Dispensa 3: Filtri e sistemi LTI nel dominio delle frequenze

ESERCIZI

Esercizio 1

Dato il filtro $h(n) = -\delta(n) + 3\delta(n-1) - \delta(n-2)$, calcolare la sua risposta in frequenza $H(\omega)$ e l'equazione alle differenze associata.

SVOLGIMENTO

Ricordando che:

- $y(n) = x(n) * h(n)$ per tutti i sistemi LTI
- $\delta(n-k) * x(n) = x(n-k)$

Allora posso calcolare la sua equazione alle differenze: $y(n) = x(n) * h(n) = -x(n) + 3x(n-1) - x(n-2)$

Applicando le proprietà di linearità e di traslazione della FT si ottiene

$Y(\omega) = -X(\omega) + 3X(\omega)e^{-j\omega} - X(\omega)e^{-2j\omega}$

$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = -1 + 3e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}$

Alternativamente si sarebbe potuto calcolare la risposta in frequenza direttamente come $FT[h(n)]$, ricordando che $FT[\delta(n-k)] = e^{-jk\omega}$ e applicando le proprietà della FT.

Esercizio 2

Dato il filtro definito dalla risposta impulsiva $H(\omega) = e^{-j\omega}(3-2cos(\omega))$, calcolare l'equazione alle differenze associata.

SVOLGIMENTO

Suggerimento: utilizzare le formule di Eulero $[cos(\omega) = \frac{(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{2}]$

Sfruttando quanto detto sopra posso riscrivere la risposta in frequenza come:

$$H(\omega) = e^{-j\omega}(3 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega})) = 3e^{-j\omega} - e^{0} - e^{-2j\omega} = -1 + 3e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}$$

Considerando che per i sistemi LTI $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ posso, quindi, scrivere:

$$Y(\omega) = -X(\omega) + 3e^{-j\omega}X(\omega) - e^{-2j\omega}X(\omega) \implies y(n) = -x(n) + 3x(n-1) - x(n-2)$$

Esercizio 3

Dato il filtro FIR definito dai coefficienti $b_k = [1, 2, 1]$, determinare $H(\omega)$ e definirne modulo e fase.

SVOLGIMENTO

Ricordo che un filtro FIR è definito come: $y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

Dunque, in questo caso:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{2} b_k x(n-k) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

Quindi posso calcolare la risposta impulsiva:

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

e da questa calcolare la risposta in frequenza come $H(\omega) = FT[h(n)]$

$\implies H(\omega) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j\omega}[e^{j\omega} + 2 + e^{-j\omega}] = e^{-j\omega}[2 + e^{j\omega} + e^{-j\omega}] =$

$=$ (formula di eulero) $= e^{-j\omega}[2 + 2cos(\omega)]$

Modulo:

$$|H(\omega)| = |e^{-j\omega}(2 + 2cos(\omega))| = |e^{-j\omega}| \cdot |2 + 2cos(\omega)| = 2 + 2cos(\omega)$$

perché:

- gli esponenziali complessi hanno modulo unitario
- il secondo termine $(2 + 2cos(\omega))$ è reale e non negativo

Fase:

$$Arg(H(\omega)) = Arg(e^{-j\omega}(2 + 2cos(\omega))) = Arg(e^{-j\omega}) + Arg(2 + 2cos(\omega)) = -\omega$$

perché:

- l'argomento di un prodotto è la somma degli argomenti dei fattori
- l'argomento di un numero reale non negativo, come $(2 + 2cos(\omega))$, è 0

Esercizio 4

Dato il filtro:

$$H(\omega) = e^{-2j\omega}(21 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega)$$

Calcolarne modulo e fase al variare di ω.

SVOLGIMENTO

Modulo:

$$|H(\omega)| = |e^{-2j\omega}(21 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega)| = |e^{-2j\omega}| \cdot |21 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega| = 21 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega$$

perché:

- l'esponenziale complesso ha modulo unitario
- il secondo termine è sempre non negativo: infatti ipotizzando l'esistenza di un ω per cui $cos\omega$ e $cos2\omega$ assumano entrambi il valore -1 (caso peggiore), comunque $21 - 4 - 2 = 15 \geq 0$.

Fase:

$$|Arg(H(\omega))| = Arg(e^{-2j\omega}(21 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega)) = Arg(e^{-2j\omega}) + Arg(21 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega) = -2\omega$$

perché

- l'argomento di un prodotto è la somma degli argomenti dei fattori
- il secondo termine è sempre non negativo (quindi con fase nulla).

Esercizio 5

Dato il filtro: $h_1(n) = \begin{cases} 3 & n = 0 \\ 2 & n = \pm 1 \\ 1 & n = \pm 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$

Calcolare modulo e fase della risposta in frequenza.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto calcoliamo la risposta in frequenza come $H_1(\omega) = FT[h_1(n)]$

$\implies H_1(\omega) = 3 + 2e^{-j\omega} + 2e^{j\omega} + e^{-2j\omega} + e^{2j\omega} =$ (formule di eulero) $= 3 + 4cos(\omega) + 2cos(2\omega)$

Per quanto riguarda il modulo questo è $|H_1(\omega)| = |3 + 4cos(\omega) + 2cos(2\omega)|$, in quanto $H_1(\omega)$ è reale. Considerando quanto appena detto, quindi, la fase è nulla (al più uguale a π se la risposta in frequenza assume valore negativo).

NOTA: Solitamente quando si parla di "fase nulla" si intende che la risposta in frequenza è reale, indipendentemente dal suo segno. Quindi un filtro è a fase nulla quando : $Arg(H_1(\omega)) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \forall\omega$

Esercizio 5bis

Dato il filtro

$$h_2(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 4 \\ 2 & n = 1, 3 \\ 3 & n = 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Calcolare modulo e fase della sua funzione di trasferimento. *Suggerimento:* il filtro è lo stesso dell'esercizio 5, ma traslato: $h_2(n) = h_1(n - 2)$ *SVOLGIMENTO*

Ricordando che $FT[h(n - k)] = H(\omega)e^{-jk\omega}$, posso sfruttare il suggerimento e quando ottenuto nell'esercizio precedente:

$$H_2(\omega) = H_1(\omega)e^{-j2\omega} = (3 + 4cos(\omega) + 2cos(2\omega))e^{-j2\omega}$$

Per quanto riguarda il modulo $|H_2(\omega)| = |H_1(\omega)|$, in quanto l'esponenziale complesso ha modulo unitario.

Per quanto riguarda la fase invece:

$$Arg(H_2(\omega)) = Arg(H_1(\omega)e^{-j2\omega}) = Arg(H_1(\omega)) + Arg(e^{-j2\omega}) = -2\omega$$

Il sistema è quindi a fase lineare.

NOTA: $H_1(\omega)$ è a fase nulla ma non è causale (perché non è identicamente nullo per $n < 0$), mentre $H_2(\omega)$ è a fase lineare e causale.