ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty).$$

La funzione non ha particolari simmetrie.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

f è continua per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ quindi

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = f(-1) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0;$$

inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2},$$

in particolare $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Calcoliamo l'asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 = -2$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x\right) \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi $y = -2x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

f è derivabile in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ perché composizione e somma di funzioni derivabili; in particolare $x^2 + x > 0$ in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ e $\sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$. In questi punti la derivata vale

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} - 1.$$

Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty,$$

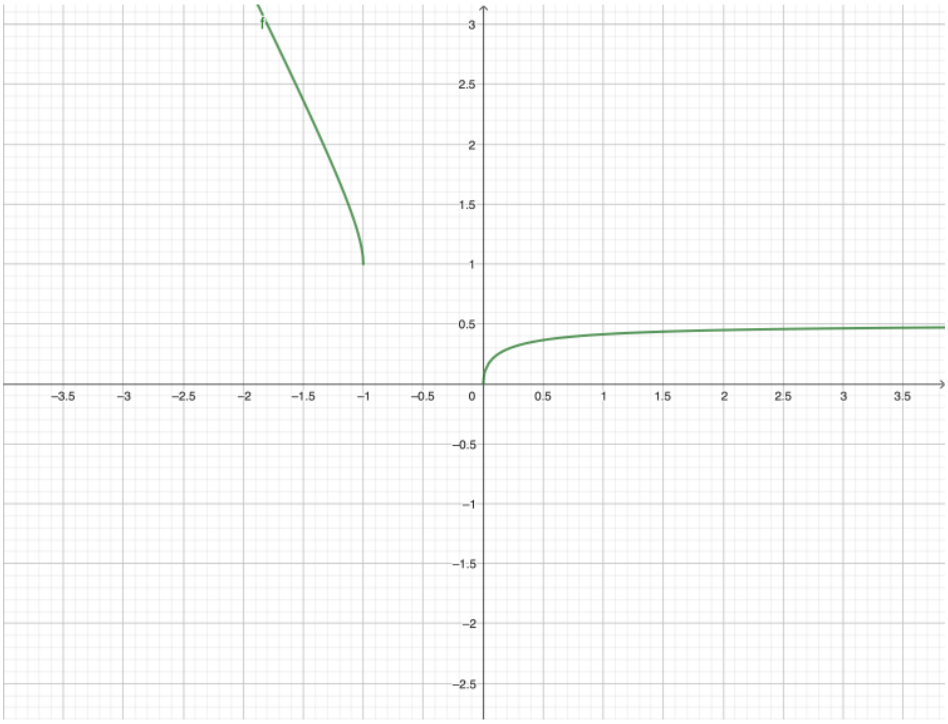

Figure 1: Grafico di f

In particolare f non è derivabile nei punti $x=-1$ e $x=0$. Per ogni $x \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ abbiamo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 2\sqrt{x^2+x}$$

e questa equazione non ha soluzioni perché $(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1 \neq 4x^2+4x = (2\sqrt{x^2+x})^2$. Inoltre $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty,-1)$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0,+\infty)$, quindi f è decrescente in $(-\infty,-1]$ e crescente in $[0,+\infty)$; inoltre -1 e 0 sono punti di minimo relativo, 0 è punto di minimo assoluto e $f(0)=0$ è l'estremo inferiore (minimo) di f. Non esistono punti di massimo relativo e l'estremo superiore è $+\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 1.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := 4$ come soluzione;

Imponendo che l'equazione valga per $z=4$ otteniamo $64+16\alpha+4i = -\alpha i$ quindi $\alpha = -\frac{64+4i}{16+i} = -4\frac{16+i}{16+i} = -4$.

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Abbiamo $z^3-4z^2+iz-4i = (z-4)(z^2+i)$ quindi le altre soluzioni sono le due radici quadrate di $-i$: per calcolarle osserviamo che $|-i|=1$ e $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ e di conseguenza le due radici z_1 e z_2 hanno modulo 1 e argomento $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4}$ rispettivamente, cioé

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$

$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Alternativamente avremmo potuto osservare inizialmente che $z^3+\alpha z^2+iz+\alpha i=(z^2+i)(z+\alpha)$ quindi le soluzioni sono $-\alpha, z_1, z_2$: le radici z_1 e z_2 si calcolano come nel punto (b) e per il punto (a) basta chiedere $-\alpha=4$.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+}[1-\arcsin x]^{\frac{1}{x}}.$$

