
d spostamento elettrico
b campo induzione magnetica



Densità volumetrica di carica $\rho_c(p,t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \left[\frac{C}{m^3} \right]$

Densità di corrente elettrica $\bar{j}(p,t) = \rho_c(p,t) \bar{V}_p(p,t) \left[\frac{A}{m^2} \right]$

↳ velocità migrazione cariche

$$i(t) = \int_S \bar{j}(p,t) \hat{n} ds$$

Eq di continuità $i(t)_{uscente} = \oint_S \bar{j} \hat{n} ds$ $i(t)_{uscente} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_v dV$

$\nabla \cdot \bar{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$ $\xrightarrow{\text{densità volumetrica di carica}}$ $\downarrow \text{T. Gauss}$ Q_{int}

$= \int_V \nabla \cdot \bar{j} dV \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \bar{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_v dV$

Campo spostamento elettrico $\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} \left[\frac{C}{m^2} \right]$

$$\oint_S \bar{D} \hat{n} ds = \int_V \rho_c dV = Q_{tot}$$

legge di Gauss

$$\oint_S \bar{D} \hat{n} ds = \int_V \rho_c dV$$

$$\downarrow \text{T di Gauss} \Rightarrow \int_V \nabla \cdot \bar{D} dV = \int_V \rho_c dV$$

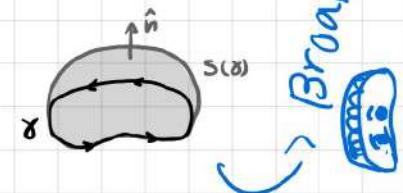
$$= \int_V \nabla \cdot \bar{D} dV$$

legge di Faraday

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\oint_S \bar{E} \cdot \hat{\gamma} ds = -\frac{d}{dt} \int_{S(\delta)} \bar{B} \hat{n} ds$$

F.e.m. flusso magnetico



legge di Ampère $\oint_S \bar{H} \hat{\gamma} ds = \int_{S(\delta)} \bar{j} \hat{n} ds = \sum_i I_i$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{j}$$

$$\downarrow \text{T. di Stokes} \Rightarrow \int_{S(\delta)} \nabla \times \bar{H} \hat{n} ds = \int_{S(\delta)} \bar{j} \hat{n} ds$$

Solo regime stazionario

$$= \int_{S(\delta)} \nabla \times \bar{H} \hat{n} ds$$

legge di Ampère - Maxwell

$$\nabla \cdot \bar{j} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \xrightarrow{\text{legge di Gauss}} = -\frac{\partial \nabla \cdot \bar{D}}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\int_{S(\delta)} \nabla \times \bar{H} \hat{n} ds = \int_{S(\delta)} \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) \hat{n} ds$$

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \bar{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = 0$$

densità di corrente di spostamento

$$\left[\frac{A}{m^2} \right]$$

EQ MAXWELL

Eq di Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{e} = - \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{h} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \bar{j}_I \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Faraday} \\ \text{Ampère - Maxwell} \end{array}$$

densità corrente } tiene conto delle elettrica impressa sorgenti

Eq alle divergenze

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \bar{d} = \rho_c \quad \text{Gauss} \\ \nabla \cdot \bar{b} = 0 \end{array} \right.$$

Relazioni costitutive mezzi materiali

- Vuoto + no sorgenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{b} = \mu_0 \bar{h} \\ \bar{d} = \epsilon_0 \bar{e} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{e} = - \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} = - \mu_0 \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \\ (\nabla \times \bar{h} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \bar{j}_I) = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{vuoto} \\ \text{no sorgenti} \end{array}$$

- mezzo materiale + no sorgenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d} = \bar{d}(\bar{e}) \\ \bar{b} = \bar{b}(\bar{h}) \\ \bar{j} = \bar{j}(\bar{e}) \end{array} \right.$$

Simmetria mezzo

- Omogeneità tempo / spazio
- Isotropia

relazione causa - effetto

- linearità
- dispersività tempo / spazio

se vale linearità

$$\bar{d}(\bar{r}, t) = \int \bar{G}(\bar{r}, t; \bar{r}', t') \cdot \bar{e}(\bar{r}', t') d\bar{r}' dt'$$

\bar{G} : matrice di Green (3x3), rende conto delle possibili anisotropie

> caso particolare \rightarrow isotropo, omogeneo, non dispersivo

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d}(\bar{r}, t) = \epsilon \bar{e}(\bar{r}, t) \\ \bar{b}(\bar{r}, t) = \mu \bar{h}(\bar{r}, t) \\ \bar{j}(\bar{r}, t) = \sigma \bar{e}(\bar{r}, t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \epsilon \text{ permittività dielettrica } [\frac{F}{m}] \quad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \\ \mu \text{ permeabilità magnetica } [\frac{H}{m}] \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \\ \sigma \text{ conducibilità elettrica } [\frac{S}{m}] \end{array}$$

> caso pratico \rightarrow isotropo, omogeneo tempo, lineare, non dispersivo spz

$$\bar{d}(\bar{r}, t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(\bar{r}, t-t') \bar{e}(\bar{r}, t') dt'$$

Vettori complessi

- notazione di Steinmetz

$$\bar{e}(\bar{\Sigma}, t) = \sum_{i=1}^3 E_i(\bar{\Sigma}) \cos(wt + \underbrace{\varphi_i(\bar{\Sigma})}_{\text{modulo componente } i}) \hat{x}_i \quad w = 2\pi f$$

$$\Rightarrow \bar{E}(\bar{\Sigma}) = \sum_{i=1}^3 E_i(\bar{\Sigma}) e^{j\varphi_i(\bar{\Sigma})} \hat{x}_i \quad \bar{e}(\bar{\Sigma}, t) = \operatorname{Re} \{ \bar{E}(\bar{\Sigma}) e^{jwt} \}$$

- proprietà

$\bar{A} \parallel \bar{B}$ se $\bar{A} = \lambda \bar{B}$: stesso stato di polarizzazione
 uguale rapporto tra semiasse

$\bar{A} \parallel \bar{B}$ and ($\lambda \in \mathbb{R}$ or \bar{A}, \bar{B} polarizzati rettilineamente) $\Rightarrow \bar{a} \parallel b$

$\bar{A} \perp \bar{B}$ se $\langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* = 0$: Se polar elittico \Rightarrow rotazione opposta
 se polar rettilinee \Rightarrow polar rettili ortogonali
 rapporto tra semiasse invertito

EQ DI MAXWELL IN REGIME ARMONICO

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{e} = - \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{h} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \bar{j}_I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{d} = \rho_c \\ \nabla \cdot \bar{b} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = - jw \bar{B} \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{j} + jw \bar{D} + \bar{j}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{D} = \rho_c \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \end{cases}$$

- relazioni costitutive

caso pratico \rightarrow isotropo, omogeneo tempo, lineare, non dispersivo spz

$$\begin{cases} \bar{D}(\bar{\epsilon}) = \bar{\epsilon}(\bar{\Sigma}, \omega) \bar{E}(\bar{\Sigma}) \\ \bar{B}(\bar{\mu}) = \bar{\mu}(\bar{\Sigma}, \omega) \bar{H}(\bar{\Sigma}) \\ \bar{j}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}(\bar{\Sigma}, \omega) \bar{E}(\bar{\Sigma}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = - jw \mu \bar{H} \\ \nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + jw \epsilon \bar{E} + \bar{j}_i \\ = jw \epsilon_c \bar{E} + \bar{j}_i \quad [\epsilon_c = \epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}] \end{cases}$$

↳ permittività elettrica complessa

Angolo di perdita $\delta := \arctan \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad \delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- buon conduttore

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$$

densità corrente \gg densità corrente di elettrica

- buon dielettrico

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$$

$$j \gg \frac{\partial \bar{d}}{\partial t}$$

Condizioni di continuità

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_2 \hat{n} = \bar{d}_1 \hat{n} + \rho_s \\ \bar{b}_2 \hat{n} = \bar{b}_1 \hat{n} \end{array} \right\} \text{ componente normale di } \bar{d} \text{ e } \bar{b} \text{ si conserva}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \times \bar{h}_2 = \hat{n} \times \bar{h}_1 + \bar{j}_s \\ \hat{n} \times \bar{e}_2 = \hat{n} \times \bar{e}_1 \end{array} \right\} \text{ componente tangente di } \bar{e} \text{ e } \bar{h} \text{ si conserva}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{d}_2 - \bar{d}_1) \hat{n} = \rho_s \\ \hat{n} \times (\bar{h}_2 - \bar{h}_1) = \bar{j}_s \end{array} \right.$$

Condizioni di continuità con CEP ($\sigma = \infty$)



$$\bar{e}_{CEP} = 0 \quad (\text{altrimenti } \sigma_{CEP} = \infty)$$

$$\hat{n} \times \bar{e}_{CEP} = \hat{n} \times \bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}_2 \text{ (e } \bar{d}_2) \text{ è normale alla sup o nullo}$$

$$\bar{h}_{CEP} = 0 \quad (\text{perché non c'è campo elettrico}) \Rightarrow \bar{b}_{CEP} = 0$$

$$\bar{b}_{CEP} \cdot \hat{n} = b_2 \cdot \hat{n} \Rightarrow \bar{b}_2 \text{ (e } \bar{h}_2) \text{ è tangente alla sup o nullo}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{d}_2 = \bar{d}_2 \cdot \hat{n} = \rho_s = \text{carica superficie} \\ \hat{n} \times \bar{h}_2 = \bar{j}_s = \text{corrente superficie} \end{array} \right.$$

Risoluzione eq di Maxwell

in mezzo: isotropo, omogeneo, lineare, non dispersivo $\Rightarrow \epsilon, \mu, \sigma$ cost
 sorgenti fuori dalla regione di interesse \hookrightarrow componenti di \bar{e} disaccoppiate

ipotizziamo assenza di conduzione elettrica $\sigma = 0$

$\nabla \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \mu \nabla \cdot \bar{h} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{h} = 0$ campo magnetico solenoidele

