COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
27 Gennaio 2017

Esercizio 1. [10.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 - \frac{1}{4}s + s^2}{s(1+s)^2} \in \mathbb{R}(s),$$

- Tracciare il diagramma di Bode di $G(j\omega)$ per $\omega \geq 0$.
- Tracciare il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuando asintoti ed intersezioni con gli assi.
- Discutere la stabilità BIBO della funzione di trasferimento $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$, al variare di $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$, ricorrendo al solo Criterio di Nyquist.

Esercizio 2. [8.5 punti] Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-1)^3}$, è richiesto il tracciamento dei luoghi delle radici positivo e negativo, evidenziando asintoti, punti doppi, intersezioni con l'asse immaginario, e discutendo quindi la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K in $\mathbb{R}$, $K \neq 0$.

Esercizio 3. [7 punti] Data la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2} \in \mathbb{R}(s)$ di un processo, è richiesto il progetto di due compensatori razionali, propri e stabilizzanti in modo che essi siano in grado di garantire le seguenti prestazioni:

i) $C_1(s)$ deve garantire che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con relativo errore di regime permanente $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.001$ (al gradino unitario), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ deve avere pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 100$ rad/sec e margine di fase $m_\psi \simeq 90°$;

ii) $C_2(s)$ dev'essere un controllore di tipo PID (eventualmente P, PI o PD) e garantire che il sistema retroazionato sia di tipo 1 con relativo errore di regime permanente $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.01$ (alla rampa lineare), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ deve avere pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 100\sqrt{10}$ rad/sec e margine di fase $m_\psi \simeq 90°$.

Teoria. [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.
[Chiarimento: con versione più restrittiva si intende quella che ipotizza due condizioni sul diagramma di Nyquist che consentono di definire sempre il numero N di giri che il diagramma compie attorno al punto critico]

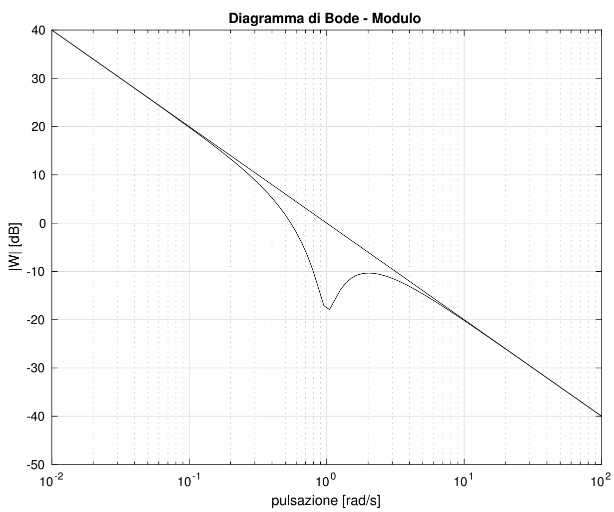
SOLUZIONI

Esercizio 1. Calcolando $G(j\omega)$ si ottiene, dopo alcuni passaggi

$$G(j\omega) = \frac{9}{4}\frac{\omega^2 - 1}{(\omega^2 + 1)^2} - j\frac{(\omega^2 - 2)\left(\omega^2 - \frac{1}{2}\right)}{\omega(\omega^2 + 1)^2}$$

Si vede facilmente che il limite per $\omega \to 0^+$ vale $-\frac{9}{4} - j\infty$, per cui abbiamo un asintoto verticale centrato in $-\frac{9}{4}$ e Nyquist proviene dal punto improprio in basso, parallelamente al semiasse immaginario negativo. Limitandoci alle $\omega > 0$, la parte reale si annulla per $\omega = 1$, dove quella immaginaria vale $\frac{1}{8}$, mentre la parte immaginaria si annulla per $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$, dove la parte reale vale $-\frac{1}{2}$, e per $\omega = \sqrt{2}$, dove la parte reale vale $\frac{1}{4}$. Quindi Nyquist proviene dall'infinito in basso con direzione della retta verticale passante per $s = -\frac{9}{4}$, poi interseca l'asse reale per $\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $s = -\frac{1}{2}$, poi l'asse immaginario per $\omega = 1$ in $s = \frac{j}{8}$, poi nuovamente l'asse reale per $\omega = \sqrt{2}$ in $s = \frac{1}{4}$, ed infine tende a zero con direzione verticale (come si deduce dall'andamento della fase in Bode). Bode e Nyquist sono in figura, ed evidenziano un modulo sempre decrescente da $+\infty$ a 0 (eccezion fatta per la presenza di un picco di anti-risonanza), ed una fase sempre decrescente da $-90°$ a $-450°$.

