$\bar{d}$ spostamento elettrico

$\bar{b}$ campo induzione magnetica

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Densità volumetrica di carica $\rho_c(P,t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ $\left[\frac{C}{m^3}\right]$

Densità di corrente elettrica $\bar{j}(P,t) = \rho_c(P,t)\underbrace{\bar{V}_P(P,t)}_{\text{velocità migrazione cariche}}$ $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

$$i(t) = \int_S \bar{j}(P,t)\,\hat{n}\,ds$$

Eq di continuità $i(t)_{uscente} = \oint_S \bar{j}\,\hat{n}\,ds$ $\quad i(t)_{uscente} = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \rho_v\,dV}_{Q_{int}}$

$\nabla \cdot \bar{j} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$ → densità volumetrica di carica

$\downarrow$ T. Gauss

$$= \int_V \nabla \cdot \bar{j}\,dV \Longrightarrow \int_V \nabla \cdot \bar{j}\,dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_v\,dV$$

Campo spostamento elettrico $\bar{d} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{e}$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$

$$\oint_S \bar{d}\,\hat{n}\,ds = \int_V \rho_c\,dV = Q_{tot}$$

legge di Gauss $\oint_S \bar{d}\,\hat{n}\,ds = \int_V \rho_c\,dV$

$\nabla \cdot \bar{d} = \rho_c$

$\downarrow$ T di Gauss $\Longrightarrow \int_V \nabla \cdot \bar{d}\,dV = \int_V \rho_c\,dV$

$$= \int_V \nabla \cdot \bar{d}\,dV$$

legge di Faraday $\underbrace{\oint_\gamma \bar{e} \cdot \hat{\gamma}\,d\gamma}_{\text{f.e.m.}} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{S(\gamma)} \bar{b}\,\hat{n}\,ds}_{\text{flusso magnetico}}$

$\nabla \times \bar{e} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial t}$

legge di Ampère $\oint_\gamma \bar{h}\,\hat{\gamma}\,d\gamma = \int_{S(\gamma)} \bar{j}\,\hat{n}\,ds = \sum_i I_i$

$\nabla \times \bar{h} = \bar{j}$

$\downarrow$ T. di Stokes $\Longrightarrow \int_{S(\gamma)} \nabla \times \bar{h}\,\hat{n}\,ds = \int_{S(\gamma)} \bar{j}\,\hat{n}\,ds$

Solo regime stazionario $\quad = \int_{S(\gamma)} \nabla \times \bar{h}\,\hat{n}\,ds$

legge di Ampère – Maxwell $\nabla \cdot \bar{j} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t} \xrightarrow[\text{legge di Gauss}]{} = -\frac{\partial\, \nabla \cdot \bar{d}}{\partial t} = -\nabla \cdot \underbrace{\frac{\partial \bar{d}}{\partial t}}_{\text{densità di corrente di spostamento}}$ $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

$$\int_{S(\gamma)} \nabla \times \bar{h}\,\hat{n}\,ds = \int_{S(\gamma)} \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t}\right)\hat{n}\,ds$$

$$\nabla \times \bar{h} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \nabla \cdot \bar{j} + \nabla \cdot \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} = 0$$

# EQ MAXWELL

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Eq di Maxwell
$$\begin{cases} \nabla \times \bar{e} = -\dfrac{\partial \bar{b}}{\partial t} & \text{Faraday} \\ \nabla \times \bar{h} = \bar{j} + \dfrac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \underline{\bar{j}_I} & \text{Ampère – Maxwell} \end{cases}$$

densità corrente elettrica impressa } tiene conto delle sorgenti

Eq alle divergenze
$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{d} = \rho_c & \text{Gauss} \\ \nabla \cdot \bar{b} = 0 \end{cases}$$

## Relazioni costitutive mezzi materiali

- Vuoto + no sorgenti

$$\begin{cases} \bar{b} = \mu_0 \bar{h} \\ \bar{d} = \varepsilon_0 \bar{e} \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \bar{e} = -\dfrac{\partial \bar{b}}{\partial t} = -\mu_0 \dfrac{\partial \bar{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{h} = \underbrace{\cancel{\bar{j}}}_{\text{vuoto}} + \dfrac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \underbrace{\cancel{\bar{j}_I}}_{\text{no sorgenti}} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \bar{e}}{\partial t} \end{cases}$$

- mezzo materiale + no sorgenti

$$\begin{cases} \bar{d} = \bar{d}(\bar{e}) \\ \bar{b} = \bar{b}(\bar{h}) \\ \bar{j} = \bar{j}(\bar{e}) \end{cases}$$

Simmetria mezzo
- omogeneità tempo / spazio
- isotropia

relazione causa-effetto
- linearità
- dispersività tempo / spazio

se vale linearità
$\bar{d}(\bar{r},t) = \int \bar{G}(\bar{r},t,\bar{r}',t') \cdot \bar{e}(\bar{r}',t') d\bar{r}' dt'$
$\bar{G}$: matrice di Green (3x3), rende conto della possibile anisotropia

> caso particolare → isotropo, omogeneo, non dispersivo

$$\begin{cases} \bar{d}(\bar{r},t) = \varepsilon \bar{e}(\bar{r},t) \\ \bar{b}(\bar{r},t) = \mu \bar{h}(\bar{r},t) \\ \bar{j}(\bar{r},t) = \sigma \bar{e}(\bar{r},t) \end{cases}$$

$\varepsilon$ permittività dielettrica $\left[\frac{F}{m}\right]$ $\quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

$\mu$ permeabilità magnetica $\left[\frac{H}{m}\right]$ $\quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$

$\sigma$ conducibilità elettrica $\left[\frac{S}{m}\right]$

> caso pratico → isotropo, omogeneo tempo, lineare, non dispersivo spz

$$\bar{d}(\bar{r},t) = \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\bar{r}, t-t') \bar{e}(\bar{r},t') dt'$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# vettori complessi

- notazione di steinmertz

$$\bar{e}(\bar{r},t) = \sum_{i=1}^{3} \underbrace{E_i(\bar{r})}_{\text{modulo componente } i} \cos(\omega t + \overbrace{\varphi_i(\bar{r})}^{\text{fase componente } i}) \hat{x}_i \qquad \omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow \bar{E}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^{3} E_i(\bar{r}) e^{j\varphi_i(\bar{r})} \hat{x}_i \qquad \bar{e}(\bar{r},t) = \mathrm{Re}\{\bar{E}(\bar{r}) e^{j\omega t}\}$$

- proprietà

$\bar{A} \parallel \bar{B}$ se $\bar{A} = \lambda \bar{B}$ : stesso stato di polarizzazione
uguale rapporto tra semiassi

$\bar{A} \parallel \bar{B}$ and ($\lambda \in \mathbb{R}$ or $\bar{A}, \bar{B}$ polarizzati rettilineamente) $\Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$

$\bar{A} \perp \bar{B}$ se $\langle \bar{A} | \bar{B} \rangle = \bar{A} \cdot \bar{B}^* = 0$ : se polar ellittica $\Rightarrow$ rotazione opposta
se polar rettilinea $\Rightarrow$ polar rettil ortogonale
rapporto tra semiassi invertito

$$\bar{A} \cdot \bar{B}^* = \sum_{n=1}^{3} A_n B_n e^{j(\varphi_{An} - \varphi_{Bn})}$$

# EQ DI MAXWELL IN REGIME ARMONICO

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{e} = -\dfrac{\partial \bar{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{h} = \bar{j} + \dfrac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \bar{j}_I \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B} \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D} + \bar{J}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{d} = \rho_c \\ \nabla \cdot \bar{b} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot \bar{D} = \rho_c \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \end{cases}$$

- relazioni costitutive
caso pratico $\rightarrow$ isotropo, omogeneo tempo, lineare, non dispersivo spz

$$\begin{cases} \bar{D}(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{r},\omega) \bar{E}(\bar{r}) \\ \bar{B}(\bar{r}) = \mu(\bar{r},\omega) \bar{H}(\bar{r}) \\ \bar{J}(\bar{r}) = \sigma(\bar{r},\omega) \bar{E}(\bar{r}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \\ \nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + j\omega\varepsilon \bar{E} + \bar{J}_i \end{cases}$$

$$= j\omega \varepsilon_c \bar{E} + \bar{J}_i \qquad \left[\varepsilon_c = \varepsilon - \frac{j\sigma}{\omega}\right]$$

$\hookrightarrow$ permittività elettrica complessa

Angolo di perdita $\delta := \operatorname{atan} \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ $\quad \delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

- buon conduttore $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ $\quad$ densità corrente elettrica $\gg$ densità corrente di spostamento
- buon dielettrico $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$

$$j \gg \frac{\partial \bar{d}}{\partial t}$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

## condizioni di continuità

$$\begin{cases} \bar{d}_2\hat{n} = \bar{d}_1\hat{n} + \rho_s \\ \bar{b}_2\hat{n} = \bar{b}_1\hat{n} \end{cases}$$ componente normale di $\bar{d}$ e $\bar{b}$ si conserva

$$\begin{cases} \hat{n}\times\bar{h}_2 = \hat{n}\times\bar{h}_1 + \bar{j}_s \\ \hat{n}\times\bar{e}_2 = \hat{n}\times\bar{e}_1 \end{cases}$$ componente tangente di $\bar{e}$ e $\bar{h}$ si conserva

$$\begin{cases} (\bar{d}_2 - \bar{d}_1)\hat{n} = \rho_s \\ \hat{n}\times(\bar{h}_2 - \bar{h}_1) = \bar{j}_s \end{cases}$$

## condizioni di continuità con CEP ($\sigma = \infty$)

$\bar{e}_{CEP} = 0$ (altrimenti $i_{CEP} = \infty$)

$\hat{n}\times\bar{e}_{CEP} = \hat{n}\times\bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}_2$ (e $\bar{d}_2$) è normale alla sup o nullo

$\bar{h}_{CEP} = 0$ (perché non c'è campo elettrico) $\Rightarrow \bar{b}_{CEP} = 0$