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{e} = -\mu \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \nabla \times \bar{h} = \nabla \times \sigma \bar{e} + \epsilon \frac{\partial \nabla \times \bar{e}}{\partial t} \\ \nabla \times \nabla \times \bar{h} = -\nabla^2 \bar{h} + \nabla(\nabla \cdot \bar{h}) \end{array} \right. \Rightarrow -\nabla^2 \bar{h} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \text{Eq di Alambert} \quad \nabla^2 \bar{h} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} = 0} \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = c$$

onda
regressiva

$$\text{considero } \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \rightarrow h(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt)$$

onda
progressiva

$$\text{se } \sigma \neq 0 \rightarrow \nabla^2 \bar{h} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} - \underbrace{\mu \sigma \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}}_{\text{"forza d'attrito" che smorza f e g}} = 0$$

- per campo elettrico

$$\nabla \cdot \bar{J} = \rho_c \rightarrow \varepsilon \nabla \cdot \bar{E} = \rho_c \quad \text{se } \rho_c = 0 \rightarrow \nabla \cdot \bar{E} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \bar{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{h} = \frac{\sigma \bar{E}}{=0} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{array} \right. \rightarrow -\nabla^2 \bar{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \text{Eq di Alambert} \quad \nabla^2 \bar{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0$$

Risoluzione eq di Maxwell Regime armonico

in mezzo: isotropo, omogeneo, lineare, non dispersivo $\Rightarrow \varepsilon_c, \mu$ cost

sorgenti fuori dalla regione di interesse

$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \rightarrow \mu \nabla \cdot \bar{H} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \bar{H} = 0$ campo magnetico solenoidale

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \\ \nabla \times \nabla \times \bar{H} = j\omega \varepsilon_c \nabla \times \bar{E} \end{array} \right. \Rightarrow -\nabla^2 \bar{H} = -\underbrace{(j\omega)^2 \mu \varepsilon_c \bar{H}}_{= -\omega^2 \mu \varepsilon_c = K_E^2}$$

$$\Rightarrow \text{Eq di Helmholtz} \quad \nabla^2 \bar{H} - K_E^2 \bar{H} = 0$$

(eq delle onde)

Scompongo nelle 3 componenti e considero $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - k_\varepsilon^2 H = 0$
(posso perché non dispersivo)

$$\Rightarrow H(z) = H_{0p} e^{-k_\varepsilon z} + H_{0r} e^{k_\varepsilon z} \quad k_\varepsilon = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \alpha + j\beta$$

cost di fase
cost di attenuazione

nel vuoto $\alpha=0 \Rightarrow H(z) = \underbrace{H_{0p} e^{-j\beta z}}_{\text{funzioni periodiche di periodo } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}} + H_{0r} e^{j\beta z}$

nel dominio del tempo

$$h(z,t) = \operatorname{Re} \{ H(z) e^{j\omega t} \} = H_{0p} \cos(\omega t - \beta z) + H_{0r} \cos(\omega t + \beta z)$$

onda
progressiva

onda
regressiva

TEOREMI FONDAMENTALI ELETROMAGNETISMO

- t. Poynting (bilancio potenze)
- t. reciprocità
- t. equivalenza (sostituzione sorgenti con modelli semplificati)
- t. immagini (conduttori in presenza di sorgenti si comportano da sorgenti speculari)
- t. unicità (se c'è una soluzione, è unica)

Poynting

Teorema di Poynting

in mezzo: lineare, isotropo, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio

in presenza di sorgenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{h} \nabla \times \bar{e} = - \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \bar{h} \\ \bar{e} \nabla \times \bar{h} = \sigma |\bar{e}|^2 + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \bar{e} - \bar{j}_i \bar{e} \\ \bar{d} \cdot \nabla \times \bar{e} - \bar{e} \nabla \times \bar{d} = \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{d}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \bar{h} \nabla \times \bar{e} - \bar{e} \nabla \times \bar{h} = \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{h}) = - \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \bar{h} - \sigma |\bar{e}|^2 + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \bar{e} - \bar{j}_i \bar{e}$$

$$\Rightarrow -\bar{e} \bar{j}_i = \bar{h} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{e} \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \sigma |\bar{e}|^2 + \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{h})$$

$$-\int_V \bar{e} \cdot \bar{j}_i dV = \int_V \left(\bar{h} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{e} \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \right) dV + \int_V \sigma |\bar{e}|^2 dV + \int_V \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{h}) dV$$

$-\int_V \bar{e} \cdot \bar{j}_i dV$: Potenza necessaria a sostenere le sorgenti di campo em



il segno meno tiene conto del fatto che per mantenere la corrente impressa deve essere svolto un lavoro per unità di tempo (potenza) uguale e contrario a quello della forza di lorentz agente sulle cariche (es: batteria o dinamo)

$$\int_V \left(\bar{h} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{e} \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu |\bar{h}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\bar{e}|^2 \right) dV \quad \bar{d} = \epsilon \bar{e}, \quad \bar{b} = \mu \bar{h}$$

variazione per unità di tempo dell'energia magnetica ed elettrica accumulata all'interno di V [se non dispersivo nel tempo]

(altrimenti rende conto dell'energia persa per via dell'isteresi elettrica/magnetica)

$\int_V \sigma |\bar{e}|^2 dV$: potenza dissipata per effetto Joule dovuta alla presenza di materiali conduttori con perdite

$\int_V \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{h}) dV$ applico T di Gauss $\oint_S (\bar{e} \times \bar{h}) \cdot \hat{n} dS = \oint_S \bar{p} \cdot \hat{n} dS$
flusso di densità di potenza (elettromagnetica) che fuoriesce dalla sup S
 che racchiude il volume Vettore di Pointing $\bar{p} = \bar{e} \times \bar{h}$ [$\frac{W}{m^2}$]
 ↳ densità di potenza em

Teorema di Poynting regime armonico

in mezzo: lineare, isotropo, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio

in presenza di sorgenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{H}^* \nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}^* \gamma \\ -\bar{E} \nabla \times \bar{H}^* = j\omega \epsilon \bar{E}^* \bar{E} - \bar{E} \bar{j}_i^* - \sigma |\bar{E}|^2 \\ \bar{A} \nabla \times \bar{E} - \bar{E} \nabla \times \bar{A} = \nabla (\bar{E} \times \bar{A}) \end{array} \right.$$

Made by Davide Bosco
 @davidebosco
 Appunti non vendibili!

$$\Rightarrow \bar{H}^* \nabla \times \bar{E} - \bar{E} \nabla \times \bar{H}^* = \nabla (\bar{E} \times \bar{H}^*) = -j\omega \mu |\bar{H}|^2 + j\omega \epsilon |\bar{E}|^2 - \sigma |\bar{E}|^2 - \bar{E} \bar{j}_i^*$$

passo a forma integrale, moltiplico per $\frac{1}{2}$, e applico T.Gauss a $\int_V \nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}^*) dV$

$$-\frac{1}{2} \int_V \bar{E} \cdot \bar{J}_i^* dV = j2\omega \int_V \left(\frac{1}{4} \mu |\bar{H}|^2 - \frac{1}{4} \epsilon |\bar{E}|^2 \right) dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma |\bar{E}|^2 dV + \oint_S \bar{P} \hat{n} ds$$

Vettore di Poynting: $\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* \left[\frac{VA}{m^2} \right]$ (valore efficace di \bar{E}) $= \frac{1}{2} |\bar{E}|^2$

\bar{P} non è la notaz di Steinmetz di \bar{P} (perchè dato da un op non lineare)

• Significato

il teorema è uguaglianza trz numeri complessi \rightarrow separo parti Re e Im

Re[]: potenza attiva erogata dalle sorgenti = potenza attiva dissipata per effetto Joule
+ flusso di densità di potenza attiva uscente

Im[]: potenza reattiva erogata dalle sorgenti = potenza reattiva immagazzinata
+ flusso densità di potenza reattiva uscente

- potenza attiva erogata dalle sorgenti [W] > 0
- potenza attiva dissipata per effetto Joule [W] > 0
- flusso di potenza attiva uscente dal volume [W] $\begin{cases} > 0 & \text{se flusso uscente} \\ < 0 & \text{se flusso entrante} \end{cases}$
- potenza reattiva erogata dalle sorgenti [VAR] ≥ 0
- potenza reattiva immagazzinata nel volume [VAR] ≥ 0
- flusso di potenza reattiva uscente dal volume [VAR] ≥ 0

Risonanza di volume $j2\omega \int_V \left(\frac{1}{4} \mu |\bar{H}|^2 - \frac{1}{4} \epsilon |\bar{E}|^2 \right) dV = 0$

\hookrightarrow possibile solo se $\bar{J}_i = 0$ e $\sigma = 0$
no sorgenti no perdite ohmiche

Vettore di Poynting

È la densità di potenza elettromagnetica

tempo: $\bar{P}(t) = \bar{E}(t) \times \bar{H}(t)$

frequenza: $\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^*$

$\bar{P}(t) \neq \text{Re}[\bar{P} e^{j\omega t}]$ Invece $\bar{P}(t) = \underbrace{\text{Re}[\bar{P}]}_{\downarrow} + \text{Re}\left[\frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H} e^{j\omega t}\right]$

$$\text{Re}[\bar{P}] = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{P}(t) dt \quad \text{valore medio di } \bar{P} \text{ in un periodo}$$

ONDE PIANE

H_p di lavoro

- tutto lo spazio
 - no sorgenti
 - mezzo lineare, isotropo, omogeneo e non dispersivo
- $\Rightarrow \epsilon, \mu, \sigma$ cost

H_p non realistiche ma soluzione \approx campo irradiato da antenna in mezzo finito con stesse proprietà

dato che non dispersivo, \vec{E} ha componenti non accoppiate

\rightarrow considero soluzione per onda polarizzata lungo \hat{x} $\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\hat{x}$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - K_E^2 \vec{E} = 0 & (\text{eq Helmholtz}) \\ E(\vec{r}) = E_0 (f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_0 \left(\underbrace{\frac{d^2 f_1}{dx^2} f_2 f_3 + f_1 \frac{d^2 f_2}{dy^2} f_3 + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{\nabla^2 \vec{E}} \right) = K_E^2 E_0 f_1 f_2 f_3 \underbrace{K_E^2 \vec{E}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}}_{S_1^2} + \underbrace{\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{S_2^2} + \underbrace{\frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{S_3^2} = K_E^2 = \text{cost} \quad \Rightarrow S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = K_E^2$$

\hookrightarrow in generale $K_E^2 \in \mathbb{C}$

$$\frac{d^2 f_i}{dx_i^2} = S_i^2 f_i \Rightarrow f_i(x_i) = C_i e^{-S_i x_i} + D_i e^{+S_i x_i}$$

