Analisi matematica 1, Area dell'Ingegneria dell'Informazione
Esercizi in preparazione della prova scritta
a cura dei docenti di "Analisi Matematica 1"
Anno Accademico 2021-2022

Indice

NOTA: sia $\ln$ **che** $\log$ **indicano il logaritmo in base** e**.**

Buon lavoro!

1 Temi d'esame da 1h30m per modalità telematica

Appello del 06.07.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Calcolare

$$\lim_{x\to -3^+} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione f, studiare gli intervalli di monotonia ed abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 8i,$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\log n}{n^4}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 14.09.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x \in (1, \infty).$$

(i) Individuarne gli eventuali asintoti.
(ii) Se ne determini la monotonia.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$.
(i) Scriverlo in forma esponenziale.
(ii) Calcolare la parte reale di z^6.

Esercizio 3 [6 punti] Stabilire la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x) - \sin x}{x^2}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_1^{\infty} \log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right) dx.$$

(i) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(ii) Stabilire per quali $\alpha \in [0, \infty)$ esso converge.
Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 18.01.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right);$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) calcolarne la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti estremanti;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$z^4 + (-1+i)z^2 - i = 0.$$

Suggerimento: sostituire $w = z^2$.

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}.$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Esercizio 4 [8 punti] Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha}.$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_0^{\log 2} f_\alpha(x)\, dx.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 08.02.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}.$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1+i}{1-i},$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\int \log(t+1)\, dt.$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n} \right|.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 05.07.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \log\left(1 + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti]
Sia

$$f_\alpha(x) := \frac{\arctan x}{1 + x^{2\alpha}}.$$

(i) Calcolare

$$\int f_1(x)\,dx = \int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx.$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in [0, \infty)$ la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx.$$

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + \alpha[\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2}.$$

(ii) Dedurre il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2\right\}.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 13.09.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} \quad .$$

(i) Determinarne il dominio naturale; studiarne la periodicità, il segno e la simmetria di f;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| \frac{z+1}{z} \right| \geq 1$$

e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [8 punti] Studiare la convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2} \, dx.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

2 Esercizi di allenamento per esame da 2h30m

Traccia 1

1) Sia

$$f(x) = \frac{|x-1|-2}{x^2+1}, \quad x \in [-2,4].$$

Studiarne il segno, la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x(1-\cos x)+x^4}.$$

3) Calcolare le radici terze di $-27i$.

4) (a) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx.$$

(b*) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^\alpha \sin\sqrt{x}dx.$$

5*) Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)-\frac{\alpha}{n}\right).$$

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Traccia 2

1) Sia

$$f(x) = \log(|x-1|+1) - \log x, \quad x \in]0,2].$$

Semplificarla e studiarne la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x(x-\sin x) + x^3 \sin^2 x.}$$

3) Semplificare l'espressione

$$\frac{\overline{(1+i)}^2}{(1-i)^2\left(\frac{-1}{i}+\sqrt{3}\right)}$$

esprimendo il risultato in forma algebrica ed in forma trigonometrica.

4) (a) Calcolare

$$\int_{\log \pi}^{2\log \pi} e^{2x} \cos e^x \, dx.$$

(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{\log \pi} e^{\alpha x} \cos e^x dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) Sia

$$f(x) = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{x} \sin(t^2)\, dt.$$

(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di f di ordine 2 nel punto $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\big($lasciando indicato il valore di $f(\sqrt{\frac{\pi}{2}})\big)$;
(b) studiare la monotonia e la convessità e la concavità di f nell'intervallo $[-1,2]$;
(c) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$ contenute nell'intervallo $[-1,2]$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Traccia 3

1) Sia
$$f(x) = \arctan|x^2 - 1|, \quad x \in [-1, 2].$$
Studiarne la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cosh x)^2}{\sin x(x - \arctan x) + x^3 \sinh^2 x.}$$

3) Risolvere l'equazione
$$(z^2 + 2i)(z^3 + 8) = 0$$
esprimendo il risultato in forma algebrica ed in forma trigonometrica.

4) (a) Calcolare
$$\int_{\log 3}^{1} \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx.$$
(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^\alpha}\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \alpha(\arctan \sin x + 1) & \text{per } x \leq 0 \\ e^{x+1} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$
(a) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il grafico di f ammetta una retta tangente in $(0, f(0))$ e calcolarla per tali α;
(b) discutere, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = e + \lambda x$ contenute nell'intervallo $[0, 2]$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Traccia 4

1) [6 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$$

al variare del parametro $x \in [0, 2\pi[$.

2) [4 punti] Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\arctan x}.$$

3) [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\left| e^{i \operatorname{Re} z} (\bar{z} - i) \right| \leq 1$$

e disegnare le soluzioni nel piano di Gauss.

4) [4 + 4 punti]

(a) Calcolare

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx \qquad \text{(eseguire una sostituzione iperbolica).}$$

(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^2 (4 - x^2)^{\alpha}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |1 - x|\, e^{\arctan(4/x)}.$$

1) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi di f e determinarne gli eventuali asintoti.
2) Calcolare f' nei punti dove è possibile e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
3) Disegnare un grafico di f.

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

3 Altri esercizi di allenamento

Limiti.
1) Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-2}{x-2},\qquad \lim_{x\to-\infty} x\log\frac{1-x}{3-x},\qquad \lim\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

2) Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-n!\sin\frac{1}{n}-n}{2^{n-1}+(n-1)!},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-n\sin n}{n!-2^n}.$$

Serie.
1) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{\frac{1}{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+n-1}$$

2) Studiare la convergenza e la convergenza assoluta al variare del parametro $x\in\mathbb{R}$ delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x^n}{n}\right),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x^n}{n}.$$

Funzioni.
1) Discutere la derivabilità e calcolare le derivate prime e seconde delle funzioni

$$f_1(x)=\log\frac{1}{\cos x},\qquad f_2(x)=\log|\sin x-\frac{1}{2}|$$

nel loro dominio.
2) Verificare l'identità

$$\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x\in]-1,1[.$$

3) Studiare la monotonia e determinare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti di

$$f_1(x)=\sin x-x\cos x,\qquad f_2(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\ (\text{per } x\in[0,1]),\qquad \arctan\left|x-\frac{1}{x}\right|\ (\text{per } x\neq 0).$$

4) Studiare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x-\log|x|=\alpha\qquad (x\neq 0)$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Integrali.
1) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 con centro $x_0=1$ delle funzioni

$$F_1(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}\,dt\qquad F_2(x)=\int_1^x\frac{\log t}{t}\,dt$$

e dire se nell'intervallo $[1,2]$ sono invertibili.

2) Calcolare gli integrali

$$\int x \log^2 x \, dx, \quad \int_0^1 \frac{x^2-4}{x^2+5x+4} \, dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx.$$

3) Studiare la convergenza degli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{e^x-1}} \, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

4 Temi d'esame dei quattro ultimi anni accademici (soluzioni in fondo alla dispensa)

Appello del 23.01.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 3}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|2z^2 - 2\bar{z}^2\right| < 3$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\Big(\cos\frac{1}{n} - 1 + \sin\frac{1}{2n^\alpha}\Big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{|x|-4}{x^2+2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x\,|\arctan(x-1)|}{|1-x^2|^\alpha\,\left(\sinh\sqrt{x}\right)^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo. Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|4\bar{z}^2 - 4z^2\right| < 5$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \big(2 - e^{1/2n^\alpha} - \cos(1/n)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{4 - |x|}{1 + 2x^2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-2)| \, \arctan x}{|x^2 - 4|^\alpha \, (\sinh \sqrt[3]{x})^\beta} \, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 4}^{3} \frac{e^x}{e^{2x} - 9} \, dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|3z^2 - 3\bar{z}^2\right| < 2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \big(\cosh(1/n^\alpha) + \cos(1/n) - 2\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{|x| - 4}{2x^2 + 3}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(3-x)|\,\arctan x}{|9-x^2|^\alpha\,(\cosh\sqrt{x}-1)^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}\,dx$$

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\left|9\bar{z}^2-9z^2\right|<2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(e^{1/n^2}-\tan 1/n^\alpha-1\right)$$

al variare del parametro $\alpha>0$.

Esercizio 4 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{4-4|x|}{5x^2+3}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x\,|\arctan(1-2x)|}{|1-4x^2|^\alpha\,(\cosh x-1)^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Appello del 13.02.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| x^2 - 2x - 3 \right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{2 + iz}{iz + 1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x - \sin x + x^{\frac{10}{3}} \log x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x - 2}} \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| x^2 + x - 6 \right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{-1-2iz}{iz-1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 2z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x - \sinh x + x^{\frac{11}{2}} \log x}{x^\alpha (1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-3}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 3

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 - 2x - 8\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;

(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;

(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{-2+3iz}{2iz-3},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = -z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{9}{2}} \log x - \tan x + \sin x}{x^\alpha (1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-4}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 4

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2 + 3x - 4\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{1 - 4iz}{iz + 4},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x - \tan x - x^{\frac{15}{4}} \log x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-5}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Appello del 10.07.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|e^{2x} - 4\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z-1}{z-i} \geq 0,\ |z+1-i| \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(3e^x) dx.$$

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-e^a)^n}{n + \sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|e^{-3x} - 9\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{z+1}{z-i} > 0,\ |z-1-i| \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(2e^x)dx.$$

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\arctan x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-2^a)^n}{n+\log n}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Appello del 18.09.2017

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Dato il polinomio

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.

Esercizio 3 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{ax}(2+\cos x)\,dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos x\,dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{2x}{\log|3x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Dato il polinomio

$$z^4 - z^3 - 27iz + 27i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.

Esercizio 3 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - e^{\alpha x^2} + x\log(\cosh x)}{x - \sinh x + e^{-1/x^2}}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{ax}(2-\sin x)\,dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\sin x$).

Appello del 29.01.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{2n} \sin \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin \frac{2}{x}}{\cos \sin \frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 3|}{x + 1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{3n} \sinh \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1) - \log(x+2) + \sinh \frac{1}{x}}{\cosh \sin \frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-2x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{4x^2 - 1}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 4|}{x - 1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{2}} \arctan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2) - \log(x-1) + \arctan \frac{1}{x}}{\cos \sinh \frac{2}{x} - \cos \frac{\alpha}{x} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-4}} \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-6|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{3}} \tan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\tan\frac{2}{x}}{\cosh\sinh\frac{3}{x}-\cosh\frac{\alpha}{x}-e^{-3x}}$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\sqrt{9x^2-1}}\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha=1$.

Appello del 16.02.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x\neq 2\\ 0 & \text{per } x=2.\end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x\in\mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$z^2\overline{z}+z\overline{z}^2=4\,\mathrm{Im}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(4\cos x-\alpha)^2-4x^4}{x^4\sin^2 x}$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+2|}} & \text{per } x \neq -2 \\ 0 & \text{per } x = -2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+2)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$-\mathrm{Im}(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2) = 8i(z - \overline{z})$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cosh x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \arctan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{2}} x^{\alpha-1} \sin(\sqrt[3]{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-3|}} & \text{per } x \neq 3 \\ 0 & \text{per } x = 3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2n+5)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(\bar{z} - z)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - 2\alpha)^2 - x^4}{x^4 \sinh^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{8}} x^{1-\alpha} \sin(\sqrt{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+3|}} & \text{per } x \neq -3 \\ 0 & \text{per } x = -3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è

richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+5)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^2 z - z^2 \bar{z}) = 4 \operatorname{Re}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4}{x^4 \tan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{24}} x^\alpha \sin(\sqrt[3]{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 0$.

Appello del 9.07.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2 - 3e^{3x}\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$|z|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right)$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [6 punti] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

Esercizio 5 [8 punti] a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1}\,dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2e^{2x} - 3\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{\mathrm{Im}\left(z^2 - \bar{z}^2\right)}{|z|^2}$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\cosh\frac{1}{x} - 1\right)^2 - e^{-x}}{\left(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\right)^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [6 punti] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right).$$

Esercizio 5 [8 punti] a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log \frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha + 4}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

Appello del 17.09.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x| - 3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda - 4iz + 2iz^2 + z^3.$$

Determinarne $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -2i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 3 [6 punti] Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \big(2 - 3|x|\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinarne il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda + 2iz + 3iz^2 + z^3.$$

Determinare $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -3i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 3 [6 punti] Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n + \cos n)}{n^{2\alpha} + 1}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^\alpha}{\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^{2\alpha} \arcsin \frac{x^2}{2} \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Appello del 21.01.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D =]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1+2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1 + \sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}}, \qquad x \in D =]-\infty, -1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(3x) - \log(1+3x)}{\sin^2 x + x^{\frac{11}{2}}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1-2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1+\frac{t}{4}\right)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

i) Calcolare $\int_1^4 f(t)\,dt$ con $\alpha = 4$.

ii) Sia $F(x) := \int_4^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 4$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan\alpha)^n}{\sqrt{2n}-1}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}}, \qquad x \in D =]-\infty, 1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x} - 1 - \sinh(3x)}{\log^2(1+x) + x^{2\pi}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1-2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log(1+2t)}{t^{\alpha-1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^{\frac{3}{2}} f(t)\,dt$ con $\alpha = 3$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1+\log\alpha)^n}{\sqrt{n}-1}$$

al variare di $\alpha \in]0,+\infty[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}}, \qquad x \in D =]-\infty, 2[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(2x) - \log(1+2x)}{\arctan(x^2) + x^{2e}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1+2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^{\alpha+1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^3 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 0$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan 2\alpha)^n}{1+\sqrt{n}}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/4, +\pi/4[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Appello del 11.02.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \le \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar{z}+i)-1\big)^2}{4} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar{z}+i)-1\big)^2}{4} \le 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}}-1}{x^{\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+2)\log(x+2)|, \qquad x \in D =]-2, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -2$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 \sin n}{1 - n^5}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} \le \frac{\left(\mathrm{Re}\,(\bar{z} + 2i) - 1\right)^2}{9} + \frac{\left(\mathrm{Im}\,(\bar{z} + 2i) - 1\right)^2}{9} \le 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3x}}\, dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{3x}} - 1}{x^{2\alpha+1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 0$, sia $F(x) = \int_1^{\sin x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\pi/6)$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\left(1 + 5x\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt.$$

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+1)\log(x+1)|, \qquad x \in D =]-1, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -1$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n^2)}{1 - n^5}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar z - i) - 1\big)^2}{9} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar z - i) - 1\big)^2}{9} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/2}} \, dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/2}} - 1}{x^{\alpha-3}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x) \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 4$, sia $F(x) = \int_1^{\sinh x} f_\alpha(t) \, dt$: si calcoli $F'(\log 3)$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1 + 2x\big)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt.$$

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = |(x+4)\log(x+4)|, \qquad x \in D =]-4, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -4$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2)\sin(n^2)}{n^5}$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\left(\mathrm{Re}\,(\bar{z}-2i)-1\right)^2}{4} + \frac{\left(\mathrm{Im}\,(\bar{z}-2i)-1\right)^2}{4} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/3}}\,dx.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/3}}-1}{x^{2\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 1$, sia $F(x) = \int_1^{\arctan x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\sqrt{3})$.

Esercizio 6 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(1-e^{3x}\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Esercizio facoltativo Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\,dt.$$

Appello del 8.07.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia
$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$
a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{1-2\sqrt{n}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione
$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|iz^2|}$$
e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione
$$e^x \log(1+2e^x).$$
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}\log(1+2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione
$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1}\right)$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Sia
$$f(x) = e^{\frac{1}{|3+\log x|}}.$$
a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali

punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{n})\sinh\frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{|iz^2|}$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x\log(1+3e^x).$$

Per $\alpha\in\mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x)=e^{\alpha x}\log(1+3e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0=2$ della funzione

$$F(x)=\int_2^x f_0(t)\,dt.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[6]{x^2-1}\right)$$

al variare del parametro $\alpha>0$.

Appello del 17.09.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Sia

$$f(x)=\log\left|e^{3x}-2\right|.$$

a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-2x^2}-1-x}{\sinh x^2 + x^{7/3}\log x}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Re} z \le \operatorname{Re}\left(\frac{3}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [6+3 punti] a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan\frac{x}{2} = u).$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}}dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [4+3 punti] (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2+\alpha n+4}$$

è infinitesima per $n\to\infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Sia

$$f(x) = \log\left|e^{2x}-3\right|.$$

a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [5 punti] Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-3x^2}-1-x}{\sin x^2 + x^{5/2}\log x}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Re} z \le \operatorname{Re}\left(\frac{4}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

Esercizio 4 [6+3 punti] a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\tan 2x)^3 \, dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan 2x = u\text{).}$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{2\alpha-1}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [4+3 punti] (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 3}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Appello del 20.01.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\big(2\arctan(|x|^3)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; <u>non</u> è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1 + \sin x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "exp{log . . . }".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3 + 5)(z^2 + z + 1) = 0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} + 2e^t}{(e^t - 1)^\alpha} \, .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\sin x)^n n}{n^2 + \sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin\big(2\arctan(|x|^3)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \big(1 - \sinh x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log \dots\}$".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2 - z + 1)(z^3 + 4) = 0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} - 3e^t}{(e^t - 1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\cos x)^n n}{n^2+1}$$

al variare di $x \in [0,\pi]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\big(2\arctan(|x|^5)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; <u>non</u> è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1-\sin x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "exp{log . . . }".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+3)(z^2+z+2) = 0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t}-2e^t}{(e^t-1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4\sin x)^n n}{n^2+2\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin\big(2\arctan(|x|^5)\big)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \big(1 + \sinh x\big)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "$\exp\{\log \dots\}$".

Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^2 - z + 2)(z^3 + 2) = 0.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{2t} + 3e^t}{(e^t - 1)^\alpha}\ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 1$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\cos x)^n n}{n^2 + 2}$$

al variare di $x \in [0, \pi]$.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Appello del 10.02.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x+1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha}.$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x - x^3) - \log(1 + \sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\,dt, \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x+1}{x}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{2e^{-3/t}}{t^\alpha} .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x - x^3) - \log(1 + \sin x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt,\ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$? Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x-1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{3e^{-2/t}}{t^\alpha} .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x + x^3) - \log(1 + \sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt, \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x-1}{x}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 6^k \frac{k!}{k^k}.$$

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-3/t}}{2t^\alpha} \ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(x + x^3) - \log(1 + \sin x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\ dt,\ \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Appello del 06.07.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = |(x + 3)\log(x + 3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Calcolare

$$\lim_{x\to -3^+} f(x), \quad \lim_{x\to +\infty} f(x).$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione f, studiare gli intervalli di monotonia ed abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 8i,$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\log n}{n^4}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2.$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 14.09.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x \in (1,\infty).$$

(i) Individuarne gli eventuali asintoti.
(ii) Se ne determini la monotonia.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$.
(i) Scriverlo in forma esponenziale.
(ii) Calcolare la parte reale di z^6.

Esercizio 3 [6 punti] Stabilire la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x) - \sin x}{x^2}.$$

Esercizio 5 [6 punti] Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_1^{\infty} \log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right) dx.$$

(i) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(ii) Stabilire per quali $\alpha \in [0,\infty)$ esso converge.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

5 Esercizi scelti dai temi d'esame di anni passati

Studi di funzione.
1) (20.02.2013) Data la funzione

$$f(x) = x\left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f;
(d) calcolare i limiti significativi di f';
(e) disegnare un grafico qualitativo di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).
2) (3.02.2014) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\log|x| - 1}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di f.
2) Calcolare i limiti significativi di f, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.
3) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di f.
4) Calcolare i limiti significativi di f' e studiare la derivabilità di f in $x = 0$.
5) Disegnare un grafico di f (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

3) (26.01.2015) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+1|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}}.$$

(a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
(c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Serie
1) (16.09.2013) Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right).$$

2) (26.01.2015) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n-1}(x-2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.

3) (25.01.2016) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\big(\log(x-3)\big)^n}{n-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

Limiti

1) (20.02.2013) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

2) (3.02.2014) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)}{\log\cos 2x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

3) (20.02.2015) (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;

(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1+\sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizi sui numeri complessi

1) (7.02.2012) Risolvere l'equazione

$$i\,\mathrm{Re}z + z^2 = |z|^2 - 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

2) (23.02.2012) Si esprimano in forma algebrica gli zeri del polinomio

$$\big(z^2 + iz + 2\big)\big(z^3 - 8i\big).$$

3) (18.09.2012) Esprimere in forma algebrica le soluzioni dell'equazione

$$z^6 - iz^3 + 2 = 0$$

e rappresentarle sul piano di Gauss.

4) (5.02.2013) Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{2z+1}{2z-1}\right)^3 = 1,$$

scriverle in forma algebrica e rappresentarle nel piano complesso.

5) (15.07.2013) Calcolare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 = -16\overline{z}$$

esprimendole prima in forma trigonometrica/esponenziale e poi in forma algebrica; disegnarle infine sul piano di Gauss.

6) (15-07.2014) Esprimere in forma trigonometrica le soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^4}{z^4+1} = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

e disegnarle nel piano di Gauss.

7) (20.02.2015) Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) \leq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) \tag{1}$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

8) (16.07.2015) Si risolva l'equazione

$$\Big(\frac{1}{18} - \frac{i\sqrt{3}}{18}\Big)\bar{z}^2 = 1,$$

disegnandone le soluzioni nel piano di Gauss.

9) (15.02.2016) Determinare tutte le soluzioni dell''equazione

$$\bar{z}^2 = 2iz, \qquad z \in \mathbb{C},$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole sul piano di Gauss.

