

CINEMATICA

Esercizio n.1

Nel meccanismo riportato in Figura 1 la manovella AB ruota in senso antiorario, attorno ad A, con velocità di 70 giri/min. Il membro CD oscilla intorno al perno D ed è collegato al perno B della manovella mediante l'asta BC. Le lunghezze delle aste sono $AB=0.30\text{ m}$, $BC=1.2\text{ m}$, $CD=0.9\text{ m}$. Tutte le coppie cinematiche sono prive di attrito.

Per la posizione con angolo $\theta = 45^\circ$, si svolga l'analisi cinematica completa.

Si calcoli inoltre l'accelerazione del punto G, posto al centro dell'asta BC.

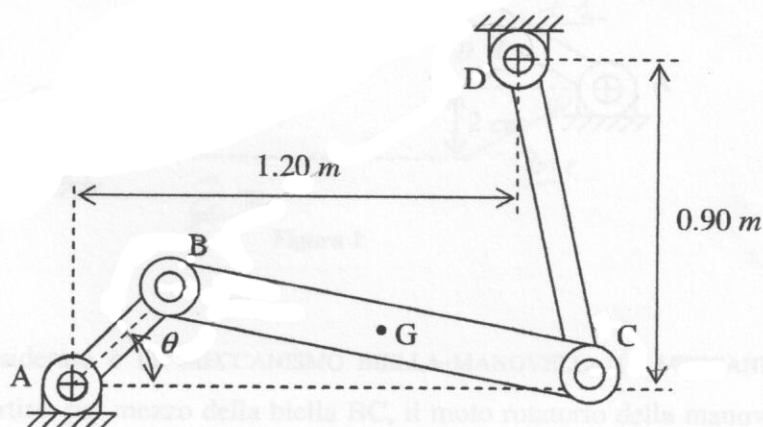


Figura 1

Il meccanismo considerato è un QUADRILATERO ARTICOLATO PIANO, utilizzato in questo caso per convertire il moto rotatorio della MANOVELLA motrice AB, in un moto oscillatorio del BILANCIERE CD, per mezzo della BIELLA BC.

Possiamo pensare che la manovella ed il bilanciere siano solidali rispettivamente, ad un albero motore e ad un albero condotto, non rappresentati in figura, ed i cui assi geometrici coincidono con gli assi cinematici delle coppie A e D. In questo esempio, quindi, la manovella funge da membro MOVENTE del meccanismo, mentre il bilanciere funge da CEDENTE.

Il primo passo da compiere nella soluzione del problema assegnato è ricavare, dal disegno del meccanismo, lo SCHEMA CINEMATICO (vedi Figura 2).

Lo schema cinematico è uno schema realizzato con segmenti, in generale di retta, congiungenti gli accoppiamenti, che a loro volta sono rappresentati mediante convenzionali simboli di coppia. Lo schema cinematico rispetta le dimensioni strutturalmente significative del meccanismo (DIMENSIONI PRINCIPALI), e quindi la sua geometria, sopprimendo ogni elemento superfluo alla definizione del movimento dei membri.

Esercizio n.2

OK

Nel meccanismo biella-manovella non centrato riportato in Figura 1 la lunghezza della manovella AB è 8.5 cm e quella della biella è 27 cm. La manovella è collegata al telaio per mezzo della coppia rotoidale A, e ruota con una velocità angolare costante di 100 giri/min. Tutte le coppie cinematiche sono prive di attrito.

Per la posizione indicata, con angolo $\theta = 30^\circ$, si svolga l'analisi cinematica completa del meccanismo.

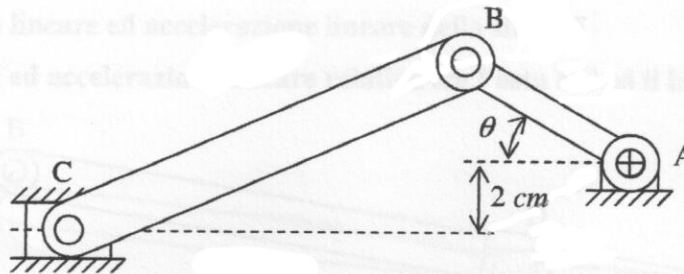


Figura 1

Il meccanismo considerato è un MECCANISMO BIELLA-MANOVELLA (o MECCANISMO DI SPINTA), utilizzato per convertire, per mezzo della biella BC, il moto rotatorio della manovella motrice AB, in un MOTO ALTERNATIVO lineare del PISTONE C.

In generale, un meccanismo biella-manovella può essere utilizzato con due obiettivi funzionali distinti:

- convertire un moto rotatorio in un moto alternativo lineare: è il caso trattato nel presente esercizio. In questo caso il membro movente è la manovella, mentre il cedente è il pistone. Meccanismi biella-manovella di questo tipo vengono impiegati nei compressori alternativi, ove la manovella è generalmente messa in rotazione da motori elettrici;
- convertire un moto alternativo lineare in un moto rotatorio: è il caso dei motori a combustione interna, ove il membro movente è il pistone (sulla cui testa agisce la pressione generata dalla combustione della miscela aria-combustibile), ed il cedente è la manovella (solidale all'albero motore).

Il meccanismo in Figura 1 è detto NON CENTRATO poiché il BOTTONE DI MANOVELLA (centro della coppia rotoidale A) non giace sull'asse cinematico della coppia prismatica.

In Figura 2 è riportato lo schema cinematico del meccanismo studiato.

STATICA

Esercizio n.6

OK

Per il meccanismo illustrato in Figura 1, sito in un piano verticale, calcolare il valore della forza F , applicata in direzione verticale al centro della biella BC, tale da equilibrare il meccanismo nella posizione indicata in figura. Il meccanismo è sotto gli effetti della forza peso, delle forze d'inerzia, e dei momenti M_1 ed M_2 agenti sulle manovelle AB e CD. Calcolare inoltre il valore della reazione vincolare scambiata nell'accoppiamento C.

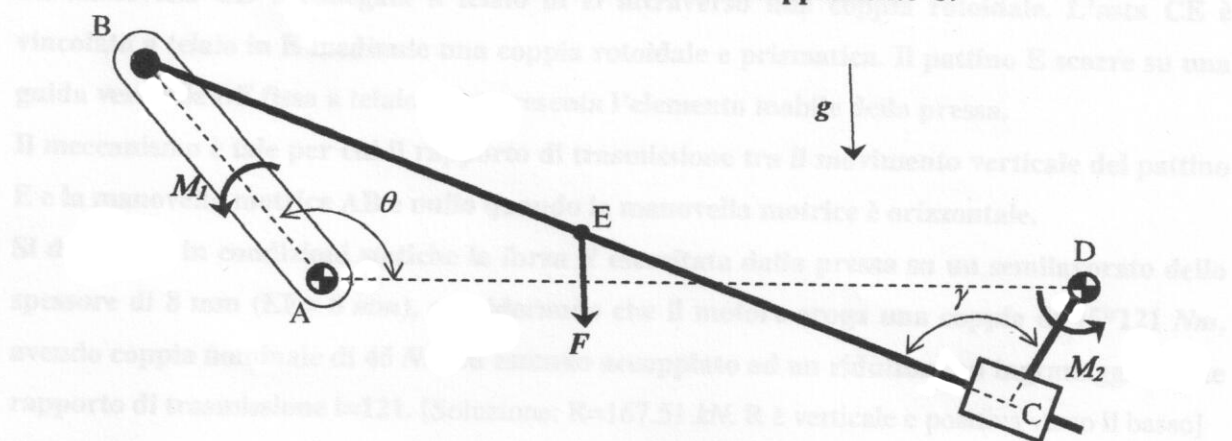


Figura 1

Sono dati:

$$AB = 48 \text{ cm} \quad CD = 18 \text{ cm} \quad BE = 70 \text{ cm} \quad AD = 106 \text{ cm} \quad \gamma = 1.6 \text{ rad}$$

$$\theta = 130^\circ \quad \dot{\theta} = 10 \text{ rad/s} \quad \ddot{\theta} = -40 \text{ rad/s}^2 \quad m = 3 \text{ kg/m} \quad M_1 = 2 \text{ Nm} \quad M_2 = 5 \text{ Nm}$$

dove m è la massa per unità di lunghezza dell'asta AB, la cui distribuzione di massa è supposta uniforme.

