Esercizi di ripasso per il corso di Fondamenti di Automatica
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
A.A. 2020/21

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{1}{3}u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica.

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 2.$$

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

iv) Si determini la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = (1 + t)\ \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica.

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 2 \qquad \frac{d^2y(0^-)}{dt^2} = 0.$$

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

iv) Si determini la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t) - e^{-2t}\ \delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 1 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1.$$

ii) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si calcoli l'uscita del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t) - 3\delta_{-1}(t-1)$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3a\frac{dy(t)}{dt} + 2a^2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

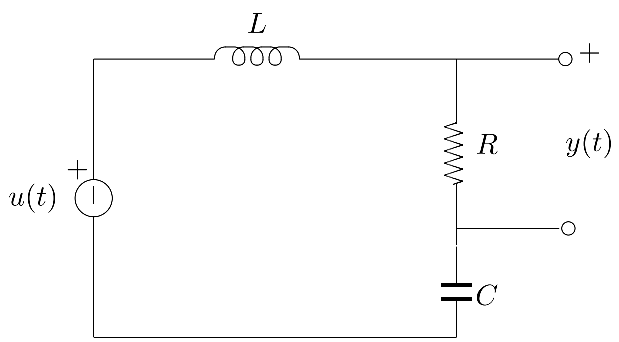
con a parametro reale.

i) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, i modi elementari del sistema e se ne studi il carattere.

ii) Si determinino, al variare di a in $\mathbb{R}$, le condizioni iniziali a cui corrisponde un evoluzione libera di tipo puramente esponenziale (i.e., $y_\ell(t) = y(0^-)e^{\lambda t}$).

iii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 5. Si consideri la seguente rete elettrica lineare, comandata in tensione.



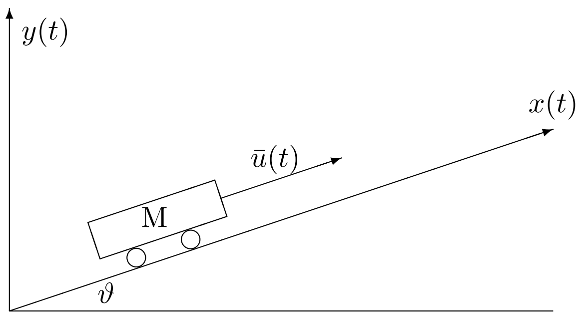
Sia $u(t)$ la tensione imposta dal generatore e $y(t)$ la caduta di tensione ai capi del resistore.

i) Determinare un modello ingresso/uscita che descriva il funzionamento della rete.

ii) Si studi, al variare dei parametri R, L e C il carattere dei modi.

iii) Si determini l'espressione della risposta impulsiva del sistema nel caso particolare in cui $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Esercizio 6. Un carrellino di massa M viene trainato su una strada di montagna di pendenza ϑ con una forza $\bar{u}(t)$, come illustrato in figura.



Siano $x(t)$ e $y(t)$, rispettivamente, la posizione lungo la strada di montagna e la quota del carrellino al tempo t, avendo assunto come origine del sistema di riferimento il punto di inizio della salita. Indichiamo, infine, con ν il coefficiente di attrito al moto.

i) Si determini un modello ingresso/uscita descrittivo della dinamica del sistema.

ii) Si determini l'evoluzione del sistema in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$y(0^-) = 0 \text{ (metri)} \qquad \text{e} \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 1 \text{ (metri/secondo)},$$

e alla sollecitazione in ingresso

$$\bar{u}(t) = mg \sin \vartheta, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Esercizio 7. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.
Si determini per quale valore di a in $\mathbb{R}$ il sistema presenta, tra le sue evoluzioni libere, un'evoluzione del tipo

$$y_\ell(t) = 5e^{-t} \cos t,$$

e per tale valore di a si determini il valore delle condizioni iniziali che corrisponde a quella specifica evoluzione.

Esercizio 8. Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = \frac{du(t)}{dt} - au(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si determinino le radici dell'equazione caratteristica.

ii) Si determini l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni iniziali generiche $y(0^-)$ e $\frac{dy(0^-)}{dt}$.

iii) Si determini la risposta impulsiva del sistema al variare di a.

