Lezione 10 - 21/03/2024

ESERCIZIO 1

CALCOLARE LA CONVOLUZIONE TRA:

$$x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$
$$y(n) = rect\left(\frac{n-1}{3}\right)$$

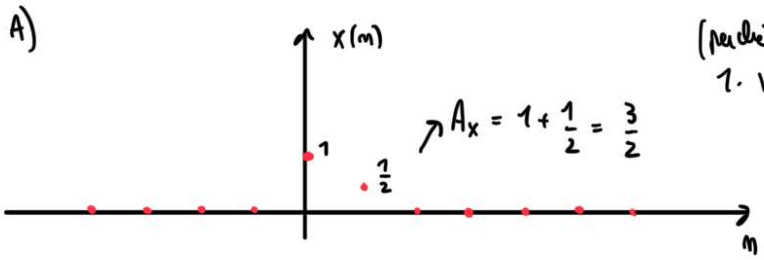
A) DISEGNARE $x(n)$ E $y(n)$

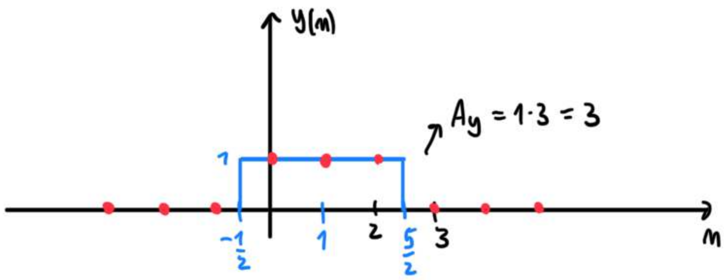
B) CALCOLARE $z(n) = x * y(n)$

C) CALCOLARE $v(n) = [x(n-3)] * [y(n+2)]$

Sol. A)

(perché ciascun punto ha misura 1 · valore del punto)





B) CALCOLIAMO LA CONVOLUZIONE:

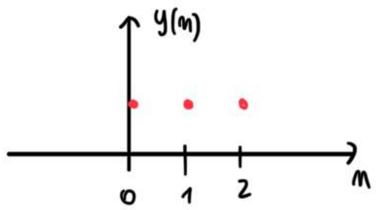
$$z(n) = x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, y(n-k)$$

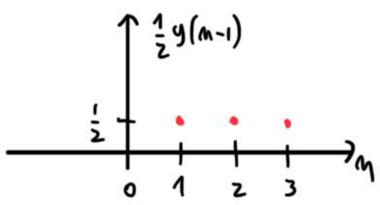
$$= \underbrace{\left[\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)\right]}_{x(n) \text{ è la somma di due } \delta} * y(n)$$

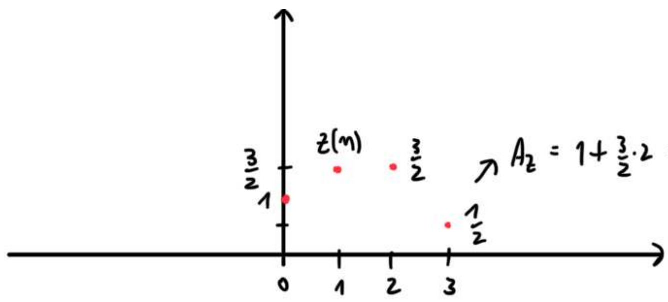
$$= \delta * y(n) + \frac{1}{2}[\delta(n-1)] * y(n) \quad \text{LINEARITÀ}$$

$$= \delta * y(n) + \frac{1}{2}\delta * y(n-1) \quad \text{PROPR. TRASLAZIONE}$$

$$= y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) \quad \text{ELEMENTO NEUTRO CONVOLUZIONE}$$







$\nearrow A_z = 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

Uso la regola dell'area per verificare se abbiamo sbagliato

$\shortparallel$

$A_x \cdot A_y = \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{2}$

(anche se è una condizione necessaria MA NON sufficiente che $A_x \cdot A_y = A_z$)

ALTRA IDEA PER VERIFICARE LA CORRETTEZZA DEL NOSTRO OPERATO:

REGOLA DELL'ESTENSIONE: (somma degli istanti iniziali e finali deve essere la stessa)

