COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
1 Settembre 2020

Esercizio 1. [10 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \cdot \frac{1 + 0.1s + s^2}{s(1-s)}$$

è richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$, individuando asintoti ed intersezioni con gli assi (se presenti)[1];
- studiare la stabilità BIBO del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare del parametro reale K, ricorrendo al Criterio di Nyquist.

Esercizio 2. [8.5 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{(s-3)s^2}$$

se ne traccino i luoghi positivo e negativo, evidenziandone punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, e studiando quindi la BIBO stabilità di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale.

Esercizio 3. [7 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10^4}{(1+10s)^2}$$

i) si determini l'espressione dell'ingresso sinusoidale causale $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita di regine permanente

$$y_{rp}(t) = 100 \cos\left(\frac{t}{10}\right);$$

ii) si progetti un controllore proprio e stabilizzante $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ tipo 0 e relativo errore a regime (al gradino) $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-4}$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 1$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

Esercizio 4 [5 punti] Sia p un numero reale positivo e si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+p}{(s-p)^2}.$$

[1] Nella versione proposta all'esame non ne era richiesto il calcolo.

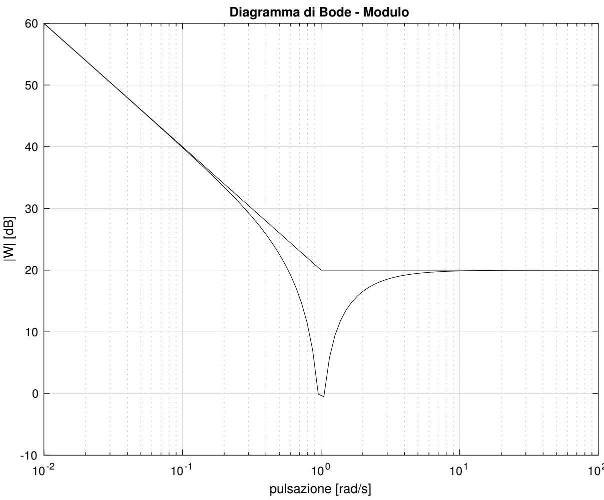
Si dimostri, ricorrendo la tracciamento del luogo delle radici (positivo e negativo), che la funzione di trasferimento

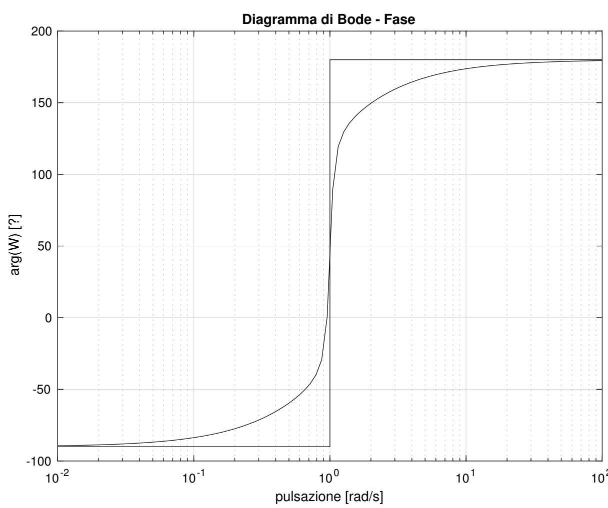
$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

non è mai BIBO stabile per $K < 0$ ed è BIBO stabile per $K > 2p$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Il diagramma di Bode per è illustrato in figura





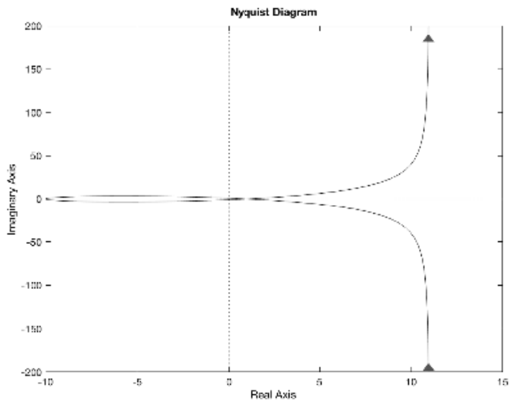
Il diagramma di Bode asintotico del modulo parte con pendenza -20 dB/dec prima di $\omega = 1$ rad/s e passa a 0 dB/dec dopo, mentre il diagramma reale ha un picco di antirisonanza in $\omega = 1$ rad/s. La fase parte da $-90°$ e sale per $\omega = 1$ rad/s al valore $180°$. Calcolando $G(j\omega)$ si ottiene

$$G(j\omega) = \frac{11 - 10\omega^2}{1+\omega^2} + j\frac{11\omega^2 - 10}{\omega(1+\omega^2)}.$$

Considerando solo $\omega \geq 0$, la parte reale si annulla solo per $\omega = \sqrt{11/10}$, mentre la parte immaginaria si annulla solo per $\omega = \sqrt{10/11}$. Per $\omega \to 0^+$ la parte reale va a 11 mentre la parte immaginaria a $-\infty$, mentre per $\omega \to +\infty$ la parte reale tende a -10 e quella immaginaria a 0.

