Lezione 18 - 19/04/2024

facciamo qualche esercizio:

Es 3

Calcolare l'area dei seguenti segnali

- sinc(t)
- $\text{sinc}^3(t)$

ESERCIZIO 3b

TROVARE L'AREA DI $s(t) = \text{sinc}^3(t)$

Sol. L'AREA DI s COINCIDE CON LA TRASFORMATA IN 0 (slide 57)

$$s(t) = \text{sinc}^3(t) = \underbrace{\text{sinc}(t)}_{x(t)} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2(t)}_{y(t)}$$

$$A_s = S(j\omega)\Big|_{\omega=0}$$

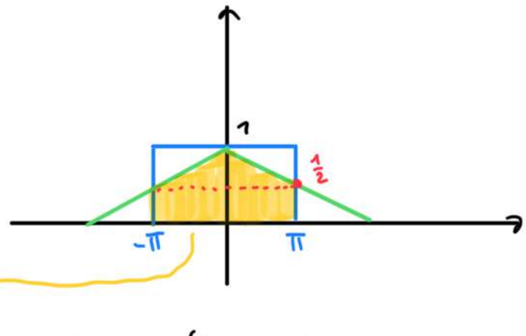
$$X(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$Y(j\omega) = \text{triangle}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, Y(j(\omega - \upsilon))\, d\upsilon$$

FUNZIONE PARI

$$A_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\upsilon)\, Y(-j\upsilon)\, d\upsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \text{triang}\left(\frac{+\omega}{2\pi}\right)$$



$$A_s = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{4}$$

(ho calcolato l'area graficamente senza fare integrali)

Es 1

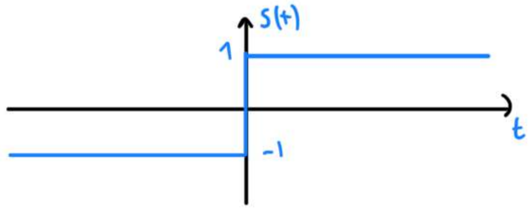
Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali

a) **Sinc** $s(t) = \text{sinc}(t)$
b) **Rettangolo** scalato $s(t) = \text{rect}(t/T)$
c) **Sinc** scalato $s(t) = \text{sinc}(t/T)$
d) Segnale **costante** $s(t) = 1$
e) **Delta traslato** $s(t) = \delta(t-t_0)$
f) **Esponenziale** complesso $s(t) = e^{j\omega_0 t}$
g) **Sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ oppure $s(t) = \sin(\omega_0 t +\varphi_0)$
h) **Sinc quadro** $s(t) = \text{sinc}^2(t/T)$
i) **Triangolo** $s(t) = \text{triangle}(t/D)$
j) **Modulazione** double-side-band $s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$
k) Convoluzione $s(t) = x*x(t)$ con $x(t) = e^{-at}\, 1(t)$, $a>0$
l) Convoluzione $s(t) = \text{sinc}*\text{sinc}(t)$
m) Trasformazione $s(t) = x(-2t+t_0)$
n) Segnale **segno** $s(t) = \text{sign}(t)$
o) Segnale **gradino** $s(t) = 1(t)$

ESERCIZIO 1m (mi ricordo cosa dice regola derivazione slide 59)

$s(t) = \text{sign}(t)$

$S(j\omega) = ?$



Sol. SE PROVASSIMO A INTEGRARE

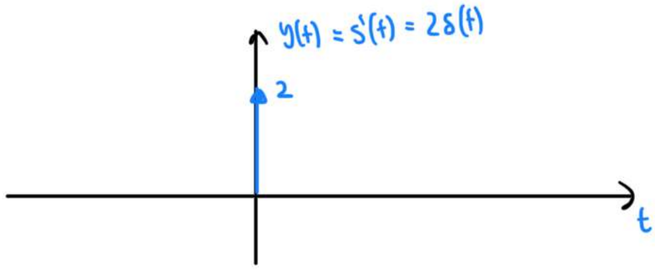
$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \overset{\text{SPEZZO}}{=} \int_{-\infty}^{0} -1\, e^{-j\omega t} + \int_{0}^{+\infty} e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{-e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{0}^{+\infty}$$