Per la continuità della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to 0^+}[1-\arcsin(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\arcsin(x))}{x}}=\frac{1}{e},$$

poiché

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\arcsin(x))}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-(x+o(x))}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(x+o(x))+o\big(-x-o(x)\big)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+o\big(x\big)}{x}=-1$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

I termini della serie sono positivi $n\geq 1$, dunque possiamo applicare il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[1-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n}=\frac{1}{e}$$

perché dal cambio di variabile $x=\frac{1}{n}$ e dal punto (a) vale

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n}=\lim_{x\to 0^+}[1-\arcsin(x)]^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}<1,$$

so the series is convergent.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x)=(x-2)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

Integrando per parti si ha

$$\int f_1(x)\,dx=\int\big[(x-2)\arctan x\big]dx=\frac{(x-2)^2}{2}\arctan x-\int\left[\frac{(x-2)^2}{2(1+x^2)}\right]dx+c\qquad c\in\mathbb{R}$$

Dato che

$$\frac{(x-2)^2}{2(1+x^2)}=\frac{x^2+1}{2(x^2+1)}+\frac{3}{2(x^2+1)}-\frac{4x}{2(x^2+1)}$$

si conclude

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{(x-2)^2-3}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \log(x^2+1) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

La famiglia di funzioni non presenta problemi di integrazione in $x = 1$ essendo continua per ogni $x \geq 1$. Quindi calcoliamo

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k f_\alpha(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \big((x-2)\arctan(x^\alpha)\big)\,dx$$

Se $\alpha \geq 0$ si ha$f_\alpha \sim (x-2)$ per $x \to +\infty$, e quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale non è convergente.

Se invece $\alpha < 0$, dallo sviluppo $\arctan y = y + o(y)$ si ha $f_\alpha \sim \frac{1}{x^{-1-\alpha}}$, quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $-1-\alpha > 1$, i.e., se e solo se $\alpha < -2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6),$$
$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

La funzione non ha particolari simmetrie.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

f è continua per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1;$$

inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{x + \sqrt{x^2 - x}}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \frac{1}{2},$$

in particolare $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Calcoliamo l'asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 2$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to-\infty} -\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right) \frac{x - \sqrt{x^2 - x}}{x - \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{x - \sqrt{x^2 - x}} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi $y = 2x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ perché composizione e somma di funzioni derivabili; in particolare $x^2 - x > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ e $\sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$. In questi punti la derivata vale

$$f'(x) = 1 - \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}.$$

Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty,$$

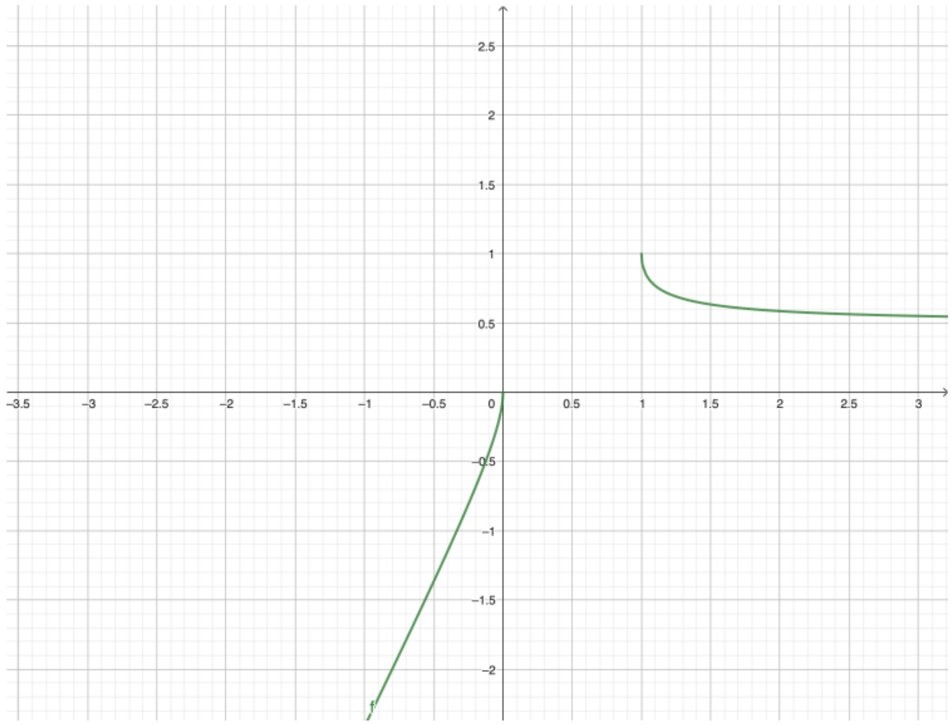

Figure 2: Grafico di f

In particolare f non è derivabile nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ abbiamo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2\sqrt{x^2 - x}$$

