A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

1º appello — 5 giugno 2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è $x(x+2)(x-3)$. Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

Esercizio 2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA$. Sia v un autovettore di A associato all'autovalore λ e sia $w = B\,v$. Dimostrare che anche w è un autovettore di A associato allo stesso autovalore λ.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0,3,5,1)$, $u_2 = (3,0,4,2)$, $u_3 = (5,-4,0,2)$, $u_4 = (1,-2,-2,0)$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & t \\ 2 & 0 & -2 \\ t & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui la matrice A_t ha un autovalore $= 0$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di A_t.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^T A_t\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (2,0,1,-1)$, $u_2 = (1,1,0,3)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il piano $\pi : x + y - z + 1 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (1,1,0)$, parallela al piano π e incidente la retta r.

(c) Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

1º appello — 5 giugno 2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è $x(x+3)(x-1)$. Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

Esercizio 2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA$. Sia v un autovettore di A associato all'autovalore λ e sia $w = B\,v$. Dimostrare che anche w è un autovettore di A associato allo stesso autovalore λ.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0,1,2,3)$, $u_2 = (1,0,-3,1)$, $u_3 = (2,3,0,11)$, $u_4 = (-3,1,11,0)$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ t & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui la matrice A_t ha un autovalore $= 0$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di A_t.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^T A_t\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (3,-1,0,1)$, $u_2 = (1,1,2,0)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il piano $\pi : x - y + z = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (1,0,2)$, parallela al piano π e incidente la retta r.

(c) Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

1º appello — 5 giugno 2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è $x(x-2)(x+4)$. Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

Esercizio 2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA$. Sia v un autovettore di A associato all'autovalore λ e sia $w = B\,v$. Dimostrare che anche w è un autovettore di A associato allo stesso autovalore λ.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0, 2, 16, 3)$, $u_2 = (-2, 0, 4, 1)$, $u_3 = (8, 2, 0, -1)$, $u_4 = (3, 1, 2, 0)$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & t \\ -2 & t & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui la matrice A_t ha un autovalore $= 0$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di A_t.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^T A_t\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0, 2, -1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 0, -1)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il piano $\pi : x - y - z - 1 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (0, 1, 1)$, parallela al piano π e incidente la retta r.

(c) Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t.

D

Cognome __________________ Nome __________________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

1º appello — 5 giugno 2018

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare il cui polinomio caratteristico è $x(x+4)(x-1)$. Disponendo solo di questa informazione è possibile determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f? In caso di risposta affermativa quali sono queste dimensioni?

Esercizio 2. Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che $AB = BA$. Sia v un autovettore di A associato all'autovalore λ e sia $w = B\,v$. Dimostrare che anche w è un autovettore di A associato allo stesso autovalore λ.

Esercizio 3. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0, 1, -7, 3)$, $u_2 = (-1, 0, -3, 1)$, $u_3 = (7, 3, 0, 2)$, $u_4 = (3, 1, 2, 0)$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -2 & t & -4 \\ t & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui la matrice A_t ha un autovalore $= 0$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare gli autovalori e gli autospazi di A_t.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (a) determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^T A_t\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (2, -2, -1, 0)$, $u_2 = (3, 0, 2, 1)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il piano $\pi : x + y - z = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x - z - 3 = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta t passante per il punto $B = (2, 1, 0)$, parallela al piano π e incidente la retta r.

(c) Trovare i punti di minima distanza delle rette s e t.