densità di carica $\rho_c = \frac{dq}{dV}$ $\left[\frac{C}{m^3}\right]$ $\Rightarrow q = \int \rho_c \, dV$ $[C]$

corrente elettrica $i(t) = \frac{dq}{dt}$ $\left[A = \frac{C}{s}\right]$

densità di corrente $\underbrace{\bar{J}(P,t)}_{\text{campo corrente}} = \rho_c^+ \underbrace{v^+}_{\text{velocità media portatori } \oplus} + \rho_c^- \underbrace{v^-}_{\text{velocità media portatori } \ominus}$ $\Rightarrow i(t) = \int_S \bar{J} \cdot \hat{n} \, dS$

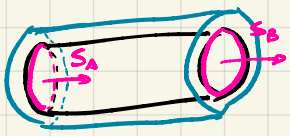
$q = \int \rho_c \cdot dV = \int \underbrace{\rho_c \cdot \bar{v}_p^+}_{\bar{J}} \cdot \hat{n} \, \Delta t \cdot dS$

legge di continuità $i_{usc}(t) = -\frac{d q_{int}(t)}{dt}$

$\Rightarrow$ in regime stazionario $I_{usc} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = 0$

$$\begin{cases} i(t) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho_c \, dV \\ i(t) = \int_S \bar{J} \hat{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \bar{J} \, dV \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = -\frac{d\rho_c}{dt} = 0$$

tubo di flusso

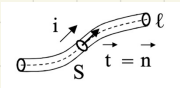


isolante
conduttore

$I_{usc} = 0 = -I(S_A) + I(S_B) + \underbrace{I(S_\ell)}_{\text{I sup laterale } = 0 \text{ perché isolante}} \Rightarrow I(S_A) = I(S_B)$

qualunque sezione che tagli completamente il conduttore ha stessa corrente
$\Rightarrow$ conduttore è tubo di flusso per vettore densità corrente

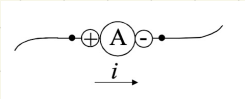
corrente conduttori filiformi



$i = \int_S \bar{J} \cdot \hat{n} \cdot dS = \bar{J} \hat{n} S = \bar{J} \cdot \hat{t} S \Rightarrow i = \pm J S$

AMPEROMETRO IDEALE

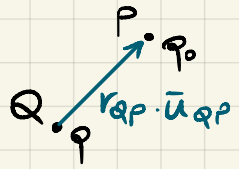
misura corrente elettrica sezione S



- non perturba: non modifica condizioni preesistenti
- indica valore istante per istante

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

legge di coulomb $\quad F_c(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q q_0}{r^2_{QP}} \bar{u}_{QP}$



campo elettrostatico $\quad \bar{E}_c(P) = \frac{\bar{F}_c(P)}{q_0} \quad \left[\frac{N}{C} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{V}{m} \right]$

cariche in quiete e con valore costante

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho_c(Q)}{r^2_{QP}} \bar{u}_{QP} \, dV$$

principio di sovrapposizione $\quad \bar{E}_c(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_k \frac{q_k(Q_k)}{r^2_{Q_kP}} \bar{u}_{Q_kP}$

materiale uniforme: omogeneo proprietà non dipendono dal punto

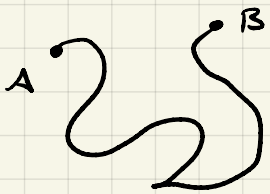
lineare p. non dip dall'intensità del campo

isotropo p. non dip dalla direzione

PROPR CAMPO ELETTROSTATICO

è conservativo $\quad \oint_\ell \bar{E}_c \cdot \bar{t} \, d\ell = 0$

$$\Rightarrow \int_{A,\ell}^{B} \bar{E}_c \cdot \bar{t} \, d\ell = V(A) - V(B)$$



CAMPO ELETTRICO

$$\bar{E}(P,t) = \frac{\bar{F}_e(P,t)}{q_0} \qquad \oint_\ell \bar{E}(P,t) \cdot \hat{\ell} \cdot dt = \text{f.e.m. indotta}$$

> condizione elettrostatica

cariche sorgente in quiete nello spazio e valore cost nel tempo

$\bar{E}(P) = \bar{E}_c(P)$

> regime stazionario

in ogni punto dello spazio i fenomeni elettromagnetici sono indip dal tempo (campo elettrico è stazionario e conservativo)

> condizioni variabili campo elettrico non è conservativo

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

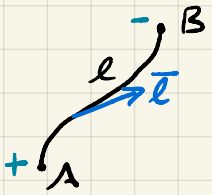
Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

FORZA ELETTRICA SPECIFICA

carica puntiforme q_0 in moto con velocità $\bar{v}$ in presenza di altre cariche

$$\frac{\bar{F}(P,t)}{q_0} = \bar{E}(P,t) + \underbrace{\bar{v} \times \overbrace{\bar{B}(P,t)}^{\text{induzione magnetica } [T = \frac{V \cdot s}{m^2}]}}_{\text{forza elettrica specifica}}$$

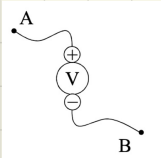
TENSIONE ELETTRICA



$$V_{AB}(t) = \int_{\ell} \bar{E}(P,t) \underbrace{\hat{\ell}}_{\text{riferimento di tensione}} d\ell$$

A REGIME STAZIONARIO $V_{AB} = V_A - V_B$

VOLTOMETRO IDEALE



misura tensione elettrica sulla linea ℓ

- non perturba: non modifica condizioni preesistenti
- indica valore istante per istante

INTRO MODELLO RETI ELETTRICHE

componente: oggetto delimitato da una sup limite con 2 o più terminali dotati di morsetto

> regime stazionario

campo di corrente è solenoidale ($\nabla \cdot \bar{J} = 0$)

campo elettrico conservativo

> regime variabile quasi-stazionario

il modello stazionario vale solo quando calcoliamo:

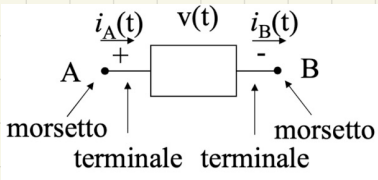
- le correnti totali uscenti da sup chiuse (che non intersecano sup limite)

- integrale di linea campo elettrico (per linee che non intersecano sup limite)

regime quasi-stazionario: quando rimanendo esterni o tangenti alle sup limite, correnti e tensioni sono funzioni del tempo tali che

