A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

4º Appello — 6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U_1, U_2 sottospazi di V, con $\dim U_1 = 5$ e $\dim U_2 = 2$. Dimostrare che $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$. Deve necessariamente essere $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$?

Esercizio 2. È possibile che esista una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$? Perché? E se fosse $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 3. Sia Q una matrice $n \times n$ reale ortogonale (cioè tale che $Q^{-1} = {}^tQ$). Mostrare che $v \cdot w = (Qv) \cdot (Qw)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (0, 3, -1, 2)$, $v_2 = (1, 2, -2, 0)$ e $v_3 = (2, 1, t, -2)$.

(a) Determinare la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$. Si scriva una base di U.

(c) Sia $W \subset U$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 1, 0, -1)$, $w_2 = (-2, 0, 1, 1)$. Si trovi una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U = W \oplus U'$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f(x, y, z) = (x + 2y + tz, 2x + 4y - 4z, -x + ty + 2z)$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e determinare il rango di f, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per il valore di t per cui il rango di f non è massimo, trovare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b), determinare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ del dominio e una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ del codominio tali che la matrice di f rispetto a tali basi sia $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico di $A_{(t)}$ e si determini per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si dica se è possibile trovare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice che si ottiene per $t = -3$.

Esercizio 7. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $2x - 3y + z + 4 = 0$ e i punti $A = (-2, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -4)$.

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(b) Dato il punto $P = (1, 4, -2)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P.

(c) Trovare le equazioni che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, G. GEROTTO, R. KLOOSTERMAN

4° Appello — 6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U_1, U_2 sottospazi di V, con $\dim U_1 = 5$ e $\dim U_2 = 2$. Dimostrare che $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$. Deve necessariamente essere $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$?

Esercizio 2. È possibile che esista una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$? Perché? E se fosse $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 3. Sia Q una matrice $n \times n$ reale ortogonale (cioè tale che $Q^{-1} = {}^tQ$). Mostrare che $v \cdot w = (Qv) \cdot (Qw)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (2, 0, -1, 3)$, $v_2 = (-1, 2, 3, -5)$ e $v_3 = (3, t, 1, 1)$.

(a) Determinare la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$. Si scriva una base di U.

(c) Sia $W \subset U$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, 1, 1)$, $w_2 = (2, -1, -7, -1)$. Si trovi una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U = W \oplus U'$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f(x, y, z) = (3x - 2y + tz, -3x + 2y - 4z, -6x + ty - 8z)$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e determinare il rango di f, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per il valore di t per cui il rango di f non è massimo, trovare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b), determinare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ del dominio e una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ del codominio tali che la matrice di f rispetto a tali basi sia $\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico di $A_{(t)}$ e si determini per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si dica se è possibile trovare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice che si ottiene per $t = 2$.

Esercizio 7. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $x + 2y - 3z - 3 = 0$ e i punti $A = (3, 0, 0)$ e $B = (0, 0, -1)$.

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(b) Dato il punto $P = (2, -1, 1)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P.

(c) Trovare le equazioni che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

4º Appello — 6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U_1, U_2 sottospazi di V, con $\dim U_1 = 5$ e $\dim U_2 = 2$. Dimostrare che $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$. Deve necessariamente essere $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$?

Esercizio 2. È possibile che esista una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$? Perché? E se fosse $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 3. Sia Q una matrice $n \times n$ reale ortogonale (cioè tale che $Q^{-1} = {}^tQ$). Mostrare che $v \cdot w = (Qv) \cdot (Qw)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (3, -1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 2, -3, 1)$ e $v_3 = (5, t, 5, -1)$.

(a) Determinare la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $3x_2 - x_3 + x_4 = 0$. Si scriva una base di U.

(c) Sia $W \subset U$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 2, 4, -2)$, $w_2 = (-3, 0, 1, 1)$. Si trovi una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U = W \oplus U'$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f(x, y, z) = (2x - y + tz, -4x + 2y + 6z, 6x + ty - 9z)$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e determinare il rango di f, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per il valore di t per cui il rango di f non è massimo, trovare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b), determinare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ del dominio e una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ del codominio tali che la matrice di f rispetto a tali basi sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & t \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico di $A_{(t)}$ e si determini per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si dica se è possibile trovare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice che si ottiene per $t = 3$.

Esercizio 7. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $3x - y + z + 2 = 0$ e i punti $A = (0, 0, -2)$ e $B = (0, 2, 0)$.

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(b) Dato il punto $P = (3, 2, -1)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P.

(c) Trovare le equazioni che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB.

D

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

4º Appello — 6 febbraio 2018

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U_1, U_2 sottospazi di V, con $\dim U_1 = 5$ e $\dim U_2 = 2$. Dimostrare che $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 1$. Deve necessariamente essere $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$?

Esercizio 2. È possibile che esista una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$? Perché? E se fosse $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$?

Esercizio 3. Sia Q una matrice $n \times n$ reale ortogonale (cioè tale che $Q^{-1} = {}^tQ$). Mostrare che $v \cdot w = (Qv) \cdot (Qw)$, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (-1, 3, 0, 1)$, $v_2 = (2, -5, 1, -2)$ e $v_3 = (1, t, 2, -1)$.

(a) Determinare la dimensione di V, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione $2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$. Si scriva una base di U.

(c) Sia $W \subset U$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 2, 1, 1)$, $w_2 = (0, 4, 1, -2)$. Si trovi una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U = W \oplus U'$.

Esercizio 5. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f(x, y, z) = (-3x + y + tz, 9x - 3y - 6z, -6x + ty + 4z)$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche e determinare il rango di f, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per il valore di t per cui il rango di f non è massimo, trovare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Per il valore di t trovato nel punto (b), determinare una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ del dominio e una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ del codominio tali che la matrice di f rispetto a tali basi sia $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

Esercizio 6. Si consideri la matrice

$$A_{(t)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Si scriva il polinomio caratteristico di $A_{(t)}$ e si determini per quali valori di t gli autovalori di $A_{(t)}$ sono reali.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice ha autovalori con molteplicità maggiore di 1. Per ciascuno dei valori di t così trovati si dica se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.

(c) Si dica se è possibile trovare una base *ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori della matrice che si ottiene per $t = -2$.

Esercizio 7. Nello spazio affine euclideo tridimensionale consideriamo il piano π di equazione $2x - y + 4z - 4 = 0$ e i punti $A = (0, -4, 0)$ e $B = (0, 0, 1)$.

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B.

(b) Dato il punto $P = (1, 3, 2)$ determinare il punto sul piano π di minima distanza da P.

(c) Trovare le equazioni che descrivono l'insieme dei punti $C \in \pi$ tali che il triangolo ABC sia isoscele, di base AB.