10) (11.07.2016) Risolvere nel piano complesso l'equazione

$$2\bar{z}^3 = 3i,$$

rappresentandone le soluzioni in forma algebrica.

Integrali

1) (7.02.2012) Calcolare l'integrale

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

2) (23.02.2012) Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;

(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.

3) (17.07.2012) (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9-x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\big(9-x^2\big)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

4) (5.02.2013) Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-3}\, dx.$$

5) (20.02.2013) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

6) (15.07.2013) a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}-1}{e^{2x}+1} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

7) (3.02.2014) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(4+x)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

8) (15.07.2014) Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\,(3+2\sqrt{x}+x)} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

9) (12.09.2014) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha} dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

10) (25.01.2016) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx$$

11) (11.07.2016) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{|\log(\cos 2x)|^\alpha \cos 2x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

6 Ulteriori esercizi (a cura di C. Sartori)

FUNZIONI

Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda > 1$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = x^\lambda.$$

Soluzione. L'equazione (che ha la soluzione λ) è equivalente a

$$x \log \lambda = \lambda \log x.$$

Posto $f(x) = x \log \lambda$, $g(x) = \lambda \log x$, si ha $f'(x) = \log \lambda$, $g'(x) = \frac{\lambda}{x}$ e quindi le due funzioni sono tangenti se

$$\begin{cases} x \log \lambda = \lambda \log x \\ \log \lambda = \frac{\lambda}{x}. \end{cases}$$

Si ricava $\lambda = \lambda \log x$ cioè $x = e$ e quindi $\log \lambda = \frac{\lambda}{e}$ da cui $\lambda = e$. La funzione $\log x$ è tangente alla retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ se $\lambda = e$. Il coefficiente angolare della retta ha un massimo per $\lambda = e$ e quindi confrontando il grafico di $\log x$ con quello della retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ si ottengono sempre due soluzioni $\forall \lambda > 1$. Per $\lambda = e$ si ha una sola soluzione.

Esercizio Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di f e i valori di f in tali punti;
$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di a per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui f è convessa.
$a = 0$

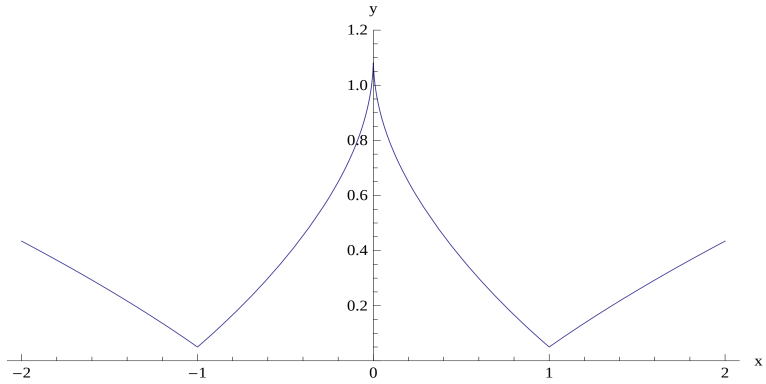
Esercizio. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{10(1 + x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right| = \lambda.$$

Soluzione. Studio la funzione $f(x) = \frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$ è pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Si ha $f(0) = \frac{11}{10}$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

f è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty$, quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Il grafico è porta alle soluzioni



$$\begin{cases} \lambda < \frac{1}{20} & \text{nessuna soluzione} \\ \lambda = \frac{1}{20} & 2 \text{ soluzioni} \\ \frac{1}{20} < \lambda < \frac{11}{10} & 4 \text{ soluzioni} \\ \lambda = \frac{11}{10} & 3 \text{ soluzioni} \\ \lambda > \frac{11}{10} & 2 \text{ soluzioni.} \end{cases}$$

Esercizio Data la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1,$$

determinare per quali valori di $a > 0$

a) $f(x)$ ha esattamente tre zeri;

b) tali zeri sono tutti positivi.

Soluzione.

a)
$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \iff x = \frac{a}{2},\ x = \frac{a}{6}.$$

$x = \frac{a}{2}$ è punto di massimo e $x = \frac{a}{6}$ è punto di minimo. Per avere tre zeri si deve imporre $f(\frac{a}{2}) < 0 < f(\frac{a}{6})$ che è verificato se e solo se $a > \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

b) Poichè $f(0) = -1 < 0$ per $0 < x < \frac{a}{6}$ c'è uno zero, cosi' come ce ne è uno in $(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}$ e infine un terzo per $x > \frac{a}{2}$ dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Esercizio. Data la funzione

$$f_a(x) = x^a - ax^2, \quad a > 0,$$

calcolare $\sup\{f_a(x),\, x \geq 0\}$ e $\inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}$, specificando se sono massimo o minimo.

Soluzione.

$$a > 2 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty = \sup\{f_a(x),\, x \geq 0\};$$

$$a \leq 2 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty = \inf\{f_a(x),\, x \geq 0\}.$$

Si ha $f_a'(x) = ax^{a-1} - 2ax = 0 \iff x = 0,\ 2^{\frac{1}{a-2}}$ se $a \neq 2$. $2^{\frac{1}{a-2}}$ è di minimo se $a > 2$, di massimo se $a < 2$. Quindi

$$a > 2 \ \Rightarrow\ \min\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$

$$a < 2 \ \Rightarrow\ \max\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$
$$a = 2 \ \Rightarrow\ \max\{f_2(x),\, x \geq 0\} = 0.$$

Esercizio. Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

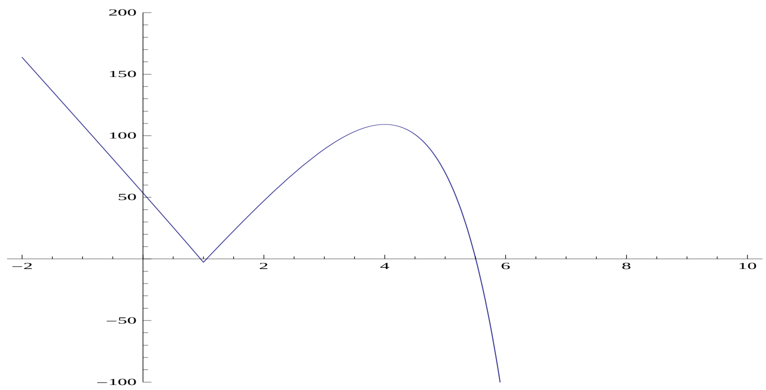
$$-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1| = \lambda.$$

Sol. Studio la funzione
$$f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1|.$$

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4, & \text{per } x > 1 \\ -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^4, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di max in $(4, 2\mathrm{e}^4)$ e un punto di min. (angoloso) in $(1, -\mathrm{e})$. Quindi



$$\begin{cases} \lambda > 2\mathrm{e}^4,\ \lambda < -\mathrm{e} & 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e} < \lambda < 2\mathrm{e}^4 & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^4 & 2 \text{ sol.}. \end{cases}$$

Esercizio. Sia
$$f(x) = \ln(x+4) + \frac{x+8}{x+4}.$$

- Calcolare gli intervalli di concavità e di convessità di f sul suo dominio naturale.
- Individuare il massimo intervallo A contenente -3 dove f risulti invertibile.
- Sia g la funzione inversa della f ristretta su A. Calcolare $g'(f(-3))$.

SOL. $\mathrm{Dom} f = \{x > -4\}$. $f'(x) = x/(4+x)^2$, $f''(x) = (4-x)/(4+x)^3$. Si ha $f''(x) > 0$ per $-4 < x < 4$ e ivi la funzione è convessa, per $x > 4$ concava. Il max intorno di -3 in cui f è monotona (decrescente) e quindi invertibile è $-4 < x < 0$. Si ha $f(-3) = 5$, e

$$g'(f(-3)) = \frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{3}.$$

FUNZIONI INTEGRALI

Esercizio. Studiare la convessità e concavità della funzione

$$F(x) = \int_2^x g(\sin t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove g è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g'(x) < 0$.

Soluzione Si ha

$$F'(x) = g(\sin x), \text{ e } F''(x) = g'(\sin x) \cos x,$$

da cui

$$F''(x) > 0 \iff \cos x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

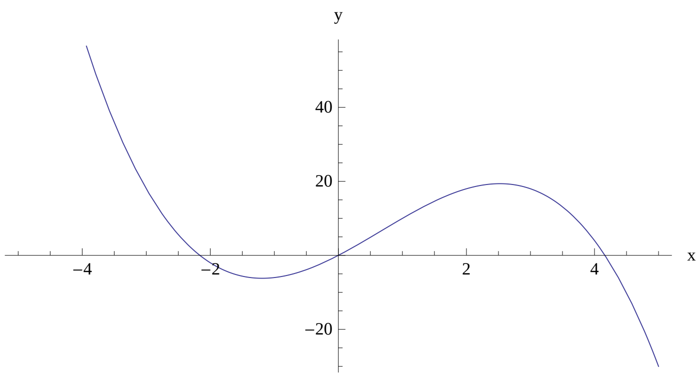
per K intero; nell'unione di tali intervalli F è convessa, e nel complementare è concava.

Esercizio. Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t+1)(3-t)}{\arctan(1+t^2)}\, dt,$$

specificando, in particolare, gli intervalli di crescenza e decrescenza.
Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ e tracciare un grafico qualitativo.

Soluzione. Si ha $F'(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{\arctan(1+x^2)}$ e $F'(x) > 0 \iff -1 < x < 3$. $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F'(x) = -\infty$, da cui si ricava $F'(x) < -1$ per $|x| > M$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.



LIMITI

Esercizio Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$),

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^6 - 3^6}{x^8 - 3^8} = 1/12, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha + x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2/3 \end{cases}$$

7 Soluzioni dei Temi 1 delle prove scritte dei quattro anni precedenti

Appello del 23.01.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= (\text{ponendo } e^x = t, \text{ per cui } dx = dt/t) \int_3^{e^2} \frac{1}{t^2-4}\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\int_3^{e^2} \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\,dt = \frac{1}{4}\ln\frac{|t-2|}{|t+2|}\Big|_3^{e^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\log 5\frac{e^4-2}{e^4+2}\right] = \frac{1}{2}\left(\operatorname{settanh}\frac{3}{2} - \operatorname{settanh}\frac{e^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$\left|2\bar{z}^2 - 2z^2\right| < 3$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Si ha

$$2\bar{z}^2 - 2z^2 = 4(\bar{z}-z)(\bar{z}+z) = (\text{ponendo } z = x+iy)\ 8ixy,$$

da cui

$$\left|2\bar{z}^2 - 2z^2\right| = 8|xy|.$$

La soluzione è quindi

$$\{z = x+iy \in \mathbb{C} : |xy| < \frac{3}{8}\},$$

rappresentata in figura 1.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n^\alpha)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Dagli sviluppi di Mac Laurin di $\cos x$ e di $\sin x$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n) = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!\cdot n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{1}{3!8n^{3\alpha}} + \frac{1}{5!32n^{5\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right),$$

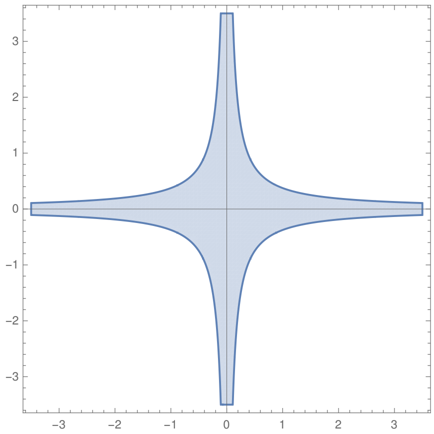


Figura 1: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

per cui il termine generale della serie, per $n \to +\infty$, è asintotico a

$$\begin{cases} (\text{se } \alpha < 2) & \frac{n^2}{2n^\alpha} \\ (\text{se } \alpha = 2) & 1/24n^2 \\ (\text{se } \alpha > 2) & -1/2 \end{cases}$$

e quindi ha segno definitivamente costante per $n \to +\infty$. Se $\alpha \neq 2$ il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge (a $-\infty$). Per $\alpha = 2$ la serie converge.

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{|x| - 4}{2 + x^2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (i) La funzione è pari. $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{|x|-4}{2+x^2} \leq 1\}$. La disequazione $\frac{|x|-4}{2+x^2} \leq 1$ equivale a $|x| - 6 - x^2 \leq 0$, che è sempre verificata, mentre $\frac{|x|-4}{2+x^2} \geq -1$ equivale a $x^2 + |x| - 2 \geq 0$, che è verificata per $x \leq -1$ e $x \geq 1$. Pertanto $D = [1, +\infty[\ (\cup] - \infty, -1])$. D'ora in poi assumeremo sempre $x \geq 0$. La funzione è continua in D, $f(1) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$, asintoto orizzontale. Il segno di f è dato dal segno dell'argomento dell'arcoseno, per cui $f(x) \geq 0$ se e solo se $x - 4 \geq 0$ e quindi $x \geq 4$.
(ii) In D si possono applicare le regole di derivazione se l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1, cioè per $x > 1$. Per tali x si ha

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x(x-4)}{(2+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-4}{2+x^2}\right)^2}} = \frac{-x^2 + 8x + 2}{(1 + 2x^2)\sqrt{2x^2 + x - 3}},$$

da cui si ricava che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $-x^2 + 8x + 2 \leq 0$, per $x > 1$, cioè per $1 < x < 4 + 3\sqrt{2}$, che pertanto è il punto di massimo assoluto, mentre $x = 1$ è il punto di minimo assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

per cui il grafico di f, rappresentato nella figura 2, ha tangente verticale in $(1, \pi/2)$.

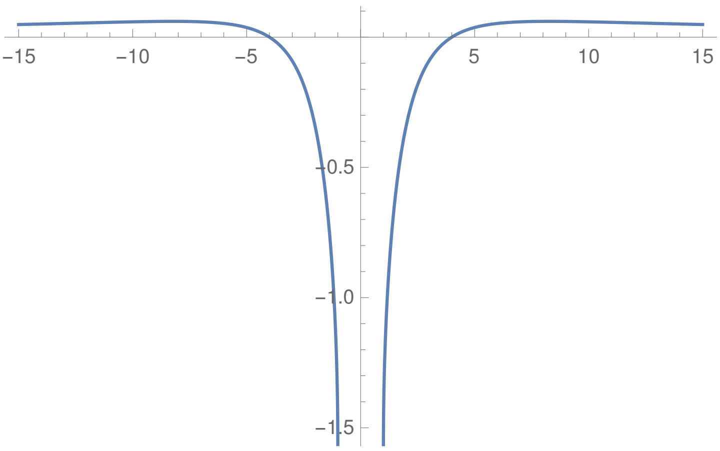


Figura 2: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-1)| \arctan x}{|1-x^2|^\alpha \, (\sinh \sqrt{x})^\beta} \, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'integranda $f(x)$ è continua in $]0,1[\cup]1,+\infty[$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 0^+$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x \arctan 1}{x^{\beta/2}} = \arctan 1 \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 0 se e solo se $\beta < 4$.
Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{\arctan 1 \, |x-1|}{|x-1|^\alpha |x+1|^\alpha (\sinh \sqrt{2})^\beta} = \frac{\arctan 1}{2^\alpha (\sinh \sqrt{2})^\beta} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 1 se e solo se $\alpha < 2$.
Per $x \to +\infty$, se $\beta > 0$

$$f(x) \leq \frac{\pi^2}{4 \, (\sinh \sqrt{x})^\beta} \leq \frac{\pi^2}{2^{(2-\beta)} \, e^{(\beta\sqrt{x})}}.$$

Quest'ultima espressione è $o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$ e quindi converge.
Se $\beta = 0$,

$$f(x) \sim \pi^2/4x^{2\alpha},$$

quindi converge se $\alpha > 1/2$. Se $\beta < 0$,

$$f(x) \sim \pi^2 e^{-\beta/2}/2^{2-\beta} > 1/x$$

per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge. In sintesi, l'integrale converge se $\alpha < 2$ e $0 < \beta < 4$ o se $\beta = 0$ e $1/2 < \alpha < 2$.

Esercizio facoltativo. Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

Svolgimento. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$, che vogliamo dimostrare che si annulla in almeno un punto di $I := [a, b]$. Se $g(a), g(b) \neq 0$ allora necessariamente $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, per cui per il teorema degli zeri esiste $\bar{x} \in]a, b[$ tale che $g(\bar{x}) = 0$.

Appello del 13.02.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2 - 2x - 3\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione. i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Per il segno abbiamo

$$f(x) \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad |x^2 - 2x - 3| \geq 1, \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \leq -1, \ \vee \ x^2 - 2x - 3 \geq +1.$$

Abbiamo che $x^2 - 2x - 2 \leq 0$ se e solo se $x_0 := 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} =: x_1$ e $x^2 - 2x - 4 \geq 0$ se e solo se $x \leq 1 - \sqrt{5} =: x_2$ oppure $x \geq 1 + \sqrt{5} =: x_3$. Quindi $f(x) \leq 0$ se e solo se x appartiene ad uno dei due intervalli $[x_2, x_0]$ e $[x_1, x_3]$. Per quanto riguarda i limiti, si ha:
è chiaro che $x^2 + 3x - 4 \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, cosicché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Tuttavia non ci sono asintoti poiché, per $x \to \pm\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x^2 - 2x - 3)}{x} \sim \frac{\log x^2}{x} = \frac{2 \log |x|}{x} \longrightarrow 0,$$

essendo $\log |x| = o(x)$ per $x \to \pm\infty$. Per $x \longrightarrow -1, 3$ si ha sempre che $|x^2 + 3x - 4| \longrightarrow 0+$ quindi in ogni caso $f(x) \longrightarrow -\infty$ per cui si hanno gli asintoti verticali $x = -1, 3$.

ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, quindi è continua su tutto il proprio dominio. Inoltre è composizione di funzioni derivabili, eccetto quando $x^2 + 3x - 4 = 0$, che però sono punti che non appartengono al dominio di f: si conclude che f è derivabile nel proprio dominio. Ricordato che $(\log |y|)' = \frac{1}{y}$ si ha immediatamente che

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Studiamo il segno di f'. Il segno del denominatore è positivo per $x < -1$ oppure $x > 3$. Il numeratore è positivo per $x > 1$. Ne deduciamo la tabella seguente:

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 1$	$1 \quad 3$	$3 \quad +\infty$
$\mathrm{sgn}\,(2x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\mathrm{sgn}\,(x^2-2x-3)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{sgn}\, f'$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

I punti $x = -1, 3$ non appartengono al dominio, mentre $x = 1$ è un massimo locale stretto. Non ci sono né massimi né minimi globali essendo f illimitata sia inferiormente che superiormente.

iii) Chiaramente f' è derivabile ove definita in quanto funzione razionale: abbiamo che

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 10}{(x^2 - 2x - 3)^2}.$$

Quindi $f'' \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 4x - 10 \leq 0$, cioè mai. Si conclude che $f'' < 0$ ovunque (dove definita) per cui la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che compongono il suo dominio.

iv) Il grafico di f è rappresentato figura 3.

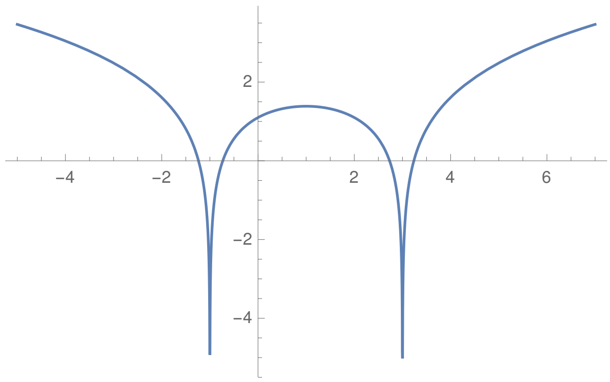


Figura 3: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Soluzione. La serie è evidentemente a termini di segno costante. Conviene applicare il criterio asintotico del rapporto. Detto a_n il termine generale, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{2} e > 1.$$

Dunque la serie diverge.

