# COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
# Ingegneria dell'Informazione
# 1 Febbraio 2016

**Esercizio 1.** [11 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = -10^3 \, \frac{(s^2+1)(1+0.01s)}{s^2\,(s^2-4s+100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

**Esercizio 2.** [8.5 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+9)}{(s+16)^2(s-24)}$$

è richiesto di tracciare i luoghi positivo e negativo, determinando punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario. Si discuta quindi il numero di poli a parte reale positiva, nulla e negativa di $W(s)$ al variare di $K$ reale, deducendo in particolare per quali valori reali di $K$ il sistema retroazionato è BIBO-stabile.

Infine, senza calcolare punti doppi ed intersezioni con l'asse immaginario ma solo gli asintoti, è richiesto, basandosi sull'intuizione e sull'analisi del caso precedente, di discutere cosa cambierebbe nel luogo positivo ed, in particolare, alla BIBO-stabilità, qualora il numeratore $(s+9)$ fosse sostituito da $(s+8)$.

**Esercizio 3.** [6 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

1. progettare un controllore stabilizzante $C_1(s)$ (del tipo rete anticipatrice, ritardatrice o a sella), che soddisfi le specifiche: tipo 0, $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-4}$ (al gradino), $\omega_a \simeq 10$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$;

2. progettare un controllore stabilizzante $C_2(s)$ (del tipo P, PI, PD o PID), che soddisfi le specifiche: tipo 1, $e_{rp}^{(2)} \simeq 1$ (alla rampa), $\omega_a \simeq 10$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.

**Teoria.** [5 punti] Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

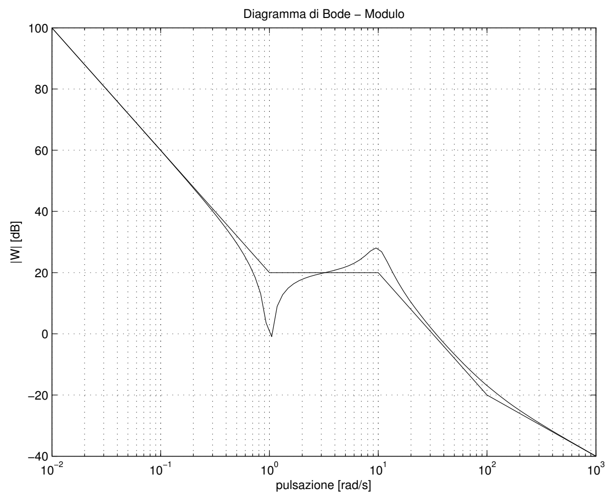
($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) e sollecitato dal segnale di ingresso

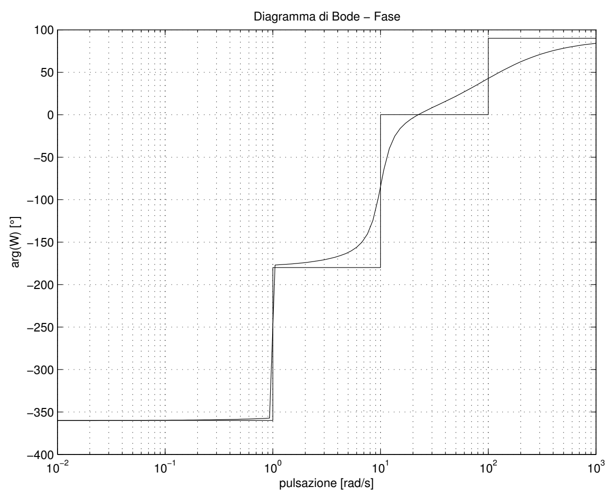
$$u(t) = e^{j\tilde{\omega}t}\delta_{-1}(t),$$

con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fissato. Assumendo condizioni iniziali arbitrarie, si introducano i concetti di risposta di regime permanente e di risposta transitoria, e si dimostri (operando nel dominio del tempo) come sotto opportune ipotesi l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema sia sempre esprimibile come somma delle due. Come cambia la risposta alla precedente domanda se le condizioni iniziali del sistema sono nulle?

