COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
18 Settembre 2012

Esercizio 1. (**pt.10**) Sia

$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s^2 - s + 100)}{s^2(s-1)^2}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

1. Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$ (**pt.4.5**);
2. A partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$ (**pt.5.5**).

Esercizio 2. (**pt.7**) Data

$$G(s) = \frac{1+10s}{(1+s)^2}$$

è richiesto il progetto di due compensatori stabilizzanti, siano $C_1(s)$ e $C_2(s)$, in modo tale che entrambi garantiscano errore a regime alla rampa lineare pari a $e_{rp} = 0.1$ e margine di fase di circa 90^o, ed inoltre

1. $C_1(s)$ garantisca pulsazione di attraversamento pari a circa $\omega_a = 100$ rad/sec (**pt.3**);
2. $C_2(s)$ garantisca pulsazione di attraversamento pari a circa $\omega_a = 0.01$ rad/sec (**pt.4**).

Esercizio 3. (**pt.9**) Data la seguente FDT a tempo discreto

$$G(z) = 3\frac{(2z-1)(z+1)}{(5z-1)(z-2)} = \frac{n(z)}{d(z)}$$

si vuole studiarne la stabilitá BIBO e determinarne l'insieme dei valori positivi di K tale che $C(z) = K$ sia un compensatore stabilizzante per $G(z)$. A tal scopo

1. Utilizzando la trasformazione bilineare $z = \frac{1+s}{1-s}$, ed applicando il criterio di Routh discreto, si studi la stabilità BIBO di $G(z)$ (**pt.3**);
2. Si determini la $\tilde{G}(s)$ corrispondente a $G(z)$ tramite la trasformazione bilineare (**pt.2.5**);
3. Si tracci il luogo delle radici positivo per $\tilde{G}(s)$, determinando asintoti, punti doppi, ed intersezioni del luogo con l'asse immaginario. Ciò permette facilmente di concludere quali compensatori costanti (positivi) $C(z) = K$ stabilizzano $G(z)$ (**pt.3.5**).

Teoria. (**pt.5**) Con riferimento al criterio di Nyquist

1. si enunci e si dimostri la versione più semplice (corrispondente all'assenza di poli di $G(s)$ e di $W(s)$ sull'asse immaginario), dando per noto il teorema dell'indicatore logaritmico (**pt.3**);
2. si spieghi a grandi linee come il criterio si modifica in presenza di poli di $G(s)$ e/o di $W(s)$ sull'asse immaginario (**pt.2**).

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
18 Settembre 2012 - Soluzioni

Esercizio 1. (**pt.10**) Sia

$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s^2-s+100)}{s^2(s-1)^2}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

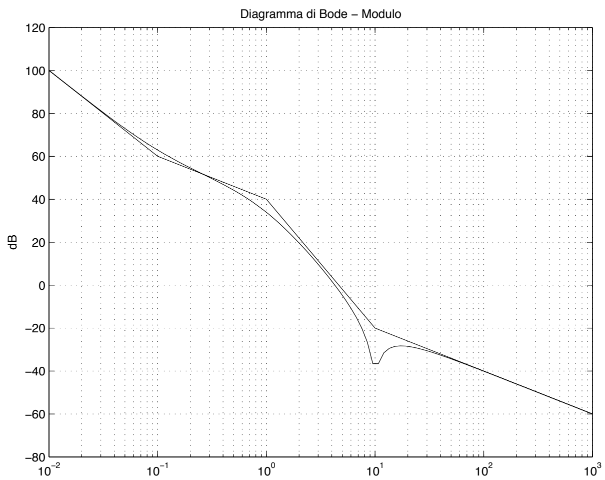
1. Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$ (**pt.4.5**);

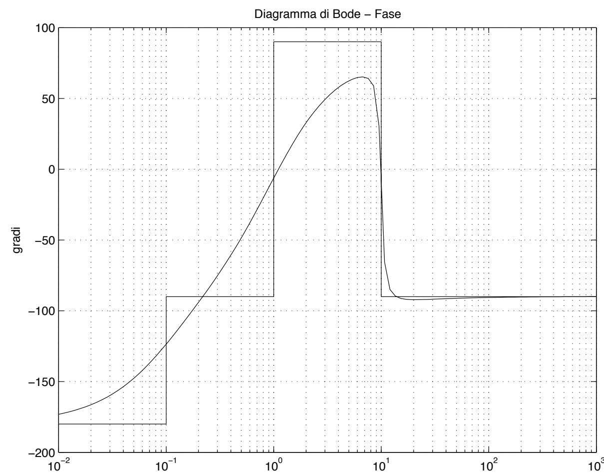
2. A partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$ (**pt.5.5**).