- corrente totale uscente dai terminali = 0
- tensioni tra coppie di morsetti è ddp

MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI

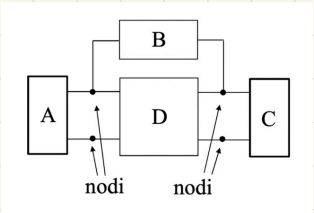


i_A corrente entrante
i_B corrente uscente

proprietà n-poli

- somma delle correnti uscenti = 0
- tensioni tra coppie di terminali sono ddp

interconnessioni



tutti i morsetti collegati allo stesso nodo sono equipotenziali e ai nodi vale $J \cdot \vec{S} = 0$

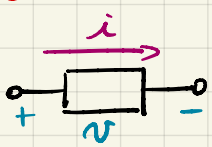
rete elettrica

costituita da componenti collegati

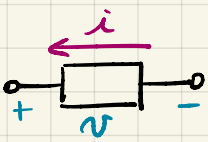
tipologia: tipi di componenti della rete

topologia: come i componenti sono connessi

BIPOLO



utilizzatore



generatore

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- potenza scambiata

$p(t) = v(t) \cdot i(t)$ $\quad [V \cdot A = \frac{J}{s} = W]$ $\qquad p(t) = \frac{dL(t)}{dt}$ (lavoro svolto)

utilizzatori $\Rightarrow$ p e L entrante / assorbita

generatori $\Rightarrow$ p e L uscente / erogata

$P_{entrante} = -P_{uscente}$

bipolo passivo: L entrante ≥ 0
può al massimo restituire tanta potenza quanto quella accumulata

- m-bipolo

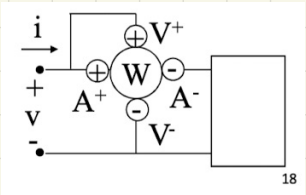
n-polo costituito da sole porte elettriche

porta elettrica: coppia di morsetti tali che la corrente entrante in uno è uguale alla corrente uscente dall'altro (es: bipolo)

ha m porte elettriche (2m terminali) con le relative m correnti e tensioni

WATTMETRO IDEALE

misura potenza elettrica scambiata ad una porta



- non perturba: non modifica condizioni preesistenti
- indica valore istante per istante

LEGGE DI OHM

$R = \frac{V}{I}$ $\quad [\frac{V}{A} = \Omega]$ $\qquad G = \frac{1}{R}$ $\quad [\frac{1}{\Omega} = S]$

R dipende dal materiale $\qquad R = \underbrace{\rho}_{\text{resistività}} \frac{\ell}{S}$ (ℓ → lunghezza, S → sezione)

EFFETTO JOULE

dissipazione lavoro in calore $\qquad \Delta L_d = RI^2 \Delta t$

$\Rightarrow$ potenza dissipata $\quad P_d = RI^2$

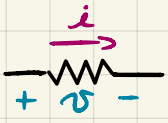
- bilancio energetico

$P_d = P_{entrante} \Rightarrow RI^2 = VI$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

RESISTORE IDEALE

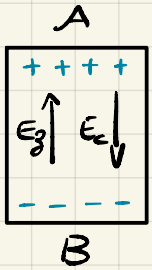


convenzione utilizzatori $V = RI$

GENERATORI ELETTRICI

$\bar{E}_g = \frac{\bar{F}_g}{q}$ ↳ forza elettrica specifica

$\bar{F}_g$ <u>non</u> conservativa (lavoro $\neq 0$ su linea chiusa)



$\bar{E}_g$ crea separazione di carica all'<u>interno</u> del generatore

$\Rightarrow$ campo elettrostatico $\bar{E}_c$ ovunque

All'equilibrio $\bar{E}_g + \bar{E}_c = 0$

$$\Rightarrow \text{f.e.m.} = E = \int_{B,\ell}^{A} \bar{E}_g \cdot \hat{\ell}\, d\ell = -\int_{B,\ell}^{A} \bar{E}_c \cdot \hat{\ell}\, d\ell = -V_{BA} = V_{AB}$$

$V = E - R_i I$ ↳ resist int generatore

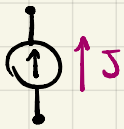
- **gen ideale tensione**

  a regime stazionario con $R_i = 0 \Rightarrow V = E \quad \forall I$

- **gen ideale corrente**

  $V = E - R_i I \Rightarrow I = \frac{E}{R_i} - \frac{V}{R_i} = J - G_i V$

  a regime stazionario con $J \gg G_i V \Rightarrow I = J \quad \forall V$



BIPOLI PARTICOLARI

Cortocircuito •——• $V = 0 \quad \forall I$ (—∿— $R = 0$, ⊕ $E = 0$)

circuito aperto • • $I = 0 \quad \forall V$ (—∿— $R = \infty$, ⊕ $J = 0$)

GRAFFO

nodi della rete collegati da linee curve per ogni lato della rete

grafo connesso ogni coppia di nodi è raggiungibile percorrendo i lati

grafo piano i lati non si intersecano

MAGLIA parte del grafo t.c. percorso chiuso e nodi toccati una sola volta

ANELLO maglia piana non contenente altri elementi del grafo

(se grafo connesso e piano $\Rightarrow$ # anelli $= m = l - n + 1$)

INSIEME DI TAGLIO sup chiusa che contiene almeno un nodo e interseca dei lati del grafo

ALBERO tutti i nodi + lati che li collegano ma senza formare maglie

(# lati albero $= l_a = n - 1$)

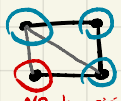
COALBERO lati complementari all'albero ($l_c = l - l_a = l - n + 1$)

LEGGI DI KIRCHHOFF (eq topologiche)

- **LKC** ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$) $\sum_{\text{insieme di taglio}} \pm i(t) = 0$
- **LKT** (E conservativo) $\sum_{\text{maglia}} \pm v(t) = 0$

data una rete, prendo albero e coalbero

- per ogni lato di coalbero scrivo LKT sulla sua maglia ($l - n + 1$)
- per ogni nodo + lato di albero prendo LKC su insieme di taglio



($n - 1$)

NO ho già preso quel lato

ANALISI RETE

$2l$ incognite (tensione + corrente di ogni bipolo)

