COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
25 Gennaio 2019

Esercizio 1. [9 + 1 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10^n \frac{(1+s^2)}{s\left(1 + 2\frac{1}{2}\frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}\right)}$$

con n numero intero.
Assumendo $n = 0$

i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, calcolando eventuali asintoti ed intersezioni con gli assi, e si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$.

Assumendo ora n incognito,

iii) Si determini, ricorrendo al solo criterio di Nyquist, quanto deve valere n affinché il sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

- sia BIBO stabile per $K > 0$;
- abbia 3 poli a parte reale positiva per $K < K^*$;
- abbia 1 polo a parte reale positiva per $K^* < K < 0$,

dove K^* è approssimativamente -0.01.

Esercizio 2. [9.5 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+13}{(s+7)^2(s-3)}$$

se ne traccino i luoghi positivo e negativo, evidenziandone punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, e studiando quindi la BIBO stabilità di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale.

Esercizio 3. [6 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$$

i) si progetti un controllore proprio e stabilizzante $C_1(s) \in \mathbb{R}(s)$ che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C_1(s)G(s)}{1+C_1(s)G(s)}$ tipo 0 e relativo errore a regime (al gradino) $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-4}$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 10$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$;

ii) si progetti un controllore stabilizzante $C_2(s) \in \mathbb{R}(s)$ di tipo PID (eventualmente P, PD, PI) che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C_2(s)G(s)}{1+C_2(s)G(s)}$ tipo 1 e relativo errore a regime (alla rampa lineare) $e_{rp}^{(2)} \simeq 10^{-4}$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 100$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

Teoria. [5 punti] Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

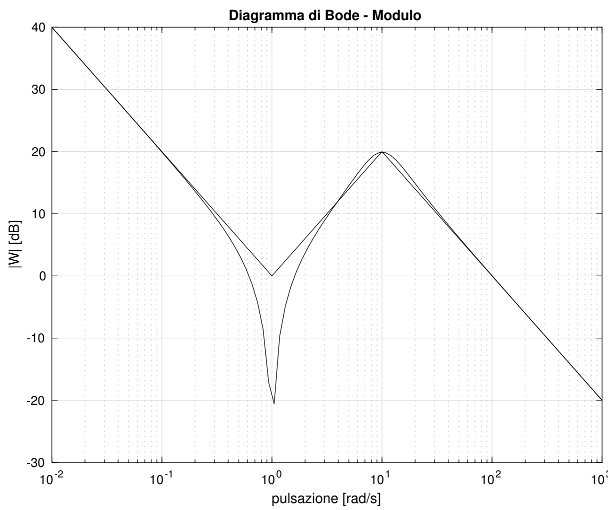
$(a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m)$ e sollecitato dal segnale di ingresso

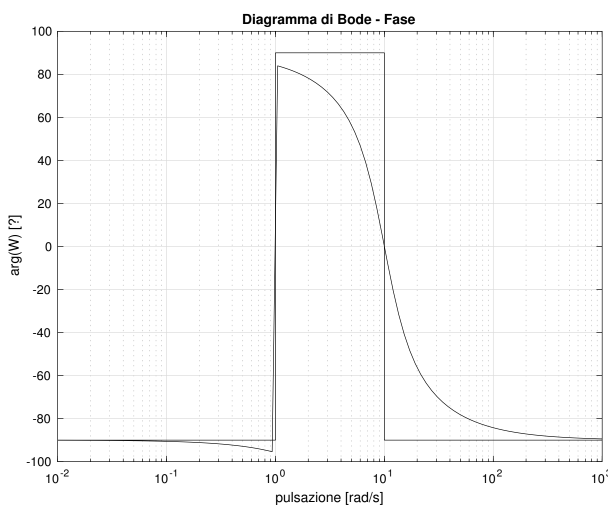
$$u(t) = e^{j\tilde{\omega}t}\delta_{-1}(t),$$

con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fissato. Assumendo condizioni iniziali arbitrarie, si introducano i concetti di risposta di regime permanente e di risposta transitoria, e si dimostri (<u>operando nel dominio del tempo</u>) come sotto opportune ipotesi l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema sia sempre esprimibile come somma delle due. Come cambia la risposta alla precedente domanda se le condizioni iniziali del sistema sono nulle?

