COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
2 Settembre 2019

Esercizio 1. [10 punti] Data

$$G(s) = \frac{1+s^2}{s(1-s)\left(1-\frac{s}{10}\right)}$$

i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, calcolando eventuali asintoti ed intersezioni con gli assi;

iii) si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$. Si verifichi infine che lo studio della stabilità di $W(s)$ con Routh conduce agli stessi risultati.

Esercizio 2. [9 punti] Data

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(s-2)}$$

si traccino i luoghi positivo e negativo (con analisi di punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario), e si deduca la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale.

Esercizio 3. [7 punti] i) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

è richiesto il progetto di un controllore stabilizzante $C(s)$ che soddisfi le specifiche: errore a regime alla rampa parabolica pari a circa 0.1 (e quindi tipo 2), $\omega_A \simeq 0.1$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.
ii) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

con a_2, a_1, a_0 numeri reali arbitrari, si dimostri che esiste sempre un controllore di tipo puramente proporzionale che rende il risultante sistema retroazionato BIBO stabile.

Teoria. [5 punti] Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

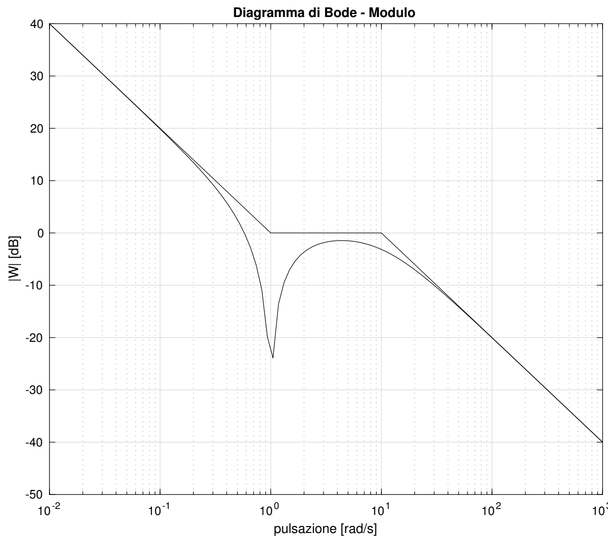
($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) e sollecitato dal segnale di ingresso

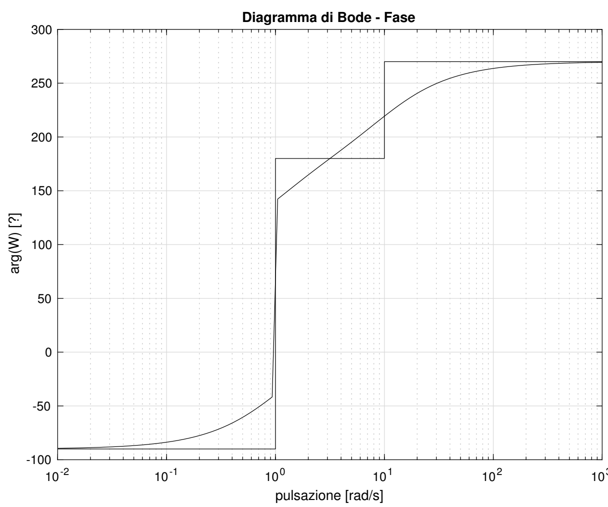
$$u(t) = e^{j\tilde{\omega}t}\delta_{-1}(t),$$

con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fissato. Assumendo condizioni iniziali arbitrarie, si introducano i concetti di risposta di regime permanente e di risposta transitoria, e si dimostri (operando nel dominio delle trasformate) come sotto opportune ipotesi l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema sia sempre esprimibile come somma delle due. Come cambia la risposta alla precedente domanda se le condizioni iniziali del sistema sono nulle?

