Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

2° Appello — 6 luglio 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (2, -1, 0, 3)$ e $u_2 = (1, 3, -1, 2)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 2)$, $u_2 = (1, 2, -1, 3)$, $u_3 = (1, -5, 4, -4)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x - y, x + 3z, 3x + y + z, 2y - 3z).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (1, 4, t, -1)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$. (*le risposte devono essere adeguatamente motivate*)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (1, -1, 2, 3)$ e sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (3, -1, 5, 2)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il punto $P = (2, -1, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e ortogonale al piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Sia $Q = (-1, -2, 2)$. Si determinino le distanze di Q dalla retta r e dal piano π.

(e) Si determini la proiezione ortogonale Q' del punto Q sul piano π.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

2º Appello — 6 luglio 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, -1, 2)$, $u_2 = (1, 2, 1, -1)$, $u_3 = (0, -3, -3, 4)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, 2y - z, 3x + z, -x + 2y).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (2, 1, t, 1)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$. (*le risposte devono essere adeguatamente motivate*)

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (3, 0, 1, -2)$ e $u_2 = (1, 1, 2, 3)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Esercizio 3. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il punto $P = (1, -1, 2)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e ortogonale al piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Sia $Q = (2, 1, 0)$. Si determinino le distanze di Q dalla retta r e dal piano π.

(e) Si determini la proiezione ortogonale Q' del punto Q sul piano π.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (2, 3, -1, 4)$ e sia $W = U^{\perp}$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (1, -3, 4, 4)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^{\perp}$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

2$^{\text{o}}$ Appello — 6 luglio 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (3, -2, 4, -1)$ e sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (2, 4, -3, 1)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, 2, 2)$, $u_2 = (2, 2, -1, 1)$, $u_3 = (-3, -5, 4, 0)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (2y - z, x + y - z, 2x + y, -x + 2z).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (1, 1, t, 1)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$. (*le risposte devono essere adeguatamente motivate*)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (0, 2, -3, 1)$ e $u_2 = (1, 2, -1, -2)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il punto $P = (1, 2, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2y - z = 2 \\ 2x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e ortogonale al piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Sia $Q = (1, -1, 1)$. Si determinino le distanze di Q dalla retta r e dal piano π.

(e) Si determini la proiezione ortogonale Q' del punto Q sul piano π.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

2º Appello — 6 luglio 2010

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il punto $P = (2, 2, -1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e ortogonale al piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Sia $Q = (4, -2, 3)$. Si determinino le distanze di Q dalla retta r e dal piano π.

(e) Si determini la proiezione ortogonale Q' del punto Q sul piano π.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (1, -4, 2, 0)$ e $u_2 = (2, 1, 3, -1)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (4, -1) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 3, -1)$, $u_2 = (-1, 1, 2, -1)$, $u_3 = (3, -4, -1, 1)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y, x - y + 2z, 2y + z, -x - z).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (3, 2, 3, t)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$. (*le risposte devono essere adeguatamente motivate*)

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (1, -2, -2, 3)$ e sia $W = U^\perp$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (4, -3, 1, -2)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

2° Appello — 6 luglio 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (1, 0, -3, 3)$ e $u_2 = (2, -1, 2, -3)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (2, -3) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (2, -1, 5, 2)$ e sia $W = U^{\perp}$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (1, 3, -2, -3)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^{\perp}$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?

Esercizio 3. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il punto $P = (1, -2, 2)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e ortogonale al piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Sia $Q = (1, 2, 2)$. Si determinino le distanze di Q dalla retta r e dal piano π.

(e) Si determini la proiezione ortogonale Q' del punto Q sul piano π.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, -1, -3)$, $u_2 = (1, 1, -2, -1)$, $u_3 = (0, -1, 3, -1)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, -y + z, 2x + z, -x + y).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (1, t, 3, 0)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$. (*le risposte devono essere adeguatamente motivate*)

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

2$^{\text{o}}$ Appello — 6 luglio 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, -1, -3, 1)$, $u_2 = (2, -1, -4, 3)$, $u_3 = (-3, 1, 5, -5)$. Si indichi poi con W l'immagine della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$f(x, y, z) = (x - z, -2y + z, x + y + 2z, -x + y).$$

(a) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Dato il vettore $\tilde{v} = (t, -1, 4, 0)$, si stabilisca se esiste un valore di $t \in \mathbb{R}$ per cui si abbia $\tilde{v} = f(v)$, per qualche $v \in \mathbb{R}^3$.

(e) Si stabilisca se esistono delle funzioni lineari $g, h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $g(U) = W$ e $h(W) = U$. (*le risposte devono essere adeguatamente motivate*)

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, si consideri il punto $P = (1, 3, -1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ x + 3z = 1 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e ortogonale al piano π.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta s passante per P, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

(d) Sia $Q = (3, -1, 2)$. Si determinino le distanze di Q dalla retta r e dal piano π.

(e) Si determini la proiezione ortogonale Q' del punto Q sul piano π.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si considerino i vettori $u_1 = (0, -2, 2, 1)$ e $u_2 = (1, 3, 2, -2)$. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ ponendo $f(v) = (u_1 \cdot v, u_2 \cdot v)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dimostri che f è lineare e si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(b) Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Dato il vettore $w = (5, -2) \in \mathbb{R}^2$, si calcoli $f^{-1}(w)$.

(d) Si determini una base di $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

(e) Si dimostri che per ogni funzione lineare $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ avrà sempre un autovalore uguale a 0, con molteplicità ≥ 2.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (3, -4, 1, 2)$ e sia $W = U^{\perp}$ il sottospazio ortogonale di U.

(a) Si determini l'equazione cartesiana e una base di W.

(b) Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si trasformi la base trovata nel punto (a) in una base ortogonale.

(c) Dato il vettore $v = (4, -2, 3, 1)$ si trovino due vettori $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^{\perp}$ tali che $v = v_1 + v_2$.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione che associa ad ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$. Chi è il nucleo di f?