Lezione 19 - 2/05/2024

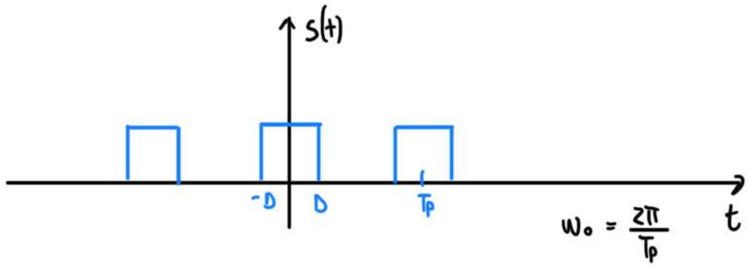
vediamo alcuni esercizi che avevamo già risolto, ma stavolta li facciamo sfruttando la relazione tra coefficienti della serie di Fourier e la trasformata di Fourier

Es 2

Calcolare la serie di Fourier dei segnali

- **Coseno rettificato** $s(t) = |\cos(2\pi f0t)|$
- **Onda quadra** di periodo T_p e duty cycle $d=(2D)/T_p$

ESERCIZIO 2b



CALCOLARE I COEFFICIENTI DELLA SDF S_K

SOL. RIFACCIAMO L'ESERCIZIO CON LA RIPETIZIONE PERIODICA

possiamo esprimere il segnale come:

$$s(t) = \operatorname{rep}_{T_p} u(t) \quad , \quad \text{dove } u(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2D}\right)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F} \qquad\qquad\qquad\qquad \Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$S_K = \frac{1}{T_p} U(jk\omega_0) \qquad\qquad U(j\omega) = 2D \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi} 2D\right)$$

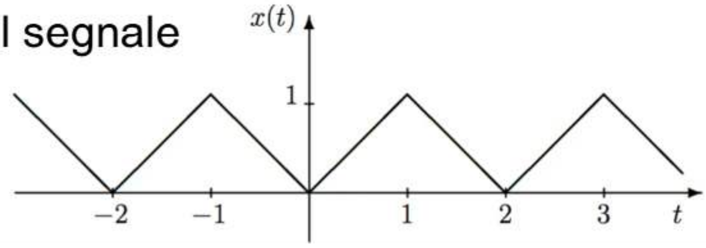
$$= \frac{1}{T_p} 2D \operatorname{sinc}\left(\frac{2D}{2\pi} k \cancel{\omega_0}^{\frac{2\pi}{T_p}}\right) = \frac{2D}{T_p} \operatorname{sinc}\left(2D\, k T_p\right) = d \operatorname{sinc}(kd)$$

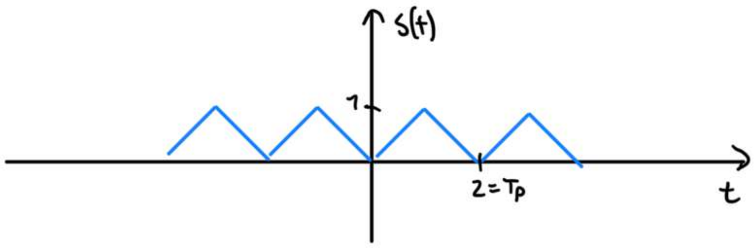
abbiamo visto come calcolare i coefficienti della SDF conoscendo la TF in un periodo

Esercizio 1

Es 1

Calcolare la serie di Fourier del segnale





$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

CALCOLARE GLI S_K

Sol. LA FORMA D'ONDA DI RIFERIMENTO IN UN PERIODO È $v(t) = \text{triang}(t-1)$

$s(t)$ è la ripetizione periodica di $v(t)$

$$s(t) = \text{rep}_2\, v(t) \qquad v(t) = \text{triangle}(t-1)$$

[RICORDA:
LA TRASFORMATA DEL TRIANG
È IL sinc^2]

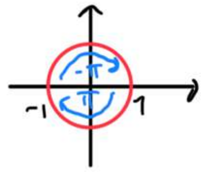
$$S_K = \frac{1}{2} V(jK\pi) \qquad V(j\omega) = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{sinc}^2\left(\frac{1}{2\pi} K\pi\right) e^{-jK\pi}$$

↪ traslazione nel tempo ⇒ modulazione in frequenza

$$= \frac{1}{2}\,\text{sinc}^2\left(\frac{K}{2}\right)(-1)^K$$

↪ ci spostiamo di $-\pi$ a π nella circ. unitaria,
cioè da $+1$ a -1

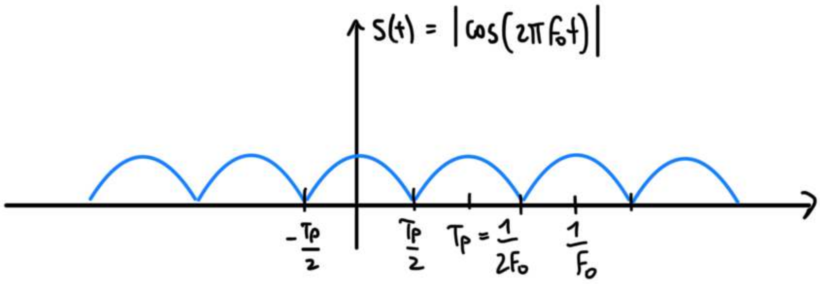


Esercizio 2a

Es 2

Calcolare la serie di Fourier dei segnali

- **Coseno rettificato** $s(t) = |\cos(2\pi f0t)|$
- **Onda quadra** di periodo T_p e duty cycle $d=(2D)/T_p$