Esercizio 3 Data

$$f(z) = \frac{2 + iz}{iz + 1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Soluzione. Perché la frazione sia definita occorre che $iz + 1 \neq 0$, cioè che $z \neq \frac{-1}{i} = \frac{i}{-i \cdot i} = i$. Ora, per $z \neq i$,

$$f(z) = z \quad \Longleftrightarrow \quad 2 + iz = z(iz + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad iz^2 + (1 - i)z - 2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, e la formula risolutiva tradizionale funziona allo stesso modo (pur di intendere la radice come radice complessa). Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{i-1+\sqrt{1-1-2i+8i}}{2i} = \frac{i-1+\sqrt{6i}}{2i} = \frac{i-1\pm\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\pm\frac{\frac{\sqrt{12}}{2}(1+i)}{2i} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-\sin x+x^{\frac{10}{3}}\log x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione. Osservato che, in virtù del limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x^\gamma \log x = 0$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, si ha subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Determiniamo i termini principali col metodo degli sviluppi asintotici. Abbiamo che, per $x \to 0^+$,

$$N(x) := x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\big)+x^{\frac{10}{3}}\log x = -\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x^{\frac{10}{3}}\log x.$$

Osserviamo che $x^{\frac{10}{3}}\log x = o(x^3)$ per $x \to 0^+$: infatti

$$\frac{x^{\frac{10}{3}}\log x}{x^3} = x^{\frac{10}{3}-3}\log x \to 0, \quad \text{essendo } \frac{10}{3}-3>0,$$

sempre in virtù del limite notevole sopra richiamato. Pertanto $N(x) = \frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per $x \to 0^+$. Quanto al denominatore, conviene osservare preliminarmente che

$$(1-\cos^2 x) = (1-\cos x)(1+\cos x) \sim \frac{x^2}{2}\cdot 2 = x^2,$$

per cui $D(x) := x^\alpha(1-\cos^2 x) \sim x^\alpha \cdot x^2 = x^{\alpha+2}$ per $x \to 0^+$. In conclusione, per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x^{\alpha+2}} \longrightarrow \begin{cases} 0, & 1-\alpha>0, \iff \alpha<1, \\ -\frac{1}{6}, & 1-\alpha=0, \iff \alpha=1, \\ -\infty, & 1-\alpha<0, \iff \alpha>1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-2}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Soluzione. Sia $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-2}}$ la funzione integranda. Notiamo che essa è continua in $]2,+\infty[$ e dunque l'integrale è generalizzato sia in $x = 2$ che per $x \to +\infty$. Avendo evidentemente f_α anche segno costante, andiamo a studiarne il comportamento asintotico agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}},$$

per cui $\int^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty$ se e solo se $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\,dx < +\infty$ cioè se e solo se $\alpha+1/2 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$. Per $x \to 2+$ si ha che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2^\alpha \sqrt{x-2}},$$

che è integrabile in $x = 2+$. In conclusione, f_α è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1/2$.

Calcoliamo l'integrale nel caso $\alpha = 1$. Siccome è generalizzato abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx.$$

Sostituendo $x - 2 = y^2$ $(y > 0)$, risulta

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2y}{(y^2+2)y}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dy.$$

Sostituendo ancora $y/\sqrt{2} = t$, risulta

$$\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dy = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c = \arctan \frac{y}{\sqrt{2}} + c.$$

Pertanto,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \left(\arctan\sqrt{\frac{b-2}{\sqrt{2}}} - \arctan\sqrt{\frac{a-2}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Appello del 10.07.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|e^{2x} - 4\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è

$$D = \{x : e^{2x} \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{\log 2\}.$$

SI ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|e^{2x}-4| \geq 1$, cioè se e solo se $e^{2x} \geq 5$ oppure $e^{2x} \leq 3$, quindi

$$f\left(\frac{\log 5}{2}\right) = f\left(\frac{\log 3}{2}\right) = 0 \;\text{ e } f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{\log 5}{2} \text{ oppure } x < \frac{\log 3}{2}.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log 4, \quad \lim_{x \to \log 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per quanto riguarda l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$, risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(e^{2x}-4\right)}{x} = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(e^{2x}-4\right)-2x = \lim_{x \to +\infty} \log\frac{e^{2x}-4}{e^{2x}} = 0.$$

Quindi $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, $y = 2\log 2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e in $x = \log 2$ si ha un asintoto verticale.
ii) f è derivabile in tutto D, dove si ha

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-4}.$$

f è perciò strettamente decrescente per $x < \log 2$ e strettamente crescente per $x > \log 2$. Non risultano quindi punti di estremo.
iii) Un calcolo diretto dà

$$f''(x) = \frac{-16e^{2x}}{(e^{2x}-4)^2},$$

per cui f è concava in $]-\infty, \log 2[$ e in $]\log 2, +\infty[$.
iv) Il grafico è in figura 4.

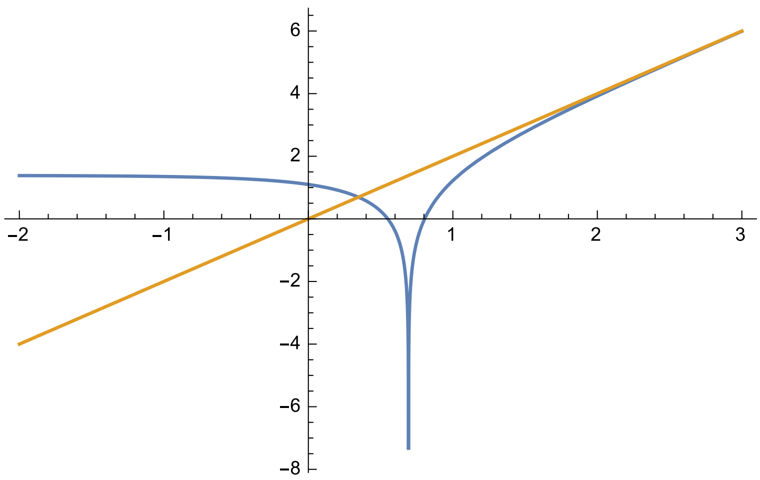


Figura 4: Il grafico di f con l'asintoto obliquo (Tema 1).

Esercizio 2 Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\frac{z-1}{z-i} \geq 0, \; |z+1-i| \leq 1 \right\}.$$

Svolgimento. Si tratta in primo luogo di determinare la parte reale di $\frac{z-1}{z+i}$. Si ha, ponendo $z = x+iy$,

$$\mathrm{Re}\,\frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \mathrm{Re}\frac{(x-1+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x(x-1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-x+y^2-y\geq 0, (x+1)^2+(y-1)^2\leq 1\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{2}, (x+1)^2+(y-1)^2\leq 1\right\}, \end{aligned}$$

cioè la parte esterna al cerchio di centro $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed interna al cerchio di centro $(-1,1)$ e raggio 1, rappresentata in figura 5.

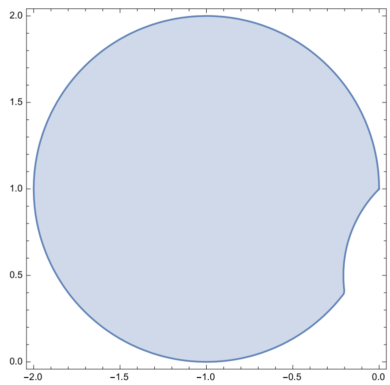


Figura 5: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x}\arctan(3e^x)dx.$$

Svolgimento. Eseguendo la sostituzione $x=\log t$ si ha

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\arctan(3e^x)dx &= \int t\arctan(3t)\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan 3t - \frac{3}{2}\int\frac{t^2}{1+9t^2}\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan 3t - \frac{3}{2}\Big[\frac{1}{9}\int\frac{1+9t^2}{1+9t^2}\,dt - \frac{1}{9}\int\frac{1}{1+(3t)^2}\,dt\Big] \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan 3t - \frac{t}{6} + \frac{\arctan 3t}{18} + c \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\arctan 3e^x - \frac{e^x}{6} + \frac{\arctan 3e^x}{18} + c, \quad c\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\sin x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha>0$.

Svolgimento. Da $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ per $y \to 0$ si deduce, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

per cui, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x - \sinh x = x - \frac{x^3}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3) = -\frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Perciò si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3/3 + o(x^3)}{x^{\alpha+2} + o(x^{2+\alpha})} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 1 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-e^a)^n}{n+\sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per la convergenza assoluta si può usare il criterio della radice, che dà

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|1-e^a|^n}{n+\sqrt{n}}} = |1-e^a|.$$

La serie perciò converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $|1-e^a| < 1$ e diverge assolutamente e non converge semplicemente se $|1-e^a| > 1$, in quanto il termine generale non è infinitesimo. Per $|1-e^a| = 1$ il criterio della radice non dà informazioni. Risolvendo le disequazioni si ricava che la serie converge assolutamente per $a < \log 2$ e non converge per $a > \log 2$. Per $a = \log 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}.$$

Per asintoticità con la serie armonica $\sum 1/n$ questa serie non converge assolutamente. Inoltre essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz, essendo il termine generale a segno alterno e – in valore assoluto – infinitesimo e decrescente.

Appello del 18.09.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;

ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è $D = \{x : x \neq 0, \log|2x| \neq 0\} = \{x : x \neq 0, x \neq \pm\frac{1}{2}\}$. La funzione è visibilmente dispari, per cui la studiamo in $[0, +\infty[$. Per $x > 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \text{(per cui } f \text{ è prolungabile con continuità in } x = 0\text{)}\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{(per cui non c'è asintoto obliquo per } x \to +\infty\text{).}
\end{aligned}$$

ii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha

$$f'(x) = \frac{3\log 2x - 3}{\log^2 2x}.$$

Essendo f prolungabile con continuità in $x = 0$, vediamo se il prolungamento di f è derivabile in 0. A tale scopo calcoliamo

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$

per cui la prolungata di f è derivabile anche in $x = 0$, con derivata nulla. Il segno di f' dipende solo dal segno di $\log 2x - 1$, che è positivo se e solo se $x > e/2$. Pertanto $e/2$ è un punto di minimo locale stretto. Non ci sono estremi assoluti.
iii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha

$$f''(x) = 3\frac{\frac{\log^2 2x}{x} - 2(\log 2x - 1)\frac{\log 2x}{x}}{\log^4 2x} = 3\frac{2 - \log 2x}{x\log^3 2x},$$

che risulta > 0 se e solo se $\frac{1}{2} < x < \frac{e^2}{2}$, cioè f è convessa nell'intervallo $]\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}[$ e concava negli intervalli $]0, \frac{1}{2}[$ e $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
iv) Il grafico di f è riportato nella figura 6.

Esercizio 2 Dato il polinomio

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.
Svolgimento. Per tentativi, una radice intera è $z = -1$: infatti

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 8i + 8i = 0.$$

Eseguendo la divisione di polinomi, oppure, più semplicemente, raccogliendo z^3 nei primi due addendi e $8i$ negli ultimi due, risulta

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i = (z + 1)\big(z^3 + 8i\big),$$

per cui le restanti tre radici sono le radici cubiche di $-8i = 8e^{\frac{3}{2}\pi i}$, cioè sono

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i,\ 2e^{(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})\pi i} = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i,\ 2e^{(\frac{1}{2}+\frac{4}{3})\pi i} = 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt{3} - i.$$

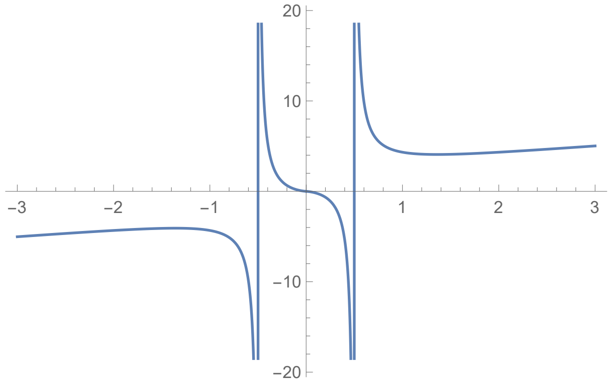


Figura 6: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. La serie è a termini definitivamente positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il criterio della radice dà

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{3x}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3x}{n}\right)^{n} = e^{3x}.$$

La serie pertanto converge per ogni $x < 0$ e diverge per ogni $x > 0$. Per $x = 0$ il criterio della radice non dà informazioni, ma per tale x la serie ha per termine generale 1 e quindi diverge.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

Svolgimento. Il numeratore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$\begin{aligned}
\cosh \alpha x &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^3)\\
-e^{x^2} &= -1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = -1 - x^2 + o(x^3)\\
x\log\cos x &= x\log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) = x\left(\frac{-x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{-x^3}{2} + o(x^3),
\end{aligned}$$

per cui

$$\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x) = x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \begin{cases} x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2}\\ -\frac{x^3}{2} + o(x^3) & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}.\end{cases}$$

Il denominatore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$x - \sin x + e^{-1/x^2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

in quanto $e^{-1/x^2} = o(x^\beta)$ per ogni β reale. Il limite quindi vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \frac{x^2\left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ \frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -3 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{ax}(2 + \cos x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \cos x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).

Svolgimento. Una primitiva dell'integranda può essere calcolata per ogni a, per cui la discussione della convergenza può essere fatta sia direttamente dalla definizione, sia mediante criteri di convergenza. Usando il criterio del confronto si ha, per $a \geq 0$,

$$xe^{ax}(2 + \cos x) \geq x \text{ per ogni } x \geq 0$$

e quindi l'integrale diverge. Per $a < 0$ il confronto asintotico dà, ad esempio,

$$xe^{ax}(2 + \cos x) = o(e^{ax/2}),$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{ax}(2 + \cos x)}{e^{ax/2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{3xe^{ax}}{e^{ax/2}} = \lim_{x\to+\infty} 3xe^{\frac{ax}{2}} = 0.$$

Siccome $\int_0^{+\infty} e^{ax/2}\, dx < +\infty$, l'integrale converge.

Per la primitiva, calcoliamo preliminarmente

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\, dx$$
$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\, dx,$$

per cui

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Ora integriamo per parti prendendo x come fattore finito e $e^{-x}\cos x$ come fattore differenziale. Risulta

$$\int xe^{-x}\cos x\,dx = x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\int \frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\,dx.$$

Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin x\,dx &= -e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\\ &= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx,\end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+c.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos x\,dx &= \lim_{b\to+\infty}[-x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b+\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^b\\ &\quad+\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b]\\ &= 0.\end{aligned}$$

(NB. Non è strano che il risultato sia nullo: l'integranda non ha segno costante.)

Appello del 29.01.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) Da $\frac{|x^2-5|}{x+1}>0$ segue che $D=\{x>-1, x\neq\sqrt{5}\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. $f(x)\leq 0$ se e solo se

$$x>-1$$

e

$$|x^2-5|\leq x+1 \Leftrightarrow -x-1\leq x^2-5\leq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-4\geq 0\\ x^2-x-6\leq 0,\end{cases}$$

cioè se e solo se $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\leq x\leq 3$.

Si ha inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+} f(x) &= +\infty\\ \lim_{x\to\sqrt{5}} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty.\end{aligned}$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali (oltre ad un asintoto orrizzontale "così alto che non si vede" (cit.))

ii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Siccome $f(x)=\log|x^2-5|-\log(x+1)$ e ricordando che $\frac{d}{dx}\log|g(x)|=\frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x)\neq 0$, si ha per ogni $x\in D$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-5}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x+5}{(x^2-5)(x+1)}.$$

Siccome il polinomio al numeratore è sempre positivo, $f'(x)>0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x>\sqrt{5}$. Non ci sono punti di estremo.

iii) Il grafico di f è in figura 7.

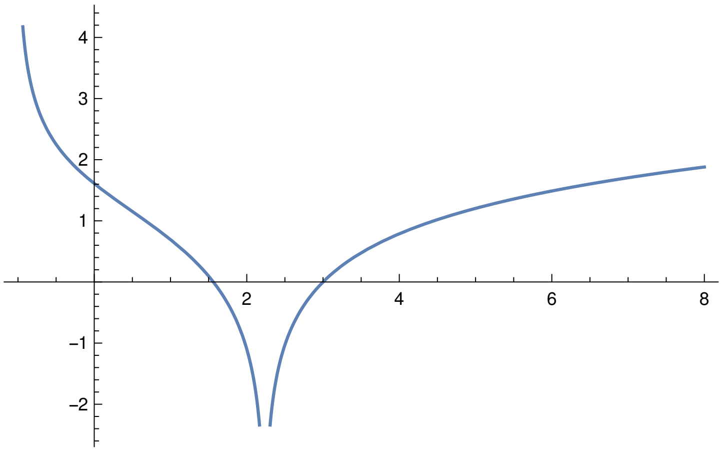


Figura 7: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n=\frac{(-1)^n e^{2n}\sin\frac{1}{n}}{(n-1)!},\quad n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty}a_n$;

b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$.

Svolgimento. a) Siccome $a_n\sim\frac{(e^2)^n}{n!}$ per $n\to\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (ricordando un limite fondamentale).

b) Il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto danno

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n+1}=0,$$

per cui la serie converge assolutamente e quindi converge.

Il fatto che $a_n\to 0$ si poteva anche dedurre direttamente dalla convergenza della serie.

NOTA: applicando il criterio di Leibniz si può dedurre direttamente la convergenza della serie. Risulta che $|a_n|$ è decrescente se e solo se $e^2\leq n$, il che è vero per ogni $n>2$ (la dimostrazione richiede un po' di lavoro). Resta comunque da verificare la convergenza assoluta. Siccome in questo caso è vera, l'uso del criterio di Leibniz è del tutto inutile.

Esercizio 3 Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.
Svolgimento. L'equazione è

$$z^3 + z\bar{z}|z| = |z|^3 - 8i.$$

Siccome $z\bar{z}|z| = |z|^2|z| = |z|^3$, l'equazione diventa

$$z^3 = -8i.$$

Le tre radici cubiche di $-8i = 8e^{i3\pi/2}$ sono date da

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i,\ 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i,\ 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i,$$

rappresentate in figura 8.

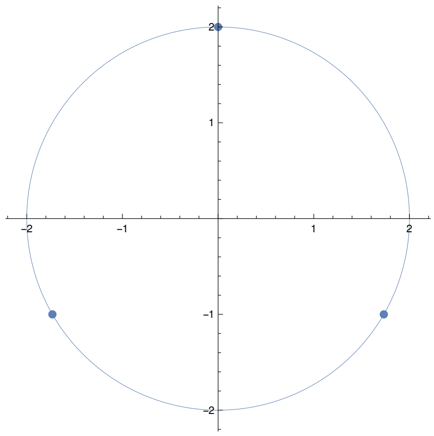


Figura 8: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x}}{\cos\sin\frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il numeratore:

$$\begin{aligned}
\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x} &= \log x + \log\left(1+\frac{3}{x}\right) - \log x - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \log\left(1+\frac{3}{x}\right) - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -\frac{4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$. Il denominatore (ricordando che $e^{-x} = o(1/x^\alpha)$ per $x \to +\infty$ per ogni α):

$$\begin{aligned}
\cos\sin\frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2x} + \frac{1}{24}\sin^4\frac{1}{2x} - \Big(1 + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{2x^4}\Big) + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2x} - \frac{1}{6(2x)^3}\Big)^2 + \frac{1}{24(2x)^4} - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^2}{2x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{8} - \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + \Big(\frac{1}{96} + \frac{1}{24\cdot 2^4} - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\Big(\frac{1}{8} + \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{192}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

per $x \to +\infty$. Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{\frac{-4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{-\Big(\frac{1}{8}+\alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)} = \frac{32}{1+8\alpha} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{8} \\ \dfrac{\frac{-4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{\frac{1}{192}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)} = -\infty & \text{se } \alpha = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

NOTA: Il numeratore poteva anche essere scritto come

$$\begin{aligned}
\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x} &= \log\frac{x+3}{x+1} - \sin\frac{2}{x} = \log\Big(1 + \frac{2}{x+1}\Big) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{x+1}\Big)^2 - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -2\frac{2x+1}{x(x+1)^2} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -2\frac{1+2x}{x(x+1)^2} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \sim -\frac{4}{x^2}
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$. La maggior parte degli studenti che ha svolto il calcolo in questo modo ha tralasciato il termine di ordine 2 nello sviluppo del logaritmo.

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2-2}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento. a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]\sqrt{2}, +\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x \to \sqrt{2}^+$ che per $x \to +\infty$. Per $x \to \sqrt{2}+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2}}},$$

per cui l'integrale converge per ogni α. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$.
b) Con la sostituzione $x = \sqrt{2}\cosh t$, si ha (per $t > 0$)

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\sinh t}{2\cosh t \sinh t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\arctan e^t\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

In alternativa, con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-2}$, seguita dalla sostituzione $z = y/\sqrt{2}$, si ottiene,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan z\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

Un terzo modo di calcolare l'integrale è il seguente:

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-2/x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{1-1/t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{1}{t}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Svolgimento. a) Per $n \geq 1$ si ha $|a_n| = |\sin(a_{n-1})| \leq 1$. Se $a_1 \in [0,1]$, allora da $\sin x \leq x\ \forall x \geq 0$ si ricava $a_{n+1} = \sin a_n \leq a_n$ e dunque la successione è definitivamente decrescente. Se invece $a_1 \in [-1,0]$ si ottiene che la successione è definitivamente crescente.
b) In ogni caso la successione ha un limite $\ell \in [-1,1]$. Se per assurdo fosse $\ell \neq 0$ si avrebbe, essendo la funzione seno continua,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\sin \ell|}{|\ell|} < 1,$$

il che implicherebbe la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, il che a sua volta implicherebbe che a_n converge a 0, cosicché $0 = \ell \neq 0$. Dunque $\ell = 0$. In alternativa, sempre per la continuità di sin,

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim \sin a_n = \sin \ell$$

che ha $\ell = 0$ come unica soluzione.

Appello del 16.02.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.

iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i)DOMINIO: $|x-2| \neq 0 \iff x \neq 2$, dunque $D = \mathbb{R}\backslash\{2\} \cup \{2\} = \mathbb{R}$

LIMITI:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = e^2 \cdot e^{-\infty} = e^2 \cdot 0 = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

ASINTOTI

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)/x = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

dunque non ci sono asintoti obliqui.

ii) CONTINUITÀ: La funzione è continua in $\mathbb{R}\backslash\{2\}2$ perchè composizione di continue. È continua anche per $x = 2$ poichè $\lim_{x\to 2} = 0 = f(2)$. Dunque f è continua.

iii) se $x > 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right);$$

se $x < 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right).$$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se

$$\begin{cases} x > 2 \\ 1 + \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 2 \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases}$$

cioè se

$$\begin{aligned} x \in]2,+\infty[&\bigcup \left(]-\infty, 2[\bigcap\{x : \ (x-2)^2 \geq 1\}\right) \\ =]2,+\infty[&\bigcup \left(]-\infty, 2[\bigcap\{x : \ (x-2) \leq -1 \text{ oppure } \ (x-2) \geq 1\}\right) \end{aligned}$$

cioè se

$$x \in]2,+\infty[\bigcup]-\infty, 1].$$

Inoltre, poichè

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2+} \frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0$$

si ha che f è derivabile in $x = 2$ e $f'(2) = 0$. Concludendo, f è derivabile su tutto il dominio $D = \mathbb{R}$, anzi è di classe C^1.