\hookrightarrow trascuriamo

$$\Rightarrow E(x, y, z) = E_0 f_1 f_2 f_3 = E_0 e^{-(S_1 x + S_2 y + S_3 z)} = E_0 e^{-(\vec{S} \cdot \vec{r})}$$

Vettore di propagazione: $\vec{S} = S_1 \hat{x} + S_2 \hat{y} + S_3 \hat{z}$

$$\vec{S} \cdot \vec{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = K_E^2 \Rightarrow \vec{S} = \vec{z} + j \vec{k}$$

\downarrow fase
attenuazione

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{-(\vec{S} \cdot \vec{r})} = E_0 e^{-\bar{a} \vec{r}} e^{-j \bar{k} \vec{r}} \hat{x}$$

• Soluzione per campo magnetico

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \\ \bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 e^{-(\bar{s} \cdot \bar{r})} \\ \nabla \times (\bar{w} f) = f \nabla \times \bar{w} + \nabla f \times \bar{w} \end{array} \right. \quad 1^{\circ} \text{ eq Maxwell}$$

$$\Rightarrow \bar{H} = -\frac{\nabla \times \bar{E}}{j\omega \mu} = -\frac{\nabla \times \bar{E}_0 e^{-(\bar{s} \cdot \bar{r})}}{j\omega \mu} = \frac{\bar{s} \times \bar{E}}{j\omega \mu} \Rightarrow \bar{H} = \frac{\bar{s} \times \bar{E}_0 e^{-(\bar{s} \cdot \bar{r})}}{j\omega \mu}$$

TIPOLOGIE DI ONDE PIANE

$$\bar{s} \cdot \bar{s} = |\bar{a}|^2 - |\bar{k}|^2 + j2\bar{a} \cdot \bar{k} = k_x^2 = -\omega^2 \mu (\epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}) \quad \text{ugualanza in C}$$

separo $\begin{cases} \text{Re: } |\bar{a}|^2 - |\bar{k}|^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \\ \text{Im: } 2\bar{a} \cdot \bar{k} = \omega \mu \sigma \end{cases}$

$|\bar{a}|^2 - |\bar{k}|^2 < 0$
 $\Rightarrow |\bar{k}|^2 > |\bar{a}|^2 > 0$
 $\Rightarrow |\bar{k}| > 0$

esiste sempre un moto ondoso

• onde piane uniformi ($\sigma=0, \bar{a}=0$)

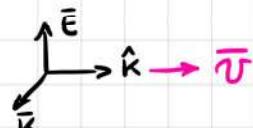
mezzo senza perdite $\sigma=0 \Rightarrow \bar{s} \cdot \bar{k} = 0$

se $\bar{a}=0 \Rightarrow |\bar{a}|^2 - |\bar{k}|^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow |\bar{k}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{\bar{s} \times \bar{E}_0 e^{-(\bar{s} \cdot \bar{r})}}{j\omega \mu} = \frac{\bar{k} \times \bar{E}_0 e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}}}{\omega \mu} = \underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}} \hat{k} \times \bar{E}_0 e^{-j\bar{k} \cdot \bar{r}} \Rightarrow \bar{H} \text{ e } \bar{E} \text{ in fase}$$

vettore reale

$\bar{E}, \bar{H}, \hat{k}$ è terna tri rettangola destrorsa



vettore di Poynting puramente reale orientato verso \hat{k}

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\bar{E}|^2 \hat{k} \Rightarrow \text{solo potenza attiva}$$

• onde piane evanescenti ($\sigma = 0$, $\bar{\sigma} \neq 0$)

mezzo senza perdite $\sigma = 0 \Rightarrow \bar{\sigma} \cdot \bar{k} = 0$

Se $\bar{\sigma} \neq 0 \Rightarrow \bar{\sigma} \perp \bar{k}$

> proprietà

- piani equifase \perp piani equiampiezza
- \bar{E} e \bar{H} non in fase
- se \bar{E} polarizzato linearmente $\Rightarrow \bar{H}$ polarizzato ellitticamente
- piani polarizzazione \bar{E} e \bar{H} non coincidono necessariamente
- vettore di pointing generalmente complesso
($\text{Re}[\bar{P}] \parallel \hat{k}$, $\text{Im}[\bar{P}] \parallel \hat{\alpha}$)

• onde piane dissociate ($\sigma \neq 0$)

mezzo con perdite $\sigma \neq 0 \Rightarrow \underline{\bar{\sigma} \cdot \bar{k} \neq 0} \Rightarrow \bar{\sigma} \neq 0$

$\hookrightarrow \bar{\sigma}$ non ortogonale a \bar{k}

> proprietà

- piani equifase non \perp piani equiampiezza
- \bar{E} e \bar{H} non in fase
- se \bar{E} polarizzato linearmente $\Rightarrow \bar{H}$ polarizzato ellitticamente
- piani polarizzazione \bar{E} e \bar{H} non coincidono necessariamente
- vettore di pointing generalmente complesso
($\text{Re}[\bar{P}] \parallel \hat{k}$, $\text{Im}[\bar{P}] \parallel \hat{\alpha}$)

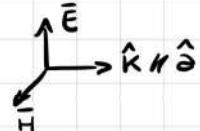
Onde piane dissociate uniformi ($\sigma \neq 0$, $\vec{z} \parallel \vec{k}$)

Onda piana uniforme in mezzo con perdite

> proprietà

- piani equifase // piani equiampiezza
- se \vec{E} polarizzato linearmente $\Rightarrow \vec{H}$ polarizzato linearmente

$\vec{E}, \vec{H}, \hat{n}$ è terza tri rettangola destrorsa



- vettore di Poynting complesso $\text{Re}[\vec{P}] \parallel \text{Im}[\vec{P}] \parallel \hat{k} \parallel \hat{s}$

Simile a propagazione campo em in tessuto biologico quando si comporta da buon conduttore

IMPEDENZA D'ONDA

$$\text{nel vuoto} \rightarrow N_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

$N_{\text{opu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\Omega]$ \rightarrow puramente reale, dipende solo da prop. del mezzo

$$\text{per opu} \Rightarrow \vec{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\vec{E}|^2 \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{1}{N_{\text{opu}}} |\vec{E}|^2 \hat{k} \quad \vec{H} = \frac{1}{N_{\text{opu}}} \hat{k} \times \vec{E}$$

$N(\hat{u})$ rende conto della natura di \vec{P} nella direzione \hat{u}

(es: $N_{\text{opu}}(\hat{a}) \in \text{Im}$, $N_{\text{opu}}(\hat{u}) \in \text{Re}$, $N_{\text{opu}}(\hat{a}) \in \text{Im}$, $N_{\text{opu}}(\hat{u}) \in \text{Im}$)

VELOCITÀ DI FASE ONDE PIANE

$$\vec{E}(\vec{z}, t) = \text{Re}[E_0 e^{-\vec{s} \cdot \vec{z}} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{z}} e^{j\omega t}] \quad \text{è onda piana}$$

\hookrightarrow lungo $\hat{x} \Rightarrow \vec{E}(\vec{z}, t) = |E_0| e^{-\vec{s} \cdot \vec{z}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{z} - \omega t + \phi)$ moto ondoso lungo \hat{x} che invade tutto lo spazio

prendiamo pti con arg del cos cost $\vec{k} \cdot d\vec{z} - \omega dt = 0 \quad \vec{k} = |\vec{k}| \hat{k}, d\vec{z} = |d\vec{z}| \hat{u}$

$$\Rightarrow |\vec{k}| |d\vec{z}| \cos \theta = \omega dt \quad \xrightarrow{\vec{z} \parallel \hat{u}} \quad V_f(\hat{u}) = \frac{|d\vec{z}|}{dt} = \frac{\omega}{|\vec{k}| \cos(\theta)}$$

\hookrightarrow Velocità di fase

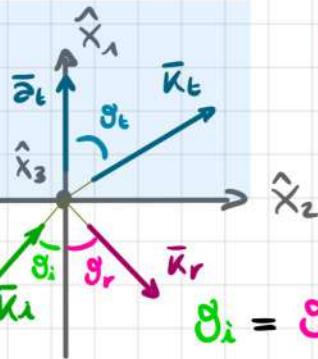
> velocità delle varie onde lungo \hat{k} ($\theta=0$)

- opu $V_f(\hat{k}) = \frac{\omega}{|k_{opu}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
 - ope $|k_{ope}| > |k_{opu}| \rightarrow V_{f ope}(\hat{k}) < V_{f opu}(\hat{k})$
 - opd $|k_{opd}| > |k_{opu}| \rightarrow V_{f opd}(\hat{k}) < V_{f opu}(\hat{k})$
- } onde lente

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE

②

DI onde piane



$$\bar{E}_i(\bar{r}) = E_{i,0} e^{-j\bar{k}_i \cdot \bar{r}}$$

incidente (opu)

$$\bar{E}_t(\bar{r}) = E_{t,0} e^{-\bar{s}_t \cdot \bar{r}}$$

trasmessa (opd)

$$g_i = g_r \quad \bar{E}_r(\bar{r}) = E_{r,0} e^{-\bar{s}_r \cdot \bar{r}}$$

riflessa (opu)

per condiz di continuità $j\bar{k}_i \cdot \bar{r} = \bar{s}_r \cdot \bar{r} = \bar{s}_t \cdot \bar{r} \quad \forall \bar{r} \in \{\hat{x}_2, \hat{x}_3\}$

\rightarrow vettori di fase (\bar{k}) $\perp \hat{x}_3$

• onda trasmessa ($\bar{E}_t \parallel \hat{x}_1$)

se $\theta_i = 0 \Rightarrow g_t = 0 \Rightarrow \bar{E}_t \parallel \bar{k}_t$ l'onda è dissociata uniforme

spessore di penetrazione $S = \frac{1}{|\bar{E}_t|}$

$$N_t = j \frac{\omega \mu_2}{|\bar{E}_t| + j|\bar{k}_t|} \quad (\text{in direzione normale alla sup di sep})$$

Se $\sigma_2 \gg \omega \varepsilon_2 \Rightarrow$ mezzo 2 è buon conduttore $\Rightarrow g_t \approx 0 \quad \forall \theta_i$

