COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
8 Febbraio 2019

Esercizio 1. [10 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(1+10s)(1+s^2)}{s(1-10s)(1+s)},$$

i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, calcolando eventuali asintoti ed intersezioni con gli assi, e si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$.

Esercizio 2. [9 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2+2s+2}{(s-1)^2\left(s+\frac{1}{3}\right)}$$

se ne traccino i luoghi positivo e negativo, evidenziandone punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, e studiando quindi la BIBO stabilità di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale.

Esercizio 3. [2+2+2 punti] Si consideri il processo di funzione di trasferimento NON BIBO stabile

$$G(s) = \frac{10}{(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}.$$

È richiesto di

- progettare, <u>adottando le solite regole della sintesi per tentativi</u> (ovvero le regole che sarebbe corretto adottare se $G(s)$ fosse BIBO stabile) un controllore di tipo PD che renda il sistema retroazionato di tipo 0 con errore a regime al gradino soddisfacente $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-2}$ e attribuisca alla funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10^4$ rad/s;

- verificare, attraverso il diagramma di Nyquist di $C(s)G(s)$ che $W(s)$ risulta instabile (si noti infatti che avendo $G(s)$ un polo reale positivo non sono soddisfatte le ipotesi del criterio di Bode e quindi il margine di fase positivo di $C(s)G(s)$ non è garanzia della stabilità BIBO della funzione di trasferimento in catena chiusa);

- modificare il segno del guadagno di Bode e/o dello zero del controllore $C(s)$, verificando che le specifiche su $e_{rp}^{(1)}$ e ω_A rimangono soddisfatte comunque siano scelti tali due segni, ma $W(s)$ risulta BIBO stabile solo in corrispondenza ad una scelta ben precisa dei due segni.

Teoria. [4+2 punti] Sia $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ una funzione razionale propria con guadagno di Evans $K_E = 1$, ovvero

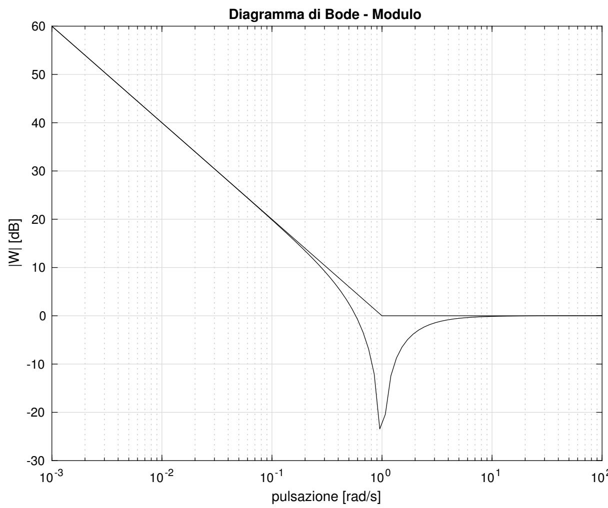
$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

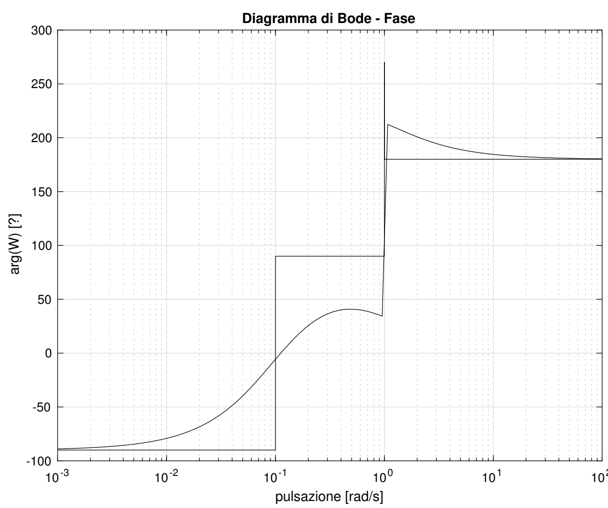
con $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$ monici e $\deg d(s) \geq \deg n(s)$. Si enunci e dimostri la regola che determina quali punti dell'asse reale appartengono al luogo positivo e al luogo negativo di $G(s)$.