Dallo studio della monotonia f ha un massimo relativo in $x = 1$ e un minimo assoluto in $x = 0$.

iv) Il grafico è in figura 9.

Esercizio 2 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

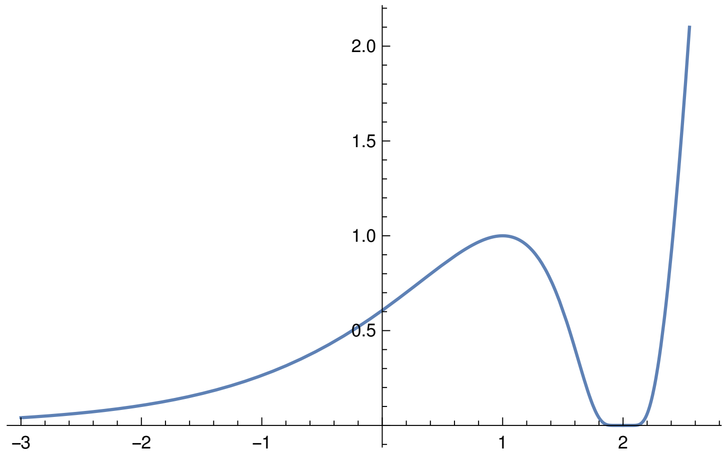


Figura 9: Il grafico di f (Tema 1).

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|^{n+1}}{(2n+5)^2} \frac{(2n+3)^2}{|2x-1|^n} = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+5)^2} = |2x-1|$$

o, alternativamente, con criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|2x-1|^n}{(2n+3)^2}} = \lim_{n\to\infty} |2x-1| \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+3)^2}} = |2x-1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente –e quindi converge– per $0 < x < 1$ e diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) per $x < 0$ e per $x > 1$. Per $x = 0$ e $x = 1$ il criterio della radice e del rapporto non danno informazioni. Per $x = 0$, $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2x-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^2},$$

rispettivamente, e dunque converge assolutamente, e quindi semplicemente, per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per $0 \le x < 1/2$ la convergenza semplice si può anche dedurre dal criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 = 4\,\mathrm{Im}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'equazione diventa

$$2\rho^3\cos\theta = 4\rho\cos\theta.$$

Dunque, $\rho = 0$, cioè $z = 0$, oppure

$$\rho^2\cos\theta = 2\cos\theta,$$

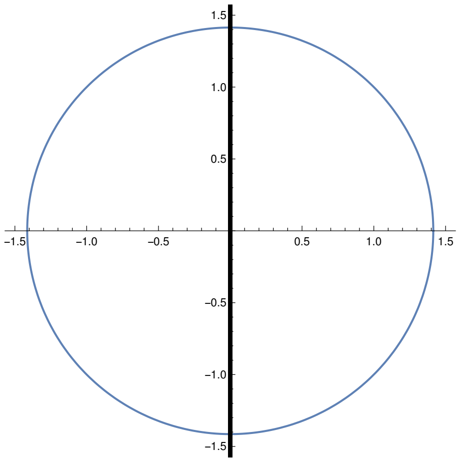


Figura 10: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

vale a dire $\rho^2 = 2$, o $z = \pm\rho i$, $\rho > 0$. Concludendo, l' insieme delle soluzioni sul piano di Gauss è l'unione della retta verticale per l'origine e il circolo di raggio $\sqrt{2}$, rappresentati in figura 10.

Esercizio 4
a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4}{x^4 \sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il denominatore è asintotico a x^6 per $x \to 0$. Il numeratore: si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4 &= \big(4 - \alpha - 2x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\big)^2 - 4x^4 \\ &= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ 4x^4 - \frac{2x^6}{3} - 4x^4 + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2x^6}{3} + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cos x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \sin^2 x} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x \to 0^+$ si ha

$$g(x) \sim \sqrt{3}\, x^{\alpha + \frac{1}{2}}.$$

L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è maggiore di -1, cioè se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$.
b) Si ha, con la sostituzione $3x = t^2$, che dà $dx = \frac{2}{3}t\,dt$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^{\frac{1}{2}} \sin\big(\sqrt{3x}\big)\,dx &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt \\
\text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(- t^2 \cos t\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} t\cos t\,dt\Big) \\
\text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(2t\sin t\Big|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin t\,dt\Big) \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}}\big(\pi^2 - 4\big).
\end{aligned}$$

Appello del 9.07.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2 - 3e^{3x}\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio di f è dato dalla condizione $3e^{3x} \neq 2$, cioè

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\log\frac{2}{3}}{3}\}.$$

Il segno di f è positivo se e solo se $|2-3e^{3x}| > 1$. Elevando al quadrato si ottiene la disequazione equivalente

$$9e^{6x} - 12e^{3x} + 3 > 0.$$

Ponendo $e^{3x} = y$ e dividendo per 3, si ottiene la disequazione $3y^2 - 4y + 1 > 0$, che ha per soluzioni $y < 1/3$, $y > 1$. Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \quad \text{oppure} \quad x \geq 0.$$

In alternativa: se $2 - 3e^{3x} \geq 0$, si ha:

$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 2 - 3e^{3x} > 1 \iff e^{3x} < \frac{1}{3} \iff x < \frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\log 3.$$

Se invece $2 - 3e^{3x} < 0$:

$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 3e^{3x} - 2 > 1 \iff e^{3x} > 1 \iff x > \frac{1}{3}\log(1) = 0.$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \quad \text{oppure} \quad x \geq 0.$$

ii) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(2-3e^{3x}\right) = \log 2,$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$, quindi la retta $y = \log 2$ è un asintoto orizzontale. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3e^{3x}-2\right) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(3e^{3x}-2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+\log\left(3-2e^{-3x}\right)}{x} = 3,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3-2e^{-3x}\right) = \log 3.$$

Quindi la retta $y = 3x + \log 3$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Infine,

$$\lim_{x\to\frac{\log\frac{2}{3}}{3}} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \log y = -\infty,$$

perciò $x = \frac{\log\frac{2}{3}}{3}$ è un asintoto verticale.
(iii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Ricordando che $\frac{d}{dx}\log|g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-2}.$$

Siccome il numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x > \frac{\log\frac{2}{3}}{3}$. Non ci sono punti di estremo.
(iv) Il grafico è in figura 11.

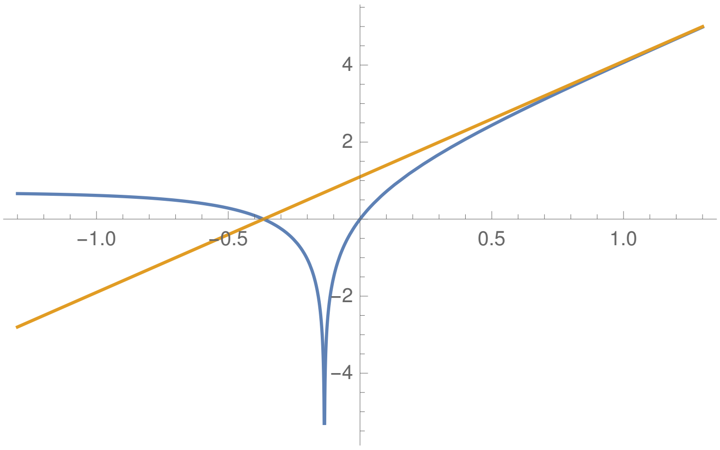


Figura 11: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$|z|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right)$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Notiamo prima che bisogna avere $z \neq 0$. Poniamo $z = x + iy$. Siccome, per $z \neq 0$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{|z|^2}\right) = \frac{x}{|z|^2},$$

la disequazione, per $z \neq 0$, è equivalente a

$$x \leq \operatorname{Im}\left((x - iy)^2\right) = \operatorname{Im}\left(x^2 - y^2 - 2ixy\right) = -2xy,$$

che a sua volta è equivalente a

$$x(1 + 2y) \leq 0,\ x^2 + y^2 \neq 0,$$

che ha per soluzioni l'insieme

$$\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq -\frac{1}{2}\}\right) \setminus \{(0, 0)\}.$$

Le soluzioni sono in figura 12. **NB**: $z = 0$ è da togliere!

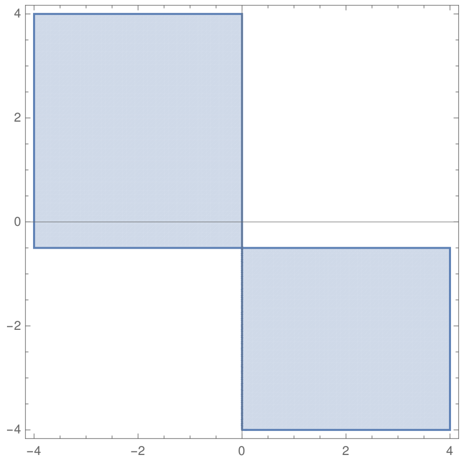


Figura 12: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\log(1 + x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si ha perciò, per $x \to +\infty$,

$$\left(\log(1 + x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Per il denominatore si ha

$$\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2+e^{-x}=\left(\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+e^{-x}=\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

poiché $e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per $x\to+\infty$ qualunque sia $n>0$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log(1+x)-\log x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2+e^{-x}}=\begin{cases}+\infty & \text{per } \alpha\neq 1\\ 1 & \text{per } \alpha=1.\end{cases}$$

Esercizio 4 Studiare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi. Osserviamo innanzitutto che per $\alpha>0$ il termine generale non è infinitesimo, in quanto $\lim_{n\to\infty}2^{\alpha n}/n=+\infty$, per cui $\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right)=\pi/2$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right)=+\infty.$$

Quindi per $\alpha>0$ la serie diverge. Per $\alpha\leq 0$ conviene usare il criterio del confronto asintotico, che dice che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^{\alpha n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\alpha n}.$$

Quest'ultima è la serie geometrica di ragione 2^α, che converge se e solo se $2^\alpha<1$, quindi se e solo se $\alpha<0$.

Esercizio 5 a) Calcolare una primitiva di

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1}\,dx.$$

al variare di $\alpha>0$.
c) Calcolarlo per $\alpha=2$.
Svolgimento. a) Si ha

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}=\frac{x^2(A+B)+2A+B}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

da cui

$$A+B=1,\ 2A+B=0,\quad \text{cioè } A=-1, B=2.$$

Perciò

$$\int f(x)\,dx = \int \Big(\frac{-1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+2}\Big)\,dx = -\arctan x + \int \frac{1}{\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)^2+1}dx$$
$$= -\arctan x + \sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\arctan x + \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + k, k \in \mathbb{R}.$$

b) L'integrando è continuo in $[0,+\infty[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale solo per $x \to +\infty$. Siccome l'integrando è positivo, usiamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1} = \log\Big(1+\frac{2}{x^\alpha}\Big) - \log\Big(1+\frac{1}{x^\alpha}\Big) = \frac{1}{x^\alpha} + o\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big)$$

per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.
c) Integrando per parti risulta

$$\int_0^c \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = x\log\frac{x^2+2}{x^2+1}\Big|_0^c - \int_0^c x\frac{x^2+1}{x^2+2}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$= c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} - \int_0^c \frac{-2x^2}{(x^2+2)(x^2+1)}\,dx = \quad \text{[tenendo conto del calcolo fatto in a)]}$$
$$= c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big).$$

Perciò

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left(c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)\right) = \pi(\sqrt{2}-1),$$

in quanto

$$\lim_{c\to+\infty} c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} = \lim_{c\to+\infty} c\left(\frac{1}{c^2} + o\Big(\frac{1}{c^2}\Big)\right) = 0.$$

Appello del 17.09.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x|-3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) $D = \mathbb{R}$, ovviamente e la funzione è pari. Si ha

$$f(x) \geq 0 \;\text{ se e solo se }\; |x| \geq \frac{3}{2} \text{ oppure } x = 0.$$

D'ora in poi studiamo f per $x \geq 0$.
ii) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\big(2x-3\big) = +\infty.$$

Per il calcolo dell'asintoto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\frac{2x-3}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \Big(2x\big(e^{-\frac{2}{x}}-1\big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\Big(-\frac{2}{x}+o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\right) = -7,$$

per cui la retta $y = 2x - 7$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
iii) Per $x > 0$ si possono applicare le regole di derivazione, dato che si ha $f(x) = e^{-\frac{2}{x}}(2x-3)$. Perciò

$$f'(x) = 2e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(2x-3) = \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3).$$

Si ha pertanto che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, cioè (per $x > 0$) se e solo se $x \geq 1$. Pertanto $x = 1$ è il punto di minimo assoluto, ed è un minimo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo stretto, in quanto $f(x) < 0 = f(0)$ per $0 < |x| < \frac{3}{2}$ (mostrato in (i)).
iv) La funzione è continua in $]0, +\infty[$ in quanto composizione di funzioni elementari. Per studiare la continuità in 0 bisogna calcolare

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}}(2x-3) = -3\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}} = 0 = f(0).$$

Pertanto f è continua anche in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si può calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3) = -3\lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2} = 0$$

per il noto confronto tra esponenziali e potenze. Pertanto f è derivabile anche in $x = 0$ (e la derivata è continua anche in $x = 0$).
v) Il grafico di f è in figura 13.

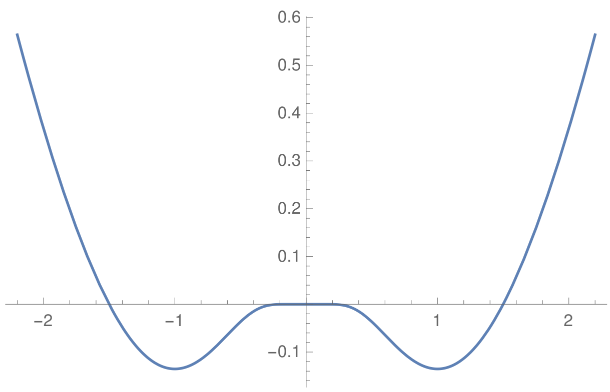


Figura 13: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Sia
$$P_\lambda(z) = \lambda - 4iz + 2iz^2 + z^3.$$
Determinarne $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -2i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione
$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$
esprimendone le soluzioni in forma algebrica.
Svolgimento. $P_\lambda(-2i) = \lambda - 8 - 8i + 8i$, da cui $P_\lambda(-2i) = 0$ se e solo se $\lambda = 8$. Il polinomio di cui trovare gli zeri è dunque $P_{\lambda_0}(z) = 8 - 4iz + 2iz^2 + z^3$. Siccome $z = -2i$ è uno zero di P, P è divisibile per $z + 2i$ e si ha, in particolare,
$$P_{\lambda_0}(z) = (z + 2i)(z^2 - 4i).$$
Le altre soluzioni dell'equazione $P_{\lambda_0}(z) = 0$ sono pertanto le due radici quadrate di $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, cioè sono
$$\pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}(1 + i).$$

Esercizio 3 Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$
Svolgimento. La serie è a termini positivi e si può quindi usare il criterio del confronto asintotico. Si ha
$$\log\big(n + \sin n\big) \sim \log n \text{ per } n \to \infty,$$
perché
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(n + \sin n\big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n}\Big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \frac{\sin n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}{\log n} = 1.$$
Inoltre
$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2} \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ per } n \to \infty.$$
La serie converge perciò se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$
Quest'ultima converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 2$. Infatti, se $\frac{\alpha}{2} \leq 1$, il termine generale della serie è $\geq \frac{1}{n}$ e quindi la serie diverge. Se invece $\frac{\alpha}{2} > 1$ e scelgo $1 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, allora, per $n \to \infty$,
$$\frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = o\Big(\frac{1}{n^\beta}\Big),$$
dal limite fondamentale
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\gamma} = 0 \text{ per ogni } \gamma > 0$$
e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ converge.

Esercizio 4 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

Svolgimento. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$x - \sinh x - x^\alpha = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha \sim \begin{cases} -x^\alpha & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{7}{6}x^3 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\frac{x^3}{6} & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{7}{3}} \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \sqrt[3]{x} \log x = 0.$$

Quindi,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 2 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 5 Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento. a) L'integrando $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2$ è positivo, per cui si può usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim 2x^{\frac{\alpha}{2}+2},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} + 2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -6$.
b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \arcsin 2x^2 \, dx = & \text{ (per parti) } \frac{x^2}{2} \arcsin 2x^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2} \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx \\ = & \frac{\pi}{8} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{1-4x^4}}{4} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Appello del 21.01.2019

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D =]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

Svolgimento.

i) Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-16|}{x+3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-3^-} \frac{|x^2-16|}{x+3} = -\infty$$

quindi con un cambio di variabile

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0, \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

In particolare f ha un asintoto orizzontale ($y = 0$) per $x \to -\infty$. Inoltre f può essere prolungata come funzione continua da sinistra in -3 ponendo $f(-3) = 0$.

ii) Calcoliamo, per $x \neq -4$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \frac{d}{dx} \frac{|x^2-16|}{x+3} = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-16)2x(x+3) - |x^2-16|}{(x+3)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \operatorname{sgn}(x^2-16) \frac{2x(x+3)-(x^2-16)}{(x+3)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \operatorname{sgn}(x^2-16) \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2}, \end{aligned}$$

dove “sgn” indica la funzione segno.

Osservando che $e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} > 0$ e $(x+3)^2 > 0$ per ogni $x \in D$, vogliamo valutare il segno di

$$(x^2+6x+16)\operatorname{sgn}(x^2-16)$$

Calcolando il discriminante di $x^2+6x+16$, $\Delta = 36-64 < 0$ si ottiene che $x^2+6x+16 > 0$ per ogni x. Inoltre

$$\operatorname{sgn}(x^2-16) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4 \text{ o } x > 4.$$

Poiché ci interessano solo i valori di $x \in D$, ovvero $x < -3$, otteniamo $\operatorname{sgn}(x^2-16) > 0$ per $x < -4$ e $\operatorname{sgn}(x^2-16) < 0$ per $-4 < x < -3$. Ne risulta

$$f'(x) > 0 \text{ (e quindi } f \text{ crescente) per } x < -4, \quad f'(x) < 0 \text{ (e quindi } f \text{ decrescente) per } x \in]-4,-3[,$$

da cui segue che -4 é un punto massimo assoluto e per il teorema di Fermat, non possono esservi altri punti di estremo.

Infine $x = -4$ è l'unico punto in cui f risulta non derivabile (è un punto angoloso) perché

$$\lim_{x\to-4^+} f'(x) = -8 = -\lim_{x\to-4^-} f'(x).$$

Il grafico di f è in figura 14.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{2x}-1-\sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

Svolgimento. Usando gli sviluppo di Taylor $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, $\sin y = y + o(y^2)$ con $y = 2x$ otteniamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2), \quad \sin 2x = 2x + o(x^2), \quad \text{per } x \to 0$$

e pertanto il numeratore può essere scritto come

$$e^{2x} - 1 - \sin 2x = 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

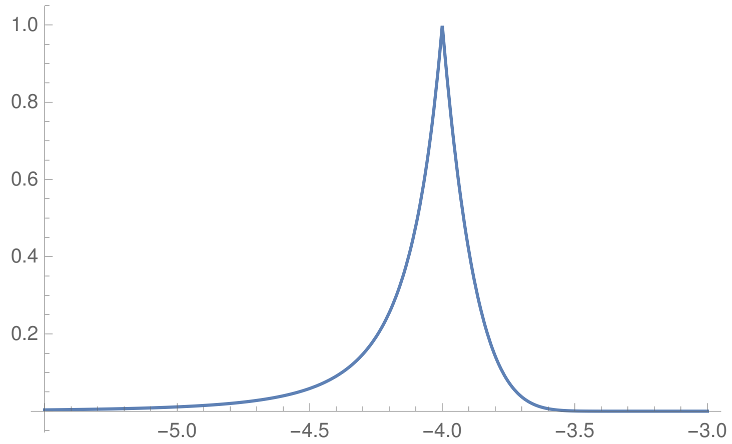


Figura 14: Il grafico di f (Tema 1).

