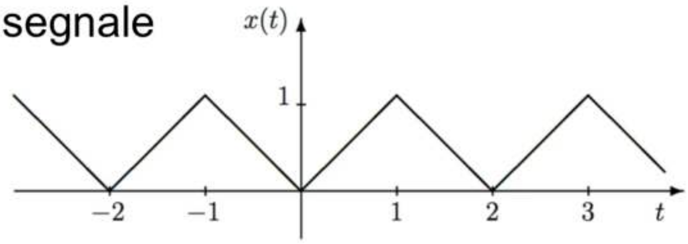
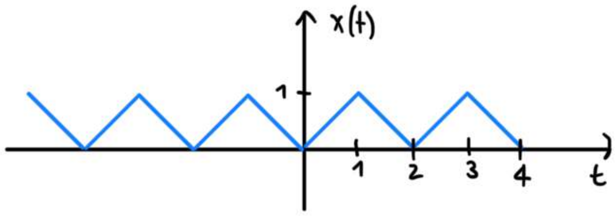
Lezione 15 - 12/04/2024

Es 8 (onda triangolare)
Calcolare la serie di Fourier del segnale



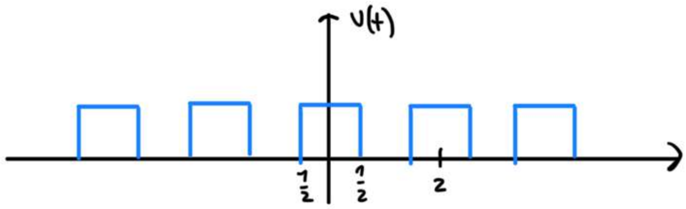
CALCOLARE GLI X_K DEL SEGNALE:



SOL. LA PRIMA IDEA E' QUELLA DI USARE LA REGOLA DI DERIVAZIONE (prova a farlo x casa)

ALTRA IDEA: riconosciamo che in un periodo, il segnale è una convoluzione tra 2 rect

$$\text{triang}(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$$
$$v(t) = \text{rep}_2\, \text{rect}(t) \qquad \text{(E' UN'ONDA QUADRA CON DUTY CICLE } d = \tfrac{1}{2}\text{)}$$



$x(t) = \text{rep}_2\, \text{triang}$

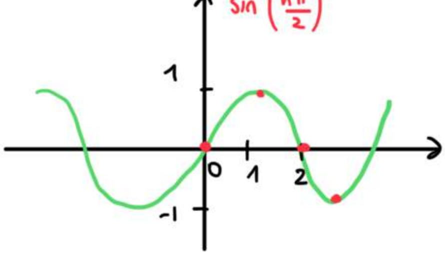
SE RICONOSCO CHE UN SEGNALE E' LA CONVOLUZIONE PERIODICA DI 2 SEGNALI, IL SEGNALE PUO' ESSERE ESPRESSO COME LA CONVOLUZIONE PERIODICA DELLA RIPETIZIONE PERIODICA DEI 2 SEGNALI (mal di testa?) (si veda Slide 32)

$V_K = \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{K}{2}\right)$

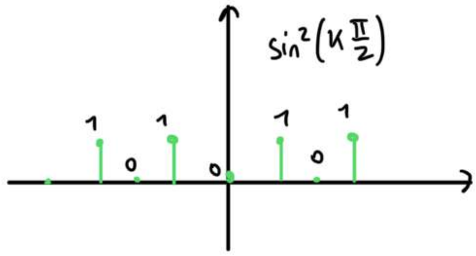
$$X(t) = \text{rep}_2\, \text{triang}(t) \overset{?}{=} \underset{\text{PERIODICA}}{\underset{\uparrow}{v * v(t)}}$$

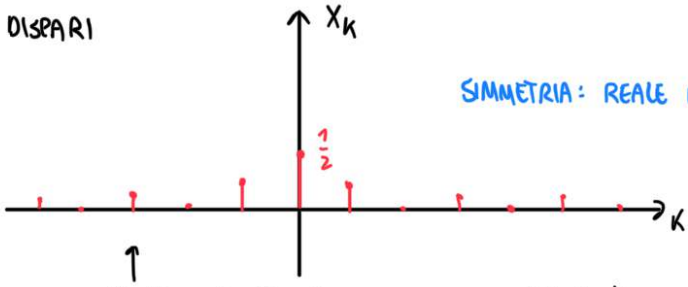
$$\rightarrow X_K = T_p \cdot V_K \cdot V_K = 2 \cdot \frac{1}{4}\,\text{sinc}^2\left(\frac{K}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{sinc}^2\left(\frac{K}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & K = 0 \\ \frac{1}{2}\,\frac{\sin^2\left(\frac{K\pi}{2}\right)}{\left(\frac{K\pi}{2}\right)^2} & K \neq 0 \end{cases}$$



$$\Longrightarrow X_K = \begin{cases} \frac{1}{2} & K = 0 \\ 0 & K \text{ PARI} \neq 0 \\ \frac{2}{(K\pi)^2} & K \text{ DISPARI} \end{cases}$$





