

Lezione 8

- ① Due sfere omogenee identiche, di raggio $R = 1$ cm e massa $m = 100$ g, scendono lungo un piano inclinato, con inclinazione $\theta = \pi/10$ rispetto all'orizzontale. La prima sfera scivola senza rotolare in assenza di ogni forma di attrito; invece la seconda scende rotolando senza strisciare, in assenza di attrito volvente. Determinare le accelerazioni con le quali scendono i centri di massa delle due sfere.

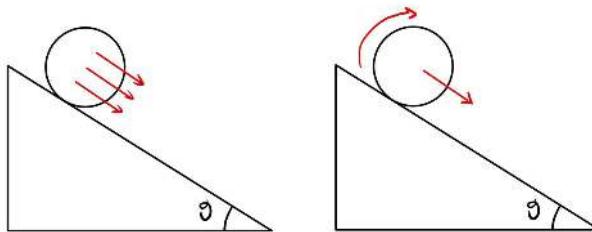


Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 1

- ② Una ruota di massa $M = 5$ kg e raggio R (assimilabile ad un cilindro omogeneo) è poggiata su un piano inclinato di un angolo $\theta = 45^\circ$ rispetto all'orizzontale. Intorno alla ruota, vincolata a rotolare senza strisciare sul piano inclinato, è avvolta una funicella ideale al cui altro estremo, dopo essere passata per una puleggia ideale, è appeso un blocchetto di massa m .

- Determinare il valore m^* della massa del blocchetto per cui il sistema si trova in equilibrio meccanico.

Supponendo poi che la massa del blocchetto sia pari al doppio del valore m^* precedentemente trovato, si lascia andare il sistema dalla sua situazione di equilibrio. Determinare:

- l'accelerazione del centro di massa della ruota nel moto che viene a svilupparsi.

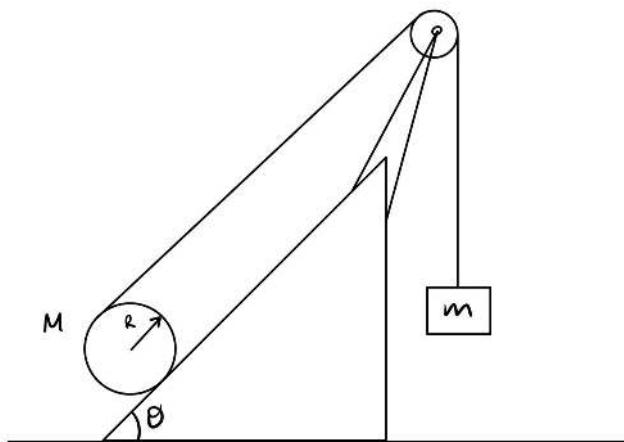


Figura 2: Rappresentazione grafica esercizio 2

- 3) Una lastra di massa $M = 20 \text{ kg}$ è appoggiata sul pavimento e può scivolare su di esso con attrito trascurabile. Sulla lastra è posto un cilindro omogeneo di raggio $R = 15 \text{ cm}$ e massa $m = 10 \text{ kg}$ (vedi Figura 3). Lastra e cilindro sono inizialmente in quiete. A un certo istante alla lastra viene applicata una forza costante, parallela al pavimento, di modulo $F = 100 \text{ N}$. Supponendo che il cilindro non scivoli rispetto alla lastra, determinare:

1. l'accelerazione a_l della lastra;
2. l'accelerazione angolare α_c del cilindro;
3. il minimo valore di $\mu_s, \mu_{s,min}$, affinché il cilindro effettivamente non scivoli.

[Supporre che l'asse del cilindro sia perpendicolare alla direzione di moto della lastra.]