Scrivendo $\sinh x = x + o(x)$ abbiamo $\sinh^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Inoltre, essendo $\frac{9}{2} > 2$, vale $x^{\frac{9}{2}} = o(x^2)$ per $x \to 0$. Ne segue

$$\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}} = x^2 + o(x^2).$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Vale

$$z = \frac{-1 - 2i + \sqrt{(1 + 2i)^2 - 4i}}{2i} = \frac{-1 - 2i + \sqrt{-3}}{2i},$$

dove $\sqrt{-3}$ denota le due radici complesse di -3, che sono $\pm i\sqrt{3}$ (mentre $\sqrt{3}$ denota la radice quadrata positiva di 3). Questo si può verificare scrivendo le radici nella forma $\rho e^{i\theta}$, richiedendo che

$$3 = 3e^{i0} = \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \rho^2 e^{2i\theta},$$

da cui $\rho = \sqrt{3}$ e $\theta = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo dunque che le due radici sono

$$z_\pm = \frac{-1 - 2i \pm i\sqrt{3}}{2i} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Esercizio 4
Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\, dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Integriamo per parti e otteniamo

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^2}dt = -\frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}dt$$

Per calcolare il secondo integrale usiamo il metodo dei fratti semplici: poniamo

$$\frac{1}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} = \frac{2A + At + Bt}{t(2+t)},$$

da cui $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. In conclusione

$$\int_1^2 \frac{1}{t(2+t)}dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2+t}dt = \frac{1}{2}\big(\log t - \log(2+t)\big)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

In conclusione

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^2}dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} = \log\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

ii) Il polinomio di Taylor è

$$T_F^{2,2}(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{F''(2)}{2}(x-2)^2,$$

pertanto devo calcolare

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x) = \frac{\log\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} \quad \Rightarrow \quad F'(2) = \frac{\log 2}{2},$$

e

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{2+x}x - \log(1+\frac{x}{2})}{x^2} \quad \Rightarrow \quad F''(2) = \frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}.$$

Ne segue

$$f(x) = \frac{\log 2}{2}(x-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}\right)(x-2)^2 + o(x-2)^2$$

per $x \to 2$.

iii) Osserviamo che per $\alpha \leq 0$ la funzione f è palesemente continua e limitata su $[0,1]$, per cui l'integrale esiste finito. Per $\alpha > 0$ dobbiamo valutare il comportamento asintotico di $f(t)$ per $t \to 0^+$, essendo comunque f continua e limitata su ogni intervallo $[\delta, 1]$ per ogni $0 < \delta < 1$. Abbiamo

$$f(t) = \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}} = \frac{\frac{t}{2} + o(t)}{t^{2\alpha}} \sim \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}, \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico vale dunque

$$\int_0^1 f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^\delta \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}dt \text{ converge per qualche } \delta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1.$$

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1+\sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Svolgimento. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{1+\sqrt{2n}}.$$

Per $|y| < 1$ la serie converge assolutamente. Questo può essere facilmente provato usando il criterio della radice, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|y|^n}{1+\sqrt{2n}} \right)^{\frac{1}{n}} = |y| < 1$$

oppure osservando che $n|y|^n \to 0$ per $|y| < 1$, quindi $|y|^n \leq \frac{1}{n}$ definitivamente per $n \to \infty$ e visto che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(1+\sqrt{2n})}$$

converge $\left(\frac{1}{n(1+\sqrt{2n})} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ possiamo concludere usando il teorema del confronto.

Per $|y| > 1$ il termine generale della serie diverge, quindi la serie non può convergere.

Per $y = 1$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Infine, per $y = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz, essendo il modulo del termine generale della serie decrescente a 0. Tuttavia, per il caso precedente, la serie non converge assolutamente.

Sostituendo $\log \alpha = y$ otteniamo che la serie originale converge assolutamente se e solo se $-1 < \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} < \alpha < e$, converge semplicemente se e solo se $-1 \leq \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} \leq \alpha < e$ e diverge in tutti gli altri casi, ovvero $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ e $\alpha \geq e$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Da $f''(x) = e^x - 6ax$, si ha che f è convessa se e solo se

(A) $f''(x) = e^x - 6ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Ora, se $a < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - 66ax \geq 0 = -\infty$$

e dunque **(A)** non è verificato.

Se $a = 0$ invece **(A)** è verificato.

Se $a > 0$ studiamo la funzione $g(x) := f''(x) = e^x - 6ax$. Si ha $g'(x) = e^x - 6a \geq 0 \iff x \geq \log(6a)$. Dunque g ha un minimo assoluto in $x = \log(6a)$. Perciò **(A)** è verificata se e solo se $g(\log(6a)) = 6a - 6a\log(6a) \geq 0$, cioè se e solo se $1 - 1\log(6a) \geq 0$, quindi se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

In conclusione f è convessa se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Appello del 11.02.2019

TEMA 1

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$
(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Svolgimento.
(i) Con il cambio di variabile $y = x + 3$ otteniamo
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} |y \log y| = 0.$$
Questo in particolare implica che f si può prolungare per continuità in $x = -3$ ponendo $f(-3) = 0$.

Evidentemente vale
$$\lim_{x\to\infty} |x+3| = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$
D'altronde
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+3|}{x} |\log(x+3)| = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty,$$
quindi la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to \infty$.

(ii) Osserviamo che nel dominio D la funzione $(x+3)\log(x+3)$ si annulla solo per $x + 3 = 1$, ovvero $x = -2$. Dunque in $D \setminus \{-2\}$ la funzione f è derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili, e si calcola
$$f'(x) = \operatorname{sgn}((x+3)\log(x+3))((x+3)\log(x+3))' = \operatorname{sgn}((x+3)\log(x+3))(\log(x+3)+1),$$
ovvero
$$f'(x) = -(\log(x+3)+1) \text{ per } -3 < x < -2$$
$$f'(x) = \log(x+3) + 1 \text{ per } x > -2.$$
Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ per ogni $x > -2$, quindi f è strettamente monotona crescente per $x > -2$.

Per $-3 < x < -2$ vale
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x+3) < -1 \Leftrightarrow x + 3 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < -3 + \frac{1}{e}.$$
Con analoghi calcoli si ha dunque che
$$f'(x) > 0 \text{ per } -3 < x < -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ per } -3 + \frac{1}{e} < x < -2.$$
Ne segue che f è strettamente monotona crescente per $-3 < x < -3 + \frac{1}{e}$ e strettamente monotona decrescente per $-3 + \frac{1}{e} < x < -2$.

Quindi $-3 + \frac{1}{e}$ è un punto di massimo locale, mentre -2 è un punto di minimo assoluto (infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(-2) = 0$).

Si può facilmente osservare che
$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x\to -2^+} f'(x) = 1$$

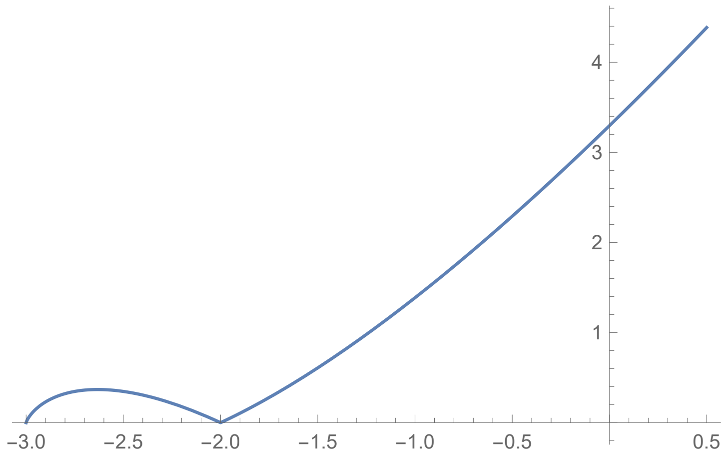


Figura 15: Il grafico di f (Tema 1).

e questo (per un teorema eventualmente visto a lezione) implica che f non è derivabile per $x = -2$.

Il grafico di f è in figura 23.

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

Svolgimento. Osserviamo che $|\sin n| \leq 1$ per ogni n, e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin n| \left| \frac{1+n^2}{n^4} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}.$$

Poiché abbiamo

$$\frac{1+n^2}{n^4} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty,$$

o (equivalentemente) scrivendo

$$\frac{1+n^2}{n^4} = \frac{n^2(1+o(1/n^2))}{n^4} = \frac{1+o(1)}{n^2},$$

per il criterio di convergenza asintotico deduciamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}$$

converge, e quindi per il principio del confronto la serie originale converge assolutamente.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left(\operatorname{Re}(\bar{z}+i)-1\right)^2}{4} + \frac{\left(\operatorname{Im}(\bar{z}+i)-1\right)^2}{4} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Scriviamo in forma algebrica $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Dunque

$$\operatorname{Re}(\bar{z} + i) = \operatorname{Re}(x - iy + i) = x, \quad \operatorname{Im}(\bar{z} + i) = \operatorname{Im}(x - iy + i) = 1 - y.$$

La disequazione può essere pertanto riscritta come

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left(x-1\right)^2}{4} + \frac{\left(-y\right)^2}{4} \leq 1,$$

ovvero

$$2 \leq \left(x-1\right)^2 + y^2 \leq 4.$$

Ricordando che $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ è l'equazione di una circonferenza di raggio r centrata in (x_0, y_0), otteniamo che la disequazione determina la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\sqrt{2}$ e 2 e centrate in $(1, 0)$.

Il disegno delle soluzioni è in figura 16.

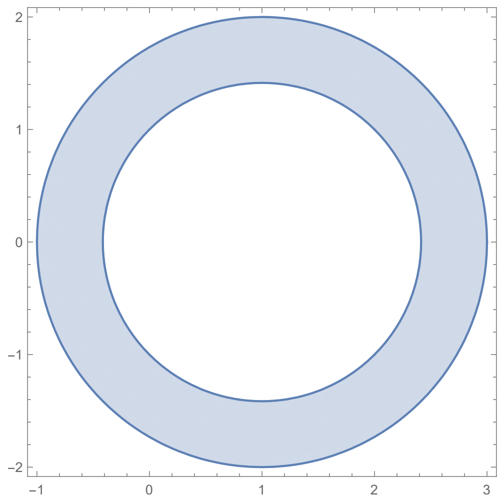


Figura 16: La soluzione dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx.$$

Svolgimento. Usando il cambio di variabile $\sqrt{2x} = y$, da cui $x = \frac{y^2}{2}$ e $dx = ydy$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} y\,dy.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} y\,dy = \left[-e^{-y} y\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 0 + \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Esercizio 5. Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - 1}{x^{\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che la funzione f_α è continua per $0 < x < +\infty$. Consideriamo
$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx. \tag{2}$$
Essendo $e^{-\sqrt{2x}} = 1 - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, abbiamo
$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{2x} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-1}} = \frac{-\sqrt{2} + o(1)}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}} \sim \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$
quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale in (2) converge se e solo se
$$\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}\,dx$$
converge, ovvero (portando $-\sqrt{2}$ fuori dall'integrale) se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, quindi se e solo se $\alpha < \frac{5}{2}$.

Studiamo ora
$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx. \tag{3}$$
Poichè $e^{-\sqrt{2x}} \to 0$ per $x \to \infty$ abbiamo
$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{\alpha-1}}$$
e per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale in (3) converge se e solo se
$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^{\alpha-1}}\,dx.$$
converge, ovvero se e solo se $\alpha - 1 > 1$, quindi se e solo se $\alpha > 2$.

Quindi l'integrale originale converge se e solo se $2 < \alpha < \frac{5}{2}$.

(b) Scriviamo
$$G(y) = \int_1^y f_2(t)\,dt = \int_1^y \frac{e^{-\sqrt{2t}} - 1}{t}\,dt.$$
Per il teorema fondamentale del calcolo vale
$$G'(y) = f_2(y) = \frac{e^{-\sqrt{2y}} - 1}{y}.$$
Abbiamo $F(x) = G(\cos x)$. Per la regola della catena, quindi
$$F'(\pi/3) = G'(\cos(\pi/3))(-\sin(\pi/3)) = -\frac{\sqrt{3}}{2}G'(1/2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1}-1}{1/2} = -\sqrt{3}(1 - 1/e).$$

Esercizio 6 Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Ricordiamo che $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, ed $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$, dunque possiamo espandere il numeratore come

$$\begin{aligned}
\text{Num} &= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \cosh\left(2x + o(x)\right) \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + \frac{(2x + o(x))^2}{2} + o((x + o(x))^2)\right] \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + 2x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \frac{(\alpha^2 - 4)x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha^2 - 4}{2} + o(1)}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{per } 0 < \alpha < 2 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 2. \end{cases}$$

Il caso $\alpha = 2$ risulta più difficile perché non è possibile calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{o(1)}{x}$. Dobbiamo pertanto ottenere un'espansione del numeratore all'ordine successivo (il terzo). Questa volta scriviamo $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$, ed $e^y = 1 + y + y^2 + o(y^2)$ per $y \to 0$. In particolare

$$\begin{aligned}
\cosh(e^{2x} - 1) &= \cosh(2x + 2x^2 + o(x)^2) \\
&= 1 + \frac{(2x + 2x^2 + o(x)^2)^2}{2} + o((2x + 2x^2 + o(x)^2)^3) \\
&= 1 + \frac{4x^2 + 8x^3 + o(x^3)}{2} + o(x^3) \\
&= 1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Per $\alpha = 2$ abbiamo $\cosh(\alpha x) = 1 + 2x^2 + o(x^3)$, quindi

$$\text{Num} = 1 + 2x^2 + o(x^3) - (1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)) = -4x^3 + o(x^3)$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(2x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^3 + o(x^3)}{x^3} = -4.$$

Esercizio facoltativo. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

Svolgimento. Essendo l'integranda continua in un intorno di $+\infty$ (in realtà in tutto $\mathbb{R}$), per il teorema del valor medio esiste $t_x \in [x, x + e^{-x}]$ tale che

$$\int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt = e^{-x}\, e^{t_x} \arctan t_x$$

e quindi, siccome l'integrando è crescente,

$$e^{-x} e^x \arctan x \le e^{-x}\, e^{t_x} \arctan t_x \le e^{-x} e^{x+e^{-x}} \arctan\left(x + e^{-x}\right),$$

cioè

$$\arctan x \le \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt \le e^{e^{-x}} \frac{\pi}{2}.$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} e^{e^{-x}} = 1,$$

applicando il teorema dei Carabinieri si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Appello del 8.07.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia

$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$

a) Determinare il dominio D di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità per continuità di f in $x=0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento (a) Essendo il dominio di e^x tutto $\mathbb{R}$, ed il dominio di $\log x$ tutti gli $x>0$, il dominio di f è determinato dalle due condizioni:

$$x > 0, \quad 2 + \log x \neq 0.$$

La seconda relazione equivale a $x \neq e^{-2}$, quindi

$$D = \{x > 0 : x \neq e^{-2}\}.$$

Con tre cambi di variabile si ottiene

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^{\frac{2}{|2+y|}} = \lim_{s\to+\infty} e^{\frac{2}{s}} = \lim_{t\to0^+} e^t = 1.$$

Dunque f può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0)=1$.

Inoltre

$$\lim_{x\to e^{-2}} f(x) = \lim_{y\to0^+} e^{\frac{2}{y}} = \lim_{s\to+\infty} e^s = +\infty.$$

Dunque f non può essere estesa per continuità in e^{-2}.
(b) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio, essendo composizione di funzioni derivabili (la funzione $|\cdot|$ non è derivabile solo in 0, ma $2+\log x$ si annulla solo in e^{-2}, che non appartiene al dominio.) La derivata, calcolata con la regola della catena è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}} \left(-\frac{2}{|2+\log x|^2} \right) \frac{2+\log x}{|2+\log x|} \frac{1}{x} = -\frac{2e^{\frac{2}{|2+\log x|}}}{x|2+\log x|^3}(2+\log x).$$

Si noti che la frazione del membro destro è sempre positiva nel dominio D, da cui:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 + \log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2},$$

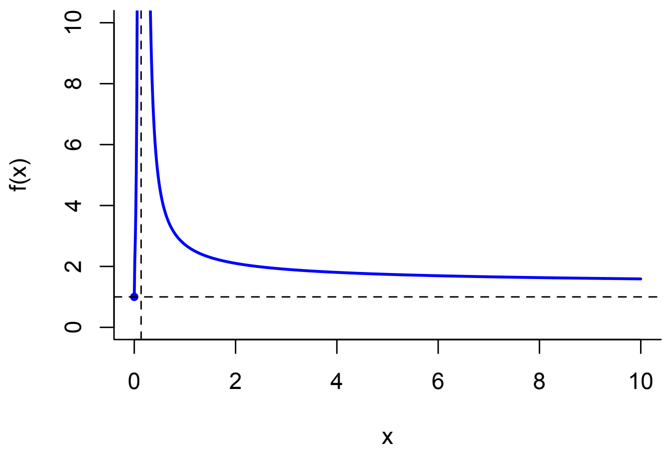


Figura 17: Il grafico di f (Tema 1).

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 + \log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2},$$

ed $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$. In particolar modo f non ha punti critici.

Il grafico di f è in figura 17.

Esercizio 2 [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - 2\sqrt{n}}.$$

Svolgimento Per $n \to \infty$ abbiamo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ e $1 - 2\sqrt{n} \sim -2\sqrt{n}$. Pertanto il termine generale della serie è asintotico a $\frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\frac{3}{2} > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

converge, e per il principio di convergenza asintotico, anche la prima serie converge.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|iz^2|}$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento Osserviamo che l'equazione è ben definita solo per $z \neq 0$. Pertanto, assumendo $z \neq 0$ possiamo semplificare moltiplicando a sinistra per $\frac{z}{z}$, ottenendo

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{|z|^2} = -\frac{(\operatorname{Im} z)^2}{|z|^2},$$

dove abbiamo anche usato che $|iz^2| = |z^2| = |z|^2$. Moltiplicando per $|z|^2$ otteniamo

$$z^2 = -\text{Im z}^2.$$

Scrivendo $z = x + iy$ si ottiene $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $-(\text{Im}z)^2 = -y^2$, ed otteniamo dunque

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -y^2. \tag{4}$$

Quest'equazione può essere soddisfatta solo se $2ixy = 0$. Questo implica $xy = 0$, ovvero $x = 0$ o $y = 0$ (non entrambi perché $z \neq 0$). Nel caso $x = 0$, $y \neq 0$, abbiamo una soluzione di (4). Nel caso $y = 0$ e $x \neq 0$ invece (4) non è soddisfatta. Quindi le soluzioni sono

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = 0, y \neq 0\},$$

ovvero l'asse immaginario privato dell'origine, come si può vedere in figura 18.

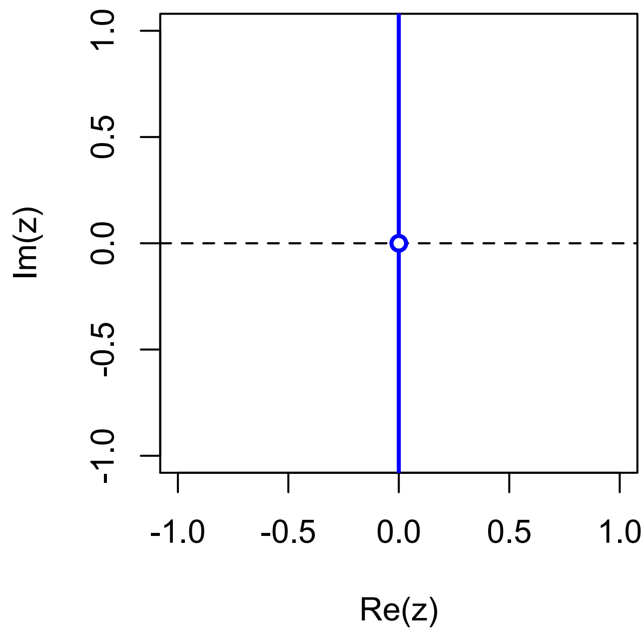


Figura 18: L'insieme delle soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4 [5+3+4 punti] a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x \log(1 + 2e^x).$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \log(1 + 2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\, dt.$$

Svolgimento a) Con la sostituzione $y = e^x$, $dy = e^x dx$ ed un'integrazione per parti si ottiene

$$\int e^x \log(1 + 2e^x)dx = \int \log(1 + 2y)dy = y \log(1 + 2y) - \int \frac{2y}{1 + 2y} dy.$$

Ora, per ridurre il numeratore dell'integrando a destra scriviamo

$$\frac{2y}{1 + 2y} = 1 - \frac{1}{1 + 2y},$$

Dunque

$$\int \frac{2y}{1 + 2y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{1 + 2y}\right) dy = y - \frac{\log(1 + 2y)}{2}.$$

Aggiungendo ai termini precedenti e sostituendo $y = e^x$ si ottiene

$$\int e^x \log(1 + 2e^x)dx = e^x \log(1 + 2e^x) - e^x + \frac{\log(1 + 2e^x)}{2} + c.$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f_α è continua in $[0, +\infty)$, quindi per studiare la convergenza del suo integrale, studiamo il comportamento di f_α per $x \to \infty$. Per $\alpha \geq 0$ abbiamo che

$$\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$

per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.

