Analisi matematica 1, Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Esercizi in preparazione della prova scritta
a cura dei docenti di "Analisi Matematica 1"
Anno Accademico 2024-2025

Indice

NOTA: sia $\ln$ **che** $\log$ **indicano il logaritmo in base** e**.**

Buon lavoro!

1 Temi d'esame da 2h - dal 17.01.2022 al 09.09.2024

Svolgimento nella sezione 10 in ordine invertito rispetto alla presentazione dei testi d'esame.

Appello del 09.09.2024
TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.
[*Suggerimento:* si può sfruttare il fatto che $-\frac{\pi}{2} < -1 < \frac{x}{x^2+1} < 1 < \frac{\pi}{2}$.]

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z - i|z|^2 = 5 - 4\bar{z}$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica e rappresentarle nel piano di Gauss.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\cosh n)}{(n^4+2n-1)^\alpha}.$$

[*Suggerimento:* si ricorda che $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\log = \log_e$.]

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = (\arcsin x)^\alpha (1-x^2)^{\alpha-2}$$

(a) Calcolare $\int_0^1 f_2(x)\,dx$.
[*Suggerimento:* Usare la sostituzione $\arcsin(x) = t$.]
(b) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

Appello del 01.07.2024
TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|e^{\frac{1}{x-2}}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\left(\frac{z+3i}{i}\right)^4 = -16$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a+1}{n^2+1} a^n.$$

Esercizio 4 (punti 8) Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x - 4} \mathrm{d}x$$

[*Suggerimento:* si ricorda la sostituzione $t = \tan(x/2)$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.]

Appello del 12.02.2024
TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Determinare in campo complesso le soluzioni di

$$z^4 + (4i - 2\sqrt{3})z^2 - (4 + 4\sqrt{3}i) = 0,$$

scriverle in forma esponenziale o trigonometrica e disegnarle sul piano di Gauss.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^a \left(\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1\right)}{3\log n - \arctan n}.$$

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+5}\, dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_2^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right) \cdot \left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4} dx \quad \text{per } a \in \mathbb{R}.$$

Appello del 22.01.2024

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\frac{z}{2\overline{z}} = \frac{\operatorname{Im}(\overline{z})}{|z|^2} i.$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n\ln n + 3\sin^2 n}.$$

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin x}\,dx.$$
(b) Studiare la convergenza di
$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}{1-\sin x}\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
[*Suggerimento:* Si ricordi che $\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t$, $\sin(\frac{\pi}{2}-t)=\cos t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Appello del 11.09.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{(-4+x\log x)}$$
(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuitÃă ed asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica
$$\frac{1}{z} = \frac{2\overline{z}+1+i\,\mathcal{I}m(z)}{|z|^2}.$$

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}.$$

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Calcolare il seguente integrale indefinito
$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,dx.$$
(b) Studiare il comportamento del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$
$$\int_0^{\pi} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x^{\alpha}}\,dx.$$

Appello del 30.06.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) discutere la derivabilità di f e calcolare la derivata (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) calcolare la derivata seconda, determinare gli intervalli di concavitÃă/convessitÃă di f ed eventuali punti di flesso;
(e) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0.$$

Determinarne le soluzioni, le corrispondenti molteplicità e disegnarle nel piano complesso.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \left(1 - \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}\right)^{\alpha-1}.$$

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Usando il teorema di De L'Hôpital, dimostrare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1;$$

(b) Usando la proprietà del punto precedente, discutere il comportamento del seguente integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\,[\arctan(x+1) - \arctan(x)]}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Appello del 13.02.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log|x| - 4)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuità ed asintoti agli estremi del dominio;
(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z - i = 0.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{3n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;
(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x)\,dx.$$

Appello del 23.01.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := 4$ come soluzione;
(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} [1 - \arcsin x]^{\frac{1}{x}}.$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x-2)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

Appello del 12.09.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne la eventuale periodicità e l'eventuale simmetria, calcolarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, individuare gli intervalli di monotonia e i punti di minimo e di massimo, sia relativi che assoluti, ed eventuali estremo inferiore e

superiore;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\frac{z-i}{z-1}\right| \geq 1$$

e le si disegni sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2+4x^3)}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti] (a) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x-1)}\, dx$$

(b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ Studiare la convergenza di

$$\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x-2)^\alpha(e^x-1)}\, dx.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

Appello del 01.07.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}}.$$

(i) determinare il dominio di f ed il segno di f;
(ii) calcolare i limiti significativi di f;
(iii) calcolare la derivata di f, discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(iv) calcolare eventuali asintoti di f $^{(*)}$;
(v) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

$^{(*)}$ questa domanda vale 1 punto.

Esercizio 2 [8 punti] Determinare in forma algebrica le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + (-2-2i)z^2 + 4i = 0.$$

Esercizio 3 [7 punti]
(i) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{\alpha x} - 1}{x^2}.$$

Esercizio 4 [8 punti] (i) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt.$$

(ii) Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha}\,dt$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

Appello del 07.02.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(|x| - x^2 + 2\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno; calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z + i\mathcal{I}m(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{R}e(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left\{\alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\,dx.$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\,dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

Tempo a disposizione: 2 ore.

Appello del 17.01.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x+1|}{x^2+4}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo o minimo relativo;
(iii) abbozzare il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -8.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right),$$

la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione (e il metodo di sostituzione), calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{2\alpha}(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

2 Temi d'esame da 1h30m per modalità telematica - da 06.07.2020 a 13.09.2021

Svolgimento nella sezione 9.

Appello del 13.09.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} \quad .$$

(i) Determinarne il dominio naturale; studiarne la periodicità, il segno e la simmetria di f;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| \frac{z+1}{z} \right| \geq 1$$

e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti] Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 05.07.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \log\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti]

Sia

$$f_\alpha(x) := \frac{\arctan x}{1 + x^{2\alpha}}.$$

(i) Calcolare

$$\int f_1(x)\, dx = \int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx.$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in [0, \infty)$ la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx.$$

Esercizio 4 [8 punti]

(i) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + \alpha[\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2}.$$

(ii) Dedurre il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2\right\}.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 08.02.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}.$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1+i}{1-i},$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\int \log(t+1)\, dt.$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n\,(\cos(1/n)-1)+\frac{\alpha}{n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|n\,(\cos(1/n)-1)+\frac{\alpha}{n}\right|.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 18.01.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x)=\arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right);$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) calcolarne la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti estremanti;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$z^4+(-1+i)z^2-i=0.$$

Suggerimento: sostituire $w=z^2$.

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}.$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Esercizio 4 [8 punti] Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha}.$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_0^{\log 2} f_\alpha(x)\, dx.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 14.09.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x \in (1, \infty).$$

(i) Individuarne gli eventuali asintoti.
(ii) Se ne determini la monotonia.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$.
(i) Scriverlo in forma esponenziale.
(ii) Calcolare la parte reale di z^6.

Esercizio 3 [6 punti] Stabilire la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x) - \sin x}{x^2}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_1^{\infty} \log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha + 1}\right) dx.$$

(i) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(ii) Stabilire per quali $\alpha \in [0, \infty)$ esso converge.
Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 06.07.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Calcolare

$$\lim_{x\to -3^+} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione f, studiare gli intervalli di monotonia ed abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 8i,$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\log n}{n^4}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

3 Temi d'esame dal 23.01.2017 al 10.02.2020

Svolgimento nella sezione 8

Appello del 23.01.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 3}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|2z^2 - 2\bar{z}^2\right| < 3$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.
Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\Big(\cos\frac{1}{n} - 1 + \sin\frac{1}{2n^\alpha}\Big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{|x|-4}{x^2+2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.
Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x\ |\arctan(x-1)|}{|1-x^2|^\alpha\ (\sinh\sqrt{x})^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Esercizio facoltativo. Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|4\bar{z}^2 - 4z^2\right| < 5$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(2 - e^{1/2n^\alpha} - \cos(1/n)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{4 - |x|}{1 + 2x^2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-2)|\ \arctan x}{|x^2-4|^\alpha\ (\sinh\sqrt[3]{x})^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 4}^{3} \frac{e^x}{e^{2x} - 9}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|3z^2 - 3\bar{z}^2\right| < 2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(\cosh(1/n^\alpha) + \cos(1/n) - 2\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{|x| - 4}{2x^2 + 3}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(3-x)|\ \arctan x}{|9-x^2|^\alpha\ (\cosh\sqrt{x}-1)^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|9\bar{z}^2 - 9z^2\right| < 2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(e^{1/n^2} - \tan 1/n^\alpha - 1\right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{4-4|x|}{5x^2+3}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x\ |\arctan(1-2x)|}{|1-4x^2|^\alpha\ (\cosh x-1)^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Appello del 13.02.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 - 2x - 3\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{2 + iz}{iz + 1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x - \sin x + x^{\frac{10}{3}} \log x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x - 2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 + x - 6\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;

(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{-1-2iz}{iz-1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 2z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x - \sinh x + x^{\frac{11}{2}} \log x}{x^\alpha (1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-3}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 3

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2 - 2x - 8\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{-2+3iz}{2iz-3},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = -z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{9}{2}}\log x - \tan x + \sin x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-4}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 4

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2+3x-4\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{1-4iz}{iz+4},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x - \tan x - x^{\frac{15}{4}}\log x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-5}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Appello del 10.07.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| e^{2x} - 4 \right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} \geq 0,\ |z+1-i| \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(3e^x) dx.$$

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-e^a)^n}{n + \sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| e^{-3x} - 9 \right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z+1}{z-i} > 0,\ |z-1-i| \le 1 \right\}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(2e^x)dx.$$

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin \arctan x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-2^a)^n}{n + \log n}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Appello del 18.09.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Dato il polinomio

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.

Esercizio 3 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax}(2+\cos x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{2x}{\log|3x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Dato il polinomio

$$z^4 - z^3 - 27iz + 27i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.

Esercizio 3 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{\alpha x^2} + x\log(\cosh x)}{x - \sinh x + e^{-1/x^2}}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax}(2-\sin x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\sin x$).

Appello del 29.01.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{2n} \sin \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin \frac{2}{x}}{\cos \sin \frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 3|}{x + 1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{3n} \sinh \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1) - \log(x+2) + \sinh \frac{1}{x}}{\cosh \sin \frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-2x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{4x^2 - 1}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 4|}{x - 1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{2}} \arctan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2) - \log(x-1) + \arctan \frac{1}{x}}{\cos\sinh \frac{2}{x} - \cos \frac{\alpha}{x} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-4}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-6|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{3}} \tan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \tan\frac{2}{x}}{\cosh\sinh\frac{3}{x} - \cosh\frac{\alpha}{x} - e^{-3x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{9x^2-1}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Appello del 16.02.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 = 4\,\mathrm{Im}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4}{x^4\sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+2|}} & \text{per } x \neq -2 \\ 0 & \text{per } x = -2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+2)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$-\mathrm{Im}(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2) = 8i(z - \overline{z})$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cosh x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \arctan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{2}} x^{\alpha-1} \sin(\sqrt[3]{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-3|}} & \text{per } x \neq 3 \\ 0 & \text{per } x = 3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2n+5)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(\bar{z} - z)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 2\alpha)^2 - x^4}{x^4 \sinh^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{8}} x^{1-\alpha} \sin(\sqrt{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+3|}} & \text{per } x \neq -3 \\ 0 & \text{per } x = -3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è

richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+5)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^2 z - z^2 \bar{z}) = 4 \operatorname{Re}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4}{x^4 \tan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{24}} x^\alpha \sin(\sqrt[3]{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 0$.

Appello del 9.07.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2 - 3e^{3x}\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$|z|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \le \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right)$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [6 punti] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

Esercizio 5 [8 punti] a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2e^{2x} - 3\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{\mathrm{Im}\left(z^2 - \bar{z}^2\right)}{|z|^2}$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\cosh\frac{1}{x} - 1\right)^2 - e^{-x}}{\left(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\right)^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [6 punti] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right).$$

Esercizio 5 [8 punti] a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log \frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha + 4}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

Appello del 17.09.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x| - 3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda - 4iz + 2iz^2 + z^3.$$

Determinarne $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -2i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 3 [6 punti] Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\big(2 - 3|x|\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinarne il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda + 2iz + 3iz^2 + z^3.$$

Determinare $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -3i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 3 [6 punti] Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n + \cos n)}{n^{2\alpha} + 1}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^\alpha}{\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^{2\alpha} \arcsin \frac{x^2}{2} \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Appello del 21.01.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D =]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1+2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1 + \sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}}, \qquad x \in D =]-\infty, -1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(3x) - \log(1+3x)}{\sin^2 x + x^{\frac{11}{2}}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1-2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1+\frac{t}{4}\right)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

i) Calcolare $\int_1^4 f(t)\,dt$ con $\alpha = 4$.

ii) Sia $F(x) := \int_4^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 4$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan\alpha)^n}{\sqrt{2n}-1}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}}, \qquad x \in D =]-\infty, 1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x} - 1 - \sinh(3x)}{\log^2(1+x) + x^{2\pi}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1 - 2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log(1 + 2t)}{t^{\alpha-1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^{\frac{3}{2}} f(t)\, dt$ con $\alpha = 3$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\, dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\, dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 + \log \alpha)^n}{\sqrt{n} - 1}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}}, \qquad x \in D =]-\infty, 2[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh(2x) - \log(1 + 2x)}{\arctan(x^2) + x^{2e}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1 + 2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{t^{\alpha+1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^3 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 0$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan 2\alpha)^n}{1+\sqrt{n}}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/4, +\pi/4[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Appello del 11.02.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \le \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar{z}+i)-1\big)^2}{4} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar{z}+i)-1\big)^2}{4} \le 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}}-1}{x^{\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+2)\log(x+2)|, \qquad x \in D =]-2, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -2$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 \sin n}{1 - n^5}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} \le \frac{\left(\mathrm{Re}\,(\bar z + 2i) - 1\right)^2}{9} + \frac{\left(\mathrm{Im}\,(\bar z + 2i) - 1\right)^2}{9} \le 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3x}}\, dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{3x}} - 1}{x^{2\alpha+1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 0$, sia $F(x) = \int_1^{\sin x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\pi/6)$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\left(1 + 5x\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt.$$

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+1)\log(x+1)|, \qquad x \in D =]-1, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -1$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n^2)}{1-n^5}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \le \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar z - i) - 1\big)^2}{9} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar z - i) - 1\big)^2}{9} \le 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/2}}\, dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/2}} - 1}{x^{\alpha-3}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 4$, sia $F(x) = \int_1^{\sinh x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\log 3)$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1+2x\big)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt.$$

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+4)\log(x+4)|, \qquad x \in D =]-4, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -4$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2)\sin(n^2)}{n^5}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar{z}-2i)-1\big)^2}{4} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar{z}-2i)-1\big)^2}{4} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/3}}\,dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/3}}-1}{x^{2\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 1$, sia $F(x) = \int_1^{\arctan x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\sqrt{3})$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\,x) - \cosh\left(1-e^{3x}\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\,dt.$$

Appello del 8.07.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia
$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$
a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - 2\sqrt{n}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione
$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|iz^2|}$$
e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione
$$e^x \log(1 + 2e^x).$$
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \log(1 + 2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione
$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\, dt.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite
$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \left(\sqrt[8]{x^2 - 2} - \sqrt[4]{x + 1} \right)$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Sia
$$f(x) = e^{\frac{1}{|3+\log x|}}.$$
a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{n})\sinh\frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione
$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|iz^2|}$$
e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione
$$e^x \log(1+3e^x).$$
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}\log(1+3e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 2$ della funzione
$$F(x) = \int_2^x f_0(t)\,dt.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[6]{x^2-1}\right)$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

Appello del 17.09.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Sia
$$f(x) = \log \left| e^{3x} - 2 \right|.$$
a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Si calcoli il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-2x^2} - 1 - x}{\sinh x^2 + x^{7/3} \log x}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione
$$\operatorname{Re} z \le \operatorname{Re} \left(\frac{3}{z} \right)$$
e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [6+3 punti] a) Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \left(\tan \frac{x}{2} \right)^3 dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan \frac{x}{2} = u\text{).}$$
b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}} dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [4+3 punti] (i) Si dimostri che la successione
$$a_n = \log(n+1) - \log \sqrt{n^2 + \alpha n + 4}$$
è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Sia
$$f(x) = \log \left| e^{2x} - 3 \right|.$$
a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali

punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-3x^2}-1-x}{\sin x^2 + x^{5/2}\log x}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re}\left(\frac{4}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [6+3 punti] a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\tan 2x)^3\, dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan 2x = u\text{).}$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{2\alpha-1}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [4+3 punti] (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2+\alpha n+3}$$

è infinitesima per $n\to\infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Appello del 20.01.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\big(2\arctan(|x|^3)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1+\sin x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log\dots\}$".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+5)(z^2+z+1)=0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t}+2e^t}{(e^t-1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\sin x)^n n}{n^2+\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1-\sin\big(2\arctan(|x|^3)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1-\sinh x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log\dots\}$".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2-z+1)(z^3+4)=0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t}-3e^t}{(e^t-1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\cos x)^n n}{n^2+1}$$

al variare di $x \in [0, \pi]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(2\arctan(|x|^5)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; <u>non</u> è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \sin x\right)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log \dots\}$".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+3)(z^2+z+2) = 0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} - 2e^t}{(e^t-1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\sin x)^n n}{n^2+2\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin\left(2\arctan(|x|^5)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\sinh x\right)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "exp{log ...}".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2 - z + 2)(z^3 + 2) = 0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} + 3e^t}{(e^t - 1)^\alpha} .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\cos x)^n n}{n^2+2}$$

al variare di $x \in [0, \pi]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Appello del 10.02.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x+1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x - x^3) - \log(1 + \sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\ dt,\ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x+1}{x}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{2e^{-3/t}}{t^\alpha} \ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x - x^3) - \log(1 + \sin x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\ dt,\ \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$? Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x-1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{3e^{-2/t}}{t^\alpha} \ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x+x^3) - \log(1+\sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\ dt,\ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x-1}{x}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 6^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-3/t}}{2t^\alpha} .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x + x^3) - \log(1 + \sin x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt, \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

4 Esercizi di allenamento per esame da 2h30m (non svolti)

Traccia 1

1) Sia
$$f(x) = \frac{|x-1|-2}{x^2+1}, \quad x \in [-2,4].$$
Studiarne il segno, la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x(1-\cos x)+x^4}.$$

3) Calcolare le radici terze di $-27i$.

4) (a) Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx.$$

(b*) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge:
$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^\alpha \sin\sqrt{x}dx.$$

5*) Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Traccia 2

1) Sia
$$f(x) = \log(|x-1|+1) - \log x, \quad x \in]0,2].$$
Semplificarla e studiarne la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x(x-\sin x) + x^3 \sin^2 x.}$$

3) Semplificare l'espressione
$$\frac{\overline{(1+i)}^2}{(1-i)^2\left(\frac{-1}{i}+\sqrt{3}\right)}$$
esprimendo il risultato in forma algebrica ed in forma trigonometrica.

4) (a) Calcolare
$$\int_{\log \pi}^{2\log \pi} e^{2x} \cos e^x \, dx.$$
(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_{-\infty}^{\log \pi} e^{\alpha x} \cos e^x dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) Sia
$$f(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{x} \sin(t^2)\, dt.$$
(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 nel punto $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\big($lasciando indicato il valore di $f(\sqrt{\frac{\pi}{2}})\big)$;
(b) studiare la monotonia e la convessità e la concavità di f nell'intervallo $[-1,2]$;
(c) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ contenute nell'intervallo $[-1,2]$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Traccia 3

1) Sia
$$f(x) = \arctan|x^2 - 1|, \quad x \in [-1, 2].$$
Studiarne la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cosh x)^2}{\sin x(x - \arctan x) + x^3 \sinh^2 x.}$$

3) Risolvere l'equazione
$$(z^2 + 2i)(z^3 + 8) = 0$$
esprimendo il risultato in forma algebrica ed in forma trigonometrica.

4) (a) Calcolare
$$\int_{\log 3}^{1} \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx.$$
(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^{\alpha}}\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \alpha(\arctan \sin x + 1) & \text{per } x \leq 0 \\ e^{x+1} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$
(a) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il grafico di f ammetta una retta tangente in $(0, f(0))$ e calcolarla per tali α;
(b) discutere, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = e + \lambda x$ contenute nell'intervallo $[0, 2]$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Traccia 4

1) [6 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$$

al variare del parametro $x \in [0, 2\pi[$.

2) [4 punti] Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\arctan x}.$$

3) [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\left| e^{i \operatorname{Re} z} (\bar{z} - i) \right| \leq 1$$

e disegnare le soluzioni nel piano di Gauss.

4) [4 + 4 punti]

(a) Calcolare

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx \qquad \text{(eseguire una sostituzione iperbolica).}$$

(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^2 (4 - x^2)^{\alpha}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |1 - x|\, e^{\arctan(4/x)}.$$

1) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti.
2) Calcolare f' nei punti dove è possibile e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
3) Disegnare un grafico di f.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

5 Altri esercizi di allenamento (non svolti)

Limiti.
1) Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-2}{x-2}, \quad \lim_{x\to -\infty} x\log\frac{1-x}{3-x}, \quad \lim \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

2) Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - n!\sin\frac{1}{n} - n}{2^{n-1}+(n-1)!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - n\sin n}{n! - 2^n}.$$

Serie.
1) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+n-1}$$

2) Studiare la convergenza e la convergenza assoluta al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x^n}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x^n}{n}.$$

Funzioni.
1) Discutere la derivabilità e calcolare le derivate prime e seconde delle funzioni

$$f_1(x) = \log\frac{1}{\cos x}, \quad f_2(x) = \log|\sin x - \frac{1}{2}|$$

nel loro dominio.
2) Verificare l'identità

$$\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

3) Studiare la monotonia e determinare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti di

$$f_1(x) = \sin x - x\cos x, \qquad f_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \text{ (per } x \in [0,1]), \quad \arctan\left|x - \frac{1}{x}\right| \text{ (per } x \neq 0).$$

4) Studiare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x - \log|x| = \alpha \qquad (x \neq 0)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Integrali.
1) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 con centro $x_0 = 1$ delle funzioni

$$F_1(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt \quad F_2(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t}\,dt$$

e dire se nell'intervallo $[1,2]$ sono invertibili.

2) Calcolare gli integrali

$$\int x \log^2 x \, dx, \quad \int_0^1 \frac{x^2-4}{x^2+5x+4} \, dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx.$$

3) Studiare la convergenza degli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{e^x-1}} \, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

6 Esercizi scelti da temi d'esame di anni passati (non svolti)

Studi di funzione.
1) (20.02.2013) Data la funzione

$$f(x) = x \left| 3 + \frac{1}{\log(2x)} \right| ,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

2) (3.02.2014) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\log|x| - 1}\right) .$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.

2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.

4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

3) (26.01.2015) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x + 1|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}} .$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Serie
1) (16.09.2013) Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right) .$$

2) (26.01.2015) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n-1}(x-2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

3) (25.01.2016) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\big(\log(x-3)\big)^n}{n-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Limiti

1) (20.02.2013) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

2) (3.02.2014) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)}{\log\cos 2x + x^3\log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

3) (20.02.2015) (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1+\sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizi sui numeri complessi

1) (7.02.2012) Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Re}z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

2) (23.02.2012) Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\left(z^2 + iz + 2\right)\left(z^3 - 8i\right).$$

3) (18.09.2012) Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.

4) (5.02.2013) Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

5) (15.07.2013) Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

6) (15-07.2014) Esprimere in forma trigonometrica le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4}{z^4+1} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

7) (20.02.2015) Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) \leq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) \tag{1}$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

8) (16.07.2015) Si risolva l'equazione

$$\Big(\frac{1}{18} - \frac{i\sqrt{3}}{18}\Big)\bar{z}^2 = 1,$$

disegnandone le soluzioni nel piano di Gauss.

9) (15.02.2016) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^2 = 2iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

10) (11.07.2016) Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$2\bar{z}^3 = 3i,$$

rappresentandone le soluzioni in forma algebrica.

Integrali

1) (7.02.2012) Calcolare l'integrale

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

2) (23.02.2012) Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

3) (17.07.2012) (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9-x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\big(9-x^2\big)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

4) (5.02.2013) Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx.$$

5) (20.02.2013) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

6) (15.07.2013) a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}-1}{e^{2x}+1} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

7) (3.02.2014) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(4+x)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

8) (15.07.2014) Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\,(3+2\sqrt{x}+x)} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

9) (12.09.2014) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha} dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

10) (25.01.2016) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx$$

11) (11.07.2016) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{|\log(\cos 2x)|^\alpha \cos 2x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

7 Ulteriori esercizi - svolti - (a cura di C. Sartori)

FUNZIONI

Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda > 1$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = x^\lambda.$$

Soluzione. L'equazione (che ha la soluzione λ) è equivalente a

$$x \log \lambda = \lambda \log x.$$

Posto $f(x) = x \log \lambda$, $g(x) = \lambda \log x$, si ha $f'(x) = \log \lambda$, $g'(x) = \frac{\lambda}{x}$ e quindi le due funzioni sono tangenti se

$$\begin{cases} x \log \lambda = \lambda \log x \\ \log \lambda = \frac{\lambda}{x}. \end{cases}$$

Si ricava $\lambda = \lambda \log x$ cioè $x = e$ e quindi $\log \lambda = \frac{\lambda}{e}$ da cui $\lambda = e$. La funzione $\log x$ è tangente alla retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ se $\lambda = e$. Il coefficiente angolare della retta ha un massimo per $\lambda = e$ e quindi confrontando il grafico di $\log x$ con quello della retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ si ottengono sempre due soluzioni $\forall \lambda > 1$. Per $\lambda = e$ si ha una sola soluzione.

Esercizio Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.
$a = 0$

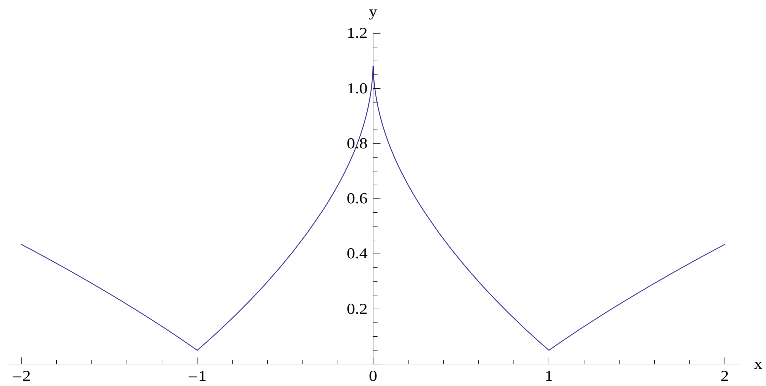
Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{10(1 + x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right| = \lambda.$$

Soluzione. Studio la funzione $f(x) = \frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$ è pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Si ha $f(0) = \frac{11}{10}$, $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

f è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty$, quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Il grafico è porta alle soluzioni



$$\begin{cases} \lambda < \frac{1}{20} & \text{nessuna soluzione} \\ \lambda = \frac{1}{20} & \text{2 soluzioni} \\ \frac{1}{20} < \lambda < \frac{11}{10} & \text{4 soluzioni} \\ \lambda = \frac{11}{10} & \text{3 soluzioni} \\ \lambda > \frac{11}{10} & \text{2 soluzioni.} \end{cases}$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1,$$

determinare per quali valori di $a > 0$

a) $f(x)$ ha esattamente tre zeri;

b) tali zeri sono tutti positivi.

Soluzione.

a)

$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \iff x = \frac{a}{2},\ x = \frac{a}{6}.$$

$x = \frac{a}{2}$ è punto di massimo e $x = \frac{a}{6}$ è punto di minimo. Per avere tre zeri si deve imporre $f(\frac{a}{2}) < 0 < f(\frac{a}{6})$ che è verificato se e solo se $a > \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

b) Poichè $f(0) = -1 < 0$ per $0 < x < \frac{a}{6}$ c'è uno zero, cosi' come ce ne è uno in $(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}$ e infine un terzo per $x > \frac{a}{2}$ dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio. Data la funzione

$$f_a(x) = x^a - ax^2, \quad a > 0,$$

calcolare $\sup\{f_a(x),\, x \geq 0\}$ e $\inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}$, specificando se sono massimo o minimo.

Soluzione.

$$a > 2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty = \sup\{f_a(x),\, x \geq 0\};$$

$$a \leq 2 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty = \inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}.$$

Si ha $f_a'(x) = ax^{a-1} - 2ax = 0 \iff x = 0,\ 2^{\frac{1}{a-2}}$ se $a \neq 2$. $2^{\frac{1}{a-2}}$ è di minimo se $a > 2$, di massimo se $a < 2$. Quindi

$$a > 2 \;\Rightarrow\; \min\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$

$$a < 2 \ \Rightarrow \ \max\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$
$$a = 2 \ \Rightarrow \ \max\{f_2(x),\, x \geq 0\} = 0.$$

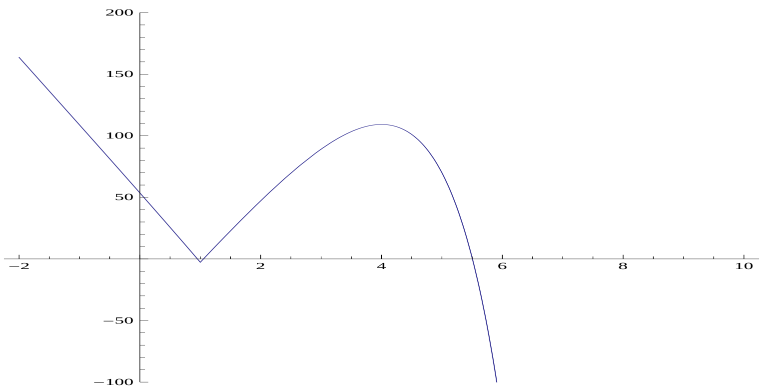
Esercizio. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1| = \lambda.$$

Sol. Studio la funzione
$$f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1|.$$
$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4, & \text{per } x > 1 \\ -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^4, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di max in $(4, 2\mathrm{e}^4)$ e un punto di min. (angoloso) in $(1, -\mathrm{e})$. Quindi



$$\begin{cases} \lambda > 2\mathrm{e}^4,\ \lambda < -\mathrm{e} & 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e} < \lambda < 2\mathrm{e}^4 & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^4 & 2 \text{ sol..} \end{cases}$$

Esercizio. Sia
$$f(x) = \ln(x+4) + \frac{x+8}{x+4}.$$

- Calcolare gli intervalli di concavità e di convessità di f sul suo dominio naturale.
- Individuare il massimo intervallo A contenente -3 dove f risulti invertibile.
- Sia g la funzione inversa della f ristretta su A. Calcolare $g'(f(-3))$.

SOL. $\mathrm{Dom} f = \{x > -4\}$. $f'(x) = x/(4+x)^2$, $f''(x) = (4-x)/(4+x)^3$. Si ha $f''(x) > 0$ per $-4 < x < 4$ e ivi la funzione è convessa, per $x > 4$ concava. Il max intorno di -3 in cui f è monotona (decrescente) e quindi invertibile è $-4 < x < 0$. Si ha $f(-3) = 5$, e

$$g'(f(-3)) = \frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{3}.$$

FUNZIONI INTEGRALI

Esercizio. Studiare la convessità e concavità della funzione

$$F(x) = \int_2^x g(\sin t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove g è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g'(x) < 0$.

