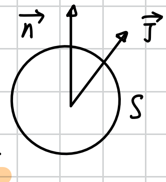
Cariche elettriche e corrente elettrica

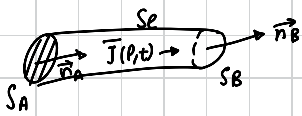


$\vec{J}(P,t) = \rho_c^+ \vec{v}_p^+ + \rho_c^- \vec{v}_p^-$ è la densità di corrente elettrica che costituisce un campo di corrente con modulo in $[A/m^2]$. $i(t) = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS$ attraversa la superficie S orientata da $\vec{n}$ e rappresenta il flusso della densità di corrente lungo S. A regime stazionario $\vec{J}$ è solenoidale.
La densità di corrente J può essere NON nulla ($\neq 0$) anche se $\rho^+ + \rho^- = 0$.

$i(t) = \int_S (\rho^+ \vec{v}^+ + \rho^- \vec{v}^-) \cdot \vec{n}\, dS$ e poiché $\vec{v}^{\pm} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s^{\pm}}{\Delta t}$, allora $i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \int_S \frac{(\rho^+ \Delta \vec{s}^+ + \rho^- \Delta \vec{s}^-) \cdot \vec{n}}{\Delta t} dS = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_s^+ + \Delta q_s^-}{\Delta t}$

Legge di continuità $i_{usc} = \frac{dq_{usc}}{dt} = -\frac{d_{int}}{dt}$ ovvero $\Delta q_{usc} = -\Delta q_{int}$, nell'ipotesi di conservazione della carica. $q = \int_V \rho^+ + \rho^- \, dV$

Tubo di flusso



né uscente dal tratto di tubo di flusso quindi $\vec{n}_A = -\vec{n}$ su S_A e $\vec{n}_B = \vec{n}$ su S_B. Poiché S_e non è sede di corrente (rivestito da isolante) e $i_{usc}(t) = 0$, si ricava $0 = i_{usc}(t) = \oint_{\partial V} \vec{J}(P,t) \cdot \vec{n}(P)\, dS$ ovvero:

$$i_{usc}(t) = \int_{S_A} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS + \int_{S_B} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS + \cancel{\int_{S_e} \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS}^{\,0} = \int_{S_A} \vec{J} \cdot (-\vec{n}_A)\, dS + \int_{S_B} \vec{J} \cdot \vec{n}_B\, dS = -i_A(t) + i_B(t) = 0$$

Campo elettrico e tensione elettrica

La conduzione elettrica è basata su interazioni tra campo di corrente $J\,(Am^{-2})$ e campo elettrico $E\,(Vm^{-1})$.

$\vec{E}_c(P) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta q} = \frac{d\vec{F}_c}{dq} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r_{QP}^2}$ è il campo elettrostatico (o campo elettrico coloumbiano) in $[N/C]$ o $[V/m]$ ed è conservativo.
Il campo elettrico, invece, in generale non è conservativo ed è costituito dalla totale forza elettrica specifica sperimentabile da una carica elettrica "di prova": $\vec{E}(P,t) \triangleq \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_e(P,t)}{\Delta q} = \frac{d\vec{F}_e(P,t)}{dq}$

$\vec{E} = \vec{E}_c$ se $\rho_c = cost$ e $\vec{J} = 0$ (condizione ELETTROSTATICA) mentre se $\rho_c = cost$ e $\vec{J} = cost$ allora $\vec{E} = \vec{E}_c$ con $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$ (condizione STAZIONARIA).

$v(t) = \int_\ell \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t}\, d\ell$ ovvero, la tensione elettrica è l'integrale di linea del campo elettrico, orientata dal versore $\vec{t}$. Dipende da ℓ e dalla sua orientazione. Nel caso in cui la linea sia aperta $V_{AB} = \int_{A,\ell}^{B} \vec{E} \cdot \vec{t}\, d\ell$ [V].
La tensione elettrica rappresenta il lavoro elettrico specifico svolto da tali forze lungo la linea ℓ. $V = \int_\ell \frac{d\vec{F}_e}{dq} \cdot \vec{t}\, d\ell = \frac{d}{dq} \int_\ell \vec{F}_e \cdot \vec{t}\, d\ell = \frac{d\mathcal{L}_e}{dq}$
Nelle regioni dove il campo elettrico è conservativo, $V_{AB} = \int_A^B \vec{E}_c \cdot \vec{t}\, d\ell = U(A) - U(B)$ ovvero il campo elettrico è una differenza di potenziale.
$V_{AB}\, i = \frac{d\mathcal{L}_{AB}}{dt}$ è pari al lavoro netto svolto dal campo elettrico sulle cariche all'interno del bipolo per unità di tempo.
Inoltre, $\mathcal{L}(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau) i(\tau)\, d\tau$ $\forall t_0$ con $t > t_0$. Il bipolo si dice passivo se $\mathcal{L}(t) \geq 0$ (lavoro ENTRANTE) qualunque sia l'istante t.

Fenomeni di conduzione e resistori

Legge di ohm e Legge di Joule

$V = RI$ $[I = 1/R\, V = GV]$ inoltre $P_d = RI^2$ è la potenza dissipata [W] da un tratto cilindrico ℓ avente resistenza R e percorso dalla corrente I costante, detto effetto Joule.

La resistività risulta funzione della temperatura. Se le variazioni sono limitate, tale dipendenza può essere ritenuta lineare ed espressa dalla relazione $\rho = \rho_0 (1 + \alpha(\theta - \theta_0))$, dove α è il coefficiente di temperatura di ogni oggetto.
$E_c\, d\ell = \rho \frac{d\ell}{dS} J\, dS$ dove $\vec{E} = \rho \vec{J}$ e $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ individua il campo di corrente.

Generatori elettrici

La forza elettrica specifica generatrice mantiene un campo di corrente stazionario $\vec{E}_g(P,t) = \frac{\vec{F}_g(P,t)}{q}$
$e(t) = \int_{B,\ell}^{A} \vec{E}_g \cdot \vec{t}\, d\ell$ è la forza elettromotrice

La f.e.m. del generatore è uguale alla sua tensione a vuoto $e = V_0$ [V]. Inoltre, $V_0 - V = E - V = R_i I$ ovvero $V = E - R_i I$ con R_i resistenza interna del generatore a carico.
$I = J - G_i V$ ovvero $J = E/R_i$ o $G = 1/R_i$. J è la corrente impressa dal generatore e corrisponde alla corrente ai morsetti quando la d.d.p. è nulla.

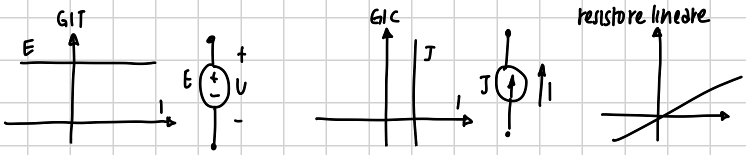
Nel caso di generatore a vuoto, c'è equilibrio tra campo elettrostatico e forza generatrice. Risulta che la f.e.m. coincide con la tensione a vuoto misurata tra A e B ovvero $e_{AB}(t) = \int_{B,\ell}^{A} -\vec{E}_c \cdot \vec{t}\, dL = \int_{A,L}^{B} \vec{E}_c \cdot \vec{t}\, dL = V_{0,AB}(t)$

Se la f.e.m. è costante nel tempo (regime stazionario), tali risultano anche la f.e.m. a vuoto e la tensione a vuoto. In particolare, $E = V_0$, il generatore è a corrente continua (DC). Se la f.e.m. è sinusoidale allora $e_{AB}(t) = V_{0AB}(t)$. Il generatore è a corrente alternata (AC)

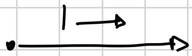
Bipoli e Potenza elettrica

Generatori elettrici ideali Si dividono in generatori ideali di tensione $(V=E, \forall I)$ e generatori ideali di corrente $(I=J, \forall V)$

Caratteristica esterna dei bipoli
Il comportamento elettrico è definito dalla relazione che esso presenta tra tensione e corrente ai morsetti

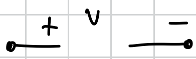


Bipoli particolari e ideali



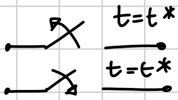
$V=0, \forall I$

Il cortocircuito è un resistore con $R=0$, ovvero un generatore con f.e.m. $=0$

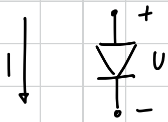


$I=0, \forall V$

Il circuito aperto è un resistore con $G=0$, ovvero un generatore con $I=0$

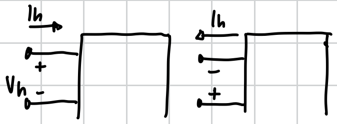


L'interruttore ideale è un bipolo passivo in quanto scambia potenza nulla $\forall t$
Si può comportare sia da cortocircuito che da circuito aperto

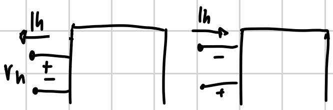


Il diodo ideale è un bipolo che, convenzionato da utilizzatore, se $I>0$ è in conduzione (cortocircuito), se $I<0$ è in interdizione (circuito aperto).

