Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^{o} Appello — 11 luglio 2011

Esercizio 1. Sia $T \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1,1,1,2)$, $v_2 = (3,0,0,-1)$. Sia S il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite (x,y,z,w) delle equazioni

$$\begin{cases} -x + 2y + 2z = 0 \\ -x + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare $S \cap T$ e dare una base di $S + T$.

(b) Determinare un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ per cui $(T + S) \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Determinare un altro L_1, $L_1 \neq L$ tale che $(T + S) \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$?

(d) Determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T + S = T + M$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale e nelle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) si consideri il sottospazio V dato dall'equazione $3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Dare una base di V.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di $v = (1,1,1,1)$ su V.

(c) Dato $\langle(1,2,-1,0)\rangle$ sottospazio di V si determini M sottospazio di V tale che abbia dimensione due e che sia fatto da vettori ortogonali a $\langle(1,2,-1,0)\rangle$.

(d) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(1,2,-1,0)$.

Esercizio 3.

(a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1,1,0)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(0,1,-1),(2,1,2)\rangle$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(b) Tale f è unica? Perché?

(c) Per la f di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1,1,1)$ e di $(2,2,1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sia data la retta r di equazioni $x - y + z = 1$ e $x + 3z = 5$.

(a) Determinare il piano π che contiene r e che passa per il punto $S = (0,-2,-3)$.

(b) Determinare, se esiste, una retta nel piano π che passi per S e che sia ortogonale alla retta $s = (0,1,0) + \langle(1,1,1)\rangle$.

(c) Data la retta r' di equazioni $x + 3z + 2 = 0$ e $y + 2z + 2 = 0$, si dica se $r' \subset \pi$ e si determini la distanza tra le rette r e r'.

(d) È vero o falso che per ogni retta dello spazio ne esiste sempre almeno una ortogonale ad essa, contenuta in π e passante per S?

Esercizio 5. Sia data la matrice, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice A_h è diagonalizzabile o meno (sul campo dei numeri reali).

(b) Trovare per ogni $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicità maggiore di uno tutti gli autospazi.

(c) Per $h = 3$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_3P$ sia diagonale.

(d) Per gli $\bar{h}$ del punto (b) mostrare che $A_{\bar{h}}^3 = 0$. Per tali $\bar{h}$, è $A_{\bar{h}}$ simile a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^o Appello — 11 luglio 2011

Esercizio 1. Sia $T \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1,1,0,2)$, $v_2 = (3,0,1,-1)$. Sia S il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite (x,y,z,w) delle equazioni

$$\begin{cases} -x-5y+z=0 \\ -2y+z+w=0 \end{cases}$$

(a) Determinare $S \cap T$ e dare una base di $S+T$.

(b) Determinare un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ per cui $(T+S) \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Determinare un altro L_1, $L_1 \neq L$ tale che $(T+S) \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$?

(d) Determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T+S = T+M$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale e nelle coordinate (x_1,x_2,x_3,x_4) si consideri il sottospazio V dato dall'equazione $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Dare una base di V.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di $v = (1,1,1,1)$ su V.

(c) Dato $\langle(3,2,1,1)\rangle$ sottospazio di V si determini M sottospazio di V tale che abbia dimensione due e che sia fatto da vettori ortogonali a $\langle(3,2,1,1)\rangle$.

(d) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(3,2,1,1)$.

Esercizio 3.

(a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1,0,1)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(0,1,-1),(1,1,2)\rangle$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(b) Tale f è unica? Perché?

(c) Per la f di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1,1,1)$ e di $(1,2,1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sia data la retta r di equazioni $x+y+z=1$ e $x-3z=5$.

(a) Determinare il piano π che contiene r e che passa per il punto $S = (1,-2,-3)$.

(b) Determinare, se esiste, una retta nel piano π che passi per S e che sia ortogonale alla retta $s = (0,1,0) + \langle(1,1,1)\rangle$.

(c) Data la retta r' di equazioni $x-3z-3=0$ e $y+4z=0$, si dica se $r' \subset \pi$ e si determini la distanza tra le rette r e r'.

(d) È vero o falso che per ogni retta dello spazio ne esiste sempre almeno una ortogonale ad essa, contenuta in π e passante per S?

Esercizio 5. Sia data la matrice, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice A_h è diagonalizzabile o meno (sul campo dei numeri reali).

(b) Trovare per ogni $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicità maggiore di uno tutti gli autospazi.

(c) Per $h=3$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_3P$ sia diagonale.

(d) Per gli $\bar{h}$ del punto (b) mostrare che $A_{\bar{h}}^3 = 0$. Per tali $\bar{h}$, è $A_{\bar{h}}$ simile a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2

2^{o} Appello — 11 luglio 2011

Esercizio 1. Sia $T \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1,0,0,2)$, $v_2 = (1,2,-1,-1)$. Sia S il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite (x,y,z,w) delle equazioni

$$\begin{cases} -y-2z=0 \\ -4x-z+w=0 \end{cases}$$

(a) Determinare $S \cap T$ e dare una base di $S+T$.

