SEGNALI E SISTEMI

T ERSEGHE

SIGNALS IN THE TIME - DOMAIN

Introduction

1.1. An introduction to signals

In generale, esistono 4 tipi di segnale che suddividiamo in:

- periodici o aperiodici
- continui o discreti

Complex values

* $x = a_x + jb_x = |x|e^{j\varphi_x} = |x|\cos(\varphi_x) + j|x|\sin(\varphi_x)$ con $\boxed{|x| = \sqrt{a_x^2 + b_x^2}}$ e $\boxed{\varphi_x = \arctan\left(\frac{b_x}{a_x}\right) + \begin{cases} 0 & a_x \geq 0 \\ \pi & a_x < 0 \end{cases}}$
* $x^* = a_x - jb_x = |x|e^{-j\varphi_x}$ è detto complesso coniugato
* Regole del prodotto: $x \cdot y = |x||y|e^{\varphi_x + \varphi_y}$ e $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
* Identità di Eulero: $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}}$ e $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}}$
* Un esponenziale complesso può avere una componente reale all'esponente: $x = e^{\alpha + j\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta}$ con $|x| = e^{\alpha}$ e $\varphi_x = \beta$

Es.1 Scrivere in forma Cartesiana i seguenti numeri complessi:

$e^{-j\frac{\pi}{2}} \longrightarrow x_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j(-1) = -j$

$je^{j3\pi} \longrightarrow x_2 = j[\cos(3\pi) + j\sin(3\pi)] = j\cdot[-1 + j0] = -j \rightarrow$ dato $e^{j3\pi} = (e^{j(3\pi-2\pi)}) = e^{j\pi} = -1$ (periodicità della fase)

$\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \longrightarrow x_3 = \sqrt{2}[\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)] = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + j\,1/\sqrt{2}) = 1+j$

Es.2 Scrivi i seguenti numeri in forma polare:

$1+j \rightarrow |x_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\varphi_1 = \arctan(1) = \pi/4 \rightarrow x_1 = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$

$-3j \rightarrow |x_2| = \sqrt{0+9} = 3$ e $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{-3}{0}\right) = \arctan(-\infty) = -\pi/2 \rightarrow x_2 = 3e^{-j\pi/2}$

$-2 \rightarrow |x_3| = \sqrt{4+0} = 2$ e $\varphi_1 = \arctan(0/-1) + \pi = \arctan(0) + \pi = \pi \rightarrow x_3 = 2e^{j\pi} \rightarrow \boxed{e^{j\pi} = -1}$

Es.3 Scrivi $1/(3-2j)$ in forma Cartesiana

Possiamo riscrivere x come $x = \frac{1}{y}$. A questo punto possiamo razionalizzare moltiplicando num. e denom. per il coniugato: $x = \frac{1}{y}\cdot\frac{y^*}{y^*} = \frac{3+2j}{3^2-(2)^2(-1)} = \frac{3+2j}{9+4} = \frac{3}{13} + j\frac{2}{13}$ ($j^2 = -1$)

Es.4 Dato $x = [e^{j\pi/3} - \cos(\frac{\pi}{3})]e^{-(2+j\pi/3)}$ trovare il complesso coniugato x^* in forma Cartesiana e polare

Nella trasformazione del numero complesso nel suo coniugato j diventa $-j$

$x^* = [e^{-j\pi/3} - \cos(\pi/3)]e^{-(2-j\pi/3)}$

$= [\cancel{\cos(-\frac{\pi}{3})} + j\sin(-\frac{\pi}{3}) - \cancel{\cos(\pi/3)}]e^{-(2-j\pi/3)} =$ dato $\boxed{\cos(\alpha) = -\cos(-\alpha)}$

$= j\sin(-\pi/3)\cdot e^{-(2-j\pi/3)} =$

$= -j\sin(\pi/3)\cdot[e^{-2}e^{j\pi/3}] =$

$= -je^{-2}\sin(\pi/3)e^{j\pi/3}$

In forma Cartesiana: $x^* = -je^{-2}\sin(\pi/3)[\cos(\pi/3) + j\sin(\pi/3)] = \sin^2(\pi/3)e^{-2} - j\cos(\pi/3)\sin(\pi/3)e^{-2}$

In forma polare: $\boxed{-j = e^{-j\pi/2}} \rightarrow x^* = e^{-2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{j\pi/3}e^{-j\pi/2} = e^{-2}\sin(\pi/3)e^{j(\pi/3-\pi/2)} = e^{-2}\sin(\pi/3)e^{-j\pi/6}$

in questo modo $|x^*| = |x| = e^{-2}\sin(\pi/3)$ e $\varphi(x^*) = -\varphi(x) = -\pi/6$

1.2. An introduction to systems

Transformation (systems)

Definition www.merriam-webster.com

[...]

3
a (1) : the **operation of changing** (as by rotation or mapping) one configuration or expression into another **in accordance with a mathematical rule**; [...]

a (2) : the **formula** that effects a transformation

b : a **mathematical correspondence** that assigns exactly one element of one set to each element of the same or another set

Nella notazione standard, individuiamo tipicamente il segnale originale come l'input $x(t)$ ed il segnale d'uscita come l'output $y(t)$. Ci sono molti tipi di sistemi, ma quelli più rilevanti sono i sistemi lineari e tempo invarianti (LTI), che rispettano sia il principio di linearità e il principio di tempo-invarianza.

Una caratteristica tipica dei sistemi LTI è che possono essere descritti da un integrale o da una serie se sono rispettivamente continui o discreti

La relazione tra input ed output è detta convoluzione. Questa dipende anche da un segnale aggiuntivo detto impulso responsivo (h).

Example on drug absorption:

→ la concentrazione di farmaco nel sangue, a parità di quantità di medicinale somministrato, dipende dal modo in cui essa viene assorbita dal corpo. Nel grafico sono ad esempio rappresentate la via orale, intramuscolare ed intravenosa.

Tuttavia, molto spesso la convoluzione è un'operazione complicata da valutare pertanto, si ricorre alle trasformate di Fourier e alle trasformate di Laplace, basate su esponenziali complessi. Uno degli aspetti più interessanti delle trasformate è che, ciò che è rappresentato come convoluzione nel dominio del tempo, diventa un semplice prodotto nel dominio delle trasformate, facile da interpretare.

Integrals and series

* Equivalenze della serie geometrica: $\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}}$ e $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & , |\alpha|<1 \\ \text{indeterminato,} & \text{altrimenti} \end{cases}}$

* Equivalenza dell'esponenziale complesso: $\boxed{\int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t_0}}{\alpha}}$

Es. 1 Valuta $x(\omega) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j\omega t} dt$ con $\omega \in \mathbb{R}$ e scrivi il risultato in forma cartesiana

$$x(\omega) = \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega} = \frac{2j\sin(\omega/2)}{j\omega} = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} \in \mathbb{R}$$

Es. 2 Valuta $x(\beta,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\beta - j\theta)n}$ con $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ e scrivi il risultato in forma cartesiana

serie geometrica con $\alpha = e^{(\beta - j\theta)}$ $\quad x(\beta,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{\beta - j\theta}} & |e^{(\beta - j\theta)}| < 1 \\ \text{indeterminato, altrimenti} \end{cases}$

$|\alpha| = |e^{\beta} e^{-j\theta}| = |e^{\beta}| \cdot |e^{j\theta}| = e^{\beta} \cdot 1 = e^{\beta}$ $\quad \boxed{|e^{j\theta}| = 1}$

Per $\beta < 0$ la serie converge, mentre per $\beta \geq 0$ la serie diverge.

Quindi $x(\beta,\theta) = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-e^{\beta - j\theta}} = \frac{1}{1-e^{\beta}\cos(\theta) + e^{\beta} j\sin(\theta)}$

Per identificare la parte reale ed immaginaria, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato, quindi $x(\beta,\theta) = \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y^*}{y^*} = \frac{y^*}{|y|^2}$ $\quad \boxed{y \cdot y^* = |y|^2}$

$$= \frac{1-\cos(\theta)e^{\beta} - j\sin(\theta)e^{\beta}}{(1-\cos(\theta)e^{\beta})^2 + ((-\sin(\theta)e^{\beta})^2} \underset{=1}{=} \frac{1-\cos(\theta)e^{\beta} - j\sin(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta} + e^{2\beta}} = \frac{1-\cos(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta} + e^{2\beta}} - \frac{j\sin(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos\theta e^{\beta} + e^{2\beta}}$$

$$\overset{!}{=} 1 - 2\cos\theta e^{\beta} + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)e^{2\beta}$$

Es.3 Valuta le due serie complesse $x_1(\theta)=\sum_{n=0}^{9} e^{-j\theta n}$ e $x_2(\theta)=\sum_{n=-9}^{0} e^{-j\theta n}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

$$x_1(\theta)=\frac{1-(e^{-j\theta})^{10}}{1-e^{-j\theta}}=\frac{1-e^{-j10\theta}}{1-e^{-j\theta}}$$

$x_2(\theta)=$ dato che la sommatoria ha range negativo, possiamo renderla positiva sostituendo la variabile n con $m=-n$, quindi $x_2(\theta)=\sum_{n=-9}^{0} e^{-j\theta n}=\sum_{m=0}^{9} e^{j\theta m}=\frac{1-e^{j10\theta}}{1\ e^{j\theta}}$

Es.4 Valuta la serie complessa $x(\theta)=\sum_{n=-9}^{9} e^{-j\theta n}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e scrivi il risultato in forma cartesiana.

$$x(\theta)=\sum_{n=-9}^{0} e^{-j\theta n}+\sum_{n=0}^{-9} e^{-j\theta n}-1=\frac{1-e^{-j10\theta}}{1-e^{-j\theta}}+\frac{1-e^{j10\theta}}{1-e^{j\theta}}-1$$

Con il denominatore comune otteniamo

$$x(\theta)=\frac{(1-e^{-j10\theta})(1-e^{j\theta})+(1-e^{j10\theta})(1-e^{-j\theta})-(1-e^{j\theta})(1-e^{-j\theta})}{(1-e^{j\theta})(1-e^{-j\theta})}=\frac{(1-e^{j\theta})(\cancel{1}-e^{-j10\theta}-\cancel{1})+(1-e^{-j\theta})(\cancel{1}-e^{j10\theta}-\cancel{1})}{(1-e^{j\theta})(1-e^{-j\theta})}$$

$$=\frac{-e^{-j10\theta}+e^{-j9\theta}-e^{j10\theta}+e^{j9\theta}}{\underbrace{(1-e^{j\theta})(1-e^{-j\theta})}_{2-e^{j\theta}-e^{-j\theta}}}=\frac{\cos(9\theta)-\cos(10\theta)}{1-\cos(\theta)}$$

Per la formula $\boxed{\cos a-\cos b=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}$ otteniamo il risultato compatto che segue:

$$=\frac{-2\sin\left(\frac{19}{2}\theta\right)\sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right)}{-2\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right)}=\frac{\sin\left(\frac{19}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

In alternativa, si può riscrivere la serie come la serie con $n=m-9$ con $m[0,18]$ e quindi:

$$x(\theta)=\sum_{m=0}^{18} e^{-j\theta(m-9)}=e^{j9\theta}\sum_{m=0}^{18} e^{-j\theta m}=e^{j9\theta}\frac{1-e^{-j19\theta}}{1-e^{-j\theta}}=\frac{e^{j9\theta}-e^{-j10\theta}}{1-e^{-j\theta}}$$

$$=\frac{e^{j9\theta}-e^{-j10\theta}}{1-e^{-j\theta}}\cdot\frac{e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2}}=\frac{e^{j19/2\theta}-e^{-j19/2\theta}}{e^{j\theta/2}-e^{-j\theta/2}}=\frac{2j\sin(19/2\theta)}{2j\sin(\theta/2)}=\frac{\sin(19/2\theta)}{\sin(\theta/2)}$$

Aperiodic signals

1.4. Continuous-time aperiodic signals

The "semi-value" rule

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}\\ 0, & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

if $s(t)$ has a discontinuity at $t=t_i$ we assign to $s(t_i)$ the average value of the limits approached from right and left, respectively,

$$s(t_i)\triangleq\frac{1}{2}[s(t_i+)+s(t_i-)]$$

Il segnale rect(t) è discontinuo. Per assegnare un valore al segnale nella discontinuità, seguiamo la regola dell'envalore, secondo la quale assegnamo il valore medio tra quello del limite destro e sinistro.