Soluzione Si ha

$$F'(x) = g(\sin x), \text{ e } F''(x) = g'(\sin x)\cos x,$$

da cui

$$F''(x) > 0 \iff \cos x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

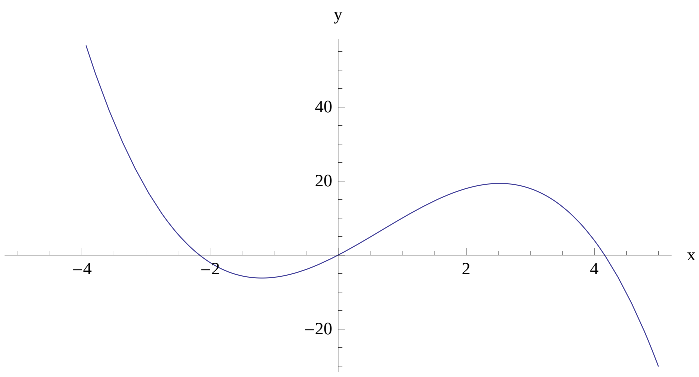
per K intero; nell'unione di tali intervalli F è convessa, e nel complementare è concava.

Esercizio. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t+1)(3-t)}{\arctan(1+t^2)}\,dt,$$

specificando, in particolare, gli intervalli di crescenza e decrescenza.
Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ e tracciare un grafico qualitativo.

Soluzione. Si ha $F'(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{\arctan(1+x^2)}$ e $F'(x) > 0 \iff -1 < x < 3$. $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F'(x) = -\infty$, da cui si ricava $F'(x) < -1$ per $|x| > M$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.



LIMITI

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$),

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^6 - 3^6}{x^8 - 3^8} = 1/12, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2/3 \end{cases}$$

8 Soluzioni dei Temi 1 delle tracce dal 23.01.2017 al 10.02.2020

Appello del 23.01.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= (\text{ponendo } e^x = t, \text{ per cui } dx = dt/t) \int_3^{e^2} \frac{1}{t^2-4}\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\int_3^{e^2} \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\,dt = \frac{1}{4}\ln\frac{|t-2|}{|t+2|}\Big|_3^{e^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\log 5\frac{e^4-2}{e^4+2}\right] = \frac{1}{2}\left(\text{settanh}\,\frac{3}{2} - \text{settanh}\,\frac{e^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$\left|2\bar{z}^2 - 2z^2\right| < 3$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Si ha

$$2\bar{z}^2 - 2z^2 = 4(\bar{z}-z)(\bar{z}+z) = (\text{ponendo } z = x+iy)\ 8ixy,$$

da cui

$$\left|2\bar{z}^2 - 2z^2\right| = 8|xy|.$$

La soluzione è quindi

$$\{z = x+iy \in \mathbb{C} : |xy| < \frac{3}{8}\},$$

rappresentata in figura 1.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n^\alpha)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Dagli sviluppi di Mac Laurin di $\cos x$ e di $\sin x$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n) = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!\cdot n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{1}{3!8n^{3\alpha}} + \frac{1}{5!32n^{5\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right),$$

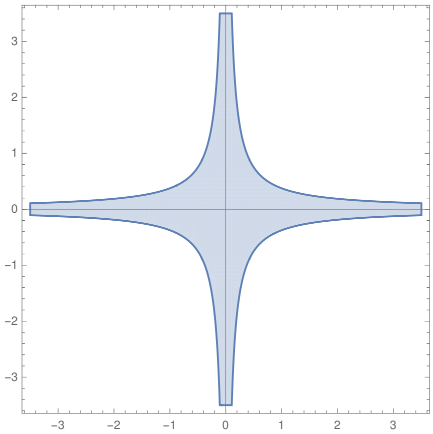


Figura 1: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

per cui il termine generale della serie, per $n \to +\infty$, è asintotico a

$$\begin{cases} (\text{se } \alpha < 2) & \frac{n^2}{2n^\alpha} \\ (\text{se } \alpha = 2) & 1/24n^2 \\ (\text{se } \alpha > 2) & -1/2 \end{cases}$$

e quindi ha segno definitivamente costante per $n \to +\infty$. Se $\alpha \neq 2$ il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge (a $-\infty$). Per $\alpha = 2$ la serie converge.

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{|x| - 4}{2 + x^2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (i) La funzione è pari. $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{|x|-4}{2+x^2} \leq 1\}$. La disequazione $\frac{|x|-4}{2+x^2} \leq 1$ equivale a $|x| - 6 - x^2 \leq 0$, che è sempre verificata, mentre $\frac{|x|-4}{2+x^2} \geq -1$ equivale a $x^2 + |x| - 2 \geq 0$, che è verificata per $x \leq -1$ e $x \geq 1$. Pertanto $D = [1, +\infty[\ (\cup] - \infty, -1])$. D'ora in poi assumeremo sempre $x \geq 0$. La funzione è continua in D, $f(1) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$, asintoto orizzontale. Il segno di f è dato dal segno dell'argomento dell'arcoseno, per cui $f(x) \geq 0$ se e solo se $x - 4 \geq 0$ e quindi $x \geq 4$.
(ii) In D si possono applicare le regole di derivazione se l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1, cioè per $x > 1$. Per tali x si ha

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x(x-4)}{(2+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-4}{2+x^2}\right)^2}} = \frac{-x^2 + 8x + 2}{(1 + 2x^2)\sqrt{2x^2 + x - 3}},$$

da cui si ricava che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $-x^2 + 8x + 2 \leq 0$, per $x > 1$, cioè per $1 < x < 4 + 3\sqrt{2}$, che pertanto è il punto di massimo assoluto, mentre $x = 1$ è il punto di minimo assoluto. Si ha

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

per cui il grafico di f, rappresentato nella figura 2, ha tangente verticale in $(1, \pi/2)$.

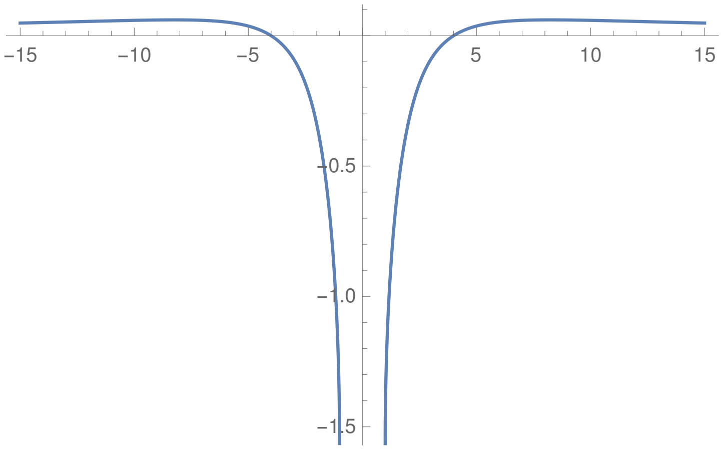


Figura 2: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-1)| \arctan x}{|1-x^2|^\alpha \, (\sinh\sqrt{x})^\beta} \, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'integranda $f(x)$ è continua in $]0,1[\cup]1,+\infty[$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 0^+$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x \arctan 1}{x^{\beta/2}} = \arctan 1 \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 0 se e solo se $\beta < 4$.
Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{\arctan 1 \, |x-1|}{|x-1|^\alpha |x+1|^\alpha (\sinh\sqrt{2})^\beta} = \frac{\arctan 1}{2^\alpha (\sinh\sqrt{2})^\beta} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 1 se e solo se $\alpha < 2$.
Per $x \to +\infty$, se $\beta > 0$

$$f(x) \le \frac{\pi^2}{4\,(\sinh\sqrt{x})^\beta} \le \frac{\pi^2}{2^{(2-\beta)}\, e^{(\beta\sqrt{x})}}.$$

Quest'ultima espressione è $o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$ e quindi converge.
Se $\beta = 0$,

$$f(x) \sim \pi^2/4x^{2\alpha},$$

quindi converge se $\alpha > 1/2$. Se $\beta < 0$,

$$f(x) \sim \pi^2 e^{-\beta/2}/2^{2-\beta} > 1/x$$

per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge. In sintesi, l'integrale converge se $\alpha < 2$ e $0 < \beta < 4$ o se $\beta = 0$ e $1/2 < \alpha < 2$.

Esercizio facoltativo. Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

Svolgimento. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$, che vogliamo dimostrare che si annulla in almeno un punto di $I := [a, b]$. Se $g(a), g(b) \neq 0$ allora necessariamente $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, per cui per il teorema degli zeri esiste $\bar{x} \in]a, b[$ tale che $g(\bar{x}) = 0$.

Appello del 13.02.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 - 2x - 3\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione. i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Per il segno abbiamo

$$f(x) \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad |x^2 - 2x - 3| \geq 1, \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \leq -1, \ \vee \ x^2 - 2x - 3 \geq +1.$$

Abbiamo che $x^2 - 2x - 2 \leq 0$ se e solo se $x_0 := 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} =: x_1$ e $x^2 - 2x - 4 \geq 0$ se e solo se $x \leq 1 - \sqrt{5} =: x_2$ oppure $x \geq 1 + \sqrt{5} =: x_3$. Quindi $f(x) \leq 0$ se e solo se x appartiene ad uno dei due intervalli $[x_2, x_0]$ e $[x_1, x_3]$. Per quanto riguarda i limiti, si ha:
è chiaro che $x^2 + 3x - 4 \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, cosicché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Tuttavia non ci sono asintoti poiché, per $x \to \pm\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x^2 - 2x - 3)}{x} \sim \frac{\log x^2}{x} = \frac{2 \log |x|}{x} \longrightarrow 0,$$

essendo $\log |x| = o(x)$ per $x \to \pm\infty$. Per $x \longrightarrow -1, 3$ si ha sempre che $|x^2 + 3x - 4| \longrightarrow 0+$ quindi in ogni caso $f(x) \longrightarrow -\infty$ per cui si hanno gli asintoti verticali $x = -1, 3$.

ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, quindi è continua su tutto il proprio dominio. Inoltre è composizione di funzioni derivabili, eccetto quando $x^2 + 3x - 4 = 0$, che però sono punti che non appartengono al dominio di f: si conclude che f è derivabile nel proprio dominio. Ricordato che $(\log |y|)' = \frac{1}{y}$ si ha immediatamente che

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Studiamo il segno di f'. Il segno del denominatore è positivo per $x < -1$ oppure $x > 3$. Il numeratore è positivo per $x > 1$. Ne deduciamo la tabella seguente:

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 1$	$1 \quad 3$	$3 \quad +\infty$
$\mathrm{sgn}\,(2x - 2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}\,(x^2 - 2x - 3)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{sgn}\, f'$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

I punti $x = -1, 3$ non appartengono al dominio, mentre $x = 1$ è un massimo locale stretto. Non ci sono né massimi né minimi globali essendo f illimitata sia inferiormente che superiormente.

iii) Chiaramente f' è derivabile ove definita in quanto funzione razionale: abbiamo che

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 10}{(x^2 - 2x - 3)^2}.$$

Quindi $f'' \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 4x - 10 \leq 0$, cioè mai. Si conclude che $f'' < 0$ ovunque (dove definita) per cui la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che compongono il suo dominio.

iv) Il grafico di f è rappresentato figura 3.

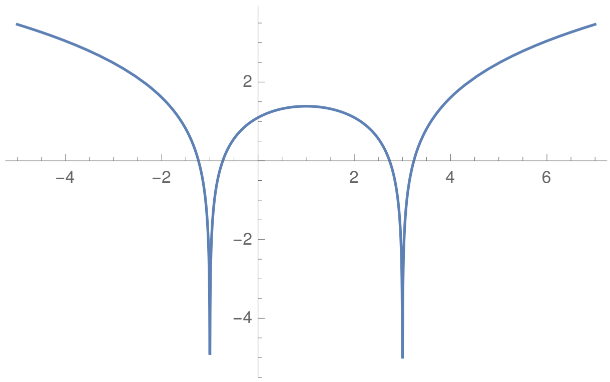


Figura 3: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Soluzione. La serie è evidentemente a termini di segno costante. Conviene applicare il criterio asintotico del rapporto. Detto a_n il termine generale, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{2} e > 1.$$

Dunque la serie diverge.

Esercizio 3 Data

$$f(z) = \frac{2 + iz}{iz + 1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Soluzione. Perché la frazione sia definita occorre che $iz + 1 \neq 0$, cioè che $z \neq \frac{-1}{i} = \frac{i}{-i \cdot i} = i$. Ora, per $z \neq i$,

$$f(z) = z \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + iz = z(iz + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad iz^2 + (1 - i)z - 2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, e la formula risolutiva tradizionale funziona allo stesso modo (pur di intendere la radice come radice complessa). Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{i-1+\sqrt{1-1-2i+8i}}{2i} = \frac{i-1+\sqrt{6i}}{2i} = \frac{i-1\pm\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\pm\frac{\frac{\sqrt{12}}{2}(1+i)}{2i} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-\sin x+x^{\frac{10}{3}}\log x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha>0$.

Soluzione. Osservato che, in virtù del limite notevole $\lim_{x\to 0^+}x^\gamma\log x=0$ per ogni $\gamma\in\mathbb{R}$, si ha subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Determiniamo i termini principali col metodo degli sviluppi asintotici. Abbiamo che, per $x\to 0^+$,

$$N(x):=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\big)+x^{\frac{10}{3}}\log x=-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x^{\frac{10}{3}}\log x.$$

Osserviamo che $x^{\frac{10}{3}}\log x=o(x^3)$ per $x\to 0^+$: infatti

$$\frac{x^{\frac{10}{3}}\log x}{x^3}=x^{\frac{10}{3}-3}\log x\to 0,\quad \text{essendo } \frac{10}{3}-3>0,$$

sempre in virtù del limite notevole sopra richiamato. Pertanto $N(x)=\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per $x\to 0^+$. Quanto al denominatore, conviene osservare preliminarmente che

$$(1-\cos^2 x)=(1-\cos x)(1+\cos x)\sim\frac{x^2}{2}\cdot 2=x^2,$$

per cui $D(x):=x^\alpha(1-\cos^2 x)\sim x^\alpha\cdot x^2=x^{\alpha+2}$ per $x\to 0^+$. In conclusione, per $x\to 0^+$ si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)}\sim\frac{\frac{x^3}{6}}{x^{\alpha+2}}\longrightarrow\begin{cases} 0, & 1-\alpha>0, \iff \alpha<1,\\ -\frac{1}{6}, & 1-\alpha=0, \iff \alpha=1,\\ -\infty, & 1-\alpha<0, \iff \alpha>1.\end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-2}}\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha=1$.

Soluzione. Sia $f_\alpha(x):=\frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-2}}$ la funzione integranda. Notiamo che essa è continua in $]2,+\infty[$ e dunque l'integrale è generalizzato sia in $x=2$ che per $x\to+\infty$. Avendo evidentemente f_α anche segno costante, andiamo a studiarne il comportamento asintotico agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}},$$

per cui $\int^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx < +\infty$ se e solo se $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\, dx < +\infty$ cioè se e solo se $\alpha + 1/2 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$. Per $x \to 2+$ si ha che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2^\alpha \sqrt{x-2}},$$

che è integrabile in $x = 2+$. In conclusione, f_α è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1/2$.

Calcoliamo l'integrale nel caso $\alpha = 1$. Siccome è generalizzato abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\, dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\, dx.$$

Sostituendo $x - 2 = y^2$ $(y > 0)$, risulta

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\, dx = \int \frac{2y}{(y^2+2)y}\, dy = \frac{1}{2} \int \frac{2}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Sostituendo ancora $y/\sqrt{2} = t$, risulta

$$\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\, dy = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan t + c = \arctan \frac{y}{\sqrt{2}} + c.$$

Pertanto,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\, dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \left(\arctan \sqrt{\frac{b-2}{\sqrt{2}}} - \arctan \sqrt{\frac{a-2}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Appello del 10.07.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| e^{2x} - 4 \right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è

$$D = \{x : e^{2x} \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{\log 2\}.$$

SI ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|e^{2x} - 4| \geq 1$, cioè se e solo se $e^{2x} \geq 5$ oppure $e^{2x} \leq 3$, quindi

$$f\left(\frac{\log 5}{2}\right) = f\left(\frac{\log 3}{2}\right) = 0 \quad \text{e } f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{\log 5}{2} \text{ oppure } x < \frac{\log 3}{2}.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log 4, \quad \lim_{x \to \log 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per quanto riguarda l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$, risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(e^{2x} - 4\right)}{x} = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(e^{2x} - 4\right) - 2x = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}} = 0.$$

Quindi $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, $y = 2\log 2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e in $x = \log 2$ si ha un asintoto verticale.
ii) f è derivabile in tutto D, dove si ha

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 4}.$$

f è perciò strettamente decrescente per $x < \log 2$ e strettamente crescente per $x > \log 2$. Non risultano quindi punti di estremo.
iii) Un calcolo diretto dà

$$f''(x) = \frac{-16e^{2x}}{(e^{2x} - 4)^2},$$

per cui f è concava in $]-\infty, \log 2[$ e in $]\log 2, +\infty[$.
iv) Il grafico è in figura 4.

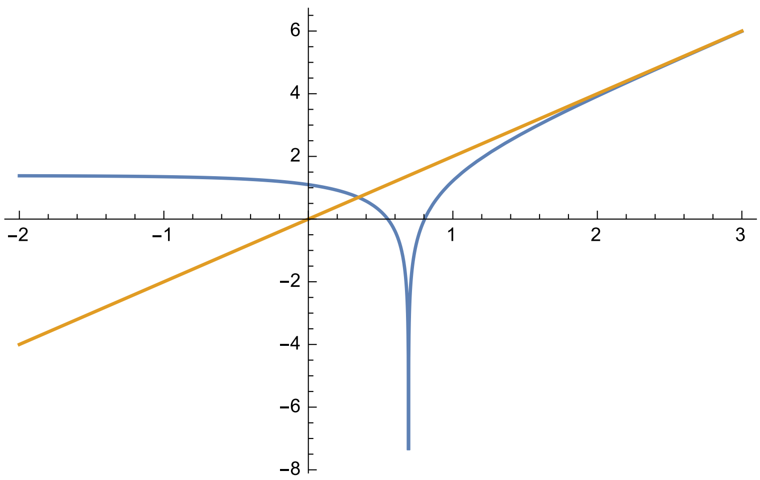


Figura 4: Il grafico di f con l'asintoto obliquo (Tema 1).

Esercizio 2 Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z - 1}{z - i} \geq 0, \, |z + 1 - i| \leq 1 \right\}.$$

Svolgimento. Si tratta in primo luogo di determinare la parte reale di $\frac{z-1}{z+i}$. Si ha, ponendo $z = x + iy$,

$$\mathrm{Re}\,\frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \mathrm{Re}\frac{(x-1+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x(x-1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x + y^2 - y \geq 0, (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}, (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

cioè la parte esterna al cerchio di centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed interna al cerchio di centro $(-1,1)$ e raggio 1, rappresentata in figura 5.

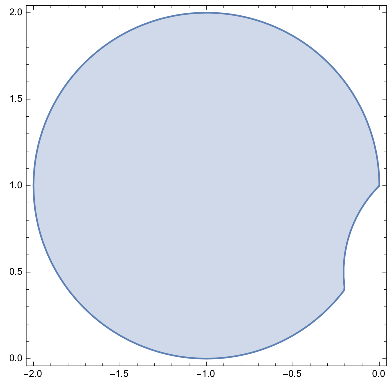


Figura 5: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(3e^x)dx.$$

Svolgimento. Eseguendo la sostituzione $x = \log t$ si ha

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \arctan(3e^x)dx &= \int t \arctan(3t)\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan 3t - \frac{3}{2}\int \frac{t^2}{1+9t^2}\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan 3t - \frac{3}{2}\Big[\frac{1}{9}\int \frac{1+9t^2}{1+9t^2}\,dt - \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+(3t)^2}\,dt\Big] \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan 3t - \frac{t}{6} + \frac{\arctan 3t}{18} + c \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\arctan 3e^x - \frac{e^x}{6} + \frac{\arctan 3e^x}{18} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Da $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ per $y \to 0$ si deduce, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

per cui, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x - \sinh x = x - \frac{x^3}{2} - \Big(x + \frac{x^3}{6}\Big) + o(x^3) = -\frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Perciò si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3/3 + o(x^3)}{x^{\alpha+2} + o(x^{2+\alpha})} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 1 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-e^a)^n}{n+\sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per la convergenza assoluta si può usare il criterio della radice, che dà

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|1-e^a|^n}{n+\sqrt{n}}} = |1-e^a|.$$

La serie perciò converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $|1-e^a| < 1$ e diverge assolutamente e non converge semplicemente se $|1-e^a| > 1$, in quanto il termine generale non è infinitesimo. Per $|1-e^a| = 1$ il criterio della radice non dà informazioni. Risolvendo le disequazioni si ricava che la serie converge assolutamente per $a < \log 2$ e non converge per $a > \log 2$. Per $a = \log 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}.$$

Per asintoticità con la serie armonica $\sum 1/n$ questa serie non converge assolutamente. Inoltre essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz, essendo il termine generale a segno alterno e – in valore assoluto – infinitesimo e decrescente.

Appello del 18.09.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;

ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è $D = \{x : x \neq 0, \log|2x| \neq 0\} = \{x : x \neq 0, x \neq \pm\frac{1}{2}\}$. La funzione è visibilmente dispari, per cui la studiamo in $[0, +\infty[$. Per $x > 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{(per cui } f \text{ è prolungabile con continuità in } x = 0)\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \text{(per cui non c'è asintoto obliquo per } x \to +\infty).
\end{aligned}$$

ii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha

$$f'(x) = \frac{3\log 2x - 3}{\log^2 2x}.$$

Essendo f prolungabile con continuità in $x = 0$, vediamo se il prolungamento di f è derivabile in 0. A tale scopo calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

per cui la prolungata di f è derivabile anche in $x = 0$, con derivata nulla. Il segno di f' dipende solo dal segno di $\log 2x - 1$, che è positivo se e solo se $x > e/2$. Pertanto $e/2$ è un punto di minimo locale stretto. Non ci sono estremi assoluti.
iii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha

$$f''(x) = 3\frac{\frac{\log^2 2x}{x} - 2(\log 2x - 1)\frac{\log 2x}{x}}{\log^4 2x} = 3\frac{2 - \log 2x}{x\log^3 2x},$$

che risulta > 0 se e solo se $\frac{1}{2} < x < \frac{e^2}{2}$, cioè f è convessa nell'intervallo $]\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}[$ e concava negli intervalli $]0, \frac{1}{2}[$ e $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
iv) Il grafico di f è riportato nella figura 6.

Esercizio 2 Dato il polinomio

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.
Svolgimento. Per tentativi, una radice intera è $z = -1$: infatti

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 8i + 8i = 0.$$

Eseguendo la divisione di polinomi, oppure, più semplicemente, raccogliendo z^3 nei primi due addendi e $8i$ negli ultimi due, risulta

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i = (z + 1)\big(z^3 + 8i\big),$$

per cui le restanti tre radici sono le radici cubiche di $-8i = 8e^{\frac{3}{2}\pi i}$, cioè sono

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i,\ 2e^{(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})\pi i} = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i,\ 2e^{(\frac{1}{2}+\frac{4}{3})\pi i} = 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt{3} - i.$$

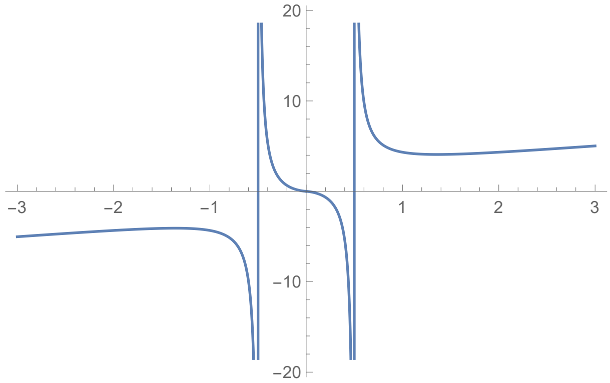


Figura 6: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. La serie è a termini definitivamente positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il criterio della radice dà

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n} = e^{3x}.$$

La serie pertanto converge per ogni $x < 0$ e diverge per ogni $x > 0$. Per $x = 0$ il criterio della radice non dà informazioni, ma per tale x la serie ha per termine generale 1 e quindi diverge.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

Svolgimento. Il numeratore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$\begin{aligned}
\cosh \alpha x &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^3)\\
-e^{x^2} &= -1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = -1 - x^2 + o(x^3)\\
x\log\cos x &= x\log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) = x\left(\frac{-x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{-x^3}{2} + o(x^3),
\end{aligned}$$

per cui

$$\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x) = x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \begin{cases} x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2}\\ -\frac{x^3}{2} + o(x^3) & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Il denominatore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$x - \sin x + e^{-1/x^2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

in quanto $e^{-1/x^2} = o(x^\beta)$ per ogni β reale. Il limite quindi vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \frac{x^2\left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ \\ \frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -3 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{ax}(2+\cos x)\,dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos x\,dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).

Svolgimento. Una primitiva dell'integranda può essere calcolata per ogni a, per cui la discussione della convergenza può essere fatta sia direttamente dalla definizione, sia mediante criteri di convergenza. Usando il criterio del confronto si ha, per $a \geq 0$,

$$xe^{ax}(2+\cos x) \geq x \text{ per ogni } x \geq 0$$

e quindi l'integrale diverge. Per $a < 0$ il confronto asintotico dà, ad esempio,

$$xe^{ax}(2+\cos x) = o(e^{ax/2}),$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{ax}(2+\cos x)}{e^{ax/2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{3xe^{ax}}{e^{ax/2}} = \lim_{x\to+\infty} 3xe^{\frac{ax}{2}} = 0.$$

Siccome $\int_0^{+\infty} e^{ax/2}\,dx < +\infty$, l'integrale converge.

Per la primitiva, calcoliamo preliminarmente

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx,$$

per cui

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Ora integriamo per parti prendendo x come fattore finito e $e^{-x}\cos x$ come fattore differenziale. Risulta

$$\int xe^{-x}\cos x\,dx = x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x) - \int \frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\,dx.$$

Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin x\,dx &= -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx\\ &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx,\end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+c.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos x\,dx &= \lim_{b\to+\infty}[-x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b + \frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^b\\ &\quad + \frac{1}{4}e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b]\\ &= 0.\end{aligned}$$

(NB. Non è strano che il risultato sia nullo: l'integranda non ha segno costante.)

Appello del 29.01.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) Da $\frac{|x^2-5|}{x+1}>0$ segue che $D=\{x>-1, x\neq\sqrt{5}\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. $f(x)\le 0$ se e solo se

$$x>-1$$

e

$$|x^2-5|\le x+1 \Leftrightarrow -x-1\le x^2-5\le x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-4\ge 0\\ x^2-x-6\le 0,\end{cases}$$

cioè se e solo se $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\le x\le 3$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\sqrt{5}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Siccome
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$
non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali (oltre ad un asintoto orrizzontale "così alto che non si vede" (cit.))
ii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Siccome $f(x)=\log|x^2-5|-\log(x+1)$ e ricordando che $\frac{d}{dx}\log|g(x)|=\frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x)\neq 0$, si ha per ogni $x\in D$
$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-5}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x+5}{(x^2-5)(x+1)}.$$
Siccome il polinomio al numeratore è sempre positivo, $f'(x)>0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x>\sqrt{5}$. Non ci sono punti di estremo.
iii) Il grafico di f è in figura 7.

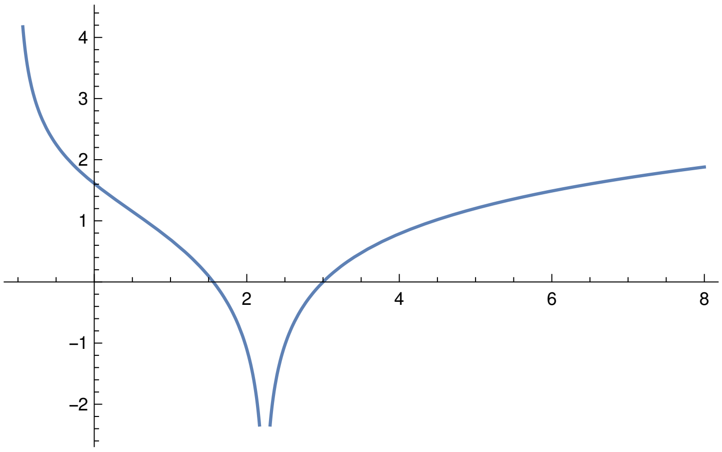


Figura 7: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Si consideri la successione
$$a_n=\frac{(-1)^n e^{2n}\sin\frac{1}{n}}{(n-1)!},\quad n\in\mathbb{N},n\geq 2.$$
a) Calcolare $\lim_{n\to\infty}a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$.
Svolgimento. a) Siccome $a_n\sim\frac{(e^2)^n}{n!}$ per $n\to\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (ricordando un limite fondamentale).
b) Il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto danno
$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n+1}=0,$$
per cui la serie converge assolutamente e quindi converge.
Il fatto che $a_n\to 0$ si poteva anche dedurre direttamente dalla convergenza della serie.

NOTA: applicando il criterio di Leibniz si può dedurre direttamente la convergenza della serie. Risulta che $|a_n|$ è decrescente se e solo se $e^2\leq n$, il che è vero per ogni $n>2$ (la dimostrazione richiede un po' di lavoro). Resta comunque da verificare la convergenza assoluta. Siccome in questo caso è vera, l'uso del criterio di Leibniz è del tutto inutile.

Esercizio 3 Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.
Svolgimento. L'equazione è

$$z^3 + z\bar{z}|z| = |z|^3 - 8i.$$

Siccome $z\bar{z}|z| = |z|^2|z| = |z|^3$, l'equazione diventa

$$z^3 = -8i.$$

Le tre radici cubiche di $-8i = 8e^{i3\pi/2}$ sono date da

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \; 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i, \; 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i,$$

rappresentate in figura 8.

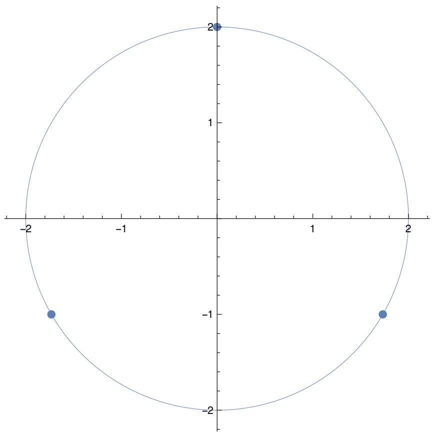


Figura 8: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x}}{\cos\sin\frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il numeratore:

$$\begin{aligned}
\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x} &= \log x + \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) - \log x - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -\frac{4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$. Il denominatore (ricordando che $e^{-x} = o(1/x^\alpha)$ per $x \to +\infty$ per ogni α):

$$\begin{aligned}
\cos\sin\frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2x} + \frac{1}{24}\sin^4\frac{1}{2x} - \Big(1 + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{2x^4}\Big) + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2x} - \frac{1}{6(2x)^3}\Big)^2 + \frac{1}{24(2x)^4} - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^2}{2x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{8} - \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + \Big(\frac{1}{96} + \frac{1}{24\cdot 2^4} - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\Big(\frac{1}{8} + \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{192}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

per $x \to +\infty$. Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{\frac{-4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{-\Big(\frac{1}{8}+\alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)} = \frac{32}{1+8\alpha} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{8} \\ \dfrac{\frac{-4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{\frac{1}{192}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)} = -\infty & \text{se } \alpha = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

NOTA: Il numeratore poteva anche essere scritto come

$$\begin{aligned}
\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x} &= \log\frac{x+3}{x+1} - \sin\frac{2}{x} = \log\Big(1 + \frac{2}{x+1}\Big) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{x+1}\Big)^2 - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -2\frac{2x+1}{x(x+1)^2} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -2\frac{1+2x}{x(x+1)^2} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \sim -\frac{4}{x^2}
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$. La maggior parte degli studenti che ha svolto il calcolo in questo modo ha tralasciato il termine di ordine 2 nello sviluppo del logaritmo.

