ESERCIZI TUTORATO

1. Sia M lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.
   - Si determini la dimensione e una base di M.
   - Indicato con S il sottospazio di M costituito dalle matrici simmetriche, si determini la dimensione e una base di S.
   - Sia U il sottospazio vettoriale di M generato dalle matrici

     $$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

     Si scrivano le equazioni cartesiane di U e si determini una base di $U \cap S$.
   - Sia $f : M \to \mathbb{R}$ la funzione che associa ad una matrice $X \in M$ la traccia della matrice prodotto XA, ove A è una matrice (qualunque) fissata . Si stabilisca se la funzione f è lineare.
   - Sia P l'insieme delle matrici i cui coefficienti sono ≥ 0. P è un sottospazio vettoriale di M?
   - Chi è il sottospazio vettoriale di M generato dall'insieme di tutte le matrici invertibili?

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $f(x, y, z) = (2x+y-3z, -x+2z, x-2y-4z)$.
   - Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche del dominio e codominio.
   - Si determinino delle basi di $Ker(f)$ e $Im(f)$ e si dica se $Ker(f)$ e $Im(f)$ sono in somma diretta.
   - Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (0, -1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$, $w_3 = (1, -1, 0)$ del codominio.
   - Si determini una matrice S tale che $B = SA$.
   - Le matrici A e B sono simili? Perchè?

3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

   $$r : \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - 2z - 7 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

   Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta l incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $R \in r$ e $S \in s$ di minima distanza.