COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione ed Elettronica
10 Febbraio 2020

Esercizio 1. [9 punti] Data

$$G(s) = \frac{s\left(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{100}\right)}{(1+s^2)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (non è richiesto il calcolo di eventuali asintoti ma è richiesto il calcolo delle eventuali intersezioni con gli assi);

iii) si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$, e in caso non sia BIBO stabile si determini il numero di poli a parte reale positiva e/o a parte reale nulla.

Esercizio 2. [9 punti] Data

$$G(s) = \frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)^2(s+2)}$$

si traccino, in modo approssimato, i luoghi positivo e negativo (con analisi di asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, ma senza calcolo esplicito dei punti doppi). Per capire l'andamento dei rami fuori dall'asse reale, e la collocazione di alcuni punti doppi, si utilizzi la tabella di Routh e si deduca la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale, individuando, per i valori di K per cui la prima colonna della tabella non si annulla, il numero di poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [7 punti] i) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+10}{s}$$

è richiesto il progetto di un controllore stabilizzante $C(s)$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 2 ed errore a regime alla rampa parabolica pari a circa 0.1, ed alla funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 1$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.
ii) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+10)^2}$$

è richiesto il progetto di un controllore stabilizzante $C(s)$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 1 ed errore a regime alla rampa lineare pari a circa 0.1, ed alla funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 100$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5+1 punti] Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

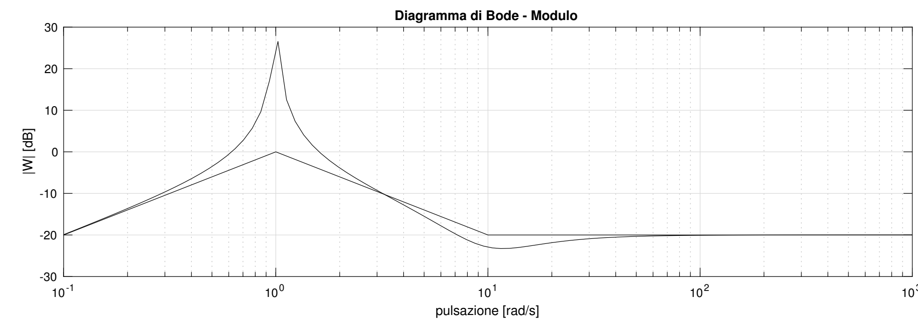
($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) e sollecitato dal segnale di ingresso

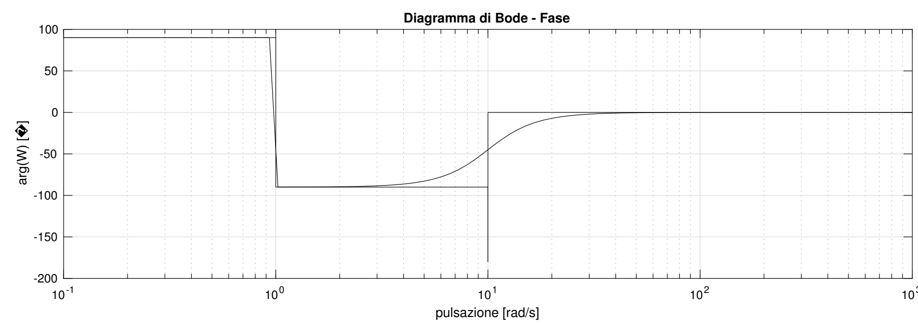
$$u(t) = e^{j\omega_0 t} \delta_{-1}(t),$$