Si dimostri che se tutti gli zeri di $G(s)$ hanno parte reale negativa e il grado relativo (differenza tra numero di poli e di zeri) di $G(s)$ è 2 (ovvero la differenza tra grado del denominatore e grado del numeratore in una rappresentazione di $G(s)$ è pari a 2), allora è possibile rendere il sistema retroazionato $W(s)$ BIBO stabile attraverso il ricorso ad un controllore PID $C(s)$.
[Suggerimento: si determinino condizioni che garantiscono che tutti i rami di uno dei due luoghi associati a $C(s)G(s)$ prima o poi siano dentro al semipiano reale negativo]

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) e ii) I diagrammi di Bode di modulo e fase sono riportati qui di seguito.

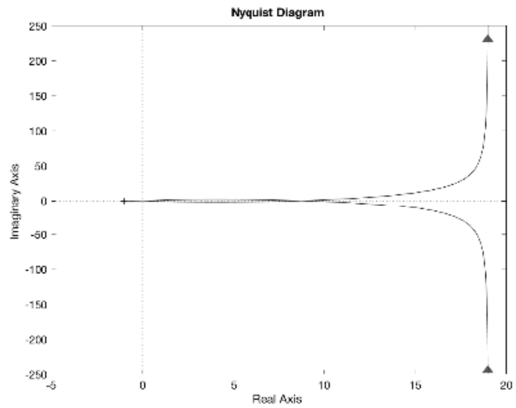




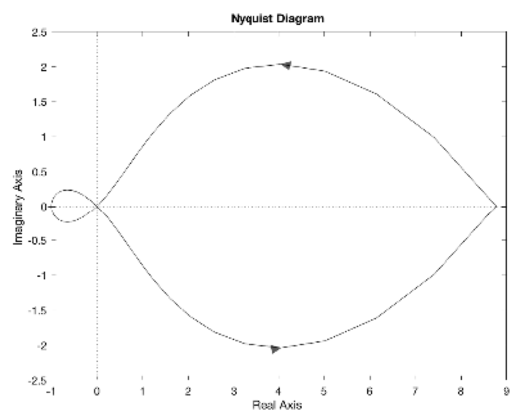
Lo studio di $G(j\omega)$ conduce a

$$G(j\omega) = \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)(1+100\omega^2)}\left[(19+100\omega^2) + j\frac{80\omega^2-1}{\omega}\right].$$

Limitandoci alle pulsazioni positive, la parte reale è positiva per $0 < \omega < 1$, si annulla per $\omega = 1$, mentre è negativa per $\omega > 1$. Invece la parte immaginaria ha due zeri: uno per $\omega = 1/\sqrt{80}$ e uno per $\omega = 1$. Essa è negativa per $0 < \omega < 1/\sqrt{80}$ e per $\omega > 1$, e positiva per $1/\sqrt{80} < \omega < 1$. Per $\omega = 1/\sqrt{80}$ la parte immaginaria è nulla mentre la parte reale vale $8.7778 = \frac{79}{9}$.
Se valutiamo il limite della parte reale per $\omega \to 0^+$ troviamo 19. Infine, la parte immaginaria si annulla per $\omega \to +\infty$, mentre la parte reale tende a -1. Questa considerazioni permettono di tracciare il seguente diagramma di Nyquist:



e il suo dettaglio in un intorno dell'origine:



Aggiungendo il cerchio all'infinito per il polo nell'origine e valutando la posizione di Nyquist rispetto al punto $-\frac{1}{k}$, e notando che $n_{G_+} = 1$, si ottiene quindi $n_{W_+} = n_{G_+} - N = 1 - N$, da cui

- Per $k < -\frac{9}{79}$ si ha $N = 1, n_{W_+} = 0$ (3 poli a parte reale negativa);
- per $k = -\frac{9}{79}$ si hanno 2 poli immaginari $\pm i\frac{1}{4\sqrt{5}}$ ed 1 negativo per continuità dai casi contigui $s = -\frac{9}{11}$;
- per $-\frac{9}{79} < k < 0$ si ha $N = -1, n_{W_+} = 2$ (2 poli a parte reale positiva ed 1 negativo);
- per $0 < k < 1$ si ha $N = 0, n_{W_+} = 1$ (1 polo positivo e 2 a parte reale negativa);
- per $k = 1$ la $W(s)$ diventa impropria con 1 polo positivo ed 1 negativo per continuità dai casi contigui;
- per $k > 1$ si ha $N = -1, n_{W_+} = 2$ (2 poli a parte reale positiva ed 1 negativo).