# SOLUZIONI

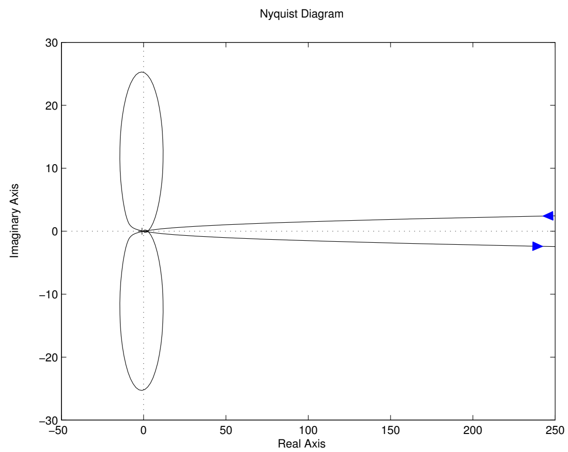
**Esercizio 1.** i) [5 punti]



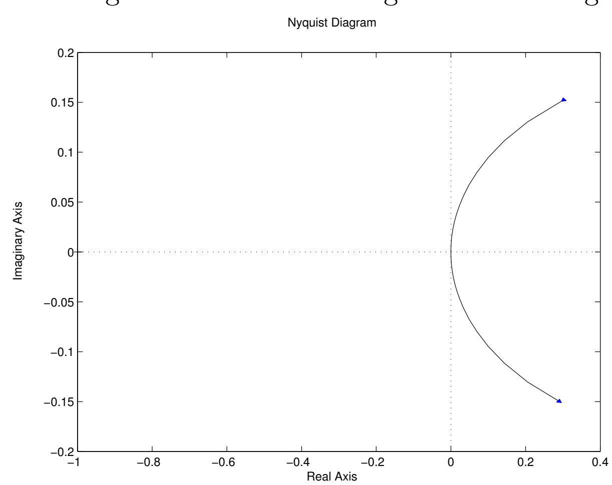




Si noti che il picco negativo alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec è in realtà illimitato verso il basso, in quanto corrisponde ad una coppia di zeri immaginari coniugati.

ii) [6 punti]




Nella figura seguente il dettaglio dell'arrivo del diagramma nell'origine per $\omega = \pm\infty$.




$N = -1, n_{G+} = 2$ e quindi $n_{W+} = -3$. Pertanto $W(s)$ non è BIBO stabile ed ha tre poli a parte reale positiva.

**Esercizio 2.** L'equazione dei punti doppi conduce facilmente a

$$(s + 16)(2s^2 + 3s + 96) = 0$$

che conduce solo alla soluzione banale $s = -16$ ($K = 0$), in quanto il discriminante del termine di secondo grado è negativo, e non possono esserci punti doppi complessi se $G(s)$ ha grado minore di 4. Quindi non ci sono punti doppi non banali.

Nel luogo positivo abbiamo due asintoti verticali centrati in $s = \frac{1}{2}$, mentre in quello negativo gli asintoti sono i semiassi reali positivo e negativo.

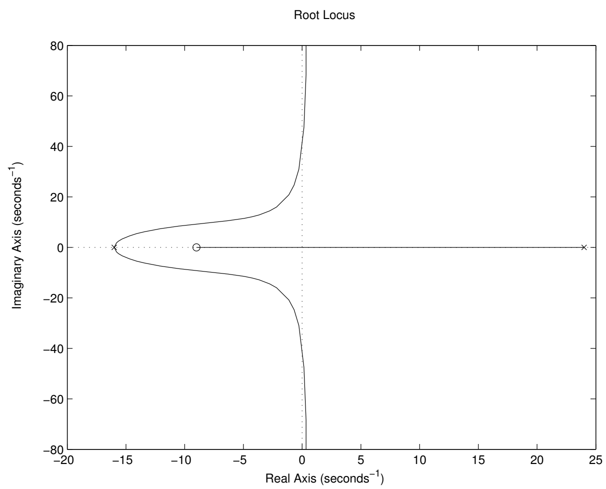
Cercando le intersezioni con l'asse immaginario si trova

$$(j\omega + 16)^2(j\omega - 24) + K(9 + j\omega) = 0 \;\Rightarrow\; j\omega(K - 512 - \omega^2) + (9K - 6144 - 8\omega^2) = 0$$