Onda quasi sempre dissociata uniforme $|\bar{E}_t|^2 \approx |\bar{k}_t|^2 \approx \frac{1}{2} \omega \mu_2 \sigma_2$

spessore di penetrazione $S = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \sigma_2}}$

$$N_t = \frac{1}{2} \omega \mu_2 S (1+j) \quad \text{non dipende da } \theta_i$$

\hookrightarrow impedenza di parete

Se $\sigma_2 = 0$

caso A: $\bar{E}_t = 0 \Rightarrow$ onda trasmessa è piana uniforme

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \quad (\text{legge di Snell})$$

se $n_2 < n_1$ ha soluzione solo se $\theta_i < \theta_{\text{critico}} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$



Caso B: $n_2 > n_1$ e $\delta_i > \delta_{\text{critico}} \Rightarrow \vec{\epsilon}_t \perp \vec{k}_t \Rightarrow$ onda trasmessa è evanescente
 $(\delta_t = \frac{\pi}{2})$

$\vec{\epsilon}_t \parallel \hat{x}_1$, $\vec{k}_t \parallel \hat{x}_2 \Rightarrow$ flusso potenza attiva solo lungo \hat{x}_2
 riflessione interna totale

COEFF DI FRESNEL (incidenza normale)

se $\delta_i = 0 \Rightarrow \delta_t = 0$ e tutte le onde sono opere^① dirette lungo \hat{x}_1

\Rightarrow campi \bar{E} e \bar{H} tangenti al piano di separazione^②

$$\boxed{②} \left\{ \begin{array}{l} E_{i,0} + E_{r,0} = E_{t,0} \\ H_{i,0} + H_{r,0} = H_{t,0} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_{r,0} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{i,0} \\ E_{t,0} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} E_{i,0} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{E_{r,0}}{E_{i,0}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \\ \tau = \frac{E_{t,0}}{E_{i,0}} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1} \end{array} \right.$$

coeff. riflessione

coeff. trasmissione

• Casi particolari

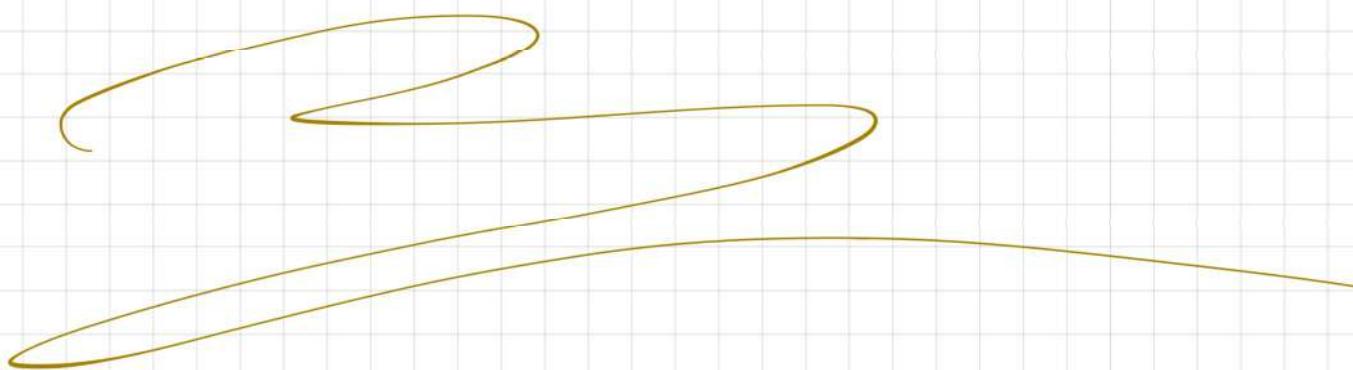
- buon conduttore $\sigma_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} n_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow -1, \tau \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0 \text{ basso spessore di penetrazione} \end{array} \right.$

- onda trasmessa evanescente $\sigma_2 = 0 + n_2 > n_1$ e $\delta_i > \delta_{\text{critico}}$

$\Rightarrow n_2$ puramente immaginaria $\Rightarrow |\rho| = 1$

riflessione completa di potenza attiva

POLARIZZAZIONE ONDA MONOCROMATICA



FONDAMENTI DI ANTENNE

ANTENNE FILIFORMI

filo metallico interrotto al centro per iniettare o captare segnale

(funziona con legge di Ampère-Maxwell $\nabla \cdot \vec{J} = -\nabla \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)

• dipolo elementare

lunghezza (L) \ll lunghezza d'onda (λ)

fasore di corrente I sui bracci = cost

al centro di sistema di riferimento sferico con:

↳ volume infinito con mezzo: lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo

↳ densità di corrente impressa $\neq 0$ → sorgenti $\Rightarrow \nabla E \neq 0 \Rightarrow$ non vale Helmholtz

Eq di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -j\omega \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} + \vec{J}_i \end{cases}$$

teorema vettori:

se esiste campo (\vec{B}) sempre solenoidale

$$\Rightarrow \exists \vec{A} \text{ tc } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \stackrel{\textcircled{1}}{=}$$

↳ potenziale vettore magnetico

Eq di Maxwell con relazioni constitutive

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon_c \vec{E} + \vec{J}_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_c} (\nabla \times \vec{H} - \vec{J}_i) \end{cases}$$

Si dimostra che \vec{A} soddisfa eq Helmholtz $\nabla^2 \vec{A} - k_c^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}_i$

\Rightarrow risolvo con **tecnica di Green** (assume sorgente come puntiforme)

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{IL}{r} e^{-jpr} \hat{z} \quad \text{se supponiamo } \sigma=0 \Rightarrow \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

↳ $= |k|$ opu

risolvendo vediamo che il campo EM ha simmetria assiale

e dipende dall'angolo θ



per $r \gg r$ regione di campo lontano vediamo un'onda sferica espansiva ma localmente è un opu

ai fini della radiazione ci interessa solo la comp. radiale del vett. di Poynting

\Rightarrow nella regione di campo lontano il flusso di \vec{P}_r

attraverso una sfera è reale e cost

ANTENNE IN TRASMISSIONE

caratteristiche comuni ad ogni antenna in regione di campo lontano

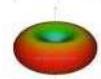
- onde è moto sferico espansivo
- localmente fronte d'onda è onde piane
- vettore di Poynting quasi interamente reale
- potenza irradiata complessiva è conservativa
- campo decade con $\frac{1}{r}$ e Poynting con $\frac{1}{r^2}$

Quello che varia è:

- distribuzione spaziale di \vec{P}
- capacità di focalizzare la potenza di emissione
- tipo di polarizzazione

• parametri in trasmissione

> **solido di radiazione**: andamento del modulo del vettore di Poynting



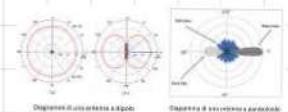
Solido di una antenna a dipolo



Solido di una antenna isotropa

su una sfera centrale nell'origine con raggio tale da essere nella regione di campo lontano

> **diagramma di radiazione**: intersezione tra solido di radiazione e un piano passante per l'origine



> **direttività**: valore massimo della superficie di radiazione

$$D = S_{\text{rad max}} = \frac{P_0}{P_{\text{irradiata}}}$$

P_0 : potenza antenna isotropa tale da produrre in tutte le direzioni un'intensità pari a quella dell'antenna in esame nella sola direzione di max

> **guadagno**: tiene conto delle perdite ohmiche (parte della potenza di alimentazione viene dissipata)

$$G = KD \quad K \in [0, 1] \quad \Rightarrow \quad G \leq D \quad G = \frac{P_0}{P_{\text{alimentazione}}} = \frac{P_0}{P_{\text{irradiata}} + P_{\text{diss}}}$$

↳ fattore di efficienza

ANTENNE IN RICEZIONE

Made by Davide Bosco
@davidebosco
Appunti non vendibili!

• parametri in ricezione

per reciprocità i parametri in trasmissione valgono anche in ricezione

> **area efficace**: rappresenta la capacità dell'antenna di captare la potenza incidente

$$P_{ricevuta} = \frac{E^2}{2\pi} A_e, \quad A_e = \epsilon_{ap} A_p \quad \epsilon_{ap} \in (0.5, 1)$$

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D \quad A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad \text{per mantenere } A_e \text{ cost. all'aumentare delle frequenze, devo aumentare il guadagno}$$

FORMULA UNIVERSALE RADIOCOLLEGAMENTO

$$P_{ricezione} = G_{ricezione} \underbrace{(G_{trasmissione} P_{alimentazione})}_{\text{potenza irradiata efficace}} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2}_{\text{attenuazione di spazio libero}}$$

OSS: all'aumentare delle frequenze con, d e P_{alim} cost., la potenza ricevuta cessa \Rightarrow devo compensare con il guadagno
(uso antenne più direttive)

\hookrightarrow dovuto al calo di densità di potenza con la distanza

ELETRO FISIOLOGIA

Made by Davide Bosco
 @davidebosco
 Appunti non vendibili!

TRASPORTO PASSIVO

- diffusione libera

membrana semipermeabile \Rightarrow ioni attraversano per agitazione termica favorendo la direzione \geq minor concentrazione

LEGGE DI FLICK

$$\bar{j}_d(\vec{r}) = -D_p \nabla C_p(\vec{r})$$

coeff di diff specie p $\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

densità di flusso $\frac{\text{mol}}{\text{s m}^2}$ concentrazione specie p $\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$

$$1\text{mol} = \text{Na} \approx 6.022 \cdot 10^{23}$$

- diffusione ionica

la distribuzione non uniforme di cariche genera un campo elettrico che tende \geq ridistribuire le cariche (Forza di Lorentz)

LEGGE DI OHM

$$\bar{j}_e(\vec{r}) = -U_p \frac{Z_p}{|Z_p|} C_p \nabla \phi(\vec{r})$$

mobilità specie p $\frac{\text{m}^2}{\text{V s}}$

densità di flusso $\frac{\text{mol}}{\text{s m}^2}$ segno carica (Z_p : valenza) potenziale elettrico V
 $E(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r})$

- corrente ionica

$$\text{trasporto attivo + passivo} \Rightarrow \bar{j}_p = \bar{j}_d + \bar{j}_e$$

densità totale di flusso $\frac{\text{mol}}{\text{s m}^2}$

$$> \text{Eq di Einstein: } D_p = \frac{RT}{|Z_p|F} U_p \Rightarrow \bar{j}_e(\vec{r}) = -U_p \frac{Z_p}{|Z_p|} C_p \nabla \phi(\vec{r}) = -D_p \frac{Z_p F}{RT} C_p \nabla \phi(\vec{r})$$

cost Faraday $\frac{\text{C}}{\text{mol}}$

$$\Rightarrow \bar{j}_p = -D_p (\nabla C_p + \frac{Z_p F}{RT} C_p \nabla \phi)$$

EQ DI NERNST-PLANK $\bar{J}_p = F Z_p \bar{j}_p$

densità di corrente $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

POTENZIALE DI NERNST (potenziale della specie p all'equilibrio)

