A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

2° Appello — 9 luglio 2014

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (2,-1,0,1)$ e $u_2 = (1,2,-2,1)$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $w_1 = (3,-4,1,2)$ e $w_2 = (-2,1,2,-3)$.

(a) Si determini la dimensione e una base di $U+W$.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 2, tale che $U+L = W+L = U+W$.

(c) Dato il vettore $v = (1,-3,3,-1)$, si dica se gli insiemi

$$S = \{v+u \mid \forall u \in U\}, \qquad T = \{v+w \mid \forall w \in W\},$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

(d) Sia $Z = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+c=0,\ b \geq 0,\ d \geq 0\}$. Si dica se Z è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale generato da Z.

Esercizio 2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Dato un numero reale k, sia $f_k : V \to V$ la funzione lineare definita ponendo, per ogni matrice $A \in V$, $f_k(A) = 3\,A + k\,A^T$.

(a) Si determini la dimensione e una base del nucleo di f_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Si scriva la matrice di f_k, rispetto alla base canonica di V.

(c) Si ponga $k = 3$. Si determini una base dell'immagine di f_3.

(d) Ora si ponga $k = -2$. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f_{-2} e si dica se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (2,0,0,1)$, $u_3 = (0,1,-1,1)$, e sia W il sottospazio generato dal vettore $w = (t,4,-2,1)$, ove t è un numero reale.

(a) Si dica per quale valore di t i sottospazi U e W *non sono* in somma diretta.

(b) Dopo aver posto $t = 3$, si determini una base di $U^\perp$ e si trovi un vettore v *di norma minima*, tale che $w + v \in U^\perp$.

(c) Si scriva la matrice G del prodotto scalare usuale sul sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(d) Si determini una base ortogonale di U.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (2,-1,3)$ e $Q = (0,3,-1)$, appartenenti al piano π di equazione $2x + 2y + z - 5 = 0$.

(a) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Sul piano σ si determinino due punti A e B tali che il quadrilatero $PAQB$ sia un quadrato.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle due rette s_1 e s_2, contenute nel piano π, ortogonali tra loro e passanti per il punto P, tali che la retta passante per P e Q sia la bisettrice dell'angolo in P formato dalle rette s_1 e s_2.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2° Appello — 9 luglio 2014

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (1, 2, -1, 0)$ e $u_2 = (-2, 1, 2, -1)$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $w_1 = (-3, 2, 1, -1)$ e $w_2 = (2, 3, 2, -1)$.

(a) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 2, tale che $U + L = W + L = U + W$.

(c) Dato il vettore $v = (-1, 3, 1, -1)$, si dica se gli insiemi

$$S = \{v + u \,|\, \forall u \in U\}, \qquad T = \{v + w \,|\, \forall w \in W\},$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

(d) Sia $Z = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, b - d = 0,\ a \geq 0,\ c \geq 0\}$. Si dica se Z è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale generato da Z.

Esercizio 2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Dato un numero reale k, sia $f_k : V \to V$ la funzione lineare definita ponendo, per ogni matrice $A \in V$, $f_k(A) = k\,A + 4\,A^T$.

(a) Si determini la dimensione e una base del nucleo di f_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Si scriva la matrice di f_k, rispetto alla base canonica di V.

(c) Si ponga $k = 4$. Si determini una base dell'immagine di f_4.

(d) Ora si ponga $k = -1$. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f_{-1} e si dica se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 0, 0, 2)$, $u_3 = (1, 0, 1, -1)$, e sia W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, t, 4, -8)$, ove t è un numero reale.

(a) Si dica per quale valore di t i sottospazi U e W *non sono* in somma diretta.

(b) Dopo aver posto $t = 13$, si determini una base di $U^\perp$ e si trovi un vettore v *di norma minima*, tale che $w + v \in U^\perp$.

(c) Si scriva la matrice G del prodotto scalare usuale sul sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(d) Si determini una base ortogonale di U.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (1, -2, -1)$ e $Q = (-3, 0, 3)$, appartenenti al piano π di equazione $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

(a) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Sul piano σ si determinino due punti A e B tali che il quadrilatero $PAQB$ sia un quadrato.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle due rette s_1 e s_2, contenute nel piano π, ortogonali tra loro e passanti per il punto P, tali che la retta passante per P e Q sia la bisettrice dell'angolo in P formato dalle rette s_1 e s_2.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2

2^{o} Appello — 9 luglio 2014

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (-2, 0, 1, 1)$ e $u_2 = (2, 1, -2, 1)$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $w_1 = (3, -2, 2, -1)$ e $w_2 = (4, -2, 3, 3)$.

