ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 08.02.2021

TEMA 1 - Correzione

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. (i). Iniziamo dallo studio del dominio naturale. Il denominatore $x^2 + 1 > 0$ sempre strettamente positivo. Il numeratore $|x|$ è sempre maggioe o uguale di zero. Considerando che il dominio della funzione radice è $[0, \infty)$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.

Studiamo il segno e le simmetrie di f. La funzione è pari: $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre essa ha sempre valori non negativi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}} \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii) Studiamo la derivabilità di f. Si ha che $f \in C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ in quanto composizione di funzioni $C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(x^2+1) - |x|2x}{(x+1)^2}.$$

Dunque,

$$\{x > 0 \text{ e } f'(x) > 0\} \iff (x^2+1) - 2x^2 > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x \in]0, 1[$$

e

$$\{x > 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = 1$$

Per simmetria, si ha

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) > 0\} \iff x \in]-\infty, -1[$$

e

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = -1$$

Inoltre, per il teorema del limite della derivata,

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-1)(1-x^2)}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{|x|}} = -\infty$$

perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha una cuspide.

Dalla precedente analisi e dalla continuità della funzione si ha che la funzione è crescente in ognuno dei due intervalli $[0, 1]$ e $]-\infty, -1]$ ed è decrescente in ognuno dei due intervalli $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$.

Inoltre vi è un massimo globale in $x = -1, 1$ e un minimo globale in $x = 0$.

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

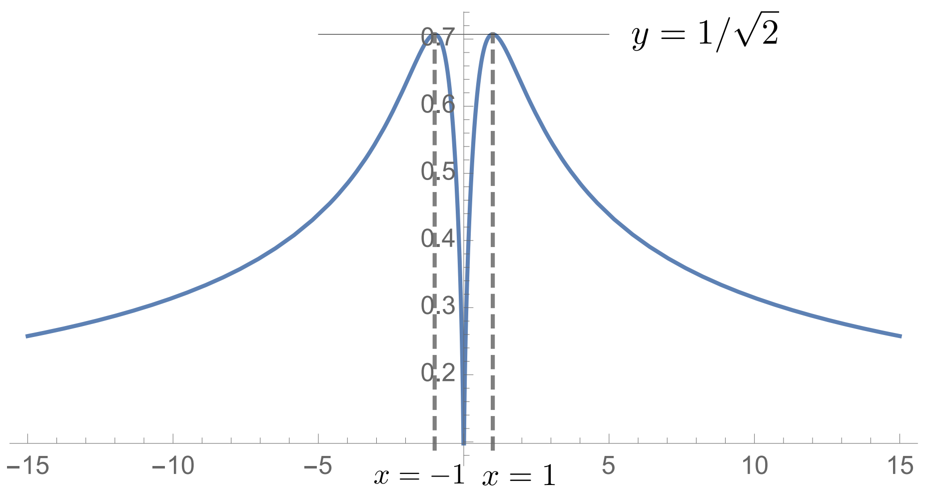

Figure 1: Il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1+i}{1-i},$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. Da

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

otteniamo

$$z^3 = \frac{8}{i} = -8i.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le (tre) radici terze di $-8i = 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$,cioè

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{2}\pi} = 2i, \quad z_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$$

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\int \log(t+1)\, dt$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx$$

Svolgimento.(i) Per parti:

$$\begin{aligned}\int \log(t+1)\, dt &= \log(t+1)t - \int \frac{t}{t+1} dt \\ &= t\log(t+1) - \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= t\log(t+1) - t + \log|t+1| + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{c\to 0+} \int_{\sqrt{c}}^1 \frac{\log(t+1)}{t} 2t\, dt \\ &= \lim_{c\to 0+} 2\int_{\sqrt{c}}^1 \log(t+1)\, dt \\ &= \lim_{c\to 0+} 2\left[t\log(t+1) - t + \log(t+1)\right]_{\sqrt{c}}^1 \\ &= 2(2\log 2 - 1)\end{aligned}$$

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n} \right|.$$

Svolgimento. (i)

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n} = n\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4})\right) + \frac{\alpha}{n} = \frac{-1/2+\alpha}{n} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

è di ordine 1 per ogni $\alpha \neq 1/2$ e di ordine 3 per $\alpha = 1/2$.

(ii) La serie è a termini di segno costante. Applicando il teorema del confronto asintotico, per il punto precedente deduco che la serie converge se $\alpha = 1/2$ e diverge se $\alpha \neq 1/2$.

TEMA 2 - Correzione

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+2}}$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. (i). Iniziamo dallo studio del dominio naturale. Il denominatore $x^2+2>0$ sempre strettamente positivo. Il numeratore $|x|$ è sempre maggiore o uguale a zero. Considerando che il dominio della funzione radice è $[0,\infty)$, otteniamo $D=\mathbb{R}$.

