A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

2° appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V,W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f\colon V \to W$. Quale è la dimensione di $L(V,W)$?
Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f\colon V \to W$ il cui nucleo è generato dal vettore v. Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V,W)$?

Esercizio 2. Siano $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1,0,1) = (4,2,4)$; il vettore $(1,0,-1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore 2; il vettore $(1,1,0)$ appartiene al nucleo di f.

(a) Per quale valore di t il vettore $(t,1,-1)$ appartiene all'immagine di f?

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(\alpha+2, -2\beta, 3\alpha-1, \alpha+\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(a) Determinare per quale valore di t il vettore $(4,6,t,-1)$ appartiene a S.

(b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (1,-4,3,3)$ e $u_2 = (1,2,3,0)$. Determinare $U \cap S$.

(c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f.

(b) Trovare una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(c) Dato $v = (12,1,1)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} x - 2\alpha z - 2 + 2\alpha^2 = 0 \\ y - \alpha z + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

(a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.

(b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.

(c) Consideriamo il punto $A = (4,6,3)$. Determinare il punto H, proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α, determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

2º appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V,W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f\colon V \to W$. Quale è la dimensione di $L(V,W)$?
Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f\colon V \to W$ il cui nucleo è generato dal vettore v. Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V,W)$?

Esercizio 2. Siano $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1,1,0) = (12,-4,-6)$; il vettore $(1,-1,0)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore -2; il vettore $(0,1,-1)$ appartiene al nucleo di f.

(a) Per quale valore di t il vettore $(3,1,t)$ appartiene all'immagine di f ?

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(2\alpha+\beta, 2\beta+3, \beta+1, -\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(a) Determinare per quale valore di t il vettore $(4,-1,-1,t)$ appartiene a S.

(b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (3,2,1,-1)$ e $u_2 = (0,4,2,1)$. Determinare $U \cap S$.

(c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f.

(b) Trovare una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(c) Dato $v = (2,7,-1)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} x + \alpha y - 1 - \alpha^2 = 0 \\ 2\alpha y - z - 2\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

(a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.

(b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.

(c) Consideriamo il punto $A = (2,-4,8)$. Determinare il punto H, proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α, determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

2º appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f\colon V \to W$. Quale è la dimensione di $L(V, W)$?
Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f\colon V \to W$ il cui nucleo è generato dal vettore v. Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V, W)$?

Esercizio 2. Siano $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(0, -1, 1) = (-2, 7, 7)$; il vettore $(0, 1, 1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore 3; il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene al nucleo di f.

(a) Per quale valore di t il vettore $(-2, t, 1)$ appartiene all'immagine di f?

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(\alpha - 2\beta, 2\alpha - 2, 3\beta, 3 - \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(a) Determinare per quale valore di t il vettore $(0, 6, 6, t)$ appartiene a S.

(b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (0, 4, 3, -2)$ e $u_2 = (3, 2, -3, -1)$. Determinare $U \cap S$.

(c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f.

(b) Trovare una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(c) Dato $v = (7, -2, 0)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} \alpha x - y - \alpha^2 = 0 \\ 3\alpha x - z + 2 - 3\alpha^2 = 0 \end{cases}$$

(a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto? Se sì, determinare tale punto.

(b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.

(c) Consideriamo il punto $A = (-3, 5, 7)$. Determinare il punto H, proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α, determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

2º appello — 5 luglio 2019

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensioni $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Sia $L(V, W)$ lo spazio vettoriale i cui elementi sono le funzioni lineari $f \colon V \to W$. Quale è la dimensione di $L(V, W)$?
Fissiamo un vettore $v \in V$ e consideriamo l'insieme di tutte le funzioni lineari $f \colon V \to W$ il cui nucleo è generato dal vettore v. Questo insieme è un sottospazio vettoriale di $L(V, W)$?

Esercizio 2. Siano $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funzioni lineari. Sia $h \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione data da $h(v) = g(f(v))$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che h ha sempre un autovalore uguale a 0, qualunque siano le funzioni f e g.

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare con le seguenti proprietà: $f(1, 0, -1) = (5, 6, 7)$; il vettore $(1, 0, 1)$ è un generatore dell'autospazio relativo all'autovalore -3; il vettore $(0, 1, 1)$ appartiene al nucleo di f.

(a) Per quale valore di t il vettore $(t, -3, 1)$ appartiene all'immagine di f ?

(b) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia diagonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ consideriamo l'insieme $S = \{(2\beta - 3, 2\alpha, 2\beta - \alpha, 2 - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

(a) Determinare per quale valore di t il vettore $(3, 4, t, -1)$ appartiene a S.

(b) Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da $u_1 = (2, 4, 0, -1)$ e $u_2 = (4, -2, 5, -2)$. Determinare $U \cap S$.

(c) S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? Se la risposta è negativa determinare una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, è dato l'endomorfismo f la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base ortogonale dell'immagine di f.

(b) Trovare una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(c) Dato $v = (11, 0, -2)$ determinare un vettore w di norma minima tale che $v + w \in \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo le seguenti rette:

$$r_\alpha : \begin{cases} x - 3\alpha y + 3\alpha^2 = 0 \\ \alpha y + z + 1 - \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

(a) Le rette r_α passano tutte per uno stesso punto ? Se sì, determinare tale punto.

(b) Mostrare che tutte le rette r_α sono contenute nello stesso piano e scrivere l'equazione cartesiana di tale piano.

(c) Consideriamo il punto $A = (-7, 2, 8)$. Determinare il punto H, proiezione ortogonale di A sul piano trovato al punto (b) e, tra tutte le rette r_α, determinare quelle che hanno distanza minima dal punto A.