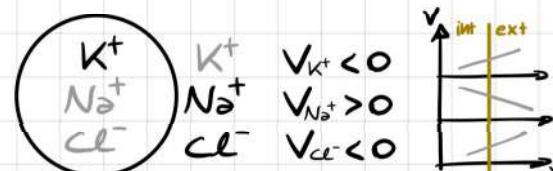
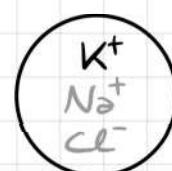
$$\text{all'equilibrio la corrente totale è nulla} \Rightarrow \bar{J}_p = 0 \Leftrightarrow \nabla C_p = -\frac{Z_p F}{RT} C_p \nabla \phi$$

consideriamo solo \hat{x} (membrana è localmente piatta)

$$\frac{dC_p}{dx} = -\frac{Z_p F}{RT} C_p \frac{d\phi}{dx} \Rightarrow -\frac{RT}{Z_p F} \frac{dC_p}{C_p} = d\phi \Rightarrow \int_{\phi_{ext}}^{\phi_{int}} d\phi = -\frac{RT}{Z_p F} \int_{C_p,ext}^{C_p,int} \frac{1}{C_p} dC_p$$

POTENZIALE DI NERNST $V_p = \phi_{int} - \phi_{ext} = -\frac{RT}{Z_p F} \ln \frac{C_p,int}{C_p,ext}$

\hookrightarrow dipende solo dalle concentrazioni e dalla valenza (no D_p o U_p)



MODELLO A CONDUTANZE PARALLELE (potenziale di membrana)

In assenza di canali ionici la membrana cellulare si comporta da condensatore piano con capacità per unità di sup $\approx 1 \frac{\text{MF}}{\text{cm}^2}$ $\Rightarrow J_s = C_m \frac{dV_m}{dt}$

per tenere conto dei canali ionici consideriamo il contributo di ogni specie ionica come una serie tra un generatore di tensione (potenziale di Nernst)

e una conduttanza (conducibilità per unità di sup della specie ionica, dovuta ai canali ionici $\left[\frac{\text{S}}{\text{m}^2}\right]$) $J_p = g_p (V_m - V_p)$

All'equilibrio $\begin{cases} \text{corrente di membrana} = 0 \\ \text{tensione di membrana} = \text{cost} \end{cases}$

$$J_m = J_{Na^+} + J_K^+ + J_{Cl^-} = 0$$

Soluzione A: $J_p = 0 \quad V_p = V_{Na^+} = V_K^+ = V_{Cl^-}$ ↗ non fisiologica

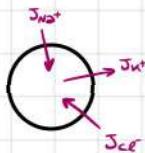
Soluzione B: $V_m = \frac{g_{Na^+} V_{Na^+} + g_K V_K^+ + g_{Cl^-} V_{Cl^-}}{g_{Na^+} + g_K + g_{Cl^-}}$ media dei pot. di Nernst pesata sulle conduttanze

- **problema:** valore conduttanze dipende dalla tensione applicata
≥ causa dei canali Na^+ e K^+ controllati in tensione

- **calamaro** $g_p \sim \frac{\text{mS}}{\text{cm}^2}$ $J_p \sim \frac{\text{mA}}{\text{cm}^2}$ $V_m \approx -68.3 \text{ mV}$

	K^+	Na^+	Cl^-
V_p	-74.7	54.2	-65.8
g_p	0.44	0.01	0.98
J_p	2.6	-1.2	-1.4

$J_{K^+} > 0$ uscente
 $J_{Na^+} < 0$ entrante
 $J_{Cl^-} < 0$ entrante



TRASPORTO ATTIVO

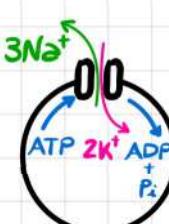
bilancia il trasporto di ioni delle correnti ioniche presenti all'equilibrio.

V_a contro al potenziale elettrochimico \Rightarrow consumo di energia

- **pompe sodio-potassio**

canali di trasporto che trasportano $3Na^+$ all'esterno e $2K^+$ all'interno

tramite idrolisi di ATP in ADP + Pi



CANALI CONTROLLATI IN TENSIONE

Made by Davide Bosco
@davidebosco
Appunti non vendibili!

conduttanza dipende dalla tensione

depolarizzazione: aumento tensione trans-membrana (corrente entrante depolarizza)

- **canali potassio (K^+)**: aperti solo in presenza di depolarizzazione
 \Rightarrow uscita K^+
- **canali sodio**:
 - ① si aprono in presenza di depolarizzazione
 \Rightarrow entrata Na^+
 - ② si inattivano spontaneamente dopo 1-2ms
 - ③ si chiudono quando avviene la ripolarizzazione
 - ④ da chiusi si riattivano dopo 2-5ms

POTENZIALE D'AZIONE

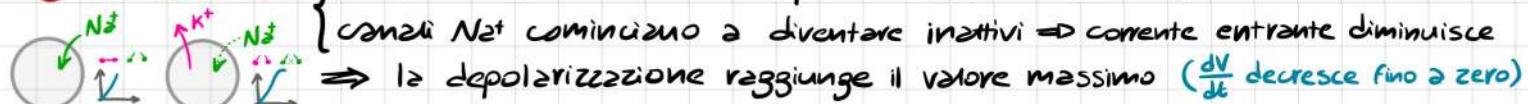
è un impulso elettrico generato da un neurone in risposta a una depolarizzazione sufficientemente elevata.

Ha 4 fasi:

- ① depolarizzazione: corrente entrante \Rightarrow depolarizzazione.



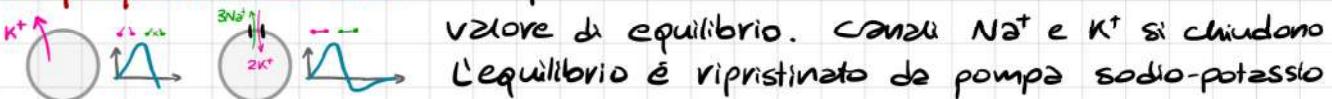
- ② overshoot: l'aumento della tensione fa aprire i canali K^+ (esce K^+) \Rightarrow corrente uscente



- ③ ripolarizzazione: canali Na^+ inattivi + canali K^+ aperti \Rightarrow forte corrente entrante



- ④ iperpolarizzazione: la ripolarizzazione fa scendere la tensione sotto il



• Caratteristiche:

- forma e durata sono indipendenti dalla forma dello stimolo
dipendono solo dal pot di membrana e alla dinamica dei canali Na^+ e K^+
- intensità e durata stimolo influenzano il ritardo del PA
- periodo refrattario controlla la frequenza massima
 - refrattività assoluta: canali Na^+ inattivi
 - refrattività relativa: iper-polarizzazione \Rightarrow serve stimolo molto intenso
- iperpolarizzazioni, o depolarizzazioni sotto soglia, tornano rapidamente al valore di equilibrio

NEURONI

costituiti da soma (corpo centrale), dendri (recettori $l < 1\text{mm}$),
assone (protuberanza che trasmette gli stimoli $l \approx 1\text{m}$, $\phi < 10\mu\text{m}$)

assone si dice mielinico se ricoperto da guaina mielinica (2 tratti di $200\mu\text{m}$ separati da brevi tratti detti nodi di Ranvier)

La guaina permette lo scambio ionico solo sui nodi

VOLTAGE-CLAMP (HH)

Tenta di determinare le conduttanze nel modello a conduttanze parallele

Si scopre che le conduttanze hanno risposta temporale dipendente dall'intensità dello stimolo (a causa dei canali Na^+ e K^+ controllati in tensione)

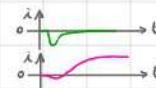
\Rightarrow misura risposta del sistema a gradini di tensione (depolarizzazione)



Risposte della corrente ai gradini tende a un asintoto orizzontale.
per stimoli bassi, negli istanti appena successivi all'impulso, si verifica un undershoot

usando tossine per bloccare selettivamente canali Na^+ o K^+ possiamo misurare i singoli contributi

- sodio: andamento impulsivo, corrente entrante
- potassio: andamento asintotico, corrente uscente



• patch-clamp

Come voltage-clamp ma applicato a un singolo canale.

Evidenzia che i canali in presenza di depolarizzazione oscillano aleatoriamente tra stato aperto e chiuso \Rightarrow i risultati dell'esperimento precedente sono dati dal comportamento medio dei canali

MODELLO HH

descrive quantitativamente la generazione del PA

tiene conto del comportamento aleatorio dell'apertura dei canali K^+ e Na^+ in relazione alla tensione di membrana

• modello canali K^+

Canale K^+ costituito da 4 unità, aperto \Leftrightarrow tutte aperte $n(t) = \frac{E(\text{open})}{N} \in [0,1]$
 \hookrightarrow frazione unità aperte

$$\Rightarrow \text{prob. canale aperto} = n(t)^4 \rightarrow g_{\text{K}}(t) = g_{\text{K,max}} n^4(t)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n \underbrace{(1-n)}_{\substack{\text{canali} \\ \text{chiusi}}} - \beta_n \underbrace{n}_{\substack{\text{canali} \\ \text{aperti}}}$$

canali che si aprono canali che si chiudono

conduttanza massima K^+

$$\alpha_n, \beta_n \text{ cost dipendenti da } V_m \quad [\frac{1}{\text{s}}]$$

dopo il gradino di tensione, V_m è cost $\Rightarrow \alpha_n, \beta_n$ costanti

$$n(t) = n_{eq} - (n_{eq} - n_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \frac{1}{\alpha_n + \beta_n}$$

n_0 : calcolabile dal V_m a riposo

\Rightarrow parametri del modello: $G_{K,max}$, $\alpha_n(V_m)$, $\beta_n(V_m)$
(determinati empiricamente)