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) e ii) Per $n = 0$ il guadagno di Bode K_B della funzione di trasferimento $G(s)$ è unitario e i diagrammi di Bode di modulo e fase sono riportati qui di seguito. Si noti che se invece di assumere $n = 0$ avessimo assunto un diverso $n \in \mathbb{Z}$, il guadagno di Bode (positivo) di $G(s)$, $K_B = 10^n$, avrebbe dato un contributo additivo al diagramma del modulo pari a $n \cdot 20$ dB (quindi l'intero diagramma sarebbe stato traslato verso l'alto di $n \cdot 20$ dB se $n > 0$ e verso il basso di $|n| \cdot 20$ dB se $n < 0$), mentre il diagramma delle fasi sarebbe stato il medesimo riportato qui di seguito.

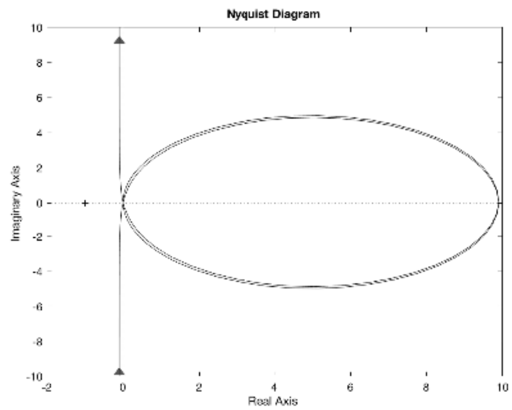




Lo studio di $G(j\omega)$ conduce a

$$G(j\omega) = \frac{0.1(\omega^2 - 1)}{\left(1 - \frac{\omega^2}{100}\right)^2 + \frac{\omega^2}{100}} + j\frac{(\omega^2 - 1)\left(1 - \frac{\omega^2}{100}\right)}{\omega\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{100}\right)^2 + \frac{\omega^2}{100}\right]}.$$

Limitandoci alle pulsazioni positive, la parte reale è negativa per $0 < \omega < 1$, si annulla per $\omega = 1$, mentre è positiva per $\omega > 1$. Invece la parte immaginaria ha due zeri: uno per $\omega = 1$ e uno per $\omega = 10$. Essa è negativa per $0 < \omega < 1$ e per $\omega > 10$, e positiva per $1 < \omega < 10$. Per $\omega = 10$ la parte immaginaria è nulla mentre la parte reale vale $9.9 \approx 10$. Se valutiamo il limite della parte reale per $\omega \to 0^+$ troviamo -0.1. Infine, sia parte reale che parte immaginaria si annullano per $\omega \to +\infty$. Questa considerazioni permettono di tracciare il seguente diagramma di Nyquist:



Ora si ha $n_{G_+} = 0$ e la valutazione del numero di giri N attorno al punto $-\frac{1}{K}$ (dopo aver aggiunto la chiusura all'infinito con un semicerchio percorso in senso orario) porge la seguente casistica: il sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

- è BIBO stabile per $K > 0$;
- ha 3 poli a parte reale positiva per $K < -1/9.9 \approx -0.1$;
- ha 1 polo a parte reale positiva per $-1/9.9 \approx -0.1 < K < 0$.

iii) Come già evidenziato a proposito dei diagrammi di Bode, il fatto di assumere per n un valore intero diverso da 0 equivale semplicemente a modificare il modulo di $G(j\omega)$ per ogni valore di ω (esso viene moltiplicato per 10^n), ma non la fase. Dal punto di vista del diagramma di Nyquist, il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $n \in \mathbb{Z}$ fissato, è identico a quello riportato nella precedente figura se non nella "scala", in quanto ogni punto risulta moltiplicato per 10^n rispetto al medesimo punto nel diagramma di Nyquist riportato sopra. È evidente allora che la stabilità del sistema retroazionato segue la casistica riportata al punto iii) se e solo se l'intersezione del diagramma di Nyquist con l'asse reale è pari a un valore prossimo a 100. Questo significa che ogni punto del nuovo diagramma si deve ottenere moltiplicando per 10 il medesimo punto nel diagramma di partenza. Ma allora deve necessariamente essere $n = 1$.