$\bar{b}_{CEP}\cdot\hat{n} = b_2\cdot\hat{n} \Rightarrow \bar{b}_2$ (e $\bar{h}_2$) è tangente alla sup o nullo

$$\begin{cases} \bar{d}_2 = \bar{d}_2\cdot\hat{n} = \rho_s = \text{carica superficie} \\ \hat{n}\times\bar{h}_2 = \bar{j}_s = \text{corrente superficie} \end{cases}$$

## Risoluzione eq di Maxwell

in mezzo: isotropo, omogeneo, lineare, non dispersivo $\Rightarrow \varepsilon, \mu, \sigma$ cost

↳ componenti di $\bar{e}$ disaccoppiate

sorgenti fuori dalla regione di interesse

ipotizziamo assenza di conduzione elettrica $\sigma = 0$

$\nabla\cdot\bar{b} = 0 \Rightarrow \mu\nabla\cdot\bar{h} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\bar{h} = 0$ campo magnetico solenoidale

$$\begin{cases} \nabla\times\bar{e} = -\mu\dfrac{\partial\bar{h}}{\partial t} \\ \nabla\times\nabla\times\bar{h} = \nabla\times\underbrace{\sigma\bar{e}}_{=0} + \varepsilon\dfrac{\partial\nabla\times\bar{e}}{\partial t} \\ \nabla\times\nabla\times\bar{h} = -\nabla^2\bar{h} + \nabla\underbrace{(\nabla\cdot\bar{h})}_{=0} \end{cases} \Rightarrow -\nabla^2\bar{h} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{h}}{\partial t^2}$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

$\Rightarrow$ Eq di Alambert $\nabla^2 \bar{h} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} = 0$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial^2 y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial^2 z^2}}_{\nabla^2 \bar{h}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} = 0 \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = c$$

considero $\frac{\partial^2 h}{\partial^2 z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow h(z,t) = \underbrace{f(z-vt)}_{\text{onda progressiva}} + \underbrace{g(z+vt)}_{\text{onda regressiva}}$

se $\sigma \neq 0 \Rightarrow \nabla^2 \bar{h} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial t^2} \underbrace{- \mu\sigma \frac{\partial \bar{h}}{\partial t}}_{\text{"forza d'attrito" che smorza } f \text{ e } g} = 0$

- per campo elettrico

$\nabla \cdot \bar{d} = \rho_c \Rightarrow \varepsilon \nabla \cdot \bar{e} = \rho_c$ se $\rho_c = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{e} = 0$

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \bar{e} = -\mu \frac{\partial \nabla \times \bar{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{h} = \underbrace{\sigma \bar{e}}_{=0} + \varepsilon \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \\ \nabla \times \nabla \times \bar{e} = -\nabla^2 \bar{e} + \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \bar{e}}_{=0}) \end{cases} \Rightarrow -\nabla^2 \bar{e} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2}$$

$\Rightarrow$ Eq di Alambert $\nabla^2 \bar{e} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2} = 0$

## Risoluzione eq di Maxwell Regime armonico

in mezzo: isotropo, omogeneo, lineare, non dispersivo $\Rightarrow \varepsilon_c, \mu$ cost

sorgenti fuori dalla regione di interesse

$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \mu \nabla \cdot \bar{H} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{H} = 0$ campo magnetico solenoidale

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} \\ \nabla \times \nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon_c \nabla \times \bar{E} \\ \nabla \times \nabla \times \bar{H} = -\nabla^2 \bar{H} + \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \bar{H}}_{=0}) \end{cases} \Rightarrow -\nabla^2 \bar{H} = -\underbrace{(j\omega)^2 \mu\varepsilon_c}_{= -\omega^2\mu\varepsilon_c = K_\varepsilon^2} \bar{H}$$

$\Rightarrow$ Eq di Helmholtz (eq delle onde) $\nabla^2 \bar{H} - K_\varepsilon^2 \bar{H} = 0$

Scompongo nelle 3 componenti e considero $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - k_\varepsilon^2 H = 0$
(posso perché non dispersivo)

$$\Rightarrow \quad H(z) = H_{0p} e^{-k_\varepsilon z} + H_{0r} e^{k_\varepsilon z} \qquad k_\varepsilon = \omega\sqrt{-\mu\varepsilon} = \alpha + j\beta$$

cost di fase

cost di attenuazione

nel vuoto $\alpha = 0 \Rightarrow H(z) = \underbrace{H_{0p} e^{-j\beta z} + H_{0r} e^{j\beta z}}_{\text{funzioni periodiche di periodo } \lambda = \frac{2\pi}{\beta}}$

nel dominio del tempo

$$h(z,t) = \mathrm{Re}\{H(z) e^{j\omega t}\} = \underbrace{H_{0p} \cos(\omega t - \beta z)}_{\text{onda progressiva}} + \underbrace{H_{0r} \cos(\omega t + \beta z)}_{\text{onda regressiva}}$$

## TEOREMI FONDAMENTALI ELETTROMAGNETISMO

- t. poynting (bilancio potenze)
- t. reciprocità
- t. equivalenza (sostituzione sorgenti con modelli semplificati)
- t. immagini (conduttori in presenza di sorgenti si comportano da sorgenti speculari)
- t. unicità (se c'è una soluzione, è unica)

# Poynting

## Teorema di Poynting

in mezzo: lineare, isotropo, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio

in presenza di sorgenti

$$\begin{cases} \bar{h}\, \nabla \times \bar{e} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \bar{h} \\ \bar{e}\, \nabla \times \bar{h} = \sigma |\bar{e}|^2 + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \bar{e} - \bar{j}_i \bar{e} \\ \bar{a} \cdot \nabla \times \bar{c} - \bar{c}\, \nabla \times \bar{a} = \nabla \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{h}\, \nabla \times \bar{e} - \bar{e}\, \nabla \times \bar{h} = \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{h}) = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \bar{h} - \sigma |\bar{e}|^2 + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} \bar{e} - \bar{j}_i \bar{e}$$

$$\Rightarrow -\bar{e}\, \bar{j}_i = \bar{h} \frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{e} \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \sigma |\bar{e}|^2 + \nabla \cdot (\bar{e} \times \bar{h})$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

$$-\int_V \bar{e}\,\bar{j}_i\,dV = \int_V \left(\bar{h}\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{e}\frac{\partial \bar{d}}{\partial t}\right) dV + \int_V \sigma|\bar{e}|^2\,dV + \int_V \nabla\cdot(\bar{e}\times\bar{h})\,dV$$

$-\int_V \bar{e}\,\bar{j}_i\,dV$ : Potenza necessaria a sostenere le sorgenti di campo em

il segno meno tiene conto del fatto che per mantenere la corrente impressa deve essere svolto un lavoro per unità di tempo (potenza) uguale e contrario a quello della forza di Lorentz agente sulle cariche (es: batteria o dinamo)

$$\int_V \left(\bar{h}\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} + \bar{e}\frac{\partial \bar{d}}{\partial t}\right) dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mu|\bar{h}|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon|\bar{e}|^2\right) dV \qquad \bar{d}=\varepsilon\bar{e},\ \bar{b}=\mu\bar{h}$$

variazione per unità di tempo dell'energia magnetica ed elettrica accumulata all'interno di V [se <u>non</u> dispersivo nel tempo]

(altrimenti rende conto dell'energia persa per via dell'isteresi elettrica/magnetica)

$\int_V \sigma|\bar{e}|^2\,dV$ : potenza dissipata per effetto Joule dovuta alla presenza di materiali conduttori con perdite

$\int_V \nabla\cdot(\bar{e}\times\bar{h})\,dV$ applico T di Gauss $\oint_S (\bar{e}\times\bar{h})\,\hat{n}\,dS = \oint_S \bar{p}\cdot\hat{n}\,dS$

<u>flusso di densità di potenza</u> (elettromagnetica) che <u>fuoriesce dalla sup</u> S che racchiude il volume

Vettore di Pointing $\bar{p} = \bar{e}\times\bar{h}$ $\left[\frac{W}{m^2}\right]$

↳ densità di potenza em

## Teorema di Poynting regime armonico

in mezzo: lineare, isotropo, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio

in presenza di sorgenti

$$\begin{cases} \begin{cases} \bar{H}^*\nabla\times\bar{E} = -j\omega\mu\bar{H}^* \\ -\bar{E}\nabla\times\bar{H}^* = j\omega\varepsilon\bar{E}^*\bar{E} - \bar{E}\bar{J}_i^* \end{cases} \\ \bar{A}\nabla\times\bar{C} - \bar{C}\nabla\times A = \nabla(\bar{C}\times\bar{A}) \end{cases}$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

$$\Rightarrow \bar{H}^*\nabla\times\bar{E} - \bar{E}\nabla\times\bar{H}^* = \nabla(\bar{E}\times\bar{H}^*) = -j\omega\mu|\bar{H}|^2 + j\omega\varepsilon|\bar{E}|^2 - \sigma|\bar{E}|^2 - \bar{E}\bar{J}_i^*$$

passo a forma integrale, moltiplico per $\frac{1}{2}$, e applico T. Gauss a $\int_V \nabla(\bar{E}\times\bar{H}^*)\,dV$

$$-\frac{1}{2}\int_V \bar{E}\cdot\bar{J}_i^* \, dV = j2\omega\int_V \left(\frac{1}{4}\mu|\bar{H}|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon|\bar{E}|\right) dV + \frac{1}{2}\int_V \sigma|E|^2 dV + \oint_S \bar{P}\hat{n}\, ds$$

Vettore di Poynting: $\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^*$ $\left[\frac{VA}{m^2}\right]$ (valore efficace di $\bar{e}$)$^2 = \frac{1}{2}|\bar{E}|^2$

$\bar{P}$ non è la notaz di Steinmertz di $\bar{p}$ (perché dato da un op non lineare)

- significato

il teorema è uguaglianza tra numeri complessi $\Rightarrow$ separo parti $\mathbb{R}e$ e $\mathbb{I}m$

$\mathbb{R}e[\,]$: potenza attiva erogata dalle sorgenti = potenza attiva dissipata per effetto Joule + flusso di densità di potenza attiva uscente