$e_z = [0, 3]$

$e_x = [0, 1]$ ✓

$e_y = [0, 2]$

c) $v(n) = [x(n-3)] * [y(n-2)]$

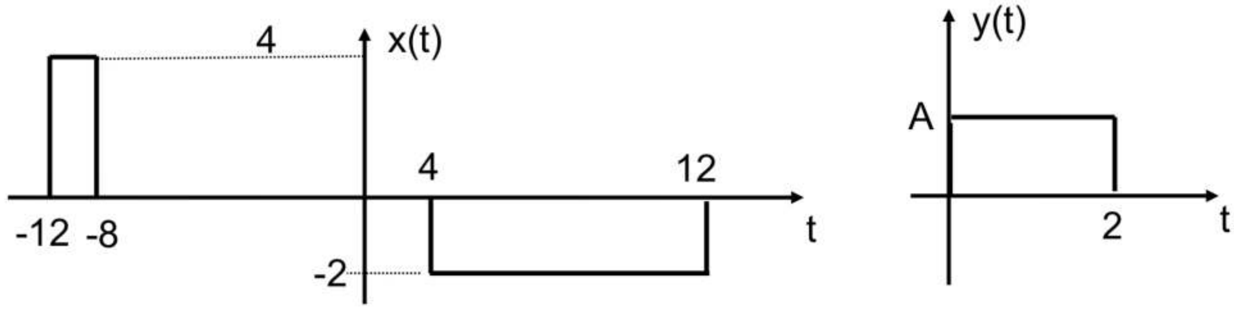
$= x * y(n-3+2)$ REGOLA TRASLAZIONE

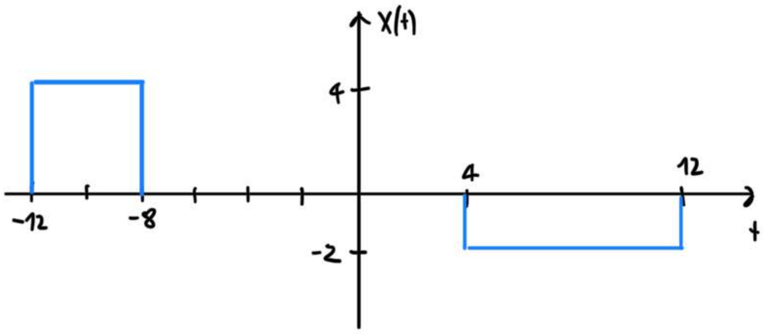
$= x * y(n-1)$

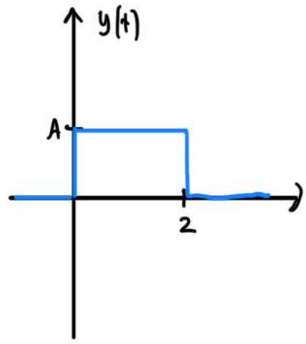
$= z(n-1)$

Es 1

Calcolare la convoluzione x*y(t) sfruttando la regola di convoluzione tra rettangoli (che restituisce un trapezio)







Sol. SE PRENDIAMO LA STRADA DI GUARDARE COME VARIA L'AREA IN COMUNE A SECONDA DELLA POSIZIONE RECIPROCA DEI SEGNALI, MORIAMO

CI CONVIENE ESPRIMERE X E Y COME COMBINAZIONE LINEARE DI RECT E FARE LA CONVOLUZIONE

- X(t) E' UN RETTANGOLO CENTRATO IN -10, DI ALTEZZA 4 E BASE 4 +
  UN RETTANGOLO CENTRATO IN 8, DI ALTEZZA -2 E BASE 8

[USIAMO LA NOTAZIONE $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{B}\right) = r_B(t)$]

$$x(t) = 4 \cdot r_4(t+10) - 2\, r_8(t-8)$$
$$y(t) = A \cdot r_2(t-1)$$

$$z(t) = x * y(t) = \left[4 \cdot r_4(t+10) - 2 r_8(t-8)\right] * \left[A\, r_2(t-1)\right]$$

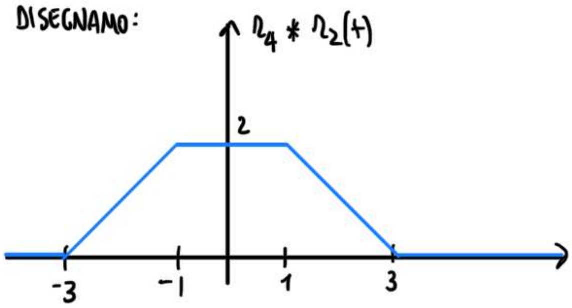
REGOLA DI TRASLAZIONE

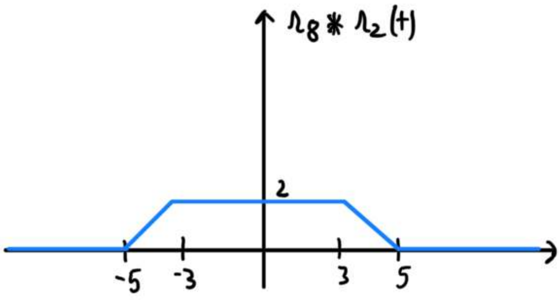
$$= 4\left[r_4(t+10)\right] * \left[A\, r_2(t-1)\right] - 2\left[r_8(t-8)\right] * \left[A\, r_2(t-1)\right]$$