In realtà, il valore di un singolo punto (in questo caso preciso 2), non altererebbe il valore dell'integrale.

Un altro concetto molto utile è quello dell'estensione, intesa come il più piccolo intervallo $[t_s, T_s]$, al di fuori del quale il segnale vale zero. Il segnale si dice attivo all'interno dell'estensione $e(s)$, inattivo altrimenti. La differenza $T_s - t_s$ identifica la durata del segnale stesso, ovvero la misura dell'intervallo di estensione $D(s)$. L'estensione può essere finita o infinita

Alcuni segnali di uso frequente (e relative proprietà sono):

1)

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \\ 1/2 & t = 0 \end{cases}$$

unit step

e(s) = [0,∞), D(s) = ∞

2)

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

signum

e(s) = (-∞,∞), D(s) = ∞

3)

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

sinc pulse

e(s) = (-∞,∞), D(s) = ∞

4)

$$\mathrm{triang}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

triangular pulse

e(s) = [-1,1], D(s) = 2

5)

$$\mathrm{rect}(t) \begin{cases} 0, & |t| > 1/2 \\ 1, & -1/2 < t < 1/2 \\ 1/2, & t = \pm 1/2 \end{cases}$$

rectangle

e(s) = [-½,½], D(s) = 1

6)

$$s(t) = 1(t)\, e^{-at}, \quad a > 0$$

$$\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$$

unilateral exponential

e(s) = [0,∞), D(s) = ∞

Un segnale è detto causale se è attivo solo nell'asse temporale positivo ovvero

$s(t) = 0$ per $t < 0$

$e(s) \subset [0, +\infty)$

Secondo questa definizione, 1(t) è causale, mentre rect(t) no.

Per i segnali a tempo continuo possono essere introdotte le seguenti misure:

$$\text{area}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} s(t)\, dt$$

L'area è il bilanciamento tra i valori negativi e positivi di un segnale. Per segnali a valori complessi, assume valori complessi. Un area nulla implica un bilanciamento perfetto. In generale, per calcolarla si risolve un integrale

Area

$$\text{area}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, dt$$

Mean (average value)

$$m_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s(t)\, dt$$

They capture a similar information for different classes of signals (only one at a time is meaningful)

$A_s = 1$, $m_s = 0$

$A_s = \infty$, $m_s = ½$

La media è il valore medio assunto dal segnale lungo l'asse temporale.

Questa misura ha un significato analogo all'area. Tuttavia l'area risulta significativa per valori limitati, come rect(t), mentre il valore medio per segnali infiniti come 1(t)

Sia area che valore medio sono lineari. Ovvero, ogni equazione lineare di un segnale può diventare un'equazione lineare di area o valore medio. $s(t) = Bx(t) + Cy(t) \rightarrow A_s = BA_x + CA_y$ e $m_s = Bm_x + Cm_y$

- Area finita $\rightarrow$ media nulla
- Valore medio finito ($\neq 0$) $\rightarrow$ area infinita

$$m_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \overbrace{\int_{-T}^{T} s(t)\,dt}^{\text{the limit is } A_s}$$

the limit is ∞

Energy and power

Energy

$$E_s = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2\,dt$$

Power

$$P_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |s(t)|^2\,dt$$

They correspond to the area and the mean value of $|s(t)|^2$ hence take only **real positive values**

$E_s = 1$, $P_s = 0$

$E_s = \infty$, $P_s = 1/2$

Energia e Potenza sono le controparti di area e valor medio calcolate per il quadrato del segnale assoluto $|s(t)|^2$.
Le proprietà sono le medesime che per area e media, tuttavia E_s e P_s riguardano l'attività del segnale rispettivamente per segnali limitati ed illimitati.

Continuous-time aperiodic signals

È utile ricordare che, indipendentemente dal fatto che il segnale sia reale o complesso, per $s(t) = e^{at}$, $\boxed{F[s(t)] = \frac{e^{at}}{a}}$

Es.1 Calcolare area, valore medio, energia e potenza per:

* unit step $s(t) = 1(t)$

$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t)dt = \int_0^{\infty} 1(t)dt = t\Big|_0^{\infty} = \infty \rightarrow 1(t)$ ha estensione $[0,\infty)$ e vale 1 in tale intervallo.

Secondo la generalizzazione dei concetti di lunghezza, area e volume in uno spazio euclideo di Lebesgue, un singolo punto ha misura di Lebesgue nulla.

$$m_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 1(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$$

Per calcolare Energia e potenza valutiamo $|s(t)|^2$

$$|s(t)|^2 = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 1/4, & t=0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \simeq 1(t)$$

$\rightarrow$ secondo la regola di Lebesgue, dato che il segnale differisce solo in un singolo punto, possiamo dire che $|1(t)|^2 \simeq |1(t)|$

Di conseguenza, otteniamo (senza fare ulteriori calcoli), $E_s = \infty$ e $P_s = 1/2$

* bilateral exponential $s(t) = e^{-a|t|}$ per $a>0$

$$A_s = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-a|t|}dt = \lim_{T\to\infty} 2\int_0^T e^{-at}dt$$

togliamo il modulo perché i tempi sono sicuramente positivi

$$= 2\lim_{T\to\infty} \frac{e^{-at}}{-a}\Big|_0^T = 2\frac{(e^{-aT}-1)}{-a} = \frac{2(-1)}{-a} = \frac{2}{a} \longrightarrow m_s = 0$$

Per energia e potenza:

$$|s(t)|^2 = \begin{cases} e^{2a|t|}, & t<0 \\ e^{-2a|t|}, & t>0 \end{cases}$$ → il modulo al quadrato ha la stessa struttura del segnale originale

Sostituendo a con $b=2a$, energia e potenza valgono rispettivamente

$$E_s = \frac{2}{b} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} \rightarrow P_s = 0$$

* rectangle $s(t) = \text{rect}(t)$

$$A_s = \int_{-1/2}^{1/2} 1\,dt = t\Big|_{-1/2}^{1/2} = 1 \rightarrow m_s = 0$$

Inoltre, dato $|\text{rect}(t)|^2 \simeq \text{rect}(t)$, a meno del valore in $t = \pm 1/2$ (con misura di Lebesgue nulla e quindi trascurabile), otteniamo $E_s = 1 \rightarrow P_s = 0$

* ramp $s(t) = t \cdot 1(t)$

$$A_s = \int_0^\infty \text{ramp}(t)\,dt = \int_0^\infty t \cdot 1(t)\,dt = \int_0^\infty t\,dt = \infty$$

$$m_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_0^T t\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{T^2-0}{4T} = \infty$$

Alcuni segnali hanno sia area che valore medio infinito. In questi casi non si può dedurre nulla.

Inoltre, dato $|s(t)|^2 = t^2 \cdot 1(t)$ otteniamo anche $E_s = P_s = \infty$

* triangle $s(t) = \text{triang}(t)$

Per simmetria, $A_s = 2\int_0^1 (1-t)\,dt = 2t - t^2\Big|_0^1 = 1 \rightarrow m_s = 0$

Dall'equivalenza $$|s(t)|^2 = \begin{cases} (1-t)^2, & 0<t<1 \\ (1+t)^2, & -1<t<0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$ otteniamo $E_s = 2\int_0^1 (1+t)^2\,dt = 2t - 2t^2 + \frac{2}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$ $\rightarrow P_s = 0$

* unilateral exponential $s(t) = 1(t) \cdot e^{-at}$ per $a>0$

Il risultato è simile a quello dell'esponenziale bilatero, moltiplicato per un fattore $\frac{1}{2}$

quindi $A_s = \frac{1}{a} \rightarrow m_s = 0$ e $E_s = \frac{1}{2a} \rightarrow P_s = 0$

* complex signal $s(t) = (1+j)\,\text{rect}(t)$

Possiamo rappresentare la parte reale e immaginaria separatamente

Possiamo riscrivere il rect(t) come $s(t) = B\,\text{rect}(t)$ con $B = 1+j$. Per linearità otteniamo che:

$A_s = B\,A_{rect} = B = 1+j \rightarrow m_s = 0$, risulta quindi $A_s \in \mathbb{C}$

Inoltre, osservando che $|B|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow [s(t)]^2 = |B|^2 \text{rect}^2(t)$

ovvero $2\,\text{rect}^2(t) \simeq 2\,\text{rect}(t)$. Quindi, per linearità, $E_s = 2A_{rect} = 2 \rightarrow P_s = 0$

* dumped complex exponential $s(t) = e^{p_0 t} 1(t)$ con $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ e $\sigma_0 < 0$

Possiamo riscrivere la sinusoide smorzata come $s(t) = \underbrace{e^{\sigma_0 t}\cos(2\pi f_0 t)1(t)}_{\mathbb{R}[s(t)]} + j\underbrace{e^{\sigma_0 t}\sin(2\pi f_0 t)1(t)}_{\mathbb{C}[s(t)]}$

Rappresentata graficamente come:

L'area, in realtà, è facilmente calcolabile dall'espressione complessa. Infatti:

$$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{p_0 t} 1(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{p_0 t}\,dt = \frac{e^{p_0 t}}{p_0}\Big|_0^{\infty} = \frac{0-1}{p_0} = -\frac{1}{p_0} \rightarrow m_s = 0$$

Per energia e potenza individuiamo $|s(t)|^2 = |e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} 1(t)|^2 = |e^{\sigma_0 t}|^2 |e^{j\omega_0 t}|^2 \cdot |1(t)| \simeq e^{2\sigma_0 t} \cdot 1 \cdot 1(t) = e^{2\sigma_0 t} 1(t)$

Troviamo quindi la formula di un esponenziale complesso per cui $E_s = \frac{1}{-2\sigma_0} = \frac{1}{2|\sigma_0|} > 0 \rightarrow P_s = 0$

1.5. Discrete-time aperiodic signals

I segnali aperiodici a tempi discreti sono essenzialmente uguali a quelli a tempi continui, ma con qualche aggiustamento. L'estensione di un segnale discreto è, in questo caso, il più piccolo intervallo discreto $[n_s, N_s]$ al di fuori del quale il segnale vale 0. Un segnale discreto è detto causale se vale zero a tempi negativi.

Per quanto riguarda le misure di area, media, estensione e potenza, queste devono essere mappate a tempo discreto e calcolate tramite sommatoria.

Le proprietà fondamentali sono mantenute: area e valor medio sono lineari. Inoltre, area e media (o energia e potenza) sono misure alternative rispettivamente per segnali limitati ed illimitati.

Area and mean value

$$A_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)$$

$$m_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} s(n)$$

the number of samples is $1+2N$

Energy and power

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2$$

$$P_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2$$

Discrete-time aperiodic signals

1. Calcola area, valor medio, energia e potenza dei seguenti segnali:

* signum $s(n) = sgn(n)$

$$A_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} sgn(n) = \lim_{N\to\infty} N - N = 0 \rightarrow m_s = 0$$

Per energia e potenza individuiamo $|s(n)|^2 = \begin{cases} 1, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

quindi $E_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} 2N = \infty$

Invece, $P_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{2N}{1+2N} = 1$

* exponential $s(n) = a^n 1_0(n)$ per $|a|<1$, $a \in \mathbb{R}$

$A_s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1}{1-a}$, che è il risultato della serie geometrica $\rightarrow m_s = 0$

Per energia e potenza, $|s(n)|^2 = |a|^{2n} 1_0(n) = b^n 1_0(n)$, $b = |a|^2$ quindi $E_s = \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-|a|^2} \rightarrow P_s = 0$

* unit step $s(n) = 1_0(n)$

$A_s = \sum_{0}^{\infty} 1_0(n) = \infty$ e $m_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{-N}^{N} 1_0(n) = \frac{1+N}{1+2N} = \frac{1}{2}$

Per energia e potenza, $|s(n)|^2 = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = 1_0(n)$ quindi $P_s = \frac{1}{2} \rightarrow E_s = \infty$

* sampled complex exponential $s(n) = e^{j2\pi f_0 nT} 1_0(n)$

Possiamo riscrivere il segnale come:

$s(n) = b^n 1_0(n)$ con $b = e^{j2\pi f_0 T}$

$$A_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n 1_0(n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} b^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-b^N}{1-a} = ?$$

il limite è indefinito, quindi l'area non è determinabile.

$$m_s = \frac{1}{1+2N} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} b^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-b^N}{(1-a)(1+2N)} = 0$$

Il denominatore rispetta la $\boxed{\text{disuguaglianza triangolare } |1-b^N| < 1 + |b^N|}$ e quindi $|1-b^N| < 1+1 = 2$ dato che $|b| = |e^{2\pi f_0 T}| = 1$; il denominatore tende, invece ad infinito.

