COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI e FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Ingegneria dell'Informazione - Ingegneria Elettronica
8 Febbraio 2021

Esercizio 1. [9.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2(1+s^2)}{(1-0.2s+s^2)\left(1+\frac{s}{100}\right)^2}$$

è richiesto di

i) tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;

ii) tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$ (non è richiesto il calcolo delle intersezioni con gli assi);

iii) studiare la stabilità del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare del parametro reale K, ricorrendo al Criterio di Nyquist.

Esercizio 2. [8 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s-1)^2}{s^2(s+a)^2}$$

Si determini per quale valore di $a > 0$ il luogo delle radici presenta un punto doppio in $s = 4$. Per tale valore di a è richiesto il tracciamento del luogo delle radici positivo e negativo, calcolando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e studiando di conseguenza la stabilità BIBO al variare di K sui numeri reali del sistema retroazionato $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$.

Esercizio 3. [8 punti] i) Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1+0.2s+s^2}$$

è richiesto il progetto di un controllore stabilizzante $C(s)$ di tipo PID (eventualmente solo P, PI, o PD) che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1, con errore di regime permanente alla rampa lineare $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.1$, mentre il sistema in catena aperta abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10$ rad/s e margine di fase $m_\phi \simeq 90°$.

ii) Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+\frac{s}{0.1p}}{\left(1+\frac{s}{p}\right)^2\left(1+\frac{s}{10p}\right)}$$

dove p è un numero reale positivo, si dimostri che esiste sempre un controllore stabilizzante di tipo PD

$$C_{PD}(s) = K_p\left(1+\frac{K_d}{K_p}s\right)$$

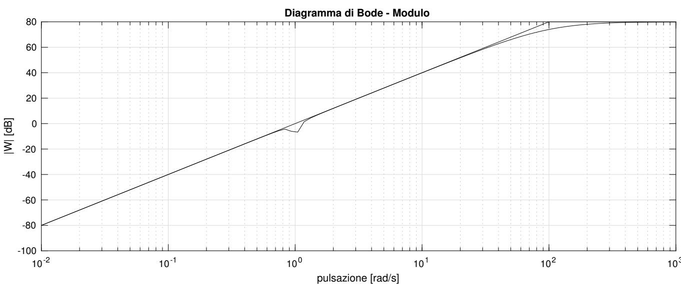
che garantisce che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con errore di regime permanente al gradino $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-1}$s, mentre il sistema in catena aperta abbia pulsazione di attraversamento $\omega_a = \omega_a^*$ rad/s e margine di fase $m_\phi \simeq 90°$, per ogni scelta di $\omega_a^* \geq 100p$.

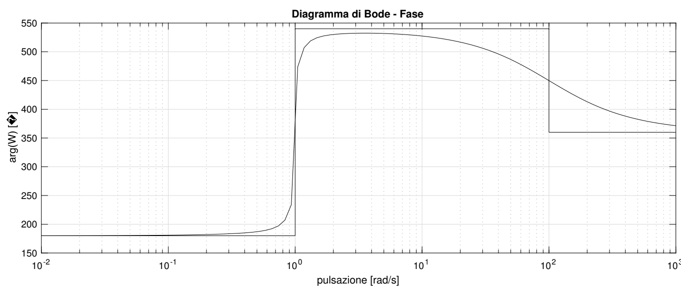
NOTA. Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate da valori numerici e ragionamenti. L'assenza di spiegazioni può portare a non conseguire il punteggio completo attribuito all'esercizio.

Teoria. [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni, qualora alcune delle ipotesi della versione iniziale del criterio non siano soddisfatte.

SOLUZIONI

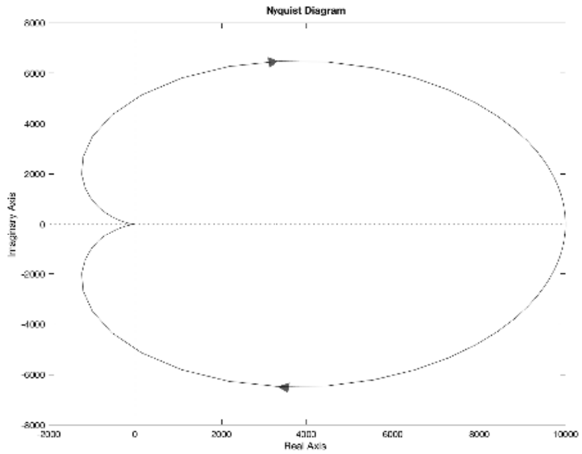
Esercizio 1. i) Il diagramma di Bode è illustrato in figura