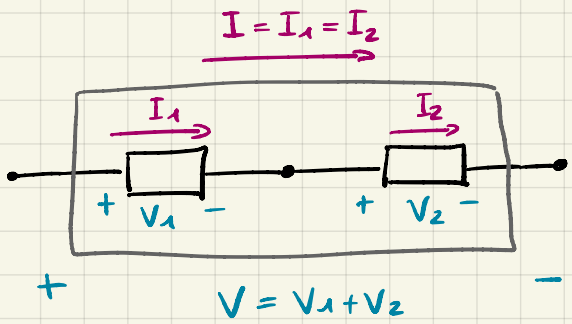
ho l eq topologiche ($LKT = l - n + 1$, $LKC = n - 1$)

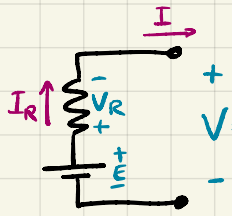
e l eq tipologiche dei componenti

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

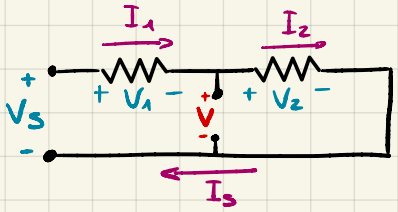
- bipoli serie





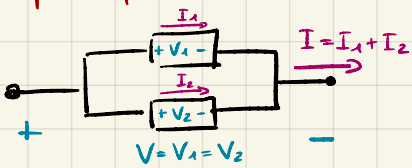
$V = E - V_R = E - RI$

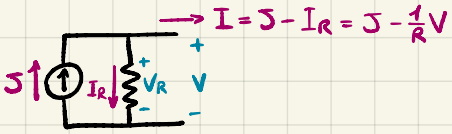
- partitore di tensione resistivo



$$\begin{cases} V_2 = R_2 I = R_2 I_s \\ I_s = \dfrac{V_s}{R_{eq}} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \frac{R_2}{R_{eq}} V_s = V$$

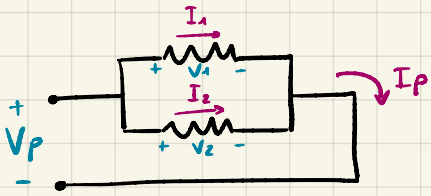
- bipoli parallelo





$I = J - I_R = J - \frac{1}{R} V$

- partitore corrente resistivo



$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{1}{R_2} V_2 = G_2 V_p \\ V_p = R_{eq} \cdot I_p = \dfrac{I_p}{G_{eq}} \end{cases} \Rightarrow I_2 = \frac{G_2}{G_{eq}} I_p$$

SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

calcolo corrente lato h facendo agire un solo GIC alla volta (NO GIT)

calcolo tensione lato h facendo agire un solo GIT alla volta (NO GIC)

sommo i risultati

posso fare con più generatori ideali alla volta, ma tutti devono agire una sola volta

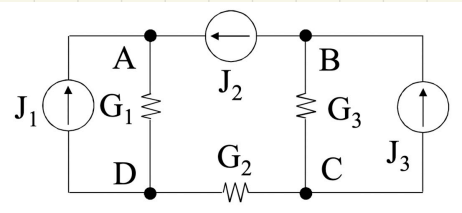
Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

METODO POTENZIALE AI NODI

rete di bipoli costituita solo da J parallelo G

scelgo un nodo di riferimento (nodo di massa) a cui do $V=0$

risolvo usando le LKC ai nodi restanti



$V_D = 0$

$$\begin{cases} A: J_1 + J_2 = G_1(V_A - \cancel{V_D}) \\ B: J_3 - J_2 = G_3(V_B - V_C) \\ C: -J_3 = G_3(V_C - V_B) + G_2(V_C - \cancel{V_D}) \end{cases}$$

3 eq in 3 incognite V_A, V_B, V_C

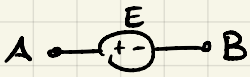
$V_1 = V_{DA} = V_D - V_A = -V_A$

$V_2 = V_{BC} = V_B - V_C$

- lato anomalo

GIT senza resistenza in serie

$\Rightarrow$ aggiungo incognita I_E (corrente del lato del GIT)

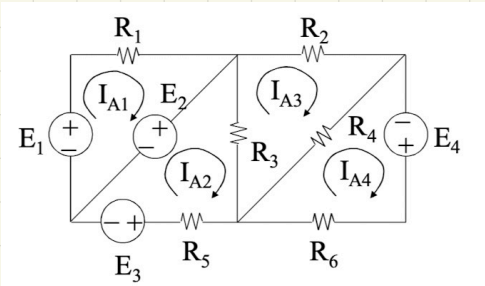
aggiungo eq 

$E = V_A - V_B$

CORRENTI DI ANELLO

rete di bipoli costituita solo da E serie R

per ogni anello $(m = \ell - n + 1)$ scrivo LKT usando le correnti ad anello

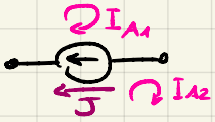


$$\begin{cases} A_1: E_1 - R_1 I_{A1} - E_2 = 0 \\ A_2: E_2 - R_3(I_{A2} - I_{A3}) - R_5 I_{A2} - E_3 = 0 \\ A_3: -R_3(I_{A3} - I_{A2}) - R_2 I_{A3} - R_4(I_{A3} - I_{A4}) = 0 \\ A_4: E_4 - R_6 I_{A4} - R_4(I_{A4} - I_{A3}) = 0 \end{cases}$$

- lato anomalo

GIC senza G in parallelo

$\Rightarrow$ aggiungo incognita V_H (tensione del lato del GIC)

aggiungo eq 

$J = I_{A1} - I_{A2}$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

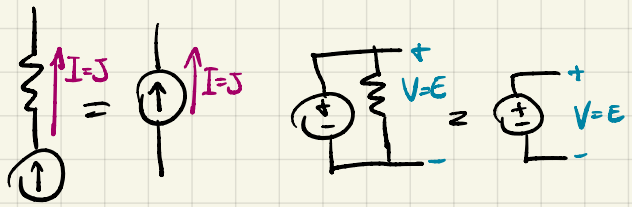
TEOREMA GENERATORI EQUIVALENTI

rete di bipoli a regime stazionario accessibile solo da due nodi,

la rete può essere vista come un bipolo avente per terminali gli stessi nodi

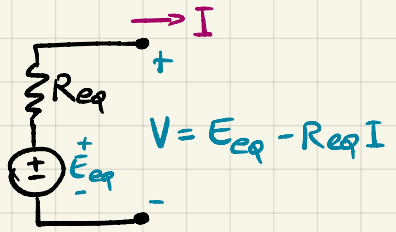
data una rete lineare (resistori, GIT, GIC) questo bipolo è equivalente a:

- serie GIT resistenza (Thevenin)
- parallelo GIC conduttanza (Norton)



• Thevenin

Solo se rete funziona a vuoto



$V = E_{eq} - R_{eq} I$

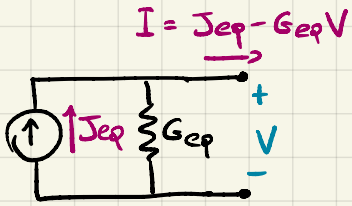
a vuoto $I = 0 \Rightarrow V_0 = E_{eq}$

a cortocircuito $V = 0 \Rightarrow I_{cc} = \frac{E_{eq}}{R_{eq}} = \frac{V_0}{R_{eq}}$

$\Rightarrow R_{eq} = \frac{V_0}{I_{cc}}$ è la resistenza una volta azzerati tutti i GIC e GIT

• Norton

Solo se rete funziona a cortocircuito

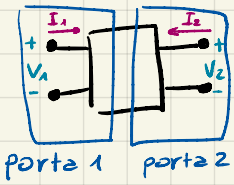


a vuoto $I = 0 \Rightarrow V_0 = \frac{J_{eq}}{G_{eq}} = \frac{I_{cc}}{G_{eq}}$

a cortocircuito $V = 0 \Rightarrow I_{cc} = J_{eq}$

$\Rightarrow G_{eq} = \frac{I_{cc}}{V_0}$ è la conduttanza una volta azzerati tutti i GIC e GIT

DOPPI BIPOLI



- doppio dipolo ideale inerte di ordine zero

Ordine zero: relazioni lineari a coeff cost

inerte: se grandezze dip = 0 ⇒ grandezze indip = 0

convenzione utilizzatori ad entrambe le porte

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

① rappresentazione controllata in corrente

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\text{matrice di resistenza}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2$

$\Rightarrow R_{11} = \frac{V_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}$ e così via per tutti

② rappresentazione controllata in tensione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\text{matrice di conduttanza}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

③ prima rappresentazione ibrida

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_{\text{prima matrice ibrida}} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

④ seconda rappresentazione ibrida

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}}_{\text{seconda matrice ibrida}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

⑤ prima rappresentazione di trasmissione

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\text{prima matrice di trasmissione}} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

⑥ seconda rappresentazione di trasmissione

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}}_{\text{seconda matrice di trasmissione}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

trasformatore ideale

$V_1 = nV_2$

$I_1 = -\frac{1}{n} I_2$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

conserva la potenza ($P_{entrante\ porta\ 1} = P_{uscente\ porta\ 2}$)

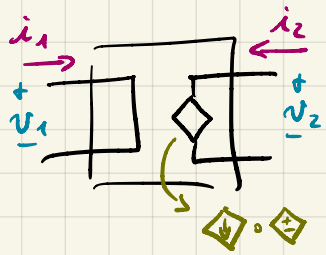
è passivo

amplifica tensioni o correnti

GENERATORI PILOTATI

esempio L15 slide 8

doppio bipolo



porta 1: controllato in tensione → circuito aperto

controllato in corrente → cortocircuito

porta 2: grandezza controllata

① generatore di tensione pilotato in tensione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_1 = 0 \\ V_2 = K_a V_1 \end{cases}$$

2° rappr ibrida

② generatore di tensione pilotato in corrente

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = K_r I_1 \end{cases}$$

rappr controll in corrente

③ generatore di corrente pilotato in tensione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = K_g V_1 \end{cases}$$

rappr controll in tensione

④ generatore di corrente pilotato in corrente

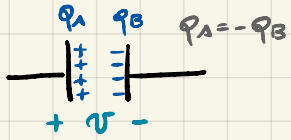
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_1 = 0 \\ I_2 = K_\beta I_1 \end{cases}$$

1° rappr ibrida

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

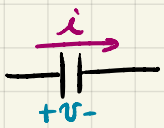
CONDENSATORE



$$C = \frac{Q}{v} \qquad [F = \frac{C}{V}]$$

capacità

convenzione utilizzatori



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau \qquad v(t) = v(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

- energia immagazzinata

$$\int_0^t v \cdot i\,d\tau = \int C v \frac{dv}{dt}\,d\tau = C\int v\,dv = \frac{1}{2}Cv^2$$

$$L_{entrante} = \int_0^t P_{entrante}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}Cv^2(t) \geq 0$$

= energia immagazzinata W_c

$L_{entrante} \geq 0$ e dipende solo dallo stato finale

condensatore è bipolo passivo

$$W_c(t) = \frac{1}{2}Cv^2(t)$$

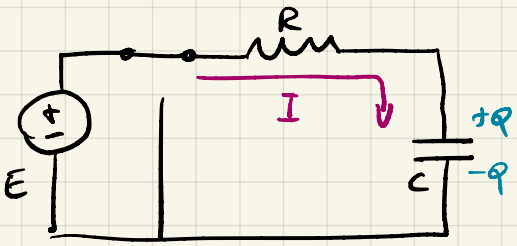
v è variabile di stato del condensatore

$$P_{entrante}(t) = \frac{d}{dt}W_c(t) \qquad p = v \cdot i = Cv\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Cv^2\right) = \frac{d}{dt}W_c$$

- regime stazionario

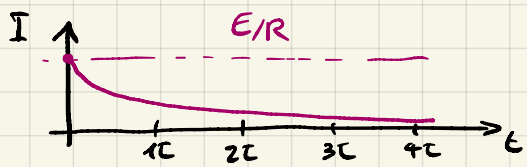
$I = 0 \quad \forall V \Rightarrow$ diventa un circuito aperto