Per potenza ed energia $|s(n)|^2 = |b|^{2n} 1_0(n) = 1 \cdot 1_0(n) = 1_0(n)$

Pertanto, energia e potenza sono quelle del gradino unitario, ovvero $P_s = \frac{1}{2} \rightarrow E_s = \infty$

Es.2 Calcola la potenza dell'esponenziale complesso campionato $s(n) = e^{j4n}$

Dato $|s(n)|^2 = 1 \rightarrow P_s = 1$

Periodic Signals

1.6. Continuous-time periodic signals

Nel caso di segnali periodici nel tempo, l'intervallo di tempo d'interesse è quello del periodo T_p, che identifica la frequenza con la quale il segnale si ripete. Ricordiamo l'importante equivalenza $s(t) = s(t+T_p), \forall t$.

Nell'esempio dell'esponenziale complesso, f_0 è una frequenza reale. Per l'equivalenza di Eulero è possibile riscrivere il segnale come un coseno per la parte reale ed un seno per quella complessa.
In generale, 2π è il periodo minimo di una sinusoide.

Secondo la regola della periodicità se un segnale è periodico di periodo T_1, per qualsiasi scelta di numero intero m, il segnale è periodico anche di mT_1
Se vogliamo sommare due segnali con periodicità diversa, è sufficiente trovare una periodicità comune risolvendo $mT_1 = kT_2$ per i più piccoli valori di m e k. Ovvero, scegliamo un periodo $\frac{m}{k} = \frac{T_2}{T_1}$
Tuttavia, la somma di segnali periodici è periodica se e solo se la relazione $\boxed{\frac{T_2}{T_1}}$ è razionale
Ad esempio, $\cos(t) + \sin(\pi t)$ NON è periodico perché $\pi t / t = \pi$ che è irrazionale.

Quando si ha a che fare con sinusoidi, si ha un collegamento diretto tra periodo T_p e frequenza f_0, equivalente a $1/T_p$ e la pulsazione, denominata ω_0, è equivalente a $2\pi f_0$, ovvero $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_p} \rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega_0}$
Quindi, nel caso di sinusoidi, la relazione deve essere compresa tra periodi, frequenze o pulsazioni.
Segnali sinusoidali hanno area infinita, mentre la media consiste nell'area di un periodo T_p

$$m_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2NT_p} \int_{-NT_p}^{NT_p} s(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \frac{2NA_s(T_p)}{2NT_p} = \frac{A_s(T_p)}{T_p}$$

NB: Il valore assoluto dimezza il periodo. Per $\cos(2t)$, $T_{p1} = \pi$
per $|\cos(2t)|$, $T_{p2} = \frac{1}{2} T_{p1} = \pi/2$

Le stesse considerazioni valgono anche per energia e potenza. In generale, valore medio e potenza sono validi anche se T_p NON è il periodo minimo. Le relazioni utili per i segnali sinusoidali sono quindi:

Area (in a period) and mean value

$$A_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)dt \qquad m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)dt$$

Energy (in a period) and power

$$E_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2\,dt \qquad P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2 dt$$

Continuous-time periodic signals

Es.1 Calcola valore medio e potenza per i seguenti segnali:

* Esponenziale complesso $s(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}$, $f_0 \neq 0$, $A > 0$ ($\in \mathbb{R}$)

Possiamo rappresentare il segnale nella sua componente reale e complessa

Il periodo è $T_p = 1/|f_0|$ ed è comune sia alla parte reale che complessa. Quindi, otteniamo:

$$A_s(T_p) = \int_0^{T_p} Ae^{j2\pi f_0 t}dt = \frac{A}{j2\pi f_0} e^{j2\pi f_0 t}\Big|_0^{T_p} = A\frac{e^{j2\pi f_0 T_p} - e^{j2\pi f_0 0}}{j2\pi f_0} = A\frac{1-1}{j2\pi f_0} = 0$$

$$\boxed{e^{j0} = e^{\pm j2\pi} = e^{j2\pi f_0 T_p} = 1}$$

Di conseguenza si ottiene $m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = 0$

Per il valore della potenza dobbiamo identificare il valore di $|s(t)|^2$, che in questo caso diventa:

$|s(t)|^2 = |A|^2 \cdot |e^{j2\pi f_0 t}|^2 = A^2 \cdot 1^2 = A^2$ e quindi:

$$E_s(T_p) = \int_0^{T_p} A^2 dt = A^2 T_p \longrightarrow P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = A^2$$

* composizione di esponenziali complessi $s(t) = A_1 e^{j(2\pi f_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(2\pi f_2 t + \varphi_2)}$ con $f_1 \neq f_2$; $f_1, f_2 \neq 0$; $A_1, A_2 > 0$

Posto $B_i = A_i e^{j\varphi_i}$ otteniamo $s(t) = B_1 e^{j2\pi f_1 t} + B_2 e^{j2\pi f_2 t}$

$s(t)$ è periodico solo se f_1 e f_2 stanno in rapporto razionale tra loro

Tuttavia, per linearità del valor medio sappiamo che $m_s = B_1 m_1 + B_2 m_2$, dove m_1 e m_2 sono i valori medi di $s_1(t) = e^{j2\pi f_1 t}$ e $s_2(t) = e^{j2\pi f_2 t}$.

$\boxed{\text{Dato } f_1, f_2 \neq 0, \text{ sappiamo che } m_1 = m_2 = 0, \text{ quindi } m_s = 0}$

Per la potenza calcoliamo $|s(t)|^2 = (B_1 s_1(t) + B_2 s_2(t)) \cdot (B_1 s(t) + B_2 s_2(t))^* = |B_1|^2 |s_1(t)|^2 + |B_2|^2 |s_2(t)|^2 + B_1 B_2^* s_1^*(t) s_2(t) + B_2 B_1^* s_1^*(t) s_2(t)$

ovvero $|B_1|^2 + |B_2|^2 + B_1 B_2^* e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} + B_1^* B_2 e^{-j2\pi(f_1 - f_2)t}$ $\quad (\pm(f_1 - f_2) \neq 0)$

Dato che il valore medio di una costante è la costante stesso otteniamo:

$$P_s = |B_1|^2 + |B_2|^2 = A_1^2 + A_2^2$$

* composizione di esponenziali complessi $s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j2\pi f_k t}$ per $f_k \neq 0$, $f_k \neq f_j$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{C}$

Procedendo alla risoluzione con linearità, possiamo stabilire che $m_s = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k \operatorname{mean}(e^{j2\pi f_k t}) = A_0$

Ricordiamo infatti che $\boxed{\text{l'esponenziale complesso } e^{j2\pi f_k t} \text{ ha valore medio nullo per } f_k \neq 0}$

Per la potenza, invece, identifichiamo $|s(t)|^2$ come:

$$|s(t)|^2 = \left(\sum_{k=0}^{K} A_k e^{j2\pi f_k}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{K} A_k e^{j2\pi f_k}\right)^* = \sum_{k,\ell=0}^{K} A_k A_\ell^* e^{j2\pi(f_k - f_\ell)t} = \sum_{k=0}^{K} |A_k|^2 + \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ k \neq \ell}}^{K} A_k A_\ell^* e^{j2\pi(f_k - f_\ell)t}$$

Assumendo $f_0 = 0$, otteniamo $f_k - f_\ell \neq 0 \rightarrow$ il valore medio della sommatoria con il coniugato vale zero. Ciò implica che $P_s = \sum_{k=0}^{K} |A_k|^2$

$\boxed{\text{Nella composizione di sinusoidi complesse, la potenza è la somma delle potenze dei singoli componenti}}$

Es.2 Identifica periodicità, valore medio e potenza per i seguenti segnali. Ricordo: $\boxed{\cos(a) = \frac{e^{ja}+e^{-ja}}{2}}$ $\boxed{e^{j(a+b)} = e^{ja}+e^{jb}}$

* sinusoide $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \vartheta_0)$, $f_0 \neq 0$, e $A > 0$ ($\in \mathbb{R}$)

Il periodo è $T_p = 1/|f_0|$, quindi otteniamo: $\boxed{\sin(\theta_0 \pm 2\pi) = \sin(\theta_0)}$

$A_s(T_p) = \int_0^{T_p} A\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)\,dt = \frac{-A}{2\pi f_0}\sin(2\pi f_0 T_p + \theta_0)\Big|_0^{T_p} = -\frac{A\sin(2\pi f_0 T_p + \theta_0) - \sin(\theta_0)}{2\pi f_0} = \frac{A\sin(\theta_0) - \sin(\theta_0 \pm 2\pi)}{2\pi f_0} = 0$

Di conseguenza otteniamo $m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = 0$

Per la potenza identifichiamo $|s(t)|^2$ ricordando $\boxed{\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\alpha)}$

$|s(t)|^2 = s^2(t) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2\cos(2\pi 2 f_0 t + 2\vartheta_0)$

Sfruttando il risultato sopra ottenuto scriviamo $E_s(T_p) = \int_0^{T_p}\frac{1}{2}A^2 dt + \int_0^{T_p}\frac{1}{2}A^2\cos(2\pi 2 f_0 t + 2\vartheta_0)\,dt = \frac{1}{2}A^2 T_p + 0 \rightarrow$ questo contributo dipende dal fatto che $2f_0 = \frac{1}{2}T_p$ ed il suo integrale nell'intervallo $[0, T_p]$ è zero.

Quindi $P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{2}A^2$

<u>Attenzione</u>: si sarebbe potuto sfruttare il fatto che $s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} + \frac{1}{2}Ae^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}$ e quindi risolvere l'esercizio come l'esempio precedente

* composizione di sinusoidi $s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K} A_k\cos(2\pi f_k t + \theta_k)$ per $f_k > 0$, $f_k \neq f_j$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{R}$

Utilizzando la formula di Eulero possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}A_k e^{j\theta_k}e^{j2\pi f_k t} + \sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2}A_k e^{-j\theta_k}e^{-j2\pi f_k t}$

con $f_k \neq -f_k$. Secondo la risoluzione degli esercizi precedenti possiamo stabilire che $m_s = A_0$ e per la potenza:

$P_s = A_0^2 + \sum_{k=1}^{K}\left|\frac{1}{2}A_k e^{j\theta_k}\right|^2 + \sum_{k=1}^{K}\left|\frac{1}{2}A_k e^{j\theta_k}\right|^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}A_k^2$

* $s(t) = A\cos(2\pi t + \pi/2) + B\sin(8\pi t + \pi)$

In questo caso $\omega_1 = 2\pi = 2\pi f_1$ con $f_1 = 1$ e $T_1 = 1/|f_1| = 1$ e $\omega_2 = \pi = 2\pi f_2$ con $f_2 = 4$ e $T_2 = 1/|f_2| = 1/4$. A questo punto risolviamo $T_p = kT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} \rightarrow$ con $k = 1$, $T_p = 1$

A questo punto $m_s = 0$ e $P_s = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$

* $s(t) = e^{j20\pi t}$. $\omega_0 = 20\pi = 2\pi f_0$ con $f_0 = 10$ e $T_p = 1/|f_0| = 1/10$. Con $f_0 \neq 0 \rightarrow m_s = 0$. Inoltre, $P_s = 1$

* $s(t) = e^{j20t}$. $\omega_0 = 20 = 2\pi f_0 \rightarrow f_0 = 10/\pi \rightarrow T_p = 1/|f_0| = \pi/10$. Quindi $m_s = 0$ e $P_s = 1$

* $s(t) = e^{-j2\pi t}1(t)$. Dato la presenza del gradino $1(t)$, in questo caso il segnale è aperiodico. Per il valore medio calcoliamo $m_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T e^{-j2\pi t}dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{e^{-j2\pi T}-1}{-j2\pi} = 0 \rightarrow$ dato che il denominatore $2T$ diverge mentre il numeratore è limitato per la disuguaglianza triangolare $|e^{-j2\pi T}-1| < |e^{-j2\pi T}|+1 = 2$

Per la potenza, invece, identifichiamo $|s(t)|^2 = |e^{-j2\pi t}|^2 \cdot |1(t)|^2 = 1^2(t) \simeq 1(t) \rightarrow P_s = \frac{1}{2}$

* $s(t) = \cos(10\pi t) + \sin(\frac{8}{3}\pi t)$. In questo caso $\omega_1 = 10\pi = 2\pi f_1$ con $f_1 = 5$ e $T_1 = 1/5$; $\omega_2 = 8/3\pi = 2\pi f_2$ con $f_2 = 4/3$ e $T_2 = 3/4$. Risolviamo $T_p = kT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{15}{4}$. Dato $k = 15 \rightarrow T_p = 3$. A questo punto $m_s = 0$, $P_s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

* $s(t) = A\sin^2(10\pi t + \pi/4)$

Possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A\cos(20\pi t + \pi/2)$. In questo modo la periodicità corrisponde a quella del coseno, dove $\omega_0 = 20\pi = 2\pi f_0$ con $f_0 = 10$ e $T_p = 1/10$. Questo è consistente con il fatto che $\sin^2$ è periodico di periodo π.