Per $\alpha < 0$, abbiamo $f_\alpha(x) = O(x^{-2})$ per $x \to \infty$, e per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge.

c) Abbiamo

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x - 1) + \frac{F''(1)}{2}(x - 1)^2 + o(|x - 1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

Abbiamo

$$F(1) = 0, \quad F'(1) = f_0(1) = \log(1 + 2e), \quad f_0'(x) = \frac{2e^x}{1 + 2e^x}, \quad f_0'(1) = \frac{2e}{1 + 2e},$$

quindi

$$F(x) = \log(1 + 2e)(x - 1) + \frac{e}{1 + 2e}(x - 1)^2 + o(|x - 1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[8]{x^2 - 2} - \sqrt[4]{x + 1}\right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Usiamo l'espansione $(1 + y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ per $y \to 0$ e scriviamo

$$\sqrt[8]{x^2 - 2} = (x^2 - 2)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad \text{per } x \to \infty,$$

$$\sqrt[4]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \text{per } x \to \infty.$$

Sottraendo otteniamo

$$x^\alpha\left(\sqrt[8]{x^2-2}-\sqrt[4]{x+1}\right) = x^\alpha \cdot x^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{x^{\alpha-\frac{3}{4}}}{4}(1+o(1)) \quad \text{per } x \to \infty.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(\sqrt[8]{x^2-2}-\sqrt[4]{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^{\alpha-\frac{3}{4}}}{4}(1+o(1))\right) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \text{per } \alpha = \frac{3}{4} \\ -\infty & \text{per } \alpha > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Appello del 17.09.2019

Tema 1

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = \log\left|e^{3x}-2\right|.$$

a) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |e^{3x}-2| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ e^{3x}-2 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\log 2}{3}\}$. Segno:

$$f(x) \geqslant 0 \iff |e^{3x}-2| \geqslant 1 \iff e^{3x}-2 \leqslant -1 \text{ e } e^{3x}-2 \geqslant 1 \iff x \leqslant 0, \text{ e } x \geqslant \frac{\log 3}{3}.$$

Dove vale $=$ si hanno anche gli zeri di f. Limiti e asintoti: dobbiamo studiare la funzione per $x \longrightarrow \pm\infty, \frac{\log 2}{3}$. Facilmente, $f(-\infty) = \log 2$, quindi $y = \log 2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. A $+\infty$ facilmente $f(+\infty) = +\infty$. Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo $y = mx+q$. Per m abbiamo che

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{3x}-2)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(e^{3x}\cdot 1_x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+0_x}{x} = 3.$$

Per q abbiamo

$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\log(e^{3x}-2)-\log e^{3x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log\frac{e^{3x}-2}{e^{3x}} = \log 1 = 0.$$

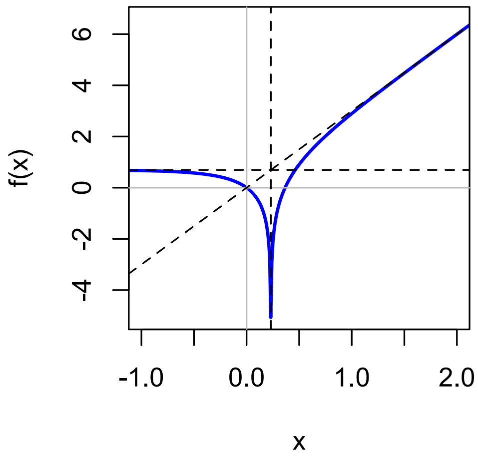
Conclusione: $y = 3x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Infine,

$$\lim_{x\to\frac{\log 2}{3}}\log|e^{3x}-2| = \log 0+ = -\infty,$$

da cui $x = \frac{\log 2}{3}$ è asintoto verticale.
b) Chiaramente f è continua sul proprio dominio essendo composizione di funzioni continue ove definite. È anche derivabile poiché l'unico punto in cui non si può applicare la regola della catena è x t.c. $e^{3x}-2 = 0$, cioè $x = \frac{\log 2}{3}$, che però non appartiene al dominio di f. La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{|e^{3x}-2|}\operatorname{sgn}(e^{3x}-2)\cdot 3e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}-2}.$$

Da questa segue che
$$f'(x) \geqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad e^{3x} - 2 > 0, \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{\log 2}{3}.$$
Si conclude che $f \searrow$ su $]-\infty, \frac{\log 2}{3}[$ mentre $f \nearrow$ su $]\frac{\log 2}{3}, +\infty[$. Non ci sono, di conseguenza né minimi né massimi (di qualsiasi natura).
c) Grafico.



Esercizio 2. Si calcoli il limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x-2x^2} - 1 - x}{\sinh x^2 + x^{7/3} \log x}.$$
Svolgimento. Ricordato che $\lim_{x \to 0+} x^\alpha \log x = 0$, si vede facilmente che il limite si presenta come una forma del tipo 0/0. Studiamo l'ordine di infinitesimo di numeratore e denominatore. Ricordato che
$$e^t = 1 + t + o(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2),$$
abbiamo
$$N = 1 + (x - 2x^2) + o(x - x^2) - 1 - x = -2x^2 + o(x) = o(x),$$
insufficiente per un comportamento preciso,
$$N = 1 + (x - 2x^2) + \frac{(x - 2x^2)^2}{2} + o((x - 2x^2)^2) - 1 - x = -2x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{3}{2}x^2 \text{ per } x \to 0^+.$$
Per il denominatore è sufficiente ricordare che $\sinh t = t + o(t)$ per cui
$$D = x^2 + o(x^2) + x^{7/3} \log x = x^2 + o(x^2) \text{ per } x \to 0^+,$$
essendo $x^{7/3} \log x = o(x^2)$ poiché $\frac{x^{7/3} \log x}{x^2} = x^{1/3} \log x \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0+$. Dunque
$$\frac{N}{D} \sim \frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^2} \longrightarrow -\frac{3}{2}.$$

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re}\left(\frac{3}{z}\right)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano complesso.

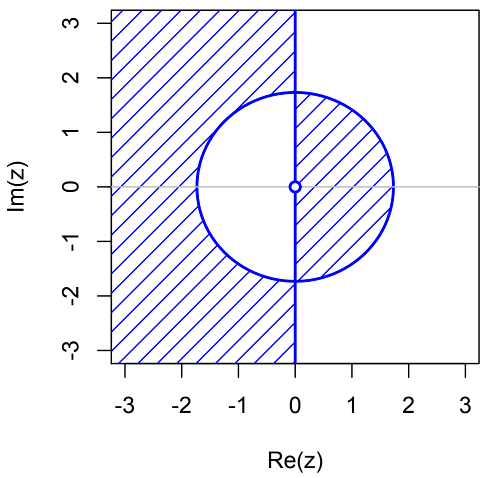
Svolgimento. Sia $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora $\operatorname{Re} z = x$ mentre essendo $\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$,

$$\operatorname{Re}\frac{3}{z} = \frac{3x}{x^2+y^2}.$$

Pertanto, $z \neq 0$ verifica la disequazione se e solo se

$$x \leqslant \frac{3x}{x^2+y^2} \iff \begin{cases} x > 0, \quad 1 \leqslant \frac{3}{x^2+y^2}, & \iff \quad x^2+y^2 \leq 3, \\ x = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, & \\ x < 0, \quad 1 \geqslant \frac{3}{x^2+y^2}, & \iff \quad x^2+y^2 \geq 3. \end{cases}$$

Figura:



Esercizio 4. a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan\frac{x}{2} = u).$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. a) Seguendo il suggerimento $u = \tan x/2$, $x = 2\arctan u$ da cui $dx = \frac{2}{1+u^2}$, pertanto

$$\begin{aligned}\int \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^3\, dx &= \int \tfrac{2u^3}{1+u^2}\, du = 2\int \tfrac{u(u^2+1-1)}{1+u^2}\, du = \int 2u - \tfrac{2u}{1+u^2}\, du = u^2 - \log(1+u^2)\\ &= \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^2 - \log\left(1 + \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^2\right).\end{aligned}$$

b) Sia $f(x) = \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}}$. Certamente $f \in C(]0, \frac{\pi}{6}])$ per ogni α ed è continua anche in $x = 0$ (quindi integrabile sicuramente) per $\alpha + 2 \leqslant 0$, cioè per $\alpha \leqslant -2$. Per $\alpha > -2$ abbiamo un integrale generalizzato in $x = 0$. Ricordato che $\tan x = x + o(x) = x1_x$ per $x \longrightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}} \text{ per } x \to 0^+,$$

integrabile in 0 se e solo se $\alpha + 1 < 1$, cioè $\alpha < 0$ per confronto asintotico. Morale: l'integrale generalizzato esiste finito se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 5. (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 4}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni α) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. i) Osserviamo che

$$a_n = \log\frac{n+1}{\sqrt{n^2+\alpha n+4}} \sim \log\frac{n}{n} \longrightarrow 0.$$

Per avere l'ordine di infinitesimo occorre essere più precisi. Notiamo che, fattorizzando n e usando le proprietà dei logaritmi

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{4}{n^2}\right).$$

Ricordato che $\log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,

$$\begin{aligned}a_n &= \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{4}{n^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{4}{n^2}\right)^2}{2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \tfrac{2-\alpha}{2n} - \tfrac{5-\alpha^2}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

In particolare, se $\alpha = 2$ si ottiene $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
ii) Per quanto visto al punto i),

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{2-\alpha}{2n} \equiv \frac{C}{n}, & \alpha \neq 2,\\ -\frac{1}{2n^2} \equiv \frac{C}{n^2}, & \alpha = 2,\end{cases}$$

da cui si conclude che $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\alpha = 2$ in virtù del criterio del confronto asintotico.

Appello del 20.01.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(2\arctan(|x|^3)\right)$$

i) determinarne il dominio naturale D, il segno, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; <u>non</u> è richiesto lo studio della derivata seconda.

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D =]-\infty, +\infty[$. Evidentemente f è pari, quindi basta limitarsi allo studio su $[0, +\infty[$. Poiché $2\arctan|x|^3 \in [0, \pi[$, f è sempre positiva ed inoltre $f = 0$ sse $x = 0$. Limiti: c'è un solo limite interessante, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sin\pi = 0$, da cui la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$.

ii) Essendo f composizione di funzioni derivabili, eccetto per $x = 0$, risulta

$$f'(x) = \cos\left(2\arctan|x|^3\right)\frac{6x^2 \mathrm{sgn}\, x}{1+x^6},\ \forall x \neq 0.$$

Per $x = 0$ chiaramente f è continua e siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

per il test di derivabilità si evince che $\exists f'(0) = 0$. Per la monotonia, studiamo il segno di f': per $x > 0$,

$$f'(x) \geqslant 0, \iff \cos\left(2\arctan x^3\right) \geqslant 0, \iff 2\arctan x^3 \leqslant \frac{\pi}{2}, \iff \arctan x^3 \leqslant \frac{\pi}{4}, \iff x^3 \leqslant 1,$$

cioè per $x \leqslant 1$. Dunque f è crescente su $[0, 1]$ e decrescente su $[1, +\infty[$. Si deduce facilmente la monotonia su D e che $x = 0$ è punto di minimo globale mentre $x = \pm 1$ sono massimi globali.

Esercizio 2 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\sin x\right)^{x^a}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$, usando la forma "exp{log . . . }".

Svolgimento. Per $x \longrightarrow 0+$, $1 + \sin x \longrightarrow 1$ mentre

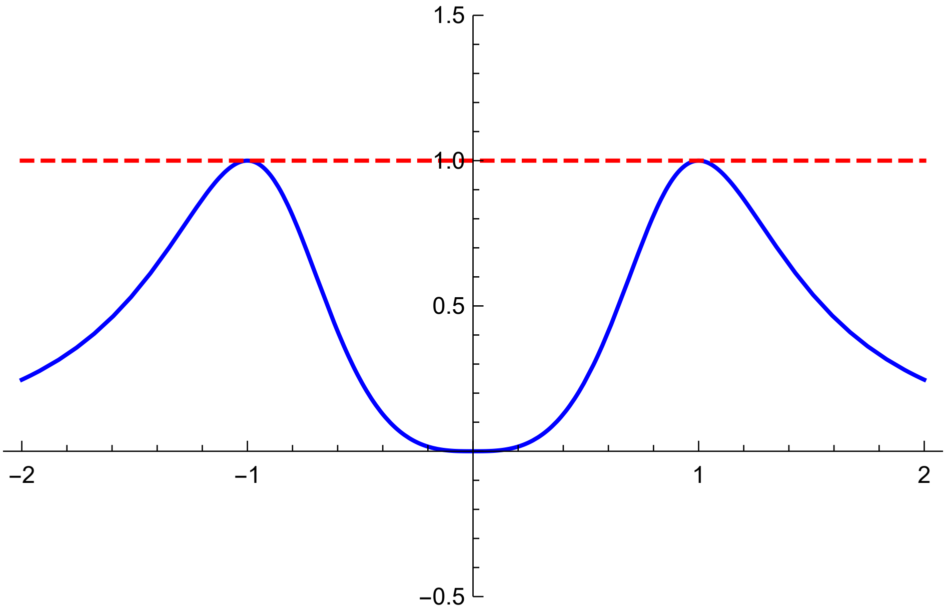
$$x^a \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{se } a > 0, \\ 1, & \text{se } a = 0, \\ +\infty, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Poiché $1^0 = 1$ e $1^1 = 1$ si deduce che il limite vale 1 per ogni $a \geqslant 0$. Per $a < 0$, $1^{+\infty}$ è forma indeterminata. Poiché

$$(1+\sin x)^{x^a} = e^{x^a \log(1+\sin x)},$$

ricordato che $\log(1 + t) = t1_t$ e che $\sin x = x1_x$ abbiamo

$$(1+\sin x)^{x^a} = e^{x^a \sin x \cdot 1_x} = e^{x^{a+1} 1_x} \longrightarrow \begin{cases} e^0 = 1, & \text{se } -1 < a < 0, \\ e^1 = e, & \text{se } a = -1, \\ e^{+\infty} = +\infty, & \text{se } a < -1. \end{cases}$$



Esercizio 3 [4 punti] Trovare gli zeri in $\mathbb{C}$ di

$$(z^3+5)(z^2+z+1)=0.$$

Svolgimento. Chiaramente

$$(z^3+5)(z^2+z+1)=0, \quad \Longleftrightarrow \quad z^3=-5, \ \vee \ z^2+z+1=0.$$

Nel primo caso, si tratta di calcolare le radici terze di -5. Premesso che $-5=5u(\pi)$ ($u(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$), per la formula di De Moivre, $z=\rho u(\theta)$ è t.c.

$$z^3=-5, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^3=5, \\ \theta=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}, \ k=0,1,2, \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad z=\sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \ -\sqrt[3]{5}, \ \sqrt[3]{5}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nel secondo caso,

$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha\in\mathbb{R}$ fissato e

$$f_\alpha(t):=\frac{e^{2t}+2e^t}{(e^t-1)^\alpha}.$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha=1$.

ii) Determinare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Abbiamo che

$$\int \frac{e^{2t}+2e^t}{e^t-1}\,dt \overset{u=e^t,\ t=\log u,\ dt=du/u}{=} \int \frac{u^2+2u}{(u-1)}\frac{du}{u} = \int \frac{u+2}{u-1}\,du = \int \left(1+\frac{3}{u-1}\right)\,du$$

$$= u+3\log|u-1| = e^t+3\log|e^t-1|.$$

ii) Considerato che $f_\alpha \in C(]0,1])$, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(t)\ dt$ è generalizzato in 0. Essendo $f_\alpha \geqslant 0$ su $]0,1]$, possiamo applicare il test del confronto asintotico per stabilire la convergenza dell'integrale. Notiamo che

$$f_\alpha(t) = \frac{3_t}{(e^t-1)^\alpha} = \frac{3_t}{(t1_t)^\alpha} \sim_{0+} \frac{3}{t^\alpha},$$

per cui esiste $\int_0^1 f_\alpha$ sse esiste $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ dt$, sse $\alpha < 1$ come ben noto.

Esercizio 5 [6 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3\sin x)^n n}{n^2+\sqrt{n}}$$

al variare di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_n |a_n| = \sum_n \frac{n3^n|\sin x|^n}{n^2+\sqrt{n}}.$$

A tal fine, applichiamo il test della radice: essendo

$$|a_n|^{1/n} = \frac{n^{1/n}3|\sin x|}{n^{2/n}1_n} \longrightarrow 3|\sin x|,\ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2],$$

(ricordiamo che $n^{1/n} \longrightarrow 1$) abbiamo che:

- se $3|\sin x| < 1$ (cioè $|\sin x| < \frac{1}{3}$ ovvero, essendo $x \in [-\pi/2,\pi/2]$, sse $x \in]-\arcsin 1/3, \arcsin 1/3[$), la serie converge assolutamente (quindi anche semplicemente);
- se $3|\sin x| > 1$ (cioè per $[-\pi/2,\pi/2]\backslash[-\arcsin 1/3, \arcsin 1/3]$), la serie diverge assolutamente e poiché il test dice in questo caso che $|a_n| \longrightarrow +\infty$, la condizione necessaria di convergenza non è verificata, per cui la serie non converge nemmeno semplicemente.

Rimangono i casi $\sin x = \pm\frac{1}{3}$, nei quali il test precedente fallisce. Per $\sin x = 1/3$, la serie diventa

$$\sum_n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \sim \sum_n \frac{1}{n},\ \text{divergente.}$$

Essendo a termini di segno costante, convergenza semplice e assoluta coincidono (quindi non c'è alcun tipo di convergenza). Infine, per $\sin x = -1/3$,

$$\sum_n (-1)^n \frac{n}{n^2+\sqrt{n}},$$

che è una serie a termini di segno alternato. La convergenza assoluta ritorna al caso precedente (quindi è esclusa). Per la convergenza semplice possiamo applicare il test di Leibniz purché

$$\frac{n}{n^2+\sqrt{n}} \searrow 0.$$

La convergenza a 0 è evidente. Per la monotonia possiamo procedere direttamente oppure introdurre la funzione ausiliaria $f(x) := \frac{x}{x^2+\sqrt{x}}$ ed osservare che

$$f'(x) = \frac{x^2+\sqrt{x} - x(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x^2+\sqrt{x})^2} = \frac{-x^2+\frac{\sqrt{x}}{2}}{(x^2+\sqrt{x})^2}.$$

Siccome $f' \leqslant 0$ sse $-x^2 + \sqrt{x}/2 \leqslant 0$ ovvero $x^{3/2} \geqslant \frac{1}{2}$, in particolare per $n \geqslant 1$ si ha $f(n) \searrow$, da cui la conclusione: la serie converge semplicemente (ma non assolutamente) per il test di Leibniz.

Esercizio facoltativo Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Svolgimento. Dall'ipotesi segue che $(n+1)a_{n+1} \geqslant na_n$, cioé (na_n) è crescente: allora $na_n \geqslant a_1 > 0$, da cui $a_n \geqslant \frac{a_1}{n}$ per ogni $n \geqslant 1$. Ma allora, la serie diverge per confronto con la serie armonica.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Appello del 10.02.2020

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \exp\left\{\left|\frac{x}{x+1}\right|\right\}.$$

i) Determinarne il dominio naturale D, i limiti agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

iii) abbozzarne il grafico qualitativo.

Svolgimento. i) Chiaramente $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{t\to 1} e^t = e, \quad \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty.$$

Perciò, f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = e$ per $x \to \pm\infty$, e un asintoto verticale di equazione $x = -1$ per $x \to -1$.

ii) f è composta da funzioni derivabili tranne dove il modulo si annulla, cioè f è sicuramente derivabile in ogni $x \in D \setminus \{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$. Il punto $x = 0$ viene studiato a parte. Distinguiamo tra il caso in cui $\frac{x}{x+1} > 0$, cioè $x > 0$ oppure $x < -1$, e il caso in cui $\frac{x}{x+1} < 0$, cioè $-1 < x < 0$.

- se $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$f(x) = \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{(x+1)^2}\exp\left\{\frac{x}{x+1}\right\},$$

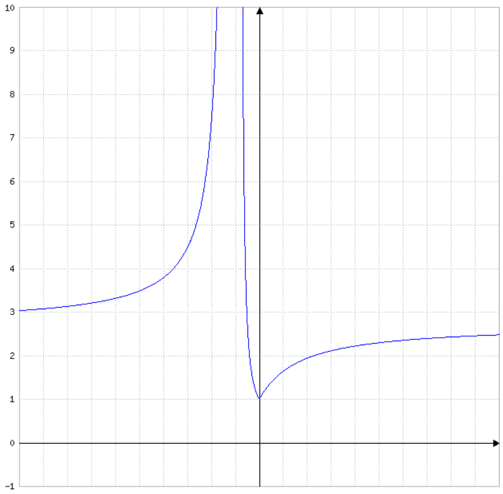
  che è strettamente positiva, perciò f è crescente su $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

- Se $x \in]-1, 0[$ si ha

$$f(x) = \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\}$$

$$f'(x) = \exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\} \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2}\exp\left\{-\frac{x}{x+1}\right\},$$

  che è strettamente negativa, perciò f è decrescente su $]-1, 0[$.



h

Si vede che $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1e^0 = 1$, mentre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1e^0 = -1$. Perciò f non è derivabile in $x = 0$, che è un punto angoloso. Essendo D un'unione di intervalli aperti, f può avere estremi locali solo dove la derivata si annulla e in punti di non derivabilità. Come osservato sopra, $f'(x) \neq 0$, e l'unico estremo si trova in $x = 0$, dove f ha il suo minimo assoluto con $f(0) = 1$.

iii) Grafico:

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \frac{k!}{k^k}.$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi. Applichiamo il criterio del rapporto asintotico. Si ha

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{3^k k!} = \frac{3(k+1)k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{3}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{3}{e} \text{ per } k \to \infty.$$

Essendo $\frac{3}{e} > 1$, la serie diverge per il criterio del rapporto asintotico.

