

---

## Lezione 10

---

- 1) La temperatura di una massa di acqua pari a  $M = 1500$  g viene misurata per mezzo di un termometro avente una massa  $m = 40$  g e calore specifico  $c_{term} = 1200 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Il termometro segna una temperatura  $T_i = 23.5^\circ\text{C}$  prima di essere introdotto nell'acqua. Una volta raggiunto l'equilibrio, la temperatura segnata dal termometro è  $T_f = 58.8^\circ\text{C}$ . Supponendo che non ci siano perdite di calore verso l'esterno, determinare la temperatura dell'acqua prima della misura.
- 2) In un calorimetro si introduce una massa di acqua  $m_a = 800$  g. Le temperature iniziali del calorimetro e dell'acqua sono  $T_{cal,i} = 18^\circ\text{C}$  e  $T_{a,i} = 25^\circ\text{C}$ ; la temperatura finale (comune ad acqua e calorimetro) è  $T_f = 23.08^\circ\text{C}$ . Scopo dell'esperimento è quello di misurare a quanta acqua è termicamente equivalente il calorimetro ( $m_{cal}$ ), se gli attribuiamo lo stesso calore specifico dell'acqua.
- 3) Un cilindro chiuso da un pistone mobile contiene 96 g di  $\text{O}_2$  inizialmente alla pressione  $p_i = 150 \text{ kPa}$  e alla temperatura  $T_i = 290 \text{ K}$ .

1. Determinare il volume iniziale del gas.

Successivamente il gas si espande a pressione costante, compiendo un lavoro  $L = 7.2 \text{ kJ}$ .

2. Calcolare il suo volume finale.

Infine la pressione del gas viene aumentata fino a  $p_f = 300 \text{ kPa}$  con una trasformazione isocora.

3. Determinare il lavoro compiuto dal gas nell'intero processo.

- 4) Un recipiente con pareti adiabatiche e volume  $V = 10 \text{ dm}^3$  contiene  $1.5 \text{ dm}^3$  di acqua alla temperatura  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  e alla pressione atmosferica. Fornendo unicamente calore, l'acqua viene trasformata in vapore e portata alla temperatura  $T_1 = 300^\circ\text{C}$ . Trattando il vapore acqueo come un gas ideale, determinare:

1. la quantità di calore che è stata fornita all'acqua;
2. la pressione finale del vapore all'interno del recipiente;
3. la variazione di entropia del sistema nell'intero processo.

[Per i valori numerici del calore specifico  $c_a$ , e del calore latente di evaporazione,  $\lambda$ , dell'acqua fare riferimento ai valori riportati nei libri; la massa di una mole di acqua è pari a  $M_a = 18 \text{ g}$ .]

- 5) Si abbia una quantità di acqua  $V_0 = 5 \text{ dm}^3$  alla temperatura iniziale  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Alla pressione atmosferica  $p_0$  l'acqua viene portata a  $100^\circ\text{C}$  e completamente vaporizzata; poi, dopo aver portato la pressione a  $p_1 = 2 \text{ atm}$ , il vapore viene portato alla temperatura finale  $T_1 = 500 \text{ K}$ . Trattando il vapore come un gas ideale poliatomico, determinare:

1. la quantità di calore totale  $Q_{tot}$  fornita al sistema acqua/vapore nell'intero processo;
2. il volume  $V_1$  del vapore così ottenuto.

Il vapore viene poi compresso lungo un'adiabatica reversibile fino a un volume finale  $V_2 = V_1/2$ . Calcolare:

3. la temperatura  $T_2$  e la pressione  $p_2$  finali del vapore;
4. il lavoro che deve essere fatto per comprimerlo.

- 6) Una mole di un gas perfetto subisce una trasformazione che la porta dapprima a raddoppiare il suo volume lungo un'isoterma e poi a raddoppiare la sua pressione lungo un'isocora. In alternativa, partendo dallo stesso stato iniziale si potrebbe raggiungere l'analogo stato finale facendo prima aumentare la pressione fino a 2 volte quella iniziale lungo la stessa isoterma e poi facendo raddoppiare il volume su una isobara. Tracciare un grafico dei due cammini nel piano p-V e calcolare su ciascun ramo dei due cammini la variazione di energia interna, il lavoro fatto e il calore scambiato.