Soluzione. 1) (**pt.4.5**) È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

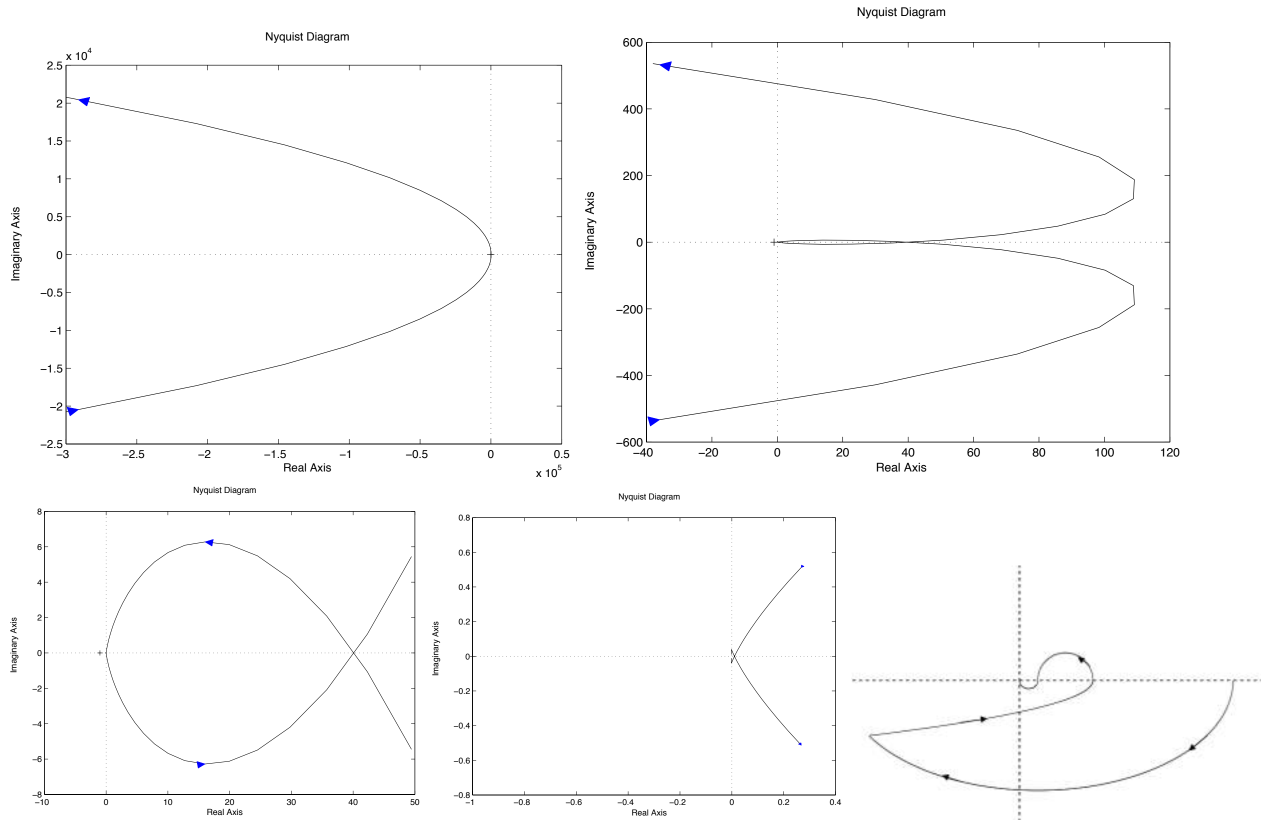
$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s^2-s+100)}{s^2(s-1)^2} = 10\frac{\left(1+\frac{s}{0.1}\right)\left[1+2\left(-\frac{1}{20}\right)\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right]}{s^2(1-s)^2}.$$

Pertanto $K_B = 10$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo con $1/T_1' = 0.1$ e $\mu_1' = 1$, un termine trinomio al numeratore corrispondente a due zeri complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n' = 10$ e smorzamento $\xi = -1/20 = -0.05$, un polo doppio nell'origine ($\nu = 2$) e un polo reale positivo con $1/T = -1$ e $\mu = 2$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.





2) (**pt.5.5**) Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è, assieme ad alcuni suoi dettagli nelle vicinanze dell'origine ed assieme ad un diagramma *non in scala* (relativo alle sole frequenze positive e comprensivo del semicerchio orario all'infinito) che rende meglio l'idea del comportamento globale del diagramma



NOTA: la figura non lo evidenzia (per problemi numerici), ma il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ arriva, per $\omega \to +\infty$, nell'origine con fase di $-90°$. Inoltre (come si deduce osservando Bode) Nyquist attraversa due volte il semiasse reale positivo (fase zero), con valori di modulo molto diversi.