$\mathbb{I}m[\,]$: potenza reattiva erogata dalle sorgenti = potenza reattiva immagazzinata + flusso densità di di potenza reattiva uscente

- potenza attiva erogata dalle sorgenti [W] $> 0$
- potenza attiva dissipata per effetto Joule [W] $> 0$
- flusso di potenza attiva uscente dal volume [W] $\begin{cases} > 0 & \text{se flusso uscente} \\ < 0 & \text{se flusso entrante} \end{cases}$
- potenza reattiva erogata dalle sorgenti [VAR] $\gtrless 0$
- potenza reattiva immagazzinata nel volume [VAR] $\gtrless 0$
- flusso di potenza reattiva uscente dal volume [VAR] $\gtrless 0$

Risonanza di volume $j2\omega\int_V \left(\frac{1}{4}\mu|\bar{H}|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon|\bar{E}|^2\right) dV = 0$

↳ possibile solo se $\bar{J}_i = 0$ e $\sigma = 0$

no sorgenti no perdite ohmiche

## Vettore di Poynting

È la densità di potenza elettromagnetica

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

tempo: $\bar{p}(t) = \bar{e}(t)\times\bar{h}(t)$

frequenza: $\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^*$

$\bar{p}(t) \neq Re[\bar{P}e^{j\omega t}]$ Invece $\bar{p}(t) = \mathbb{R}e[\bar{P}] + \mathbb{R}e[\frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}e^{j2\omega t}]$

$\mathbb{R}e[\bar{P}] = \frac{1}{T}\int_0^T \bar{p}(t)\,dt$ valore medio di $\bar{P}$ in un periodo

# ONDE PIANE

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Hp di lavoro

- tutto lo spazio
- no sorgenti
- mezzo lineare, isotropo, omogeneo e non dispersivo

$\Rightarrow \varepsilon, \mu, \sigma$ cost

Hp non realistiche ma soluzione $\simeq$ campo irradiato da antenna in mezzo finito con stesse proprietà

dato che non dispersivo, $\bar{E}$ ha componenti <u>non</u> accoppiate

$\Rightarrow$ considero soluzione per onda polarizzata lungo $\hat{x}$ $\quad \bar{E}(\bar{r}) = E(\bar{r})\hat{x}$

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{E} - K_\varepsilon^2 \bar{E} = 0 & \text{(eq Helmholtz)} \\ E(\bar{r}) = E_0 \left( f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z) \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overbrace{E_0 \left( \frac{d^2 f_1}{dx^2} f_2 f_3 + f_1 \frac{d^2 f_2}{dy^2} f_3 + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3}{dz^2} \right)}^{\nabla^2 \bar{E}} = \overbrace{K_\varepsilon^2 E_0 f_1 f_2 f_3}^{K_\varepsilon^2 \bar{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dx^2}}_{S_1^2}} + \underbrace{\frac{1}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dy^2}}_{S_2^2} + \underbrace{\frac{1}{f_3}\frac{d^2 f_3}{dz^2}}_{S_3^2} = K_\varepsilon^2 = \text{cost} \Rightarrow \boxed{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = K_\varepsilon^2}$$

$\hookrightarrow$ in generale $K_\varepsilon^2 \in \mathbb{C}$

$$\frac{d^2 f_i}{dx_i^2} = S_i^2 f_i \Rightarrow \underline{f_i(x_i)} = C_i e^{-S_i x_i} + \underbrace{\cancel{D_i e^{+S_i x_i}}}_{\text{trascuriamo}}$$

$$\Rightarrow E(x,y,z) = E_0 \underline{f_1 f_2 f_3} = E_0 e^{-(S_1 x + S_2 y + S_3 z)} = E_0 e^{-(\bar{S} \cdot \bar{r})}$$

Vettore di propagazione : $\boxed{\bar{S} = S_1 \hat{x} + S_2 \hat{y} + S_3 \hat{z}}$

$$\bar{S} \cdot \bar{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = K_\varepsilon^2 \Rightarrow \bar{S} = \underbrace{\bar{\alpha}}_{\text{attenuazione}} + j \underbrace{\bar{K}}_{\text{fase}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{E}(\bar{r}) = E_0 e^{-(\bar{S} \cdot \bar{r})} = E_0 e^{-\bar{\alpha} \bar{r}} e^{-j \bar{K} \bar{r}} \hat{x}}$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- Soluzione per campo magnetico

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} & \text{1° eq Maxwell} \\ \bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_0 e^{-(\bar{s}\cdot\bar{r})} & \bar{E}_0 = E_0 \cdot \hat{x} \\ \nabla \times (\bar{w} f) = f\,\nabla \times \bar{w} + \nabla f \times \bar{w} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{H} = -\frac{\nabla \times \bar{E}}{j\omega\mu} = -\frac{\nabla \times \bar{E}_0 e^{-(\bar{s}\cdot\bar{r})}}{j\omega\mu} = \frac{\bar{S} \times \bar{E}}{j\omega\mu} \Rightarrow \boxed{\bar{H} = \frac{\bar{S} \times E_0 e^{-(\bar{s}\cdot\bar{r})}}{j\omega\mu}}$$

# TIPOLOGIE DI ONDE PIANE

$$\bar{S}\cdot\bar{S} = |\bar{\alpha}|^2 - |\bar{k}|^2 + j2\bar{\alpha}\cdot\bar{k} = k_\varepsilon^2 = -\omega^2\mu\left(\varepsilon - \frac{j\sigma}{\omega}\right)$$ uguaglianza in $\mathbb{C}$

separo
$$\begin{cases} \mathrm{Re}: & |\bar{\alpha}|^2 - |\bar{k}|^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \\ \mathrm{Im}: & 2\bar{\alpha}\cdot\bar{k} = \omega\mu\sigma \end{cases}$$

$\underline{k \neq 0}$

$|\bar{\alpha}|^2 - |\bar{k}|^2 < 0$
$\Rightarrow |\bar{k}|^2 > |\bar{\alpha}|^2 > 0$
$\Rightarrow |k| > 0$

esiste sempre un moto ondoso

- onde piane uniformi $(\sigma = 0,\ \bar{\alpha} = 0)$

mezzo senza perdite $\sigma = 0 \Rightarrow \bar{\alpha}\cdot\bar{k} = 0$

se $\bar{\alpha} = 0 \Rightarrow \cancel{|\bar{\alpha}|^2} - |\bar{k}|^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \Rightarrow |\bar{k}| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\bar{H}(\bar{r}) = \frac{\bar{S} \times \bar{E}_0 e^{-(\bar{s}\cdot\bar{r})}}{j\omega\mu} = \frac{\bar{k} \times \bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}}{\omega\mu} = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{k} \times \bar{E}_0}_{\text{vettore reale}} e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}} \Rightarrow \bar{H} \text{ e } \bar{E} \text{ in fase}$$

$\bar{E}, \bar{H}, \hat{k}$ è terna tri rettangola destrorsa

vettore di Poynting puramente reale orientato verso $\hat{k}$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{E} \times \bar{H}^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,|\bar{E}|^2\hat{k} \Rightarrow \text{solo potenza attiva}$$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- **onde piane evanescenti** $(\sigma = 0, \bar{\alpha} \neq 0)$

mezzo senza perdite $\sigma = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} \cdot \bar{k} = 0$

se $\bar{\alpha} \neq 0 \Rightarrow \bar{\alpha} \perp \bar{k}$

> proprietà

- piani equifase $\perp$ piani equiampiezza
- $\bar{E}$ e $\bar{H}$ <u>non</u> in fase
- se $\bar{E}$ polarizzato linearmente $\Rightarrow$ $\bar{H}$ polarizzato ellitticamente
- piani polarizzazione $\bar{E}$ e $\bar{H}$ non coincidono necessariamente
- vettore di poynting generalmente complesso
  $(\mathrm{Re}[\bar{P}] \parallel \hat{k}, \mathrm{Im}[\bar{P}] \parallel \hat{\alpha})$

- **onde piane dissociate** $(\sigma \neq 0)$

mezzo con perdite $\sigma \neq 0 \Rightarrow \underline{\bar{\alpha} \cdot \bar{k} \neq 0} \Rightarrow \bar{\alpha} \neq 0$

$\hookrightarrow$ $\bar{\alpha}$ <u>non</u> ortogonale a $\bar{k}$

> proprietà

- piani equifase <u>non</u> $\perp$ piani equiampiezza
- $\bar{E}$ e $\bar{H}$ <u>non</u> in fase
- se $\bar{E}$ polarizzato linearmente $\Rightarrow$ $\bar{H}$ polarizzato ellitticamente
- piani polarizzazione $\bar{E}$ e $\bar{H}$ non coincidono necessariamente
- vettore di poynting generalmente complesso
  $(\mathrm{Re}[\bar{P}] \parallel \hat{k}, \mathrm{Im}[\bar{P}] \parallel \hat{\alpha})$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- **Onde piane dissociate uniformi** ($\sigma \neq 0$, $\bar{a} \parallel \bar{k}$)

Onda piana uniforme in mezzo con perdite

> proprietà

- piani equifase $\parallel$ piani equiampiezza
- se $\bar{E}$ polarizzato linearmente $\Rightarrow$ $\bar{H}$ polarizzato linearmente

$\bar{E}, \bar{H}, \hat{k}$ è terna tri rettangola destrorsa

- vettore di poynting complesso $Re[\bar{P}] \parallel Im[\bar{P}] \parallel \hat{k} \parallel \hat{a}$

Simile a propagazione campo em in tessuto biologico quando si comporta da buon conduttore

## IMPEDENZA D'ONDA

nel vuoto $\Rightarrow$ $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$

$\eta_{opu} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ $[\Omega]$ $\rightarrow$ puramente reale, dipende solo da prop. del mezzo

per opu $\Rightarrow$ $\bar{P} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\bar{E}|^2\hat{k} = \frac{1}{2}\frac{1}{\eta_{opu}}|\bar{E}|^2\hat{k}$ $\qquad \bar{H} = \frac{1}{\eta_{opu}}\hat{k}\times\bar{E}$

