

## Appello n.4 di FAMP

9 settembre 2016

**Scrivere sul foglio intestato le proprie generalità! COSA CONSEGNARE:** questo foglio e il foglio protocollo intestato con **TUTTI** gli **SVOLGIMENTI** degli esercizi affrontati. **NON INSERIRE FOGLI DI BRUTTA COPIA.** Necessaria la sufficienza sia alla Teoria che agli Esercizi

TEMPO Esercizi (Analisi + Probabilità): 2 ore e 30 minuti

### Analisi

1. (Teoria) La superficie di una montagna è modellata dal grafico della funzione  $f(x, y) = 25 - 2x^2 - 4y^2$ . Un ciclista si trova nel punto  $(1, 1, 19)$ , e per la pioggia in arrivo decide di scendere lungo la direzione di massima discesa. In quale direzione del piano  $xy$  deve andare? Esprimere il risultato con un vettore unitario (di norma 1) e disegnarlo sul piano  $xy$ .
2. Determinare il flusso del campo  $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$  uscente dalla superficie  $\partial Q$  del cubo  $Q$  di lato 1 di base  $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$  sul piano  $xy$  e 'coperchio' a quota  $z = 1$ .
3. Calcolare l'integrale

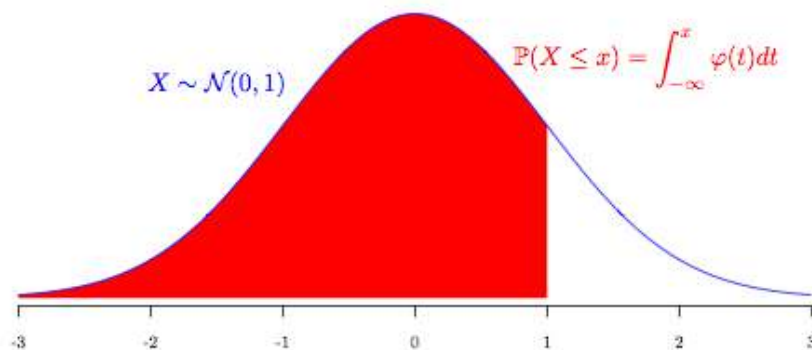
$$\int_D (x + y) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \right\}.$$

4. Determinare i punti critici di  $f(x, y) = x^3 + 12xy + y^4$  (cioè i punti che annullano il gradiente) e studiarne la natura (min. o max. locale o sella). Dire poi se  $f$  ha massimi/minimi assoluti.

### Probabilità

**Fare i conti fino alla fine, usare quando necessario la tabella della normale**

1. Qual è la probabilità che, distribuendo a caso venti carte da gioco diverse in venti contenitori (vuoti), nessuno dei contenitori resti vuoto? Esprimere il risultato in forma di frazione.
2. Il 50% delle mail sono spam. Un software che filtra le mail viene venduto affermando di riconoscere come spam il 99% delle mail che sono spam, e di individuare i falsi positivi (mail non-spam individuate dal software come spam) nel 5% dei casi. Ora una mail viene individuata dal software come spam. Qual è la probabilità che non si tratti di spam? Scrivere il risultato con una frazione senza fattori comuni.
3. Due persone hanno deciso di incontrarsi nella foresta tra mezzogiorno (00:00) e le 2:00 del pomeriggio. Le due persone arrivano indipendentemente in tempi  $X$  e  $Y$ , che sono entrambe variabili uniformi su  $[0, 2]$ .
  - (a) Determinare la legge congiunta di  $(X, Y)$ , precisando bene dove essa eventualmente è nulla.
  - (b) Le due persone hanno deciso di aspettarsi al massimo 20 minuti. Disegnare nel piano la regione dei tempi  $(x, y)$  nella quale le due persone possono incontrarsi, delimitandola analiticamente. Dedurre qual è la probabilità che i due si incontrino.
4. (Teoria) Il peso dell'unicorno è descritto come una variabile normale di media 1000 kg e varianza di 25 kg<sup>2</sup>. Qual è la probabilità approssimata che il peso *medio* di 36 unicorni scelti a caso sia maggiore di 1001 kg? Esprimere il risultato con 4 cifre dopo la virgola.



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Figure 1: Funzione di distribuzione  $\Phi$  della normale standard