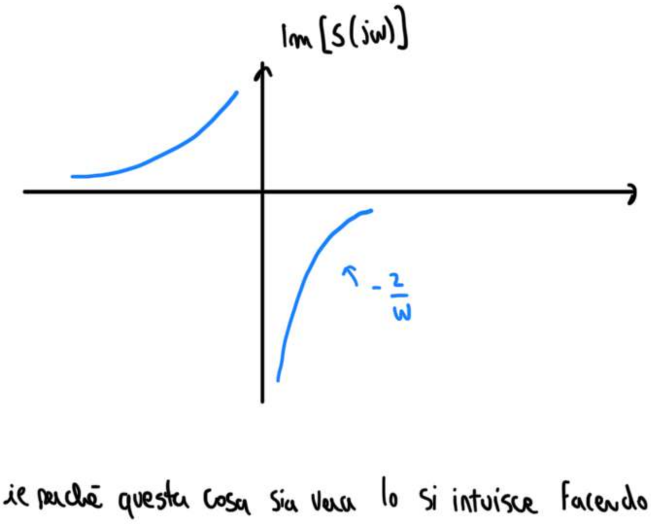
$$= \frac{1 + e^{j\omega\infty}}{-j\omega} + \frac{e^{-j\omega\infty} - 1}{-j\omega} = \frac{2 - e^{j\omega\infty} - e^{-j\omega\infty}}{j\omega} = \frac{2 - \cos(\omega\infty)}{j\omega}$$

← RIMANE INDETERMINATA
questa strada non è percorribile

USO LA REGOLA DI DERIVAZIONE

$$\begin{array}{ccccc} y(t) & = & s'(t) & = & 2\delta(t) \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} \\ Y(j\omega) & = & j\omega\, S(j\omega) & = & 2 \end{array}$$





$S(j\omega) = \dfrac{2}{j\omega}$

(lo si intuisce)

ie perché questa cosa sia vera lo si intuisce facendo il prossimo esercizio

Es 1

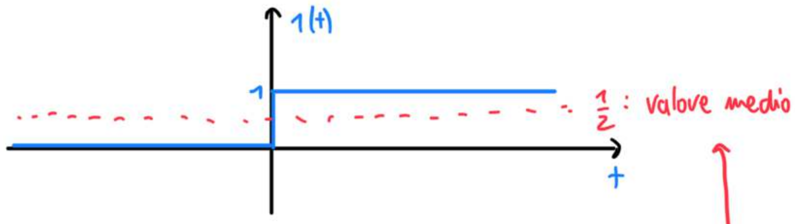
Calcolare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali

a) **Sinc** $s(t) = sinc(t)$
b) **Rettangolo** scalato $s(t) = rect(t/T)$
c) **Sinc** scalato $s(t) = sinc(t/T)$
d) Segnale **costante** $s(t) = 1$
e) **Delta traslato** $s(t) = \delta(t-t_0)$
f) **Esponenziale** complesso $s(t) = e^{j\omega_0 t}$
g) **Sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ oppure $s(t) = \sin(\omega_0 t +\varphi_0)$
h) **Sinc quadro** $s(t) = sinc^2(t/T)$
i) **Triangolo** $s(t) = triangle(t/D)$
j) **Modulazione** double-side-band $s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$
k) Convoluzione $s(t) = x*x(t)$ con $x(t) = e^{-at}\, 1(t)$, $a>0$
l) Convoluzione $s(t) = sinc*sinc(t)$
m) Trasformazione $s(t) = x(-2t+t_0)$
n) Segnale **segno** $s(t) = sign(t)$
o) Segnale **gradino** $s(t) = 1(t)$

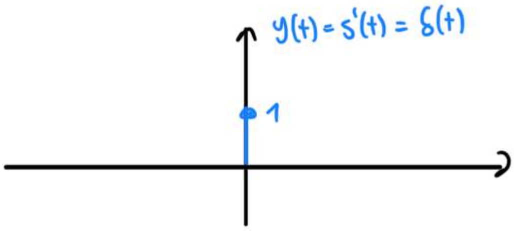
ESERCIZIO 10

$s(t) = 1(t)$

$S(j\omega) = ?$



SOL. REGOLA DI DERIVAZIONE



$$Y(j\omega) = j\omega S(j\omega) = 1$$

$$S(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ ? & \omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{sign}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$$

