Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

4º Appello — 13 febbraio 2012

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi: V, generato dai vettori $v_1 = (2, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 2, 3, -1)$ e $v_3 = (t, 0, 3, 1)$; W, generato dai vettori $w_1 = (1, 0, 2, -1)$, $w_2 = (-1, 2, 0, 3)$; U, di equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) È vero che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? Perché? In caso di risposta negativa si determini un sottospazio U' di U tale che $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$.

(c) Per $t = 0$, si trovi una base di $V \cap W$.

(d) È possibile trovare un altro sottospazio $U'' \subset U$ tale che $U' \cap U'' = \{0\}$ e $U'' \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare tale che $g(1, 1, 0) = (1, 4, -1, 0)$, $g(0, 1, 1) = (-1, -3, 1, 2)$ e $g(1, -1, 0) = (1, 4, -1, -2)$.

(a) Si determini la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini la matrice della funzione composta $G = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (rispetto alle basi canoniche) e si stabilisca se G è iniettiva.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di G e si stabilisca se G è diagonalizzabile.

(d) Si dimostri che per ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $F = g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ha sempre un autovalore nullo.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (3, -2, 1, -2)$ e $w = (1, -1, 0, 1)$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore u sul sottospazio di equazione $x_1+2x_2-x_3+x_4 = 0$.

(b) Si determini l'equazione di un sottospazio W, di dimensione 3, tale che il vettore w sia la proiezione ortogonale di u su W. Si determini inoltre una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W, tale che $w_1 = w$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$. Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Siano U_1 e U_2 i sottospazi generati, rispettivamente, da $u_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 1)$. Indichiamo con p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su U_1 e U_2. Si determini l'insieme F di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\|p_1(v)\| = \|p_2(v)\|$ e si dica se F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il fascio di piani

$$\mathcal{F} : x + (t - 1)y + 2tz = t + 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per il punto $P = (1, -2, 1)$.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ del fascio $\mathcal{F}$ che forma un angolo retto col piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche dell'unica retta r che è contenuta in tutti i piani del fascio.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

4º Appello — 13 febbraio 2012

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi: V, generato dai vettori $v_1 = (1, 3, -2, 0)$, $v_2 = (2, 0, -1, 1)$ e $v_3 = (4, 6, t, 1)$; W, generato dai vettori $w_1 = (2, -1, 1, 0)$, $w_2 = (-1, 1, 0, 1)$; U, di equazione $x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) È vero che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? Perché? In caso di risposta negativa si determini un sottospazio U' di U tale che $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$.

(c) Per $t = 0$, si trovi una base di $V \cap W$.

(d) È possibile trovare un altro sottospazio $U'' \subset U$ tale che $U' \cap U'' = \{0\}$ e $U'' \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare tale che $g(1, 0, 1) = (1, 2, 1, 1)$, $g(0, 1, 1) = (1, 0, 2, 3)$ e $g(1, 0, -1) = (1, 2, -1, -3)$.

(a) Si determini la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini la matrice della funzione composta $G = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (rispetto alle basi canoniche) e si stabilisca se G è iniettiva.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di G e si stabilisca se G è diagonalizzabile.

(d) Si dimostri che per ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $F = g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ha sempre un autovalore nullo.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (2, 2, -3, 2)$ e $w = (1, -1, -2, 0)$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore u sul sottospazio di equazione $x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$.

(b) Si determini l'equazione di un sottospazio W, di dimensione 3, tale che il vettore w sia la proiezione ortogonale di u su W. Si determini inoltre una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W, tale che $w_1 = w$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$. Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Siano U_1 e U_2 i sottospazi generati, rispettivamente, da $u_1 = (0, 1, 0, 0)$ e $u_2 = (1, 0, 0, 1)$. Indichiamo con p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su U_1 e U_2. Si determini l'insieme F di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\|p_1(v)\| = \|p_2(v)\|$ e si dica se F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il fascio di piani

$$\mathcal{F} : tx - 2y + (t + 1)z = t - 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per il punto $P = (1, 1, -1)$.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ del fascio $\mathcal{F}$ che forma un angolo retto col piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche dell'unica retta r che è contenuta in tutti i piani del fascio.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

4^{o} Appello — 13 febbraio 2012

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi: V, generato dai vettori $v_1 = (0, 1, -2, -2)$, $v_2 = (1, 0, 1, 2)$ e $v_3 = (1, 2, t, -2)$; W, generato dai vettori $w_1 = (1, 3, 0, -1)$, $w_2 = (-2, 1, 1, 0)$; U, di equazione $x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) È vero che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? Perché? In caso di risposta negativa si determini un sottospazio U' di U tale che $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$.

