

Soluzione esercizio per casa

5.0 10^{21} molecole di un gas si trovano in un recipiente di 200 mL alla temperatura di -20°C. Calcolare la pressione nel recipiente utilizzando R=8.314 e R=0.0821 e verificare che si ottiene lo stesso risultato.

1) Cosa mi chiede l'esercizio? → Calcolare la Pressione prima con R=8.314 e poi con R=0.0821;

2) So che $P = \frac{nRT}{V}$ Per calcolare P ho bisogno di n, R, T e V.

3) n = numero di moli = n. molecole / n. Avogadro = $5.0 * 10^{21} / 6.022 \cdot 10^{23} = 8.3 \cdot 10^{-3}$ mol; T in gradi K = $-20 + 273.15 = 253.15$ K

Caso R=8.341 → trasformo il volume da mL a m³. 200 mL = $200 * 10^{-3}$ L = $200 * 10^{-6}$ m³

Caso R=0.0821 → trasformo il volume da mL a L. 200 ml = $200 * 10^{-3}$ L

4) Eseguo i calcoli nei due casi:

$$- R=8.341 \quad P = \frac{8.3 \cdot 10^{-3} \cdot 8.314 \cdot 253.15}{200 \cdot 10^{-6}} = \frac{17.47}{200 \cdot 10^{-6}} = 87300 \text{ Pa}$$

$$- R=0.0821 \quad P = \frac{8.3 \cdot 10^{-3} \cdot 0.0821 \cdot 253.15}{200 \cdot 10^{-3}} = \frac{0.172}{200 \cdot 10^{-3}} = 0.86 \text{ atm}$$

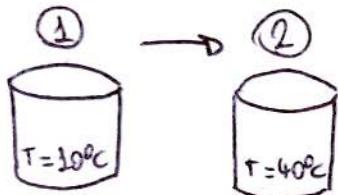
0.86 atm = $0.86 * 101325 \text{ Pa} = 87140 \text{ Pa}$

I due risultati corrispondono

(la differenza è dovuta all'approssimazione dei calcoli alle due cifre decimali)

Esercizio 1

Una tanica di gas da 5 m^3 viene scaldata da 10°C a 40°C . Se la pressione iniziale a 10°C è 0.12 MPa , qual è la pressione a 40°C [MPa]? E quante mol di gas sono nel serbatoio [mol]? Utilizzare la legge del gas ideale.



$$V = 5 \text{ m}^3$$

$$T_1 = 10^\circ\text{C} = (10 + 273.15) \text{ K} = 283.15 \text{ K}$$

$$T_2 = 40^\circ\text{C} = (40 + 273.15) \text{ K} = 313.15 \text{ K}$$

$$P_1 = 0.12 \text{ MPa} = 0.12 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \text{PRESSIONE A } T_2 = 40^\circ\text{C} = ?$$

$$m = \text{NUMERO DI MOLI NELLA TANICA} = ?$$

IL VOLUME DELLA TANICA RIMANE COSTANTE $V_1 = V_2 = V = 5 \text{ m}^3$

IL NUMERO DI MOLI RIMANE COSTANTE $m_1 = m_2 = m$

USO LA LEGGE DEI GAS IDEALI PER TROVARE m NELLA CONDIZIONE 1

$$PV = mRT \Rightarrow m_1 = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = \frac{0.12 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 5 \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 283.15 \text{ K}} = 254.873 \text{ mol} = m_2$$

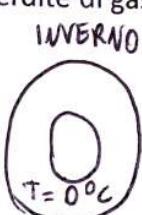
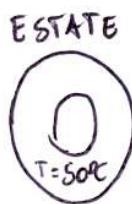
COSÌ HO TUTTI I DATI PER CALCOLARE P_2

$$P_2 = \frac{m_2 R T_2}{V_2} = \frac{254.873 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 313.15 \text{ K}}{5 \text{ m}^3} = 132714.1 \text{ Pa} = 0.133 \text{ MPa}$$

Esercizio 2

Lo pneumatico di un'automobile in estate, quando la temperatura dello pneumatico dopo la guida è di 50°C , ha una pressione (misurata da un manometro) di 255 kPa.

Qual è la pressione misurata nello stesso pneumatico in inverno, quando la temperatura è di 0°C , se il volume dello pneumatico è lo stesso e non ci sono perdite di gas [kPa]?



$$T_1 = 50^{\circ}\text{C} = (50 + 273.15) \text{ K} = 323.15 \text{ K}$$

$$P_{R,1} = 255 \text{ kPa}$$

$$T_2 = 0^{\circ}\text{C} = 273.15 \text{ K}$$

$$P_{R,2} = ?$$

IL VOLUME DELLO PNEUMATICO È LO STESSO $V_2 = V_1$
NO PERDITE = NUMERO DI MOLI RIMANE COSTANTE

DALLA LEGGE DEI GAS IDEALI $M_1 = M_2$

$$\frac{P_1 V_1}{R T_1} = \frac{P_2 V_2}{R T_2}$$

R È UNA COSTANTE, $V_1 = V_2$

$$\frac{P_1 V_1}{R T_1} = \frac{P_2 V_2}{R T_2}$$

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

$$P_2 = \frac{P_1}{T_1} T_2$$

LA PRESSIONE MISURATA DAL MANOMETRO È RELATIVA ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA,
CIOÈ P_{ATM} È IL VALORE 0. QUINDI LA PRESSIONE REALE DELLO PNEUMATICO È

$$P_2 = P_{1,R} + P_{ATM} = 255 \text{ kPa} + 101.325 \text{ kPa} = 356.325 \text{ kPa}$$

$$P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1} = \frac{356.325 \text{ kPa} \cdot 273.15 \text{ K}}{323.15 \text{ K}} = 301.2 \text{ kPa}$$

VIENE CHIESTA LA PRESSIONE MISURATA

$$P_{2,R} = P_2 - P_{ATM} = 301.2 \text{ kPa} - 101.325 \text{ kPa} = 200 \text{ kPa}$$

Esercizio 3

Calcolare la densità di massa [g/ cm^3] dei seguenti gas in condizioni di 298 K e 1 bar:

- (a) Azoto
- (b) Ossigeno
- (c) Aria (PM medio = 28.96 g/mol)
- (d) CO_2
- (e) Argon (PM = 40 g/mol)

$$T = 298 \text{ K}$$

$$P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

DENSITÀ $\rho = ?$

LA DENSITÀ DI MASSA È DEFINITA COME $\rho = \frac{m}{V}$

SAPPIAMO CHE $m = \frac{m}{PM} \Rightarrow m = m PM$

PERTANTO

$$\rho = \frac{m}{V} = \boxed{\frac{m}{V}} PM$$

DALLA LEGGE DEI GAS IDEALI

$$PV = mRT \quad \frac{m}{V} = \frac{P}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 298 \text{ K}} = 40.36 \text{ mol/m}^3 = 40.36 \cdot 10^3 \text{ mol/L}$$

IL PESO MOLECOLARE È DIVERSO PER OGNI GAS

a) $\text{N}_2 \quad PM_{\text{N}_2} = 2 \cdot 28 = 28 \text{ g/mol}$

$$\rho = 40.36 \cdot 10^3 \text{ mol/L} \cdot 28 \text{ g/mol} = 1.13 \text{ g/L}$$

b) $\text{O}_2 \quad PM_{\text{O}_2} = 2 \cdot 32 = 32 \text{ g/mol}$

$$\rho = 40.36 \cdot 10^3 \text{ mol/L} \cdot 32 \text{ g/mol} = 1.29 \text{ g/L}$$

c) Aria $PM_{\text{Aria}} = 28.96 \text{ g/mol}$

$$\rho = 40.36 \cdot 10^3 \text{ mol/L} \cdot 28.96 \text{ g/mol} = 1.17 \text{ g/L}$$

d) $\text{CO}_2 = PM_{\text{CO}_2} = 12 + 20 = 32 + 2 \cdot 16 = 44 \text{ g/mol}$

$$\rho = 40.36 \cdot 10^3 \text{ mol/L} \cdot 44 \text{ g/mol} = 1.78 \text{ g/L}$$

e) $\text{Ar} \quad PM_{\text{Ar}} = 40 \text{ g/mol}$

$$\rho = 40.36 \cdot 10^3 \text{ mol/L} \cdot 40 \text{ g/mol} = 1.62 \text{ g/L}$$

Esercizio 4

Il GPL è un combustibile utile nelle zone rurali senza gasdotti. Una perdita durante il riempimento di un serbatoio può essere estremamente pericolosa perché il suo vapore è più denso dell'aria e si sposta verso il basso prima di disperdersi, creando un rischio di esplosione. Quale volume di vapore viene creato da una perdita di 40L di GPL [L]?

Consideriamo il liquido come propano con $\rho_M = 44 \text{ g/mol}$ e $\rho_L = 0.24 \text{ g/cm}^3$.

Qual è la densità di massa del vapore di propano dopo la depressoionizzazione a 293 K e

1 bar [g/L]? Confrontare con la densità di massa dell'aria alle stesse condizioni [g/L].

$$V^L = 40 \text{ L}$$

$$T = 293 \text{ K}$$

$$V^V = ?$$

$$\rho_M = 44 \text{ g/mol}$$

$$P = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho^V = ?$$

$$\rho_L = 0.24 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{aria}} = ?$$

40 L DI LIQUIDO CORRISPONDONO A

$$\rho^L = \frac{m}{V^L} \Rightarrow m = \rho^L V^L = 0.24 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 9.6 \cdot 10^3 \text{ g}$$

DALLA MASSA, SI RICAVA IL NUMERO DI MOLE

$$n = \frac{m}{\rho_M} = \frac{9.6 \cdot 10^3 \text{ g}}{44 \text{ g/mol}} = 0.21818 \cdot 10^3 \text{ mol} = 218.18 \text{ mol}$$

SI RICAVA IL VOLUME DALLA LEGGE DEI GAS ~~PURETTI~~ IDEALI

$$V^V = \frac{nRT}{P^V} = \frac{218.18 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{ K}}{10^5 \text{ Pa}} = 5.315 \text{ m}^3 = 5315 \text{ L}$$

LA MASSA DEL VAPORE È UGUALE ALLA MASSA DEL LIQUIDO

$$m^V = m^L = 9.6 \cdot 10^3 \text{ g}$$

SI TROVA LA DENSITÀ DEL VAPORE

$$\rho^V = \frac{m^V}{V^V} = \frac{9.6 \cdot 10^3 \text{ g}}{5315 \text{ L}} = 1.8062 \text{ g/L}$$

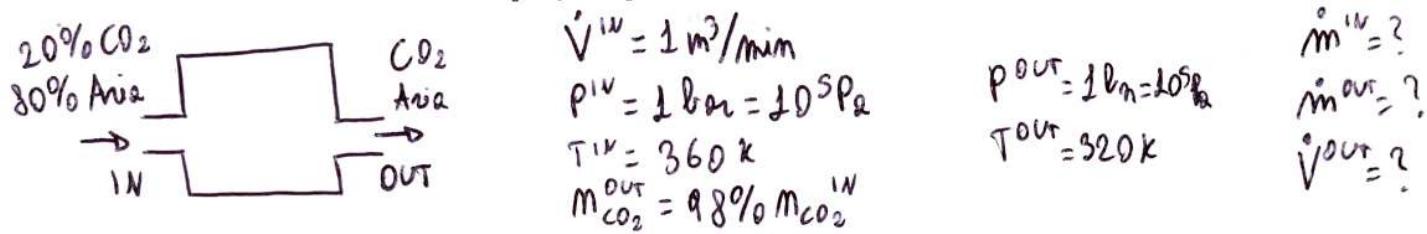
PER LA DENSITÀ DELL'ARIA, USIAMO LA LEGGE DEI GAS IDEALI

$$\rho_{\text{aria}} = \frac{m}{V} = \rho_M \frac{m}{V} = \rho_M \cdot \frac{P}{RT} = \frac{28.96 \text{ g/mol} \cdot 10^5 \text{ Pa}}{8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{ K}} = 1.288 \text{ g/L}$$

Esercizio 5

Un flusso di gas che entra in un assorbitore è 20 mol% CO₂ e 80 mol% aria. La portata è di 1 m³/min a 1 bar e 360 K. Quando il flusso di gas esce dall'assorbitore, il 98% della CO₂ in ingresso è stata assorbita da un flusso di ammina liquida.

- (a) Quali sono le portate di massa del flusso di gas in ingresso e in uscita [g/min]?
- (b) Qual è la portata volumetrica del gas in uscita dall'assorbitore se il flusso è a 320 K e 1 bar [m³/min]?



CONSIDERANDO LA LEGGE DEI GAS IDEALI $m = \frac{PV}{RT}$, LA PORTATA MOLARE SARÀ

$$\dot{m}^{\text{in}} = \frac{P^{\text{in}} V^{\text{in}}}{R T^{\text{in}}} = \frac{105 \text{ Pa} \cdot 1 \text{ m}^3/\text{min}}{8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 360 \text{ K}} = 33.43 \text{ mol/min}$$

DI CONSEGUENZA, LA PORTATA DI MASSA È ($m = \rho M \dot{m}$)

$$\dot{m}^{\text{in}} = \rho M \dot{m}^{\text{in}}$$

RICORDANDO LE FRAZIONI MOLARI IN ENTRATA

$$\rho M^{\text{in}} = 0.2 \cdot 44 \text{ g/mol} + 0.8 \cdot 28.96 \text{ g/mol} = 32.97 \text{ g/mol}$$

$$\dot{m}^{\text{in}} = 32.97 \text{ g/mol} \cdot 33.43 \text{ mol/min} = 1068.12 \text{ g/min}$$

NEL PM IN USCITA, INVECE, LA CO₂ È DIMINUITA DEL 98%

$$100 - 98 = 2\%$$

$$\rho M^{\text{out}} = 0.02 \cdot 0.2 \cdot 44 \text{ g/mol} + 0.8 \cdot 28.96 \text{ g/mol} = 23.344 \text{ g/mol}$$

$$\dot{m}^{\text{out}} = 23.344 \text{ g/mol} \cdot 33.43 \text{ mol/min} = 779.92 \text{ g/min}$$

CALCOLIAMO LE PORTATE MOLARI ENTRANTI DI CO₂ E ARIA

$$\dot{m}_{\text{aria}}^{\text{in}} = 0.8 \cdot 33.43 \text{ mol/min} = 26.73 \text{ mol/min} = \dot{m}_{\text{aria}}^{\text{out}} \quad \text{RIMANE INVARIATA ALL'USCITA}$$

$$\dot{m}_{\text{CO}_2}^{\text{in}} = 0.2 \cdot 33.43 \text{ mol/min} = 6.68 \text{ mol/min}$$

IN USCITA, CO₂ DIMINUISCE DEL 98%

$$\dot{m}_{\text{CO}_2}^{\text{out}} = 0.02 \cdot 6.68 \text{ mol/min} = 0.1336 \text{ mol/min}$$

LA PORTATA MOLARE TOTALE IN USCITA È LA SOMMA DEI 2 CONTRIBUTI

$$\dot{m}_{\text{out}} = \dot{m}_{\text{aria}}^{\text{out}} + \dot{m}_{\text{CO}_2}^{\text{out}} = 26.8636 \text{ mol/min}$$

DALLA LEGGE DEI GAS IDEALI

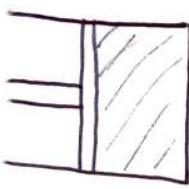
$$\dot{V}^{\text{out}} = \frac{\dot{m}^{\text{out}} R T^{\text{out}}}{P^{\text{out}}} = \frac{26.8636 \text{ mol/min} \cdot 8.314 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 320 \text{ K}}{105 \text{ Pa}} = 0.714 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

Esercizio 1

Tre moli di un gas ideale (con $C_p = (7/2)R$, $C_v = (5/2)R$, entrambi indipendenti dalla temperatura) sono contenute in una disposizione orizzontale pistone/cilindro.