La necessità di calcolare la reazione scambiata in C impone di utilizzare un approccio solutivo basato sulla scrittura di equazioni di equilibrio di tipo Newtoniano. Si noti da subito che la coppia in C è prismatica e quindi, la reazione incognita è costituita da una forza normale all'asse di traslazione della coppia (B-E-C) e da un momento normale al piano del moto.

In Figura 2, il meccanismo è scomposto nei singoli membri rigidi che lo costituiscono, a ciascuno dei quali è associato un vettore e sono applicate le forze esterne attive e reattive. Al membro ①, in particolare, sono applicate, oltre alle forze reattive scambiate in A e B, la coppia esterna \vec{M}_1 , e la forza peso \vec{F}_p . Poiché la massa della manovella è distribuita uniformemente, il centro di massa

Esercizio n.7

Il meccanismo illustrato in figura rappresenta il movimento principale di una pressa ad azionamento elettrico.

La manovella AB è l'elemento motore e ruota alla velocità costante di 15 giri/min in senso orario.

La manovella CD è collegata a telaio in D attraverso una coppia rotoidale. L'asta CE è vincolata a telaio in E mediante una coppia rotoidale e prismatica. Il pattino E scorre su una guida verticale DF fissa a telaio e rappresenta l'elemento mobile della pressa.

Il meccanismo è tale per cui il rapporto di trasmissione tra il movimento verticale del pattino E e la manovella motrice AB è nullo quando la manovella motrice è orizzontale.

Si determini in condizioni statiche la forza R esercitata dalla pressa su un semilavorato dello spessore di 8 mm ($EF = 8 \text{ mm}$), considerando che il motore eroga una coppia di $45 \cdot 121 \text{ Nm}$, avendo coppia nominale di 45 Nm ed essendo accoppiato ad un riduttore ad ingranaggi avente rapporto di trasmissione $i = 121$. [Soluzione: $R = 167.51 \text{ kN}$. R è verticale e positiva verso il basso]

Si determini inoltre la forza R esercitata dalla pressa sullo stesso semilavorato nel caso in cui agiscano le forze di inerzia dovute ad una massa uniformemente distribuita sull'elemento CD e ad una massa concentrata in C. Sia m_{CD} la massa per unità di lunghezza dell'asta CD (avente sezione e densità uniformi) e M_C il valore della massa concentrata in C. [$R = 167 \text{ kN}$]

$$AB = 80 \text{ mm}$$

$$BC = 440 \text{ mm}$$

$$CD = 140 \text{ mm}$$

$$CE = 140 \text{ mm}$$

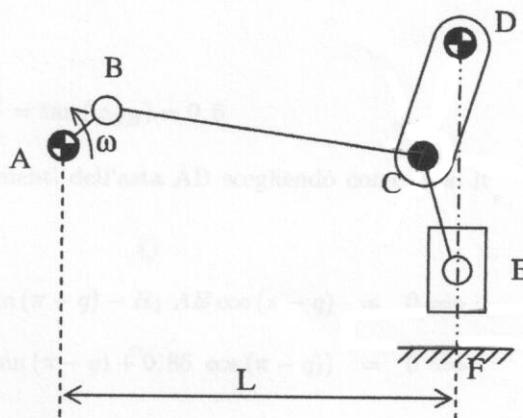
$$EF = 8 \text{ mm}$$

$$L = 520 \text{ mm}$$

$$\omega = -15 \text{ giri/min}$$

$$M_C = 150 \text{ kg}$$

$$m_{CD} = 10 \text{ kg/m}$$



Esercizio n.5

Il meccanismo illustrato in Figura 1 schematizza il movimento di bloccaggio della lamiera di una pressa-piegatrice.

Si consideri che il segmento AB dell'elemento ABE è orizzontale in posizione di chiusura.

In tale posizione ed in condizioni statiche si determini la reazione scambiata nell'accoppiamento D e la coppia M da applicare alla manovella CD affinché il meccanismo sia in grado di esercitare una forza di chiusura F sulla lamiera di 200000 N. Si trascuri l'effetto della forza di gravità.

Sia d la distanza verticale tra la coppia a telaio A e la coppia a telaio D. Sia b la distanza orizzontale tra le stesse coppie. Siano B e C coppie rotoidali prive di attrito. Siano inoltre h e k le quote, rispettivamente orizzontale e verticale, del punto E di chiusura, e quindi di applicazione della forza, rispetto alla coppia A in condizioni di chiusura.

Sono dati:

$AB = 60 \text{ cm}$	$b = 45 \text{ cm}$
$BC = 90 \text{ cm}$	$d = 60 \text{ cm}$
$CD = 15 \text{ cm}$	$h = 80 \text{ cm}$
$F = 200000 \text{ N}$	$k = 35 \text{ cm}$

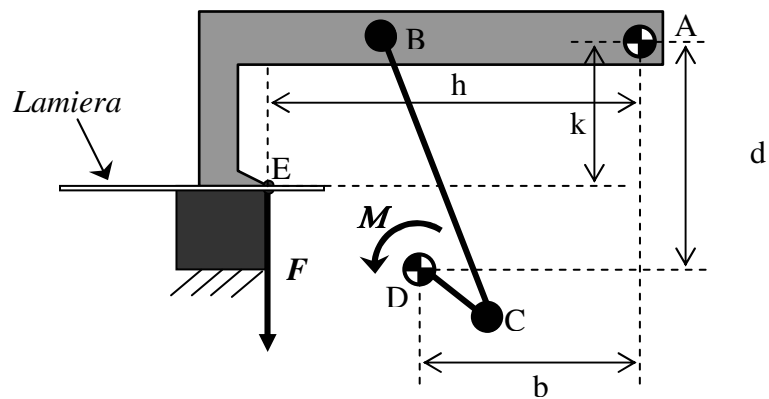


Figura 1

Tracciamo anzitutto uno schema cinematico del meccanismo (Figura 2).

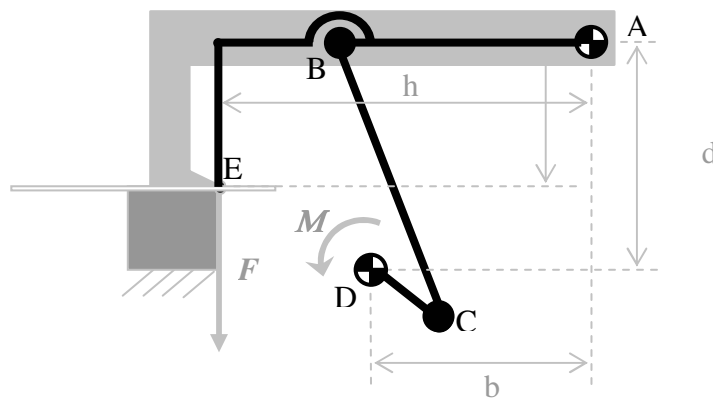


Figura 2

Si nota che il meccanismo è, di fatto, un quadrilatero articolato, la cui sintesi dimensionale viene effettuata in modo tale che quando la pressa è in condizioni di chiusura, e cioè quando l'elemento cedente ABE sta bloccando la lamiera, la manovella movente CD e la biella BC risultino quasi allineate, in modo tale da ottenere il massimo effetto di amplificazione della coppia applicata \vec{M} . Nel presente esercizio tale condizione è solo parzialmente verificata, poichè, come emergerà a valle dell'analisi cinematica di posizione, nella configurazione analizzata CD e BC risultano disallineate di circa 13° .

Essendo esplicitamente richiesto di determinare, oltre alla coppia \vec{M} , la forza complessivamente scambiata nell'accoppiamento B, si procede ad impostare l'analisi dinamica adottando un approccio di tipo NEWTONIANO e non LAGRANGIANO (ENERGETICO).