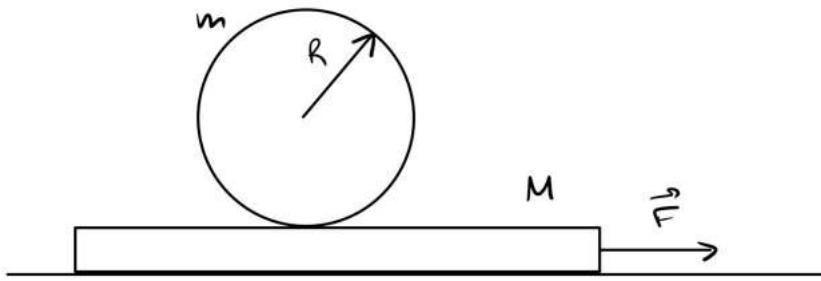


Figura 3: Rappresentazione grafica esercizio 3

- 4) Una sbarra omogenea di lunghezza $6a$ e massa $8m$ si trova su di un piano liscio orizzontale. Due corpi puntiformi, di massa m e $2m$, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità rispettivamente $2v$ e v in direzione ortogonale alla sbarra e versi opposti (vedi Figura 4). I due corpi colpiscono in contemporanea la sbarra rispettivamente alle distanze $2a$ e a dal suo centro e vi rimangono attaccati. Subito dopo il sistema sbarra+corpi inizia a ruotare. Si determinino:

1. la velocità del centro di massa;
2. il momento angolare del sistema;
3. la velocità angolare di rotazione;
4. l'energia cinetica rotazionale.

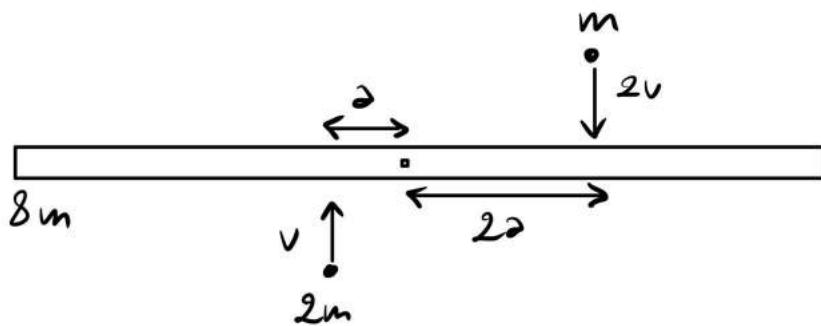


Figura 4: Rappresentazione grafica esercizio 4

- 5) Un corpo puntiforme di massa $m = 300\text{g}$ viene lanciato lungo un piano orizzontale con una velocità v_0 verso l'estremo inferiore di un'asta sottile (di massa $M = 1.5 \text{ kg}$ e lunghezza $l = 60 \text{ cm}$) appesa per il suo estremo superiore e disposta verticalmente (vedi Figura 5). Sapendo che il corpo parte da una distanza $d = 3 \text{ m}$ dall'asta, che il piano presenta un coefficiente d'attrito dinamico $\mu_d =$

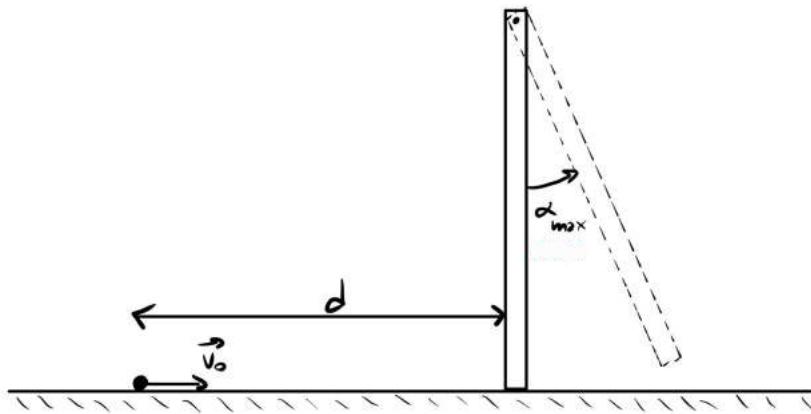


Figura 5: Rappresentazione grafica esercizio 5

0.5 e che l'urto tra corpo e asta è completamente anelastico, determinare v_0 affinchè l'asta dopo l'urto raggiunga un angolo massimo $\alpha_{max} = \pi/4$.

