ESERCIZI SCHEDA 1

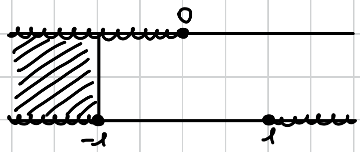
ESERCIZIO 1

(a) $\sqrt{|x|-1} \geq x$ campo di esistenza: $|x|-1 \geq 0$

$|x| \geq 1 \iff \underline{x \leq -1 \vee x \geq 1}$

- Se $x \leq 0$ la disequazione è risolta $\forall x$ nel campo di esistenza

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases}$$



$x \leq -1$

- Se $x > 0$:

$$\left(\sqrt{|x|-1}\right)^2 \geq x^2 \iff |x|-1 \geq x^2 \qquad x>0, \text{ quindi } |x| = x$$
$$\iff x-1 \geq x^2$$
$$\iff x^2-x+1 \leq 0$$

$\Delta = (-1)^2-4\cdot1\cdot1 = -3 \Rightarrow$ disequazione impossibile

Unendo le soluzioni dei due casi: $x \leq -1$

(b) $|x+3| \leq \alpha$

- Se $\alpha < 0$ la disequazione è impossibile
- Se $\alpha \geq 0$: $|x+3| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x+3 \leq \alpha \iff -\alpha-3 \leq x \leq \alpha-3$

(c) $\sqrt{|x|+1} > x+1$ campo di esistenza: $|x|+1 \geq 0$ $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$

- Se $x+1 < 0 \iff x < -1$, la disequazione è risolta $\forall x$ nel campo di esistenza

$$\begin{cases} x < -1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \underline{x < -1}$$

- Se $x \geq -1$:   * caso $x \geq 0 \longrightarrow |x| = x$:

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 > (x+1)^2 \iff x+\cancel{1} > x^2+2x+\cancel{1} \iff x^2+x<0$$
$$\iff x(x+1)<0 \qquad x_1=-1,\ x_2=0$$

$-1 < x < 0 \rightsquigarrow$ Non posso prendere in considerazione questa soluzione perché il caso in esame vuole $x \geq 0$.

$*$ caso $x<0 \longrightarrow |x|=-x$:

$$\left(\sqrt{-x+1}\right)^2 > (x+1)^2 \iff -x+\cancel{1} > x^2+2x+\cancel{1} \iff x^2+3x<0$$

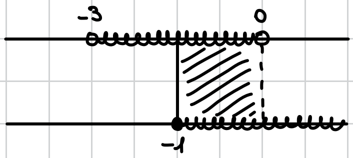
$$\iff x(x+3)<0 \qquad x_1=-3,\ x_2=0$$

$$-3<x<0$$

$$\begin{cases} x<0 \\ -3<x<0 \end{cases} \qquad \underline{-3<x<0}$$

Unendo le due soluzioni : $-3<x<0$

$$\begin{cases} -3<x<0 \\ x\geq -1 \end{cases}$$



$$-1\leq x<0$$

Unendo le soluzioni dei due casi : $x<-1 \ \vee\ -1\leq x<0 \Rightarrow$ $x<0$

ⓓ $\sqrt{x^2+x-1}\geq 1$ campo di esistenza : $x^2+x-1\geq 0$ $\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-1)=5$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

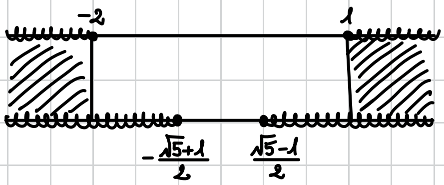
$$\iff \underline{x\leq -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \ \vee\ x\geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$\left(\sqrt{x^2+x-1}\right)^2 \geq 1^2 \iff x^2+x-1\geq 1 \iff x^2+x-2\geq 0$$

$$\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-2)=9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \begin{cases} =-2 \\ =1 \end{cases} \qquad x\leq -2 \ \vee\ x\geq 1$$

$$\begin{cases} x\leq -2 \ \vee\ x\geq 1 \\ x\leq -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \ \vee\ x\geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$$



$x\leq 2 \ \vee\ x\geq 1$

ⓔ $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}<1$ campo di esistenza : $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq 1 \end{cases}$ $\underline{x\geq 1}$

$\sqrt{x+2}<1+\sqrt{x-1}$ Entrambi i membri sono positivi, quindi posso procedere all'elevamento al quadrato.