con $\omega_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Assumendo condizioni iniziali arbitrarie, si introducano i concetti di risposta di regime permanente e di risposta transitoria, e si dimostri (operando nel dominio delle trasformate) come sotto opportune ipotesi l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema sia sempre esprimibile come somma delle due.
Si assuma ora che, nelle precedenti ipotesi sul sistema, ad esso venga applicato un ingresso pari a $u(t) = te^{j\omega_0 t}\delta_{-1}(t)$. Si spieghi quali proprietà deve avere $W(s)$ affinchè l'uscita forzata a regime sia del tipo $Ae^{j\omega_0 t}$, con $A \neq 0$ costante opportuna.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Il modulo di Bode arriva da $-\infty$ con pendenza $+20$ dB/dec fino a 0 dB per $\omega = 1$ rad/s (dove è presente un picco di risonanza infinito), per poi discendere con pendenza -20 dB/dec fino ad $\omega = 10$ rad/s, dove il diagramma asintotico diventa piatto (mentre quello reale esibisce un piccolo picco di antirisonanza essendo $\xi = \frac{1}{2}$).
La fase esibisce una discontinuità da $+90°$ a $-90°$ in corrispondenza di $\omega = 1$ rad/s, poi risale a $0°$ per $\omega = 10$ rad/s, mentre la fase reale risente maggiormente dell'effetto dei due zeri che del polo, per cui la fase sale leggermente sopra $+90°$, poi si ritrova leggermente sopra $-90°$ e poi risale fino a $0°$.

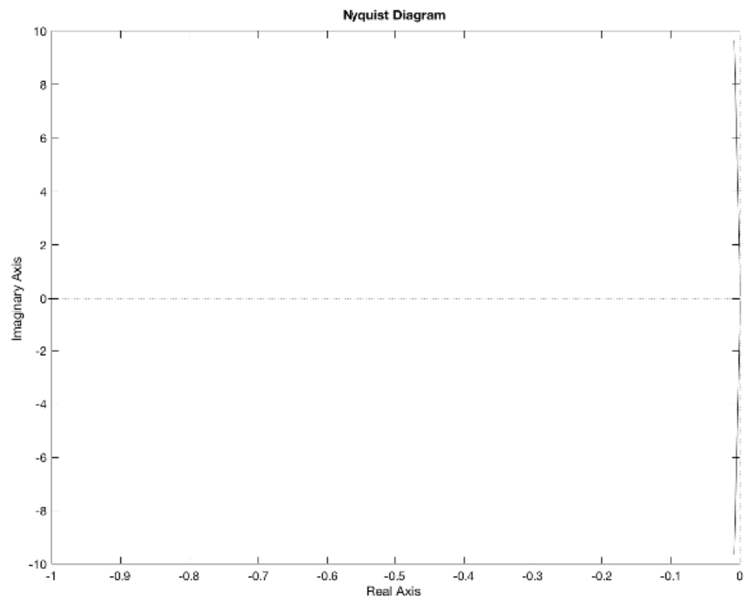


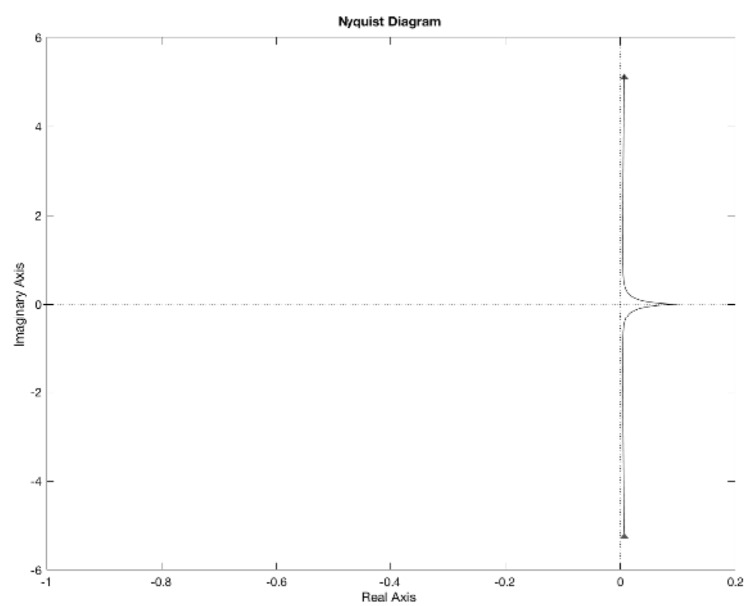


ii) Per quanto concerne il diagramma di Nyquist, esso parte (per $\omega = 0^+$) dal secondo quadrante (parte con tangente verticale dall'origine verso l'alto e va all'infinito in direzione quasi-verticale), per rispuntare nel quarto quadrante e terminare asintoticamente nel punto $s = \frac{1}{10}$. Di conseguenza, oltre all'intersezione con gli assi nell'origine per $\omega = 0$, non ci aspettiamo altre intersezioni oltre a quella asintoticamente con l'asse reale in $s = \frac{1}{10}$. Un'analisi di $G(j\omega)$ conferma quanto appena detto