Diagrammi di Bode:



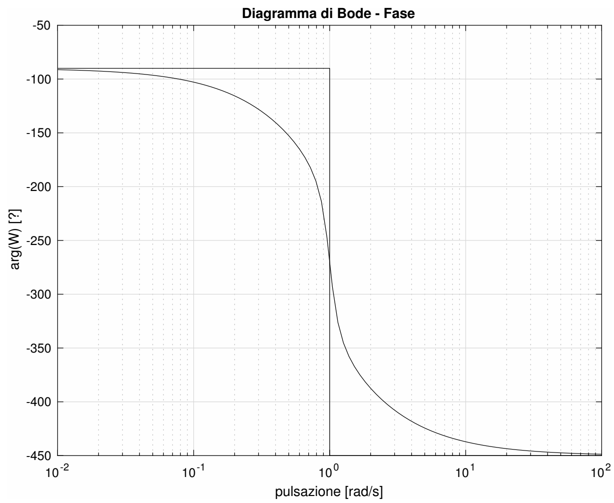
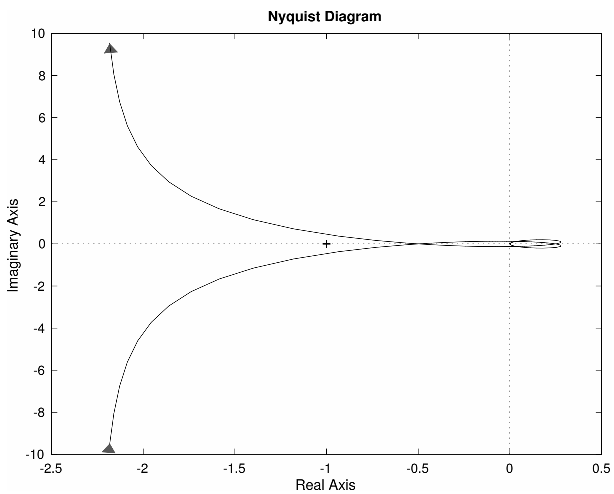
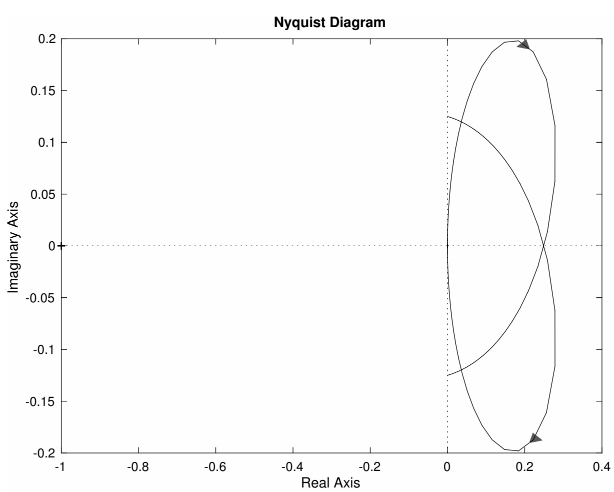


Diagramma di Nyquist e suo dettaglio in prossimità dell'origine:





Aggiungendo il cerchio all'infinito dovuto al polo nell'origine, ed evidenziando il punto $-\frac{1}{K}$ nelle varie posizioni che può assumere rispetto alle intersezioni di Nyquist con l'asse reale, si conclude, essendo $n_{G_+} = 0$ e quindi $n_{W_+} = -N$, che vale

$$\begin{array}{lcl} K < -4 & \Rightarrow & N = -3, n_{W_+} = 3 \\ 0 > K > -4 & \Rightarrow & N = -1, n_{W_+} = 1 \\ 0 < K < 2 & \Rightarrow & N = 0, n_{W_+} = 0 \\ K > 2 & \Rightarrow & N = -2, n_{W_+} = 2 \end{array}$$

Per i valori critici $K = -4, 2$ si hanno ovviamente (anche) poli immaginari puri, quindi la stabilità BIBO si ha soltanto per $0 < K < 2$.

Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi porge

$$(s-1)^2(s+1)(s+5) = 0$$

da cui le soluzioni banali $s = -1$ (per $K = +\infty$: si tratta di uno zero doppio della $G(s)$ e quindi di un punto doppio di arrivo asintotico di due rami dei luoghi), $s = -1$ (per $K = 0$: si tratta di un polo triplo della $G(s)$ e quindi di un punto triplo di partenza dei luoghi), e l'unica soluzione non banale $s = -5$ (corrispondente a $K = \frac{27}{2} > 0$, ed appartenente quindi al luogo positivo). Le intersezioni con l'asse immaginario si possono trovare imponendo

$$[(1-\omega^2)K + (3\omega^2 - 1)] + j\omega[2K + (3-\omega^2)] = 0$$

che, uguagliando a zero la parte immaginaria, porgono $\omega = 0$ e $\omega^2 = 3 + 2K$. Sostituendo la prima nella parte reale uguagliata a zero si trova $K = 1$, mentre sostituendo la seconda si ricava $K^2 - 2K - 4 = 0$, da cui $K = 1 \pm \sqrt{5}$, da cui $\omega^2 = 5 \pm 2\sqrt{5}$. Ne risultano quindi le seguenti intersezioni con l'asse immaginario

$$\begin{array}{lcl} s & = & 0 \ (K = 1 > 0) \\ s & = & \pm j\sqrt{5+2\sqrt{5}} \simeq \pm 3.08j \ \ (K = 1 + \sqrt{5} \simeq 3.24 > 0) \\ s & = & \pm j\sqrt{5-2\sqrt{5}} \simeq \pm 0.73j \ \ (K = 1 - \sqrt{5} \simeq -1.24 < 0) \end{array}$$

Alternativamente si può determinare l'attraversamento dell'origine semplicemente imponendo che il termine noto di $d(s)+Kn(s) = s^3+(K-3)s^2+(2K+3)s+(K-1)$ sia nullo. Ciò porta a $K = 1$. Le intersezioni immaginarie coniugate in senso stretto si possono determinare imponendo

$$d(s) + Kn(s) = (s^2 + \omega^2)(s - \alpha)$$

con $\omega > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, ovvero

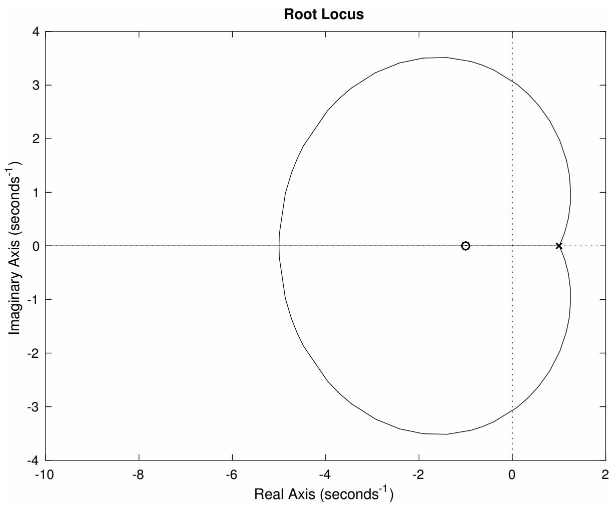
$$s^3 + (K-3)s^2 + (2K+3)s + (K-1) = s^3 - \alpha s^2 + \omega^2 s - \alpha\omega^2,$$

ed eguagliando i coefficienti al primo e secondo membro delle medesime potenze si giunge al sistema