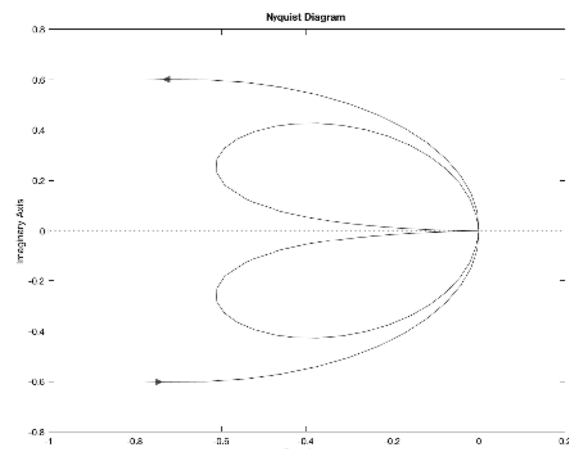


Il diagramma dei moduli asintotico parte con una pendenza di 40dB/dec, passa per l'origine per $\omega = 1$ rad/s, e continua a salire con pendenza +40dB/dec fino a $\omega = 100$ rad/s dove diventa piatto con valore dell'ordinata pari a +80dB. Il diagramma dei moduli reale esibisce un picco di antirisonanza infinito (anche se la figura lo mostra erroneamente finito) per $\omega = 1$ rad/s.
Il diagramma delle fasi asintotico parte da 180°; per $\omega = 10^0$ rad/s sale a 540°; poi scende a 360° per $\omega = 100$ rad/s. Il diagramma delle fasi reale parte da 180°. Quando arriva a sinistra di 10^0 rad/s sale prima rapidamente ma gradualmente a 270°; poi in 1 rad/s salta di 180°. Subito dopo cresce rapidamente di 90°, portandosi al valore 540°, per poi scendere gradualmente a 360°.

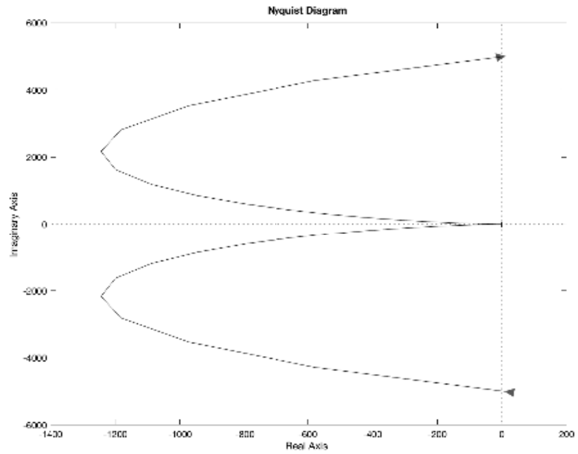
ii) Il diagramma di Nyquist parte dall'origine parallelo al semiasse reale negativo; poi ruota in verso antiorario allontanandosi dall'origine per poi riportarsi all'origine attraversandola con tangente parallela all'asse immaginario dal basso verso l'alto, poi ruota in verso antiorario verso il semiasse reale negativo, crescendo di modulo. Poi inverte il verso di rotazione e ruota in verso orario fino a portarsi nel punto $s = 10^4$ sul semiasse reale positivo.



Dettaglio per valori di $|\omega|$ piccoli $(0 < |\omega| < 1.1)$:



Dettaglio per $0 < |\omega| < 100$:



iii) Analizzando la posizione del diagramma di Nyquist rispetto al punto critico $-\frac{1}{K}$, si hanno i seguenti casi (notando che $n_{G_+} = 2$ e quindi che $n_{W_+} = 2 - N$)

$$\begin{array}{lll} K > 0 & \Rightarrow & n_{W_+} = 2 \\ K < -10^{-4} & \Rightarrow & n_{W_+} = 3 \\ K = -10^{-4} & \Rightarrow & W(s) \text{ impropria} \\ -10^{-4} < K < 0 & \Rightarrow & n_{W_+} = 2 \end{array}$$

Quindi la $W(s)$ non è mai BIBO stabile, mentre per $K = -10^{-4}$ la condizione 2) del criterio di Nyquist viene violata per $\omega = \pm\infty$ e la $W(s)$ risulta impropria.

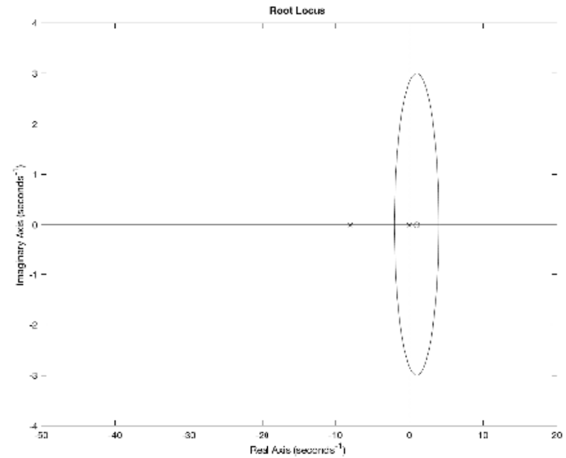
Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi porge (dopo aver eliminato i fattori s, $s-1$ e $s+a$ che corrispondono a zeri e poli doppi della $G(s)$ e che pertanto non sono considerati punti doppi del luogo)