Esercizio 2. Si noti, preliminarmente che $n = 3$ e $m = 1$, quindi sia luogo positivo che negativo avranno due rami che vanno al punto improprio, nel luogo positivo con direzioni $\pi/2$ e $3\pi/2$, nel luogo negativo con direzioni 0 e π. Il centro degli asintoti in entrambi i casi ha coordinata reale:

$$x_C = \frac{(-7 - 7 + 3) - (-13)}{3 - 1} = 1.$$

L'equazione dei punti doppi porge, dopo alcuni calcoli

$$(s+7)(s^2+18s+17)=0$$

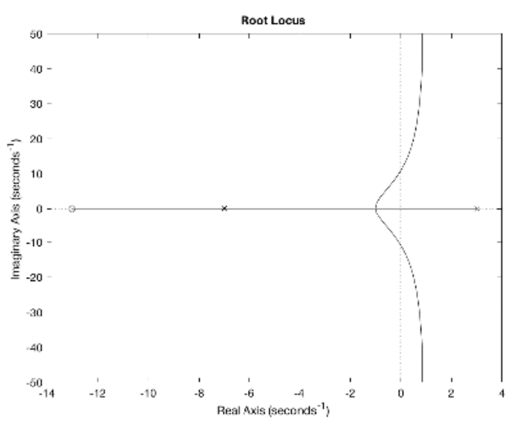
e ciò permettere di determinare il punto doppio banale ($s=-7, K=0$) ed i punti doppi ($s=-1, K=12$) e ($s=-17, K=-500$), l'uno appartenente al luogo positivo e l'altro a quello negativo. Studiando le intersezioni con l'asse immaginario si trova

$$j\omega(K+7-\omega^2)+(13K-147-11\omega^2)=0.$$

La parte immaginaria si annulla per $\omega=0$ e per $\omega^2=K+7$.

- Sostituendo $\omega=0$ nella parte reale e imponendo che anche la parte reale sia nulla si trova $K=\frac{147}{13}$. Quindi una prima intersezione con l'asse immaginario si ha in corrispondenza all'origine per $K=\frac{147}{13}$.
- Sostituendo a ω^2 l'espressione $K+7$ nella parte reale e imponendo che anch'essa sia nulla, si trova $K=112$. Di conseguenza altre due intersezioni con l'asse immaginario sono $s=\pm j\sqrt{119}$ per $K=112$.

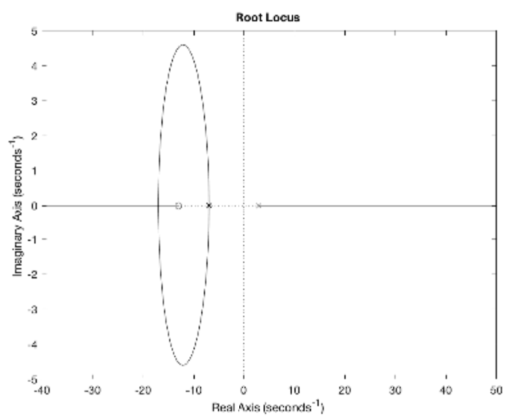
Mettendo assieme le informazioni finora trovate e applicando la regola per determinare quali punti dell'asse reale appartengano ai due luoghi, si trova che nel luogo positivo, 2 rami si muovono sull'asse reale uno verso l'altro (provenendo dai poli $s=-7,+3$), e quello che proviene dal polo $s=+3$ attraversa l'asse immaginario in $s=0$ per $K=\frac{147}{13}$, poi prosegue incontrando l'altro ramo nel punto doppio $s=-1$ per $K=12$, dopodichè i due rami escono nel piano complesso, attraversano nuovamente l'asse immaginario per $K=112$, e quindi proseguono verso l'asintoto verticale in $s=+1$. Il terzo ramo si muove sull'asse reale dal polo doppio in $s=-7$ verso lo zero in $s=-13$.