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P} = 4\pi f_0$

CALCOLARE GLI S_K

SOL. IDENTIFICHIAMO LA FORMA D'ONDA CHE VIENE RIPETUTA PERIODICAMENTE: L'ARCO DI COSENO

$s(t) = rep_{T_p}\, v(t)$ $\qquad v(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cdot rect\left(\frac{t}{T_p}\right)$

$S_K = \frac{1}{T_p} V(jk\omega_0)$ $\qquad V(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$

$$X(j\omega) = \pi\,\delta(\omega - 2\pi f_0) + \pi\,\delta(\omega + 2\pi f_0)$$
$$\overset{!}{=} \pi\,\delta\left(\omega - \tfrac{1}{2}\omega_0\right) + \pi\,\delta\left(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_0\right)$$

$$Y(j\omega) = T_P \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_P}{2\pi}\right) = T_p \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Facciamo la convoluzione:

$$V(j\omega) = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\left[\cancel{\pi}\,\delta(\omega - 2\pi f_0) + \cancel{\pi}\,\delta\left(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_0\right)\right] * T_P \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$
$$= \frac{T_P}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - \frac{1}{2}\omega_0}{\omega_0}\right) + \frac{T_P}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega + \frac{1}{2}\omega_0}{\omega_0}\right)$$
$$= \frac{T_P}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{2}\right) + \frac{T_P}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow S_K = \frac{1}{T_p} V(jk\omega_0) = \frac{1}{\cancel{T_p}}\left[\frac{\cancel{T_P}}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\cancel{\omega_0}}{\cancel{\omega_0}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\cancel{T_p}}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{k\cancel{\omega_0}}{\cancel{\omega_0}} + \frac{1}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(k - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Questa via alternativa sfrutta la relazione tra SDF e TF.
mi devo sempre chiedere se è più facile integrare o sfruttare le proprietà

Seconda parte della lezione (da fare dopo slide 70-80). Facciamo questo esercizio importante

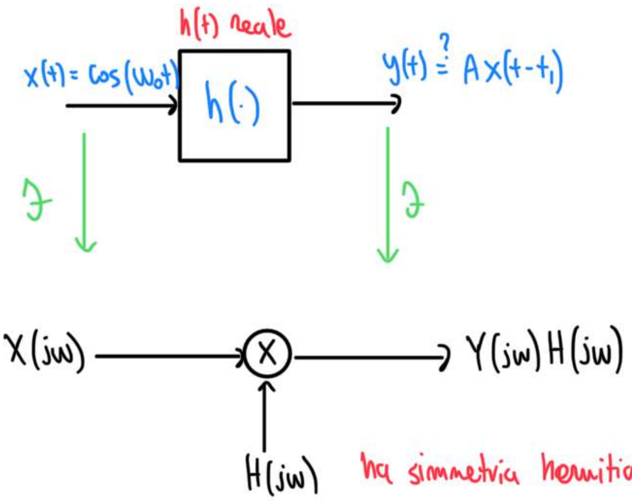
Es 1

Un fitro reale h(t) distorce il segnale $\cos(2\pi f_0 t)$?

ESERCIZIO 1

UN FILTRO REALE $h(t)$ DISTORCE IL SEGNALE

SOL.



ha simmetria hermitiana : $H(-jw) = H^*(-jw)$

$$X(jw) = \pi \delta(w - w_0) + \pi \delta(w + w_0)$$

$$Y(jw) = \pi \overset{w_0}{H(jw)} \delta(w - w_0) + \pi \underbrace{\overset{-w_0}{H(jw)}}_{= H^*(jw_0)} \delta(w + w_0)$$

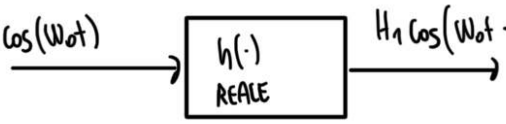
$\mathcal{F}^{-1}$

$$y(t) = \pi H(jw_0) \frac{1}{2\pi} e^{jw_0 t} + \pi H^*(jw_0) \frac{1}{2\pi} e^{-jw_0 t}$$

$$= \frac{H(jw_0) e^{jw_0 t} + H^*(jw_0) e^{-jw_0 t}}{2} = Re\left[H(jw_0) e^{jw_0 t}\right] \quad , \quad H(jw_0) = H_1 e^{j\varphi_1}$$

$$= Re\left[H_1 e^{j(w_0 t + \varphi_1)}\right]$$

$$= H_1 \cos(w_0 t + \varphi_1)$$



$$H_1 \cos(w_0 t + \varphi_1) = H_1 \cos\left(w_0\left(t + \frac{\varphi_1}{w_0}\right)\right)$$

UN FILTRO REALE <u>NON</u> DISTORCE UNA SINUSOIDE