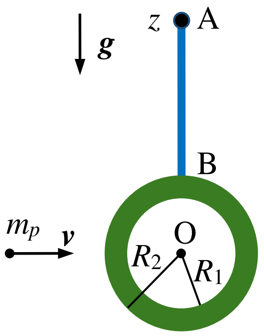
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - Canale 1 (Prof. G. Naletto)
Seconda Prova in Itinere di Fisica Generale 1 - Padova, 11 giugno 2024

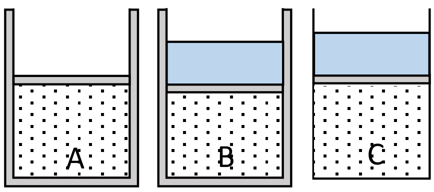
Cognome .... Nome .... Matricola ....

Problema 1



Un pendolo composto è costituito da una sbarretta omogena sottile AB di massa $m = 2.2$ kg e lunghezza $\ell = 2R_2$ e una corona circolare omogenea avente la stessa massa m, raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2 = 0.16$ m; l'estremo B della sbarretta è attaccato a un punto della circonferenza esterna della corona, la sbarretta è complanare alla corona e disposta radialmente rispetto al centro O della corona stessa. Il momento di inerzia della corona rispetto al suo asse è $I_{cor,O} = 0.044$ kgm^2.
Il pendolo può oscillare senza attrito attorno ad un asse z passante per A parallelo all'asse della corona e inizialmente è fermo con AB verticale. Ad un certo istante viene urtato da un proiettile di massa $m_P = 0.02$ kg con velocità orizzontale di modulo $v = 30$ m/s perpendicolare all'asse z e che punta verso O. A seguito dell'urto, il proiettile rimane conficcato nella corona. Trascurando il contributo del proiettile nel calcolo del momento di inerzia, del centro di massa e della massa totale del sistema dopo l'urto, determinare:
a) il momento di inerzia del pendolo rispetto all'asse di rotazione z;
b) modulo ω della velocità angolare del pendolo subito dopo l'urto;
c) l'angolo θ_{max} del massimo scostamento della sbarretta AB dalla verticale a seguito dell'urto;
d) (facoltativo) il valore del raggio interno R_1 della corona.

Problema 2



Un cilindro adiabatico di sezione $S = 0.02$ m^2 con asse verticale è chiuso da un pistone a tenuta adiabatico di massa trascurabile libero di muoversi senza attrito; il cilindro è immerso nell'aria alla pressione $p_{amb} = 10^5$ Pa. All'interno del cilindro si trovano $n = 5$ moli di un gas ideale biatomico nello stato di equilibrio A, alla temperatura $T_A = 250$ K e che occupano il volume V_A. Tramite un rubinetto, si versa molto lentamente dell'acqua sul pistone fino a che il gas arriva nello stato di equilibrio B in cui occupa il volume $V_B = \frac{10}{11}V_A$. Poi si toglie l'isolamento del cilindro e il gas si porta nello stato C in equilibrio con la temperatura ambiente ($T_C = T_{amb}$); si trova che alla fine delle trasformazioni il gas ha compiuto un lavoro $W_{ABC} = 500$ J. Determinare:
a) il valore m della massa d'acqua versata sul pistone nella trasformazione AB;
b) il valore T_{amb} della temperatura ambiente;
c) la variazione di entropia dell'universo $\Delta S_{U,AC}$ tra lo stato iniziale A e lo stato finale C.

Problema 3

Una macchina termica funziona tra due serbatoi di calore alle temperature $T_2 = 370$ K e $T_0 = 273.15$ K. In un ciclo la macchina compie il lavoro $W_M = 650$ J e la variazione di entropia dell'universo è $\Delta S_{U,M} = 2.5$ J/K. Una seconda macchina termica di Carnot, sincrona alla precedente, utilizza $n = 3.5$ moli di gas e funziona tra un serbatoio a temperatura $T_1 = 330$ K e lo stesso serbatoio a temperatura T_0. Si sa che il rapporto tra i volumi finale e iniziale nella compressione isoterma reversibile del ciclo di Carnot è pari a $V_f/V_i = 0.5$. Determinare:
a) il calore Q_2 scambiato dalla prima macchina con il serbatoio alla temperatura T_2;
b) il calore Q_1 scambiato dalla macchina di Carnot con il serbatoio alla temperatura T_1.
Si inverte il ciclo della macchina di Carnot e si fanno lavorare assieme le due macchine. Nell'ipotesi che il serbatoio a temperatura T_0 sia costituito da una miscela di acqua e ghiaccio, determinare:
c) la massa m di acqua (o ghiaccio) che solidifica (o fonde) in un ciclo della macchina composta;
d) la variazione $\Delta S_{U,M+C}$ di entropia dell'universo in un ciclo della macchina composta.