Nyquist arriva dall'infinito (da destra in basso) e attraversa il semiasse reale positivo per $\omega = \sqrt{10/11}$ in corrispondenza a 1, poi attraversa il semiasse immaginario positivo per

$\omega = \sqrt{11/10}$ in corrispondenza a $j\sqrt{1.1}$ e infine arriva per $\omega = +\infty$ in -10. In figura il diagramma di Nyquist:



Valutando il numero di giri attorno a $-\frac{1}{K}$, dopo aver aggiunto il semicerchio orario all'infinito dovuto al polo semplice in $s = 0$, si trova, essendo $n_{G_+} = 1$

$$\begin{array}{lll} K < -1 & \Rightarrow & N = 1, n_{W_+} = 0 \\ -1 < K < 0 & \Rightarrow & N = -1, n_{W_+} = 2 \\ 0 < K < 0.1 & \Rightarrow & N = 0, n_{W_+} = 1 \\ K > 0.1 & \Rightarrow & N = 1, n_{W_+} = 0. \end{array}$$

Nel caso critico $K = -1$, il passaggio per il punto critico corrisponde al caso in cui $W(s)$ ha due poli a parte reale nulla. Nel caso critico $K = 0.1$ $W(s)$ è impropria. Pertanto c'è stabilità BIBO solo per $K > 0.1$ e $K < -1$.

Esercizio 2. Si noti, preliminarmente che $n = 3$ e $m = 1$, quindi sia luogo positivo che negativo avranno due rami che vanno al punto improprio, nel luogo positivo con direzioni $\pi/2$ e $3\pi/2$, nel luogo negativo con direzioni 0 e π. Il centro degli asintoti in entrambi i casi ha coordinata reale:

$$x_C = \frac{(0 + 0 + 3) - (-1)}{3 - 1} = 2.$$

L'equazione dei punti doppi porge, dopo alcuni calcoli

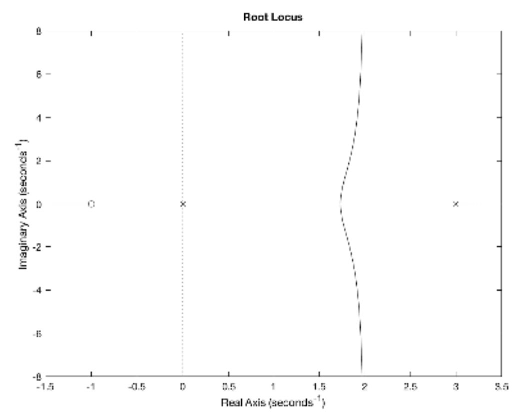
$$2s(s^2 - 3) = 0$$

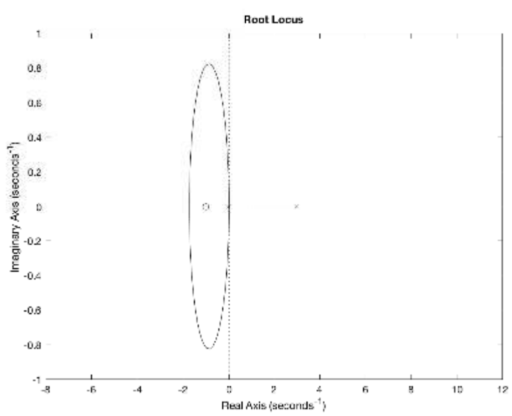
e ciò permette di determinare il punto doppio banale $(s = 0, K = 0)$, mentre le altre due radici della precedente equazione sono $\pm\sqrt{3}$: $\sqrt{3}$ corrisponde a un valore positivo di K e quindi appartiene al luogo positivo, mentre $-\sqrt{3}$ corrisponde a un valore negativo di K e quindi appartiene al luogo negativo. Studiando le intersezioni con l'asse immaginario si trova

$$(3\omega^2 + K) + j\omega(K - \omega^2) = 0.$$

La parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ (e per tale valore di ω la parte reale si annulla se e solo se $K = 0$) o per $\omega^2 = K$ che sostituito nell'espressione della parte reale riporta nuovamente alla soluzione $\omega = 0$ e $K = 0$. Quindi non ci sono intersezioni con l'asse

