

Lezione 11

30/05/2024

Esercizio 1

Nello spazio affine \mathbb{A}^3 sono date le rette:

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Si determini la proiezione ortogonale del punto $P = (4, -3, -1)$ sulla retta r .
- (b) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.
- (c) Si scriva l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo alla retta s .
- (d) Si trovino due punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per R e S sia perpendicolare a entrambe le rette r e s .

Esercizio 2

Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati il punto $P = (1, -1, -1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che passa per il punto P e contiene la retta r .
- (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P , contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r .
- (c) Trovare il punto $H \in r$ che ha minima distanza dal punto $A = (5, -3, 2)$.
- (d) Consideriamo i piani σ che hanno equazione del tipo $2x + \alpha y + 3z + \beta = 0$, con α e $\beta \in \mathbb{R}$. Trovare i valori di α e β tali che il piano σ contenga la retta r .

Esercizio 3

Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono assegnati i punti $P = (1, 0, 2)$, $Q = (3, -2, 4)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 4z = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

- (a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q . Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s . Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.
- (b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia perpendicolare alla retta r e che la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M .
- (c) Sia π il piano di equazione $2x + y - 3z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\text{dist}(P, \sigma) = \text{dist}(Q, \sigma)$.

Esercizio 4

Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati i punti $A = (0, 3, 3)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (2, 2, 1)$.

- (a) Verificare che l'angolo \hat{ABC} è retto e trovare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.
- (b) Trovare il punto E , intersezione delle diagonali del rettangolo $ABCD$.
- (c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene il rettangolo $ABCD$.

Esercizio 5

Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ consideriamo i seguenti piani

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_{\alpha} : (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0$$

- (a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_{α} e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_{α} .
- (b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_{α} sono parallele al piano π .
- (c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.
- (d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$, trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π .