Soluzioni

Problema 1

a) $I_z = I_{z,corona} + I_{z,sbarretta} = (I_O + m(3R_2)^2) + \frac{1}{3}m(2R_2)^2 = I_O + \frac{31}{3}mR_2^2 = 0.63\ \text{kgm}^2$

b) $I'_z = I_z + m_P r_P^2 \cong I_z; \quad \vec{r}_P \times m_P\vec{v} = I'_z\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad 3R_2 m_P v = I_z\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{3R_2 m_P v}{I_z} = 0.46\ \text{rad/s}$

c) Il centro di massa del sistema dopo l'urto (trascurando il contributo di m_P) coincide con l'estremo B della sbarretta (punto medio tra il centro di massa della sbarretta, a metà di AB, e il centro di massa O della corona). Per la conservazione dell'energia, si eguagliano l'energia cinetica di rotazione dopo l'urto con quella potenziale massima del CM:

$$\frac{1}{2}I'_z\omega^2 = 2mgh_{CM} \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}I_z\omega^2 = 2mg\cdot 2R_2(1-\cos\theta_{max}) \ \Rightarrow\ \theta_{max} = \cos^{-1}\left(1 - \frac{I_z\omega^2}{8mgR_2}\right) = 5.61°$$

d) $I_{cor,O} = \int dI_{anello} = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2\rho_S 2\pi r dr = 2\pi\rho_S\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi\frac{m}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) =$

$$= \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2) \quad \Rightarrow \quad R_1 = \sqrt{\frac{2I_O}{m} - R_2^2} = 0.12\ \text{m}$$

Oppure si applica il principio di sovrapposizione: $I_{disco,R_2} = I_{disco,R_1} + I_{corona}$

$$I_O = \frac{1}{2}m_2R_2^2 - \frac{1}{2}m_1R_1^2 = \frac{1}{2}(\rho_S\pi R_2^2)R_2^2 - \frac{1}{2}(\rho_S\pi R_1^2)R_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\pi(R_2^4-R_1^4) = \frac{1}{2}m(R_2^2+R_1^2)$$

Problema 2

AB è una trasformazione adiabatica reversibile; BC è una trasformazione isobara irreversibile.

a) $p_AV_A^\gamma = p_BV_B^\gamma \ \Rightarrow\ p_B = p_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^\gamma = p_{amb}\left(\frac{11}{10}\right)^\gamma = 1.143\cdot 10^5\ \text{Pa};$

$$p_BS = p_{amb}S + mg \quad \Rightarrow \quad m = (p_B - p_{amb})\frac{S}{g} = 29.1\ \text{kg}$$

b) $T_AV_A^{\gamma-1} = T_BV_B^{\gamma-1} \ \Rightarrow\ T_B = T_A\left(\frac{11}{10}\right)^{\gamma-1} = 259.7\ \text{K}$

$$W_{ABC} = W_{AB} + W_{BC} = -\Delta U_{AB} + p_B(V_C - V_B) = -nc_V(T_B - T_A) + nR(T_C - T_B) =$$

$$= -nc_PT_B + nc_VT_A + nRT_C \ \Rightarrow\ T_{amb} = T_C = \frac{1}{nR}\left(W_{ABC} + nc_pT_B - nc_VT_A\right) = 296\ \text{K}$$

c) $\Delta S_{U,AC} = \Delta S_{U,AB} + \Delta S_{U,BC} = \Delta S_{U,BC} = \Delta S_{gas,BC} + \Delta S_{amb,BC} = nc_P\ln\left(\frac{T_C}{T_B}\right) - \frac{nc_p(T_C - T_B)}{T_{amb}} = 1.19\ \text{J/K}$

Problema 3

a) $\begin{cases} W_M = Q_2 + Q_{0,M} \\ \Delta S_{U,M} = \frac{-Q_2}{T_2} + \frac{-Q_{0,M}}{T_0} \end{cases} \ \Rightarrow\ \begin{cases} Q_2 = \frac{T_2(T_0\Delta S_{U,M} + W_M)}{T_2 - T_0} = 5092\ \text{J} \\ Q_{0,M} = W_M - Q_2 = -4442\ \text{J} \end{cases}$

b) $Q_{0,C} = nRT_0\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -5509\ \text{J}; \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_{0,C}}{T_0} = 0 \ \Rightarrow\ Q_1 = -Q_{0,C}\frac{T_1}{T_0} = 6656\ \text{J}$

c) Siccome $|Q_{0,C}| > |Q_{0,M}|$, la macchina composta assorbe calore dalla miscela, quindi l'acqua solidifica.

$$|Q_{acqua}| = m\lambda_g \ \Rightarrow\ Q_{acqua} = -m\lambda_g \ \Rightarrow\ m = \frac{-Q_{acqua}}{\lambda_g} = \frac{Q_{0,TOT}}{\lambda_g} = \frac{Q_{0,M} - Q_{0,C}}{\lambda_g} = 3.23\cdot 10^{-3}\text{kg}$$

b) $\Delta S_{U,M+C} = \Delta S_{U,M} + \Delta S_{U,C} = \Delta S_{U,M} = 2.5\ \text{J/K}$