A questo punto otteniamo $m_s = \frac{1}{2}A$ e $P_s = (1/2\,A)^2 + 1/2\,(1/2\,A)^2 = 3/8\,A^2$

* $s(t) = \dfrac{\sin(5t)}{\sin(t)}$

In questo caso $\omega_1 = 5 = 2\pi f_1$ con $f_1 = 5/2\pi$ e $T_1 = 2/5\pi$

e $\omega_2 = 1 = 2\pi f_2$ con $f_2 = 1/2\pi$ quindi $T_2 = 2\pi$

$T_p = kT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{5}{2}$

con $k = 5 \rightarrow T_p = 2\pi$

Tuttavia, dal grafico è possibile osservare che la periodicità minima è in realtà π

Valor medio e potenza sono, in questo caso, difficili da calcolare. È impossibile risolvere l'integrale, dato che non conosciamo la primitiva.

Questo valore sarà più facilmente calcolabile con la trasformata di Fourier.

1.7. Discrete-time periodic signals

Per i segnali a tempo discreto la proprietà della periodicità è espressa da $s(n) = s(n+N)$, dove N è il periodo. Nel tempo discreto, il segnale è completamente identificato da un numero limitato di N campioni in un periodo. Se N è il periodo minimo, allora il segnale è anche periodico di 2N, 3N, 4N.

Nel caso delle sinusoidi, il campionamento risulta essere molto delicato.

Nella raffigurazione mostra come, in base al campionamento, si ottengono comportamenti periodici diversi. In questo caso specifico, il primo campionamento corrisponde a quello a tempi continui, mentre il secondo no.

In questo caso, per identificare se la sinusoide campionata è periodica o meno, il valore $\boxed{f_0 T = \frac{k}{N}}$ deve essere un numero razionale, che corrisponde ad una traslazione temporale multipla di 2π. Il denominatore N identifica la periodicità

Area e valore medio hanno le stesse limitazioni che nel tempo continuo.

Area (in a period) and mean value

$$m_s = \frac{A_s(N)}{N} \qquad A_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} s(n)$$

Energy (in a period) and power

$$P_s = \frac{E_s(N)}{N} \qquad E_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |s(n)|^2$$

Discrete-time periodic signals

È importante ricordare che $\boxed{\text{esponenziali complessi hanno: } m_s = 0 \text{ e } P_s = |A|^2 \text{ e sinusoidi hanno: } m_s = 0 \text{ e } P_s = \frac{1}{2}A^2}$

Es.1 Calcolare energia e potenza per i seguenti segnali:

* sinusoide campionata $s(n) = A\cos(2\pi f_0 nT)$ periodica di periodo N, con $f_0 NT$ valore razionale

Per il valore medio identifichiamo l'area in un periodo.

Per la formula di Eulero otteniamo:

$$A_s(N) = \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0 nT) = \frac{1}{2}A\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j2\pi f_0 T}\right)^n + \frac{1}{2}A\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-j2\pi f_0 T}\right)^n$$

ovvero $\frac{1}{2}A\frac{1-e^{j2\pi f_0 NT}}{1-e^{j2\pi f_0 T}} + \frac{1}{2}A\frac{1-e^{-j2\pi f_0 NT}}{1-e^{-j2\pi f_0 T}} = \frac{1}{2}A\frac{1-1}{1-e^{j2\pi f_0 T}} + \frac{1}{2}A\frac{1-1}{1-e^{-j2\pi f_0 T}} = 0$

Avendo assunto $f_0 NT$ numero intero, $e^{j2\pi f_0 NT} = e^{-j2\pi f_0 NT} = 1$. Quindi il valore medio $m_s = 0$.

Per la potenza consideriamo $|s(t)|^2 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2\cos(2\pi 2 f_0 nT)$. Il secondo contributo ha media nulla, quindi non la consideriamo. $P_s = \frac{1}{2}A^2$, risultato che corrisponde al caso continuo

* esponenziale complesso campionato $s(n) = e^{j2\pi f_0 nT}$ con generico $f_0 \neq 0$

In quanto non sappiamo se questo esponenziale sia periodico o meno, ricorriamo alla regola generale della media.

$$m_s = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1+2N}\sum_{n=-N}^{N} a^n \text{ con } a = e^{j2\pi f_0 T} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1+2N}a^{-N}\sum_{\ell=0}^{2N} a^\ell = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1+2N}a^{-N}\frac{1-a^{2N+1}}{1-a} = 0$$

Inoltre, dato $|s(n)|^2 = 1$, $P_s = 1$

* composizione dell'esponenziale complesso $s(n) = ae^{j2\pi f_1 nT} + be^{j2\pi f_2 nT}$, con $f_1 \neq f_2 + k/T$ e $f_1, f_2 \neq k/T$ (non-zero frequency)

Il valore medio segue per linearità, ovvero $m_s = m_{s,a}\cdot a + m_{s,b}\cdot b = 0\cdot a + 0\cdot b = 0$

Per la potenza, $|s(n)|^2 = s(n)s^*(n) = |a|^2 + |b|^2 + ab^* e^{j2\pi(f_1-f_2)nT} + a^* b e^{-j2\pi(f_1-f_2)nT}$ con $\pm(f_1-f_2) \neq k/T$. Di conseguenza $P_s = |a|^2 + |b|^2$, equivalente al caso continuo

Es.2. Identifica periodicità, valor medio e potenza di:

* $s(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{k} A_k e^{j2\pi f_k nT}$ per $f_k \neq \ell/T$, $f_k \neq f_j + \ell/T$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{C}$

Per la media sfruttiamo il fatto che gli esponenziali complessi hanno media m_s nulla quindi per il segnale $m_s = A_0$

Per la potenza $|s(n)|^2 = \left(\sum_{k=0}^{k} A_k e^{j2\pi f_k nT}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{k} A_\ell e^{j2\pi f_\ell nT}\right)^* = \sum_{k,\ell=0}^{k} A_k A_\ell^* e^{j2\pi(f_k-f_\ell)nT}$

$$= \sum_{k=0}^{k}|A_k|^2 + \sum_{\substack{k,\ell=0\\ k\neq\ell}}^{k} A_k A_\ell^* e^{j2\pi(f_k-f_\ell)nT} \longrightarrow P_s = \sum_{k=0}^{k}|A_k|^2$$

tutte queste frequenze hanno valor medio nullo

* composizione di sinusoidi $s(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{k} A_k\cos(2\pi f_k nT + \vartheta_k)$ per $f_k > 0$, $f_k \neq \ell/T$, $f_k \neq f_j + \ell/T$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{R}$

Come prima cosa sfruttiamo l'identità di Eulero $s(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{k}\frac{1}{2}A_k e^{j\vartheta_k} e^{j2\pi f_k nT} + \sum_{k=1}^{k}\frac{1}{2}A_k e^{-j\vartheta_k} e^{-j2\pi f_k nT}$

Nelle sommatorie sono tutti esponenziali a fase non nulla, quindi a media nulla $\rightarrow m_s = A_0$

Per la potenza $P_s = A_0^2 + 2\sum_{k=1}^{k}\frac{1}{2}(A_k)^2 = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k}A_k^2$

* $s(n) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right)$ $\boxed{\omega_0 T = 2\pi f_0 T}$

$\omega_0 T = 2\pi f_0 T = \frac{4}{3}\pi \rightarrow f_0 T = \frac{2}{3} \rightarrow N = 3, k = 2$

$s(n) = \frac{e^{j\frac{4}{3}\pi n} + e^{-j\frac{4}{3}\pi(n)}}{2} = \frac{1}{2}e^{j\frac{4}{3}\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{3}\pi n} \rightarrow$ gli esponenziali hanno media nulla quindi $m_s = 0$

Per la potenza sfruttiamo la proprietà degli esponenziali $P_s = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

* $s(n) = \cos(2\pi n/\sqrt{3})$

$\omega_0 T = 2\pi f_0 T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \rightarrow f_0 T = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow N = \sqrt{3}$ NON è razionale quindi il segnale NON è periodico.

Come l'esercizio sopra $m_s = 0$, $P_s = \frac{1}{2}$

* $s(n) = \cos(2n) - e^{j\frac{\pi}{4}n}$

Per il coseno $\omega_0 T = 2\pi f_0 T = 2 \rightarrow f_0 T = \frac{1}{\pi} \rightarrow$ segnale NON periodico $\longrightarrow m_s = 0$, $P_s = \frac{1}{2} + |-1|^2 = \frac{3}{2}$ Potenza dell'esponenziale

* $s(n) = e^{j\frac{3}{2}\pi n}\cos\left(\frac{5}{2}\pi n\right) + j\sin(\pi n)$

esprimiamo il segnale come $e^{j\frac{3}{2}n} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{5}{2}\pi n} + e^{-j\frac{5}{2}\pi n}\right) + j\sin(\pi n) = \frac{1}{2}e^{j4\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n} + j\sin(\pi n)$

Il segnale è periodico di periodo $N = 2$ quindi $s(n) = \frac{1}{2}e^{j8\pi} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi} + j\sin(2\pi)$

$= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)^n + j(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n} \rightarrow m_s = \frac{1}{2}$ e $P_s = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$

* $s(n) = e^{jn}\sin(n)$

$s(n) = e^{jn} \cdot \left(\frac{1}{2j}e^{jn} - \frac{1}{2j}e^{-jn}\right) = \frac{1}{2j}e^{j2n} - \frac{1}{2j}e^{j0} = \frac{1}{2j}e^{j2n} - \frac{1}{2j}$ $m_s = \frac{-1}{2j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{-j}{-2} = \frac{1}{2}j$ e $P_s = \left|\frac{1}{2j}\right|^2 + \left|\frac{1}{2j}\right|^2 = \left|\frac{1}{-4}\right| + \left|\frac{1}{-4}\right| = \frac{1}{2}$

Il secondo contributo è una costante, quindi periodico di periodo qualsiasi. Per il primo contributo

$\omega_1 T = 2\pi f_1 T = 2 \rightarrow f_1 T = \frac{1}{\pi} \rightarrow$ il segnale NON è periodico

* $s(n) = e^{j\pi n}\sin(\pi n)$ $\boxed{s(n) = \sin(\pi n) \text{ è periodico di periodo } N = 1}$

Notiamo che $\sin(\pi n) = 0$ e quindi $s(n) = 0$. Il segnale è periodico di qualsiasi periodo $m_s = P_s = 0$

Basic transformation and symmetries

1.8. Basic transformations

Le trasformazioni non sono veri e propri sistemi, ma aiutano a scrivere i segnali in forma compatta ed efficace

A differenza di time reversal e time shift, time scale modifica la durata del segnale. Nello specifico, la durata è moltiplicata per il fattore di scala a.

Scale + shift

$$s(t) = x\left(\frac{t-t_0}{a}\right)$$

The preferred one, where t_0 is the true shift

Shift + scale

$$v(t) = x\left(\frac{t}{a} - t_1\right) = x\left(\frac{t-at_1}{a}\right)$$

They correspond when $at_1 = t_0$

Le notazioni rappresentate si riferiscono alle stesse trasformazioni. Tuttavia, la prima risulta più intuitiva. Pertanto, è preferibile trasformare un segnale scalandolo e solo poi traslandolo

Basic transformations

Es.1 Esprimi il segnale in figura come una funzione di triang(t)

È un triangolo di altezza A centrato a $t_0 = t_1 + \frac{1}{2}T$ con base T

Osto che l'estensione di triang(t) è 2 ovvero [-1,1]. Scaliamo il triangolo affinché [-a,a] dia $2a = T$ ovvero $a = T/2$.

