Quiz 1

Question 1

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

L'insieme

$\{(3x, e^x) : x \in [1,2]\}$ è: (può esserci più di una risposta esatta)

Select one or more:

- a. il sostegno di una curva
- b. Il grafico di $e^{x/3}$, $x \in [3,6]$
- c. una linea
- d. una curva
- e. il grafico di e^x, $x \in [1,2]$

Check

RISPOSTE:

a) IL SOSTEGNO DI UNA CURVA

b) IL GRAFICO DI $e^{\frac{x}{3}}$, $x \in [3,6]$

SPIEGAZIONE:

a) E' LA DEFINIZIONE DI SOSTEGNO: $\gamma([a,b]) := \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$

b) $\gamma(a) = 3$, $\gamma(b) = 6$ $\rightarrow [3,6]$

$$\begin{cases} t = 3x \\ y = e^x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{t}{3} \\ y = e^{\frac{t}{3}} \end{cases}$$

Question 2

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f : [0,10] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che $f(8) = -5$ e $f'(8) = -4$.

Usando l'approssimazione dei valori di una funzione attraverso la derivata stimare $f(8.06)$.

Answer:

Check

$g: [0,10) \to \mathbb{R}$ t.c. $g(8) = -5$
$g'(8) = -4$

STIMARE $g(8.06)$

SOL. USO L'APPROSSIMAZIONE AL 1° ORDINE (PROPOSIZIONE 1.5 Pag. 13)

$$\boxed{g(t) = g(t_0) + g'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)}$$

dove: $t = 8.06$ | io so che $g(8) = -5$
$t_0 = 8$ | $g'(8) = -4$

$\to g(8{,}06) \approx g(8) + g'(8)(8{,}06 - 8) = -5 + (-4)(0.06) = -5.24$ ✓

Question 3

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Per ogni $x \geq 0$ sia $L(x)$ la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 4e^{-3t}$, $t \in [0, x]$.

Calcolare il limite $\lim_{x \to +\infty} L(x)$; scrivere 10000 se il limite è $+\infty$.

Answer:

Check

$\rho(t) = 4e^{-3t}$, $t \in [0, x]$

CALCOLARE $\lim_{x \to +\infty} L(x)$

SOL. LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA IN COORDINATE POLARI E' DATA DA:

$$\boxed{L(x) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2}\, dt}$$

DOVE:

$\rho(t) = 4e^{-3t}$

$\rho'(t) = -12e^{-3t}$

$\rho'(t)^2 = 144\, e^{-6t}$

DEVO CALCOLARE $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sqrt{144e^{-6t} + 16e^{-6t}}\, dt$

$$= \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \sqrt{160\, e^{-6t}}\, dt = \sqrt{160} \int_0^x (e^{-6t})^{\frac{1}{2}}\, dt = \sqrt{160} \int_0^x e^{-3t}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{160}}{-3} \int_0^x -3e^{-3t}\, dt = \frac{\sqrt{160}}{-3} \left[e^{-3t}\right]_0^{+\infty} = \frac{\sqrt{160}}{-3} \left[e^{-\infty} - e^{0}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{160}}{-3} [0 - 1] = \frac{\sqrt{160}}{3} = 4.2163$$ ✓

Question 4

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare la lunghezza della curva $f(t) = (3\cos t, 3\sin t, 7t)$, $t \in [-5, 5]$.

Answer:

Check

$\gamma(t) = (3\cos t,\ 3\sin t,\ 7t)$, $t \in [-5,5]$, CALCOLARE $L(\gamma)$

SOL. LA LUNGHEZZA DI UNA CURVA E' DATA DA: (TEOREMA 1.1. PAG. 17)

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt}$$

1. TROVO IL VETTORE $\gamma'(t)$ DERIVANDO COMPONENTE PER COMPONENTE
2. CALCOLO $|\gamma'(t)|$
3. INTEGRO

1) $\gamma'(t) = (-3\sin t,\ 3\cos t,\ 7$

2) $\sqrt{9\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 49} = \sqrt{9(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + 49} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

3) $\int_{-5}^{5} \sqrt{58}\,dt = \left[\sqrt{58}\,t\right]_{-5}^{5} = 5\sqrt{58} - (-5\sqrt{58}) = 5\sqrt{58} + 5\sqrt{58} = 10\sqrt{58} = 76.1577$ ✓

Question 5

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Si calcoli la lunghezza del *grafico* di $h(t) = 5t^{3/2}$, $t \in [1,6]$.