SOLUZIONI

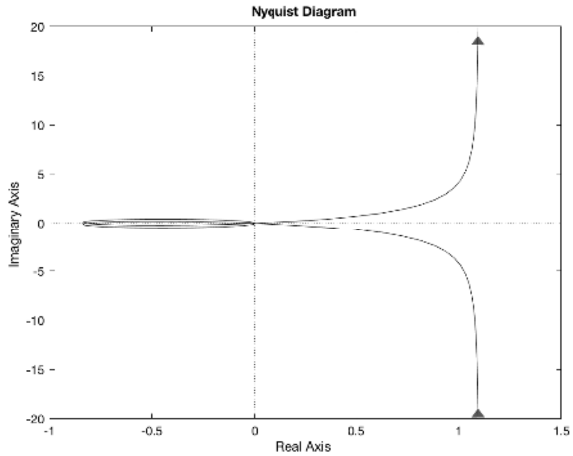
Esercizio 1. i) I diagrammi di Bode sono in figura

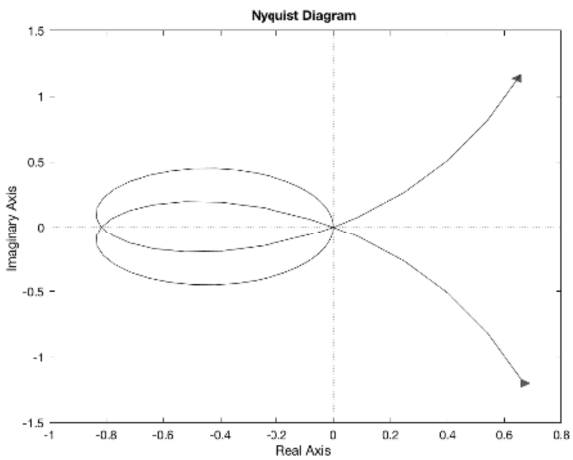




Il modulo di Bode (asintotico) scende con pendenza -20dB/dec fino a 0 dB per $\omega = 1$ rad/s, poi prosegue piatto fino ad $\omega = 10$ rad/s, dove riprende a scendere con pendenza -20 dB/dec. Il modulo reale evidenzia un picco di antirisonanza infinito (anche se la figura lo rappresenta erroneamente finito) per $\omega = 1$ rad/s, poi risale senza raggiungere l'asse delle ascisse, ammette un massimo relativo e poi riscende. La fase di Bode (asintotica) parte da $-90°$, ed in $\omega = 1$ rad/s deve salire di $90°$ ma anche esibire una discontinuità di $180°$, per cui si ritrova a $180°$, per poi salire a $270°$ in corrispondenza di $\omega = 10$ rad/s. La fase reale sale da $-90°$ fino a circa $-45°$, poi esibisce la discontinuità che la porta circa a $135°$, poi riprende a salire verso i $180°$, e infine riprende a salire per raggiungere asintoticamente $270°$.

ii) Il diagramma di Nyquist è in figura assieme al suoi dettagli intorno all'origine (per valori molto grandi di $|\omega|$)





Calcolando $G(j\omega)$ si ha facilmente

$$G(j\omega) = \frac{11}{10} \frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)} + j\frac{(1-\omega^2)\left(\frac{\omega^2}{10}-1\right)}{\omega(1+\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)}.$$

Si vede che parti reali ed immaginaria si annullano (entrambe) per $\omega = 1$. La parte immaginaria si annulla anche per $\omega = \sqrt{10}$, valore in corrispondenza a cui la parte reale vale $-9/11$. L'asintoto (verticale) si trova facendo il limite per $\omega \to 0^+$, che porge $\frac{11}{10} - i\infty$ (quindi arriva dal basso ed è posizionato in $s = +\frac{11}{10}$). Nyquist arriva quindi dall'infinito (in basso) nel IV quadrante, attraversa l'origine con pendenza di circa $-45°$ e si ritrova nel II quadrante, ruota in verso antiorario e attraversa il semiasse reale negativo in $-9/11$, per passare nel III quadrante e poi tornare in $s = 0$ con tangente verticale (270°) per $\omega \to +\infty$.

iii) Si noti preliminarmente che $n_{G_+} = 2$. L'analisi del numero di giri (aggiunta la parte relativa alle ω negative ed il semicerchio di raggio infinito percorso in senso orario) conduce facilmente a determinare i seguenti casi:

- $0 < K < \frac{11}{9}$: si ha $N = 0$ e $n_{G_+} = 2$ da cui $n_{W_+} = 2$;
- $K > \frac{11}{9}$: si ha $N = 2$ e $n_{G_+} = 2$ da cui $n_{W_+} = 0$;
- $K < 0$: si ha $N = -1$ e $n_{G_+} = 2$ da cui $n_{W_+} = 3$.