$$\cancel{x}+2<\cancel{1}+\cancel{x}-\cancel{1}+2\sqrt{x-1} \iff 2<2\sqrt{x-1} \iff 1<\sqrt{x-1} \iff 1<x-1 \iff x>2$$

$$\begin{cases} x\geq 1 \\ x>2 \end{cases} \qquad x>2$$

f) $\sqrt{x^2+1} \geq |x|-2x$

- caso $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$:

$\sqrt{x^2+1} \geq -x$ Se $x \geq 0$ la disequazione è sempre risolta, in quanto il secondo membro è negativo

- caso $x<0 \rightarrow |x|=-x$:

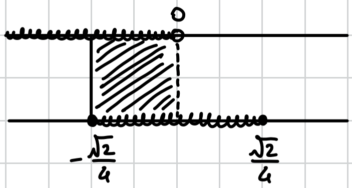
$\sqrt{x^2+1} \geq -3x$ Se $x<0$: $\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 \geq (-3x)^2 \iff x^2+1 \geq 9x^2 \iff 8x^2-1 \leq 0$

$\iff (2\sqrt{2}x+1)(2\sqrt{2}x-1) \leq 0$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

$$\begin{cases} x<0 \\ x \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} \vee x \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$



$-\frac{\sqrt{2}}{4} \leq x < 0$

Unendo le soluzioni dei due casi: $\boxed{x \geq -\frac{\sqrt{2}}{4}}$

g) $x^2+x^3<1+x \iff x^2(1+x)-(1+x)<0$

$\iff (x^2-1)(1+x)<0$

$\iff (x+1)(x-1)(1+x)<0$

$\iff (x-1)(x+1)^2<0$ $x^2+1>0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\iff x-1<0 \iff \boxed{x<1 \wedge x \neq -1}$

h) $0<\frac{x^3-3x+2}{x^3+1}<1$

$$\begin{cases} \frac{x^3-3x+2}{x^3+1}>0 & \text{I} \\ \frac{x^3-3x+2}{x^3+1}<1 & \text{II} \end{cases}$$

disequazione I: scompongo il numeratore. Mi accorgo che 1 è zero del numeratore:

$N(1) = 1^3-3\cdot1+2=0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \hline x^3-x^2 & x^2+x-2 \\ \hline x^2-3x+2 & \\ x^2-x & \\ \hline -2x+2 & \\ -2x+2 & \\ \hline / & \end{array}$$

$\dfrac{(x-1)(x^2+x-2)}{x^3+1} > 0$ Studio il segno complessivo della frazione:

$x-1>0 \iff \underline{x>1}$

$x^2+x-2>0 \qquad \Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-2) = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=3$

$x_{1,2} = \dfrac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \underline{x<-2 \vee x>1}$

$x^3+1>0 \iff x^3>-1 \iff \underline{x>-1}$

	$x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<1$	$x>1$
$N_1(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$N_2(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$D(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{N(x)}{D(x)}$	$+$	$-$	$+$	$+$

$\Rightarrow \boxed{x<-2 \vee x>-1 \wedge x\neq1}$

disequazione II: $\dfrac{x^3-3x+2}{x^3+1} - 1 < 0 \iff \dfrac{\cancel{x^3}-3x+2-\cancel{x^3}-1}{x^3+1} < 0 \iff \dfrac{-3x+1}{x^3+1} < 0$

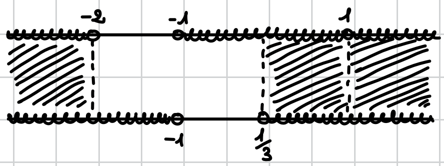
$N(x)>0 \iff -3x+1>0$
$\iff x<\frac{1}{3}$

$D(x)>0 \iff x>-1$

	$x<-1$	$-1<x<\frac{1}{3}$	$x>\frac{1}{3}$
$N(x)$	$+$	$+$	$-$
$D(x)$	$-$	$+$	$+$
$\frac{N(x)}{D(x)}$	$-$	$+$	$-$

$\Rightarrow \boxed{x<-1 \vee x>\frac{1}{3}}$

$$\begin{cases} \text{I: } x<-2 \vee x>-1 \wedge x\neq1 \\ \text{II: } x<-1 \vee x>\frac{1}{3} \end{cases}$$



$x<-2 \vee x>\frac{1}{3} \wedge x\neq1$

ⓘ $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < 1$ campo di esistenza: $\begin{cases} x+1\geq0 \\ x+2\geq0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq-1 \\ x\geq-2 \end{cases} \Rightarrow x\geq-1$

Entrambi i membri sono positivi, quindi elevo ambo i membri al quadrato.