Il pistone ha una superficie di 0.1 m^2 e una massa di 500 g. La pressione iniziale nel pistone è di 101 kPa. Determinare il calore [J] che deve essere estratto per poter raffreddare il gas da 375°C a 275°C a:

- (a) pressione costante;
- (b) volume costante.



$$M = 3 \text{ mol}$$

$$A = 0.1 \text{ m}^2$$

$$C_p = \frac{7}{2} R$$

$$m = 500 \text{ g}$$

$$C_v = \frac{5}{2} R$$

$$P_1 = 101 \text{ kPa}$$

$$T_1 = 375^\circ\text{C} = (375 + 273.15) \text{ K} = 648.15 \text{ K}$$

$$T_2 = 275^\circ\text{C} = (275 + 273.15) \text{ K} = 548.15 \text{ K}$$

$$Q = ?$$

② TRASFORMAZIONE ISOBARA $P_1 = P_2 = \text{cost.}$

$$Q = \Delta H = m C_p (T_2 - T_1) = 3 \text{ mol} \cdot \frac{7}{2} 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} (-100 \text{ K}) = -8729.7 \text{ J}$$

③ TRASFORMAZIONE ISOCORA $V_1 = V_2 = \text{cost.}$

$$Q = \Delta U = m C_v (T_2 - T_1) = 3 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} (-100 \text{ K}) = -6235.55 \text{ J}$$

Esercizio 2

Una mole di un gas ideale ($C_p = 7R/2$) in un pistone/cilindro chiuso viene compressa da $T_1 = 100 \text{ K}$, $P_1 = 0.1 \text{ MPa}$ a $P_2 = 0.7 \text{ MPa}$ con i seguenti percorsi.

Per ciascun percorso, calcolare ΔU , ΔH , Q e W [J].

- (a) isotermico;
- (b) isocoro;
- (c) adiabatico.



$$C_p = \frac{7}{2} R \quad m = 1 \text{ mol}$$

$$T_1 = 100 \text{ K}$$

$$P_1 = 0.1 \text{ MPa} \quad P_2 = 0.7 \text{ MPa}$$

$$\Delta U = ?$$

$$\Delta H = ?$$

$$Q = ?$$

$$W = ?$$

D) TRASFORMAZIONE ISO TERMICA $T_1 = T_2 = \text{cost.}$

$$\Delta U = 0 \quad \Delta H = 0 \quad \text{PERCHÉ NON C'È VARIAZIONE DI TEMPERATURA}$$

$$Q = m RT \ln \frac{P_1}{P_2} = 1 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} \ln \left(\frac{0.1}{0.7} \right) = -1618 \text{ J}$$

$$W = -Q = 1618 \text{ J}$$

B) TRASFORMAZIONE ISO CORA $V_1 = V_2 = \text{cost.}$

$$W = 0 \quad \text{PERCHÉ NON C'È VARIAZIONE DI VOLUME}$$

$$\frac{T_2}{P_1} = \frac{T_1}{P_2} \quad T_2 = T_1 \frac{P_2}{P_1} = 100 \text{ K} \cdot \frac{0.7}{0.1} = 700 \text{ K}$$

$$\Delta U = m C_v (T_2 - T_1) = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} 600 \text{ K} = 12471 \text{ J}$$

$$\Delta H = m C_p (T_2 - T_1) = 1 \text{ mol} \cdot \frac{7}{2} 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} 600 \text{ K} = 17459 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U = 12471 \text{ J}$$

D) TRASFORMAZIONE ADIABATICA $Q = 0$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{r}{k}} = 100 \cdot 7^{\frac{7}{5}} = 174.4 \text{ K}$$

$$\Delta U = m C_v (T_2 - T_1) = 1 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} \cdot 74.4 \text{ K} = 1546.4 \text{ J}$$

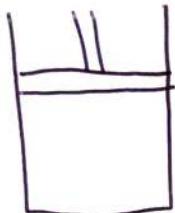
$$\Delta H = m C_p (T_2 - T_1) = 1 \text{ mol} \cdot \frac{7}{2} 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} 74.4 \text{ K} = 2165 \text{ J}$$

$$W = \Delta U = 1546.4 \text{ J}$$

Esercizio 3

Un kg di metano ($\text{PM} = 16 \text{ g/mol}$) è contenuto in un dispositivo pistone/cilindro a 0.8 MPa e 250°C. Subisce una dilatazione isotermica reversibile a 0.3 MPa. Il metano può essere considerato un gas ideale in queste condizioni.

Quanto calore viene trasferito [J]?



$$\begin{aligned}m &= 1 \text{ kg} \\ \text{PM} &= 16 \text{ g/mol} \\ P_1 &= 0.8 \text{ MPa} \\ T_1 &= 250^\circ\text{C} = (250 + 273.15) \text{ K} = 523.15 \text{ K} \\ P_2 &= 0.3 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$Q = ?$$

TRA SFORMAZIONE ISOTERMICA $T_1 = T_2 = \text{cost.}$

DALLA MASSA OTENGO IL NUMERO DI MOLI

$$n = \frac{m}{\text{PM}} = \frac{1000 \text{ g}}{16 \text{ g/mol}} = 62.5 \text{ mol}$$

IL CALORE IN UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMICA

$$Q = nRT \ln \frac{P_1}{P_2} = 62.5 \text{ mol} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 523.15 \text{ K} \ln \left(\frac{0.8}{0.3} \right) = 266630 \text{ J} = 266.6 \text{ kJ}$$

Esercizio 4

Un cilindro con volume 0.1 m^3 è inizialmente ad una pressione di 10 bar e una temperatura di 300 K. Il cilindro viene svuotato aprendo una valvola e lasciando diminuire la pressione a 1 bar. Quali sono il lavoro [J/mol], la temperatura [K] e le moli di gas [mol] nel cilindro se questa trasformazione è:

- a) isoterma?
- b) adiabatica?

Trascurare il trasferimento di calore tra le pareti della bombola e il gas, e assumere un gas ideale con $C_p = 7R/2$

$$V = 0.1 \text{ m}^3$$

$$P_1 = 10 \text{ bar} = 10^6 \text{ Pa} \quad P_2 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$T_1 = 300 \text{ K}$$

$$C_p = \frac{7}{2} R$$

$$W = ?$$

$$T_2 = ?$$

$$n_2 = ?$$

IL VOLUME DEL CILINDRO RIMANE COSTANTE $V_1 = V_2 = V$

② TRASFORMAZIONE ISOTERMICA $T_1 = T_2 = 300 \text{ K}$

$$\text{INTENSIVO} \rightarrow W = -RT \ln \frac{P_1}{P_2} = -8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K} \ln 10 = -5743.1 \text{ J/mol}$$

USO LA LEGGE DEI GAS IDEALI

$$n_2 = \frac{P_2 V_2}{R T_2} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 0.1 \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K}} = 4.01 \text{ mol}$$

③ TRASFORMAZIONE ADIABATICA $Q = 0$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{R}{C_p}} = 300 \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{2}{7}} = 155.4 \text{ K}$$

~~INTENSIVO~~ $\rightarrow W = \Delta H = C_p (T_2 - T_1) = \frac{7}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} (155.4 \text{ K} - 300 \text{ K}) = -4208 \text{ J/mol}$

USO LA LEGGE DEI GAS IDEALI

$$n_2 = \frac{P_2 V_2}{R T_2} = \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 0.1 \text{ m}^3}{8.314 \frac{\text{Pa m}^3}{\text{mol K}} \cdot 155.4 \text{ K}} = 7.74 \text{ mol}$$

Esercizio 1

Sapendo che alla pressione di 1 atm l'acqua bolle alla temperatura di 100°C, si determini a quale temperatura [K] bolle l'acqua alla pressione di 0.48 atm.
Si consideri $\Delta H_{eb} = 539 \text{ kcal/kg}$

$$P_1 = 1 \text{ atm}$$

$$T_2 = ?$$

$$T_1 = 100^\circ\text{C}$$

$$P_2 = 0.48 \text{ atm}$$

$$\Delta H_{eb} = 539 \text{ kcal/kg}$$

ΔH_{eb} VA ESPRESSA IN J/MOL

$$539 \text{ kcal} = 539 \cdot 10^3 \cdot 4.184 \text{ J} = 2255176 \text{ J}$$

$$m = \frac{1000 \text{ g}}{18 \text{ g/mol}} = 55.5 \text{ mol}$$

$$\Delta H_{eb} = \frac{2255176 \text{ J}}{55.5 \text{ mol}} = 40634 \text{ J/mol}$$

USIAMO L'ESPRESSIONE DI CLAPEYRON PER GAS IDEALI

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{\Delta H_{eb}}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{R}{\Delta H_{eb}} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\frac{1}{T_2} = 0.00015017 + 0.00268 = \cancel{0.00025200} \quad 0.0023$$

$$T_2 = 353.357 \text{ K} = 353.357 - 273.15 = 80.2^\circ\text{C}$$

Esercizio 2

Calcolare la pressione di ebollizione di una miscela liquida equimolare di acqua e metanolo alla temperatura di 25° C. I parametri A, B e C dell'equazione di Antoine per l'acqua valgono rispettivamente 8.07131, 1730.63 e 233.426. I parametri A, B, e C dell'equazione di Antoine per il metanolo valgono rispettivamente 8.08097, 1582.271, 239.726. Il coefficiente di attività è lo stesso per acqua e metanolo ed è pari a 1.2214.

- Calcolare la pressione di ebollizione [mmHg]
- Calcolare la frazione molare dell'acqua allo stato vapore [adimensionale]

H ₂ O + CH ₃ OH	V
	L
H ₂ O + CH ₃ OH	

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 = 0.5 \\y_1 &= y_2 = 1.2214 \\T &= 25^\circ C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P &=? \\y_1 &=?\end{aligned}$$

PER UN SISTEMA CON 2 FASI E 2 COMPONENTI IN EQUILIBRIO, VALE

$$\begin{cases} f_1^V = f_2^L \\ f_2^V = f_1^L \end{cases}$$

CONSIDERIAMO IL VAPORE COME GAS IDEALE E IL LIQUIDO COME SOLUZIONE REALE

$$\begin{cases} y_1 P = y_1 x_1 P_1^{\text{sat}} \\ y_2 P = y_2 x_2 P_2^{\text{sat}} \end{cases}$$

DALL'ESPRESSIONE DI ANTOINE $\log_{10} P = A - \frac{B}{T+C}$ TROVIAMO I DUE P^{sat}

$$P_1^{\text{sat}} = 23.6864 \text{ mmHg}$$

$$P_2^{\text{sat}} = 127.0445 \text{ mmHg}$$

TORNIAMO AL SISTEMA E SOMMIAMO, RICORDANDO CHE $y_1 + y_2 = 1$

$$P = y_1 x_1 P_1^{\text{sat}} + y_2 x_2 P_2^{\text{sat}} = 1.2214 \cdot 0.5 (23.6864 + 127.0445) = 92.0514 \text{ mmHg}$$

DALLA PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA

$$y_1 = \frac{y_1 x_1 P_1^{\text{sat}}}{P} = \frac{1.2214 \cdot 0.5 \cdot 23.6864 \text{ mmHg}}{92.0514 \text{ mmHg}} = 0.1571$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 0.8428$$

Esercizio 1

Calcolare la pressione di bolla [mmHg] di una miscela liquida equimolare di acqua e etanolo alla temperatura di 37°C.

Calcolare la composizione molare del vapore [adimensionale]

Utilizzare l'equazione di Margules con un parametro A = 0.8

H ₂ O + Et	V
	L
H ₂ O + Et	

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 = 0.5 \\T &= 37^\circ\text{C} \\A &= 0.8\end{aligned}$$

$$y_1 = ?$$

$$y_2 = ?$$

PER UN SISTEMA CON 2 FASI E 2 COMPONENTI IN EQUILIBRIO, VALE

$$\begin{cases} f_1^V = f_1^L \\ f_2^V = f_2^L \end{cases}$$

CONSIDERIAMO IL VAPORE COME GAS IDEALE E IL LIQUIDO COME SOLUZIONE REALE

$$\begin{cases} y_1 P = y_1 X_1 P_1^{\text{sat}} \\ y_2 P = y_2 X_2 P_2^{\text{sat}} \end{cases}$$

CON L'ESPRESSIONE DI ANTOINE $\log_{10} P = A - \frac{B}{T+C}$ (con T in °C e P in mmHg)

TROVIAMO I DUE P^{sat}

$$P_1^{\text{sat}} = 46.951 \text{ mmHg}$$

$$P_2^{\text{sat}} = 114.269 \text{ mmHg}$$

DALL'EQUAZIONE DI MARGULES TROVIAMO I COEFFICIENTI DI ATTIVITÀ

$$\ln(y_1) = A X_1^2 = 0.8 (0.5)^2 = 0.2 \quad y_1 = 1.2214$$

$$\ln(y_2) = A X_2^2 = 0.8 (0.5)^2 = 0.2 \quad y_2 = 1.2214$$

TORNIAMO AL SISTEMA E SOMMIAMO LE 2 EQUAZIONI, RICORDANDO CHE

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$P = y_1 X_1 P_1^{\text{sat}} + y_2 X_2 P_2^{\text{sat}} = 1.2214 \cdot 0.5 (46.951 + 114.269) = 98.457 \text{ mmHg}$$

DALLA PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA TROVIAMO

$$y_1 = \frac{y_1 X_1 P_1^{\text{sat}}}{P} = \frac{1.2214 \cdot 0.5 \cdot 46.951}{98.457} = 0.291$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 0.709$$

Esercizio 2 (1)

Calcolare la pressione di rugiada [kPa] e la frazione molare dell'acqua allo stato liquido [adimensionale] in una miscela liquida di acqua e metanolo alla temperatura di 22°C , dove la frazione molare d'acqua allo stato vapore è pari a $y_1=0.25$.

I parametri A, B e C dell'equazione di Antoine per l'acqua valgono rispettivamente 8.07131, 1730.63 e 233.426. I parametri A, B, e C dell'equazione di Antoine per il metanolo valgono rispettivamente 8.08097, 1582.271, 239.726.

Il coefficiente di attività è lo stesso per acqua e metanolo ed è pari a 1.229.