Esercizio 3 [5 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ nella forma preferita (algebrica, esponenziale, trigonometrica):

$$z^3 = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i}.$$

Svolgimento. Essendo $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = e^{\frac{5\pi}{4} i}$, l'equazione da risolvere diventa

$$z^3 = \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{4} i}} = e^{-\frac{5\pi}{4} i} = e^{\frac{3\pi}{4} i}.$$

Per il teorema di De Moivre le soluzioni sono

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4} i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i, \quad z_1 = e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}) i} = e^{\frac{11\pi}{12} i} = e^{-\frac{\pi}{12} i}, \quad z_2 = e^{(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}) i} = e^{\frac{19\pi}{12} i} = e^{-\frac{5\pi}{12} i}$$

Applicando le formule di bisezione, si ha

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

da cui anche

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}},$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}},$$

cosicché

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}i \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}i.$$

Esercizio 4 [4+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f_\alpha(t) := \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha} \ .$$

i) Calcolare una primitiva di f_α con $\alpha = 3$.

ii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)\, dt$.

Svolgimento. i) Con la sostituzione $y = -2/t$ si ha $t = -2/y$, $dt = \frac{2}{y^2}dy$, e quindi

$$\int f_3(t)dt = \int \frac{e^{-2/t}}{3t^3} = \int \frac{e^y}{3}\frac{-y^3}{8}\frac{2}{y^2}dy = -\frac{1}{12}\int ye^y dy.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int f_3(t)dt = -\frac{1}{12}\int ye^y dy = -\frac{1}{12}\left(ye^y - \int e^y dy\right) = \frac{1}{12}(1-y)e^y = \frac{1}{12}\left(1+\frac{2}{t}\right)e^{-2/t}.$$

ii) f_α è continua su $(0,\infty)$. Per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha (per la gerarchia degli infiniti) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2/t}}{3t^\alpha} = 0$. Quindi, la funzione f_α può essere prolungata per continuità in $t = 0$, per cui è sempre integrabile in $[0, c]$, per qualsiasi $c > 0$. Per $t \to +\infty$, da $\frac{2}{t} \to 0$ si ottiene $e^{-2/t} \sim 1$ per cui

$$f_\alpha(t) \sim \frac{1}{3t^\alpha},$$

ed essendo f_α a segno costante, in virtù del test del confronto asintotico, l'integrale esiste se e solo se $\alpha > 1$.

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x-x^3) - \log(1+\sinh x) + \alpha x^2}{x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Il limite si presenta evidentemente come una forma indeterminata 0/0. Analizziamo il numeratore. Ricordando che (per $t \to 0$)

$$\sin t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3), \ \ \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \ \ \sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{6} + o(t^3),$$

si vede che (per $x \to 0^+$)

$$\begin{aligned}
&\text{Numeratore} = (x - x^3) - \tfrac{(x-x^3)^3}{6} + o((x-x^3)^3) \\
&\quad - \left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3) - \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right)\right) + \alpha x^2 \\
&= \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(-1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\right)x^3 + o(x^3) = \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 - \tfrac{5}{3}x^3 + o(x^3) \sim \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 - \tfrac{5}{3}x^3.
\end{aligned}$$

Si conclude allora che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{Numeratore}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} - \frac{5}{3}\right) = \begin{cases} \infty, & \alpha > -\frac{1}{2}, \\ -\infty, & \alpha < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{5}{3}, & \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio facoltativo Sia $\alpha \in [0, +\infty[$ e si definisca

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^\alpha e^{-t^2}\, dt, \ \ x \geqslant 0.$$

Stabilire per quali valori di α risulta che F_α è concava sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ci sono valori $\alpha > 0$ per cui F_α sia concava su $[0, +\infty[$?

Svolgimento. La funzione F_α è una funzione integrale di $f_\alpha(t) := t^\alpha e^{-t^2}$. Essendo questa ben definita e continua su $[0, +\infty[$ (si ricorda $\alpha \geqslant 0$), anche F_α è ben definita, continua e derivabile (per il teorema fondamentale del calcolo) e

$$F'_\alpha(x) = f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x^2}.$$

Da questa,

$$F''_\alpha(x) = e^{-x^2}\left(\alpha x^{\alpha-1} + x^\alpha(-2x)\right) = x^{\alpha-1}e^{-x^2}\left(\alpha - 2x^2\right).$$

Siccome F_α è due volte derivabile, per un noto risultato

$$F_\alpha \text{ concava su } [1, +\infty[, \quad \Longleftrightarrow \quad F''_\alpha(x) \leqslant 0, \ \forall x \in [1, +\infty[.$$

Essendo

$$F''_\alpha(x) \leqslant 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha - 2x^2 \leqslant 0, \quad \overset{x \geqslant 0}{\Longleftrightarrow} \quad x \geqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

F_α è concava su $[1, +\infty[$ se e solo se $\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leqslant 1$, cioè $\alpha \leqslant 2$. Lo stesso calcolo mostra che, per ogni $\alpha > 0$ si ha $F''_\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \sqrt{\frac{\alpha}{2}}[$, per cui F_α non può essere concava su $[0, +\infty[$ per alcun valore di $\alpha > 0$. Per $\alpha = 0$, si ha che

$$F''_0(x) = -2xe^{-x^2} < 0 \quad \forall x > 0,$$

dunque F_0 è concava su $[0, +\infty[$.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Appello del 06.07.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$

(i) Calcolare

$$\lim_{x\to -3^+} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to -3^+} |(x+3)\log(x+3)| = \lim_{x\to -3^+} -(x+3)\log(x+3) = \lim_{x\to -3^+} -\frac{\log(x+3)}{\frac{1}{x+3}} \overset{\text{(De l'Hôpital)}}{=}$$
$$= \lim_{x\to -3^+} x+3 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} |(x+3)\log(x+3)| = \lim_{x\to+\infty} (x+3) \lim_{x\to+\infty} \log(x+3) = +\infty$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione f, studiare gli intervalli di monotonia ed abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. Per ogni x tale che $f(x) \neq 0$, cioè, per ogni $x \in D\backslash\{-2\}$,

$$f'(x) = \operatorname{sgn}\Big((x+3)\log(x+3)\Big)\left(\log(x+3)+1\right)$$

$$\begin{gathered} f'(x) \geq 0 \iff \\ x \in \Big\{x \in D,\ (x+3)\log(x+3) > 0,\ \log(x+3)+1 \geq 0\Big\} \bigcup \\ \bigcup \Big\{x \in D,\ (x+3)\log(x+3) < 0,\ \log(x+3)+1 \leq 0\Big\} \\ \iff \\ x \in \Big\{x > -2 \quad x \geq -3+\tfrac{1}{e}\Big\} \bigcup \\ \bigcup \Big\{-3 < x < -2,\ x \leq -3+\tfrac{1}{e}\Big\} = \\ \left]-3, -3+\tfrac{1}{e}\right[\ \bigcup\ ]-2, +\infty[\end{gathered}$$

Perciò f è monotona crescente in ognuno degli $\left]-3, -3+\frac{1}{e}\right[$ e $]-2, +\infty[$, mentre è monotona decrescente in $-3+\frac{1}{e}, -2[$. Pertanto la funzione ha un massimo locale nel punto $x = -3+\frac{1}{e}$, dove vale $f\left(-3+\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$, e un minimo locale nel punto $x = -2$, dove vale $f(-2) = 0$. Dal teorema del limite destro e sinistro delle dertivate si ottiene

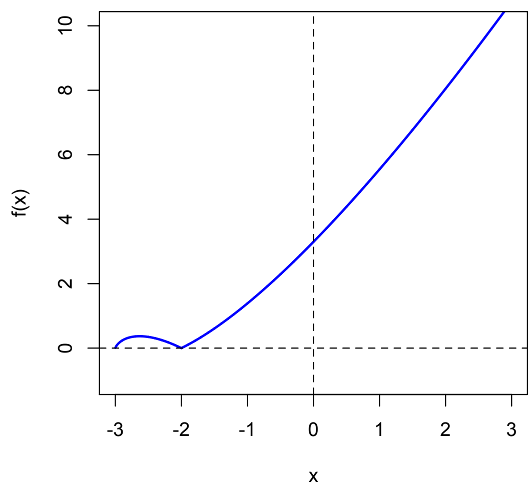
$$f'_+(-2) = \lim_{x\to-2+} f'(x) = 1 \qquad f'_-(-2) = \lim_{x\to-2-} f'(x) = -1.$$

Dunque $x = -2$ è un punto angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -x-2$ e tangente destra di equazione $y = x+2$.

Esercizio 2 [6 punti] Si trovino le soluzioni dell'equazione

$$z^3 = 8i,$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.



h

Svolgimento. cominciamo con l' esprimere $8i$ in forma trigonometrica:

$$8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Perciò $8i$ ha modulo $\rho = 8$ e argomento $\theta = \frac{\pi}{2}$. Risolvere l' equazione significa trovare le radici terze di $8i$, che noi sappiamo essere in numero di tre. Diciamole z_0, z_1, z_2. Si ha

$$z_0 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\theta}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \rho^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Come sapevamo già dalla teoria, le soluzioni rappresewntate sul piano di Gauss costituiscono i vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio 2. Più precisamente, uno dei tre vertici si trova in $(0, -2)$ e un lato è orizzontale, sottoinsieme della retta $y = 1$.

Esercizio 3 [6 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\log n}{n^4}.$$

Solutione.

Si tratta di una serie a termini positivi. *Proviamo* ad applicare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+(n+1)^2)\log(n+1)}{(n+1)^4}}{\frac{(1+n^2)\log n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} \frac{(2+n^2+2n)}{(1+n^2)} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n(1+1/n)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log(1+1/n)}{\log n} = 1$$

Purtroppo siamo nel *caso in cui il criterio del rapporto non dà alcuna informazione.*

Tentiamo allora la strada del *confronto* (asintotico).

Il fattore $\frac{(1+n^2)}{n^4}$ è asintotico a $\frac{1}{n^2}$, che fornirebbe una serie convergente. Tuttavia c'è il fattore $\log n$, che peggiora la situazione. Però noi sappiamo che, per $x \to \infty$ $\log x = o(x^\alpha)$ per qualsiasi $\alpha > 0$: infatti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} \overset{\text{(De l'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to\infty} (-\frac{1}{x} x^{-\alpha+1}) = \lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} = 0.$$

Pertanto, scegliendo ad esempio $\alpha = 1/2$, si ha che

$$\frac{(1+n^2)\log n}{n^4} = o\frac{(1+n^2)n^{\frac{1}{2}}}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente, per il criterio del rapporto asintotico si conclude che anche la serie data è convergente.

Osservazione. Si sarebbe potuto scegliere un qualsiasi $\alpha \in]0,1[$al posto di $\alpha = \frac{1}{2}$. Invece gli $\alpha \geq 1$ sarebbero stati inservibili, in quanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ è divergente per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

Svolgimento. Per ogni $r > 0$, calcoliamo l' integrale $\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx$. Con la sostituzione $y(x) = \sqrt{2x}$, cioè $x(y) = \frac{y^2}{2}$ si ottiene

$$\int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-y} \frac{d\left(\frac{y^2}{2}\right)}{dy}\, dy = \int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-y} y dy \overset{\text{(per parti)}}{=} [-e^{-y}y]_0^{\frac{r^2}{2}} + \int_0^{\frac{r^2}{2}} e^{-y} dy = -\frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} - e^{-\frac{r^2}{2}} + 1.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \left(-\frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} - e^{-\frac{r^2}{2}} + 1\right) = 1$$

(perché $\lim_{r\to+\infty} \frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}}{2} = \lim_{r\to+\infty} \frac{r^2}{2e^{\frac{r^2}{2}}} = 0$)

Esercizio 5 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2.$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[3]{x}\sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[6]{1-\frac{1}{x^2}}\right)^2.$$

Usando lo sviluppo di Taylor

$$(1+y)^\alpha = 1+\alpha y + o(y) \qquad y \to 0$$

(valido per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$), si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{4}{3}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \left(1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \left(\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{5}{3}} \left(\frac{2}{3x}\right)^2 \overset{\text{(P.S.I.)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{9} x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 14.09.2020 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad x \in (1,+\infty).$$

(i) Individuarne gli eventuali asintoti.
(ii) Se ne determini la monotonia.

Svolgimento.

(i) la funzione è definita e continua in tutto il dominio $(1,+\infty)$, pertanto gli eventuali asintoti riguardano solo $x \to 1+$ e $x \to +\infty$. Da

$$\lim_{x\to1+} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{y=\frac{x+1}{x-1}}{=} \lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \underset{y=\frac{x+1}{x-1}}{=} \lim_{y\to1} \arctan y = \frac{\pi}{4}$$

si ottiene che la funzione ha un asintoto orizzontale per $y \to +\infty$ di equazione $y = \frac{\pi}{4}$.

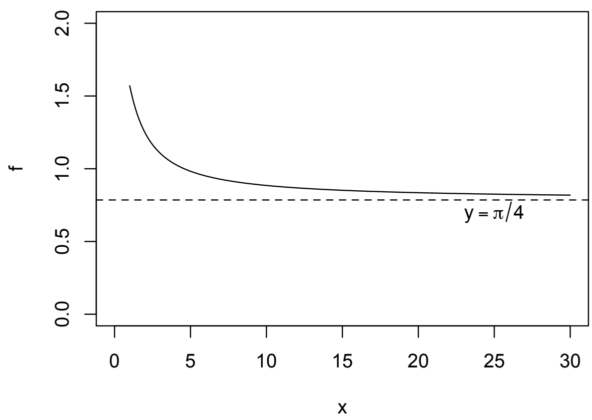
(ii) Calcoliamo la derivata di f:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{1+\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2+(x+1)^2}.$$

Perciò $\frac{df}{dx}(x) < 0$ per ogni $x \in (1,+\infty)$, da cui segue che la funzione è strettamente decrescente nel dominio $(1,+\infty)$.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri il numero complesso $z = \sqrt{3} - i$.
(i) Scriverlo in forma esponenziale.
(ii) Calcolare la parte reale di z^6.

Svolgimento.



h

(i) Si ha $\rho := |z| = \sqrt{3+1} = 2$, da cui

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(ii)

$$Re(z^6) = Re(2^6 e^{-i\pi}) = -64 \ \ (= z^6)$$

Esercizio 3 [6 punti] Stabilire la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

Svolgimento. (i) In virtù del criterio di Leibniz la serie converge semplicemente:

- ha segni alterni;
- $\frac{n}{n^2+1}$ è decrescente infatti,

$$\frac{n_1}{n_1^2+1} \geq \frac{n_2}{n_2^2+1} \iff n_2(n_1^2+1) \leq n_1(n_2^2+1) \iff (n_2-n_1)(1-n_2n_1) \leq 0 \iff n_2 \geq n_1,$$

  (l'ultimo passaggio dovuto al fatto che $(1-n_2n_1) \leq 0$); oppure si calcola la derivata

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \leq 0 \iff |x| \geq 1 \quad \text{se} \quad x \geq 1$$

- si ha $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = 0.$

(ii) La serie non converge assolutamente, perchè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

è asintotica alla serie armonica.

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x)-\sin x}{x^2}.$$

Svolgimento. da

$$\log(1+\sinh x)-\sin x = \sinh x - \frac{(\sinh x)^2}{2} + o((\sinh x)^2) - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{(x)^2}{2} + o(x^2)$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh x)-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{(x)^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Oppure si applica De l'Hôpital due volte.

Esercizio 5 [6 punti] Si consideri l'integrale generalizzato

$$\int_1^{\infty} \log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right)\, dx.$$

(i) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
(ii) Stabilire per quali $\alpha \in [0,\infty)$ esso converge.

Svolgimento.

(i)

$$\lim_{k\to+\infty} \int_1^k \log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) dx = \lim_{k\to+\infty}\left(\left[x\log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\right]_1^k - \int_1^k \frac{2}{(1+x^2)}\,dx\right) =$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(k\log\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\arctan k + 2\arctan 1\right)$$
$$\lim_{k\to+\infty}\left(k\log\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right) - 2\arctan k + 2\arctan 1\right)$$
$$= \log 2 - \pi + \frac{\pi}{2} = \log 2 - \frac{\pi}{2}$$

(ii)

$$\log\left(\frac{x^\alpha}{x^\alpha+1}\right) = \log\left(1-\frac{1}{x^\alpha+1}\right) = -\frac{1}{x^\alpha+1} + o\left(\frac{1}{x^\alpha+1}\right)$$

Per confronto asintotico con $-\frac{1}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 18.01.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right);$$

(i) individuarne il dominio naturale, studiarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) calcolarne la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti estremanti;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. (i). Iniziamo dallo studio del dominio naturale. Il denominatore $x^2+x+1>0$ è sempre strettamente positivo, in quanto il determinante $\Delta=-3$ è negativo. Considerando anche che il dominio della funzione arctan è tutto $\mathbb{R}$, otteniamo $D=\mathbb{R}$.
Studiamo il segno di f: poichè $x^2+x+1>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$, abbiamo

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) \geq 0 \iff \frac{x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \geq 0$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \arctan\left(\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)\right) = 0.$$

Dunque $y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.
(ii). La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2}\,\frac{-2x^2-x+x^2+x+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right)^2\right)(x^2+x+1)^2}(-x^2+1).$$

Dunque

$$f'(x) \geq 0 \iff 1-x^2 \geq 0 \iff x \in [-1,1]$$

e

$$f'(x) = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff x \in \{-1,1\}.$$

Ne deduciamo che f è cresente nell'intervallo $[-1,1]$, decrescente in $]-\infty,-1]$ ed in $[1,+\infty[$, quindi $x=-1$ è punto di minimo globale mentre $x=1$ è punto di massimo globale.
(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino in $\mathbb{C}$ le soluzioni dell'equazione

$$z^4+(-1+i)z^2-i=0.$$

Suggerimento: sostituire $w=z^2$.

Svolgimento. Con la sostituzione $w=z^2$ si ottiene

$$w^2+(-1+i)w-i=0$$

h

le cui soluzioni sono

$$w_{1,2} = \frac{1 - i + \sqrt{2i}}{2} = \frac{1 - i \pm (1 + i)}{2} = \{1, \, -i\} \,.$$

Perciò, le soluzioni sono 4 e coincidono con l'unione delle soluzioni di $z^2 = 1$ e $z^2 = -i$, vale a dire

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Esercizio 3 [8 punti]
(i) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}}.$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Svolgimento. (i).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{2n}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^{n}} \right)^2 = e^{-2}.$$

(ii). Poiché la serie è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto asintotico ed il risultato di (i), ottenendo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)! n^{2n}}{(2n)!(n+1)^{2n+2}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)n^{2n}}{(n+1)^2(n+1)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2+6n+2)n^{2n}}{(n^2+2n+1)(n+1)^{2n}} \\ &= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 4e^{-2}. \end{aligned}$$

Vale $4e^{-2} < 1$; la serie è convergente.

Esercizio 4 [8 punti] Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha}.$$

(a) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza

$$\int_0^{\log 2} f_\alpha(x)\, dx.$$

(b) Calcolare

$$\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx.$$

Svolgimento. (a). Si tratta di un integrando a valori positivi quindi possiamo sfruttare il criterio del confronto asintotico. Da

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sinh x + x^\alpha} = \frac{1}{x + o(x) + x^\alpha}$$

otteniamo che, per $x \to 0$ la funzione è asintotica a $\frac{1}{x}$ se $\alpha > 1$, a $\frac{2}{x}$ se $\alpha = 1$ e a $\frac{1}{x^\alpha}$ se $\alpha < 1$. Perciò l'integrale converge $\iff \alpha < 1$.

(b) Con la sostituzione $t = e^x$ (cioè $x = \log t$) si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{\sinh x + 1} dx = \int_0^{\log 2} \frac{2}{e^x - e^{-x} + 2} dx = \int_1^2 \frac{2}{(t - t^{-1} + 2)t} dt \\ &= \int_1^2 \frac{2}{t^2 + 2t - 1} dt.\end{aligned}$$

Le radici di $t^2 + 2t - 1 = 0$ sono $-1 \pm \sqrt{2}$, dunque

$$\frac{1}{t^2 + 2t - 1} = \frac{A}{t + 1 - \sqrt{2}} + \frac{B}{t + 1 + \sqrt{2}}$$

per opportuni $A, B \in \mathbb{R}$. Si ha $1 = A(t + 1 + \sqrt{2}) + B(t + 1 - \sqrt{2})$, da cui

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

dunque

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1 \end{cases}$$

e perciò $A = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ne deduciamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} f_0(x)\, dx &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \frac{1}{t + 1 - \sqrt{2}} dt - \frac{\sqrt{2}}{2} \int_1^2 \frac{1}{t + 1 + \sqrt{2}} dt \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \log|t + 1 - \sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2} \log|t + 1 + \sqrt{2}| \right]_1^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log\left(\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \log\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \right).\end{aligned}$$

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 08.02.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}.$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.

Svolgimento. (i). Iniziamo dal dominio naturale. Il denominatore $x^2+1 > 0$ è sempre strettamente positivo. Il numeratore $|x|$ è sempre maggiore o uguale di zero. Considerando che il dominio della funzione radice è $[0, \infty)$, otteniamo $D = \mathbb{R}$.
Studiamo il segno e le simmetrie di f. La funzione è pari: $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre essa ha sempre valori non negativi:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}} \geq 0 \iff x \in \mathbb{R},$$

e

$$f(x) = 0 \iff x = 0.$$

Studiamo i limiti agli estremi del dominio; abbiamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

(ii) Studiamo la derivabilità di f. Si ha che $f \in C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ in quanto composizione di funzioni $C^{(1)}(\mathbb{R})$, esclusa la funzione $g(x) = |x|$ che sta solo in $C^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Per ogni $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} \frac{\operatorname{sgn}(x)(x^2+1) - |x|2x}{(x+1)^2}.$$

Dunque,

$$\{x > 0 \text{ e } f'(x) > 0\} \iff (x^2+1) - 2x^2 > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x \in]0, 1[$$

e

$$\{x > 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = 1$$

Per simmetria, si ha

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) > 0\} \iff x \in]-\infty, -1[$$

e

$$\{x < 0 \text{ and } f'(x) = 0\} \iff x = -1.$$

Inoltre, per il teorema del limite della derivata,

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x^2}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-1)(1-x^2)}{2(x^2+1)^2\sqrt{\frac{|x|}{x^2+1}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{|x|}} = -\infty$$

perciò, la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha una cuspide.

