Quiz 2

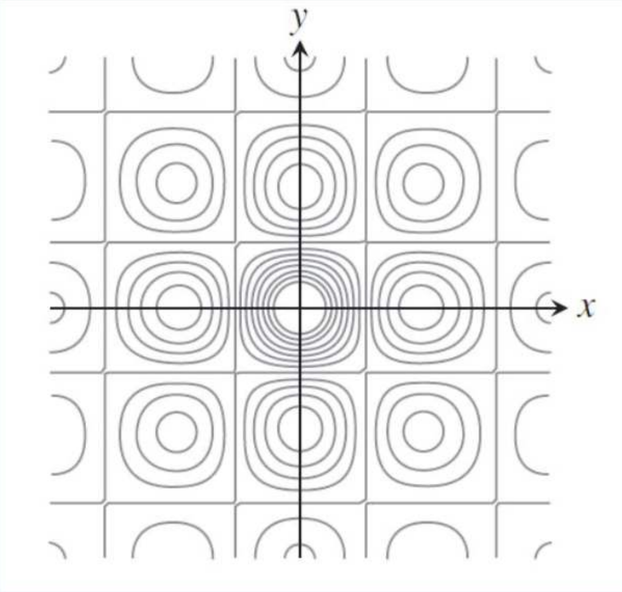
Question 1

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Quale funzione corrisponde alle curve di livello disegnate in figura? Suggerimento: usare l'immaginazione o un software di calcolo simbolico, ad esempio Wolframalpha, free su internet.



Select one:

- a. $e^{-y} \cos x$
- b. $\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$
- c. $(\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$
- d. $\dfrac{1}{4x^2 + y^2}$
- e. $-\dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$
- f. $y^2 - y^4 - x^2$

SOL. O SBATTO TUTTE LE FUNZIONI SU WOLFRAM ALPHA, OPPURE RAGIONO UN PO'

DAL GRAFICO SI DEDUCE CHE LA FUNZIONE CERCATA DEVE ESSERE PERIODICA IN 2 DIREZIONI.

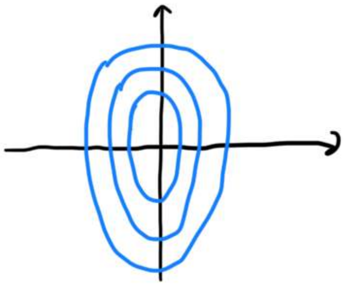
QUINDI, LA FUNZIONE CERCATA È: $\cos(x)\cos(y)\, e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}}$

QUESTA FUNZIONE, INFATTI, È PERIODICA SIA SU X SIA SU Y, PERCHÉ X E Y SONO NELL'ARGOMENTO DI FUNZIONI PERIODICHE

VEDIAMO RAPIDAMENTE LE ALTRE:

a) $e^{-y}\cos x$: SARÀ UNA FUNZIONE PERIODICA IN UNA SOLA DIREZIONE

d) $\dfrac{1}{4x^2+y^2}$: SARÀ UN GRAFICO DATO DA ELLISSI CONCENTRICHE, PERCHÉ LA FUNZIONE È DEL TIPO $\dfrac{N}{ax^2+by^2}$



Question 2

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2-5y^2}.$$

Se si ritiene che il limite non esista indicare come risposta -1000.

Answer:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2-5y^2}$$

Sol

1. USO STIME ASINTOTICHE:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2-5y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2-5y^2}$$

2. USO RESTRIZIONE DOMINIO RETTE

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x(mx)}{x^2-5m^2x^2} = \frac{3mx^2}{x^2(1-5m^2)} = \frac{3m}{1-5m^2}$$

vedo che il limite dipende da m, quindi non esiste

RISPOSTA: $\cancel{\exists}$ (-1000) V

Question 3

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Sia, per ogni $t \in [0, 2\pi]$

D_t:=\left\{(\rho\cos t, \rho\sin t):\, \rho>0, }.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni ,$t \in [0, 2\pi]$ si abbia $\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in D_t} f(x,y) = 3$. Allora $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$.