Nella figura che segue (Figura 3) il meccanismo è stato scomposto nei singoli membri rigidi che lo costituiscono. Ad ognuno di tali membri sono state applicate le forze (e i momenti) ESTERNE ATTIVE (\vec{F} e \vec{M}) e REATTIVE (sono le reazioni che si sviluppano nelle coppie cinematiche) agenti su di esso. Poiché le reazioni hanno comportamento duale rispetto agli spostamenti relativi di una coppia, in ogni coppia rotoidale la reazione è una forza passante per l'asse di rotazione della coppia. Ciò vale naturalmente solo in assenza di attrito. Si osservi che in Figura 3, per ogni coppia rotoidale sono state riportate le due proiezioni lungo gli assi coordinati della reazione. Queste ultime sono state tracciate in modo tale da rispettare il principio di azione e reazione: le componenti lungo l'asse x ed y della forza che il generico membro i esercita sul membro j sono uguali, in modulo e direzione, e contrarie, in verso, alle omonime componenti della forza che il membro j esercita sul membro i .

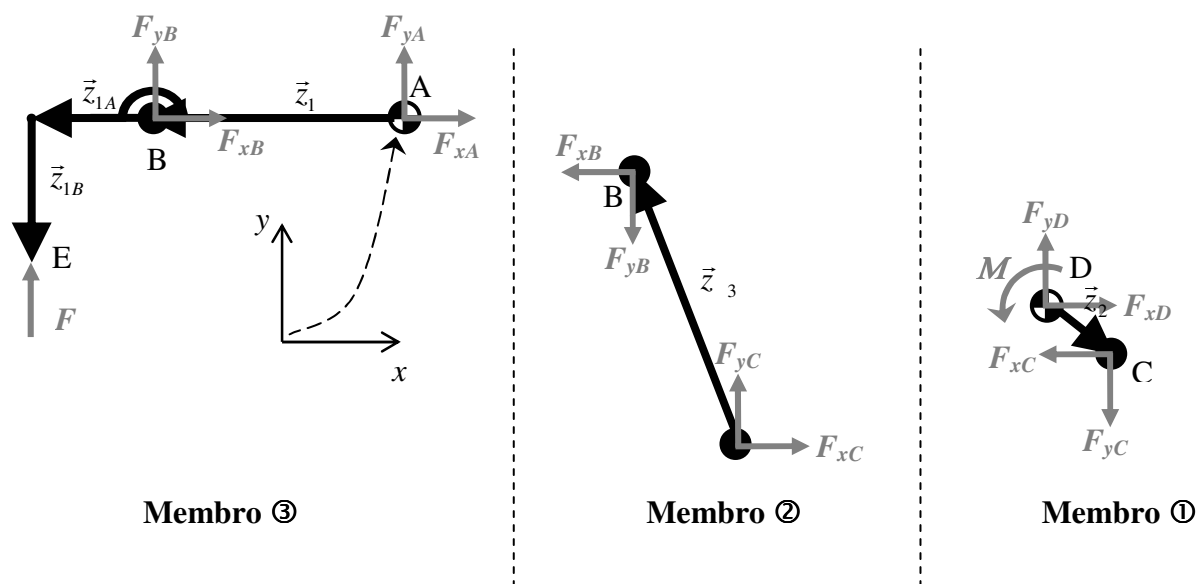


Figura 3

E' utile, anche se non necessario al fine della soluzione dell'esercizio proposto, evidenziare che in accoppiamenti prismatici si sviluppano reazioni diverse rispetto a quelle che si sviluppano in coppie rotoidali. Nella coppia prismatica infatti, la reazione è costituita da una forza normale all'asse di traslazione della coppia e da un momento normale al piano del moto.

In generale, dopo aver identificato e tracciato le forze attive e reattive agenti su ogni membro del meccanismo, si possono scrivere equazioni le EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA: equazioni VETTORIALI di EQUILIBRIO delle forze esterne e dei momenti delle forze esterne calcolati rispetto ad un polo generico:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\sum \vec{M}_o = \frac{d\vec{K}_o}{dt} + \vec{v}_o \times \vec{Q}$$

essendo $\sum \vec{F}$ la risultante di tutte le forze esterne attive e reattive, \vec{Q} la quantità di moto del membro (prodotto della massa complessiva del membro e della velocità del centro di massa dello stesso: $\vec{Q} = m \cdot \vec{v}_{CM}$), $\sum \vec{M}_o$ il momento risultante di tutti i momenti rispetto al generico polo O delle forze esterne attive e reattive, \vec{K}_o il momento della quantità di moto del sistema rispetto al medesimo polo O , v_o la velocità del polo O .

Quando i membri del meccanismo sono in moto PIANO, le equazioni cardinali della dinamica si semplificano notevolmente. Per ciascun membro è possibile scrivere:

$$\sum F_x = m\ddot{x}_{CM}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}_{CM}$$

$$\sum M_o = I_o\ddot{\varphi} \text{ (con } O \text{ punto fisso o coincidente con } CM)$$

essendo $\sum F_x$ e $\sum F_y$ le risultanti delle componenti delle forze esterne lungo gli assi x ed y del riferimento cartesiano adottato, \ddot{x}_{CM} e \ddot{y}_{CM} le componenti dell'accelerazione del centro di massa del membro nel medesimo riferimento, $\ddot{\varphi}$ l'accelerazione angolare del membro, I_o il momento d'inerzia del membro, calcolato rispetto al polo O (che dovrà essere un punto fisso o il centro di massa), ed infine $\sum M_o$ la risultante dei momenti delle forze esterne rispetto al polo O . Si è naturalmente ipotizzato che gli assi x ed y del riferimento scelto siano paralleli al piano del moto.

Poiché il problema considerato è, non solo un problema piano, ma anche di natura STATICA, si andranno in pratica a scrivere per ogni membro due equazioni scalari che esprimono l'equilibrio

statico delle componenti delle forze esterne lungo gli assi x ed y del riferimento cartesiano utilizzato, ed una equazione scalare di equilibrio dei momenti delle forze esterne valutati rispetto ad un qualsiasi polo (poiché il sistema di forze che li genera è un sistema a risultante nulla):

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_O = 0 \text{ (con } O \text{ punto qualsiasi)}$$

Scriviamo le equazioni di equilibrio per ciascuno dei membri individuati.

Membro ①

Il seguente sistema di tre equazioni esprime l'equilibrio di tutte le forze attive e reattive che agiscono sul membro ① (equazioni (1) e (2)) e dei momenti di tali forze valutati rispetto al polo D (equazione (3)).

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_{xD} - F_{xC} = 0 & (1) \\ F_{yD} - F_{yC} = 0 & (2) \end{array} \right. \quad \text{Polo } D \left\{ \begin{array}{l} F_{xC} \cdot z_2 \sin \varphi_2 - F_{yC} \cdot z_2 \cos \varphi_2 + M = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

La relazione (3) presenta, oltre al contributo della coppia esterna \vec{M} , i contributi delle componenti della forza reattiva \vec{F}_C generata nella coppia C. Tali contributi possono essere immediatamente ricavati per mezzo dello sviluppo formale del determinante sotto riportato, che consente il calcolo del prodotto vettoriale del vettore \vec{z}_2 e della forza \vec{F}_C , e pertanto del momento della forza \vec{F}_C rispetto al polo D :

$$\vec{z}_2 \wedge \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ z_2 \cos \varphi_2 & z_2 \sin \varphi_2 & 0 \\ -F_{xC} & -F_{yC} & 0 \end{vmatrix} = (F_{xC} \cdot z_2 \sin \varphi_2 - F_{yC} \cdot z_2 \cos \varphi_2) \mathbf{k}$$

Si noti che nella seconda e terza riga della matrice sono riportate rispettivamente le componenti dei vettori \vec{z}_2 e \vec{F}_C secondo la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ associata al sistema di riferimento cartesiano adottato.

È importante evidenziare che la scelta del polo D è assolutamente arbitraria. Essa è stata effettuata al solo fine di eliminare, nella relazione (3), i contributi delle reazioni vincolari scambiate in D, e quindi di semplificarne l'espressione.