Potenza elettrica e lavoro elettrico
La potenza istantanea scambiata ad una porta è $P \triangleq VI$, più in generale, in regime variabile, $p(t) \triangleq v(t)\,i(t)$ [W]



Convenzione degli utilizzatori
$P_h \geq 0$ quindi la porta assorbe potenza (i da + a −)

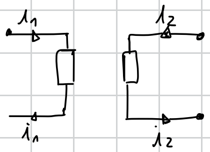


Convenzione dei generatori
$P_h > 0$, la porta eroga potenza
$P_h \leq 0$, il generatore assorbe potenza (i da − a +)

La potenza scambiata da un m-bipolo si individua come $p(t) = \sum_{h=1}^{m} p_h(t) = \sum_{h=1}^{m} v_h(t)\,i_h(t)$
$\Delta L = \int_{\Delta t} p(t)\,dt = \int_{\Delta t} v(t)\,i(t)\,dt$, è il lavoro elettrico misurato in Joule [J]

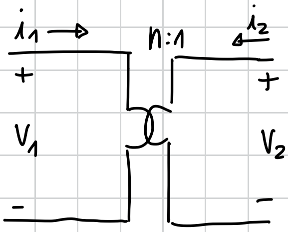
Doppi bipoli

Un doppio bipolo fissa due relazioni di legame fra le quattro grandezze delle due porte.
Due delle due grandezze sono dette "indipendenti", mentre le altre due, tramite relazioni di legame, sono dette "grandezze dipendenti".
Il doppio bipolo ideale inerte di ordine zero ha relazioni tipologiche lineari a coefficienti costanti. Se le due grandezze indipendenti sono nulle, lo sono anche le due grandezze indipendenti.



Nei doppi bipoli le coppie di terminali (porte) sono tali che, per ciascuna coppia, la corrente entrante in uno è uguale a quella uscente dall'altro

Trasformatore ideale

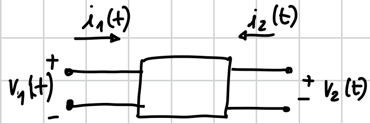
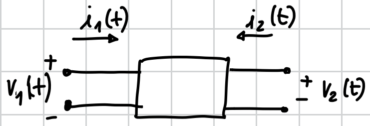
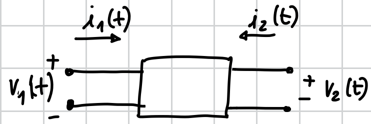
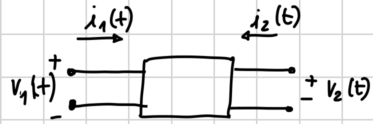
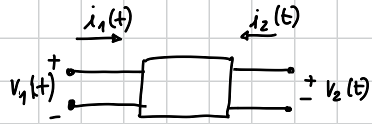
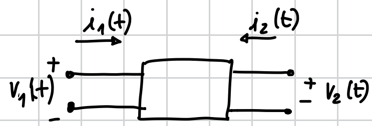


Il trasformatore è passivo ed amplifica tensioni o correnti conservando la potenza
Il trasformatore ideale è un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero, che, con le due porte convenzionate da utilizzatore, ha relazioni (con n costante adimensionale):

$$\begin{cases} V_1 = nV_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}\,i_2 \end{cases}$$

Sono possibili le due rappresentazioni ibride e di trasmissione. È immediata la prima rappresentazione di trasmissione con $A=n$, $B=0$, $C=0$ e $D=1/n$

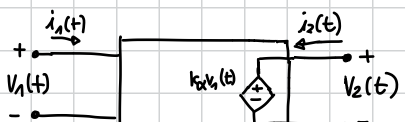
Rappresentazioni dei doppi bipoli

Tipo di rappresentazione	relazioni costitutive	matrice associata	rappresentazione parametrica
controllata in CORRENTE	$\begin{cases} v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$	matrice di resistenza $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1/i_1 & v_1/i_2 \\ v_2/i_1 & v_2/i_2 \end{bmatrix}$ [Ω]	
controllata in TENSIONE	$\begin{cases} i_1 = G_{11} v_1 + G_{12} v_2 \\ i_2 = G_{21} v_1 + G_{22} v_2 \end{cases}$	matrice di conduttanza $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1/v_1 & i_1/v_2 \\ i_2/v_1 & i_2/v_2 \end{bmatrix}$ [S]	
PRIMA rappresentazione IBRIDA	$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$	matrice ibrida [h] $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1/i_1 & v_1/v_2 \\ i_2/i_1 & i_2/v_2 \end{bmatrix}$ [Ω] [S] [adim]	
SECONDA rappresentazione IBRIDA	$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} i_2 \\ v_2 = g_{21} v_1 + g_{22} i_2 \end{cases}$	matrice ibrida [g] $\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1/v_1 & i_1/i_2 \\ v_2/v_1 & v_2/i_2 \end{bmatrix}$ [S] [Ω] [adim]	
PRIMA rappresentazione di TRASMISSIONE	$\begin{cases} v_1 = A v_2 + B(-i_2) \\ i_1 = C v_2 + D(-i_2) \end{cases}$	matrice di trasmissione $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1/v_2 & -v_1/i_2 \\ i_1/v_2 & -i_1/i_2 \end{bmatrix}$ [S] [Ω] [adim]	
SECONDA rappresentazione di TRASMISSIONE	$\begin{cases} v_2 = A' v_1 + B' i_1 \\ -i_2 = C' v_1 + D' i_1 \end{cases}$	matrice di trasmissione $\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [T'] \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2/v_1 & v_2/i_1 \\ -i_2/v_1 & -i_2/i_1 \end{bmatrix}$ [S] [Ω] [adim]	

Generatori controllati (o pilotati)

Il generatore pilotato è un doppio bipolo che impone il valore della tensione o della corrente su un lato (in modo indipendente dall'altra grandezza di quel lato), ma in modo dipendente da un'altra grandezza della rete.

Alla porta 1 c'è un circuito ideale aperto se la grandezza di controllo è una tensione oppure c'è un cortocircuito ideale se la grandezza di controllo è una corrente.