$\eta(\hat{u})$ rende conto della natura di $\bar{P}$ nella direzione $\hat{u}$

(es: $\eta_{opu}(\hat{a}) \in Im$, $\eta_{opu}(\hat{k}) \in Re$, $\eta_{opD}(\hat{a}) \in Im$, $\eta_{opD}(\hat{k}) \in Im$)

## VELOCITÀ DI FASE ONDE PIANE

$$\bar{e}(\bar{r},t) = Re[E_0 \overbrace{e^{-\bar{a}\cdot\bar{r}} e^{-j\bar{k}\bar{r}}}^{e^{-(\bar{\gamma}\cdot\bar{r})}} e^{j\omega t}]$$ è onda piana

$\hookrightarrow$ lungo $\hat{x}$ $\Rightarrow$ $\bar{e}(\bar{r},t) = |E_0|e^{-\bar{a}\cdot\bar{r}}\cos(\bar{k}\bar{r} - \omega t + \phi)$ moto ondoso lungo $\hat{x}$ che invade tutto lo spazio

prendiamo pti con arg del cos cost $\quad \bar{k}\cdot d\bar{r} - \omega dt = 0 \qquad \bar{k} = |\bar{k}|\cdot\hat{k}$, $d\bar{r} = |d\bar{r}|\hat{u}$

$\Rightarrow |\bar{k}||d\bar{r}|\cos\vartheta = \omega dt$ $\qquad$


$V_f(\hat{u}) = \frac{|d\bar{r}|}{dt} = \frac{\omega}{|\bar{k}|\cos(\vartheta)}$

$\hookrightarrow$ velocità di fase

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

> velocità delle varie onde lungo $\hat{k}$ $(\vartheta = 0)$

- opu $\quad V_f(\hat{k}) = \dfrac{\omega}{|\bar{k}_{opu}|} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
- ope $\quad |\bar{k}_{ope}| > |\bar{k}_{opu}| \Rightarrow V_{f\,ope}(\hat{k}) < V_{f\,opu}(\hat{k})$
- opd $\quad |\bar{k}_{opd}| > |\bar{k}_{opu}| \Rightarrow V_{f\,opd}(\hat{k}) < V_{f\,opu}(\hat{k})$

$\Big\}$ onde lente

# RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DI ONDE PIANE

$\vartheta_i = \vartheta_r$

$\bar{E}_i(\bar{r}) = E_{i,0}\, e^{-j\bar{k}_i\bar{r}}$ incidente (opu)

$\bar{E}_t(\bar{r}) = E_{t,0}\, e^{-\bar{s}_t\cdot\bar{r}}$ trasmessa (opd)

$\bar{E}_r(\bar{r}) = E_{r,0}\, e^{-\bar{s}_r\cdot\bar{r}}$ riflessa (opu)

per condiz di continuità $\quad j\bar{k}_i\bar{r} = \bar{s}_r\bar{r} = \bar{s}_t\bar{r} \quad \forall \bar{r} \in \{\hat{x}_2, \hat{x}_3\}$

$\Rightarrow$ vettori di fase $(\bar{k}) \perp \hat{x}_3$

- onda trasmessa $(\bar{a}_t \parallel \hat{x}_1)$

se $\vartheta_i = 0 \Rightarrow \vartheta_t = 0 \Rightarrow \bar{a}_t \parallel \bar{k}_t$ l'onda è dissociata uniforme

spessore di penetrazione $\quad \delta = \dfrac{1}{|\bar{a}_t|}$

$\eta_t = j\dfrac{\omega\mu_2}{|\bar{a}_t| + j|\bar{k}_t|}$ (in direzione normale alla sup di sep)

se $\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2 \Rightarrow$ mezzo 2 è buon conduttore $\Rightarrow \vartheta_t \simeq 0 \quad \forall \vartheta_i$

Onda quasi sempre dissociata uniforme $|\bar{a}_t|^2 \simeq |\bar{k}_t|^2 \simeq \frac{1}{2}\omega\mu_2\sigma_2$

spessore di penetrazione $\quad \delta = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}}$

$\eta_t = \frac{1}{2}\omega\mu_2\delta(1+j)$ non dipende da $\vartheta_i$

↳ impedenza di parete

se $\sigma_2 = 0$

caso A: $\quad \bar{a}_t = 0 \Rightarrow$ onda trasmessa è piana uniforme

$n_2 \sin\vartheta_t = n_1 \sin\vartheta_i$ (legge di Snell) $\quad$ se $n_2 < n_1$ ha soluzione solo se $\vartheta_i < \vartheta_{critico} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$

Caso B: $n_2 > n_1$ e $\vartheta_i > \vartheta_{critico}$ $\Rightarrow$ $\bar{a}_t \perp \bar{k}_t$ $\Rightarrow$ onda trasmessa è evanescente
$(\vartheta_t = \frac{\pi}{2})$

$\bar{a}_t \parallel \hat{x}_1$, $\bar{k}_t \parallel \hat{x}_2$ $\Rightarrow$ flusso potenza attiva solo lungo $\hat{x}_2$
riflessione interna totale

## COEFF DI FRESNEL (incidenza normale)

se $\vartheta_i = 0$ $\Rightarrow$ $\vartheta_t = 0$ e tutte le onde sono ora (1) dirette lungo $\hat{x}_1$

$\Rightarrow$ campi $\bar{E}$ e $\bar{H}$ tangenti al piano di separazione (2)

$$\begin{cases} E_{i,0} + E_{r,0} = E_{t,0} \\ H_{i,0} + H_{r,0} = H_{t,0} \\ \bar{H} = \frac{1}{\eta}\hat{k}\times\bar{E} \Rightarrow \bar{E} = \eta\bar{H}\times\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{r,0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i,0} \\ E_{t,0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i,0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \frac{E_{r,0}}{E_{i,0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ \tau = \frac{E_{t,0}}{E_{i,0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \end{cases}$$

coeff. riflessione

coeff. trasmissione

- **Casi particolari**
  - buon conduttore $\sigma_2 \to \infty$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \eta_2 \to 0 \Rightarrow \rho \to -1,\ \tau \to 0 \\ \delta \to 0 \end{cases}$ basso spessore di penetrazione
  - onda trasmessa evanescente $\sigma_2 = 0$ + $n_2 > n_1$ e $\vartheta_i > \vartheta_{critico}$

    $\Rightarrow$ $\eta_2$ puramente immaginaria $\Rightarrow$ $|\rho| = 1$

    riflessione completa di potenza attiva

## POLARIZZAZIONE ONDA MONOCROMATICA

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# FONDAMENTI DI ANTENNE

## ANTENNE FILIFORMI

filo metallico interrotto al centro per iniettare o captare segnale

(funziona con legge di Ampère-Maxwell $\nabla \cdot \bar{J} = -\nabla \frac{\partial \bar{d}}{\partial t}$)

- dipolo elementare

lunghezza (L) ≪ lunghezza d'onda ($\lambda$)

fasore di corrente I sui bracci = cost

al centro di sistema di riferimento sferico con:
↳ volume infinito con mezzo: lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo
↳ densità di corrente impressa $\neq 0$ ⇒ sorgenti ⇒ $\nabla \cdot E \neq 0$ ⇒ non vale Helmholtz

Eq di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega \bar{B} \overset{①}{=} -j\omega \nabla \times \bar{A} \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega \bar{D} + \bar{J}_i \end{cases}$$

teorema vettori:
se esiste campo ($\bar{B}$) sempre solenoidale

⇒ $\exists \bar{A}$ tc $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$ ①
↳ potenziale vettore magnetico

Eq di Maxwell con relazioni costitutive

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu \bar{H} = \\ \nabla \times \bar{H} = j\omega \varepsilon_c \bar{E} + \bar{J}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \\ \bar{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} (\nabla \times \bar{H} - \bar{J}_i) \end{cases}$$

si dimostra che $\bar{A}$ soddisfa eq Helmholtz $\nabla^2 \bar{A} - k_\varepsilon^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}_i$
⇒ risolvo con tecnica di Green (assume sorgente come puntiforme)

$$\Rightarrow \bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{IL}{r} e^{-j\beta r} \hat{z}$$

se supponiamo $\sigma = 0$ ⇒ $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$
↳ $= |\bar{k}|$ opu

risolvendo vediamo che il campo EM ha simmetria assiale

e dipende dall'angolo $\vartheta$

per $r \gg \lambda$ regione di campo lontano vediamo un onda sferica espansiva ma localmente è un opu

Ai fini della radiazione ci interessa solo la comp radiale del vett di Poynting ⇒ nella regione di campo lontano il flusso di $\bar{P}_r$ attraverso sup sferica è reale e cost

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# ANTENNE IN TRASMISSIONE

caratteristiche comuni ad <u>ogni antenna</u> in regione di campo lontano

- onda è moto sferico espansivo
- localmente fronte d'onda è onda piana
- vettore di Poynting quasi interamente reale
- potenza irradiata complessiva è conservativa
- campo decade con $\frac{1}{r}$ e Poynting con $\frac{1}{r^2}$

quello che varia è:

- distribuzione spaziale di $\overline{P}$
- capacità di focalizzare la potenza di emissione
- tipo di polarizzazione

## • parametri in trasmissione

> solido di radiazione: andamento del modulo del vettore di Poynting su una sfera centrata nell'origine con raggio tale da essere nella regione di campo lontano

Solido di una antenna a dipolo
Solido di una antenna isotropa

> diagramma di radiazione: intersezione tra solido di radiazione e un piano passante per l'origine

Diagrammi di una antenna a dipolo
Diagramma di una antenna a paraboloide

> direttività: valore massimo della superficie di radiazione

$$D = S_{rad\ max} = \frac{P_0}{P_{irradiata}}$$

$P_0$: potenza antenna <u>isotropa</u> tale da produrre in tutte le direzioni un intensità pari a quella dell'antenna in esame nella <u>sola</u> direzione di max

> guadagno: tiene conto delle perdite ohmiche (parte della potenza di alimentazione viene dissipata)

$$G = KD \quad K \in [0,1] \implies G \leq D \qquad G = \frac{P_0}{P_{alimentazione}} = \frac{P_0}{P_{irradiata} + P_{diss}}$$