Membro ②

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{xC} - F_{xB} = 0 \quad (4) \\ F_{yC} - F_{yB} = 0 \quad (5) \\ F_{xB} \cdot z_3 \sin \varphi_3 - F_{yB} \cdot z_3 \cos \varphi_3 = 0 \quad (6) \end{array} \right.$$

Come evidenziato precedentemente, l'equazione (6) si ottiene come sviluppo formale del seguente determinante:

$$\vec{z}_3 \wedge \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ z_3 \cos \varphi_3 & z_3 \sin \varphi_3 & 0 \\ -F_{xB} & -F_{yB} & 0 \end{vmatrix} = (F_{xB} \cdot z_3 \sin \varphi_3 - F_{yB} \cdot z_3 \cos \varphi_3) \mathbf{k}$$

Membro ③

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{xA} + F_{xB} = 0 \quad (7) \\ F_{yA} + F_{yB} + F = 0 \quad (8) \\ -F_{yB} \cdot z_1 - F \cdot (z_1 + z_{1A}) = 0 \quad (9) \end{array} \right.$$

ove l'equazione (9) si ricava sommando i momenti delle forze \vec{F} e \vec{F}_B rispetto al polo D :

$$\vec{z}_1 \wedge \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -z_1 & 0 & 0 \\ F_{xB} & F_{yB} & 0 \end{vmatrix} = (-F_{yB} \cdot z_1) \mathbf{k}$$

$$(\vec{z}_1 + \vec{z}_{1A} + \vec{z}_{1B}) \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -z_1 - z_{1A} & -z_{1B} & 0 \\ 0 & F & 0 \end{vmatrix} = (-F \cdot (z_1 + z_{1A})) \mathbf{k}$$

Si noti che sono state ricavate nove equazioni lineari nelle nove incognite F_{xA} , F_{yA} , F_{xB} , F_{yB} , F_{xC} , F_{yC} , F_{xD} , F_{yD} e M (supponendo ovviamente risolto il problema cinematico di posizione, e di conseguenza note φ_2 e φ_3).

Volendo risolvere il sistema per sostituzione, si può anzitutto osservare che le equazioni (1) e (2) sono le uniche in cui appaiono le reazioni vincolari scambiate in D, e quindi con il telaio. Pertanto sarà necessario impiegare tali equazioni solo se si desidera calcolare dette reazioni vincolari. Cosa non richiesta nel testo dell'esercizio. Lo stesso vale per le equazioni (7) e (8) e per le reazioni vincolari scambiate in A. Pertanto le equazioni che è necessario considerare per il calcolo di M e F_{xB} ed F_{yB} sono solo cinque. In particolare, dall'equazione (9) si ricava:

$$F_{yB} = -F \cdot (z_1 + z_{1A}) / z_1 = -300 \text{ kN}.$$

Dall'equazione (6)

$$F_{xB} = F_{yB} / \tan \varphi_3$$

ed infine dalle equazioni (3), (4) e (5):

$$M = -F_{xB} \cdot z_2 \sin \varphi_2 + F_{yB} \cdot z_2 \cos \varphi_2 .$$

Per il calcolo di M e F_{xB} è necessario risolvere il problema cinematico di posizione. Se ne propone la soluzione mediante scomposizione del meccanismo in gruppi di Assur. Il meccanismo può essere scomposto nel meccanismo base ABE, e nella diade di prima specie BCD (Figura 4).

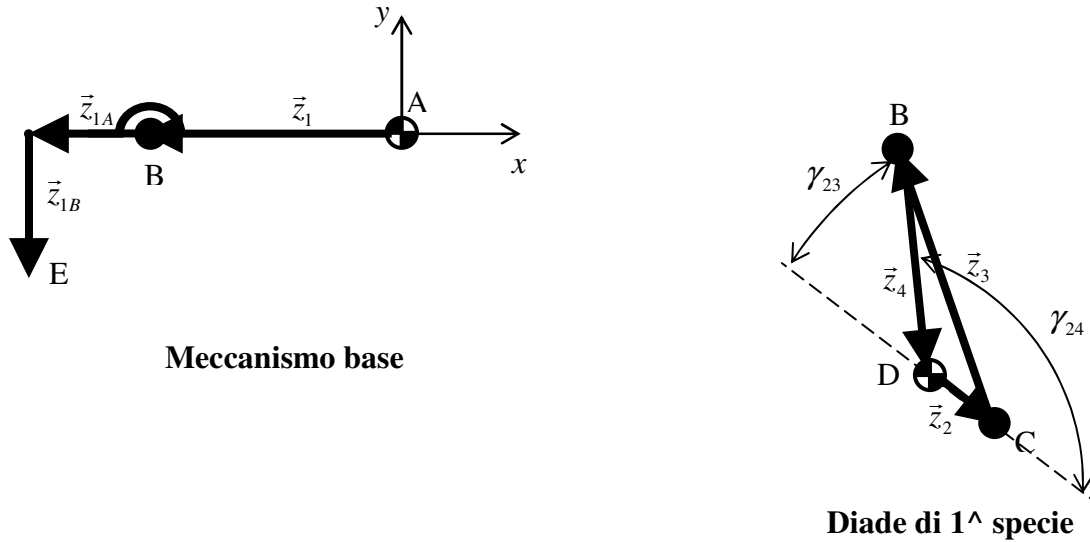


Figura 4

Poiché nella posizione considerata (posizione di chiusura) il membro ABE risulta essere orizzontale, con la scelta del riferimento mostrata in Figura 4, segue banalmente che

$$x_B = -z_1 = -0.6 \text{ m}, \quad y_B = 0$$

Passiamo ora all'analisi di posizione della diade:

$$z_4 = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = 0.570 \text{ m}$$

$$\varphi_4 = \arctan[(y_D - y_B)/(x_D - x_B)] + 2\pi = 4.979 \text{ rad}$$

$$z_3^2 = z_2^2 + z_4^2 - 2z_2z_4 \cos \gamma_{24} \Rightarrow \gamma_{24} = \arccos\left(\frac{z_2^2 + z_4^2 - z_3^2}{2z_2z_4}\right) = 2.619 \text{ rad}$$

$$\varphi_2 = \varphi_4 + \pi - \gamma_{24} = 5.501 \text{ rad}$$

$$z_4^2 = z_2^2 + z_3^2 - 2z_2z_3 \cos \gamma_{23} \Rightarrow \gamma_{23} = \arccos\left(\frac{z_2^2 + z_3^2 - z_4^2}{2z_2z_3}\right) = 0.389 \text{ rad}$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \pi - \gamma_{23} = 1.971 \text{ rad}$$

Si possono ora calcolare i valori della coppia motrice e della reazione scambiata in B:

$$F_{xB} = F_{yB} / \tan \varphi_3 = 126.91 \text{ kN}$$

$$M = -F_{xB} \cdot z_2 \sin \varphi_2 + F_{yB} \cdot z_2 \cos \varphi_2 = -24.672 \text{ kNm}.$$

Si osservi che la forza scambiata in B, di modulo $|F| = \sqrt{F_{xB}^2 + F_{yB}^2} = 325.74 \text{ kN}$, ha direzione coincidente con quella del vettore \vec{z}_3 . Ciò è una conseguenza dell'equazione (6), dalla quale deriva $\tan \varphi_3 = F_{yB} / F_{xB}$, ed è coerente con il fatto che la biella BC, caricata solamente agli estremi, funziona da elemento puntone-tirante.

Si prega di segnalare eventuali errori a:
 Ing. Alberto Trevisani
 Dipartimento di Innovazione Meccanica e Gestionale
 Università degli Studi di Padova
 Via Venezia 1, 35131 PADOVA
 email: alberto.trevisani@unipd.it

Esercizio n.8

Il meccanismo in fig. 1 è composto da una manovella AB, un'asta CB ed un pattino D. Nella configurazione in figura il meccanismo è in equilibrio statico. Il meccanismo è disposto nel piano verticale. Porre l'origine del sistema di riferimento nel punto E. Nel punto G (punto intermedio dell'asta AB) vi è una massa concentrata pari ad $m = 0,6 \text{ kg}$. L'angolo CDE è pari a 90° . La coppia C applicata all'asta AB vale $C = 0,3 \text{ Nmm}$. Per tenere in equilibrio il sistema viene applicata una forza F al pattino D. Inoltre si considera già effettuato il calcolo della forza F che equilibra staticamente il sistema. Perciò ipotizziamo di avere già calcolato, attraverso il PLV il valore di $F = 1,06 \text{ N}$.