$x+\cancel{1}+x+2+2\sqrt{x+1}\sqrt{x+2} < \cancel{1} \iff 2\sqrt{x^2+3x+2} < -2x-2$
$\iff \sqrt{x^2+3x+2} < -x-1$

Il secondo membro deve per forza essere positivo per elevare ambo i membri al quadrato:

$$\begin{cases} -x-1>0 \\ \left(\sqrt{x^2+3x+2}\right)^2 < (-x-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x<-1 \\ \cancel{x^2}+3x+2 < \cancel{x^2}+1+2x \end{cases} \quad \begin{cases} x<-1 \\ x<-1 \end{cases}$$

$x<-1 \rightarrow$ Questa soluzione non è compatibile con il campo di esistenza

$\Rightarrow$ impossibile

Esercizio 2

(a) $e^x + e^{-x} \geq e \Leftrightarrow e^x + \dfrac{1}{e^x} \geq e$ Pongo $t = e^x$

$$t + \frac{1}{t} - e \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - et + 1}{t} \geq 0$$

$N(x) \geq 0: \; t^2 - et + 1 \geq 0 \quad \Delta = e^2 - 4 \quad t_{1,2} = \dfrac{e \pm \sqrt{e^2-4}}{2} \Rightarrow t \leq \dfrac{e - \sqrt{e^2-4}}{2} \vee t \geq \dfrac{e+\sqrt{e^2-4}}{2}$

$D(x) > 0: \; t > 0$

		0		$\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2}$		$\frac{e+\sqrt{e^2-4}}{2}$	
$N(x)$	+		+		−		+
$D(x)$	−		+		+		+
$\frac{N(x)}{D(x)}$	−		+		−		+

$$\Rightarrow 0 < t \leq \frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2} \vee t \geq \frac{e+\sqrt{e^2-4}}{2} \qquad t = e^x$$

$$\Rightarrow \underbrace{0 < e^x}_{\text{ovvia}} \leq \frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2} \vee e^x \geq \frac{e+\sqrt{e^2-4}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \leq \log\left(\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2}\right) \vee x \geq \log\left(\frac{e+\sqrt{e^2-4}}{2}\right)}$$

(b) $e^x - e^{-x} \geq e \Leftrightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} \geq e$ Pongo $t = e^x$

$$t - \frac{1}{t} - e \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - et - 1}{t} \geq 0$$

$N(x) \geq 0: \; t^2 - et - 1 \geq 0 \quad \Delta = e^2 + 4 \quad t_{1,2} = \dfrac{e \pm \sqrt{e^2+4}}{2} \Rightarrow t \leq \dfrac{e - \sqrt{e^2+4}}{2} \vee t \geq \dfrac{e+\sqrt{e^2+4}}{2}$

$D(x) > 0: \; t > 0$

		$\frac{e-\sqrt{e^2+4}}{2}$		0		$\frac{e+\sqrt{e^2+4}}{2}$	
$N(x)$	+		−		−		+
$D(x)$	−		−		+		+
$\frac{N(x)}{D(x)}$	−		+		−		+

$$\Rightarrow \frac{e-\sqrt{e^2+4}}{2} \leq t < 0 \vee t \geq \frac{e+\sqrt{e^2+4}}{2} \qquad t = e^x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\frac{e-\sqrt{e^2+4}}{2}}_{\text{termine negativo}} \leq e^x < 0}_{\text{impossibile}} \vee e^x \geq \frac{e+\sqrt{e^2+4}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x \geq \log\left(\frac{e+\sqrt{e^2+4}}{2}\right)}$$

Esercizio 3

ⓐ $\log_2(x^2+x+2) \geq \log_2(x+2)$ campo di esistenza: $\begin{cases} x^2+x+2>0 \\ x+2>0 \end{cases}$ $\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot2<0$

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x>-2 \end{cases}$ $\underline{x>-2}$

Confronto gli argomenti: $x^2+\cancel{x}+\cancel{2} \geq \cancel{x}+\cancel{2} \iff x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ La soluzione è $x>-2$

ⓑ $\log_\alpha(3x+7)>2$ campo di esistenza: $3x+7>0 \iff x>-\frac{7}{3}$

α deve essere positivo e diverso da 1:

- $\alpha \in (0,1)$: $\log_\alpha(3x+7)>2 \iff \log_\alpha(3x+7)>\log_\alpha(\alpha^2)$

  $\iff 3x+7<\alpha^2 \iff x<\frac{\alpha^2-7}{3} \Rightarrow -\frac{7}{3}<x<\frac{\alpha^2-7}{3}$

- $\alpha>1$: $\log_\alpha(3x+7)>2 \iff \log_\alpha(3x+7)>\log_\alpha(\alpha^2)$

  $\iff 3x+7>\alpha^2 \iff x>\frac{\alpha^2-7}{3}$ compatibile col campo di esistenza

ⓒ $\log(\log x)>0$ campo di esistenza: $\begin{cases} x>0 \\ \log x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ \log x>\log 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases}$ $\underline{x>1}$

$\log(\log x)>\log 1 \iff \log x>1$

$\iff \log x>\log e \iff x>e$

Confronto col campo di esistenza:

$\begin{cases} x>1 \\ x>e \end{cases}$ $x>e$

ⓓ $\log_x 5+2\log_{5x} 5-3\log_{25x} 5=0$ campo di esistenza $\begin{cases} x>0 \\ x\neq1 \\ 5x\neq1 \\ 25x\neq1 \end{cases}$ $\Rightarrow x>0 \wedge x\neq\frac{1}{25} \wedge x\neq\frac{1}{5} \wedge x\neq1$

Utilizzo la proprietà $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$: $\frac{1}{\log_5 x}+\frac{2}{\log_5 5x}-\frac{3}{\log_5 25x}=0 \iff$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 x} + \frac{2}{\log_5 5 + \log_5 x} - \frac{3}{\log_5 25 + \log_5 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 x} + \frac{2}{\log_5 x + 1} - \frac{3}{\log_5 x + 2} = 0$$

Pongo $t = \log_5 x$: $\quad \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1} - \frac{3}{t+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(t+1)(t+2) + 2t(t+2) - 3t(t+1)}{t(t+1)(t+2)} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{t^2} + \cancel{3t} + 2 + \cancel{2t^2} + 4t - \cancel{3t^2} - \cancel{3t}}{t(t+1)(t+2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4t+2}{\cancel{t(t+1)(t+2)}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_5 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

Esercizio 4

a) $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 > 0$

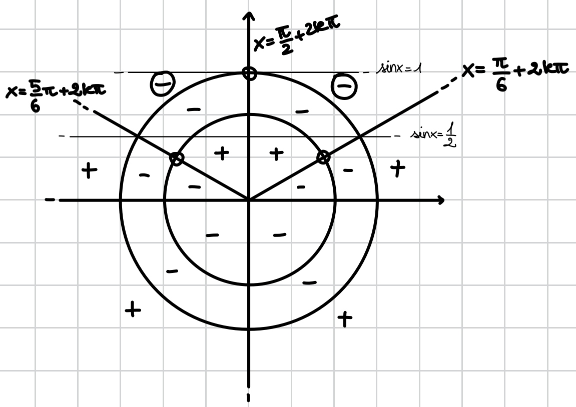
$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2\sin x - 1)(\sin x - 1) > 0$

Studio del segno:

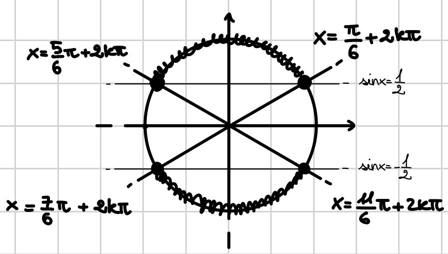
$2\sin x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > \frac{1}{2}$

$\sin x - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x > 1$



$$\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

b) $|\sin x| \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ \sin x \geq \frac{1}{2}$



$$\boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2k\pi}$$

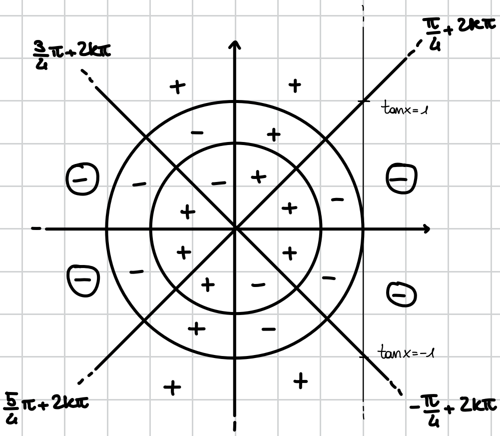
(c) $\dfrac{\tan^2 x}{\tan^2 x - 1} < \dfrac{1}{2}$ Pongo $t = \tan x$

condizioni per la tangente: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\frac{t^2}{t^2-1} - \frac{1}{2} < 0 \iff \frac{2t^2 - t^2 + 1}{2(t^2-1)} < 0 \iff \frac{t^2+1}{2(t+1)(t-1)} < 0$$