• Modello canali Na^+

ragionamento simile $g_{Na}(t) = G_{Na,max} m^3(t) h(t)$

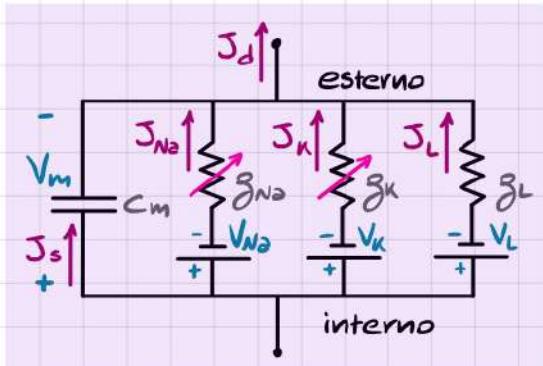
frazione canali attivi	frazione canali inattivi
m	$1-m$

conduttanza massima Na^+

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1-m) - \beta_m m \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h(1-h) - \beta_h h \quad \alpha, \beta \left[\frac{1}{s} \right]$$

\Rightarrow parametri del modello: $G_{Na,max}$, $\alpha_m(V_m)$, $\beta_m(V_m)$, $\alpha_h(V_m)$, $\beta_h(V_m)$
(determinati empiricamente)

• il modello HH



modifica del modello a conduttanze parallele

- $g_{Na}(V_m, t)$ e $g_K(V_m, t)$ sono funzioni non lineari di V_m e t
- g_L sostituita da $\beta_{Leakage\ cost}$ e indip de V_m (contributo tutte altre specie)
- sistema stimolato da corrente impressa $J_d(t)$ dovuta alla sezione precedente dell'assone

$$C_m \frac{dV_m}{dt} + G_{Na,max} m^3(t) h(t) (V_m - V_{Na}) + G_{K,max} h^4(t) (V_m - V_K) + g_L (V_m - V_L) = J_d(t)$$

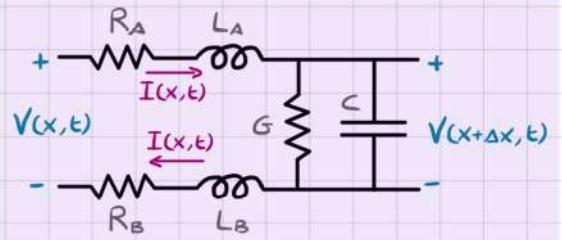
può essere risolta solo numericamente

PROPAGAZIONE DEL PA

il PA si propaga perché la fase di depolarizzazione si estende alle zone limitrofe allo stimolo iniziale generando un nuovo PA.
Il periodo refrattario impedisce al PA di propagarsi in entrambi i sensi.
La rigenerazione del PA in assoni myelinici avviene solo sui nodi di Ranvier

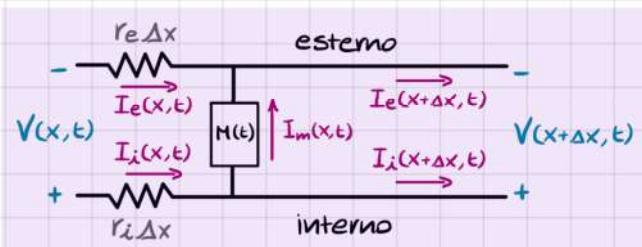
• Core-conductor model (propagazione assone A-mielinico)

modella la propagazione del PA in un assone A-mielinico.
il nome viene dall'analogia con la propagazione di onde di tensione lungo le linee bifilari



→ tratto infinitesimo di linea bifilare
Fenomeni distribuiti:

- resistenza, induzione serie
- conduttanza, capacità parallelo



no effetto induttivo serie

→ tratto infinitesimo di assone

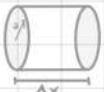
impedenza di membrana

M(t): modello a condutture parallele

$$R_i = \frac{P_i}{\pi r^2} \quad \text{resistività interna } [\Omega \cdot \text{m}]$$

(assimilando a conduttore cilindrico omogeneo)

vettore assone

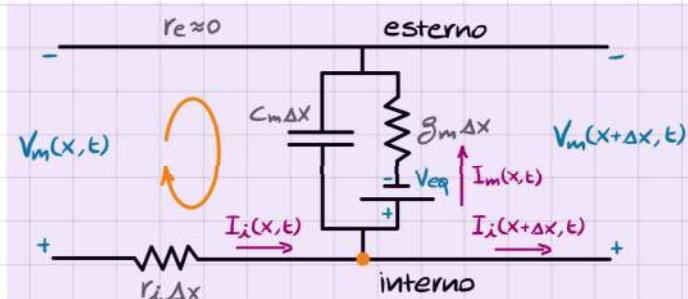


$$R_e \approx 0$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco
Appunti non vendibili!

• propagazione sotto soglia assone A-mielinico

stimolo non sufficiente ad aprire i canali Na^+ ⇒ l'impulso si attenua durante la propagazione perché non sostenuto dal potenziale elettrochimico



→ conduttanza di membrana $g_m \left[\frac{\text{S}}{\text{m}} \right]$ cost
(perché solo pochi canali Na^+ aperti)

$$g_m = \frac{1}{R_m} = \frac{2\pi r}{P_m} \quad [\Omega \cdot \text{m}^2]$$

resistività membrane

$$V(x+Δx,t) + V_{eq} - V(x,t) = V_{eq}$$

$$\frac{V_m(x+Δx,t) - V_m(x,t)}{Δx} = -R_i I(x,t)$$

$$V(x+Δx,t) + V_{eq}$$

$$\Rightarrow \frac{I(x+Δx,t) - I(x,t)}{Δx} = -g_m [V_m(x+Δx,t) - V_{eq}] - \frac{C_m}{Δx} \frac{\partial V_m(x+Δx,t)}{\partial t}$$

$$V(x+Δx,t) + V_{eq}$$

capacità membrana per unità di lunghezza

pongo $V(x,t) = V_m(x,t) - V_{eq}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -R_i I(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -g_m V(x,t) - C_m \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Furier

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \hat{V}(x,\omega)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-R_i \hat{I}(x,\omega)) \\ \frac{\partial \hat{I}(x,\omega)}{\partial x} = -(g_m + j\omega C_m) \hat{V}(x,\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{V}(x,\omega)}{\partial x^2} = R_i (g_m + j\omega C_m) \hat{V}(x,\omega) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \hat{V}(x,\omega) = \hat{V}_+(ω) e^{-\Gamma x} + \hat{V}_-(ω) e^{\Gamma x} \\ \Gamma = \sqrt{R_i (g_m + j\omega C_m)} \end{cases}$$

$\hat{V}_+(w)$ e $\hat{V}_-(w)$ sono le cost di integrazione
tralasciamo \hat{V}_- (perché è un'onda che si propaga in direzione opposta)

$\Rightarrow \hat{V}_+(w) = \hat{V}(0, w) \rightarrow$ trasformata di Fourier dell'impulso iniziale

$$\begin{cases} \Gamma = \alpha + j\beta & V(x, w) = V_+(w) e^{-(\alpha+j\beta)x} \\ \text{frequenze basse} & (\text{per periodo refrattarietà}) \Rightarrow g_m \gg w C_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx \sqrt{r_i g_m} \quad \beta \approx \frac{1}{2} w C_m \sqrt{\frac{r_i}{g_m}} = \frac{w}{v_p} \quad v_p = \frac{2}{C_m} \sqrt{\frac{g_m}{r_i}}$$

tornando nel dominio del tempo: $V(x, t) = V_0 \left(t - \frac{x}{v_p} \right) e^{-\alpha x}$

$v_p \propto \sqrt{r_i g_m}$ velocità di propagazione è proporzionale al raggio dell'assone

impulso di tensione che si propaga a velocità v_p , senza distorsione, con attenuazione dipendente da α

• propagazione sopra soglia assone A-mielinico

se stimolo sufficiente \Rightarrow si genera PA che si auto sostiene grazie al potenziale elettrochimico di trans-membrana
si propaga senza distorsione e senza attenuazione

per l'impedenza di membrana $M(t)$ dobbiamo usare il modello HH.
possiamo comunque usare \otimes_1 del caso sotto soglia da cui ottieniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_m(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (-r_i I_i(x, t)) \\ \frac{\partial I_i(x, t)}{\partial x} = -i_{\text{ioni}}(x, t, V_m) - C_m \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t} = -i_m(x, t, V_m) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} = i_m(x, t, V_m) = i_{\text{ioni}}(x, t, V_m) + C_m \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} C_m = 2\pi \epsilon \epsilon_0 \Rightarrow C_m \propto A \\ \text{capacità elettrica per unità di sup } [\frac{F}{m}] \\ g_m(t, V_m) = 2\pi \sigma \sigma_m(t, V_m) \Rightarrow i_{\text{ioni}}(x, t, V_m) \propto A \\ \text{conduttanza per unità di sup } [\frac{S}{m^2}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{divido per } C_m \quad \frac{\pi A^2}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r_i} \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} = H(x, t, V_m) + \frac{\partial V_m(x, t)}{\partial t}$$

legato alle correnti ioniche ma non dipende da A

Sperimentalmente si verifica che il PA si propaga senza attenuazione e distorsione

$$\Rightarrow \text{deve soddisfare eq delle onde} \quad \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 V_m(x, t)}{\partial t^2}$$

\hookrightarrow velocità di propagazione

$$\Rightarrow \frac{2}{2\epsilon_m \rho_i V_p^2} \frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial t^2} = H(x,t, V_m) + \frac{\partial V_m(x,t)}{\partial t}$$

indipendente da a

*deve essere
indip da a*

$$\hookrightarrow \frac{2}{2\epsilon_m \rho_i V_p^2} = \text{cost} = \frac{1}{K} \Rightarrow V_p = \sqrt{\frac{Ka}{2\epsilon_m \rho_i}} \propto \sqrt{a}$$

velocità di propagazione
è proporzionale al raggio
dell'assone

• propagazione assone mielinico

modello complicato della propagazione saltatoria del PA dovuta alla guaina mielinica \Rightarrow non più assimilabile a una linea di trasmissione omogenea

le velocità di propagazione sono molto maggiori \geq parità di raggio, perché il PA si rigenera solo sui nodi di Ranvier, e viaggia per conduzione passiva tra un nodo e l'altro

SINAPSI

sono registratori di potenziale elettrochimico

l'assone di un neurone è collegato ai dendriti del successivo tramite una giunzione sinaptica

• Sinapsi chimica

① depolarizzazione fa aprire canali Cat del terminale pre-sinaptico stimolando il rilascio di un neurotrasmettore nello spazio sinaptico

② il neurotrasmettore si lega \geq speciali canali Na^+ , del terminale post-sinaptico, aprendoli \Rightarrow nuovo PA

• Sinapsi elettrica

cellule connesse da **connessioni**: canali ionici che permettono il passaggio di correnti ioniche da una cellula all'altra

SORGENTI IN VOLUMI CONDUTTORI

> perché è importante avere modelli di sorgenti

non possiamo misurare direttamente le differenze di potenziale a cavallo delle membrane cellulari, ma possiamo misurare la ddp sulla superficie del corpo, la quale è generata ad esempio dalla circolazione di correnti dovute al PA.