Esercizio 2. Si noti, preliminarmente che $n = 3$ e $m = 2$, quindi sia luogo positivo che negativo avranno un solo ramo che va al punto improprio, nel luogo positivo con direzione

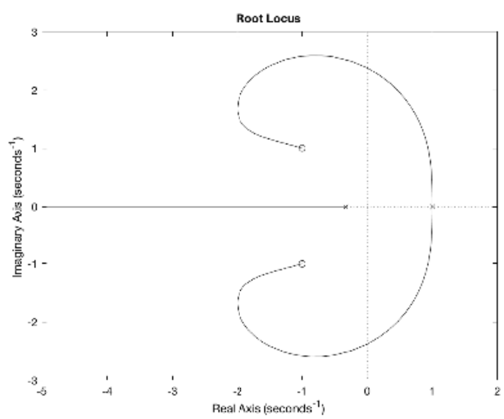
π, nel luogo negativo con direzione 0. L'equazione dei punti doppi porge, dopo alcuni calcoli

$$(s-1)s(3s^2+15s+22)=0$$

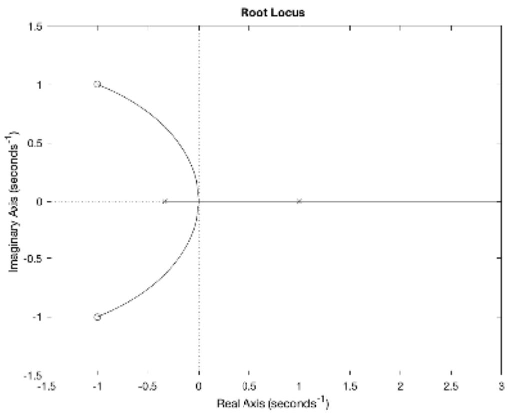
e ciò permettere di determinare il punto doppio banale $(s=1, K=0)$ ed il punto doppio $(s=0, K=-\frac{1}{6})$. Altri non ce ne sono visto che l'equazione ha altre 2 radici complesse e non possono esserci punti doppi complessi avendo $G(s)$ grado minore di 4. Le intersezioni con l'asse immaginario (ponendo $s=j\omega$ in $d(s)+Kn(s)=0$)

$$j\omega(6K+1-3\omega^2)+[5\omega^2+1+3K(2-\omega^2)]=0$$

La parte immaginaria si annulla per $\omega=0$, che implica $K=-\frac{1}{6}$ annullando anche la parte reale, ritrovando così il punto doppio non banale. Ma si annulla anche per $\omega^2=2K+\frac{1}{3}$, che sostituita nella parte reale che va anch'essa annullata, porge $18K^2-45K-8=0$, che implica $K=-\frac{1}{6},\frac{8}{3}$. Il primo valore è già stato trovato ed implica $(s=\pm j\omega=0, K=-\frac{1}{6}<0)$, mentre il secondo implica $(s=\pm j\omega=\pm i\sqrt{\frac{17}{3}}, K=\frac{8}{3}>0)$. Nel luogo positivo due rami complessi coniugati partono dal polo doppio $s=1$ ed attraversano l'asse immaginario per $K=\frac{8}{3}$, dirigendosi poi verso i due zeri complessi coniugati, mentre il terzo ramo si muove sull'asse reale dal polo $s=-\frac{1}{3}$ verso $-\infty$.