Select one:

- True
- False

$\forall t \in [0, 2\pi]$:

$$D_t := \{(\rho \cos t, \rho \sin t) : \rho > 0\}$$

$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall t \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D_t}} f(x,y) = 3, \text{ allora } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$$

RISPOSTA: FALSE V

Sol: PROPOSIZIONE 2.4.1 DEL MOOC: SE UN LIMITE ESISTE IN UN SOTTOINSIEME DI D, NON E' DETTO CHE IL LIMITE ESISTE IN TUTTO D.

INVECE, SE CONSIDERIAMO UNA PARTIZIONE FINITA DI D, E IL LIMITE ESISTE IN OGNI PARTIZIONE, ALLORA SI CONCLUDE CHE TALE LIMITE ESISTE IN TUTTO D

Question 4

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f(x,y) = e^{(x^2y/9)}$. Determinare la prima componente u_1 del vettore unitario $u = (u_1, u_2)$ lungo il quale la crescita di f è massima nel punto $(-6, 4)$.

[Il tasso di massima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è massima in p]

Answer:

$g(x,y) = e^{\left(\frac{x^2y}{9}\right)}$ determinare v_1 di $v = (v_1, v_2)$ lungo la quale la crescita di g è massima nel punto $(-6, 4)$

sol. SI TRATTA DEL VERSORE PARALLELO ED EQUIVERSO A $\nabla g(-6,4)$

1. CALCOLO IL GRADIENTE (cioè, le derivate parziali rispetto a x e y)

$$\nabla g(x,y) = \left(e^{\frac{x^2y}{9}} \left(\frac{2xy}{9}\right),\ e^{\frac{x^2y}{9}} \left(\frac{x^2}{9}\right) \right)$$

2. SOSTITUISCO IL PUNTO P DATO

$$\nabla g(-6,4) = \left(e^{\frac{36\cdot 4}{9}} \left(\frac{-2\cdot 6\cdot 4}{9}\right),\ e^{\frac{36\cdot 4}{9}} \cdot \frac{36}{9} \right) = \left(-\frac{48}{9} e^{16},\ 4e^{16} \right)$$

3. PER DETERMINARE IL VERSORE v USO LA FORMULA $v = \dfrac{\nabla g(P)}{|g(P)|}$

$$\frac{\nabla g(-6,4)}{|\nabla g(-6,4)|} = \frac{\left(-\frac{48}{9}e^{16},\ 4e^{16}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{48}{9}e^{16}\right)^2 + \left(4e^{16}\right)^2}} = (-0{,}8,\ y)$$

Question 5

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare la seconda componente del gradiente di $\sin^3(|(x,y)|)$ in

$$(x,y) = \left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}, -\frac{\pi}{10}\right).$$

Answer:

$$g(x,y) = \sin^3(|x,y|) = \sin^3\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

CALCOLARE $\nabla g\left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}, -\frac{\pi}{10}\right)$

SOL. USO LA FORMULA DEL GRADIENTE

$$\boxed{\nabla g(P) = \left(\partial_{x_1} g(P), \dots \partial_{x_n} g(P)\right)}$$

$$g(x,y) = \sin^3\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sin^3\sqrt{x^2+y^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\sqrt{x^2+y^2}\right] =$$

$$= \sin^2\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\sqrt{x^2+y^2}\right]\cdot\sin\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \left[\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right]\sin\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\cos\sqrt{x^2+y^2}\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{3y\sin^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

2. SOSTITUISCO $(x,y) = \left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}, -\frac{\pi}{10}\right)$

$$\to \frac{3\left(-\frac{\pi}{10}\right)\sin^2\sqrt{\left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}\right)^2+\left(-\frac{\pi}{10}\right)^2}\cos\sqrt{\left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}\right)^2+\left(-\frac{\pi}{10}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}\right)^2+\left(-\frac{\pi}{10}\right)^2}}$$

$$\left[\text{OSS: } \sqrt{\left(\frac{\pi}{30}\sqrt{91}\right)^2+\left(-\frac{\pi}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{900}\cdot 91+\frac{\pi^2}{100}} = \sqrt{\frac{100\pi^2}{900}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\to \frac{3\left(-\frac{\pi}{10}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\left(-\frac{\pi}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\pi}{3}} = -\frac{27}{80} = -0.3375$$

✓

Question **6**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f(x,y,z) = x^2y^4 - 7xz^2$. Determinare il tasso di massima crescita di f nel punto $p = (4,-6,3)$.