- ⑥ Mentre corre a una velocità $v_0 = 5$ m/s, un ragazzino di massa $m = 45$ kg salta sul bordo di una giostra inizialmente in quiete. La giostra è assimilabile a un disco omogeneo orizzontale di massa $M = 25$ kg e raggio $r = 100$ cm libero di ruotare senza attriti attorno a un asse verticale passante per il suo centro; al termine del salto il ragazzino, che può essere considerato come un punto materiale, è solidale con essa. Successivamente il ragazzino si muove sulla giostra fino a raggiungere il centro. Nell'ipotesi che \vec{v}_0 sia tangente alla giostra, determinare:

1. la velocità angolare della giostra dopo il salto;
2. la variazione di energia cinetica del sistema giostra+ragazzino durante il salto;
3. la velocità angolare della giostra quando il ragazzino ne raggiunge il centro;
4. il lavoro compiuto dal ragazzino durante lo spostamento sulla superficie della giostra.

ES. 1

La prima sfera è soggetta soltanto alla forza di gravità $\vec{m}g$ e alla reazione normale \vec{N} del piano. Dato l'assenza di attrito, essa scenderà con moto puramente traslatorio e quindi possiamo trattarla alla stregua di un punto materiale. Dalla 2^a legge della dinamica possiamo scrivere

$$\vec{m}\ddot{s} = \vec{m}g + \vec{N}$$

Prendendo le componenti parallele e perpendicolare al piano inclinato, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{s} = mg \sin \theta \\ 0 = N - mg \cos \theta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{s} = g \sin \theta \\ N = mg \cos \theta \end{array} \right.$$

Risultati si ha: $\ddot{s}_1 = g \sin \theta = 3.03 \text{ m/s}^2$

E questa, ovviamente, è anche l'accelerazione del suo centro di massa.

La seconda sfera è soggetta alla forza di gravità $\vec{m}g$, alla reazione normale del piano \vec{N} e alla forza di spinta statica \vec{F}_s . Poiché la seconda sfera rotola senza strisciare, essa non può essere considerata un punto materiale. Per la seconda sfera (calcolando i momenti rispetto all'asse orizzontale, passante per il centro della sfera e parallelo al piano inclinato) le equazioni della dinamica si scrivono

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{m}\ddot{s} = \vec{m}g + \vec{N} + \vec{F}_s \\ \Sigma \tau = R F_s \end{array} \right.$$

Dove $\Sigma \tau$ e α sono il momento d'inerzia della sfera rispetto all'asse passante per il suo centro e l'accelerazione angolare. Considerando le componenti parallele e perpendicolare al piano inclinato si possono scrivere le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{s} = mg \sin \theta - F_s \\ 0 = N - mg \cos \theta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N = mg \cos \theta \\ F_s = \Sigma \frac{\tau}{R^2} \\ \Sigma \frac{\tau}{R} = RF_s \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{s} = mg \sin \theta - \Sigma \frac{\tau}{R^2} \end{array} \right.$$

Dove (considerando un moto di pura rotolamento) si è fatta la sostituzione $\alpha = \frac{\tau}{R}$.

Ricordando che il momento d'inerzia di una sfera omogenea rispetto ad un asse passante per il suo centro è $\Sigma = \frac{2}{5} m R^2$, si ricava

$$m\ddot{s} + \Sigma \frac{\tau}{R^2} = mg \sin \theta \Rightarrow m\ddot{s} + \frac{2}{5} m R^2 \frac{\tau}{R^2} = mg \sin \theta \Rightarrow \frac{7}{5} m\ddot{s} = mg \sin \theta$$

Perciò, l'accelerazione del centro di massa della sfera che scende rotolando è

$$\ddot{s}_2 = \frac{5}{7} g \sin \theta = 2.17 \text{ m/s}^2$$

[Es. 2]

Considerando le forze che agiscono sul bloccetto e la seconda legge della dinamica, il suo equilibrio comporta la relazione seguente:

$$m^*g - T = 0$$

dove T corrisponde alla tensione della corda.