ESPRESSIONE ALTERNATIVA DEL GRADINO: $1(t) = \frac{1}{2}\,\text{sign}(t) + \frac{1}{2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\,\frac{2}{j\omega} + \frac{1}{2}\,2\pi\,\delta(\omega)$

$$= \frac{1}{j\omega} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{VALORE MEDIO}} \cdot 2\pi\,\delta(\omega)$$

ABBIAMO IMPARATO CHE: (espressioni notevoli)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sign}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega} \\ 1(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(j\omega) \end{aligned}}$$

NOTA: SULL'INVERSIONE DELLA REGOLA DI DERIVAZIONE

$$y(t) = s'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{Y(j\omega)}_{\text{SIA CONOSCIUTA}} = j\omega\, S(j\omega)$$

ALLORA:

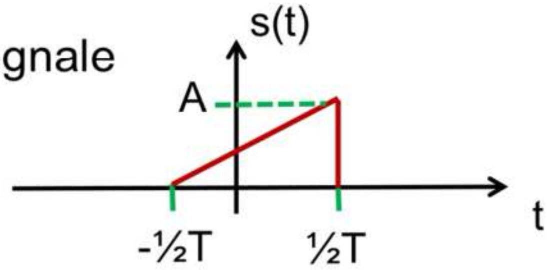
$$\boxed{S(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + m_s\, 2\pi\,\delta(\omega)}$$

per la SDF i coefficienti erano definiti così:

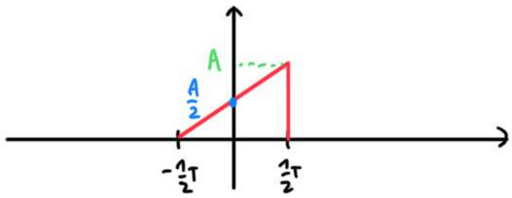
$$S(j\omega) = \begin{cases} Y(j\omega) & S(j\omega) \neq 0 \\ m_s & S(j\omega) = 0 \end{cases}$$

Es 2

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

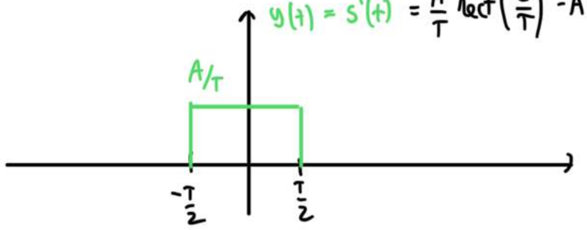


$S(j\omega) = ?$



Sol. $\frac{A}{2} + t\,\frac{A/2}{T/2} = \frac{A}{2} + \frac{tA}{T}$

$y(t) = s'(t) = \frac{A}{T}\, \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) - A\,\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$



$$s(t) = \frac{A}{T}\, \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) - A\,\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$S(j\omega) = \frac{A}{T}\, T\, \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) - A e^{-j\omega \frac{T}{2}}$$

$$= j\omega\, S(j\omega)$$

$$S(j\omega) = \frac{A}{j\omega}\left[\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) - e^{-j\omega \frac{T}{2}}\right]$$

SOLUZIONE ALTERNATIVA: ESPRIMIAMO IL SEGNALE COME PRODOTTO TRA rect E t

$$s(t) = A\, \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{t}{T}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{A}{2}\, \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}_{x(t)} + t \cdot \underbrace{\frac{A}{T}\, \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)}_{y(t)}$$

$$\mathcal{F} \Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$X(j\omega) = \frac{A}{2} \cdot T\, \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) \qquad Y(j\omega) = \frac{A}{T}\, T\, \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$s(t) = x(t) + t\,y(t)$$

$$S(j\omega) = X(j\omega) + j\,Y'(j\omega)$$

$$= \frac{AT}{2}\, \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) + j\,\frac{AT}{2\pi}\, \text{sinc}'\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$