e questa equazione non ha soluzioni perché $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1 \neq 4x^2 - 4x = (2\sqrt{x^2 - x})^2$. Inoltre $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (1, +\infty)$, quindi f è crescente in $(-\infty, 0]$ e decrescente in $[1, +\infty)$; inoltre 0 e 1 sono punti di massimo relativo, 1 è punto di massimo assoluto e $f(1) = 1$ è l'estremo superiore (massimo) di f. Non esistono punti di minimo relativo e l'estremo inferiore è $-\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 2.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := -4$ come soluzione;

Imponendo che l'equazione valga per $z = -4$ otteniamo $-64 + 16\alpha - 4i = -\alpha i$ quindi $\alpha = \frac{64+4i}{16+i} = 4\frac{16+i}{16+i} = 4$.

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Abbiamo $z^3 + 4z^2 + iz + 4i = (z+4)(z^2 + i)$ quindi le altre soluzioni sono le due radici quadrate di $-i$: per calcolarle osserviamo che $|-i| = 1$ e $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ e di conseguenza le due radici z_1 e z_2 hanno modulo 1 e argomento $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ rispettivamente, cioé

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Alternativamente avremmo potuto osservare inizialmente che $z^3+\alpha z^2+iz+\alpha i=(z^2+i)(z+\alpha)$ quindi le soluzioni sono $-\alpha, z_1, z_2$: le radici z_1 e z_2 si calcolano come nel punto (b) e per il punto (a) basta chiedere $-\alpha=-4$.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+}[1-\sinh(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

Dalla continuità della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to 0^+}[1-\sinh(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\sinh(x))}{x}} = \frac{1}{e},$$

poiché

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-\sinh(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-(x+o(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-(x+o(x))+o\big(-x-o(x)\big)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+o\big(x\big)}{x} = -1$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

I termini della serie sono positivi per ogni $n\geq 2$. Quindi si può applicare il criterio della radice e ottenere

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[1-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \frac{1}{e}$$

dato che, dal cambio di variabile $x=\frac{1}{n}$ e dal punto (a), vale

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \lim_{x\to 0^+}[1-\sinh(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} < 1,$$

e quindi la serie è convergente.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x+1)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

Integrando per parti si ha

$$\int f_1(x)\,dx = \int \big[(x+1)\arctan x\big]dx = \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \int\left[\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)}\right]dx + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Dato che

$$\frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2+1}{2(x^2+1)} + \frac{2x}{2(x^2+1)}$$

vale

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{(x+1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log((x^2+1)) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

La funzione non presenta problemi di integrazione nell'estremo $x = 1$, essendo f_α continua per ogni $x \geq 1$. Quindi si calcola

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k f_\alpha(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \big((x+1)\arctan(x^\alpha)\big)\,dx$$

Se $\alpha \geq 0$, si ha $f_\alpha \sim (x+1)$ per $x \to +\infty$, quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente.

Se invece $\alpha < 0$, dallo sviluppo $\arctan y = y + o(y)$ si ha $f_\alpha \sim \frac{1}{x^{-1-\alpha}}$, quindi dal criterio del confronto asintotico si ha $-1-\alpha > 1$, i.e., se e solo se $\alpha < -2$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$
$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \geq 0\} = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty).$$

La funzione non ha particolari simmetrie.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

f è continua per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ quindi

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = 2, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0;$$

inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = 1,$$

in particolare $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Calcoliamo l'asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 1 = -2$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\frac{\sqrt{x^2+2x}-x}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x}-x} = -1.$$

Quindi $y = -2x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

f è derivabile in $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ perché composizione e somma di funzioni derivabili; in particolare $x^2 + 2x > 0$ in $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ e $\sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$. In questi punti la derivata vale