↳ fattore di efficienza

# ANTENNE IN RICEZIONE

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- parametri in ricezione

per reciprocità i parametri in trasmissione valgono anche in ricezione

> area efficace: rappresenta la capacità dell'antenna di captare la potenza incidente

$$P_{ricevuta} = \frac{E^2}{2\eta} A_e \quad , \quad A_e = \varepsilon_{ap} A_p \qquad \varepsilon_{ap} \in (0.5, 1)$$

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D \qquad A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$$

per mantenere $A_e$ cost all'aumentare della frequenza, devo aumentare il guadagno

# FORMULA UNIVERSALE RADIOCOLLEGAMENTO

$$P_{ricezione} = G_{ricezione} \underbrace{(G_{trasmissione} P_{alimentazione})}_{\text{potenza irradiata efficace}} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2}_{\text{attenuazione di spazio libero}}$$

↳ dovuto al calo di densità di potenza con la distanza

OSS: all'aumentare della frequenza con, d e $P_{alim}$ cost, la potenza ricevuta cala
⟹ devo compensare con il guadagno
(uso antenne più direttive)

# ELETTRO FISIOLOGIA

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

## TRASPORTO PASSIVO

- **diffusione libera**

membrana semipermeabile => ioni attraversano per agitazione termica favorendo la direzione a minor concentrazione

LEGGE DI FICK $\underbrace{\bar{j}_d(\bar{r})}_{\text{densità di flusso } \frac{mol}{s}\frac{1}{m^2}} = -\overbrace{D_p}^{\text{coeff di diff specie p } \frac{m^2}{s}} \nabla \underbrace{C_p(\bar{r})}_{\text{concentrazione specie p } \frac{mol}{m^3}}$

$1\,mol = N_a \simeq 6.022 \cdot 10^{23}$

- **diffusione ionica**

la distribuzione non uniforme di cariche genera un campo elettrico che tende a ridistribuire le cariche (Forza di Lorentz)

LEGGE DI OHM $\underbrace{\bar{j}_e(\bar{r})}_{\text{densità di flusso } \frac{mol}{s}\frac{1}{m^2}} = -\overbrace{u_p}^{\text{mobilità specie p } \frac{m^2}{V\cdot s}} \underbrace{\frac{z_p}{|z_p|}}_{\text{segno carica } (z_p\text{: valenza})} C_p \nabla \underbrace{\phi(\bar{r})}_{\text{potenziale elettrico V}}$

$E(\bar{r}) = -\nabla\phi(\bar{r})$

- **corrente ionica**

trasporto attivo + passivo $\Rightarrow \underbrace{\bar{j}_p = \bar{j}_d + \bar{j}_e}_{\text{densità totale di flusso } \frac{mol}{s}\frac{1}{m^2}}$

> Eq di Einstein: $D_p = \frac{RT}{|z_p| \underbrace{F}_{\text{cost Faraday } \frac{C}{mol}}} u_p \Rightarrow \bar{j}_e(\bar{r}) = -u_p \frac{z_p}{|z_p|} C_p \nabla\phi(\bar{r}) = -D_p \frac{z_p F}{RT} C_p \nabla\phi(\bar{r})$

$\Rightarrow \bar{j}_p = -D_p\left(\nabla C_p + \frac{z_p F}{RT} C_p \nabla\phi\right)$

EQ DI NERNST-PLANK $\underbrace{\bar{J}_p}_{\text{densità di corrente } \frac{A}{m^2}} = F z_p \bar{j}_p$

## POTENZIALE DI NERNST (potenziale della specie p all'equilibrio)

all equilibrio la corrente totale è nulla $\Rightarrow \bar{J}_p = 0 \Leftrightarrow \nabla C_p = -\frac{z_p F}{RT} C_p \nabla\phi$

consideriamo solo $\hat{x}$ (membrana è localmente piatta)

$$\frac{dC_p}{\cancel{dx}} = -\frac{z_p F}{RT} C_p \frac{d\phi}{\cancel{dx}} \Rightarrow -\frac{RT}{z_p F}\frac{dC_p}{C_p} = d\phi \Rightarrow \int_{\phi_{ext}}^{\phi_{int}} d\phi = -\frac{RT}{z_p F}\int_{C_{p,ext}}^{C_{p,int}} \frac{1}{C_p} dC_p$$

POTENZIALE DI NERNST $V_p = \phi_{int} - \phi_{ext} = -\frac{RT}{z_p F} \ln \frac{C_{p,int}}{C_{p,ext}}$

↳ dipende solo dalle concentrazioni e dalla valenza (no $D_p$ o $u_p$)

$K^+$ $V_{K^+} < 0$
$Na^+$ $V_{Na^+} > 0$
$Cl^-$ $V_{Cl^-} < 0$

# MODELLO A CONDUTTANZE PARALLELE (potenziale di membrana)

in assenza di canali ionici la membrana cellulare si comporta da condensatore piano con capacità per unità di sup $\simeq 1 \frac{\mu F}{cm^2} \Rightarrow J_s = c_m \frac{dV_m}{dt}$

per tenere conto dei canali ionici consideriamo il contributo di ogni specie ionica come una serie tra un generatore di tensione (potenziale di Nernst) e una conduttanza (conducibilità per unità di sup della specie ionica, dovuta ai canali ionici $[\frac{S}{m^2}]$) $J_p = g_p(V_m - V_p)$

$V_m$ → tensione di trans-membrana

All'equilibrio $\begin{cases} \text{corrente di membrana} = 0 \\ \text{tensione di membrana} = \text{cost} \end{cases}$

$$J_m = J_{Na} + J_K + J_{Cl} = 0$$

**soluzione A:** $J_p = 0 \quad \forall p \Rightarrow V_m = V_{Na} = V_K = V_{Cl}$ ↯ non fisiologica

**soluzione B:** $V_m = \frac{g_{Na}V_{Na} + g_K V_K + g_{Cl}V_{Cl}}{g_{Na} + g_K + g_{Cl}}$ media dei pot. di Nernst pesata sulle conduttanze

- **problema:** valore conduttanze dipende dalla tensione applicata a causa dei canali $Na^+$ e $K^+$ controllati in tensione

- **calamaro** $g_p \sim \frac{mS}{cm^2}$ $J_p \sim \frac{\mu A}{cm^2}$ $V_m \approx -68.3\,mV$

| | $K^+$ | $Na^+$ | $Cl^-$ | |
|---|---|---|---|---|
| $V_p$ | -79.7 | 59.2 | -65.8 | mV |
| $g_p$ | 0.91 | 0.01 | 0.55 | $\frac{mS}{cm^2}$ |
| $J_p$ | 2.6 | -1.2 | -1.9 | $\frac{\mu A}{cm^2}$ |

$J_{K^+} > 0$ uscente
$J_{Na^+} < 0$ entrante
$J_{Cl^-} < 0$ entrante

# TRASPORTO ATTIVO

bilancia il trasporto di ioni delle correnti ioniche presenti all'equilibrio.

Va contro al potenziale elettrochimico ⇒ consumo di energia

- **pompa sodio-potassio**

canali di trasporto che trasportano $3Na^+$ all'esterno e $2K^+$ all'interno tramite idrolisi di ATP in ADP + $P_i$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# CANALI CONTROLLATI IN TENSIONE

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

conduttanza dipende dalla tensione

depolarizzazione: aumento tensione trans-membrana (corrente entrante depolarizza)

- canali potassio ($K^+$): aperti solo in presenza di depolarizzazione
  ⟹ uscita $K^+$

- canali sodio: ① si aprono in presenza di depolarizzazione
  ⟹ entrata $Na^+$ ② si inattivano spontaneamente dopo 1-2ms
  ③ si chiudono quando avviene la ripolarizzazione
  ④ da chiusi si riattivano dopo 2-5 ms

# POTENZIALE D'AZIONE

è un impulso elettrico generato da un neurone in risposta a una depolarizzazione sufficientemente elevata.
Ha 4 fasi:

① depolarizzazione: corrente entrante ⟹ depolarizzazione.

Se dep. sopra soglia ⟹ canali $Na^+$ si aprono (entra $Na^+$)
⟹ corrente entrante aumenta ⟹ dep. aumenta

② overshoot: { l'aumento della tensione fa aprire i canali $K^+$ (esce $K^+$) ⟹ corrente uscente
canali $Na^+$ cominciano a diventare inattivi ⟹ corrente entrante diminuisce

⟹ la depolarizzazione raggiunge il valore massimo ($\frac{dV}{dt}$ decresce fino a zero)

③ ripolarizzazione: canali $Na^+$ inattivi + canali $K^+$ aperti ⟹ forte corrente entrante
⟹ rapida ripolarizzazione

④ iperpolarizzazione: la ripolarizzazione fa scendere la tensione sotto il valore di equilibrio. canali $Na^+$ e $K^+$ si chiudono
L'equilibrio è ripristinato da pompa sodio-potassio

- caratteristiche:

  - forma e durata sono indipendenti dalla forma dello stimolo
    dipendono solo dal pot di membrana e alla dinamica dei canali $Na^+$ e $K^+$

  - intensità e durata stimolo influenzano il ritardo del PA

  - periodo refrattario controlla la frequenza massima
    refrattarietà assoluta: canali $Na^+$ inattivi
    refrattarietà relativa: iper-polarizzazione ⟹ serve stimolo molto intenso

  - iperpolarizzazioni, o depolarizzazioni sotto soglia, tornano rapidamente al valore di equilibrio

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# NEURONI

costituiti da soma (corpo centrale), dendriti (recettori $l<1mm$), assone (protuberanza che trasmette gli stimoli $l \approx 1m$, $\phi < 10\mu m$)

assone si dice mielinico se ricoperto da guaina mielinica (a tratti di $200\mu m$ separati da brevi tratti detti nodi di Ranvier)
La guaina permette lo scambio ionico solo sui nodi

