Esercizi di Fondamenti di Automatica - 5
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
A.A. 2020/2021

Esercizio 1. Con riferimento alle seguenti funzioni di trasferimento razionali proprie a coefficienti reali, $G(s)$, interpretate come le funzioni di trasferimento di un processo a tempo continuo lineare, tempo-invariante e SISO,

1. $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2+3s+2}$;
2. $G(s) = \dfrac{10s+2}{s^3+s^2+2s-1}$;
3. $G(s) = \dfrac{2s+1}{s^3-2s^2+2s-1}$;
4. $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$;
5. $G(s) = \dfrac{-s+4}{s(s+5)}$;
6. $G(s) = \dfrac{s-3}{(s^2+1)(s+2)}$;
7. $G(s) = \dfrac{-4s+1}{s(s+1)(s+3)}$,

si determini per quali valori del parametro K il sistema retroazionato illustrato in Figura 1, di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$

risulta BIBO stabile.

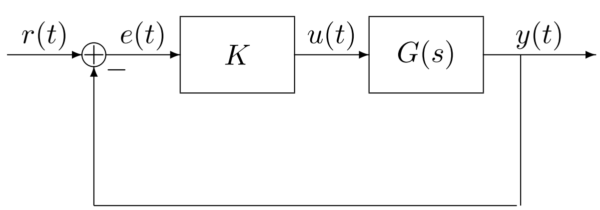


Figura 1. Schema a blocchi in retroazione unitaria negativa con K variabile

Esercizio 2. Per ciascuna delle seguenti funzioni di trasferimento razionali proprie a coefficienti reali, $G(s)$, si tracci il diagramma di Nyquist completo (per $\omega \in \mathbb{R}$) e si determini (ove possibile ed eventualmente riportando tali diagrammi al finito) il numero N di giri che il diagramma compie attorno al punto $-1 + j0$ e, il numero di poli a parte reale positiva della funzione $W(s)$, ottenuta da $G(s)$ per retroazione unitaria negativa.

1. $G(s) = \dfrac{s}{s+1}$;
2. $G(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$;
3. $G(s) = \dfrac{5}{(s+1)(s+5)}$;
4. $G(s) = \dfrac{s+10}{(s+0.1)(s+1)}$;
5. $G(s) = \dfrac{s-1}{s(s+10)}$;
6. $G(s) = \dfrac{s-1}{s^2}$;
7. $G(s) = 10\dfrac{s+0.1}{(s-1)(s+1)}$;
8. $G(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$;
9. $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+2}$;
10. $G(s) = \dfrac{s-1}{s(s^2+6s+25)}$;
11. $G(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+9}$;
12. $G(s) = 10\dfrac{s+0.1}{s^2(s-1)^2}$.
13. $G(s) = 20\dfrac{s(s+0.1)}{(s^2+2s+9)^2}$;
14. $G(s) = 1000\dfrac{s^2+1}{s(s^2+2s+100)}$;
15. $G(s) = 10\dfrac{s^2+1}{s(s^2-2s+100)}$.

Esercizio 3. Per ciascuna delle funzioni di trasferimento $G(s)$ del precedente Esercizio 3, si determini al variare di K in $\mathbb{R}$ la stabiltà BIBO del sistema retroazionato

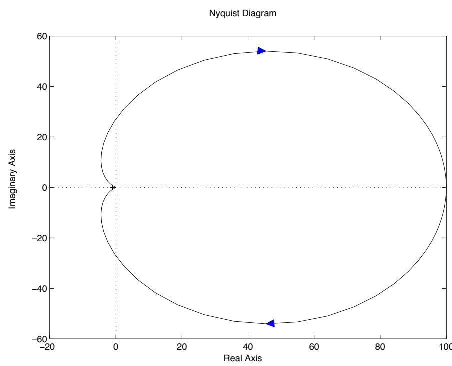
$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$

ricorrendo al criterio di Nyquist. Nel caso in cui $W(s)$ non sia BIBO stabile, se ne determini il numero di poli a parte reale positiva.

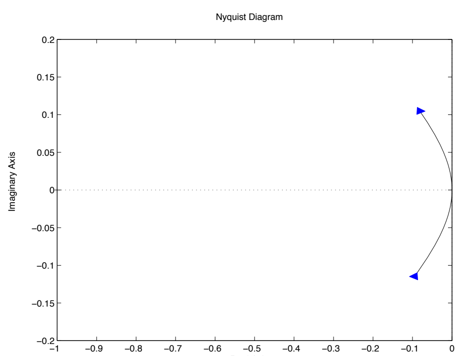
Soluzioni numeriche di alcuni esercizi

Esercizio 1. 1. $-3 < K < 2$.
2. $K > 1/2$.
3. Mai.
4. $K > -1$.