immaginario all'infuori dell'origine per $K = 0$.
Mettendo assieme le informazioni finora trovate e applicando la regola per determinare quali punti dell'asse reale appartengano ai due luoghi, si trova che il luogo negativo ha un ramo che da $s = 3$ va verso $+\infty$ e due rami che partono dell'origine, restando nel semipiano reale negativo si re-incontrano in $s = -\sqrt{3}$ e poi vanno l'uno al punto $s = -1$ e l'altro a $-\infty$ (tutti sull'asse reale). Pertanto la $W(s)$ ha sempre un polo reale positivo e non è mai BIBO stabile. Invece il luogo positivo ha un due rami che da 0 vanno l'uno verso -1 (sull'asse reale) e l'altro si incontra in $\sqrt{3}$ con il ramo che parte da $s = 3$, poi i due rami salgono lungo l'asintoto verticale di ascissa $s = 2$. In questo caso due rami sono interamente contenuti nel semipiano reale positivo e quindi non c'è mai stabilità BIBO per $W(s)$ nemmeno per $K > 0$.
I luoghi positivo e negativo sono riportati qui di seguito.





Esercizio 3. i) Osserviamo che $G(s)$ è BIBO stabile e quindi a un segnale del tipo

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$$

esso risponde con risposta a regime permanente

$$y_{rp}(t) = |G(j\omega)|A\sin(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega))).$$

Se imponiamo allora che

$$y_{rp}(t) = |G(j\omega)|A\sin(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega))) = 100\sin t$$

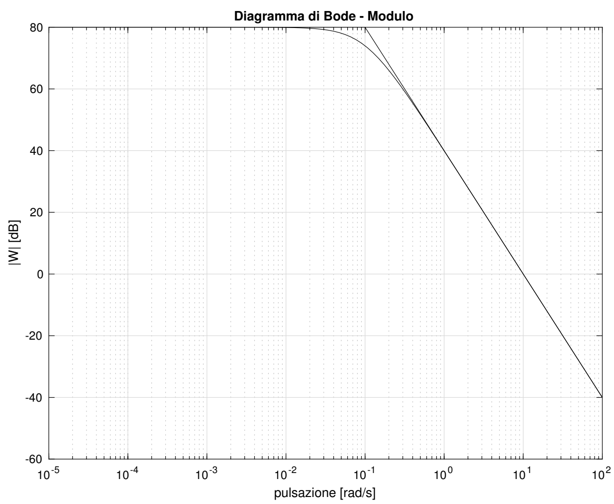
ne consegue che $\omega = 0.1$, $|G(j)|A = 100$ e $\phi + \arg(G(j) = 0$. Essendo

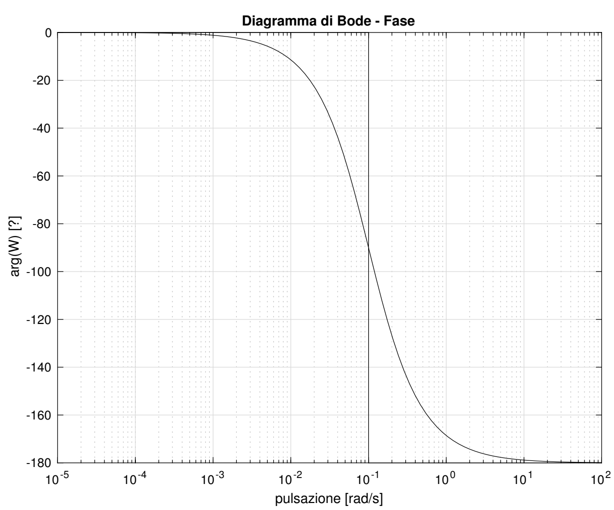
$$G(j) = \frac{10^4}{(1+j)^2}$$

con $|G(j)| = 10^4/2$ e $\arg G(j) = -\pi/2$, ne consegue che

$$u(t) = 0.02\cos(0.1t + \pi/2)\delta_{-1}(t) = -0.02\sin(0.1t)\delta_{-1}(t).$$

ii) Tipo ed errore a regime sono già a posto, quindi non serve alcun pre-compensatore, ovvero $C'(s) = 1$. Se ora tracciamo il diagramma di Bode di $C'(s)G(s) = G(s)$:

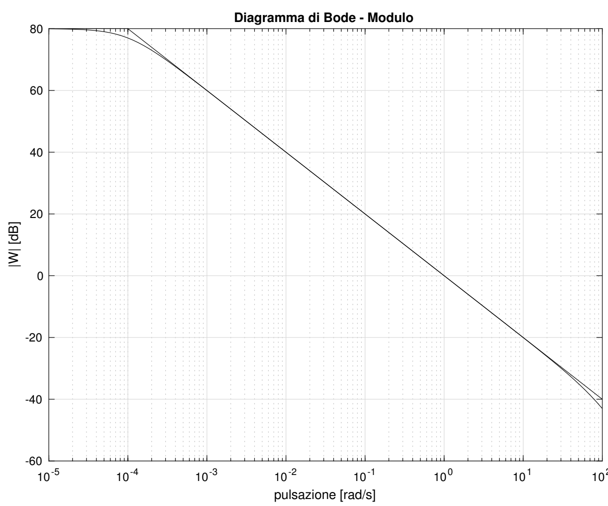


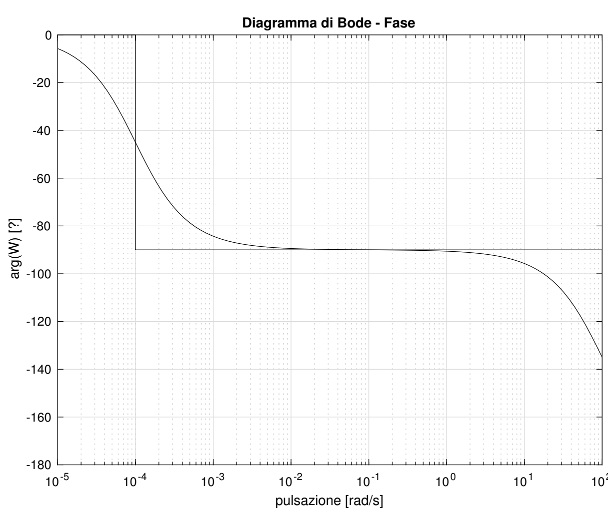


osserviamo che $\omega_A = 10$ rad/s e quindi la pulsazione di attraversamento ω_A è maggiore di quella desiderata. Infatti per $\omega = \omega_A^*$ il modulo vale 40 dB. D'altra parte per $\omega = \omega_A^*$ la fase vale circa $-180°$ e quindi tale fase va aumentata di circa $90°$. Una rete a sella che per $\omega = \omega_A^*$ abbassi il modulo di 40dB ed alzi la fase (e quindi $m_\psi(\omega_A^*)$) di circa 90° è sufficiente. Possiamo ad esempio scendere di 60dB con la prima coppia polo-zero (rete attenuatrice), per poi risalire di 20dB (con la rete anticipatrice). Un modo per riuscirci (che semplifica i calcoli in quanto introduce una doppia cancellazione zero-polo ammissibile) è piazzare il polo 4 decadi prima di $\omega_A^* = 1$ rad/s, i due zeri 1 decade prima e l'ultimo polo in alta frequenza (rispetto ad ω_A, ad esempio 2 decadi dopo), al solo scopo di rendere proprio il compensatore. Il compensatore

$$C(s) = \frac{(1+10s)^2}{(1+10^4 s)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

permette il soddisfacimento di tutti i requisiti (compresa la stabilità BIBO del sistema retroazionato, grazie al Criterio di Bode applicato a $C(s)G(s)$), ed è uno degli infiniti $C(s)$ che vanno bene.





Esercizio 4 La funzione di trasferimento $G(s)$ ha un polo doppio in p e uno zero semplice in $-p$. Poiché $n - m = 2 - 1 = 1$ sia luogo positivo che luogo negativo hanno un solo asintoto rispettivamente con direzione π e 0 radianti.

L'equazione dei punti doppi porta a

$$(s-p)(s+3p)=0.$$

I primo punto doppio corrisponde a $K=0$ mentre il secondo ($s=-3p$) corrisponde ad un valore di $K>0$ e quindi si trova nel luogo positivo.
Il calcolo delle intersezioni con l'asse immaginario porge

$$(p^2+Kp-\omega^2)+j\omega(K-2p)=0$$

a cui corrispondono due soluzioni: $\omega=0$ per $K=-1$ e $\omega=\pm\sqrt{3}p$ per $K=2p>0$. Mettendo assieme i precedenti risultati con la regola sui punti dell'asse reale che appartengono al luogo, se ne deduce che il luogo negativo ha due rami che partono da p e vanno uno a $-p$ e uno a $+\infty$. Quindi $W(s)$ non è mai BIBO stabile per $K<0$. Invece nel luogo positivo due rami partono da p, attraversano l'asse immaginario in $\pm j\sqrt{3}$ per $K=2p$ e poi arrivano sul semiasse reale negativo in $-3p$ da dove si dirigono uno a $-\infty$ e uno a $-p$. Pertanto entrambi i poli di $W(s)$ sono nel semipiano negativo per $K>2p$. Nelle due figure viene illustrato a titolo di esempio il caso $p=2$ (luogo positivo e negativo).