In definitiva, si ha sempre instabilità tranne per $K > \frac{11}{9}$.
La tabella di Routh è:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 0.1 & 1 \\ 2 & K-1.1 & K \\ 1 & \frac{0.9K-1.1}{K-1.1} & \\ 0 & K & \end{array}$$

ed analizzando variazioni e permanenze si trovano 3 variazioni per $K < 0$, 2 per $0 < K < \frac{11}{9}$, nessuna per $K > \frac{11}{9}$. Per $K = 1.1$ la tabella ha una riga nulla e quindi non potrebbe giungere a compimento, ma in realtà non succede nulla di speciale (come visto con Nyquist), in quanto sia per K leggermente più grande che leggermente più piccolo di 1.1 il numero di variazioni è sempre 2.

Esercizio 2. La ricerca dei punti doppi conduce a

$$s(s+1)(s^2+3s-4) = s(s+1)(s-1)(s+4) = 0$$

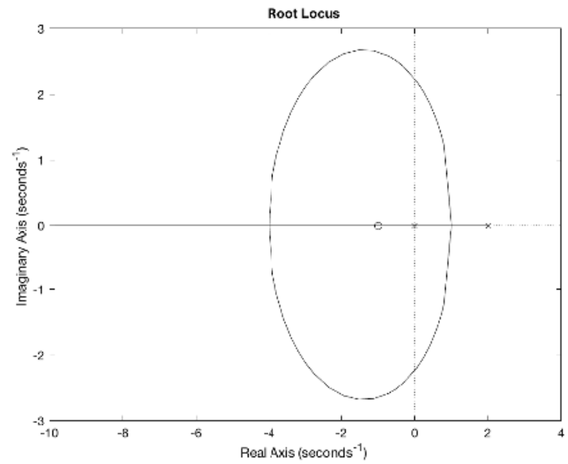
che permette di identificare le seguenti coppie punto doppio-valore di K:

$$(s=0, K=0),\ (s=-1, K=\infty),\ (s=1, K=\frac{1}{4}),\ (s=-4, K=\frac{32}{3}).$$

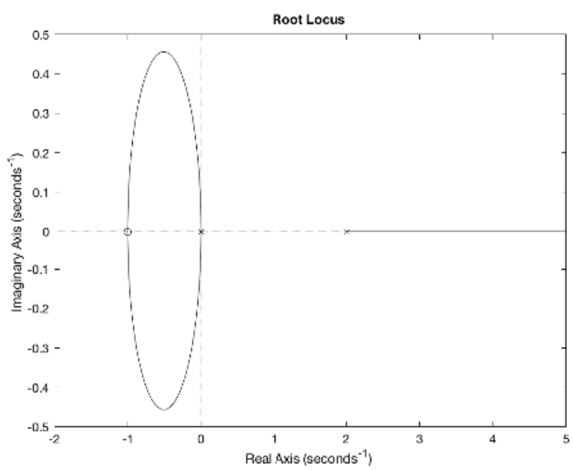
Quindi, oltre ai punti doppi banali, ce ne sono altri due entrambi appartenenti al luogo positivo. La ricerca delle intersezioni con l'asse immaginario conduce a

$$\begin{array}{rl} j\omega(2K-\omega^2) + [K(1-\omega^2)+2\omega^2] = 0 & \Rightarrow\ \ \omega = 0 \to (\omega=0, K=0), \\ & \Rightarrow\ \ \omega^2 = 2K \to K(5-2K) = 0 \\ & \Rightarrow\ \ \ (K=0, \omega=0),\ (K=\frac{5}{2}, \omega=\pm\sqrt{5}) \end{array}$$

