSE z PARALLELO AL FILO E ORIGINE NEL PUNTO DEL PIEDE DELLA PERPENDICOLARE AL FILO PASSANTE PER P.

IL FATTO CHE IL FILO SIA INDEFINITO COMPORTA CHE PER OGNI ELEMENTO DI CARICA $dq_1 = \lambda dz$ NELLA POSIZIONE $+z_1$ ESISTA SEMPRE UN ELEMENTO $dq_2 = dq_1$ IN POSIZIONE SIMMETRICA $-z$.

CIASCUNA COPPIA DI ELEMENTI DI CARICA GENERA IL CAMPO ELETTROSTATICO: $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = dE\,\vec{u}_r$
PERCHÉ LE COMPONENTI $d\vec{E}_z$ DEL CAMPO ELETTROSTATICO SONO UGUALI E OPPOSTE.
QUINDI L'UNICO CONTRIBUTO DA CONSIDERARE PER OGNI dq È LA COMPONENTE $d\vec{E}_r$, E IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DAL FILO È:

$$\vec{E} = \int_{Filo} dE_r\,\vec{u}_r = \int_{Filo} dE\cos\theta\,\vec{u}_r$$



VALGONO LE RELAZIONI:

III $\begin{cases} z = s\sin\theta \\ r = s\cos\theta \\ z = r\tan\theta \end{cases}$

DIFFERENZIANDO III: $dz = r\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ $\quad\left[\text{RICORDA: } \frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\right]$

SOSTITUENDO L'ESPRESSIONE DI dz E $s = \frac{r}{\cos\theta}$ SI OTTIENE, INTEGRANDO SUL FILO:

$$\vec{E} = \int_{Filo}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dz}{s^2}\cos\theta\,\vec{u}_r = \int_{Filo}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos^2\theta}{r^2}\right)\left(r\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos\theta\,\vec{u}_r = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\,\vec{u}_r = \left[\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdot 2$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}$$

PER TROVARE L'ESPRESSIONE DEL POTENZIALE ELETTROSTATICO BASTA USARE LA RELAZIONE $V = -\frac{dE}{dr}$

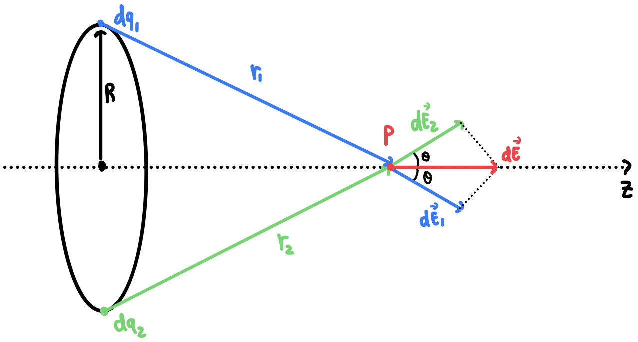
$$\rightarrow dV = -E\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$\rightarrow \boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + K}$$

DOVE K È UNA COSTANTE ARBITRARIA

2) ANELLO CARICO UNIFORMEMENTE (LUNGO L'ASSE NORMALE)

CONSIDERIAMO UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA q DI DENSITÀ LINEARE UNIFORME λ SU UN ANELLO DI RAGGIO R.
L'ASSE z NORMALE ALL'ANELLO E PASSANTE PER IL SUO CENTRO O È ASSE DI SIMMETRIA PER L'ANELLO.



PER OGNI ELEMENTO DI FILO ds SU CUI È DEPOSITATA LA CARICA $dq_1 = \lambda\, ds_1$ ESISTE SIMMETRICAMENTE RISPETTO AL CENTRO UN ELEMENTO DI FILO IDENTICO ds_2 SU CUI È DEPOSITATA LA CARICA $dq_2 = \lambda\, ds_2 = dq_1$.

POSTI $ds_1 = ds_2 = ds$ E $dq_1 = dq_2 = dq$, IL MODULO DEI CAMPI ELETTROSTATICI $d\vec{E}_1$ E $d\vec{E}_2$ IN UN PUNTO P SULL'ASSE z È UGUALE, OSSIA:

$$dE_1 = dE_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}$$

MENTRE LA LORO DIREZIONE FORMA L'ANGOLO $\pm\theta$ CON L'ASSE z, PER CUI LA LORO SOMMA VETTORIALE È:

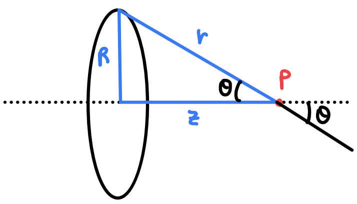
$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}\right)\cos\theta\, \vec{u}_z$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO È QUINDI DOVUTO ALLA SOMMA SU TUTTE LE COPPIE SIMMETRICHE DI ELEMENTI DI CARICA PRESENTI SUL FILO, OSSIA DATO DA:

$$\vec{E} = \int_{Filo} dE_z \vec{u}_z = \int_{Filo} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2}\cos\theta\, \vec{u}_z$$

CORRISPONDENTE ALLA SOMMA DI TUTTE LE COMPONENTI z DEL CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA CIASCUN ELEMENTO DI CARICA.
OSSERVANDO IL TRIANGOLO R, r, z DEFINITO DALLA POSIZIONE DEL PUNTO P SULL'ASSE DI SIMMETRIA SI RICAVA

$$z = r\cos\theta$$



PER CUI, ESSENDO r E z COSTANTI PER OGNI ELEMENTO DI CARICA, SOSTITUENDO $\cos\theta = \frac{z}{r}$ SI OTTIENE:

$$\vec{E} = \int_{Filo} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3} ds\, \vec{u}_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}\underbrace{\int_{Filo} ds}_{\text{È LA MISURA DELLA CIRCONFERENZA} = 2\pi R}\vec{u}_z$$

PER CUI: $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}(2\pi R)\,\vec{u}_z$

LA CARICA DISTRIBUITA SUL FILO È: $q = \int_{Filo} dq = \int_{Filo} \lambda\, ds = \lambda \int_{Filo} ds = \lambda\, 2\pi R$

E VALE LA RELAZIONE $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, PER CUI INFINE IL CAMPO ELETTROSTATICO SULL'ASSE z DELL'ANELLO È:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z}$$

OSS. PER $z \gg R$ $\vec{E}$ DIVENTA UN CAMPO ELETTROSTATICO EQUIVALENTE A QUELLO DI UNA CARICA PUNTIFORME:

$$\vec{E} \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\vec{u}_z$$

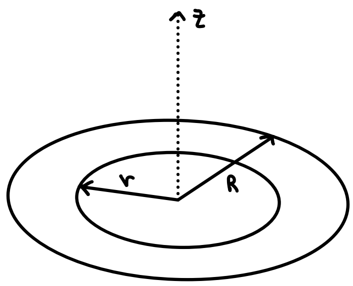
IL POTENZIALE ELETTROSTATICO SI PUÒ OTTENERE PER INTEGRAZIONE: $E = -\frac{dV}{dz} \longrightarrow dV = -E\,dz$

OSSIA

$$\boxed{V = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}dz = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}} + K}$$

3) DISCO CARICO UNIFORMEMENTE (LUNGO L'ASSE NORMALE)

CONSIDERIAMO UNA DISTRIBUZIONE DI CARICA q DI DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA UNIFORME σ SU UN DISCO, OVVERO SU UN CILINDRO DI ALTEZZA TRASCURABILE E AREA DI BASE DI RAGGIO R.



SI PUÒ CONSIDERARE IL DISCO DIVISO IN ANELLI CONCENTRICI DI RAGGIO r E SPESSORE INFINITESIMO dr E DETERMINARE IL CAMPO ELETTROSTATICO COME SOVRAPPOSIZIONE DEI CAMPI ELETTROSTATICI DOVUTI A CIASCUN ANELLO.

LA CARICA DEPOSITATA SU UN ANELLO È $dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r\,dr$, PER CUI IL CAMPO GENERATO DA OGNI ANELLO È

$$d\vec{E} = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}dq\,\vec{u}_z = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\sigma 2\pi r\,dr\,\vec{u}_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr\,\vec{u}_z$$

E IL CAMPO GENERATO DA TUTTI GLI ANELLI È LA SOMMA DI TUTTI I CAMPI ELETTROSTATICI

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr\,\vec{u}_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^R\vec{u}_z = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{u}_z$$

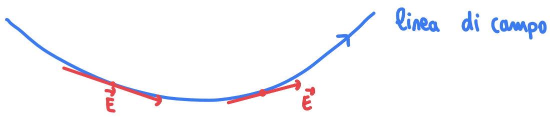
PER $R \to +\infty$, $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z}$ CAMPO ELETTRICO PER UN PIANO INDEFINITO

12. RAPPRESENTAZIONI DEL CAMPO ELETTRICO

UN CAMPO È RAPPRESENTABILE GRAFICAMENTE TRACCIANDO LE LINEE DI CAMPO OPPURE, NEL CASO SIA CONSERVATIVO, LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI.

a) LINEE DI CAMPO

LE LINEE DI CAMPO SONO CURVE ORIENTATE LA CUI TANGENTE ORIENTATA RAPPRESENTA DIREZIONE E VERSO DEL CAMPO IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO.