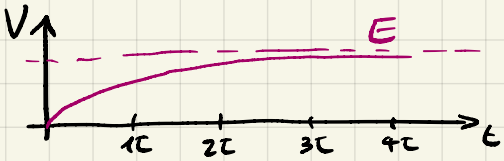
CARICA-SCARICA RC

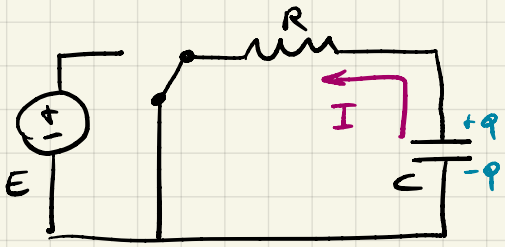


$$I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

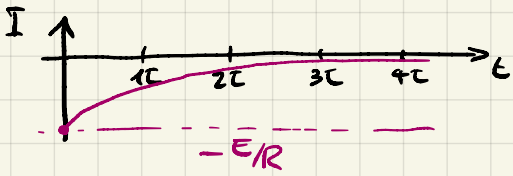


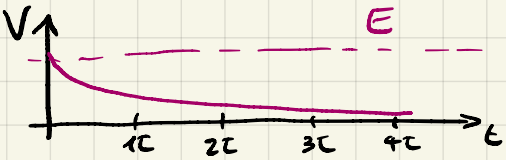




$$I(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

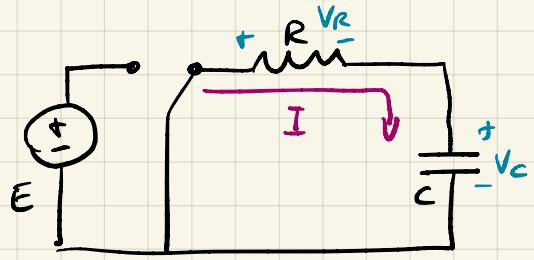
$$V(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$



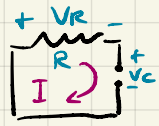


Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- carica

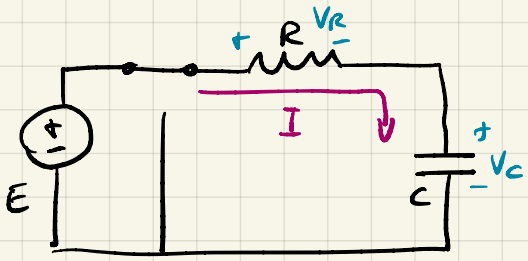


$\Rightarrow$



$I_c = I_R = 0$

$V_R + V_c = 0 \Rightarrow V_c = -V_R = -RI = 0$



$E - V_R - V_c = 0$

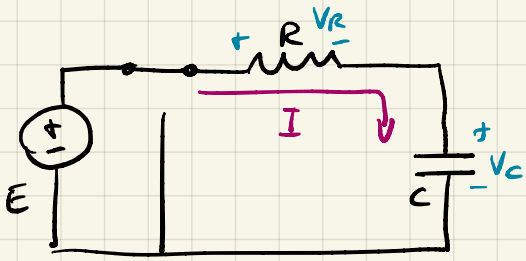
$E - RC\frac{dV_c}{dt} - V_c = 0$

$V_c + RC\frac{dV_c}{dt} = E \Rightarrow V_c = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E$

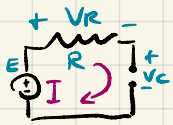
$V_c(0^-) = V_c(0^+) = 0 = \lim_{t\to 0^+} Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E = A + E \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$

$\Rightarrow V_c = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}})$

- scarica

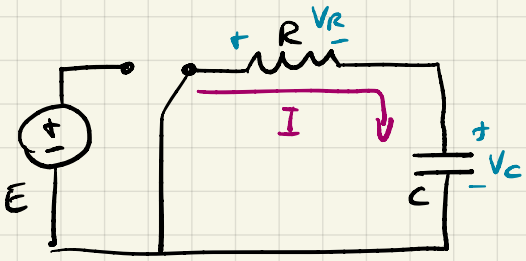


$\Rightarrow$



$I_c = I_R = 0$; $V_R + V_c = E$

$\Rightarrow V_c = E - V_R = E - RI = E$



$V_c + V_R = 0$

$V_c + RC\frac{dV_c}{dt} = 0$

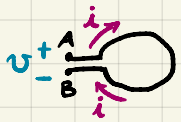
$V_c = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

$V(0^-) = V(0^+) = E = \lim_{t\to 0^+} Ae^{-\frac{1}{RC}t} = A \Rightarrow A = E$

$\Rightarrow V_c = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

INDUTTORE



convenzione utilizzatori

$$v(t) = \underbrace{L}_{\text{induttanza}} \frac{di(t)}{dt}$$

$L \; [H = \frac{V \cdot s}{A} = \Omega \cdot s]$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau \qquad i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)\,d\tau$$

- energia immagazzinata

$$L_{entrante} = \int_0^t P_{entrante}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2} L i^2(t) \geq 0$$

= energia immagazzinata W_L

$L_{entrante} \geq 0$ e dipende solo dallo stato finale

induttore è bipolo passivo

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$$

i è variabile di stato dell' induttore

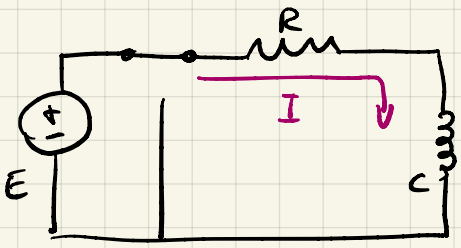
$$P_{entrante}(t) = \frac{d}{dt} W_L(t)$$

$$p = v \cdot i = L i \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) = \frac{d}{dt} W_L$$

- regime stazionario

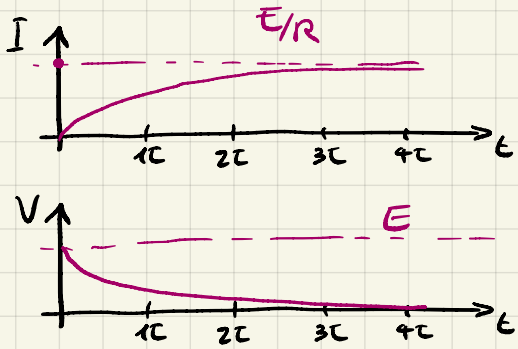
$V = 0 \quad \forall I \Rightarrow$ diventa un cortocircuito