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} - 1.$$

Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty,$$

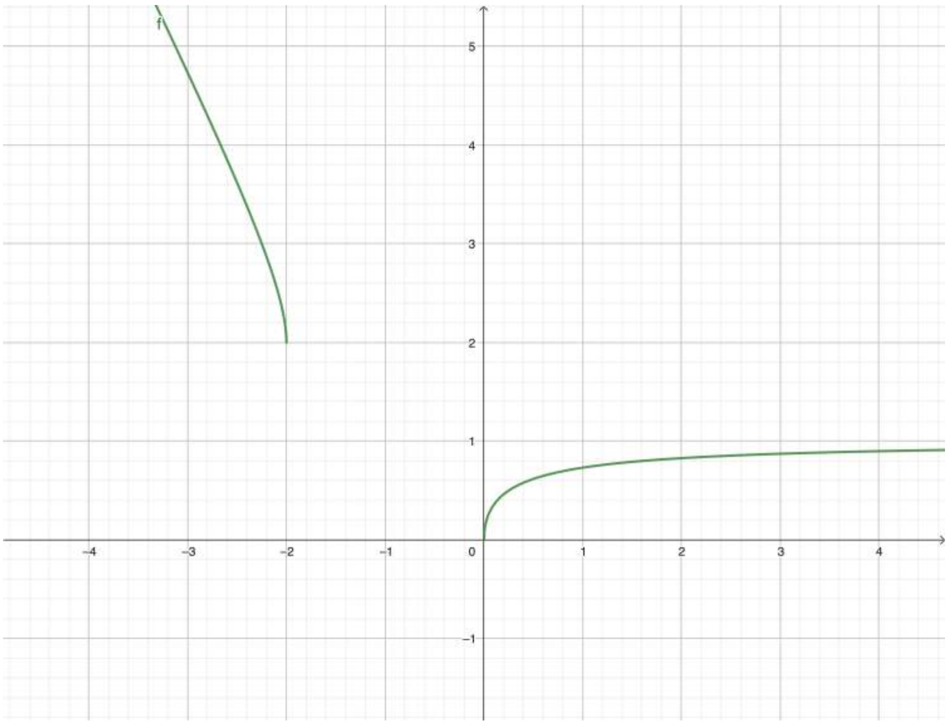

Figure 3: Grafico di f

In particolare f non è derivabile nei punti $x = -2$ e $x = 0$. Per ogni $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ abbiamo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2 + 2x}$$

e questa equazione non ha soluzioni perché $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq x^2 + 2x = (\sqrt{x^2 + 2x})^2$. Inoltre $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (-\infty, -2)$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, quindi f è decrescente in $(-\infty, -2]$ e crescente in $[0, +\infty)$; inoltre -2 e 0 sono punti di minimo relativo, 0 è punto di minimo assoluto e $f(0) = 0$ è l'estremo inferiore (minimo) di f. Non esistono punti di massimo relativo e l'estremo superiore è $+\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 3.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := 3$ come soluzione;

Imponendo che l'equazione valga per $z = 3$ otteniamo $27 + 9\alpha + 3i = -\alpha i$ quindi $\alpha = -\frac{27+3i}{9+i} = -3\frac{9+i}{9+i} = -3$.

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Abbiamo $z^3 - 3z^2 + iz - 3i = (z-3)(z^2 + i)$ quindi le altre soluzioni sono le due radici quadrate di $-i$: per calcolarle osserviamo che $|-i| = 1$ e $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ e di conseguenza le due radici z_1 e z_2 hanno modulo 1 e argomento $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ rispettivamente, cioé

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Alternativamente avremmo potuto osservare inizialmente che $z^3+\alpha z^2+iz+\alpha i = (z^2+i)(z+\alpha)$ quindi le soluzioni sono $-\alpha, z_1, z_2$: le radici z_1 e z_2 si calcolano come nel punto (b) e per il punto (a) basta chiedere $-\alpha = 3$.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to 0^+} [1-\sin(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

Dalla continuità della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to 0^+} [1-\sin(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\sin(x))}{x}} = \frac{1}{e},$$

poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-\sin(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-(x+o(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(x+o(x))+o\big(-x-o(x)\big)}{x} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x+o\big(x\big)}{x} = -1$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Osserviamo che i termini della serie sono positivi. Quindi possiamo applicare il criterio della radice.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left[1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \frac{1}{e}$$

poiché dalla sostituzione $x = \frac{1}{n}$ e dal punto (a) vale

$$\lim_{n\to\infty} \left[1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \lim_{x\to 0^+} [1-\sin(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e} < 1,$$

e quindi la serie è convergente.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x) = (x-1)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