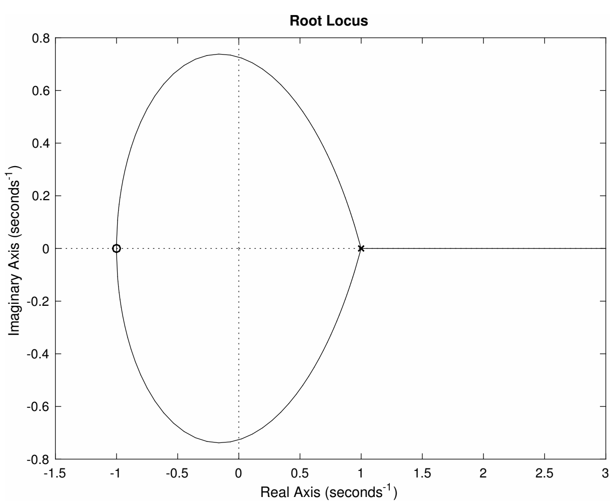
$$\left\{ \begin{array}{rcl} K - 3 & = & -\alpha, \\ 2K + 3 & = & \omega^2, \\ K - 1 & = & -\alpha\omega^2, \end{array} \right.$$

La risoluzione del precedente sistema porta alle medesime soluzioni indicate prima e ottenute con l'altro metodo.

Pertanto nel luogo positivo un ramo parte dal polo triplo $s = +1$ e, muovendosi sull'asse reale ed attraversando l'asse immaginario in $s = 0$ per $K = 1$, raggiunge asintoticamente lo zero doppio $s = -1$, mentre altri due rami escono sempre dal polo triplo nel piano complesso, attraversano l'asse immaginario in $s \simeq \pm 3.08j$ per $K \simeq 3.24$, e si dirigono quindi verso il punto doppio in $s = -5$, raggiunto per $K = 13.5$, dopodichè i due rami si muovono sull'asse reale, uno verso lo zero doppio e l'altro nella direzione dell'unico asintoto verso $-\infty$.

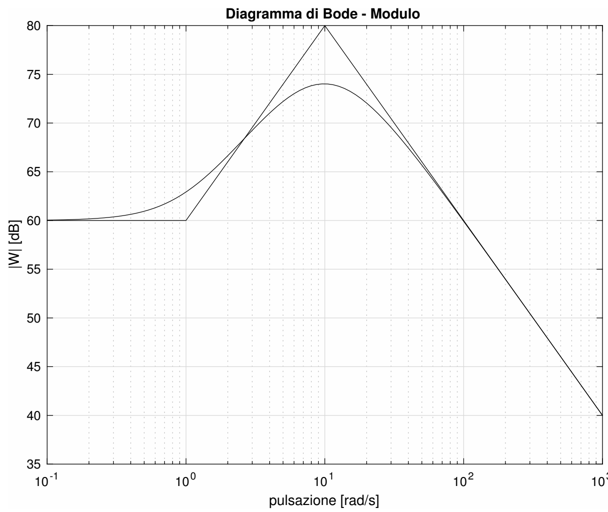


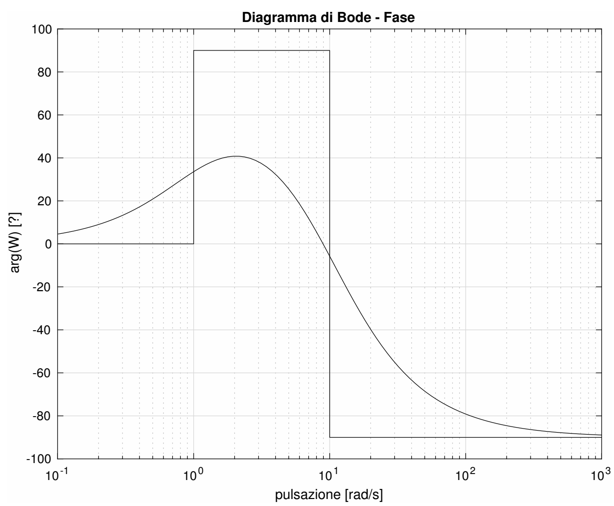
Nel luogo negativo, invece, un ramo rimane sull'asse reale e si muove dal polo triplo nella direzione dell'unico asintoto, verso $+\infty$, mentre gli altri due rami escono dal polo triplo nel piano complesso, attraversano l'asse immaginario in $s \simeq \pm 0.73j$ per $K \simeq -1.24$, quindi si dirigono asintoticamente verso lo zero doppio.