Lo stesso vale per sorgenti macroscopiche come il cuore.

Quindi riuscendo a creare un modello dell'attività elettrica del cuore e dell'andamento del potenziale nel volume conduttore, possiamo usare le misurazioni superficiali per determinare i parametri del modello

• monopolo di corrente

è una sorgente ($I_o > 0$) o pozzo ($I_o < 0$) puntiforme

mezzo omogeneo \Rightarrow densità di corrente elettrica radiale

$$\bar{J} = \frac{I_o}{4\pi r^2} \hat{r} \quad \text{legge di ohm}$$
$$\sigma E = -\sigma \nabla \phi = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{r}$$
$$\int d\phi = -\frac{I_o}{4\pi \sigma r^2} dr$$

se $\phi(\infty) \rightarrow 0$ $\Phi(r) = \frac{1}{4\pi \sigma r} I_o$

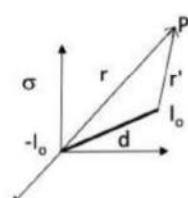
• dipolo di corrente

due monopoli con uguale ampiezza e segno opposto

$$\text{sovraffosizione effetti} \Rightarrow \phi(r) = \frac{I_o}{4\pi \sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\text{Se } d \ll r \Rightarrow \phi(r) = \frac{I_o \bar{J} \cdot \hat{r}}{4\pi \sigma r^2} = \frac{\bar{P} \cdot \hat{r}}{4\pi \sigma r^2}$$

$$\text{momento di dipolo di corrente } P = I_o \bar{d} \quad [\text{A} \cdot \text{m}]$$



• ASSONE ISOLATO

se in mezzo conduttore infinito e omogeneo
 nel punto P, il contributo di dx dell'assone è quello di un monopolo

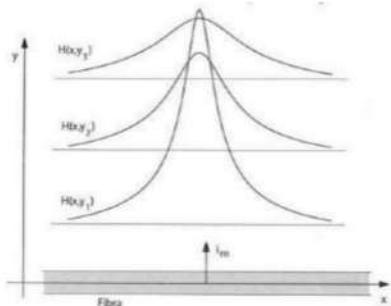
$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} \frac{i_m dx}{r} \quad i_m(x) : \text{corrente trans-membrana}$$

$$\Rightarrow \phi(P) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} \int_{x_1}^{x_2} \frac{i_m(x)}{r(x)} dx$$

dal modello a linee di trasmissione $\Rightarrow i_m = \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} \Rightarrow$ legge tra potenziale misurato e tensione trans-membrana

integro da $+\infty$ a $-\infty \Rightarrow \phi(P,t) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} i_m * H(x)$

corrente $\neq 0$ solo nel segmento
 attraversato dal PA



la corrente localizzata ha effetti su una zona extra cellulare sempre più ampia all'allontanarsi dell'assone

RADIOPROTEZIONE

Made by Davide Bosco
davidebosco
Appunti non vendibili!

RADIAZIONI IONIZZANTI E NON IONIZZANTI

• IONIZZANTI (IR)

radiazione EM composta da fotoni la cui energia cinetica è sufficiente a liberare un atomo da una molecola

> effetti: danneggia tessuto vivente (mutazioni, cancro, morte)

sono necessari 14 eV per ionizzare idrogeno o ossigeno

servono 33 eV per ionizzare una molecola d'acqua

⇒ spettro IR parte dei 10 eV

eV: energia cinetica acquisita da 1 elettrone accelerato da una ddp di 1V

$$\hookrightarrow 1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{energia radiazione EM} = h \cdot f$$

cost planck
frequenza

$$\frac{10 \text{ eV}}{6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = \frac{10 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 24 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \Rightarrow \lambda = 124 \text{ nm}$$

• NON-IONIZZANTI (NIR)

energia fotoni non sufficiente a ionizzare (energia < 10 eV)

≥ fini protezionistici si considerano le NIR prodotte dall'uomo fino ai 300 GHz ($1.24 \cdot 10^3$ eV)

PROPAGAZIONE / ASSORBIMENTO NIR (nei tessuti biologici)

Hp: onda piana uniforme in aria → valida \Leftrightarrow raggio di curvatura $\gg \lambda$
(quasi sempre valida se frequenza > qualche GHz)

⇒ posso usare formule onde piane per calcolare lo spessore di penetrazione δ

Se $f < 10 \text{ kHz}$ tessuti biologici sono buoni conduttori $\Rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \sigma f}}$
NB: λ troppo grande perché valga Hp oppure

Se $f < 10 \text{ GHz} \Rightarrow \delta > 1 \text{ cm} \Rightarrow$ l'onda EM penetra tessuti di diversa natura attraversando quindi sup di discontinuità ⇒ rifrazioni interne multiple
⇒ si creano zone ad alte concentrazioni di campo EM ⇒ alto assorbimento

- se f basse, non vale il modello rifrazione o.p. nei tessuti
- se non siamo nella regione di campo lontano, non vale Hp propagazione in onde piane

DOSIOMETRIA CAMPI EM NON IONIZZANTI

Made by Davide Bosco
 @davidebosco
 Appunti non vendibili!

• effetti fisici

- induzione di correnti spurie (interferiscono con sistema nervoso)
 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H}$ $\xrightarrow{\text{T. Stokes}} \oint_C \vec{E} d\vec{l} = -j\omega \mu_0 \int_S H ds$
- innalzamento di temperatura (effetto Joule)

• effetti biologici

- distorsione sensoriale
- alterazione meccanismi cellulari
- danneggiamento tessuti
- stimolazione meccanismi termoregolazione

SAR (specific absorption rate)

dato un volume ΔV piccolo di tessuto biologico tale da poter considerare costanti: campo elettrico \vec{E} , conducibilità elettrica σ , densità di massa ρ

$$\text{SAR}_{\Delta V} = \frac{\overline{P}_{\text{diss}} \Delta V}{\rho \Delta V} \left[\frac{W}{kg} \right] \quad \overline{P}_{\text{diss}} = \frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2 = \text{densità di potenza EM dissipata in calore per unità di volume} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

• SAR medio

quantità di calore immessa in media in V nell'unità di tempo

$$\text{SAR}_V = \frac{\int_V \overline{P}_{\text{diss}} dV}{\int_V \rho dV} \left[\frac{W}{kg} \right]$$

per linearità $\text{SAR}_V = \frac{\text{SAR}_{\text{rif}}}{S_0} S$

SAR_{rif} SAR relativo a S_0
 S densità generica
 densità di potenza attiva incidente di riferimento

SAR_H testa

SAR_{WB} corpo intero

$\text{SAR}_{1g}, \text{SAR}_{10g}$ valore massimo P_{diss} su volumi di $1/10g$ con stesso scenario $\text{SAR}_{1g} > \text{SAR}_{10g}$

• eq del bio-calore

$$C(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\nabla \cdot (K(\vec{r}) \nabla T)}_{\text{calore che giunge dai tessuti circostanti per conduzione}} + \underbrace{\Lambda_o(\vec{r}) - B_o(\vec{r})(T - T_B)}_{\text{trascuriamo processi metabolici}} + \underbrace{Q_v(\vec{r})}_{\text{calore esogeno dovuto ad assorbimento di potenza EM}}$$

calore complessivo accumulato per unità di volume in ∂t

trascuriamo condutività (valutazioni su brevi periodi)

calore s.m³ processi metabolici

calore s.m³ scambiato con il sangue

trascuriamo termoregolazione (HP centrale)

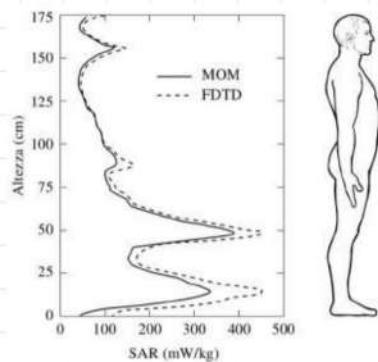
blood temperature $\frac{1}{2} \sigma |\vec{E}|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{\text{SAR}(\vec{r})}{C(\vec{r})}$$

$$\text{SAR} = \frac{Q_v(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}$$

$$\text{SAR}_{WB} \approx 1-4 \frac{W}{kg} \text{ per } 30 \text{ min} \rightarrow \Delta T = 1^\circ C$$

calore metabolico basale $\approx 1.3-13 \frac{W}{kg}$



• Stima SAR indotto

Made by Davide Bosco
 @davidebosco
 Appunti non vendibili!

