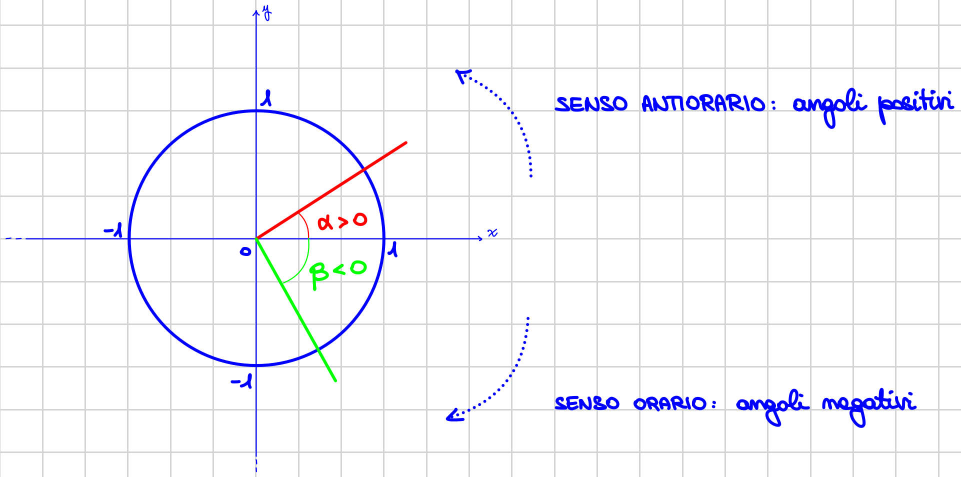
# Vademecum di goniometria

## FUNZIONI GONIOMETRICHE

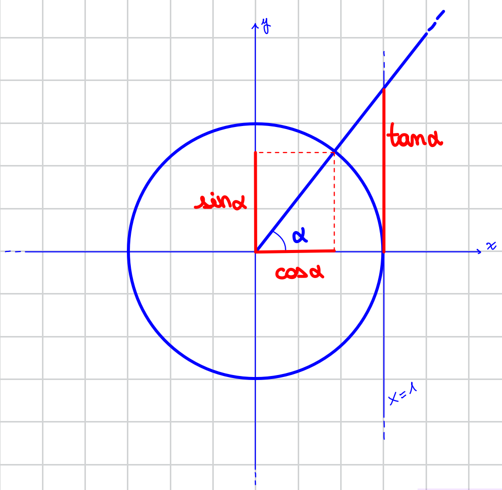
Tutte le funzioni goniometriche sono definite a partire dalla circonferenza goniometrica, ovvero la circonferenza di equazione:

$x^2 + y^2 = 1$ ⟶ circonferenza di raggio 1 con il centro sull'origine degli assi.




Graficamente, dato un angolo sulla circonferenza goniometrica:

- il SENO dell'angolo è individuato dalla sua proiezione sull'asse $y$;
- il COSENO dell'angolo è individuato dalla sua proiezione sull'asse $x$;
- la TANGENTE dell'angolo è individuata dall'intersezione tra il suo prolungamento su I / IV quadrante e la retta di equazione $x = 1$.




Tramite il teorema di Pitagora è presto verificabile che: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

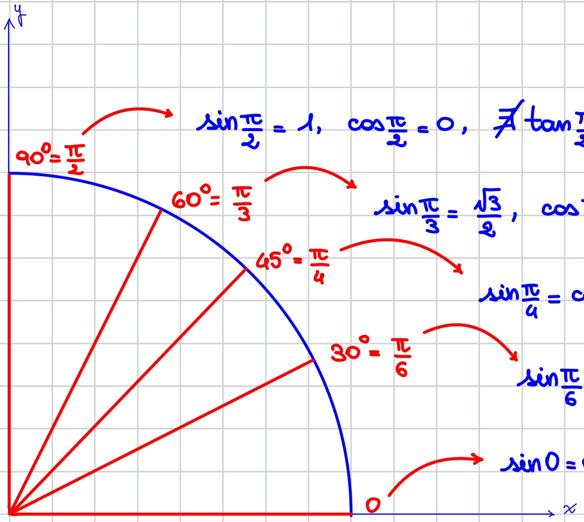
La funzione tangente è definibile anche come: $\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

Esistono anche le funzioni reciproche:

- SECANTE $\quad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
- COSECANTE $\quad \csc\alpha$ (o $\operatorname{cosec}\alpha$) $= \dfrac{1}{\sin\alpha}$
- COTANGENTE $\quad \operatorname{cotg}\alpha$ (o $\operatorname{cotan}\alpha$) $= \dfrac{1}{\tan\alpha}$

Esistono anche delle funzioni inverse... che vedrete a lezione!