$$s^2 - 2s - a = 0$$

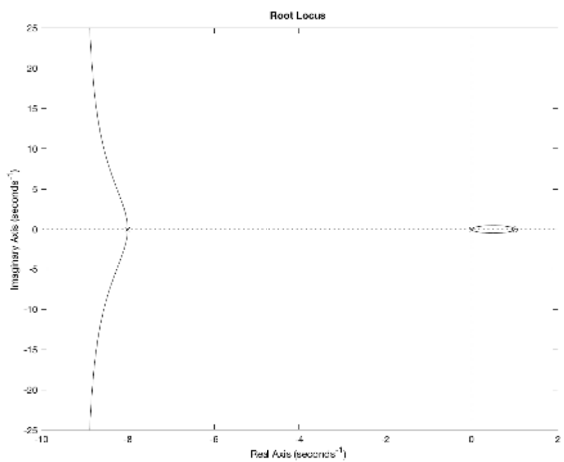
che ha come radice $s = 4$ se e solo se $a = 8$. per tale valore di a l'altra radice della precedente equazione è $s = -2$. Si trova che i valori di K corrispondenti a quei due punti doppi sono $K = -16$ per $s = -2$ e $K = -256$ per $s = 4$. Quindi entrambi i punti doppi appartengono al luogo negativo.
Il centro della stella di asintoti è in $(-9, 0)$; gli asintoti hanno direzioni $\pi/2$ e $3\pi/2$ nel luogo positivo, 0 e π nel luogo negativo. Per determinare le intersezioni con gli assi poniamo

$$d(j\omega) + Kn(j\omega) = [\omega^2(\omega^2 - 64) + K(1 - \omega^2)] - j2\omega(K + 8\omega^2) = 0$$

e otteniamo le sole soluzioni $\omega = 0$ per $K = 0$ e $\omega = \pm\sqrt{8}$ per $K = -64$. Quindi anche le intersezioni con gli assi immaginari appartengono al luogo negativo.
Si noti che l'asse reale appartiene interamente al luogo negativo.
Il luogo negativo ha un ramo che parte da -8 e va a $-\infty$ sull'asse reale, due rami che partono da -8 e 0 e si incrociano in $s = -2$ (per $K = -16$) da cui poi si dipartono due rami che attraversano l'asse immaginario in $\pm j\sqrt{8}$ (per $K = -64$) e poi si chiudono in $s = 4$ per $K = -256$. Poi tali due rami vanno l'uno a 1 lungo l'asse reale e l'altro a $+\infty$, sempre lungo l'asse reale. Infine c'e' un ramo che va da 0 a 1.

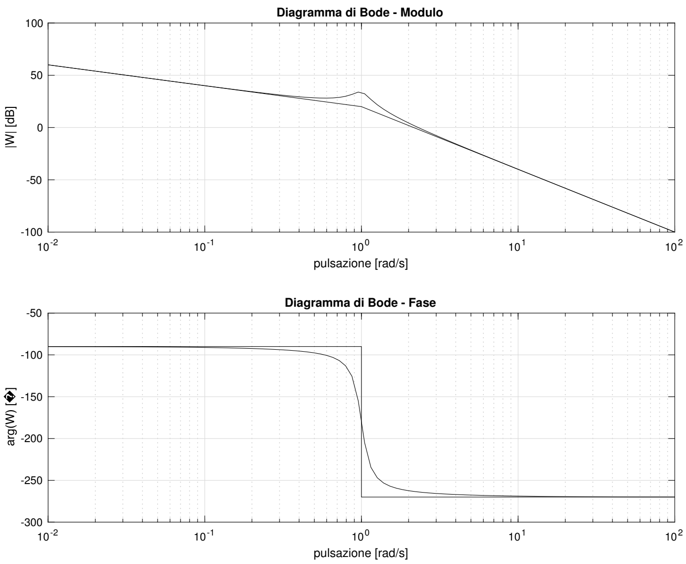


Il luogo positivo ha due rami che partono da -8 e vanno ai due asintoti verticali il cui baricentro è in $(-9, 0)$, mentre due rami partono da 0 e vanno a chiudersi in 1, senza mai uscire dal semipiano reale positivo.



Entrambi i luoghi hanno uno o due rami interamente contenuto/i nel semipiano reale positivo, quindi la $W(s)$ non è mai BIBO stabile.

