

## Primo appello e preappello 22-01-24

Il 22-01-2024 alle h. 13:30 il primo appello e il preappello si sono svolti in contemporanea. Le domande erano le stesse, soltanto che l'appello completo ne conteneva 3 in più. Pertanto riporto solo lo svolgimento del primo appello. Le domande che NON c'erano nel preappello sono:

- Esercizio 1: volume solido di rotazione
- Esercizio 9: teorema centrale del limite
- Esercizio 10: derivate direzionali e piano tangente.

L'ultima domanda di teoria era diversa tra preappello e appello, pertanto in fondo ho riportato entrambe le versioni

Question **1**

Incorrect

🚩 Flag question

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il trapezoide

$$D = \{x \in [0, 6] : 0 \leq y \leq 3\sqrt{\log(x+1)}\}.$$

attorno all'asse delle  $x$ .

[Per qualcuno potrà essere utile ricordare che  $\int \log x \, dx = x \log x - x + \text{cost.}$

Answer:

-5.9899



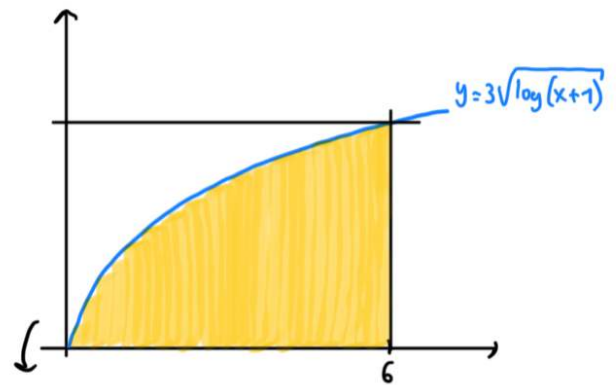
The correct answer is: 215.4892

$$D = \{ x \in [0, 6] : 0 \leq y \leq 3\sqrt{\log(x+1)} \}$$

VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE X

Sol. Uso **PAPPO GULDINO**

$$Vol(\Omega) = 2\pi \int_D y_0 \cdot Area(D) = 2\pi \int_D y \, dy \, dx$$



$$\rightarrow 2\pi \int_0^6 \int_0^{3\sqrt{\log(x+1)}} y \, dy \, dx = 2\pi \int_0^6 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{3\sqrt{\log(x+1)}} dx = \pi \cdot \int_0^6 9 \log(x+1) \, dx$$

$$= 9\pi \left[ (x+1) \log(x+1) - (x+1) \right]_0^6 = 9\pi [7 \log(7) - 7 + 1] = 215.4891 \checkmark$$

Question 2

Incorrect

Flag question

Sia

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 \sqrt{|y|}}{x^4 + y \sqrt{|y|}} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare, se esiste, la derivata direzionale di  $f$  in  $(0, 0)$  rispetto al vettore  $u = (1, 4)$ .

Esprimere il risultato troncando a 4 decimali. [Se non esiste scrivere -1000]

Answer:

-1000 ✖

Facciamo ad esempio la derivata direzionale rispetto al vettore  $(1, 2)$ .

$$D_{(1,2)} f(0, 0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(1, 2)) - f(0, 0)}{t}.$$

Si ha

$$\frac{f(t(1, 2)) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{2} t^2 \sqrt{|t|}}{t^4 + 2\sqrt{2} t \sqrt{|t|}} \sim_0 \frac{t \sqrt{2}}{2t \sqrt{2}}$$

The correct answer is: 0.2500

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sqrt{|y|}}{x^4 + y \sqrt{|y|}} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

Calcolare  $D_u F(0,0)$  rispetto al vettore  $(1,4)$

Sol. Uso la definizione di derivata direzionale

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F((0,0) + t u) - F(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sqrt{|4t|}}{t(t^4 + 4t \sqrt{|4t|})} = \frac{t \sqrt{|4t|}}{t^4 + 4t \sqrt{|4t|}}$$

$$= \frac{\sqrt{|4t|}}{t^3 + 4 \sqrt{|4t|}} = \frac{\sqrt{4t}}{t^3 + 4 \sqrt{4t}} = \frac{2\sqrt{t}}{t^3 + 8\sqrt{t}} = \frac{2t}{t^3 \sqrt{t} + 8t} = \frac{2}{t^2 \sqrt{t} + 8} = \frac{2}{8} = 0.25$$

Question 3

Incorrect

Flag question

Sia

$$f(x,y) = (4/3)x^3 + 2x^2y - (1/2)x^2 + 2y^2 + 4$$

Riportare la somma delle coordinate dei punti critici moltiplicata per 2, troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. Se ad esempio i punti critici trovati fossero  $(3.2, 1)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(-3, 0)$  nello spazio della risposta si scrive 2.4.