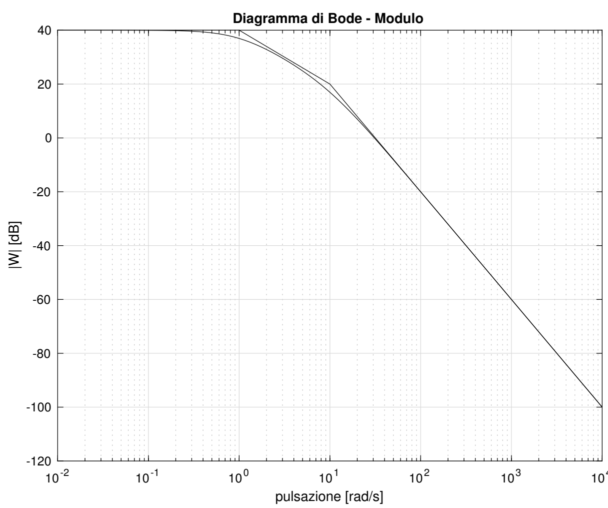


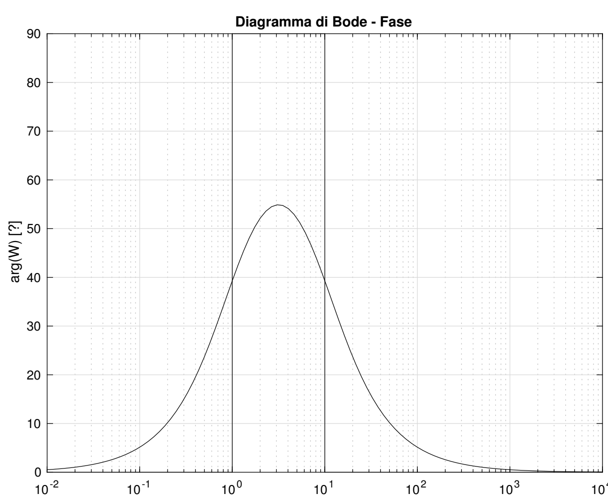
Nel luogo negativo un ramo si muove sull'asse reale da $s=1$ verso $+\infty$, mentre un altro ramo si muove dallo stesso polo verso sinistra, mentre il terzo ramo si muove dal polo $s=-\frac{1}{3}$ verso destra, e tali 2 rami si incontrano per $K=-\frac{1}{6}$ nel punto doppio $s=0$, che rappresenta anche l'unico punto ammissibile in cui il luogo tocca l'asse immaginario, per cui dopo i due rami escono sul piano complesso e si dirigono verso la coppia di zeri complessi coniugati restando nel semipiano sinistro.



Quindi si ha BIBO stabilità di $W(s)$ per $K > \frac{8}{3}$, mentre per $k < 0$ non si ha mai BIBO stabilità.

Esercizio 3. Anzitutto è necessario assumere $C'(s) = 10$ per sistemare l'errore al gradino. A questo punto il diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$, qui di seguito riportato,

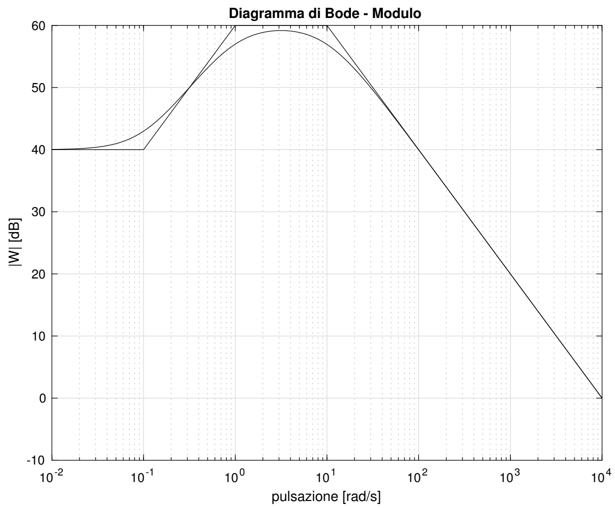


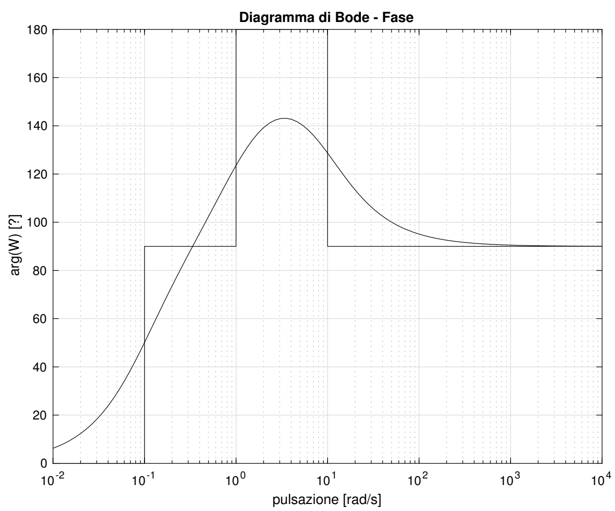


evidenzia che dobbiamo alzare il modulo di 100 dB per ottenere come pulsazione di taglio $\omega_A^* = 10^4$, il che si ottiene piazzando uno zero 5 decadi prima di ω_A e quindi