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2-2}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento. a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]\sqrt{2}, +\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x \to \sqrt{2}^+$ che per $x \to +\infty$. Per $x \to \sqrt{2}+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2}}},$$

per cui l'integrale converge per ogni α. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$.
b) Con la sostituzione $x = \sqrt{2}\cosh t$, si ha (per $t > 0$)

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\sinh t}{2\cosh t\sinh t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\arctan e^t\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

In alternativa, con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-2}$, seguita dalla sostituzione $z = y/\sqrt{2}$, si ottiene,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan z\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

Un terzo modo di calcolare l'integrale è il seguente:

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-2/x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{1-1/t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{1}{t}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Svolgimento. a) Per $n \geq 1$ si ha $|a_n| = |\sin(a_{n-1})| \leq 1$. Se $a_1 \in [0,1]$, allora da $\sin x \leq x\ \forall x \geq 0$ si ricava $a_{n+1} = \sin a_n \leq a_n$ e dunque la successione è definitivamente decrescente. Se invece $a_1 \in [-1,0]$ si ottiene che la successione è definitivamente crescente.
b) In ogni caso la successione ha un limite $\ell \in [-1,1]$. Se per assurdo fosse $\ell \neq 0$ si avrebbe, essendo la funzione seno continua,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\sin \ell|}{|\ell|} < 1,$$

il che implicherebbe la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, il che a sua volta implicherebbe che a_n converge a 0, cosicché $0 = \ell \neq 0$. Dunque $\ell = 0$. In alternativa, sempre per la continuità di sin,

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim \sin a_n = \sin \ell$$

che ha $\ell = 0$ come unica soluzione.

Appello del 16.02.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i)DOMINIO: $|x-2| \neq 0 \iff x \neq 2$, dunque $D = \mathbb{R}\backslash\{2\} \cup \{2\} = \mathbb{R}$

LIMITI:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = e^2 \cdot e^{-\infty} = e^2 \cdot 0 = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

ASINTOTI

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

dunque non ci sono asintoti obliqui.

ii) CONTINUITÀ: La funzione è continua in $\mathbb{R}\backslash\{2\}2$ perchè composizione di continue. È continua anche per $x = 2$ poichè $\lim_{x\to 2} = 0 = f(2)$. Dunque f è continua.

iii) se $x > 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right);$$

se $x < 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right).$$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se

$$\begin{cases} x > 2 \\ 1 + \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 2 \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases}$$

cioè se

$$\begin{aligned} x \in]2, +\infty[\bigcup \left(]-\infty, 2[\bigcap \{x :\ (x-2)^2 \geq 1\}\right) \\ =]2, +\infty[\bigcup \left(]-\infty, 2[\bigcap \{x :\ (x-2) \leq -1 \text{ oppure } (x-2) \geq 1\}\right) \end{aligned}$$

cioè se

$$x \in]2, +\infty[\bigcup]-\infty, 1].$$

Inoltre, poichè

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2+} \frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0$$

si ha che f è derivabile in $x = 2$ e $f'(2) = 0$. Concludendo, f è derivabile su tutto il dominio $D = \mathbb{R}$, anzi è di classe C^1.

Dallo studio della monotonia f ha un massimo relativo in $x = 1$ e un minimo assoluto in $x = 0$.

iv) Il grafico è in figura 9.

Esercizio 2 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

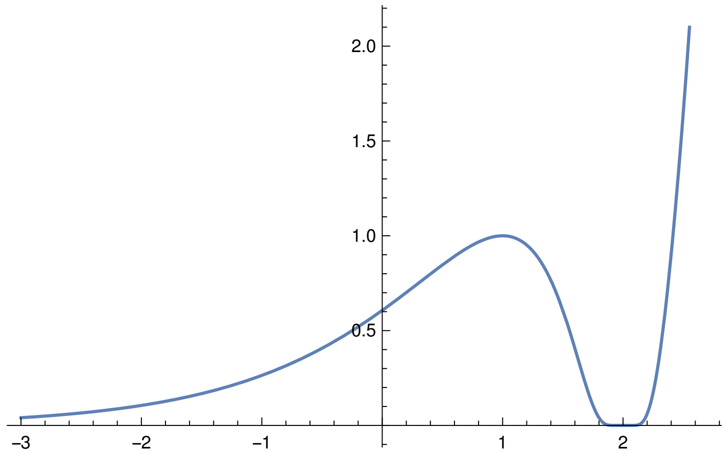


Figura 9: Il grafico di f (Tema 1).

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|^{n+1}}{(2n+5)^2} \frac{(2n+3)^2}{|2x-1|^n} = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+5)^2} = |2x-1|$$

o, alternativamente, con criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|2x-1|^n}{(2n+3)^2}} = \lim_{n\to\infty} |2x-1| \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+3)^2}} = |2x-1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente –e quindi converge– per $0 < x < 1$ e diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) per $x < 0$ e per $x > 1$. Per $x = 0$ e $x = 1$ il criterio della radice e del rapporto non danno informazioni. Per $x = 0$, $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2x-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^2},$$

rispettivamente, e dunque converge assolutamente, e quindi semplicemente, per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per $0 \le x < 1/2$ la convergenza semplice si può anche dedurre dal criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 = 4\,\mathrm{Im}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'equazione diventa

$$2\rho^3\cos\theta = 4\rho\cos\theta.$$

Dunque, $\rho = 0$, cioè $z = 0$, oppure

$$\rho^2\cos\theta = 2\cos\theta,$$

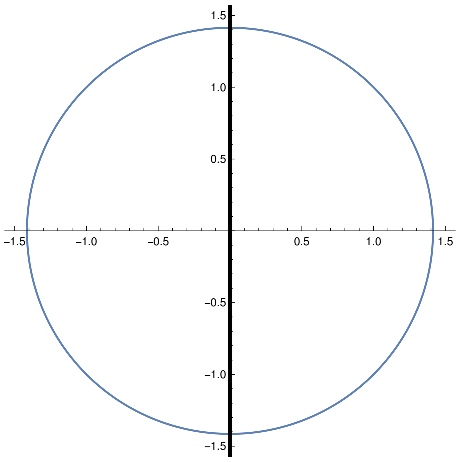


Figura 10: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

vale a dire $\rho^2 = 2$, o $z = \pm\rho i$, $\rho > 0$. Concludendo, l' insieme delle soluzioni sul piano di Gauss è l'unione della retta verticale per l'origine e il circolo di raggio $\sqrt{2}$, rappresentati in figura 10.

Esercizio 4
a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4}{x^4 \sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il denominatore è asintotico a x^6 per $x \to 0$. Il numeratore: si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4 &= \left(4 - \alpha - 2x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^2 - 4x^4 \\
&= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ 4x^4 - \frac{2x^6}{3} - 4x^4 + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2x^6}{3} + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cos x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \sin^2 x} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x \to 0^+$ si ha

$$g(x) \sim \sqrt{3}\, x^{\alpha + \frac{1}{2}}.$$

L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è maggiore di -1, cioè se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$.
b) Si ha, con la sostituzione $3x = t^2$, che dà $dx = \frac{2}{3}t\,dt$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^{\frac{1}{2}} \sin\big(\sqrt{3x}\big)\,dx &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt \\ \text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(- t^2\cos t\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos t\,dt\Big) \\ \text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(2t\sin t\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\sin t\,dt\Big) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\big(\pi^2 - 4\big).\end{aligned}$$

Appello del 9.07.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2 - 3e^{3x}\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio di f è dato dalla condizione $3e^{3x} \neq 2$, cioè

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\log\frac{2}{3}}{3}\}.$$

Il segno di f è positivo se e solo se $|2-3e^{3x}| > 1$. Elevando al quadrato si ottiene la disequazione equivalente

$$9e^{6x} - 12e^{3x} + 3 > 0.$$

Ponendo $e^{3x} = y$ e dividendo per 3, si ottiene la disequazione $3y^2 - 4y + 1 > 0$, che ha per soluzioni $y < 1/3$, $y > 1$. Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \quad \text{oppure} \quad x \geq 0.$$

In alternativa: se $2 - 3e^{3x} \geq 0$, si ha:

$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 2 - 3e^{3x} > 1 \iff e^{3x} < \frac{1}{3} \iff x < \frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\log 3.$$

Se invece $2 - 3e^{3x} < 0$:

$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 3e^{3x} - 2 > 1 \iff e^{3x} > 1 \iff x > \frac{1}{3}\log(1) = 0.$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \quad \text{oppure} \quad x \geq 0.$$

ii) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(2 - 3e^{3x}\right) = \log 2,$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$, quindi la retta $y = \log 2$ è un asintoto orizzontale. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3e^{3x} - 2\right) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(3e^{3x} - 2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log\left(3 - 2e^{-3x}\right)}{x} = 3,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3 - 2e^{-3x}\right) = \log 3.$$

Quindi la retta $y = 3x + \log 3$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Infine,

$$\lim_{x\to\frac{\log\frac{2}{3}}{3}} f(x) = \lim_{y\to0^+} \log y = -\infty,$$

perciò $x = \frac{\log\frac{2}{3}}{3}$ è un asintoto verticale.
(iii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Ricordando che $\frac{d}{dx}\log|g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{9e^{3x}}{3e^{3x} - 2}.$$

Siccome il numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x > \frac{\log\frac{2}{3}}{3}$. Non ci sono punti di estremo.
(iv) Il grafico è in figura 11.

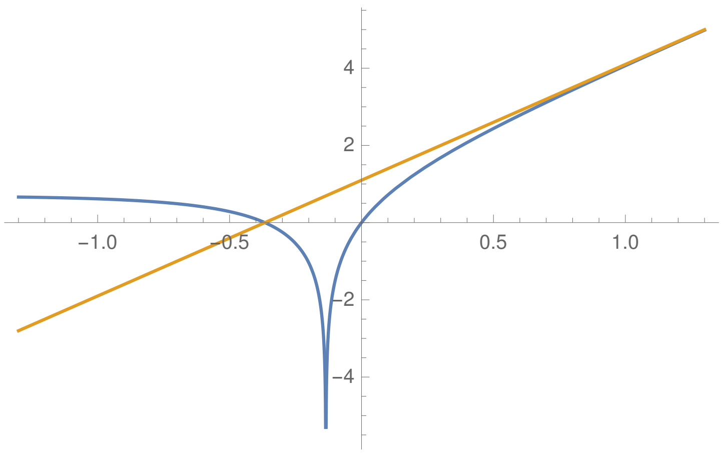


Figura 11: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$|z|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right)$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Notiamo prima che bisogna avere $z \neq 0$. Poniamo $z = x + iy$. Siccome, per $z \neq 0$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{|z|^2}\right) = \frac{x}{|z|^2},$$

la disequazione, per $z \neq 0$, è equivalente a

$$x \leq \operatorname{Im}\left((x - iy)^2\right) = \operatorname{Im}\left(x^2 - y^2 - 2ixy\right) = -2xy,$$

che a sua volta è equivalente a

$$x(1 + 2y) \leq 0, \; x^2 + y^2 \neq 0,$$

che ha per soluzioni l'insieme

$$\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq -\frac{1}{2}\}\right) \setminus \{(0, 0)\}.$$

Le soluzioni sono in figura 12. **NB**: $z = 0$ è da togliere!

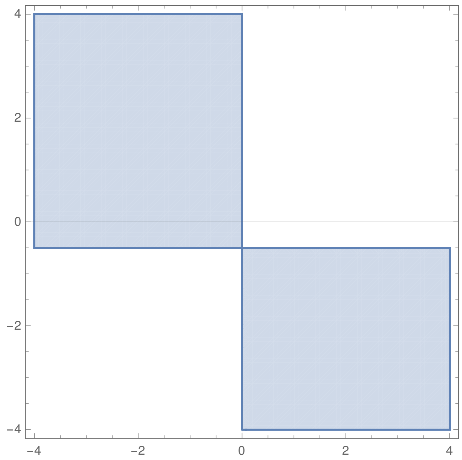


Figura 12: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\log(1 + x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si ha perciò, per $x \to +\infty$,

$$\left(\log(1 + x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Per il denominatore si ha

$$\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2+e^{-x}=\left(\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+e^{-x}=\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

poiché $e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per $x\to+\infty$ qualunque sia $n>0$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log(1+x)-\log x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2+e^{-x}}=\begin{cases}+\infty & \text{per } \alpha\neq 1\\ 1 & \text{per } \alpha=1.\end{cases}$$

Esercizio 4 Studiare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi. Osserviamo innanzitutto che per $\alpha>0$ il termine generale non è infinitesimo, in quanto $\lim_{n\to\infty}2^{\alpha n}/n=+\infty$, per cui $\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right)=\pi/2$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right)=+\infty.$$

Quindi per $\alpha>0$ la serie diverge. Per $\alpha\leq 0$ conviene usare il criterio del confronto asintotico, che dice che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^{\alpha n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\alpha n}.$$

Quest'ultima è la serie geometrica di ragione 2^α, che converge se e solo se $2^\alpha<1$, quindi se e solo se $\alpha<0$.

Esercizio 5 a) Calcolare una primitiva di

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1}\,dx.$$

al variare di $\alpha>0$.
c) Calcolarlo per $\alpha=2$.
Svolgimento. a) Si ha

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}=\frac{x^2(A+B)+2A+B}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

da cui

$$A+B=1,\ 2A+B=0,\quad \text{cioè } A=-1, B=2.$$

Perciò

$$\int f(x)\,dx = \int \Big(\frac{-1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+2}\Big)\,dx = -\arctan x + \int \frac{1}{\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)^2+1}dx$$
$$= -\arctan x + \sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\arctan x + \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + k, k \in \mathbb{R}.$$

b) L'integrando è continuo in $[0,+\infty[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale solo per $x \to +\infty$. Siccome l'integrando è positivo, usiamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1} = \log\Big(1+\frac{2}{x^\alpha}\Big) - \log\Big(1+\frac{1}{x^\alpha}\Big) = \frac{1}{x^\alpha} + o\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big)$$

per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.
c) Integrando per parti risulta

$$\int_0^c \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = x\log\frac{x^2+2}{x^2+1}\Big|_0^c - \int_0^c x\frac{x^2+1}{x^2+2}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$= c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} - \int_0^c \frac{-2x^2}{(x^2+2)(x^2+1)}\,dx = \quad \text{[tenendo conto del calcolo fatto in a)]}$$
$$= c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big).$$

Perciò

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left(c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)\right) = \pi(\sqrt{2}-1),$$

in quanto

$$\lim_{c\to+\infty} c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} = \lim_{c\to+\infty} c\left(\frac{1}{c^2} + o\Big(\frac{1}{c^2}\Big)\right) = 0.$$

Appello del 17.09.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x|-3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) $D = \mathbb{R}$, ovviamente e la funzione è pari. Si ha

$$f(x) \geq 0 \;\text{ se e solo se }\; |x| \geq \frac{3}{2} \text{ oppure } x = 0.$$

D'ora in poi studiamo f per $x \geq 0$.
ii) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\big(2x-3\big) = +\infty.$$

Per il calcolo dell'asintoto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\frac{2x-3}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \Big(2x\big(e^{-\frac{2}{x}}-1\big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\Big(-\frac{2}{x} + o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\right) = -7,$$

per cui la retta $y = 2x - 7$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
iii) Per $x > 0$ si possono applicare le regole di derivazione, dato che si ha $f(x) = e^{-\frac{2}{x}}(2x-3)$. Perciò

$$f'(x) = 2e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(2x-3) = \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3).$$

Si ha pertanto che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, cioè (per $x > 0$) se e solo se $x \geq 1$. Pertanto $x = 1$ è il punto di minimo assoluto, ed è un minimo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo stretto, in quanto $f(x) < 0 = f(0)$ per $0 < |x| < \frac{3}{2}$ (mostrato in (i)).
iv) La funzione è continua in $]0, +\infty[$ in quanto composizione di funzioni elementari. Per studiare la continuità in 0 bisogna calcolare

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}}(2x-3) = -3 \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}} = 0 = f(0).$$

Pertanto f è continua anche in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si può calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3) = -3 \lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2} = 0$$

per il noto confronto tra esponenziali e potenze. Pertanto f è derivabile anche in $x = 0$ (e la derivata è continua anche in $x = 0$).
v) Il grafico di f è in figura 13.

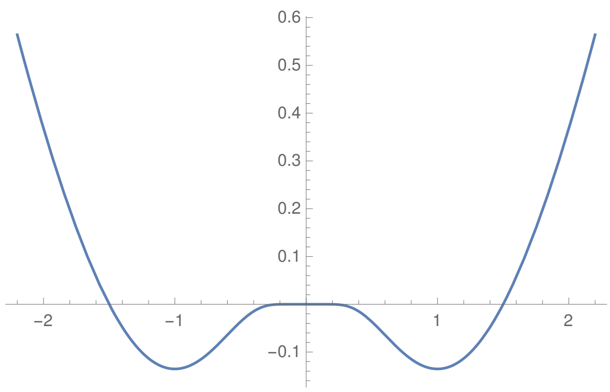


Figura 13: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Sia
$$P_\lambda(z) = \lambda - 4iz + 2iz^2 + z^3.$$
Determinarne $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -2i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione
$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$
esprimendone le soluzioni in forma algebrica.
Svolgimento. $P_\lambda(-2i) = \lambda - 8 - 8i + 8i$, da cui $P_\lambda(-2i) = 0$ se e solo se $\lambda = 8$. Il polinomio di cui trovare gli zeri è dunque $P_{\lambda_0}(z) = 8 - 4iz + 2iz^2 + z^3$. Siccome $z = -2i$ è uno zero di P, P è divisibile per $z + 2i$ e si ha, in particolare,
$$P_{\lambda_0}(z) = (z + 2i)(z^2 - 4i).$$
Le altre soluzioni dell'equazione $P_{\lambda_0}(z) = 0$ sono pertanto le due radici quadrate di $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, cioè sono
$$\pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}(1 + i).$$

Esercizio 3 Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$
Svolgimento. La serie è a termini positivi e si può quindi usare il criterio del confronto asintotico. Si ha
$$\log\big(n + \sin n\big) \sim \log n \text{ per } n \to \infty,$$
perché
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(n + \sin n\big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n}\Big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \frac{\sin n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}{\log n} = 1.$$
Inoltre
$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2} \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ per } n \to \infty.$$
La serie converge perciò se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$
Quest'ultima converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 2$. Infatti, se $\frac{\alpha}{2} \le 1$, il termine generale della serie è $\ge \frac{1}{n}$ e quindi la serie diverge. Se invece $\frac{\alpha}{2} > 1$ e scelgo $1 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, allora, per $n \to \infty$,
$$\frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = o\Big(\frac{1}{n^\beta}\Big),$$
dal limite fondamentale
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\gamma} = 0 \text{ per ogni } \gamma > 0$$
e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ converge.

Esercizio 4 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

Svolgimento. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$x - \sinh x - x^\alpha = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha \sim \begin{cases} -x^\alpha & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{7}{6}x^3 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\frac{x^3}{6} & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{7}{3}} \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \sqrt[3]{x} \log x = 0.$$

Quindi,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 2 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 5 Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento. a) L'integrando $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2$ è positivo, per cui si può usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim 2x^{\frac{\alpha}{2}+2},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} + 2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -6$.
b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \arcsin 2x^2 \, dx = & \text{ (per parti) } \ \frac{x^2}{2} \arcsin 2x^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2} \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx \\ & = \frac{\pi}{8} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{1-4x^4}}{4} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Appello del 21.01.2019

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D =]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

Svolgimento.

i) Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-16|}{x+3}=-\infty,\qquad \lim_{x\to-3^-}\frac{|x^2-16|}{x+3}=-\infty$$

quindi con un cambio di variabile

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{y\to-\infty}e^y=0,\qquad \lim_{x\to-3^-}f(x)=\lim_{y\to-\infty}e^y=0.$$

In particolare f ha un asintoto orizzontale ($y=0$) per $x\to-\infty$. Inoltre f può essere prolungata come funzione continua da sinistra in -3 ponendo $f(-3)=0$.

ii) Calcoliamo, per $x\neq-4$,

$$\begin{aligned}
f'(x)&=e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}\frac{d}{dx}\frac{|x^2-16|}{x+3}=e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}\frac{\operatorname{sgn}(x^2-16)2x(x+3)-|x^2-16|}{(x+3)^2}\\
&=e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}\operatorname{sgn}(x^2-16)\frac{2x(x+3)-(x^2-16)}{(x+3)^2}\\
&=e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}\operatorname{sgn}(x^2-16)\frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2},
\end{aligned}$$

dove "sgn" indica la funzione segno.

Osservando che $e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}>0$ e $(x+3)^2>0$ per ogni $x\in D$, vogliamo valutare il segno di

$$(x^2+6x+16)\operatorname{sgn}(x^2-16)$$

Calcolando il discriminante di $x^2+6x+16$, $\Delta=36-64<0$ si ottiene che $x^2+6x+16>0$ per ogni x. Inoltre

$$\operatorname{sgn}(x^2-16)>0\quad\Leftrightarrow\quad x^2-16>0\quad\Leftrightarrow\quad |x|>4\quad\Leftrightarrow\quad x<-4 \text{ o } x>4.$$

Poiché ci interessano solo i valori di $x\in D$, ovvero $x<-3$, otteniamo $\operatorname{sgn}(x^2-16)>0$ per $x<-4$ e $\operatorname{sgn}(x^2-16)<0$ per $-4<x<-3$. Ne risulta

$$f'(x)>0 \text{ (e quindi } f \text{ crescente) per } x<-4,\quad f'(x)<0 \text{ (e quindi } f \text{ decrescente) per } x\in]-4,-3[,$$

da cui segue che -4 é un punto massimo assoluto e per il teorema di Fermat, non possono esservi altri punti di estremo.

Infine $x=-4$ è l'unico punto in cui f risulta non derivabile (è un punto angoloso) perché

$$\lim_{x\to-4^+}f'(x)=-8=-\lim_{x\to-4^-}f'(x).$$

Il grafico di f è in figura 14.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{2x}-1-\sin(2x)}{\sinh^2 x+x^{\frac{9}{2}}}.$$

Svolgimento. Usando gli sviluppo di Taylor $e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$, $\sin y=y+o(y^2)$ con $y=2x$ otteniamo

$$e^{2x}=1+2x+2x^2+o(x^2),\quad \sin 2x=2x+o(x^2),\quad \text{per } x\to0$$

e pertanto il numeratore può essere scritto come

$$e^{2x}-1-\sin 2x=2x^2+o(x^2)\quad \text{per } x\to0$$

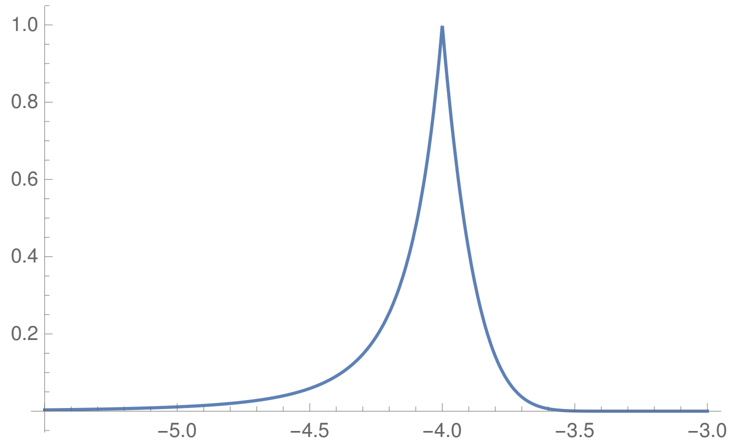


Figura 14: Il grafico di f (Tema 1).

Scrivendo $\sinh x = x + o(x)$ abbiamo $\sinh^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Inoltre, essendo $\frac{9}{2} > 2$, vale $x^{\frac{9}{2}} = o(x^2)$ per $x \to 0$. Ne segue

$$\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}} = x^2 + o(x^2).$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Vale

$$z = \frac{-1 - 2i + \sqrt{(1 + 2i)^2 - 4i}}{2i} = \frac{-1 - 2i + \sqrt{-3}}{2i},$$

dove $\sqrt{-3}$ denota le due radici complesse di -3, che sono $\pm i\sqrt{3}$ (mentre $\sqrt{3}$ denota la radice quadrata positiva di 3). Questo si può verificare scrivendo le radici nella forma $\rho e^{i\theta}$, richiedendo che

$$3 = 3e^{i0} = \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \rho^2 e^{2i\theta},$$

da cui $\rho = \sqrt{3}$ e $\theta = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo dunque che le due radici sono

$$z_\pm = \frac{-1 - 2i \pm i\sqrt{3}}{2i} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Esercizio 4
Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Integriamo per parti e otteniamo

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^2}dt = -\frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}dt$$

Per calcolare il secondo integrale usiamo il metodo dei fratti semplici: poniamo

$$\frac{1}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} = \frac{2A + At + Bt}{t(2+t)},$$

da cui $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. In conclusione

$$\int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2+t}dt = \frac{1}{2}\big(\log t - \log(2+t)\big)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

In conclusione

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^2}dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} = \log\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

ii) Il polinomio di Taylor è

$$T_F^{2,2}(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{F''(2)}{2}(x-2)^2,$$

pertanto devo calcolare

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x) = \frac{\log\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} \quad \Rightarrow \quad F'(2) = \frac{\log 2}{2},$$

e

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{2+x}x - \log(1+\frac{x}{2})}{x^2} \quad \Rightarrow \quad F''(2) = \frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}.$$

Ne segue

$$f(x) = \frac{\log 2}{2}(x-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}\right)(x-2)^2 + o(x-2)^2$$

per $x \to 2$.

iii) Osserviamo che per $\alpha \leq 0$ la funzione f è palesemente continua e limitata su $[0,1]$, per cui l'integrale esiste finito. Per $\alpha > 0$ dobbiamo valutare il comportamento asintotico di $f(t)$ per $t \to 0^+$, essendo comunque f continua e limitata su ogni intervallo $[\delta, 1]$ per ogni $0 < \delta < 1$. Abbiamo

$$f(t) = \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}} = \frac{\frac{t}{2} + o(t)}{t^{2\alpha}} \sim \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}, \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico vale dunque

$$\int_0^1 f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^\delta \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}dt \text{ converge per qualche } \delta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1.$$

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1+\sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Svolgimento. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{1+\sqrt{2n}}.$$

Per $|y| < 1$ la serie converge assolutamente. Questo può essere facilmente provato usando il criterio della radice, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|y|^n}{1+\sqrt{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} = |y| < 1$$

oppure osservando che $n|y|^n \to 0$ per $|y| < 1$, quindi $|y|^n \leq \frac{1}{n}$ definitivamente per $n \to \infty$ e visto che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(1+\sqrt{2n})}$$

converge $\left(\frac{1}{n(1+\sqrt{2n})} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ possiamo concludere usando il teorema del confronto.

Per $|y| > 1$ il termine generale della serie diverge, quindi la serie non può convergere.

Per $y = 1$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Infine, per $y = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz, essendo il modulo del termine generale della serie decrescente a 0. Tuttavia, per il caso precedente, la serie non converge assolutamente.

Sostituendo $\log \alpha = y$ otteniamo che la serie originale converge assolutamente se e solo se $-1 < \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} < \alpha < e$, converge semplicemente se e solo se $-1 \leq \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} \leq \alpha < e$ e diverge in tutti gli altri casi, ovvero $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ e $\alpha \geq e$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Da $f''(x) = e^x - 6ax$, si ha che f è convessa se e solo se

(A) $f''(x) = e^x - 6ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Ora, se $a < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - 66ax \geq 0 = -\infty$$

e dunque **(A)** non è verificato.

Se $a = 0$ invece **(A)** è verificato.

Se $a > 0$ studiamo la funzione $g(x) := f''(x) = e^x - 6ax$. Si ha $g'(x) = e^x - 6a \geq 0 \iff x \geq \log(6a)$. Dunque g ha un minimo assoluto in $x = \log(6a)$. Perciò **(A)** è verificata se e solo se $g(\log(6a)) = 6a - 6a\log(6a) \geq 0$, cioè se e solo se $1 - 1\log(6a) \geq 0$, quindi se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

In conclusione f è convessa se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

Appello del 11.02.2019

TEMA 1

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$
(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Svolgimento.
(i) Con il cambio di variabile $y = x + 3$ otteniamo
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} |y \log y| = 0.$$
Questo in particolare implica che f si può prolungare per continuità in $x = -3$ ponendo $f(-3) = 0$.

Evidentemente vale
$$\lim_{x\to\infty} |x+3| = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$
D'altronde
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+3|}{x} |\log(x+3)| = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty,$$
quindi la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to \infty$.

(ii) Osserviamo che nel dominio D la funzione $(x+3)\log(x+3)$ si annulla solo per $x+3 = 1$, ovvero $x = -2$. Dunque in $D \setminus \{-2\}$ la funzione f è derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili, e si calcola
$$f'(x) = \operatorname{sgn}((x+3)\log(x+3))((x+3)\log(x+3))' = \operatorname{sgn}((x+3)\log(x+3))(\log(x+3)+1),$$
ovvero
$$f'(x) = -(\log(x+3)+1) \text{ per } -3 < x < -2$$
$$f'(x) = \log(x+3)+1 \text{ per } x > -2.$$
Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ per ogni $x > -2$, quindi f è strettamente monotona crescente per $x > -2$.

Per $-3 < x < -2$ vale
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x+3) < -1 \Leftrightarrow x + 3 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < -3 + \frac{1}{e}.$$
Con analoghi calcoli si ha dunque che
$$f'(x) > 0 \text{ per } -3 < x < -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ per } -3 + \frac{1}{e} < x < -2.$$
Ne segue che f è strettamente monotona crescente per $-3 < x < -3 + \frac{1}{e}$ e strettamente monotona decrescente per $-3 + \frac{1}{e} < x < -2$.

Quindi $-3 + \frac{1}{e}$ è un punto di massimo locale, mentre -2 è un punto di minimo assoluto (infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(-2) = 0$).