Stima SAR indotto da EM dipende da:

- Vicinanza alla sorgente
- Rapporto lunghezza d'onda/dimensione del corpo
- Polarizzazione del campo rispetto alla posizione del corpo
- Forma del corpo
- Posizione rispetto ad un piano di massa
- Proprietà elettromagnetiche dei tessuti
- Proprietà biologiche dei vari tessuti (la densità di massa)

> **modelli analitici**: approssimano il corpo a volumi omogenei e calcolano la potenza assorbita in Wp di irraggiamento da opu

\Rightarrow forniscono stime sulla dipendenza dei vari parametri
problemi: affidabili in regioni limitate dello spettro EM

non forniscono distribuzione SAR locale

non colgono condizioni di risonanza (picchi a determinate f)

> **modelli numerici**: risolvono le eq di Maxwell per il problema specifico

\Rightarrow forniscono soluzioni esatte (non evidenziano dip de parametri)

- **metodo dei momenti (MoM)** detto metodo a blocchetti

scomponere corpo in blocchetti con σ e ϵ cost. calcola il campo \vec{E}_{int} partendo da \vec{E}_{ext} tramite una complessa relazione integrale

- **metodo FDTD** (differenze finite nel dominio del tempo)

• **tipi di polarizzazione**



UOMO COME ANTENNA

un uomo di altezza A in piedi sul terreno equivale elettromagneticamente a un'antenna lunga 2A (teorema delle immagini)

$$\text{potenza attiva irradiata} = P_{irr} = \frac{1}{2} R_{irr} I_0^2$$

quando $\frac{L}{\lambda} \approx 0.8$ c'è un picco nella resistenza di radiazione (R_{irr}), che indica una risonanza

$$\hookrightarrow \frac{L}{\lambda} = \frac{L_f}{c} \approx 0.8 \Rightarrow f_{ris} \approx \frac{0.8c}{L} \quad \begin{cases} \text{se } A=1.6 \Rightarrow 75 \text{ MHz} \\ \text{se } A=1.8 \Rightarrow 66 \text{ MHz} \end{cases}$$

PATOLOGIA DA RADIOFREQUENZA E MICROONDE

Interazione ogni tessuto biologico sottoposto a campo EM interagisce con esso

Effetto biologico presenza di variazioni morfologiche/funcionali a carico di tessuti, organi, ecc

Danno l'effetto supera i limiti di efficacia dei meccanismi di adattamento dell'organismo. può essere reversibile o irreversibile

LINEE GUIDA ICNIRP (international commission of NIR protection)

non considerano danni dovuti a fattori non biologici, o l'esposizione a scopi diagnostici/terapeutici

divide in

- esposizione occupazionale: adulti esposti in condizioni note e consapevoli
- esposizione popolazione generale: individui di ogni età non consapevoli dell'esposizione

• restrizioni di base

basate sui soli effetti conclamati: riscaldamento tessuti e induzione correnti

0Hz

1Hz - 100 KHz

100 KHz - 10MHz

100 KHz - 10 GHz

10 GHz - 300 GHz

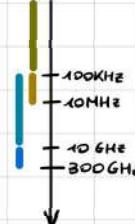
Campo magnetico [$\frac{A}{m}$]

Campo E_{int} al tessuto [$\frac{V}{m}$] *

Densità corrente indotta nel tessuto [$\frac{A}{m^2}$] *

SAR [$\frac{W}{kg}$] *

Densità di potenza incidente [$\frac{W}{m^2}$] *



• livelli di riferimento

livelli forniti per valutare l'esposizione in maniera pratica (derivati dalle restrizioni di base) sono mediati sull'intero corpo, e calcolati con l'ipotesi che il campo esterno sia un opu

danno restrizioni su E , H , B , \underline{S}
densità di
potenza

METODO FDTD

Finite difference in the time domain

\Rightarrow soluzione numerica eq Maxwell con metodo iterativo

può analizzare un intera banda di frequenze

dalle eq di Maxwell, ignorando la dispersione

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{e} \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \bar{h} - \sigma \bar{e} - \bar{j}_i) \end{cases}$$

$$\nabla \times \bar{e} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial t}$$

$$\bar{d} = \epsilon \bar{e}$$

$$\bar{b} = \mu \bar{h}$$

$$\bar{j} = \sigma \bar{e}$$

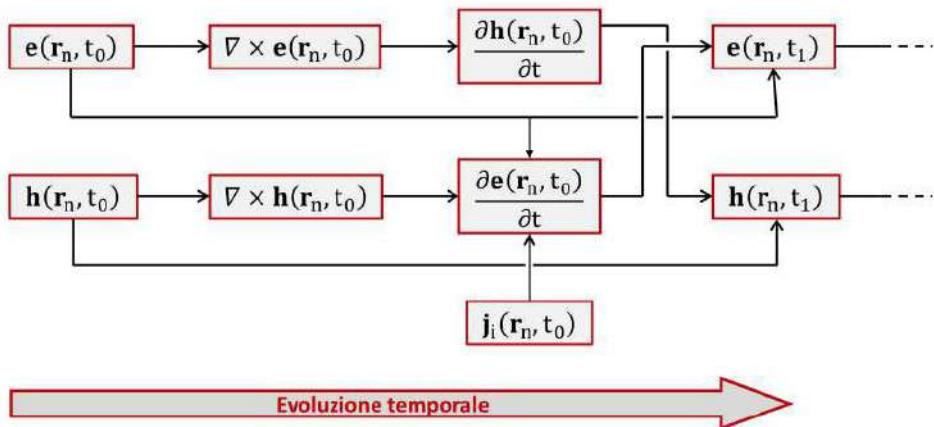
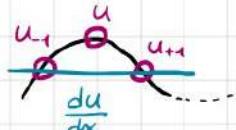
il rotore è un op differenziale su coord spaziali

\Rightarrow può essere approssimato similmente al rapporto incrementale

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

differenza centrale

$\xrightarrow{\text{passo di discretizzazione}}$

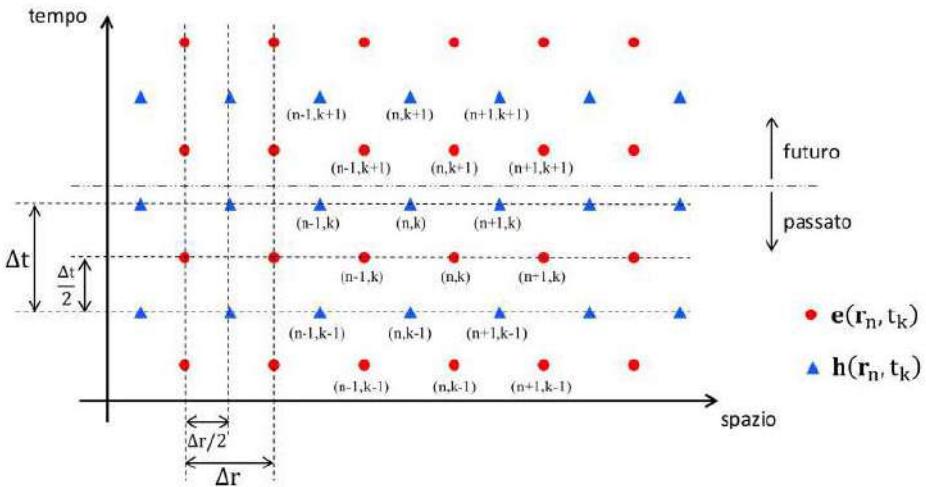


• griglie di integrazione

Si definiscono dei cubetti spaziali denominati **celle di Yee**, sufficientemente piccole da assumere costante ϵ, μ, σ .

queste celle sono interacciate, avendo uno spigolo di una cella al centro dell'altra.

\Rightarrow campo elettrico viene calcolato sugli spigoli delle celle, quello magnetico è calcolato al centro delle sup sottoz della cella è sfalsato di un intervallo temporale di $\frac{1}{2}\Delta t$



> **passo spaziale**: non uniforme (dipende da dettagli geometrici e proprietà EM del materiale).

Δr è una frazione di λ , considerando opu in mezzo omogeneo con l'E maggiore e considerando la f più alta della banda

$$\Delta r = \frac{\lambda}{K}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{NEMf}$$

$M = 1$ nei tessuti biologici

> **passo temporale**: vincolato da:

- stabilità numerica \rightarrow algoritmo stabile solo se passo temporale è minore del tempo necessario a campo EM per propagarsi al nodo più vicino $\Delta t \leq \frac{\Delta r}{c}$

- banda simulata $\rightarrow \Delta t$ sufficientemente piccolo da campionare correttamente il campo EM (teorema Shannon-Nyquist)

$$\Delta t \leq \frac{1}{2B} \quad \text{Banda}$$

- condizioni iniziali e al contorno necessarie per risolvere le eq di Maxwell

> **cond iniziali**

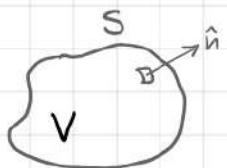
campo EM in tutto V all'istante t_0 (comunemente si sceglie campo nullo)

> **condizioni al contorno**

campo EM sulla sup S che racchiude V in ogni istante $t \in [t_0, t_1]$

dipendono dalla fisica del problema di interesse

- se volume racchiuso da scatola di conduttore ideale
 $\Rightarrow \hat{n} \times \vec{E} = 0 \quad \forall t$ (componente di \vec{E} tangente a $S = 0 \quad \forall t$)



- se si vuole simulare un campo EM su spazio libero (antenne)
si impone su S il **PML** (perfectly matched layer)
 \Rightarrow lascia uscire campo EM del volume sopprimendo ogni futura riflessione (trasmissione totale)

- **Criterio di stop**

il calcolo si ferma quando l'energia nel volume è inferiore a una certa soglia (es -40dB)

- **Sorgenti**

dove essere nota \mathcal{H} . Spesso descritte da impulso gaussiano (minore durata \Rightarrow maggiore banda)

Agisce direttamente sui nodi della griglia

Può essere:

- densità volumetrica di corrente in V (antenna)
- densità superficiale di corrente su S

simula volume illuminato da onda piana proveniente dall'esterno

PROGRAMMA CST

- **Setup**

① Selezione sorgente

② Selezione metodo di risoluzione (FDTD)

③ Selezione unità di misura

④ Selezione banda di interesse

Selezione monitors' type frame: E , H , farfield, powerflow, power loss

Scelgo monitors' specification frame: frequenze di cui ci interessano i dati

⑤ creo modello sorgente e definisco verso corrente

- **Calcolo del SAR**

ricordiamo che $SAR = \frac{P_{diss}}{\rho}$ ($P_{diss} = \frac{1}{2} \rho |E|^2$, ρ : densità di massa)

usando il "power loss" field monitor abbiamo la P_{diss} alle frequenze scelte

\Rightarrow basta usare una macro in post processing per dare info sulla ρ e scegliere se calcolare SAR puntuale, SAR_{1g} , SAR_{10g}

a parità di antenna, frequenza e potenza attiva $\Rightarrow SAR_{1g} > SAR_{10g}$
perché stiamo mediando su campioni più piccoli

- **Calcolo bio-heat eq** (mostra innalzamento temperatura)

① Risolvo problema elettromagnetico

② applico macro thermal losses selezionando come dati il monitor della distribuzione di densità di potenza (power loss) (altrimenti la simulazione termica prende in considerazione solo il calore metabolico)

③ cambio problem type in thermal losses e importo i dati della macro

④ avvio "Thermal steady* state solver" dando i parametri di temperatura dell'aria e temp. basale * steady: durata infinita

transient: puoi selezionare una durata