$\text{H}_2\text{O} + \text{Met}$	V
L	

$$Y_1 = 0.25$$

$$Y_2 = 1 - Y_1 = 0.75$$

$$T = 22^{\circ}\text{C}$$

$$Y_L = Y_2 = 1.229$$

$$1 = \text{H}_2\text{O}$$

$$2 = \text{Metanolo}$$

$$P = ?$$

$$X_1 = ?$$

PER UN SISTEMA CON 2 FASI E 2 COMPONENTI IN EQUILIBRIO, VALE

$$\begin{cases} f_2^V = f_2^L \\ f_2^V = f_2^L \end{cases}$$

CONSIDERIAMO IL VAPORE COME GAS IDEALE E IL LIQUIDO COME SOLUZIONE REALE

$$\begin{cases} y_1 P = Y_1 X_1 P_1^{\text{sat}} \\ y_2 P = Y_2 X_2 P_2^{\text{sat}} \end{cases}$$

CON L'ESPRESSIONE DI ANTOINE $\log_{10} P = A - \frac{B}{T+C}$, TROVIAMO I DUE P^{sat}

$$P_1^{\text{sat}} = 19.7626 \text{ mmHg}$$

$$P_2^{\text{sat}} = 108.5039 \text{ mmHg}$$

TORNIAMO AL SISTEMA

$$\begin{cases} X_1 = \frac{y_1 P}{Y_1 P_1^{\text{sat}}} & X_1 + X_2 = 1 \\ X_2 = \frac{y_2 P}{Y_2 P_2^{\text{sat}}} & \Rightarrow X_1 + X_2 = \frac{y_1 P}{Y_1 P_1^{\text{sat}}} + \frac{y_2 P}{Y_2 P_2^{\text{sat}}} \Rightarrow 1 = \left(\frac{y_1}{Y_1 P_1^{\text{sat}}} + \frac{y_2}{Y_2 P_2^{\text{sat}}} \right) P \end{cases}$$

LA PRESSIONE DI RUGIADA P È QUINDI UGUALE A

$$P = \frac{1}{\frac{y_1}{Y_1 P_1^{\text{sat}}} + \frac{y_2}{Y_2 P_2^{\text{sat}}}} = \frac{1}{\frac{0.25}{1.229 \cdot 19.7626} + \frac{0.75}{1.229 \cdot 108.5039}} = 62.7973 \text{ mmHg} = 0.133322 \text{ kPa}$$

DALLA PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA

$$X_1 = \frac{y_1 P}{Y_1 P_1^{\text{sat}}} = \frac{0.25 \cdot 62.7973}{1.229 \cdot 19.7626} = 0.6464$$

$$X_2 = 1 - X_1 = 0.3536$$

Esercizio ②

Un incubatore per la coltura di cellule staminali mantiene l'atmosfera sterile al proprio interno alla pressione parziale di ossigeno del 5%. Calcolare la solubilità dell'ossigeno in acqua (g/L) alla temperatura di 37 °C.

$$p_{O_2} = 0.05 \cdot P_{atm} = 0.05 \text{ atm}$$

$$T = 37^\circ C = 37 + 273.15 = 310.15 \text{ K}$$

LA LEGGE DI HENRY È

$$p_{O_2} = H \cdot C_{O_2} \quad \text{DOVE } C_{O_2} \text{ È LA SOLUBILITÀ}$$

PER TROVARE LA COSTANTE DI HENRY A 310.15 K, SO CHE

$$H^0 = 770 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol}} \quad \text{A } 298.15 \text{ K}$$

LA DIPENDENZA DELLA COSTANTE DALLA TEMPERATURA È

$$H(T) = H^0 \exp \left[-\frac{\Delta H_{ad}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T^0} \right) \right]$$

$$H(T) = 770 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol}} \cdot \exp \left[1700 \left(\frac{1}{310.15} - \frac{1}{298.15} \right) \right] = 617.563 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol}}$$

DALLA LEGGE DI HENRY, TROVO

$$C_{O_2} = \frac{p_{O_2}}{H} = \frac{0.05 \text{ atm}}{617.563 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol}}} = 0.00080963 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

CONVERTIRE IL NUMERO DI MOLE IN GRAMMI

$$m = PM \quad \Rightarrow \quad C_{O_2} (\text{mol/L}) = PM \quad C_{O_2} (\text{g/L}) = 32 \text{ g/mol} \cdot 0.00080963 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \\ = 0.00259 \text{ g/L} = 2.59 \cdot 10^{-3} \text{ g/L}$$

Esercizio 3

Un incubatore per la coltura di cellule staminali mantiene l'atmosfera sterile al proprio interno alla pressione parziale di ossigeno del 5%. Calcolare la solubilità dell'ossigeno in acqua (gr/L) alla temperatura di 37 °C.

$$H = 770 \frac{\text{atm}}{\text{md}}$$

$$T = 298 \text{ K}$$

$$V = 300 \text{ mL} = 0.3 \text{ L}$$

$$p_{O_2} = 0.5 \text{ atm}$$



① OSSIGENO

② ARIA / ACQUA

È UN SISTEMA CON 2 FASI IN EQUILIBRIO. PER L'OSSIGENO VALE

$$f_2^V = f_2^L$$

CONSIDERIAMO IL VAPORE COME GAS IDEALE E L COME GAS IN SOLUZIONE

$$y_2 P = H C_2$$

Dove $H C_2$ (o $H X_2$) È LA LEGGE DI HENRY, MENTRE

$$y_2 P = p_{O_2} \quad \text{È LA PRESSIONE PARZIALE DELL'OSSIGENO}$$

DA QUESTO RICAVIAMO C_2

$$C_2 = \frac{p_{O_2}}{H} = \frac{0.5 \text{ atm}}{770 \frac{\text{atm}}{\text{md}}} = 0.00064935 \frac{\text{md}}{\text{L}}$$

DALLA CONCENTRAZIONE RICAVIAMO IL NUMERO DI MOLI

$$M_2 = C_2 \cdot V = 0.00064935 \frac{\text{md}}{\text{L}} \cdot 0.3 \text{ L} = 0.00064935 \text{ md}$$

DAL NUMERO DI MOLI RICAVIAMO LA MASSA

$$m_2 = \rho M \cdot M_2 = 32 \text{ g/md} \cdot 0.00064935 \text{ md} = 0.002078 \text{ g} \\ = 2.078 \text{ mg}$$

Esercizio 1 N°

Consideriamo una soluzione di glucosio alla concentrazione di 0.1 mg/mL. La temperatura della soluzione è mantenuta a 20 °C. Determinare la pressione osmotica della soluzione in [g/s²cm].

1000

$$C_{\text{glucosio}} = 0.1 \text{ g/L}$$

$$T = 20^\circ\text{C} = 293.15 \text{ K}$$

IL PESO MOLECOLARE DEL GLUCOSIO È 180 g/mol

LA CONCENTRAZIONE MOLARE DEL GLUCOSIO È PARI A

$$C_{\text{glucosio}} = \frac{0.1 \text{ g/L}}{180 \text{ g/mol}} = 5.56 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L}$$

LA PRESSIONE OSMOTICA È PARI A

$$\Pi = C_{\text{glucosio}} RT = 5.56 \cdot 10^{-4} \text{ mol/L} \cdot 0.0821 \frac{\text{L atm}}{\text{mol K}} \cdot 293.15 \text{ K}$$
$$= 1.3381 \cdot 10^{-2} \text{ atm}$$

Esercizio 2 NO

In un esperimento di microfluidica si vuole mimare il processo di filtrazione del sangue in una porzione del glomerulo in diverse condizioni. Per mimare l'ipertonicità che si genera nel rene a livello dell'ansa di Hente il condotto microfluidico è a contatto con una soluzione di pressione osmotica pari a 11.5 atm a 37 °C.

Calcolare quanti grammi [g] di cloruro di sodio (NaCl) bisogna aggiungere a 10 cL di H₂O per ottenere la soluzione ipertonica sopra descritta?

Peso molecolare del sodio=22.9 u, peso molecolare del cloro=35.4 u.

Risultato:

$$m = 2.63 \text{ g}$$

$$\pi = 11.5 \text{ atm}$$

$$m = ?$$

$$T = 37^\circ \text{C} = 310.15 \text{ K}$$

$$V = 10 \text{ cL} = 0.1 \text{ L}$$

$$\rho M_{\text{Na}} = 22.9 \text{ u}$$

$$\rho M_{\text{Cl}} = 35.4 \text{ u}$$

LA PRESSIONE OSMOTICA È PARI A

$$m RT = \pi V$$

DA QUESTA, TROVO IL NUMERO DI MOLE

$$m_{\text{NaCl}} = \frac{\pi V}{RT} = \frac{11.5 \text{ atm} \cdot 0.1 \text{ L}}{0.0821 \frac{\text{atm} \cdot \text{mol}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 310.15 \text{ K}} = 0.045163 \text{ mol}$$

IL PESO MOLECOLARE DI NaCl È

$$\rho M_{\text{NaCl}} = \rho M_{\text{Na}} + \rho M_{\text{Cl}} = 22.9 \text{ u} + 35.4 \text{ u} = 58.3 \text{ u}$$

INFINE, POSSIAMO TROVARE LA MASSA

$$m_{\text{NaCl}} = \rho M m_{\text{NaCl}} = 58.3 \text{ g/mol} \cdot 0.045163 \text{ mol} = 2.633 \text{ g}$$

Esercizio 3 Si ③

Si vuole produrre una soluzione isotonica necessaria al mantenimento di organi umani durante il loro trasporto. Si vuole riprodurre la pressione osmotica del sangue pari a 7.5 atm a 37°C.

- Calcolare la concentrazione molare [mol/L] di glucosio ($C_6H_{12}O_6$) per ottenere una soluzione isotonica col sangue alla stessa temperatura.
- Calcolare quanti grammi [g] di glucosio ($C_6H_{12}O_6$) si devono sciogliere in 5 L di soluzione per ottenere una soluzione isotonica col sangue alla stessa temperatura.

Risultato:

$$C = 0.29 \text{ mol/L}$$

$$M = 261 \text{ g}$$

$$\pi = 7.5 \text{ atm}$$

$$T = 37^\circ C = 310.15K$$

$$V = SL$$

LA PRESSIONE OSMOTICA E' PARI A

$$\pi = CRT$$

POSSO TROVARE LA CONCENTRAZIONE DEL GLUCOSIO

$$C_{\text{glucosio}} = \frac{\pi}{RT} = \frac{7.5 \text{ atm}}{0.0821 \frac{\text{L atm}}{\text{mol K}} \cdot 310.15K} = 0.29 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

CONOSCENDO IL VOLUME DELLA SOLUZIONE, USO LA CONCENTRAZIONE PER TROVARE IL NUMERO DI MOLE

$$M_{\text{glucosio}} = C_{\text{glucosio}} \cdot V = 0.29 \text{ mol/L} \cdot 5 \text{ L} = 1.45 \text{ mol}$$

PER CALCOLARE LA MASSA DEL GLUCOSIO DEVO CONOSCERE IL PESO

$$\text{Peso molecolare } PM = 280 \text{ g/mol}$$

$$m_{\text{glucosio}} = PM \cdot M_{\text{glucosio}} = 280 \text{ g/mol} \cdot 1.45 \text{ mol} = 261 \text{ g}$$

Esercizio 4

S1
4

CASO APPLICATIVO

Qual è il costo [€] minimo per avere 1 L di H_2O dolce da un litro di H_2O di mare (salata)?

Risultato:

0.4€

PER AVERE 1L DI H_2O DOLCE, È NECESSARIO CHE LA PRESSIONE MINIMA ESERCITATA SIA ALMENO UGUALE ALLA PRESSIONE OSMOTICA (O LA SUPERI)

$$\Delta P_{\min} = \pi$$

LA CONCENTRAZIONE DEL SALE $NaCl$ NEL MARE È

$$C_{NaCl} = \frac{\rho_{NaCl}}{M} = \frac{35 \text{ g/L}}{58.3 \text{ g/mol}} = 0.6 \text{ mol/L}$$

1 MOLE DI $NaCl$ IN SOLUZIONE SI DISSOCIA IN 2 MOLE: $Na^+ + Cl^-$

$$C_{ioni} = 2 \cdot 0.6 = 1.2 \text{ mol/L}$$

CALCOLO LA PRESSIONE OSMOTICA USANDO $R = 8.31 \frac{\text{J KPa}}{\text{K mol}}$

$$\pi = C_{ioni} RT = 1.2 \text{ mol/L} \cdot 8.31 \frac{\text{J KPa}}{\text{K mol}} \cdot 298.15 \text{ K} = 2973.15 \text{ KPa}$$

IL LAVORO PER ~~REALIZZARE~~ OTTENERE QUESTA PRESSIONE È

$$W = \pi \cdot V = 2973.15 \text{ KPa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 2973.15 \text{ J}$$

SUPPONENDO IL COSTO DI 1 Wh = 1€

$$1 \text{ Wh} = 1 \text{ J/s} \cdot 3600 \text{ s} = 3600 \text{ J}$$

SE 1 Wh CONSUMA 3600 J AL COSTO DI 1€, IL COSTO PER 2973.15 J È

$$\text{COSTO} = \frac{2973.15 \text{ J}}{3600 \text{ J}} \cdot 1 \text{ €} = 0.83 \text{ €}$$

Esercizio 1 SI (5)

Un farmaco ha un peso molecolare di 230 e una temperatura di fusione di 155°C.

Stima la solubilità del farmaco in benzene e n-esano a 25°C, assumendo che formino una soluzione ideale.

Risultato:

$$X_2 = 0.11$$

$$\rho_{H_2} = 230 \text{ g/mol}$$

$$\Delta H_{\text{fus}}^{\text{par}} = 38\,000 \text{ J/mol}$$

$$T_{\text{fm}} = 155^\circ\text{C} = 428.15 \text{ K}$$

$$T = 25^\circ\text{C} = 298.15 \text{ K}$$

LA SOLUBILITÀ DEL FARMACO SARÀ PARI A

$$X_2 = \exp \left[- \frac{\Delta H_{2,T_{\text{fm}}}^{\text{par}}}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\text{fm}}} \right) \right]$$

$$= \exp \left[- \frac{38\,000 \text{ J/mol}}{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}} \left(\frac{1}{298.15 \text{ K}} - \frac{1}{428.15 \text{ K}} \right) \right] = 0.11$$

Esercizio 2 N°

Stimare l'abbassamento del punto di congelamento di una soluzione di benzene contenente il farmaco dell'Esercizio 1. La concentrazione del farmaco è 0.04 g/cm³, la densità del benzene è 0.885 g/cm³. Il punto di fusione del benzene è 278.7 K.