Si può facilmente osservare che
$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x\to -2^+} f'(x) = 1$$

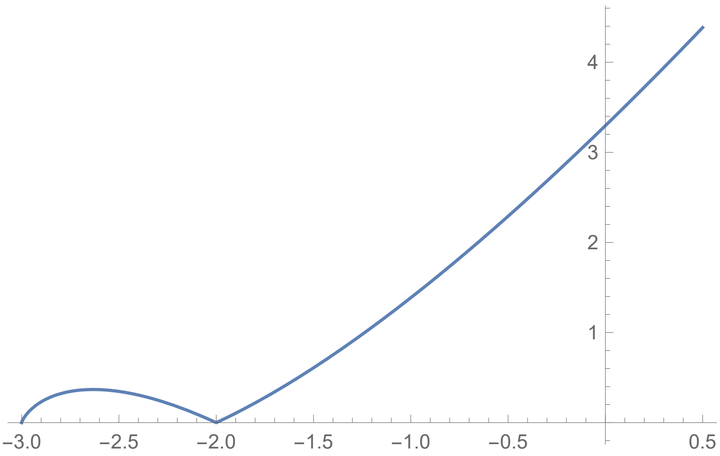


Figura 15: Il grafico di f (Tema 1).

e questo (per un teorema eventualmente visto a lezione) implica che f non è derivabile per $x = -2$.

Il grafico di f è in figura 23.

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

Svolgimento. Osserviamo che $|\sin n| \leq 1$ per ogni n, e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin n| \left| \frac{1+n^2}{n^4} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}.$$

Poiché abbiamo

$$\frac{1+n^2}{n^4} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty,$$

o (equivalentemente) scrivendo

$$\frac{1+n^2}{n^4} = \frac{n^2(1+o(1/n^2))}{n^4} = \frac{1+o(1)}{n^2},$$

per il criterio di convergenza asintotico deduciamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}$$

converge, e quindi per il principio del confronto la serie originale converge assolutamente.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left(\mathrm{Re}\,(\bar{z}+i)-1\right)^2}{4} + \frac{\left(\mathrm{Im}\,(\bar{z}+i)-1\right)^2}{4} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Scriviamo in forma algebrica $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Dunque

$$\mathrm{Re}\,(\bar{z} + i) = \mathrm{Re}\,(x - iy + i) = x, \quad \mathrm{Im}\,(\bar{z} + i) = \mathrm{Im}\,(x - iy + i) = 1 - y.$$

La disequazione può essere pertanto riscritta come

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\big(x-1\big)^2}{4} + \frac{\big(-y\big)^2}{4} \leq 1,$$

ovvero

$$2 \leq \big(x-1\big)^2 + y^2 \leq 4.$$

Ricordando che $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ è l'equazione di una circonferenza di raggio r centrata in (x_0, y_0), otteniamo che la disequazione determina la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\sqrt{2}$ e 2 e centrate in $(1, 0)$.

Il disegno delle soluzioni è in figura 16.

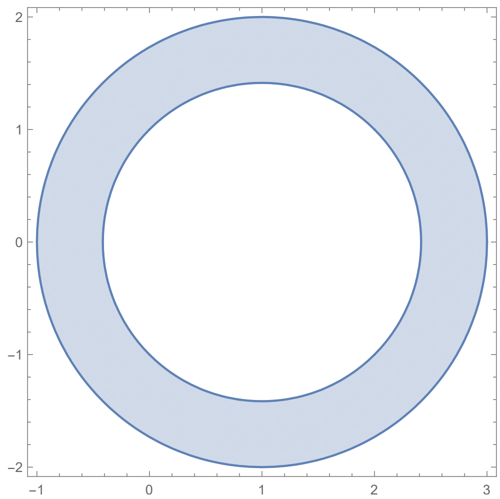


Figura 16: La soluzione dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx.$$

Svolgimento. Usando il cambio di variabile $\sqrt{2x} = y$, da cui $x = \frac{y^2}{2}$ e $dx = ydy$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} y\,dy.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} y\,dy = \big[-e^{-y} y\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 0 + \big[-e^{-y}\big]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Esercizio 5. Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - 1}{x^{\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che la funzione f_α è continua per $0 < x < +\infty$. Consideriamo

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx. \tag{2}$$

Essendo $e^{-\sqrt{2x}} = 1 - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{2x} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-1}} = \frac{-\sqrt{2} + o(1)}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}} \sim \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale in (2) converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}\, dx$$

converge, ovvero (portando $-\sqrt{2}$ fuori dall'integrale) se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, quindi se e solo se $\alpha < \frac{5}{2}$.

Studiamo ora

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx. \tag{3}$$

Poichè $e^{-\sqrt{2x}} \to 0$ per $x \to \infty$ abbiamo

$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{\alpha-1}}$$

e per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale in (3) converge se e solo se

$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^{\alpha-1}}\, dx.$$

converge, ovvero se e solo se $\alpha - 1 > 1$, quindi se e solo se $\alpha > 2$.

Quindi l'integrale originale converge se e solo se $2 < \alpha < \frac{5}{2}$.

(b) Scriviamo

$$G(y) = \int_1^y f_2(t)\, dt = \int_1^y \frac{e^{-\sqrt{2t}} - 1}{t}\, dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo vale

$$G'(y) = f_2(y) = \frac{e^{-\sqrt{2y}} - 1}{y}.$$

Abbiamo $F(x) = G(\cos x)$. Per la regola della catena, quindi

$$F'(\pi/3) = G'(\cos(\pi/3))(-\sin(\pi/3)) = -\frac{\sqrt{3}}{2} G'(1/2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1} - 1}{1/2} = -\sqrt{3}(1 - 1/e).$$

Esercizio 6 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Ricordiamo che $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, ed $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$, dunque possiamo espandere il numeratore come

$$\begin{aligned}
\text{Num} &= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \cosh(2x + o(x)) \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + \frac{(2x + o(x))^2}{2} + o((x + o(x))^2)\right] \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + 2x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \frac{(\alpha^2 - 4)x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha^2 - 4}{2} + o(1)}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{per } 0 < \alpha < 2 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 2. \end{cases}$$

Il caso $\alpha = 2$ risulta più difficile perché non è possibile calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{o(1)}{x}$. Dobbiamo pertanto ottenere un'espansione del numeratore all'ordine successivo (il terzo). Questa volta scriviamo $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$, ed $e^y = 1 + y + y^2 + o(y^2)$ per $y \to 0$. In particolare

$$\begin{aligned}
\cosh(e^{2x} - 1) &= \cosh(2x + 2x^2 + o(x)^2) \\
&= 1 + \frac{(2x + 2x^2 + o(x)^2)^2}{2} + o((2x + 2x^2 + o(x)^2)^3) \\
&= 1 + \frac{4x^2 + 8x^3 + o(x^3)}{2} + o(x^3) \\
&= 1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Per $\alpha = 2$ abbiamo $\cosh(\alpha x) = 1 + 2x^2 + o(x^3)$, quindi

$$\text{Num} = 1 + 2x^2 + o(x^3) - (1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)) = -4x^3 + o(x^3)$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(2x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^3 + o(x^3)}{x^3} = -4.$$

Esercizio facoltativo. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

Svolgimento. Essendo l'integranda continua in un intorno di $+\infty$ (in realtà in tutto $\mathbb{R}$), per il teorema del valor medio esiste $t_x \in [x, x + e^{-x}]$ tale che

$$\int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt = e^{-x}\, e^{t_x} \arctan t_x$$

e quindi, siccome l'integrando è crescente,

$$e^{-x} e^x \arctan x \le e^{-x}\, e^{t_x} \arctan t_x \le e^{-x} e^{x+e^{-x}} \arctan\left(x + e^{-x}\right),$$

cioè
$$\arctan x \leq \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt \leq e^{e^{-x}} \frac{\pi}{2}.$$
Siccome
$$\lim_{x\to+\infty} e^{e^{-x}} = 1,$$
applicando il teorema dei Carabinieri si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Appello del 8.07.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia
$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$
a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento (a) Essendo il dominio di e^x tutto $\mathbb{R}$, ed il dominio di $\log x$ tutti gli $x > 0$, il dominio di f è determinato dalle due condizioni:
$$x > 0, \quad 2 + \log x \neq 0.$$
La seconda relazione equivale a $x \neq e^{-2}$, quindi
$$D = \{x > 0 : x \neq e^{-2}\}.$$
Con tre cambi di variabile si ottiene
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^{\frac{2}{|2+y|}} = \lim_{s\to+\infty} e^{\frac{2}{s}} = \lim_{t\to0^+} e^t = 1.$$
Dunque f può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0) = 1$.

Inoltre
$$\lim_{x\to e^{-2}} f(x) = \lim_{y\to0^+} e^{\frac{2}{y}} = \lim_{s\to+\infty} e^s = +\infty.$$
Dunque f non può essere estesa per continuità in e^{-2}.
(b) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio, essendo composizione di funzioni derivabili (la funzione $|\cdot|$ non è derivabile solo in 0, ma $2 + \log x$ si annulla solo in e^{-2}, che non appartiene al dominio.) La derivata, calcolata con la regola della catena è:
$$f'(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}} \left(-\frac{2}{|2+\log x|^2} \right) \frac{2+\log x}{|2+\log x|} \frac{1}{x} = -\frac{2e^{\frac{2}{|2+\log x|}}}{x|2+\log x|^3}(2+\log x).$$

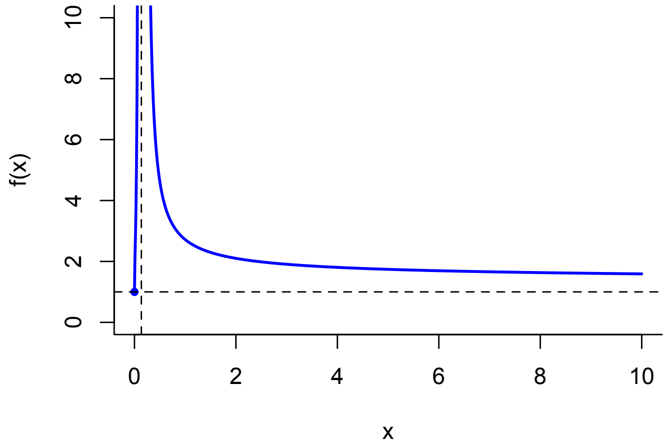


Figura 17: Il grafico di f (Tema 1).

Si noti che la frazione del membro destro è sempre positiva nel dominio D, da cui:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 + \log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 + \log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2},$$

ed $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$. In particolar modo f non ha punti critici.

Il grafico di f è in figura 17.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - 2\sqrt{n}}.$$

Svolgimento Per $n \to \infty$ abbiamo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ e $1 - 2\sqrt{n} \sim -2\sqrt{n}$. Pertanto il termine generale della serie è asintotico a $\frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\frac{3}{2} > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

converge, e per il principio di convergenza asintotico, anche la prima serie converge.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|iz^2|}$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento Osserviamo che l'equazione è ben definita solo per $z \neq 0$. Pertanto, assumendo $z \neq 0$ possiamo semplificare moltiplicando a sinistra per $\frac{z}{z}$, ottenendo

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|z|^2},$$

dove abbiamo anche usato che $|iz^2| = |z^2| = |z|^2$. Moltiplicando per $|z|^2$ otteniamo

$$z^2 = -\mathrm{Im}\ \mathrm{z}^2.$$

Scrivendo $z = x + iy$ si ottiene $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $-(\mathrm{Im} z)^2 = -y^2$, ed otteniamo dunque

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -y^2. \tag{4}$$

Quest'equazione può essere soddisfatta solo se $2ixy = 0$. Questo implica $xy = 0$, ovvero $x = 0$ o $y = 0$ (non entrambi perché $z \neq 0$). Nel caso $x = 0$, $y \neq 0$, abbiamo una soluzione di (4). Nel caso $y = 0$ e $x \neq 0$ invece (4) non è soddisfatta. Quindi le soluzioni sono

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \neq 0\},$$

ovvero l'asse immaginario privato dell'origine, come si può vedere in figura 18.

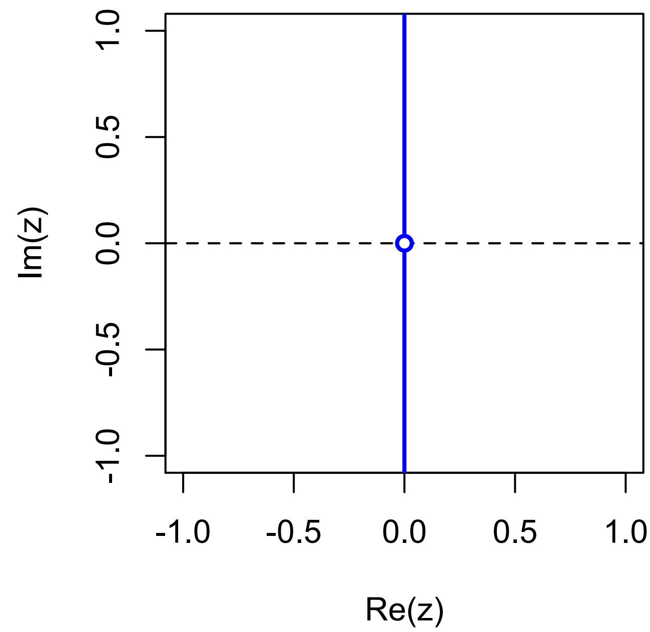


Figura 18: L'insieme delle soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x \log(1 + 2e^x).$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \log(1 + 2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt.$$

Svolgimento a) Con la sostituzione $y = e^x$, $dy = e^x dx$ ed un'integrazione per parti si ottiene

$$\int e^x \log(1+2e^x)dx = \int \log(1+2y)dy = y\log(1+2y) - \int \frac{2y}{1+2y}dy.$$

Ora, per ridurre il numeratore dell'integrando a destra scriviamo

$$\frac{2y}{1+2y} = 1 - \frac{1}{1+2y},$$

Dunque

$$\int \frac{2y}{1+2y}dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+2y}\right) dy = y - \frac{\log(1+2y)}{2}.$$

Aggiungendo ai termini precedenti e sostituendo $y = e^x$ si ottiene

$$\int e^x \log(1+2e^x)dx = e^x \log(1+2e^x) - e^x + \frac{\log(1+2e^x)}{2} + c.$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua in $[0,+\infty)$, quindi per studiare la convergenza del suo integrale, studiamo il comportamento di f_α per $x \to \infty$. Per $\alpha \geq 0$ abbiamo che

$$\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$

per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.

Per $\alpha < 0$, abbiamo $f_\alpha(x) = O(x^{-2})$ per $x \to \infty$, e per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge.

c) Abbiamo

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

Abbiamo

$$F(1) = 0, \quad F'(1) = f_0(1) = \log(1+2e), \quad f_0'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x}, \quad f_0'(1) = \frac{2e}{1+2e},$$

quindi

$$F(x) = \log(1+2e)(x-1) + \frac{e}{1+2e}(x-1)^2 + o(|x-1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1}\right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Usiamo l'espansione $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ per $y \to 0$ e scriviamo

$$\sqrt[8]{x^2-2} = (x^2-2)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1 - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad \text{per } x \to \infty,$$

$$\sqrt[4]{x-1}=(x-1)^{\frac14}=x^{\frac14}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac14}=x^{\frac14}\left(1-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right),\quad \text{per } x\to\infty.$$

Sottraendo otteniamo

$$x^\alpha\left(\sqrt[8]{x^2-2}-\sqrt[4]{x+1}\right)=x^\alpha\cdot x^{\frac14}\left(-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{x^{\alpha-\frac34}}{4}(1+o(1))\quad \text{per } x\to\infty.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha\left(\sqrt[8]{x^2-2}-\sqrt[4]{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^{\alpha-\frac34}}{4}(1+o(1))\right)=\begin{cases}0 & \text{per } \alpha<\frac34\\ -\frac14 & \text{per } \alpha=\frac34\\ -\infty & \text{per } \alpha>\frac34.\end{cases}$$

Appello del 17.09.2019

Tema 1

Esercizio 1. Sia

$$f(x)=\log\left|e^{3x}-2\right|.$$

a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) Chiaramente $D=\{x\in\mathbb{R}\ :\ |e^{3x}-2|>0\}=\{x\in\mathbb{R}\ :\ e^{3x}-2\neq 0\}=\mathbb{R}\backslash\{\frac{\log 2}{3}\}$. Segno:

$$f(x)\geqslant 0 \iff |e^{3x}-2|\geqslant 1 \iff e^{3x}-2\leqslant -1 \text{ e } e^{3x}-2\geqslant 1 \iff x\leqslant 0, \text{ e } x\geqslant\frac{\log 3}{3}.$$

Dove vale $=$ si hanno anche gli zeri di f. Limiti e asintoti: dobbiamo studiare la funzione per $x\longrightarrow\pm\infty,\frac{\log 2}{3}$. Facilmente, $f(-\infty)=\log 2$, quindi $y=\log 2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. A $+\infty$ facilmente $f(+\infty)=+\infty$. Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo $y=mx+q$. Per m abbiamo che

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{3x}-2)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{3x}\cdot 1_x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+0_x}{x}=3.$$

Per q abbiamo

$$q=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log(e^{3x}-2)-\log e^{3x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\log\frac{e^{3x}-2}{e^{3x}}=\log 1=0.$$

Conclusione: $y=3x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Infine,

$$\lim_{x\to\frac{\log 2}{3}}\log|e^{3x}-2|=\log 0+=-\infty,$$

da cui $x=\frac{\log 2}{3}$ è asintoto verticale.

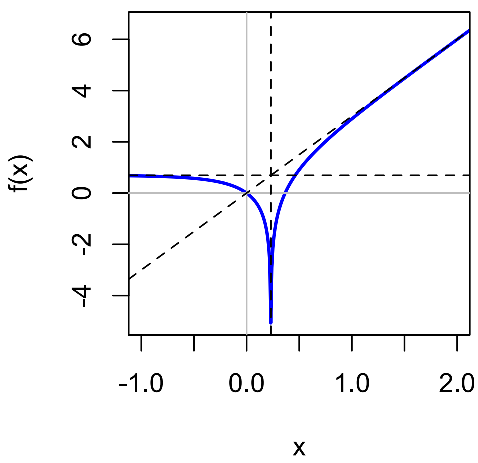
b) Chiaramente f è continua sul proprio dominio essendo composizione di funzioni continue ove definite. È anche derivabile poiché l'unico punto in cui non si può applicare la regola della catena è x t.c. $e^{3x} - 2 = 0$, cioè $x = \frac{\log 2}{3}$, che però non appartiene al dominio di f. La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{|e^{3x} - 2|} \operatorname{sgn}(e^{3x} - 2) \cdot 3e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} - 2}.$$

Da questa segue che

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \iff \quad e^{3x} - 2 > 0, \quad \iff \quad x > \frac{\log 2}{3}.$$

Si conclude che $f \searrow$ su $]-\infty, \frac{\log 2}{3}[$ mentre $f \nearrow$ su $]\frac{\log 2}{3}, +\infty[$. Non ci sono, di conseguenza né minimi né massimi (di qualsiasi natura).
c) Grafico.



Esercizio 2. Si calcoli il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x-2x^2} - 1 - x}{\sinh x^2 + x^{7/3} \log x}.$$

Svolgimento. Ricordato che $\lim_{x \to 0+} x^\alpha \log x = 0$, si vede facilmente che il limite si presenta come una forma del tipo $0/0$. Studiamo l'ordine di infinitesimo di numeratore e denominatore. Ricordato che

$$e^t = 1 + t + o(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

abbiamo

$$N = 1 + (x - 2x^2) + o(x - x^2) - 1 - x = -2x^2 + o(x) = o(x),$$

insufficiente per un comportamento preciso,

$$N = 1 + (x - 2x^2) + \frac{(x - 2x^2)^2}{2} + o((x - 2x^2)^2) - 1 - x = -2x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{3}{2}x^2 \text{ per } x \to 0^+.$$

Per il denominatore è sufficiente ricordare che $\sinh t = t + o(t)$ per cui

$$D = x^2 + o(x^2) + x^{7/3}\log x = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

essendo $x^{7/3}\log x = o(x^2)$ poiché $\frac{x^{7/3}\log x}{x^2} = x^{1/3}\log x \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0+$. Dunque

$$\frac{N}{D} \sim \frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^2} \longrightarrow -\frac{3}{2}.$$

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re}\left(\frac{3}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

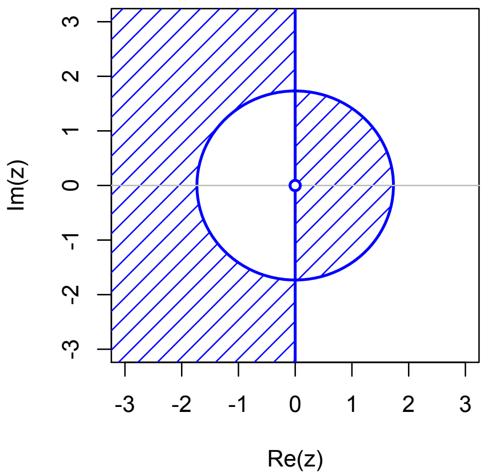
Svolgimento. Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora $\operatorname{Re} z = x$ mentre essendo $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$,

$$\operatorname{Re}\frac{3}{z} = \frac{3x}{x^2+y^2}.$$

Pertanto, $z \neq 0$ verifica la disequazione se e solo se

$$x \leqslant \frac{3x}{x^2+y^2} \iff \begin{cases} x > 0, \quad 1 \leqslant \frac{3}{x^2+y^2}, & \iff \quad x^2+y^2 \leq 3, \\ x = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, & \\ x < 0, \quad 1 \geqslant \frac{3}{x^2+y^2}, & \iff \quad x^2+y^2 \geq 3. \end{cases}$$

Figura:



Esercizio 4. a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\tan \frac{x}{2}\right)^3 \, dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan \frac{x}{2} = u\text{)}.$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. a) Seguendo il suggerimento $u = \tan x/2$, $x = 2 \arctan u$ da cui $dx = \frac{2}{1+u^2}$, pertanto

$$\begin{aligned} \int \left(\tan \tfrac{x}{2}\right)^3 \, dx &= \int \tfrac{2u^3}{1+u^2} \, du = 2 \int \tfrac{u(u^2+1-1)}{1+u^2} \, du = \int 2u - \tfrac{2u}{1+u^2} \, du = u^2 - \log(1+u^2) \\ &= \left(\tan \tfrac{x}{2}\right)^2 - \log\left(1 + \left(\tan \tfrac{x}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

b) Sia $f(x) = \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}}$. Certamente $f \in C(]0, \frac{\pi}{6}])$ per ogni α ed è continua anche in $x = 0$ (quindi integrabile sicuramente) per $\alpha + 2 \leqslant 0$, cioè per $\alpha \leqslant -2$. Per $\alpha > -2$ abbiamo un integrale generalizzato in $x = 0$. Ricordato che $\tan x = x + o(x) = x 1_x$ per $x \longrightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

integrabile in 0 se e solo se $\alpha + 1 < 1$, cioè $\alpha < 0$ per confronto asintotico. Morale: l'integrale generalizzato esiste finito se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 5. (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log \sqrt{n^2 + \alpha n + 4}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. i) Osserviamo che

$$a_n = \log \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + \alpha n + 4}} \sim \log \frac{n}{n} \longrightarrow 0.$$

Per avere l'ordine di infinitesimo occorre essere più precisi. Notiamo che, fattorizzando n e usando le proprietà dei logaritmi

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{4}{n^2}\right).$$

Ricordato che $\log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{4}{n^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^2}{2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \tfrac{2-\alpha}{2n} - \tfrac{5-\alpha^2}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

In particolare, se $\alpha = 2$ si ottiene $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
ii) Per quanto visto al punto i),

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{2-\alpha}{2n} \equiv \frac{C}{n}, & \alpha \neq 2, \\ \\ -\frac{1}{2n^2} \equiv \frac{C}{n^2}, & \alpha = 2, \end{cases}$$

da cui si conclude che $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\alpha = 2$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Appello del 20.01.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(2\arctan(|x|^3)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D =]-\infty, +\infty[$. Evidentemente f è pari, quindi basta limitarsi allo studio su $[0, +\infty[$. Poiché $2\arctan|x|^3 \in [0, \pi[$, f è sempre positiva ed inoltre $f = 0$ sse $x = 0$. Limiti: c'è un solo limite interessante, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sin\pi = 0$, da cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$.

ii) Essendo f composizione di funzioni derivabili, eccetto per $x = 0$, risulta

$$f'(x) = \cos\left(2\arctan|x|^3\right)\frac{6x^2 \mathrm{sgn}\, x}{1+x^6}, \ \forall x \neq 0.$$

Per $x = 0$ chiaramente f è continua e siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

per il test di derivabilità si evince che $\exists f'(0) = 0$. Per la monotonia, studiamo il segno di f': per $x > 0$,

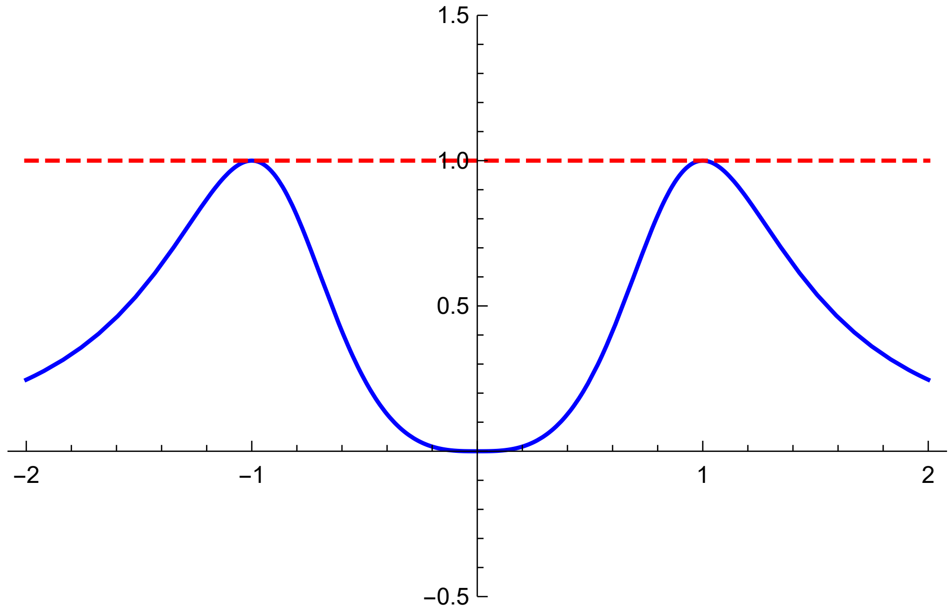
$$f'(x) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\left(2\arctan x^3\right) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad 2\arctan x^3 \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \Longleftrightarrow \quad \arctan x^3 \leqslant \frac{\pi}{4}, \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 \leqslant 1,$$

cioè per $x \leqslant 1$. Dunque f è crescente su $[0, 1]$ e decrescente su $[1, +\infty[$. Si deduce facilmente la monotonia su D e che $x = 0$ è punto di minimo globale mentre $x = \pm 1$ sono massimi globali.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \sin x\right)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "exp{log ...}".



Svolgimento. Per $x \longrightarrow 0+$, $1+\sin x \longrightarrow 1$ mentre

$$x^a \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } a > 0, \\ 1, & \text{se } a = 0, \\ +\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Poiché $1^0 = 1$ e $1^1 = 1$ si deduce che il limite vale 1 per ogni $a \geqslant 0$. Per $a < 0$, $1^{+\infty}$ è forma indeterminata. Poiché

$$(1+\sin x)^{x^a} = e^{x^a \log(1+\sin x)},$$

ricordato che $\log(1+t) = t1_t$ e che $\sin x = x1_x$ abbiamo

$$(1+\sin x)^{x^a} = e^{x^a \sin x \cdot 1_x} = e^{x^{a+1}1_x} \longrightarrow \begin{cases} e^0 = 1, & \text{se } -1 < a < 0, \\ e^1 = e, & \text{se } a = -1, \\ e^{+\infty} = +\infty, & \text{se } a < -1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+5)(z^2+z+1) = 0.$$

Svolgimento. Chiaramente

$$(z^3+5)(z^2+z+1) = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad z^3 = -5, \ \vee \ z^2+z+1 = 0.$$

Nel primo caso, si tratta di calcolare le radici terze di -5. Premesso che $-5 = 5u(\pi)$ ($u(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$), per la formula di De Moivre, $z = \rho u(\theta)$ è t.c.

$$z^3 = -5, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3 = 5, \\ \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, \ k = 0,1,2, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ -\sqrt[3]{5}, \ \sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nel secondo caso,

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} + 2e^t}{(e^t - 1)^\alpha} \ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\, dt$.

Svolgimento. i) Abbiamo che

$$\int \tfrac{e^{2t}+2e^t}{e^t-1}\ dt \overset{u=e^t,\ t=\log u,\ dt=du/u}{=} \int \tfrac{u^2+2u}{(u-1)} \tfrac{du}{u} = \int \tfrac{u+2}{u-1}\ du = \int \left(1 + \tfrac{3}{u-1}\right)\ du$$

$$= u + 3\log|u-1| = e^t + 3\log|e^t - 1|.$$

ii) Considerato che $f_\alpha \in C(]0,1])$, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(t)\ dt$ è generalizzato in 0. Essendo $f_\alpha \geqslant 0$ su $]0,1]$, possiamo applicare il test del confronto asintotico per stabilire la convergenza dell'integrale. Notiamo che

$$f_\alpha(t) = \frac{3_t}{(e^t-1)^\alpha} = \frac{3_t}{(t1_t)^\alpha} \sim_{0+} \frac{3}{t^\alpha},$$

per cui esiste $\int_0^1 f_\alpha$ sse esiste $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ dt$, sse $\alpha < 1$ come ben noto.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\sin x)^n n}{n^2 + \sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_n |a_n| = \sum_n \frac{n3^n|\sin x|^n}{n^2 + \sqrt{n}}.$$

A tal fine, applichiamo il test della radice: essendo

$$|a_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}3|\sin x|}{n^{2/n}1_n} \longrightarrow 3|\sin x|,\ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

(ricordiamo che $n^{1/n} \longrightarrow 1$) abbiamo che:

- se $3|\sin x| < 1$ (cioè $|\sin x| < \frac{1}{3}$ ovvero, essendo $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, sse $x \in]-\arcsin 1/3, \arcsin 1/3[$), la serie converge assolutamente (quindi anche semplicemente);
- se $3|\sin x| > 1$ (cioè per $[-\pi/2, \pi/2] \backslash [-\arcsin 1/3, \arcsin 1/3]$), la serie diverge assolutamente e poiché il test dice in questo caso che $|a_n| \longrightarrow +\infty$, la condizione necessaria di convergenza non è verificata, per cui la serie non converge nemmeno semplicemente.