## VALORI NOTEVOLI (che sarebbe bene ricordare anche per corsi futuri) E ANGOLI ASSOCIATI




$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \nexists \tan\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \tan 0 = 0$

Sono stati descritti i valori notevoli di seno e coseno solo per angoli nel I quadrante. Negli altri quadranti i valori sono simili, ma con segni diversi.
Per ricavare questi valori, si può ricorrere ai cosiddetti angoli associati:

dato un angolo $\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$

$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \quad \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$

$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \quad \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = -\sin\alpha, \quad \tan\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = \sin\alpha, \quad \tan\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) = -\operatorname{cotg}\alpha$

## FORMULE GONIOMETRICHE

Ricordiamo che le funzioni goniometriche NON sono funzioni lineari, quindi non vale:

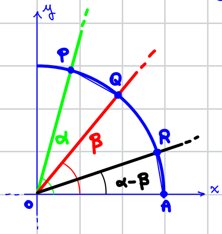
$$\sin(r\alpha + s\beta) = r\cdot\sin\alpha + s\cdot\sin\beta \qquad \text{con } r,s \in \mathbb{R}$$

Esistono le seguenti formule goniometriche con le relative dimostrazioni

- FORMULA DI ADDIZIONE/SOTTRAZIONE DEL COSENO $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

DIMOSTRAZIONE:

Considero due angoli $\alpha$ e $\beta$ con $\alpha > \beta$ nel I quadrante della circonferenza goniometrica:




Noto che gli angoli $A\hat{O}R$ e $P\hat{O}Q$ sono congruenti a $(\alpha-\beta)$

Tramite la definizione di seno e coseno ricavo le coordinate di A, P, Q, R:

$A(1,0) \qquad P(\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad Q(\cos\beta, \sin\beta)$

$R(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))$.

Per la congruenza degli angoli $PQ = AR \Leftrightarrow PQ^2 = AR^2$. Imposto questo calcolo tramite il teorema di Pitagora:

$$PQ^2 = AR^2 \Leftrightarrow (\cos\beta-\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2 = (1-\cos(\alpha-\beta))^2 + \underbrace{\sin^2(\alpha-\beta)}_{= 1-\cos^2(\alpha-\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\cos^2\alpha} + \cancel{\cos^2\beta} - 2\cos\beta\cos\alpha + \cancel{\sin^2\alpha} + \cancel{\sin^2\beta} - 2\sin\alpha\sin\beta = \cancel{1} + \cancel{\cos^2(\alpha-\beta)} - 2\cos(\alpha-\beta) + \cancel{1} - \cancel{\cos^2(\alpha-\beta)}$$

$$\Leftrightarrow -2\cos\beta\cos\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta = -2\cos(\alpha-\beta)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

QED ▨

Per dimostrare l'addizione si usano gli angoli associati insieme alla relazione trovata ora:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha-(-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

QED ▨

- FORMULA DI ADDIZIONE/SOTTRAZIONE DEL SENO $\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

DIMOSTRAZIONE:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha\pm\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\mp\beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta \pm \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

QED ▨

- **FORMULA DI ADDIZIONE/SOTTRAZIONE DELLA TANGENTE** $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}$$

Divido numeratore e denominatore prima per $\cos\alpha\cos\beta$.

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\beta}}\pm\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\dfrac{\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}\mp\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

QED ■

- **FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL COSENO** $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

DIMOSTRAZIONE:

$$\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$$

QED ■

- **FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL SENO** $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

DIMOSTRAZIONE: $\sin(2\alpha)=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ QED ■

- **FORMULA DI DUPLICAZIONE DELLA TANGENTE** $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

DIMOSTRAZIONE:

$$\tan(2\alpha)=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=2\,\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

QED ■

- **FORMULE DI BISEZIONE**

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

DIMOSTRAZIONE:

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \iff \cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\iff \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \iff \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \iff \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \iff \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cancel{2}}} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{2}}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

QED ▨

- **FORMULE DI PROSTAFERESI**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

**FORMULE DI WERNER:**

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

DIMOSTRAZIONE: dimostrabili verificando le uguaglianze implementando le formule goniometriche date sopra.