LA FRAZIONE MOLARE È PARI A

$$X_2 = \frac{M_2}{m_2 + m_1} = \frac{\frac{M_2}{V}}{\frac{M_2}{V} + \frac{m_1}{V}} = \frac{C_2}{C_2 + C_1}$$

POICHÉ X_2 SARÀ MOLTO PICCOLA, APPROXIMIAMO LA CONCENTRAZIONE DEL ~~benzene~~ ^{LIAVIO} ~~benzene~~ ^{DENSITÀ} ~~benzene~~ ^{DENSITÀ} ALLA DENSITÀ DEL BENZENE, QUINDI

$$C_1 = C_L - C_2$$

INOLTRE PASSIAMO DA CONCENTRAZIONI DI MASSA A CONCENTRAZIONE MOLARE ~~attraverso~~ attraverso i pesi molecolari

$$X_2 = \frac{\frac{C_2}{PM_2}}{\frac{C_2}{PM_2} + \frac{C_L - C_2}{PM_2}} = \frac{\frac{0.04 \text{ g/cm}^3}{230 \text{ g/mol}}}{\frac{0.04 \text{ g/cm}^3}{230 \text{ g/mol}} + \frac{(0.885 - 0.04) \text{ g/cm}^3}{78 \text{ g/mol}}} = 0.0158$$

$$X_1 = 1 - X_2 = 0.9842$$

TROVIAMO ORA T:

$$\ln X_2 = \frac{\Delta H_{fus}^{\ddagger}}{R} \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T} \right)$$

$$\frac{R}{\Delta H_{fus}^{\ddagger}} \ln X_2 = \frac{1}{T_m} - \frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_m} - \frac{R}{\Delta H_{fus}^{\ddagger}} \ln X_2$$

$$T = \frac{1}{\frac{1}{T_m} - \frac{R}{\Delta H_{fus}^{\ddagger}} \ln X_2} = \frac{1}{\frac{1}{278.7 \text{ K}} - \frac{8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}}{9832 \frac{\text{J}}{\text{mol}}} \cdot \ln(0.9842)} =$$

$$= 277.658$$

$$\Delta T = T_m - T = 278.7 \text{ K} - 277.658 = 1.042 \text{ K}$$

Esercizio 1 *No*

Considera una goccia d'acqua di diametro di 2 mm, sospesa in olio d'oliva a 25°C e 1 bar. Qual è la pressione all'interno della goccia d'acqua?

$$d = 2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$P_{in} = ?$$

$$T = 25^\circ\text{C}$$

$$P_{out} = 1 \text{ atm}$$

L'EQUAZIONE DI LAPLACE È

$$P_{in} - P_{out} = 2 \frac{\sigma}{R}$$

LA PRESSIONE INTERNA È

$$P_{in} = P_{out} + 2 \frac{\sigma}{R}$$

$$\begin{aligned} P_{in} &= 1 \text{ atm} + 2 \cdot \frac{20 \text{ N/m}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \cdot 9.869 \cdot 10^4 \frac{\text{atm}}{\text{Pa}} \\ &= 1 \text{ atm} + 0.3947 \text{ atm} = 1.3947 \text{ atm} \end{aligned}$$

Calcolare la tensione superficiale della parete degli alveoli, considerando che il raggio degli alveoli è 50 micrometri, mentre le pressioni al loro interno e nella cavità pleurica sono -3 mmHg e -4 mmHg rispetto alla pressione atmosferica.

$$R = 50 \mu\text{m} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$P_{IN} = -3 \text{ mmHg}$$

$$P_{OUT} = -4 \text{ mmHg}$$

LA LEGGE DI LAPLACE È

$$P_{IN} - P_{OUT} = 2 \frac{\sigma}{R}$$

$$\sigma = \frac{R (P_{IN} - P_{OUT})}{2} = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1 \text{ mmHg} \cdot 133.322 \text{ Pa/mmHg}}{2} = 3.33 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$$

Esercizio 1

N/0

Determinare il valore della costante di equilibrio della reazione $\text{N}_2(\text{g}) + \text{O}_2(\text{g}) \rightleftharpoons 2 \text{NO}(\text{g})$ per la quale a 25 °C il valore di ΔG° è pari a 173.4 kJ/mol.

$$T = 25^\circ\text{C} = 298.15\text{ K}$$

$$\Delta G^\circ = 173.4 \text{ kJ/mol}$$

Per la relazione che lega costante d'equilibrio
e ΔG è

$$K_{\text{eq}} = \exp\left(-\frac{\Delta G^\circ}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{173.4 \text{ kJ/mol}}{8.314 \cdot 298.15\text{ K}}\right) = 0.93204$$

L'ossidazione del glucosio è una reazione spontanea in quanto la variazione dell'energia libera è minore di zero. Consideriamo una tipica reazione biochimica:
 glucosio-1-fosfato \rightleftharpoons glucosio-6-fosfato.

Supponiamo di avere una soluzione di glucosio-1-fosfato a concentrazione fisiologica 0.02 M e, dopo che la reazione ha avuto luogo, si ha all'equilibrio che la concentrazione di glucosio-1-fosfato è 0.001 M mentre quella di glucosio-6-fosfato è 0.019 M.

Calcolare il ΔG relativa a tale reazione.

$$C_1^{\text{in}} = 0.02 \text{ M}$$

$$C_1^{\text{out}} = 0.001 \text{ M}$$

$$C_2^{\text{out}} = 0.019 \text{ M}$$

POICHÉ L'ESERCIZIO CI FORNISCE LE CONCENTRAZIONI MOLARI,
 USIAMO LA FORMULAZIONE PER LA COSTANTE DI EQUILIBRIO
 TALE CHE

$$K_{\text{eq}} = \prod_{i=1}^N C_i^{v_i}$$

Dove v_i è il coefficiente stechiometrico

$$K_{\text{eq}} = [C_2^{\text{out}}]^1 \cdot [C_1^{\text{out}}]^{-1}$$

$$= \frac{0.019 \text{ M}}{0.001 \text{ M}} = 19$$

L'EQUILIBRIO È SPOSTATO VERSO DESTRA

LA RELAZIONE TRA COSTANTE DI EQUILIBRIO E ΔG° È

$$K_{\text{eq}} = \exp\left(-\frac{\Delta G^\circ}{RT}\right)$$

$$\Delta G^\circ = -RT \ln K_{\text{eq}}$$

LA REAZIONE AVVIENE A TEMPERATURA FISIOLOGICA $T = 37^\circ \text{C} = 310.15 \text{ K}$

$$\Delta G^\circ = -8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 310.15 \text{ K} \cdot \ln(19) = -7592.55 \text{ J/mol} = -7.6 \text{ kJ/mol}$$

$$K_{\text{eq}}^P = K_{\text{eq}} (RT)^{\frac{1}{2}-1} = K_{\text{eq}}$$

Trova il ΔG per la sintesi dell'ammoniaca: $N_2 + 3 H_2 = 2 NH_3$ in condizioni standard e alla temperatura di 340 K.

LE CONDIZIONI STANDARD PREVEDONO $T = 25^\circ C = 298.15 K$ E $P = 100$

ΔG° DI REAZIONE IN CONDIZIONI STANDARD È DATO DA

$$\Delta G^\circ = 2 G_{NH_3}^\circ - 1 G_{N_2}^\circ - 3 G_{H_2}^\circ = 2 (-16.4 \text{ kJ/mol}) - 0 - 0 = \\ = -32.8 \text{ kJ/mol}$$

LA DIPENDENZA DI ΔG DALLA TEMPERATURA È

$$\frac{\Delta G_T^\circ}{RT} = \frac{\Delta G_{T_R}^\circ}{RT_R} + \frac{\Delta H_{T_R}^\circ}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_R} \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta G_T^\circ &= T \frac{\Delta G_{T_R}^\circ}{T_R} + \Delta H_{T_R}^\circ \left(1 - \frac{T}{T_R} \right) \\ &= 340 \text{ K} \cdot \underbrace{\frac{(-32.8 \text{ kJ/mol})}{298.15 \text{ K}}}_{\text{FATTORI DI CORREZIONE}} + \underbrace{(-45.94 \text{ kJ/mol})}_{*} \left(1 - \frac{340}{298.15} \right) \\ &\approx -24.5 \text{ kJ/mol} \end{aligned}$$

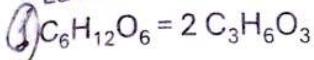
IL ΔH° IN CONDIZIONI STANDARD È DATO DA

$$\Delta H^\circ = 2 H_{NH_3}^\circ - 1 H_{N_2}^\circ - 3 H_{H_2}^\circ = 2 (-45.94 \text{ kJ/mol}) - 0 - 0 \\ = -91.88 \text{ kJ/mol}$$

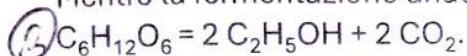
Esercizio 4

AG

La fermentazione lattica del glucosio produce acido lattico:



Mentre la fermentazione anaerobica del glucosio produce etanolo e diossido di carbonio:



Compara le costanti di equilibrio delle reazioni.

$$\Delta G^\circ_f \text{ C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 (\text{s}) = -910.4 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta G^\circ_f \text{ C}_3\text{H}_6\text{O}_3 (\text{l}) = -711.62 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta G^\circ_f \text{ C}_2\text{H}_5\text{OH} (\text{l}) = -174.8 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta G^\circ_f \text{ CO}_2(\text{g}) = -394.4 \text{ kJ/mol}$$

GRAZIE AI ΔG DI FORMAZIONE, TROVIAMO ΔG DI REAZIONE

$$\textcircled{1} \quad \Delta G_1^\circ = 2 \Delta G_f^\circ \text{ C}_3\text{H}_6\text{O}_3 - \Delta G_f^\circ \text{ C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 = 2(-711.62) - (-910.4) \\ = -522.84 \text{ kJ/mol}$$

$$\textcircled{2} \quad \Delta G_2^\circ = 2 \Delta G_f^\circ \text{ C}_2\text{H}_5\text{OH} + 2 \Delta G_f^\circ \text{ CO}_2 - \Delta G_f^\circ \text{ C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6 \\ = 2(-174.8) + 2(-394.4) - (-910.4) \\ = -228 \text{ kJ/mol}$$

TROVIAMO LE COSTANTI DI EQUILIBRIO

$$K_{\text{eq},1} = \exp\left(-\frac{\Delta G_1^\circ}{RT}\right) = \exp\left(\frac{-522.84}{8.314 \cdot 298.15}\right) = 1.2298$$

$$K_{\text{eq},2} = \exp\left(\frac{-228}{8.314 \cdot 298.15}\right) = 1.0963$$

Esercizio 1

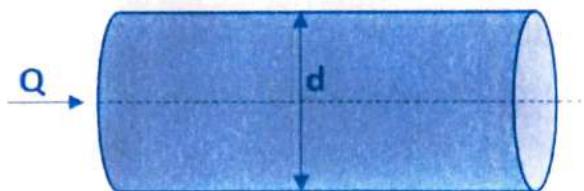
1

Dato un condotto cilindrico, a sezione circolare di diametro $d = 1.5 \text{ cm}$ in cui fluisce una portata $Q = 0.5 \text{ L/s}$, che ne occupa tutta la sezione.

Determinare la velocità media del fluido che scorre nel condotto.

Risultato:

$$\langle v \rangle = 2.829 \text{ m/s}$$



LA RELAZIONE CHE LEGA LA PORTATA VOLUMETRICA Q ALLA VELOCITÀ MEDIA $\langle v \rangle$

$$Q = \langle v \rangle A \quad A = \text{SEZIONE TRASVERSALE AL FLUSSO}$$

LA SEZIONE TRASVERSALE A È PARI A

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.015^2 \text{ m}^2}{4} = 1.77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

LA VELOCITÀ MEDIA È

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}}{1.77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = \frac{5}{1.77} = 2.829 \text{ m/s}$$

Esercizio 2



Un condotto circolare presenta in un tratto iniziale, un diametro $d_1 = 2 \text{ cm}$ e, in un tratto successivo, un diametro $d_2 = 1 \text{ cm}$. Sapendo che la corrente nel tratto di monte ha velocità media $\langle v_1 \rangle = 1.6 \text{ m/s}$, determinare la portata fluente nel tratto stesso.

Sapendo inoltre che il fluido è incompressibile e che il moto è stazionario, determinare la portata fluente nel tratto a valle e la velocità media della corrente in quel tratto.

Risultato:

$$Q_1 = 5.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_2 = Q_1$$

$$\langle v_2 \rangle = 6.4 \text{ m/s}$$



LA RELAZIONE CHE LEGA LA PORTATA VOLUMETRICA Q ALLA VELOCITÀ MEDIA $\langle v \rangle$

$$Q = \langle v \rangle A_1$$

LA SUPERFICIE TRASVERSALE È

$$A_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} = \pi \cdot \frac{0.0004}{4} \text{ m}^2 = 0.000314 \text{ m}^2$$

LA PORTATA VOLUMETRICA È

$$Q = \langle v \rangle A_1 = 1.6 \text{ m/s} \cdot 0.000314 \text{ m}^2 = 5.02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

QUANDO IL FLUIDO È INCOMPRESSIBILE E IL MOTO È STAZIONARIO, LA PORTATA SI MANTIENE COSTANTE. QUINDI

$$Q = Q_1 = Q_2$$

LA VELOCITÀ MEDIA NEL TRATTO 2 PUÒ ESSERE DETERMINATA COME

$$\langle v_2 \rangle = \frac{Q}{A_2}$$

$$\begin{aligned} &= \langle v_1 \rangle \frac{A_1}{A_2} = \langle v_1 \rangle \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot \frac{4}{\pi d_2^2} = \langle v_1 \rangle \frac{d_1^2}{d_2^2} = 1.6 \text{ m/s} \cdot \frac{0.02^2}{0.01^2} = \\ &= 6.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(3)

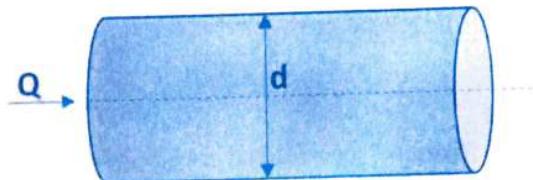
Esercizio 3

In un condotto cilindrico, a sezione circolare di diametro $d = 2 \text{ mm}$, fluisce una portata $Q = 0.02 \text{ L/s}$, che ne occupa tutta la sezione.

Quale diametro d' si deve assegnare ad un diverso condotto affinché vi fluisca una portata $Q' = 1.5 \cdot Q$, mantenendo invariata la velocità media del flusso?

Risultato:

$$d' = 2.45 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



LA RELAZIONE CHE LEGA PORTATA VOLUMETRICA E VELOCITÀ È

$$Q = \langle v \rangle A$$

~~per~~

$$Q' = \langle v \rangle A'$$

LA VELOCITÀ MEDIA È LA STESSA, QUINDI

$$\frac{Q}{A} = \frac{Q'}{A'} \rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{Q'}{Q} \rightarrow \frac{\pi \frac{d'^2}{4}}{\pi \frac{d^2}{4}} = \frac{Q'}{Q} \rightarrow \left(\frac{d'}{d}\right)^2 = \frac{Q'}{Q}$$

CON QUESTA POSSIAMO DIRE

$$\frac{d'}{d} = \sqrt{\frac{Q'}{Q}} = \sqrt{\frac{1.5Q}{Q}} = \sqrt{1.5} = 1.225$$

$$d' = 1.225 d = 2.45 \text{ mm}$$

Esercizio 4

(4)

In un condotto cilindrico, a sezione circolare di diametro $d = 1 \text{ cm}$, scorre un fluido incompressibile Newtoniano di densità $\rho = 1.05 \rho_{\text{H}_2\text{O}}$ e viscosità dinamica $\mu = 4 \mu_{\text{H}_2\text{O}}$.

