Quinto test di autovalutazione di FONDAMENTI DI AUTOMATICA A.A. 2020/21

Data: 12 Novembre 2020

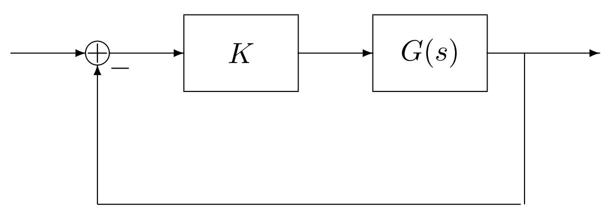
1. Con riferimento alle seguenti funzioni di trasferimento razionali proprie a coefficienti reali, $G(s)$, interpretate come le funzioni di trasferimento di un processo a tempo continuo lineare, tempo-invariante e SISO,

   (a) $G(s) = \dfrac{s-1}{s^3+3s^2+2}$;

   (b) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^3+s^2+2s-10}$;

   (c) $G(s) = \dfrac{s^3}{s^3+5s^2+3s+1}$.

   si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato



   risulta BIBO stabile.

2. Per ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento razionali proprie a coefficienti reali, $G(s)$, si tracci il diagramma di Nyquist completo (per $\omega \in \mathbb{R}$) e si determini (ove possibile ed eventualmente riportando tali diagrammi al finito) il numero N di giri che il diagramma compie attorno al punto $-1+j0$ e, il numero di poli a parte reale positiva della funzione $W(s)$, ottenuta da $G(s)$ per retroazione unitaria negativa.

   (a) $G(s) = \dfrac{s^2}{(s-1)^2}$;

   (b) $G(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)(s+10)}$;

   (c) $G(s) = \dfrac{5}{(s+1)s}$;

   (d) $G(s) = \dfrac{s-10}{s^2(s+1)}$.

RISPOSTE

1. Stabilità di sistemi retroazionati con guadagno K variabile:

   (a) Tabella di Routh del polinomio $d(s) + Kn(s) = (s^3 + 3s^2 + 2) + K(s - 1) = s^3 + 3s^2 + Ks + (2 - K)$:

   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K \\ 2 & 3 & 2-K \\ 1 & \dfrac{4K-2}{3} & 0 \\ 0 & 2-K & 0 \end{array}$$

   Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $\frac{1}{2} < K < 2$.

   (b) Tabella di Routh del polinomio $d(s) + Kn(s) = (s^3 + s^2 + 2s - 10) + K(s + 2) = s^3 + s^2 + (K + 2)s + (2K - 10)$:

   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & K+2 \\ 2 & 1 & 2K-10 \\ 1 & 12-K & 0 \\ 0 & 2K-10 & 0 \end{array}$$

   Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $5 < K < 12$.

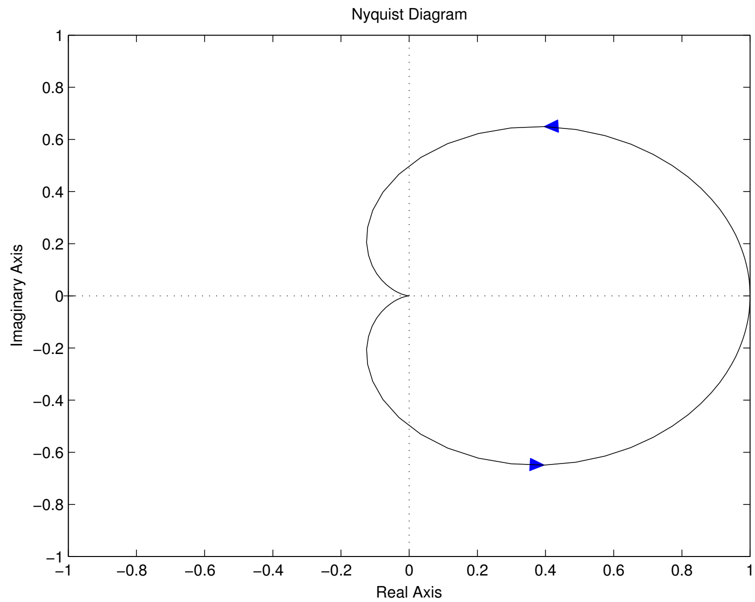
   (c) Tabella di Routh del polinomio $d(s) + Kn(s) = (s^3 + 5s^2 + 3s + 1) + Ks^3 = (1 + K)s^3 + 5s^2 + 3s + 1$:

   $$\begin{array}{c|cc} 3 & 1+K & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & \dfrac{14-K}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

   Per $K \neq -1$ il sistema retroazionato è BIBO stabile se e solo se $-1 < K < 14$. Per $K = -1$ si noti che il sistema retroazionato non è proprio e per esso non ha nemmeno senso porsi il problema della BIBO stabilità. Infatti $W(s) = \frac{s^3}{5s^2+3s+1}$.

