I prova in itinere di FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Oltre ai necessari articoli di cancelleria (penna, matita, etc.) si può utilizzare **solo** una calcolatrice non programmabile. Non si possono, in particolare, tenere fotocopie di alcun tipo, appunti, quaderni, etc. Inoltre, ciascuna Studentessa e ciascuno Studente deve svolgere la prova per proprio conto e può comunicare SOLO con il personale di sorveglianza per tutta la durata della prova.

Durata della prova: 80 minuti.

Esercizio 1.

Si consideri il sistema

$$\Sigma : \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0]x + u \end{cases}$$

Sia $W(s)$ la funzione di trasferimento del sistema Σ. Si ha:

1. $W(s)$ non si può calcolare perché il sistema Σ non è stabile.
2. $W(s) = \frac{s^2+4}{s^2+2s+1}$.
3. GIUSTA $W(s) = \frac{s^2+4}{s^2-1}$.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Si ha:

$$W(s) = [1 \quad 0] \left(sI - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s-1 & -5 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

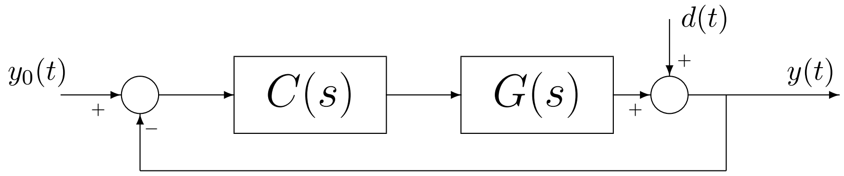
$$= \frac{1}{(s-1)(s+1)} [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \star & 5 \\ \star & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \frac{5}{s^2-1} + 1$$

$$= \frac{s^2-1+5}{s^2-1} = \frac{s^2+4}{s^2-1}$$

Esercizio 2.

Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove

$$G(s) = \frac{1}{s-2} \qquad \text{e} \qquad C(s) = \frac{1}{s-1}.$$



Si indichi con $W(s)$ la funzione di trasferimento da y_0 a y e con $W_d(s)$ la funzione di trasferimento da d a y. Si ha:

1. Le funzioni di trasferimento $W(s)$ e $W_d(s)$ non si possono definire perché il sistema a catena chiusa non è BIBO stabile.
2. $W(s) = \frac{s^2-3s+2}{s^2-3s+3}$ e $W_d(s) = \frac{1}{s^2-3s+3}$.
3. GIUSTA $W(s) = \frac{1}{s^2-3s+3}$ e $W_d(s) = \frac{s^2-3s+2}{s^2-3s+3}$.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Si ha:

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{\frac{1}{(s-1)(s-2)}}{1+\frac{1}{(s-1)(s-2)}} = \frac{1}{s^2-3s+2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2-3s+3}$$

$$W_d(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{(s-1)(s-2)}} = \frac{s^2-3s+2}{s^2-3s+2+1}$$

$$= \frac{s^2-3s+2}{s^2-3s+3}$$

Esercizio 3.

Si consideri il polinomio

$$P(s) = s^7 + 2s^5 + s^4 - s^3 + s^2 + s + 1.$$

Si ha:

1. GIUSTA $P(s)$ non è un polinomio di Hurwitz.
2. $P(s)$ è un polinomio di Hurwitz.
3. Tutti gli zeri di $P(s)$ hanno parte reale minore di -2.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Il polinomio $P(s)$ ha coefficienti di segno discorde pertanto non è di Hurwitz (condizione necessaria affinché un polinomio sia di Hurwitz è che tutti i suoi coefficienti abbiano strettamente lo stesso segno).

Esercizio 4.

Si consideri un sistema Σ di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{(-s^2-Ks-1)^3}$ dove K è un parametro reale. Si ha:

1. Qualunque sia il valore del parametro reale K, Σ non è BIBO stabile.
2. GIUSTA Σ è BIBO stabile se e solo se $K > 0$.
3. Σ è BIBO stabile per ogni valore reale di K.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. I poli di $W(s)$ sono gli zeri del polinomio $P(s) := -s^2 - Ks - 1$. In base al Criterio di Cartesio tali zeri sono tutti nel semipiano sinistro aperto se e solo se $K > 0$.

Esercizio 5.