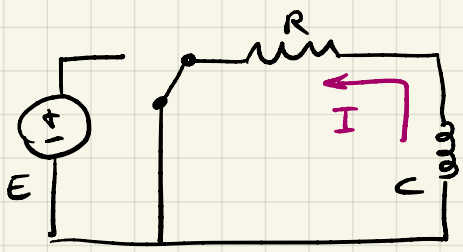
CARICA-SCARICA RL



$$I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{L/R}t}\right)$$

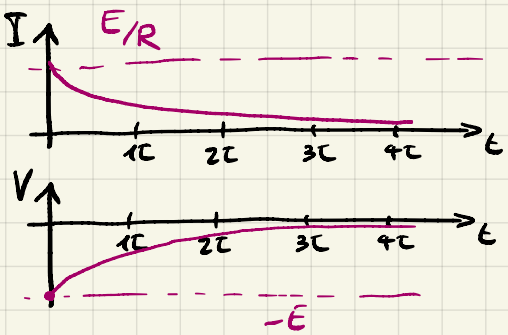
$$V(t) = E e^{-\frac{1}{L/R}t}$$





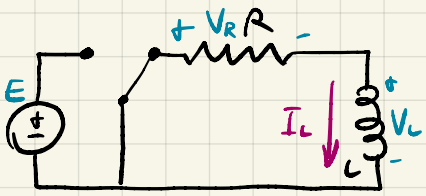
$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{L/R}t}$$

$$V(t) = -E e^{-\frac{1}{L/R}t}$$

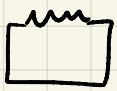


Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- **carica**

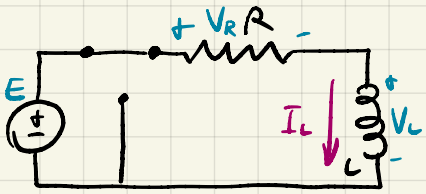


$\Rightarrow$



$V_L = 0 \Rightarrow V_R + V_L = 0 \Rightarrow V_R = RI = 0$

$\Rightarrow I_L = 0$



$$E - V_R - V_L = 0$$

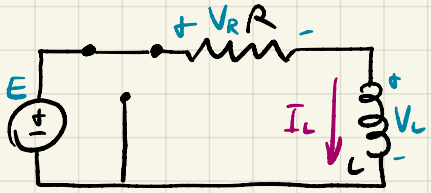
$$E - RI_L - L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_L + \frac{L}{R}\frac{dI_L}{dt} = \frac{E}{R} \Rightarrow I_L = Ae^{-\frac{1}{L/R}t} + \frac{E}{R}$$

$$I(0^-) = I(0^+) = 0 = \lim_{t\to 0^+} Ae^{-\frac{1}{L/R}t} + \frac{E}{R} = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

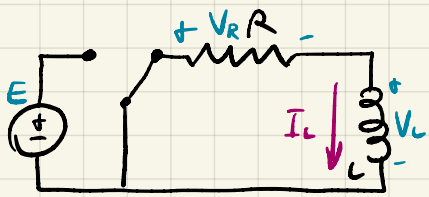
$$\Rightarrow I_L = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{1}{L/R}t}\right)$$

- **scarica**



$\Rightarrow$

$V_L = 0 \qquad E - V_R = 0 \Rightarrow RI = E \Rightarrow I_L = \frac{E}{R}$



$$V_R + V_L = 0$$

$$RI_L + L\frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_L + \frac{L}{R}\frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow I_L = Ae^{-\frac{1}{L/R}t}$$

$$I(0^-) = I(0^+) = \frac{E}{R} = \lim_{t\to 0^+} Ae^{-\frac{1}{L/R}t} = A \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{L/R}t}$$

RETI A REGIME SINUSOIDALE

rete a regime sinusoidale permanente: tensioni e correnti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali

funzione periodica $a(t) = a(t + \underbrace{nT}_{\text{periodo [s]}})$ → intero

$\underbrace{f}_{\text{frequenza}} = \frac{1}{T}$ $[Hz = \frac{1}{s}]$

$$a(t) = \underbrace{A_m}_{\text{ampiezza}} \, sen(\underbrace{\omega t + \underbrace{\alpha}_{\text{fase iniziale } \in (-\pi, \pi]}}_{\text{fase istantanea}})$$

ω → pulsazione $= 2\pi f$ $[\frac{rad}{s}]$

fissata ω, le funzioni si distinguono solo per A_m e α

VALORE EFFICACE: $A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a^2(t)\,dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$

sfasamento differenza delle fasi istantanee di due funzioni sinusoidali

$$a(t) = A_m \, sen(\omega t + \alpha)$$
$$b(t) = B_m \, sen(\omega t + \beta)$$

$\varphi = \angle_a - \angle_\beta = \alpha - \beta$ → anticipo di fase di a su b

$\varphi = 0$ in fase

$\varphi = \pi$ opposizione di fase

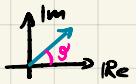
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ a è in quadratura di anticipo su b

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ a è in quadratura di ritardo su b

- **numeri complessi**

$\dot{z} = x + jy$ $\quad Re[\dot{z}] = x$, $Im[\dot{z}] = y$ $\quad j = \sqrt{-1}$ $\quad \frac{1}{j} = -j$

$\dot{z} = \underbrace{\rho \cos\vartheta}_{x} + j\underbrace{\rho \sin\vartheta}_{y}$



$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

[formula di eulero $e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\,sen\vartheta$]

$\dot{z} = \rho e^{j\vartheta}$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- rappresentazione simbolica

$$a(t) = \sqrt{2} A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \Rightarrow \bar{A} = A e^{j\alpha}$$

$$a(t) = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \bar{A} e^{j\omega t}]$$

es: $c(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \gamma) = \sqrt{2} A \operatorname{sen}(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) = A e^{j(\gamma + \frac{\pi}{2})}$

> somma

$$c(t) = a(t) + b(t) \Rightarrow \bar{C} = \bar{A} + \bar{B}$$

> moltiplicazione per costante

$$c(t) = K a(t) \Rightarrow \bar{C} = K \bar{A}$$

> derivata temporale

$$c(t) = \frac{d}{dt} a(t) \Rightarrow \bar{C} = j\omega \bar{A} = \omega A \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{j}$$

POTENZA ISTANTANEA E ATTIVA $p(t)$, P

$$v(t) = \sqrt{2} V \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$$

$\varphi = \alpha - \beta$
↳ fase di anticipo della tensione sulla corrente

$\Rightarrow \varphi_{conv\ gen} = \varphi_{conv\ util} \pm \pi$

$$\underbrace{p(t)}_{\text{potenza istantanea}} = v(t) \cdot i(t) = VI\cos\varphi + \underbrace{p_f(t)}_{\text{potenza fluttuante}}$$

$$p_f(t) = -VI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

POTENZA ATTIVA $P = \underbrace{\frac{1}{T}\int p(t)\,dt}_{\text{media su un periodo della pot istantanea}} = VI\cos\varphi$