iv) Si determini, se esistono, valori di a per cui la risposta impulsiva è di tipo puramente esponenziale, ovvero
$$w(t) = Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t),$$
per opportuni $A, \lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9. Si calcolino le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

i) $v(t) = (t + \cos t)\ \delta_{-1}(t)$;

ii) $v(t) = t + \cos t + t^3$;

iii) $v(t) = \sin t + e^t\ \delta_{-1}(t)$;

iv) $v(t) = (1 + t - t^2)\ \delta_{-1}(t)$;

v) $v(t) = te^t + e^t\ \delta(t) + 2\delta_1(t)$;

vi) $v(t) = te^{-t}\ \delta_{-1}(-t-5) + 5e^{-t}\cos(4t)\ \delta_{-1}(t)$;

vii) $v(t) = (t + e^{2t}\sin t)\ \delta_{-1}(t)$;

viii) $v(t) = \sin(5t)\ \delta_{-1}(-t) - e^{t-1}\delta_{-1}(t+4)$;

ix) $v(t) = te^t\sin t - \cos(t+\phi)$;

x) $v(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + te^t\delta_{-1}(t) + \sin t\cos t$.

Si calcolino le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali nell'indeterminata s:

i) $V(s) = \dfrac{s^2}{s-1}$;

ii) $V(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2}$;

iii) $V(s) = \dfrac{s^2-1}{s(s+1)}$;

iv) $V(s) = \dfrac{s-2}{(s+3)^2(s+5)}$;

v) $V(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)(s+5)}$;

vii) $V(s) = \dfrac{s^2+2}{s^2}$;

viii) $V(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+2}$;

ix) $V(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s-1)^2}$;

x) $V(s) = \dfrac{s^2}{s^2+4s+20}$;

xi) $V(s) = \dfrac{s^2-1}{s(s^2-4)}$;

xii) $V(s) = \dfrac{s}{s^2+2s+5}$;

xiii) $V(s) = \dfrac{s^4+2}{(s^2+2s+5)s}$;

xiv) $V(s) = \dfrac{s-2}{(s^2+1)(s-1)^2}$.

Esercizio 10. Un oscillatore elettronico è modellato dall'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = ku(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove y è l'uscita, u l'ingresso, ω_0 e k sono costanti reali positive del sistema.

i) Si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, l'espressione dell'evoluzione libera del sistema a partire dalle condizioni inziali

$$y(0^-) = 2 \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = 0.$$

ii) Si determini la funzione di trasferimento e, conseguentemente, la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si determini la risposta di evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = (1+t)\,\delta_{-1}(t)$, facendo uso delle trasformate di Laplace.

Esercizio 11. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1-a)\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in [0, +\infty),$$

dove a è un numero reale.

i) Si determini, al variare di a, la funzione di trasferimento del sistema e se ne evidenzino poli e zeri.

ii) Si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, la risposta in evoluzione forzata al segnale di ingresso

$$u(t) = \delta_{-1}(t-1) = \begin{cases} 1, & \text{per } t \geq 1, \\ 0, & \text{per } t < 1. \end{cases}$$

iii) Si determini, al variare di a e facendo uso delle trasformate di Laplace, il segnale di ingresso $u(t)$ a cui corrisponde, in evoluzione forzata, l'uscita $y(t) = y_v(t) = e^{at}\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 12. Si consideri il seguente sistema dinamico

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} + u(t), \qquad t \in [0, +\infty).$$

i) Si determini la funzione di trasferimento del sistema;

ii) si determini, se possibile, un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale di ordine 1 e un modello ingresso/uscita descritto da un'equazione differenziale di ordine 3 aventi la medesima risposta impulsiva;

iii) si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, le condizioni iniziali a cui corrisponde un'uscita in evoluzione libera del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-t},$$

con c_1 numero reale arbitrario.

iv) si determini, facendo uso delle sole trasformate di Laplace, le sollecitazioni in ingresso a cui corrisponde un'uscita in evoluzione forzata del tipo

$$y_v(t) = (c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t})\delta_{-1}(t),$$

con c_1, c_2 e λ numeri reali arbitrari.

Soluzioni numeriche di alcuni esercizi

Esercizio 1. i) $\lambda_1 = -1, \mu_1 = 1, \lambda_2 = -2, \mu_2 = 1$.
ii) $y_\ell(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}, t \geq 0$.
iii) $w(t) = \frac{1}{3}\,(e^{-t} - e^{-2t})\;\delta_{-1}(t)$.
iv) $y_f(t) = -\frac{1}{12}\;\delta_{-1}(t) + \frac{1}{6}\;t\;\delta_{-1}(t) + \frac{1}{12}\;e^{-2t}\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 2. i) $\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2, \lambda_2 = 0, \mu_2 = 1$.
ii) $y_\ell(t) = -4e^{-t} - 2t\;e^{-t} + 5, t \geq 0$.
iii) $w(t) = t\;e^{-t}\;\delta_{-1}(t)$.
iv) $y_f(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\;\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 3. i) $y_\ell(t) = e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t), t \geq 0$.
ii) $w(t) = e^{-t}\cos(2t)\;\delta_{-1}(t)$.
iii) $y_f(t) = e^{-t}\cos(2t)\;\delta_{-1}(t) - 3\Big[\frac{1}{5}\;\delta_{-1}(t-1) - \frac{1}{5}e^{-(t-1)}\cos(2(t-1))\;\delta_{-1}(t-1) + \frac{2}{5}e^{-(t-1)}\sin(2(t-1))\;\delta_{-1}(t-1)\Big]$.

