SOLUZIONI ES. FOGLIO 1

(1) Per la regola di Ruffini il generico polinomio nel sottoinsieme S_1 si può esprimere come

$$(*) \quad p(x) = (x-1)(ax^2+bx+c), \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

da cui si deduce che S_1 è sottospazio di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ sfruttando la caratterizzazione vista a lezione

S_2 non è sottospazio perché non contiene il polinomio nullo.

Per determinare una base di S_1, scrivo

$(*)$ come

$$p(x) = a(x^3-x) + b(x^2-x) + c(x-1)$$

e osservo che

$$S_1 = L(\{x^3-x,\ x^2-x,\ x-1\})$$

Per verificare che sono linearmente indipendenti considero

$$\lambda_1(x^3-x) + \lambda_2(x^2-x) + \lambda_3(x-1) = 0$$

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + (\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2) x - \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

② $\dim V = 4 \qquad \mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$W = L(\{w_1, w_2, w_3\})$

$w_1 = v_1 - v_3 + v_4 \;,\; w_2 = 2v_2 + v_3 - v_4 \;,\; w_3 = 2v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4$

w_1, w_2, w_3 sono generatori per W. Verifico se sono lin. indip.

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 (v_1 - v_3 + v_4) + \lambda_2 (2v_2 + v_3 - v_4) + \lambda_3 (2v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4) = \vec{0}$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3) v_1 + (2\lambda_2 + 2\lambda_3) v_2 + (-\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) v_3 + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) v_4 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni $\forall \lambda_3$, in particolare della forma

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2k \\ \lambda_2 = -k \\ \lambda_3 = k \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \dim W < 3$

Si verifica poi che i vettori w_1, w_2, w_3 sono a due a due linearmente indipendenti e una qualsiasi coppia forma una base di W.

③ $V = L((1,0,3,1), (1,2,0,0))$

$W = L((2,0,0,1), (0,2,3,0))$

$z \in V \Leftrightarrow z = \lambda(1,0,3,1) + \mu(1,2,0,0) = (*)$

$z \in W \Leftrightarrow z = \rho(2,0,0,1) + \sigma(0,2,3,0) = (\square)$

$z \in V \cap W \Leftrightarrow (*) = (\square)$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} (\lambda + \mu, 2\mu, 3\lambda, \lambda) \\ \parallel \\ (2\rho, 2\sigma, 3\sigma, \rho) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - 2\rho = 0 \\ 2\mu - 2\sigma = 0 \\ 3\lambda - 3\sigma = 0 \\ \lambda - \rho = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \rho \\ \mu = \sigma \\ \lambda = \sigma \end{cases}$$

$\iff \lambda = \mu = \rho = \sigma$

Posto $t = \lambda = \mu = \sigma = \rho$

$z \in V \cap W \iff z = (2t, 2t, 3t, t)$

$$V \cap W = \left\{ z \in \mathbb{R}^4 : t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = L((2,2,3,1))$$

Quindi $z = (2,2,3,1)$ è una base per $V \cap W$ e $\dim(V \cap W) = 1$.

④ $p \in U \cap W$

$\iff p = a(x^2+2x) + b(x+1)$

$p = c(x+2) + d(-x^2+1)$

$$(a+d)x^2 + (2a+b-c)x + b - 2c - d = 0$$

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ 2a+b-c = 0 \\ b - 2c - d = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a = -d \\ b = c+2d \\ b = 2c+d \end{cases} \to \begin{cases} a = -d \\ b = c+2d \\ c = d \end{cases}$$

Infinite sol. $\forall d \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} a = -k \\ b = 3k \\ c = k \\ d = k \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$p(x) = -d(x^2+2x) + 3d(x+1) = d(-x^2+x+3)$$

$U \cap W = L(x^2 - x - 3)$ e $\dim(U \cap W) = 1$

Dalla formula di Grassman

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) =$$

$$= 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

$$U + W \equiv \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

(Si verifica che U e W hanno dim. 2)