$G(s)$ ha due poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato (e quindi introducendo il *cerchio all'infinito percorso in senso orario*), osservando che il diagramma di Nyquist non circonda il punto critico (vedi osservazione precedente sulle intersezioni con il solo semiasse reale positivo), si deduce che $N = 0$ e quindi $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. (**pt.7**) Data

$$G(s) = \frac{1 + 10s}{(1 + s)^2}$$

è richiesto il progetto di due compensatori stabilizzanti, siano $C_1(s)$ e $C_2(s)$, in modo tale che entrambi garantiscano errore a regime alla rampa lineare pari a $e_{rp} = 0.1$ e margine di fase di circa 90^o, ed inoltre

1. $C_1(s)$ garantisca pulsazione di attraversamento pari a circa $\omega_a = 100$ rad/sec (**pt.3**);

2. $C_2(s)$ garantisca pulsazione di attraversamento pari a circa $\omega_a = 0.01$ rad/sec (**pt.4**).

Soluzione. L'errore alla rampa richiede il ricorso preliminare a $\frac{10}{s}$. Il diagramma di Bode (del modulo) di $\frac{10}{s}G(s)$ è in figura (vedi sotto).

1) (**pt.3**) Per $C_1(s)$ è ovviamente necessaria (oltre all'azione integrale) una rete anticipatrice (o un PD) che alzi di 40 db il modulo in $\omega = 100$ rad/sec, contemporaneamente alzando la fase di circa 90^o. Ciò si ottiene facilmente inducendo una cancellazione zero-polo

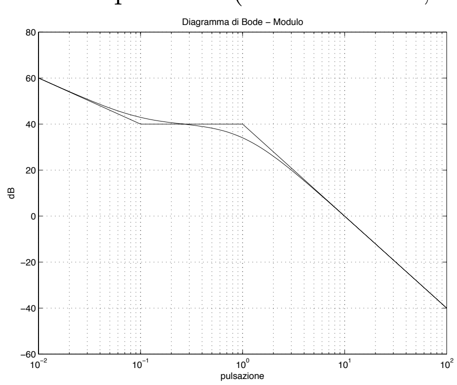
$$C_1(s) = \frac{10}{s}\frac{1+s}{1+\frac{s}{p}},\ p \gg 100 \text{ oppure con } C_1(s) = \frac{10(1+s)}{s}$$

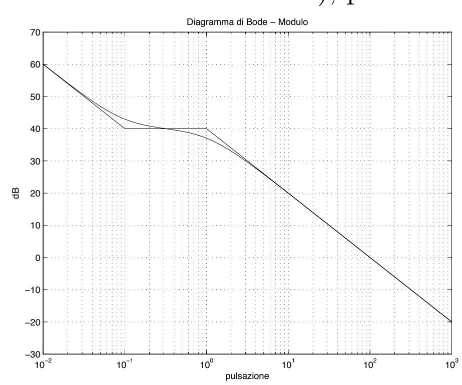
visto che il polo in alta frequenza non è necessario (la FDT è già propria), per cui $C_1(s)$ è in pratica un PI.

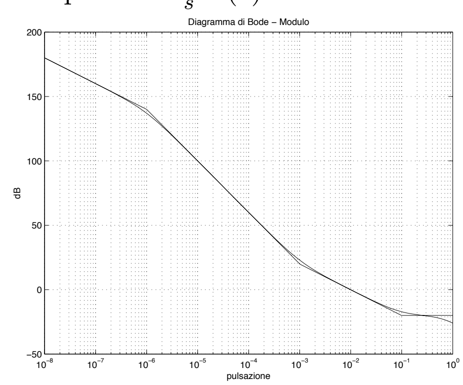
2) (**pt.4**) Per $C_2(s)$ è necessario abbassare il modulo di 60 db in $\omega = 0.01$ rad/sec (la fase è già a posto), il che si ottiene con una rete ritardatrice (oltre all'azione integrale) con la coppia polo-zero posizionata prima di ω_a e distanziata di 3 decadi. Ad esempio

$$C_2(s) = \frac{10}{s}\frac{1+10^3 s}{1+10^6 s}$$

In figura gli andamenti di $C_1(s)G(s)$ e $C_2(s)G(s)$ che dimostrano il soddisfacimento delle specifiche (solo il modulo, la fase è lasciata al lettore), preceduti da quello di $\frac{10}{s}G(s)$