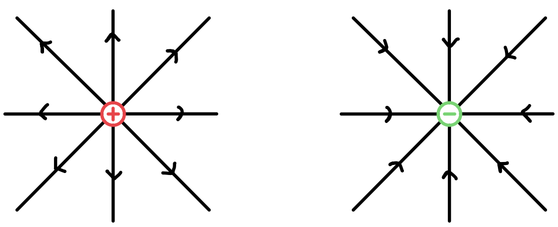


PROPRIETÀ:

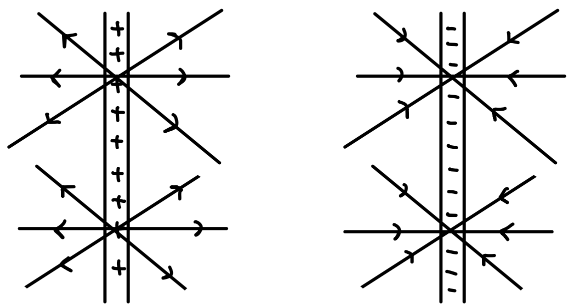
- SONO DIRETTE COME IL VERSORE $\vec{u}_r$, USCENTI DALLE CARICHE POSITIVE E ENTRANTI IN QUELLE NEGATIVE
- CONGIUNGONO FRA DI LORO CARICHE POSITIVE E NEGATIVE O TERMINANO A INFINITO
- NON SI POSSONO INTERSECARE PERCHÉ IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO È DEFINITO UNIVOCAMENTE
- LA LORO DENSITÀ IN UNA REGIONE DELLO SPAZIO È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALL'INTENSITÀ DEL CAMPO IN QUELLA REGIONE

LE LINEE SONO DISEGNABILI FACILMENTE SE È NOTA LA FORMA ANALITICA DEL CAMPO

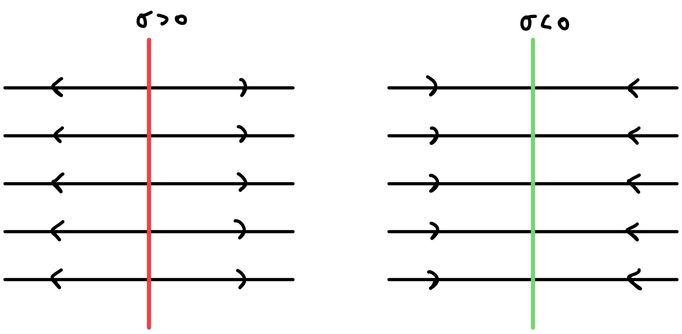
- CARICHE PUNTIFORMI: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$



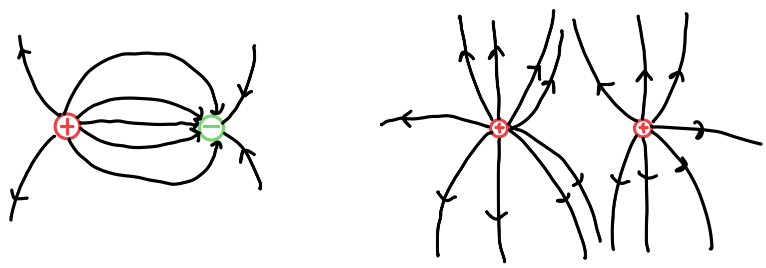
- FILO RETTILINEO



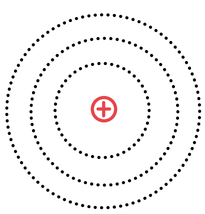
- PIANO INDEFINITO



- DIPOLO



b) SUPERFICI EQUIPOTENZIALI



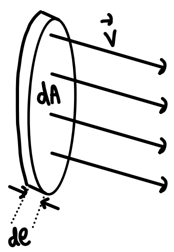
3. LA LEGGE DI GAUSS

1. INTRODUZIONE

LA LEGGE DI COULOMB E' STATA RICAVATA PER CAMPI ELETTROSTATICI NELL'APPROSSIMAZIONE DI CARICA PUNTIFORME, E HA PERMESSO DI DETERMINARE I CAMPI ELETTRICI PER DISTRIBUZIONI DI CARICA STATICHE, MA PERDE DI VALIDITÁ SE SI DEVONO CONSIDERARE CAMPI ELETTRICI VARIABILI NEL TEMPO. NON E' QUINDI UNA LEGGE FONDAMENTALE DELL'ELETTROMAGNETISMO.
E' ALLORA NECESSARIO DETERMINARE UNA NUOVA LEGGE CHE INCLUDA LA LEGGE DI COULOMB COME LIMITE PER CARICHE PUNTIFORMI, MA LA CUI VALIDITÁ SIA GENERALE.

2. IL CONCETTO DI "FLUSSO"

PER DETERMINARE QUESTA LEGGE DOBBIAMO INTRODURRE IL CONCETTO MATEMATICO DI FLUSSO. ESSO DERIVA DALL'IDRODINAMICA: E' LA QUANTITÁ DI MATERIA (VOLUME) CHE PASSA ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE PER UNITÁ DI TEMPO.

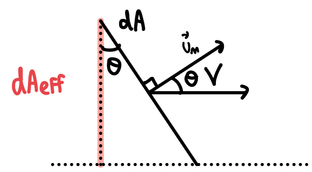


CONSIDERIAMO UNA SEZIONE TRASVERSALE INFINITESIMA dA DI UN TUBO DI FLUSSO ATTRAVERSO CUI PASSA UN FLUIDO CHE SI MUOVE CON VELOCITÁ $\vec{v}$. ATTRAVERSO TALE SUPERFICIE PASSA NEL TEMPO dt IL VOLUME DI FLUIDO $dV = dA\,d\ell = dA\,v\,dt$, PER CUI IL FLUSSO INFINITESIMO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE E':

$$d\Phi = \frac{dV}{dt} = v\,dA$$

SE LA SEZIONE NON E' TRASVERSALE MA INCLINATA DI UN ANGOLO θ RISPETTO ALLA DIREZIONE DELLA VELOCITÁ, LA SUPERFICIE UTILE E' ANCORA QUELLA TRASVERSALE CHE DIMINUISCE FINO AD ANNULLARSI PER $\theta = \frac{\pi}{2}$ CON LA LEGGE:

$$dA_{eff} = dA\cos\theta$$



PER CUI IL FLUSSO ATTRAVERSO dA E' IN GENERALE

$$d\Phi = V\,dA\cos\theta$$

CONSIDERIAMO IL VERSORE $\vec{u}_n$ NORMALE ALLA SUPERFICIE dA, FISSANDO IL SUO VERSO ARBITRARIAMENTE RISPETTO AD ESSA. L'ANGOLO FORMATO DA $\vec{u}_n$ E $\vec{v}$ E' PER COSTRUZIONE θ (O $\theta - \pi$ SE SI E' SCELTA L'ORIENTAZIONE NEL VERSO OPPOSTO) PER CUI, A PARTE IL SEGNO:

$$\vec{v}\cdot\vec{u}_n = v\cos\theta \Longrightarrow d\Phi = v\,dA\cos\theta = \vec{v}\cdot dA\,\vec{u}_n$$

IL VETTORE $d\vec{A} = dA\,\vec{u}_n$ E' DETTO SUPERFICIE ORIENTATA E L'OPERAZIONE DI SCELTA DEL VERSO DEL VERSORE $\vec{u}_n$

LA DEFINIZIONE E' ESTENSIBILE, COME PURO CONCETTO MATEMATICO, A QUALSIASI CAMPO VETTORIALE ANCHE SE NON C'E' EFFETTIVO FLUSSO DI MATERIA, OVVERO NON C'E' UN REALE SIGNIFICATO FISICO.

PERCIÒ IN UN CAMPO ELETTRICO, FISSATA LA SUPERFICIE INFINITESIMA dA E SCELTA UNA SUA ORIENTAZIONE $\vec{u}_m$, SI DEFINISCE FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ ATTRAVERSO dA LA QUANTITÀ:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot dA\, \vec{u}_m = E\, dA \cos\theta \qquad (\theta \text{ È L'ANGOLO TRA } \vec{E} \text{ E } \vec{u}_m)$$

SE L'AREA È FINITA, IL FLUSSO DI CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE A È LA SOMMA DEI FLUSSI ATTRAVERSO LE SUPERFICI INFINITESIME DA CUI È COMPOSTA, OSSIA L'INTEGRALE DI SUPERFICIE:

$$\Phi_E = \int_A \vec{E} \cdot dA\, \vec{u}_m = \int_A E \cdot dA \cos\theta$$

SE A È UNA SUPERFICIE CHIUSA, PER CONVENZIONE SI SCEGLIE IL VERSO DI $\hat{u}_m$ USCENTE DALLA SUPERFICIE.

CON QUESTA SCELTA:
- $\vec{E}$ USCENTE $\Longrightarrow \theta < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \Phi_E > 0$
- $\vec{E}$ ENTRANTE $\Longrightarrow \theta > \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \Phi_E < 0$

3. ANGOLO SOLIDO

SI DEFINISCE ANGOLO SOLIDO Ω IL RAPPORTO TRA LA SUPERFICIE A DI UNA CALOTTA SFERICA VISTA DAL CENTRO DI UNA SFERA E IL QUADRATO DEL RAGGIO r DELLA SFERA

$$\boxed{\Omega = \frac{A}{r^2}}$$

PASSANDO AI DIFFERENZIALI

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2}$$

E dA COINCIDE, A MENO DI INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE CON LA SUPERFICIE DI BASE DI UN CONO INFINITESIMO CON VERTICE NEL CENTRO DELLA SFERA.

SE L'ANGOLO SOLIDO È FINITO, POICHÉ IL RAGGIO r DELLA SFERA È COSTANTE, ESSO È DATO DA:

$$\Omega = \int_{\substack{\text{calotta}\\\text{sferica}}} d\Omega = \int_{\substack{\text{calotta}\\\text{sferica}}} \frac{dA}{r^2} = \frac{1}{r^2}\int_{\substack{\text{calotta}\\\text{sferica}}} dA$$

SE SI CONSIDERA TUTTA LA SUPERFICIE SFERICA:

$$\Omega = \frac{1}{r^2}\int_{\text{sfera}} dA = \frac{1}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi$$

CHE CORRISPONDE AL MASSIMO ANGOLO SOLIDO POSSIBILE. QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA DI QUALSIASI FORMA PER COSTRUZIONE SOTTINTENDE IL MASSIMO ANGOLO SOLIDO, PER CUI SI PUÒ SCRIVERE:

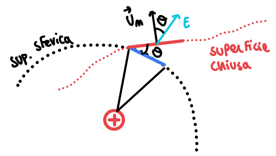
$$\oint_A d\Omega = 4\pi$$

OSSIA L'ANGOLO SOLIDO SOTTESO DA QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA A È $\Omega = 4\pi$

4. LEGGE DI GAUSS DEL CAMPO ELETTRICO

IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME q FISSA NEL PUNTO O DELLO SPAZIO ATTRAVERSO UNA PORZIONE INFINITESIMA dA DI UNA SUPERFICIE CHIUSA È:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot dA\vec{u}_m = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dA \cos\theta$$



L'ANGOLO SOLIDO SOTTESO DALLA SUPERFICIE dA RISPETTO AL PUNTO O È:

$$d\Omega = \frac{dA_0}{r^2} = \frac{dA\cos\theta}{r^2}$$

DOVE dA_0 È L'AREA DI BASE DEL CONO CON ORIGINE IN O E θ È L'ANGOLO FORMATO DA $\vec{E}$ CON $\vec{u}_m$.

IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO È QUINDI ESPRESSO DA:

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$

L'ANGOLO SOLIDO SOTTESO È ALLORA INDIPENDENTE DA POSIZIONE E ORIENTAZIONE DELLA PORZIONE DI dA E LO STESSO AVVIENE PER IL FLUSSO.