[Il tasso di massima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è massima in p]

Answer:

$f(x,y,z) = x^2y^4 - 7xz^2$ $\qquad p = (4,-6,3)$

TASSO DI MASSIMA CRESCITA: $|\nabla f(p)|$

$\partial_x = 2xy^4 - 7z^2 = 2\cdot 4(-6)^4 - 7\cdot 3^2 = 2\cdot 4\cdot 1296 - 7\cdot 9 = 10305$

$\partial_y = 4x^2y^3 = 4(-216)(4)^2 = -13824$

$\partial_z = -14xz = -168$

$= \sqrt{(10305)^2 + (13824)^2 + (168)^2} = 17243.0920$

Question **7**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Sia f funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Siano $u = (3,-4), v = (2,1)$ due vettori e $p = (3,7)$. Si supponga che

$$D_u f(p) = -7, \quad D_v f(p) = -1.$$

Calcolare $D_{(-1,4)} f(p)$.

Answer:

$U = (3,-4) \qquad P = (3,7)$

$V = (2,1)$

$\begin{cases} D_U F(P) = -7 \\ D_V F(P) = -1 \end{cases} \Rightarrow$ CALCOLARE $D_{(-1,4)} F(P)$

SOL. $\begin{cases} D_U F(P) = \nabla F(P) \cdot U = -7 \\ D_V F(P) = \nabla F(P) \cdot V = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \nabla_x 3 - 4 \nabla_y = -7 & \text{I} \\ \nabla_x 2 + 1 \nabla_y = -1 & \text{II} \end{cases}$

(CHIAMO $\nabla_x = x$, $\nabla_y = y$ PER COMODITÀ)

$\begin{cases} 3x - 4y = -7 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} 3x - 4(-1-2x) = -7 \\ y = -1-2x \end{cases} \to \begin{cases} 3x + 4 + 8x = -7 \\ y = -1-2x \end{cases} \to \begin{cases} 11x = -11 \\ // \end{cases} \to \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

$\to \nabla F(P) = (-1,1)$

TROVO $D_{(-1,4)} F(P) = \nabla F(P)(-1,4) = (-1,1)(-1,4) = -1 + 4 = 5$ ✓

Question **8**

Not yet answered

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che per ogni vettore $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ si abbia $D_u f(0,0) = 2u_1 - 10u_2$. Determinare il tasso di crescita **minimo** di f in $(0,0)$.

Il tasso di minima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è minima in p

Answer:

$v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad D_v g(0,0) = 2v_1 - 10v_2$

SOL. IL TASSO DI MINIMA CRESCITA DI F IN $(0,0)$ È $-|\nabla g(0,0)|$

1) TROVO LE COORDINATE DEL GRADIENTE $(\partial_x g(0,0), \partial_y g(0,0))$

$$D_v g(0,0) = 2v_1 - 10v_2$$
$$\nabla g(0,0) \cdot v = 2v_1 - 10v_2 \quad \text{(definizione di } D_v\text{)}$$
$$(\partial_x g(0,0), \partial_y g(0,0))(v_1, v_2) = 2v_1 - 10v_2 \quad \text{(prodotto scalare)}$$

$$\begin{cases} \partial_x g(0,0) \cdot v_1 = 2 \\ \partial_y g(0,0)\, v_2 = -10 \end{cases}$$

2) TROVO $-|\nabla g(0,0)|$

$$-|\nabla g(0,0)| = -\sqrt{(\partial_x g(0,0))^2 + (\partial_y g(0,0))^2}$$
$$= -\sqrt{2^2 + (-10)^2}$$
$$= -\sqrt{104}$$
$$= -10{,}1980$$