**Esercizi di Algebra Lineare e Geometria**-Foglio 1

1. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3. Si considerino i sottoinsiemi
$$S_1 = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(1) = 0\}$$
(ovvero l'insieme dei polinomi che ammettono 1 come radice) e
$$S_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : p(2) = 3\}.$$
Stabilire se $S_1, S_2$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ e, in caso affermativo, determinare la dimensione e una base.

2. Sia $V$ uno spazio vettoriale finitamente generato con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base di $V$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $W$ di $V$ generato dai vettori
$$w_1 = v_1 - v_3 + v_4;\ w_2 = 2v_2 + v_3 - v_4;\ w_3 = 2v_1 + 2v_2 - v_3 + v_4$$

3. Siano
$$V = \mathcal{L}((1,0,3,1),(1,2,0,0))$$
$$W = \mathcal{L}((2,0,0,1),(0,2,3,0))$$
due sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Determinare una base per $V \cap W$.

4. Si considerino in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ (lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata $x$ a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 2) i sottospazi $U = \mathcal{L}(u_1(x), u_2(x))$ e $W = \mathcal{L}(w_1(x), w_2(x))$ con $u_1(x) = x^2 + 2x$, $u_2(x) = x + 1$, $w_1(x) = x + 2$ e $w_2(x) = -x^2 + 1$. Determinare $U \cap W$ e $U + W$.