CONSIDERIAMO ALLORA I 2 CASI IN CUI LA CARICA È ESTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA OPPURE È INTERNA.

1) CARICA ESTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA

IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO È LA SOMMA DEL FLUSSO ATTRAVERSO 2 SUPERFICI, UNA dA_1 ENTRANTE E UNA dA_2 USCENTE.
ESSENDO

$$\Omega = \frac{dA_{01}}{r_1^2} = \frac{dA_1\cos\theta}{r_1^2} = \frac{dA_{02}}{r_2^2} = \frac{dA_2\cos\theta}{r_2^2}$$

L'UNICA DIFFERENZA È IL SEGNO DEL FLUSSO: $\Phi_{E1} = -\Phi_{E2}$ $\longrightarrow$ IL FLUSSO NETTO È NULLO.

2) CARICA INTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA

LE LINEE DI $\vec{E}$ ATTRAVERSANO SEMPRE UNA SOLA SUPERFICIE, USCENDO DA A SE LA CARICA È POSITIVA O ENTRANDO IN A SE È NEGATIVA.
DI CONSEGUENZA: $\Phi_E > 0$ SE $q > 0$
$\Phi_E < 0$ SE $q < 0$

IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO ATTRAVERSO UNA QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA A CHE RACCHIUDE q È:

$$\rightarrow \Phi_E = \oint_A \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\oint_A d\Omega}_{\text{ANGOLO SOLIDO}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

SE ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE CHIUSA CI SONO PIÙ CARICHE PUNTIFORMI IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO DI ESSA È LA SOMMA DEI FLUSSI DI CAMPI ELETTRICI GENERATI DA CIASCUNA CARICA

$$\Phi_E = \oint_A \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega + \oint_A \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega + \oint \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega + \ldots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \oint_A d\Omega = \frac{1}{\varepsilon_0} \overbrace{\sum_i q_i}^{q_{int}}$$

$\left(\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV \right.$ PER DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA $\left. \right)$

QUINDI, DATA UNA QUALSIASI DISTRIBUZIONE DI CARICA E UNA QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA A, IL FLUSSO ATTRAVERSO A DEL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ GENERATO DALLA DISTRIBUZIONE E' DOVUTO ESCLUSIVAMENTE ALLA CARICA NETTA DISTRIBUITA NEL VOLUME INTERNO ALLA SUPERFICIE, OSSIA

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot dA\,\vec{u}_n = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

LEGGE DI GAUSS

LA LEGGE DI GAUSS E' STATA DIMOSTRATA PARTENDO DALLA LEGGE DI COULOMB PER CAMPI ELETTROSTATICI, PER CUI IN QUESTO CASO LE 2 LEGGI SONO EQUIVALENTI. L'EQUIVALENZA VALE ANCHE PER CAMPI ELETTRICI LENTAMENTE VARIABILI NEL TEMPO.
PER CAMPI ELETTRICI RAPIDAMENTE VARIABILI NEL TEMPO NON VALE PIÙ LA LEGGE DI COULOMB, MA RESTA VALIDA LA LEGGE DI GAUSS.

$\Longrightarrow$ LA LEGGE DI GAUSS E' UNA GENERALIZZAZIONE DELLA LEGGE DI COULOMB

5. APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

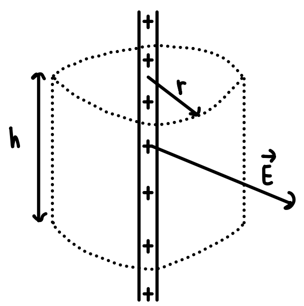
LA LEGGE DI GAUSS FACILITA IL CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO NELLE SITUAZIONI IN CUI VI E' UN'ALTA SIMMETRIA, PER ESEMPIO NEI CASI DI SIMMETRIA CILINDRICA, PLANARE O SFERICA, PER I QUALI SI PUÒ INDIVIDUARE FACILMENTE LA SUPERFICIE DI GAUSS, OVVERO LA SUPERFICIE PER LA QUALE LA COMPONENTE NORMALE $\vec{E} \cdot \vec{u}_n$ DEL CAMPO ELETTRICO E' COSTANTE.
IN QUESTO CASO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO E':

$$\oint_A \vec{E} \cdot dA\,\vec{u}_n = \oint_A E\cos\theta\, dA = E\cos\theta \oint_A dA = EA\cos\theta$$

IL CALCOLO E' SEMPLICE PER SUPERFICI DI SOLIDI REGOLARI

a) FILO INDEFINITO

CONSIDERIAMO UN FILO INDEFINITO CARICO CON DENSITÀ DI CARICA UNIFORME λ.
$\vec{E}$ E' NORMALE AL FILO E HA LA STESSA DENSITÀ SU UNA SUPERFICIE CILINDRICA COASSIALE AL FILO



IL FLUSSO E' NON NULLO SOLO SULLA SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRO

$$\oint_{\substack{sup.\\Gauss}} \vec{E} \cdot dA\,\vec{u}_n = \oint_{\substack{sup.\\laterale}} \vec{E} \cdot dA\,\vec{u}_n = \vec{E} \oint_{\substack{sup.\\laterale}} dA = E\,2\pi r h$$

LA CARICA ALL'INTERNO DEL CILINDRO E': $q_{int} = \lambda h$ E L'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI GAUSS PERTANTO PORGE

$$\oint_{\substack{sup.\\Gauss}} \vec{E} \cdot dA\,\vec{u}_n = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E\,2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

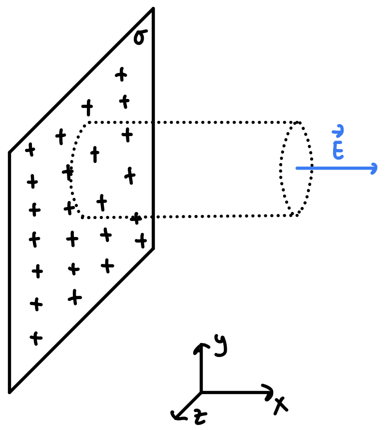
PER CUI, RICORDANDO CHE PER SIMMETRIA LA SUA DIREZIONE E' RADIALE, IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILO INDEFINITO E':

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

(è lo stesso risultato ottenuto con il calcolo diretto, ma in modo più semplice)

b) PIANO INDEFINITO

CONSIDERIAMO UN PIANO INDEFINITO CARICO CON DENSITÀ DI CARICA UNIFORME σ.
SI PUÒ PENSARE AL PIANO COME UNA FAMIGLIA DI FILI INDEFINITI.



$$\oint_{\substack{sup.\\Gauss}} \vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_m = 2\oint_{\substack{sup.\ di\\base}} \vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_m = 2E\oint_{\substack{sup.\ di\\base}} dA = 2E\pi r^2$$

LA CARICA ALL'INTERNO DELLA SUP. DI GAUSS È $q_{int} = \sigma\pi r^2$ E PERTANTO LA LEGGE DI GAUSS PORGE

$$\oint_{\substack{sup.\\Gauss}} \vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_m = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow 2E\pi r^2 = \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon_0}$$

PER CUI, RICORDANDO CHE PER SIMMETRIA LA DIREZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO È NORMALE AL PIANO, IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN PIANO INDEFINITO È:

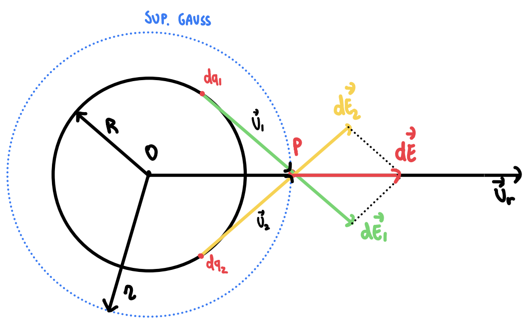
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x}$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO DIPENDE SOLO DA X, PER CUI IL POTENZIALE ELETTROSTATICO SI OTTIENE DA:

$$E = -\frac{dV}{dx} \Longrightarrow dV = -E\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dx \Longrightarrow \boxed{V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + k}$$

c) GUSCIO SFERICO CARICO

CONSIDERIAMO LA QUANTITÀ DI CARICA q DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE CON DENSITÀ SUPERFICIALE σ SU UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R.
È NECESSARIO DETERMINARE SEPARATAMENTE IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ ALL'INTERNO DELLA SFERA E ALL'ESTERNO.



- ESTERNO: ALL'ESTERNO IL PROBLEMA PRESENTA UNA SIMMETRIA SFERICA E IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO È RADIALE CON INTENSITÀ UGUALE PER OGNI DISTANZA r DAL CENTRO O: INFATTI IL CAMPO ELETTROSTATICO È DOVUTO A COPPIE DI CARICHE SIMMETRICHE LA CUI RISULTANTE È RADIALE.

LA SUPERFICIE DI GAUSS DA CONSIDERARE È UNA SFERA DI RAGGIO r CONCENTRICA CON LA SFERA:

$$\oint_{sup.\ Gauss} \vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_m = \oint_{sfera} \vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_m = \vec{E}\int_{sfera} dA = E\,4\pi r^2$$

LA CARICA ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE DI GAUSS È TUTTA LA CARICA SULLA SUPERFICIE: $q_{int} = q$

$$\rightarrow \oint_{sup.\ Gauss} \vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_m = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

PER CUI, RICORDANDO CHE PER SIMMETRIA LA DIREZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO E' RADIALE, IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN GUSCIO SFERICO CARICO E':

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

- INTERNO: ALL'INTERNO DELLA SFERA NON C'E' ALCUNA CARICA, PER CUI, PER QUALSIASI SUPERFICIE DI GAUSS CONSIDERATA, $q_{int} = 0$

$$\rightarrow \oint_{\substack{Sup.\\Gauss}} \vec{E}\cdot dA\vec{u}_n = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E\,4\pi r^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$$

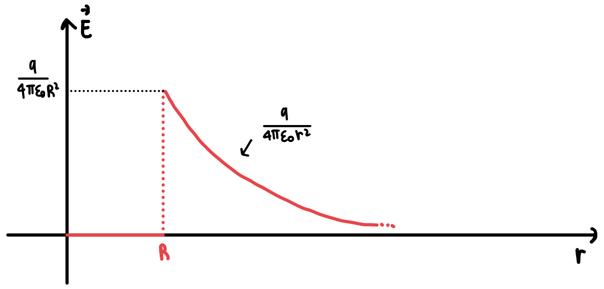
IL CAMPO ELETTROSTATICO ALL'ESTERNO DELLA SFERA E' COULOMBIANO, PER CUI IL POTENZIALE ELETTROSTATICO PER $r > R$ E':

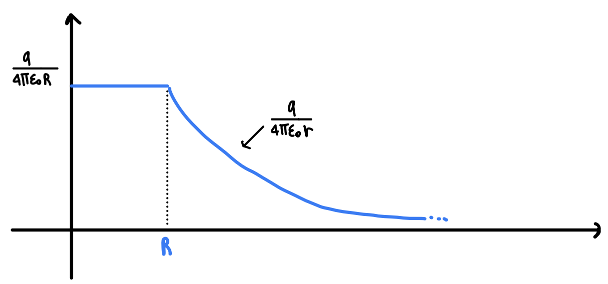
$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + k$$

MENTRE SICCOME ALL'INTERNO $\vec{E} = 0$, IL POTENZIALE E' COSTANTE.