- lavoro scambiato

$$\Delta L = \int_{\Delta t} p(t)\,dt \qquad \text{se } \Delta t \gg T \Rightarrow \Delta L = P\Delta t$$

BIPOLO PASSIVO $\Delta L_{entrante} \geq 0 \Rightarrow P = VI\cos\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

POTENZA REATTIVA Q

$$Q = VI \operatorname{sen}\varphi$$

[VAR = Volt-ampere reattivi ≡ W]

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

POTENZA APPARENTE $|\dot{S}|$

$S = VI \geq 0$ [VA = volt-ampere ≡ W]

non è legata alla convenzione della porta

fattore di potenza $\cos\varphi = \frac{P}{S}$

POTENZA COMPLESSA $\dot{S} = P + jQ$

$$\begin{cases} P = S\cos\varphi \\ Q = S\sin\varphi \\ S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI \end{cases} \qquad \dot{S} = P + jQ = VIe^{j\varphi} = \bar{V}\bar{I}^*$$

VOLTMETRO IDEALE A VALORE EFFICACE

misura valore efficace tensione

AMPEROMETRO IDEALE A VALORE EFFICACE

misura valore efficace corrente

WATTMETRO IDEALE A VALORE MEDIO

misura potenza attiva P

GENERATORI IDEALI SINUSOIDALI

- tensione

$$v(t) = e(t) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) \Rightarrow \bar{V} = \bar{E} = Ee^{j\alpha}$$

- corrente

$$i(t) = j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta) \Rightarrow \bar{I} = \bar{J} = Je^{j\beta}$$

BIPOLI PASSIVI IN REGIME SINUSOIDALE

- resistore ideale

$$v(t) = R\,i(t) \Rightarrow v(t) = \sqrt{2}\,V\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) = R\,i(t) = \sqrt{2}\,RI\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$$

$$\bar{V} = R\bar{I} \Rightarrow V = RI \quad \alpha = \beta \Rightarrow \varphi = 0$$ tensione e corrente sono in fase

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

> potenze

$$\dot{S}_{entrante} = \overbrace{\bar{V}\bar{I}^*}^{R\bar{I}\bar{I}^*} = RI^2$$

$$\dot{S} = P + jQ \Rightarrow \begin{cases} P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \geq 0 \quad [W] \\ Q = 0 \quad [VAR] \end{cases}$$

$$|\dot{S}| = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad [VA]$$

$i = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$

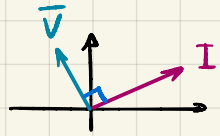
$\bar{I} = I e^{j\beta}$

$\frac{d}{dt} i \rightarrow j\omega \bar{I} = I e^{j\beta} e^{j\frac{\pi}{2}} = I e^{j(\beta + \frac{\pi}{2})}$

- **induttore ideale**

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = \sqrt{2}\, V \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) = L \frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}\, \omega L I \operatorname{sen}(\omega t + \beta + \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow V = \omega L I \qquad \varphi = \alpha - \beta = \tfrac{\pi}{2}$$



$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} = \omega L I e^{j(\beta + \frac{\pi}{2})}$$

reattanza induttiva: $X_L = \omega L > 0 \quad [\Omega] \rightarrow \bar{V} = jX_L \bar{I}$

suscettanza induttiva: $B_L = -\frac{1}{X_L} = -\frac{1}{\omega L} < 0 \quad [S] \rightarrow \bar{I} = jB_L \bar{V}$

> potenze

$$\dot{S}_{entrante} = \overbrace{\bar{V}\bar{I}^*}^{j\omega L\bar{I}\bar{I}^*} = j\omega L I^2$$

$$\dot{S} = P + jQ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \quad [W] \\ Q = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = -B_L V^2 \geq 0 \quad [VAR] \end{cases}$$

$$|\dot{S}| = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \quad [VA]$$

$$Q_{entrante} = X_L I^2 = \omega L I^2 = \omega \left(\tfrac{1}{2} L I_{Max}^2\right) = \omega \underline{W_{LMax}}$$ energia induttiva massima

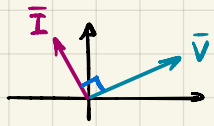
$$\Rightarrow W_L(t) = \tfrac{1}{2} L i^2(t) = W_{LMax} \operatorname{sen}^2(\omega t + \beta)$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- condensatore ideale

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \sqrt{2}\, I \operatorname{sen}(\omega t + \beta) = C\frac{dv(t)}{dt} = \sqrt{2}\,\omega C V \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow I = \omega C V \qquad \varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$$



$$\bar{I} = j\omega C \bar{V} = \omega C V e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$

reattanza capacitiva: $X_c = -\frac{1}{\omega C} < 0$ [Ω] $\longrightarrow \bar{V} = jX_c\bar{I}$

suscettanza capacitiva: $B_c = -\frac{1}{X_c} = \omega C > 0$ [S] $\longrightarrow \bar{I} = jB_c\bar{V}$

> potenze

$$\dot{S}_{entrante} = \bar{V}\bar{I}^* = jX_c I^2 \qquad (jX_c\bar{I}\bar{I}^*)$$

$$\dot{S} = P + jQ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \text{ [W]} \\ Q = X_c I^2 = \frac{V^2}{X_c} = -B_c V^2 \leq 0 \text{ [VAR]} \end{cases}$$

$$|\dot{S}| = VI = -X_c I^2 \text{ [VA]}$$

$$|Q_{entrante}| = \omega C V^2 = \omega\left(\tfrac{1}{2} C V_{Max}^2\right) = \omega \underline{W_{cMax}}$$ energia capacitiva massima

$$\Rightarrow W_c(t) = \tfrac{1}{2} C v^2(t) = W_{cMax} \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha)$$

IMPEDENZA $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$

$$\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} \qquad |\dot{Z}| = \frac{V}{I} = \sqrt{Z_{Re}^2 + Z_{Im}^2} \text{ [Ω]}$$

$$\angle \dot{Z} = \varphi = \operatorname{arctg}\frac{Z_{Im}}{Z_{Re}} \text{ [rad]}$$

resistore $\dot{Z}_R = R + j0 = Re^{j0}$

induttore $\dot{Z}_I = 0 + jX_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\quad X_L = \omega L > 0$

condensatore $\dot{Z}_c = 0 + jX_c = |X_c| e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\quad X_c = -\frac{1}{\omega C} < 0$