ES. 1

Non essendo parte di calore verso l'esterno, gli scambi di calore avvengono solo tra l'acqua e il termometro. Perciò, la misurazione di temperatura subita dal termometro implica un assorbimento di calore pari a

$$Q = m c_{\text{term}} \Delta T = m c_{\text{term}} (\bar{T}_e - \bar{T}_i) = 1.69 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Tale calore viene ceduto dall'acqua che quindi subisce una variazione di temperatura:

$$\Delta \bar{T}_a = - \frac{Q}{M c_a} = - 0.27 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Quindi, la temperatura dell'acqua prima della misura era pari a

$$\Delta \bar{T}_a = \bar{T}_e - \bar{T}_{a,i} \Rightarrow \bar{T}_{a,i} = \bar{T}_e - \Delta \bar{T}_a = 38.80 \text{ } ^\circ\text{C} + 0.27 \text{ } ^\circ\text{C} = 39.07 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ES. 2

Se non c'è dispersione di calore verso l'esterno, l'equazione del bilancio termico è:

$$c_s m_{\text{acq}} (\bar{T}_e - \bar{T}_{\text{cal,ini}}) + c_{\text{cal}} m_{\text{cal}} (\bar{T}_e - \bar{T}_{\text{cal,ini}}) = 0$$

dato che i due (acqua e colorimetro) raggiungono la stessa temperatura finale  $\bar{T}_e$ .

Nell'espressione i due termini corrispondono ai calori scambiati, rispettivamente, dal colorimetro e dall'acqua. Si noti però che il primo è stato scritto in termini di  $c_{\text{cal}}$ , calore specifico del colorimetro, mentre, naturalmente, deve essere visto come la massa di acqua a cui è equivalente il colorimetro.

$$m_{\text{cal}} = \frac{\bar{T}_{\text{cal,ini}} - \bar{T}_e}{\bar{T}_e - \bar{T}_{\text{cal,ini}}} \cdot m_a = 302 \text{ g}$$

Il colorimetro è dunque equivalente a 302 g d'acqua.

ES. 3

Primo di tutto notiamo che, essendo 32 il numero atomico dell'ossigeno molecolare ( $O_2$ ), il numero di molli di ossigeno presenti all'interno del cilindro è

$$n = \frac{96}{32} = 3.00 \text{ mol}$$

Portanto, trattando l'ossigeno come un gas ideale, il suo volume iniziale si ottiene come segue

$$P_i V_i = n R T_i \Rightarrow V_i = \frac{n R T_i}{P_i} = 4.82 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

Poi, dalla conoscenza del lavoro compiuto dal gas nell'espansione isobara, ottieniamo

$$\begin{aligned} L = P \Delta V &= P_i \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{L}{P} = 4.8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \\ &\Rightarrow V_f = V_i + \Delta V = 9.62 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \approx 2 V_i \end{aligned}$$

Inoltre, data che in un trasformatore isocoro (cioè a volume costante) non viene compiuto lavoro, possiamo dire che  $L$  costituisce il lavoro compiuto dal gas nell'intero processo.

#### ES. 4

Si calore fornito all'acqua da, in successione, portarla alla temperatura di ebollizione  $T_e = 100^\circ\text{C}$ , trasformarla in vapore (a temperatura costante  $T_e$ ) e poi portare il vapore elevato da  $T_e$  a  $T_i$ . Conseguentemente, il calore richiesto sarà pari a

$$Q = m c_s (T_e - T_0) + m \lambda + n c_v (T_i - T_e)$$

Dato lo struttura dei molecole dell'acqua è facile capire che, vedendo il suo vapore come un gas ideale, dovremo pensarlo come un gas polistomatico; perciò prenderemo  $c_v = 3R$ . Inoltre, utilizzando la massa moleare dell'acqua, ottieniamo

$$n = \frac{m}{M_b} = 83.3 \text{ mol}$$

Tenendo conto di queste quantità e dei valori numerici di  $c_s$  e  $\lambda$ , per il calore  $Q$  ottieniamo

$$Q = 0.503 \cdot 10^6 \text{ J} + 3.40 \cdot 10^6 \text{ J} + 0.416 \cdot 10^6 \text{ J} = 4.32 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Poiché pressione finale del vapore acqueo ottieniamo

$$P_f = P_0 + \frac{n R T_i}{V} = 3.98 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 393 \text{ atm.}$$

