Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1º Appello — 18 giugno 2009

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1,1,0,0) = (3,1,2)$, $f(0,1,0,0) = (-1,-2,1)$, $f(1,0,1,0) = (2,0,2)$, $f(0,0,1,1) = (1,-1,2)$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1,2,-3,1)$ e $u_2 = (0,2,-1,2)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2,3,-1,1)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6-2a & 2a+4 & -4 \\ -1 & 2a+b-4 & -2a-4 & 2 \\ 0 & 4-a-2b & a-4 & 2 \\ 1 & a+6 & -a-11 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z - 7 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $A \in r$ e $B \in s$ di minima distanza.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1º Appello — 18 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 3x - y - 8 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $A \in r$ e $B \in s$ di minima distanza.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0,1) = (-1,2,1)$, $f(0,0,0,1) = (2,-1,1)$, $f(1,1,0,0) = (-3,2,-1)$, $f(0,1,1,1) = (1,-1,0)$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $2x_1 - x_2 = 0$.

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2-2a & 4a-4 & 6 \\ -1 & 2a+b-3 & 3-4a & -3 \\ 0 & -a-2b-2 & 2a+3 & 2 \\ 1 & a-8 & 6-2a & 6 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Esercizio 5. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1,0,-3,2)$ e $u_2 = (-1,1,-1,0)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2,5,-1,2)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1^o Appello — 18 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z - 6 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $A \in r$ e $B \in s$ di minima distanza.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 0, 2)$ e $u_2 = (0, 1, -1, 2)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, -1, -1, 2)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2a & 4a+2 & -6 \\ -1 & 2a+b+3 & -4a-4 & 3 \\ 0 & -a-2b-8 & 2a+11 & 2 \\ 1 & a-3 & 7-2a & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(0,1,1,0) = (0,2,-2)$, $f(0,0,1,0) = (2,1,1)$, $f(1,1,0,0) = (-3,1,-4)$, $f(0,1,1,1) = (3,-2,5)$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1$^{\text{o}}$ Appello — 18 giugno 2009

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (0, -2, 1, 4)$ e $u_2 = (0, -1, -1, 2)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, -1, 3, 4)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.

Esercizio 2. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2a-4 & 2a-2 & 0 \\ -1 & 2a+b+3 & 6-2a & 0 \\ 0 & -a-2b-8 & a-7 & 2 \\ 1 & a-11 & 6-a & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1, 1, 1, 0) = (-1, 2, -3)$, $f(0, 1, 0, 0) = (2, -1, 3)$, $f(1, 1, 0, 0) = (-2, 1, -3)$, $f(0, 1, 0, 1) = (3, -2, 5)$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $3x_1 - x_4 = 0$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 5. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 5z - 9 = 0 \\ x + y + 6z - 9 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2y - 3z - 8 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $A \in r$ e $B \in s$ di minima distanza.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1º Appello — 18 giugno 2009

Esercizio 1. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2a & 2a-16 & 6 \\ -1 & 2a+b-2 & 12-2a & -3 \\ 0 & -a-2b-2 & a-8 & 2 \\ 1 & a-9 & -a-6 & 6 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 5z + 10 = 0 \\ x + y + 5z + 7 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 3z - 10 = 0 \\ y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $A \in r$ e $B \in s$ di minima distanza.

Esercizio 4. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, -3, 1, 0)$ e $u_2 = (1, -1, -3, 0)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, 1, 3, -1)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1, 1, 0, 1) = (-1, 3, 2)$, $f(0, 1, 0, 1) = (2, -1, 1)$, $f(1, 1, 0, 0) = (-2, 3, 1)$, $f(0, 1, 1, 0) = (-1, -2, -3)$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_1 - 2x_4 = 0$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, seconda squadra*)

Prof. F. Bottacin

1^o^ Appello — 18 giugno 2009

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = {}^tPGP$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(0,0,1,1) = (2,0,2)$, $f(0,1,0,1) = (1,-1,0)$, $f(1,1,1,0) = (-2,1,-1)$, $f(1,0,1,0) = (-1,-2,-3)$. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche. Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f. Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap U$, ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $x_1 - x_4 = 0$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, si trasformi la seguente matrice in una matrice triangolare superiore (o inferiore).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2a-2 & 2a+10 & -4 \\ -1 & 2a+b-4 & -2a-5 & 2 \\ 0 & -a-2b & a-2 & 2 \\ 1 & a-17 & 2-a & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzando il risultato così ottenuto, si calcoli il determinante di A e si dica per quali valori dei parametri reali a e b la matrice A ha rango 3.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y + 9 = 0 \\ 2x - y + z + 8 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Si verifichi che le rette r e s sono sghembe. Si determinino le equazioni della retta ℓ incidente alle rette r e s e ortogonale ad entrambe. Si determini la distanza tra r e s. Infine, si determinino i punti $A \in r$ e $B \in s$ di minima distanza.

Esercizio 5. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (2,0,1,0)$ e $u_2 = (1,-2,1,0)$. Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2,1,0,-1)$ sul sottospazio U. Si determini inoltre un vettore w, di norma minima, tale che $v + w \in U$.