Studio il segno:

- $t^2 + 1 > 0 \iff \tan^2 x + 1 > 0 \quad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $t + 1 > 0 \iff \tan x > -1$
- $t - 1 > 0 \iff \tan x > 1$



$$\boxed{-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

(d) $2\sin x - 1 < 2\cos x - \tan x$

condizioni per la tangente: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

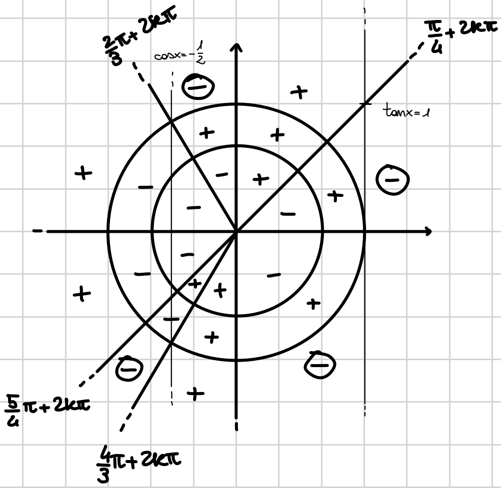
$2\sin x + \tan x - (2\cos x + 1) < 0$

$\tan x (2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) < 0$

$(\tan x - 1)(2\cos x + 1) < 0$

Studio il segno:

- $\tan x - 1 > 0 \iff \tan x > 1$
- $2\cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -\frac{1}{2}$



$$\boxed{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ \frac{5}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{4}{3}\pi + 2k\pi}$$

Esercizio 5

Sia A un insieme e a un suo elemento. Quale scrittura è corretta?

a. $A \in a$;

b. $\{a\} \subset A$; ✗

c. $a \subset A$;

d. $\{a\} \in A$.

C'è scritto praticamente che un insieme composto solo dall'elemento a è sottoinsieme di A e questo è vero dato che $a \in A$.

Esercizio 6

Sono dimostrabili tutti graficamente tramite i diagrammi di Eulero Venn.

Esercizio 7

La negazione logica di "Tutti i gatti sono neri" è

a. "Tutti i gatti sono bianchi";

b. "Nessun gatto è nero";

c. "Non esiste un gatto nero";

d. "Esiste un gatto che non è nero". ✗

Esercizio 8

$$\sum_{m=0}^{100} 1 = \text{"sommare } \underline{101} \text{ volte 1 a se stesso"} = \boxed{101}$$

Ricordare che va considerato anche lo 0.

Esercizio 9

$$\sum_{m=0}^{3} 1 + \sum_{i=1}^{4} 2 = \sum_{m=0}^{3} 1 + \sum_{i=0}^{3} 2 = \sum_{m=0}^{3} (1+2) = \sum_{m=0}^{3} 3 = 3 \cdot 4 = \boxed{12}$$

Ciò che sta dentro la sommatoria non dipende dalla variabile.

Esercizio 10

$$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \left(\sum_{k=0}^{n} k + 0 \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1) - (n+1) \right)$$

Applico la serie che conosco:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{n^2+n+n^2+3n+\cancel{2}-2n-\cancel{2}}{2} = \frac{2n^2+2n}{2} = n^2+n = \boxed{n(n+1)}$$

Esercizio 11

Quale uguaglianza non è corretta? $\sum_{k=1}^{100} k^3 =$

a. $\sum_{s=0}^{99}(s+1)^3$; $\quad s=k-1$ $\quad k=100 \Rightarrow s=99$, $k=1 \Rightarrow s=0$ $\quad \Rightarrow k=s+1$ $\quad$ ok

c. $\sum_{i=1}^{9} i^3 + \sum_{i=10}^{100} i^3$; $\quad$ ok

~~b.~~ $\sum_{h=2}^{101}(h+1)^3$;

d. $\sum_{s=2}^{101}(s-1)^3$. $\quad s=k+1$ $\quad k=1 \Rightarrow s=2$, $k=100 \Rightarrow s=101$ $\quad$ ok