(c) Per $t = 0$, si trovi una base di $V \cap W$.

(d) È possibile trovare un altro sottospazio $U'' \subset U$ tale che $U' \cap U'' = \{0\}$ e $U'' \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare tale che $g(1, 0, -1) = (3, 1, 1, 2)$, $g(0, 1, 1) = (-2, 1, -3, -1)$ e $g(0, 1, -1) = (2, 1, -1, -1)$.

(a) Si determini la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini la matrice della funzione composta $G = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (rispetto alle basi canoniche) e si stabilisca se G è iniettiva.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di G e si stabilisca se G è diagonalizzabile.

(d) Si dimostri che per ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $F = g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ha sempre un autovalore nullo.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (1, 1, 3, -4)$ e $w = (2, -1, 0, -2)$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore u sul sottospazio di equazione $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

(b) Si determini l'equazione di un sottospazio W, di dimensione 3, tale che il vettore w sia la proiezione ortogonale di u su W. Si determini inoltre una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W, tale che $w_1 = w$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$. Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Siano U_1 e U_2 i sottospazi generati, rispettivamente, da $u_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $u_2 = (1, 0, -1, 0)$. Indichiamo con p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su U_1 e U_2. Si determini l'insieme F di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\|p_1(v)\| = \|p_2(v)\|$ e si dica se F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il fascio di piani

$$\mathcal{F} : (t - 2)x + ty + z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per il punto $P = (1, 1, 3)$.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ del fascio $\mathcal{F}$ che forma un angolo retto col piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche dell'unica retta r che è contenuta in tutti i piani del fascio.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

4$^{\text{o}}$ Appello — 13 febbraio 2012

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazi: V, generato dai vettori $v_1 = (2, -1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 3, 0)$ e $v_3 = (t, -1, 3, 2)$; W, generato dai vettori $w_1 = (0, 2, 3, -1)$, $w_2 = (1, -1, 0, 2)$; U, di equazione $x_1 - x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) È vero che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$? Perché? In caso di risposta negativa si determini un sottospazio U' di U tale che $U' \oplus W = \mathbb{R}^4$.

(c) Per $t = 0$, si trovi una base di $V \cap W$.

(d) È possibile trovare un altro sottospazio $U'' \subset U$ tale che $U' \cap U'' = \{0\}$ e $U'' \oplus W = \mathbb{R}^4$?

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare tale che $g(1, 1, 0) = (2, 3, -1, 3)$, $g(1, 0, 1) = (3, 1, 2, 1)$ e $g(1, 0, -1) = (1, 1, -2, 1)$.

(a) Si determini la matrice di g rispetto alle basi canoniche.

(b) Si determini la matrice della funzione composta $G = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (rispetto alle basi canoniche) e si stabilisca se G è iniettiva.

(c) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di G e si stabilisca se G è diagonalizzabile.

(d) Si dimostri che per ogni funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e per ogni funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $F = g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ha sempre un autovalore nullo.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u = (4, 0, 2, -1)$ e $w = (1, 1, 0, -2)$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale del vettore u sul sottospazio di equazione $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$.

(b) Si determini l'equazione di un sottospazio W, di dimensione 3, tale che il vettore w sia la proiezione ortogonale di u su W. Si determini inoltre una base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ di W, tale che $w_1 = w$.

(c) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da $f(v) = (v \cdot u)w + (v \cdot w)u$. Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(d) Siano U_1 e U_2 i sottospazi generati, rispettivamente, da $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, -1)$. Indichiamo con p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su U_1 e U_2. Si determini l'insieme F di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che $\|p_1(v)\| = \|p_2(v)\|$ e si dica se F è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il fascio di piani

$$\mathcal{F} : (t + 1)x - y + (t - 1)z = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π del fascio $\mathcal{F}$ passante per il punto $P = (1, -2, 1)$.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ del fascio $\mathcal{F}$ che forma un angolo retto col piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche dell'unica retta r che è contenuta in tutti i piani del fascio.