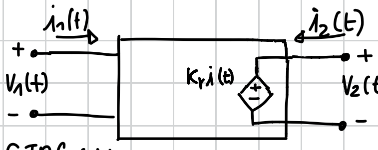
Generatore di Tensione Pilotato in Tensione (GTPT)

La porta 1 è un circuito ideale aperto $\rightarrow i_1(t) = 0$

La porta 2 ha una tensione che dipende dalla tensione della porta 1 $\rightarrow v_2(t) = k_\alpha v_1(t)$

GTPT $\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = k_\alpha v_1 \end{cases}$ (SECONDA rappresentazione IBRIDA) $\rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

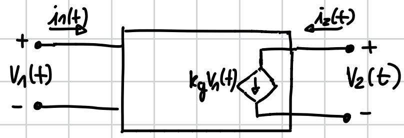
v_2/v_1



Generatore di Tensione Pilotato in Corrente (GTPC)

La porta 1 è un cortocircuito idale → $V_1(t)=0$
La porta 2 ha una tensione che dipende dalla corrente della porta 1 → $V_2(t)=K_r i_1(t)$

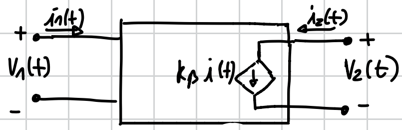
GTPC $\begin{cases} V_1=0 \\ V_2=K_r i_1 \end{cases}$ (rappresentazione controllata in CORRENTE) → $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$ V_2/i_1



Generatore di Corrente Pilotato in Tensione (GCPT)

La porta 1 è un circuito ideale aperto → $i_1(t)=0$
La porta 2 ha una corrente che dipende dalla tensione della porta 1 → $i_2(t)=k_g V_1(t)$

GCPT $\begin{cases} i_1=0 \\ i_2=k_g V_1 \end{cases}$ (rappresentazione controllata in TENSIONE) → $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ i_2/V_1

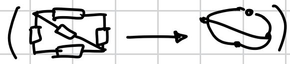


Generatore di Corrente Pilotato in Corrente (GCPC)

La porta 1 è un cortocircuito ideale → $V_1(t)=0$
La porta 2 ha una corrente che dipende dalla corrente della porta 1 → $i_2(t)=k_\beta i_1(t)$

GCPC $\begin{cases} V_1=0 \\ i_2=k_\beta i_1 \end{cases}$ (PRIMA rappresentazione IBRIDA) → $\begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ i_2/i_1

Proprietà generali delle reti elettriche (definizioni)

- lato (ℓ): il numero di lati coincide con quello dei bipoli (—▭—);
- nodo (n): punto di interconnessione tra due o più lati;
- grafo: indica i nodi per mezzo di punti e i lati per mezzo di linee curve ()
- maglia (m): insieme di lati (percorso chiuso in un grafo) che tocca i nodi una volta sola. La tensione ha segno + se si entra nel lato dal morsetto con riferimento + $m=\ell-n+1$
- anello: maglia non contenente elementi del grafo.
- insieme di taglio: insieme di lati che attraversano la superficie che contorna un volume arbitrario che include uno o più nodi del grafo. La corrente ha segno + se è coerente con l'orientazione della superficie
- albero: insieme di lati che collegano tutti i nodi del grafo, senza formare una maglia $\ell_a=n-1$
- coalbero: insieme di lati complementari ad un dato albero $\ell_c=\ell-\ell_a=\ell-(n-1)$

Leggi di Kirchhoff Individuano le ℓ equazioni topologiche indipendenti

- LKC: $\Sigma i(t)=0$ → il campo di densità di corrente è solenoidale all'esterno del bipolo (n-1 equazioni per gli insiemi di taglio);
- LKT: $\Sigma v(t)=0$ → il campo elettrico è conservativo all'esterno dei bipoli ($m=\ell-n+1$ equazioni per le m maglie)

Inoltre, $\Sigma_{h=1}^{\ell} P_h(t)=0$, $\forall t$. La somma delle potenze erogate è uguale a quelle assorbite $\Sigma_h P_{eh}(t)=P_{ah}(t)$

Reti in regime stazionario

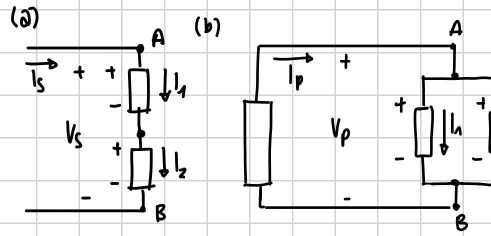
Serie e Paralleli di bipoli Considerando due bipoli B_1 e B_2:

- in serie: $I_S=I_1=I_2$ e $V_S=V_1+V_2$ (a)

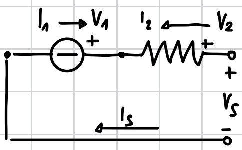
Due generatori ideali di corrente J_1 e J_2 non possono essere posti in serie, altrimenti la LKC non è rispettata.

- in parallelo: $I_S=I_1+I_2$ e $V_S=V_1=V_2$ (b)

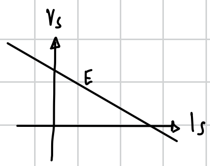
Due generatori ideali di tensione aventi f.e.m. E_1 e E_2 con $E_1 \neq E_2$ non possono essere posti in parallelo, altrimenti non si rispetta la LKT.



Generatore lineare di tensione Serie di un GIT e di un resistore



caratteristica esterna →



$\begin{cases} LKC: I_S=I_1=-I_2 \\ LKT: V_S=V_1+V_2=E+RI_2=E-RI_S \end{cases}$

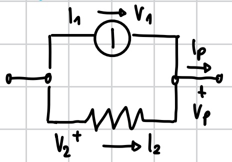
Partitore di tensione resistivo

La tensione della serie di resistori $V_s = (\sum_{k=1}^{\ell} R_k) I_s = R_s I_s$ si ripartisce su ciascun resistore proporzionalmente alla resistenza

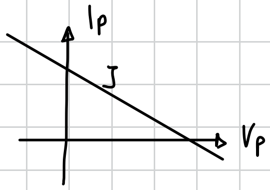
$$V_k = R_k I_k = R_k I_s = R_k \frac{V_s}{R_s} = V_s \frac{R_k}{\sum_{h=1}^{\ell} R_h}$$

Generatore lineare di corrente

Parallelo di un GIC e un resistore



caratteristica esterna



$$\begin{cases} LKC: I_p = I_1 + I_2 = J + GV_2 = J - GV \\ LKT: V_p = V_1 = -V_2 \end{cases}$$

Partitore di corrente resistivo

La corrente di un parallelo di resistori $I_p = (\sum_{k=1}^{\ell} G_k) V_p = G_p V_p$ si ripartisce su ciascun resistore proporzionalmente alla sua conduttanza

$$I_k = G_k V_k = G_k V_p = G_k \frac{I_p}{G_p} = I_p \frac{G_k}{\sum_{h=1}^{\ell} G_h}$$

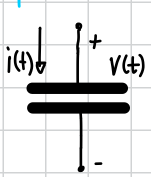
Condensatore

Un condensatore è costituito da due armature. Il campo è conservativo quindi la tensione tra due punti generici A e B delle due armature è: $V_{AB} = \int_{\ell AB} \vec{E}_c \cdot \vec{t} \, d\ell$

V_{AB} esprime la d.d.p tra le armature del condensatore. La capacità del condensatore è il rapporto tra le cariche q_A e q_B depositate sul condensatore.

$$C \triangleq \frac{q_A}{V_{AB}} = \frac{q_B}{q_{BA}} = \frac{q}{V} \quad [C/V]$$

Bipolo condensatore



Secondo la legge di continuità $i_A(t) = \frac{dq_A(t)}{dt}$ e $i_B(t) = -\frac{dq_B(t)}{dt}$ assumendo che $i_A(t) = i_B(t) = i(t)$

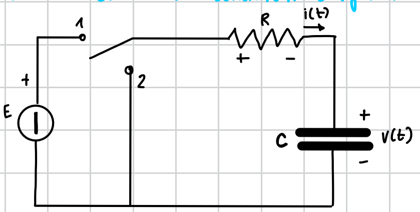
In ogni istante $q_B(t) + q_A(t) = 0$, esternamente al bipolo la corrente appare solenoidale

$V_{AB}(t)$ è dovuta al solo campo coloumbiano $\vec{E}_c$

Il condensatore è schematizzabile come un bipolo. Nell'ipotesi di C costante: $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ e $v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$

Un condensatore è in regime stazionario se $v(t) = V =$ costante e $i(t) = I =$ costante. Dalle equazioni caratteristiche del condensatore si ottiene che $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ quindi $i(t) = I = 0$. In regime stazionario un condensatore si comporta come un circuito aperto ($I = 0$, $\forall V$ costante). Tuttavia, a differenza di un circuito aperto, il condensatore è in grado di immagazzinare energia.