Esercizio 2. 4. Il diagramma di Nyquist completo è:

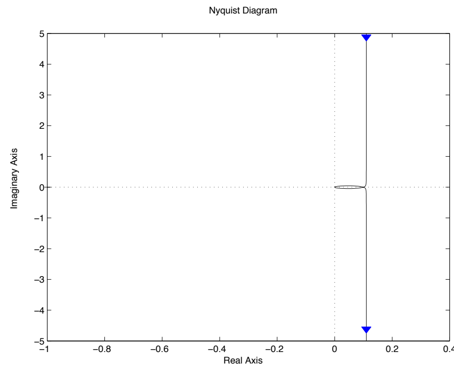


Il suo dettaglio per pulsazioni in valore assoluto molto alte (intorno dell'origine nel piano complesso) è:



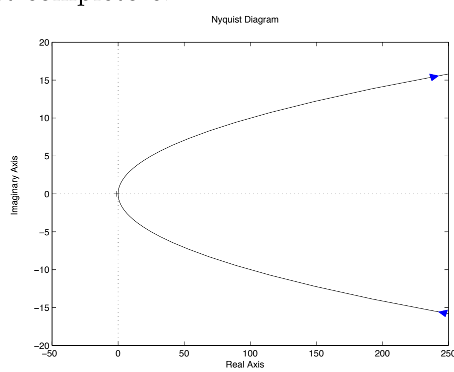
da cui si vede che il diagramma passa per 0 con fase $\pm 90°$. In questo caso $N = 0, n_{G+} = 0$ e pertanto $n_{W+} = 0$. Quindi il sistema è BIBO stabile.

5. Il diagramma di Nyquist completo è:



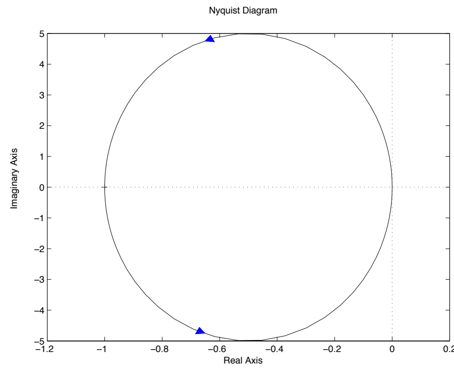
Il tratto relativo alle pulsazioni positive è quello che parte dal primo quadrante ed arriva nell'origine con fase di - 90°. La chiusura al finito viene realizzata con una semicirconferenza in verso orario che collega il ramo sotto (quarto ortante) col ramo sopra (primo ortante). Pertanto $N = -1$ (il diagramma di Nyquist al finito compie un giro in verso orario attorno a $-1 + j0$) e siccome $n_{G+} = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 1$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo reale positivo.

6. Il diagramma di Nyquist completo è:



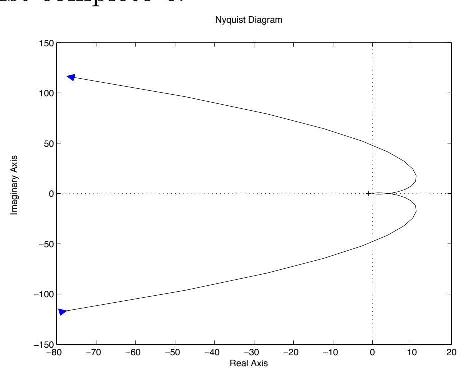
Il tratto relativo alle pulsazioni positive è quello che collocato nel quarto quadrante ed arriva nell'origine con fase di - 90°. La chiusura al finito viene realizzata con una circonferenza (360°) in verso orario che collega il ramo sopra (primo ortante) col ramo sotto (quarto ortante). Pertanto $N = -1$ (il diagramma di Nyquist al finito compie un giro in verso orario attorno a $-1 + j0$) e siccome $n_{G+} = 0$, ne consegue che $n_{W+} = 1$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo reale positivo.

7. Il diagramma di Nyquist completo è:

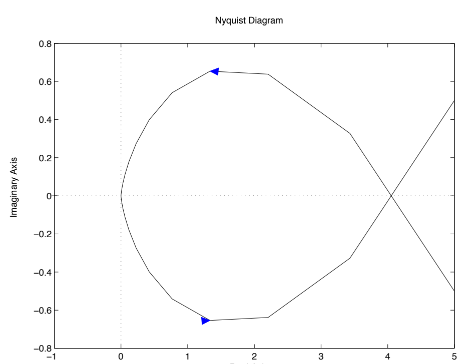


Il tratto relativo alle pulsazioni positive è quello che collocato nel terzo quadrante ed arriva nell'origine con fase di - 90°. Il diagramma passa, per $\omega = 0$, per il punto critico $-1 + j0$. Pertanto il sistema retroazionato certamente non è BIBO stabile. Da $G(0) = -1$ segue $W(0) = \infty$ e quindi la $W(s)$ ha un polo nell'origine.

12. Il diagramma di Nyquist completo è:



Il suo dettaglio per pulsazioni in valore assoluto molto alte (intorno dell'origine nel piano complesso) è:



Il tratto relativo alle pulsazioni positive è quello che parte dal terzo quadrante ed arriva nell'origine con fase di 90°. La chiusura al finito viene realizzata con una circonferenza (360°) in verso orario che collega il ramo sopra (secondo ortante) col ramo sotto (terzo ortante). Pertanto $N = 0$ (il diagramma di Nyquist al finito non compie giri attorno a $-1 + j0$) e siccome $n_{G+} = 2$, ne consegue che $n_{W+} = 2$ e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed due poli a parte reale positiva.