(1) (a) $W_1 = \{ X \in \mathbb{R}^{d \times d} : X^T X = I_d \}$

(b) $W_2 = \{ X \in \mathbb{R}^{d \times d} : AX = O_d \}$

(a) $X^T X = I_d, \quad Y^T Y = I_d$

Verificare se $X + Y \in W_1$ con $X, Y \in W_1$

cioè $(X+Y)^T (X+Y) =$

$= X^T X + X^T Y + Y^T X + Y^T Y = I_d + X^T Y + Y^T X + I_d \neq I_d$

$\Longrightarrow X + Y \notin W_1$ ~~W_1~~ non è sottospazio

(b) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad X, Y \in W_2$

$\lambda X + \mu Y \in W_2$?

$$A(\lambda X + \mu Y) = \lambda \underbrace{AX}_{= O_d} + \mu \underbrace{AY}_{= O_d} = O_d$$

è sottospazio vettoriale

(2) Per le proprietà delle derivate

$$f(p_1(t)+p_2(t)) = (p_1(t)+p_2(t))'' - 2(p_1(t)+p_2(t))'$$
$$= p_1''(t) - 2p_1'(t) + p_2''(t) - 2p_2'(t) =$$
$$= f(p_1(t)) + f(p_2(t)) \qquad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$$

Similmente si verifica che

$$f(\lambda p(t)) = \lambda f(p(t)) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$$

La matrice associata a f rispetto alla base canonica $B(1, t, t^2, t^3)$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = (\underset{v_0}{\uparrow 1}, \underset{v_1}{\uparrow t}, \underset{v_2}{\uparrow t^2}, \underset{v_3}{\uparrow t^3})$$

1ª colonna

$$f(v_0) = 0 = \boxed{0\cdot(1) + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3}$$

2ª col.

$$f(v_1) = -2 = \boxed{-2\cdot(1) + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3}$$

3ª col.

$$f(v_2) = 2 - 4t = \boxed{2\cdot(1) + (-4)\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3}$$

$$f(v_3) = 6t - 6t^2 = \boxed{0\cdot 1 + 6\cdot t + (-6)\cdot t^2 + 0\cdot t^3}$$

4ª col.

③ Dalle proprietà delle matrici segue che

ⓐ $f(A+B) = (A+B) + (A+B)^T = (A+A^T) + (B+B^T) = f(A) + f(B)$

ⓑ $f(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda f(A)$

$\Rightarrow$ f è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Determino la matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ dove $\mathcal{B}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21}$

$f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{12} + E_{21}$ $\qquad f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Si verifica che una base per $\mathrm{Im} f$ è data da

$$\{ f(E_{11}),\ f(E_{12}),\ f(E_{22}) \} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ $\dim \mathrm{Im} f = 3$

Dal Teorema della dimensione $\quad \dim \ker f = 1 = \underset{\dim \mathbb{R}^{2\times 2}}{\underset{\parallel}{4}} - 3$

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Un vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 E_{11} + x_2 E_{12} + x_3 E_{21} + x_4 E_{22}$

appartiene a $\ker(f)$ se

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\ker(f) = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} ;\ X = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= L\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\square$

④ I vettori $v_1 = (1,3,0)$, $v_2 = (0,0,2)$, $v_3 = (0,1,0)$ sono linearmente indipendenti e formano una base

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Trovo la "regola" per $f(x_1, x_2, x_3)$ con (x_1, x_2, x_3) arbitrario.

$$v = (x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 =$$
$$= (\lambda_1, 3\lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_2)$$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = 3\lambda_1 + \lambda_3 \\ x_3 = 2\lambda_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_3 = x_2 - 3x_1 \\ \lambda_2 = \dfrac{x_3}{2} \end{cases}$$

Ricordiamo che f è determinata dalla formula

$$f(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \lambda_3 f(v_3) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (x_2 - 3x_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_3}{2} \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$