$$G(j\omega) = \frac{\omega^4}{10(\omega^2 - 1)(100 + \omega^2)} + j\frac{100\omega}{(1 - \omega^2)(100 + \omega^2)}$$

La parte reale si annulla solo per $\omega = 0$ (partenza dall'origine, dove si annulla anche la parte immaginaria). La parte immaginaria si annulla anche per $\omega \to +\infty$, mentre quella reale tende ad $s = \frac{1}{10}$. Nelle due figure qua sotto viene riportato l'andamento del diagramma di Nyquist prima per $|\omega| < 1$ e poi per $|\omega| > 1$.





iii) Si ha $n_{G_+} = 0$ e quindi $n_{W_+} = -N$. Se ora aggiungiamo i due archi (da $\omega = -1 - \varepsilon$ a $\omega = -1 + \varepsilon$, e da $\omega = +1 - \varepsilon$ a $\omega = +1 + \varepsilon$) entrambi di π radianti in verso orario per chiudere il diagramma di Nyquist al finito, si hanno i seguenti casi:

$K > 0$	$n_{W_+} = 0$
$0 > K > -10$	$n_{W_+} = 2$
$K = -10$	impropria con 1 polo reale positivo (per continuità coi due casi adiacenti)
$K < -10$	$n_{W_+} = 1$

In conclusione, si ha BIBO stabilità per la $W(s)$ se e solo se $K > 0$.

Esercizio 2. Osserviamo preliminarmente che $n = 4 > 2 = m$ e quindi sia nel luogo positivo che nel luogo negativo ci sono due asintoti. Le direzioni di tali asintoti sono $\pi/2, 3\pi/2$ nel luogo positivo e $0, \pi$ nel luogo negativo. Il baricentro della stella di asintoti (rilevante solo nel caso del luogo positivo) è:

$$(x_B, 0), \quad \text{con} \quad x_B = \frac{(1-1-1-2)-(j-j)}{4-2} = -\frac{3}{2}.$$

Se considero il luogo positivo noto che appartiene ad esso solo il seguente intervallo dell'asse reale: $(-2, 1)$. Invece appartengono al luogo negativo le due semirette $(-\infty, -2)$ e $(1, +\infty)$. Una valutazione preliminare ci porta quindi a dire che nel luogo positivo ci sono due punti doppi sull'asse reale, uno in $(-2, -1)$ e uno in $(-1, 1)$. I due rami uscenti da -1 e -2 si incrociano in qualche punto dell'intervallo $(-2, -1)$ e poi vanno all'asintoto verticale centrato in $(-3/2, 0)$. D'altra parte i due rami che partono da -1 e 1 si incrociano in qualche punto (doppio) intermedio e poi vanno ai due zeri in $\pm j$. Si tratta di capire se tali rami sono interamente contenuti nel semipiano destro, in quello sinistro o attraversano l'asse immaginario. Per quel che concerne il luogo negativo, invece, abbiamo un ramo sull'asse reale che da -2 va a $-\infty$, uno sull'asse reale che va da 1 va a $+\infty$ e due rami che partono dal polo doppio in -1 e raggiungono i due zeri in $\pm j$. Anche in questo caso si deve capire se tali rami sono interamente contenuti nel semipiano sinistro o attraversano l'asse immaginario.
La ricerca delle intersezioni con l'asse immaginario conduce a

$$(j\omega - 1)(1 - \omega^2 + j2\omega)(2 + j\omega) + K(1 - \omega^2) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} -3\omega(1+\omega^2) = 0 \\ \omega^4 - \omega^2 - 2 + K(1-\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Si vede quindi che l'unica soluzione possibile è $\omega = 0$ per $K = 2$.
Se ora applichiamo la tabella di Routh al polinomio

$$d(s) + Kn(s) = s^4 + 3s^3 + (K+1)s^2 - 3s + (K-2)$$

osserviamo preliminarmente che il polinomio ha i coefficienti del termine di grado 4 e 1 di segno opposto per ogni scelta di K. Pertanto abbiamo ora tutte le risposte che ci servono circa l'andamento rispetto all'asse immaginario dei rami sia del luogo positivo che del luogo negativo.
La tabella di Routh è la seguente:

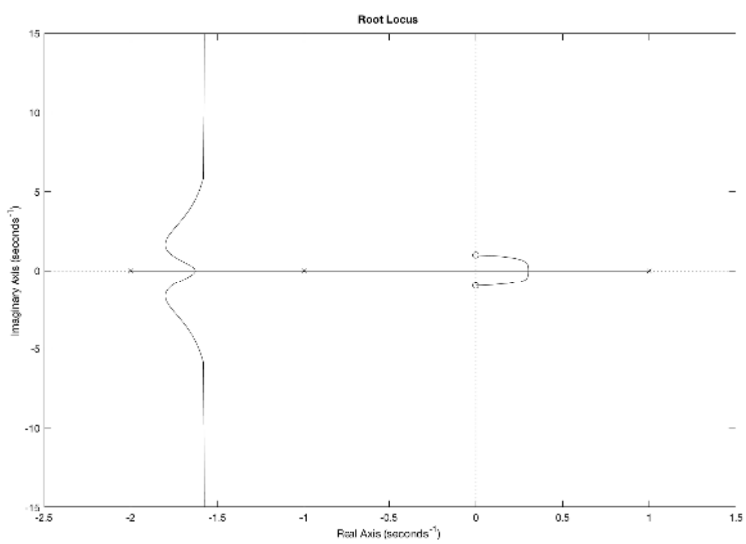
$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & K+1 & K-2 \\ 3 & 3 & -3 & \\ 2 & K+2 & K-2 & \\ 1 & \dfrac{-6K}{K+2} & & \\ 0 & K-2 & & \end{array}$$

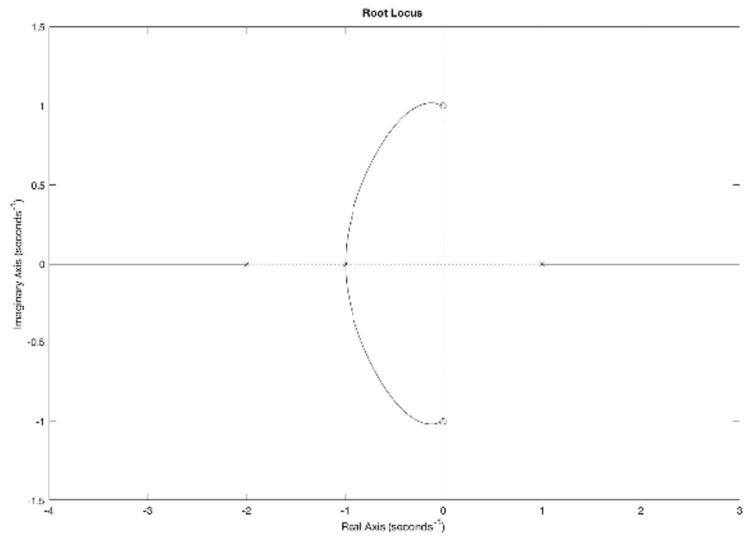
Da questa tabella si vede chiaramente che il polinomio non è mai di Hurwitz. Se valutiamo per quali valori di K si annullano i termini in prima colonna nelle righe "2", "1", e "0", troviamo $\{-2, 0, 2\}$. Se allora valutiamo permanenze e variazioni troviamo nei seguenti intervalli il seguente risultato:

$K < -2$	1 variazione
$-2 < K < 0$	1 variazione
$0 < K < 2$	1 variazione
$K > 2$	2 variazioni

