

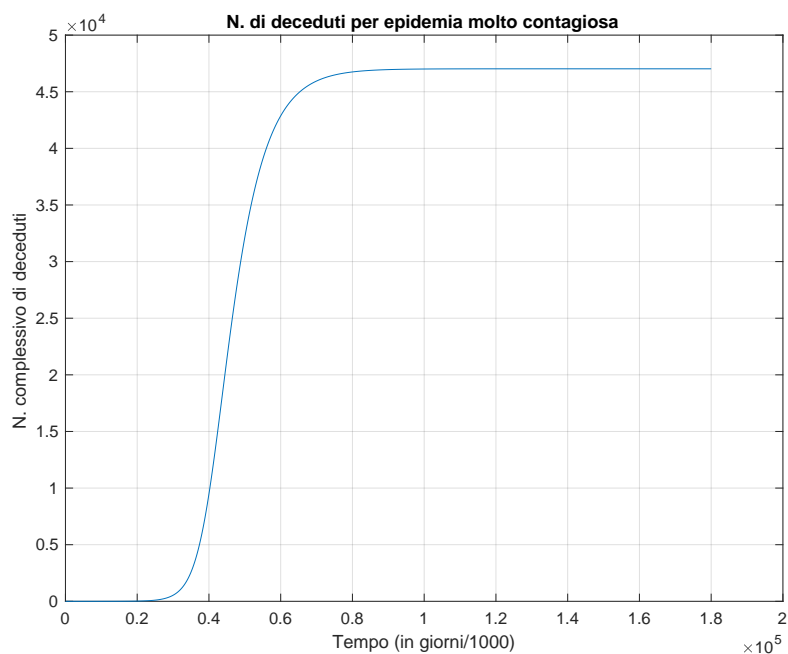
Soluzioni del I homework.

Caso (i) (malattia molto contagiosa):

Durata: 142 giorni

N. complessivo di deceduti: 47025 persone

N. di individui che non hanno contratto la malattia: 59510 persone

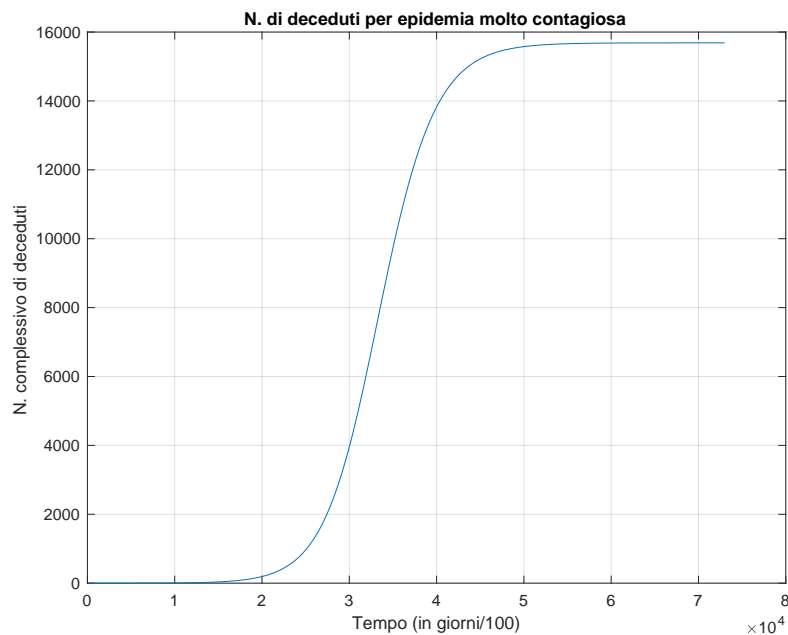


Caso (ii) (malattia poco contagiosa):

Durata: 703 giorni

N. complessivo di deceduti: 15686 persone

N. di individui che non hanno contratto la malattia: 686290 persone



Ragionamenti e i passaggi per ottenere la soluzione

Per prima cosa scegliamo le variabili di stato: a questo scopo dobbiamo chiederci che variabili dobbiamo conoscere a un certo istante per poter calcolare l'evoluzione futura dell'epidemia. Una scelta molto intuitiva è quella di selezionare le tre variabili

S : numero di individui suscettibili

I : numero di individui infetti

R : numero di individui rimossi

Calcoliamo le derivate delle tre variabili scelte per vedere se si tratta effettivamente di variabili di stato.