IN CONCLUSIONE PER UN GUSCIO SFERICO DI RAGGIO R VALE:

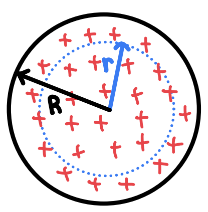
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r & (r \geq R) \\ 0 & (r < R) \end{cases} \qquad V(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r < R) \end{cases}$$





d) SFERA CARICA

CONSIDERIAMO LA QUANTITA' DI CARICA q DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE CON DENSITA' VOLUMETRICA DI CARICA ρ IN UN VOLUME SFERICO DI RAGGIO R. ANCHE IN QUESTO CASO E' NECESSARIO DETERMINARE SEPARATAMENTE IL CAMPO ELETTROSTATICO ALL'INTERNO DELLA SFERA E AL SUO ESTERNO.



- ESTERNO: IL CAMPO ELETTRICO ALL'ESTERNO E' LO STESSO DEL GUSCIO SFERICO, PERCHE' IL PROBLEMA PRESENTA LE MEDESIME CARATTERISTICHE E SIMMETRIE:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

- INTERNO: ANCHE ALL'INTERNO VI E' UNA SIMMETRIA SFERICA. CONSIDERIAMO COME SUPERFICIE DI GAUSS UNA SFERA DI RAGGIO $r < R$. SOLO LA CARICA ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE DI GAUSS:

$$q_{int} = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3$$

CONTRIBUISCE AL FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO, PER CUI LA LEGGE DI GAUSS PORGE:

$$\oint_{\substack{Sup.\\Gauss}} \vec{E}\cdot dA\vec{u}_n = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E\,4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho\,\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

RICORDANDO CHE PER SIMMETRIA LA DIREZIONE DEL CAMPO ELETTROSTATICO È RADIALE, IL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA È:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \, \vec{u}_r$$

OSSERVANDO CHE: $\rho = \dfrac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, SI HA CHE

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \, \vec{u}_r$$

PER CUI IL CAMPO ELETTRICO SULLA SUPERFICIE È:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{u}_r$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO ALL'ESTERNO È COULOMBIANO, PER CUI SCEGLIENDO $V(\infty) = 0$, IL POTENZIALE ELETTROSTATICO È:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K$$

MENTRE ALL'INTERNO $\vec{E}$ DIPENDE SOLO DA r:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \implies dV = -E\,dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,dr$$

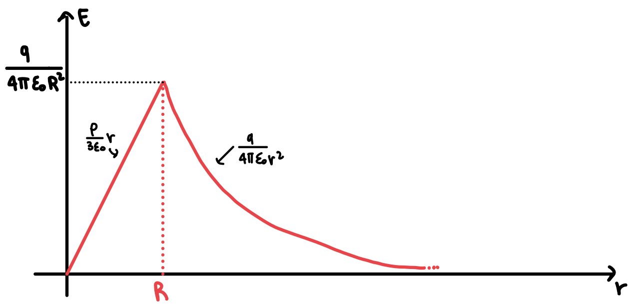
$$\rightarrow V = \int -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + K$$

CON LA COSTANTE CHE VA DETERMINATA IMPONENDO LA CONTINUITÀ DEL POTENZIALE SULLA SUPERFICIE DELLA SFERA

IN CONCLUSIONE PER UNA SFERA CARICA VALE:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r & (r \geq R) \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r \vec{u}_r = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{u}_r & (r < R) \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K & (r > R) \\ -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + K & (r < R) \end{cases}$$



4. STRUTTURA ELETTRICA DELLA MATERIA

1. INTRODUZIONE

LE PROPRIETÀ DELLA FORZA ELETTROSTATICA FINORA ESPOSTE SONO VALIDE NEL VUOTO E NON CONSIDERANO IL TIPO DI MATERIALE A CUI LA FORZA VIENE APPLICATA. GLI EFFETTI DELL'APPLICAZIONE DELLA FORZA ELETTROSTATICA DIFFERISCONO PERÒ A SECONDA DEL MATERIALE USATO.

PER COMPRENDERE LE DIFFERENZE DI COMPORTAMENTO È NECESSARIO AVERE UNA CONOSCENZA SUFFICIENTEMENTE DETTAGLIATA DELLA STRUTTURA ELETTRICA DELLA MATERIA.

LA MATERIA È COSTITUITA DA ATOMI, CIASCUNO DEI QUALI È ELETTRICAMENTE NEUTRO CON DIMENSIONI $\sim 10^{-11}$ m E MASSA $\sim 10^{-26} \div 10^{-27}$ kg, PER CUI LA FORZA GRAVITAZIONALE AGENTE SU DI ESSI È TRASCURABILE.

L'ESPERIMENTO DI RUTHERFORD DI DIFFUSIONE ELASTICA DI PARTICELLE α SU ORO HA DIMOSTRATO CHE LA CARICA POSITIVA $+Ze$ È CONCENTRATA IN UN NUCLEO DI DIMENSIONI $\sim 10^{-14} \div 10^{-15}$ m E COSTITUISCE QUASI TUTTA LA MASSA DELL'ATOMO.

IL RESTANTE SPAZIO VUOTO È OCCUPATO SOLO DA Z ELETTRONI PUNTIFORMI DI MASSA $\sim m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg E CARICA NEGATIVA $-e$.

IL NUCLEO CENTRALE È COSTITUITO DA NEUTRONI E PROTONI. I NEUTRONI SONO ELETTRICAMENTE NEUTRI, MENTRE I PROTONI HANNO CARICA UGUALE E OPPOSTA A QUELLA DEGLI ELETTRONI.

LE FORZE DI COESIONE NELL'ATOMO SONO:

- TRA PROTONI E NEUTRONI (NUCLEO): FORZA DI INTERAZIONE FORTE
- TRA NUCLEO E ELETTRONI: FORZA COULOMBIANA

I LEGAMI TRA ATOMI È SEMPRE DI NATURA ELETTRICA, MA AVVIENE IN MODI DIFFERENTI PER ATOMI DIVERSI

2. LEGAMI MOLECOLARI

LA MECCANICA QUANTISTICA DIMOSTRA CHE GLI ELETTRONI SONO DISTRIBUITI IN MODO REGOLARE OCCUPANDO SOLO ALCUNE ORBITE DETTE GUSCI ELETTRONICI (SHELL), A DISTANZE DEFINITE DAL NUCLEO IDENTIFICATE DALLE LETTERE K, L, M, N, ... ALLONTANANDOSI DA ESSO.

I GUSCI POSSONO CONTENERE UN NUMERO MASSIMO DI ELETTRONI DETERMINATO DALLA STATISTICA DI FERMI-DIRAC E PRECISAMENTE

- 2 ELETTRONI NEL GUSCIO K
- 8 ELETTRONI NEL GUSCIO L
- 18 ELETTRONI NEL GUSCIO M
- 32 ELETTRONI NEL GUSCIO N

ECC...

SE I GUSCI SONO PIENI, L'ATOMO È ELETTRICAMENTE STABILE E SI HANNO I GAS NOBILI

ALTRIMENTI, GLI ATOMI TENDONO A LEGARSI TRA LORO PER RAGGIUNGERE LA STABILITÀ

a) LEGAME IONICO

GLI ATOMI CHE HANNO UN SOLO ELETTRONE NEL GUSCIO PIÙ ESTERNO TENDONO A CEDERLO, DIVENTANDO IONI POSITIVI.

PER LA STESSA RAGIONE GLI ATOMI A CUI MANCA UN ELETTRONE PER RAGGIUNGERE LA STABILITÀ TENDONO AD ACCOGLIERNE UNO, DIVENTANDO COSÌ IONI NEGATIVI

b) LEGAME COVALENTE

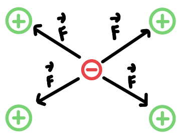
SE VI SONO 2+ ELETTRONI IN DIFETTO O IN ECCESSO, GLI ATOMI TENDONO A CONDIVIDERE GLI ELETTRONI ASSOCIANDOSI FRA DI LORO E MODIFICANDO LE ORBITE DEGLI ELETTRONI PIÙ ESTERNI, DANDO ORIGINE A UN LEGAME COVALENTE

3. PROPRIETÀ ELETTRICHE DEI MATERIALI

QUALUNQUE SIA IL LEGAME CHE SI INSTAURA, LE CARICHE ELETTRICHE POSSONO MUOVERSI ALL'INTERNO DELLA STRUTTURA DEL CORPO, MA CI SONO CASI IN CUI LA POSSIBILITÀ DI MUOVERSI È GRANDE (CONDUTTORI) E CASI IN CUI LA POSSIBILITÀ DI MOVIMENTO È LIMITATA (ISOLANTI ELETTRICI)

a) CONDUTTORI METALLICI

HANNO UNA STRUTTURA CRISTALLINA DA LEGAME COVALENTE AD ALTA DENSITÀ, PER CUI GLI ATOMI SONO A DISTANZA COMPARABILE CON LE LORO DIMENSIONI.



GLI ELETTRONI ESTERNI SUBISCONO UNA FORZA DOVUTA A TUTTI GLI ATOMI DEL RETICOLO MEDIAMENTE NULLA, QUINDI SONO LIBERI DI MUOVERSI.