Sai che la variazione di entropia del sistema si può calcolare pensando che nelle tre trasformazioni il calore sia fornito lentamente, in modo da rendere reversibili; in tale condizione le rispettive variazioni di entropia possono essere ricavate attraverso l'integrale

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

Portanto, per le tre trasformazioni abbiamo

$$dQ_1 = m c_s \Delta T \Rightarrow \Delta S_1 = m c_s \int_{T_0}^{T_e} \frac{dT}{T} = m c_s \ln\left(\frac{T_e}{T_0}\right) = 1.52 \cdot 10^3 \text{ J/K}$$

$$dQ_2 = \lambda dm \Rightarrow \Delta S_2 = \frac{\lambda}{T_e} \int dm = \frac{m \lambda}{T_e} = 9.13 \cdot 10^3 \text{ J/K}$$

$$dQ_3 = n c_v dT \Rightarrow \Delta S_3 = n c_v \int_{T_e}^{T_1} \frac{dT}{T} = n c_v \ln\left(\frac{T_1}{T_e}\right) = 8.92 \cdot 10^2 \text{ J/K}$$

La variazione complessiva di entropia è quindi

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 1.13 \cdot 10^4 \text{ J/K}$$

### ES 5

Si vuole completare vaporizzazione a pressione atmosferica dell'acqua viene fornita una quantità di calore

$$Q_1 = m_a c_s (T_e - T_0) + m_a \lambda_v$$

dove  $T_e = 100^\circ \text{C}$  è la temperatura di ebollizione dell'acqua, mentre  $c_s$  e  $\lambda_v$  sono il calore specifico e il calore latente di vaporizzazione dell'acqua. Essendo  $V_0 = 5 \text{ dm}^3$ , lo massa di acqua è  $m_a = 5 \text{ Kg}$ . Portanto è

$$Q_1 = 1.3 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Se il vapore viene trattato allo stesso modo come un gas ideale polidinamico, il calore necessario per portarlo, a pressione costante ( $p_0 = p_1$ ), fino a  $T = T_1$  può essere espresso come

$$Q_2 = n c_p (T_1 - T_e)$$

Dove  $n$  è il numero di mol di acqua presenti e  $c_p = 6R$ . Utilizzando la massa molare dell'acqua  $m_{mol}$ , abbiamo  $n = m/m_{mol} = 277.8$  e quindi

$$Q_2 = 1.12 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Pertanto il calore totale fornito nello stesso processo è

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 = 1.41 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Per il volume occupato dal vapore acqua zolfoziosa

$$\rho_1 V_1 = n R T_1 \Rightarrow V_1 = \frac{n R T_1}{P_1} = 8.7 \text{ m}^3$$

Lungo una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale vengono le relazioni  $PV^m = \text{cost.}$  e  $TV^{m-1} = \text{cost.}$ , dove, dato che trattiamo il vapore come un gas ideale poliatomico, si ha  $m = 4/3$ . Quindi possiamo scrivere

$$T_2 V_2^{m-1} = T_1 V_1^{m-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{m-1} = T_1 \cdot (2^{1/3}) = 1.26 \cdot T_1 = 630 \text{ K}$$

e

$$P_2 V_2^m = P_1 V_1^m \Rightarrow P_2 = P_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^m = P_1 \cdot 2^{4/3} = 2.52 \cdot P_1 = 5.04 \text{ atm}$$

Inoltre, dalla prima legge della termodinamica segue che per una trasformazione adiabatica è  $\Delta E_{\text{int}} = -L$ , dove  $\Delta E_{\text{int}}$  è la variazione dell'energia interna del sistema e  $L$  il lavoro da esso compiuto.