Sappiamo che il numero di suscettibili che, nell'unità di tempo, diventano infettivi (per effetto del contagio) è proporzionale, secondo il coefficiente β , al prodotto del numero dei suscettibili per il numero degli infettivi. Possiamo scrivere questo in termini matematici come segue:

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t)$$

L'incremento degli infettivi è dato dalla differenza fra coloro che si infettano e coloro che passano alla classe dei rimossi, pertanto si ha:

$$\frac{dI}{dt} = \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t)$$

e

$$\frac{dR}{dt} = \dot{R}(t) = \alpha I(t).$$

In conclusione, il modello di stato è:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\beta S(t)I(t) \\ \dot{I}(t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) \\ \dot{R}(t) = \alpha I(t) \\ y(t) = 0.05R(t) \end{cases}$$

Simulazione di epidemia relativa a malattia molto contagiosa inclusi grafico dei deceduti, e calcolo di durata, numero complessivo di deceduti e numero di persone suscettibili alla fine dell'epidemia

```
%%% CASO DI EPIDEMIA MOLTO CONTAGIOSA
```

```
clear all
```

```
close all
```

```
b=1/(2*10^6); %si fissa beta (denotato da b)
```

```
a=1/6; %si fissa alfa (denotato da a)
```

```
N=1000;
```

```
delt=1/N; %si fissa l'ampiezza degli intervallini a 1/N di giorno
```

```
%(per determinare un'ampiezza adeguata ...
```

```
% si procede per tentativi raddoppiando N (ossia dimezzando l'ampiezza ...
```

```
% degli intervallini) fino a quando con un ulteriore ...
```

```
% raddoppio di N la soluzione rimane essenzialmente uguale)
```

```
x0=[1000000;1;0]; %si fissa lo stato iniziale
```

```
S=x0(1); %si denota con S la prima componente dello stato corrente
```

```
I=x0(2); %si denota con I la seconda componente dello stato corrente
```

```
R=x0(3); %si denota con R la terza componente dello stato corrente
```

```
x=x0 %inizialmente la traiettoria di stato contiene solo lo stato iniziale
```

```
Tf=180; % si fissa a 6 mesi (180 giorni) la durata della simulazione ...
```

```
%(per determinare una durata adeguata ...
```

```
% si procede per tentativi aumentando la durata ...
```

```
% fino a quando si constata che la simulazione supera la fine ...
```

```
% dell'epidemia).
```

```
for t=0:delt:Tf %in ciascun istante ...
```

```
Sp=-b*S*I; %si calcola la derivata della prima componente dello stato ...
```

```
Ip=b*S*I-a*I; %la derivata della seconda componente dello stato ...
```

```
Rp=a*I; %e la derivata della terza componente dello stato
```

```
S=S+Sp*delt; %si calcola la prima componente dello stato all'istante successivo
```

```
I=I+Ip*delt; %la seconda componente dello stato all'istante successivo
```

```
R=R+Rp*delt; %e la terza componente dello stato all'istante successivo
```

```
xs=[S;I;R]; %si sovrappongono le tre componenti ottenendo lo stato all'istante successivo
```

```
x=[x xs]; %si allunga la traiettoria di stato giustapponendo alla traiettoria
```

```
%gia' calcolata fino a questo momento lo stato all'istante successivo
```

```

end
%Alla fine x e' una matrice con tre righe (il numero di componenti dello stato) e
%tante colonne quanti sono gli istanti t_i considerati.

y=0.05*x(3,:); %si calcola l'uscita (il 5% della terza riga di x)
plot(y) %si traccia il grafico di y
title('N. di deceduti per epidemia molto contagiosa') %si aggiunge il titolo
xlabel(['Tempo (in giorni/',num2str(N),')']) % si aggiunge l'unita' in ascissa ...
ylabel('N. complessivo di deceduti') % e in ordinata
grid

%CALCOLO QUANDO AVVIENE LA FINE DELL'EPIDEMIA
for t=0:N:Tf*N %avanzo di un intero giorno alla volta
    k=t+1; %k e' l'indice della colonna di x che contiene i dati al tempo t
    %(devo usare k=t+1 perche' il primo indice e' 1 e il prmo tempo e' zero)
    if x(2,k)<1
        fine_ep=t; % fine_ep e' il primo istante misurato in giorni/N in cui ...
            % il giorno inizia con un numero di infetti e' minore di 1.
        Durata=fine_ep/N %si calcola la durata come numero di giorni in cui
            %il numero di infetti e' stato non minore di 1
            %almeno in una parte della giornata

        break
    end
end
end

Sfine=x(1,fine_ep) %Numero di suscettibili ancora presenti alla fine dell'epidemia
Ifine=x(2,fine_ep) %Numero di infetti presenti alla fine dell'epidemia ...
    %(deve essere <1)
Rfine=x(3,fine_ep) %Numero di rimossi alla fine dell'epidemia
Morti_totali=0.05*x(3,fine_ep) %Numero totale di morti alla fine dell'epidemia