# VOLTAGE-CLAMP (HH)

tenta di determinare le conduttanze nel modello a conduttanze parallele
si scopre che le conduttanze hanno risposta temporale dipendente dall'intensità dello stimolo (a causa dei canali $Na^+$ e $K^+$ controllati in tensione)
$\Rightarrow$ misura risposta del sistema a gradini di tensione (depolarizzazione)

risposta della corrente al gradino tende a un asintoto orizzontale.
per stimoli bassi, negli istanti appena successivi all'impulso, si verifica un undershoot

usando tossine per bloccare selettivamente canali $Na^+$ o $K^+$ possiamo misurare i singoli contributi
- sodio: andamento impulsivo, corrente entrante
- potassio: andamento asintotico, corrente uscente

## • patch-clamp

come voltage-clamp ma applicato a un singolo canale.
Evidenzia che i canali in presenza di depolarizzazione oscillano aleatoriamente tra stato aperto e chiuso $\Rightarrow$ i risultati dell'esperimento precedente sono dati dal comportamento medio dei canali

# MODELLO HH

descrive quantitivamente la generazione del PA
tiene conto del comportamento aleatorio dell'apertura dei canali $K^+$ e $Na^+$ in relazione alla tensione di membrana

## • modello canali $K^+$

canale $K^+$ costituito da 4 unità, aperto $\Leftrightarrow$ tutte aperte $\quad n(t) = \frac{E(n_{open})}{N} \in [0,1]$
↳ frazione unità aperte

$\Rightarrow$ prob. canale aperto $= n(t)^4 \Rightarrow g_K(t) = \underbrace{G_{K,max}}_{\text{conduttanza massima } K^+} n^4(t)$

$$\frac{dn}{dt} = \underbrace{\alpha_n \overbrace{(1-n)}^{\text{canali chiusi}}}_{\text{canali che si aprono}} - \underbrace{\beta_n \overbrace{n}^{\text{canali aperti}}}_{\text{canali che si chiudono}}$$

$\alpha_n, \beta_n$ cost dipendenti da $V_m$ $[\frac{1}{s}]$

dopo il gradino di tensione, $V_m$ è cost $\Rightarrow \alpha_n, \beta_n$ costanti

$$n(t) = n_{eq} - (n_{eq} - n_0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad n_{eq} \to \frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n} \qquad \tau \to \frac{1}{\alpha_n+\beta_n}$$

$n_0$: calcolabile dal $V_m$ a riposo

$\Rightarrow$ parametri del modello: $G_{K,max}$, $\alpha_n(V_m)$, $\beta_n(V_m)$
(determinati empiricamente)

## • modello canali $Na^+$

ragionamento simile $\quad g_{Na}(t) = \underbrace{G_{Na,max}}_{\text{conduttanza massima } Na^+} \overbrace{m^3(t)}^{\text{frazione canali attivi}} \overbrace{h(t)}^{\text{frazione canali inattivi}}$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(1-m) - \beta_m m \qquad \frac{dh}{dt} = \alpha_h(1-h) - \beta_h h \qquad \alpha, \beta \left[\frac{1}{s}\right]$$

$\Rightarrow$ parametri del modello: $G_{Na,max}$, $\alpha_m(V_m)$, $\beta_m(V_m)$, $\alpha_h(V_m)$, $\beta_h(V_m)$
(determinati empiricamente)

## • il modello HH

modifica del modello a conduttanze parallele

- $g_{Na}(V_m,t)$ e $g_K(V_m,t)$ sono funzioni non lineari di $V_m$ e $t$
- $g_{Cl}$ sostituita da $g_{Leakage}$ cost e <u>indip</u> da $V_m$ (contributo tutte altre specie)
- sistema stimolato da corrente impressa $J_d(t)$ dovuta alla sezione precedente dell'assone

$$C_m \frac{dV_m}{dt} + G_{Na,max}\, m^3(t) h(t)(V_m - V_{Na}) + G_{K,max}\, n^4(t)(V_m - V_K) + g_L(V_m - V_L) = J_d(t)$$

può essere risolta solo numericamente

# PROPAGAZIONE DEL PA

il PA si propaga perché la fase di depolarizzazione si estende alle zone limitrofe allo stimolo iniziale generando un nuovo PA.
Il periodo refrattario impedisce al PA di propagarsi in entrambi i sensi.
la rigenerazione del PA in assoni <u>mielinici</u> avviene solo sui nodi di Ranvier

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

## • Core-conductor model (propagazione assone A-mielinico)

modella la propagazione del PA in un assone a-mielinico.
il nome viene dall'analogia con la propagazione di onde di tensione lungo le linee bifilari

→ tratto infinitesimo di linea bifilare
Fenomeni distribuiti:
- resistenza, induttanza serie
- conduttanza, capacità parallelo

no effetto induttivo serie

→ tratto infinitesimo di assone

impedenza di membrana

$M(t)$: modello a conduttanze parallele

$$r_i = \frac{\rho_i}{\pi a^2}$$

$\rho_i$ → resistività interna [Ω·m]
$a$ → raggio assone

(assimilando a conduttore cilindrico omogeneo)

$r_e \approx 0$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

## • propagazione sotto soglia assone A-mielinico

Stimolo non sufficiente ad aprire i canali $Na^+$ ⟹ l'impulso si attenua durante la propagazione perché non sostenuto dal potenziale elettrochimico

→ conduttanza di membrana $g_m$ $\left[\frac{S}{m}\right]$ cost
(perché solo pochi canali $Na^+$ aperti)

$$g_m = \frac{1}{r_m} = \frac{2\pi a}{\rho_m}$$

$\rho_m$ [Ω·m²] → resistività membrana

$$\circledast_1 \begin{cases} \text{LKT}: V_m(x,t) = r_i\Delta x\, I(x,t) + V_m(x+\Delta x,t) \Longrightarrow \dfrac{V_m(x+\Delta x,t) - V_m(x,t)}{\Delta x} = -r_i I(x,t) \\ \text{LKC}: I(x,t) = I_m(x,t) + I(x+\Delta x,t) = g_m\Delta x[V_m(x+\Delta x,t) - V_{eq}] + c_m\Delta x \dfrac{\partial V_m(x+\Delta x,t)}{\partial t} + I(x+\Delta x,t) \end{cases}$$

$V(x+\Delta x,t) + \cancel{V_{eq}} - V(x,t) - \cancel{V_{eq}}$

$$\Longrightarrow \frac{I(x+\Delta x,t) - I(x,t)}{\Delta x} = -g_m[V_m(x+\Delta x,t) - V_{eq}] - c_m \frac{\partial V_m(x+\Delta x,t)}{\partial t}$$

$V(x+\Delta x,t) + \cancel{V_{eq}}$

$V(x+\Delta x,t)$

$c_m$ → capacità membrana per unità di lunghezza

pongo $V(x,t) = V_m(x,t) - V_{eq}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -r_i I(x,t) \\ \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -g_m V(x,t) - c_m \dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t} \end{cases} \xrightarrow{\text{Fourier}} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \hat{V}(x,\omega)}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-r_i \hat{I}(x,\omega)\right) \\ \dfrac{\partial \hat{I}(x,\omega)}{\partial x} = -(g_m + j\omega c_m)\hat{V}(x,\omega) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 \hat{V}(x,\omega)}{\partial x^2} = r_i(g_m + j\omega c_m)\hat{V}(x,\omega) \Longrightarrow \begin{cases} \hat{V}(x,\omega) = \hat{V}_+(\omega)e^{-\Gamma x} + \hat{V}_-(\omega)e^{\Gamma x} \\ \Gamma = \sqrt{r_i(g_m + j\omega c_m)} \end{cases}$$

$\hat{V}_+(\omega)$ e $\hat{V}_-(\omega)$ sono le cost di integrazione
trasciamo $\hat{V}_-$ (perché è un onda che si propaga in direzione opposta)

$\Rightarrow \hat{V}_+(\omega) = \hat{V}(0,\omega)$ → trasformata di Fourrier dell'impulso iniziale

$$\begin{cases} \Gamma = \alpha + j\beta \qquad V(x,\omega) = V_+(\omega)e^{-(\alpha+j\beta)x} \\ \text{frequenze basse (per periodo refrattarietà)} \Rightarrow g_m \gg \omega c_m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \simeq \sqrt{r_i g_m}} \qquad \beta \simeq \frac{1}{2}\omega c_m \sqrt{\frac{r_i}{g_m}} = \frac{\omega}{v_p} \qquad \boxed{v_p = \frac{2}{c_m}\sqrt{\frac{g_m}{r_i}}}$$

tornando nel dominio del tempo: $\boxed{V(x,t) = V_0\left(t - \frac{x}{v_p}\right)e^{-\alpha x}}$

$\boxed{v_p \propto \sqrt{a}}$ velocità di propagazione è proporzionale al raggio dell'assone

impulso di tensione che si propaga a velocità $v_p$, senza distorsione, con attenuazione dipendente da $\alpha$

- propagazione sopra soglia assone A-mielinico

se stimolo sufficiente ⇒ si genera PA che si auto sostiene grazie al potenziale elettrochimico di trans-membrana
si propaga senza distorsione e senza attenuazione

per l'impedenza di membrana $M(t)$ dobbiamo usare il modello HH.
possiamo comunque usare ⊛₁ del caso sotto soglia da cui otteniamo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_m(x,t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-r_i I_i(x,t)\right) \\ \frac{\partial I_i(x,t)}{\partial x} = -i_{ioni}(x,t,V_m) - c_m \frac{\partial V_m(x,t)}{\partial t} = -i_m(x,t,V_m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_i}\frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial x^2} = i_m(x,t,V_m) = \underline{i_{ioni}(x,t,V_m)} + \underline{c_m}\frac{\partial V_m(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} c_m = 2\pi a \epsilon_m \Rightarrow \underline{c_m \propto a} \\ g_m(t,V_m) = 2\pi a\, \sigma_m(t,V_m) \Rightarrow \underline{i_{ioni}(x,t,V_m) \propto a} \end{cases}$$