Carica e scarica del condensatore (generatore di tensione costante con carico ohmico-capacitivo)



Carica

$\boxed{t<0}$ il commutatore è in posizione 2. Il circuito è a riposo $\longrightarrow v(t) = 0$ e $i(t) = 0$

Dalla LKT sulla maglia contenente R e C, è nulla anche $v(t)$ ai capi del condensatore (anche in $t = 0^-$, $V_c(0^-) = 0$)

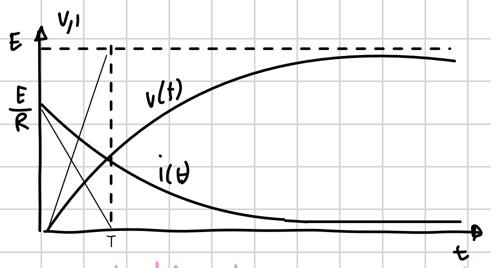
$\boxed{t=0}$ il commutatore commuta da 2 a 1. All'istante critico vale la continuità della tensione. $V_c(0^+) = V_c(0^-) \rightarrow V_c = 0$

$\boxed{t>0}$ la LKT impone $E = V_R + V$ dove $V_R = Ri$ e la corrente $i(t) \rightarrow E = RC\frac{dv(t)}{dt} + v(t)$

L'integrale generale dell'omogenea vale $V_0(t) = Ke^{-t/RC}$, dove K è una costante di integrazione. La soluzione generale è $v(t) = E + Ke^{-\frac{t}{RC}}$

La costante K va calcolata determinando la condizione iniziale, cioè $v(0^+)$. In quanto $v(0^-) = 0$, $v(0^+) = 0$ data anche la presenza del resistore R.

In $t = 0^+$, $v(0^+) = E + K = 0$, quindi $K = -E$. Da ciò si deduce $v(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ e $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$



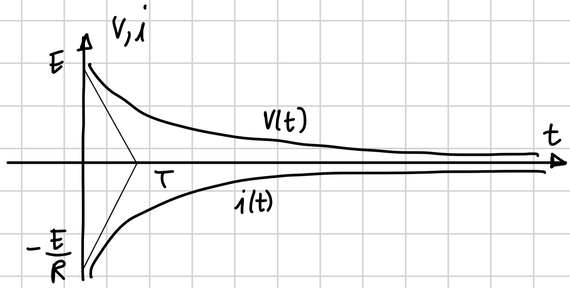
È possibile descrivere gli andamenti $v(t)$ e $i(t)$ attraverso funzioni esponenziali. Entrambe le curve sono governate dalla costante $T = RC$ detta costante di tempo

$$\begin{cases} V_R(t) + V_C(t) - V_E(t) = 0 \\ i_R(t) = i_C(t) = i_E(t) \\ V_E(t) = E \\ V_R(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

La corrente del condensatore è, a meno della costante positiva C, la derivata della tensione del condensatore ideale.

Trascorso un tempo pari a 4 o 5 volte la costante T, di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito e si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari ad E e corrente nulla. La soluzione finale trovata per la tensione e per la corrente è la stessa che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t>0$.

Scarica



$\boxed{t<0}$ Il commutatore S si trova in posizione 1 ($v(t)=E$ e $i(t)=0$)
La rete si trova a regime stazionario. Il condensatore ideale equivale a un circuito aperto quindi $i(t)=0$.
Dalla LKT sulla maglia che contiene E, R e C, la tensione ai capi del condensatore ideale è pari ad E. Questo vale anche in $t=0^-$, $V_c(0^-)=E$

$\boxed{t=0}$ S commuta da 1 in 2. All'istante critico vale la continuità della tensione. $V_c(0^+)=V_c(0^-)$. Pertanto in $t=0^-$, $V_c(0^+)=V_c(0^-)=E$

$\boxed{t>0}$ $v(t)=Ee^{-\frac{t}{RC}}$ e $i(t)=-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$. Il commutatore S è in posizione 2. Il generatore ideale di tensione è rimasto isolato dopo la commutazione e quindi si scrivono solo le relazioni della maglia identificata dai bipoli R e C.

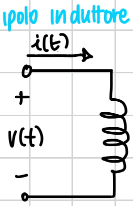
$$\begin{cases} V_R(t)+V_C(t)=0 \\ i_R(t)=i_C(t) \\ V_R(t)=Ri_R(t) \\ i_C(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt} \end{cases}$$

Anche il processo di scarica è governato dalla costante di tempo T.
Alla fine viene raggiunta una nuova condizione stazionaria con tensione e corrente nulla (circuito a riposo con condensatore scarico)
La corrente del condensatore ideale è, a meno della costante positiva C, la derivata della tensione. Trascorso un tempo pari a 4 o 5 volte la costante di tempo T, di solito nella pratica tale transitorio si può considerare esaurito e si può ritenere raggiunta la condizione finale di tensione e corrente del condensatore ideale entrambe nulle.
La soluzione finale che si ottiene è quella che si ha analizzando la rete a regime stazionario per $t>0$

Induttore

Un induttore (o circuito induttore) è costituito da un conduttore, il cui asse si sviluppa lungo una linea ℓ e i cui terminali sono posti molto vicini.
All'induttore si può associare il flusso concatenato definito $\varphi_c(t) \triangleq \int_S \vec{B}(t)\cdot\vec{n}\,dS$ con $\vec{B}$ campo di induzione.
Il rapporto $L \triangleq \frac{\varphi_c(t)}{i(t)}$ è detto induttanza (o autoinduttanza o coefficiente di autoinduzione) [Wb/A].

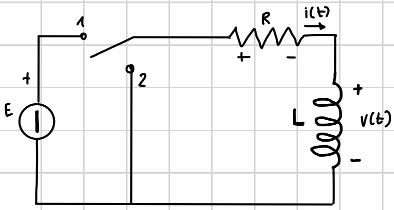
Bipolo induttore



Come nel caso di un generatore, all'induttore si applica $V_{AB}(t)=e(t)-Ri(t)=-\frac{d\varphi}{dt}$, ove a secondo membro si è posta resistenza nulla.
Utilizzando la convenzione degli utilizzatori si ottiene $v(t)=\frac{d\varphi_c(t)}{dt}$. Ricorrendo al legame $\varphi_c=Li$ e considerando un induttore ideale in cui L è costante, si deducono le relazioni: $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$ e $i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'$
Il legame tensione-corrente di un induttore è univocamente definito, a partire dall'istante iniziale $t=0$, oltre all'induttanza L.

Un induttore è in regime stazionario se $i(t)=I=$ costante e $v(t)=V=$ costante. Dovendo valere $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$ si deduce che $v(t)=V=0$, $\forall i(t)=I$
In regime stazionario un induttore si comporta come un cortocircuito. Tuttavia, a differenza di un cortocircuito, è in grado di immagazzinare energia.

Carica e scarica dell'induttore (generatore di tensione con carico ohmico-induttivo)



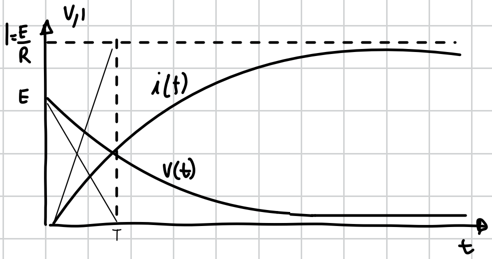
Carica

$\boxed{t<0}$ Il commutatore è in posizione 2. Il circuito è a riposo $\rightarrow$ $v(t)=0$ e $i(t)=0$
La rete è a regime stazionario. L'induttore equivale ad un cortocircuito ideale. In $t=0^-$, $i_L(0^-)=0$

$\boxed{t=0}$ Il commutatore commuta da 2 a 1. All'istante critico vale la continuità della tensione. Nel caso dell'induttore ideale, in $t=0^-$, $i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$

$\boxed{t>0}$ La LKT impone $E=V_R+V$ dove $V_R=R_i$ e la tensione esprimibile come $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$. Si ottiene: $E=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)$
Si scrivono le LKC, LKT e le equazioni dei bipoli della rete per studiarla