A questo punto $\boxed{s(t) = A\,\text{triang}\left(\frac{t-t_0}{a}\right)} = A\,\text{triang}\left(\frac{t-t_1-T/2}{T/2}\right) = A\,\text{triang}\left(\frac{2(t-t_1)}{T} - 1\right)$

Es.2 Esprimi rect(t) come una funzione del gradino 1(t), combinando i segnali

$$\text{rect}(t) = 1(t+1/2) - 1(t-1/2) = \begin{cases} 0-0=0, & t < -1/2 \\ 1-0=1, & -1/2 < t < 1/2 \\ 1-1=0, & t > 1/2 \end{cases}$$

Es.3 Disegna il segnale discreto $s(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{1+2N}\right)$

Possiamo considerare il segnale come $s(n) = x(n)$ di $x(t) = \text{rect}(t/T)$, $T = 1+2N$ di estensione $[-T/2, T/2]$ con $T/2 = N + 1/2$. Otteniamo $s(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Es.4. Esprimi il segnale in funzione di rect(t)

Il rect è centrato in $t_0 = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ con

- altezza B
- base $T = t_2 + t_1$

Sfruttando la regola dell'estensione sappiamo che $E_s = [-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$ con $a = T$, ovvero $a = t_1 + t_2$

sfruttando $\boxed{s(t) = x((t-t_0)/a)}$

$s(t) = B\,\text{rect}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = B\,\text{rect}\left(\frac{t + \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2}{t_1+t_2}\right)$

Es.5 Disegna $s(t) = x\left(\frac{3}{2}t + 1\right)$ per $x(t)$ in figura

$x\left(\frac{3}{2}t+1\right)$

interpretiamo come

$s(t) = x\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = x\left(\frac{t-(-2/3)}{2/3}\right)$

segnale scalato di $a = 2/3$ e traslato di $t_0 = -2/3$

Es.6. Disegna $s(t) = x(-t+2)$

$s(t) = x(-(t-2)) = x_-(t-2)$

segnale ribaltato traslato di $t = 2$

Es.7. Esprimi sgn(t) come una funzione di 1(t) sfruttando combinazion lineari e trasformazioni.

$\text{sgn}(t) = 1(t) - 1(-t) = \begin{cases} 0-1 = -1, & t<0 \\ 1-0 = 1, & t>0 \end{cases}$

Es.8. Disegna $s(t) = \begin{cases} t-1 & 1<t<3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ed esprimilo come una combinazione lineare di 1(t) e ramp(t) = t·1(t).

$s(t) = \text{ramp}(t-1) - 2\cdot 1(t-3) - \text{ramp}(t-3)$

Es.9. Considera il segnale $s(t) = x(-2t+1)$ con $x(t)$ di periodo $T_x = 2$. $s(t)$ è periodico? Se sì, di che periodo?

Osserviamo che $s(t) = x(-(2t-1)) = x_-(2t-1) = x_-\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right)$. Il segnale è $x(-t)$:

- traslato di $t_0 = 1/2$;
- scalato di $a = 1/2$.

Se un segnale è periodico di periodo T_p lo è anche la sua controparte ribaltata (per simmetria) e quindi anche la sua controparte traslata

Osserviamo:

$$\boxed{\begin{aligned} x_-(t+T_p) &= x(-t-T_p) = x(-t) = x_-(t) \\ x_{t_0}(t+T_p) &= x(-t-t_0+T_p) = x(t-t_0) = x_{t_0}(t) \end{aligned}}$$

Posto $x_{t_0} = x(t-t_0)$.

L'unica trasformazione che cambia la periodicità è scalare per un fattore a. Quindi $T_s = aT_x = 1$

Es.10 Considera $s(t) = x(t/a)$ versione scalata di $x(t)$. Che connessione c'è tra Area, media, energia e potenza?

$A_{s(t)} = aA_{x(t)} \rightarrow E_{s(t)} = aE_{x(t)}$

$m_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t/a)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{a}{2T}\int_{-T/a}^{T/a} x(u)\,du = \lim_{T'\to\infty} \frac{1}{2T'}\int_{-T'}^{T'} x(u)\,du = m_x \qquad T' = T/a$

quindi $m_s = m_x$ e, analogamente $P_s = P_x$

Es.11 Considera $s(n) = x(n-n_0)$ versione traslata di $x(n)$. Qual è la connessione tra area, valor medio, energia e potenza?

$A_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m) = A_x$ ed $E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n-n_0)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|^2 = E_x$

Per valor medio e potenza:

$$m_s = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N}\sum_{n=-N}^{N} x(n-n_0) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N}\sum_{m=-N-n_0}^{N-n_0} x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+2N}\left(\sum_{m=-N}^{N} x(m) + \sum_{m=-N-n_0}^{-N-1} x(m) - \sum_{m=N-n_0+1}^{N} x(m)\right) = m_x \rightarrow P_s = P_x$$

La seconda e la terza sommatoria sono somme di n_0 valori, divisi per $1+2N$ con $N\to\infty$, quindi il loro contributo vale zero

Es.12 Disegna il segnale discreto $s(n) = -\text{rect}\left(\frac{n-1/2}{2N}\right)$ e calcola area, valor medio, energia e potenza.

Il segnale può essere interpretato come una versione campionata $s(n) = x(n)$ di $x(t) = -\text{rect}((t-1/2)/T)$, $T = 2N$ che è un rect di estensione $[-N, N]$ traslato di $1/2$, e quindi l'estensione è $[-N+1/2, N+1/2]$.

Graficamente

Otteniamo $s(n) = \begin{cases} -1, & -N < n \le N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Il segnale ha $2N$ valori attivi associati al valore -1. Quindi:

$A_s = -2N$, $E_s = 2N$, $m_s = P_s = 0$

1.9. Symmetries in signals

La simmetria fa riferimento al fatto che un segnale abbia una forma simmetrica. Un segnale è detto a:

- simmetria pari se è invariante al time riversal, $s(t) = s(-t)$ o $s(n) = s(-n)$. Triang, rect, sinc e cos sono esempi.
- simmetria dispari se è invariante al time riversal + additive inversion, $s(t) = -s(-t)$ o $s(n) = -s(n)$. Sin e sgn sono segnali dispari. È interessante notare che i segnali a simmetria dispari hanno valore 0 per $t=0$, dato che $s(0) = -s(-0)$. Inoltre, hanno $A_s = 0$ e $m_s = 0$.

Ogni segnale può essere ricostruito come la somma di una componente pari e di una componente dispari.

$s(t) = s_e(t) + s_o(t)$ [e = even (pari) e o = odd (dispari)] con $s_e(t) = 1/2\, s(t) + 1/2\, s(-t) = s_e(-t)$ e $s_o(t) = 1/2\, s(t) - 1/2\, s(-t) = -s_o(-t)$

Ad esempio, $1(t)$ può essere espresso come $1(t) = 1/2$ (even part) $+ 1/2$ sgn (t) (odd part).

Real/imaginary	Hermitian/anti-Hermitian
real $s(t) = s^*(t)$ imaginary $s(t) = -s^*(t)$	Hermitian $s(t) = s^*(-t)$ anti-Hermitian $s(t) = -s^*(-t)$
components $s_{re}(t) = ½\, s(t) + ½\, s^*(t)$ $s_{im}(t) = ½\, s(t) - ½\, s^*(t)$	components $s_h(t) = ½\, s(t) + ½\, s^*(-t)$ $s_a(t) = ½\, s(t) - ½\, s^*(-t)$

→ un segnale Hermitiano ha parte reale pari e componente immaginaria dispari. ovvero $a(t) + jb(t) = a(-t) - jb(-t)$

per un segnale anti-Hermitiano vale il contrario.

Un segnale pari ed Hermitiano è necessariamente reale.

Symmetries in signals

Es.1 Identifica e disegna la parte pari e dispari del segnale in figura

$s(t) = \text{rect}(t - 1/2)$, ovvero rect(t) traslato di 1/2 verso destra

Per definizione:

$$s_e(t) = \frac{1}{2} s(t) + \frac{1}{2} s(-t) = \frac{1}{2}\text{rect}(t - 1/2) + \frac{1}{2}\text{rect}(-t - 1/2)$$

* rect(t) è pari quindi $s(t) = s(-t)$

$$= \frac{1}{2}\text{rect}(t - 1/2) + 1/2\,\text{rect}(t + 1/2) = 1/2\,\text{rect}(1/2\, t)$$

Per la parte dispari:

$$s_o(t) = \frac{1}{2} s(t) - \frac{1}{2} s(-t) = \frac{1}{2}\text{rect}(t - 1/2) - \frac{1}{2}\text{rect}(t + 1/2) = \frac{1}{2}\text{rect}(1/2\, t)\,\text{sgn}(t)$$

Es.2 Identifica la parte pari e dispari di $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$

Secondo la regola standard delle sinusoidi

$$\left.\begin{aligned} s_e(t) &= \cos(2\pi f_0 t)\cos(\varphi_0) \\ s_o(t) &= -\sin(\varphi_0)\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}\right\} \quad s(t) = \cos(2\pi f_0 t)\cos(\varphi_0) - \sin(2\pi f_0 t)\sin(\varphi_0)$$

Es.3 Identifica parte pari e dispari di $s(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

Utilizzando l'identità di Eulero esplicitiamo la formula come $s(t) = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$

ovvero $s_e(t) = s_{re}(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$s_o(t) = s_{im}(t) = j\sin(2\pi f_0 t)$

Per un numero complesso, la componente reale è pari mentre quella immaginaria è dispari

Es.4 Prova che ogni segnale pari ed Hermitiano è necessariamente reale

Un segnale pari ed Hermitiano soddisfa $s(t) = s(-t)$ e $s(t) = s^*(-t)$. Sfruttando la prima uguaglianza otteniamo che $s(t) = [s(-t)]^* = [s(t)]^* = s^*(t)$ il che dimostra l'assunzione.

Dato che un segnale Hermitiano ha sia parte reale che dispari, in quanto il segnale è pari, la sua parte dispari è nulla.

Questa proprietà è valida sia in tempo continuo che discreto

Es.5 Identifica il grafico della parte reale ed immaginaria di $s(t) = (1+j)e^{-|t| + j\pi|t|}$. Il segnale è reale e/o Hermitiano?

$s(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{j\pi|t|}e^{-|t|} = \sqrt{2}e^{-|t|}\cos(\pi|t| + \frac{\pi}{4}) + j\sqrt{2}e^{-|t|}\sin(\pi|t| + \frac{\pi}{4})$

Come si può osservare dal grafico, data la presenza di $|t|$, il segnale è pari. In quanto sia parte reale che immaginaria sono attive e pari, il segnale non è Hermitiano

Es.6 Identifica e rappresenta le parti reali ed immaginarie di $s(t) = (1-j)e^{(\sigma + j\omega)t}$

$1-j = e^{-j\pi/4}$ quindi $s(t) = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{j\omega t}e^{\sigma t} = \sqrt{2}e^{\sigma t}\cos(\omega t - \pi/4) + j\sqrt{2}e^{\sigma t}\sin(\omega t - \pi/4)$ evidenzia la presenza di parte reale e immaginaria. Per $\sigma > 0$ otteniamo

Es.7 Identifica parte pari e dispari di $s(n) = 1_0(n)$

Dato $1_0(-n) = \begin{cases} 1, & n \le 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$s_{re}(n) = 1/2\, 1_0(n) + 1/2\, 1_0(-n) = \begin{cases} 1/2, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \\ 1/2, & n < 0 \end{cases}$$

$$s_{im}(n) = 1/2\, 1_0(n) - 1/2\, 1_0(-n) = \begin{cases} 1/2, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1/2, & n < 0 \end{cases} = 1/2\, \mathrm{sgn}(n)$$

Es.8 Qual è la simmetria del prodotto tra:

* due segnali pari?

