A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

3° Appello — 12 settembre 2012

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $3x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il più piccolo sottospazio che contiene il vettore $(1, 1, 0, 0)$ e i vettori $(0, t, t + 1, t + 2)$, per ogni $t \in \mathbb{Z}$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con W. Se un tale L esiste, se ne determini una base. Si determini inoltre (se esiste) un sottospazio $L' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(U \oplus L) \oplus L' = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà: (i) il polinomio caratteristico di f è $x^2(x - 2)$, (ii) il vettore $v_1 = (1, -1, 2)$ è una base del nucleo di f, (iii) $v_2 = (0, 2, -1)$ è il generatore dell'autospazio relativo all'unico autovalore non nullo di f, (iv) $f(v_3) = v_1$, ove $v_3 = (1, 0, 2)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si stabilisca se la matrice B è diagonalizzabile.

(d) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini $f^{-1}(t, 3, 0)$.

Esercizio 3. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, dotato del prodotto scalare usuale. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (1, 3, 0, 0, -4)$ e sia $U^\perp \subset V$ l'ortogonale di U in V.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (4, 3, -4, 0, -3) \in V$ si determinino le proiezioni ortogonali di v su U e $U^\perp$.

(d) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^5$ che sia ortogonale sia a U che a $U^\perp$. Se un tale sottospazio esiste, se ne determini una base e si dica se esso è unico.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Si determini la retta ℓ parallela al vettore $u = (8, -6, -6)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determini l'equazione del piano π contenente la retta r e ortogonale al vettore $(3, -1, -1)$.

(d) Si determinino le proiezioni ortogonali del punto $P = (1, 1, 2)$ sul piano π e sulla retta s.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

3° Appello — 12 settembre 2012

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $3x_1 - 2x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 - 6x_3 - x_4 = 0$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il più piccolo sottospazio che contiene il vettore $(0, 1, 1, -1)$ e i vettori $(t, 0, t-1, t+2)$, per ogni $t \in \mathbb{Z}$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con W. Se un tale L esiste, se ne determini una base. Si determini inoltre (se esiste) un sottospazio $L' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(U \oplus L) \oplus L' = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà: (i) il polinomio caratteristico di f è $x^2(x+3)$, (ii) il vettore $v_1 = (1, 0, 2)$ è una base del nucleo di f, (iii) $v_2 = (1, -1, 2)$ è il generatore dell'autospazio relativo all'unico autovalore non nullo di f, (iv) $f(v_3) = v_1$, ove $v_3 = (0, 2, -1)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si stabilisca se la matrice B è diagonalizzabile.

(d) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini $f^{-1}(3, -2, t)$.

Esercizio 3. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$, dotato del prodotto scalare usuale. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 2, 0, 3, 0)$, $u_2 = (1, 1, 0, 0, -2)$ e sia $U^\perp \subset V$ l'ortogonale di U in V.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (1, 2, -4, 4, -3) \in V$ si determinino le proiezioni ortogonali di v su U e $U^\perp$.

(d) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^5$ che sia ortogonale sia a U che a $U^\perp$. Se un tale sottospazio esiste, se ne determini una base e si dica se esso è unico.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x + y + 4 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Si determini la retta ℓ parallela al vettore $u = (4, -4, -2)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determini l'equazione del piano π contenente la retta r e ortogonale al vettore $(2, -1, -1)$.

(d) Si determinino le proiezioni ortogonali del punto $P = (2, 1, 1)$ sul piano π e sulla retta s.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

3º Appello — 12 settembre 2012

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $x_1 - 2x_2 - x_4 = 0$ e $2x_1 - x_2 + 7x_4 = 0$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il più piccolo sottospazio che contiene il vettore $(0, 0, 1, 1)$ e i vettori $(t + 2, t + 1, 0, t - 1)$, per ogni $t \in \mathbb{Z}$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con W. Se un tale L esiste, se ne determini una base. Si determini inoltre (se esiste) un sottospazio $L' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(U \oplus L) \oplus L' = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà: (i) il polinomio caratteristico di f è $x^2(x - 1)$, (ii) il vettore $v_1 = (1, -1, 2)$ è una base del nucleo di f, (iii) $v_2 = (1, 0, 2)$ è il generatore dell'autospazio relativo all'unico autovalore non nullo di f, (iv) $f(v_3) = -v_1$, ove $v_3 = (0, 2, -1)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si stabilisca se la matrice B è diagonalizzabile.

(d) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini $f^{-1}(t, -1, 8)$.

Esercizio 3. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ di equazione $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$, dotato del prodotto scalare usuale. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, 3, 0, 0, 2)$ e sia $U^\perp \subset V$ l'ortogonale di U in V.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (4, 3, -4, 0, 3) \in V$ si determinino le proiezioni ortogonali di v su U e $U^\perp$.

(d) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^5$ che sia ortogonale sia a U che a $U^\perp$. Se un tale sottospazio esiste, se ne determini una base e si dica se esso è unico.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ 2x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Si determini la retta ℓ parallela al vettore $u = (8, -6, -4)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determini l'equazione del piano π contenente la retta r e ortogonale al vettore $(3, 4, 1)$.

(d) Si determinino le proiezioni ortogonali del punto $P = (1, 1, 1)$ sul piano π e sulla retta s.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

3° Appello — 12 settembre 2012

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il più piccolo sottospazio che contiene il vettore $(1, 0, 0, 1)$ e i vettori $(t, t+2, t+3, 0)$, per ogni $t \in \mathbb{Z}$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane e una base di W.

(c) Si determinino delle basi di $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta sia con U che con W. Se un tale L esiste, se ne determini una base. Si determini inoltre (se esiste) un sottospazio $L' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $(U \oplus L) \oplus L' = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ con le seguenti proprietà: (i) il polinomio caratteristico di f è $x^2(x-3)$, (ii) il vettore $v_1 = (0, 2, -1)$ è una base del nucleo di f, (iii) $v_2 = (1, 0, 2)$ è il generatore dell'autospazio relativo all'unico autovalore non nullo di f, (iv) $f(v_3) = -v_1$, ove $v_3 = (1, -1, 2)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base canonica.

(c) Si stabilisca se la matrice B è diagonalizzabile.

(d) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini $f^{-1}(3, -4, t)$.

Esercizio 3. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ di equazione $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0$, dotato del prodotto scalare usuale. Sia $U \subset V$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 3, 0, -2, 0)$, $u_2 = (2, -1, 0, 0, -3)$ e sia $U^\perp \subset V$ l'ortogonale di U in V.

(a) Si determini una base ortogonale di U.

(b) Si determini una base di $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (1, 2, 8, -4, 5) \in V$ si determinino le proiezioni ortogonali di v su U e $U^\perp$.

(d) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^5$ che sia ortogonale sia a U che a $U^\perp$. Se un tale sottospazio esiste, se ne determini una base e si dica se esso è unico.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono date le rette

$$r : \begin{cases} y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dica se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Si determini la retta ℓ parallela al vettore $u = (4, 6, 2)$ e incidente le rette r e s.

(c) Si determini l'equazione del piano π contenente la retta r e ortogonale al vettore $(2, -1, 2)$.

(d) Si determinino le proiezioni ortogonali del punto $P = (1, 2, 1)$ sul piano π e sulla retta s.