D'altra parte, tenendo presente la 2^a legge della dinamica in forma angolare, l'equilibrio della ruota è determinato dalla relazione

$$2RT - RMg \sin \theta = 0$$

Dove i due termini comprendono i momenti delle forze agenti sulla ruota calcolati rispetto al suo punto di contatto con il piano inclinato. Considerando le due relazioni si ottiene

$$T - m^*g \Rightarrow 2Rm^*g = RMg \sin \theta \Rightarrow m^* = \frac{1}{2}M \sin \theta = 1.77 \text{ kg}$$

Quando la massa del bloccetto è pari a $m = 2m^* = M \sin \theta$ e il sistema viene lasciato libero, il bloccetto proverà a scendere, mentre la ruota, rotolando, proverà a salire lungo il piano inclinato. Ormai i moti dei due corpi saranno regolati dalle seguenti relazioni:

$$m\ddot{s} = mg - T; \quad \Sigma_r \cdot \alpha = 2RT - RMg \sin \theta$$

Dove $\Sigma_r = \frac{1}{2}MC^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ è il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse passante per il punto di contatto con il piano inclinato, mentre s e $\alpha = \dot{\omega}/dt$ sono l'accelerazione del bloccetto e l'accelerazione angolare della ruota (ovvero la sua velocità angolare istantanea), rispettivamente.

Sappiamo poi che in un moto di pura rotolamento la velocità del vertice della ruota (il punto più lontano dal punto di appoggio) è doppia rispetto a quella del suo centro di massa. Pertanto, tenendo male conto dell'angolare relazione tra la velocità di rotazione e la velocità del centro di massa, possiamo scrivere $\dot{s} = 2\dot{\omega}R$. Inoltre, essendo $\dot{\omega}_{cm} = R\alpha$, abbiamo

$$\dot{s} = 2\dot{\omega}R \quad \text{e} \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{s}}{R}$$

Utilizzando tali relazioni, esplicitando l'espressione del momento d'inerzia e semplificando, le precedenti equazioni assumono la seguente forma:

$$2m\ddot{s}_{cm} = mg - T; \quad \frac{3}{2}M\ddot{s}_{cm} = 2T - Mg \sin \theta$$

Dalle queste, eliminando T , si ricava

$$\ddot{s}_{cm} = \frac{(2m - M \sin \theta)g}{6m + \frac{3}{2}M}$$

che, nel caso in cui $m = 2m^* = M \sin \theta$, diventa

$$\ddot{s}_{cm} = \frac{Mg \sin \theta}{4M \sin \theta + \frac{3}{2}M} = \frac{2g \sin \theta}{8 \sin \theta + 3} = 0.163 \cdot g = 1.60 \text{ m/s}^2$$

ES. 3

Dallo istante in cui la lastra è soggetto alla forza \vec{F} il cilindro riceverà da essa forza di attrito diretta nella stessa direzione di \vec{F} . In assenza di scorrimento si parlerà di forza di attrito statico F_s ; al contrario, con scorrimento parceremo di forza di attrito dinamico F_d . Si noti che in entrambi i casi, per il principio di simmetria e reazione, sulla lastra, oltre a \vec{F} , agirà una forza agente e opposta alla forza di attrito agente sul cilindro. Durante l'azionamento della lastra anche il C.D.M. del cilindro muoverà, ma il cilindro ruoterà in verso antiorario. In assenza di scorrimento l'applicazione della 2^a legge della dinamica in forma lineare a lastra e cilindro ci permette di scrivere le seguenti:

$$\begin{cases} M_{\text{la}} = F - F_s \\ m_{\text{ci}} = F_s \end{cases} \Rightarrow a_c = \frac{F - F_s}{M}, \quad a_c = \frac{F_s}{m}$$

Dove a_c è l'accelerazione del C.D.M. del cilindro rispetto al suolo.