Answer:

-7.5

✖

The correct answer is: 1.0000

$$F(x,y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y - \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 4$$

RIPORTARE SOMMA COORDINATE PUNTI CRITICI MOLT. PER 4

Sol. TROVIAMO I PUNTI CRITICI

$$\nabla F(x,y) = (4x^2 + 4xy - x, 2x^2 + 4y)$$

$$\nabla F(x,y) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4xy - x = 0 \\ 2x^2 + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(4x + 4y - 1) = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{PER } x \neq 0} \begin{cases} 4x + 4(-\frac{x^2}{2}) - 1 = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2 + 4x - 1 = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ HA COME SOLUZIONI } \begin{cases} x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y_1 = \frac{-3-2\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ y_2 = \frac{-3+2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

PUNTO CRITICO 1:  $(0,0)$

PUNTO CRITICO 2:  $(\frac{2+\sqrt{2}}{4}, \frac{-3-2\sqrt{2}}{4})$

PUNTO CRITICO 3:  $(\frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{-3+2\sqrt{2}}{4})$

SOMMA DELLE COORDINATE:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} - \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{4} + \frac{-3-2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}}{4}$$

$$= 2 - \frac{6}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{CHE MOLTIPLICATO PER 2 DA' } 1 \quad \checkmark$$

Question 4

Incorrect

[Flag question](#)

Nell'esercizio precedente, qual è la natura dell'unico punto critico la cui somma delle due coordinate è uguale a 0?

Attenzione: si perde il 25% del punteggio di questo esercizio con risposta errata.

Select one:

- ☐ massimo locale
- ☐ minimo locale
- ☐ sella
- ☒ Non voglio rispondere ✖

Your answer is incorrect.

The correct answer is: sella

$$\nabla F(x,y) = (4x^2 + 4xy - x, 2x^2 + 4y)$$

NATURA DEL PUNTO CRITICO  $(0,0)$  ?

SOL. DETERMINIAMO LA MATRICE HESSIANA

$$\text{Hess } F(x,y) = \begin{bmatrix} 8x + 4y - 1 & 4x \\ 4x & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Hess } F(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \text{Hess } F(0,0) = -4 < 0$$

POICHÉ IL DETERMINANTE DELL'HESSIANA IN  $(0,0)$  È NEGATIVO, PER IL CRITERIO DELL'HESSIANA SI CONCLUDE CHE  $(0,0)$  È UN **PUNTO DI SELLA** ✓

Question 5

Incorrect

Flag question

Una persona è dispersa durante una gita sui colli; il percorso si è svolto per il 71% in collina coperta da boschi e per il 29% in collina priva di alta vegetazione. Un drone, utilizzato per le ricerche, riesce ad individuare una persona su una zona coperta da alberi con probabilità del 30%, in una zona priva di boscaglia con probabilità del 69%.

1) Qual è la probabilità che la persona venga individuata? Nello spazio della risposta riportare il valore ottenuto troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. Il Risultato va espresso come un numero tra 0 e 1 non in percentuale (es. 0.26 e non 26%).

Answer:

0.4031



The correct answer is: 0.4131

C = "collina senza boschi"

B = "collina con i boschi"

R = "la persona viene ritrovata"

 $P(R) = ?$ 

$$P(C) = 0.29$$

$$P(B) = 0.71$$

$$P(R|C) = 0.69$$

$$P(R|B) = 0.3$$

Sol.  $P(R) = P(R|C) \cdot P(C) + P(R|B) \cdot P(B) = 0.69 \times 0.29 + 0.3 \times 0.71 = 0.4131$  ✓

Question 6

Incorrect

Flag question

Una persona è dispersa durante una gita sui colli; il percorso si è svolto per il 71% in collina coperta da boschi e per il 29% in collina priva di alta vegetazione. Un drone, utilizzato per le ricerche, riesce ad individuare una persona su una zona coperta da alberi con probabilità del 30%, in una zona priva di boscaglia con probabilità del 69%.

2) Il drone ritrova la persona. Qual è la probabilità che sia stata ritrovata nella zona boscosa? Nello spazio della risposta riportare il valore ottenuto troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. Il Risultato va espresso come un numero tra 0 e 1 non in percentuale (es. 0.26 e non 26%).