Integrando per parti si ha

$$\int f_1(x)\,dx = \int \big[(x-1)\arctan x\big]dx = \frac{(x-1)^2}{2}\arctan x - \int \left[\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\right]dx + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Dato che

$$\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2+1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\frac{4x}{2(x^2+1)}$$

si ha

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{(x-1)^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log(2(x^2+1)) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

La funzione non presenta problemi di integrazione nell'estremo $x = 1$, essendo continua per ogni $x \geq 1$. Quindi calcoliamo

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k f_\alpha(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \big((x-1)\arctan(x^\alpha)\big)\,dx$$

Se $\alpha \geq 0$, si ha $f_\alpha \sim (x-1)$ per $x \to +\infty$, quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale non è convergente.

Se invece $\alpha < 0$, dallo sviluppo $\arctan y = y + o(y)$ si ha $f_\alpha \sim \frac{1}{x^{-1-\alpha}}$, e quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $-1-\alpha > 1$, i.e., $\alpha < -2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),\\
\arctan(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad \forall n \geq 0
\end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2023

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 9) Si consideri la funzione

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$$

(a) determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie (non è richiesto lo studio del segno);

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

La funzione non ha particolari simmetrie.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

f è continua per ogni $x \in \mathrm{Dom}(f)$ quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 2;$$

inoltre

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x)\frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = 1,$$

in particolare $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Calcoliamo l'asintoto per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} 1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} = 2$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to -\infty} -\left(x + \sqrt{x^2 - 2x}\right)\frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x\to -\infty} -\frac{2x}{x - \sqrt{x^2 - x}} = -1.$$

Quindi $y = 2x - 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

(c) studiare la derivabilità di f nel suo dominio, calcolare la derivata prima ed eventuali limiti della derivata, ove necessario; discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

f è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ perché composizione e somma di funzioni derivabili; in particolare $x^2 - 2x > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ e $\sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$. In questi punti la derivata vale

$$f'(x) = 1 - \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Valgono i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty,$$

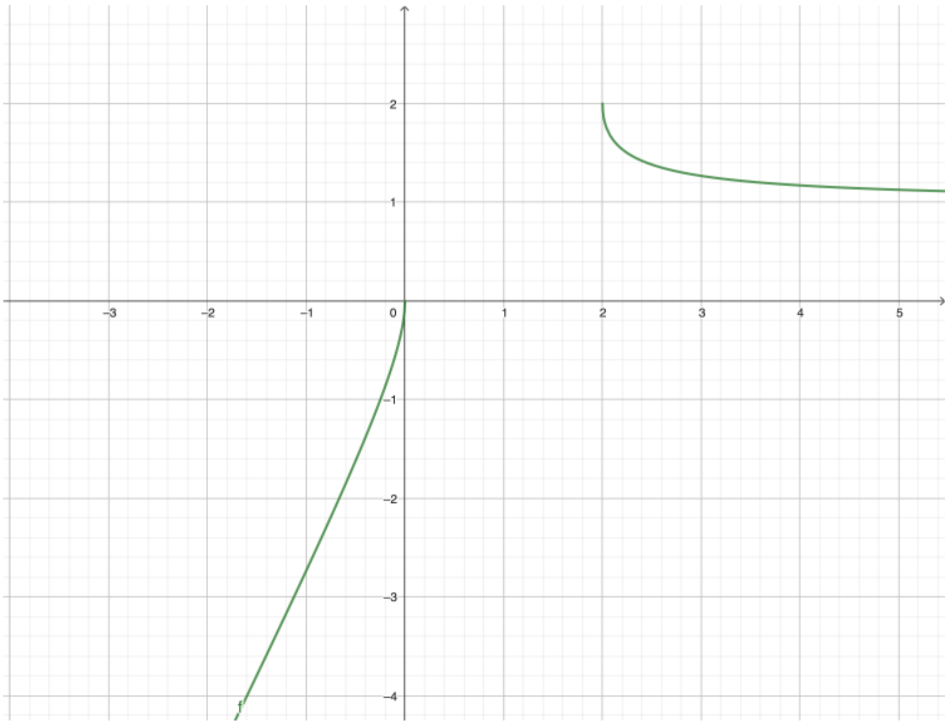

Figure 4: Grafico di f

In particolare f non è derivabile nei punti $x = 0$ e $x = 2$. Per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ abbiamo

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 2\sqrt{x^2 - 2x}$$

e questa equazione non ha soluzioni perché $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \neq x^2 - 2x = (\sqrt{x^2 - 2x})^2$. Inoltre $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (2, +\infty)$, quindi f è crescente in $(-\infty, 0]$ e decrescente in $[2, +\infty)$; inoltre 0 e 2 sono punti di massimo relativo, 2 è punto di massimo assoluto e $f(2) = 2$ è l'estremo superiore (massimo) di f. Non esistono punti di minimo relativo e l'estremo inferiore è $-\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 4.