Per $0<K<\frac{147}{13}$ si hanno 1 polo positivo e 2 negativi, per $K=\frac{147}{13}$ un polo in $s=0$ e 2 negativi, che dai conti risultano essere $s=-\frac{143\pm3\sqrt{897}}{26}$, mentre per $\frac{147}{13}<K<12$ si ha BIBO stabilità con 3 poli reali negativi, per $K=12$ sempre BIBO stabilità con un polo doppio in $s=-1$ ed il terzo polo che, dai conti, risulta essere $s=-9$, ed infine per $12<K<112$ sempre BIBO stabilità con 2 poli complessi coniugati a parte reale negativa ed 1 polo negativo. Per $K=112$ abbiamo due poli immaginari puri $s=\pm j\sqrt{119}$, oltre ad

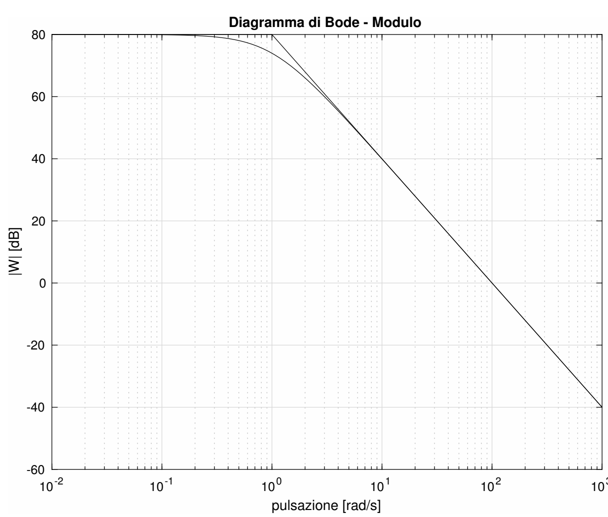
1 polo negativo che, dai conti, risulta essere $s = -11$, mentre per $K > 112$ si hanno 2 poli complessi coniugati a parte reale positiva ed 1 polo negativo. In conclusione, per $K > 0$, si ha BIBO stabilità se e solo se $\frac{147}{13} < K < 112$.

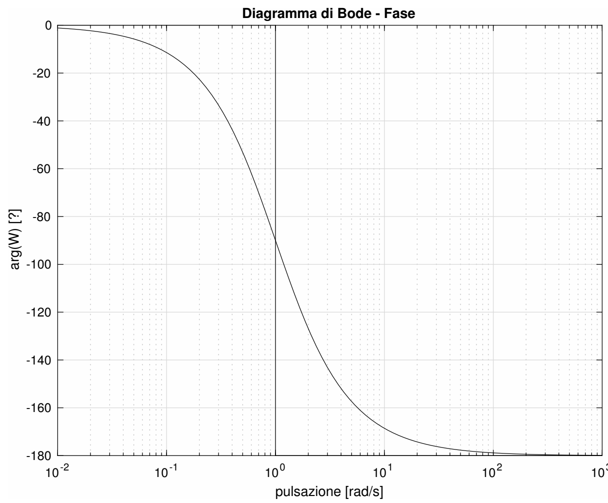
Nel luogo negativo, 1 ramo si muove semplicemente sull'asse reale dal polo $s = +3$ verso $+\infty$, mentre gli altri 2 rami escono sul piano complesso partendo dal polo doppio in $s = -7$, e si reincontrano nel punto doppio $s = -17$ per $K = -500$, per poi proseguire sull'asse reale, 1 verso lo zero in $s = -13$, l'altro verso $-\infty$. In questo tragitto non si ha mai attraversamento dell'asse immaginario (non sono state trovate intersezioni con tale asse nel luogo negativo), quindi per $K < 0$ si hanno sempre 1 polo positivo e 2 a parte reale negativa (prima complessi poi reali).



Quindi per $K < 0$ non c'è mai BIBO stabilità. In conclusione, si ha BIBO stabilità se e solo se $\frac{147}{13} < K < 112$.

Esercizio 3. i) Per soddisfare le specifiche su tipo ed errore a regime è sufficiente scegliere $C_1'(s) = 10^3$. Se ora tracciamo il diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s)$:

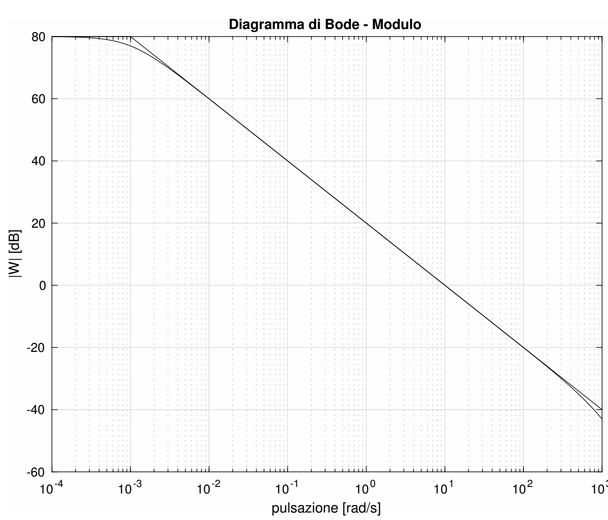


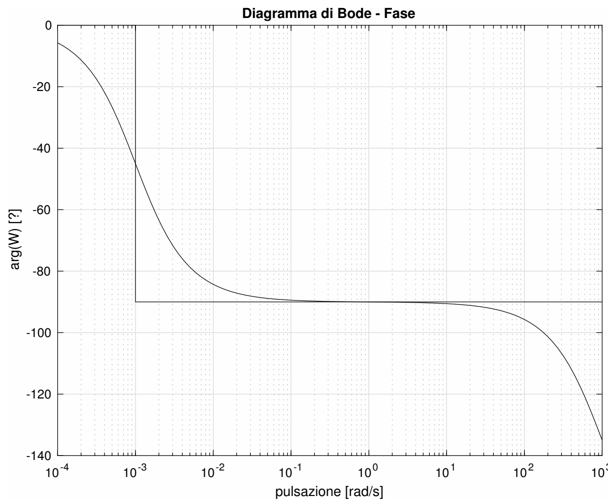


osserviamo che $\omega_A = 100$ rad/s e quindi la pulsazione di attraversamento ω_A è maggiore di quella desiderata. Infatti per $\omega = \omega_A^*$ il modulo vale 40 dB. D'altra parte per $\omega = \omega_A^*$ la fase vale circa $-180°$ e quindi tale fase va aumentata di circa 90°. Una rete a sella che per $\omega = \omega_A^*$ abbassi il modulo di 40dB ed alzi la fase (e quindi $m_\psi(\omega_A^*)$) di circa 90° è sufficiente. Possiamo ad esempio scendere di 60dB con la prima coppia polo-zero (rete attenuatrice), per poi risalire di 20dB (con la rete anticipatrice). Un modo per riuscirci (che semplifica i calcoli in quanto introduce una doppia cancellazione zero-polo ammissibile) è piazzare il polo 4 decadi prima di $\omega_A^* = 10$ rad/s, i due zeri 1 decade prima, e l'ultimo polo in alta frequenza (rispetto ad ω_A, ad esempio 2 decadi dopo), al solo scopo di rendere proprio il compensatore. Il compensatore

$$C_1(s) = 10^3 \frac{(1+s)^2}{(1+10^3 s)\left(1+\frac{s}{10^3}\right)}$$

permette il soddisfacimento di tutti i requisiti (compresa la stabilità BIBO del sistema retroazionato, grazie al Criterio di Bode applicato a $C_1(s)G(s)$), ed è uno degli infiniti $C_1(s)$ che vanno bene.