Calcolare le reazioni vincolari nel pattino D e della coppia rotoidale in A.

DATI:

$$\begin{array}{llllll} AB = 70 \text{ mm} & BC = 58 \text{ mm} & CD = 18 \text{ mm} & EA = 33 \text{ mm} & \alpha = & \\ 13^\circ & q = 120^\circ & \varphi_{CB} = 31^\circ & & & \end{array}$$

La forza gravitazionale della massa concentrata vale

$$F_P = m g = 5,89 \text{ [N]}$$

Introduciamo tutte le reazioni vincolari del meccanismo com in figura 2.

Si hanno le reazioni vincolari $R_{Ax}, R_{Ay}, R_1, R_2, R_3, R_4, R_D, C_D$.

Reazioni vincolari dell'asta AB

Imponendo l'equilibrio al corpo 2 si può scrivere immediatamente

$$\begin{aligned} R_2 &= R_4 \\ R_1 &= R_3 \\ \frac{R_4}{R_3} &= \frac{R_2}{R_1} = \tan(\varphi_{CB}) = 0,6 \end{aligned}$$

Consideriamo l'equilibrio ai momenti dell'asta AB scegliendo come polo il punto A

$$\begin{aligned} C + F_P \frac{AB}{2} \cos(\pi - q) - R_1 AB \sin(\pi - q) - R_2 AB \cos(\pi - q) &= 0 \Rightarrow \\ C + F_P \frac{AB}{2} \cos(\pi - q) - R_1 AB (\sin(\pi - q) + 0,86 \cos(\pi - q)) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_1 = \frac{C + F_P \frac{AB}{2} \cos(\pi - q)}{AB (\sin(\pi - q) + 0,86 \cos(\pi - q))} = 1,27 \text{ [N]}$$

Di conseguenza $R_2 = R_1 \tan(\varphi_{CB}) = 0,76 \text{ [N]}$.

Applicando l'equilibrio alla traslazione lungo x ed y all'asta AB si ottiene

$$\begin{aligned}
R_1 - R_{Ax} &= 0 \implies R_{Ax} = R_1 = 1,27 [N] \\
R_{Ay} - F_P + R_2 &= 0 \implies R_{Ay} = F_P - R_2 = 5,13 [N]
\end{aligned}$$

Reazioni vincolari del pattino D

Consideriamo l'equilibrio lungo y

$$\begin{aligned}
R_D \cos(\alpha) - F \sin(\alpha) - R_4 &= 0 \implies \\
R_D \cos(\alpha) - F \sin(\alpha) - R_2 &= 0 \implies \\
R_D &= \frac{F \sin(\alpha) + R_2}{\cos(\alpha)} = 1,02 [N]
\end{aligned}$$

Mentre l'equilibrio ai momenti con polo in C fornisce

$$\begin{aligned}
C_D + F \cdot CD &= 0 \implies \\
C_D &= -F \cdot CD = -19 [Nmm]
\end{aligned}$$

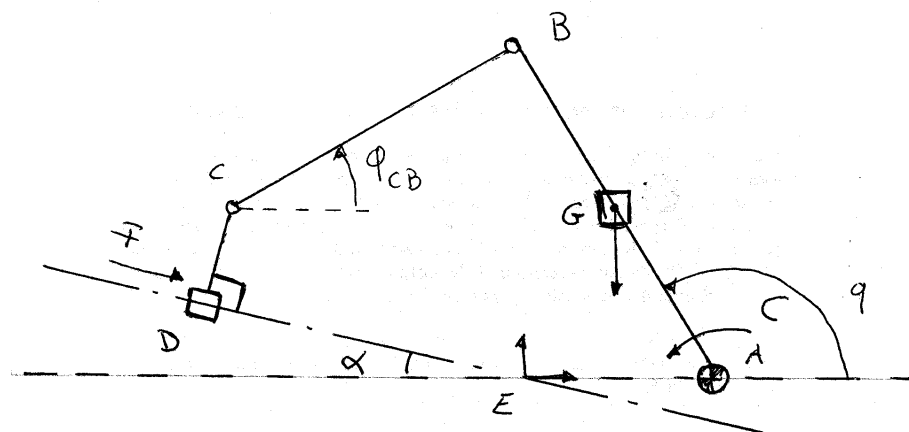


Fig. 1

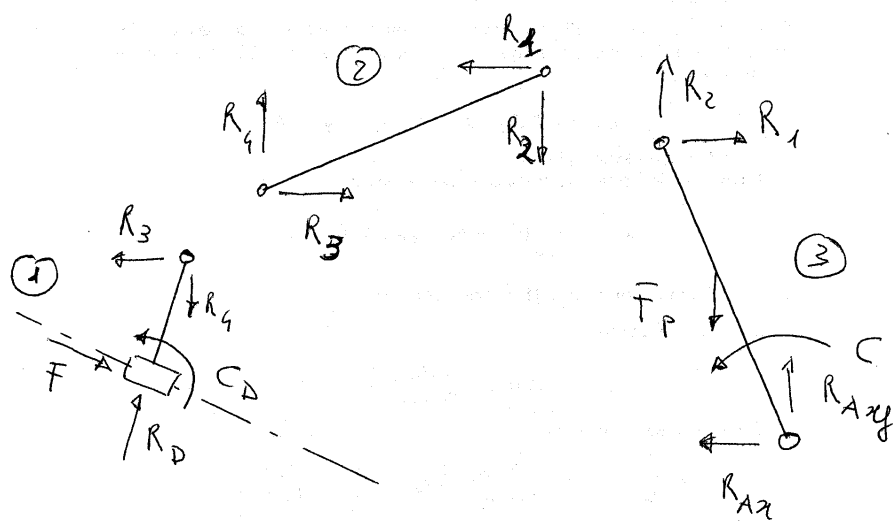


Fig. 2

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

1 Esercizio sull'applicazione del principio dei lavori virtuali

Considerare il meccanismo piano in fig. 1 disposto nel piano verticale. Il disegno non è in scala. Il meccanismo è simmetrico rispetto all'asse a-a. Le aste hanno una densità di massa lineare pari a $\rho = 12,5 \text{ Kg/m}$. Le aste BC e DC sono collegate ad un estremo attraverso una coppia rotoidale al pattino C. Il pattino C può scorrere verticalmente lungo l'asse a-a. Calcolare il momento M che equilibra staticamente le quattro aste nella configurazione in cui $q = 25^\circ$

DATI:

$$AB = DE = 43 \text{ mm}; \quad BC = CD = 48 \text{ mm}; \quad AN = NE = 65 \text{ mm};$$

Fissiamo un sistema di riferimento x-y come in figura con origine nel punto A.

Le forze esterne, oltre al momento M , sono date dalle 4 forze gravitazionali delle 4 aste, che valgono

$$\begin{aligned} F_1 &= g \cdot AB \cdot \rho = 5,27 \text{ [N]} \\ F_2 &= g \cdot BC \cdot \rho = 5,89 \text{ [N]} \end{aligned}$$

Nota che, se i vettori che rappresentano le forze fossero stati orientati in maniera opposta, il valore delle forze avrebbe dovuto essere negativo. Le forze sono applicate nei punti medi delle aste F, H, L e G.

Per il principio dei lavori virtuali, è necessario uguagliare a zero il lavoro virtuale compiuto dalle forze esterne (senza tenere in considerazione il lavoro virtuale compiuto dalle forze inerziali). Per cui si ha l'equazione

$$M \delta q + (-F_1) \delta y_F + (-F_2) \delta y_H + (-F_1) \delta y_G + (-F_2) \delta y_L = 0 \quad (1)$$

Nota che per simmetria $\delta y_F = \delta y_G$ ed $\delta y_H = \delta y_L$

L'equazione 1, introducendo i rapporti di trasmissione e semplificando lo spostamento virtuale δq , può essere modificata

$$M + (-2F_1) \left(\frac{dy_F}{dq} \right) + (-2F_2) \left(\frac{dy_H}{dq} \right) = 0$$

Il problema si riconduce al calcolo dei rapporti di trasmissione

1.1 Calcolo di $\frac{dy_F}{dq}$

In questo caso, il calcolo del rapporto di trasmissione è piuttosto semplice, in quanto

$$y_F = \frac{AB}{2} \sin(q)$$

Derivando, si ottiene $\dot{y}_F = \frac{AB}{2} \cos(q) \dot{q}$. Per cui, essendo il rapporto di trasmissione dato dal rapporto di velocità, si ottiene

$$\frac{dy_F}{dq} = \frac{\dot{y}_F}{\dot{q}} = \frac{AB}{2} \cos(q) = 0,019 [m/rad]$$

1.2 Calcolo di $\frac{dy_H}{dq}$

Per calcolare questo rapporto di trasmissione la via più semplice consiste nel calcolare la velocità di traslazione verticale del punto H imponendo una velocità di rotazione unitaria $\dot{q} = 1 [rad/s]$.