> potenza

$$\dot{S}_{entrante} = \bar{V}\bar{I}^* = \dot{Z}\bar{I}\bar{I}^* = \dot{Z}I^2 = Z_{Re}I^2 + Z_{Im}I^2 = P_{entr} + jQ_{entr}$$

$$\begin{cases} P = \dot{Z}_{Re} I^2 = Z\cos\varphi\, I^2 > 0 \\ Q = \dot{Z}_{Im} I^2 = Z\sin\varphi\, I^2 \gtreqless 0 \end{cases} \qquad |\dot{S}| = ZI^2 \geq 0$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

AMMETTENZA $\bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$

$$\dot{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{I}{V} e^{-j\varphi} = \frac{1}{\dot{Z}}$$

$$|\dot{Y}| = \frac{I}{V} = \sqrt{Y_{Re}^2 + Y_{Im}^2} \quad [S]$$

$$\angle \dot{Y} = -\varphi = \operatorname{arctg} \frac{Y_{Im}}{Y_{Re}} \quad [rad]$$

resistore $\dot{Y}_R = G + j0 = Ge^{j0}$

induttore $\dot{Y}_I = 0 + j\left(-\frac{1}{X_L}\right) = 0 + jB_L = |B_L| e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $\quad B_L = -\frac{1}{\omega L} < 0$

condensatore $\dot{Y}_C = 0 + j\left(-\frac{1}{X_C}\right) = 0 + jB_C = B_C e^{j\frac{\pi}{2}}$ $\quad B_C = \omega C > 0$

RETE SIMBOLICA ITALIANA

LKT $\quad \sum \pm \bar{V} = 0$

LKC $\quad \sum \pm \bar{I} = 0$

$\bar{V} = \bar{E}$, $\bar{I} = \bar{J}$, $\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$, $\bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$

- **conservazione potenze complesse**

$$\sum \dot{S}_h = \sum \bar{V}_h \bar{I}_h^* = 0 = \sum P_h + jQ_h = 0 + j0 \Rightarrow \begin{cases} \sum P_h = 0 \\ \sum Q_h = 0 \end{cases}$$

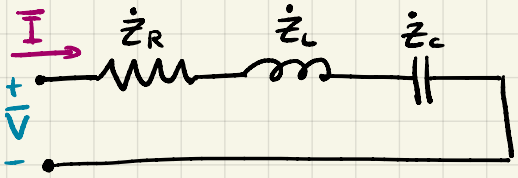
- **teoremi**

vale quanto detto per il regime stazionario ma usando i fasori, e usando $\dot{Z}$ al posto di R e $\dot{Y}$ al posto di G

RLC

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

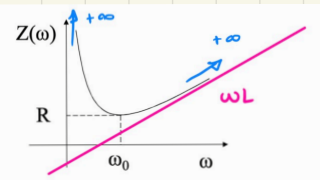
SERIE RLC

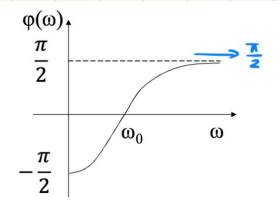


$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]$$

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$





$$|\dot{Z}|_{min} \iff \omega L - \frac{1}{\omega C}\Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \implies \underline{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

pulsazione di risonanza

$$\dot{Z}(\omega_0) = R \qquad \varphi(\omega_0) = 0$$

$$X_L + X_C = 0$$

- Funzionamento in risonanza (serie)

Se $\omega = \omega_0 \implies X_L + X_C = 0$

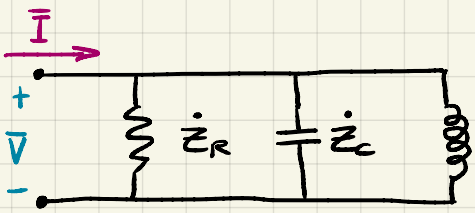
$$\begin{cases} Q_{L\,entr} = X_L I^2 \\ Q_{C\,entr} = X_C I^2 \end{cases} \implies Q_{L\,entr} + Q_{C\,entr} = 0$$

> serie di L e C con $\omega = \omega_0$

$$X_L + X_C = 0 \implies \frac{\dot{Z}_L}{j} + \frac{\dot{Z}_C}{j} = 0 \implies \dot{Z}_L + \dot{Z}_C = 0$$

$$V = (\dot{Z}_L + \dot{Z}_C)\bar{I} = 0 \quad \forall \bar{I} \implies \text{cortocircuito}$$

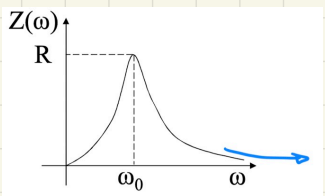
PARALLELO RLC

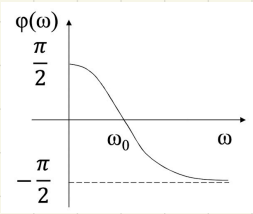


$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L = G + jB_C + jB_L = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \qquad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left[R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]$$

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$





$$|\dot{Z}|_{min} \iff \omega C - \frac{1}{\omega L}\Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \implies \underline{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

pulsazione di risonanza

$$\dot{Z}(\omega_0) = R \qquad \varphi(\omega_0) = 0$$

$$B_L + B_C = 0$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- Funzionamento in antirisonanza (parallelo)

se $\omega = \omega_0 \Rightarrow X_L + X_C = 0$

$$\begin{cases} Q_{L\,entr} = \dfrac{V^2}{X_L} \\ Q_{C\,entr} = \dfrac{V^2}{X_C} \end{cases} \Rightarrow Q_{L\,entr} + Q_{C\,entr} = 0$$

> parallelo di L e C con $\omega = \omega_0$

$$B_L + B_C = 0 \Rightarrow \frac{\dot{Y}_L}{j} + \frac{\dot{Y}_C}{j} = 0 \Rightarrow \dot{Y}_L + \dot{Y}_C = 0$$

$\bar{I} = (\dot{Y}_L + \dot{Y}_C)\bar{V} = 0 \quad \forall \bar{V} \Rightarrow$ circuito aperto