A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^{o} appello — 2 luglio 2021

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 + x_4 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, -1, -2)$, $u_2 = (-1, 2, 0, 1)$, $u_3 = (3, 4, -2, -3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} f = V$ e $\operatorname{Ker} f = L$? Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\operatorname{Im} g = U$ e $\operatorname{Ker} g = L$? (*Le risposte devono essere giustificate*)

Soluzione. (a) Da $x_1 + x_4 = 0$ ricaviamo $x_4 = -x_1$. Una base di V è quindi formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$, e dunque $\dim V = 3$.

(b) Si ha $u_3 = 2u_1 + u_2$, mentre i vettori u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti. Quindi u_1, u_2 sono una base di U e dunque $\dim U = 2$. Inoltre si verifica subito che i vettori u_1 e u_2 soddisfano l'equazione $x_1 + x_4 = 0$ di V, quindi $u_1, u_2 \in V$ e pertanto $U \subset V$.

(c) Dato che $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$, deve essere $\dim L = 1$. Una base di L è quindi formata da un qualunque vettore di V che non appartiene a U (ci sono infiniti vettori con queste proprietà, quindi L non è unico). Come base di L possiamo prendere, ad esempio, il vettore $v_2 = (0, 1, 0, 0)$. Si verifica facilmente che v_2 non può essere scritto come combinazione lineare di u_1 e u_2, quindi $v_2 \notin U$.

(d) Dato che $\dim V = 3$ e $\dim L = 1$, per la funzione f si ha $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = 1 + 3 = 4$, come deve essere. Da ciò si deduce che f esiste. Una tale f può essere definita come segue: $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = 0$, $f(e_3) = v_2$, $f(e_4) = v_3$. Da questa definizione si vede che $\operatorname{Ker} f$ è generato dal vettore $e_2 = (0, 1, 0, 0) = v_2$, il quale è una base di L, quindi $\operatorname{Ker} f = L$, mentre $\operatorname{Im} f$ è generata da $f(e_1) = v_1$, $f(e_3) = v_2$, $f(e_4) = v_3$, quindi $\operatorname{Im} f = V$.
Dato che $\dim U = 2$ e $\dim L = 1$, per la funzione g si ha $\dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g) = 1 + 2 = 3$, mentre se una tale g esistesse, si dovrebbe avere $\dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g) = 4$. Da ciò si deduce che g non esiste.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare che contiene il vettore $(3, -2, 1)$ nel nucleo e il cui polinomio caratteristico è $x(x-2)^2$. Sappiamo inoltre che l'autospazio relativo all'autovalore non nullo è il piano di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

(a) Trovare una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(b) Consideriamo ora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare gli autovalori e gli autovettori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(c) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è A? (*la risposta deve essere giustificata*)

Soluzione. (a) Il vettore $v_1 = (3, -2, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$. Dato che il polinomio caratteristico è $x(x-2)^2$, oltre all'autovalore 0 c'è anche l'autovalore $\lambda = 2$, con molteplicità 2. Il suo autospazio è il piano di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, da cui si ricava $x_2 = x_1 + x_3$. Una base di tale autospazio è quindi data dai vettori $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$. In conclusione: v_1, v_2, v_3 è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f, quindi rispetto a tale base la matrice di f è diagonale, con gli autovalori $0, 2, 2$ sulla diagonale.

(b) Il polinomio caratteristico della matrice A è $x(x-2)^2$, quindi anche la matrice A ha gli autovalori $\lambda = 0$ (con molteplicità 1) e $\lambda = 2$ (con molteplicità 2). Per l'autovalore 0 si trova l'autovettore $w_1 = (1, 0, -1)$. Cercando gli autovettori relativi all'autovalore 2 si trova il sistema

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Questo significa che l'autospazio relativo all'autovalore 2 ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $w_2 = (2, 1, -1)$, pertanto la matrice A non è diagonalizzabile.

(c) No, non può esistere una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è A, perché abbiamo visto che, nonostante f e A abbiano lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori, f è diagonalizzabile mentre A non lo è.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Im} f$ e una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ e verificare che $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(b) Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di $\operatorname{Im} f$.

(c) Dato il vettore $v = (1, 5, -3, 1)$, trovare $u \in \operatorname{Ker} f$ e $w \in \operatorname{Im} f$ tali che $v = u + w$.