$a$ → raggio assone
$\epsilon_m$ → capacità elettrica per unità di sup $\left[\frac{F}{m}\right]$
$\sigma_m$ → conduttanza per unità di sup $\left[\frac{S}{m^2}\right]$

$$\Rightarrow \text{divido per } c_m \quad \frac{\pi a^2}{2\pi a \epsilon_m \rho_i}\frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial x^2} = \underline{H(x,t,V_m)} + \frac{\partial V_m(x,t)}{\partial t}$$

$H$: legato alle correnti ioniche ma <u>non</u> dipende da $a$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

sperimentalmente si verifica che il PA si propaga senza attenuazione e distorsione

⇒ deve soddisfare <u>eq delle onde</u> $\frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v_p^2}\frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial t^2}$

$v_p$ → velocità di propagazione

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a}{2\epsilon_m \rho_i v_p^2}}_{\text{deve essere indip da } a} \frac{\partial^2 V_m(x,t)}{\partial t^2} = \underbrace{H(x,t,V_m) + \frac{\partial V_m(x,t)}{\partial t}}_{\text{indipendente da } a}$$

$$\hookrightarrow \frac{a}{2\epsilon_m \rho_i v_p^2} = \text{cost} = \frac{1}{K} \Rightarrow \boxed{v_p = \sqrt{\frac{Ka}{2\epsilon_m \rho_i}} \propto \sqrt{a}}$$

velocità di propagazione è proporzionale al raggio dell'assone

- propagazione assone mielinico

modello complicato della propagazione saltatoria del PA dovuta alla guaina mielinica $\Rightarrow$ non più assimilabile a una linea di trasmissione omogenea

le velocità di propagazione sono molto maggiori a parità di raggio, perché il PA si rigenera solo sui nodi di Ranvier, e viaggia per conduzione passiva tra un nodo e l'altro

## SINAPSI

sono rigeneratori di potenziale elettrochimico
l'assone di un neurone è collegato ai dendriti del successivo tramite una giunzione sinaptica

- sinapsi chimica

① depolarizzazione fa aprire canali $Ca^+$ del terminale pre-sinaptico stimolando il rilascio di un neurotrasmettitore nello spazio sinaptico

② il neurotrasmettitore si lega a speciali canali $Na^+$, del terminale post-sinaptico, aprendoli $\Rightarrow$ nuovo PA

- sinapsi elettrica

cellule connesse da connessoni: canali ionici che permettono il passaggio di correnti ioniche da una cellula all'altra

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# SORGENTI IN VOLUMI CONDUTTORI

## > perché è importante avere modelli di sorgenti

non possiamo misurare direttamente le differenze di potenziale a cavallo delle membrane cellulari, ma possiamo misurare la ddp sulla superficie del corpo, la quale è generata ad esempio dalla circolazione di correnti dovute al PA.

lo stesso vale per sorgenti macroscopiche come il cuore.

Quindi riuscendo a creare un modello dell'attività elettrica del cuore e dell'andamento del potenziale nel volume conduttore, possiamo usare le misurazioni superficiali per determinare i parametri del modello

- **monopolo di corrente**

è una sorgente ($I_0 > 0$) o pozzo ($I_0 < 0$) <u>puntiforme</u>

mezzo omogeneo $\Rightarrow$ densità di corrente elettrica radiale

$$\bar{J} = \frac{I_0}{4\pi r^2}\hat{r} \overset{\text{legge di ohm}}{=} \sigma E = -\sigma \nabla \phi = -\sigma \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r}$$

$\int d\phi = \int -\frac{I_0}{4\pi\sigma r^2} dr$

se $\phi(\infty) \to 0$ $\quad \boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi\sigma r} I_0}$

- **dipolo di corrente**

due monopoli con uguale ampiezza e segno opposto

sovrapposizione effetti $\Rightarrow$ $\boxed{\phi(r) = \frac{I_0}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)}$

se $d \ll r$ $\Rightarrow$ $\boxed{\phi(r) = \frac{I_0 \bar{d}\cdot\hat{r}}{4\pi\sigma r^2} = \frac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\sigma r^2}}$

momento di dipolo di corrente $p = I_0 \bar{d}$ $[A \cdot m]$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

## • assone isolato

se in mezzo conduttore infinito e omogeneo
nel punto P, il contributo di dx dell'assone è quello di un monopolo

$$d\phi(P) = \frac{1}{4\pi\sigma_e}\frac{i_m\,dx}{r}$$

$i_m(x)$ : corrente trans membrana per unità di lunghezza

$$\Rightarrow \phi(P) = \frac{1}{4\pi\sigma_e}\int_{x_1}^{x_2}\frac{i_m(x)}{r(x)}\,dx$$

dal modello a linea di trasmissione $\Rightarrow$ $i_m = \frac{1}{r_i}\frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2}$ $\Rightarrow$ legame tra potenziale misurato e tensione trans-membrana

integro da $+\infty$ a $-\infty$ $\Rightarrow$ $\phi(P,t) = \frac{1}{4\pi\sigma_e} i_m * H(x)$ $\quad H(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

corrente $\neq 0$ solo nel segmento attraversato dal PA

la corrente localizzata ha effetti su una zona extra cellulare sempre più ampia all'allontanarsi dall'assone

# RADIOPROTEZIONE

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

## RADIAZIONI IONIZZANTI E NON IONIZZANTI

- ionizzanti (IR)

radiazione EM composta da fotoni la cui energia cinetica è sufficiente a liberare un atomo da una molecola

> effetti: danneggia tessuto vivente (mutazioni, cancro, morte)

sono necessari 14 eV per ionizzare idrogeno o ossigeno
servono 33 eV per ionizzare una molecola d'acqua
⇒ spettro IR parte dai 10 eV

eV: energia cinetica acquisita da 1 elettrone accellerato da una ddp di 1V
↳ $1eV = 1.602 \cdot 10^{-19} J$

energia radiazione EM $= h \cdot f$ (h → cost planck; f → frequenza)

$$\frac{10eV}{6.62 \cdot 10^{-34} J \cdot s} = \frac{10 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} J}{6.62 \cdot 10^{-34} J \cdot s} = 24 \cdot 10^{15} Hz \Rightarrow \lambda = 124 nm$$

- non-ionizzanti (NIR)

energia fotoni non sufficiente a ionizzare (energia < 10 eV)

a fini protezionistici si considerano le NIR prodotte dall'uomo fino a 300 GHz ($1.24 \cdot 10^{-3}$ eV)

## PROPAGAZIONE / ASSORBIMENTO NIR (nei tessuti biologici)

Hp: onda piana uniforme in aria → valida ⇔ raggio di curvatura $\gg \lambda$
(quasi sempre valida se frequenza > qualche GHz)

⇒ posso usare formule onde piane per calcolare lo spessore di penetrazione $\delta$

se $f < 10 KHz$ tessuti biologici sono buoni conduttori ⇒ $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma f}}$
NB: $\lambda$ troppo grande perché valga Hp opu

se $f < 10 GHz$ ⇒ $\delta > 1 cm$ ⇒ l'onda EM penetra tessuti di diversa natura attraversando quindi sup di discontinuità ⇒ rifrazioni interne multiple
⇒ si creano zone ad alte concentrazioni di campo EM ⇒ alto assorbimento

- se $f$ basse, non vale il modello rifrazione o.p. nei tessuti
- se non siamo nella regione di campo lontano, non vale Hp propagazione in onde piane

# DOSIOMETRIA CAMPI EM NON IONIZZANTI

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- **effetti fisici**

  - induzione di correnti spurie (interferiscono con sistema nervoso)
    → $1\,Hz < f < 100\,KHz$ è predominante, $f > 10\,MHz$ è trascurabile

    $\nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \xrightarrow[\text{T. Stokes}]{} \oint_C \bar{E}\, d\bar{l} = -j\omega\mu \int_S \bar{H}\, dS$

  - innalzamento di temperatura (effetto Joule)

- **effetti biologici**

  - distorsione sensoriale
  - alterazione meccanismi cellulari
  - danneggiamento tessuti
  - stimolazione meccanismi termoregolazione

## SAR (specific absorption rate)

dato un volume $\Delta V$ piccolo di tessuto biologico tale da poter considerare costanti: campo elettrico $\bar{E}$, conducibilità elettrica $\sigma$, densità di massa $\rho$

$$SAR_{\Delta V} = \frac{\bar{P}_{diss}\,\Delta V}{\rho\,\Delta V} \left[\frac{W}{Kg}\right] \qquad \bar{P}_{diss} = \frac{1}{2}\sigma|\bar{E}|^2$$

= densità di potenza EM dissipata in calore per unità di volume $\left[\frac{W}{m^3}\right]$

- **SAR medio**

  quantità di calore immessa in media in V nell'unità di tempo

$$SAR_V = \frac{\int_V \bar{P}_{diss}\, dV}{\int_V \rho\, dV} \left[\frac{W}{Kg}\right]$$

per linearità $SAR_V = \frac{SAR_{rif}}{S_0} S$

$SAR_{rif}$ → SAR relativo a $S_0$

$S$ → densità generica

$S_0$ → densità di potenza attiva incidente di riferimento

$SAR_H$ testa
$SAR_{WB}$ corpo intero
$SAR_{1g}$, $SAR_{10g}$ valore massimo $P_{diss}$ su volumi di 1/10g

con stesso scenario $SAR_{1g} > SAR_{10g}$

- **eq del bio-calore**

$$\underbrace{\overbrace{C(\bar{r})\rho(\bar{r})}^{\text{capacità termica}} \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{calore complessivo accumulato per unità di volume in } \partial t} = \underbrace{\nabla \cdot \left(\overbrace{K(\bar{r})}^{\text{conducibilità termica}} \nabla T\right)}_{\frac{\text{calore}}{s \cdot m^3} \text{ che giunge dai tessuti circostanti per conduzione}} + \underbrace{\overbrace{A_0(\bar{r})}^{\frac{\text{calore}}{s \cdot m^3} \text{ processi metabolici}}}_{\text{trascuriamo processi metab (Hp × fantoccio)}} - \underbrace{B_0(\bar{r})(T - \overbrace{T_B}^{\text{blood temperature}})}_{\frac{\text{calore}}{s \cdot m^3} \text{ scambiato con il sangue}} + \underbrace{\overbrace{Q_V(\bar{r})}^{\frac{1}{2}\sigma|\bar{E}|^2}}_{\frac{\text{calore}}{s \cdot m^3} \text{ esogeno dovuto all'assorbimento di potenza EM}}$$

trascuriamo conducibilità (valutazioni su brevi periodi)

trascuriamo termoregolazione (Hp cautelativa)