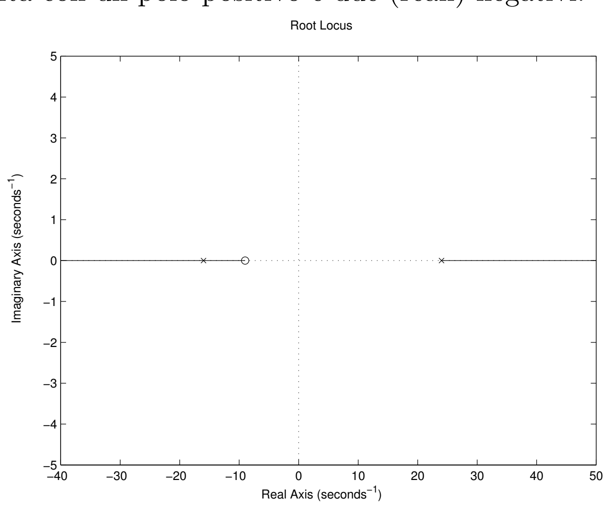
La parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ e per $\omega^2 = K - 512$. Sostituendo tali valori nella parte reale si trova $K = \frac{2048}{3} > 0$ in corrispondenza ad $\omega = 0$, mentre $K = 2048 > 0$ e

$\omega = \pm 16\sqrt{6}$ nell'altro caso. Quindi l'asse immaginario è intersecato solo nel luogo positivo, una prima volta nell'origine e poi nei punti $s = \pm j16\sqrt{6}$.

- Nel luogo positivo, un ramo parte da $s = 24$ e, muovendosi sull'asse reale, attraversa l'origine per $K = \frac{2048}{3}$ e poi prosegue fino a $s = -9$, mentre gli altri due rami escono con simmetria coniugata dal polo doppio $s = -16$, attraversano l'asse immaginario per $K = 2048$ nei punti $s = \pm j16\sqrt{6}$, e poi proseguono verso gli asintoti verticali centrati in $s = \frac{1}{2}$. Si ha quindi BIBO-stabilità per $\frac{2048}{3} < K < 2048$, quando tutti i rami sono alla sinistra dell'asse immaginario. Per $0 \leq K \leq \frac{2048}{3}$ abbiamo un polo positivo (che diventa nullo per $K = \frac{2048}{3}$) e due complessi coniugati a parte reale negativa, mentre per $K \geq 2048$ abbiamo un polo negativo e due complessi coniugati a parte reale positiva (che diventano a parte reale nulla per $K = 2048$).

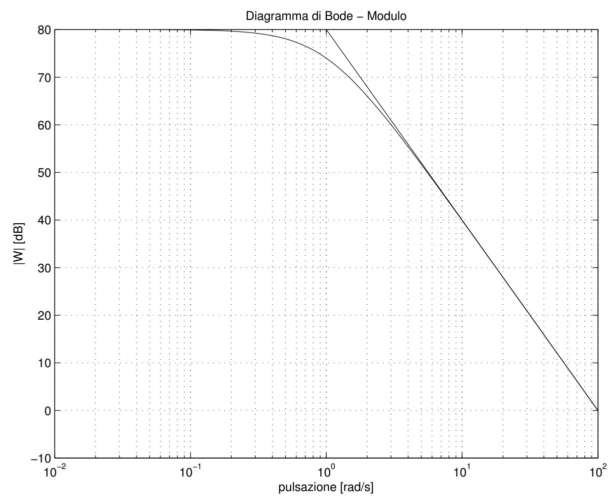


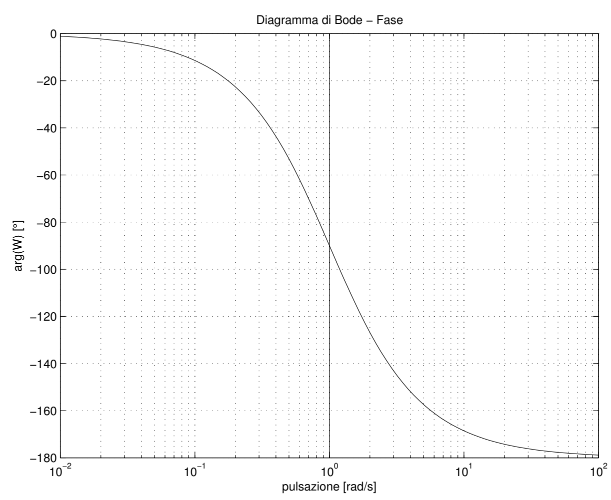

- Nel luogo negativo, abbiamo solo rami reali: uno che da $s = 24$ va verso $+\infty$, ed altri due che escono da $s = -16$, dirigendosi uno verso $s = -9$ e l'altro verso $-\infty$. Essendoci sempre uno (ed uno solo) ramo a destra dell'asse immaginario, abbiamo sempre instabilità con un polo positivo e due (reali) negativi.