Dalla precedente analisi e dalla continuità della funzione si ha che la funzione è crescente in ognuno dei due intervalli $[0, 1]$ e $]-\infty, -1]$ ed è decrescente in ognuno dei due intervalli $[-1, 0]$ e $[1, +\infty[$.

Inoltre vi è un massimo (risp. minimo) globale in $x = 1$ (risp. $x = -1$).

(iii). Il grafico della funzione è abbozzato in figura.

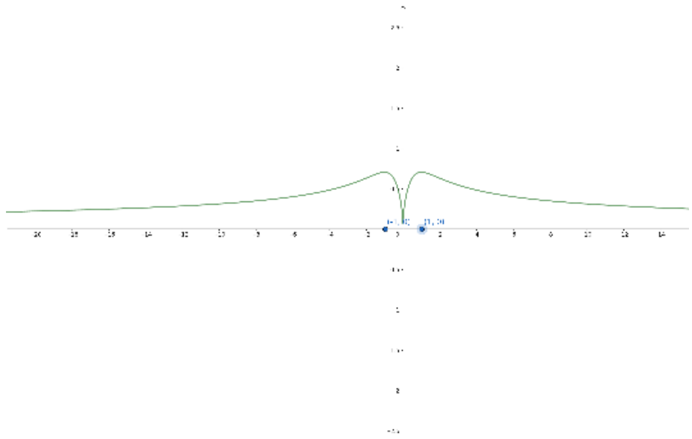


Figura 19: Il grafico di f.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\frac{8}{z^3} = \frac{1+i}{1-i},$$

espresse in forma algebrica e esponenziale (o trigonometrica), e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. Da

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i$$

otteniamo

$$z^3 = \frac{8}{i} = -8i.$$

Le soluzioni dell'equazione sono le (tre) radici terze di $-8i = 8e^{i\frac{3}{2}\pi}$, cioè

$$z_1 = 2e^{i\frac{1}{2}\pi} = 2i, \quad z_2 = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} = -\sqrt{3} - i, \quad z_3 = 2e^{i\frac{11}{6}\pi} = \sqrt{3} - i$$

e sono disegnate nella figura seguente

Esercizio 3 [8 punti]

(i) Calcolare

$$\int \log(t+1)\, dt.$$

(ii) Dedurre il valore di

$$\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

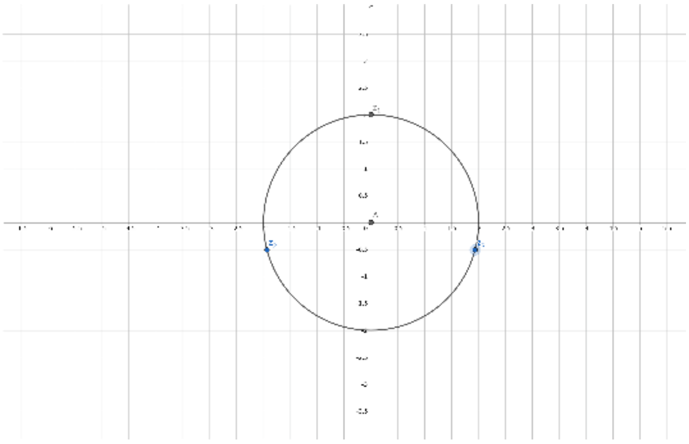


Figura 20: Le soluzioni dell'esercizio 2.

Svolgimento.(i) Per parti:

$$\begin{aligned}\int \log(t+1)\,dt &= \log(t+1)t - \int \frac{t}{t+1}dt \\ &= t\log(t+1) - \int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= t\log(t+1) - t + \log|t+1| + c,\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Utilizzando la sostituzione $t = \sqrt{x}$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{c\to 0+}\int_c^1 \frac{\log(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{c\to 0+}\int_{\sqrt{c}}^1 \frac{\log(t+1)}{t}2t\,dt \\ &= \lim_{c\to 0+} 2\int_{\sqrt{c}}^1 \log(t+1)\,dt \\ &= \lim_{c\to 0+} 2\left[t\log(t+1) - t + \log(t+1)\right]_{\sqrt{c}}^1 \\ &= 2(2\log 2 - 1)\end{aligned}$$

Esercizio 4 [8 punti]

(i) Individuare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo di

$$n\left(\cos(1/n) - 1\right) + \frac{\alpha}{n}$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|n\left(\cos(1/n)-1\right) + \frac{\alpha}{n}\right|.$$

Svolgimento. (i)

$$n\left(\cos(1/n)-1\right)+\frac{\alpha}{n}=n\left(-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{24n^4}+o(\frac{1}{n^4})\right)+\frac{\alpha}{n}=\frac{-1/2+\alpha}{n}+\frac{1}{24n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

è di ordine 1 per ogni $\alpha\neq 1/2$ e di ordine 3 per $\alpha=1/2$.

(ii) La serie è a termini di segno costante. Da quanto visto nel punto precedente, il termine generale della serie verifica le seguenti asintoticità

$$a_n\sim\begin{cases}\frac{-1/2+\alpha}{n} & \text{se } \alpha\neq 1/2\\ \frac{1}{24n^3} & \text{se } \alpha=1/2.\end{cases}$$

Applicando il teorema del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, otteniamo che la serie converge se $\alpha=1/2$ e diverge se $\alpha\neq 1/2$.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 05.07.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x)=\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right).$$

(i) Determinare il dominio naturale di f, studiare il segno e la simmetria di f e calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) Studiare la derivabilità di f e calcolare la derivata prima, studiare gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzare il grafico di f.
Svolgimento. (i). Per determinare il dominio bisogna imporre che il radicando sia nonnegativo e l'argomento del logaritmo sia positivo. La disuguaglianza $1-x^2\geq 0$ ha come soluzioni $x\in[-1,1]$. Per questi valori di x, è ovvio che l'argomento del logaritmo sia positivo. Quindi

$$\text{dom}(f)\text{=[-1,1]}.$$

Per individuare eventuali simmetrie, osserviamo che vale

$$f(-x)=\log\left(1+\sqrt{1-(-x)^2}\right)=f(x);$$

la funzione è pari.
Studiamo il segno della funzione: $f(x)\geq 0$ equivale a

$$1+\sqrt{1-x^2}\geq 1 \qquad \text{cioè} \qquad \sqrt{1-x^2}\geq 0.$$

Poiché $\sqrt{\ldots}$ è sicuramente nonnegativo, deduciamo che la funzione è sempre nonnegativa e si annulla solo in $x=\pm 1$ che sono pertanto punti di minimo assoluto (con $f(\pm 1)=0$).
Per il teorema sull'algebra delle funzioni continue e per quello sulla composizione di funzioni continue, $f\in C^0(dom(f))$. Ne deduciamo

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=0$$

ed analogamente, per simmetria, $\lim_{x\to -1^+}f(x)=0$.

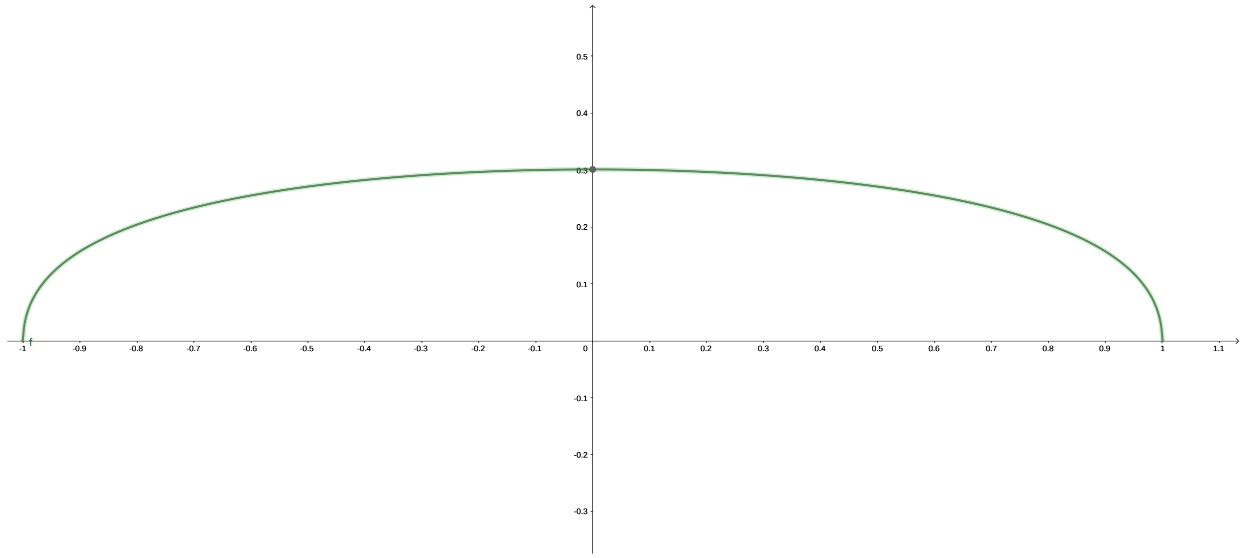


Figura 21: grafico dell'esercizio 1

(ii). In $(-1,1)$, per il teorema sull'algebra delle derivate e quello sulla derivata della funzione composta, otteniamo che la f è derivabile. La derivabilità in ± 1 va studiata separatamente. Abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Poiché vale $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$ (e per simmetria $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$), concludiamo che f non è derivabile in $x = \pm 1$. Inoltre, gli intervalli di crescenza sono determinati da $f' \geq 0$ cioè $x \leq 0$. Ne deduciamo che

- f è crescente in $[-1, 0]$
- f è decrescente in $[0, -1]$
- $x = 0$ è l'unico punto di massimo assoluto
- $x = \pm 1$ sono punti di minimo assoluto (già lo sapevamo).

(iii). Si veda il grafico in figura 1.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni complesse dell'equazione

$$\mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

e le si disegnino sul piano complesso.
Svolgimento. Innanzitutto notiamo che l'equazione ha senso solo per $z \neq 0$. Per tali valori di z risolviamo l'equazione usando la forma algebrica dei numeri complessi: $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy, \qquad |z|^2 = x^2 + y^2, \qquad \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

L'equazione iniziale diventa

$$2xy + x = 0 \qquad \text{cioè} \qquad x(2y+1) = 0$$

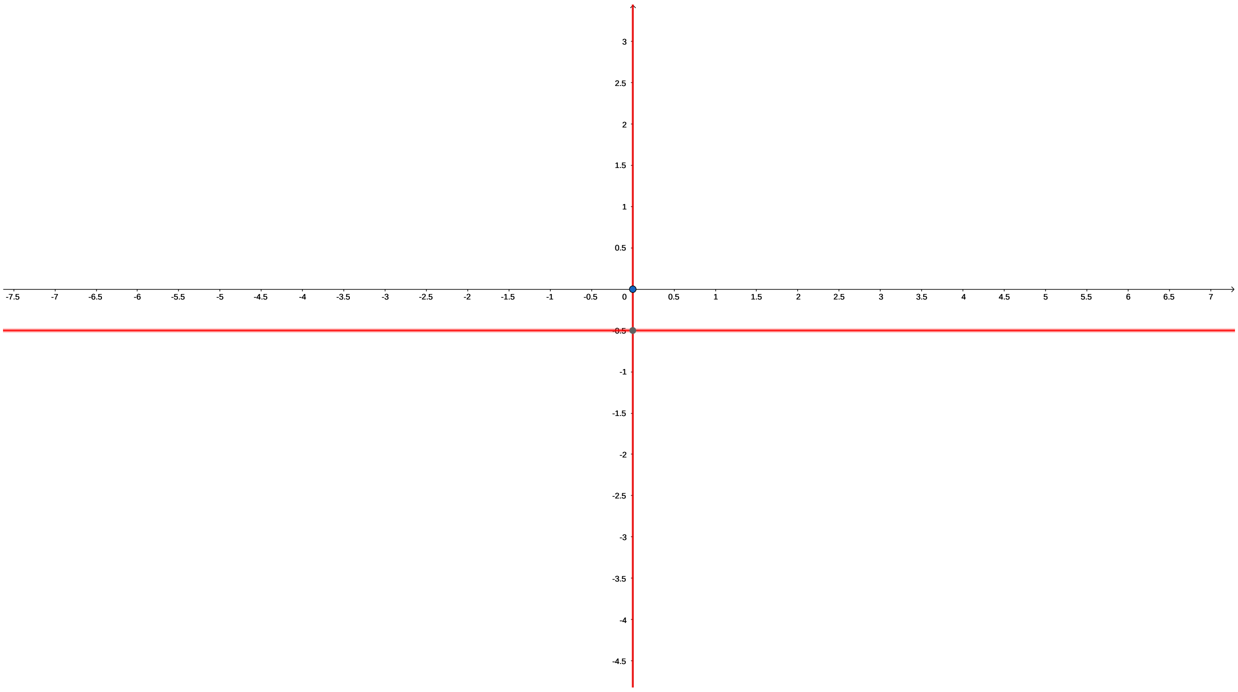


Figura 22: grafico dell'esercizio 2

che ha soluzioni

$$x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{1}{2}$$

che formano le due rette (per $z \neq 0$) nel grafico in Figura 2.

Esercizio 3 [8 punti]
Sia

$$f_\alpha(x) := \frac{\arctan x}{1 + x^{2\alpha}}.$$

(i) Calcolare

$$\int f_1(x)\,dx = \int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx.$$

(ii) Studiare al variare di $\alpha \in [0, \infty)$ la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx.$$

Svolgimento. (i). Usando la sostituzione $\arctan x = t$ (ricordarsi: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$) otteniamo

$$\int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{\arctan^2 x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(ii). Osserviamo $f \in C^0([1, +\infty))$ (e $f > 0$ su $[1, +\infty)$); quindi l'integrale è improprio solo per $x \to +\infty$. Studiamo l'asintoticità di f_α per $x \to +\infty$:

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^{2\alpha}} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\alpha}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Applicando il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri (e ricordando che $\int_1^{+\infty} x^a dx$ converge se e solo se $a < -1$) otteniamo che l'integrale di partenza è convergente se e solo se $\alpha > 1/2$.

Esercizio 4 [8 punti]
(i) Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + \alpha[\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2}.$$

(ii) Dedurre il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2\right\}.$$

Svolgimento. (*i*). Usando gli sviluppi di Mc Laurin di $\cos x$ e di $\log(1+x)$, per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\log[\cos(1/n)] &= \log\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + +o\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Inoltre, usando lo sviluppo di Mc Laurin di $\sin x$, per $n \to +\infty$ abbiamo

$$[\sin(1/n)]^2 = \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Deduciamo che il numeratore verifica

$$\text{num.} = (\alpha - 1)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

conseguentemente vale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + \alpha[\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2} = \alpha - 1 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

(*ii*). Osserviamo che il punto precedente con $\alpha = 1$ dà

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2}{(1/n)^2} = 0$$

cioè

$$2\log[\cos(1/n)] + [\sin(1/n)]^2 = o[(1/n)^2] \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Ne deduciamo in particolare che il termine della nostra serie è definitivamente positivo. Inoltre, applicando il criterio del confronto asintotico e ricordando che $\sum (1/n)^2$ è convergente, otteniamo che la serie è convergente.

Tempo a disposizione: 1 ore e 30 minuti.

Appello del 13.09.2021 - Modalità telematica (causa COVID)

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} \quad .$$

(i) Determinarne il dominio naturale; studiarne la periodicità, il segno e la simmetria di f;
(ii) studiarne la derivabilità e calcolarne la derivata prima; studiarne gli intervalli di monotonia individuando gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto/relativo;
(iii) abbozzarne il grafico.

Svolgimento. (i). La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$1 - 2\cos x \neq 0 \iff \cos x \neq \frac{1}{2} \iff x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Chiaramente la funzione è periodica con periodo 2π. Inoltre

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{1 - 2\cos x} = \frac{|\sin(-x)|}{1 - 2\cos(-x)} = f(-x)$$

perciò la funzione è pari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all' asse delle ordinate.

Limito lo studio al dominio $[-\pi, \pi] \backslash \{\pm\frac{\pi}{3}\}$; calcolo il limite agli estremi

$$\lim_{x \to \pi/3-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \pi/3+} f(x) = +\infty.$$

(ii). Per ogni punto del dominio tale che $|\sin x| \neq 0$, cioé $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$f'(x) = \frac{\cos x \frac{|\sin x|}{\sin x}(1 - 2\cos x) - 2\sin x |\sin x|}{(1 - 2\cos x)^2} = \frac{|\sin x|}{(1 - 2\cos x)^2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}(1 - 2\cos x) - 2\sin x\right)$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{\sin x}\left(\cos x - 2\cos^2 x + 2\sin^2 x\right) = \frac{1}{\sin x}\left(\cos x - 2\right) \geq 0$$

In $]0, \pi[\backslash \pi/3$ si ha $\sin x > 0$ e $\cos x - 2 < 0$, dunque $f'(x) < 0$, perciò le restrizioni agli intervalli $]0, \pi/3[,]\pi/3, \pi[$ sono strettamente decrescenti. Per simmetria le restrizioni agli intervalli $] - \pi/3, 0[,] - \pi, -\pi/3[$ sono strettamente crescenti. e, la funzione ha un minimo locale in π, di valore $f(\pi) = 0$ e dunque in ogni punto $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 1 \quad \lim_{x \to 0+} f'(x) = -1 \quad \lim_{x \to \pi-} f'(x) = -\frac{1}{3} \lim_{x \to -\pi+} f'(x) = \frac{1}{3};$$

quindi la funziona presenta punti angolosi in $k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
(iii). Vedi figura.

Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left|\frac{z + 1}{z}\right| \geq 1$$

e le si disegnino sul piano complesso.

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che il campo di esistenza della disuguaglianza è dato da $|z| \neq 0$ cioè da $z \neq 0$. Forniamo due metodi di soluzione.

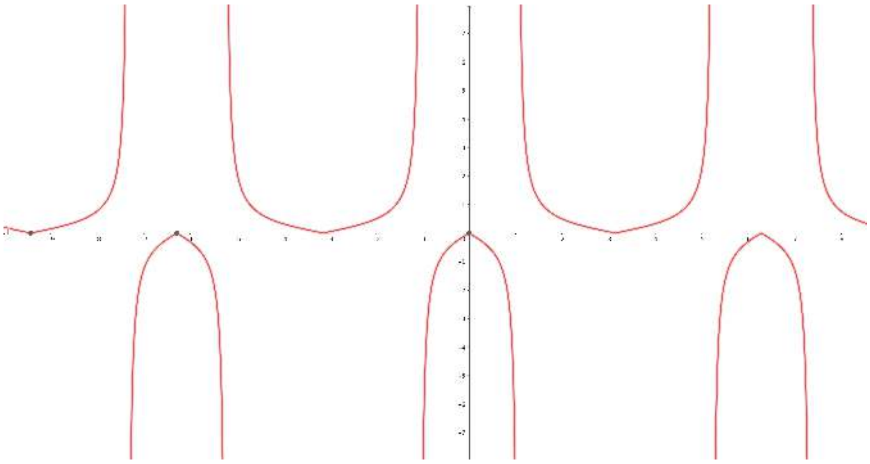


Figura 23: Il grafico di f.

1. Eleviamo al quadrato entrambi i membri:
$$\frac{|z+1|^2}{|z|^2} \geq 1 \iff (x+1)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \iff 1 + 2x \geq 0 \iff x \geq -1/2$$

2. $$\left|\frac{z+1}{z}\right| \geq 1 \iff \left|1 + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right| \geq 1 \iff \left|x^2 + y^2 + x - iy\right| \geq x^2 + y^2$$
se e solo se
$$x^4 + y^4 + x^2 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 + y^2 \geq x^4 + y^4 + 2x^2y^2$$
se e solo se
$$x^2 + 2x^3 + 2xy^2 + y^2 \geq 0 \iff (2x+1)(x^2+y^2) \geq 0 \iff 2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1/2.$$

Le soluzioni sono i numeri complessi $z = x + iy$ (con $x, y \in \mathbb{R}$) tali che: $z \neq 0$ e $x \geq -1/2$.

Esercizio 3 [8 punti]
Studiare la convergenza della serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Usando lo sviluppo di McLaurin di $\sin x$ si ottiene che è asintotica alla serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} n^{\alpha - 3},$$

in particolare è una serie a termini positivi. Possiamo pertanto applicare il criterio del confronto asintotico e dedurre che essa è convergente se e solo se $\alpha - 3 < -1$, cioè $\alpha < 2$, ed è divergente per $\alpha \geq 2$.

Esercizio 4 [8 punti]
Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

Svolgimento. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+2x+2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx - \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2)\Big|_{-1}^{0} - \arctan(x+1)\Big|_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{2}\log(2) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$