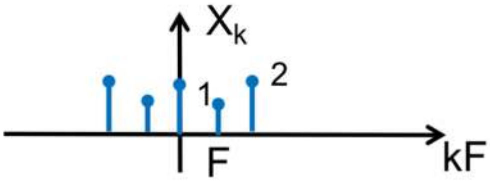
SIMMETRIA: REALE E PARI

quelli dispari diventano sempre più piccoli

Es 1

Calcolare i coefficienti della serie di Fourier, valor medio e potenza per i seguenti segnali

- **l'impulso** periodico $comb_{Tp}(t)$
- il segnale **costante** $s(t)=1$
- la **sinusoide** $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ con $\omega_0=2\pi/T_p$
- il **segnale** $s(t) = x(t)\cos(10\omega_0 t)$ con $\omega_0=2\pi F$, $F=1/T_p$ e T_p la periodicità del segnale $x(t)$ avente coefficienti di Fourier



Rifacciamo questo esercizio con la regola del prodotto

ESERCIZIO 1d

$$s(t) = \underbrace{x(t)}_{x(t)} \underbrace{\cos(10\, W_0 t)}_{y(t)} \qquad W_0 = \frac{2\pi}{T_P}$$

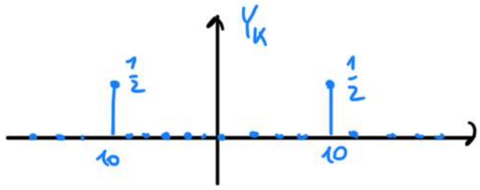
CALCOLARE S_K

SOL. SUPPONIAMO CHE $x(t)$ ABBIA COEFFICIENTI X_K
$y(t)$ Y_K

$$S_K = X_K * Y_K = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m Y_{K-m}$$

$$y(t) = \cos(10 W_0 t) = \frac{e^{j10W_0t}}{2} + \frac{e^{-j10W_0t}}{2}$$

$$Y_K = \frac{1}{2}\delta(K-10) + \frac{1}{2}\delta(K+10)$$



$$S_K = X_K * \left[\frac{1}{2}\delta(K-10) + \frac{1}{2}\delta(K+10)\right]$$

$$= \frac{1}{2} X_K\, \delta_{K-10} + \frac{1}{2} X_K\, \delta_{K+10}$$

LINEARITÁ

$$= \frac{1}{2} X_{K-10} + \frac{1}{2} X_{K+10}$$

abbiamo ottenuto lo stesso risultato di ieri

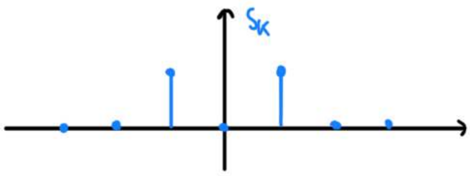
Es 4 (combinazione di **simmetrie**)
Del segnale s(t) sappiamo che: è reale e dispari; è periodico $T_p=2$; ha coefficienti di Fourier nulli per $|k|>1$; ha potenza $P_s=1$. Si chiede di identificare s(t).

SIA DATO $s(t)$ TALE CHE:

- REALE E DISPARI
- PERIODICO $T_p = 2$
- COEFF. SDF PER $|K| > 1$ SONO NULLI
  $S_K = 0$ PER $|K| > 1$
- $P_S = 1$

DI CHE SEGNALE SI TRATTA?

