

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(Ingegneria dell'Energia, seconda squadra)

PROF. F. BOTTACIN

1^a Prova di accertamento — 4 aprile 2009

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $u_1 = (0, 2, 0, -1)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 0)$. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base di $U \cap V$.
- (b) Si determini la dimensione e una base di $U + V$.

Esercizio 2. Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(0, 1, -1) = (3, -1, 0)$, $f(-2, 1, 3) = (-t, -1, t+3)$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(1, t^2+3t, -2)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

Esercizio 3. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. Per tali valori di t si determini una base di $\text{Im}(f)$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in V$.

- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora v_1 appartiene al sottospazio generato da v_2 e v_3 ;
- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora essi generano un sottospazio di dimensione 2 di V ;
- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora non esiste una base di V che contenga v_1, v_2 e v_3 .

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare.

- ☐ V ☐ F f non può essere iniettiva;
- ☐ V ☐ F f può essere iniettiva, ma solo se essa è anche suriettiva;
- ☐ V ☐ F $\text{Ker } f$ può avere dimensione 4.

Esercizio 6. Siano U e V sottospazi di \mathbb{R}^6 , con $\dim U = 4$ e $\dim V = 3$.

- ☐ V ☐ F Se V non è contenuto in U allora $U \cap V = \{0\}$;
- ☐ V ☐ F Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^6$;
- ☐ V ☐ F Deve necessariamente essere $1 \leq \dim(U \cap V) \leq 3$.

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(Ingegneria dell'Energia, seconda squadra)

PROF. F. BOTTACIN

1^a Prova di accertamento — 4 aprile 2009

Esercizio 1. Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 1, 0) = (2, 0, -2)$, $f(-2, 4, 3) = (t, t + 1, 1)$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(1, 2t - t^2, -2)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

Esercizio 2. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. Per tali valori di t si determini una base di $\text{Im}(f)$.

Esercizio 3. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $u_1 = (-2, 0, 0, 3)$ e $u_2 = (0, 1, 1, -1)$. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base di $U \cap V$.
- (b) Si determini la dimensione e una base di $U + V$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare.

- ☐ V ☐ F Ker f può avere dimensione 5;
- ☐ V ☐ F f può essere iniettiva, ma solo se essa è anche suriettiva;
- ☐ V ☐ F f non può essere iniettiva.

Esercizio 5. Sia W uno spazio vettoriale e $w_1, w_2, w_3 \in W$.

- ☐ V ☐ F Se i vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti allora essi generano un sottospazio di dimensione 2 di W ;
- ☐ V ☐ F Se i vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti allora non esiste una base di W che contenga w_1, w_2 e w_3 ;
- ☐ V ☐ F Se i vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti allora w_3 appartiene al sottospazio generato da w_1 e w_2 .

Esercizio 6. Siano U e V sottospazi di \mathbb{R}^7 , con $\dim U = 3$ e $\dim V = 5$.

- ☐ V ☐ F Deve necessariamente essere $1 \leq \dim(U \cap V) \leq 3$;
- ☐ V ☐ F Se U non è contenuto in V allora $U + V = \mathbb{R}^7$;
- ☐ V ☐ F Se U non è contenuto in V allora $U \cap V = \{0\}$.

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(Ingegneria dell'Energia, seconda squadra)

PROF. F. BOTTACIN

1^a Prova di accertamento — 4 aprile 2009

Esercizio 1. Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(1, 1, 0) = (0, 2, -2)$, $f(-2, 1, 3) = (t + 2, 5, t - 3)$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(t^2 - 1, 1, -2)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 0, 0)$ e $u_2 = (1, 0, -1, 1)$. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_4 - x_2 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base di $U \cap V$.
- (b) Si determini la dimensione e una base di $U + V$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. Per tali valori di t si determini una base di $\text{Im}(f)$.

Esercizio 4. Siano U e V sottospazi di \mathbb{R}^7 , con $\dim U = 5$ e $\dim V = 4$.

- ☐ V ☐ F Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^7$;
- ☐ V ☐ F Se V non è contenuto in U allora $U \cap V = \{0\}$;
- ☐ V ☐ F Deve necessariamente essere $2 \leq \dim(U \cap V) \leq 4$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare.

- ☐ V ☐ F $\text{Ker } f$ può avere dimensione 5;
- ☐ V ☐ F f può essere iniettiva, ma solo se essa è anche suriettiva;
- ☐ V ☐ F f non può essere iniettiva.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in V$.

- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora essi generano un sottospazio di dimensione 2 di V ;
- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora v_1 appartiene al sottospazio generato da v_2 e v_3 ;
- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora non esiste una base di V che contenga v_1, v_2 e v_3 .

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(Ingegneria dell'Energia, seconda squadra)

PROF. F. BOTTACIN

1^a Prova di accertamento — 4 aprile 2009

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $u_1 = (4, 0, -3, 0)$ e $u_2 = (-2, 1, 0, 2)$. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^4 costituito dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = x_4 - 2x_1 \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (a) Si determini la dimensione e una base di $U \cap V$.
(b) Si determini la dimensione e una base di $U + V$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f non è suriettiva. Per tali valori di t si determini una base di $\text{Im}(f)$.

Esercizio 3. Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $f(-2, 0, -1) = (t-1, 2t, 1)$, $f(2, 1, 1) = (-2, -8, -2)$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(t^2 - t, -1, 1)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale e $v_1, v_2, v_3 \in V$.

- ☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora non esiste una base di V che contenga v_1, v_2 e v_3 ;
☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora essi generano un sottospazio di dimensione 2 di V ;
☐ V ☐ F Se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti allora v_1 appartiene al sottospazio generato da v_2 e v_3 .

Esercizio 5. Siano U e V sottospazi di \mathbb{R}^5 , con $\dim U = 4$ e $\dim V = 3$.

- ☐ V ☐ F Se V non è contenuto in U allora $U \cap V = \{0\}$;
☐ V ☐ F Se V non è contenuto in U allora $U + V = \mathbb{R}^5$;
☐ V ☐ F Deve necessariamente essere $2 \leq \dim(U \cap V) \leq 3$.

Esercizio 6. Sia $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare.

- ☐ V ☐ F $\text{Ker } f$ può avere dimensione 4;
☐ V ☐ F f non può essere iniettiva;
☐ V ☐ F f può essere iniettiva, ma solo se essa è anche suriettiva.