Di'altra parte, la 2^a legge della dinamica in forma angolare applicata alla rotazione del cilindro ci porta alla seguente:

$$I \ddot{\alpha}_c = -R F_s \Rightarrow \ddot{\alpha}_c = -\frac{2 F_s}{m R}$$

Dove $I = \frac{1}{2} m R^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il suo C.D.M. In assenza di scorrimento il cilindro segue un moto di pura rotolamento rispetto alla lastra e quindi, se indichiamo con $\dot{\alpha}_c$ l'accelerazione del C.D.M. del cilindro rispetto alla lastra, dovrà essere

$$\dot{\alpha}_c = \frac{\dot{a}_c}{R}$$

Pensando al moto relativo tra cilindro e lastra, è facile notare che tra le accelerazioni vale la seguente:

$$\dot{a}_c = a_c + \dot{a}'_c \Rightarrow \dot{a}'_c = \dot{a}_c - a_c$$

$$\text{e che quindi è: } \dot{\alpha}_c = \frac{\dot{a}'_c}{R} = \frac{\dot{a}_c - a_c}{R}$$

Sostituendo quest'ultima nella espressione trovata prima per $\ddot{\alpha}_c$ e introducendo nella stessa le espressioni di a_c e \dot{a}_c ottenute dall'ultimo, si ricava la seguente:

$$a_c - \dot{a}_c = -\frac{2 F_s}{m} \Rightarrow \frac{F_s}{m} - \frac{F - F_s}{M} = -\frac{2 F_s}{m}$$

dalla quale si ottiene (con qualche passaggio)

$$\left(\frac{m+M}{mM} + \frac{2}{m} \right) F_s = \frac{F}{M} \Rightarrow F_s = \frac{mF}{m+3M}$$

Portato per le accelerazioni si ricava

$$a_c = \frac{F - F_s}{M} = \frac{3F}{m+3M} = 4.29 \text{ m/s}^2; \quad \dot{a}_c = \frac{F_s}{m} = \frac{F}{m+3M} = \frac{2a_c}{3}$$

$$\dot{\alpha}_c = \frac{\dot{a}_c - a_c}{R} = -\frac{2F}{(m+3M)R} = -\frac{2a_c}{3R} = -19.0 \text{ rad/s}^2 \quad (*)$$

* Quest'ultima relazione potrà essere ricavata anche in un altro modo. Mentre nello sistema di riferimento (non ineriale) scelto con la banchina e applicando la 2^a legge della dinamica in forma angolare all'asse parallelo per il punto di istantaneo controllo fra banchina e cilindro. La non inerietà del sistema introduce anche le forze apparenti; in effetti, rispetto all'asse considerato, solo la forza apparente - cioè la reazione e positivamente scrivere la seguente equazione

$$\sum_F \alpha_c = -m \omega^2 R$$

dove $\sum_F = \frac{3}{2} m R^2$ è il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse per il punto di istantaneo controllo. Esprimendo \sum_F si ricava immediatamente la relazione $\alpha_c = -\frac{2\omega}{3R}$, identica a prima.

S se il cilindro effettivamente non scivola sulla banchina, allora

$$F_s \leq F_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s mg$$

Dunque tale relazione, tenendo presente l'espressione che abbiamo ottenuto per F_s , si ricava

$$\mu_s \geq \mu_{s,\min} = \frac{F_s}{mg} = \frac{F}{(m+3m)g} = 0.146$$

ES. 4

Essendo nulla la risultante delle forze esterne, nell'arco la quantità di moto del sistema si conserva. Inoltre, prima dell'arco la velocità del centro di massa del sistema è nulla, come si vede dalla seguente