GLI ELETTRONI LIBERI SONO MOLTI $\sim 10^{29}/m^3$

b) CONDUTTORI ELETTROLITICI

SONO SOLUZIONI DI MATERIALI CON LEGAME IONICO (es. acqua e sale).

c) CONDUTTORI GASSOSI

GENERALMENTE UN GAS NON SI COMPORTA COME UN CONDUTTORE, MA PER CAUSE ESTERNE (effetto termoelettrico, radioattività naturale, raggi cosmici...) SI POSSONO GENERARE IONI LIBERI CHE IMMERSI IN UN CAMPO ELETTRICO SI MUOVONO DI MOTO ORDINATO

d) ISOLANTI ELETTRICI O DIELETTRICI

I SOLIDI CON LEGAME IONICO O LEGAME COVALENTE AMORFO E LA MAGGIOR PARTE DI QUELLI CON LEGAME COVALENTE CRISTALLINO SONO ISOLANTI ELETTRICI. LA CONFIGURAZIONE ELETTRONICA È STABILE E GLI ELETTRONI SONO FORTEMENTE LEGATI ALLA MOLECOLA, PER CUI UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO NON GENERA UN MOVIMENTO ORDINATO DI CARICHE.

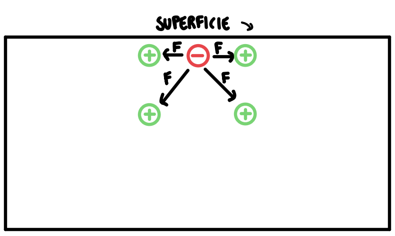
e) SEMICONDUTTORI

ESISTE UNA CLASSE DI MATERIALI, DETTI SEMICONDUTTORI, INTERMEDIA FRA I CONDUTTORI E GLI ISOLANTI.
IN QUESTI MATERIALI (SILICIO, GERMANIO, ARSENIURO DI GALLIO...) GLI ELETTRONI LIBERI SONO CIRCA $10^9/m^3$.
A BASSE TEMPERATURE SONO ISOLANTI ELETTRICI, MA DIVENTANO CONDUTTORI A TEMPERATURE ELEVATE.
($\rightarrow$ vengono affrontati nel dettaglio nel corso di Fondamenti di elettronica)

4. LAVORO DI ESTRAZIONE

GLI ELETTRONI SONO SOSTANZIALMENTE LIBERI ALL'INTERNO DEL MATERIALE CONDUTTORE, PERÒ NON POSSONO FACILMENTE ALLONTANARSI DA ESSO. QUESTO PER LE SEGUENTI RAGIONI:

- VICINO ALLA SUPERFICIE LA DISTRIBUZIONE DEI NUCLEI NON È PIÙ UNIFORME: LA FORZA ESERCITATA SUGLI ELETTRONI È NETTA VERSO L'INTERNO
- L'ELETTRONE STESSO GENERA UN'INDUZIONE ELETTROSTATICA CHE ACCUMULA CARICHE POSITIVE SULLA SUPERFICIE, CHE "CATTURANO" L'ELETTRONE



QUINDI BISOGNA FORNIRE ALL'ELETTRONE UN'ENERGIA CHE GLI PERMETTA DI VINCERE LE FORZE CHE LO TENGONO LEGATO AL RETICOLO SE LO SI VUOLE ESTRARRE.

SI DEFINISCE LAVORO DI ESTRAZIONE W_e IL LAVORO CHE SI DEVE COMPIERE PER PORTARE L'ELETTRONE DALLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE ALLA DISTANZA INFINITA DA ESSO (POTENZIALE NULLO)

DI SOLITO LO SI MISURA IN ELETTRONVOLT [eV]

1eV: LAVORO COMPIUTO PER TRASPORTARE UN ELETTRONE FRA 2 SUPERFICI EQUIPOTENZIALI DISTANZIATE DI $\Delta V = 1m$

$$\boxed{W = -\Delta U = -q\Delta V}$$

QUINDI, $|W| = |\Delta U| = |e\Delta V|$

$$1eV = (1.602 \cdot 10^{-19}\, C) \cdot (1V) \sim 1.602 \cdot 10^{-19}\, J$$

5. CONDUTTORI IN EQUILIBRIO

1. INTRODUZIONE

I MATERIALI POSSONO ESSERE IMMERSI IN UN CAMPO ELETTROSTATICO ESTERNO. GLI EFFETTI MACROSCOPICI DI TALE CAMPO SONO STRETTAMENTE LEGATI ALLA PRESENZA O ALL'ASSENZA DI ELETTRONI LIBERI, PER CUI C'È UNA DIFFERENZA DI COMPORTAMENTO NEL CASO IN CUI I MATERIALI SIANO CONDUTTORI O SIANO DIELETTRICI. IN QUESTO CAPITOLO STUDIEREMO I MATERIALI CONDUTTORI MENTRE IN QUELLO SUCCESSIVO I DIELETTRICI.

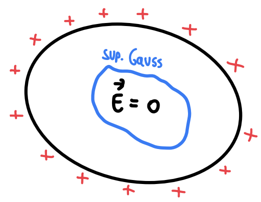
2. EQUILIBRIO ELETTROSTATICO

UN CONDUTTORE ELETTRICAMENTE NEUTRO IN ASSENZA DI CAMPI ELETTRICI ESTERNI SI TROVA IN UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO ELETTROSTATICO.

SE IL CONDUTTORE È IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO, IL CAMPO ELETTROSTATICO RISULTANTE ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE È NULLO.

3. CONDUTTORE CARICO

SE UN CONDUTTORE VIENE CARICATO, LA CARICA IN ECCESSO GENERA CAMPI ELETTROSTATICI CHE DETERMINANO LA ROTTURA DELLA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO. IL CONDUTTORE SI RIPORTA PERÒ IN BREVE TEMPO IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO E PERCIÒ LA CARICA IN ECCESSO DEVE DISPORSI SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE.



INFATTI IN EQUILIBRIO $\vec{E} = 0$ ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE,
E CONSIDERANDO QUALSIASI SUP. DI GAUSS COMPRESA NEL CONDUTTORE SI HA:

$$\oint_{\substack{SUP.\\GAUSS}} \vec{E} \cdot dA\vec{u}_m = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow q_{int} = 0$$

E POICHÉ LA SUPERFICIE DI GAUSS PUÒ ESSERE PARI ALLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE, NON PUÒ ESSERCI ACCUMULO DI CARICA IN NESSUNA PARTE DEL VOLUME DEL CONDUTTORE. LA CARICA IN ECCESSO DEVE PER FORZA ESSERE DISPOSTA SULLA SUPERFICIE ESTERNA.

IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO NON PUÒ ESSERE DIVERSO IN PUNTI DIVERSI DEL CONDUTTORE, INFATTI PER UN CAMMINO γ QUALSIASI FRA 2 PUNTI A E B DEL CONDUTTORE:

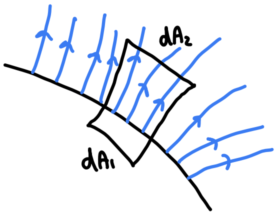
$$\Delta V_{BA} = -\int_{A \xrightarrow{\gamma} B} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

PERCHÉ IL CAMPO ELETTROSTATICO È NULLO. TUTTI I PUNTI DEL CONDUTTORE SONO ALLO STESSO POTENZIALE, CHE DIPENDE DALLA QUANTITÀ DI CARICA IN ECCESSO, PER CUI IN PARTICOLARE LA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE È EQUIPOTENZIALE.
LA CARICA È DISTRIBUITA SULLA SUPERFICIE DEI CONDUTTORI, PER CUI SE SI CONNETTONO 2 CONDUTTORI FRA DI LORO ESSI DIVENTANO UN UNICO CONDUTTORE E LA CARICA SI REDISTRIBUISCE SU TUTTA LA SUPERFICIE ESTERNA DISPONIBILE IN MODO DA RENDERE EQUIPOTENZIALE LA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE ASSEMBLATO.

4. TEOREMA DI COULOMB

CONSIDERIAMO UNA PORZIONE DI CONDUTTORE CARICO: LA CARICA È DISPOSTA SULLA SUPERFICIE CHE È EQUIPOTENZIALE, PER CUI IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DAL CONDUTTORE È IN OGNI SUO PUNTO NORMALE AD ESSA.

CONSIDERIAMO UNA SUPERFICIE DI GAUSS COSTITUITA DALLA SUPERFICIE DI UNA PORZIONE DI TUBO DI FLUSSO DI SPESSORE INFINITESIMO DEL CAMPO ELETTROSTATICO.



- ATTRAVERSO LA SUPERFICIE LATERALE IL FLUSSO E' NULLO
- ATTRAVERSO dA_1 IL FLUSSO E' NULLO PERCHE' NON CI SONO CARICHE ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE
- L'UNICO FLUSSO NON NULLO E' QUELLO ATTRAVERSO dA_2

$$\Phi_E = \oint_{\text{tubo di flusso}} \vec{E} \cdot dA\vec{u}_m = E\, dA_2$$

E APPLICANDO LA LEGGE DI GAUSS, DOPO AVER OSSERVATO CHE LA CARICA ALL'INTERNO DEL TUBO DI FLUSSO E' $q_{int} = \sigma\, dA_2$ SI OTTIENE:

$$\oint_{\text{sup Gauss}} \vec{E} \cdot dA\vec{u}_m = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \implies E\, dA_2 = \frac{\sigma\, dA_2}{\varepsilon_0}$$

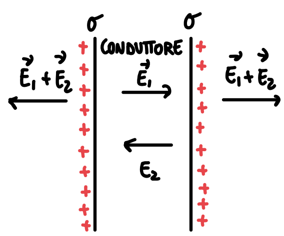
OSSIA SI DETERMINA L'INTENSITÀ DEL CAMPO IN PROSSIMITÀ DELLA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE QUALSIASI:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

NOTA: IL RISULTATO DEL TEOREMA DI COULOMB SEMBRA IN CONTRADDIZIONE CON IL CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO DOVUTO AD UNA DISTRIBUZIONE PLANARE DI CARICA. IN REALTÀ LA CONTRADDIZIONE E' SOLO APPARENTE.

INFATTI UNA DISTRIBUZIONE PLANARE DI CARICA PUÒ ESSERE OTTENUTA DEPOSITANDO LA CARICA q SU UN ISOLANTE ELETTRICO, PER CUI RIMANE DOVE VIENE DEPOSITATA.