Esercizio 3. (**pt.9**) Data la seguente FDT a tempo discreto

$$G(z) = 3\frac{(2z-1)(z+1)}{(5z-1)(z-2)} = \frac{n(z)}{d(z)}$$

si vuole studiarne la stabilitá BIBO e determinarne l'insieme dei valori positivi di K tale che $C(z) = K$ sia un compensatore stabilizzante per $G(z)$. A tal scopo

1. Utilizzando la trasformazione bilineare $z = \frac{1+s}{1-s}$, ed applicando il criterio di Routh discreto, si studi la stabilità BIBO di $G(z)$ (**pt.3**);

2. Si determini la $\tilde{G}(s)$ corrispondente a $G(z)$ tramite la trasformazione bilineare (**pt.2.5**);

3. Si tracci il luogo delle radici positivo per $\tilde{G}(s)$, determinando asintoti, punti doppi, ed intersezioni del luogo con l'asse immaginario. Ciò permette facilmente di concludere quali compensatori costanti (positivi) $C(z) = K$ stabilizzano $G(z)$ (**pt.3.5**).

Soluzione. 1) (**pt.3**) Essendo $G(z)$ espressa in forma coprima, basta studiare la stabilità del polinomio $d(z)$ con il criterio di Routh discreto. Applicando la trasformazione bilineare a $d(z)$ si ottiene

$$\tilde{d}(s) = 18 \frac{\left(s + \frac{2}{3}\right)\left(s - \frac{1}{3}\right)}{(1-s)^2}$$

Essendo $\tilde{d}(s)(1-s)^2 = 18\left(s^2 + \frac{1}{3}s - \frac{2}{9}\right)$, una volta appurato che il grado non è sceso, e appurato che Routh si riduce a Cartesio, con una permanenza ed una variazione di segno si conclude per l'instabilità (in accordo al fatto che gli zeri di $d(z)$ sono $\frac{1}{5}$ e 2).

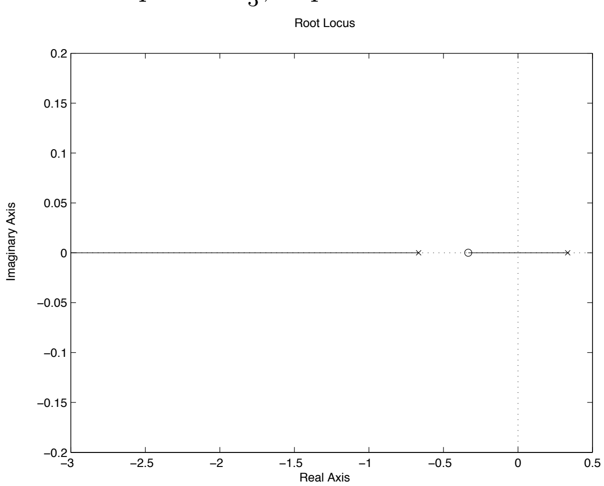
2) (**pt.2.5**) In modo analogo si ricava $\tilde{n}(s) = 18\frac{s+\frac{1}{3}}{(1-s)^2}$ e quindi anche (dalle espressioni di $\tilde{n}(s), \tilde{d}(s)$)

$$\tilde{G}(s) = \frac{s + \frac{1}{3}}{\left(s + \frac{2}{3}\right)\left(s - \frac{1}{3}\right)}$$

3) (**pt.3.5**) L'equazione dei punti doppi porge $s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{1}{3} = 0$, ed il discriminante negativo impedisce l'esistenza di punti doppi (sarebbero complessi, mentre la FDT ha grado solo 2). L'unico asintoto è il semiasse negativo, ed intersecando il luogo con l'asse immaginario si ottiene

$$(3k - 2 - 9\omega^2) + 3i\omega(3k+1) = 0 \;\Rightarrow\; \omega = 0,\; k = \frac{2}{3}$$

(non ci sono altre soluzioni con $k \geq 0$). Di conseguenza, dal facile tracciamento del luogo, si ha stabilità per $k > \frac{2}{3}$, e questi sono esattamente i valori di k per cui $W(z)$ è stabile.



Teoria. (**pt.5**) Con riferimento al criterio di Nyquist

1. si enunci e si dimostri la versione più semplice (corrispondente all'assenza di poli di $G(s)$ e di $W(s)$ sull'asse immaginario), dando per noto il teorema dell'indicatore logaritmico (**pt.3**);

2. si spieghi a grandi linee come il criterio si modifica in presenza di poli di $G(s)$ e/o di $W(s)$ sull'asse immaginario (**pt.2**).

Soluzione. Si veda il Libro di testo, pag. 181 - 190.