  Per $a(t)=a(-t)$ e $b(t)=b(-t)$ il prodotto $s(t)=a(t)b(t)$ soddisfa $s(-t)=a(-t)b(-t)=a(t)b(t)=s(t)$ → prodotto pari

* due segnali dispari?

  per $a(t)=-a(-t)$ e $b(t)=-b(-t)$, $s(-t)=a(-t)b(-t)=[-a(-t)]\cdot[-b(-t)]=a(t)b(t)=s(t)$ → prodotto pari

* un segnale pari ed uno dispari?

  Per $a(t)=a(-t)$ e $b(t)=-b(-t)$, $s(-t)=a(-t)b(-t)=-a(-t)\cdot[-b(-t)]=-a(t)b(t)=-s(t)$ → prodotto dispari

Es.9 Quali sono le simmetrie dei seguenti segnali:

* $s(n)=n^2+jn$

  $Re[s(n)]=n^2$ (pari) e $Im[s(n)]=n$ dispari → il segnale è Hermitiano

* $s(n)=je^{jt}$

  $j\cos(t)-\sin(t)$ → $Re[s(n)]=-\sin(t)$ → dispari e $Im[s(n)]=\cos(t)$ → pari → il segnale è anti-Hermitiano

* $s(n)=e^{jn}\cos(n)$

  $(\cos(n)+j\sin(n))(\cos(n))=\cos^2(n)+j\cos(n)\sin(n)$. $Re[s(n)]=\cos^2(n)$ → pari, $Im[s(n)]=\cos(n)\sin(n)$ → dispari → Hermitiano

* $s(t)=e^{jt}\sin(t)$

  $(\cos(t)+j\sin(t))(\sin(t))=\overbrace{\sin(t)\cos(t)}^{Re[s(t)]}+j\overbrace{\sin^2(t)}^{Im[s(t)]}$ → $Re[s(t)]=$ dispari, $Im[s(t)]=$ pari → segnale anti-Hermitiano

Es.10 Identifica un segnale che è reale, dispari e Hermitiano

Un segnale Hermitiano ha parte reale pari e parte immaginaria dispari. Nessun segnale al di fuori di $s(t)=0$ può essere pari, dispari ed Hermitiano. $\boxed{s(t)=0 \text{ soddisfa qualsiasi simmetria}}$

Basic repetition and ideal impulses

1.10. Periodic repetition

In tempo continuo, possiamo costruire un segnale continuo ripetendo un segnale "base" $u(t)$ a distanze uguali di periodo T_p. In pratica, aggiungiamo al segnale continuo la sua versione shiftata di kT_p, $k \in (-\infty, +\infty)$.

Definiamo la ripetizione periodica come $s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t-kT_p)$

Possiamo provare che il segnale è periodico valutando $s(t+T_p)$

proof

$$s(t+T_p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t+T_p-nT_p)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t-\underbrace{(n-1)}_{m}T_p)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(t-mT_p) = s(t)$$

In generale, la ripetizione periodica è utile per esprimere un segnale in forma compatta. Ad esempio, un'onda quadra è la ripetizione periodica di un rettangolo. Definiamo duty cycle la frazione del periodo T_p nel quale il segnale è attivo.

La ripetizione è utile anche per semplificare dei segnali affinché possano essere analizzati dagli strumenti di Segnali e sistemi.

La sinusoide rettificata $s(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ può essere espressa come la ripetizione periodica di un arco di coseno $u(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}(t/T_p)$. La moltiplicazione per il $\mathrm{rect}(t)$ rende il segnale attivo solo lungo l'origine.

In alcuni casi le ripetizioni periodiche si sovrappongono. Questo fenomeno è detto aliasing.

Infine, la ripetizione periodica ha alcune proprietà:

* linearità $\mathrm{rep}_{T_p} a(t) + b(t) = \mathrm{rep}_{T_p} a(t) + \mathrm{rep}_{T_p} b(t)$;
* time-reversal $\mathrm{rep}_{T_p} u(-t) = s(-t) \rightarrow s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} u(t)$;
* time-shift $\mathrm{rep}_{T_p} u(t-t_0) = s(t-t_0)$;
* time-scale $\mathrm{rep}_{aT_p} u(t/a) = s(t/a)$.

Nel caso discreto il concetto di ripetizione periodica è equivalente. In questo caso però il periodo N è un numero intero.

Periodic repetition

Es. 1 Calcola la ripetizione periodica di periodo T_p per $u(t) = e^{-at}1(t)$ con $a>0$

Rappresentando il segnale $u(t)$ si osserva che la sua estensione è infinita, pertanto ci sarà della sovrapposizione

$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t-nT_p)$

In questo caso è necessario identificare un periodo specifico. In questo caso consideriamo $(0, T_p)$.
Data la presenza di $1(t)$ possiamo osservare che sono le ripetizioni $u(t-nT_p)$ con $n \leq 0$, contribuiscono al segnale $s(t)$ (linee piene nel disegno). Per $n>0$, invece, valgono tutti i contributi rappresentati con linee tratteggiate. Nello specifico otteniamo: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{0} u(t-nT_p) = \sum_{n=-\infty}^{0} e^{-a(t-nT_p)}$, $t \in (0, T_p)$. Questo identifica una serie geometrica facilmente calcolabile.

Quindi, $s(t) = e^{-at} \sum_{-\infty}^{0} e^{naT_p} = e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-maT_p} = e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-aT_p})^m = \frac{e^{-at}}{1-e^{-aT_p}}$, $t \in (0, T_p)$

Osserviamo anche che $e^{-aT_p} < 1$ e

$$s(t) = \begin{cases} v(t) = Be^{-at} & , t \in (0, T_p) \\ v(t-T_p) = Be^{-a(t-T_p)} & , t \in (T_p, 2T_p) \\ v(t+T_p) = Be^{-a(t+T_p)} & , t \in (-T_p, 0) \\ \vdots \end{cases} \quad , \quad B = \frac{1}{1-e^{-aT_p}}$$

In generale otteniamo $s(t) = v(t-nT_p) = Be^{-a(t-nT_p)}$, $t \in (nT_p, (n+1)T_p)$

Es.2 Valuta la ripetizione periodica di periodo T_p per $u(t) = e^{-a|t|}$ con $a>0$

Come prima cosa osserviamo che $u(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{at}, & t<0 \\ e^{-at}, & t>0 \end{cases}$

Il segnale può essere scritto come:

$u(t) = u_1(t) + u_1(-t)$ con $u_1(t) = e^{-at} 1(t)$

Secondo le proprietà di linearità e time-reversal otteniamo

$s(t) = rep_{T_p} u(t) = s_1(t) + s_1(-t)$ con $s_1(t) = rep_{T_p} u_1(t)$

Dall'esercizio precedente sappiamo che $s_1(t) = Be^{-at}$ con $B = \frac{1}{1-e^{-aT_p}}$, $t \in (0, T_p)$

Per $-t$, $s(-t) = Be^{at}$, $t \in (-T_p, 0) \rightarrow s_1(-t) = Be^{a(t+T_p)}$, $t \in (0, T_p)$

e quindi $s(t) = B(e^{-at} + Be^{a(t-T_p)})$, $t \in (0, T_p)$

Es.3 Individua la ripetizione periodica di periodo $T_p = 2$ per il segnale

Le controparti shiftate di $u(t-2n)$ hanno la forma:

$$u(t) = \begin{cases} 2+t, & t \in (-1, 1) \\ 7/2 - 1/2\, t, & t \in (1, 5) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I due contributi evidenziati sono quelli attivi in un periodo $(-1, 1)$

Per traslazione: $s(t) = u(t) + u(t+2) =$

$= 2 + t + 5/2 - 1/2\, t =$ $\quad t \in (-1, 1)$

$= 4 + 1/2(t+1)$

ES.4 Calcola la ripetizione periodica di periodo T_p di $u(t) = \frac{|t|}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$ considerando $T_p \in (T, 2T)$

$u(t - nT_p)$

$$u(t) = \begin{cases} t/T & , t \in (0, T) \\ -t/T & , t \in (-T, 0) \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$u(t - T_p) = \begin{cases} (t - T_p)/T & , t \in (T_p, T_p + T) \\ -(t - T_p)/T & , t \in (T_p - T, T_p) \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dato che $T_p - T < T < T_p$ nel periodo $(0, T_p)$ otteniamo:

$$s(t) = u(t) + u(t - T_p) = \begin{cases} t/T + 0 & , t \in (0, T_p - T) \\ t/T - (t - T_p)/T = T_p/T & , t \in (T_p - T, T) \\ -(t - T_p)/T & , t \in (T, T_p) \end{cases}$$

1.11. Ideal impulses (delta function)

A tempo discreto l'impulso ideale coincide con il delta di kronecker, ovvero un segnale con un singolo valore attivo, ovvero per $t=0$, $\delta(0)=1$

Per questo segnale vale:

* estensione nulla: $e(\delta)=\{0\}$
* $A_\delta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$
* simmetria pari $\delta(n)=\delta(-n)$
* connessione con $1_0(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$

Una delle proprietà più importanti del δ è quella di rivelare specifici valori. Questa proprietà è detta proprietà rivelatrice del delta. In particolare, $s(n)\delta(n-n_0)=s(n_0)\delta(n-n_0)$. Il δ rivela il valore del segnale laddove è centrato.

Nella somma, il δ rivela il valore del segnale dove è centrato, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\delta(n-n_0) = s(n_0)$

Nel tempo continuo si parla di delta di Dirac. Questo δ è considerato come il limite ad infinito di un rettangolo di base sempre più piccola ed altezza sempre più grande.

$r_k(t) = k\,\mathrm{rect}(kt)$ $\quad \delta(t) = \lim_{k\to\infty} r_k(t)$

* estensione $e(\delta)=\{0\}$
* $A_\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_k(t)\,dt = 1$
* $\delta(t)=\delta(-t)$
* $1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u)\,du = \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{t} r_k(u)\,du \rightarrow \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$

Anche per il caso continuo il δ ha alcune proprietà rivelatrici:

Nell'integrale il δ rivela il valore del segnale laddove è centrato $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)\,dt = s(t_0)$.

Inoltre, $s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$

Ricordando che $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$, definiamo il concetto di derivata generalizzata utile per calcolare i valori di un segnale nei punti di discontinuità.

Considerato D come il limite destro meno quello sinistro, ovvero $D>0$ se $s(t)$ cresce e $D<0$ se $s(t)$ decresce; possiamo considerare la discontinuità come la presenza di $1(t)$ di altezza D ovvero, la derivata sarà

$s'(t) = [s(t_0^+) - s(t_0^-)]\,\delta(t-t_0)$ con $D = s(t_0^+) - s(t_0^-)$.

Per i segnali periodici in tempo continuo e discreto otteniamo i cosiddetti segnali comb $rep_{T_p}\delta(t)$ e $rep_N\delta(n)$

Ideal impulses

Es.1 Applica la proprietà rivelatrice alle seguenti espressioni

* $s_1(t) = \cos(t)\delta(t) + \sin(t)\delta(t-\pi) = \cos(0)\delta(t) + \sin(\pi)\delta(t-\pi) = 1\delta(t) + 0\delta(t-\pi) = \delta(t)$
* $a_1 = \int_0^{40} \delta(t+3) - \delta(t-3) + 2\delta(t-10)\,dt = \int_0^{40} -\delta(t-3) + 2\delta(t-10)\,dt = -1+2 = 1$ → n.b. $\delta(t+3) \notin [0,40]$
* $s_2(n) = \sin(n+1)\delta(n+1) + e^{-n}\delta(n-3) = \sin(0)\delta(n+1) + e^{-3}\delta(n-3) = e^{-3}\delta(n-3)$
* $a_2 = \sum_{n=-5}^{5} \delta(n+3) - \delta(n-3) + 2\delta(n-10) = \sum_{n=-5}^{5} \delta(n+3) - \delta(n-3) = 1-1 = 0$ → n.b. $\delta(n-10)$ è centrato in 10 $\notin [-5,5]$

Es.2 Valuta la derivata generalizzata di

* $\frac{d(rect(t))}{dt} = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2)$

* $\frac{d(sgn(t))}{dt} = 2\delta(t)$

* Valuta la derivata generalizzata per il segnale in figura

$s'(t) = 3\delta(t-1) - 4\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$

Il segnale è costante a tratti, pertanto la sua derivata vale zero, tranne che nei punti di discontinuità.