Esercizio 2 (punti 7) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z^3 + \alpha z^2 + iz = -\alpha i \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(a) Determinare per quale valore del parametro reale α questa equazione ha $z_0 := -3$ come soluzione;

Imponendo che l'equazione valga per $z = -3$ otteniamo $-27 + 9\alpha - 3i = -\alpha i$ quindi $\alpha = \frac{27+3i}{9+i} = 3\frac{9+i}{9+i} = 3$.

(b) Per il valore di α determinato nel punto a), trovare le altre soluzioni dell'equazione.

Abbiamo $z^3 + 3z^2 + iz + 3i = (z+3)(z^2 + i)$ quindi le altre soluzioni sono le due radici quadrate di $-i$: per calcolarle osserviamo che $|-i| = 1$ e $\mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ e di conseguenza le due radici z_1 e z_2 hanno modulo 1 e argomento $-\frac{\pi}{4}$ e $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$ rispettivamente, cioé

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i,$$
$$z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

Alternativamente avremmo potuto osservare inizialmente che $z^3+\alpha z^2+iz+\alpha i=(z^2+i)(z+\alpha)$ quindi le soluzioni sono $-\alpha, z_1, z_2$: le radici z_1 e z_2 si calcolano come nel punto (b) e per il punto (a) basta chiedere $-\alpha=-3$.

Esercizio 3 (punti 8) (a) Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to0^+}[1-\tan(x)]^{\frac{1}{x}}.$$

Dalla continuità della funzione esponenziale si ha

$$\lim_{x\to0^+}[1-\tan(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\log(1-\tan(x))}{x}} = \frac{1}{e},$$

poiché

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1-\tan(x))}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1-(x+o(x))}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{-(x+o(x))+o\big(-x-o(x)\big)}{x} =$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{-x+o\big(x\big)}{x} = -1$$

(b) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}.$$

Osserviamo che la serie è a termini di segno positivo per ogni $n\geq 2$. Possiamo quindi applicare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left[1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \frac{1}{e}$$

poiché dal criterio della radice $x=\frac{1}{n}$ e dal punto (a), vale

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n} = \lim_{x\to0^+}[1-\tan(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}<1,$$

e quindi la serie è convergente.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la famiglia di funzioni

$$f_\alpha(x)=(x+2)\arctan(x^\alpha)$$

(a) Si calcoli

$$\int f_1(x)\,dx$$

Integrando per parti si ha

$$\int f_1(x)\,dx = \int\big[(x+2)\arctan x\big]dx = \frac{(x+2)^2}{2}\arctan x - \int\left[\frac{(x+2)^2}{2(1+x^2)}\right]dx + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Dato che

$$\frac{(x+2)^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2+1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{4x}{2(x^2+1)}$$

si ha

$$\int f_1(x)\,dx = \frac{(x+2)^2-3}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x - \log(2(x^2+1)) + c \qquad c\in\mathbb{R}$$

(b) Determinare per quali valori di $\alpha\in\mathbb{R}$, l'integrale

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

è convergente.

La funzione non presenta problemi di integrazione nell'estremo $x=1$, dato che è continua per ogni $x\geq 1$. Quindi calcoliamo

$$\lim_{k\to+\infty}\int_1^k f_\alpha(x)\,dx = \lim_{k\to+\infty}\int_1^k \big((x+2)\arctan(x^\alpha)\big)\,dx$$

Se $\alpha\geq 0$, si ha $f_\alpha\sim(x+2)$ per $x\to+\infty$, e quindi dal criterio del confronto asintotico l'integrale non è convergente

Se invece $\alpha<0$, dallo sviluppo $\arctan y = y+o(y)$ si ha $f_\alpha\sim\frac{1}{x^{-1-\alpha}}$, e quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $-1-\alpha>1$, i.e. $\alpha<-2$

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\tan(x) = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^6),$$
$$\arctan(x) = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2}) \qquad \forall n\geq 0$$