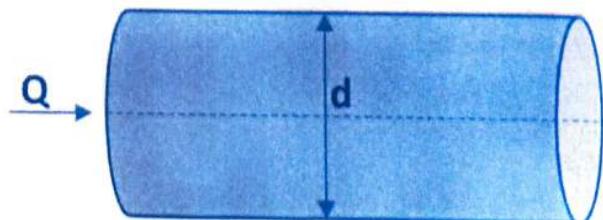
La portata fluente è $Q = 0.05 \text{ L/s}$.

Determinare il numero di Reynolds del modo del condotto e stabilire la tipologia del regime dinamico.

Risultato:

$$\text{Re} = 1672$$

moto laminare



LA DENSITÀ DELL'ACQUA È $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$

LA VISCOSITÀ DINAMICA DELL'ACQUA È $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 80^{-3} \text{ kg/ms}$

LA VISCOSITÀ CINEMATICA È IL RAPPORTO TRA LE DUE GRANDEZZE

$$\nu_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

IL NUMERO DI REYNOLDS È DEFINITO COME

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\rho L}{\nu}$$

IN UN CONDOTTO CIRCOLARE, LA VELOCITÀ È LA VELOCITÀ MEDIA (v) E LA LUNGHEZZA CARATTERISTICA È IL DIAMETRO D

$$\text{Re} = \frac{\langle v \rangle D}{\nu}$$

LA VELOCITÀ MEDIA È

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0.05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 0.01^2 \text{ m}^2} = 0.637 \text{ m/s}$$

LA VISCOSITÀ CINEMATICA È

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4}{1.05} \nu_{\text{H}_2\text{O}} = 3.809 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

IL NUMERO DI REYNOLDS È QUINDI UGUALE A

$$\text{Re} = \frac{0.637 \text{ m/s} \cdot 0.01 \text{ m}}{3.809 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1672.35 < 2100$$

↓

MOTO LAMINARE

(5)

Esercizio 5

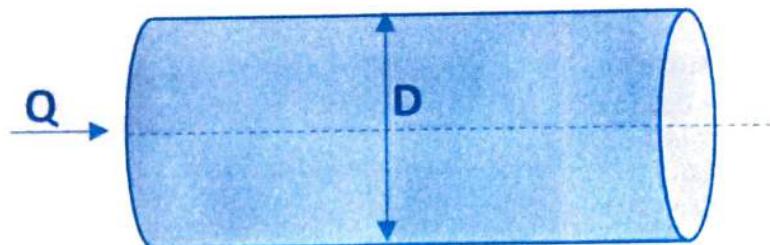
In un condotto cilindrico, a sezione circolare di diametro $D = 4 \text{ cm}$, scorre un fluido incompressibile Newtoniano di densità $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ e viscosità dinamica $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}$ alla portata di $Q = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

Determinare il numero di Reynolds del modo del condotto e stabilire la tipologia del regime dinamico.

Risultato:

$$\text{Re} = 36606$$

moto turbolento



IL NUMERO DI REYNOLDS È DEFINITO COME

$$\text{Re} = \frac{\rho v L}{\mu} = \frac{\rho L}{\nu}$$

IN UN CONDOTTO CIRCOLARE, LA VELOCITÀ È LA VELOCITÀ MEDIA $\langle v \rangle$
E LA LUNGHEZZA CARATTERISTICA È IL DIAMETRO D

$$\text{Re} = \frac{\langle v \rangle D}{\nu}$$

LA VELOCITÀ MEDIA DEL CONDOTTO È

$$\langle v \rangle = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}{\pi \cdot 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0.398 \cdot 10 = 3.98 \text{ m/s}$$

LA VISCOSITÀ CINEMATICA DEL FLUIDO È

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}}{920 \text{ kg/m}^3} = 0.0043 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

IL NUMERO DI REYNOLDS È QUINDI UGUALE A

$$\text{Re} = \frac{3.98 \text{ m/s} \cdot 0.04 \text{ m}}{0.0043 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}} = 37.02 \cdot 10^3 = 37020 > \cancel{2000} \cancel{4000}$$



MOTO TURBOLENTO

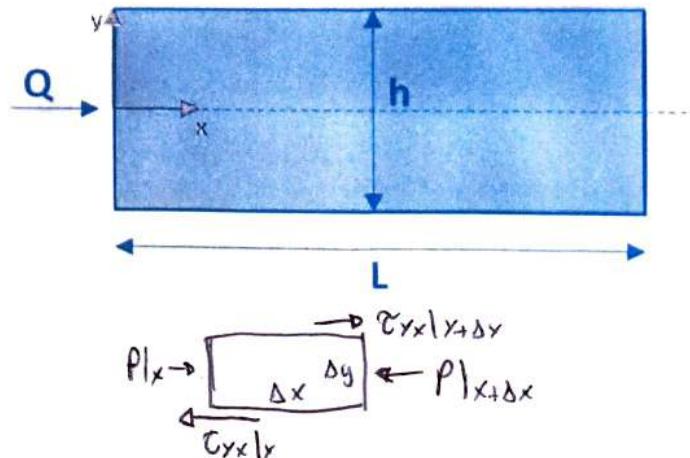
Consideriamo un condotto rettangolare di larghezza $w = 2.4 \text{ cm}$.

Determinare l'altezza del canale h che può generare uno shear stress alla parete $y = -h/2$ uguale a $\tau_{yx} = 23 \text{ dyn/cm}^2$ e con la portata pari a $Q = 1.6 \text{ cm}^3/\text{s}$.

La viscosità del fluido è pari a $\mu = 0.0073 \text{ g/cm s}$.

Risultato:

$$h = 0.035 \text{ cm}$$



IN UN CONDOTTO RETTANGOLARE
LO SHEAR STRESS È UGUALE A

$$\tau_{yx} = -\frac{\Delta p}{L} y \Big|_{y=-h/2} = \frac{\Delta p \cdot h}{2L}$$

DIMOSTRAZIONE

Bilancio della quantità di moto $(p|_x - p|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z + (\tau_{yx}|_{y+\Delta y} - \tau_{yx}|_y) \Delta x \Delta z = 0$

Dividendo per l'elemento di volume $\Delta x \Delta y \Delta z$, ottengo $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (1)$

Le due funzioni possono essere uguali solo se regolari a una costante C_1

$$p = C_1 x + C_2$$

Definisco le condizioni al contorno: $x = x_0 \quad p = p_0$ con $\Delta p = p_0 - p_L$
 $x = x_L \quad p = p_L$ $L = x_L - x_0$

Quando $x = x_0$, $p_0 = C_1 x_0 + C_2$

Quando $x = x_L$, $p_L = C_1 x_L + C_2$

Sottraendo le due equazioni ottengo

$$p_0 - p_L = C_1 x_0 + C_2 - C_1 x_L - C_2$$

$$p_0 - p_L = C_1 x_0 - C_1 x_L = C_1 (x_0 - x_L)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{p_0 - p_L}{x_0 - x_L} = -\frac{\Delta p}{L} \\ C_2 = p_0 - C_1 x_0 = p_0 + \frac{\Delta p}{L} x_0 \end{array} \right.$$

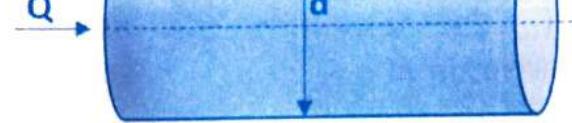
Sostituendo le due costanti ottengo:

$$p = -\frac{\Delta p}{L} x + p_0 + \frac{\Delta p}{L} x_0 = p_0 + \frac{\Delta p}{L} (x_0 - x) \rightarrow \frac{p - p_0}{x - x_0} = -\frac{\Delta p}{L} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$$

Ottengo che lo shear stress è uguale a

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L} \rightarrow \tau_{yx} = -\frac{\Delta p}{L} y$$

Es 6 continuo



La velocità massima è uguale a

$$V_{\max} = \frac{\Delta p h^2}{8 \mu L} \rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{8 \mu V_{\max}}{h^2} = \frac{12 \mu Q}{\pi h^3}$$

$$Q = \frac{2 V_{\max} \pi h}{3}$$

Sostituendo $\frac{\Delta p}{L}$ nell'equazione di T_{\max} , ottengo

$$T_{\max} = \frac{6 \mu Q}{\pi h^2}$$

Risolvendo per h ottengo

$$h = \sqrt{\frac{6 \mu Q}{\pi T_{\max}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 0.0073 \text{ g/cms} \cdot 1.6 \text{ cm}^3/\text{s}}{2.4 \text{ cm} \cdot 23 \cdot 0.1 \cdot 30 \text{ g/cm}^2}} = \sqrt{\frac{0.07 \text{ cm}^2}{55.2}} = 0.035 \text{ cm}$$

Ricorda che $1 \text{ dyn/cm}^2 = 0.1 \text{ Pa} = 0.1 \cdot 10 \text{ g/cm}^2$

Esercizio 7

(8)

Siete stati assunti dall'azienda Biomicrofluidics per disegnare un dispositivo microfluidico per catturare le cellule tumorali presenti nel sangue. Queste cellule catturate verranno analizzate in un microarray per sviluppare profili genetici di cancro allo scopo di sviluppare nuove terapie.

Praticamente, i globuli rossi vengono separati dalle altre cellule, e la soluzione dei globuli bianchi fluisce attraverso una serie di canali fatti di lastre parallele, in cui la lastra inferiore di ogni canale è rivestita con un anticorpo che si lega alle cellule tumorali.

Ci sono 20 canali paralleli identici di uguale altezza, larghezza e lunghezza: h , w , L .

Le cellule tumorali aderiscono se lo shear stress è sotto valore critico.

- 1) Usare le condizioni di disegno sotto per determinare l'altezza h del canale che permette di avere un'efficiente cattura delle cellule sulla superficie inferiore dei canali.
- 2) Determinare se la differenza di pressione totale è minore di 5000 Pa e se il flusso è laminare.

Dati:

- 1) $W = 20 h \rightarrow$ il flusso è mono dimensionale
- 2) Portata totale $Q_{\text{tot}} = 10 \text{ cm}^3/\text{h}$
- 3) Viscosità $\mu = 0,008 \text{ g/cm s}$ e densità $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$
- 4) Lo shear stress alla superficie inferiore deve essere non più alto di 1 dyn/cm^2
- 5) La lunghezza del canale $L = 6 \text{ cm}$.

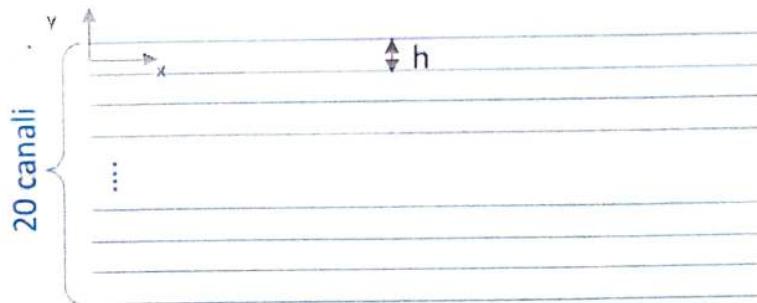
Risultato:

$$h > 0.0069 \text{ cm}$$

$$\Delta P = 173.91 \text{ Pa}$$

$$Re = 0.24$$

Moto laminare



PER DETERMINARE L'ALTEZZA h DOBBIAMO CONOSCERE LA VISCOSITÀ, LA LARGHEZZA DEL CANALE, LA PORTATA, LA DIFFERENZA DI PRESSIONE E LO SHEAR STRESS

$$Q_{\text{TOT}} = 10 \frac{\text{cm}^3}{\text{h}} = \frac{10}{3600 \text{ s}} \text{ cm}^3, 0.00278 = 27.8 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}$$

LA PORTATA DI CIASCUN CANALE VALE

$$Q_{\text{chan}} = \frac{Q_{\text{TOT}}}{20} = 1.39 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$\text{LO SHEAR STRESS E'} \tau_{yx} = 1 \text{ dyn/cm}^2$$

PER UN FLUIDO ALL'INTERNO DI UN CANALE RETTANGOLARE VALE

$$\tau_{yx} = -\frac{\Delta p}{L} y \Big|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{\Delta p h}{2L} \rightarrow \frac{\Delta p}{L} = \frac{2\tau_{yx}}{h}$$

LA PORTATA E' UGUALE A

$$Q = \frac{2V_{\text{max}} wh}{3} = \frac{2\Delta p wh^3}{24\mu L} = \frac{\Delta p wh^3}{32\mu L}$$

$$V_{\text{max}} = \frac{\Delta Ph^2}{8\mu L}$$

9

SOSTITUISCO $\frac{\Delta p}{L} = \frac{2 \tau_{yx}}{h}$ e $w = 20 \text{ h}$

$$Q = \frac{2 \tau_{yx} \cdot 20 \text{ h} \cdot h^3}{32 \mu K} = \frac{10 \tau_{yx} h^3}{3 \mu}$$

RISOLVO PER h

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 \mu Q}{10 \tau_{yx}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0.008 \text{ g/cm s} \cdot 2 \cdot 39 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{s}}{10 (2 \text{ g/cm}^2 \text{ s})}} = 0.0069 \text{ cm}$$

LA CADUTA DI PRESSIONE È UGUALE A (PER OGNI CANALE)

$$\Delta P = \frac{2 \tau_{yx} L}{h} = \frac{2 \cdot 0.1 \text{ Pa} \cdot 6 \text{ cm}}{0.0069 \text{ cm}} = 173.93 \text{ Pa}$$

I CANALI SONO DISPOSTI IN PARALLELO, QUINDI LA CADUTA DI PRESSIONE TOTALE È LA STESSA.

$$\Delta P_{\text{TOT}} = \Delta P < 5000 \text{ Pa}$$

PER STABILIRE SE IL FLUSSO È LAMINARE CALCOLO REYNOLDS DEL SINGOLO CANALE

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D_h}{\mu} = \frac{\rho Q 2wh}{\frac{1}{4} \pi w h \mu (w+h)} = \frac{2 \rho Q}{\mu (w+h)} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1.39 \cdot 10^{-4}}{0.008 \cdot 2 \cdot 0.0069 \text{ cm}} = 2398 \cdot 10^{-4} = 0.24$$

$$Re = 0.24 < 2300 \rightarrow \text{MOTO LAMINARE}$$

Esercizio 8

(10)

Consideriamo una vena dal diametro $d_{vena} = 3 \text{ mm}$ e lunga $L_{vena} = 10 \text{ cm}$, in cui viene infuso un farmaco con una portata $Q = 1 \text{ mL/min}$ per un tempo di 30 min, utilizzando un ago di diametro interno $d_{ago} = 0.75 \text{ mm}$ e lungo $L_{ago} = 5 \text{ cm}$.

La velocità del sangue è di $v_{sangue} = 3 \text{ cm/s}$ mentre la pressione che agisce è pari a $P = 90 \text{ mmHg}$. L'ago è collegato alla sacca che contiene il farmaco tramite un tubo del diametro di $d_{tubo} = 2 \text{ mm}$ e lungo $L_{tubo} = 1.5 \text{ m}$.

