A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 20 aprile 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, 0, -2)$, $u_2 = (3, 2, -1, -1)$, $u_3 = (0, -1, 2, -4)$.

(a) Verificare che u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti. Scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri due e trovare una base di U.

(b) Determinare per quale valore di α il vettore $(\alpha, -4, 3, -1)$ appartiene a U.

(c) Trovare una base del sottospazio W di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$

(d) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & t+1 \\ 2 & -3 & t+4 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono valori di t per i quali il sistema $AX = \vec{0}$ non ha soluzioni? Per quali valori di t il sistema $AX = \vec{0}$ ha una sola soluzione? Per quali valori di t ci sono infinite soluzioni?

(c) Poniamo $t = 0$ e sia $u = (1, 5, 1, \alpha)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ha soluzione.

(d) Poniamo $t = 1$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = w$, con $w = (-2, 3, -4, 1)$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Dire per quale valore di α il vettore $v = (4, 2, \alpha)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di α determinare l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(c) Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. Scrivere la matrice A' di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $f\big(g(w)\big) = w$, per ogni $w \in \mathbb{R}^3$. [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*]

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1$^{\text{o}}$ Compitino — 20 aprile 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 0, 3)$, $u_2 = (-2, 3, 1, -2)$, $u_3 = (-1, 0, 2, 5)$.

(a) Verificare che u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti. Scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri due e trovare una base di U.

(b) Determinare per quale valore di α il vettore $(\alpha, 5, 3, 0)$ appartiene a U.

(c) Trovare una base del sottospazio W di equazioni $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

(d) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & t+3 \\ 2 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono valori di t per i quali il sistema $AX = \vec{0}$ non ha soluzioni? Per quali valori di t il sistema $AX = \vec{0}$ ha una sola soluzione? Per quali valori di t ci sono infinite soluzioni?

(c) Poniamo $t = 0$ e sia $u = (1, 3, 5, \alpha)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ha soluzione.

(d) Poniamo $t = 3$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = w$, con $w = (1, 3, 2, 4)$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Dire per quale valore di α il vettore $v = (1, -9, \alpha)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di α determinare l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(c) Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. Scrivere la matrice A' di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $f\big(g(w)\big) = w$, per ogni $w \in \mathbb{R}^3$. [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*]

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 20 aprile 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, -2, 0, 1)$, $u_2 = (4, -3, 1, 1)$, $u_3 = (1, 0, -2, 1)$.

(a) Verificare che u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti. Scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri due e trovare una base di U.

(b) Determinare per quale valore di α il vettore $(\alpha, 5, -3, -1)$ appartiene a U.

(c) Trovare una base del sottospazio W di equazioni $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$

(d) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & t \\ 2 & 3 & t+3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono valori di t per i quali il sistema $AX = \vec{0}$ non ha soluzioni? Per quali valori di t il sistema $AX = \vec{0}$ ha una sola soluzione? Per quali valori di t ci sono infinite soluzioni?

(c) Poniamo $t = 0$ e sia $u = (4, 0, \alpha, 2)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ha soluzione.

(d) Poniamo $t = -2$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = w$, con $w = (1, 6, 2, 7)$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Dire per quale valore di α il vettore $v = (-3, 1, \alpha)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di α determinare l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(c) Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. Scrivere la matrice A' di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $f\big(g(w)\big) = w$, per ogni $w \in \mathbb{R}^3$. [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*]

D

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1$^{\text{O}}$ Compitino — 20 aprile 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, 0, -2)$, $u_2 = (-3, -2, 1, 1)$, $u_3 = (0, -1, 2, -4)$.

(a) Verificare che u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti. Scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri due e trovare una base di U.

(b) Determinare per quale valore di α il vettore $(\alpha, 4, -3, 1)$ appartiene a U.

(c) Trovare una base del sottospazio W di equazioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

(d) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -9 & t \\ 3 & -6 & t+6 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono valori di t per i quali il sistema $AX = \vec{0}$ non ha soluzioni? Per quali valori di t il sistema $AX = \vec{0}$ ha una sola soluzione? Per quali valori di t ci sono infinite soluzioni?

(c) Poniamo $t = 0$ e sia $u = (-2, 1, -3, \alpha)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ha soluzione.

(d) Poniamo $t = -3$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = w$, con $w = (-4, 1, -12, 3)$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, nelle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$, è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Dire per quale valore di α il vettore $v = (3, 5, \alpha)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di α determinare l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(c) Sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 0, -1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, -1)$, $v_3 = (-1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. Scrivere la matrice A' di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $f\big(g(w)\big) = w$, per ogni $w \in \mathbb{R}^3$. [*La risposta deve essere adeguatamente giustificata*]