Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

3° Appello — 15 settembre 2010

Esercizio 1. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di W.

(b) Dati i vettori $w_1 = (2, 3, a, -1)$ e $w_2 = (1, 4, -1, b)$, si determinino i valori di a e b in modo tale che $w_1, w_2 \in W$ (In tutte le domande seguenti si sostituiscano ad a e b i valori trovati).

(c) Si determini $w_3 \in W$ tale che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di W.

(d) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = W$ e si dica se tale f è unica.

(e) Se una tale funzione esiste, se ne scriva la matrice rispetto alle basi canoniche e se ne calcoli il nucleo. È vero che, se una tale f esiste, essa deve necessariamente avere un autovalore uguale a zero?

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(e_1 + e_3) = 4e_1 - 3e_2 + 4e_3, \quad f(e_2) = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \quad f(e_1 - e_3) = 10e_1 - 9e_2 + 8e_3,$$

ove e_1, e_2, e_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

(c) Si stabilisca per quali valori del parametro t il vettore $v = (2, t, 2)$ è un autovettore di f.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - x_2 + x_4 = 0$, $3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ e $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v_1 = (2, 1, -2, 3)$ si trovino due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v_1 = u + u'$.

(c) Dati i vettori $v_2 = (5, -3, 9, 1)$ e $w = (1, 2, 1, -1)$ si determini (se possibile) l'equazione cartesiana di un sottospazio W, di dimensione 3, di $\mathbb{R}^4$, tale che w sia la proiezione ortogonale di v_2 su W.

(d) Si determini una base ortogonale del sottospazio W trovato nel punto (c).

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π.

(d) Dato il vettore $v = (5, 2, 3)$ si determini la retta t parallela al vettore v e incidente le rette r e s.

(e) Posto $R = r \cap t$ e $S = s \cap t$, si calcoli l'area del triangolo PRS, ove $P = (1, 1, 1)$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

3^o Appello — 15 settembre 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(e_1 + e_2) = 3e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_1 - e_2) = 7e_1 - 7e_2 + 5e_3, \quad f(e_3) = -6e_1 + 6e_2 - 4e_3,$$

ove e_1, e_2, e_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

(c) Si stabilisca per quali valori del parametro t il vettore $v = (2, t, 2)$ è un autovettore di f.

Esercizio 2. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y - z = 2 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π.

(d) Dato il vettore $v = (1, 4, -2)$ si determini la retta t parallela al vettore v e incidente le rette r e s.

(e) Posto $R = r \cap t$ e $S = s \cap t$, si calcoli l'area del triangolo PRS, ove $P = (2, 2, 1)$.

Esercizio 3. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di W.

(b) Dati i vettori $w_1 = (2, 4, a, -3)$ e $w_2 = (3, -1, 2, b)$, si determinino i valori di a e b in modo tale che $w_1, w_2 \in W$ (In tutte le domande seguenti si sostituiscano ad a e b i valori trovati).

(c) Si determini $w_3 \in W$ tale che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di W.

(d) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = W$ e si dica se tale f è unica.

(e) Se una tale funzione esiste, se ne scriva la matrice rispetto alle basi canoniche e se ne calcoli il nucleo. È vero che, se una tale f esiste, essa deve necessariamente avere un autovalore uguale a zero?

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v_1 = (3, 2, 0, -2)$ si trovino due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v_1 = u + u'$.

(c) Dati i vettori $v_2 = (3, 1, 2, -5)$ e $w = (1, -2, 2, -1)$ si determini (se possibile) l'equazione cartesiana di un sottospazio W, di dimensione 3, di $\mathbb{R}^4$, tale che w sia la proiezione ortogonale di v_2 su W.

(d) Si determini una base ortogonale del sottospazio W trovato nel punto (c).

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

3^o^ Appello — 15 settembre 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 + x_3 - x_4 = 0$, $3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ e $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v_1 = (2, -3, 6, 3)$ si trovino due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v_1 = u + u'$.