Vengono forniti anche i seguenti dati:

$$\rho_{H_2O} = 10^3 \text{ kg/m}^3 = 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

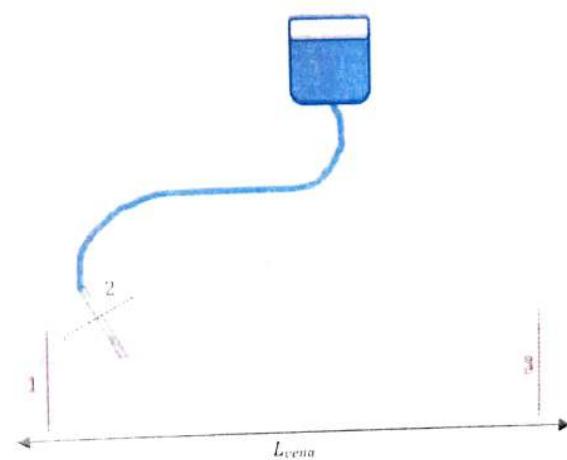
$$\mu_{H_2O} = 10^{-3} \text{ kg/ms} = 10^{-5} \text{ kg/cms}$$

$$\rho_{sangue} = 1.056 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1.056 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

Calcolare:

1) La velocità media del sangue nella sezione 3

2) A che altezza, in mH_2O , bisogna posizionare la sacca contenente il farmaco per far fluire il farmaco.



Risultato:

$$\langle v \rangle = 3.4 \text{ cm/s}$$

$$h = 1.22 \text{ mH}_2\text{O}$$

LA RELAZIONE CHE LEGA VELOCITÀ MEDIA, PORTATA E SEZIONE TRASVERSALE

$$Q_3 = \langle v_3 \rangle A_3$$

IN QUESTO CASO HO DUE FLUIDI DIVERSI, ACQUA E SANGUE, QUINDI DEVO CONSIDERARE LA PORTATA DI MASSA CHE TIEDE CONTO DELLE DENSITÀ

$$\dot{M}_3 = \rho Q_3 = \rho \langle v_3 \rangle A_3 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$$

PER IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA VALE CHE:

$$\dot{M}_1 + \dot{M}_2 = \dot{M}_3$$

LA PORTATA DI MASSA DI SANGUE NELLA SEZIONE 1:

$$\dot{M}_1 = \rho_{sangue} \langle v_{sangue} \rangle A_1 = 1.056 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \frac{\pi (0.3)^2}{4} \text{cm}^2 = 0.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 0.25 \frac{\text{g}}{\text{s}}$$

LA PORTATA DI MASSA DI ACQUA NELLA SEZIONE 1 È PARI ALLA METÀ DI \dot{M}_{sangue} PERCHÉ H_2O È CONTENUTA PER IL 50% NEL SANGUE

$$\dot{M}_{1H_2O} = \frac{\dot{M}_{sangue}}{2} = 0.125 \text{ g/s}$$

LA PORTATA DI MASSA NELLA SEZIONE 2 È DATA SOLO DAL FARMACO

$$\dot{M}_{2H_2O} = \rho_{H_2O} \langle v_{farmaco} \rangle A_{ago} = 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot \frac{1}{60} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 0.017 \text{ g/s}$$

LA PORTATA DI MASSA DI ACQUA NELLA SEZIONE 3 È DATA DALLA SOMMA DELLE 2 PORTATE ENTRANTI DI ACQUA

$$\dot{M}_{3H_2O} = \dot{M}_{1H_2O} + \dot{M}_{2H_2O} = 0.125 + 0.017 = 0.142 \text{ g/s}$$

Es 8 CONTINUO 1

LA PORTATA DI SANGUE NELLA SEZIONE 3 È PARI AL DOPPIO DELLA ACQUA NELLA SEZIONE 3

$$\dot{m}_{\text{sangue}} = 2 \dot{m}_{\text{acqua}} = 0.284 \text{ g/s}$$

LA VELOCITÀ DEL SANGUE NELLA SEZIONE 3 È UGUALE A

$$v_{\text{sangue}} = \frac{\dot{m}_{\text{sangue}}}{\rho_{\text{sangue}} A_{\text{sezione}}} = \frac{0.284 \text{ g/s}}{1.056 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3} \cdot 0.7 \text{ cm}^2} = 3.84 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

H

PER FAR FLUIRE IL FARMACO È NECESSARIO CHE VENGA BILANCIATA LA PRESSIONE TOTALE CHE AGISCE IN TUTTO IL SISTEMA, CHE È PARI A:

$$P_{\text{TOT}} = P_{\text{vena}} + \Delta P \quad \text{DOVE } \Delta P = \Delta P_{\text{tubo}} + \Delta P_{\text{ago}}$$

RICORDIAMO CHE $P_{\text{vena}} = 90 \text{ mmHg}$, DOBBIAMO CONVERTIRE IN mH_2O

$$P_{\text{vena}} = \frac{90}{760} = 0.32 \text{ bar} = 3.2 \text{ mH}_2\text{O}$$

PER CALCOLARE ΔP_{tubo} e ΔP_{ago} USO L'ESPRESSIONE PER CONDOTTI CILINDRICI

$$Q = \frac{\Delta P \pi R^4}{8 \mu L} \Rightarrow \Delta P = \frac{8 Q \mu L}{\pi R^4}$$

LA PORTATA DI FARMACO È LA STESSA SIA NELL'AGO CHE NELL'AGO

$$Q_{\text{farmaco}} = \frac{1 \text{ mL}}{60 \text{ min}} = \frac{1}{60} \frac{\text{cm}^3}{\text{s}} = 0.017 \text{ cm}^3/\text{s}$$

QUINDI

$$\Delta P_{\text{ago}} = \frac{8 Q_{\text{farmaco}} \mu_{\text{ago}} L_{\text{ago}}}{\pi R_{\text{ago}}^4} = \frac{8 \cdot 0.017 \cdot 10^{-5} \cdot 5}{\pi \left(\frac{0.75}{2} \cdot 10^{-3} \right)^4} = 108.2 \text{ Pa} = 108.2 \cdot 10^5 \text{ bar} = 108.2 \cdot 10^{-4} \text{ mH}_2\text{O}$$

$$\Delta P_{\text{tubo}} = \frac{8 Q_{\text{farmaco}} \mu_{\text{tubo}} L_{\text{tubo}}}{\pi R_{\text{tubo}}^4} = \frac{8 \cdot 0.017 \cdot 10^{-5} \cdot 150}{\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \right)^4} = 65 \text{ Pa} = 65 \cdot 10^5 \text{ bar} = 65 \cdot 10^{-4} \text{ mH}_2\text{O}$$

$$P_{\text{TOT}} = P_{\text{vena}} + \Delta P_{\text{ago}} + \Delta P_{\text{tubo}} = 3.2 \text{ mH}_2\text{O} + 0.01 \text{ mH}_2\text{O} + 0.0065 \text{ mH}_2\text{O} = 3.22 \text{ mH}_2\text{O}$$

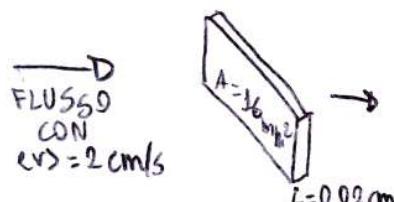
ALTEZZA SACCA $h = 1.22 \text{ m}$

Esercizio 1

Si vuole testare una membrana per scopi biomedicali che ha il compito di permettere un elevato passaggio di CO₂ attraverso la membrana stessa. Lo spessore della membrana (L) è pari 0.02 cm, la superficie della membrana attraverso cui passa il fluido che deve essere filtrato è pari ad A=16 mm² e il fluido attraversa la membrana con una velocità pari a v=2 cm/s. Il coefficiente di diffusione della CO₂ all'interno della membrana è pari a 5*10⁻⁴ cm²/s e il coefficiente di partizione della membrana è pari a 10.

- 1) Calcolare la portata volumetrica di fluido che attraversa la membrana (**in cm³/s**)
- 2) Sapendo che la concentrazione di CO₂ prima dell'attraversamento della membrana è pari a 0.8*10⁻⁶ mol/cm³ e che il flusso di CO₂ attraverso la membrana è pari a 0.1 μmol/cm²s, determinare la concentrazione di CO₂ in uscita (**in μmol/cm³**)
- 3) Calcolare il valore della permeabilità della membrana (**in cm/s**)

SCHEMA



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad Q &= (v) A = 2 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cdot 0.16 \text{ cm}^2 = 0.32 \text{ cm}^3/\text{s} \\ \textcircled{2} \quad \text{coefficiente di diffusione } D_{i,\text{eff}} &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s} \\ \text{coefficiente di partizione } \phi &= 10 \\ \text{flusso di CO}_2 & N_i = 0.1 \mu\text{mol}/\text{cm}^2\text{s} \\ \text{concentrazione iniziale } C_0 & C_0 = 0.8 \cdot 10^{-6} \text{ mol}/\text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\text{Il flusso diffusivo è pari a } N_i = -\frac{D\phi}{L} (C_L - C_0) = \frac{D\phi}{L} (C_0 - C_L)$$

$$\begin{aligned} C_L &= C_0 - \frac{L}{D\phi} N_{i,x} = 0.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} - \frac{0.02 \text{ cm}}{5 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \cdot 10} \cdot 0.1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2\text{s}} = \\ &= (0.8 - 0.4) \cdot 10^{-6} = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ mol}/\text{cm}^3 = 0.4 \mu\text{mol}/\text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad P = \frac{D\phi}{L} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{s} \cdot 10}{0.02 \text{ cm}} = 0.25 \text{ cm/s}$$

Esercizio 2

Ho due membrane: una di spessore L_1 e una di spessore L_2 . Le proteine diffondono attraverso 2 strati secondo $D_{1,1}$ e $D_{1,2}$ rispettivamente.

La concentrazione delle proteine alle superficie $x=0$ è C_0 e a $x=L=L_1+L_2$ è C_L .

Determinare il flusso che attraversa le membrane.

Dati:

$$\phi_M = 3.5$$

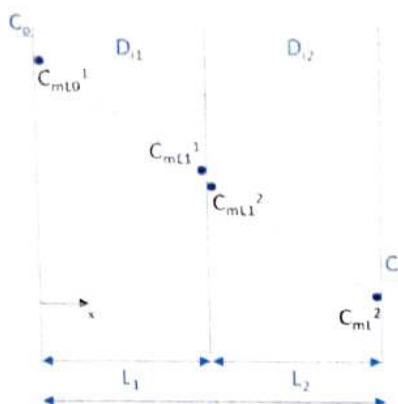
$$D_M = 3.9 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$L_M = 9 \text{ nm}$$

$$\phi_C = 1$$

$$D_C = 3.3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$L_C = 5 \text{ um}$$



Considero che il sistema sia in stato stazionario e non avvengano reazioni dinamiche.

Il flusso che attraversa la membrana $\# 1$ è:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 0 \quad N_1 = -D_{1,\text{eff}} \cdot \frac{\partial C_{m1}}{\partial z} + C_{m1} \cdot V_{x1}$$

$$V_{x1} = 0 \text{ perché non ho convezione}$$

C_{m1} = concentrazione di soluto alla membrana

Tuttavia di spessori molto piccoli, possiamo approssimare la derivata della concentrazione con un rapporto incrementale

$$N_1 = -D_{1,\text{eff}} \cdot \frac{(C_{m1,2} - C_{m1,1})}{L_1} = -D_{1,\text{eff}} \cdot \frac{(\phi_1 C_{\text{int},2} - \phi_1 C_0)}{L_1}$$

$$N_1 = \frac{D_{1,\text{eff}} \phi_1}{L_1} (C_0 - C_{\text{int},2})$$

$C_{\text{int},2}$ è la concentrazione all'interfaccia
 ϕ è il coefficiente di partizione

Se considero il flusso nella sezione 2

$$N_2 = -D_{2,\text{eff}} \cdot \frac{(C_{m2} - C_{m1,2})}{L_2} = -D_{2,\text{eff}} \cdot \frac{(\phi_2 C_L - \phi_2 C_{\text{int},2})}{L_2} = \frac{D_{2,\text{eff}} \phi_2}{L_2} (C_{\text{int},2} - C_L)$$

Scivo le equazioni in questo modo

$$\frac{(C_0 - C_{\text{int},2})}{N_1} = \left(\frac{D_{1,\text{eff}} \cdot \phi_1}{L_1} \right)^{-1} \quad \frac{(C_{\text{int},2} - C_L)}{N_2} = \left(\frac{D_{2,\text{eff}} \cdot \phi_2}{L_2} \right)^{-1}$$

Sommo le equazioni sapendo che $N_1 = N_2$ in stato stazionario

$$\frac{(C_0 - C_{\text{int},2}) + (C_{\text{int},2} - C_L)}{N} = \left(\frac{D_{1,\text{eff}} \phi_1}{L_1} \right)^{-1} + \left(\frac{D_{2,\text{eff}} \phi_2}{L_2} \right)^{-1} \quad C_{\text{int},2} = C_{\text{int},2}$$

$$\frac{(C_0 - C_L)}{N} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_{\text{eff}}} = \frac{1}{D_{\text{eff}} \phi_{\text{eff}}}$$

P_i = permeabilità

$\frac{1}{P_i}$ = resistenza alla diffusione

$$N_i = (C_0 - C_L) \frac{(D_{\text{eff}} \phi_{\text{eff}})}{L}$$

$$P_i = \frac{D_{\text{eff}} \phi_i}{L_i}$$

$$\frac{1}{P_{\text{eff}}} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \dots + \frac{1}{P_m}$$

Queso la permeabilità della membrana cellulare è

$$P_M = \frac{D_M}{L_M} \phi_M = \frac{3.5 \cdot 3.9 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-9}} = 35.167 \text{ cm/s}$$

La permeabilità del citoplasma è $P_C = \frac{D_C \phi_C}{L_C} = \frac{1 \cdot 3.3 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-4}} = 0.066 \text{ cm/s}$

La permeabilità globale è $\frac{1}{P_{\text{eff}}} = \frac{P_M + P_C}{P_M \cdot P_C} = \frac{35.167 + 0.066}{35.167 \cdot 0.066} = \frac{1}{0.0657} \text{ cm/s}$

$$\frac{1}{P_{\text{eff}}} = \frac{0.0657}{35.167} = 0.00186$$

Esercizio 3

Consideriamo un bicchiere d'acqua, lasciato evaporare all'aria, che risulta essere ferma. Determinare il tempo t necessario affinché l'acqua contenuta nel bicchiere evapori completamente.