* Calcola la derivata generalizzata per $s(t) = \cos(t)1(t)$

$s'(t) = (\cos'(t)1(t) + \cos(t)1'(t) = -\sin(t)1(t) + \cos(t)\delta(t) = -\sin(t)1(t) + \cos(0)\delta(t) = -\sin(t)1(t) + \delta(t)$

Es.3 Calcola la derivata generalizzata dei seguenti segnali:

* $s(t) = sgn(t)e^{(2+j)t}$

$s'(t) = sgn'(t)e^{(2+j)t} + sgn(t)(2+j)e^{(2+j)t} = 2e^{(2+j)t}\delta(t) + (2+j)sgn(t)e^{(2+j)t} = 2\delta(t) + (2+j)sgn(t)e^{(2+j)t}$

* $s(t) = \frac{1}{2}sgn(t) - 1(t) + t^2 1(t)$

$s'(t) = \frac{1}{2}2\delta(t) - \delta(t) + 2t\,1(t) + \cancel{0\cdot\delta(t)} = \delta(t) - \delta(t) + 2t\cdot 1(t) = 2t\cdot 1(t)$

* $s(t)$ periodico di periodo $T_p = 2$. $s(t) = \begin{cases} 3t & , t \in (0,1) \\ 0 & , t \in (1,2) \end{cases}$

Possiamo esprimere $s(t)$ come $s(t) = rep_2\, u(t)$ con $u(t) = 3t\,rect\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

A questo punto:

$s'(t) = 3rect(t-1/2) + 3t\delta(t-1/2+1/2) - 3t\delta(t-1/2-1/2) =$

$= 3rect(t-1/2) + 3t\delta(t) - 3t\delta(t-1) = 3rect(t-1/2) - 3\delta(t-1)$

SYSTEMS IN THE TIME - DOMAIN

Systems properties

2.1. Systems properties (part 1)

Un sistema è una trasformazione di un segnale in base ad una regola matematica. Il sistema sigma mappa un output a partire da un input. Un sistema può essere continuo, discreto, oppure ibrido.

Alcuni sistemi sono dotati dell'interessante proprietà dell'invertibilità. Questa proprietà sussiste se esiste un sistema inverso Σ^{-1} tale per cui è possibile ottenere l'input originario a partire dall'output.

Ad esempio, sono sistemi invertibili la somma corrente $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$ e l'incrementale $x(n) = y(n) - y(n-1)$, mentre è un segnale NON invertibile il valore assoluto $y(t) = |x(t)|$, a meno che S_n sia a segnali reali e positivi. L'invertibilità dipende anche dalla scelta dei segnali in input.

Ad esempio, se si prende il valore assoluto di un numero complesso, si perde l'informazione sulla fase del segnale

in generale, l'invertibilità riguarda la classe dei segnali in ingresso

Un sistema è detto sistema reale se $\forall$ input $\in \mathbb{R}$ anche ogni output $\in \mathbb{R}$

Ulteriori proprietà dei sistemi possono essere individuate a partire dalla memoria.

Un sistema è detto:

* sistema statico o istantaneo se utilizza solo il presente ovvero $y(t) = \Sigma[x(t)]$. Ad esempio, $y(t) = |x(t)|$
  → detto anche "sistema senza memoria"
* sistema dinamico se utilizzano anche informazioni del passato e/o presente.

I sistemi dinamici si distinguono in:

* sistemi causali se usa passato e presente. $y(t) = \Sigma[x(-\infty, t), x(t)]$. Ad esempio, somma corrente $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$, incrementale, $x(n) = y(n) - y(n-1)$ e integratore $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$
* sistemi anti-causali se usa presente e futuro. $y(t) = \Sigma[x(t), x(t, +\infty)]$

i sistemi della fisica sono tutti causali, quelli anticausali riguardano applicazioni per lo più matematiche

* sistemi a memoria finita se i valori del segnale sono limitati ad una certa finestra di valori. $y(t) = \Sigma[x_{[t_1, t_2]}]$. Ad esempio, la media corrente $y(t) = \frac{1}{2T}\int_{t}^{t+T} x(u)du$

Un concetto chiave dei sistemi è la BIBOstabilità (Bounded input - bounded output). Un sistema è detto BIBOstabile se per ogni input, $|x(t)| < L_x$ anche l'output è limitato, $|y(t)| < L_y$. Equivalentemente, $|x(n)| < L_x \rightarrow |y(n)| < L_y$

per provare che un sistema NON è bibostabile è sufficiente dimostrare un controesempio, ovvero identificare un input limitato che fornisce un output non limitato. Ad esempio, l'integrazione non è bibostabile $\int_{-\infty}^{t} 1(u)du = t \cdot 1(t) \neq$ BIBOstabile

Per provare, invece, che un sistema è bibostabile, il trucco consiste nell'impostare un limite al valore assoluto dell'output y sfruttando la disuguaglianza triangolare.

Systems properties (part. 1)

Es.1 Definire se i sistemi che seguono sono reali, BIBOstabili e la loro memoria:

* $y(n) = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|} |x(n-k)|^2$

Il sistema è REALE in quanto indipendentemente dal valore $x(n)$, l'output è una combinazione lineare di valori reali e positivi dato il valore assoluto.

Il sistema ha MEMORIA-FINITA, in quanto l'output al tempo n deriva da input appartenenti al range $[n-5, n+5]$

Il sistema è BIBOstabile: per $|x(n)| < L_x \rightarrow |y(n)| = \left| \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|} |x(n-k)|^2 \right| = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|} |x(n-k)|^2 \leq \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|} L_x = L_y < \infty$

* $y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} x(u)\,du & , t > 2 \end{cases}$

Il sistema è REALE in quanto coinvolge moltiplicazioni di segnali reali

Il sistema è CAUSALE in quanto per $t > 2$ l'output considera input nel range $[-1, t-2]$.

Il sistema NON è BIBOstabile. Infatti, scegliendo $x(t) = 1(t)$ otteniamo $y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} 1(u)\,du = (t-2)\cos(t+2) & , t > 2 \end{cases}$

Il segnale in output diventa sempre più grande.

* $y(n) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(1/x(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases}$

Il sistema è statico della forma $y(n) = f(x(n))$ con $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ed è un sistema REALE per costruzione.

Il sistema è BIBOstabile dato che $|y(n)| = |\mathrm{sgn}(x(n))| \leq 1$ per le proprietà specifiche di $\mathrm{sgn}(n)$

* $y(n) = \min(|x(n)|, |n|)$

Il sistema è REALE data la presenza del valore assoluto.

Il sistema è STATICO. La sua funzione, tuttavia, è aggiornata ad ogni step n, ovvero $y(n) = f_n(x(n))$.

Il sistema è BIBOSTABILE dato $|x(n)| < L_x \rightarrow |y(n)| = y(n) = \min(|x(n)|, |n|) < \min(L_x, |n|) \leq L_x$

Es.2. Stabilisci se i seguenti segnali sono reali. Definisci la memoria e la BIBOstabilità:

* $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u| x(u)\,du$

Sistema reale a memoria finita $[t-1, t+1]$. Per la BIBOstabilità consideriamo $|x(n)| < L_x$

Ovvero: $|y(t)| = \left| \int_{t-1}^{t+1} |t-u| x(u)\,du \right| \leq \int_{t-1}^{t+1} |t-u| |x(u)|\,du < \int_{t-1}^{t+1} |t-u| L_x\,du = L_x \int_{-1}^{1} |v|\,dv = L_x < \infty \rightarrow$ è BIBOstabile

* $y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-k)$

Sistema reale. Il sistema è causale in quanto per l'output vengono utilizzati gli input $(-\infty, n-1]$. Infine, il sistema NON è BIBOstabile perché, ponendo $x(n) = 1$, otteniamo $y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \infty$, la serie non converge

* $y(t)=\int_{t-1}^{t} e^{t+u} x(u)\,du$

Il sistema è reale e a memoria finita $[t-1,t]$. Dato $y(t)=\int_{t-1}^{t} e^{t+u}du = e^{t}\int_{t-1}^{t} e^{u}du = e^{2t}(1-e^{-1})$ per $t\to\infty$ $y(t)\to\infty$

* $y(n)=\sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)$

Il sistema è reale e a memoria finita $[n-10, n+10]$. È BIBO stabile perché la serie converge

$|y(n)| = \left|\sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)\right| \le \sum_{k=n-10}^{n+10} |x(k)| < \sum_{k=n-10}^{n+10} L_x = 21L_x < \infty$

* $y(t)=x(t-2)$

Il sistema è reale e causale e dato che raccoglie gli input nel range $[t-2]$ è anche a memoria finita. Il sistema è BIBOstabile. Assumendo $|x(n)|<L_x$ otteniamo $|y(t)|=|x(t-2)|<L_x$

* $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k x(k)$

Il sistema è reale e causale. Posto $x(k)=1$ otteniamo $\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k$ e posto $m=n-1-k \to \sum_{m=0}^{\infty} 3^{n-1-m} = 3^{n-1}\frac{1}{1-1/3}=\frac{1}{2}\cdot 3^n$ quindi il sistema è BIBOstabile

* $y(t)=\cos(t-2)x(t)$

Il sistema è reale e istantaneo, in quanto l'output al tempo t raccoglie input dal range $[t]$. Il sistema è BIBOstabile in quanto $|x(n)|<L_x$ per il quale otteniamo $|y(t)|=|\cos(t-2)|\,|x(t)|<1\cdot L_x$

* $y(t)=x(t+5)x(t-1)$

Il sistema è reale e a memoria finita $[t-1, t+5]$. Il sistema è BIBOstabile. Assumendo $|x(n)|<L_x$ otteniamo $|y(t)|=|x(t+5)|\,|x(t-1)|<L_x^2<\infty$

* $y(t)=\int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 x(u)\,du$

Il sistema è reale e dinamico $[-\infty, 2t]$. Il sistema non è BIBOstabile. Per $x(n)=1(t) \to y(t)=\int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 1(u)\,du = 1(t)\int_{0}^{2t}(t-u)^2 du$

ovvero $1(t)\int_{-t}^{t} v^2 dv = 1(t)\frac{2}{3}t^3$

Il valore assoluto dell'integrale è maggiorato dall'integrale del valore assoluto. Dato un generico $y(t)$, possiamo provare la sua BIBOstabilità con $|y(t)| = \left|\frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u)\,du\right| \le \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}|x(u)|\,du \le \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} L_x\,du = L_x \to$ y è limitato in funzione di L_x finito

2.2. Systems properties (part 2)

* la somma dei moduli non corrisponde al modulo della somma $|x_1(t)+x_2(t)| \neq |x_1(t)|+|x_2(t)|$

Un sistema può anche essere definito:

* **lineare**: se rispetta il principio di sovrapposizione, ovvero se $ax_1(t)+bx_2(t) \to \Sigma \to ay_1(t)+by_2(t)$. La linearità può essere definita anche come la somma di additività ($x_1(t)+x_2(t) \xrightarrow{\Sigma} y_1(t)+y_2(t)$) ed omogeneità ($ax(t) \xrightarrow{\Sigma} ay(t)$).

↳ α intesa come una costante generica anche complessa

Ad esempio, il modulo non è un sistema lineare*, mentre il time-shift $x(t-t_0)$ sì.