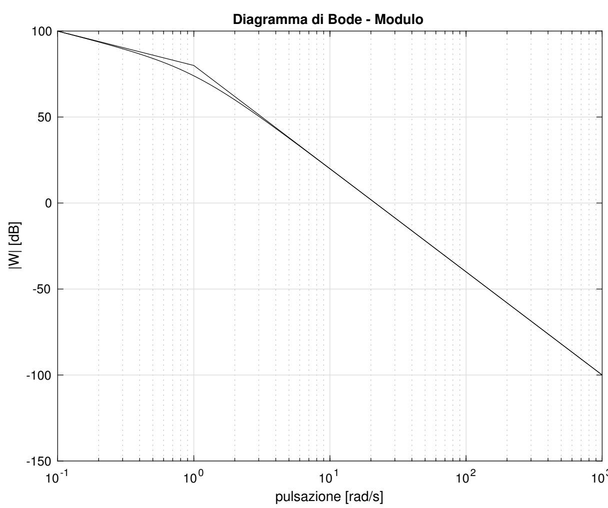


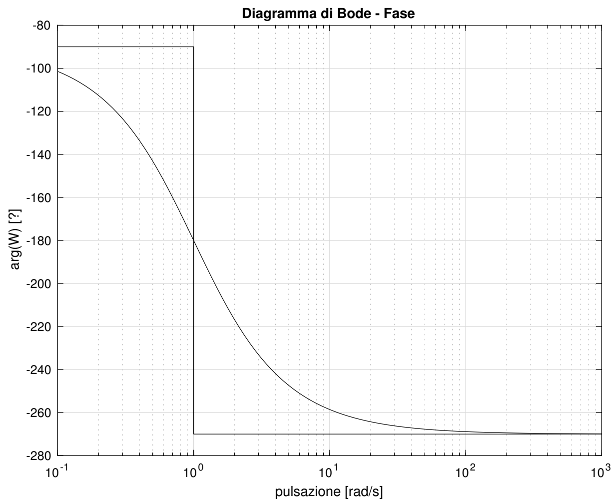


ii) Nel secondo caso, per sistemare la specifica sul tipo è necessario introdurre un integratore e modificare il guadagno di Bode in catena aperta. Precisamente è necessario il ricorso al pre-compensatore

$$C_2'(s) = \frac{10^3}{s} \ \Rightarrow\ C_2'(s)G(s) = \frac{10^4}{s(s+1)^2}.$$

Ciò significa che dovremo ricorrere o a un controllore PI oppure ad un PID. Ora tracciamo il diagramma di Bode di $C_2'(s)G(s)$:

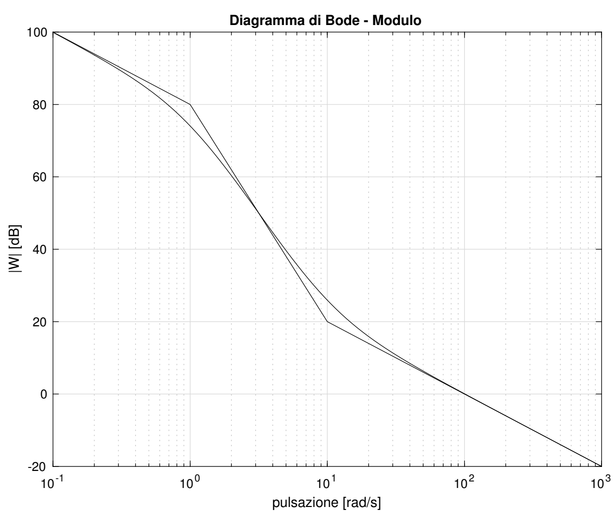


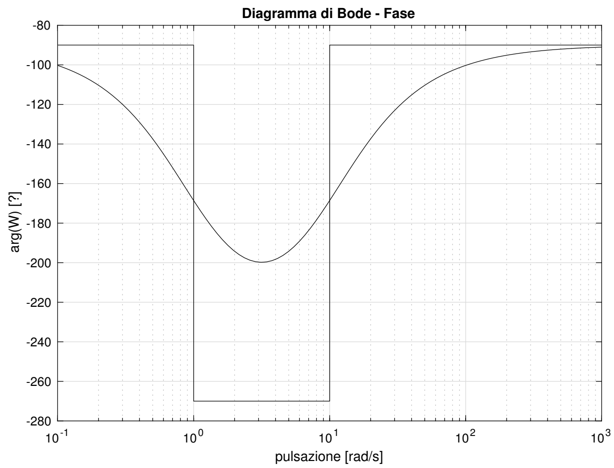


In questo caso è evidente che $\omega_A < \omega_A^*$ e che per $\omega = \omega_A^*$ si ha margine di fase negativo (circa -90 gradi). Pertanto sono necessari 2 zeri stabili in modo da alzare la fase di 180° e il modulo di 40 dB in $\omega_A^* = 100$. Ponendo ad esempio due zeri in -10, si ottiene il risultato desiderato. Pertanto

$$C_2(s) = \frac{10^3(1+0.1s)^2}{s} = 200 + \frac{10^3}{s} + 10s$$

è uno degli infiniti PID che vanno bene (soddisfacendo sia le specifiche che il Criterio di Bode per $C_2(s)G(s)$).





Teoria. Si veda il Capitolo 4 del Libro di testo.