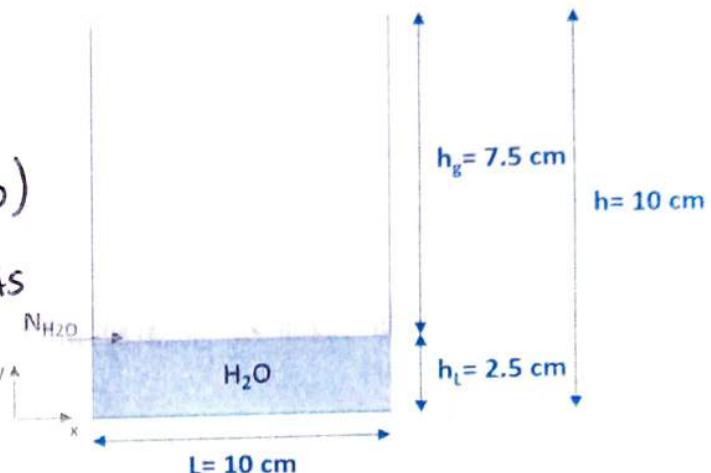
$$T = 25^\circ\text{C}$$

$$P = 1 \text{ atm}$$

$$t = \frac{C_{H_2O}}{N_{H_2O}} h_L \quad N_{H_2O} = - \frac{D_{\text{Caria}}}{h_g} \ln(\frac{f}{f} - X_{H_2O})$$

CALCOLO CARIA CON L'EQUAZIONE DEI GAS

$$\text{Caria} = \frac{M}{V} = \frac{P}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{8.314 \cdot 298 \text{ K}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^3$$



IL COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE È

$$D_{H_2O,\text{aria}} = 0.242 \text{ cm}^2/\text{s}$$

CALCOLIAMO X_{H_2O}

$$P_{H_2O}^{\text{tot}} = X_{H_2O} P_{\text{tot}} \Rightarrow \frac{P_{H_2O}^{\text{tot}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{3.37 \text{ kPa}}{100 \text{ kPa}} = 0.0337$$

ABBIANO TUTTI I DATI PER CALCOLARE IL FLUSSO

$$N_{H_2O} = - \frac{D_{\text{Caria}}}{h_g} \ln(\frac{f}{f} - X_{H_2O}) = - \frac{0.242 \text{ cm}^2/\text{s} \cdot 4 \cdot 10^{-5}}{7.5 \text{ cm}} \ln(1 - 0.032) = 0.0041 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^2\text{s}$$

LA CONCENTRAZIONE MOLARE DELL'ACQUA È UGUALE A

$$C_{H_2O} = \frac{1 \text{ g/cm}^3}{28 \text{ g/mol}} = 0.055 \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$$

QUINDI IL TEMPO DI EVAPORAZIONE È UGUALE A

$$t = \frac{C_{H_2O}}{N_{H_2O}} h_L = \frac{0.055 \text{ mol/cm}^3}{0.0041 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^2\text{s}} \cdot 2.5 \text{ cm} = 33.53 \cdot 10^5 \text{ s} \rightarrow 900 \text{ h}$$

Esercizio 4

Consideriamo dell'acqua lasciata evaporare sotto un flusso d'aria che presenta una velocità media $\langle v \rangle = 10 \text{ cm/s}$. Determinare il tempo t necessario affinché l'acqua evapi completamente.

$$T = 25^\circ\text{C}$$

$$P = 1 \text{ atm}$$

Dal bilancio di materia

$$t = \frac{C_{H_2O}}{N_{H_2O}} h_L$$

Il flusso N_{H_2O} all'interfaccia è uguale a

$$N_{H_2O} = K_m C_{H_2O}^{INT}$$

Il coefficiente di trasferimento di materia lungo una membrana piatta è

$$\frac{K_{OC} Z}{D_{ij}} = 0.323 Re_a^{1/2} Sc^{1/3}$$

$$K_m = \frac{1}{S} \int_S K_{OC} dS = 0.7 \text{ cm/s}$$

La concentrazione molare dell'acqua all'interfaccia è

$$C_{H_2O}^{INT} = X_{H_2O} C_{\text{aria}} = \frac{p_{H_2O}^{\text{sat}}}{p_{\text{tot}}} C_{\text{aria}}$$

Calcolo C_{aria} con l'equazione dei gas perfetti

$$C_{\text{aria}} = \frac{M}{V} = \frac{P}{R T} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{8.31 \cdot 298 \text{ K}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^3$$

Indice sappiamo (Antine)

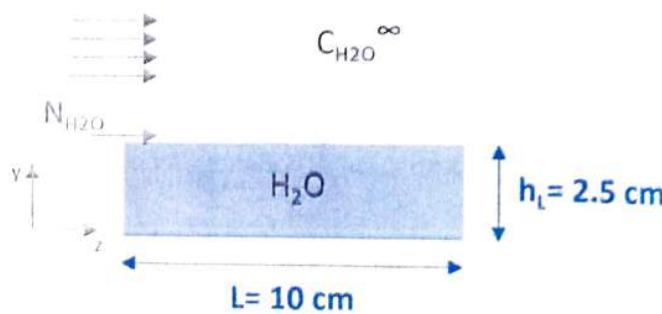
$$p_{H_2O}^{\text{sat}} = 0.0327 \text{ atm} \quad T = 25^\circ\text{C}$$

$$C_{H_2O}^{INT} = \frac{p_{H_2O}^{\text{sat}}}{p_{\text{tot}}} C_{\text{aria}} = \frac{0.0327 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}{2} = 0.127 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^3$$

$$N_{H_2O} = K_m C_{H_2O}^{INT} = 0.7 \text{ cm/s} \cdot 0.127 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^3 = 0.089 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^2$$

$$C_{H_2O} = 0.055 \text{ mol/cm}^3 \quad (\text{fum})$$

$$t = \frac{C_{H_2O}}{N_{H_2O}} h_L = \frac{0.055 \text{ mol/cm}^3 \cdot 2.5 \text{ cm}}{0.089 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^2} = 1.54 \cdot 10^5 \text{ s} \rightarrow 42 \text{ h}$$

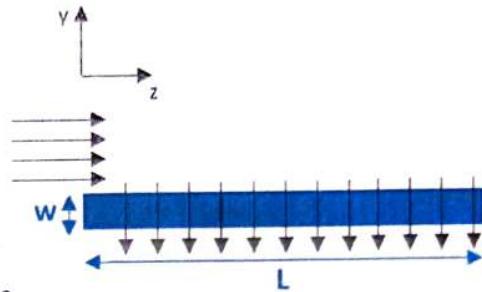


Esercizio 5

Consideriamo un flusso di un fluido sopra una membrana piatta di lunghezza $L = 12 \text{ cm}$. Determinare il coefficiente di trasporto [cm/s] di materia medio su tutta la lunghezza della membrana.

Le proprietà rilevanti sono:

- Viscosità cinematica $\nu = 0.02 \text{ cm}^2/\text{s}$
- Coefficiente di diffusione $D_{ij} = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$
- Velocità media del flusso $\langle v \rangle = 4 \text{ cm/s}$



Il coefficiente di trasferimento di materia lungo una membrana piatta è definito come

$$\frac{K_{loc}}{D_{ij}} = 0.323 Re^{1/2} Sc^{1/3}$$

$$\text{con } Re = \frac{\langle v \rangle z}{\nu}$$

$$\text{e } Sc = \frac{\nu}{D_{ij}}$$

Risolvendo per K_{loc} ottieniamo

$$K_{loc} = \frac{0.323 D_{ij}}{z} \left(\frac{\langle v \rangle z}{\nu} \right)^{1/2} Sc^{1/3} = \frac{0.323 D_{ij}}{z} \left(\frac{\langle v \rangle}{\nu z} \right)^{1/2} Sc^{1/3}$$

Il K_m lungo tutta la membrana si ottiene integrando sulla superficie

$$K_m = \frac{1}{S} \int_S K_{loc} dS \quad S \text{ area della membrana} = wL \\ dS = w dz$$

$$K_m = \frac{1}{wL} w \int_0^L K_{loc} dz = \frac{1}{L} \int_0^L K_{loc} dz$$

Sostituiamo K_{loc}

$$K_m = \frac{1}{L} \cdot 0.323 D_{ij} \left(\frac{\langle v \rangle}{\nu} \right)^{1/2} Sc^{1/3} \int_0^L z^{-1/2} dz =$$

$$= \frac{0.646 D_{ij}}{L} \left(\frac{\langle v \rangle L}{\nu} \right)^{1/2} Sc^{1/3} =$$

$$= \frac{0.646 \cdot 5.12 \cdot 10^{-6}}{12} \left(\frac{4 \text{ cm/s} \cdot 32}{0.02} \right)^{1/2} \left(\frac{0.02}{5.12 \cdot 10^{-6}} \right)^{1/3}$$

$$\underline{2.02 \cdot 10^{-4} \text{ cm/s}}$$

Esercizio 1

1

Si deve verificare il funzionamento di un dispositivo biomedicale costituito da una membrana cilindrica di lunghezza $L = 20 \text{ cm}$ e di diametro $d = 0.35 \text{ cm}$. All'interno della membrana scorre una soluzione fisiologica con velocità media di 65 cm/s . Il moto del fluido è definito dalla differenza di pressione tra ingresso e uscita. La pressione in uscita è pari a 1 bar.

La viscosità cinematica della soluzione è pari a $0.02 \text{ cm}^2/\text{s}$, la densità della soluzione è pari a $1,1 \text{ g/cm}^3$.

Calcolare il numero di Reynolds [adimensionale] e lo sforzo di taglio alla parete [Pa]

$$L = 20 \text{ cm}$$

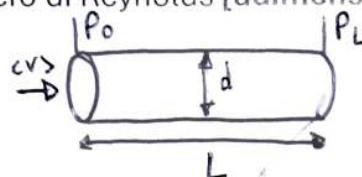
$$d = 0.35 \text{ cm}$$

$$\langle v \rangle = 65 \text{ cm/s}$$

$$P_L = 1 \text{ bar}$$

$$\nu = 0.02 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\rho = 1.1 \text{ g/cm}^3$$



$$Re = ?$$

$$T = ?$$

① IL NUMERO DI REYNOLDS PER UN CONDOTTO CILINDRICO È

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\mu} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu} = \frac{65 \text{ cm/s} \cdot 0.35 \text{ cm}}{0.02 \text{ cm}^2/\text{s}} = 1137.5 < 2100 \quad \text{MOTO LAMINARE}$$

② PER UN CONDOTTO A SEZIONE CIRCOLARE

$$T_{n,2} = - \frac{\Delta P R}{2L}$$

DEVO TROVARE ΔP

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2} V_{\max} \Rightarrow V_{\max} = 2 \langle v \rangle = \frac{\Delta P R^2}{4 \mu L}$$

$$\Delta P = \frac{8 \langle v \rangle \mu L}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

TROVO LA VISCOSITÀ DINAMICA μ DALLA VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \Rightarrow \mu = \rho \nu = 0.02 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \cdot 1.1 \text{ g/cm}^3 = 0.022 \text{ g/cm s}$$

$$\Delta P = \frac{8 \langle v \rangle \mu L}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{8 \cdot 65 \text{ cm/s} \cdot 0.022 \text{ g/cm s} \cdot 20 \text{ cm}}{\left(\frac{0.35}{2}\right)^2} = 7471 \text{ g/cm s}^2$$

LO SFORZO DI TAGLIO QUI NDI È

$$T_{n,2} = - \frac{\Delta P \frac{d}{2}}{2L} = - \frac{7471 \text{ g/cm s}^2 \cdot \left(\frac{0.35}{2}\right) \text{ cm}}{2 \cdot 20 \text{ cm}} = -32.68563 \text{ g/cm s}^2 = -0.3268563 \text{ Pa}$$

Per effettuare il trattamento emodialitico del paziente deve scorre attraverso un apparecchio (apparecchio per dialisi o rene artificiale) che, con un opportuno sistema di pompe, fa circolare il sangue attraverso un filtro che lo depura da un eccesso di ammoniaca e lo restituisce al paziente. La portata di sangue da trattare è di $Q = 4 \text{ L/h}$.

Il filtro è costituito da 232 membrane capillare lunghe $L = 30 \text{ cm}$ con diametro interno di $d = 3 \text{ mm}$. Il regime di moto del sangue all'interno del filtro è laminare e, per semplificare i calcoli, si utilizzino le seguenti proprietà:

$$\mu = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}; \rho = 1056 \text{ kg/m}^3; T = 25^\circ\text{C}.$$

La riduzione della concentrazione di ammoniaca tra ingresso e uscita è del 40%, ovvero la concentrazione in entrata è di $70 \mu\text{M}$ mentre quella in uscita è pari a $42 \mu\text{M}$. Calcolare:

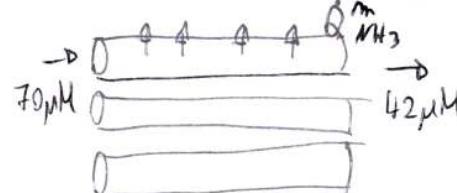
- 1) La velocità media all'interno di una singola membrana [m/s]
- 2) Il numero di Re e le perdite di carico attraverso il filtro [Pa]
- 3) La portata molare di ammoniaca che viene eliminata attraverso la membrana [mol/s]

$$Q = 4 \text{ L/h} = \frac{4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{3600 \text{ s}} = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$L = 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$$

$$d = 3 \text{ mm} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$C_{\text{NH}_3}^{\text{in}} = 70 \mu\text{M} \quad C_{\text{NH}_3}^{\text{out}} = 42 \mu\text{M}$$



1) LA PORTATA ALL'INTERNO DELLA SINGOLA MEMBRANA È UNA FRAZIONE DELLA PORTATA TOTALE

$$Q_c = \frac{Q_{\text{TOT}}}{232} = \frac{1.1 \cdot 10^{-6}}{232} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 4.7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$$

L'AREA DELLA SINGOLA MEMBRANA È

$$A_c = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{3}{2} \cdot 10^{-3} \right)^2 = 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

TROVIAMO COSÌ LA VELOCITÀ MEDIA

$$Q = \langle v \rangle A \Rightarrow \langle v \rangle_c = \frac{Q_c}{A_c} = \frac{4.7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}}{7.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0.67 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

2) IL NUMERO DI REYNOLDS PER UN CONDOTTO CILINDRICO È

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\mu} = \frac{1056 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.67 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}} = 3.63 < 2300 \quad \text{MOTO LAMINARE}$$

PER UN CONDOTTO A SEZIONE CIRCOLARE

$$V_{\text{max}} = \frac{\Delta P R^2}{4 \mu L} \Rightarrow \Delta P = \frac{4 \mu L V_{\text{max}}}{R^2} \quad V_{\text{max}} = 2 \langle v \rangle \Rightarrow \Delta P = \frac{8 \mu L \langle v \rangle}{R^2}$$

$$\Delta P = \frac{8 \cdot 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms} \cdot 30 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 0.67 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}}{2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 0.93 \text{ Pa}$$

3) SCRIVIAMO IL BILANCIO DI MASSA PER LA MEMBRANA

$$C_{\text{NH}_3}^{\text{in}} \dot{V}_{\text{in}} = C_{\text{NH}_3}^{\text{out}} \dot{V}_{\text{out}} + \dot{Q}_{\text{NH}_3}^{\text{m}}$$

ESPLICHIAMO PER LA PORTATA DELLA MEMBRANA

$$\dot{Q}_{\text{NH}_3}^{\text{m}} = C_{\text{NH}_3}^{\text{in}} \dot{V}_{\text{in}} - C_{\text{NH}_3}^{\text{out}} \dot{V}_{\text{out}}$$

IN STATO STAZIONARIO, LA PORTATA VOLUMETRICA SI CONSERVA

$$\dot{V}_{\text{in}} = \dot{V}_{\text{out}} = Q_{\text{TOT}} = 4.7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{Q}_{\text{NH}_3}^{\text{m}} = \dot{V} (C_{\text{NH}_3}^{\text{in}} - C_{\text{NH}_3}^{\text{out}}) = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ L/s} (70 \mu\text{M} - 42 \mu\text{M}) = 30.8 \cdot 10^{-9} \mu\text{mol/s}$$

Esercizio 3

(3)

Consideriamo un chip microfluidico che risulta composto da una superficie di vetro e da uno stampo di PDMS, formando così un canale microfluidico dell'altezza di 250 nm e lungo $L = 1 \text{ cm}$. Sulla superficie vetrosa sono adese le cellule.