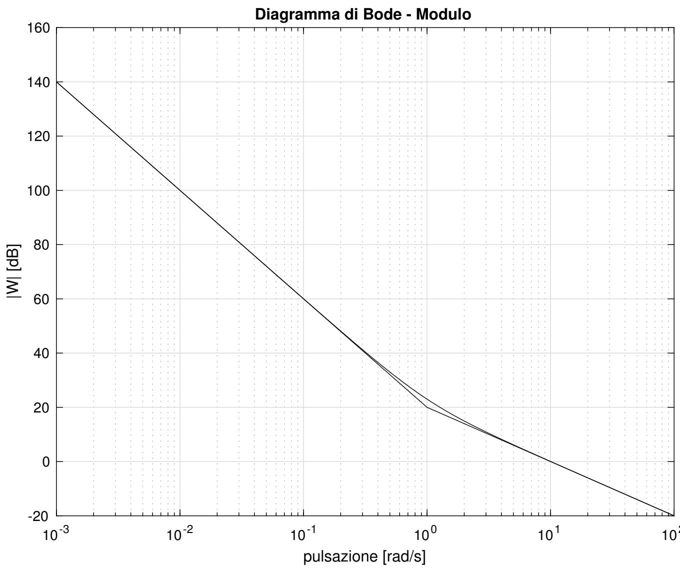
quindi, oltre all'intersezione banale (punto di partenza di alcuni rami) in $s = 0$, ci sono altre intersezioni solo nel luogo positivo. Nel luogo positivo due rami sull'asse reale che provengono da $s = 0$ ed $s = +2$ si incontrano nel punto doppio $s = 1$ per $K = \frac{1}{4}$, quindi escono sul piano complesso, attraversano l'asse immaginario in $s = \pm i\sqrt{5}$ per $K = \frac{5}{2}$, infine rientrano nell'asse reale nel punto doppio $s = -4$ per $K = \frac{32}{3}$, da cui un ramo si dirige verso lo zero in $s = -1$, l'altro verso $-\infty$ (asintoto del luogo positivo), mentre il terzo ramo semplicemente si muove sull'asse reale da $s = 0$ verso lo zero (doppio) in $s = -1$. La stabilità BIBO si ha solo in seguito all'attraversamento dell'asse immaginario, quindi per $K > \frac{5}{2}$ (prima si hanno due poli a parte reale positiva, che per $K = \frac{5}{2}$ diventano immaginari puri $s = \pm i\sqrt{5}$, ed un polo negativo).

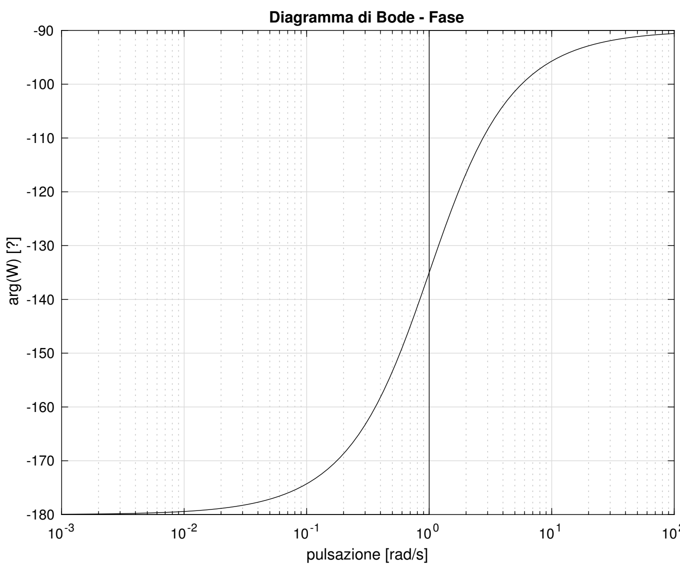


Il luogo negativo invece consta di un ramo che da $s = +2$ si muove sull'asse reale verso $+\infty$ (asintoto del luogo negativo), ed altri due rami complessi coniugati che si muovono dal polo doppio verso lo zero doppio, restando sempre nel semipiano a parte reale negativa vista l'assenza di intersezioni con l'asse immaginario nel luogo negativo. Quindi mai stabilità BIBO (sempre due poli a parte reale negativa ed uno positivo). Neppure per $K = 0$ si ha stabilità BIBO (entrambi i luoghi partono dai poli $s = 0$ - doppio - ed $s = +2$, quindi due poli nulli ed uno positivo).