Quello che cambia con $(s+8)$ è la posizione dell'asintoto verticale, ora coincidente con l'asse immaginario. La forma del luogo analizzato precedentemente suggerisce che in tal caso il diagramma mantenga la sua forma, ma non vada più ad attraversare l'asse immaginario in punti diversi da $s = 0$, per cui si avrebbe BIBO-stabilità da un certo valore $K_0$ in poi, dove $K_0 = 768$ corrisponde al passaggio per l'origine (e si può valutare semplicemente dalla formula $K = -\frac{d(s)}{n(s)}$, che fornisce il valore di $K$ per cui il luogo passa per un certo punto $s \in \mathbb{C}$ dato). Quindi si avrebbe BIBO-stabilità per $K > 768$. In effetti, un calcolo esplicito di punti doppi e di intersezioni con l'asse immaginario confermerebbe questa considerazione intuitiva: la forma del luogo non cambia ma scompaiono due intersezioni con l'asse immaginario.

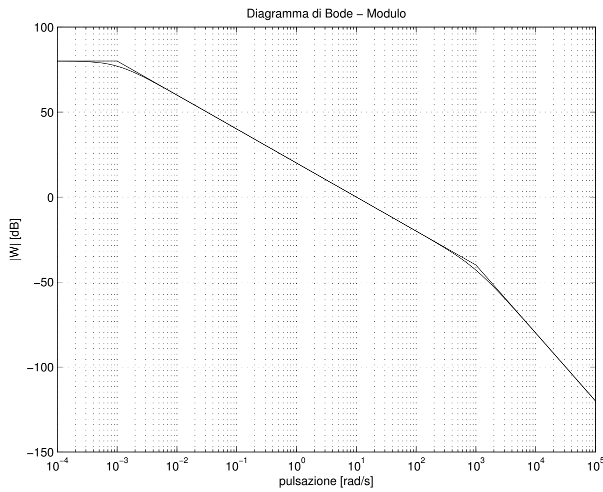
**Esercizio 3.** (1) Per $C_1(s)$ è necessaria una rete a sella. Infatti, dopo aver sistemato il guadagno per l'errore a regime ($C_1'(s) = 10^4$),

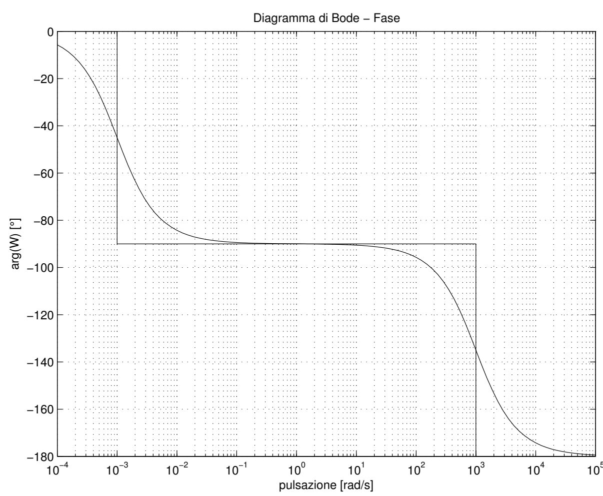



il diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s)$ taglia l'asse a 0dB in $\omega_a \simeq 100$ con margine di fase in $\omega = 10$ di pochi gradi. Occorre quindi abbassare il modulo di circa 40dB (per tagliare nella $\omega_a$ desiderata), ma anche alzare la fase, il che si può ottenere solo con una rete a sella, che abbassi ad esempio il modulo di 60dB con la prima coppia polo-zero (distante quindi 3 decadi), e poi lo alzi di 20dB (con distanza zero-$\omega_{a,DES}$ pari ad 1 decade, e l'altro polo in alta frequenza, ad esempio in $s = -10^3$). Una soluzione possibile, scegliendo gli zeri per semplicità coincidenti (ottenendo così anche il vantaggio di una doppia cancellazione zero-polo) è quindi la seguente (il Criterio di Bode garantisce la stabilità BIBO del sistema ottenuto da $C_1(s)G(s)$ per retroazione unitaria negativa):