L'integrale generale dell'omogenea vale $i_o(t)=Ke^{-t(R/L)}$, dove K è una costante di integrazione. La soluzione generale è $i(t)=\frac{E}{R}+Ke^{-\frac{R}{L}t}$
La costante K va calcolata determinando la condizione iniziale, cioè $i(0^+)$. In quanto $i(0^-)=0$, $i(0^+)=0$ dato anche il fatto che la tensione sul generatore e sul resistore sono finite.
In $t=0^+$ $i(0^+)=E/R+K=0$, quindi $K=-E/R$. Da ciò si deduce $i(t)=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$ e $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}=Ee^{-\frac{R}{L}t}$



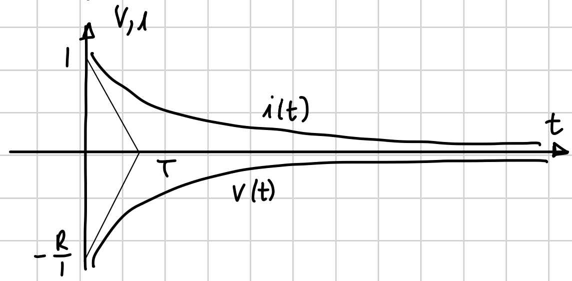
È possibile descrivere gli andamenti $v(t)$ e $i(t)$ attraverso funzioni esponenziali. Entrambe le curve sono governate dalla costante $T=L/R$ detta costante di tempo

$$\begin{cases} V_R(t)+V_L(t)-V_E(t)=0 \\ i_R(t)=i_L(t)=i_E(t) \\ V_E(t)=E \\ V_R(t)=Ri_R(t) \\ V_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Trascorso un tempo pari a 4 o 5 volte la costante di tempo T, la corrente differisce dal valore finale E/R per circa l'1% e la tensione è ridotta a circa l'1% del valore iniziale E. Nella pratica si assume che il transitorio sia esaurito con corrente nell'induttore ideale pari a E/R e tensione nulla.
La soluzione trovata è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t>0$.

Scarica

$\boxed{t<0}$ il commutatore S si trova in posizione 1 ($v(t)=0$ e $i(t)=E/R=I$)
La rete è in regime stazionario. Dalla LKT sulla maglia che contiene E, R e L la tensione V_R del resistore ideale passivo è pari ad E quindi $I_R=E/R$. Anche in $t=0^-$, $i_L(0^-)=E/R$



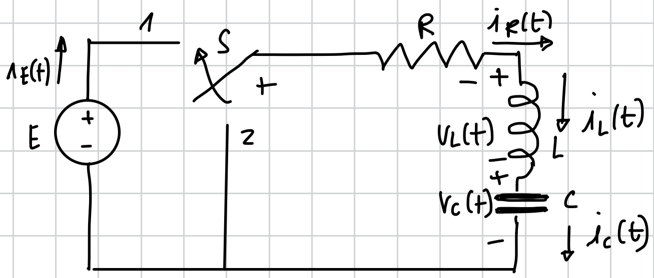
$\boxed{t=0}$ S commuta da 1 in 2. All'istante critico vale la continuità della corrente. Quindi in $t=0$, $i_L(0^+)=i_L(0^-)=E/R$

$\boxed{t>0}$ $i(t)=Ie^{-\frac{R}{L}t}$ e $v(t)=-RIe^{-\frac{R}{L}t}$
Dopo un tempo pari a 4 o 5 volte la costante di tempo T, di solito nella pratica si assume che il transitorio di carica sia esaurito. Si considera raggiunta la situazione finale di corrente dell'induttore ideale pari a zero e tensione nulla

$$\begin{cases} V_R(t)+V_L(t)=0 \\ i_R(t)=i_L(t) \\ V_R(t)=Ri_R(t) \\ V_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$$

Anche il processo di scarica è governato dalla costante di tempo T. Alla fine viene raggiunta una nuova condizione stazionaria con tensione e corrente nulla (circuito a riposo con induttore scarico)
La soluzione finale trovata per la corrente e tensione dell'induttore è la soluzione che si ottiene analizzando la rete a regime stazionario per $t>0$.

Generatore di tensione cost con carico ohmico-induttivo-capacitativo



$\boxed{t<0}$ Il commutatore S è in posizione 2. La rete è a regime stazionario.
Dalla LKT sulla maglia contenente R, L e C risulta nulla la tensione ai capi del condensatore
Per $t=0^-$, $i_L(0^-)=0$; $V_C(0^-)=0$

$\boxed{t=0}$ All'istante critico vale la continuità della tensione per ogni condensatore ideale e la continuità di corrente per ogni induttore ideale.
Quindi $i_L(0^+)=i_L(0^-)$ e $V_C(0^+)=V_C(0^-)$ ovvero per $t=0^+$, $i_L(0^+)=0$ e $V_C(0^+)=0$

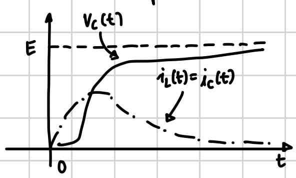
$\boxed{t>0}$ $\begin{cases} V_R(t)+V_L(t)+V_C(t)=V_E(t) \\ i_E(t)=i_R(t)=i_L(t)=i_C(t) \\ V_E(t)=E \\ V_R(t)=Ri_R(t) \\ i_C(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt} \\ V_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt} \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} Ri_C(t)+L\frac{di_C(t)}{dt}+V_C(t)=E \\ i_C(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt} \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ $LC\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+RC\frac{dV_C(t)}{dt}+V_C(t)=E$ *

* è un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti.
Si introducono i parametri $T=\frac{2L}{R}$ e $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Il parametro T è una costante di tempo mentre ω è una pulsazione. Con tali parametri l'equazione diventa $\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+\frac{2}{T}\frac{dV_C(t)}{dt}+\omega_0^2V_C(t)=\frac{E}{LC}$ $\rightsquigarrow$ per la soluzione si distinguono tre casi a seconda del valore di $\frac{1}{\omega_0 T}$.

Nei tre casi indicati, la tensione del condensatore ideale vale 0 in $t=0^+$ e ha valore finale pari ad E.
La corrente dell'induttore ideale vale 0 in $t=0^+$ e ha valore finale pari a zero.

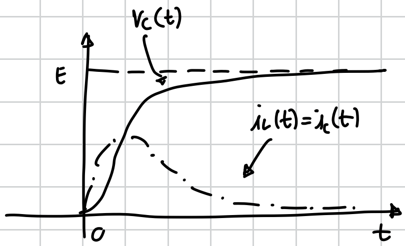
Caso sovrasmorzato $\left(\frac{1}{\omega_0 T} > 1\right)$

La tensione del condensatore ideale parte da zero, con derivata nulla ($i_C(0^+) = i_L(0^+) = 0$) e tende al valore finale E.
La derivata della tensione, moltiplicata per C, dà l'andamento della corrente $\rightarrow i_C = \frac{dv_C(t)}{dt}$
Il transitorio è caratterizzato da due costanti di tempo. Di solito nella pratica tale transitorio si considera esaurito dopo un tempo pari a circa 5 volte la maggiore fra le due costanti. Dopo tale intervento si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari ad E e corrente nulla nell'induttore ideale.



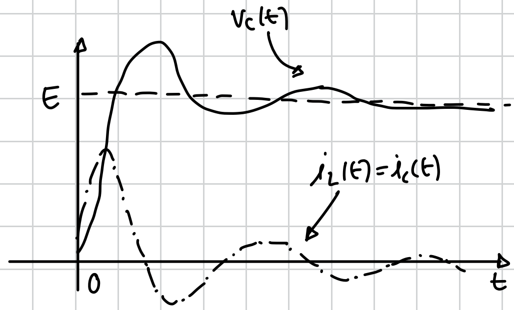
Caso criticamente smorzato $\left(\frac{1}{\omega_0 T} = 1\right)$

Nella pratica il transitorio si può considerare esaurito dopo un tempo pari a 5 volte la costante T e dopo tale intervallo si può ritenere raggiunta la situazione finale di tensione del condensatore ideale pari ad E e corrente nulla nell'induttore ideale.



Caso sottosmorzato $\left(0 < \frac{1}{\omega_0 T} < 1\right)$

La derivata della tensione del condensatore ideale, moltiplicata per C, dà l'andamento della corrente del condensatore ideale che è pari alla corrente dell'induttore ideale.
Nella pratica la situazione finale è raggiunta dopo un intervallo di circa 5 volte maggiore di T con tensione del condensatore ideale pari ad E e corrente nulla nell'induttore ideale.