SE LA STESSA CARICA q VIENE DEPOSITATA SU UN CONDUTTORE E' INVECE LIBERA DI MUOVERSI E SI DISTRIBUISCE SULLE 2 FACCE DEL PIANO DI SPESSORE TRASCURABILE. SI OTTENGONO IN QUESTO MODO 2 DISTRIBUZIONI PLANARI σ E IL CAMPO ELETTROSTATICO NELLO SPAZIO E' DOVUTO ALLA SOVRAPPOSIZIONE DEI 2 CAMPI ELETTROSTATICI GENERATI DA CIASCUN PIANO



$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

5. DISTRIBUZIONE DELLA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA: EFFETTO DELLE PUNTE

LA DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA SUL CONDUTTORE NON E' UNIFORME, MA DIPENDE DALLA SUA CONVESSITÀ/CONCAVITÀ. IN PARTICOLARE LA DENSITÀ DI CARICA E' PIÙ ALTA PER SUPERFICI CONVESSE, DIMINUENDO CON IL RAGGIO DELLA SUPERFICIE, E PIÙ BASSA PER SUPERFICI CONCAVE, AUMENTANDO CON IL RAGGIO DELLA SUPERFICIE.

CONSIDERIAMO 2 SFERE CONDUTTRICI RISP. DI RAGGIO $R_1 > R_2$, COLLEGATI FRA LORO DA UN FILO CONDUTTORE SOTTILE.
SI DEPOSITI SUI CONDUTTORI UNA CARICA q. LE 2 SFERE FORMANO UN CONDUTTORE EQUIPOTENZIALE, PER CUI

$$V_1 = V_2 \implies \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

LA CARICA q SI DIVIDE IN MODO PROPORZIONALE AL RAGGIO DELLE 2 SFERE:

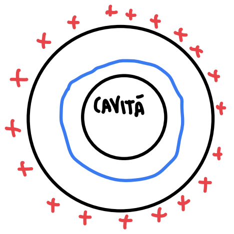
$$\boxed{\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}} \implies \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{R_1} = \frac{\sigma_2 4\pi R_2^2}{R_2} \implies \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

6. INDUZIONE ELETTROSTATICA

LA PROPRIETÀ DI UN CONDUTTORE DI PORTARSI IN CONDIZIONE DI EQUILIBRIO PERMETTE DI CAPIRE L'EFFETTO DI INDUZIONE ELETTROSTATICA. INFATTI, QUANDO AVVICINO UN CORPO CARICO A UNO NEUTRO, LE CARICHE DI SEGNO OPPOSTO A QUELLO DELLA CARICA TENDONO AD AVVICINARSI AD ESSO PER LA LEGGE DI COULOMB.

SE IL CORPO CARICO È UN CONDUTTORE, LA CARICA INDOTTA SULLA SUPERFICIE VICINA È UGUALE E OPPOSTA ALLA CARICA INDUCENTE.

SE HO UN CONDUTTORE CAVO IL CAMPO ELETTRICO AL SUO INTERNO DEVE ESSERE NULLO. HO COSÌ LA GABBIA DI FARADAY.
NON PUÒ ESSERCI CARICA SULLA SUPERFICIE INTERNA DEL CONDUTTORE.



SE FORZO UNA CARICA q ALL'INTERNO DELLA CAVITÀ, ESSA INDUCE SULLA SUPERFICIE ESTERNA UNA CARICA INDIPENDENTEMENTE DAL VALORE ORIGINALE DELLA DISTRIBUZIONE DI CARICA.

7. CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE ISOLATO

IL POTENZIALE ELETTROSTATICO DI UN CONDUTTORE ISOLATO NEL VUOTO DIPENDE DALLA SUA FORMA GEOMETRICA E DALLA DISTRIBUZIONE DI CARICA. INFATTI IN UN QUALSIASI PUNTO $P_0(x_0, y_0, z_0)$ DELLA SUA SUPERFICIE ESSO È LA FORMA SCALARE DEI POTENZIALI DOVUTI A CIASCUN ELEMENTO INFINITESIMO DI SUPERFICIE, OVVERO L'INTEGRALE ESTESO A TUTTA LA SUPERFICIE A DEL CORPO DEL POTENZIALE RISPETTO AD INFINITO DI UN ELEMENTO INFINITESIMO DI CARICA SCEGLIENDO $V_\infty = 0$:

$$V - V_\infty = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \int_A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(x,y,z)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\,dx\,dy\,dz$$

SI NOTA CHE IL POTENZIALE DIPENDE QUINDI DALLA FORMA DELLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE ED È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA CARICA q IVI DEPOSITATA ATTRAVERSO LA DENSITÀ SUPERFICIALE.
ALLORA IL RAPPORTO FRA CARICA SUL CONDUTTORE E POTENZIALE ELETTROSTATICO È SOLO UN FATTORE DI FORMA GEOMETRICO DETTO CAPACITÀ:

$$\boxed{C = \frac{q}{V - V_\infty}}$$

ESSA SI MISURA IN FARAD $[F] = \frac{[C]}{[V]}$

NEL CASO DI UN CONDUTTORE SFERICO DI RAGGIO R IL POTENZIALE DELLA SFERA RISPETTO A INFINITO È:

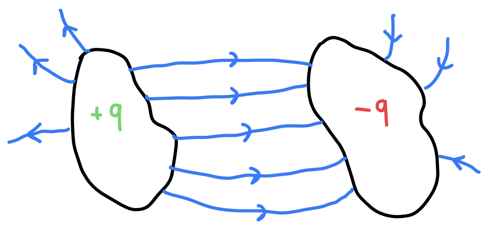
$$V - V_\infty = \int_{sfera} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_{sfera} dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R}$$

E LA CAPACITÀ DELLA SFERA ISOLATA È:

$$\boxed{C = \frac{q}{V - V_\infty} = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

8. CONDENSATORI

CONSIDERIAMO 2 CONDUTTORI ISOLATI DI FORMA QUALSIASI AFFACCIATI NEL VUOTO. SE CARICA DI SEGNO OPPOSTO VIENE PORTATA SUI 2 CONDUTTORI, TUTTE LE LINEE DI CAMPO ELETTROSTATICO SI CHIUDONO SUI CONDUTTORI.



SE LA CARICA SUI CONDUTTORI È LA MEDESIMA IN MODULO, LA CONDIZIONE È DETTA INDUZIONE COMPLETA.
I CONDUTTORI FORMANO UN CONDENSATORE E SONO DETTI ARMATURE DEL CONDENSATORE.

A CIASCUNA ARMATURA È ASSOCIABILE UN POTENZIALE:
⟶ ARMATURA $+q$: V^+
⟶ ARMATURA $-q$: V^-

IL FATTORE DI FORMA DI UN CONDENSATORE È LA SUA CAPACITÀ:

$$\boxed{C = \frac{q}{V^+ - V^-}}$$

LE 2 ARMATURE SONO EQUIPOTENZIALI, PER CUI LA ddp TRA LE 2 ARMATURE È CALCOLABILE COME L'INTEGRALE DI LINEA:

$$V^+ - V^- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

INTENDENDO CHE IL CALCOLO VA FATTO DA UN PUNTO INIZIALE QUALSIASI SULL'ARMATURA NEGATIVA A UN PUNTO FINALE QUALSIASI SULL'ARMATURA POSITIVA, LUNGO UNA QUALSIASI LINEA γ CHE LE COLLEGHI.
SI PUÒ SEMPRE FAR COINCIDERE LA LINEA γ CON UNA LINEA DI CAMPO CHE COLLEGHI LE 2 ARMATURE, PER CUI IN OGNI PUNTO $\vec{E} \parallel d\vec{r}$, E IL PRODOTTO SCALARE È:

$$\vec{E} \cdot d\vec{r} = \pm E\, ds$$

E LA ddp FRA LE ARMATURE DIVENTA: $V^+ - V^- = -\int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_+^- E \cdot dr = \int_+^- E\, ds$

DOVE E È IL MODULO DEL CAMPO ELETTROSTATICO, SEMPRE CONCORDE ALLO SPOSTAMENTO

9. CAPACITÀ DI CONDENSATORI IDEALI

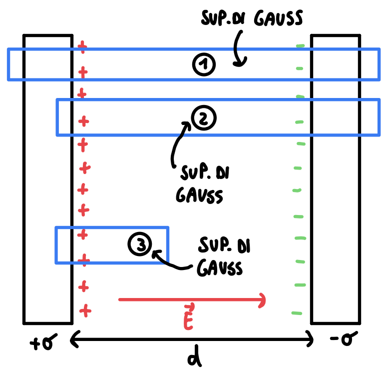
SEBBENE QUALSIASI COPPIA DI CONDUTTORI POSSA COSTITUIRE UN CONDENSATORE, IL CALCOLO È POSSIBILE SOLO NEI (POCHI) CASI IN CUI VI È SIMMETRIA. VEDREMO:

- CONDENSATORE PIANO
- CONDENSATORE CILINDRICO
- CONDENSATORE SFERICO

a) CONDENSATORE PIANO

CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE PIANO CON 2 ARMATURE DI AREA A DISTANTI d.

SULLE ARMATURE È DISTRIBUITA LA CARICA $\sigma = \frac{q}{A}$



$\vec{E}$ È NORMALE AI PIANI E NULLO AL DI FUORI DELLE ARMATURE.

QUESTO PERCHÉ SE CONSIDERIAMO LA SUPERFICIE DI GAUSS 1 CON AREA DI BASE AL DI FUORI DELLE ARMATURE LA CARICA AL SUO INTERNO È NULLA PERCHÉ VI SONO 2 DISTRIBUZIONI UGUALI E OPPOSTE:

$$\oint_{\text{superficie } 1} \vec{E}\cdot dA\vec{u}_n = 0 \implies \vec{E} = 0$$

LA CARICA DEVE ESSERE CONCENTRATA SULLA SUPERFICIE INTERNA. INFATTI CONSIDERANDO LA SUPERFICIE DI GAUSS 2:

$$\oint_{\text{superficie } 2} \vec{E}\cdot dA\vec{u}_n = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = 0 \implies q_2 = -q_1$$

6. DIELETTRICI

1. INTRODUZIONE

CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE PIANO CON ARMATURE DI AREA A POSTE A DISTANZA d, CARICATO ALLA DIFFERENZA DI POTENZIALE V_0.
LA SUA CAPACITÀ È

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

ORA:
1) ISOLIAMO IL CONDENSATORE (IN MODO CHE LA CARICA q SULLE ARMATURE RESTI COSTANTE)
2) INSERIAMO AL SUO CENTRO UNA LASTRA CONDUTTRICE DI SPESSORE $h < d$

→ LE CARICHE LIBERE DEL CONDUTTORE SI SPOSTANO PER INDUZIONE ELETTROSTATICA PER PORTARLO IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO
↓
IL SISTEMA DIVENTA EQUIVALENTE A UNA SERIE DI 2 CONDENSATORI UGUALI $C_1 = C_2$, CON ARMATURE DI AREA A E DISTANZA FRA LE ARMATURE $(d-h)/2$, PER CUI LA SUA CAPACITÀ DIVENTA

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1^2}{2C_1} = \frac{C_1}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{\left(\frac{d-h}{2}\right)} = \varepsilon_0 \frac{A}{d-h} > C_0 \quad \left(\text{perché } d-h < d \text{, quindi } \frac{A}{d-h} > \frac{A}{d}\right)$$

LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE AUMENTA, E A PARITÀ DI CARICA PRESENTE SULLE ARMATURE SI MISURA UNA ddp INFERIORE FRA DI ESSE.

$$V = \frac{q}{C} < V_0 = \frac{q}{C_0}$$

SI POTREBBE PENSARE CHE INSERENDO UN DIELETTRICO, POICHÉ LE CARICHE LIBERE SONO TRASCURABILI, NON CI SIA ALCUNA VARIAZIONE RILEVABILE, MA LA DIFFERENZA DI POTENZIALE DIMINUISCE COMUNQUE, ANCHE SE IN MISURA INFERIORE E CON UN'INTENSITÀ CHE DIPENDE DAL MATERIALE.