Soluzione. (a) Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi A ha rango 2, cioè $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ e come base di $\operatorname{Im} f$ possiamo prendere le prime due colonne di A: $v_1 = (4, -2, 2, 0)$, $v_2 = (-2, 2, -3, 1)$.
I vettori di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ devono essere ortogonali ai vettori v_1 e v_2. Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + x_3 \\ x_4 = -2x_1 + x_3 \end{cases}$$

Una base di $(\operatorname{Im} f)^\perp$ è quindi data dai vettori $w_1 = (1, 2, 0, -2)$, $w_2 = (0, 1, 1, 1)$.
Dato che $Aw_1 = 0$ e $Aw_2 = 0$, si ha $w_1, w_2 \in \operatorname{Ker} f$, quindi $(\operatorname{Im} f)^\perp \subset \operatorname{Ker} f$. D'altra parte $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$ e anche $\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = 2$, quindi deve essere $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(b) Applichiamo il procedimento di Gram–Schmidt ai vettori $v_1 = (4, -2, 2, 0)$, $v_2 = (-2, 2, -3, 1)$. Poniamo $v_1' = v_1$ e $v_2' = v_2 + \alpha v_1'$. Imponendo che sia $v_1' \cdot v_2' = 0$ si trova $\alpha = 3/4$, quindi $v_2' = v_2 + \frac{3}{4} v_1$, da cui si ricava $v_2' = (1, 1/2, -3/2, 1)$.

(c) Dato che $w \in \operatorname{Im} f$ si deve avere $w = \alpha v_1 + \beta v_2 = (4\alpha - 2\beta, -2\alpha + 2\beta, 2\alpha - 3\beta, \beta)$.
Da $v = u + w$ ricaviamo $u = v - w = (1 - 4\alpha + 2\beta, 5 + 2\alpha - 2\beta, -3 - 2\alpha + 3\beta, 1 - \beta)$.
Dato che $u \in \operatorname{Ker} f$ si deve avere $Au = 0$ (per velocizzare i calcoli, invece della matrice A si può usare la sua forma a scala che abbiamo già determinato), da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} -12\alpha + 9\beta = 6 \\ 6\alpha - 9\beta = -12 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Sostituendo i valori di α e β appena trovati si ottiene $u = (1, 3, 1, -1)$ e $w = (0, 2, -4, 2)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo l'insieme $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ dei piani di equazione

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma} : (\alpha + \gamma)\, x + (\beta - \alpha)\, y + (\gamma + 2\beta)\, z = \gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ \text{non tutti nulli.}$$

(a) Verificare che tutti questi piani passano per uno stesso punto P e trovare tale punto.

(b) Fra tutti i piani di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ trovare quello parallelo al piano di equazione $3x + y = 1$.

(c) Sia s la retta passante per l'origine e parallela al vettore $v_s = (0, 1, 1)$. Trovare l'unico piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ che contiene la retta s.

Soluzione. (a) Ponendo $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ si trova il piano di equazione $x - y = 0$.
Ponendo $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ si trova il piano di equazione $y + 2z = 0$.
Ponendo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ si trova il piano di equazione $x + z = 1$.
Mettendo a sistema queste tre equazioni si trova il punto $P = (2, 2, -1)$. Ora basta sostituire le coordinate di P nell'equazione di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ per verificare che $P \in \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$, per ogni α, β, γ.

(b) Un vettore ortogonale al piano di equazione $3x + y = 1$ è $(3, 1, 0)$. Un vettore ortogonale al generico piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ è $(\alpha + \gamma, \beta - \alpha, \gamma + 2\beta)$. Possiamo quindi porre

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 3 \\ \beta - \alpha = 1 \\ \gamma + 2\beta = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha = -5$, $\beta = -4$, $\gamma = 8$. Il piano corrispondente ha equazione $3x + y = 8$.
Oppure è sufficiente trovare il piano passante per P e parallelo al piano di equazione $3x + y = 1$. Tale piano avrà quindi un'equazione del tipo $3x + y = d$ e per trovare il valore di d basta imporre la condizione di passaggio per P. In questo modo si trova $d = 8$ e quindi l'equazione cercata è $3x + y = 8$.

(c) La retta s passa per i punti $O = (0, 0, 0)$ e $S = O + v_s = (0, 1, 1)$, quindi il piano di $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ che contiene la retta s deve contenere i punti $O = (0, 0, 0)$ e $S = (0, 1, 1)$. Imponendo le condizioni di passaggio per questi due punti si trova

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha = 3\beta \end{cases}$$

Possiamo quindi porre $\beta = 1$ da cui si ricava $\alpha = 3$ e $\gamma = 0$. Il piano cercato ha quindi equazione $3x - 2y + 2z = 0$.