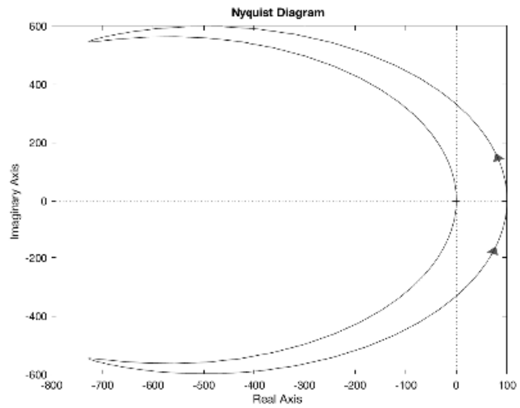
$$C(s) = 10(1+10s) \;\Rightarrow C(s)G(s) = \frac{100(1+10s)}{(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}.$$

I diagrammi di Bode risultano:





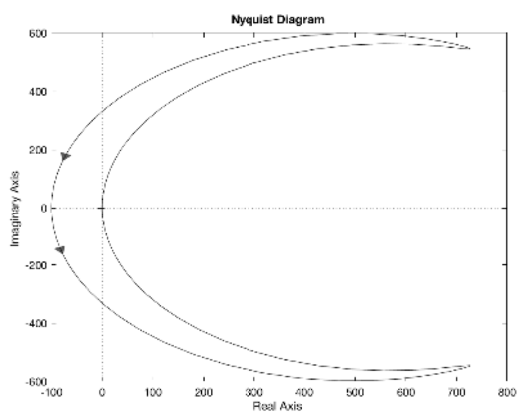
Il diagramma di Nyquist



evidenzia come non venga fatto alcun giro attorno al punto critico $-1 + j0$, per cui $n_{W_+} = n_{G_+} = 1$ ed il sistema risulta instabile. Cambiando segno a guadagno e/o zero, il modulo di Bode non cambia, quindi entrambe le specifiche rimangono rispettate. Tuttavia, cambiando il segno dello zero, se non cambiamo segno a K_B i giri non cambiano, mentre se cambiamo segno anche a K_B risulta $N = -1$, per cui in ogni caso $W(s)$ è instabile. Ma se cambiamo segno solo a K_B, risulta $N = 1$ da cui la BIBO stabilità di $W(s)$. Quindi la scelta corretta è

$$C(s) = -10(1 + 10s)$$

a cui corrisponde il diagramma di Nyquist



Teoria. Per la regola su quali punti dell'asse reale appartengano al luogo si veda il libro di testo, Capitolo 8, pagine 228-229.

Nel caso in cui $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ abbia $\deg d(s) = \deg n(s) + 2$, il ricorso ad un controllore PID in cui tutti i tre parametri siano non nulli

$$C(s) = \frac{K_i}{s}(1 + sT_1)(1 + sT_2)$$

porta ad un incremento del numero degli zeri pari a 2 e introduce un polo in 0. Ciò significa che

$$C(s)G(s) = K_i \frac{n(s)(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s \cdot d(s)}$$

ha ora denominatore il cui grado eccede di 1 il grado del numeratore. Se scegliamo T_1 e T_2 positivi, la funzione di trasferimento in catena aperta avrà tutti gli zeri a parte reale negativa e quindi nel luogo positivo associato a tale funzione avremo un ramo che va a $-\infty$ e gli altri che vanno agli zeri. Se tali zeri sono stabili a partire da un certo valore in poi tutti i rami sono nel semipiano reale negativo, il che assicura la BIBO stabilità del sistema retroazionato. Quindi basta scegliere $K_i > 0$ e di modulo molto grande per essere sicuri che

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

risulti BIBO stabile.