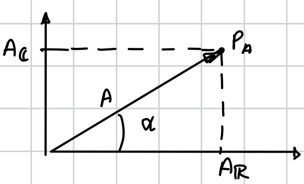


Funzioni sinusoidali e fasori

Una funzione sinusoidale può essere espressa come $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$ oppure $a(t) = A_M \cos(\omega t + \alpha - \pi/2) = A_M \cos(\omega t + \delta)$
Si definisce valore efficace A la sua media quadratica in un periodo $A \triangleq \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a^2(t)\,dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707\, A_M$
Considerate due funzioni sinusoidali ($a(t)$ e $b(t)$), dotate di uguale frequenza, la differenza tra le fasi istantanee delle due sinusoidi risulta indipendente dall'istante temporale t e pari alla differenza tra le due fasi iniziali: $\varphi(t) \triangleq (\omega t + \alpha) - (\omega t + \beta) = \alpha - \beta$. φ è detto sfasamento o anticipo di fase di $a(t)$ su $b(t)$.

Trasformata di Steinmetz-fasori

A ciascuna sinusoide isofrequenziale si associa in modo biunivoco un opportuno numero complesso con modulo pari al valore efficace A della sinusoide ed argomento pari alla sua fase iniziale α. Tale numero può essere scritto in notazione polare $\bar{A} = Ae^{j\alpha}$ con A = modulo e α = argomento
Come ogni numero complesso, i fasori possono essere espressi in notazione cartesiana, ossia in termini di parte reale A_R e coefficiente immaginario A_C
In particolare, $\bar{A} = Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha = A_R + jA_C$ inoltre $A = \sqrt{A_R + A_C}$ e $\tan\alpha = \frac{A_C}{A_R} + k\pi$ *



Un fasore generico può essere rappresentato come in figura con A_C lungo y e A_R lungo x
A costituisce la lunghezza del segmento mentre α l'angolo di rotazione antioraria dal semiasse positivo
* con $k \begin{cases} 0 & \text{se } A_R > 0 \\ 1 & \text{se } A_R < 0 \text{ e } A_C > 0 \\ -1 & \text{se } A_R < 0 \text{ e } A_C < 0 \end{cases}$

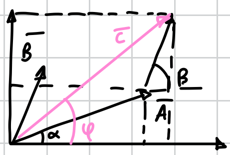
Operazioni fondamentali sui fasori

Le operazioni eseguite sui fasori corrispondono a quelle eseguite sulle funzioni sinusoidali

Somma

$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = (A_R + B_R) + j(A_C + B_C) = C_R + jC_C$

$\begin{cases} C_R = C\cos\varphi = A\cos\alpha + B\cos\beta \\ C_C = C\sin\varphi = A\sin\alpha + B\sin\beta \end{cases}$

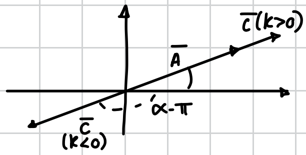


La somma dei fasori $\bar{A}$ e $\bar{B}$, rappresentativi delle sinusoidi $a(t)$ e $b(t)$, è il fasore $\bar{C}$ rappresentativo della sinusoide $c(t)$ ottenuta dalla somma di $a(t)$ e $b(t)$. Alla somma delle sinusoidi corrisponde quella dei fasori

Prodotto per uno scalare k

$\bar{C} = k\bar{A} = kAe^{j\alpha} = |k|Ae^{j(\alpha \pm n\pi)} = Ce^{j\varphi}$

$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{se } k > 0 \\ \alpha \pm \pi & \text{se } k < 0 \end{cases}$



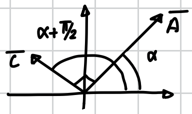
Il prodotto per uno scalare k del fasore $\bar{A}$, rappresentativo della sinusoide a(t), è il fasore $\bar{C}$ rappresentativo della sinusoide c(t) ottenuta dal prodotto per k di a(t), ovvero al prodotto per lo stesso scalare dei fasori

Prodotto per l'immaginario jω

$\bar{C} = j\omega\bar{A} = \omega Ae^{j\alpha}\, e^{j\pi/2} = \omega Ae^{j(\alpha + \pi/2)} = Ce^{j\varphi}$

$C = \omega A$ (modulo)

$\varphi = \alpha + \pi/2$ (argomento)

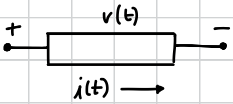


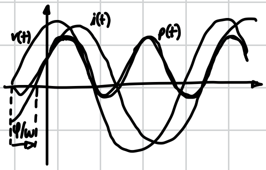
Le componenti polari sono uguali a quelle del fasore che si ottiene trasformando la derivata temporale della sinusoide, $c(t) = \frac{da(t)}{dt} = \omega\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha)$. Il prodotto del fasore $\bar{A}$, rappresentativo della sinusoide a(t), è il fasore $\bar{C}$ rappresentativo della sinusoide c(t) che costituisce la derivata temporale di a(t); ovvero alla derivata temporale delle sinusoidi corrisponde il prodotto per jω dei fasori, ove ω è la pulsazione angolare delle sinusoidi.

Reti in regime sinusoidale

Considerando un generico bipolo in regime sinusoidale, tensione e corrente sono:

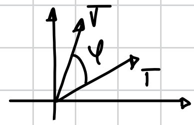
$\begin{cases} v(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \alpha) \\ i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \beta) \end{cases}$





I fasori associati sono:

$\begin{cases} \bar{V} = Ve^{j\alpha} \\ \bar{I} = Ie^{j\beta} \end{cases}$



Potenza istantanea scambiata ad una porta $p(t) = v(t)\,i(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha)\, I_M \sin(\omega t + \beta) = VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$

Potenza attiva (reale) La potenza attiva o reale è il valore medio in un periodo di una potenza periodica. $P \triangleq \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt = VI\cos\varphi$ [W]

La potenza attiva è entrante se il bipolo è convenzionato da utilizzatore, è uscente se è convenzionato da generatore.

La potenza è pari a VI se tensione e corrente sono in fase, è minima e pari a −VI se tensione e corrente sono in opposizione di fase; è nulla se tensione e corrente sono in quadratura. Nota P, il lavoro elettrico assorbito $\Delta L = P\Delta t$

Ricorrendo alla potenza attiva si determina il lavoro scambiato senza integrare nel tempo la potenza istantanea.

Potenza apparente, potenza reattiva e fattore di potenza La potenza reattiva $Q \triangleq VI\sin\varphi$ si esprime in voltampere reattivi [VAR] e la potenza apparente $S \triangleq VI$ si esprime in voltampere [VA].

La potenza apparente (S) è sempre positiva. La potenza reattiva dipende anche dallo sfasamento di tensione e corrente. È pari a VI se la tensione è in quadratura in anticipo sulla corrente e pari a −VI se la tensione è in quadratura in ritardo sulla corrente; è nulla se tensione e corrente sono in fase e in opposizione di fase.

Alcune relazioni principali sono $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $P = S\cos\varphi$ e $Q = S\sin\varphi$. Il fattore $\cos\varphi = \frac{P}{S}$ è detto fattore di potenza

Potenza complessa La potenza complessa $\dot{S}$ è il prodotto tra $\bar{V}$ e il coniugato $\bar{I}^*$ di $\bar{I}$ $\dot{S} = \bar{V}\bar{I}^* = VIe^{j\varphi}$. Inoltre sapendo che VI=S si ottiene $\dot{S} = Se^{j\varphi} = S\cos\varphi + jS\sin\varphi = P + jQ$ Il modulo della potenza complessa è pari alla potenza apparente, mentre l'argomento è pari allo sfasamento φ.

Bipoli ideali in regime sinusoidale

I bipoli ideali funzionano in regime sinusoidale quando sono sottoposti a tensione e corrente entrambi sinusoidali.