L'analisi cinematica di posizione precede l'analisi di velocità, per cui si deve calcolare la posizione del punto B

$$B = AB \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,039 \\ 0,018 \end{Bmatrix} [m]$$

Calcoliamo ora la posizione angolare dell'asta BC e la distanza del pattino C dal punto N. (Questi dati servono per l'analisi di velocità successiva). Dalla relazione

$$\frac{AN - x_B}{BC} = \cos(\varphi_{BC})$$

si ricava $\varphi_{BC} = 1 [rad]$. Mentre il segmento CN vale

$$CN = y_B + BC \sin(\varphi_{BC}) = 0,059 [m]$$

Con questa velocità si ha

$$v_B = AB \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} = \begin{Bmatrix} -0,018 \\ 0,039 \end{Bmatrix} [m/s]$$

Utilizzando una notazione vettoriale come in figura 2, l'equazione di chiusura scelta è

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 + \vec{z}_2 + \vec{z}_3 + \vec{z}_4 &= 0 \\ z_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} + z_2 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix} + z_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + z_4 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$z_1 \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} + z_2 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 + z_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 = 0$$

Dalla prima equazione si ricava

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{z_1 \sin(q) \dot{q}}{z_2 \sin(\varphi_2)} = -\frac{z_1 \sin(q)}{z_2 \sin(\varphi_{BC})} = -0,79 [rad/s]$$

Non serve calcolare anche la velocità di traslazione del pattino in quanto possiamo subito calcolare la velocità del punto H, punto intermedio dell'asta BC

$$\begin{aligned} H &= z_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} + \frac{z_2}{2} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \dot{y}_F &= z_1 \cos(q) \dot{q} + \frac{z_2}{2} \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 = 0,029 \text{ [m/s]} \end{aligned}$$

In conclusione, poichè $\frac{dy_H}{dq} = \frac{\dot{y}_H}{\dot{q}} = \dot{y}_F = 0,029 \text{ [m/s]}$ si riprende l'equazione iniziale

$$\begin{aligned} M &= (2F_1) \left(\frac{dy_F}{dq} \right) + (2F_2) \left(\frac{dy_H}{dq} \right) = \\ &= 0,54 \text{ [Nm]} \end{aligned}$$



4

1 Esercizio sull'applicazione del principio dei lavori virtuali

Considerare il meccanismo piano in fig. 1 disposto nel piano verticale. Il disegno non è in scala. Il meccanismo è composto da un'asta rigida curvata AB priva di massa e da un pistone idraulico BC. Un peso di massa $m = 580 \text{ kg}$ è appeso al punto B attraverso un cavo inestensibile lungo $l_1 = 1,8 \text{ m}$. Attaccato al peso vi è una molla con coefficiente di rigidezza pari a $k = 6400 \text{ N/m}$ la cui lunghezza a riposo è $l_r = 1 \text{ m}$. L'altezza del peso è $l_2 = 1,2 \text{ m}$. Se il diametro del pistone è pari $d = 0,05 \text{ m}$, calcolare la pressione dell'olio necessaria ad equilibrare staticamente il sistema.

DATI:

$$\begin{array}{llll} AB = 7,1 \text{ m}; & BD = 3,7 \text{ m}; & DE = 2,2 \text{ m}; & EC = 3,3 \text{ m}; \\ OA = 4,8 \text{ m}; & OC = 13,3 \text{ m}; & & \end{array}$$

Fissiamo un sistema di riferimento x-y come in figura con origine nel punto O.

Le forze esterne agenti sul meccanismo sono la forza elastica dovuta alla molla, la forza peso dovuta alla massa e la forza esercitata del pistone. Non lasciamoci ingannare dalla asta curva AB che, ai fini cinematici, può essere sostituita con un'asta rettilinea AB.

1.0.1 Calcolo della forza elastica dovuta alla molla

Per calcolare la forza elastica bisogna calcolare l'allungamento della molla. Facciamo riferimento ai vettori assegnati come in fig. 2.

$$z_3 = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 14,14 \text{ [m]}$$

Si può associare un unico vettore \vec{z}_1 al pistone il cui modulo vale

$$z_1 = BD + DE + EC = 9,2 \text{ [m]}$$

Con il teorema di Carnot calcoliamo l'angolo α ($z_2 = AB$)

$$\alpha = \arccos \left(\frac{z_1^2 + z_3^2 - z_2^2}{2 z_1 z_3} \right) = 0,45 \text{ [rad]}$$

Tenendo conto dell'orientazione del vettore \vec{z}_3 , l'angolo che lo definisce è pari a

$$\varphi_3 = \arctan 2(OA, -OC) = 160,15 [^\circ]$$

Da cui, per differenza, si ottiene

$$\varphi_1 = \varphi_3 - \alpha = 134,32 [^\circ]$$

La coordinata y del punto B vale dunque

$$y_B = z_1 \sin(\varphi_1) = 6,58 [m]$$

Per cui, l'allungamento della molla si calcola per differenza

$$\Delta l = y_B - (l_1 + l_2) - l_r = 2,58 [m]$$

e la forza elastica, diretta verso il basso è pari a

$$F_{el} = k \Delta l = 16527,7 [N]$$

1.1 Calcolo dei rapporti di trasmissione

Utilizzando una notazione vettoriale come in figura 2, l'equazione di chiusura scelta è

$$\begin{aligned} \vec{z}_1 - \vec{z}_2 - \vec{z}_3 &= 0 \\ z_1 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix} - z_2 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix} - z_3 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_3) \\ \sin(\varphi_3) \end{Bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Derivando si ottiene

$$\dot{z}_1 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix} + z_1 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 - z_2 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 = 0$$

Per risolvere il sistema bisogna calcolare l'angolo φ_2 .

Con il teorema di Carnot si ottiene

$$\beta = \arccos\left(\frac{z_2^2 + z_3^2 - z_1^2}{2 z_2 z_3}\right) = 0,6 [rad]$$

Combinando gli angoli

$$\varphi_2 = \varphi_3 + \beta - \pi = 0,25 [rad]$$

Se si impone $z_1 = 1$ si può risolvere il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} -z_1 \sin(\varphi_1) & z_2 \sin(\varphi_2) \\ z_1 \cos(\varphi_1) & -z_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix}$$

dove $W = \begin{bmatrix} -6,58 & 1,78 \\ -6,43 & -6,87 \end{bmatrix}$ ed $b = - \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,7 \\ -0,72 \end{Bmatrix}$ Per cui

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{z_1 z_2 (\sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1))} \cdot \\
&\quad \cdot \begin{bmatrix} -z_2 \cos(\varphi_2) & -z_2 \sin(\varphi_2) \\ -z_1 \cos(\varphi_1) & -z_1 \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix} \\
&= -\frac{1}{z_1 z_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} \begin{bmatrix} -z_2 \cos(\varphi_2) & -z_2 \sin(\varphi_2) \\ -z_1 \cos(\varphi_1) & -z_1 \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Per il calcolo della velocità lungo l'asse y del punto B è sufficiente il calcolo di $\dot{\varphi}_2$. Perciò

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_2 &= -\frac{-z_1 \cos(\varphi_1) \cos(\varphi_1) - z_1 \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_1)}{z_1 z_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = \\
&= \frac{1}{z_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = 0,16 \text{ [rad/s]}
\end{aligned}$$

Perciò

$$\tau_{\varphi_2, z_1} = \dot{y}_B = z_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 = 1,12 \text{ [m/s]}$$