Esercizio 3. Per il punto i), è necessario il ricorso a $C'(s) = 10$ per il requisito sull'errore a regime alla rampa parabolica, dopodichè si nota che in $\omega_A \simeq 0.1$ rad/s il modulo di $C'(j\omega)G(j\omega)$ è a $+60$ dB, mentre la fase è a quasi $-180°$.

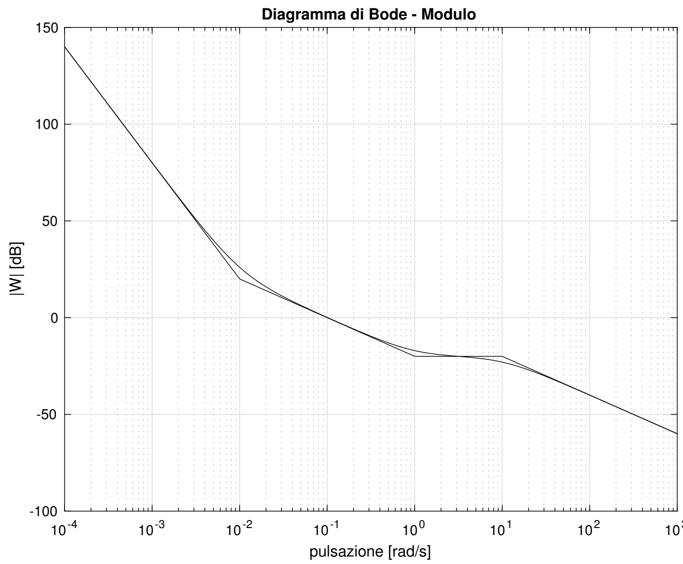


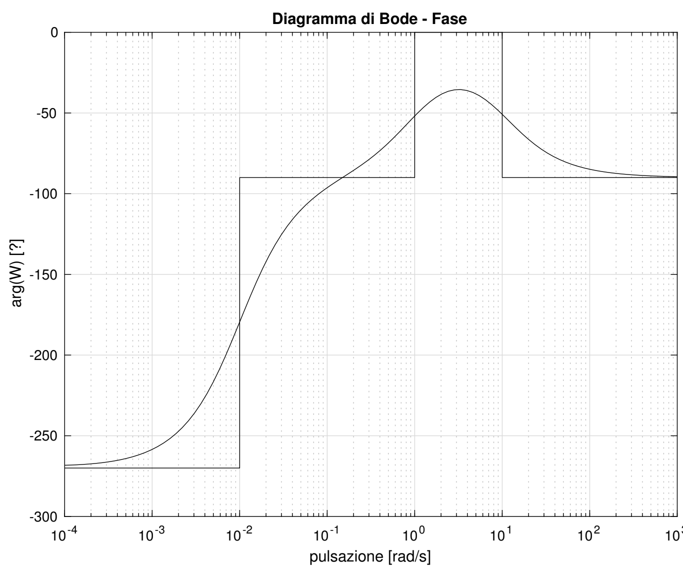


È necessario quindi il ricorso ad una rete a sella per abbassare il modulo di -60db, aumentando nel contempo la fase di circa $+90°$. Una possibile (tra le infinite) soluzioni è la seguente (già comprensiva di $C'(s) = 10$)

$$C(s) = \frac{10(1 + 100s)^2}{(1 + 10^6 s)\left(1 + \frac{s}{10}\right)}$$

in quanto l'effetto del primo polo assieme allo zero è un abbassamento del modulo di -80db, che poi risale (essendo lo zero doppio) di $+20$ dB per arrivare ad $\omega_A \simeq 0.1$ rad/s, causando anche il richiesto miglioramento di fase. Il secondo polo serve solo per rendere proprio il compensatore, ed è piazzato 2 decadi dopo ω_A.





Per il punto ii), basta osservare che il sistema possiede due zeri negativi e tre poli, per cui il luogo delle radici positivo avrà tre rami, due tendenti agli zeri (negativi) ed uno tendente a $-\infty$ (asintoto del luogo positivo). Quindi per K_E sufficientemente grande (e positivo), tutti i poli avranno certamente parte reale negativa.

Teoria. Si veda il Libro di testo, pp. 89 e seguenti.