(c) Dati i vettori $v_2 = (1, -10, -3, 2)$ e $w = (2, -1, 1, 3)$ si determini (se possibile) l'equazione cartesiana di un sottospazio W, di dimensione 3, di $\mathbb{R}^4$, tale che w sia la proiezione ortogonale di v_2 su W.

(d) Si determini una base ortogonale del sottospazio W trovato nel punto (c).

Esercizio 2. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di W.

(b) Dati i vettori $w_1 = (2, -1, a, 4)$ e $w_2 = (3, 2, -1, b)$, si determinino i valori di a e b in modo tale che $w_1, w_2 \in W$ (In tutte le domande seguenti si sostituiscano ad a e b i valori trovati).

(c) Si determini $w_3 \in W$ tale che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di W.

(d) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = W$ e si dica se tale f è unica.

(e) Se una tale funzione esiste, se ne scriva la matrice rispetto alle basi canoniche e se ne calcoli il nucleo. È vero che, se una tale f esiste, essa deve necessariamente avere un autovalore uguale a zero?

Esercizio 3. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette

$$r : \begin{cases} 3x + y = -1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π.

(d) Dato il vettore $v = (1, 2, 8)$ si determini la retta t parallela al vettore v e incidente le rette r e s.

(e) Posto $R = r \cap t$ e $S = s \cap t$, si calcoli l'area del triangolo PRS, ove $P = (1, -1, -1)$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(e_1) = 5e_1 - 2e_2 + 4e_3, \quad f(e_2 + e_3) = e_2 + e_3, \quad f(e_2 - e_3) = 8e_1 - 3e_2 + 7e_3,$$

ove e_1, e_2, e_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

(c) Si stabilisca per quali valori del parametro t il vettore $v = (2, -1, t)$ è un autovettore di f.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile*)

3º Appello — 15 settembre 2010

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y - z = 2 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

(a) Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo alla retta r.

(c) Si determinino le equazioni parametriche della retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π.

(d) Dato il vettore $v = (4, -2, 1)$ si determini la retta t parallela al vettore v e incidente le rette r e s.

(e) Posto $R = r \cap t$ e $S = s \cap t$, si calcoli l'area del triangolo PRS, ove $P = (1, 2, 0)$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - 2x_2 + x_4 = 0$, $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ e $x_1 - 7x_2 + x_3 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v_1 = (2, -2, 5, -3)$ si trovino due vettori $u \in U$ e $u' \in U^\perp$ tali che $v_1 = u + u'$.

(c) Dati i vettori $v_2 = (3, -8, 1, 4)$ e $w = (2, -2, -1, -2)$ si determini (se possibile) l'equazione cartesiana di un sottospazio W, di dimensione 3, di $\mathbb{R}^4$, tale che w sia la proiezione ortogonale di v_2 su W.

(d) Si determini una base ortogonale del sottospazio W trovato nel punto (c).

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita ponendo

$$f(e_1 + e_2) = 6e_1 - 6e_2 + 4e_3, \quad f(e_1 - e_2) = 2e_1 - 2e_2, \quad f(e_3) = e_1 - 2e_2 + 3e_3,$$

ove e_1, e_2, e_3 è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

(c) Si stabilisca per quali valori del parametro t il vettore $v = (-2, t, -2)$ è un autovettore di f.

Esercizio 4. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione di W.

(b) Dati i vettori $w_1 = (2, 3, a, -1)$ e $w_2 = (3, -1, 4, b)$, si determinino i valori di a e b in modo tale che $w_1, w_2 \in W$ (In tutte le domande seguenti si sostituiscano ad a e b i valori trovati).

(c) Si determini $w_3 \in W$ tale che $\{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di W.

(d) Si stabilisca se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = W$ e si dica se tale f è unica.

(e) Se una tale funzione esiste, se ne scriva la matrice rispetto alle basi canoniche e se ne calcoli il nucleo. È vero che, se una tale f esiste, essa deve necessariamente avere un autovalore uguale a zero?