Answer:

0.5284



The correct answer is: 0.5156

$$P(B|R) = ?$$

Sol. VSO LA FORMULA DI INVERSIONE

$$P(B|R) = \frac{P(R|B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{0.3 \cdot 0.71}{0.4131} = 0.5156 \quad \checkmark$$

Question 7

Not answered

[Flag question](#)

Si suppone che la densità di popolazione in un paese di forma quadrata, che assumiamo coincidente con  $[0, 1] \times [0, 1]$ , l'unità di misura essendo in chilometri, sia una variabile congiunta  $(X, Y)$  di densità

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) & \text{se } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1) Calcolare la probabilità  $P(X \leq Y^2)$ . Troncare il risultato a 4 decimali dopo la virgola.

Answer:

 ✖

The correct answer is: 0.1214

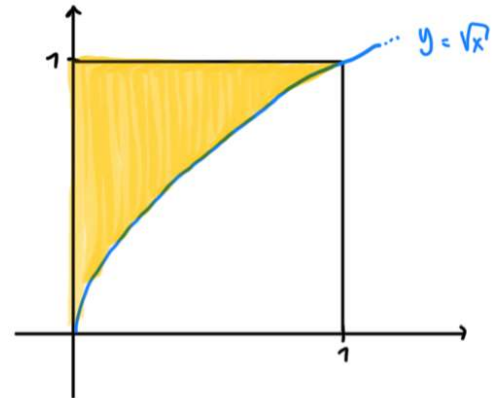
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) & \text{se } x,y \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$P(X \in Y^2) = ?$$

Sol. DISEGNO IL DOMINIO

$$D = \{ y \in [0,1], 0 \leq x \leq y^2 \}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \int_0^{y^2} \left( \frac{6}{5}x^2 \right) (3-y) dx dy = 0.1214 \quad \checkmark$$



Question 8

Not answered

[Flag question](#)

Si suppone che la densità di popolazione in un paese di forma quadrata, che assumiamo coincidente con  $[0, 1] \times [0, 1]$ , l'unità di misura essendo in chilometri, sia una variabile congiunta  $(X, Y)$  di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) & \text{se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) Sia  $f_Y$  la densità marginale di  $Y$ . Calcolare  $f_Y(1/8)$ .

Answer:

The correct answer is: 1.1500



Calcolare la densità marginale  $f_Y\left(\frac{1}{8}\right)$

Sol. la densità marginale di una v.a. continua è:

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x,y) dx$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5} x^2 (3-y) dx = (3-y) \left[ \frac{6}{15} x^3 \right]_0^1 = (3-y) \cdot \frac{6}{15} = \frac{2}{5} (3-y) = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} y$$

$$f_Y\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{20} = 1.15$$

La prima parte del testo è stata tagliata perché la persona che me l'ha mandata non riusciva a fare lo screenshot. In ogni caso la parte tagliata recitava:

"Si lancia una moneta che dà testa con una probabilità di 0.52 per 851 volte"

0.52 per 851 volte. Usando una opportuna variabile continua, approssimare la probabilità che la moneta dia Testa per al massimo 429 volte (cioè da 0 a 429 volte).