Si consideri il seguente problema: dato il modello di stato non lineare

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = -x^2 + u \\ y = x \end{cases}$$

si calcoli, se possibile, un ingresso *feedback*-linearizzante

$$u_f(x(t), v(t))$$

in modo che il nuovo sistema (ossia il sistema ottenuto dal sistema originale Σ dopo aver applicato l'ingresso u_f) che ha per ingresso $v(t)$ e uscita $y(t)$ sia lineare e abbia funzione di trasferimento pari a $W(s) = \frac{1}{s-1}$.
Si ha:

1. Esistono infiniti ingressi $u_f(x(t), v(t))$ che risolvono il problema.
2. GIUSTA Esiste un unico ingresso $u_f(x(t), v(t))$ che risolve il problema.
3. Non esistono ingressi $u_f(x(t), v(t))$ che risolvono il problema.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Il più generale ingresso *feedback*-linearizzante per il sistema Σ è:

$$u_f(x(t), v(t)) = x^2 + ax + bv$$

con a e b costanti reali. Il sistema ottenuto dal sistema originale Σ dopo aver applicato tale ingresso è:

$$\Sigma_{FL} : \begin{cases} \dot{x} = ax + bv \\ y = x \end{cases}$$

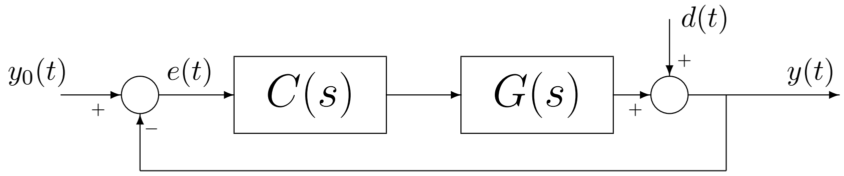
la cui funzione di trasferimento (da v a y) è $W_{a,b}(s) = \frac{b}{s-a}$. Imponiamo $W_{a,b}(s) = \frac{b}{s-a} = W(s) = \frac{1}{s-1}$ da cui consegue $a = b = 1$. Dunque l'unico ingresso che risolve il problema è

$$u_f(x(t), v(t)) = x^2 + x + v.$$

Esercizio 6.

Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove

$$G(s) = \frac{1}{s-1}, \qquad C(s) = \frac{1}{s}$$



Sia e_r l'errore a regime in corrispondenza a

$$y_0(t) = 1(t) \qquad \text{e} \qquad d(t) = 3 \cdot 1(t).$$

Si ha:

1. $e_r = 0$.
2. $e_r = 1$.
3. $e_r = 2/3$.
4. GIUSTA Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. La funzione di sensibilità in questo caso è:

$$W_d(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{1}{s^2 - s + 1}.$$

Dunque la trasformata dell'errore è

$$E(s) = W_d(s)[Y_0(s) - D(s)] = \frac{1}{s^2 - s + 1}\,\frac{-2}{s}.$$

Poiché $\frac{1}{s^2-s+1}$ non è BIBO stabile $e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)]$ non converge e quindi non si può parlare di errore a regime.

Esercizio 7.

Si consideri un sistema BIBO stabile di funzione di trasferimento $W(s)$. È noto che $W(s)$ ha una coppia di poli dominanti complessi coniugati. Indichiamo con $-\sigma \pm j\omega$ tali poli dominanti. Sia t_r il tempo di salita della risposta indiciale del sistema.

Si ha:

1. In prima approssimazione, la specifica $t_r \leq 10$ secondi corrisponde alla seguente specifica espressa nel dominio della frequenza: $\sigma \geq 0.46$.
2. In prima approssimazione, la specifica $t_r \leq 10$ secondi corrisponde alla seguente specifica espressa nel dominio della frequenza: $\sigma \geq 0.18$.
3. In prima approssimazione, la specifica $t_r \leq 10$ secondi corrisponde alla seguente specifica espressa nel dominio della frequenza: $\omega \geq 0.18$.
4. GIUSTA Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. In prima approssimazione, la specifica $t_r \leq 10$ secondi corrisponde alla seguente specifica espressa nel dominio della frequenza:

$$\omega_n \geq \omega_n^* := 1.8/t_r^*, \quad \text{con} \quad t_r^* := 10$$

ossia

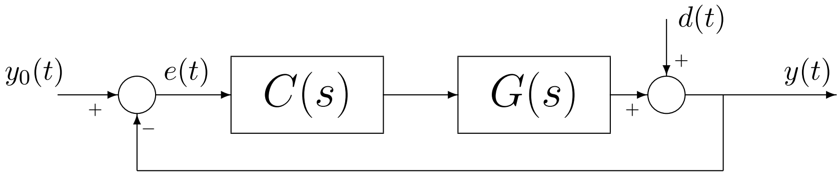
$$\omega_n \geq 0.18,$$

dove ω_n è il modulo dei poli dominanti complessi coniugati, ossia

$$\omega_n := \sqrt{\omega^2 + \sigma^2}.$$

Esercizio 8.

Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove $e(t)$ è il segnale di errore.



Noto che $C(s) = \frac{1}{s}$ e che

$$y_0(t) = d(t) \quad \forall t \geq 0,$$

si ha:

1. GIUSTA $e(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.
2. L'errore $e(t)$ non è necessariamente nullo ma lo è il suo limite:
$$\lim_{t \to \infty} e(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$
3. Non è possibile concludere nulla relativamente al segnale $e(t)$.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Detta

$$W_d(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

la funzione di sensibilità, si ha:

$$E(s) = W_d(s)[Y_0(s) - D(s)] = W_d(s)0 = 0$$

Pertanto, $e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)] = 0$.

