A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

1º Appello — 16 giugno 2014

Esercizio 1. Dati i vettori $u_1 = (1,1,1,1)$ e $u_2 = (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$, siano $f_1,\ f_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ le funzioni lineari definite ponendo $f_1(v) = v \cdot u_1$ e $f_2(v) = v \cdot u_2$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dica se $\mathbb{R}^4$ è somma dei nuclei di f_1 e f_2 e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$.

(b) Si determini un sottospazio $U_1 \subset \mathrm{Ker}(f_1)$ e un sottospazio $U_2 \subset \mathrm{Ker}(f_2)$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini $f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(1)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tale che entrambe le funzioni composte $f_1 \circ g$ e $f_2 \circ g$ siano l'identità (*le risposte devono essere giustificate*).

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori $u = (1,-1,0)$, $v = (0,-2,-1)$, $w = (4,-1,1)$.
Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(u) = w$, $f(v) = 2w$ e $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica e si determini una base del nucleo di f.

(b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Si determini una matrice invertibile S tale che si abbia $A = SBS^{-1}$. Una tale matrice S è unica?

(d) Si dica se esiste una matrice invertibile R tale che si abbia $A = RCR^{-1}$, ove C è la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & t \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A. Si determinino inoltre una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $A = PDP^{-1}$.

(b) Si dica per quale valore di t la matrice B è simile alla matrice A.

(c) Per il valore di t trovato al punto (b), si determini una matrice invertibile R tale che si abbia $B = RAR^{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia $\mathscr{S}$ la sfera di centro $C = (2,-1,1)$, passante per il punto $A = (3,1,0)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano tangente a $\mathscr{S}$ nel punto A.

(b) Sia $\mathscr{C}$ la circonferenza ottenuta intersecando la sfera $\mathscr{S}$ con il piano $\pi : 3x + y + 2z - 2 = 0$. Si trovi il centro e il raggio di $\mathscr{C}$.

(c) Dopo aver verificato che il punto $P = (0,-2,2)$ appartiene alla circonferenza $\mathscr{C}$, si scrivano le equazioni parametriche della retta r tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.

(d) Si stabilisca se esistono delle rette passanti per $Q = (1,0,2)$ che non intersecano la sfera $\mathscr{S}$.

B

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

1º Appello — 16 giugno 2014

Esercizio 1. Dati i vettori $u_1 = (1, -1, 1, -1)$ e $u_2 = (2, 3, 1, 4) \in \mathbb{R}^4$, siano f_1, $f_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ le funzioni lineari definite ponendo $f_1(v) = v \cdot u_1$ e $f_2(v) = v \cdot u_2$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dica se $\mathbb{R}^4$ è somma dei nuclei di f_1 e f_2 e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$.

(b) Si determini un sottospazio $U_1 \subset \mathrm{Ker}(f_1)$ e un sottospazio $U_2 \subset \mathrm{Ker}(f_2)$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini $f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(1)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tale che entrambe le funzioni composte $f_1 \circ g$ e $f_2 \circ g$ siano l'identità (*le risposte devono essere giustificate*).

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori $u = (0, 2, 1)$, $v = (2, -3, -1)$, $w = (-4, 1, -1)$.
Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(u) = w$, $f(v) = -2w$ e $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica e si determini una base del nucleo di f.

(b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Si determini una matrice invertibile S tale che si abbia $A = SBS^{-1}$. Una tale matrice S è unica?

(d) Si dica se esiste una matrice invertibile R tale che si abbia $A = RCR^{-1}$, ove C è la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A. Si determinino inoltre una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $A = PDP^{-1}$.

(b) Si dica per quale valore di t la matrice B è simile alla matrice A.

(c) Per il valore di t trovato al punto (b), si determini una matrice invertibile R tale che si abbia $B = RAR^{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia $\mathscr{S}$ la sfera di centro $C = (-1, 3, 0)$, passante per il punto $A = (2, 2, 1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano tangente a $\mathscr{S}$ nel punto A.

(b) Sia $\mathscr{C}$ la circonferenza ottenuta intersecando la sfera $\mathscr{S}$ con il piano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$. Si trovi il centro e il raggio di $\mathscr{C}$.

(c) Dopo aver verificato che il punto $P = (0, 2, 3)$ appartiene alla circonferenza $\mathscr{C}$, si scrivano le equazioni parametriche della retta r tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.

(d) Si stabilisca se esistono delle rette passanti per $Q = (1, 2, 1)$ che non intersecano la sfera $\mathscr{S}$.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

1º Appello — 16 giugno 2014

Esercizio 1. Dati i vettori $u_1 = (1, -1, -1, 1)$ e $u_2 = (4, 3, 2, 1) \in \mathbb{R}^4$, siano $f_1,\ f_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ le funzioni lineari definite ponendo $f_1(v) = v \cdot u_1$ e $f_2(v) = v \cdot u_2$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dica se $\mathbb{R}^4$ è somma dei nuclei di f_1 e f_2 e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$.