(b) Determinare un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ per cui $(T+S) \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Determinare un altro L_1, $L_1 \neq L$ tale che $(T+S) \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$?

(d) Determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T+S = T+M$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale e nelle coordinate (x_1,x_2,x_3,x_4) si consideri il sottospazio V dato dall'equazione $x_1+x_2+x_3-x_4=0$.

(a) Dare una base di V.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di $v=(1,1,2,1)$ su V.

(c) Dato $\langle(1,1,1,3)\rangle$ sottospazio di V si determini M sottospazio di V tale che abbia dimensione due e che sia fatto da vettori ortogonali a $\langle(1,1,1,3)\rangle$.

(d) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(1,1,-1,1)$.

Esercizio 3.

(a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathrm{Ker}(f) = \langle(0,1,-1)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(1,1,-1),(2,0,2)\rangle$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(b) Tale f è unica? Perché?

(c) Per la f di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(1,1,1)$ e di $(3,1,1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sia data la retta r di equazioni $x-y+2z=1$ e $x+y+3z=0$.

(a) Determinare il piano π che contiene r e che passa per il punto $S=(1,-2,-3)$.

(b) Determinare, se esiste, una retta nel piano π che passi per S e che sia ortogonale alla retta $s = (0,1,0) + \langle(1,1,1)\rangle$.

(c) Data la retta r' di equazioni $x-5y+1=0$ e $2y+z-2=0$, si dica se $r' \subset \pi$ e si determini la distanza tra le rette r e r'.

(d) È vero o falso che per ogni retta dello spazio ne esiste sempre almeno una ortogonale ad essa, contenuta in π e passante per S?

Esercizio 5. Sia data la matrice, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & h \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice A_h è diagonalizzabile o meno (sul campo dei numeri reali).

(b) Trovare per ogni $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicità maggiore di uno tutti gli autospazi.

(c) Per $h=2$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_2P$ sia diagonale.

(d) Per gli $\bar{h}$ del punto (b) mostrare che $A_{\bar{h}}^3 = 0$. Per tali $\bar{h}$, è $A_{\bar{h}}$ simile a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° Appello — 11 luglio 2011

Esercizio 1. Sia $T \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (0, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, -1, 1)$. Sia S il sottospazio dato dalle soluzioni nelle incognite (x, y, z, w) delle equazioni

$$\begin{cases} -x + z + w = 0 \\ y + 5z + w = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare $S \cap T$ e dare una base di $S + T$.

(b) Determinare un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ per cui $(T + S) \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Determinare un altro L_1, $L_1 \neq L$ tale che $(T + S) \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus L_1$. Può essere $L \oplus L_1 = \mathbb{R}^4$?

(d) Determinare un sottospazio M di $\mathbb{R}^4$ diverso da S e di dimensione 2, tale che $T + S = T + M$.

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale e nelle coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) si consideri il sottospazio V dato dall'equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

(a) Dare una base di V.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di $v = (1, 1, 1, 1)$ su V.

(c) Dato $\langle(2, 1, -1, -1)\rangle$ sottospazio di V si determini M sottospazio di V tale che abbia dimensione due e che sia fatto da vettori ortogonali a $\langle(2, 1, -1, -1)\rangle$.

(d) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(2, 1, -1, -1)$.

Esercizio 3.

(a) Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathrm{Ker}(f) = \langle(1, 1, 1)\rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle(0, 1, 1), (2, 1, 1)\rangle$. Se ne dia la matrice associata alla base canonica.

(b) Tale f è unica? Perché?

(c) Per la f di cui al punto (a) si determini l'antimmagine di $(2, 1, 3)$ e di $(2, 2, 2)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale sia data la retta r di equazioni $x - y = 2$ e $x - y + z = 1$.

(a) Determinare il piano π che contiene r e che passa per il punto $S = (0, 1, -3)$.

(b) Determinare, se esiste, una retta nel piano π che passi per S e che sia ortogonale alla retta $s = (0, 1, 0) + \langle(1, 1, 1)\rangle$.

(c) Data la retta r' di equazioni $x - y + 4 = 0$ e $z + 5 = 0$, si dica se $r' \subset \pi$ e si determini la distanza tra le rette r e r'.

(d) È vero o falso che per ogni retta dello spazio ne esiste sempre almeno una ortogonale ad essa, contenuta in π e passante per S?

Esercizio 5. Sia data la matrice, al variare di $h \in \mathbb{R}$:

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Al variare di h dire se la matrice è diagonalizzabile o meno (sul campo dei numeri reali).

(b) Trovare per ogni $\bar{h}$ per cui $A_{\bar{h}}$ ha autovalori con molteplicità maggiore di uno tutti gli autospazi.

(c) Per $h = 10$ trovare una matrice P tale che $P^{-1}A_{10}P$ sia diagonale.

(d) Per gli $\bar{h}$ del punto (b) mostrare che $A_{\bar{h}}^3 = 0$. Per tali $\bar{h}$, è $A_{\bar{h}}$ simile a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?