Studiamo il segno e le simmetrie di f. La funzione è pari: $f(x)=f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre essa ha sempre valori non negativi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+2}} \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Dunque $y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii) Studiamo la derivabilità di f. Si ha che $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ in quanto composizione di funzioni $C^{(1)}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+2}}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(x^2+2) - |x|2x}{(x+2)^2}.$$

Dunque,

$$\{x>0 \text{ e } f'(x)>0\} \iff (x^2+2)-2x^2>0 \iff 2-x^2>0 \iff x \in]0,\sqrt{2}[$$

e

$$\{x>0 \text{ and } f'(x)=0\} \iff x=\sqrt{2}$$

Per simmetria, si ha

$$\{x<0 \text{ and } f'(x)>0\} \iff x \in]-\infty,-\sqrt{2}[$$

e

$$\{x<0 \text{ and } f'(x)=0\} \iff x=-\sqrt{2}$$

Inoltre, per il teorema del limite della derivata,

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2-x^2}{2(x^2+2)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{4\sqrt{2}\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2+x^2}{2(x^2+2)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+2}}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{4\sqrt{2}\sqrt{|x|}} = -\infty$$

perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha una cuspide.

Dalla precedente analisi e dalla continuità della funzione si ha che la funzione è crescente in ognuno dei due intervalli $[0, \sqrt{2}]$ e $]-\infty, -\sqrt{2}]$ ed è decrescente in ognuno dei due intervalli $[-\sqrt{2}, 0]$ e $[\sqrt{2}, +\infty[$.

Inoltre vi è un massimo globale in $x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$, e un minimo globale in $x = 0$.

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

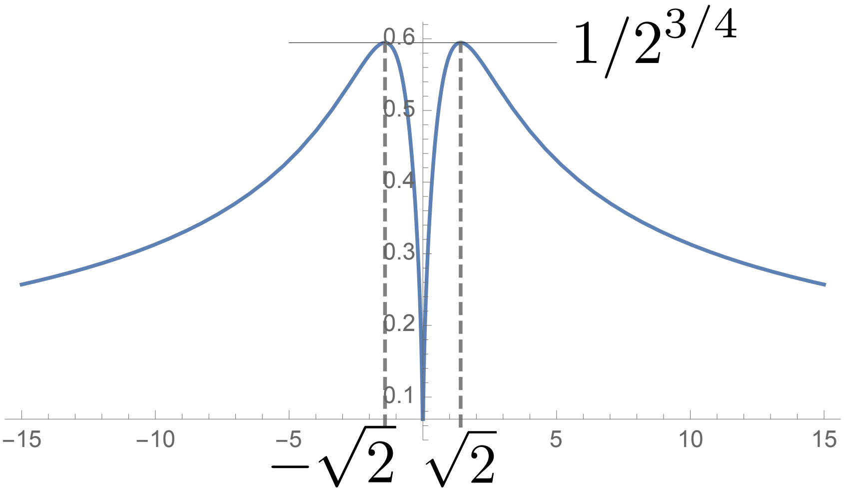

Figure 2: Il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1-i}{1+i},$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. Da

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2i}{2} = -i$$

otteniamo

$$z^3 = \frac{8}{-i} = 8i.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le (tre) radici terze di $8i = 8e^{i\frac{1}{2}\pi}$,cioè

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{6}\pi} = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = 2e^{i\frac{3}{2}\pi} = -2i$$

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\int \log(1-t)\, dt$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^{1/4} \frac{\log(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$$

Svolgimento.(i) Per parti:

$$\begin{aligned}\int \log(1-t)\, dt &= \log(1-t)t - \int \frac{t}{t-1} dt\\ &= t\log(1-t) - \int \left(1+\frac{1}{t-1}\right) dt\\ &= t\log(1-t) - t - \log|t-1| + c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Utilizzando la sostituzione $t=\sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} \frac{\log(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{c\to 0+} \int_c^{1/4} \frac{\log(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{c\to 0+} \int_{\sqrt{c}}^{1/2} \frac{\log(1-t)}{t} 2t\, dt\\ &= \lim_{c\to 0+} 2\int_{\sqrt{c}}^{1/2} \log(1-t)\, dt\\ &= 2\lim_{c\to 0+} \left[t\log(1-t) - t - \log|t-1|\right]_{\sqrt{c}}^{1/2}\\ &= 2\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \log\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-\log(2) - 1\right] = 1 + \log(2)\end{aligned}$$

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{2n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{2n}\right|.$$

Svolgimento. (i)

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{2n} = n\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4})\right) + \frac{\alpha}{2n} = \frac{-1+\alpha}{2n} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

è di ordine 1 per ogni $\alpha \neq 1$ e di ordine 3 per $\alpha = 1$.

(ii) La serie è a termini di segno costante. Applicando il teorema del confronto asintotico, per il punto precedente deduco che la serie converge se $\alpha = 1$ e diverge se $\alpha \neq 1$.