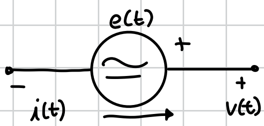
Generatori ideali in regime sinusoidale

GIT sinusoidale

$v(t) = e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t + \alpha)$

e(t) è detta tensione sinusoidale impressa

$i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta)$

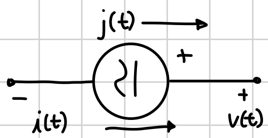


GIC sinusoidale

$i(t) = j(t) = J_M \sin(\omega t + \beta) = \sqrt{2}\, J \sin(\omega t + \beta)$

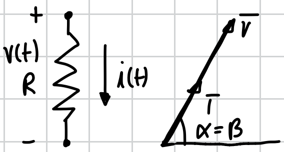
j(t) è detta corrente sinusoidale impressa

$v(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$



Bipoli passivi in regime sinusoidale

Resistore ideale



$v(t)=Ri(t)$

$\begin{cases} i(t)=I_m\sin(\omega t+\beta) \\ v(t)=RI_m\sin(\omega t+\beta)=V_m\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}$

reattanza nulla e $V_M/I_M=R$

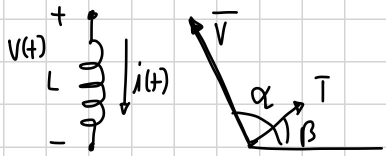
$\alpha-\beta=\varphi=0 \rightarrow \cos\varphi=1$ quindi

$P=S=VI=RI^2=V^2/R$ e $Q=0$

$\bar{V}/\bar{I}=R=\dot{z}_R=Re^{j0}$

$\bar{I}/\bar{V}=1/R=G=\dot{y}_R=1/Re^{j0}$

Induttore ideale



$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$

$\begin{cases} i(t)=I_m\sin(\omega t+\beta) \\ v(t)=\omega LI_m\sin(\omega t+\beta+\pi/2)=V_m\sin(\omega t+\alpha)\end{cases}$

$X_L=\omega L$ e $V_M/I_m=|X_L|$

$\alpha-\beta=\varphi=\pi/2 \rightarrow \cos\varphi=0 \rightarrow P=0$

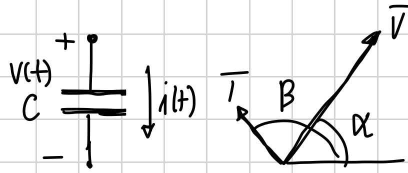
$\sin\varphi=1 \rightarrow X_LI^2=V^2/X_L=Q=S$

$\bar{V}/\bar{I}=jX_L=j\omega L=\dot{z}_L=X_Le^{j\pi/2}$

$\bar{I}/\bar{V}=1/jX_L=-j/\omega L=\dot{y}_L=1/X_Le^{-j\pi/2}$

($B_L=-1/\omega L$ suscettanza induttiva)

Condensatore ideale



$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$

$\begin{cases} v(t)=V_m\sin(\omega t+\alpha) \\ i(t)=\omega CV_m\sin(\omega t+\alpha+\pi/2)=I_m\sin(\omega t+\beta)\end{cases}$

$X_c=-1/\omega C$ e $V_M/I_m=|X_c|$

$\alpha-\beta=\varphi=-\pi/2 \rightarrow \cos\varphi=0 \rightarrow P=0$

$\sin\varphi=-1 \rightarrow X_cI^2=V^2/X_c=Q=-S$

$\bar{V}/\bar{I}=jX_c=-j/\omega C=\dot{z}_c=|X_c|e^{-j\pi/2}$

$\bar{I}/\bar{V}=1/jX_c=j\omega C=\dot{Y}_c=1/X_ce^{j\pi/2}$

($B_c=\omega C$ suscettanza capacitiva)

Impedenza e ammettenza

Si definisce impedenza del bipolo lineare e passivo, convenzionato da utilizzatore, l'operatore complesso dato dal rapporto tra fasore di corrente e di tensione. $\dot{z}\triangleq\bar{V}/\bar{I}=Ve^{j\alpha}/Ie^{j\beta}=V/I\,e^{j(\alpha-\beta)}=ze^{j\varphi}$

Il modulo $|z|$ è uguale al rapporto tra i valori efficaci $[\Omega]$, mentre l'argomento è pari allo sfasamento $\varphi=\alpha-\beta$

L'espressione cartesiana dell'impedenza è:

$\dot{z}=ze^{j\varphi}=z(\cos\varphi+j\sin\varphi)=z_R+z_C$ dove $\begin{cases} z_R=z\cos\varphi \\ z_C=z\sin\varphi\end{cases}$ con $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ quindi $z_R\geq0$ inoltre $z=\sqrt{z_R^2+z_C^2}$ e $\varphi=\arctg\frac{z_C}{z_R}$

Alla parte reale dell'impedenza è associato l'assorbimento di potenza attiva, mentre alla parte immaginaria è associato l'assorbimento di potenza reattiva.

Si definisce ammettenza l'operatore complesso dato dal rapporto tra fasore di corrente e fasore di tensione

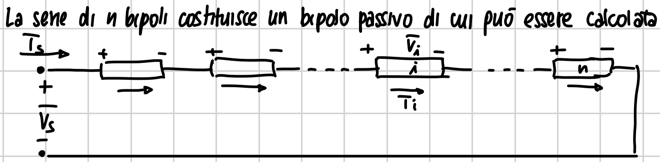
$\dot{Y}\triangleq\bar{I}/\bar{V}=I/Ve^{j(\beta-\alpha)}=Ye^{-j\varphi}$ ed è il reciproco dell'impedenza [S].

L'espressione cartesiana è $\dot{Y}=Ye^{-j\varphi}=1/z(\cos\varphi-j\sin\varphi)=Y_R+Y_C$ con $\begin{cases} Y_R=\cos\varphi/z \\ Y_C=-\sin\varphi/z\end{cases}$

Rete di bipoli passivi

Serie di bipolo passivi

La serie di n bipoli costituisce un bipolo passivo di cui può essere calcolata l'impedenza equivalente. Il bipolo equivalente ha impedenza pari alla somma delle impedenze



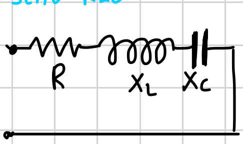
$\bar{V}_i=\dot{z}_i\bar{I}_i$ $i=1,\dots,n$

$\bar{V}_s=\Sigma_{i=1}^n\bar{V}_i$

$\bar{I}_s=\bar{I}_i$ $i=1,\dots,n$

$\bar{V}_s=(\Sigma_{i=1}^n\dot{z}_i)\bar{I}_s=\dot{z}_s\bar{I}_s$ con $\dot{z}_s=\Sigma_{i=1}^n\dot{z}_i$

Serie RLC



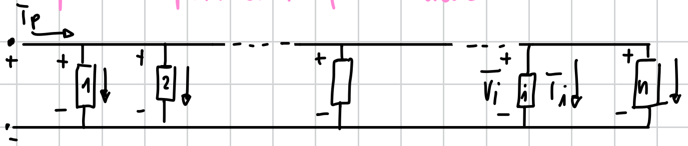
La serie RLC equivale ad un bipolo con impedenza e reattanza:

$\dot{z}_s=R+j(X_L+X_c)$ e $\dot{Y}_s=\frac{1}{\dot{z}}=\frac{R}{z_s^2}+j\frac{-(X_c+X_L)}{z_s^2}$

Le parti reali sono entrambe non negative: $z_{sR}\geq0$ e $Y_{sR}\geq0$, coerentemente con la condizione di passività.

Parallelo di bipoli passivi

Il parallelo di n bipoli costituisce un bipolo passivo di cui può essere calcolata l'impedenza equivalente. Il bipolo equivalente ha impedenza pari al reciproco della somma dei reciproci delle impedenze.