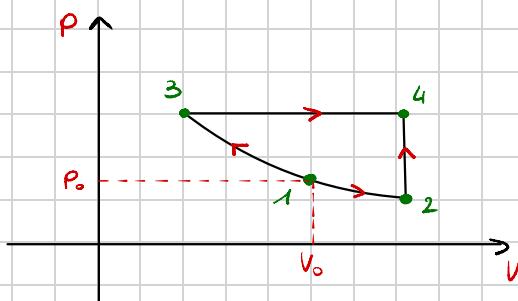
Notando che il lavoro che si deve compiere per comprimere il vapore  $L_{\text{ext}}$  è esattamente uguale e opposto a quello compiuto dal vapore, potremo scrivere

$$L_{\text{ext}} = -L = \Delta E_{\text{int}} = n c_v \Delta T = n c_v (T_2 - T_1) = 9 \cdot 10^8 \text{ J}$$

dove  $c_v = 3R$  è il calore specifico a volume costante del vapore (inteso come gas ideale poliatomico).

**ES 6**

Il grafico delle due trasformazioni nel piano  $p-V$  è riportato nella figura qui sotto



Dallo stato 1,  $(P_0, V_0)$ , il gas espanderà lungo l'isoterma raddoppiando il suo volume raggiungendo lo stato 2,  $(P_0/2, 2V_0)$ , poi la pressione cresce fino a quadruplicare lungo un'isoterma raddoppiando lo stato 4,  $(2P_0, 2V_0)$ . Nell'altra via il gas raggiunge lo stato 3  $(2P_0, V_0/2)$ , lungo l'isoterma per poi espandersi seguendo l'isoterma fino a quadruplicare il suo volume raggiungendo lo stato 4.

S'noti che per le temperature dei quattro stati possiamo scrivere

$$\tau_0 = \frac{P_0 V_0}{n R}; \quad \tau_2 = \frac{P_0 V_0}{n R} = \tau_0; \quad \tau_3 = \frac{P_0 V_0}{n R} = \tau_0; \quad \tau_4 = \frac{4 P_0 V_0}{n R} = 4 \tau_0$$

Lungo la prima via ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ ) abbiamo

$$L_{12} = \int_{V_0}^{2V_0} p dV = n R \tau_0 \ln \frac{2V_0}{V_0} = n R \tau_0 \ln(2); \quad \Delta E_{int,12} = 0;$$

$$Q_{12} = L_{12};$$

e

$$L_{24} = 0; \quad \Delta E_{int,24} = n c_V (\tau_4 - \tau_2) = n c_V (\tau_4 - \tau_0) = 3 c_V \frac{P_0 V_0}{R};$$

$$Q_{24} = L_{24} + \Delta E_{int,24} = 3 c_V \frac{P_0 V_0}{R};$$

Invece, per la seconda via ( $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ) abbiamo

$$L_{13} = n R \tau_0 \ln \left( \frac{V_0/2}{V_0} \right) = -n R \tau_0 \ln(2); \quad \Delta E_{int,13} = 0$$

$$Q_{13} = L_{13} = -n R \tau_0 \ln(2)$$

e

$$L_{34} = 2 P_0 \cdot \frac{3}{2} V_0 = 3 P_0 V_0; \quad \Delta E_{int,34} = n c_V (\tau_4 - \tau_3) = 3 c_V \frac{P_0 V_0}{R};$$

$$Q_{34} = n c_P (\tau_4 - \tau_3) = 3 (c_V + R) \frac{P_0 V_0}{R}$$

Notare che la variazione totale di energia interna lungo le due vie è la stessa. Infatti

$$\Delta E_{int,12} + \Delta E_{int,24} = 3 c_V \frac{P_0 V_0}{R}; \quad \Delta E_{int,13} + \Delta E_{int,34} = 3 c_V \frac{P_0 V_0}{R}$$

Si parla di accordo con il fatto che queste grandezze termodynamiche sono funzione del stato

(Provare a vedere se questo vale anche per l'entropia, calcolandola per ciascun percorso come fatto per l'energia interna)