ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 1 settembre 2020

Esercizio 1. Sia $S = \{(2t, -1, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e sia $U_k \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$U_k : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + kx_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la dimensione di U_k al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per il valore di k per cui U_k ha dimensione 2 scrivere una base di U_k.

(b) Scrivere una base di $U_k^\perp$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(c) Si ponga $k = 0$. Determinare $S \cap U_0^\perp$.

(d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene l'insieme S. Trovare la dimensione e una base di W.

Soluzione. (a) Le tre equazioni che definiscono U_k sono linearmente indipendenti per $k \neq -6$ e in questo caso $\dim U_k = 1$. Se invece $k = -6$ la terza equazione è combinazione lineare delle prime due, quindi U_{-6} è definito da due equazioni e quindi $\dim U_{-6} = 2$. Per $k = -6$ si ha

$$U_{-6} : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$U_{-6} : \begin{cases} x_1 = 2x_3 + x_4 \\ x_2 = 6x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Da queste equazioni segue che una base di U_{-6} è formata dai vettori $u_1 = (2, 6, 1, 0)$ e $u_2 = (1, 2, 0, 1)$.

(b) I vettori che formano una base di $U_k^\perp$ sono formati dai coefficienti delle equazioni di U_k. Quindi, per $k \neq -6$, una base di $U_k^\perp$ è formata dai vettori $u_1^\perp = (1, 0, -2, 1)$, $u_2^\perp = (2, -1, 2, 0)$ e $u_3^\perp = (0, 1, k, -2)$.
Invece, per $k = -6$, una base di $U_{-6}^\perp$ è formata dai vettori $u_1^\perp = (1, 0, -2, 1)$ e $u_2^\perp = (2, -1, 2, 0)$.

(c) Poniamo $k = 0$. Una base di $U_0^\perp$ è formata dai vettori $u_1^\perp = (1, 0, -2, 1)$, $u_2^\perp = (2, -1, 2, 0)$ e $u_3^\perp = (0, 1, 0, -2)$. I vettori di S sono del tipo $(2t, -1, t, 2)$. Per vedere se questo vettore è linearmente dipendente dai vettori della base di $U_0^\perp$ calcoliamo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2t & -1 & t & 2 \end{pmatrix}$$

Riducendo la matrice in forma a scala si trova che il rango è 3 solo se $t = 0$, questo significa che l'unico vettore che appartiene a $S \cap U_0^\perp$ è il vettore che si ottiene per $t = 0$, cioè il vettore $(0, -1, 0, 2)$.

(d) I vettori di S si scrivono nella forma

$$(2t, -1, t, 2) = t\,(2, 0, 1, 0) + (0, -1, 0, 2)$$

Dato che W contiene S allora i vettori $(2,0,1,0)$ e $(0,-1,0,2)$ appartengono a W. Dato che questi due vettori sono linearmente indipendenti essi sono una base di W e quindi $\dim W = 2$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

(a) Sia $B = (2, k, 1)$. Usando il Teorema di Rouché-Capelli dire per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il sistema $AX = B$ ha soluzioni.

(b) Trovare gli autovalori di A e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Dire se A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) La matrice A è simile a A^2 ? La matrice A è simile a A^3 ? La matrice A è uguale a A^3 ? [*le risposte devono essere motivate, non è necessario calcolare* A^2 *e* A^3]

Soluzione. (a) Bisogna calcolare il rango della matrice

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & k \\ 3 & 8 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si trova che A ha rango 2 mentre la matrice completa $(A \mid B)$ ha rango 2 solo se $k = 0$. Questo significa che il sistema $AX = B$ ha soluzioni solo per $k = 0$.

(b) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & -2 \\ 3 & 8 & -5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

quindi gli autovalori di A sono 0, 1 e -1. Dato che gli autovalori sono distinti la matrice è diagonalizzabile (si noti che il testo del problema non chiede di calcolare gli autovettori).

(c) Abbiamo visto che A è diagonalizzabile, quindi è simile alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Anche la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori 0, 1 e -1, quindi anche questa matrice è simile alla matrice D. Dato che le due matrici sono simili alla stessa matrice D, allora sono anche simili tra di loro.

(d) Abbiamo visto che A è simile alla matrice D, quindi si ha $A = PDP^{-1}$ (dove P è la matrice le cui colonne sono gli autovettori di A). Allora è

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

ma

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi gli autovalori di A^2 sono 0, 1 e 1 e quindi sono diversi da quelli di A. Questo significa che A e A^2 non sono simili, perché hanno autovalori diversi.
Si ha poi

$$A^3 = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

e

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$$

quindi $A^3 = PD^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$. Le matrici A^3 e A sono uguali, quindi sono anche simili.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo tridimensionale sono dati il punto $P = (1, 3, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} 2y + z - 2 = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini l'equazione del piano π contenente la retta r e passante per il punto P.

(b) Si determini l'equazione del piano σ passante per il punto P e ortogonale alla retta r.

(c) Si determini l'equazione della retta s passante per il punto P, perpendicolare alla retta r e contenuta nel piano π.

(d) Si determini il punto R di intersezione delle rette r e s e la distanza del punto P dalla retta r.

Soluzione. (a) Il fascio di piani di asse r è

$$\lambda(2y + z - 2) + \mu(x - 2y - z) = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per P si trova $5\lambda = 6\mu$, e quindi $\lambda = 6$ e $\mu = 5$. L'equazione del piano π è quindi

$$\pi : 5x + 2y + z - 12 = 0.$$

(b) Un vettore direttore di r è $v_r = (0, 1, -2)$ da cui si ricava che l'equazione del piano σ deve essere del tipo

$$\sigma : y - 2z + d = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per P si trova $d = -1$, quindi si ha

$$\sigma : y - 2z - 1 = 0.$$

(c) Si ha $s = \pi \cap \sigma$, quindi le equazioni cartesiane di s sono

$$s : \begin{cases} 5x + 2y + z - 12 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Oppure, se vogliamo calcolare le equazioni parametriche di s, basta trovare un vettore v_s che sia ortogonale ai vettori $v_r = (0, 1, -2)$ e $n_\pi = (5, 2, 1)$. Ad esempio, il vettore $v_s = (1, -2, -1)$. Le equazioni parametriche di s sono

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

(d) Mettendo a sistema le equazioni di r con quelle di s si trova $R = (2, 1, 0)$. Si ha poi

$$\operatorname{dist}(P, r) = \operatorname{dist}(P, R) = \|P - R\| = \sqrt{6}.$$

Oppure per calcolare la distanza di P da r si può usare la formula per la distanza di un punto da una retta.