Rimangono i casi $\sin x = \pm\frac{1}{3}$, nei quali il test precedente fallisce. Per $\sin x = 1/3$, la serie diventa

$$\sum_n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \sim \sum_n \frac{1}{n}, \text{ divergente.}$$

Essendo a termini di segno costante, convergenza semplice e assoluta coincidono (quindi non c'è alcun tipo di convergenza). Infine, per $\sin x = -1/3$,

$$\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}},$$

che è una serie a termini di segno alternato. La convergenza assoluta ritorna al caso precedente (quindi è esclusa). Per la convergenza semplice possiamo applicare il test di Leibniz purché

$$\frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \searrow 0.$$

La convergenza a 0 è evidente. Per la monotonia possiamo procedere direttamente oppure introdurre la funzione ausiliaria $f(x) := \frac{x}{x^2+\sqrt{x}}$ ed osservare che

$$f'(x) = \frac{x^2+\sqrt{x}-x(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x^2+\sqrt{x})^2} = \frac{-x^2+\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x^2+\sqrt{x})^2}.$$

Siccome $f' \leqslant 0$ sse $-x^2+\sqrt{x}/2 \leqslant 0$ ovvero $x^{3/2} \geqslant \frac{1}{2}$, in particolare per $n \geqslant 1$ si ha $f(n) \searrow$, da cui la conclusione: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per il test di Leibniz.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Svolgimento. Dall'ipotesi segue che $(n+1)a_{n+1} \geqslant na_n$, cioé (na_n) è crescente: allora $na_n \geqslant a_1 > 0$, da cui $a_n \geqslant \frac{a_1}{n}$ per ogni $n \geqslant 1$. Ma allora, la serie diverge per confronto con la serie armonica.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Appello del 10.02.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x+1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{t \to 1} e^t = e, \qquad \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{t \to +\infty} e^t = +\infty.$$

Perciò, f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = e$ per $x \to \pm\infty$, e un asintoto verticale di equazione $x = -1$ per $x \to -1$.

ii) f è composta da funzioni derivabili tranne dove il modulo si annulla, cioè f è sicuramente derivabile in ogni $x \in D \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Il punto $x = 0$ viene studiato a parte. Distinguiamo tra il caso in cui $\frac{x}{x+1} > 0$, cioè $x > 0$ oppure $x < -1$, e il caso in cui $\frac{x}{x+1} < 0$, cioè $-1 < x < 0$.

- se $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) = \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2} \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\},$$

che è strettamente positiva, perciò f è crescente su $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- Se $x \in]-1, 0[$ si ha

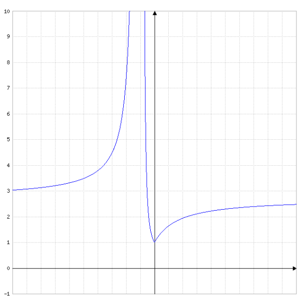
$$f(x) = \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\} \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2} \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\},$$

che è strettamente negativa, perciò f è decrescente su $]-1, 0[$.

Si vede che $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1e^0 = 1$, mentre $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1e^0 = -1$. Perciò f non è derivabile in $x = 0$, che è un punto angoloso. Essendo D un'unione di intervalli aperti, f può avere estremi locali solo dove la derivata si annulla e in punti di non derivabilità. Come osservato sopra, $f'(x) \neq 0$, e l'unico estremo si trova in $x = 0$, dove f ha il suo minimo assoluto con $f(0) = 1$.

iii) Grafico:



Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{k!}{k^k}.$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto asintotico. Si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{3^k k!} = \frac{3(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{3}{e} \text{ per } k \to \infty.$$

Essendo $\frac{3}{e} > 1$, la serie diverge per il criterio del rapporto asintotico.

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Svolgimento. Essendo $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{\frac{5\pi}{4}i}$, l'equazione da risolvere diventa

$$z^3 = \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{4}i}} = e^{-\frac{5\pi}{4}i} = e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Per il teorema di De Moivre le soluzioni sono

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_1 = e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})i} = e^{\frac{11\pi}{12}i} = e^{-\frac{\pi}{12}i}, \quad z_2 = e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})i} = e^{\frac{19\pi}{12}i} = e^{-\frac{5\pi}{12}i}$$

Applicando le formule di bisezione, si ha

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

da cui anche

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

cosicché

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}i \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}i.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha}.$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Con la sostituzione $y=-2/t$ si ha $t=-2/y$, $dt=\frac{2}{y^2}dy$, e quindi

$$\int f_3(t)dt = \int \frac{e^{-2/t}}{3t^3} = \int \frac{e^y}{3}\frac{-y^3}{8}\frac{2}{y^2}dy = -\frac{1}{12}\int ye^y dy.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int f_3(t)dt = -\frac{1}{12}\int ye^y dy = -\frac{1}{12}\left(ye^y - \int e^y dy\right) = \frac{1}{12}(1-y)e^y = \frac{1}{12}\left(1+\frac{2}{t}\right)e^{-2/t}.$$

ii) f_α è continua su $(0,\infty)$. Per qualsiasi $\alpha\in\mathbb{R}$ si ha (per la gerarchia degli infiniti) $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha}=0$. Quindi, la funzione f_α può essere prolungata per continuità in $t=0$, per cui è sempre integrabile in $[0,c]$, per qualsiasi $c>0$. Per $t\to+\infty$, da $\frac{2}{t}\to 0$ si ottiene $e^{-2/t}\sim 1$ per cui

$$f_\alpha(t)\sim\frac{1}{3t^\alpha},$$

ed essendo f_α a segno costante, in virtù del test del confronto asintotico, l'integrale esiste se e solo se $\alpha>1$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x-x^3)-\log(1+\sinh x)+\alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Svolgimento. Il limite si presenta evidentemente come una forma indeterminata $0/0$. Analizziamo il numeratore. Ricordando che (per $t\to 0$)

$$\sin t = t+o(t) = t-\frac{t^3}{6}+o(t^3),\ \ \log(1+t)=t+o(t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3),\ \ \sinh t = t+o(t)=t+\frac{t^3}{6}+o(t^3),$$

si vede che (per $x\to 0^+$)

$$\begin{aligned}\text{Numeratore} &= (x-x^3)-\tfrac{(x-x^3)^3}{6}+o((x-x^3)^3)\\ &\quad -\left(x+\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)-\tfrac12\left(x+\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\tfrac13\left(x+\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o\left(\left(x+\tfrac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)\right)+\alpha x^2\\ &= \left(\alpha+\tfrac12\right)x^2+\left(-1-\tfrac16-\tfrac16-\tfrac13\right)x^3+o(x^3) = \left(\alpha+\tfrac12\right)x^2-\tfrac53x^3+o(x^3)\sim\left(\alpha+\tfrac12\right)x^2-\tfrac53x^3.\end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{Numeratore}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\alpha+\frac12}{x}-\frac53\right) = \begin{cases}\infty, & \alpha>-\frac12,\\ -\infty, & \alpha<-\frac12,\\ -\frac53, & \alpha=-\frac12.\end{cases}$$

Esercizio facoltativo Sia $\alpha\in[0,+\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\,dt,\ x\geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1,+\infty[$. Ci sono valori $\alpha>0$ per cui F_α sia concava su $[0,+\infty[$?

Svolgimento. La funzione F_α è una funzione integrale di $f_\alpha(t) := t^\alpha e^{-t^2}$. Essendo questa ben definita e continua su $[0,+\infty[$ (si ricorda $\alpha \geqslant 0$), anche F_α è ben definita, continua e derivabile (per il teorema fondamentale del calcolo) e

$$F'_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x^2}.$$

Da questa,

$$F''_\alpha(x) = e^{-x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha(-2x)\right) = x^{\alpha-1}e^{-x^2}\left(\alpha - 2x^2\right).$$

Siccome F_α è due volte derivabile, per un noto risultato

$$F_\alpha \text{ concava su } [1,+\infty[, \quad \Longleftrightarrow \quad F''_\alpha(x) \leqslant 0,\ \forall x \in [1,+\infty[.$$

Essendo

$$F''_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha - 2x^2 \leqslant 0, \quad \overset{x\geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

F_α è concava su $[1,+\infty[$ se e solo se $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$, cioè $\alpha \leqslant 2$. Lo stesso calcolo mostra che, per ogni $\alpha > 0$ si ha $F''_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}[$, per cui F_α non può essere concava su $[0,+\infty[$ per alcun valore di $\alpha > 0$. Per $\alpha = 0$, si ha che

$$F''_0(x) = -2xe^{-x^2} < 0 \quad \forall x > 0,$$

dunque F_0 è concava su $[0,+\infty[$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

9 Soluzioni dei temi d'esame da 1h30m per modalità telematica

Appello del 06.07.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3,+\infty[.$$

(i) Calcolare

$$\lim_{x\to-3^+} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Svolgimento.

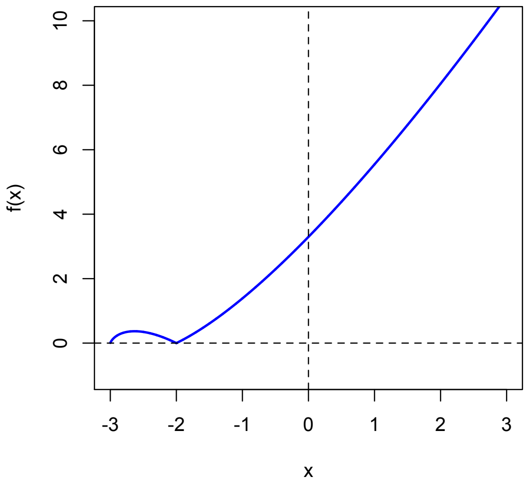
$$\lim_{x\to-3^+} |(x+3)\log(x+3)| = \lim_{x\to-3^+} -(x+3)\log(x+3) = \lim_{x\to-3^+} -\frac{\log(x+3)}{\frac{1}{x+3}} \overset{\text{(De l'Hôpital)}}{=}$$
$$= \lim_{x\to-3^+} x+3 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} |(x+3)\log(x+3)| = \lim_{x\to+\infty}(x+3) \lim_{x\to+\infty}\log(x+3) = +\infty$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione f, studiare gli intervalli di monotonia ed abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. Per ogni x tale che $f(x) \neq 0$, cioè, per ogni $x \in D\backslash\{-2\}$,

$$f'(x) = \operatorname{sgn}\Big((x+3)\log(x+3)\Big)\left(\log(x+3)+1\right)$$



h

$$
\begin{aligned}
&f'(x) \geq 0 \iff \\
x \in &\Big\{x \in D,\ (x+3)\log(x+3) > 0,\ \log(x+3)+1 \geq 0\Big\} \bigcup \\
&\bigcup \Big\{x \in D,\ (x+3)\log(x+3) < 0,\ \log(x+3)+1 \leq 0\Big\} \\
&\iff \\
x \in &\Big\{x > -2 \quad x \geq -3 + \tfrac{1}{e}\Big\} \bigcup \\
&\bigcup \Big\{-3 < x < -2,\ x \leq -3 + \tfrac{1}{e}\Big\} = \\
&\left]-3, -3 + \tfrac{1}{e}\right[\ \bigcup\ ]-2, +\infty[
\end{aligned}
$$

Perciò f è monotona crescente in ognuno degli $\left]-3, -3+\frac{1}{e}\right[$ e $]-2,+\infty[$, mentre è monotona decrescente in $-3+\frac{1}{e}, -2[$. Pertanto la funzione ha un massimo locale nel punto $x = -3+\frac{1}{e}$, dove vale $f\left(-3+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, e un minimo locale nel punto $x=-2$, dove vale $f(-2) = 0$. Dal teorema del limite destro e sinistro delle dertivate si ottiene

$$f'_+(-2) = \lim_{x \to -2+} f'(x) = 1 \qquad f'_-(-2) = \lim_{x \to -2-} f'(x) = -1.$$

Dunque $x = -2$ è un punto angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -x-2$ e tangente destra di equazione $y = x+2$.

Esercizio 2 [6 punti] Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 8i,$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. cominciamo con l' esprimere $8i$ in forma trigonometrica:

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Perciò $8i$ ha modulo $\rho = 8$ e argomento $\theta = \frac{\pi}{2}$. Risolvere l' equazione significa trovare le radici terze di $8i$, che noi sappiamo essere in numero di tre. Diciamole z_0, z_1, z_2. Si ha

$$z_0 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}+i$$

$$z_2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Come sapevamo già dalla teoria, le soluzioni rappresewntate sul piano di Gauss costituiscono i vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio 2. Più precisamente, uno dei tre vertici si trova in $(0,-2)$ e un lato è orizzontale, sottoinsieme della retta $y = 1$.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\log n}{n^4}.$$

Solutione.

Si tratta di una serie a termini positivi. *Proviamo* ad applicare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+(n+1)^2)\log(n+1)}{(n+1)^4}}{\frac{(1+n^2)\log n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4}\frac{(2+n^2+2n)}{(1+n^2)}\frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\log(n(1+1/n)}{\log n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} = 1$$

Purtroppo siamo nel *caso in cui il criterio del rapporto non dà alcuna informazione.*

Tentiamo allora la strada del *confronto* (asintotico).

Il fattore $\dfrac{(1+n^2)}{n^4}$ è asintotico a $\dfrac{1}{n^2}$, che fornirebbe una serie convergente. Tuttavia c'è il fattore $\log n$, che peggiora la situazione. Però noi sappiamo che, per $x \to \infty$ $\log x = o(x^\alpha)$ per qualsiasi $\alpha > 0$: infatti

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha} \overset{\text{(De l'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x}x^{-\alpha+1}) = \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0.$$

Pertanto, scegliendo ad esempio $\alpha = 1/2$, si ha che

$$\frac{(1+n^2)\log n}{n^4} = o\frac{(1+n^2)n^{\frac{1}{2}}}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Poichè la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, per il criterio del rapporto asintotico si conclude che anche la serie data è convergente.

Osservazione. Si sarebbe potuto scegliere un qualsiasi $\alpha \in]0,1[$al posto di $\alpha = \frac{1}{2}$. Invece gli $\alpha \geq 1$ sarebbero stati inservibili, in quanto la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}$ è divergente per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

Svolgimento. Per ogni $r > 0$, calcoliamo l' integrale $\displaystyle\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx$. Con la sostituzione $y(x) = \sqrt{2x}$, cioè $x(y) = \dfrac{y^2}{2}$ si ottiene

$$\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\,dx = \int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-y}\frac{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{dy}\,dy = \int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-y}y dy \overset{\text{(per parti)}}{=} [-e^{-y}y]_0^{\frac{r^2}{2}} + \int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-y}dy = -\frac{r^2e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} - e^{-\frac{r^2}{2}} + 1.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\left(-\frac{r^2e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} - e^{-\frac{r^2}{2}} + 1\right) = 1$$

(perché $\lim_{r\to+\infty}\frac{r^2e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} = \lim_{r\to+\infty}\frac{r^2}{2e^{\frac{r^2}{2}}} = 0$)

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2.$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{6}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2.$$

Usando lo sviluppo di Taylor

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y) \qquad y\to 0$$

(valido per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$), si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

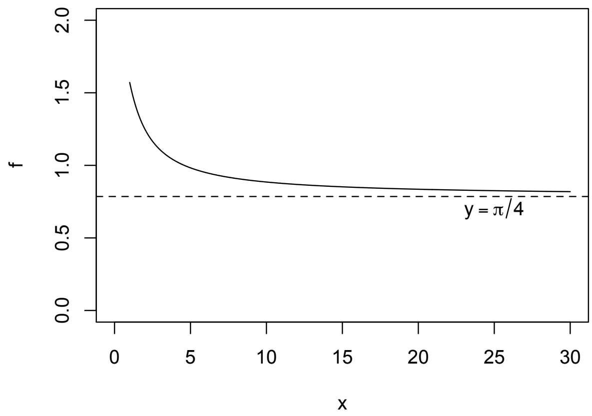
Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 14.09.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x\in(1,+\infty).$$



h

(i) Individuarne gli eventuali asintoti.
(ii) Se ne determini la monotonia.

Svolgimento.

(i) la funzione è definita e continua in tutto il dominio $(1, +\infty)$, pertanto gli eventuali asintoti riguardano solo $x \to 1+$ e $x \to +\infty$. Da

$$\lim_{x\to 1+} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{y=\frac{x+1}{x-1}}{=} \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{y=\frac{x+1}{x-1}}{=} \lim_{y\to 1} \arctan y = \frac{\pi}{4}$$

si ottiene che la funzione ha un asintoto orizzontale per $y \to +\infty$ di equazione $y = \frac{\pi}{4}$.

(ii) Calcoliamo la derivata di f:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{1+\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2+(x+1)^2}.$$

Perciò $\frac{df}{dx}(x) < 0$ per ogni $x \in (1, +\infty)$, da cui segue che la funzione è strettamente decrescente nel dominio $(1, +\infty)$.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$.
(i) Scriverlo in forma esponenziale.
(ii) Calcolare la parte reale di z^6.

Svolgimento.

(i) Si ha $\rho := |z| = \sqrt{3+1} = 2$, da cui

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(ii)

$$Re(z^6) = Re(2^6 e^{-i\pi}) = -64 \quad (= z^6)$$

Esercizio 3 [6 punti] Stabilire la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Svolgimento. (i) In virtù del criterio di Leibniz la serie converge semplicemente:

- ha segni alterni;
- $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente infatti,

$$\frac{n_1}{n_1^2+1} \geq \frac{n_2}{n_2^2+1} \iff n_2(n_1^2+1) \leq n_1(n_2^2+1) \iff (n_2-n_1)(1-n_2n_1) \leq 0 \iff n_2 \geq n_1,$$

(l'ultimo passaggio dovuto al fatto che $(1-n_2n_1) \leq 0$); oppure si calcola la derivata

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \leq 0 \iff |x| \geq 1 \quad \text{se} \quad x \geq 1$$

- si ha $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0.$

(ii) La serie non converge assolutamente, perchè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

è asintotica alla serie armonica.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sinh x)-\sin x}{x^2}.$$

Svolgimento. da

$$\log(1+\sinh x)-\sin x = \sinh x - \frac{(\sinh x)^2}{2} + o((\sinh x)^2) - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{(x)^2}{2} + o(x^2)$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+\sinh x)-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{(x)^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Oppure si applica De l'Hôpital due volte.

Esercizio 5 [6 punti] Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_1^{\infty}\log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right)dx.$$

(i) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(ii) Stabilire per quali $\alpha \in [0,\infty)$ esso converge.

Svolgimento.

(i)

$$\text{lim}_{k\to+\infty}\int_1^k \log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\left(\left[x\log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\right]_1^k - \int_1^k \frac{2}{(1+x^2)}\,dx\right) =$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(k\log\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\arctan k + 2\arctan 1\right)$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(k\log\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\arctan k + 2\arctan 1\right)$$
$$= \log 2 - \pi + \frac{\pi}{2} = \log 2 - \frac{\pi}{2}$$

(ii)

$$\log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right) = \log\left(1-\frac{1}{x^\alpha+1}\right) = -\frac{1}{x^\alpha+1} + o\left(\frac{1}{x^\alpha+1}\right)$$

Per confronto asintotico con $-\frac{1}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 18.01.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right);$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) calcolarne la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti estremanti;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. (i). Iniziamo dallo studio del dominio naturale. Il denominatore $x^2+x+1>0$ è sempre strettamente positivo, in quanto il determinante $\Delta = -3$ è negativo. Considerando anche che il dominio della funzione arctan è tutto $\mathbb{R}$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.
Studiamo il segno di f: poichè $x^2+x+1>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \geq 0$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)\right) = 0.$$

h

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii). La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2} \frac{-2x^2 - x + x^2 + x + 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2\right)(x^2+x+1)^2}(-x^2+1).$$

Dunque

$$f'(x) \geq 0 \iff 1 - x^2 \geq 0 \iff x \in [-1, 1]$$

e

$$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}.$$

Ne deduciamo che f è cresente nell'intervallo $[-1, 1]$, decrescente in $]-\infty, -1]$ ed in $[1, +\infty[$, quindi $x = -1$ è punto di minimo globale mentre $x = 1$ è punto di massimo globale.

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + (-1+i)z^2 - i = 0.$$

Suggerimento: sostituire $w = z^2$.

Svolgimento. Con la sostituzione $w = z^2$ si ottiene

$$w^2 + (-1+i)w - i = 0$$

le cui soluzioni sono

$$w_{1,2} = \frac{1 - i + \sqrt{2i}}{2} = \frac{1 - i \pm (1+i)}{2} = \{1, \, -i\}.$$

Perciò, le soluzioni sono 4 e coincidono con l'unione delle soluzioni di $z^2 = 1$ e $z^2 = -i$, vale a dire

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}.$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Svolgimento. (i).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{2n}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{n}}\right)^2 = e^{-2}.$$

(ii). Poiché la serie è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto asintotico ed il risultato di (i), ottenendo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n^{2n}}{(2n)!(n+1)^{2n+2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)n^{2n}}{(n+1)^2(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2+6n+2)n^{2n}}{(n^2+2n+1)(n+1)^{2n}} \\ &= 4\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 4e^{-2}.\end{aligned}$$

Vale $4e^{-2} < 1$; la serie è convergente.

Esercizio 4 [8 punti] Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha}.$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza

$$\int_0^{\log 2} f_\alpha(x)\, dx.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx.$$

Svolgimento. (a). Si tratta di un integrando a valori positivi quindi possiamo sfruttare il criterio del confronto asintotico. Da

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha} = \frac{1}{x + o(x) + x^\alpha}$$

otteniamo che, per $x \to 0$ la funzione è asintotica a $\frac{1}{x}$ se $\alpha > 1$, a $\frac{2}{x}$ se $\alpha = 1$ e a $\frac{1}{x^\alpha}$ se $\alpha < 1$. Perciò l'integrale converge $\iff \alpha < 1$.

(b) Con la sostituzione $t = e^x$ (cioè $x = \log t$) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} f_0(x)\,dx &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{\sinh x + 1}dx = \int_0^{\log 2} \frac{2}{e^x - e^{-x} + 2}dx = \int_1^2 \frac{2}{(t - t^{-1} + 2)t}dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t^2 + 2t - 1}dt.\end{aligned}$$

Le radici di $t^2 + 2t - 1 = 0$ sono $-1 \pm \sqrt{2}$, dunque

$$\frac{1}{t^2 + 2t - 1} = \frac{A}{t + 1 - \sqrt{2}} + \frac{B}{t + 1 + \sqrt{2}}$$

per opportuni $A, B \in \mathbb{R}$. Si ha $1 = A(t + 1 + \sqrt{2}) + B(t + 1 - \sqrt{2})$, da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

dunque

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

e perciò $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ne deduciamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} f_0(x)\,dx &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^2 \frac{1}{t + 1 - \sqrt{2}}dt - \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^2 \frac{1}{t + 1 + \sqrt{2}}dt\right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\log|t + 1 - \sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2}\log|t + 1 + \sqrt{2}|\right]_1^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 08.02.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2 + 1}}.$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. (i). Iniziamo dal dominio naturale. Il denominatore $x^2+1 > 0$ è sempre strettamente positivo. Il numeratore $|x|$ è sempre maggiore o uguale di zero. Considerando che il dominio della funzione radice è

$[0, \infty)$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.
Studiamo il segno e le simmetrie di f. La funzione è pari: $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre essa ha sempre valori non negativi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}} \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii) Studiamo la derivabilità di f. Si ha che $f \in C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ in quanto composizione di funzioni $C^{(1)}(\mathbb{R})$, esclusa la funzione $g(x) = |x|$ che sta solo in $C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(x^2+1) - |x|2x}{(x+1)^2}.$$

Dunque,

$$\{x > 0 \text{ e } f'(x) > 0\} \iff (x^2+1) - 2x^2 > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x \in]0, 1[$$

e

$$\{x > 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = 1$$

Per simmetria, si ha

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) > 0\} \iff x \in]-\infty, -1[$$

e

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = -1.$$

Inoltre, per il teorema del limite della derivata,

$$\lim_{x\to0+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{(-1)(1-x^2)}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} = \lim_{x\to0^-} \frac{-1}{2\sqrt{|x|}} = -\infty$$

perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha una cuspide.

Dalla precedente analisi e dalla continuità della funzione si ha che la funzione è crescente in ognuno dei due intervalli $[0, 1]$ e $]-\infty, -1]$ ed è decrescente in ognuno dei due intervalli $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$.

Inoltre vi è un massimo (risp. minimo) globale in $x = 1$ (risp. $x = -1$).

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1+i}{1-i},$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

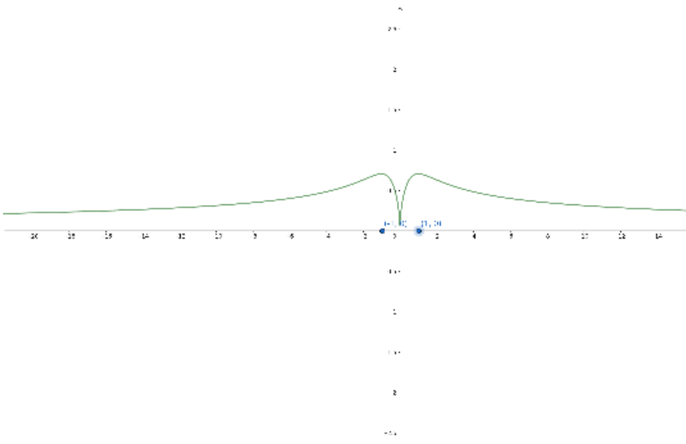


Figura 19: Il grafico di f.

Svolgimento. Da

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

otteniamo

$$z^3 = \frac{8}{i} = -8i.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le (tre) radici terze di $-8i = 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$, cioè

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{2}\pi} = 2i, \ \ z_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i, \ \ z_3 = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$$

e sono disegnate nella figura seguente

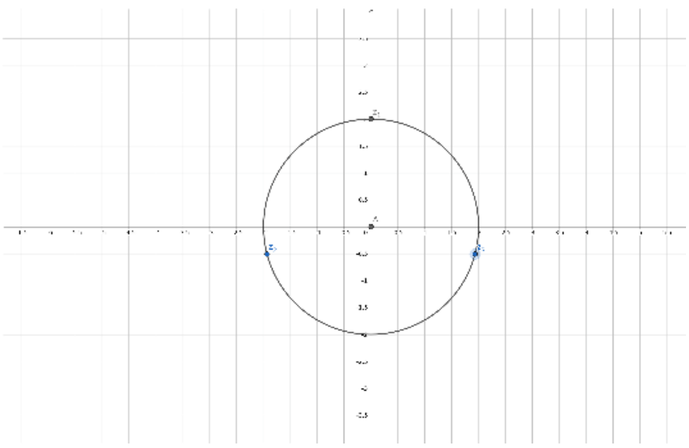


Figura 20: Le soluzioni dell'esercizio 2.

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\int \log(t+1)\,dt.$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Svolgimento.(i) Per parti:

$$\begin{aligned}\int \log(t+1)\,dt &= \log(t+1)t - \int \frac{t}{t+1}dt\\ &= t\log(t+1) - \int \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\ &= t\log(t+1) - t + \log|t+1| + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_{\sqrt{c}}^1 \frac{\log(t+1)}{t}2t\,dt\\ &= \lim_{c\to 0+} 2\int_{\sqrt{c}}^1 \log(t+1)\,dt\\ &= \lim_{c\to 0+} 2\left[t\log(t+1) - t + \log(t+1)\right]_{\sqrt{c}}^1\\ &= 2(2\log 2 - 1)\end{aligned}$$

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|n\left(\cos(1/n)-1\right) + \frac{\alpha}{n}\right|.$$

Svolgimento. (i)

$$n\left(\cos(1/n)-1\right) + \frac{\alpha}{n} = n\left(-\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4})\right) + \frac{\alpha}{n} = \frac{-1/2+\alpha}{n} + \frac{1}{24n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

è di ordine 1 per ogni $\alpha \neq 1/2$ e di ordine 3 per $\alpha = 1/2$.

(ii) La serie è a termini di segno costante. Da quanto visto nel punto precedente, il termine generale della serie verifica le seguenti asintoticità

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{-1/2+\alpha}{n} & \text{se } \alpha \neq 1/2\\ \frac{1}{24n^3} & \text{se } \alpha = 1/2.\end{cases}$$

Applicando il teorema del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, otteniamo che la serie converge se $\alpha = 1/2$ e diverge se $\alpha \neq 1/2$.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 05.07.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right).$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.
Svolgimento. (i). Per determinare il dominio bisogna imporre che il radicando sia nonnegativo e l'argomento del logaritmo sia positivo. La disuguaglianza $1-x^2 \geq 0$ ha come soluzioni $x \in [-1,1]$. Per questi valori di x, è ovvio che l'argomento del logaritmo sia positivo. Quindi

$$\text{dom}(f)\text{=[-1,1]}.$$

Per individuare eventuali simmetrie, osserviamo che vale

$$f(-x) = \log\left(1+\sqrt{1-(-x)^2}\right) = f(x);$$

la funzione è pari.
Studiamo il segno della funzione: $f(x) \geq 0$ equivale a

$$1+\sqrt{1-x^2} \geq 1 \qquad \text{cioè} \qquad \sqrt{1-x^2} \geq 0.$$

Poiché $\sqrt{\ldots}$ è sicuramente nonnegativo, deduciamo che la funzione è sempre nonnegativa e si annulla solo in $x = \pm 1$ che sono pertanto punti di minimo assoluto (con $f(\pm 1) = 0$).
Per il teorema sull'algebra delle funzioni continue e per quello sulla composizione di funzioni continue, $f \in C^0(dom(f))$. Ne deduciamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0$$

ed analogamente, per simmetria, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$.

(ii). In $(-1,1)$, per il teorema sull'algebra delle derivate e quello sulla derivata della funzione composta, otteniamo che la f è derivabile. La derivabilità in ± 1 va studiata separatamente. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Poiché vale $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$ (e per simmetria $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$), concludiamo che f non è derivabile in $x = \pm 1$. Inoltre, gli intervalli di crescenza sono determinati da $f' \geq 0$ cioè $x \leq 0$. Ne deduciamo che

- f è crescente in $[-1,0]$
- f è decrescente in $[0,-1]$
- $x = 0$ è l'unico punto di massimo assoluto
- $x = \pm 1$ sono punti di minimo assoluto (già lo sapevamo).

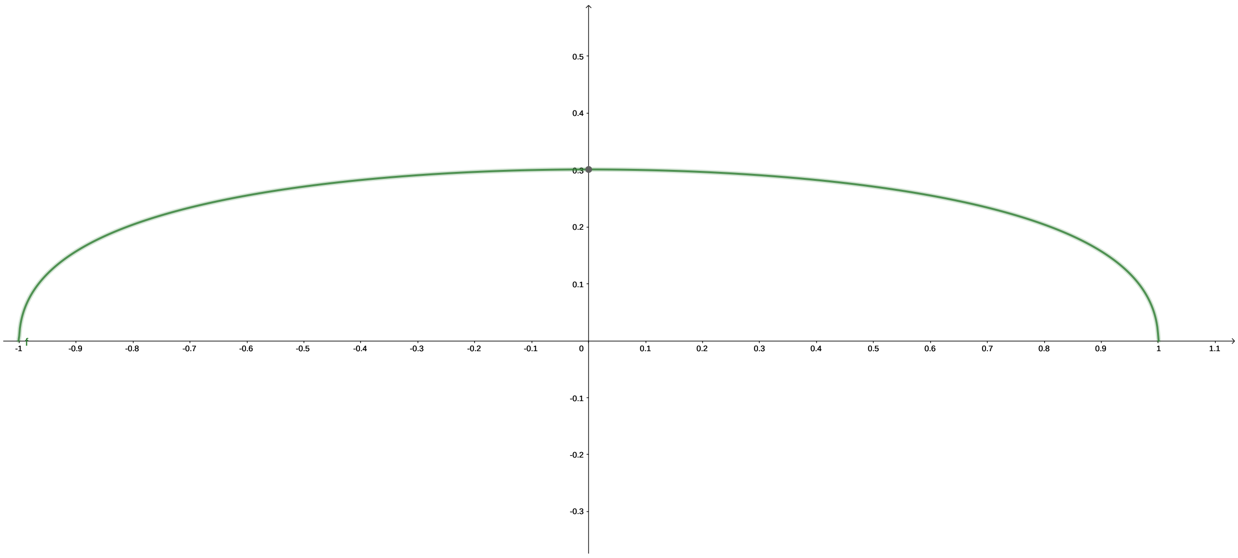


Figura 21: grafico dell'esercizio 1

(iii). Si veda il grafico in figura 1.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

e le si disegnino sul piano complesso.
Svolgimento. Innanzitutto notiamo che l'equazione ha senso solo per $z \neq 0$. Per tali valori di z risolviamo l'equazione usando la forma algebrica dei numeri complessi: $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy, \qquad |z|^2 = x^2 + y^2, \qquad \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

L'equazione iniziale diventa

$$2xy + x = 0 \qquad \text{cioè} \qquad x(2y+1) = 0$$

che ha soluzioni

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{2}$$

che formano le due rette (per $z \neq 0$) nel grafico in Figura 2.