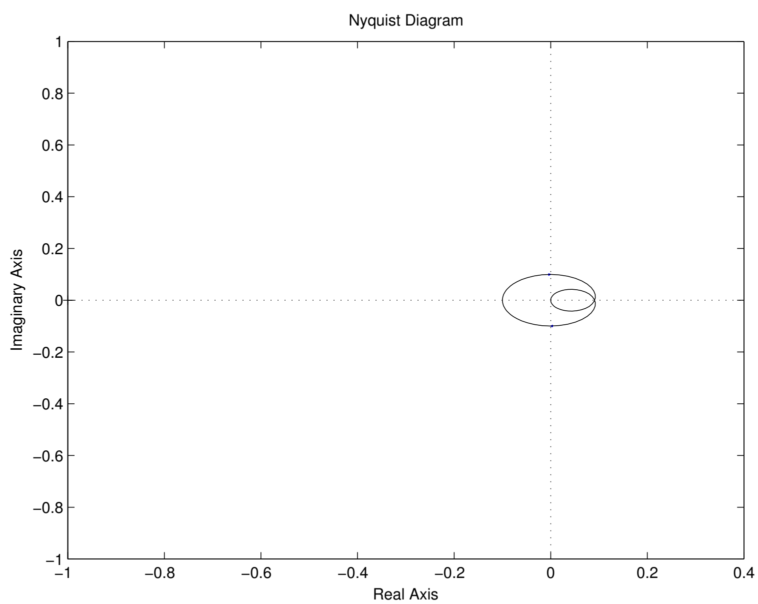
2. Criterio di Nyquist:

(a) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



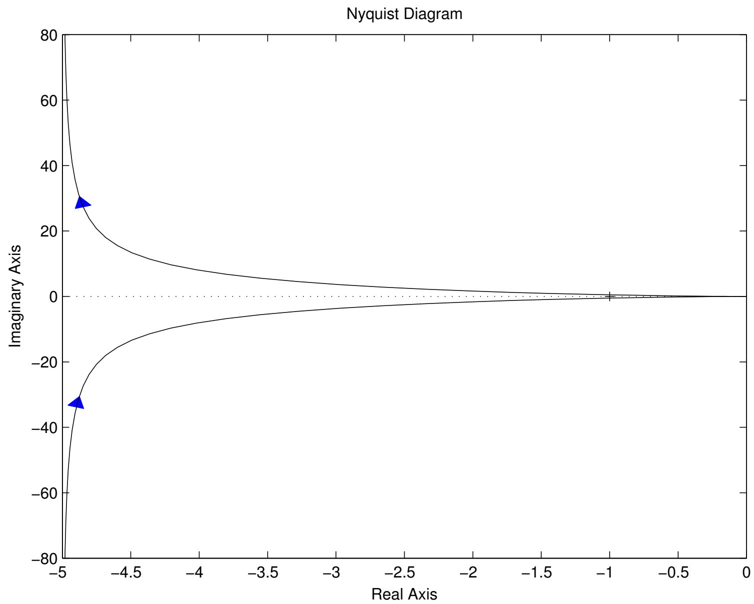
Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dall'origine (per $\omega = 0^+$), con fase π, e arriva nel punto 1, sul semiasse reale positivo, con fase 2π (ovvero nulla), per $\omega = +\infty$, ruotando in verso antiorario. Poichè $n_{G+} = 2$ e $N = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 2$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta 2 poli a parte reale positiva.

(b) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



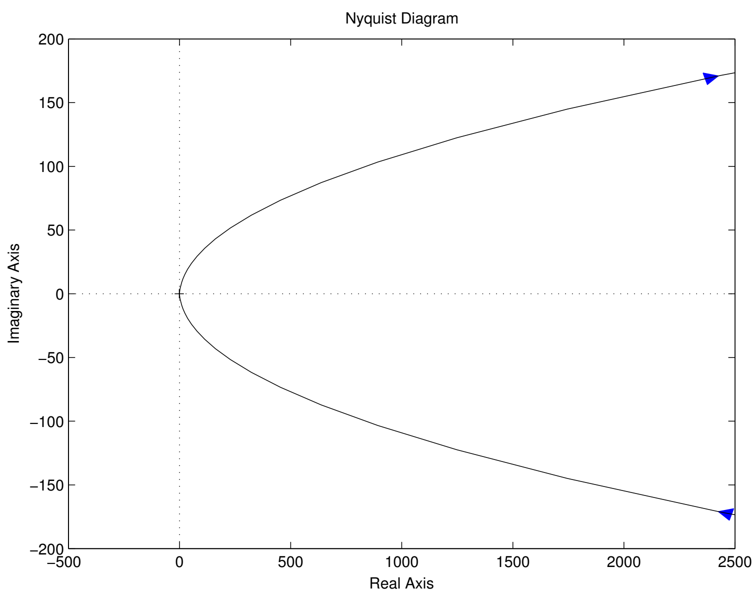
Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dal punto -0.1, sul semiasse reale negativo, (per $\omega = 0^+$) con fase π, e arriva nell'origine, con fase $-\pi/2$, per $\omega = +\infty$, ruotando in verso orario. Poichè $n_{G+} = 0$ e $N = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 0$ e quindi il sistema retroazionato è BIBO stabile.

(c) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dal punto improprio (per $\omega = 0^+$), con fase $-\pi/2$, e arriva nell'origine, con fase $-\pi$, per $\omega = +\infty$, ruotando in verso orario. Poichè $n_{G+} = 0$ e, una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito, con una semicirconferenza dal punto di pulsazione $-\varepsilon$ al punto di pulsazione ε, che descrive un angolo, in verso orario, di π radianti, si trova $N = 0$. Ne consegue, quindi, che $n_{W+} = 0$ e quindi il sistema retroazionato è BIBO stabile.

(d) Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ è



Si noti che il diagramma di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ parte dal punto improprio (per $\omega = 0^+$), con fase nulla, e arriva nell'origine, con fase $-\pi$ (ciò non si nota in figura per motivi numerici), per $\omega = +\infty$, ruotando in verso orario. Poichè $n_{G+} = 0$ e, una volta riportato il diagramma di Nyquist al finito, con una circonferenza dal punto di pulsazione $-\varepsilon$ al punto di pulsazione ε, che descrive un angolo, in verso orario, di 2π radianti, si trova $N = -1$. Ne consegue, quindi, che $n_{W+} = 1$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile e presenta 1 polo a parte reale positiva.