```

Simulazione di epidemia relativa a malattia poco contagiosa inclusi grafico dei deceduti, e calcolo di durata, numero complessivo di deceduti e numero di persone suscettibili alla fine dell'epidemia

```
%%% CASO DI EPIDEMIA POCO CONTAGIOSA
```

```
clear all
```

```
close all
```

```
b=1/(5*10^6); %si fissa beta (denotato da b)
```

```
a=1/6; %si fissa alfa (denotato da a)
```

```
N=100;
```

```
delt=1/N; %si fissa l'ampiezza degli intervallini a 1/N di giorno
```

```
%(per determinare un'ampiezza adeguata ...
```

```
% si procede per tentativi raddoppiando N (ossia dimezzando l'ampiezza ...
```

```
% degli intervallini) fino a quando con un ulteriore ...
```

```
% raddoppio di N la soluzione rimane essenzialmente uguale)
```

```
x0=[1000000;1;0]; %si fissa lo stato iniziale
```

```
S=x0(1); %si denota con S la prima componente dello stato corrente
```

```
I=x0(2); %si denota con I la seconda componente dello stato corrente
```

```
R=x0(3); %si denota con R la terza componente dello stato corrente
```

```
x=x0 %inizialmente la traiettoria di stato contiene solo lo stato iniziale
```

```
Tf=730; % si fissa a 2 anni (730 giorni) la durata della simulazione ...
```

```
%(per determinare una durata adeguata ...
```

```
% si procede per tentativi aumentando la durata ...
```

```
% fino a quando si constata che la simulazione supera la fine ...
```

```
% dell'epidemia).
```

```
for t=0:delt:Tf %in ciascun istante ...
```

```
Sp=-b*S*I; %si calcola la derivata della prima componente dello stato ...
```

```
Ip=b*S*I-a*I; %la derivata della seconda componente dello stato ...
```

```
Rp=a*I; %e la derivata della terza componente dello stato
```

```
S=S+Sp*delt; %si calcola la prima componente dello stato all'istante successivo
```

```
I=I+Ip*delt; %la seconda componente dello stato all'istante successivo
```

```
R=R+Rp*delt; %e la terza componente dello stato all'istante successivo
```

```
xs=[S;I;R]; %si sovrappongono le tre componenti ottenendo lo stato all'istante successivo
```

```
x=[x xs]; %si allunga la traiettoria di stato giustapponendo alla traiettoria
```

```
%gia' calcolata fino a questo momento lo stato all'istante successivo
```

```

end
%Alla fine x e' una matrice con tre righe (il numero di componenti dello stato) e
%tante colonne quanti sono gli istanti t_i considerati.
%
y=0.05*x(3,:); %si calcola l'uscita (il 5% della terza riga di x)
plot(y) %si traccia il grafico di y
title('N. di deceduti per epidemia molto contagiosa') %si aggiunge il titolo
xlabel(['Tempo (in giorni/',num2str(N),')']) % si aggiunge l'unita' in ascissa ...
ylabel('N. complessivo di deceduti') % e in ordinata
grid

%CALCOLO QUANDO AVVIENE LA FINE DELL'EPIDEMIA
for t=0:N:Tf*N %avanzo di un intero giorno alla volta
    k=t+1; %k e' l'indice della colonna di x che contiene i dati al tempo t
        %(devo usare k=t+1 perche' il primo indice e' 1 e il prmo tempo e' zero)
    if x(2,k)<1
        fine_ep=t; % fine_ep e' il primo istante misurato in giorni/N in cui ...
            % il nuovo giorno inizia con un numero di infetti e' minore di 1.
        Durata=fine_ep/N %si calcola la durata come numero di giorni in cui
            %il numero di infetti e' stato non minore di 1
            %almeno per una parte della giornata

        break
    end
end
end

Sfine=x(1,fine_ep) %Numero di suscettibili ancora presenti alla fine dell'epidemia
Ifine=x(2,fine_ep) %Numero di infetti presenti alla fine dell'epidemia ...
    %(deve essere <1)
Rfine=x(3,fine_ep) %Numero di rimossi alla fine dell'epidemia
Morti_totali=0.05*x(3,fine_ep) %Numero totale di morti alla fine dell'epidemia

```

Calcolo di durata, n. di deceduti e n. di individui che rimangono suscettibili

Tutte queste informazioni sono contenute nelle tre righe della matrice x ottenuta con il programma precedente.

Esaminando la seconda riga di x si nota che tutti i relativi valori sono minori di 1 a partire da un certo campione (chiamiamolo \bar{k}) che determina la durata della malattia.

Il valore del campione \bar{k} della prima riga ci dà il numero di individui che non hanno contratto la malattia dopo che l'epidemia è terminata.

Il numero complessivo di deceduti dopo che l'epidemia è terminata è pari al 5% del campione \bar{k} della terza riga della matrice x .

I relativi valori si possono ottenere esaminando “a mano” la matrice x ottenuta o con una semplice routine come quella riportata nel codice.

Osservazioni Si noti che nel caso di malattia poco contagiosa:

- la durata è molto più lunga (quasi due anni contro meno di 5 mesi);
- il numero complessivo di deceduti è circa un terzo del caso di malattia molto contagiosa;
- il numero di individui che non hanno contratto la malattia dopo che l'epidemia è terminata è pari a quasi il 70% della popolazione contro meno del 6% del caso di malattia poco contagiosa