Scrivere la formula sul foglio in funzione di  $\Phi(y)$  per un opportuno  $y \geq 0$ . Approssimare (non troncare)  $y$  con un numero a due decimali dopo la virgola e usare la tabella qui sotto. Troncare il risultato a 4 decimali.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5039	0.5078	0.5117	0.5156	0.5194	0.5232	0.5270	0.5308	0.5346
0.1	0.5394	0.5433	0.5470	0.5508	0.5546	0.5584	0.5621	0.5659	0.5696	0.5733
0.2	0.5770	0.5808	0.5846	0.5884	0.5921	0.5958	0.5995	0.6032	0.6069	0.6106
0.3	0.6143	0.6179	0.6215	0.6251	0.6286	0.6321	0.6357	0.6392	0.6427	0.6462
0.4	0.6496	0.6531	0.6566	0.6601	0.6636	0.6671	0.6706	0.6741	0.6775	0.6810
0.5	0.6844	0.6878	0.6912	0.6945	0.6978	0.7011	0.7044	0.7077	0.7109	0.7142
0.6	0.7175	0.7207	0.7239	0.7271	0.7303	0.7334	0.7365	0.7396	0.7427	0.7458
0.7	0.7488	0.7518	0.7548	0.7578	0.7607	0.7637	0.7667	0.7695	0.7724	0.7753
0.8	0.7781	0.7810	0.7838	0.7867	0.7895	0.7923	0.7951	0.7978	0.8006	0.8033
0.9	0.8069	0.8095	0.8121	0.8146	0.8171	0.8196	0.8221	0.8245	0.8269	0.8293
1.0	0.8317	0.8341	0.8364	0.8388	0.8411	0.8435	0.8458	0.8481	0.8504	0.8527
1.1	0.8549	0.8571	0.8593	0.8615	0.8636	0.8657	0.8678	0.8698	0.8719	0.8739
1.2	0.8759	0.8778	0.8797	0.8816	0.8835	0.8854	0.8873	0.8891	0.8910	0.8928
1.3	0.8946	0.8964	0.8982	0.8999	0.9016	0.9033	0.9049	0.9066	0.9082	0.9098
1.4	0.9112	0.9127	0.9141	0.9155	0.9169	0.9182	0.9196	0.9209	0.9222	0.9235
1.5	0.9248	0.9261	0.9274	0.9286	0.9298	0.9310	0.9321	0.9332	0.9344	0.9355
1.6	0.9366	0.9377	0.9388	0.9398	0.9408	0.9418	0.9427	0.9437	0.9446	0.9455
1.7	0.9464	0.9473	0.9482	0.9491	0.9499	0.9508	0.9516	0.9524	0.9532	0.9540
1.8	0.9548	0.9556	0.9563	0.9571	0.9578	0.9585	0.9592	0.9599	0.9606	0.9613
1.9	0.9619	0.9626	0.9632	0.9638	0.9644	0.9649	0.9655	0.9660	0.9666	0.9671
2.0	0.9676	0.9681	0.9686	0.9691	0.9696	0.9700	0.9705	0.9709	0.9713	0.9718
2.1	0.9722	0.9726	0.9730	0.9734	0.9738	0.9742	0.9746	0.9750	0.9753	0.9757
2.2	0.9761	0.9764	0.9768	0.9771	0.9774	0.9777	0.9780	0.9783	0.9786	0.9789
2.3	0.9792	0.9795	0.9798	0.9801	0.9804	0.9807	0.9809	0.9812	0.9814	0.9817
2.4	0.9819	0.9821	0.9823	0.9825	0.9827	0.9829	0.9831	0.9833	0.9835	0.9837
2.5	0.9839	0.9841	0.9843	0.9845	0.9846	0.9848	0.9849	0.9851	0.9852	0.9854
2.6	0.9855	0.9856	0.9857	0.9858	0.9859	0.9860	0.9861	0.9862	0.9863	0.9864
2.7	0.9865	0.9866	0.9867	0.9868	0.9869	0.9869	0.9870	0.9871	0.9872	0.9873
2.8	0.9874	0.9875	0.9875	0.9876	0.9876	0.9877	0.9877	0.9878	0.9878	0.9879
2.9	0.9879	0.9879	0.9880	0.9880	0.9881	0.9881	0.9882	0.9882	0.9883	0.9883
3.0	0.9884	0.9884	0.9885	0.9885	0.9886	0.9886	0.9887	0.9887	0.9888	0.9888
3.1	0.9889	0.9889	0.9890	0.9890	0.9891	0.9891	0.9892	0.9892	0.9893	0.9893
3.2	0.9894	0.9894	0.9895	0.9895	0.9896	0.9896	0.9897	0.9897	0.9898	0.9898
3.3	0.9899	0.9899	0.9900	0.9900	0.9901	0.9901	0.9902	0.9902	0.9903	0.9903
3.4	0.9904	0.9904	0.9905	0.9905	0.9906	0.9906	0.9907	0.9907	0.9908	0.9908

Answer:

0.5039

The correct answer is: 0.1768

$$P(T) = 0.52$$

$$n = 851$$

$$\alpha = 429$$

Sol. PER L'APPROSSIMAZIONE IN DISTRIBUZIONE DELLA BINOMIALE

$$P(B(n, p) \leq \alpha) \approx P(N(\mu_p, \mu_p(1-p)) \leq \alpha)$$

$$\mu = n \cdot p = 442.52$$

$$\sigma^2 = n p (1-p) \approx 212.4096$$

$$\sigma = \sqrt{212.4096}$$

$$P(N + \sigma Z \leq \alpha) = P\left(Z \leq \frac{\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{429 - 442.52}{\sqrt{212.4096}}\right) \approx \Phi(-0.93)$$

$$\Phi(-0.93) = 1 - \Phi(0.93) = 1 - 0.8238 \approx 0.1762$$

(NON È ESATTAMENTE 0.1768, MA CREDO SIA GIUSTO COSÌ. QUESTO PERCHÉ SE FOSSE 0.1768 DOVREI CERCARE SU UNA TABELLA IL VALORE DI  $\Phi$  PER IL  $\Phi(x) = 0.8232$ , CHE NON C'È SU UNA TABELLA)