Esercizio 3 [8 punti]
Sia

$$f_\alpha(x) := \frac{\arctan x}{1 + x^{2\alpha}}.$$

(i) Calcolare

$$\int f_1(x)\,dx = \int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx.$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in [0, \infty)$ la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx.$$

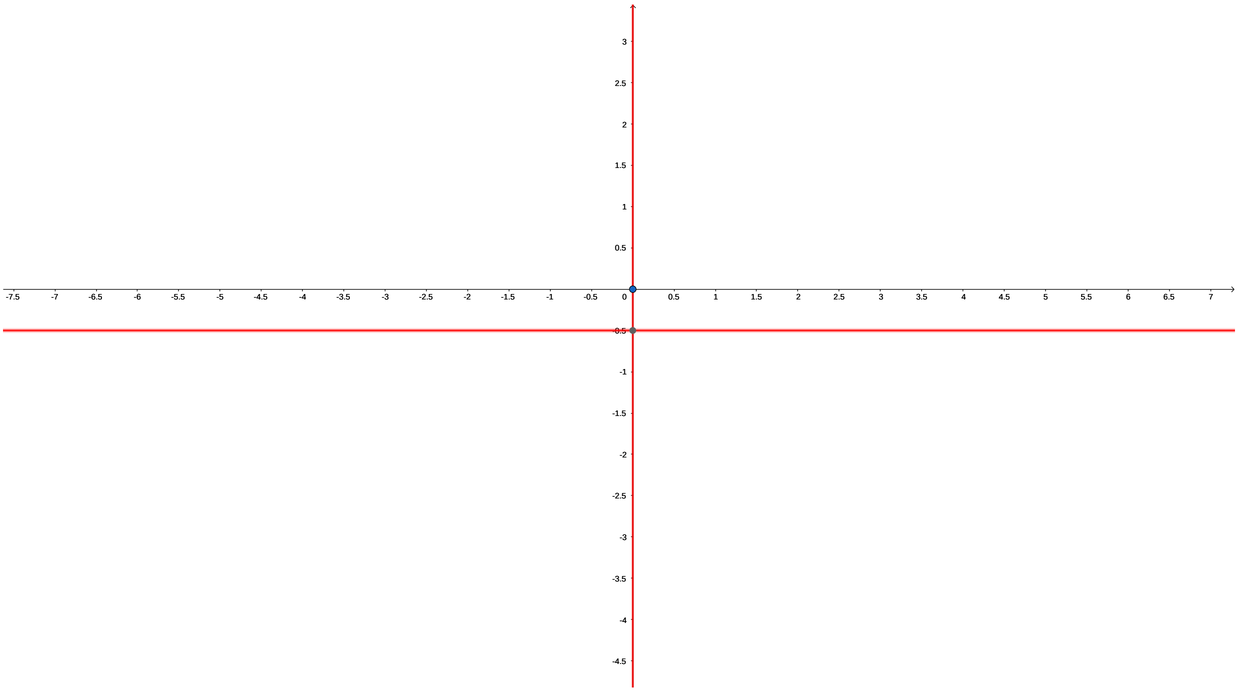


Figura 22: grafico dell'esercizio 2

Svolgimento. (i). Usando la sostituzione $\arctan x = t$ (ricordarsi: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$) otteniamo

$$\int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arctan^2 x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(ii). Osserviamo $f \in C^0([1,+\infty))$ (e $f > 0$ su $[1,+\infty)$); quindi l'integrale è improprio solo per $x \to +\infty$. Studiamo l'asintoticità di f_α per $x \to +\infty$:

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1+x^{2\alpha}} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Applicando il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri (e ricordando che $\int_1^{+\infty} x^a dx$ converge se e solo se $a < -1$) otteniamo che l'integrale di partenza è convergente se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + \alpha[\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2}.$$

(ii) Dedurre il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2\right\}.$$

Svolgimento. (i). Usando gli sviluppi di Mc Laurin di $\cos x$ e di $\log(1+x)$, per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\log[\cos(1/n)] &= \log\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + +o\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Inoltre, usando lo sviluppo di Mc Laurin di $\sin x$, per $n \to +\infty$ abbiamo

$$[\sin(1/n)]^2 = \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Deduciamo che il numeratore verifica

$$\text{num.} = (\alpha - 1)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

conseguentemente vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + \alpha[\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2} = \alpha - 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(ii). Osserviamo che il punto precedente con $\alpha = 1$ dà

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2} = 0$$

cioè

$$2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2 = o[(1/n)^2] \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Ne deduciamo in particolare che il termine della nostra serie è definitivamente positivo. Inoltre, applicando il criterio del confronto asintotico e ricordando che $\sum(1/n)^2$ è convergente, otteniamo che la serie è convergente.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 13.09.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} \quad .$$

(i) Determinarne il dominio naturale; studiarne la periodicità, il segno e la simmetria di f;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzarne il grafico.

Svolgimento. (i). La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$1 - 2\cos x \neq 0 \iff \cos x \neq \frac{1}{2} \iff x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Chiaramente la funzione è periodica con periodo 2π. Inoltre

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} = \frac{|\sin(-x)|}{1 - 2\cos(-x)} = f(-x)$$

perciò la funzione è pari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all' asse delle ordinate.

Limito lo studio al dominio $[-\pi, \pi]\backslash\{\pm\frac{\pi}{3}\}$; calcolo il limite agli estremi

$$\lim_{x\to\pi/3-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pi/3+} f(x) = +\infty.$$

(ii). Per ogni punto del dominio tale che $|\sin x| \neq 0$, cioé $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$f'(x) = \frac{\cos x\frac{|\sin x|}{\sin x}(1 - 2\cos x) - 2\sin x|\sin x|}{(1 - 2\cos x)^2} = \frac{|\sin x|}{(1 - 2\cos x)^2}\Big(\frac{\cos x}{\sin x}(1 - 2\cos x) - 2\sin x\Big)$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{\sin x}\left(\cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x\right) = \frac{1}{\sin x}(\cos x - 2) \geq 0$$

In $]0, \pi[\backslash\pi/3$ si ha $\sin x > 0$ e $\cos x - 2 < 0$, dunque $f'(x) < 0$, perciò le restrizioni agli intervalli $]0, \pi/3[,]\pi/3, \pi[$ sono strettamente decrescenti. Per simmetria le restrizioni agli intervalli $]-\pi/3, 0[,]-\pi, -\pi/3[$ sono strettamente crescenti. e, la funzione ha un minimo locale in π, di valore $f(\pi) = 0$ e dunque in ogni punto $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x\to 0+} f'(x) = -1 \quad \lim_{x\to\pi-} f'(x) = -\frac{1}{3} \lim_{x\to-\pi+} f'(x) = \frac{1}{3};$$

quindi la funziona presenta punti angolosi in $k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
(iii). Vedi figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\frac{z+1}{z}\right| \geq 1$$

e le si disegnino sul piano complesso.
Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che il campo di esistenza della disuguaglianza è dato da $|z| \neq 0$ cioè da $z \neq 0$. Forniamo due metodi di soluzione.

1. Eleviamo al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{|z+1|^2}{|z|^2} \geq 1 \iff (x+1)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \iff 1 + 2x \geq 0 \iff x \geq -1/2$$

2. $$\left|\frac{z+1}{z}\right| \geq 1 \iff \left|1 + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right| \geq 1 \iff \left|x^2 + y^2 + x - iy\right| \geq x^2 + y^2$$

   se e solo se

   $$x^4 + y^4 + x^2 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 + y^2 \geq x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$

   se e solo se

   $$x^2 + 2x^3 + 2xy^2 + y^2 \geq 0 \iff (2x+1)(x^2 + y^2) \geq 0 \iff 2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1/2.$$

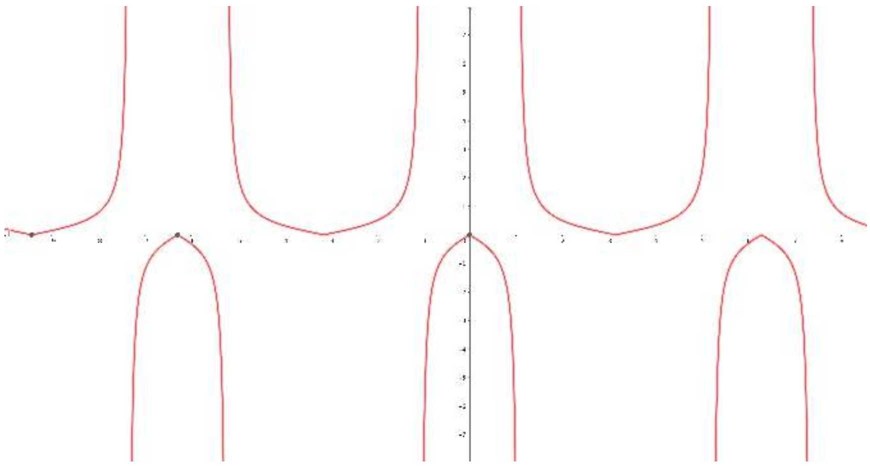


Figura 23: Il grafico di f.

Le soluzioni sono i numeri complessi $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) tali che: $z \neq 0$ e $x \geq -1/2$.

Esercizio 3 [8 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Usando lo sviluppo di McLaurin di $\sin x$ si ottiene che è asintotica alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} n^{\alpha-3},$$

in particolare è una serie a termini positivi. Possiamo pertanto applicare il criterio del confronto asintotico e dedurre che essa è convergente se e solo se $\alpha - 3 < -1$, cioè $\alpha < 2$, ed è divergente per $\alpha \geq 2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} \, dx.$$

Svolgimento. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)\Big|_{-1}^{0} - \arctan(x+1)\Big|_{-1}^{0} \\ &= \frac{1}{2}\log(2) - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

10 Soluzioni dei Temi d'esame da 2h - dal 17.01.2022 al 01.07.2023

Appello del 17.01.2022 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x+1|}{x^2+4}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale:

$$Dominio = \mathbb{R};$$

studiarne il segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{|x+1|}{x^2+4} \geq 0 \qquad \text{Dunque } f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}.\ \text{Inoltre } f(x) = 0 \iff x = -1;$$

calcolare i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{|x+1|}{x^2+4}\right) \underset{y=\frac{|x+1|}{x^2+4}}{=} \lim_{y\to 0} \arctan y = 0,$$

dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

(ii) Studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima:
Studiamo f separatamente nelle regioni
$x > -1 \iff |x+1| = x+1$ e
$x < -1 \iff |x+1| = -(x+1)$, per cui si ha:

$$f(x) = \arctan\left(\mp\frac{(x+1)}{x^2+4}\right) \qquad x \lesseqgtr -1,$$

e quindi

$$f'(x) = \frac{\mp\frac{x^2+4-2x(x+1)}{(x^2+4)^2}}{1+\frac{(x+1)^2}{(x^2+4)^2}} = \pm\frac{x^2+2x-4}{(x^2+4)^2+(x+1)^2} \qquad \text{if } \lesseqgtr -1,$$

$$\lim_{x\to -1-} f'(x) = -\frac{1}{5} \qquad \lim_{x\to -1+} f'(x) = \frac{1}{5} \implies f'_-(-1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_+(-1) = \frac{1}{5}.$$

Dunque la funzione è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ mentre in $x=-1$ vi è un punto angoloso.

Studiare gli intervalli di monotonia:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2x-4 \geq 0 \\ x < -1 \end{cases} \iff x \leq -1-\sqrt{5}$$

Dunque la funzione è strettamente crescente in $]-\infty, -1-\sqrt{5}[$ e strettamente decrescente in $]-1-\sqrt{5}, -1[$. Inoltre

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2x-4 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \iff -1 < x \leq -1+\sqrt{5}.$$

Dunque la funzione è strettamente crescente in $]-1, -1+\sqrt{5}[$ e strettamente decrescente in $]-1+\sqrt{5}, +\infty[$. Infine,

$$f'(-1+\sqrt{5}) = f'(-1-\sqrt{5}) = 0$$

e i punti $-1-\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ sono di massimo relativo. Da $f(-1)=0$, il punto $x=-1$ è punto di minimo assoluto.

(iii) abbozzare il grafico di f.

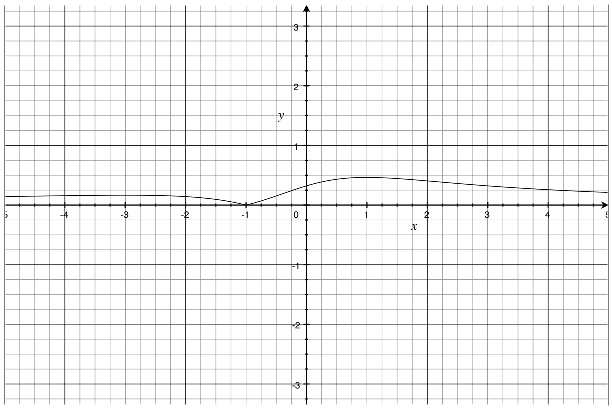


Figura 24: Grafico della funzione.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -8 \iff z^3 = 8i = 8\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$

Dobbiamo cioè trovare le radici terze di $8i$, cioè, con la formula di De Moivre,

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = \sqrt{3}+i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\sqrt{3}+i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -2i.$$

(Stanno sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di raggio 2 con un vertice in $= -2i$)

Esercizio 3 [7 punti]

(i) Mediante opportuni sviluppi di Taylor, determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, uno sviluppo della successione

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Si ha

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) - \alpha\frac{1}{n^3} + \alpha\frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{\alpha}{n^6}\right) =$$

$$= \frac{1-6\alpha}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-6\alpha}{6n} - \frac{1}{120n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

segue che, per $\alpha = \frac{1}{6}$, il termine generico della serie è sempre negativo per n sufficientemente grande ed è asintotico a $\frac{1}{n^3}$. Pertanto la serie converge. Se invece $\alpha \neq \frac{1}{6}$, il termine generico della serie è di segno costante per n sufficientemente grande ed è asintotico a $\frac{1}{n}$. Pertanto la serie diverge per $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

Esercizio 4 [8 punti]

(i) Usando la definizione, calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt;$$

Consideriamo la sostituzione $y = \arctan t$, che implica $dy = \frac{1}{1+t^2}dt$:

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt = \lim_{c\to+\infty}\int_0^{\arctan c} \frac{y}{y^2+8y+17}\, dy =$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\log((y+4)^2+1) - 4\arctan(y+4)\right]_0^{\arctan c}$$

$$= \frac{1}{2}\log((\pi/2+4)^2+1) - 4\arctan(\pi/2+1) - \frac{1}{2}\log 17 + 4\arctan(4)$$

dove abbiamo usato:

$$\int \frac{y}{y^2+8y+17}dy = \int \frac{y}{y^2+8y+16+1}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2(y+4)}{(y+4)^2+1}dy - 4\int \frac{1}{(y+4)^2+1}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\log((y+4)^2+1) - 4\arctan(y+4) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Facoltativo discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{2\alpha}(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt;$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'integrando, per $t \to +\infty$, è asintotico a

$$\frac{C}{t^{4\alpha}}$$

per una opportuna costante $C > 0$, dunque l'integrale converge per

$$4\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{4}.$$

Appello del 07.02.2022

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log\left(|x| - x^2 + 2\right),$$

(i) determinarne il dominio naturale; determinarne la eventuale simmetria e il segno.

$$x \in \text{Dominio} \iff |x| - x^2 + 2 > 0 \quad \iff |x|^2 - |x| - 2 < 0 \;\; (\text{da } x^2 = |x|^2)$$

disequazione che è risolta da

$$|x| \in \,]-1, 2[\; \iff |x| \in [0, 2[\; \iff x \in \,]-2, 2[$$

Dunque Dominio$=\,]-2, 2[$

La funzione è chiaramente pari.

La funzione è continua perché composta di funzioni continue.

In alternativa si sarebbe potuto anche argomentare come segue.

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x - x^2 + 2\right) & \forall x \geq 0 \\ \log\left(-x - x^2 + 2\right) & \forall x < 0 \end{cases}$$

Si osserva che f è pari, e si limita lo studio a $x \geq 0$. Dunque $x \in$ Dominio e $x \geq 0$ se e solo se $x - x^2 + 2 > 0$ e $x \geq 0$, cioè $x \in [0, 2[$. Poiché f è pari, risulta

$$\text{Dominio} =]-2, 2[$$

.

Inoltre

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - x^2 + 2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Per simmetria si conclude che

$$f(x) \geq 0 \iff x \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty \quad \text{che per simmetria implica} \quad \lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$$

così in 2 e -2 ci sono due asintoti verticali.
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo e di minimo sia relatvi che assoluti:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \dfrac{1-2x}{x-x^2+2} > 0 \end{cases} \iff x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

Inoltre $f'(x) = 0, \ x > 0$ se e solo se $x = \frac{1}{2}$ Poichè f è continua nel suo dominio, se ne deduce che f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, strettamente decrescente in $\left[\frac{1}{2}, 2\right[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{1}{2}$.

Per simmetria si ha anche che f è strettamente decrescente in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, strettamente crescente in $\left]-2, -\frac{1}{2}\right[$, e ha un punto di massimo relativo in $x = -\frac{1}{2}$.

In particolare $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ sono punti di massimo assoluto.
Per $x = 0$ (la funzione è continua): $f(0) = \log 2$. $x = 0$ è dunque punto di minimo relativo (ma non assoluto perché f tende a $-\infty$ agli estremi).
Si ha inoltre $\lim_x \to 0^+ f'(x) = 1/2 = f'_+(0)$, che per simmetria implica $f'_-(0) = -1/2$, Dunque 0 è un punto angoloso.

(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare l'insieme A dei numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{|z + i\mathcal{I}m(z)|^2}{|z|^2 + \mathcal{R}e(z)^2} \geq 1$$

e disegnarlo nel piano complesso.

Se scriviamo $z = x + iy$, la disequazione diventa

$$\frac{|x + 2yi|^2}{2x^2 + y^2} = \frac{x^2 + 4y^2}{2x^2 + y^2} \geq 1$$

Il numeratore è 0 se e e solo se $(x, y) = (0, 0)$. Negli altri punti è positivo, perciò per $(x, y) \neq (0, 0)$ la disequazione è equivalente a

$$x^2 + 4y^2 \geq 2x^2 + y^2 \iff$$

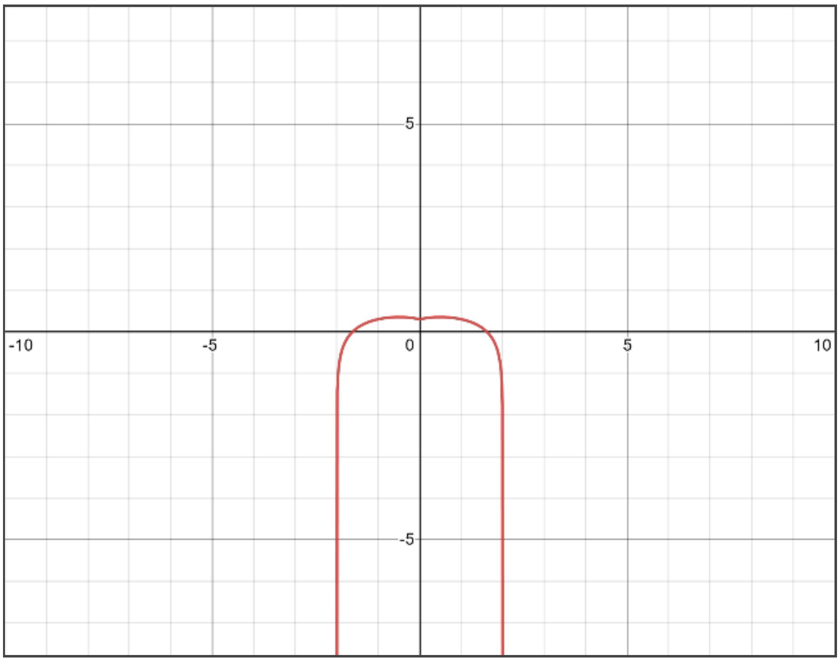
$$3y^2 - x^2 = (\sqrt{3}y - x)(\sqrt{3}y + x) \geq 0 \iff$$

$$x + iy \in \left\{x + iy, \ y \leq x/\sqrt{3}, \ y \leq -x/\sqrt{3}\right\} \bigcup \left\{x + iy, \ y \geq x/\sqrt{3}, \ y \geq -x/\sqrt{3}\right\}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left\{\alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$$

Desmos | Elaboratore grafico https://www.desmos.com/calculator?lang=it

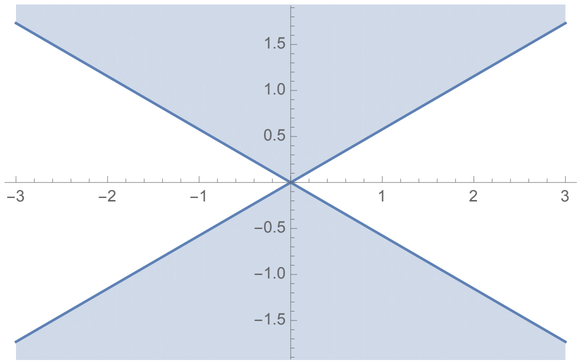


1 di 2 31/01/2022, 15:34

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Da

$$
\begin{aligned}
n\left\{\alpha \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right) + \log\left[\cosh\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\} &= \\
= n\left\{\alpha\frac{1}{n^2} + \alpha\cdot o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \log\left[1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right]\right\} &= \\
= n\left\{\alpha\frac{1}{n^2} + \alpha\cdot o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{12n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\} &=
\end{aligned}
$$



$$= (2\alpha+1)\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

deduciamo che essa è una serie a segno definitivamente costante e, applicando il criterio del confronto asintotico, che converge se e solo se $2\alpha+1=0$, i.e. $\alpha=-1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando l'integrazione per parti, calcolare

$$\int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\, dx.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}\int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\, dx &= \int \arctan\left(\frac{2}{x}\right)\, dx \\ &= x\arctan\left(\frac{2}{x}\right) + \int \frac{2}{x(1+4/x^2)}dx \\ &= x\arctan\left(\frac{2}{x}\right) + \int \frac{2x}{x^2+4}dx \\ &= x\arctan\left(\frac{2}{x}\right) + \log(x^2+4) + c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Facoltativo. Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\, dx$$

al variare di $\alpha > 0$.

Osserviamo che la funzione integranda è sempre $C^{(0)}((0,+\infty))$ e nonnegativa. All'estremo $x=0$ l'integrando tende a $\pi/2$ dunque

$$\int_0^1 \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\, dx$$

è integrabile per ogni $\alpha > 0$. Studiamo l'integrabilità di

$$\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right)\, dx$$

Se $\alpha \leq 3$ l'argomento dell' arcotangente è sempre > 1 per cui $\arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right) > \pi/4$. Ne consegue che l'integrale diverge. Se $\alpha > 3$, l'argomento di arcotangente tende a zero per $x \to +\infty$, e l'integrando è asintotico a $1/x^{\alpha-3}$. Dunque l'ultimo integrale converge se e solo se $\alpha - 3 > 1$, cioè $\alpha > 4$.

In conclusione

$$\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x^3+1}{x^\alpha}\right) dx$$

converge se e solo se $\alpha > 4$.

Appello del 01.07.2022

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}}.$$

(i) determinare il dominio di f ed il segno di f;

$$Dominio = \mathbb{R}\backslash\{2\}$$

e

$$f(x) > 0$$

per ogni $x \in Dominio$, perché prodotto di due funzioni positive.
(ii) calcolare i limiti significativi di f;

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}} = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2\pm} |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)^2}} \underset{y=\frac{1}{(x-2)^2}}{=} \lim_{y\to+\infty} y^{-\frac{1}{2}}\, e^y = +\infty$$

(iii) calcolare la derivata di f, discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto; Per ogni $x > 2$

$$\frac{df}{dx}(x) = e^{\frac{1}{(x-2)^2}} - 2(x-2)e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\frac{1}{(x-2)^3} = e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\Big(1 - \frac{2}{(x-2)^2}\Big) = e^{\frac{1}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$$

Analogamente, Per ogni $x < 2$

$$\frac{df}{dx}(x) = -\Big(e^{\frac{1}{(x-2)^2}} - 2(x-2)e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\frac{1}{(x-2)^3}\Big) = -e^{\frac{1}{(x-2)^2}}\Big(1 - \frac{2}{(x-2)^2}\Big) = -e^{\frac{1}{(x-2)^2}} \cdot \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$$

Dunque, poiché $x^2 - 4x + 2 > 0$ se e solo se $x > 2+\sqrt{2}$ o $x < 2-\sqrt{2}$, si ha che $\frac{df}{dx}(x) > 0$ se e solo se $x > 2+\sqrt{2}$ o $2-\sqrt{2} < x < 2$, mentre $\frac{df}{dx}(2+\sqrt{2}) = \frac{df}{dx}(2-\sqrt{2}) = 0$.

Inoltre $f(2+\sqrt{2}) = f(2-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Dunque la funzione è strettamente crescente in $[2-\sqrt{2}, 2[$ e in $[2+\sqrt{2}, +\infty[$, è strettamente decrescente in $]-\infty, 2-\sqrt{2}[$ e in $]2, 2+\sqrt{2}]$, cosicché in $2+\sqrt{2}$ e in $2-\sqrt{2}$ essa ha due minimi relativi che sono anche assoluti. Inoltre la funzione è illimitata superiormente.
(iv) calcolare eventuali asintoti di f;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-2)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}}}{x} = 1\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2-x)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}}}{x} = -1\cdot 1 = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = (x-2)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}} - x =$$

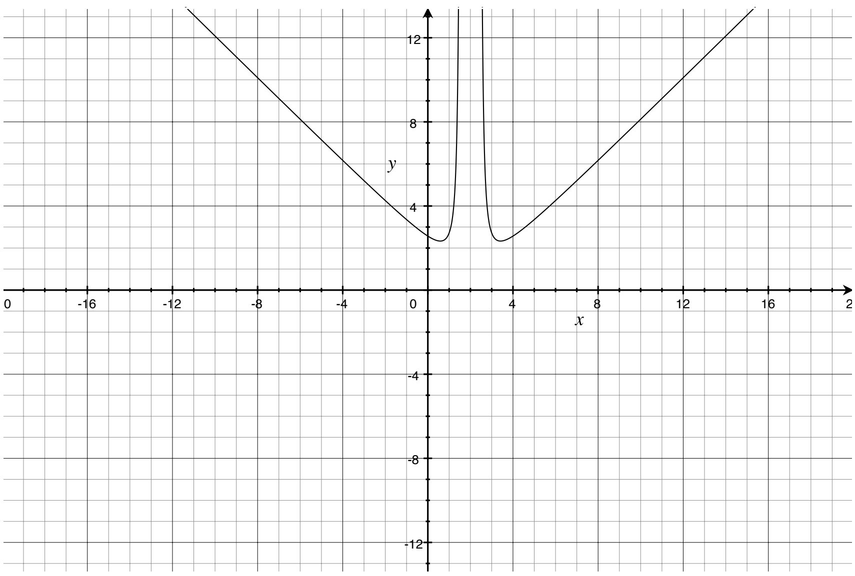
Utilizzo lo sviluppo di e^y per $y\to 0$, con $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x - 2 + \frac{x-2}{(x-2)^2} + o\left(\frac{1}{(x-2)}\right) - x \right) = -2$$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)+x) = (2-x)\,e^{\frac{1}{(x-2)^2}} - x = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - x + \frac{2-x}{(x-2)^2} + o\left(\frac{1}{(x-2)}\right) + x \right) = 2$$

In conclusione, per $x\to+\infty$, si ha l' asintoto $y = -2 + x$ e per $x\to-\infty$, si ha l' asintoto $y = 2 - x$
(v) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.



Esercizio 2 [8 punti] Determinare in forma algebrica le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + (-2-2i)z^2 + 4i = 0.$$

Pongo $w := z^2$. L'equazione per w è

$$w^2 + (-2-2i)w + 4i = 0$$

le cui soluzioni sono

$$w_1 = 1 + i + r_1, \;\; w_2 = 1 + i + r_2$$

dove r_1, r_2 sono le radici quadrate di $(1+i)^2 - 4i = 1 - 2i - 1 = -2i$. Cioè $r_1 = -1 + i$ e $r_2 = 1 - i$, da cui $w_1 = 2i, w_2 = 2$ per cui le soluzioni si trovano unendo le soluzioni $z^2 = 2i$ a quelle di $z^2 = 2$. Ne segue (con il solito de Moivre) che le soluzioni sono

$$z_1 = 1 + i, z_2 = -1 - i, z_3 = \sqrt{2},\ z_4 = -\sqrt{2}$$

Esercizio 3 [7 punti]
(i) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^{\alpha x} - 1}{x^2}.$$

Utilizzando il principio di sostituzione nel prodotto/quoziente di limiti con funzioni asintotiche, osservando che, per $x \to 0^+$, $e^{\alpha x \log(1+x)} - 1 \sim \alpha x \log(1+x) \sim \alpha x^2$, si ottiene

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+x)^{\alpha x} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\log(1+x)^{\alpha x}} - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x \log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha x^2}{x} = \alpha.$$

Esercizio 4 [8 punti] (i) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}\, dt.$$

Pongo $y := \sqrt{t}$, per cui $dy = \frac{1}{2}(\sqrt{t})^{-1} dt = \frac{1}{2} y^{-1} dt$, cioè $dt = 2y dy$. Si ha dunque

$$\int \frac{\sqrt{t}}{1+t}\, dt = 2 \int \frac{y^2}{1+y^2} dy = 2 \left[\int \frac{1+y^2}{1+y^2} dy [- \int \frac{1}{1+y^2} dy \right] =$$
$$2\left(y - \arctan(y)\right) + c = 2\left(\sqrt{t} - \arctan(\sqrt{t})\right) + c, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

(ii) Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha}\, dt$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Per $t \to 0+$, se $\alpha \geq 0$ la funzione integranda è continua nello 0. Se invece $\alpha < 0$ la funzione è prolungabile per continuità, uguale a 0 nello 0. Dunque non ci sono problemi di integrabilità in un intorno destro di 0.