$$= 4A\, r_4 * r_2(t+10-1) - 2A\, r_8 * r_2(t-8-1)$$

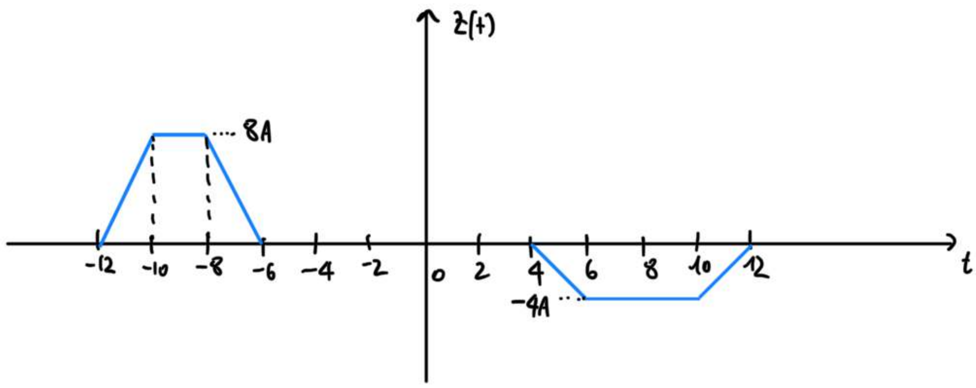
$$= 4A\, r_4 * r_2(t+9) - 2A\, r_8 * r_2(t-9)$$

DISEGNAMO:





[OCIO: LA REGOLA DEL TRAPEZIO FUNZIONA <u>SOLO</u> NEL CONTINUO. NON NEL DISCRETO]



Es 3
Le seguenti espressioni sono delle convoluzioni. Identificare i segnali x(t) e y(t)

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} \sin(t-\tau)\, d\tau$$

$$z(t) = \int_0^{\infty} e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2) d\tau,$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau+2) dt.$$

$$z(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2) d\tau, \text{ per } t > 0, \text{ e } z(t) = 0, \text{ per } t < 0$$

1) $$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} \sin(t-u)\, du \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, du$$ PER QUALCHE $x(u)$, $y(u)$?

SI VEDE CHIARAMENTE CHE: $x(t) = e^{-|t|}$
$y(t) = \sin(t)$

2) $$z(t) = \int_{0}^{+\infty} e^{t-u} \sin(u+2)\, du \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, du$$

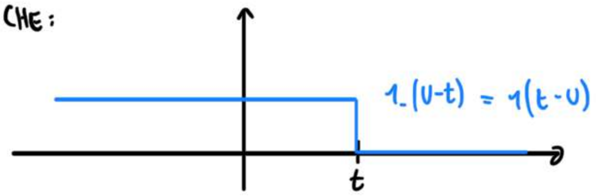
DOBBIAMO INTRODURRE IL GRADINO (TRUCCO DELLA FUNZIONE INDICATRICE)

$$\rightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-u}\, 1(u) \sin(u+2)\, du$$

ORA SI RICONOSCE CHE: $x(t) = 1(t) \sin(t+2)$
$y(t) = e^{t}$

3) $$z(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{u} \sin(t-u+2)\, du \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, du$$

NOTO CHE:



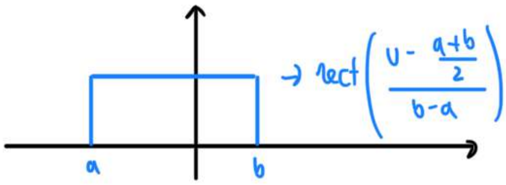
$\rightarrow t-u > 0$
$\rightarrow t > u$

$$\rightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u}\, 1(t-u) \sin(t-u+2)$$

ORA SI DEDUCE CHE: $x(t) = e^{t}$
$y(t) = 1(t) \sin(t+2)$

DOMANDA: POSSIAMO AVERE UNA CONVOLUZIONE CON QUALSIASI ESTREMO? NO

se abbiamo $\int_a^b \cdot\, du$

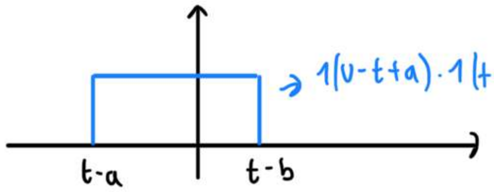


gli estremi sono delle costanti posso sempre scrivere

$$\int_a^b \cdot\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot\, F(u)\, du$$

nel caso invece in cui gli estremi sono Funzione di t:

$$\int_{t-a}^{t-b} \cdot \, du$$



$\rightarrow 1(u-t+a) \cdot 1(t-b-u) = F(t-u)$

quindi: $\displaystyle\int_{t-a}^{t-b} \cdot \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \, F(t-u) \, du$

QUESTI SONO GLI UNICI 2 CASI IN CUI FUNZIONA. SE t È MOLTIPLICATO PER UNA COSTANTE NON POSSO OTTENERE UNA FUNZIONE DI $t-u$. GLI UNICI 2 CASI IN CUI L'INTEGRALE PUÒ RAPPRESENTARE UNA COSTANTE È QUANDO GLI ESTREMI SONO:

- UNA COSTANTE
- t - UNA COSTANTE

(se ho per es. $10t$ non c'è modo di ricondursi a $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot F(t-u) \, du$)

D) $z(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t e^{t-u} \sin(u+2) \, du & t>0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t-u} 1(t-u) \sin(u+2) \, du & t>0 \end{cases}$

$x(t) = 1(t) \sin(t+2)$ ← questo segnale è causale. quindi vale 0 per tempi negativi e quell'integrale per tempi positivi. Quindi è giusto interpretare la convoluzione con questi 2 segnali

$y(t) = e^t \, 1(t)$