Esercizio 9.

Si consideri un sistema lineare Σ. È noto che:

a) il sistema ha ordine 4;

b) in corrispondenza a un certo stato iniziale x_0, l'evoluzione libera dell'uscita del sistema è:

$$\mathrm{e}^t \sin(t) + 2\mathrm{e}^t;$$

c) la risposta impulsiva del sistema è una pura combinazione lineare dei modi del sistema.

Si determini, se possibile, la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema in modo che valgano le seguenti condizioni:

d) detta $y_i(t)$ la risposta indiciale del sistema, si abbia:

$$\lim_{t\to+\infty} y_i(t) = 1;$$

e) l'uscita (forzata) di regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = \sin(t) \cdot 1(t)$ abbia la forma $y_{rp}(t) = M\sin(t + \pi/4)$, con $M > 0$.

Si ha:

1. GIUSTA Non esiste alcuna funzione di trasferimento che rispetti le condizioni a), b), c), d) ed e) assegnate.
2. Le condizioni assegnate a), b), c), d) ed e) non sono sufficienti a determinare univocamente la funzione di trasferimento $G(s)$.
3. Le condizioni assegnate permettono di determinare la funzione di trasferimento $G(s)$: il suo valore in 2 è $G(2) = -1$.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Sia A la matrice di stato di Σ.
I. Da a) consegue che il polinomio caratteristico $\pi_A(s)$ di A ha grado 4.

II. Da b) consegue che 1 e $1 \pm j$ sono autovalori di A, il che, combinato con quanto visto al punto I., implica

$$\pi_A(s) = (s-1)(s-1-j)(s-1+j)(s-\lambda)$$

dove λ è reale ed è l'unico autovalore non noto di A.
III. Da c) consegue che la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema è strettamente propria.
IV. Da d) consegue che la funzione di trasferimento $W(s)$ del sistema è BIBO stabile e che $W(0) = 1$.
V. Poiché i poli di $W(s)$ sono un sottoinsieme degli autovalori di A, solo λ può essere polo di $W(s)$ e anzi deve essere polo di $W(s)$ perché $W(s)$ è strettamente propria e quindi ha almeno un polo.
In conclusione, $W(s) = \frac{K}{s-\lambda}$ dove $\lambda < 0$. Scriviamo per semplicità $W(s)$ nella forma

$$W(s) = \frac{K}{s+p}$$

dove abbiamo definito la costante positiva $p := -\lambda > 0$.
VI. Si ha:

$$W(0) = \frac{K}{p} = 1 \;\Rightarrow\; K = p$$

e quindi

$$W(s) = \frac{p}{s+p}.$$

VII. Rimane solo da determinare $p > 0$. L'uscita (forzata) di regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = \sin(t) \cdot 1(t)$ è

$$y_{rp}(t) = \left[p/\sqrt{p^2+1}\right] \sin(t+\varphi)$$

dove

$$\varphi := -\arctan[1/p] \quad \Rightarrow \quad \varphi \in (-\pi/2, 0)$$

e quindi le condizione e) non può essere soddisfatta.

Esercizio 10.

Si consideri un sistema lineare Σ di ordine 10. Sapendo che tra i modi del sistema vi sono le funzioni

$$\sin(t), \qquad \cos(2t)$$

e che la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{(s+1)^6}{(s^2+s+1)^3},$$

si può concludere che:

1. Σ non è semplicemente stabile.
2. Σ non è BIBO stabile.
3. GIUSTA Σ è semplicemente stabile.
4. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Sia A la matrice di stato di Σ. Poiché le funzioni le funzioni $\sin(t)$ e $\cos(2t)$ sono modi del sistema, $\pm j$ e $\pm 2j$ sono autovalori di A. Quindi

$$\pi_A(s) = (s-j)(s+j)(s-2j)(s+2j)D(s)$$

dove $D(s)$ è un polinomio monico di grado 6. Poiché $W(s) = \frac{(s+1)^6}{(s^2+s+1)^3}$ è una rappresentazione coprima di $W(s)$ il polinomio $D_1(s) := (s^2+s+1)^3$ divide il polinomio caratteristico $\pi_A(s)$. Poiché $D_1(s) := (s^2+s+1)^3$ è evidentemente di Hurwitz (per il criterio di Cartesio) esso è coprimo con $(s-j)(s+j)(s-2j)(s+2j)$ e quindi $D(s) = D_1(s) := (s^2+s+1)^3$. Pertanto,

$$\pi_A(s) = (s-j)(s+j)(s-2j)(s+2j)(s^2+s+1)^3$$

e gli autovalori $\pm j$ e $\pm 2j$ sono semplici. In conclusione, A ha 4 autovalori semplici sull'asse immaginario e 2 autovalori tripli nel sempiano sinistro aperto e quindi il sistema è semplicemente stabile (ma non asintoticamente stabile). Inoltre, Σ è BIBO stabile perché $D_1(s)$ è di Hurwitz.