Per $t \to +\infty$, se $\alpha < 0$, $\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \sim \sqrt{t}$ che non è integrabile per $t \to +\infty$. Se $\alpha = 0$ $\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \sim \frac{\sqrt{t}}{2}$ che, similmente, non è integrabile per $t \to +\infty$. Se $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{t}}{1+t^\alpha} \sim \frac{1}{t^{\alpha - \frac{1}{2}}}$, che per $t \to +\infty$ è integrabile se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > 1$ cioé, se e solo se $\alpha > \frac{3}{2}$.

Appello del 12.09.2022

TEMA 1: svolgimento

Esercizio 1 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne la eventuale periodicità e l'eventuale simmetria, calcolarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, individuare gli intervalli di monotonia e i punti di minimo e di massimo, sia relativi che assoluti, ed eventuali estremo inferiore e superiore;
(iii) abbozzare il grafico di f.
Svolgimento
(i)

$$\text{Dominio naturale} = D := \{x : \ \sin x \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{n\pi, \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Poiché sin è periodica di perido 2π, anche f lo è. Inoltre sin è dispari, cosÃň anche f lo è; in altre parole:

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin(-x)}\right) = \arctan\left(-\frac{1}{\sin x}\right) = -f(x) \qquad \forall x \in D.$$

È dunque sufficiente studiare la funzione nel sottodominio $]0,\pi[$, per poi estenderla per antisimmetria e periodicità.

Si ha $f(x) \neq 0 \ \forall x \in D$, e

$$f(x) > 0 \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff \frac{1}{\sin x} > 0 \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff x \in]0,\pi[$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to \pi-} f(x) = \arctan\left(\lim_{x\to \pi-} \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$$

(ii) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = -\frac{\cos x}{1+\sin^2(x)} \qquad \forall x \in D.$$

Pertanto la funzione è derivabile (e dunque continua) in ogni punto del dominio.

Poichè f (in $]0,\pi[$) ammette limiti destro in 0 e sinistro in π finiti, calcoliamo gli attacchi della derivata (in $]0,\pi[$), cioè:

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{\cos x}{1+\sin^2(x)} = -1, \qquad \lim_{x\to\pi-} f'(x) = 1.$$

Da ciò si deduce che $\lim_{x\to 2n\pi+} f'(x) = -1$ e $\lim_{x\to(2n+1)\pi-} f'(x) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

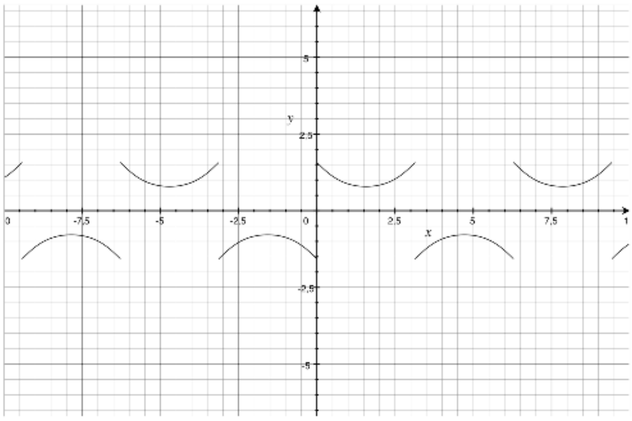
Da

$$f'(x) \geq 0 \ , \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff \cos(x) \leq 0 \ \ (\& \ \ x \in]0,\pi[) \iff x \in [\frac{\pi}{2},\pi[$$

e $f'(x) = 0$, $(\& \ x \in]0,\pi[) \iff x = \frac{\pi}{2}$, si ha che la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $]0,\frac{1}{2}\pi] + 2n\pi =]2n\pi, (\frac{1}{2}+2n)\pi]$, $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi[+2n\pi = [(\frac{3}{2}+2n)\pi, 4n\pi[$ e strettamente crescente negli intervalli $[\frac{1}{2}\pi,\pi[+2n\pi = [(\frac{1}{2}+2n)\pi, (1+2n)\pi[$, $]\pi,\frac{3}{2}\pi] + 2n\pi =](2n+1)\pi, (\frac{3}{2}+2n)\pi]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. In particolare, tutti i punti $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo relativo, con $f(x) = \pi/4$, mentre i punti $x = \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono di massimo relativo con $f(x) = -\pi/4$.

Non ci sono punti di massimo assoluto perché dai limiti si deduce che $\sup_{x\in D} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\inf_{x\in D} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, e non ci sono punti del dominio in cui la funzione prende i valori $\pm\frac{\pi}{2}$.

(iii) Grafico di f:



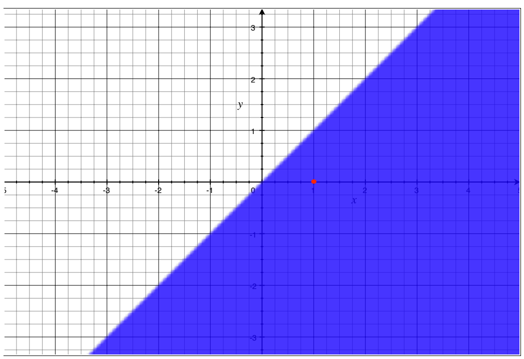
Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\frac{z-i}{z-1}\right| \geq 1$$

e le si disegnino nel piano complesso.
Svolgimento

Ponendo $z = x + iy$, si ha

$$\left|\frac{z-i}{z-1}\right| \geq 1 \iff \frac{|z-i|}{|z-1|} \geq 1,\ \ z \neq 1 \iff |z-i| \geq |z-1|,\ \ z \neq 1$$
$$\iff \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \geq \sqrt{(x-1)^2 + y^2},\ \ (x,y) \neq (1,0)$$
$$\iff -2y \geq -2x\ \ (x,y) \neq (1,0) \iff y \leq x\ \ (x,y) \neq (1,0).$$



Esercizio 3 [8 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2+4x^3)}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento
Esaminiamo il numeratore e il denominatore separatamente.

$$\begin{aligned}
Num &:= \sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3 \\
&= (1-\alpha)x + \frac{1}{6}(\alpha - 1)x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0^+ \\
Denom &:= \arctan(x^2+4x^3) = x^2 + 4x^3 + o(x^2+4x^3) \\
&= (\text{poiché } x^2 + 4x^3 \sim x^2 \text{ per } x \to 0^+) \\
&= x^2 + o(x^2) \text{per } x \to 0^+.
\end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2+4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x + \frac{1}{6}(\alpha-1)x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^2 + o(x^2)}.$$

Dunque, utilizzando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi,
se $\alpha = 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2+4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^5}{5!}}{x^2} = 0,$$

se $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2+4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x}{x^2} = -\infty,$$

se $\alpha < 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2+4x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\alpha)x}{x^2} = +\infty$$

Esercizio 4 [8 punti] (a) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x-1)}\,dx$$

(b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x-2)^\alpha(e^x-1)}\,dx.$$

Svolgimento
(a) Calcoliamo l'integrale indefinito con sostituzione $y = e^x \implies dy = e^x dx$

$$\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x-1)}\,dx = \int \frac{dy}{(y-2)(y-1)} = \int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \log|y-2| - \log|y-1| + cost =$$

$$= \log\left(\frac{|y-2|}{|y-1|}\right) + cost = \log\left(\frac{|e^x-2|}{|e^x-1|}\right) + cost$$

dove il secondo passaggio si ottiene risolvendo il sistema in A, B

$$\frac{1}{(y-2)(y-1)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y-1}, \quad y \in \mathbb{R},$$

che dà $A = 1$ e $B = -1$. Dunque

$$\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x-2)(e^x-1)}\,dx = \left[\log\left(\frac{|e^x-2|}{|e^x-1|}\right)\right]_{\log 4}^{\log 6} = \log\left(\frac{4}{5}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{6}{5}\right) = \log 6 - \log 5$$

(b) Da

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x-2)^\alpha(e^x-1)} \sim \frac{e^x}{e^{\alpha x+1}} = \frac{1}{e^{\alpha x}}$$

si deduce che la funzione integranda f è definitivamente positiva e che, se $\alpha \le 0$, l'integrale diverge (perchè il limite di f a $+\infty$ esiste ma non è nullo[1]). Mentre se $\alpha > 0$ si ha che l'integrale converge, in quanto $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ per ogni $\beta > 1$ per $x \to +\infty$ e $\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ converge. Infatti, per $\alpha > 0$, dalla gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-\beta}} = \lim_{x\to+\infty} x^\beta \frac{1}{e^{\alpha x}} = 0$$

Appello del 23.01.2023

TEMA 1: svolgimento

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \ge 0\} = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty).$$

La funzione non ha particolari simmetrie.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

f è continua per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ quindi

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = f(-1) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0;$$

inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2},$$

in particolare $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Calcoliamo l'asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1 = -2$$

[1] Attenzione, potrebbe convergere se il limite di f a $+\infty$ non esistesse

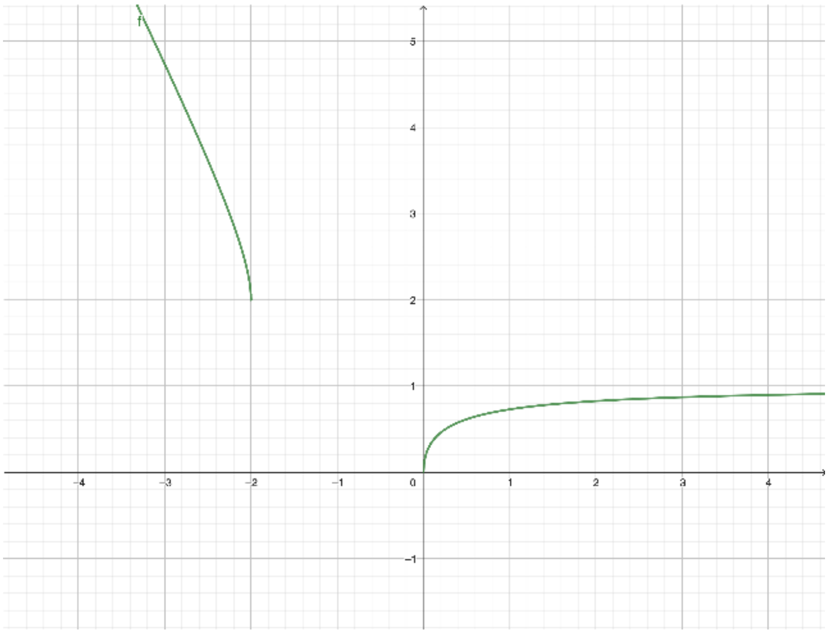


Figura 25: Grafico di f

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\frac{\sqrt{x^2+x}-x}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi $y=-2x-\frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x\to-\infty$.
(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

f è derivabile in $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ perché composizione e somma di funzioni derivabili; in particolare $x^2+x>0$ in $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ e $\sqrt{y}$ è derivabile per $y>0$. In questi punti la derivata vale

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1.$$

Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to0^+} f'(x)=+\infty,$$

In particolare f non è derivabile nei punti $x=-1$ e $x=0$. Per ogni $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ abbiamo

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+1=2\sqrt{x^2+x}$$

e questa equazione non ha soluzioni perché $(2x+1)^2=4x^2+4x+1\neq 4x^2+4x=(2\sqrt{x^2+x})^2$. Inoltre $f'(x)<0$ per ogni $x\in(-\infty,-1)$ e $f'(x)>0$ per ogni $x\in(0,+\infty)$, quindi f è decrescente in $(-\infty,-1]$ e crescente in $[0,+\infty)$; inoltre -1 e 0 sono punti di minimo relativo, 0 è punto di minimo assoluto e $f(0)=0$ è l'estremo inferiore (minimo) di f. Non esistono punti di massimo relativo e l'estremo superiore è $+\infty$.
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 27.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := 4$ come soluzione;

Imponendo che l'equazione valga per $z = 4$ otteniamo $64 + 16\alpha + 4i = -\alpha i$ quindi $\alpha = -\frac{64+4i}{16+i} = -4\frac{16+i}{16+i} = -4$.

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Abbiamo $z^3 - 4z^2 + iz - 4i = (z-4)(z^2+i)$ quindi le altre soluzioni sono le due radici quadrate di $-i$: per calcolarle osserviamo che $|-i| = 1$ e $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ e di conseguenza le due radici z_1 e z_2 hanno modulo 1 e argomento $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ rispettivamente, cioé

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Alternativamente avremmo potuto osservare inizialmente che $z^3 + \alpha z^2 + iz + \alpha i = (z^2+i)(z+\alpha)$ quindi le soluzioni sono $-\alpha, z_1, z_2$: le radici z_1 e z_2 si calcolano come nel punto (b) e per il punto (a) basta chiedere $-\alpha = 4$.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} [1 - \arcsin x]^{\frac{1}{x}}.$$

Per la continuità della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to 0^+} [1 - \arcsin(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\arcsin(x))}{x}} = \frac{1}{e},$$

poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\arcsin(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-(x+o(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x+o(x)) + o\big(-x-o(x)\big)}{x} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x+o(x)}{x} = -1$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

I termini della serie sono positivi $n \geq 1$, dunque possiamo applicare il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \frac{1}{e}$$

perché dal cambio di variabile $x = \frac{1}{n}$ e dal punto (a) vale

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \lim_{x\to 0^+} [1 - \arcsin(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} < 1,$$

so the series is convergent.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x-2)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

Integrando per parti si ha

$$\int f_1(x)\,dx = \int \big[(x-2)\arctan x\big]\,dx = \frac{(x-2)^2}{2}\arctan x - \int \left[\frac{(x-2)^2}{2(1+x^2)}\right]dx + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Dato che

$$\frac{(x-2)^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2+1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{4x}{2(x^2+1)}$$

si conclude

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{(x-2)^2-3}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \log(x^2+1) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

La famiglia di funzioni non presenta problemi di integrazione in $x = 1$ essendo continua per ogni $x \geq 1$. Quindi calcoliamo

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k f_\alpha(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \big((x-2)\arctan(x^\alpha)\big)\,dx$$

Se $\alpha \geq 0$ si ha$f_\alpha \sim (x-2)$ per $x \to +\infty$, e quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale non è convergente.

Se invece $\alpha < 0$, dallo sviluppo $\arctan y = y + o(y)$ si ha $f_\alpha \sim \frac{1}{x^{-1-\alpha}}$, quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $-1-\alpha > 1$, i.e., se e solo se $\alpha < -2$.

Appello del 13.02.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2(\log|x| - 4)$$

(a) determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie;

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione f è pari e $f(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = 4$ quindi per $x = \pm e^4$. Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $\log|x| > 4$ quindi per $x > e^4$ e $x < -e^4$.

(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuitàÂă ed asintoti agli estremi del dominio;

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log y - 4}{y^2} = 0$$

grazie la gerarchia degli infiniti. Dato che f è pari anche $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ quindi f è prolungabile con continuità in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

quindi f non ha asintoti orizzontali o obliqui a $\pm\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è derivabile nel suo dominio in quanto composizione e prodotto di funzioni derivabili, inoltre

$$f'(x) = 2x(\log|x| - 4) + x = x(2\log|x| - 7).$$

Vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-2\log|y| - 7}{y} = 0 \qquad \text{per la gerarchia degli infiniti, dove } y = \tfrac{1}{x};$$

inoltre f' è dispari in quanto f è pari, quindi anche

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0.$$

Abbiamo $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{7}{2}$ quindi per $x = \pm e^{\frac{7}{2}}$. Se $x \in (0, +\infty)$ vale $f'(x) > 0$ quando $\log x > \frac{7}{2}$ quindi per $x \in (e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$. Visto che f' è dispari, avremo $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-e^{\frac{7}{2}}, 0) \cup (e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$. In particolare f è strettamente crescente negli insiemi $[-e^{\frac{7}{2}}, 0)$ e $[e^{\frac{7}{2}}, +\infty)$ e strettamente decrescente negli insiemi $(-\infty, -e^{\frac{7}{2}}]$ e $(0, e^{\frac{7}{2}}]$. I punti $\pm e^{\frac{7}{2}}$ sono punti di minimo assoluto e la funzione assume il valore minimo $-\frac{e^7}{2}$, mentre $\sup f = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 27.

Esercizio 2 (8 punti) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica:

$$\sqrt{3}z^2 - 2z - i = 0.$$

Le due soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2 + w_1}{2\sqrt{3}}, \qquad z_2 = \frac{2 + w_2}{2\sqrt{3}},$$

dove w_1, w_2 sono le due radici quadrate in $\mathbb{C}$ di $b^2 - 4ac = 4 + 4\sqrt{3}i$. Le due radici w_1 e w_2 hanno modulo $\sqrt{|4 + 4\sqrt{3}i|} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ e argomenti $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{1}{2}\mathrm{Arg}\left(4 + 4\sqrt{3}i\right) + \pi = \frac{7\pi}{6}$. Quindi

$$w_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i \qquad \text{e} \qquad w_2 = -w_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i.$$

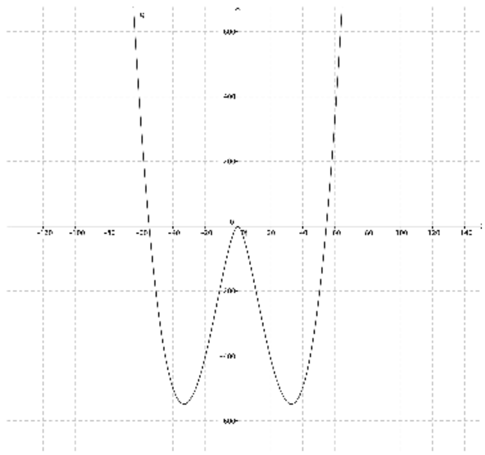


Figura 26: Grafico di f

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i, \qquad z_2 = \frac{2-\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}i.$$

Esercizio 3 (8 punti) Data la successione

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{3n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}\right],$$

(a) determinare l'ordine di infinito o infinitesimo di $(a_n)_n$ per ogni $a > 0$;
(b) discutere il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a > 0$.

(a)

$$a_n = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)}\left[1 + \frac{1}{3n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3}\right] = \frac{1 + \frac{1}{3n} - 1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)} \sim \frac{1}{9n^{2-a}}$$

Pertanto se $0 < a < 2$ la successione ha ordine di infinitesimo $2 - a$, se $a > 2$ ha ordine di infinito $a - 2$, mentre se $a = 2$ non è nÃľ infinita nÃľ infinitesima.

(b) Per il punto (a), la successione (a_n) (definitivamente a termini di segno costante) ÃÍ asintotica alla successione $\frac{1}{n^{2-a}}$, pertanto dal criterio del confronto asintotico $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-a}}$ converge. CiÃš accade se e solo se $2 - a > 1$, i.e. $a < 1$.

Esercizio 4 (8 punti) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(1-x)x^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x)\,dx$$

(b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x)\,dx.$$

(a)

$$\int_0^{1/4} f_{1/2}(x)\,dx = \lim_{c\to 0+} \int_c^{1/4} \frac{1}{(1-x)x^{\frac12}}dx \underset{y=x^{\frac12}}{=} \lim_{c\to 0+} \int_{c^{\frac12}}^{1/2} \frac{2y}{(1-y^2)y}dy =$$

$$\lim_{c\to 0+} \int_{c^{\frac12}}^{1/2} \frac{2}{(1-y^2)}dy = \lim_{c\to 0+} \int_{c^{\frac12}}^{1/2} \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y}\right) dy$$

$$\lim_{c\to 0+} \Big(\log(1+1/2) - \log(1+c^{\frac12}) - \log(1-1/2) + \log(1-c^{\frac12})\Big) =$$

$$= \log(1+1/2) - \log(1-1/2) = \log(3)$$

poichÃľ

$$\frac{2}{(1-y^2)} = \frac{A}{(1+y)} + \frac{B}{(1-y)} = \frac{(A+B)+(B-A)y}{(1-y^2)} \qquad \forall y \in \mathbb{R} \iff A = B = 1$$

(b) Per $x \to 0$ si ha che $f_\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$; quindi l'integrale

$$\int_0^{1/4} f_\alpha(x)\,dx.$$

converge se e solo se $\alpha < 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).

Appello del 30.06.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La funzione non presenta simmetrie ed è positiva se e solo se $x > 0$, negativa altrimenti.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
Si ha, usando la gerarchia degli infiniti/infinitesimi, e la sostituzione $y = 1/x$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}e^y = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Per $x \to +\infty$ si ha un asintoto obliquo di equazione $y = x + 1$. Infatti

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

Similmente, si vede che per $x \to -\infty$ si ha l'asintoto obliquo $y = x + 1$.
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione è derivabile nel suo dominio in quanto prodotto di funzioni derivabili. Si ha

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

e quindi $f' > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ (dunque f è crescente in tale intervallo) e $f' < 0$ in $(0, 1)$ (pertanto f è decrescente in tale intervallo). L'estremo $x = 1$ ÃÍ un punto di minimo locale, $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.
(d) calcolare la derivata seconda, determinare gli intervalli di concavitÃă/convessitÃă di f ed eventuali punti di flesso;

Si ha

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}.$$

Quindi $f'' > 0$ per $x > 0$ (quindi f è convessa per $x > 0$), $f'' < 0$ (dunque concava) per $x < 0$.
(e) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.
Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^6 + 2iz^3 - 1 = 0.$$

Determinarne le soluzioni, le corrispondenti molteplicità e disegnarle nel piano complesso.
Posto

$$w = z^3$$

si ottiene l'equazione

$$w^2 + 2iw - 1 = (w + i)^2 = 0.$$

Dunque si ottiene $w = -i = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ con molteplicità 2, da cui, utilizzando la formula per il calcolo delle radici cubiche di un numero complesso, vale

$$z_1 = e^{i\pi/2} = i,$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = ie^{\frac{2}{3}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

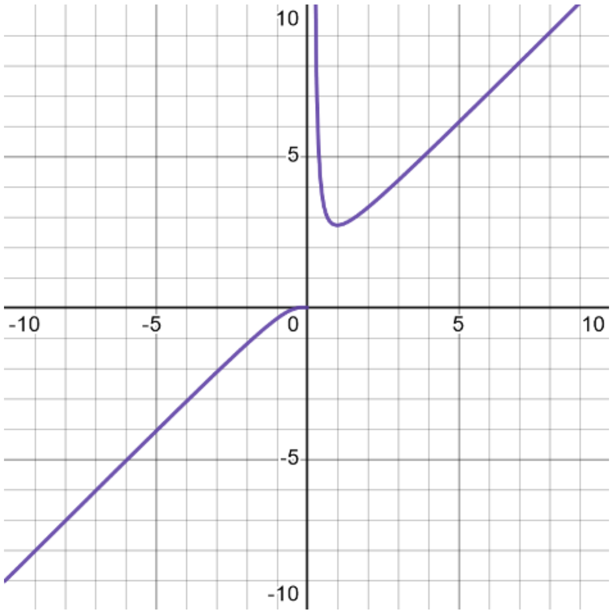


Figura 27: Grafico di f

$$z_3 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}\pi)} = e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

ognuna con molteplicità pari a 2. Si veda la Figura 28 per la rappresentazione delle soluzioni nel piano complesso.

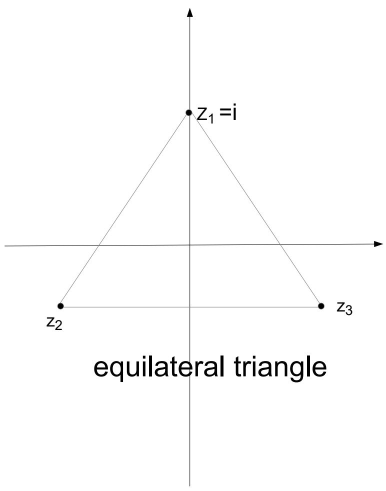


Figura 28: Soluzioni dell'equazione $z^6 + 2iz^3 - 1 = 0$

Esercizio 3 (punti 8) Studiare il comportamento della seguente serie al variare di $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \left(1 - \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}\right)^{\alpha-1}.$$

Detto

$$b_n = 1 - \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}$$

si osservi che b_n è a termini positivi, e si ha

$$b_n = 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} \sim \frac{1}{2n^2},\ n \to \infty.$$

Pertanto

$$n^{\alpha} b_n^{\alpha-1} \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}},\ n \to \infty.$$

La condizione necessaria di convergenza è soddisfatta solo se $\alpha > 2$ e la serie iniziale converge se $\alpha - 2 > 1$, cioè $\alpha > 3$, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Usando il teorema di De L'Hôpital, dimostrare

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x+1) - \arctan(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1;$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Utilizzando il suggerimento nel testo dell'esercizio,

essendo soddisfatte le ipotesi del teorema di De L'Hôpital, si ha (denotando con f e g il numeratore e il denominatore del precedente rapporto rispettivamente)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2x-1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x^4\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \cdot \frac{x^3}{2} = 1$$

(b) Usando la proprietà del punto precedente, discutere il comportamento del seguente integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\left[\arctan(x+1) - \arctan(x)\right]}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Utilizzando il risultato al punto (a), notando che la funzione integranda è non negativa, si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha-2}},\ x \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati di funzioni non negative, si ha $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-2}}\, dx < \infty$ se e solo se $\alpha - 2 > 1$, dunque per $\alpha > 3$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).

Appello del 11.09.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{(-4+x\log x)}$$

(a) determinarne il dominio di f ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti, eventuali prolungamenti per continuitÃă ed asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata di f, discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Soluzione

Il dominio di f è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, la funzione non è né pari né dispari (ed è sempre positiva). Si osserva che per la gerarchia degli infinitesimi vale $\lim_{x\to 0} x\log x = 0$; pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{-4} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

In $x = 0$ la funzione può essere prolungata per continuità definendo la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x > 0 \\ e^{-4} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si osserva immediatamente che la funzione ha crescita super-lineare (si ha $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ per $x \to +\infty$) e non presenta asintoti obliqui. Si ha inoltre

$$f'(x) = e^{(-4+x\log x)}(\log x + 1).$$

Dunque la funzione presenta un punto di minimo in $x = e^{-1}$, è decrescente per $x \in (0, e^{-1})$, mentre è crescente per $x > e^{-1}$. Si ha inoltre $\inf_{\{x>0\}} f = e^{-4-e^{-1}}$ e $\sup_{\{x>0\}} f = +\infty$. (Non richiesto: si verifica $f''(x) = e^{(-4+x\log x)}[(\log x + 1)^2 + 1/x]$. Pertanto $f'' > 0$ nel dom(f), quindi f è convessa.)

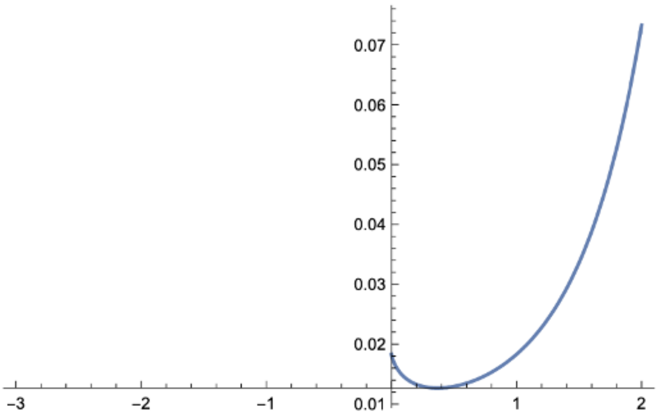


Figura 29: Grafico di f

Esercizio 2 (punti 8) Trovare in $\mathbb{C}$ le soluzioni della seguente equazione ed esprimerle in forma algebrica

$$\frac{1}{z} = \frac{2\overline{z} + 1 + i\,\mathcal{I}m(z)}{|z|^2}.$$

Soluzione.
Campo di esistenza: $z \neq 0$.
Denotando $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, valgono:

$$\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}, \qquad \overline{z} = x - iy, \qquad \mathcal{I}m(z) = y, \qquad |z|^2 = x^2 + y^2$$

Sostituendo le precedenti relazioni nell'equaizione otteniamo

$$x - iy = 2x - iy = 2x - 2iy + 1 + iy.$$

Da cui

$$x = -1.$$

Le soluzioni sono $\{z \in \mathbb{C}; z = -1 + iy, \quad y \in \mathbb{R}\}$.
Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}.$$

Soluzione.
La serie proposta è a termini di segno alterno. Per la convergenza assoluta, si osserva che la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

è divergente. Infatti, nonostante la condizione necessaria di convergenza sia soddisfatta, cioè

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} \frac{1}{n} = 0,$$

usando il criterio del confronto asintotico e gli sviluppi di MacLaurin, si ottiene che la serie dei valori assoluti presenta lo stesso carattere della serie armonica, che è divergente.
Per quanto riguarda la convergenza semplice, possiamo applicare il criterio di Leibniz in quanto la successione $a_n = \frac{\arctan(1/\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ (a termini non negativi) converge decrescendo a 0 definitivamente. La decrescenza di a_n può essere dimostrata in due modi alternativi.
1º modo. Osserviamo che $n \mapsto \sqrt{n}$ è crescente. Pertanto $n \mapsto 1/\sqrt{n}$ è decrescente. Inoltre, poiché la funzione $x \mapsto \arctan(x)$ è crescente su $[0, \infty)$, la successione $n \mapsto \arctan(1/\sqrt{n})$ è decrescente. La successione a_n può essere scritta come

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan(1/\sqrt{n})$$

cioè come prodotto di due successioni decrescenti e positive; è decrescente.

2º modo. Analizziamo il comportamento della funzione $f(x) = \frac{\arctan(1/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ per $x \to +\infty$. Osserviamo che la sua derivata è

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\left(-\frac{1}{2x^{3/2}}\right)\sqrt{x} - \arctan(1/\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x};$$

per $x > 0$, il numeratore è somma di due termini negativi quindi f è decrescente.

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx.$$

(b) Studiare il comportamento del seguente integrale al variare di $\alpha > 0$

$$\int_0^\pi \frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x^\alpha}\, dx.$$

Soluzione.
(a) Per calcolare l'integrale si può procedere con la sostituzione $t = \sqrt{x}$ e ottenere

$$\int \cos(\sqrt{x})\, dx = \int 2t \cos t\, dt.$$

Integrando per parti e utilizzando l'identità $t = \sqrt{x}$ si ha

$$\int 2t \cos t\, dt = 2t \sin t - 2 \int \sin t\, dt = 2t \sin t + 2\cos t + c = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + c.$$

(b) Innanzitutto notiamo che in $[0, \pi]$ la funzione integranda è non negativa, pertanto possiamo utilizzare i criteri per gli integrali impropri di funzioni non negative. Si nota che la funzione integranda è $C((0, \pi])$ quindi presenta un problema di integrazione in $x = 0$, essendo $\alpha > 0$. Utilizzando gli sviluppi di Mac Laurin e il criterio del confronto asintotico si nota che

$$\frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \text{ per } x \to 0^+.$$

Si ottiene dunque che l'integrale converge se e solo se $\alpha - 1 < 1$, cioè $\alpha \in (0, 2)$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria).

Appello del 22.01.2024 TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.
(a). La funzione è definita su $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Il segno è determinato dal segno dell'argomento dell' arctan. Si vede facilmente che $f(x) > 0$ se e solo se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Inoltre la funzione è dispari sempre perché il suo segno dipende da quello dell'argomento dell' arctan e perché l'arctan è dispari.