SOL. INNANZITUTTO DISEGNAMO IL SEGNALE



SE IL SEGNALE È REALE E PARI $\Longrightarrow$ COEFFICIENTI IMMAGINARI E DISPARI

$\rightarrow$ IN 0 VALE 0 PERCHÉ IL SEGNALE È DISPARI

$S_0 = 0$

$\rightarrow$ IN 1 VALE $-jA = j \cdot A$ PERCHÉ È DISPARI

– USO LA RELAZIONE DI PARSEVAL PER LA POTENZA

$$P_S = \sum_K |S_K|^2 = 2A^2 = 1 \longrightarrow A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

qui dentro c'è un coseno

$$s(t) = \sum_K S_K e^{jW_0 t} = jA e^{jW_0 t} - jA e^{-jW_0 t} = jA \left(\frac{e^{jW_0 t} - e^{-jW_0 t}}{2j} \right) \cdot 2j$$

$$s(t) = 2Aj^2 \sin(W_0 t) = -2A \sin(W_0 t) = \pm \sqrt{2} \sin(W_0 t)$$

ORA PER TROVARE W_0 USO L'INFORMAZIONE SUL PERIODO: $W_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\rightarrow s(t) = \pm \sqrt{2} \sin(\pi t)$

Esercizio di teoria sul sinc periodico

Es 5 (sinc periodico)
Calcolare la potenza del segnale $s(t) = 3 \sin(\pi t) / 5 \sin(\pi t/5)$

ESERCIZIO 5

$$s(t) = \frac{3}{5} \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)}$$

PERIODICO 2

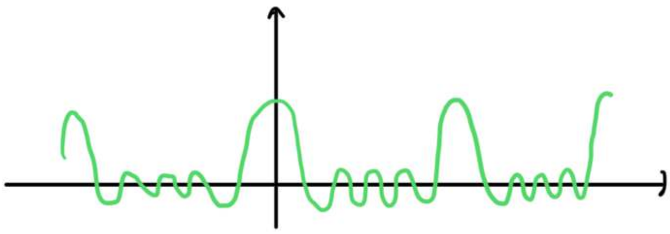
PERIODICO 10

RICHIESTE:

$P_s = ?$

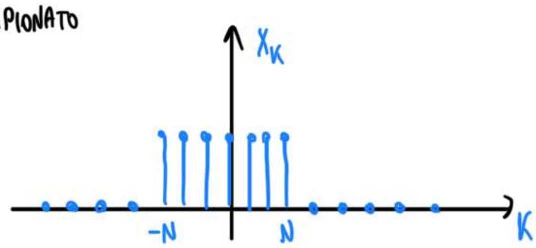
(= trovare S_K)

Sol. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE IL SEGNALE E' UNA RIPETIZIONE PERIODICA DI UN sinc



(se provo a fare l'integrale ho un $\int \frac{\sin}{\sin}$, non ne vengo fuori)

SI PUÓ DIMOSTRARE CHE QUESTO SEGNALE $\in$ A UNA CLASSE DI SEGNALI CON COEFF. SDF. SONO UN RETTANGOLO CAMPIONATO



$$x(t) = \sum_{K=-N}^{+N} e^{jK\omega_0 t} = \sum_{m=0}^{2N} e^{j(m-N)\omega_0 t} = e^{-jN\omega_0 t} \sum_{m=0}^{2N} e^{jm\omega_0 t}$$

SERIE GEOM

$m = 0 \dots 2N$

$K = m - N$

$$= e^{jN\omega_0 t} \frac{1-\alpha^{2N+1}}{1-\alpha}$$

$$= e^{-jN\omega_0 t} \frac{1-e^{j(2N+1)\omega_0 t}}{1-e^{j\omega_0 t}} = \frac{e^{-jN\omega_0 t} - e^{j(N+1)\omega_0 t}}{1-e^{j\omega_0 t}} \cdot \frac{e^{-j\frac{\omega_0}{2}t}}{e^{-j\frac{\omega_0}{2}t}}$$

PER VEDERE CHE E' REALE

$$\rightarrow x(t) = \frac{e^{-j\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t} - e^{j\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}}{e^{-j\frac{\omega_0}{2}t} - e^{j\frac{\omega_0}{2}t}} = \frac{\cancel{2j} \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t\right)}{\cancel{2j} \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)}$$

$$s(t) = \frac{3}{5} \frac{\sin(\pi t)}{\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)}$$

dall'equivalenza denominatori: $\frac{\omega_0}{2} = \frac{\pi}{5} \rightarrow \omega_0 = \frac{2}{5}\pi$

$\rightarrow T_p = 5$

dall'equivalenza numeratori: $\pi = \left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{5} = 2N+1$

$\rightarrow 2N = 4$

$\rightarrow N = 2$

ORA POSSO TROVARE LA POTENZA:

$$P_S = \sum_K |S_K|^2 = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}$$

$$m_S = S_0 = \frac{3}{5}$$