La velocità media con cui fluisce il terreno di coltura all'interno del canale è di $\langle v \rangle = 0.5 \text{ cm/s}$. Il chip è mantenuto in incubatore, dove la temperatura è di 37°C e la percentuale di ossigeno è del 20%.

Determinare il flusso di O_2 che arriva alle cellule, ipotizzando che l' O_2 che all'interfaccia con le cellule sia trascurabile, perché immediatamente consumato dalle cellule stesse.

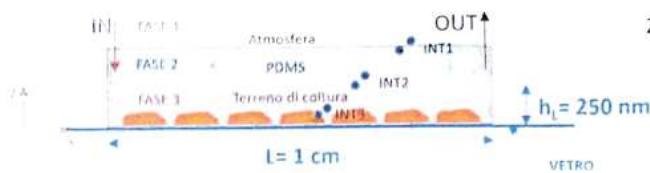
Il sistema è in stato stazionario.

CONSIDERO 3 FASI:

1) L'ATMOSFERA

2) IL PDMS

3) IL TERRENO DI CULTURA



TRASCURRO LA FASE 1 IMMAGINANDO CHE LA CINETICA DI O_2 SIA MOLTO VELOCE
IL FLUSSO DI O_2 NELLA FASE 2 È

$$N_{O_2}^2 = \frac{D_{O_2, \text{PDMS}}}{L} (C_{O_2}^{\text{PDMS},1} - C_{O_2}^{\text{PDMS},2}) = \frac{D_{O_2, \text{PDMS}}}{L} \Phi_2 (C_{O_2}^{\text{ARIA}} - C_{O_2}^{H_2O})$$

IL FLUSSO DI O_2 NELLA FASE 3 È MISTO CONVETTIVO-DIFFUSIVO, QUANDO:

$$N_{O_2}^3 = K_m (C_{O_2}^{H_2O} - C_{O_2}^{H_2O, \text{fim}}) = K_m C_{O_2}^{H_2O}$$

$\hookrightarrow D=0$ PERCHÉ LE CELLULE CONSUMANO TUTTO L' O_2

SCRIVIAMO

$$\frac{C_{O_2}^{\text{ARIA}} - C_{O_2}^{H_2O}}{N_{O_2}^2} = \frac{L}{D_{O_2, \text{PDMS}} \Phi_2}$$

$$\frac{C_{O_2}^{H_2O}}{N_{O_2}^3} = \frac{1}{K_m}$$

SOMMIAMO

$$\frac{C_{O_2}^{\text{ARIA}} - C_{O_2}^{H_2O}}{N_{O_2}^2} + \frac{C_{O_2}^{H_2O}}{N_{O_2}^3} = \frac{L}{D_{O_2, \text{PDMS}} \Phi_2} + \frac{1}{K_m}$$

ALL'EQUILIBRIO $N_{O_2}^2 = N_{O_2}^3$

$$\frac{C_{O_2}^{\text{ARIA}} - C_{O_2}^{H_2O}}{N_{O_2}^2} + \frac{C_{O_2}^{H_2O}}{N_{O_2}^2} = \frac{L}{D_{O_2, \text{PDMS}} \Phi_2} + \frac{1}{K_m}$$

LA CONCENTRAZIONE

$$C_{O_2}^{\text{ARIA}} = X_{O_2} C_{\text{ARIA}}$$

DAL TESTO $X_{O_2} = 20\% = 0.2$

CONSIDERIAMO L'ARIA UN GAS IDEALE

$$C_{\text{ARIA}} = \frac{m}{V} = \frac{P}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa}}{8.314 \cdot 310 \text{ K}} = 38.8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$C_{O_2}^{ATR} = 0.2 \cdot 38.8 = 7.76 \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} = 7.76 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$$

(4)

TROVIAMO K_m COME:

$$K_m = \frac{1}{L} \int_0^L k_{loc} dz$$

$$\frac{k_{loc} z}{D_{ij}} = 0.323 R_e^{1/2} S_c^{1/3}$$

$$K_m = \frac{0.646 D_{O_2, H_2O}}{L} \left(\frac{c_v L}{J} \right)^{1/2} \left(\frac{J}{D_{O_2, H_2O}} \right)^{1/3} =$$

$$= \frac{0.646 \cdot 2 \text{ cm}^2/\text{s}}{30 \text{ cm}} \left(\frac{0.5 \text{ cm/s} \cdot 1 \text{ cm}}{2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}} \right)^{1/2} \left(\frac{10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}}{2 \text{ cm}^2/\text{s}} \right)^{1/3}$$

$$= 1.292 \cdot 7.07 \cdot 0.17 = 1.553 \text{ cm/s}$$

QUINDI

$$N_{O_2} = \left(\frac{L}{D_{O_2, PDMS} \phi_2} + \frac{1}{K_m} \right)^{-1} C_{O_2}^{ATR} =$$

$$= \left(\frac{0.0078616 \cdot 1 \text{ cm}}{2.4 \text{ cm}^2/\text{s} \cdot 53} + \frac{1}{1.553 \text{ cm/s}} \right)^{-1} \cdot 7.76 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$$

$$= (0.0078616 + 0.643925)^{-1} \cdot 7.76 \cdot 10^{-6} \text{ mol/cm}^2\text{s}$$

$$= 1.53427 \cdot 7.76 \cdot 10^{-6} \text{ mol/cm}^2\text{s} = 1.19 \cdot 10^{-5} \text{ mol/cm}^2\text{s}$$

ONSIDERIAMO Re E Sc

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle L}{\mu}$$

PER UN CONDOTTO A SEZIONE CIRCOLARE

$$Re = \frac{\langle v \rangle d}{v} = \frac{10 \text{ cm/s} \cdot 0.12 \text{ cm}}{0.0267 \text{ cm}^2/\text{s}} = 44.944$$

$$Sc = \frac{V}{D_{O_2}} = \frac{0.0267 \text{ cm}^2/\text{s}}{5.3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}} = 5037.736$$

QUINDI

$$Sh = 0.94 Re^{1/2} Sc^{1/3} = 0.94 \cdot (44.944)^{1/2} \cdot (5037.736)^{1/3} = 108.03$$

IL NUMERO DI SHERWOOD E' DEFINITO COME

$$Sh = \frac{K_f Z}{D_g}$$

PER UN CONDOTTO CILINDRICO, K_f E' IL COEFFICIENTE DI TRASPORTO DI MATERIA MEDIO E' E' IL DIAMETRO

$$Sh = \frac{K_m d}{D_{O_2}} \Rightarrow K_m = \frac{Sh D_{O_2}}{d}$$

$$K_m = \frac{108.83 \cdot 5.3 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}}{0.12 \text{ cm}} = 0.0048 \text{ cm/s}$$

La reazione di A e B nel formare C è studiata sotto condizioni in cui la velocità (Rate) iniziale può essere accuratamente misurata. Consideriamo i seguenti dati:

INITIAL CONCENTRATION OF A (M)	INITIAL CONCENTRATION OF B (M)	INITIAL RATE (M/s)
1.0	1.0	$5 \cdot 10^{-7}$
3.0	1.0	$4.5 \cdot 10^{-6}$
1.0	2.0	$1 \cdot 10^{-6}$

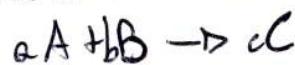
Determinare:

Qual è l'ordine della reazione rispetto ad A

Qual è l'ordine della reazione rispetto ad B

Il coefficiente di Rate K per la reazione specifica l'unità di misura.

CONSIDERO UNA REAZIONE GENERICA



L'ESPRESSIONE GENERALE PER LA VELOCITÀ DI REAZIONE È

$$R = K_1 C_A^a C_B^b$$

PER CALCOLARE L'ORDINE DI GRANDEZZA RISPESSO AD A, CONSIDERO IL RAPPORTO TRA LE VELOCITÀ DI REAZIONE NEI PRIMI DUE CASI

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{4.5 \cdot 10^{-6}} = \frac{K_1 C_{A1}^a C_{B1}^b}{K_2 C_{A2}^a C_{B2}^b}$$

POICHÉ $C_{B1} = 1 = C_{B2}$ e $K_1 = K_2$ PERCHÉ DIPENDE SOLO DALLA TEMPERATURA

$$\left(\frac{C_{A2}}{C_{A1}} \right)^a = 0.11$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^a = 0.11$$

$$(0.33)^a = 0.11 \Rightarrow a = 2$$

PER CALCOLARE L'ORDINE DI GRANDEZZA RISPESSO A B, CONSIDERO IL RAPPORTO TRA LE VELOCITÀ DI REAZIONE 1 E 3

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-6}} = \frac{K_1 C_{A1}^a C_{B1}^b}{K_3 C_{A3}^a C_{B3}^b}$$

POICHÉ $C_{A1} = 1 = C_{A3} = 1$ E $K_1 = K_2$ PERCHÉ DIPENDE SOLO DALLA TEMPERATURA

$$\left(\frac{C_{B1}}{C_{B3}} \right)^b = 0.5$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^b = 0.5 \Rightarrow b = 1$$

QUINDI L'ESPRESSIONE DELLA VELOCITA' DI REAZIONE E'

$$R = k C_A^2 C_B$$

IL COEFFICIENTE k NEL PRIMO CASO (E NEGLI ALTRI)

$$k = \frac{R}{C_A^2 C_B} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \text{ M/s}}{1^2 \mu^2 \cdot 1 \text{ M}} = 5 \cdot 10^{-7} \mu^{-2} \text{ s}^{-1}$$

(7)

Esercizio 6

(8)

La cistatina 3 è una proteina ed è un bio-marcatore di tumore allo stomaco e all'intestino. La sua concentrazione è particolarmente elevata nel plasma dei pazienti che manifestano questa patologia. Una start-up sta sviluppando un saggio in vitro per misurare la quantità di questa proteina presente nei pazienti. Il saggio si basa su una cella microfluidica nella quale viene immobilizzato sulla superficie un enzima in grado di catturare la cistatina 3 alla temperatura di 298 K, secondo il seguente schema.

Le costanti cinematiche dell'equazione di Michaelis-Menten relative all'associazione tra cistatina 3 e l'enzima immobilizzato sono:

$$R_{\max} = 8.5 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^2 \text{s}$$

$$K_M = 4.843 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^3$$

Considerare l'enzima immobilizzato in eccesso rispetto alla cistatina 3. Calcolare:

- 1) La velocità di reazione per $C_s = 0.5 \mu\text{M}$;
- 2) La quantità di cistatina 3 che si lega all'enzima in 20 min, assumendo che il trasporto di materia non sia limitante;
- 3) La quantità di cistatina che si lega all'enzima in 20 min, assolumento che il coefficiente di scambio di materia medio sia $k_m = 0.2 \text{ cm/min}$

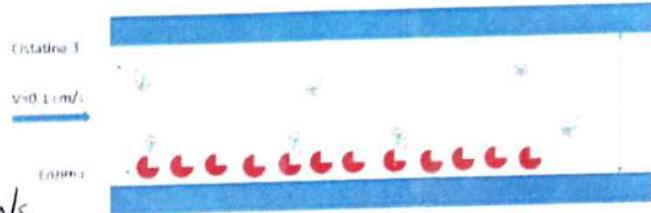
$$R_{\max} = 8.5 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^2 \text{s}$$

$$K_M = 4.843 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^3$$

$$C_s = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ mol/cm}^3 = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^3$$

$$t = 20 \text{ min} = 1200 \text{ s}$$

$$k_m = 0.2 \text{ cm/min} = 0.00167 \text{ cm/s} = 1.67 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}$$



1) SECONDO LA RELAZIONE DI MICHAELIS-MENTEN, LA VELOCITÀ DI REAZIONE È UGUALE A

$$R = R_{\max} \frac{C_s}{K_M + C_s}$$

POICHÉ L'ENZIMA IMMobilizzato È IN ECCESSO RISPETTO ALLA CISTATINA 3, L'EQUAZIONE SI TRASFORMA IN UNA CINETICA DI PRIMO ORDINE

$$R = R_{\max} \frac{C_s}{K_M} = \frac{8.5 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^2 \text{s} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^3}{4.843 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^3} = 0.875 \cdot 10^{-9} \text{ mol/s cm}^2$$

2) ASSUMENDO CHE IL TRASPORTO DI MATERIA NON SIA

LIMITANTE, HO

$$R = \frac{Q}{t}$$

$$\Rightarrow Q_s = R \cdot t = 0.875 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mol}}{\text{s cm}^2} \cdot 1200 \text{ s} = 1.05 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2}$$

3) ASSUMENDO CHE LO SCAMBIO SIA RILEVANTE, È NECESSARIO EGUALGIARE IL FLUSSO RELATIVO AL TRASPORTO CONVETTIVO-DIFFUSIVO CON IL FLUSSO RELATIVO ALLA REAZIONE CHIMICA ALL'INTERFACCIA

$$N = K_m (C_s^\infty - C_s^{\text{int}}) = \frac{R_{\max}}{K_M} C_s^{\text{int}}$$

ESPLICANDO PER LA C_s^{int} (CONCENTRAZIONE ALL'INTERFACCIA)

$$C_s^{\text{int}} \left(\frac{R_{\max}}{K_M} + K_m \right) = K_m C_s^\infty$$

Dove

$$C_s^\infty = C_{\text{obs}}$$

$$C_s^{INT} = \frac{K_m}{K_m + \frac{R_{MAX}}{K_H}} \quad C_s^{\infty} = \frac{1.67 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}}{1.67 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{s}} + \frac{8.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}}{4.843 \cdot 10^{-12} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}}} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}$$

$$\Rightarrow 0.9506 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ mol/cm}^3 = 0.4753 \cdot 10^{-12} \text{ mol/cm}^3$$

LA QUANTITÀ DI CISTATINA 3 CHE SI LEGA ALLIENZIMA
IN 20 MINUTI È

$$R = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = R t = \frac{R_{MAX} C_s^{INT} t}{K_H} = \frac{8.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}}{4.843 \cdot 10^{-12} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3}} \cdot 0.4753 \cdot 10^{-12} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^3} \cdot 1200 \text{ s} = 1.001 \cdot 10^{-9} \frac{\text{mol}}{\text{cm}^2}$$

(9)