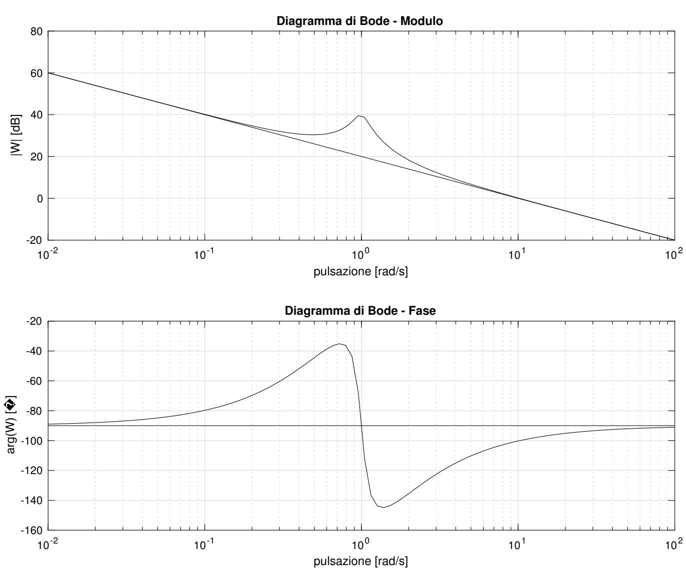
Esercizio 3. i) Assumiamo come precompensatore $C'(s) = \frac{10}{s}$ per sistemare l'errore a regime e il tipo , dopodichè il diagramma di Bode esibisce una $\omega_a \approx 10^{1/3}$ rad/s e il margine di fase alla pulsazione desiderata $m_\phi(\omega_a^*)$ è circa $-90°$.



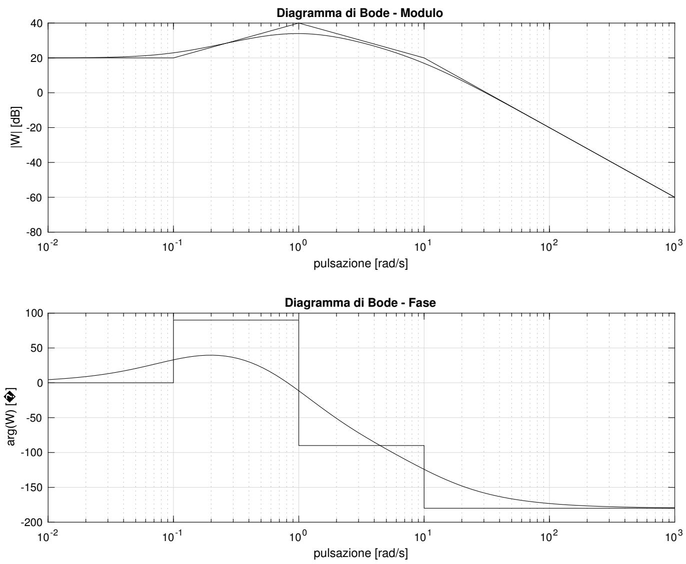
Dobbiamo quindi alzare in $\omega_a^* = 10$ rad/s il modulo di $M = 40$dB a la fase di $\Phi = 180°$. Questa richiesta implica che dobbiamo ricorrere ad una doppia rete anticipatrice con i due zeri collocati a sinistra di ω_a^* e tali da dare un contributo al modulo in ω_a^* pari a 40 dB. Possiamo ad esempio posizionare i due zeri 1 decade prima di ω_a^* e mettere i due poli sufficientemente alla destra di ω_a^*. Quindi una possibile soluzione è

$$C(s) = \frac{10(1+s)^2}{s\left(1+\frac{s}{1000}\right)^2}.$$

Il sistema risultante è BIBO stabile per il criterio di Bode.



ii) Per soddisfare le specifiche su tipo ed errore a regime inseriamo il precompensatore $C'(s) = 10$, il che equivale a fissare K_p. Se ora tracciamo il diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$ notiamo che siamo in grado di farlo anche se non conosciamo $p > 0$ perche' ciò che conta è solo il fatto che i tre punti di spezzamento sono distanti una decade uno dall'altro. Ad esempio nel caso $p = 1$ abbiamo il seguente diagramma:



Si vede che se $\omega_a^* \geq 100p$ ci troviamo in un intervallo di pulsazioni in cui per soddisfare le specifiche bisogna introdurre uno zero stabile alla sinistra di $\omega_a = 10^{3/2}p$ (in realtà per avere $\omega_a^* = 100p$ lo zero va messo in $-10p$ e se spostiamo la pulsazione di attraversamento desiderata a destra lo zero va spostato a sinistra), così da incrementare per $\omega = \omega_a^*$ la fase di 90° e la sua posizione deve essere tale da incrementare il modulo in $\omega = \omega_a^*$ del valore di M dB che rappresenta $-|C'(j\omega_a^*)G(j\omega_a^*)|$. Questo è sempre possibile e il sistema risultante è BIBO stabile per il criterio di Bode.

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 189 e successive.