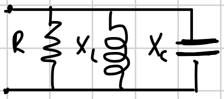
$\bar{I}_i = \dot{Y}_i \bar{V}_i \quad i = 1,\dots,n$ $\quad \bar{V}_i = \bar{V}_p \quad i=1,\dots,n$

$\bar{I}_p = \Sigma_{i=1}^{n} \bar{I}_i$ $\quad \bar{I}_p = (\Sigma_{i=1}^{n} \dot{Y}_i)\bar{V}_p = \dot{Y}_p \bar{V}_p$

con $\dot{Y}_p \triangleq \Sigma_{i=1}^{n} \dot{Y}_i$

ovvero $\frac{1}{\dot{Z}_p} \triangleq \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{\dot{Z}_i}$

Parallelo RLC

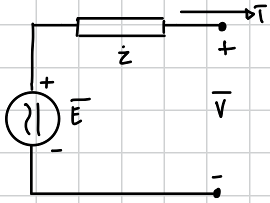


Il parallelo RLC equivale ad un bipolo le cui ammettenza e impedenza sono:

$\dot{Y}_p = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}\right)$ e $\dot{Z}_p = \frac{1}{\dot{Y}_p} = \frac{Z_p^2}{R} + j Z_p^2 \left(\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C}\right)$ $\quad \left[Z_p^2 = \frac{1}{Y_p^2} = \frac{1}{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{X_L} + \frac{1}{X_C})^2}\right]$

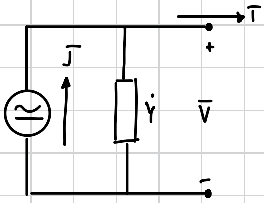
Rete simbolica

Impedenza ed ammettenza permettono di rappresentare i bipoli passivi per mezzo delle relazioni simboliche $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$ e $\bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$. Inoltre, il generatore ideale simbolico di tensione ha equazione $\bar{V} = \bar{E} = Ee^{j\alpha}$ e il generatore ideale simbolico di corrente ha equazione $\bar{I} = \bar{J} = Je^{j\beta}$



La serie di un GIT simbolico e di un bipolo passivo di impedenza $\dot{Z}$ è detto generatore lineare simbolico di tensione

$\bar{V} = \bar{E} - \dot{Z}\bar{I}$



Il parallelo di un GIC simbolico e di un bipolo passivo di ammettenza $\dot{Y}$ è detto generatore lineare simbolico di corrente

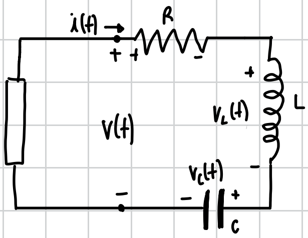
$\bar{I} = \bar{J} - \dot{Y}\bar{V}$

Per l'insieme dei bipoli della rete simbolica vale la conservazione delle potenze complesse $\Sigma_{h=1}^{\ell} \bar{V}_h \bar{I}_h^* = \Sigma_{h=1}^{\ell} \dot{S}_h = 0$ ovvero:

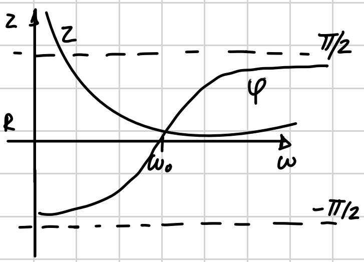
$\Sigma_{h=1}^{\ell} (P_h + jQ_h) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma_{h=1}^{\ell} P_h = 0 \\ \Sigma_{h=1}^{\ell} Q_h = 0 \end{cases}$ Vale la conservazione delle potenze attive e delle potenze reattive delle reti in regime sinusoidale.

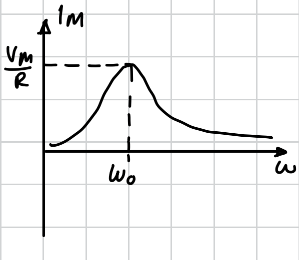
Comportamento in frequenza e risonanza elettrica

Risonanza serie



Il bipolo è alimentato alla tensione sinusoidale $v(t) = V_M \sin\omega t$ con impedenza $\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ con modulo $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ ed argomento $\varphi(\omega) = \arctan\left((\omega L - 1/\omega C)/R\right)$





Comportamento in frequenza

X_C e X_L dipendono da $\omega = 2\pi f$.

A parità della tensione applicata $v(t)$, risultano funzione di ω anche lo sfasamento $\varphi(\omega)$ della corrente $i(t)$ rispetto a $v(t)$ e la sua ampiezza $I_M = V_M / Z(\omega)$

- per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ detta pulsazione di risonanza, X_L e X_C sono uguali in modulo. $Z(\omega_0) = R$ assume il valore minimo, e l'argomento $\varphi(\omega_0)$ è nullo. Questa è la condizione di risonanza serie.

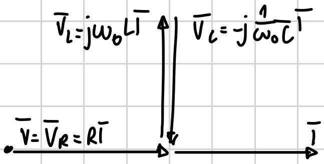
- per $\omega < \omega_0$ X_C prevale su X_L e la serie si comporta come un circuito RC. La corrente è in anticipo di fase sulla tensione

$\lim_{\omega \to 0} Z(\omega) = \infty \longrightarrow \lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = -\pi/2$

- per $\omega > \omega_0$ X_L prevale su X_C e la serie si comporta come un circuito RL. La corrente è in ritardo di fase sulla tensione

$\lim_{\omega \to \infty} Z(\omega) = \infty \longrightarrow \lim_{\omega \to \infty} \varphi(\omega) = \pi/2$

Funzionamento in risonanza



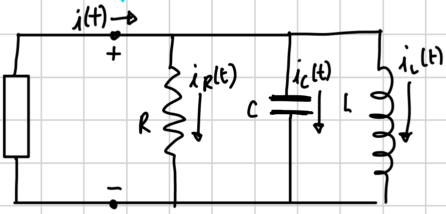
$\bar{V}_L$ e $\bar{V}_C$ risultano uguali in modulo e in opposizione di fase

$\bar{V}_{tot}$ coincide con $\bar{V}_R$ ed è in fase con la corrente.

La serie assorbe solo potenza attiva

$Q = Q_L + Q_C = X_L I^2 + X_C I^2 = (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) I^2 = 0$ → la potenza reattiva entrante risulta nulla

Risonanza parallelo o antirisonanza

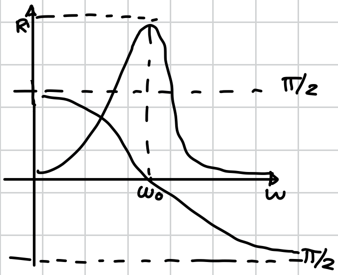


Il bipolo è alimentato alla tensione sinusoidale $v(t) = V_m \sin \omega t$ con impedenza

$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\frac{1}{R} - j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Modulo e argomento valgono $Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$ e $\varphi(\omega) = \arctan\left[\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) R\right]$

Comportamento in frequenza



- per $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ detta pulsione di risonanza la corrente è in fase con la tensione ed ha ampiezza $I_m = V_m/R$

Le due reattanze sono uguali in modulo. $Z(\omega_0) = R$ assume il valore massimo. L'argomento $\varphi(\omega_0)$ è nullo.

Detta condizione di risonanza o antirisonanza

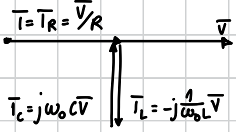
- per $\omega < \omega_0$ X_L prevale su X_C ed il parallelo si comporta come un circuito RL. La corrente è in ritardo di fase sulla tensione

$\lim_{\omega \to 0} Z(\omega) = 0 \longrightarrow \lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = \pi/2$

- per $\omega > \omega_0$ X_C prevale su X_L ed il parallelo si comporta come un circuito RC. La corrente è in anticipo di fase sulla tensione

$\lim_{\omega \to \infty} Z(\omega) = 0 \longrightarrow \lim_{\omega \to \infty} \varphi(\omega) = -\pi/2$

Funzionamento in antirisonanza



$\bar{I}_L$ e $\bar{I}_C$ risultano uguali in modulo e in opposizione di fase. La corrente totale $\bar{I}$ coincide con la corrente nel resistore $\bar{I}_R$ ed è in fase con la tensione

Il parallelo si comporta come un resistore di resistenza R ed assorbe solo potenza attiva.

La potenza reattiva entrante risulta nulla perché nell'induttore e nel condensatore entrano potenze tra loro opposte

$Q = Q_L + Q_C = \frac{V^2}{X_L} + \frac{V^2}{X_C} = \left(\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C\right) V^2 = 0$