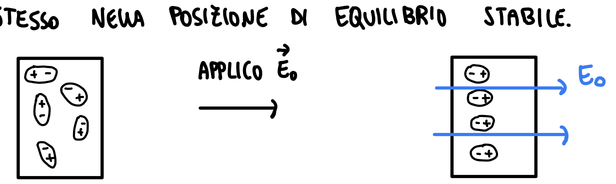
IL DIELETTRICO REAGISCE QUINDI ALL'AZIONE DEL CAMPO ELETTRICO, ANCHE SE NON C'È SPOSTAMENTO DI CARICA: IL FENOMENO È DETTO POLARIZZAZIONE DEL DIELETTRICO

2. MECCANISMI DI POLARIZZAZIONE DIELETTRICA

IL DIELETTRICO SI POLARIZZA ATTRAVERSO 2 MECCANISMI DIFFERENTI
→ POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO
→ POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE

1) POLARIZZAZIONE PER ORIENTAMENTO

CARATTERIZZA LE MOLECOLE POLARI. ESSE SONO DI FORMA ASIMMETRICA, E POSSIEDONO UN PICCOLO MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO.
NORMALMENTE QUESTI DIPOLI SONO ORIENTATI CASUALMENTE, MA LA PRESENZA DI UN CAMPO ELETTROSTATICO ESTERNO $\vec{E}_0$ TENDE A DISPORLI PARALLELAMENTE AL CAMPO STESSO NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE.

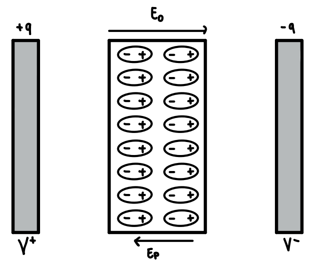


2) POLARIZZAZIONE PER DEFORMAZIONE

NEL CASO DI MOLECOLE NON POLARI AVVIENE INVECE UNO SPOSTAMENTO MOLTO PICCOLO DEI CENTRI DI MASSA DELLE CARICHE POSITIVE E DELLE CARICHE NEGATIVE IN DIREZIONI OPPOSTE CHE NON COINCIDONO PIÚ, DANDO QUINDI LUOGO AD UN PICCOLO DIPOLO ELETTRICO ALLINEATO AL CAMPO.

IN OGNI CASO ALL'ESTERNO DEL DIELETTRICO NON CAMBIA NULLA E IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}_0$ E' QUELLO DOVUTO ALLA CARICA LIBERA PRESENTE SULLE ARMATURE, MA PER EFFETTO DELLA POLARIZZAZIONE DIELETTRICA ALL'INTERNO DEL MATERIALE SI VIENE A CREARE UN CAMPO ELETTROSTATICO DI POLARIZZAZIONE $\vec{E}_p$ OPPOSTO AL CAMPO POLARIZZANTE $\vec{E}_0$ E MENO INTENSO RISPETTO AD ESSO, PER CUI IL CAMPO ALL'INTERNO DEL MATERIALE NON VARIA DI DIREZIONE, MA DIMINUISCE LA SUA INTENSITÁ CHE DIVENTA:

$$E = E_0 - E_p < E_0$$



LA DIFFERENZA DI POTENZIALE FRA LE ARMATURE DEL CONDENSATORE VALE:

$$V = \int_+^- E \, ds$$

CHE EVIDENTEMENTE DIMINUISCE, PERCHE' IL CONTRIBUTO ALL'INTEGRALE DI LINEA E' MINORE NELLA ZONA DI SPAZIO ALL'INTERNO DEL DIELETTRICO. LA ddp FRA LE ARMATURE RESTA TUTTAVIA PIÚ ALTA RISPETTO AL CASO IN CUI IL MATERIALE INSERITO SIA UN CONDUTTORE, PERCHE' IL CAMPO ELETTROSTATICO ALL'INTERNO DI UN DIELETTRICO NON PUÓ MAI ESSERE COMPLETAMENTE ANNULLATO.

3. VETTORE POLARIZZAZIONE DIELETTRICA

IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO DELLA SINGOLA MOLECOLA E' PICCOLO PER ENTRAMBI I MECCANISMI DI POLARIZZAZIONE, MA IL RISULTATO COMPLESSIVO DELLE TANTISSIME MOLECOLE CHE SUBISCONO L'EFFETTO DEL CAMPO ELETTROSTATICO PUÓ ESSERE NOTEVOLE.
QUINDI E' OPPORTUNO CONSIDERARE UN VOLUME dV CONTENENTE dN MOLECOLE E UTILIZZARE METODI STATISTICI.
IN TAL CASO IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO TOTALE DEL MATERIALE E' OTTENUTO SOMMANDO VETTORIALMENTE IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO $\vec{p}_i$ DI CIASCUNA MOLECOLA:

$$dp = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = dN \vec{p}_0 = n \vec{p}_0 \, dV$$

DOVE:

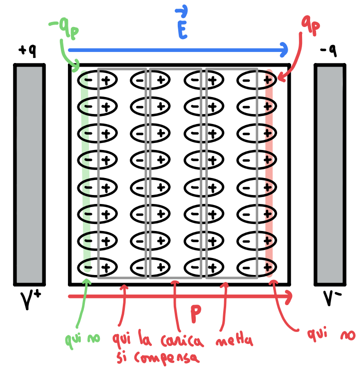
- $\vec{p}_0$: MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO MEDIO DI UNA MOLECOLA LUNGO LA DIREZIONE DI $\vec{E}_0$
- $n = \dfrac{dN}{dV}$ E' IL NUMERO DI MOLECOLE PER UNITA' DI VOLUME DEL MATERIALE.

IL VETTORE

$$\boxed{\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = n\vec{p}_0}$$

RAPPRESENTA QUINDI IL MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO PER UNITA' DI VOLUME DEL MATERIALE ED E' DETTO POLARIZZAZIONE DIELETTRICA.
SE IL CAMPO ELETTRICO POLARIZZANTE $\vec{E}_0 = 0 \longrightarrow \vec{p}_0 = 0$.
ALTRIMENTI, $\vec{E}_0 \neq 0 \longrightarrow \vec{p}_0 \neq 0 \longrightarrow$ ESISTE UNA POLARIZZAZIONE DIELETTRICA $\vec{P}$ PARALLELA E CONCORDE AL CAMPO ELETTRICO

IL CASO PIÚ SEMPLICE (l'unico che vediamo) E' QUELLO DI UNA POLARIZZAZIONE DIELETTRICA UNIFORME CORRISPONDENTE ALLA SITUAZIONE IN CUI IL CAMPO POLARIZZANTE E' UNIFORME E COSTANTE.



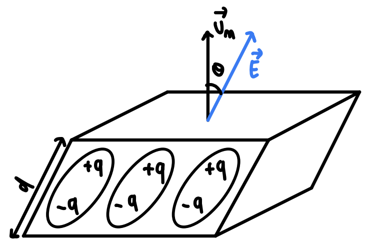
SICCOME LA DENSITÁ DI DIPOLI E´ COSTANTE ALL'INTERNO DEL MATERIALE, SI PUÒ VISUALIZZARE IL MATERIALE COME UNA SERIE DI DIPOLI UNIFORMEMENTE DISTRIBUITI E ORIENTATI PARALLELAMENTE TRA DI LORO.

COME SI VEDE DAL DISEGNO, ALL'INTERNO DEL MATERIALE LA CARICA NETTA E´ NULLA PERCHE´ SI COMPENSA, MENTRE SULLA SUPERFICIE DEL DIELETTRICO RIMANE UNA CARICA NETTA q_p.

QUINDI L'UNICO EFFETTO DELLA POLARIZZAZIONE E´ LA COMPARSA DI UNA CARICA DI POLARIZZAZIONE SUPERFICIALE q_p DI SPESSORE MONOMOLECOLARE, CHE NON SI PUÒ PERÓ RIMUOVERE DAL DIELETTRICO.

IL MECCANISMO E IL RISULTATO SONO LOCALMENTE GLI STESSI SU UNA SUPERFICIE DI QUALUNQUE FORMA CON DIREZIONE QUALSIASI DEL CAMPO ELETTRICO.

CONSIDERIAMO PERTANTO UNA PORZIONE ELEMENTARE dV DEL VOLUME PROSSIMO ALLA SUPERFICIE.