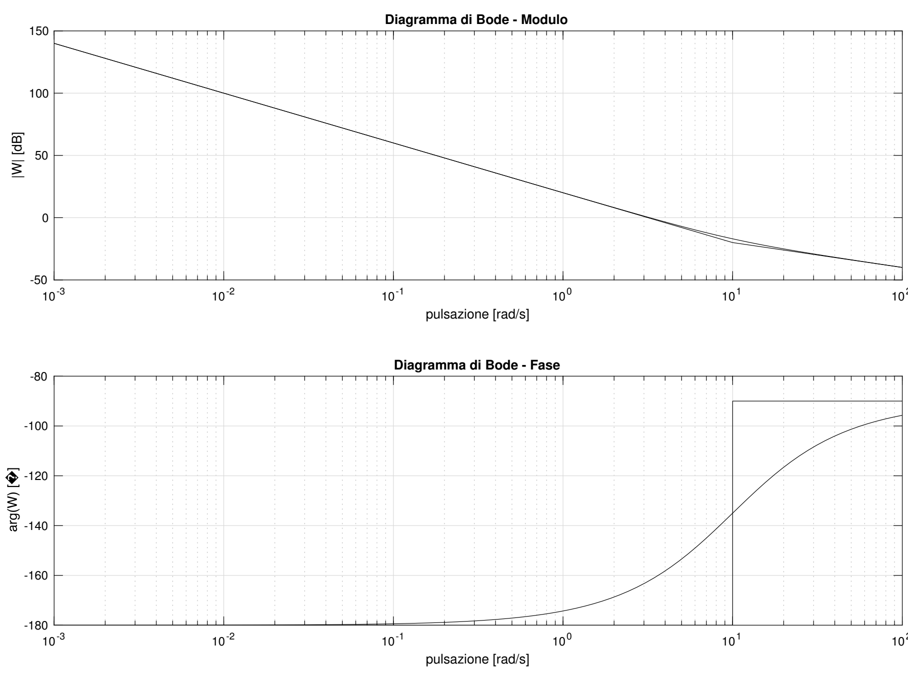
Pertanto il sistema retroazionato ha sempre un polo reale positivo tranne che per $K > 2$, situazione in cui ha due poli a parte reale positiva.

I luoghi positivo e negativo sono riportati qui di seguito:





Esercizio 3. Per il punto i), è necessario il ricorso a $C'(s) = \frac{1}{s}$ per il requisito sul tipo mentre l'errore a regime alla rampa parabolica è già a posto; dopodichè si nota che in $\omega_A^* = 10^0$ rad/s il modulo di $C'(j\omega)G(j\omega)$ è a +20 dB, mentre la fase è a quasi $-180°$.



È necessario quindi il ricorso ad una rete a sella per abbassare il modulo di 20dB, aumentando nel contempo la fase di circa +90°. Una possibile (tra le infinite) soluzioni è la seguente