$$M_{cm} V_{cm} = m(2v) - (2m)v = 0$$

Di conseguenza, anche dopo l'arco sarà nulla: questo significa che dopo l'arco il sistema ruoterà attorno al suo centro di massa, la cui posizione coincide con il centro dell'astuccio. Inoltre, subito prima dell'arco possiamo scrivere

$$x_{cm} = \frac{m \cdot 2a + 2m \cdot (-a) + (8m) \cdot 0}{m + 2m + 8m} = 0$$

Ma nell'arco si conserva anche il momento angolare. La sua ampiezza prima dell'arco è

$$L = m \cdot 2v \cdot 2a + 2m \cdot v \cdot a = 6mv^2$$

ed è diretta lungo l'asse ortogonale al foglio, con verso contrario al foglio.

Dopo l'arco il valore del momento angolare del sistema deve rimanere invariato. In tal caso, dato che i due corpi formano un'unità con la banchina, il momento angolare del sistema rispetto al centro di massa sarà pari a I_{cm} , dove I , che è dato da

$$I = \frac{1}{12} (8m)(6a)^2 + m(2a)^2 + 2m^2 = (24 + 6 + 2)m^2 = 30m^2$$

è il momento d'inerzia del sistema rispetto al centro di massa stesso. Perché sistematico

$$I\omega = L = 6mv^2 \Rightarrow \omega = \frac{6mv^2}{I} = \frac{6mv^2}{30m^2} = \frac{v}{5a}$$

Inoltre, l'energia cinetica rotazionale è data da

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{30 m s^2 v^2}{25 s^2} = \frac{3}{5} m v^2$$

ES. 5

Applicando la conservazione dell'energia al moto uniformemente decelerato del corpo puntiforme, otteniamo

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -m g d \Rightarrow v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2 m g d}$$

dove v_1 è la velocità del corpo all'impatto con l'asta.

Nell'asta con l'asta si conserva solo il momento angolare del sistema rispetto al punto in cui l'asta è appesa. Quindi,

$$m v_1 l = I_{\text{tot}} \omega_f = [m l^2 + I] \omega_f \Rightarrow v_1 = \frac{[m l^2 + I]}{m l} \omega_f = \frac{[3 m l^2 + M l^2]}{3 m l} \omega_f$$

dove $I = \frac{1}{3} M l^2$ è il momento d'inerzia dell'asta rispetto al punto di sospensione e ω_f è la velocità angolare del sistema asta+corpo subito dopo l'asta.

In tale rotazione si conserva l'energia meccanica e quando il sistema asta+corpo raggiungerà il massimo angolo α_{\max} si fermerà (momentaneamente). Però

$$\frac{1}{2} I_{\text{cor}} \omega_f^2 = \left[m g l + M g \frac{l}{2} \right] (1 - \cos \alpha_{\max})$$

e ancora: $\omega_f = \sqrt{\frac{2}{I_{\text{cor}}} \left[m g l + M g \frac{l}{2} \right] (1 - \cos \alpha_{\max})} = \sqrt{\frac{3(2m+M)g}{2(3m+M)} (2 - \sqrt{2})} = 3.54 \text{ rad/s}$

Quindi, sottralendo le relazioni precedentemente ricavate, otteniamo

$$v_1 = \frac{(3m+M)l}{3m} \omega_f = 5.67 \text{ m/s}; \quad v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2 m g d} = 7.85 \text{ m/s}$$

ES. 6

L'interazione del registrino con la gruza è di fatto un colpaccio completamente inelastico, del momento che al termine del colpo il registrino è sollevato con la gruza. I supporti dell'asta della gruza devono generare le reazioni vincolari necessarie a sorreggere il sistema (e dunque a contrastare l'azione della gruza) e a impedire che l'asse di rotazione cambi direzione durante la collisione; storicamente può succedere, per il teorema del momento angolare, i supporti dell'asta devono essere capaci di contrastare l'azione di forze in gruza di esercitare con momento normale all'asse di rotazione. Per questo motivo, in situazioni in cui è garantita una rotazione attorno ad un asse fisso, è sufficiente coniugare delle componenti assiali delle risultante

dai momenti delle forze e dalla corrispondente variazione del momento angolare; indicato con τ_z lo momento dell'asse di rotazione, il teorema del momento angolare assume la forma

