A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 18 giugno 2024

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x,y,z) = (2x+2z,\ y-z,\ -x+2y-3z,\ x+y)$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_3 = 0$. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Poniamo $U = \operatorname{Im} f$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Determinare per quali valori di a e b esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = (a, -1, -4, b)$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui il nucleo di A è diverso da $\{0\}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio poniamo t uguale al valore trovato al punto (a). Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

(d) Sia B una matrice con lo stesso polinomio caratteristico di A. Si dica se è possibile trovare una matrice invertibile R tale che $B = R^{-1}AR$ (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $w_1 = (1, -1, -1, 1)$ trovare un vettore w_2 che sia ortogonale a w_1 e tale che, detto W il sottospazio generato da w_1 e w_2, si abbia $W = U^\perp$

(c) Scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme di soluzioni sia il sottospazio $W = U^\perp$

(d) Dato il vettore $v = (1, -1, 1, 3)$ si trovi un vettore $u \in U$ tale che il vettore $v - u$ abbia norma minima.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le due rette

$$r : \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2z - 5 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

(b) Dato il punto $R = (0, 2, 1) \in r$ trovare il punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia ortogonale a r e a s.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e passante per il punto $A = (-1, 1, 0)$.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ contenuta nel piano σ, passante per $A = (-1, 1, 0)$ e ortogonale alla retta r.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 18 giugno 2024

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x,y,z) = (x-2y-3z,\ -2x+y,\ y+2z,\ 2x+2z)$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 3x_3 = 0$. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Poniamo $U = \operatorname{Im} f$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Determinare per quali valori di a e b esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = (a, -5, 1, b)$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & t \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui il nucleo di A è diverso da $\{0\}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio poniamo t uguale al valore trovato al punto (a). Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

(d) Sia B una matrice con lo stesso polinomio caratteristico di A. Si dica se è possibile trovare una matrice invertibile R tale che $B = R^{-1}AR$ (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $w_1 = (1,1,1,1)$ trovare un vettore w_2 che sia ortogonale a w_1 e tale che, detto W il sottospazio generato da w_1 e w_2, si abbia $W = U^\perp$

(c) Scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme di soluzioni sia il sottospazio $W = U^\perp$

(d) Dato il vettore $v = (0,-1,1,4)$ si trovi un vettore $u \in U$ tale che il vettore $v - u$ abbia norma minima.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le due rette

$$r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

(b) Dato il punto $R = (1,-1,0) \in r$ trovare il punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia ortogonale a r e a s.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e passante per il punto $A = (0,-3,-1)$.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ contenuta nel piano σ, passante per $A = (0,-3,-1)$ e ortogonale alla retta r.

C

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 18 giugno 2024

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x,y,z) = (-y+2z,\ 2x+y,\ -x+2y-5z,\ x+2y-3z)$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_2 - 3x_3 = 0$. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Poniamo $U = \operatorname{Im} f$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Determinare per quali valori di a e b esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = (a,4,3,b)$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui il nucleo di A è diverso da $\{0\}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio poniamo t uguale al valore trovato al punto (a). Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

(d) Sia B una matrice con lo stesso polinomio caratteristico di A. Si dica se è possibile trovare una matrice invertibile R tale che $B = R^{-1}AR$ (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $w_1 = (1,1,-1,-1)$ trovare un vettore w_2 che sia ortogonale a w_1 e tale che, detto W il sottospazio generato da w_1 e w_2, si abbia $W = U^\perp$

(c) Scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme di soluzioni sia il sottospazio $W = U^\perp$

(d) Dato il vettore $v = (3,1,-1,1)$ si trovi un vettore $u \in U$ tale che il vettore $v - u$ abbia norma minima.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le due rette

$$r : \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

(b) Dato il punto $R = (1,0,2) \in r$ trovare il punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia ortogonale a r e a s.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e passante per il punto $A = (0,-1,1)$.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ contenuta nel piano σ, passante per $A = (0,-1,1)$ e ortogonale alla retta r.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1$^{\text{o}}$ appello — 18 giugno 2024

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x,y,z) = (2x+2y,\ x-2y+3z,\ -x+y-2z,\ -y+z)$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 6x_3 = 0$. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Poniamo $U = \operatorname{Im} f$. Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Determinare per quali valori di a e b esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $f(v) = (a, -3, 1, b)$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui il nucleo di A è diverso da $\{0\}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio poniamo t uguale al valore trovato al punto (a). Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice diagonale.

(d) Sia B una matrice con lo stesso polinomio caratteristico di A. Si dica se è possibile trovare una matrice invertibile R tale che $B = R^{-1}AR$ (la risposta deve essere giustificata).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Dato il vettore $w_1 = (1,1,1,1)$ trovare un vettore w_2 che sia ortogonale a w_1 e tale che, detto W il sottospazio generato da w_1 e w_2, si abbia $W = U^\perp$

(c) Scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme di soluzioni sia il sottospazio $W = U^\perp$

(d) Dato il vettore $v = (4, 0, -1, 1)$ si trovi un vettore $u \in U$ tale che il vettore $v - u$ abbia norma minima.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le due rette

$$r : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y - 2z + 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano che le contiene entrambe.

(b) Dato il punto $R = (0, 1, -1) \in r$ trovare il punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia ortogonale a r e a s.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e passante per il punto $A = (-1, 0, -3)$.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ contenuta nel piano σ, passante per $A = (-1, 0, -3)$ e ortogonale alla retta r.