$$C''(s) = \frac{1+10s}{1+10^3 s}\frac{1+10s}{1+s/10}$$

che porta al compensatore complessivo

$$C(s) = \frac{(1+10s)^2}{s(1+10^3 s)(1+s/10)}.$$

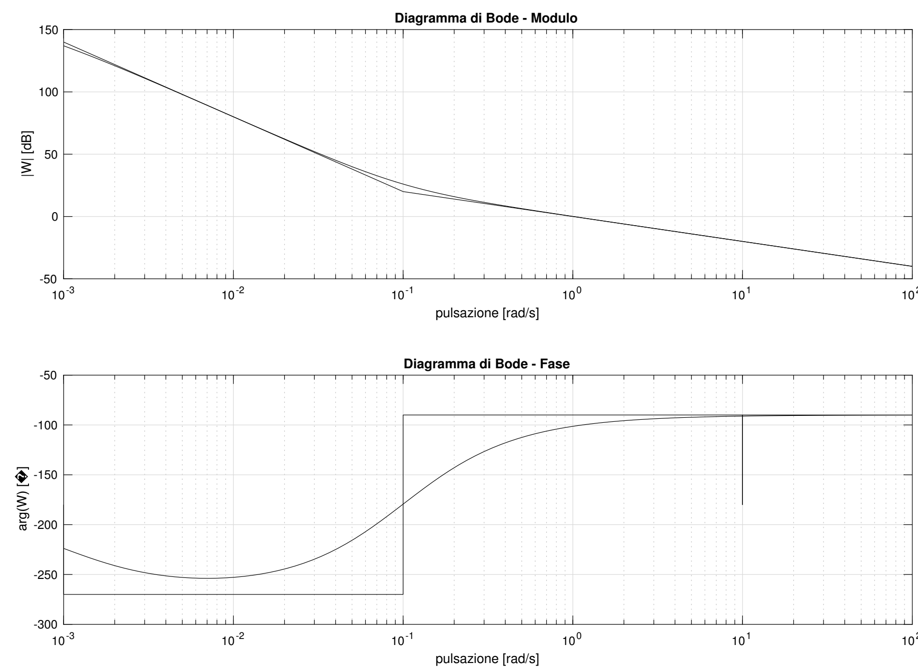
Infatti la rete anticipatrice

$$C_{ant}(s) = \frac{1+10s}{1+s/10}$$

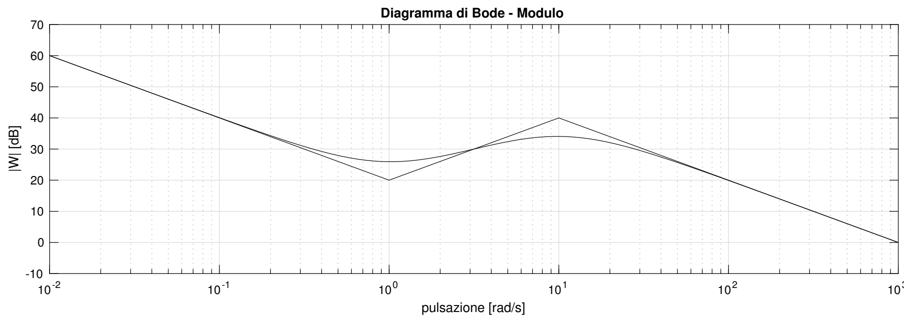
alza la fase in ω^* di $90°$, ma al contempo da un contributo di 20 dB al modulo. La rete attenuatrice

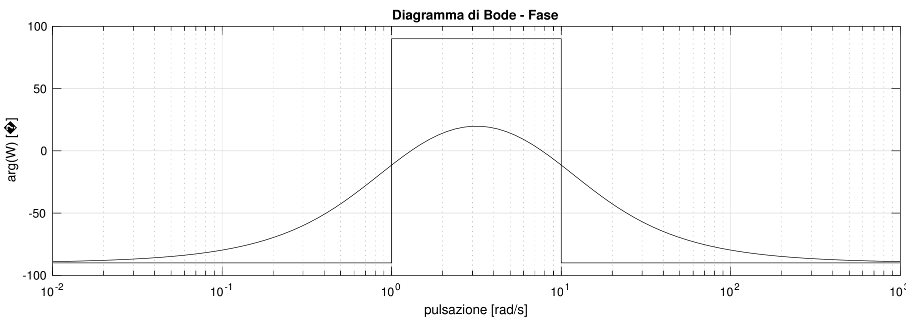
$$C_{att}(s) = \frac{1+10s}{1+10^3 s}$$

è posizionata prima in modo da dare un contributo nulla alla fase, mentre il polo precedente di due decadi lo zero così da dare un contributo al modulo di -40 dB.
La stabilità BIBO del sistema retroazionato è garantita dal criterio di Bode.



Per il punto ii), è necessario il ricorso a $C'(s) = \frac{10^3}{s}$ per il requisito sul tipo e sull'errore a regime alla rampa lineare; dopodichè si nota che in $\omega_A^* = 10^2$ rad/s il modulo di $C'(j\omega)G(j\omega)$ è a $+20$ dB, mentre la fase è superiore a $-90°$.