(b) Si determini un sottospazio $U_1 \subset \mathrm{Ker}(f_1)$ e un sottospazio $U_2 \subset \mathrm{Ker}(f_2)$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini $f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(1)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tale che entrambe le funzioni composte $f_1 \circ g$ e $f_2 \circ g$ siano l'identità (*le risposte devono essere giustificate*).

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori $u = (2, 0, 1)$, $v = (2, -1, 2)$, $w = (1, 2, -3)$.
Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(u) = w$, $f(v) = 2w$ e $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica e si determini una base del nucleo di f.

(b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Si determini una matrice invertibile S tale che si abbia $A = SBS^{-1}$. Una tale matrice S è unica?

(d) Si dica se esiste una matrice invertibile R tale che si abbia $A = RCR^{-1}$, ove C è la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ t & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A. Si determinino inoltre una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $A = PDP^{-1}$.

(b) Si dica per quale valore di t la matrice B è simile alla matrice A.

(c) Per il valore di t trovato al punto (b), si determini una matrice invertibile R tale che si abbia $B = RAR^{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia $\mathscr{S}$ la sfera di centro $C = (1, 1, 2)$, passante per il punto $A = (-1, 2, 3)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano tangente a $\mathscr{S}$ nel punto A.

(b) Sia $\mathscr{C}$ la circonferenza ottenuta intersecando la sfera $\mathscr{S}$ con il piano $\pi : x - 2y + 2z + 4 = 0$. Si trovi il centro e il raggio di $\mathscr{C}$.

(c) Dopo aver verificato che il punto $P = (0, 3, 1)$ appartiene alla circonferenza $\mathscr{C}$, si scrivano le equazioni parametriche della retta r tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.

(d) Si stabilisca se esistono delle rette passanti per $Q = (2, 0, 1)$ che non intersecano la sfera $\mathscr{S}$.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

1º Appello — 16 giugno 2014

Esercizio 1. Dati i vettori $u_1 = (-1, 1, 1, 1)$ e $u_2 = (3, 1, 4, 2) \in \mathbb{R}^4$, siano f_1, $f_2 \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ le funzioni lineari definite ponendo $f_1(v) = v \cdot u_1$ e $f_2(v) = v \cdot u_2$, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

(a) Si dica se $\mathbb{R}^4$ è somma dei nuclei di f_1 e f_2 e si determini una base di $\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$.

(b) Si determini un sottospazio $U_1 \subset \mathrm{Ker}(f_1)$ e un sottospazio $U_2 \subset \mathrm{Ker}(f_2)$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$.

(c) Si determini $f_1^{-1}(1) \cap f_2^{-1}(1)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tale che entrambe le funzioni composte $f_1 \circ g$ e $f_2 \circ g$ siano l'identità (*le risposte devono essere giustificate*).

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori $u = (1, 0, -2)$, $v = (-1, 5, 4)$, $w = (1, 3, -1)$.
Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(u) = w$, $f(v) = -2w$ e $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica e si determini una base del nucleo di f.

(b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f sia $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Si determini una matrice invertibile S tale che si abbia $A = SBS^{-1}$. Una tale matrice S è unica?

(d) Si dica se esiste una matrice invertibile R tale che si abbia $A = RCR^{-1}$, ove C è la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Si considerino le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} t & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A. Si determinino inoltre una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $A = PDP^{-1}$.

(b) Si dica per quale valore di t la matrice B è simile alla matrice A.

(c) Per il valore di t trovato al punto (b), si determini una matrice invertibile R tale che si abbia $B = RAR^{-1}$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia $\mathscr{S}$ la sfera di centro $C = (4, -2, -3)$, passante per il punto $A = (1, -1, -1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano tangente a $\mathscr{S}$ nel punto A.

(b) Sia $\mathscr{C}$ la circonferenza ottenuta intersecando la sfera $\mathscr{S}$ con il piano $\pi : 2x + 3y - z - 1 = 0$. Si trovi il centro e il raggio di $\mathscr{C}$.

(c) Dopo aver verificato che il punto $P = (2, -1, 0)$ appartiene alla circonferenza $\mathscr{C}$, si scrivano le equazioni parametriche della retta r tangente a $\mathscr{C}$ nel punto P.

(d) Si stabilisca se esistono delle rette passanti per $Q = (3, 0, -2)$ che non intersecano la sfera $\mathscr{S}$.