10)

Sia  $r : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1$  tale che  $r(0) = (3, 2)$  e  $r'(0) = (4, a)$ . Quanto deve valere  $a$  affinché sia  $\frac{d}{dt}|r(t)|^2_{t=0} = 0$ ?

Select one:

- ☐ a. -6
- ☐ b. nessun valore di  $a$
- ☒ c.  $8/3$  ✖
- ☐ d. -2
- ☐ e. altro
- ☐ f. non voglio rispondere

$$r: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r(0) = (3,2)$$

$$r'(0) = (4,a)$$

$$\text{det. a tale che } \left. \frac{d}{dt} |r(t)|^2 \right|_{t=0} = 0$$

Sol. se  $r \in C^1$  in  $[-1,1]$ ,  $r$  è DIFFERENZIABILE in  $[-1,1]$ , E VALE:

$$r(t_0) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0)$$

$$r(t) = r(0) + r'(0)(t-0) = (3,2) + (4,a)(t-0) = (3,2) + (4,a) \cdot t = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 2+at \end{pmatrix}$$

$$|r(t)|^2 = \sqrt{(3+4t)^2 + (2+at)^2}^2 = 9 + 24t + 16t^2 + 4 + 4at + a^2t^2$$

$$= (16+a^2)t^2 + (24+4a)t + 13$$

SE DEVE VALERE  $\left. \frac{d}{dt} |r(t)|^2 \right|_{t=0} = 0$ , ALLORA  $\left. \frac{d}{dt} \left[ (16+a^2)t^2 + (24+4a)t + 13 \right] \right|_{t=0} = 0$

$$= 2 \cdot 0(16+a^2) + 24 + 4a = 0 \rightarrow 24 + 4a = 0 \rightarrow a = -\frac{24}{4} = -6 \checkmark$$

Question 11

Incorrect

Flag question

Sia  $X$  una variabile aleatoria con valore atteso  $E(X) = 5$  e varianza  $\text{Var}(X) = 2$ . Quanto vale  $E(X^2)$ ?

Answer:

-23

The correct answer is: 27

X VARIABILE ALEATORIA

$$E(x) = 5$$

$$Var(x) = 2$$

$$E(x^2) = ?$$

SOL. LA FORMULA DELLA VARIANZA E':

$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

$$\rightarrow 2 = E(x^2) - 25$$

$$\rightarrow E(x^2) = 2 + 25 = 27 \quad \checkmark$$

Question 8

Correct

Flag question

Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $\mathcal{C}^1$ , con  
 $f(0,1) = 0$ ,  $\partial_x f(0,1) = 2$ ,  $\partial_y f(0,1) = -5$   
Determinare l'ordinata  $z$  nel punto  
(0.1, 0.9) del piano tangente al grafico di  $f$   
nel punto  $(0,1, f(0,1))$

Select one:

- ☐ a. 0.6
- ☒ b. 0.7 ✓
- ☐ c. 0.23
- ☐ d. non voglio rispondere
- ☐ e. 0.83
- ☐ f. altro

Your answer is correct.

$$f(0,1) + \partial_x f(0,1) \times (0.1 - 0) + \partial_y f(0,1) \times (0.9 - 1)$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1,$$

$$F(0,1) = 0$$

$$\partial_x F(0,1) = 2$$

$$\partial_y F(0,1) = -5$$

$$\text{DETERMINARE } F(0.1, 0.9)$$

Sol. SE UNA FUNZIONE È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO P, VALE LA LINEARIZZAZIONE DI F IN P

$$L(x,y) = F(p) + \nabla F(p) \cdot [(x,y) - p]$$

$$L(0.1, 0.9) = F(0,1) + \nabla F(0,1) \cdot (0.1 - 0, 0.9 - 1)$$

$$= 0 + (2, -5) \cdot (0.1, -0.1) = 2 \cdot 0.1 + (-5 \cdot (-0.1)) = 0.7 \quad \checkmark$$