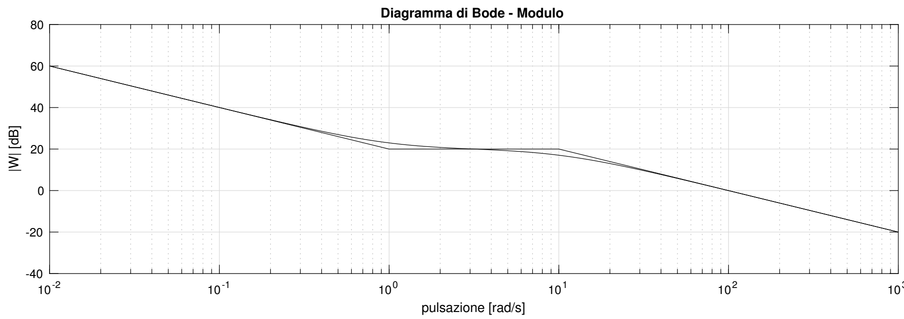
Possiamo allora ricorrere ad una rete attenuatrice che abbassi il modulo di 20 dB e non abbassi sostanzialmente la fase. A tal fine è sufficiente scegliere una rete attenuatrice con un polo in -1 e uno zero in -10, il che corrisponde a fare una doppia cancellazione ammissibile nella funzione di trasferimento del processo:

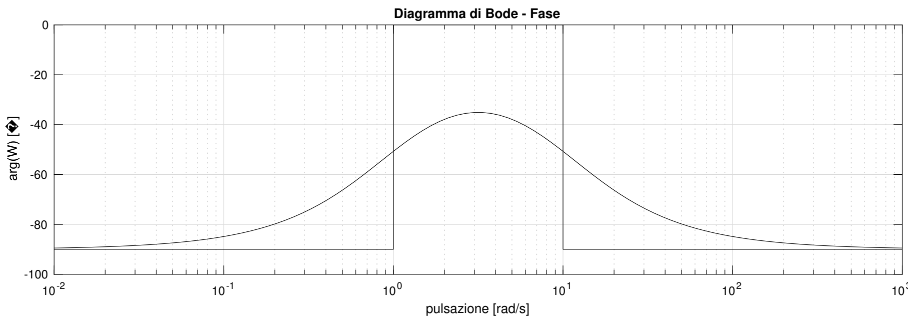
$$C''(s) = \frac{1 + s/10}{1 + s}.$$

Il controllore complessivo diventa allora

$$C(s) = \frac{10^3(1 + s/10)}{s(1 + s)}.$$

Il diagramma finale di $C(s)G(s)$ è il seguente:





La stabilità BIBO del sistema retroazionato è garantita dal criterio di Bode.

Teoria. Per la prima parte si consulti il libro di testo a pagina 89 e seguenti. Per quanto concerne la seconda parte, poichè si ha

$$Y_f(s) = W(s)\frac{1}{(s-j\omega_0)^2} = \frac{B}{(s-j\omega_0)^2} + \frac{A}{s-j\omega_0} + \sum_{i,k} \frac{C_{ik}}{(s-\lambda_i)^{k+1}}$$

dove i λ_i sono i poli di $W(s)$ (a parte reale negativa, per l'ipotesi di BIBO stabilità sulla $W(s)$), e quindi

$$y_f(t) = Bte^{j\omega_0 t} + Ae^{j\omega_0 t} + \sum_{i,k} C_{ik} e^{\lambda_i t}\frac{t^k}{k!},$$

con $e^{\lambda_i t}\frac{t^k}{k!}$ modi convergenti, è evidente che l'unico modo affinché la risposta a regime sia del tipo $Ae^{j\omega_0 t}$ è che il coefficiente B sia nullo, ovvero $j\omega_0$ sia polo semplice e non doppio di $Y_f(s)$. Ciò richiede che $W(s)$ (oltre ad essere BIBO stabile) presenti uno zero semplice in $j\omega_0$ e quindi sia della forma

$$W(s) = \frac{(s^2+\omega_0^2)\ n(s)}{d(s)}$$

con $n(s)$ polinomio privo di zeri in $\pm j\omega_0$ (altrimenti sarebbe $A=0$) e $d(s)$ polinomio di Hurwitz.