$\Rightarrow k=s-1$

Esercizio 12

$$\sum_{k=2}^{100}\sqrt{k} - \sum_{k=1}^{99}\sqrt{k} = \left(\cancel{\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}} - \sqrt{1}\right) - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{100}\sqrt{k}} - \sqrt{100}\right)$$

$$= -1 - (-10) = 9$$

Esercizio 13

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n = 1-1+1-1+\dots+(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Esercizio 14

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = (\cancel{a_1} - a_0) + (\cancel{a_2} - \cancel{a_1}) + (\cancel{a_3} - \cancel{a_2}) + \dots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_0$$

Esercizio 15

ⓐ Primo passo per $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ $\quad$ e $\quad \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$ $\quad$ ok

Dimostro la veridicità di $P(n+1)$ dando per vera $P(n)$.

- $$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+n+6n+6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}$$

- $$\frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

QED ▨

ⓑ Primo passo per $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ e $\frac{[1(1+1)]^2}{4} = \frac{2^2}{4} = 1$ ok

Dimostro la veridicità di $P(n+1)$ dando per vera $P(n)$.

- $$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2[n^2+4(n+1)]}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

- $$\frac{[(n+1)(n+2)]^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

QED ■

Esercizio 16

$2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ caso di partenza con $n=0$

$P(0)$: $2^0 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 0$ ok

Considero che $2^n \geq n$ per dimostrare $P(n+1)$

$P(n+1)$: $2^{n+1} \geq n+1 \Leftrightarrow 2^n \cdot 2 \geq n+1$

Se $2^n \geq n$, allora $2 \cdot 2^n \geq 2n$

Dimostrato il caso 0, il primo $P(n+1)$ possibile è $P(1)$ e $\forall n \geq 1$ $\quad 2n \geq n+1$
$\Leftrightarrow n \geq 1$ come detto

Quindi, se $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n \geq n+1$, allora $2^{n+1} \geq n+1$ QED ■

Esercizio 17

con $h>0$: $(1+h)^n \geq 1+hn \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \Rightarrow$ caso di partenza con $n=2$

$P(2)$: $(1+h)^2 \geq 1+2h \Leftrightarrow \cancel{1}+\cancel{2h}+h^2 \geq \cancel{1}+\cancel{2h} \Leftrightarrow h^2 \geq 0 \quad \forall h>0$ ok

Considero che $(1+h)^n \geq 1+hn$ per dimostrare $P(n+1)$

$P(n+1)$: $(1+h)^{n+1} \geq 1+h(n+1) \Leftrightarrow (1+h)^n(1+h) \geq 1+hn+h$

Se $(1+h)^n \geq 1+hn$, allora $(1+h)^n(1+h) \geq (1+hn)(1+h)$
in quanto $1+h>0$

$(1+hn)(1+h) = 1+h+hn+h^2n \geq 1+h+hn$, in quanto $h^2n > 0$

$\Rightarrow (1+h)^{n+1} \geq 1+h+hn = 1+h(n+1)$ QED ■

ESERCIZIO 18

caso di partenza $P(1)$: $c_1 = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$

So che $a, b \in \mathbb{Q}$. Anche $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. Essendo $\mathbb{Q}$ un campo, le operazioni di somma e moltiplicazione tra due elementi di $\mathbb{Q}$ restituisce un elemento di $\mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \in \mathbb{Q}$$

Inoltre, so che:

- $a < b \iff 2a - a < b \iff 2a < a+b \iff \frac{a+b}{2} = c_1 > a$
- $a < b \iff a < 2b - b \iff a+b < 2b \iff \frac{a+b}{2} = c_1 < b$

$\Rightarrow c_1 \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$

Data per vera $P(n)$, la dimostrazione di $P(n+1)$ è perfettamente analoga.