La scelta del polo Ω (conveniente) è fatta sulle assi di rotazione) è ininfluenza dal momento in cui si considerano solo le componenti attive dei momenti

$$\tau_z = (\vec{\omega}_2)_z = \left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \right)_z = \frac{dI_2}{dt}$$

Nel caso specifico, inoltre, sono esclusi per i poli altri di qualsiasi tipo, per cui risulta $\tau_z = 0$; questo porta a concludere che per il sistema in esame la componente attiva del momento angolare si conserva durante l'arco. Pertanto si potrà scrivere:

$$mv_0 r = (I_2 + mr^2) \omega_1$$

in cui $I_2 = \frac{1}{2}Mr^2$ è il momento d'inerzia della gomma per rotazioni attorno al proprio asse e ω_1 è la velocità angolare del sistema al termine del colpo. Da questo è immediato determinare

$$\omega_1 = \frac{2mv_0}{(M+2m)r} = 3.9 \text{ rad/s}$$

Che il colpo del registrino possa effettivamente considerarsi un colpo perfettamente inelastico è testimoniato dalla variazione di energia cinetica, che ammonta a

$$\Delta K_{01} = K_1 - K_0 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = -1.2 \cdot 10^2 \text{ J}$$

in cui è posto $I_1 = I_2 + mr^2$. Il segno di ΔK_{01} indica che si tratta di energia cinetica che viene persa durante l'interazione gomma-registrino: esso è ragionevole sull'effetto che si sviluppa fra i due corpi, il cui lavoro viene dato sotto forma di calore.

Durante lo spostamento del registrino sulla superficie della gomma la situazione non cambia rispetto a quanto osservato precedentemente: non c'è una forza esterna (del sistema gomma+registrino) in grado di creare un momento parallelo all'asse di rotazione, per cui si conserva la componente attiva del momento angolare del sistema. Pertanto:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Visto che nella posizione finale il momento d'inerzia del registrino è nullo. Questo permette di determinare la velocità angolare finale del sistema, ovvero

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 = \frac{M+2m}{M} \omega_1 = \frac{2mv_0}{Mr} = 18 \text{ rad/s}$$

Si noti che il risultato non dipende dal percorso seguito, che quindi non deve essere necessariamente rettilineo: è sufficiente che il punto di partenza e di arrivo coincidano.

Quest'ultima osservazione - solitamente corretta - rende di fatto impossibile un calcolo esplicito del lavoro compiuto dal registrino in termini di integrale di forza $W_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Con ciò intendendo il lavoro delle forze \vec{F} esercitate dal registrino sulla gomma

Sembra, dal momento che il percorso di integrazione è noto, non è ovvio come determinare il vettore \vec{F} . In cui, come queste, però, viene in occasione il teorema delle forze vive (o teorema dell'energia cinetica): non essendo altre forze in gioco da compiere lavoro al di fuori di \vec{F} , è chiaro che la risultante dei lavori delle forze (non solo esterne) agenti sul sistema coincide con W_r e pertanto

$$\begin{aligned}
 W_r = \Delta K_{12} &= K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \Sigma_2 w_2^2 - \frac{1}{2} \Sigma_1 w_1^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\Sigma_2 \left(\frac{2mv_0}{Mr} \right)^2 - (\Sigma_2 + m r^2) \left(\frac{2mv_0}{(M+2m)r} \right)^2 \right] = \\
 &= m^2 v_0^2 \left[\frac{1}{M} - \frac{1}{M+2m} \right] = m v_0^2 \left[\frac{2m^2}{m(m+2m)} \right] \\
 &= 1.6 \text{ kJ
 \end{aligned}$$