(a) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 2, tale che $U + L = W + L = U + W$.

(c) Dato il vettore $v = (1, 0, 1, 4)$, si dica se gli insiemi

$$S = \{v + u \mid \forall u \in U\}, \qquad T = \{v + w \mid \forall w \in W\},$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

(d) Sia $Z = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c + d = 0,\ a \geq 0,\ b \geq 0\}$. Si dica se Z è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale generato da Z.

Esercizio 2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Dato un numero reale k, sia $f_k : V \to V$ la funzione lineare definita ponendo, per ogni matrice $A \in V$, $f_k(A) = 2\,A - k\,A^T$.

(a) Si determini la dimensione e una base del nucleo di f_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Si scriva la matrice di f_k, rispetto alla base canonica di V.

(c) Si ponga $k = -2$. Si determini una base dell'immagine di f_{-2}.

(d) Ora si ponga $k = 5$. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f_5 e si dica se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0, -2)$, $u_3 = (1, -1, 2, 0)$, e sia W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, -2, 2, t)$, ove t è un numero reale.

(a) Si dica per quale valore di t i sottospazi U e W *non sono* in somma diretta.

(b) Dopo aver posto $t = -39$, si determini una base di $U^\perp$ e si trovi un vettore v *di norma minima*, tale che $w + v \in U^\perp$.

(c) Si scriva la matrice G del prodotto scalare usuale sul sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(d) Si determini una base ortogonale di U.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (-2, 1, 2)$ e $Q = (2, -3, 0)$, appartenenti al piano π di equazione $2x + y + 2z - 1 = 0$.

(a) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Sul piano σ si determinino due punti A e B tali che il quadrilatero $PAQB$ sia un quadrato.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle due rette s_1 e s_2, contenute nel piano π, ortogonali tra loro e passanti per il punto P, tali che la retta passante per P e Q sia la bisettrice dell'angolo in P formato dalle rette s_1 e s_2.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2^{o} Appello — 9 luglio 2014

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 2, -1)$ e $u_2 = (2, -1, 1, 2)$, e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $w_1 = (1, -1, 2, 3)$ e $w_2 = (3, 2, 1, -5)$.

(a) Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

(b) Si determini, se possibile, un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$, di dimensione 2, tale che $U + L = W + L = U + W$.

(c) Dato il vettore $v = (2, 0, 3, 1)$, si dica se gli insiemi

$$S = \{v + u \,|\, \forall u \in U\}, \qquad T = \{v + w \,|\, \forall w \in W\},$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$.

(d) Sia $Z = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a - b = 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0\}$. Si dica se Z è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale generato da Z.

Esercizio 2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Dato un numero reale k, sia $f_k : V \to V$ la funzione lineare definita ponendo, per ogni matrice $A \in V$, $f_k(A) = k\,A - 5\,A^T$.

(a) Si determini la dimensione e una base del nucleo di f_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Si scriva la matrice di f_k, rispetto alla base canonica di V.

(c) Si ponga $k = -5$. Si determini una base dell'immagine di f_{-5}.

(d) Ora si ponga $k = 3$. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f_3 e si dica se essa è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 0, 0, -1)$, $u_3 = (1, 2, -1, 0)$, e sia W il sottospazio generato dal vettore $w = (t, 4, -1, 5)$, ove t è un numero reale.

(a) Si dica per quale valore di t i sottospazi U e W *non sono* in somma diretta.

(b) Dopo aver posto $t = 13$, si determini una base di $U^\perp$ e si trovi un vettore v *di norma minima*, tale che $w + v \in U^\perp$.

(c) Si scriva la matrice G del prodotto scalare usuale sul sottospazio U, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$.

(d) Si determini una base ortogonale di U.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (-2, 0, -1)$ e $Q = (2, -2, 3)$, appartenenti al piano π di equazione $x - 2y - 2z = 0$.

(a) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(b) Sul piano σ si determinino due punti A e B tali che il quadrilatero $PAQB$ sia un quadrato.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle due rette s_1 e s_2, contenute nel piano π, ortogonali tra loro e passanti per il punto P, tali che la retta passante per P e Q sia la bisettrice dell'angolo in P formato dalle rette s_1 e s_2.