$$C_1(s) = 10^4 \frac{(1+s)^2}{(1+10^3 s)(1+10^{-3}s)}$$

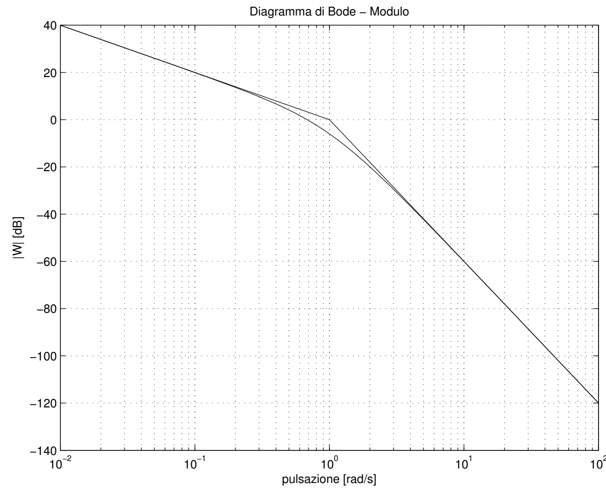


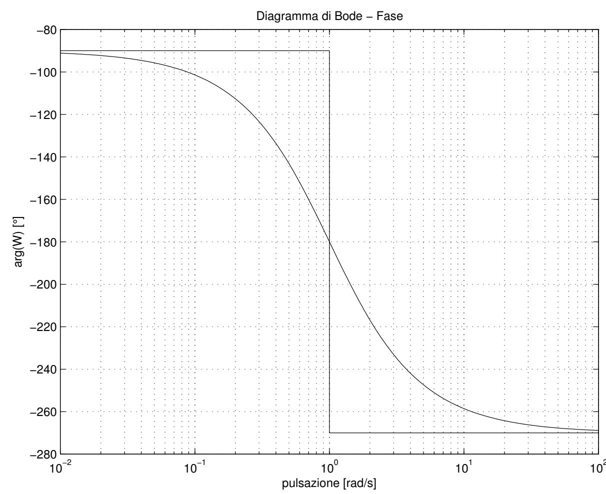




(2) Per $C_2(s)$, anzitutto serve un PI o PID dovendo essere il sistema di tipo 1, ed un PI non è adatto non essendo in grado di migliorare il margine di fase. Quindi necessariamente occorre un PID, della forma

$$C_2(s) = \frac{1}{s}(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)$$

in quanto la parte $\frac{1}{s}$ è necessaria per i requisiti a regime.

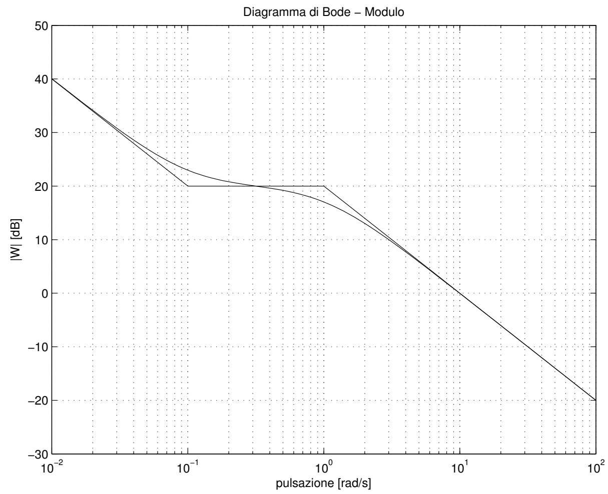


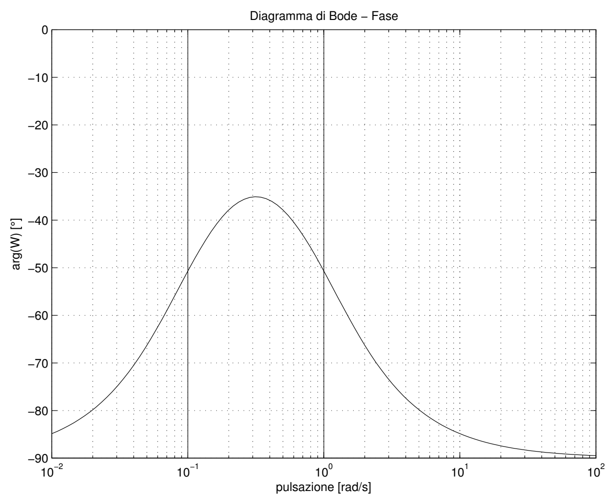




Tra le infinite soluzioni, quella più semplice posiziona uno zero in $s = -1$ (creando una cancellazione zero-polo), e l'altro una decade prima, per ottenere la $\omega_a$ desiderata. Quindi, ad esempio

$$C_2(s) = \frac{(1+10s)(1+s)}{s} = \frac{1}{s} + 11 + 10s$$

soddisfa i requisiti (il Criterio di Bode garantisce la stabilità BIBO del sistema ottenuto da $C_1(s)G(s)$ per retroazione unitaria negativa).




**Teoria.** Si veda il Capitolo 4 del Libro di testo.