1.2 Equazione di equilibrio statico

Per il principio dei lavori virtuali si ha

$$F_p \delta z_1 + (-m g - F_{el}) \delta y_B = 0$$

dove F_p è la forza esercitata dal pistone idraulico. La possiamo calcolare

$$\begin{aligned}
F_p &= (m g + F_{el}) \frac{\delta y_B}{\delta z_1} = (m g + F_{el}) \frac{\tau_{\varphi_2, z_1} \delta z_1}{\delta z_1} = \\
&= (m g + F_{el}) \tau_{\varphi_2, z_1} = 24777,6 \text{ [N]}
\end{aligned}$$

Per cui la pressione del fluido sarà

$$p = \frac{F_p}{\pi(d/2)^2} = 1,26 \times 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

1.3 Metodo Newtoniano

Attraverso l'equilibrio delle forze lungo x ed y, introducendo una reazione vincolare F_r

come in figura 3 si ottiene

$$F_r \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -F_{el} - m g \end{Bmatrix} + F_p \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{Bmatrix} = 0$$

Perciò

Dalla prima equazione si ricava F_r in funzione di F_p

$$F_r = -F_p \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}$$

E sostituendo nella seconda

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{F_{el} + m g}{\sin(\varphi_1) - \cos(\varphi_1) \tan(\varphi_2)} = \\ &= 24777,6 \text{ [N]} \end{aligned}$$

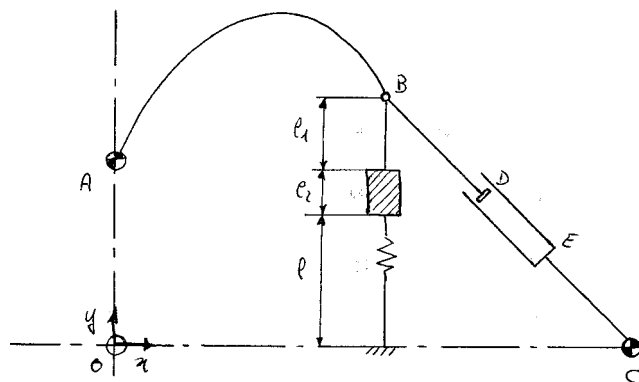


fig. 1

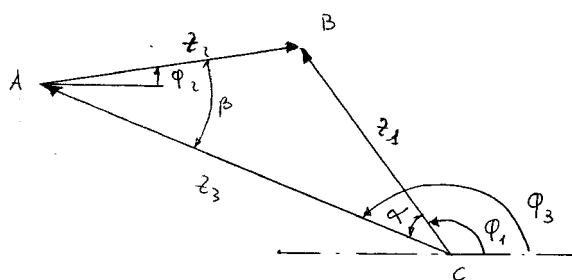


fig. 2

Figure 1:

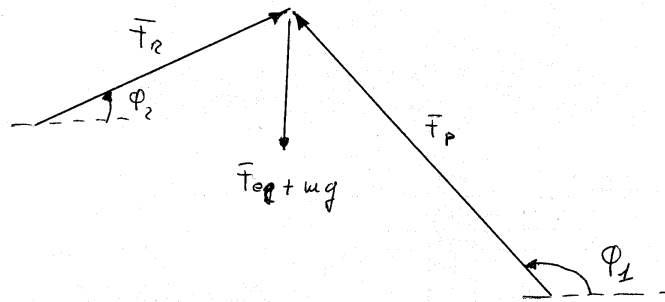


fig. 3

Figure 2:

1 Dimensionamento della forza di chiusura

Il meccanismo in fig. 1 rappresenta una pinza che sostiene un blocco cubico di massa $m = 1 \text{ kg}$ e lunghezza di spigolo pari a $l = 30 \text{ mm}$. Il sistema di chiusura è azionato attraverso un cavo che fuoriesce per il tratto ED, cavo che viene posto in tensione. Il coefficiente d'attrito tra le punte delle ganasce ed il blocchetto è pari a $\mu = 0,7$. La coppia rotoidale C presenta una coppia d'attrito statico pari a $C_a = 0,8 \text{ Nm}$. Il meccanismo è disposto nel piano verticale. Calcolare la tensione minima del cavo atta a garantire la presa del blocco.

DATI:
 $\widehat{CE} = 44 \text{ mm} \quad \widehat{CD} = 23 \text{ mm} \quad \widehat{CA} = \widehat{CB} = 48 \text{ mm} \quad \widehat{BCE} = \widehat{ACD} = \alpha = 167^\circ$

1.1 Calcolo della forza minima di serraggio F_s

Poichè la forza gravitazionale del blocco vale $m g$, le due forze d'attrito che mantengono in equilibrio il blocchetto valgono (vedi fig.2)

$$F_s = \frac{mg}{2\mu} = 7 \text{ [N]}$$

1.2 Applicazione del PLV

L'esercizio può essere risolto considerando la ganascia FECB come fissa a telaio. Scegliamo come coordinata indipendente l'angolo del braccio CD. L'equazione che si ottiene è

$$-C_a \delta q - T \delta z_2 - F_s \delta x_A - \mu F_s \delta y_A = 0$$

dove T è la tensione del cavo

Introducendo i rapporti di trasmissione si ricava

$$T = -\frac{1}{\tau_{z_2, q}} (C_a + F_s \tau_{x_A, q} + \mu F_s \tau_{y_A, q}) \quad (1)$$

1.2.1 Calcolo dei rapporti di trasmissione

La posizione del punto A è

$$A = z_4 \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_4) \\ \sin(\varphi_4) \end{Bmatrix}$$

Differenziando si ottiene

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \end{Bmatrix} = z_4 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_4) \\ \cos(\varphi_4) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_4 = z_4 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_4) \\ \cos(\varphi_4) \end{Bmatrix} \dot{q}$$

per cui i rapporti di trasmissione sono

$$\begin{Bmatrix} \tau_{x_A,q} \\ \tau_{y_A,q} \end{Bmatrix} = z_4 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_4) \\ \cos(\varphi_4) \end{Bmatrix}$$

Bisogna risalire al valore dell'angolo φ_4 .

$$\varphi_4 = \frac{3}{2}\pi - \arcsin\left(\frac{l}{2 z_4}\right) = 4,39 \text{ [rad]}$$

Sostituendo nell'equazione sopra si ottiene

$$\begin{Bmatrix} \tau_{x_A,q} \\ \tau_{y_A,q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45,6 \\ -15 \end{Bmatrix} \text{ [mm/rad]}$$

Per quanto riguarda $\tau_{z_2,q}$ è necessario considerare la seguente maglia di chiusura

$$\vec{z}_1 + \vec{z}_2 - \vec{z}_3 = 0$$

che derivata, fornisce

$$z_1 \begin{Bmatrix} -\sin(q) \\ \cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q} + \begin{Bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{Bmatrix} \dot{z}_2 + z_2 \begin{Bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{Bmatrix} \dot{\varphi}_2 = 0$$

In notazione matriciale si ottiene

$$\begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) & -z_2 \sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) & z_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} = z_1 \begin{Bmatrix} \sin(q) \\ -\cos(q) \end{Bmatrix} \dot{q}$$

Per cui si possono ricavare i seguenti rapporti di trasmissione

$$\begin{Bmatrix} \tau_{z_2,q} \\ \tau_{\varphi_2,q} \end{Bmatrix} = \frac{z_1}{z_2} \begin{bmatrix} z_2 \cos(\varphi_2) & z_2 \sin(\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin(q) \\ -\cos(q) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Per cui

$$\tau_{z_2,q} = z_1 \sin(q - \varphi_2)$$

E' necessario determinare gli angoli q e φ_2 .