APPROSSIMATAMENTE, dV E´ UN PRISMA DI AREA dA E ALTEZZA $h = d\cos\theta$
(d = distanza media fra le cariche $\pm q$ che costituiscono il dipolo elettrico $\vec{P}_0 = q\vec{d}$)

LA CARICA DI POLARIZZAZIONE SULLA SUPERFICIE E´ QUINDI:

$$dq_p = dN_q = nq\,dV = nq\,dA\,d\cos\theta$$

E LA SUA DENSITÁ SUPERFICIALE DI CARICA E´:

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{dA} = nq\,d\cos\theta = nq\,\vec{d}\cdot\vec{u}_n = n\vec{P}_0\cdot\vec{u}_n$$

OVVERO

$$\boxed{\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{u}_n}$$

LA DENSITÁ SUPERFICIALE DI CARICA E´ QUINDI PARI ALLA COMPONENTE DEL VETTORE POLARIZZAZIONE DIELETTRICA LUNGO LA NORMALE ALLA SUPERFICIE DEL MATERIALE POLARIZZATO

4. VETTORE INDUZIONE DIELETTRICA

CONSIDERIAMO UN DIELETTRICO INSERITO IN UN CONDENSATORE PIANO. IL CAMPO ELETTROSTATICO $\vec{E}$ NEL DIELETTRICO E´ DATO DALLA SOVRAPPOSIZIONE DEL CAMPO POLARIZZANTE $\vec{E}_0$ E DEL CAMPO DI POLARIZZAZIONE $\vec{E}_p$ OPPOSTI TRA LORO:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$$

APPLICANDO LA LEGGE DI GAUSS A UN TUBO DI FLUSSO INFINITESIMO CON UNA BASE NEL DIELETTRICO E UNA ALL'INTERNO DELL'ARMATURA SI OTTIENE:

$$\vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_n = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\overbrace{\sigma}^{\text{densità di carica libera sulle armature del condensatore}} - \overbrace{\sigma_P}^{\substack{\sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{u}_n \\ \text{densità di carica di polarizzazione}}})\,dA}{\varepsilon_0}$$

PERTANTO:

$$\varepsilon_0\,\vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_n = \sigma\,dA - \sigma_P\,dA = \sigma\,dA - \vec{P}\cdot dA\,\vec{u}_n \quad\longrightarrow\quad \varepsilon_0\,\vec{E}\cdot dA\,\vec{u}_n + \vec{P}\cdot dA\,\vec{u}_n = \sigma\,dA$$

OVVERO

$$\left(\varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}\right)\cdot dA\,\vec{u}_n = \sigma\,dA = dq$$

DEFINENDO IL VETTORE INDUZIONE DIELETTRICA

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}}$$

LA LEGGE DI GAUSS VIENE ESTESA AI DIELETTRICI E DIVENTA:

$$\oint_{\substack{Sup.\\Gauss}} \vec{D}\cdot dA\,\vec{u}_n = q$$ DOVE q E' LA CARICA LIBERA ALL'INTERNO DELLA SUPERFICIE DI GAUSS.

IL CAMPO DI POLARIZZAZIONE E' DOVUTO A CARICHE DI DIPOLO COULOMBIANE, PER CUI E' CONSERVATIVO E DI CONSEGUENZA LO E' ANCHE IL CAMPO ELETTROSTATICO NEL DIELETTRICO E LA SUA CIRCUITAZIONE E' NULLA

$$\oint_\gamma \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

5. RELAZIONE FRA POLARIZZAZIONE DIELETTRICA E CAMPO ELETTROSTATICO

IL LEGAME FRA IL CAMPO ELETTROSTATICO POLARIZZANTE $\vec{E}_0$ E LA POLARIZZAZIONE DIELETTRICA $\vec{P}$ DIPENDE DALLE PROPRIETÁ CARATTERISTICHE DEL MATERIALE. IN GENERALE ESISTE UNA RELAZIONE:

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}$$ DOVE α E' UNA MATRICE, IL TENSORE DI POLARIZZAZIONE.

MA, SPERIMENTALMENTE, NEL CASO DEI MATERIALI DI NOSTRO INTERESSE (gas, liquidi, solidi amorfi, alcuni solidi cristallini...) LA MATRICE E' DIAGONALE E I SUOI ELEMENTI SONO APPROSSIMATAMENTE TUTTI UGUALI, PER CUI LA RELAZIONE SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$\boxed{\vec{P} = \chi_\varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{E}}$$

DOVE χ_ε E' LA SUSCETTIVITÁ DIELETTRICA E DIPENDE DAL MATERIALE.
I MATERIALI CHE OBBEDISCONO A QUESTA LEGGE SONO DETTI DIELETTRICI ISOTROPI. GLI ALTRI MATERIALI SONO DETTI DIELETTRICI ANISOTROPI (GENERALMENTE SONO SOLIDI CRISTALLINI) E LA POLARIZZAZIONE E' DIVERSA CASO PER CASO.

IL VETTORE INDUZIONE ELETTRICA PER I MATERIALI ISOTROPI E':

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi_\varepsilon\,\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_\varepsilon)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

OSSIA RISULTA DIRETTAMENTE PROPORZIONALE AL CAMPO ELETTRICO NEL DIELETTRICO ATTRAVERSO UNA COSTANTE:

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_\varepsilon)}$$

LA COSTANTE

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$ COSTANTE DIELETTRICA DEL MEZZO RELATIVA AL VUOTO (SEMPRE > 1)

LA LEGGE DI GAUSS NEI MATERIALI PER I MEZZI ISOTROPI:

$$\oint_{\substack{\text{sup. di}\\ \text{Gauss}}} \vec{D} \cdot dA\vec{u}_m = q_{int} \longrightarrow \oint_{\substack{\text{sup. di}\\ \text{Gauss}}} \varepsilon \vec{E} \cdot dA\vec{u}_m = q_{int} \longrightarrow \oint_{\substack{\text{sup. di}\\ \text{Gauss}}} \vec{E} \cdot dA\vec{u}_m = \frac{q_{int}}{\varepsilon}$$

I RISULTATI OTTENUTI NEI CAPITOLI PRECEDENTI SONO RICAVABILI APPLICANDO LA LEGGE DI GAUSS, QUINDI POICHÉ LA LEGGE È FORMALMENTE LA STESSA CON LA MERA SOSTITUZIONE DI ε_0 CON ε, TUTTI I RISULTATI RESTANO VALIDI SEMPLICEMENTE OPERANDO TALE SOSTITUZIONE NELLE FORMULE.

CONSEGUENZA IMPORTANTE DI QUESTA PROPRIETÀ È CHE, SE CONSIDERIAMO UN CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN CORPO IMMERSO IN UN DIELETTRICO OMOGENEO ISOTROPO CON UNA CERTA ε_r, LA DDP ELETTROSTATICO FRA 2 PUNTI P E Q DELLO SPAZIO DIVENTA:

$$V = \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{dq}{r_q} - \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{dq}{r_p} = \frac{1}{\varepsilon_r}\left(\int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_q} - \int_C \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_p}\right) = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$$

DOVE V_0 È LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA I 2 PUNTI NEL VUOTO.

IL CAMPO ELETTROSTATICO NEL PUNTO P SI VALUTA APPLICANDO LA RELAZIONE CAMPO-POTENZIALE:

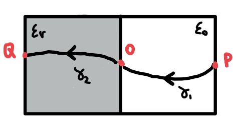
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V(P) = -\vec{\nabla}\left[\frac{V_0(P)}{\varepsilon_r}\right] = -\frac{1}{\varepsilon_r}\vec{\nabla}V_0(P) = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$

DOVE $\vec{E}_0$ È IL CAMPO ELETTROSTATICO IN P NEL VUOTO

SE IL DIELETTRICO OCCUPA SOLO UNA PARTE DELLO SPAZIO:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$ (resta valida perché è una relazione locale)

$$V_Q - V_P = -\int_{P\gamma_1 O} \vec{E}_0 \cdot d\vec{r} - \int_{O\gamma_2 Q} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$ (dipende da tutto lo spazio)



6. RELAZIONE FRA CARICA DI POLARIZZAZIONE E CARICA LIBERA

ABBIAMO VISTO CHE IL CAMPO DI INDUZIONE ELETTRICA È DEFINITO COME:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

DOVE, CONSIDERANDO UN DIELETTRICO ISOTROPO, IL VETTORE POLARIZZAZIONE DIELETTRICA È ESPRIMIBILE COME:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

PERTANTO, SOSTITUENDO $\vec{E} = \frac{\vec{P}}{\chi_e \varepsilon_0}$ SI RICAVA:

$$\vec{D} = \frac{\vec{P}}{\chi_e} + \vec{P} = \left(\frac{1+\chi_e}{\chi_e}\right)\vec{P} \overset{\varepsilon_r = 1+\chi_e}{=} \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\vec{P}$$

ESSENDO LA CARICA LIBERA DISTRIBUITA SU UN CONDUTTORE, QUINDI SUPERFICIALE, SI HA:

$$\oint_{\text{Sup. Gauss}} \vec{D}\cdot dA\vec{u}_m = q_{int} \longrightarrow \oint_{\text{Sup. Gauss}} \vec{D}\cdot dA\vec{u}_m = \oint_{\text{Sup. Gauss}} \sigma\, dA$$

PER CUI LA DENSITÀ DI CARICA LIBERA SU UN CONDUTTORE È:

$$\sigma = \vec{D}\cdot\vec{u}_m$$

D'ALTRO CANTO DAL PUNTO 3. SI HA CHE $\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{u}_m$

$$\longrightarrow \sigma = \vec{D}\cdot\vec{u}_m = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\vec{P}\cdot\vec{u}_m = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}\sigma_p$$

QUINDI IN UN DIELETTRICO ISOTROPO LA DENSITÀ DI CARICA DI POLARIZZAZIONE È OTTENIBILE CONOSCENDO LA DENSITÀ DI CARICA LIBERA:

$$\boxed{\sigma_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma}$$

E LA CARICA SUPERFICIALE DI POLARIZZAZIONE È DATA DA

$$\boxed{q_p = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q}$$

7. ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO IN PRESENZA DI DIELETTRICI

I DIELETTRICI VENGONO UTILIZZATI PER AUMENTARE LE CAPACITÀ DEI CONDENSATORI E DI CONSEGUENZA È MAGGIORE L'ENERGIA ELETTROSTATICA IMMAGAZZINABILE. INFATTI L'ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORE È DATA DA:

$$U_e = \frac{1}{2}CV^2$$

PER CUI A PARITÀ DI ΔV VIENE IMMAGAZZINATA PIÙ ENERGIA NEL CONDENSATORE, OVVERO VIENE PORTATA PIÙ CARICA SULLE SUE ARMATURE.
LA DENSITÀ DI ENERGIA VARIA IN ACCORDO:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \overset{\vec{D} = \varepsilon\vec{E}}{=} \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$

8. RIGIDITÀ DIELETTRICA

APPLICANDO UN CAMPO ELETTROSTATICO A UN DIELETTRICO SI OTTIENE UN EFFETTO DI POLARIZZAZIONE, MA NON SI SPOSTANO CARICHE AL SUO INTERNO.

ESISTE PERÒ UN MASSIMO VALORE K DEL CAMPO ELETTROSTATICO APPLICABILE AL MATERIALE OLTRE AL QUALE SI ORIGINANO SCARICHE.

QUESTO VALORE MASSIMO DEL CAMPO ELETTROSTATICO È DETTO RIGIDITÀ DIELETTRICA.

TIPICAMENTE, $K = 10^6 \div 10^8 \frac{V}{m}$

ELETTROSTATICA

[SCHEMA RIASSUNTIVO CAPITOLI 1-6]