Guardando il luogo positivo si deduce che la $W(s)$ è BIBO stabile solo per $K > 3.24$ (solo per tali valori di K tutti e tre i rami si trovano nel semipiano negativo), mentre lo studio del luogo negativo rivela che la $W(s)$ non è BIBO stabile per nessun valore di K (almeno un ramo del luogo negativo si trova sempre nel semipiano positivo). Quindi si ha la stabilità BIBO di $W(s)$ se e solo se $K > 3.24$.

Esercizio 3. i) Il precompensatore che deve sistemare tipo ed errore di regime permanente è $C_1'(s) = 10^3$.





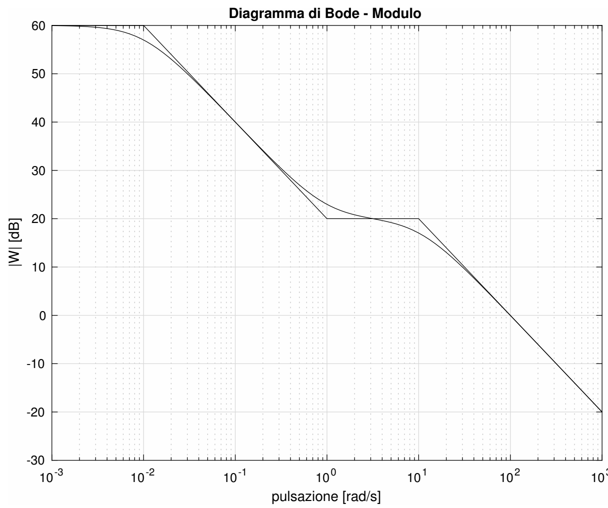
Il diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s)$ presenta pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10^5$ rad/sec e margine di fase di circa 90°. Dovendo abbassare ω_a di 3 decadi, è necessario il ricorso ad una rete ritardatrice/attenuatrice con coppia polo-zero distanziata 3 decadi e posizionata prima di $\omega_a \simeq 100$ rad/sec. Una possibilità consiste nel mettere un polo in $s = -0.01$ ed uno zero in $s = -10$ (che induce una cancellazione zero-polo ammissibile), il che corrisponde ad assumere come rete ritardatrice/attenuatrice

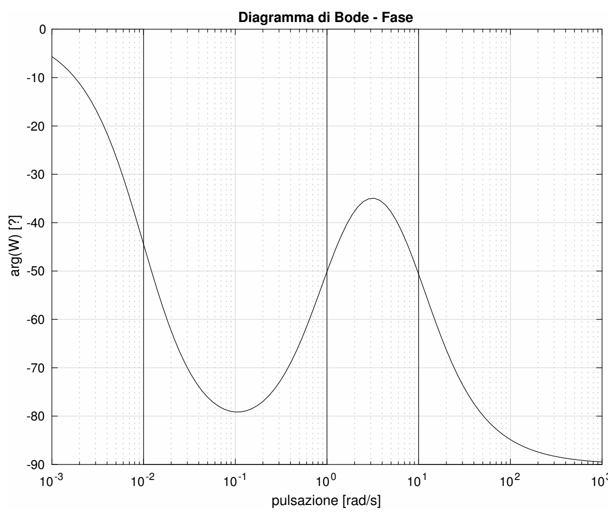
$$C_1''(s) = \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + 100s}$$

e quindi come controllore complessivo

$$C_1(s) = 1000\frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + 100s}.$$

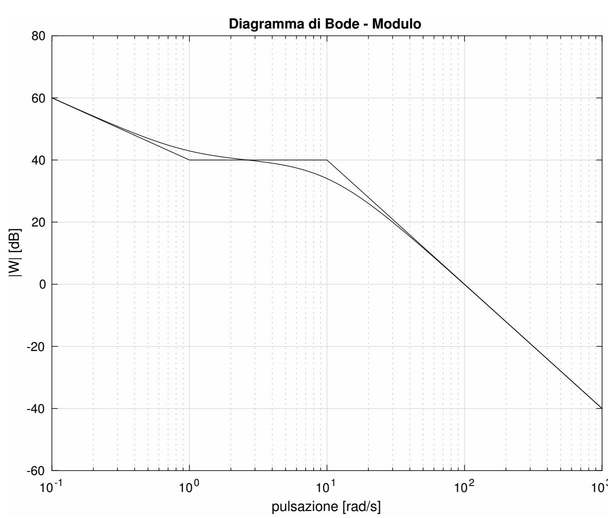
La funzione di trasferimento in catena aperta finale $C_1(s)G(s)$ ha diagrammi di Bode