(b). Vediamo i limiti notevoli. È facile vedere che:

$$\begin{array}{c} \lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \mp\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\frac{\pi}{2} \end{array}$$

Quindi $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale destro, mentre $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale sinistro.
(c). Nel dominio D la funzione è continua e derivabile. Calcoliamo la derivata per $x \in D$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2} \frac{x.2x - \left(x^2-1\right)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2+(x^2-1)^2}$$

Si vede immediatamente che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Quindi la funzione risulta strettamente monotona crescente su ogni intervallo contenuto in D. La funzione non assume né massimo né minimo ed ha:

$$\inf_D f = -\pi/2, \qquad \sup_D f = \pi/2.$$

Si possono controllare gli attacchi della derivata destra e sinistra in 0. Si ha immediatamente che

$$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1$$

(s). Il grafico della funzione segue:

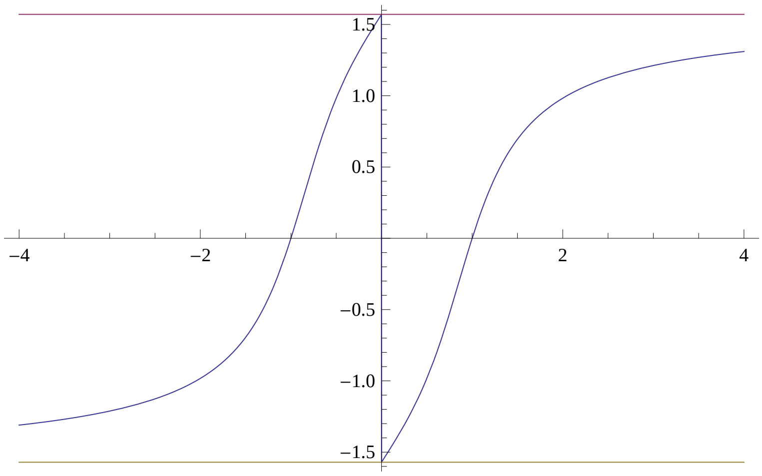


Figura 30: La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\frac{z}{2\overline{z}} = \frac{\mathrm{Im}(\overline{z})}{|z|^2} i.$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. L'equazione è definita per ogni $z \neq 0$. Possiamo quindi moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per $\bar{z}$, ricordando che $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, otteniamo

$$\frac{z}{2} = -i\frac{y}{z} \longleftrightarrow z^2 = -2iy.$$

Scrivendo $z = x + iy$ ed uguagliando parti reali e immaginarie a zero otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

che ha tre soluzioni: $z_0 = 0$ (che non è compatibile con il campo di esistenza) e $z_{1,2} = -1 \pm i$ che sono le sole soluzioni del problema e che hanno la seguente rappresentazione in $\mathbb{C}$

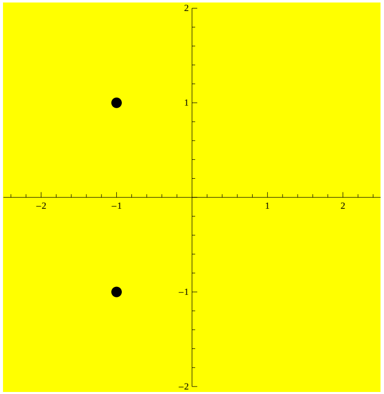


Figura 31: Le soluzioni dell'equazione $\frac{z}{2\bar{z}} = \frac{\mathrm{Im}(\bar{z})}{|z|^2} i$.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza semplice e la convergenza assoluta della seguente serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n \ln n + 3 \sin^2 n}.$$

Svolgimento. Vediamo prima la convergenza assoluta usando il criterio del rapporto:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|3x|^{n+1}}{(n+1)\log(n+1) + 3\sin^2(n+1)} \frac{n \log n + 3 \sin^2 n}{|3x|^n} \longrightarrow |3x| \text{ per } \quad n \to \infty.$$

Quindi per $|x| < \frac{1}{3}$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente; per $|x| > \frac{1}{3}$ la serie non convergente (perché il termine n-esimo non è infinitesimo).
Per $x = \frac{1}{3}$ la serie è a termini positivi e il termine n-esimo é asintotico a $\frac{1}{n \log n}$ che dá una serie divergente. Quindi la serie diverge.
Per $x = -\frac{1}{3}$ la serie diventa $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{1}{n \log n + 3 \sin^2 n} > 0$ definitivamente inoltre $a_n \to 0$. La serie non converge assolutamente per l'argomento del caso $x = 1/3$. Per poter applicare il criterio di Leibniz per stabilire la convergenza semplice resta solo da controllare che a_n sia definitivamente decrescente. Infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log x + 3 \sin^2 x}$ ha derivata $f'(x) = \frac{-\log x - 1 - 6 \sin x \cos x}{(x \log x + 3 \sin^2 x)^2}$ che è definitivamente negativa per $x \to \infty$. Quindi la serie converge semplicemente.

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \, dx.$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \sin x} \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
[*Suggerimento:* Si ricordi che $\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.]

Svolgimento.
(a). Poniamo $1 - \sin x = t$ da cui $-\cos x dx = dt$, l'integrale diventa

$$-\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \log t|_{\frac{1}{2}}^{1} = \log 2.$$

(b). In un intorno destro di zero la funzione è limitata per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. L'unico punto problematico è $\frac{\pi}{2}$. Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$ e usiamo il suggerimento per ottenere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\alpha/2} t}{1 - \cos t} dt.$$

Ora il problema si è spostato nel punto 0. Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin riportati, otteniamo che la funzione integranda per $x \to 0^+$ è asintotica a $\frac{2}{t^{-\frac{\alpha}{2}+2}}$. Quindi l'integrale converge se e solo se $-\frac{\alpha}{2} + 2 < 1$ cioé $\alpha > 2$.

Appello del 12.02.2024

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
PoichÃľ $e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1 > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $f(x) = f(-x)$, cioÃÍ f ÃÍ pari.
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

$$\lim_{x\to+\infty} e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1 = +\infty \qquad \text{quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dato che f ÃÍ pari vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x + \frac{1}{2}x + 1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{x} = 1$$

poichÃľ

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$$

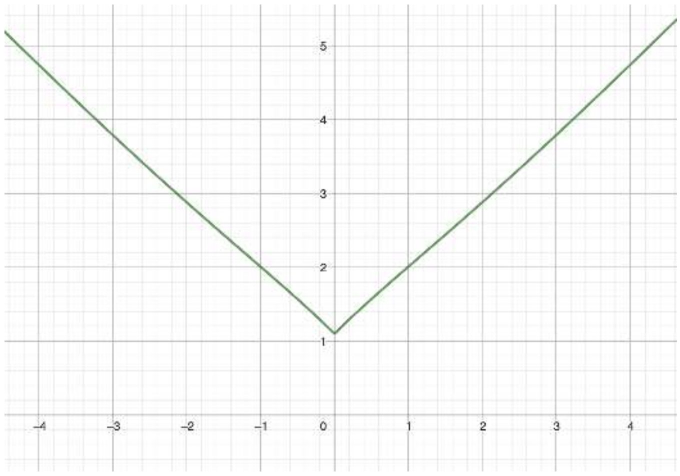


Figura 32: Grafico di f

grazie alla gerarchia degli infiniti e la continuitÃă della funzione log.

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x) + \log\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - x = 0$$

quindi $y = x$ Ãĺ asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. PoichÃľ f Ãĺ pari, $y = -x$ Ãĺ asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f Ãĺ continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perchÃľ somma e composizione di funzioni derivabili e per $x > 0$ vale

$$f'(x) = \frac{e^x + \frac{1}{2}}{e^x + \frac{1}{2}x + 1}.$$

Quindi grazie alla gerarchia degli infiniti $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, inoltre vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{4}.$$

Dato che f Ãĺ pari, f' Ãĺ dispari, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{4}.$$

Quindi f non Ãĺ derivabile in $x = 0$ e piÃź precisamente ha un punto angoloso in $x = 0$.

Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ la funzione f Ãĺ crescente in $(0, +\infty)$. Essendo pari, f Ãĺ quindi decrescente in $(-\infty, 0)$. Dato che f Ãĺ continua in 0, deduciamo che f ha un punto di minimo globale in 0 con valore $f(0) = \log 2 = \inf f$. Grazie al teorema di Fermat concludiamo che non ci sono altri massimi e minimi relativi, infine $\sup f = +\infty$ perchÃľ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f. Vedere Figura 32.

Esercizio 2 (punti 8) Determinare in campo complesso le soluzioni di

$$z^4 + (4i - 2\sqrt{3})z^2 - (4 + 4\sqrt{3}i) = 0,$$

scriverle in forma esponenziale o trigonometrica e disegnarle sul piano di Gauss.

Avendo un'equazione di quarto grado, otterremo 4 soluzioni contate con la loro molteplicitÃă. Poniamo $w = z^2$: in questo modo w soddisfa l'equazione di secondo grado

$$w^2 + (4i - 2\sqrt{3})w - (4 + 4\sqrt{3}i) = 0$$

Le due soluzioni w_1 e w_2 di questa equazione sono date dalla nota formula

$$w_1 = \frac{-b + \xi_1}{2a}, \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{-b + \xi_2}{2a}$$

dove ξ_1 e $\xi_2 = -\xi_1$ sono le due soluzioni di $\xi^2 = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso abbiamo $a = 1, b = 4i - 2\sqrt{3}, c = -(4 + 4\sqrt{3}i)$ quindi

$$b^2 - 4ac = (4i - 2\sqrt{3})^2 + 4(4 + 4\sqrt{3}i) = 12.$$

In particolare abbiamo $\xi_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e $\xi_2 = -2\sqrt{3}$, e quindi

$$w_1 = \frac{2\sqrt{3} - 4i + 2\sqrt{3}}{2} = 2(\sqrt{3} - i), \qquad w_2 = \frac{2\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3}}{2} = -2i.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione saranno le due radici z_1 e z_2 di w_1 e le due radici z_3 e z_4 di w_2: per determinare le radici di w_1 osserviamo che

$$|w_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(w_1) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

quindi

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad z_2 = -z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)\right).$$

Inoltre

$$|w_2| = 2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(w_2) = -\frac{\pi}{2},$$

quindi

$$z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$$

e

$$z_4 = -z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1 + i.$$

Tutte le radici hanno molteplicitÃă 1.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^a\left(\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1\right)}{3\log n - \arctan n}.$$

Osserviamo che la serie ha termini definitivamente positivi, in particolare la convergenza e la convergenza assoluta sono equivalenti. Dallo sviluppo del coseno iperbolico abbiamo che

$$\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1 \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{8n^2},$$

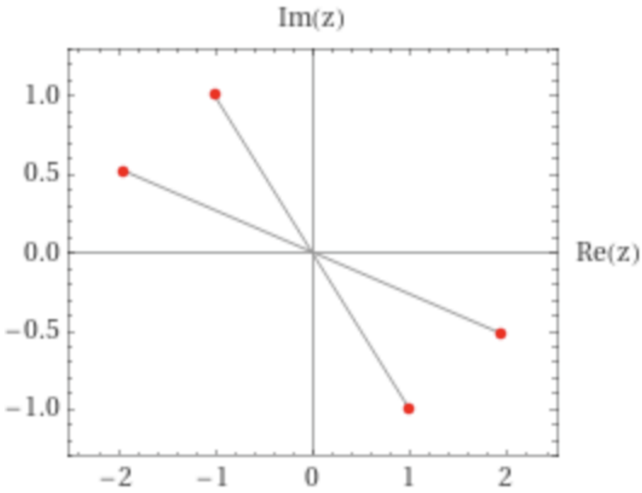


Figura 33: Soluzioni in $\mathbb{C}$

inoltre dato che $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$, il denominatore ÃÍ asintotico a $3\log n$. Quindi

$$a_n = \frac{n^a\left(\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1\right)}{3\log n - \arctan n} \sim \frac{n^{a-2}}{24\log n}.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le serie campione deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $a-2<-1$ cioÃÍ per $a<1$ e diverge a $+\infty$ se $a-2 \geq -1$ cioÃÍ se $a \geq 1$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+5}\,dx.$$

PoichÃľ $f(x) = |x|\sqrt{x^2+5}$ ÃÍ pari vale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$. Quindi, ponendo $y = x^2+5$ otteniamo

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+5}\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+5}\,dx = \int_5^6 \sqrt{y}\,dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=5}^{6} = \frac{2}{3}\left(6^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right).$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_2^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4}\,dx \quad \text{per } a \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right)\cdot\left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4}$ ÃÍ continua in $[2,+\infty)$ quindi l'integrale ÃÍ un integrale in senso improprio solo per $x \to +\infty$.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4} \sim x^{\frac{a-4}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Mentre

$$\arctan\left(\frac{1}{x^a}\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^a} & \text{if } a>0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{if } a=0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a<0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

dove nel primo caso abbiamo usato il comportamento asintotico di $\arctan(y)$ per $y \to 0$. Quindi

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{\frac{a-4}{2}-a} & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4} \cdot x^{\frac{a-4}{2}} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot x^{\frac{a-4}{2}} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le funzioni campione deduciamo che

- se $a > 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{a-4}{2} - a < -1$ cioÃÍ se $a > -2$. Quindi l'integrale converge per ogni $a > 0$.
- se $a \leq 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{a-4}{2} < -1$ cioÃÍ se $a < 2$. Quindi l'integrale converge per ogni $a \leq 0$.

In conclusione l'integrale converge per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Appello del 01.07.2024

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x-2|e^{\frac{1}{x-2}}$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Svolgimento.
(a). Il dominio è: $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Segno: $f(x) \geq 0$ su $\mathrm{dom} f$ perché f è prodotto di due funzioni nonnegative. No simmetrie apparenti.
Osserviamo che la funzione puó essere scritta come

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x > 2 \\ (2-x)e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x < 2. \end{cases}$$

(b). Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Per il teorema sull'algebra dei limiti e per il limite della funzione composta, abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0.$$

Inoltre per il teorema del cambio di variabile nei limiti e per il teorema sulla gerarchia degli infiniti abbiamo

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \left(\begin{array}{c} \text{cambio} \\ \frac{1}{x-2} = y \end{array} \right) = \lim_{y \to \infty} \frac{e^y}{y} = \infty;$$

la funzione presenta un asintoto verticale per $x \to 2^+$.
Calcoliamo, se esistono, gli eventuali asintoti obliqui per $x \to \infty$ e per $x \to \infty$. Per $x \to \infty$ abbiamo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{x} e^{\frac{1}{x-2}} = 1$$

ed anche

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x-2}}-1\right)-2e^{\frac{1}{x-2}}\right]\\
&= \lim_{x\to\infty}\left[x\left(1+\frac{1}{x-2}+o\left(\frac{1}{(x-2)}\right)-1\right)-2e^{\frac{1}{x-2}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{x-2}+o(1)-2e^{\frac{1}{x-2}}\right]\\
&= -1;
\end{aligned}$$

la retta $y=x-1$ è asintoto obliquo per $x\to\infty$.
Passiamo allo studio per $x\to-\infty$. Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-x}{x}e^{\frac{1}{x-2}}=-1$$

ed anche

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] &= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1-e^{\frac{1}{x-2}}\right)+2e^{\frac{1}{x-2}}\right]\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1-1-\frac{1}{x-2}+o\left(\frac{1}{(x-2)}\right)\right)+2e^{\frac{1}{x-2}}\right]\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-x}{x-2}+o(1)+2e^{\frac{1}{x-2}}\right]=1;
\end{aligned}$$

la retta $y=-x+1$ è asintoto obliquo per $x\to\infty$.
(c). Per il terema sulla derivabilità della funzione composta e per quello sull'algebra delle derivate abbiamo

$$f'(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}}\left[1-\frac{x-2}{(x-2)^2}\right]=e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x-3}{x-2} & \text{per } x>2\\ e^{\frac{1}{x-2}}\left[-1-\frac{2-x}{(x-2)^2}\right]=e^{\frac{1}{x-2}}\frac{-x+3}{x-2} & \text{per } x<2.\end{cases}$$

Ne deduciamo: f è strettamente decrescente su $(-\infty,2)$ e su $(2,3]$, è strettamente crescente su $[3,\infty)$, presenta un punto di minimo relativo in $x=3$, non assume né il minimo né il massimo assoluto, ha estremo superiore pari a ∞ ed estremo inferiore pari a 0. Inoltre i limiti della derivata sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to2^+}f'(x) &= \lim_{x\to2^+}e^{\frac{1}{x-2}}\frac{x-3}{x-2}=-\infty\\
\lim_{x\to2^-}f'(x) &= \lim_{x\to2^-}e^{\frac{1}{x-2}}\frac{-x+3}{x-2}=0.
\end{aligned}$$

(d). Segue grafico.

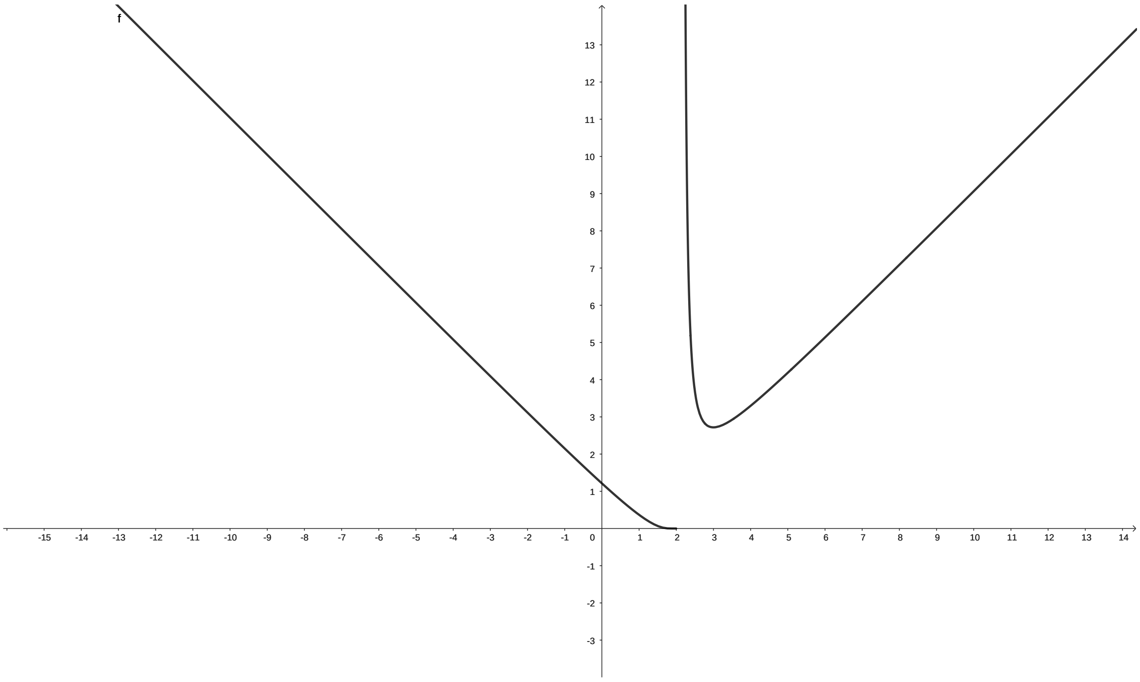


Figura 34: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$\left(\frac{z+3i}{i}\right)^4 = -16$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. Operando la sostituzione

$$w = \frac{z+3i}{i}$$

otteniamo

$$w^4 = -16.$$

Poiché il numero -16 ha modulo pari a 16 e argomento pari a $-\pi$, per la regola di soluzione della radici n-esime otteniamo che le soluzioni w hanno:

$$\text{modulo} = \sqrt[4]{16} = 2, \qquad \arg w = \frac{-\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, 3.$$

Quindi abbiamo

$$w_0 = 2e^{i\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}, \qquad w_1 = 2e^{3i\pi/4} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$w_2 = 2e^{5i\pi/4} = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad w_3 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2e^{7i\pi/4} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Torniamo alla variabile z:
0. $\frac{z+3i}{i} = w_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ dà $z_0 = -\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i$,
1. $\frac{z+3i}{i} = w_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ dà $z_1 = -\sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i$,
2. $\frac{z+3i}{i} = w_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ dà $z_2 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i$,

3. $\frac{z+3i}{i} = w_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ dà $z_3 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i$.
In conclusione, le soluzioni dell'equazione sono

$$z_0 = -\sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i,\ z_1 = -\sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i,\ z_2 = \sqrt{2} + (-\sqrt{2} - 3)i,\ z_3 = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 3)i.$$

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a + 1}{n^2 + 1} a^n.$$

Svolgimento. Osservo che il termine $\frac{n^a+1}{n^2+1}a^n$ è sempre strettamente positivo; posso pertanto applicare tutti i criteri per le serie a segno positivo. Per poter applicare il criterio del rapporto, calcoliamo

$$\lim_n \left[\frac{(n+1)^a + 1}{n^a + 1} \frac{n^2 + 1}{(n+1)^2 + 1} \frac{a^{n+1}}{a^n} \right] = a.$$

Per il criterio suscritto possiamo concludere che la serie è convergente per $a \in (0, 1)$ ed è divergente per $a > 1$.
Il caso $a = 1$ va trattato separatamente; sostituiamo $a = 1$ nella legge della serie ed otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 1}.$$

Osserviamo che per $n \to \infty$ vale: $\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ e che quest'ultimo è il termine della serie armonica (che è divergente). Per il criterio del rapporto asintotico deduciamo che anche la serie iniziale con $a = 1$ è divergente.
In conclusione la serie è convergente per $a \in (0, 1)$ mentre è divergente per $a \in [1, \infty)$.

Esercizio 4 (punti 8) Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 \sin x - 4} \mathrm{d}x$$

[*Suggerimento:* si ricorda la sostituzione $t = \tan(x/2)$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.]

Svolgimento. Usando la formula trigonometrica $\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ (N.B.: questa formula non è un cambio di variabile nell'integrale) e poi operando la sostituzione $t = \tan(x/2)$ otteniamo

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3 \sin x - 4} \mathrm{d}x = 2 \int_{-1}^{1} \frac{1}{-4t^2 + 6t - 4}\, dt = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{t^2 - \frac{3}{2}t + 1}\, dt.$$

Studiamo l'integrale indefinito. Il denominatore è un polinomio di secondo grado senza soluzioni reali; può essere scritto come

$$t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t+1} &= \int \frac{dt}{\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}} = \int \frac{dt}{\frac{7}{16}\left[\left(\frac{t-\frac{3}{4}}{\sqrt{7}/4}\right)^2+1\right]} = \frac{16}{7}\int \frac{dt}{\left[\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right]} \\
&= \begin{pmatrix} \text{sostituzione} \\ z=\frac{4}{\sqrt{7}}t-\frac{3}{\sqrt{7}} \\ dt=\frac{\sqrt{7}}{4}dz \end{pmatrix} = \frac{4}{\sqrt{7}}\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{4}{\sqrt{7}}\arctan z \\
&= \frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t-\frac{3}{\sqrt{7}}\right).
\end{aligned}$$

In conclusione, valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x-4}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t+1} = -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}t-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)\right]_{t=-1}^{t=1} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(-\sqrt{7}\right)\right] \\
&= -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\arctan\left(+\sqrt{7}\right)\right] = -\frac{2}{\sqrt{7}}\left[\frac{\pi}{2}\right] \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

dove nella terz'ultima e nella penultima uguaglianza abbiamo usato rispettivamente la disparità della funzione arctan e la proprietà $\arctan(a)+\arctan(1/a)=\pi/2$.

Appello del 09.09.2024

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x)=\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie
(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;
(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.
[*Suggerimento:* si può sfruttare il fatto che $-\frac{\pi}{2}<-1<\frac{x}{x^2+1}<1<\frac{\pi}{2}$.]

Svolgimento.
(a). Il dominio è: $\mathrm{dom}f=\mathbb{R}$. La funzione è dispari in quanto

$$f(-x)=\sin\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)=-\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=-f(x).$$

Segno: Osservo che $f(0)=0$. Per $x>0$, siccome $0<\frac{x}{x^2+1}<1<\frac{\pi}{2}$ e ricordando che $\sin(\theta)>0$ per ogni $\theta\in(0,\pi/2)$, concludo che $f(x)>0\ \forall x>0$. Per simmetria di f, deduco che $f(x)<0\ \forall x<0$.

(b). Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Utilizzo il cambio di variabile $y = \frac{x}{x^2+1} \to 0$, as $x \to \pm\infty$, così da avere

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim_{y\to 0} \sin y = 0.$$

L'asse $y = 0$ è quindi un asintoto orizzontale per f in $\pm\infty$.
(c). La funzione è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema sulla derivabilità della funzione composta. Usando anche il teorema sull'algebra delle derivate si ha, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Ne deduciamo: $f'(x) \geq 0 \iff 1-x^2 \geq 0 \iff |x| \leq 1$. Dunque f è strettamente decrescente su $(-\infty, -1)$ e su $(1, +\infty)$, è strettamente crescente su $(-1, 1)$, presenta un punto di minimo assoluto in $x = -1$, e uno di massimo assoluto in $x = 1$. Il minimo di f è $f(-1) = -\sin(1/2)$, il massimo di f è $f(1) = \sin(1/2)$. (d). Segue grafico.

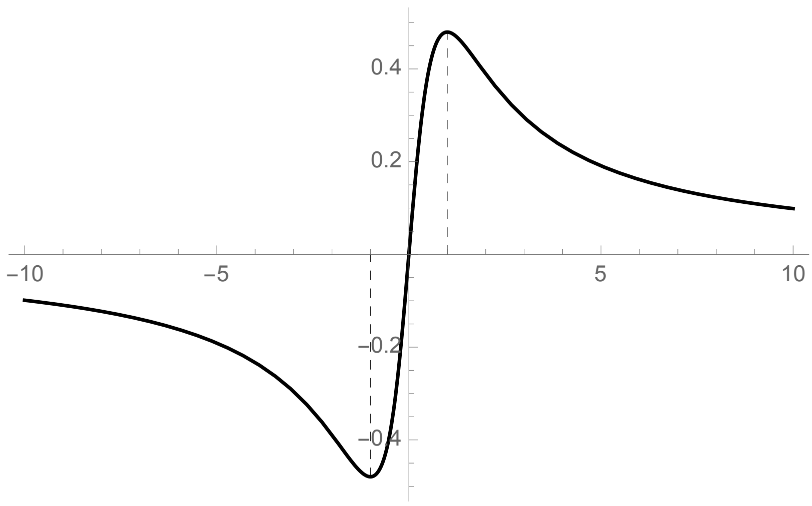


Figura 35: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z - i|z|^2 = 5 - 4\bar{z}$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica e rappresentarle nel piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. L'equazione assegnata è allora equivalente a:

$$\begin{aligned} x + iy - i(x^2 + y^2) = 5 - 4(x - iy) \quad &\Longleftrightarrow \quad 5x - 5 + i(y - x^2 - y^2 - 4y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 5 \\ -3y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le soluzioni di $y^2 + 3y + 1 = 0$ sono date da $y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$, dunque le soluzioni sono

$$z_1 = 1 - i\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right), \qquad z_2 = 1 + i\left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\cosh n)}{(n^4 + 2n - 1)^\alpha}.$$

Svolgimento. Osservo che il termine $a_n = \frac{\log(\cosh n)}{(n^4+2n-1)^\alpha}$ è definitivamente strettamente positivo in quanto $\cosh(n) > 1$, $\forall n > 2$; posso pertanto applicare tutti i criteri per le serie a segno positivo. Per poter applicare il criterio del confronto asintotico, consideriamo

$$\log(\cosh n) = \log\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = \log\left(\frac{e^n}{2}\left\{1 + e^{-2n}\right\}\right) = \log(e^n) - \log(2) + \log(1 + e^{-2n}) \sim n, \; n \to \infty,$$

dove abbiamo usato che $\log(e^n) = n$ e $\log(2) + \log(1 + e^{-2n}) = o(n)$, per $n \to \infty$. Inoltre,

$$(n^4 + 2n - 1)^\alpha = n^{4\alpha}(1 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4})^\alpha \sim n^{4\alpha}, \; n \to \infty$$

dove abbiamo usato che $(1 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4})^\alpha \sim 1 + \alpha(\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}) \sim 1$ per $n \to +\infty$.

Ne deduciamo:

$$a_n \sim \frac{n}{n^{4\alpha}} = \frac{1}{n^{4\alpha-1}}, \; n \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie è dunque convergente se e solo se $4\alpha - 1 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = (\arcsin x)^\alpha (1 - x^2)^{\alpha - 2}$$

(a) Calcolare $\int_0^1 f_2(x)\,dx$.
(b) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (*a*) Scriviamo $f_2(x) = \arcsin^2(x)$. Usando la sostituzione $t = \arcsin x$, $dx = \cos t\,dt$, otteniamo:

$$\int_0^1 \arcsin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,dt.$$

Usiamo la formula di integrazione per parti nell'ultimo integrale con: $f(t) = t^2$, $g'(t) = \cos t$, da cui otteniamo $f'(t) = 2t$, $g(t) = \sin t$:

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,dt = \left[t^2 \sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2t \sin t\,dt.$$

Usiamo un'altra volta la formula di integrazione per parti nell'ultimo integrale con $f(t) = 2t$, $g'(t) = -\sin t$, da cui otteniamo $f'(t) = 2$, $g(t) = \cos(t)$:

$$\int_0^{\pi/2} 2t(-\sin t)\,dt = [2t\cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2\cos t\,dt = [2t\cos t - 2\sin t]_0^{\pi/2}.$$

Riassumendo i calcoli, otteniamo:

$$\int_0^1 \arcsin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\,dt = \left[t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

(*b*) Studiamo l'insieme $\mathrm{dom} f_\alpha \cap [0,1]$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha:

- Se $\alpha \geq 2$: $\mathrm{dom} f_\alpha = \mathbb{R}$, dunque l'integrale è definito, ovvero converge;
- Se $0 \leq \alpha < 2$: $[0,1] \cap \mathrm{dom} f_\alpha = [0,1)$, ovvero abbiamo un estremo di integrazione impropria per $x \to 1^-$;
- Se $\alpha < 0$: $[0,1] \cap \mathrm{dom} f_\alpha = (0,1)$, ovvero abbiamo due estremi di integrazione impropria per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$.

Studiamo i comportamenti asintotici di f_α per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$:

- Per $x \to 0^+$ si ha:
$$f_\alpha(x) = (x + o(x))^\alpha (1 + o(1))^{\alpha-2} \sim x^\alpha.$$
Per il criterio del confronto asintotico, in 0^+ l'integrale converge se e solo se $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$.
- Per $x \to 1^-$ si ha:
$$f_\alpha(x) = (\pi/2)^\alpha (1+x)^{\alpha-2}(1-x)^{\alpha-2} \sim (\pi/2)^\alpha 2^{\alpha-2}(1-x)^{\alpha-2}.$$
Per il criterio del confronto asintotico, in 1^- l'integrale converge se e solo se $2 - \alpha < 1 \iff \alpha > 1$.

Riassumendo:

- Se $\alpha \geq 2$: l'integrale converge;
- Se $0 \leq \alpha < 2$: (estremo di integrazione impropria per $x \to 1^-$) l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$;
- Se $\alpha < 0$: (due estremi di integrazione impropria per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$) l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ e $\alpha > -1$. Ovvero in questo intervallo di α l'integrale diverge in quanto $\alpha < 0$ è incompatibile con $\alpha > 1$.

In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.