ESERCIZIO 19

a) $A = \{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n + 4, \; n \in \mathbb{N} \}$

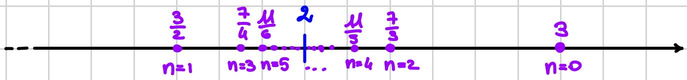
$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \Rightarrow A = \{-1+4, \; 1+4\} = \{3, 5\}$$

$\Rightarrow \inf A = \min A = 3$

$\Rightarrow \sup A = \max A = 5$

b) $B = \{ x \in \mathbb{R} : x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, \; n \in \mathbb{N} \} = \{ 2+1, \; 2 - \frac{1}{2}, \; 2 + \frac{1}{3}, \; 2 - \frac{1}{4}, \; 2 + \frac{1}{5}, \dots \}$

Valori che partono da 3 e oscillano intorno a 2.
Visualmente:



$\Rightarrow \inf B = \min B = \frac{3}{2}$, $\quad \sup B = \max B = 3$

ESERCIZIO 20

$$\sum_{k=1}^{n} [k^3 - (k-1)^3] = \sum_{k=1}^{n} [\cancel{k^3} - \cancel{k^3} + 3k^2 - 3k + 1]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \cancel{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{\cancel{6}\,2} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{2n^3 + \cancel{3n^2} + n - \cancel{3n^2} - 3n + 6n}{2} = \frac{2n^3 + 4n}{2} = n^3 + 2n = n(n^2+2)$$

Dall'esercizio 15

Esercizio 21

Supponiamo per assurdo che $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3$

Se $x \in \mathbb{Q}$, allora $x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ con p e q primi tra loro.

$x^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 3 \Leftrightarrow p^2 = 3q^2$

Se due numeri sono primi tra loro, allora lo sono anche i rispettivi quadrati. Se scrivo $p^2 = 3q^2$, significa che q^2 divide p^2.
Per ipotesi, però, p e q sono primi tra loro $\Rightarrow$ p^2 e q^2 sono primi tra loro e si scende in contraddizione con quello che è stato precedentemente detto. $\lightning$

Esercizio 22

ⓐ $C = \{ x \in \mathbb{R} : x = n^2 [\cos(n^2 \pi) - 1](-1)^n + 4,\ n \in \mathbb{N} \}$

$$[\cos(n^2\pi) - 1](-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases} \Rightarrow C = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \begin{cases} 2n^2 + 4 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 4 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Al crescere di $n \in \mathbb{N}$ pari $2n^2 + 4$ cresce da 4 a $+\infty$.

$\Rightarrow \min C = \inf C = 4$ $\qquad \Rightarrow \nexists \max C,\ \sup C = +\infty$

ⓑ $D = \{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn},\ m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$

Provo a minimizzare una delle due variabili : $m = 1 \Rightarrow x = n + \frac{1}{n}$

Man mano che n cresce, il secondo termine diventa sempre più insignificante, quindi $n + \frac{1}{n}$ è illimitato superiormente al variare di n in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Noto che se $n = m = 1$, $x = 2$, ma più in generale lo si vede se $n = m$: $x = \frac{m^2 + m^2}{m m} = \frac{2\cancel{m^2}}{\cancel{m^2}} = 2$

Dato che 2 si ottiene con n e m minimi, sarebbe bello dimostrare che $x \geq 2\ \forall n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$\frac{n^2 + m^2}{nm} \geq 2 \qquad nm > 0 \Rightarrow n^2 + m^2 \geq 2nm \Leftrightarrow n^2 - 2nm + m^2 \geq 0 \Leftrightarrow (n - m)^2 \geq 0$
$\forall n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \min D = \inf D = 2 \qquad \Rightarrow \nexists \max D,\ \sup D = +\infty$

Esercizio 23

ⓐ $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^b \in \mathbb{Q}$

La radice quadrata di un numero primo è un numero irrazionale, quindi basta scegliere a come numero primo con $a \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ($\Rightarrow a \in \mathbb{Q}$) e $b = \frac{1}{2}$ per confutare la tesi.

Il principio è estendibile a qualsiasi radice, quindi si può scegliere $b = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ o $n \in \mathbb{Z}$.

(b) $a, b \in \mathbb{Q}$ con $b > 0 \Rightarrow \log_a b \in \mathbb{Q}$

$\log_a b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \log_a b = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ e primi tra loro.

$\Leftrightarrow a^{p/q} = b \Leftrightarrow \sqrt[q]{a^p} = b$

Dal punto a si sa che non è detto che $\sqrt[q]{a^p} \in \mathbb{Q}$, quindi ci possono essere dei casi in cui $b \notin \mathbb{Q}$, andando contro le ipotesi.

(c/d) procedimento analogo a quello della prof.ssa Franceschi