Esercizio 5. i) $\frac{L}{R}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC}y = \frac{du}{dt}$.
ii) L'equazione caratteristica è $\frac{L}{R}s^2 + s + \frac{1}{RC} = 0$. Ricorrendo alla formula delle radici di un polinomio di secondo grado oppure alla regola dei segni di Cartesio è possibile vedere che per ogni valore (positivo) dei parametri R, L e C il polinomio ha solo radici a parte reale negativa e quindi i suoi modi sono sempre convergenti.
iii) Possiamo eliminare L dall'equazione ponendo $L = R^2C/4$. In tal modo si ottiene $w(t) = \frac{4}{RC}e^{-2t/RC}\left[1 - \frac{2}{RC}t\right]\;\delta_{-1}(t)$.

Esercizio 9. [Trasformate] viii) $\mathcal{L}[\sin(5t)\;\delta_{-1}(-t) - e^{t-1}\delta_{-1}(t+4)] = \mathcal{L}[0 - e^{t-1}\delta_{-1}(t)] = -\dfrac{e^{-1}}{s-1}$.

ix) La trasformata di Laplace di $e^t \sin t$ è

$$\mathcal{L}[e^t \sin t] = \frac{1}{(s-1)^2 + 1^2} = \frac{1}{s^2 - 2s + 2}.$$

Applicando la regola

$$\mathcal{L}[t^k v(t)] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} V(s),$$

nel caso particolare $k = 1$ e $v(t) = e^t \sin t$, troviamo

$$\mathcal{L}[te^t \sin t] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2 - 2s + 2}\right) = \frac{2s - 2}{(s^2 - 2s + 2)^2}.$$

Per il calcolo di $\mathcal{L}[\cos(t+\phi)]$ conviene sviluppare $\cos(t+\phi)$ nella forma

$$\cos(t+\phi) = \cos t \cos\phi - \sin t \sin\phi,$$

da cui si ottiene

$$\mathcal{L}[\cos(t+\phi)] = \mathcal{L}\left[\cos t\cos\phi - \sin t \sin\phi\right] = \cos\phi\frac{s}{s^2+1} - \sin\phi\frac{1}{s^2+1} = \frac{\cos\phi\ s - \sin\phi}{s^2+1}.$$

Alternativamente, in entrambi i casi (ovvero per entrambi i termini), si poteva ricorrere allo sviluppo di seno e coseno in termini di fasori e trattare quindi tutti i segnali come combinazioni lineari di esponenziali complessi o immaginari. In definitiva,

$$V(s) = \frac{2s-2}{(s^2-2s+2)^2} - \frac{\cos\phi\ s - \sin\phi}{s^2+1}.$$

Esercizio 10. i) La trasformata dell'evoluzione libera è

$$Y_\ell(s) = \frac{sy(0^-) + \frac{dy(0^-)}{dt}}{s^2+\omega_0^2} = \frac{2s}{s^2+\omega_0^2},$$

da cui

$$y_\ell(t) = 2\cos(\omega_0 t), t \in \mathbb{R}.$$

ii) Da $W(s) = k/(s^2+\omega_0^2) = (k/\omega_0)\cdot(\omega_0)/(s^2+\omega_0^2)$ segue

$$w(t) = (k/\omega_0)\sin(\omega_0 t)\delta_{-1}(t).$$

iii) Da

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s^2+\omega_0^2)} = \frac{k}{\omega_0^2}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\right]$$

segue

$$w(t) = \frac{k}{\omega_0^2}\left[1 + t - \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right]\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 12. i) $W(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2}$.

ii) $\frac{dy}{dt} + 2y = u$ e $\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{du(t)}{dt}, \qquad t \in [0, +\infty).$

iii) $\frac{dy(0^-)}{dt} = -y(0^-)$.

iv) Tutte e sole quelle la cui trasformata di Laplace è del tipo

$$U(s) = \frac{(As+B)(s+2)}{(s+\lambda)^2},$$

con A e B numeri reali arbitrari e λ numero reale qualsiasi (eventualmente anche $\lambda = 2$). Il calcolo dell'antitrasformata è lasciato per esercizio.