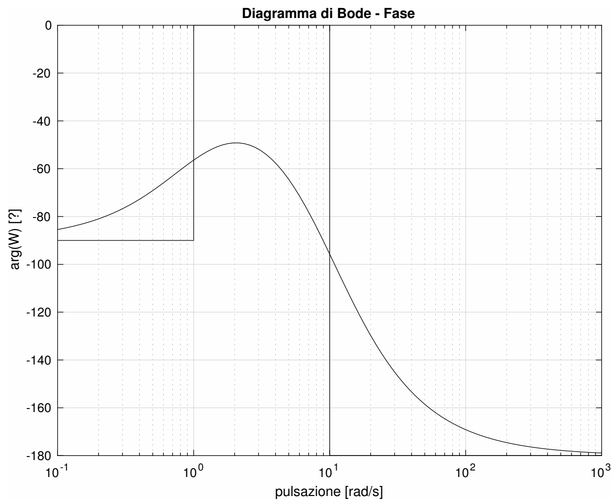




In base al criterio di Bode, il sistema retroazionato finale risulta BIBO stabile.

ii) Il precompensatore che deve sistemare tipo ed errore di regime permanente è $C_2'(s) = \frac{100}{s}$.

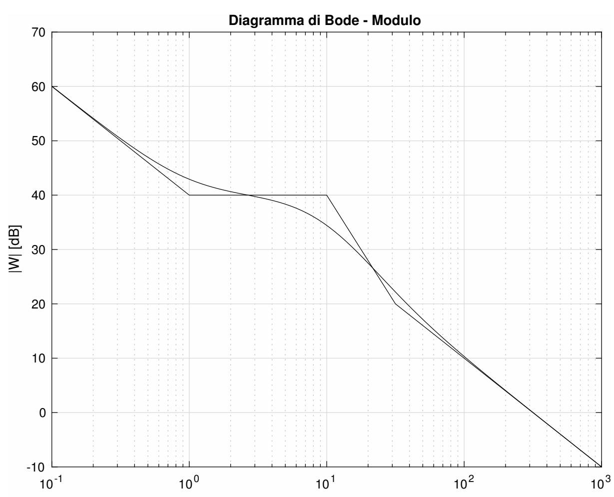


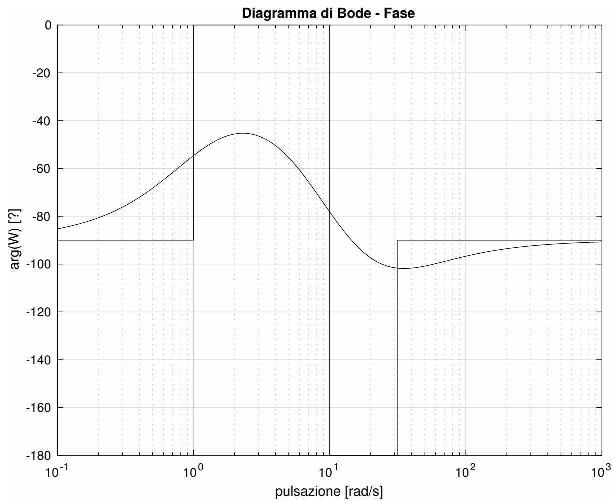


Il diagramma di Bode di $C_2'(s)G(s)$ presenta pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 100$ rad/sec e un margine di fase molto piccolo. Un solo zero in $s = -10\sqrt{10}$ è sufficiente a sistemare i requisiti, pertanto il PI

$$C_2(s) = 100\frac{1 + \frac{s}{10\sqrt{10}}}{s} = \frac{100}{s} + \sqrt{10}$$

permette il soddisfacimento di tutte ls specifiche, inclusa la stbilità BIBO del sistema retroazionato, in base al criterio di Bode.





Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 189 e successive.