A tal proposito, basta osservare che

$$q = \varphi_4 + \alpha + 2\pi = 1,03 \text{ [rad]}$$

Per simmetria si ottiene

$$\beta = \pi - 2 q = 1,09 \text{ [rad]}$$

I punti E ed D valgono

$$D = z_1 \begin{Bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11,92 \\ 19,67 \end{Bmatrix} \text{ [mm]}$$

$$E = z_3 \begin{Bmatrix} \cos(q + \beta) \\ \sin(q + \beta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -22,8 \\ 37,63 \end{Bmatrix} [mm]$$

Per cui l'angolo φ_2 che mancava vale

$$\varphi_2 = \pi - \arctan\left(\frac{y_E - y_D}{x_D - x_E}\right) = 2,66 [rad]$$

Sostituendo nella 2, si ottiene $\tau_{z_2,q} = -22,95 [mm/rad]$

Per cui, sostituendo nella 1 si ottiene la tensione minima del cavo

$$T = 45,58 [N]$$

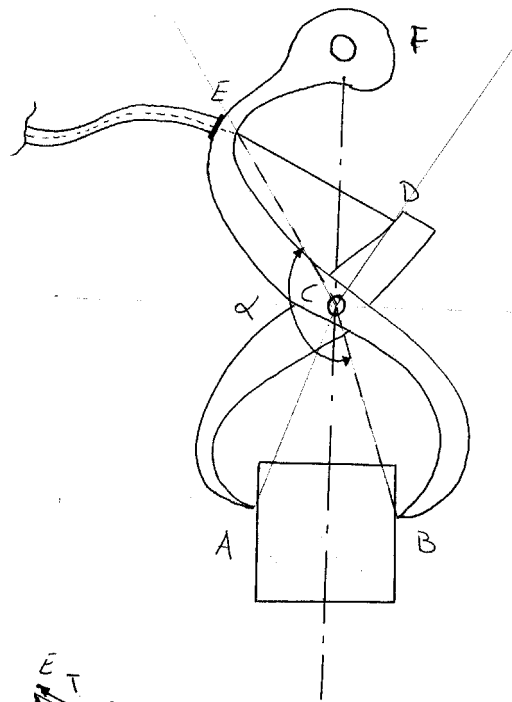


fig. 1

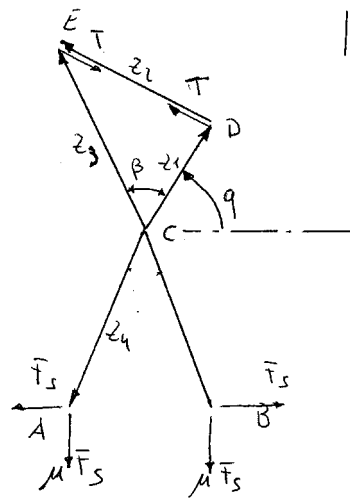
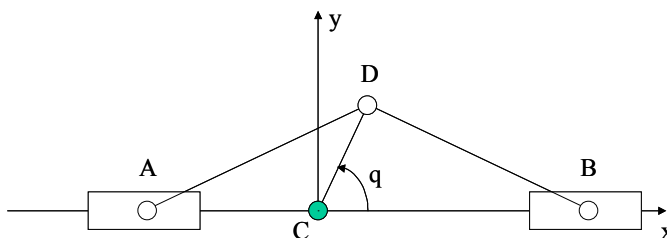


Figure 1:

ESERCIZI DI RIEPILOGO

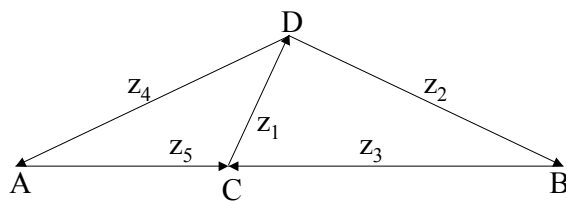
Esercizio n.9



Il meccanismo in figura è composto da una manovella $CD = 7\text{cm}$, vincolata al telaio attraverso una coppia rotoidale in C. L'altro estremo è collegato alle bielle $AD = DB = 35\text{cm}$. Gli estremi B ed A di queste ultime sono collegati a due pattini che possono scorrere senza attrito orizzontalmente. La manovella ruota a velocità angolare costante antioraria pari a $\omega = 200^\circ/\text{s}$. Le due bielle e la manovella sono prive di massa. I pattini A e B hanno massa pari ad $m_A = m_B = 1,5\text{Kg}$. Quando la manovella assume posizione angolare $q = 45^\circ$ calcolare:

- 1) la posizione dei pattini x_A e x_B ; (6punti)
- 2) la velocità di entrambi i pattini; (6punti)
- 3) l'accelerazione lineare di entrambi i pattini; (6punti)
- 4) la coppia che bisogna applicare alla manovella per produrre tale atto di moto. (6punti)

Soluzione



1a) Analisi di posizione per il pattino A:

$$z_1 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{pmatrix} + z_5 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_5 \\ \sin \vartheta_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_1 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_4 \\ \sin \vartheta_4 \end{pmatrix} + z_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

sapendo che $\vartheta_1 = q$, $z_1 = CD$ e $z_4 = AD$, dalla seconda equazione calcolo $\vartheta_4 = 188,13^\circ$, e sostituendo nella prima ottengo $x_A = -z_5 = -0,297m$.

1b) Analisi di posizione per il pattino B:

$$z_1 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_3 \\ \sin \vartheta_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$z_1 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} \cos \vartheta_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

analogamente dalla seconda equazione calcolo $\vartheta_2 = 351,87^\circ$, e sostituendo nella prima ottengo $x_B = z_3 = 0,396m$.

2a) Analisi di velocità per il pattino A:

derivando la seconda coppia di equazioni del punto 1a ottengo:

$$z_1 \dot{\vartheta}_1 \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_4 \dot{\vartheta}_4 \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_4 \\ \cos \vartheta_4 \end{pmatrix} + \dot{z}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

sapendo che $\dot{\vartheta}_1 = \dot{q} = 3,491\text{rad/s}$, dalla seconda equazione calcolo $\dot{\vartheta}_4 = 0,499\text{rad/s}$, e sostituendo nella ottengo $\dot{x}_A = -\dot{z}_5 = -0,148\text{m/s}$

2b) Analisi di velocità per il pattino B:

derivando la seconda coppia di equazioni del punto 1b ottengo:

$$z_1 \dot{\vartheta}_1 \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_2 \dot{\vartheta}_2 \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} + \dot{z}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

analogamente dalla seconda equazione calcolo $\dot{\vartheta}_2 = -0,499\text{rad/s}$, e sostituendo nella ottengo $\dot{x}_B = \dot{z}_3 = -0,197\text{m/s}$

3a) Analisi di accelerazione per il pattino A:

derivando le equazioni del punto 2a ottengo:

$$z_1 \dot{\vartheta}_1^2 \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} -\dot{\vartheta}_4^2 \cos \vartheta_4 - \ddot{\vartheta}_4 \sin \vartheta_4 \\ -\dot{\vartheta}_4^2 \sin \vartheta_4 + \ddot{\vartheta}_4 \cos \vartheta_4 \end{pmatrix} + \ddot{z}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

dalla seconda equazione calcolo $\ddot{\vartheta}_4 = -1,705\text{rad/s}^2$, e sostituendo nella prima ottengo $\ddot{x}_A = -\ddot{z}_5 = -0,601\text{m/s}^2$

3b) Analisi di accelerazione per il pattino B:

derivando le equazioni del punto 2b ottengo:

$$z_1 \dot{\vartheta}_1^2 \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_1 \\ -\sin \vartheta_1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} -\dot{\vartheta}_2^2 \cos \vartheta_2 - \ddot{\vartheta}_2 \sin \vartheta_2 \\ -\dot{\vartheta}_2^2 \sin \vartheta_2 + \ddot{\vartheta}_2 \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} + \ddot{z}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

dalla seconda equazione calcolo $\ddot{\vartheta}_2 = 1,705\text{rad/s}^2$, e sostituendo nella prima ottengo $\ddot{x}_b = \ddot{z}_3 = -0,605\text{m/s}^2$

4) Per trovare la coppia necessaria applico il principio dei lavori virtuali.

$$M\delta q + F_A^{in}\delta x_A + F_B^{in}\delta x_B = 0$$

da cui, sfruttando i rapporti di velocità, ottengo:

$$M\delta q + F_A^{in}K_{x_A,q}\delta q + F_B^{in}K_{x_B,q}\delta q = 0$$

da cui:

$$M = m_A\ddot{x}_A\frac{\dot{x}_A}{\dot{q}} + m_B\ddot{x}_B\frac{\dot{x}_B}{\dot{q}} = 0,0896\text{Nm}$$