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \simeq \frac{SAR(\bar{r})}{C(\bar{r})} \qquad SAR = \frac{Q_V(\bar{r})}{\rho(\bar{r})}$$

$SAR_{WB} \simeq 1\text{-}4\,\frac{W}{Kg}$ per 30 min → $\Delta T = 1°C$

calore metabolico basale $\simeq 1.3\text{-}13\,\frac{W}{Kg}$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

- **Stima SAR indotto**

Stima SAR indotto da EM dipende da:
- Vicinanza alla sorgente
- Rapporto lunghezza d'onda/dimensione del corpo
- Polarizzazione del campo rispetto alla posizione del corpo
- Forma del corpo
- Posizione rispetto ad un piano di massa
- Proprietà elettromagnetiche dei tessuti
- Proprietà biologiche dei vari tessuti (la densità di massa)

> **modelli analitici**: approssimano il corpo a volumi omogenei e calcolano la potenza assorbita in hp di irraggiamento da opu
⇒ forniscono stime sulla dipendenza dai vari parametri
<u>problemi</u>: affidabili in regioni limitate dello spettro EM
non forniscono distribuzione SAR locale
non colgono condizioni di risonanza (picchi a determinate f)

> **modelli numerici**: risolvono le eq di Maxwell per il problema specifico
⇒ forniscono soluzioni esatte (non evidenziano dip da parametri)

- **metodo dei momenti (MoM)** detto metodo a blocchetti
scompone corpo in blocchetti con $\sigma$ e $\varepsilon$ cost. calcola il campo $\bar{E}_{int}$ partendo da $\bar{E}_{ext}$ tramite una complessa relazione integrale

- **metodo FDTD** (differenze finite nel dominio del tempo)

- **tipi di polarizzazione**

ha risonanza intorno ai 100MHz

## UOMO COME ANTENNA

un uomo di altezza A in piedi sul terreno equivale elettromagneticamente a un antenna lunga 2A (teorema delle immagini)

potenza attiva irradiata = $P_{irr} = \frac{1}{2} R_{irr} I_0^2$

quando $\frac{L}{\lambda} \simeq 0.8$ c'è un picco nella resistenza di radiazione ($R_{irr}$), che indica una risonanza

$$\hookrightarrow \frac{L}{\lambda} = \frac{Lf}{c} \simeq 0.8 \Rightarrow f_{ris} \simeq \frac{0.8c}{L}$$

$\begin{cases} \text{se } A = 1.6 \Rightarrow 75\,\text{MHz} \\ \text{se } A = 1.8 \Rightarrow 66\,\text{MHz} \end{cases}$

# PATOLOGIA DA RADIOFREQUENZA E MICROONDE

**Interazione** ogni tessuto biologico sottoposto a campo EM interagisce con esso

**Effetto biologico** presenza di variazioni morfologiche/funzionali a carico di tessuti, organi, ecc

**Danno** l'effetto supera i limiti di efficacia dei meccanismi di adattamento dell'organismo. può essere reversibile o irreversibile

## LINEE GUIDA ICNIRP (international commission of NIR protection)

non considerano danni dovuti a fattori <u>non</u> biologici, o l'esposizione a scopi diagnostici/terapeutici

divide in
- **esposizione occupazionale**: adulti esposti in condizioni note e consapevoli
- **esposizione popolazione generale**: individui di ogni età non consapevoli dell'esposizione

### • restrizioni di base

basate sui soli effetti conclamati: riscaldamento tessuti e induzione correnti

| | |
|---|---|
| 0Hz | campo magnetico $[\frac{A}{m}]$ |
| 1Hz – 100 KHz | campo $\bar{E}_{int}$ al tessuto $[\frac{V}{m}]$ * |
| 100 KHz – 10 MHz | densità corrente indotta nel tessuto $[\frac{A}{m^2}]$ * |
| 100 KHz – 10 GHz | SAR $[\frac{W}{Kg}]$ * |
| 10 GHz – 300 GHz | densità di potenza incidente $[\frac{W}{m^2}]$ * |

### • livelli di riferimento

livelli forniti per valutare l'esposizione in maniera pratica (derivati dalle restrizioni di base) sono mediati sull'intero corpo, e calcolati con l'ipotesi che il campo esterno sia un opu
danno restrizioni su $\bar{E}, \bar{H}, \bar{B}, \underline{\bar{S}}$
densità di potenza

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

# METODO FDTD

Finite difference in the time domain

⇒ soluzione numerica eq Maxwell con metodo iterativo

può analizzare un intera banda di frequenze

dalle eq di Maxwell, ignorando la dispersione

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{h}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu}\nabla\times\bar{e} \\[2ex] \dfrac{\partial \bar{e}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\nabla\times\bar{h} - \sigma\bar{e} - \bar{j}_i\right) \end{cases}$$

$$\nabla\times\bar{e} = -\frac{\partial \bar{b}}{\partial t} \qquad \nabla\times\bar{h} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{d}}{\partial t} + \bar{j}_i$$

$$\bar{d} = \varepsilon\bar{e} \qquad \bar{b} = \mu\bar{h} \qquad j = \sigma\bar{e}$$

il rotore è un op differenziale su coord spaziali
⇒ può essere approssimato similmente al rapporto incrementale

$$\frac{df}{dx} = \frac{f\left(x+\frac{\delta x}{2}\right) - f\left(x-\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x}$$

$\delta x$ → passo di discretizzazione

differenza centrale

- griglia di integrazione

si definiscono dei cubetti spaziali denominati celle di Yee, sufficentemente piccole da assumere costante $\varepsilon, \mu, \sigma$.
queste celle sono interallacciate, avendo uno spigolo di una cella al centro dell'altra.
⇒ campo elettrico viene calcolato sugli spigoli della cella, quello magnetico è calcolato al centro della sup sottesa dalla cella è sfalsato di un intervallo temporale di $\frac{1}{2}\Delta T$

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!

> passo spaziale: non uniforme (dipende da dettagli geometrici e proprietà EM del materiale).
$\Delta r$ è una frazione di $\lambda$, considerando opu in mezzo omogeneo con l'$\varepsilon$ maggiore e considerando la $f$ più alta della banda

$$\Delta r = \frac{\lambda}{K} \qquad \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu} f}$$

$\mu = 1$ nei tessuti biologici

> passo temporale: vincolato da:

- stabilità numerica → algoritmo stabile solo se passo temporale è minore del tempo necessario a campo EM per propagarsi al nodo più vicino $\Delta t \leq \frac{\Delta r}{c}$
- banda simulata → $\Delta t$ sufficientemente piccolo da campionare correttamente il campo EM (teorema Shannon-Nyquist) $\Delta t \leq \frac{1}{2B}$ → Banda

- **condizioni iniziali e al contorno**
necessarie per risolvere le eq di Maxwell

> cond iniziali
campo EM in tutto V all'istante $t_0$ (comunemente si sceglie campo nullo)

> condizioni al contorno
campo EM sulla sup S che racchiude V in ogni istante $t \in [t_0, t_1]$

dipendono dalla fisica del problema di interesse

- se volume racchiuso da scatola di conduttore ideale
$\Rightarrow \hat{n} \times \bar{e} = 0 \ \forall t$ (componente di $\bar{e}$ tangente a $S = 0 \ \forall t$)

- se si vuole simulare un campo EM su spazio libero (antenne)
si impone su S il PML (perfectly matched layer)
$\Rightarrow$ lascia uscire campo EM dal volume sopprimendo ogni futura riflessione (trasmissione totale)

- **criterio di stop**
  il calcolo si ferma quando l'energia nel volume è inferiore a una certa soglia (es -40dB)

- **sorgenti**
  deve essere nota $\forall t$. Spesso descritta da impulso gaussiano (minore durata ⇒ maggiore banda)

  Agisce direttamente sui nodi della griglia

  Può essere:
  - densità volumetrica di corrente in V (antenna)
  - densità superficiale di corrente su S
    simula volume illuminato da onda piana proveniente dall'esterno

## PROGRAMMA CST

- **Setup**
  1. seleziono sorgente
  2. seleziono metodo di risoluzione (FDTD)
  3. seleziono unità di misura
  4. seleziono banda di interesse
     seleziono monitors' type frame : $\bar{E}$, $\bar{H}$, farfield, powerflow, power loss
     scelgo monitors' specification frame: frequenze di cui ci interessano i dati

  5. creo modello sorgente e definisco verso corrente

- **calcolo del SAR**
  ricordiamo che $SAR = \frac{\bar{P}_{diss}}{\rho}$ ($P_{diss} = \frac{1}{2}\sigma|\bar{E}|^2$, $\rho$: densità di massa)
  usando il "power loss" field monitor abbiamo la $P_{diss}$ alle frequenze scelte
  ⇒ basta usare una macro in post processing per dare info sulla $\rho$
  e sceglie se calcolare SAR puntuale, $SAR_{10g}$, $SAR_{1g}$

  a parità di antenna, frequenza e potenza attiva ⇒ $SAR_{1g} > SAR_{10g}$
  perché stiamo mediando su campioni più piccoli

- **calcolo bio-heat eq** (mostra innalzamento temperatura)
  1. risolvo problema elettromagnetico
  2. applico macro thermal losses selezionando come dati il monitor della distribuzione di densità di potenza (power loss) (altrimenti la simulazione termica prende in considerazione solo il calore metabolico)
  3. cambio problem type in thermal losses e importo i dati della macro
  4. avvio "Thermal steady* state solver" dando i parametri di temperatura dell'aria e temp. basale

     * steady: durata infinita
     transient: puoi selezionare una durata

Made by Davide Bosco
@davidebosco__
Appunti non vendibili!