Answer:

Check

CALCOLARE LA LUNGHEZZA DEL GRAFICO DI $h(t) = 5t^{3/2}$, $t \in [1,6]$

Sol. USO LA FORMULA DELL'ESEMPIO 1.23 p. 17

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+h'(t)^2}\,dt}$$

DOVE:

$\gamma(t) = (t, 5t^{3/2})$

$\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2}\cdot 5t^{\frac{1}{2}}) = (1, \frac{15}{2}\sqrt{t})$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1+\left(\frac{15}{2}\sqrt{t}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{225}{4}t}$$

$$\to L(\gamma) = \int_1^6 \sqrt{1+\frac{225}{4}t}\,dt =$$

SOST. $\begin{cases} x = 1+\frac{225}{4}t \to t = \frac{4x-4}{225} \to t = \frac{4}{225}x - \frac{4}{225} \\ dt = \frac{4}{225}dx \end{cases}$

$$\to \int_{\frac{229}{4}}^{\frac{677}{2}} \sqrt{x}\cdot\frac{4}{225}\,dx = \frac{4}{225}\int_{\frac{229}{4}}^{\frac{677}{2}} \sqrt{x}\,dx = \frac{4}{225}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{229}{4}}^{\frac{677}{2}} = \frac{8}{675}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{229}{4}}^{\frac{677}{2}}$$

$$= \frac{8}{675}\left[\left(\frac{677}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{229}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = 68.6776$$

V

Question 6

Not complete

Marked out of 0.10

Flag question

Sia C una curva nel piano definita da:

$x(t) = t^2, y(t) = t^3$ per $t \in [1,2]$.

Quale delle seguenti curve ha la stessa lunghezza di C?

- a. $x(s) = s^2+1, y(s) = s^3+1$ per $s \in [-1,1]$
- b. $x(s) = 2s - s^2, y(s) = (2s-s^2)^{3/2}$ per $s \in [1,2]$
- c. $x(s) = \sqrt{s}, y(s) = s^{3/2}$ per $s \in [1,16]$
- d. $x(s) = s^3, y(s) = s^4$ per $s \in [1, \sqrt[3]{2}]$

Check

SIA C: $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $\quad t \in [1,2]$

TROVARE QUALE CURVA HA LA STESSA LUNGHEZZA DI C, TRA:

a. $a(s) = (s^2+1, s^3+1)$, $\quad s \in [-1,1]$

b. $b(s) = (2s-s^2, (2s-s^2)^{3/2})$ $\quad s \in [1,2]$

c. $c(s) = (\sqrt{s}, s^{3/2})$ $\quad s \in [1,16]$

d. $d(s) = (s^3, s^4)$ $\quad s \in [1, \sqrt[3]{2}]$

SOL. NON HO MOLTA SCELTA SE NON CALCOLARE LA LUNGHEZZA DI TUTTE LE CURVE E VEDERE QUALE HA LA STESSA LUNGHEZZA DI C. LA FORMULA È LA SOLITA (TEOREMA 1.1. p. 17):

$$\boxed{L(F) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt}$$

1. TROVO LA LUNGHEZZA DI C:

$\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [1,2]$

$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$

$|\gamma'(t)| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$

$$\rightarrow L(\gamma) = \int_1^2 \sqrt{4t^2+9t^4}\, dt = \int_1^2 \sqrt{t^2(4+9t^2)}\, dt = \int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\, dt = 7.6337$$

2. CALCOLO LA LUNGHEZZA DELLE ALTRE CURVE

a) $a(s) = (s^2+1, s^3+1)$, $s \in [-1,1]$

$a'(s) = (2s, 3s^2)$

$|a'(s)| = \sqrt{4s^2+9s^4}$

$$L(a(s)) = \int_{-1}^{1} \sqrt{4s^2+9s^4}\, ds = 2.8794 \quad ✗$$

b) $b(s) = (2s-s^2, (2s-s^2)^{\frac{3}{2}}$

$b'(s) = (-2s+2, -3(s-1)\sqrt{-s-2s}\,)$

...

c) $c(s) = (\sqrt{s}, s^{\frac{3}{2}})$, $\quad s \in [1,16]$

$$c'(s) = \left(\frac{1}{2\sqrt{s}}, \frac{3\sqrt{s}}{2}\right)$$

$$|c'(s)| = \sqrt{\frac{1}{4s} + \frac{9s}{4}}$$

$$\rightarrow L(c(s)) = \int_1^{16} \sqrt{\frac{1}{4s} + \frac{9s}{4}}\, ds = 63.1241$$

d) $d(s) = (s^3, s^4)$, $s \in [1, \sqrt[3]{2}]$

$$d'(s) = 3s^2, 4s^3$$

$$|d'(s)| = \sqrt{9s^4 + 16s^3}$$

$$L(d(s)) = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \sqrt{9s^4 + 16s^6}\, ds = 1.8201$$

(Qui c'era un errore sulla traccia e il professore ci ha annullato il quesito)