* **tempo-invariante**: se il sistema possiede commutività con l'operazione di traslazione temporale. L'output corrisponde ad una versione traslata della stessa quantità di cui è traslato l'input. Ad esempio, la media mobile è tempo-invariante. Infatti:

$x(t) \xrightarrow{\Sigma} y(t) \xrightarrow{delay} \frac{1}{2T}\int_{t-t_0-T}^{t-t_0+T} x(u)du$ coincide con $x(t) \xrightarrow{delay} x(t-t_0) \xrightarrow{\Sigma} \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u-t_0)du$

in seguito ad un opportuno cambio di variabile

a commutativity property

La **risposta impulsiva** è un'uscita corrispondente ad una sollecitazione tramite impulso ideale ($\delta(t) \circ \delta(n) \xrightarrow{\Sigma} g(t) \circ g(n)$)

Diciamo che un segnale x è **autofunzione (Eigenfunction)** di un sistema se l'output equivale all'input moltiplicato per una costante, ovvero $y(t)=\lambda(x(t))$ o $y(n)=\lambda(n(t))$

series (o cascata)

parallel

Definiamo la **serie** di due segnali come Σ_2 applicato all'output di un sistema Σ_1, mentre il **parallelo** come la somma degli output di due sistemi Σ_1 e Σ_2 applicati allo stesso input

Systems properties (part 2)

Es.1 Per ogni sistema valuta se è lineare e/o tempo-invariante, valuta la risposta impulsiva $h(t)$ e $h_{-1}(t)$ al gradino:

* $y(n) = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}|x(n-k)|^2$

Il sistema NON è lineare infatti, $\boxed{\text{il valore assoluto non è lineare}}$. Per quanto riguarda la tempo invarianza, compariamo

$y(n-n_0) = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}|x(n-n_0-k)|^2$ e $\Sigma[x(n-n_0)] = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}|x(n-k-n_0)|^2$. Sono uguali quindi il sistema è tempo-invariante

La risposta impulsiva $h(n) = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}|\delta(n-k)|^2 = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}\delta(n-k)$ (dato che il δ è pari) $= e^{|n|}\sum_{k=-5}^{5}\delta(k-n) = \begin{cases} e^{|n|}, & n\in[-5,5] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

La risposta al gradino, invece, diventa $h_{-1}(n) = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}|1_0(n-k)|^2 = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}1_0(n-k)$ con $1_0(n-k)$ attivo per $n-k \geq 0$ ovvero per $k \leq n$. Otteniamo $h_{-1}(n) = \begin{cases} 0, & n<-5 \\ \Sigma_{k=-5}^{n} e^{|k|}, & n\in[-5,5] \\ \Sigma_{k=-5}^{5} e^{|k|}, & n>5 \end{cases}$

* $y(t) = \begin{cases} 0, & t\leq 2 \\ \cos(t+2)\int_{-1}^{t-2} x(u)du, & t>2 \end{cases}$

Il sistema è LINEARE perché è composto da una forma d'onda e un integrale lineari.

Per la tempo-invarianza valutiamo $y(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t-t_0 \leq 2 \\ \cos(t-t_0+2)\int_{-1}^{t-t_0-2} x(u)du, & t-t_0>2 \end{cases}$

e $\Sigma[x(t-t_0)] = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2)\int_{-1}^{t-2} x(u-t_0)\,du & , t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2)\int_{-1-t_0}^{t-2+t_0} x(v)\,dv & , t > 2 \end{cases}$

I due sistemi sono evidentemente diversi, quindi il sistema NON è tempo-invariante.

$h(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2)\int_{-1}^{t-2} \delta(u)\,du & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \\ \cos(t+2)\, t > 2 \end{cases} \rightarrow \cos(t+2)1(t-2)$

$h(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2)\int_{-1}^{t-2} 1(u)\,du & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \cos(t+2)1(t-2)$

* $y(n) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(1/x(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases}$

Il sistema NON è lineare in quanto $\mathrm{sgn}(x)$ non è lineare.

Il sistema è tempo-invariante, infatti $y(n-n_0) = f(x(n-n_0))$ e $\Sigma[x(n-n_0)] = f(x(n-n_0))$ coincidono.

$h(t) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(1/\delta(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases} \rightarrow h(t) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \rightarrow \delta(n)$

$h(t) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(1/1_0(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases} \rightarrow h(t) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = 1_0(n)$

* $y(n) = \min(|x(n)|, |n|)$

Il sistema è evidentemente NON lineare.

Il sistema NON è tempo-invariante $y(n-n_0) = \min(|x(n-n_0)|, |n-n_0|) \neq \Sigma[x(n-n_0)] = \min(|x(n-n_0)|, |n|)$

$h(t) = \min(|\delta(n)|, |n|) = \begin{cases} \min(1, 0) = 0 & , n = 0 \\ \min(0, |n|) = 0 & , n \neq 0 \end{cases} = 0$

$h_{-1}(n) = \min(|1_0(n)|, |n|) = \begin{cases} \min(1, |n|) = 1 & , n > 0 \\ \min(1, 0) = 0 & , n = 0 \\ \min(0, |n|) = 0 & , n < 0 \end{cases} = 1_0(n) - \delta(n)$

Es.2 Stabilisci se il sistema è lineare e/o tempo invariante e valuta la risposta impulsiva $h(t)$ $h_{-1}(t)$ dei segnali:

* $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u|\, x(u)\,du$

Il sistema è lineare perché è ottenuto dalla moltiplicazione di forme d'onda lineari. Per verificare la tempo invarianza consideriamo $y(t-t_0) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0+1} |t-t_0-u|\, x(u)\,du$

$\Sigma[x(t-t_0)] = \int_{t-1}^{t+1} |t-u|\, x(u-t_0)\,du = \int_{t-1-t_0}^{t+1-t_0} |t-(v+t_0)|\, x(v)\,dv$ con $v = u - t_0$ $\rightarrow$ il sistema è tempo invariante

$h(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u|\,\delta(u)\,du = |t| \int_{t-1}^{t+1} |t-u|\,\delta(u)\,du = |t| \int_{t-1}^{t+1} \delta(u)\,du = \begin{cases} 0 & , t < -1 \\ |t| & , t \in (-1, 1) \\ 0, & t > 1 \end{cases} = |t|\,\mathrm{rect}(t/2)$

$$h_{-1}(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u|\, 1(u)\, du = |t| \int_{t-1}^{t+1} 1(u)\, du = \begin{cases} 0, & t<-1 \\ \int_0^{t+1} |t-u|\, du = \int_{-t}^{1} |v|\, dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2, & t \in (-1,0) \\ \int_0^{t+1} |t-u|\, du = \int_{-t}^{1} |v|\, dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2, & t \in (0,1) \\ \int_{t-1}^{t+1} |t-u|\, du = \int_{-1}^{1} |v|\, dv = 1, & t>1 \end{cases}$$

* $y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-k)$

Il sistema è lineare in quanto coinvolge il prodotto di operazione lineari

$y(n-n_0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-n_0-k)$ e $\mathcal{T}[x(n-n_0)] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-k-n_0)$ sono uguali, quindi il sistema è tempo invariante.

$$h(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \delta(n-k) = 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \delta(k-n) = 2^n 1_0(n-1)$$

$$h_{-1}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 1_0(n-k) = \begin{cases} 0, & n \le 0 \\ \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 = 2^{n+1} - 2, & n>0 \\ \overset{!}{=} 2(2^n-1) 1_0(n-1) \end{cases}$$

* $y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{t+u} x(u)\, du$

Il sistema è lineare

$y(t-t_0) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} e^{t-t_0+u} x(u-t_0)\, du$ e $\mathcal{T}[x(t-t_0)] = \int_{t-1}^{t} e^{t+u} x(u-t_0)\, du$ posto $\underset{u=v+t_0}{v=u-t_0}$ $\int_{t-1}^{t} e^{t+v-t_0} x(v)\, dv$

Le due espressioni differiscono all'esponente quindi il sistema non è tempo invariante.

$$h(t) = \int_{t-1}^{t} e^{t+u} \delta(u)\, du = e^t \int_{t-1}^{t} \delta(u)\, du = e^t \operatorname{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right) = \begin{cases} e^t, & t \in (0,1) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h_{-1}(t) = \int_{t-1}^{t} e^{t+u} 1(u)\, du = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^t \int_0^t e^u\, du = e^t(e^t-1), & t \in (0,1) \\ e^t \int_{t-1}^{t} e^u\, du = e^{2t}(1-e^{-1}), & t>1 \end{cases}$$

* $y(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)$

Il sistema è lineare. $\sum_{k=n-n_0-10}^{x-n_0+10} x(k-n_0) = \mathcal{T}[\sum_{k=n-10}^{n+10} x(k-n_0)] = \mathcal{T}[\sum_{m=n-n_0-10}^{n+10-n_0} x(m)]$ $\quad k-n_0=m \rightarrow k=m+n_0$ quindi il sistema è tempo-invariante

$$h(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} \delta(k) = \begin{cases} 1, & n \in [-10,10] = \operatorname{rect}(n/21) = \operatorname{rect}(n/21) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h_{-1}(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} 1_0(k) = \begin{cases} 0, & n<-10 \\ \sum_{k=0}^{n+10} 1 = n+11, & n \in [-10,10] \\ \sum_{k=n-10}^{n+10} 1 = 21, & n>10 \end{cases}$$

* $y(t) = x(t-2)$

Il sistema è lineare. Inoltre, $y(t-t_0) = x(t-t_0-2)$ e $\mathcal{T}[y(t-t_0)] = x(t-2-t_0)$ sono equivalenti e quindi è tempo-invariante

$h(t) = \delta(t-2)$ e $h_{-1}(t) = 1_0(t-2)$

* $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k x(k)$

Il sistema è lineare. $y(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0-1} 3^k x(k)$ e $\mathcal{T}[y(n-n_0)] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k x(k-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-1-n_0} 3^k x(m)$. Il sistema è tempo invariante.

$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k \delta(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta(k) = 1_0(n-1)$ e $h_{-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k 1_0(k) = \begin{cases} 0, & n \le 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1-3^n}{1-3} & n > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}(3^n - 1) 1_0(n-1)$

* $y(t) = \cos(t-2)x(t)$

Sistema lineare.

$\cos(t-t_0-2)x(t-t_0)$ e $\mathcal{T}(y(t-t_0)) = \cos(t-2)x(t-t_0)$ differiscono, quindi il sistema non è tempo-invariante

$h(t) = \cos(t-2)\delta(t) = \cos(2)\delta(t)$ e $h_{-1}(t) = \cos(t-2)1(t)$

* $y(t) = x(t+5)x(t-1)$

Il sistema non è lineare perché coinvolge il prodotto del segnale per se stesso (funzione quadratica).

$y(t-t_0) = x(t-t_0+5)x(t-t_0-1)$ e $\mathcal{T}[y(t-t_0)] = x(t+5-t_0)x(t-1-t_0)$ quindi il sistema è tempo-invariante

$h(t) = \delta(t+5)\delta(t-1) = 0$ e $h_{-1}(t) = 1(t+5)1(t-1) = 1(t-1)$

* $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 x(u)du$

Il sistema è lineare.

$y(t-t_0) = \int_{-\infty}^{2(t-t_0)} |t-t_0-u|^2 x(u)du$ e $\mathcal{T}[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{2t-t_0} |t-u|^2 x(u-t_0)du = \int_{-\infty}^{2t-t_0} |t-v-t_0|^2 x(v)dv$ differiscono negli estremi di integrazione quindi il sistema non è tempo-invariante.

$h(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|\delta(u)du = |t| \int_{-\infty}^{2t} \delta(u)du = |t|1(t) = t1(t)$

$h_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 1(u)du = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \int_0^{2t} |t-u|^2 du = \int_{-t}^{t} |v|^2 dv = \frac{2}{3}t^3, & t > 0 \end{cases} = \frac{2}{3}t^3 1(t)$

ES.3 Sia dato un sistema descritto dalla trasformazione $y(t) = \begin{cases} 0 & t \le 2 \\ \cos(t+2) \cdot \int_{-1}^{t-2} x(\tau)d\tau & t > 2 \end{cases}$

3.1 Stabilire se il sistema è causale, lineare, bibostabile

3.2 Trovare la risposta impulsiva $h(t)$

3.3 Trovare la risposta al gradino unitario $h_{-1}(t)$

3.2. $h(t) = \begin{cases} 0 & t \le 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} \delta(\tau)d\tau & t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t \le 2 \\ \cos(t+2), & t > 2 \end{cases} = \cos(t+2)1(t-2)$

→ abbiamo integrato il δ in un intervallo positivo, ottenendo 1

3.3. $h_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t \le 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} 1(\tau)d\tau & t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \le 2 \\ \cos(t+2)(t-2) & t > 2 \end{cases} = \cos(t+2)(t-2) \cdot 1(t-2)$

Il sistema è lineare se:
$\mathcal{T}[\alpha x(t)] = \alpha y(t) = \alpha \mathcal{T}[x(t)]$
$\mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{T}[x_1(t)] + \mathcal{T}[x_2(t)]$

3.1. A questo punto risulta più stabile definire che:

- il sistema NON è bibostabile perché $h_{-1}(t)$ NON è assolutamente integrabile;
  considero gli estremi di integrazione $[-1, t-2]$
- il sistema è causale (usa solo info del passato) ed è lineare.

2.3. LTI systems (convolution)

Identifichiamo il ruolo della risposta impulsiva nel caso discreto esprimendo il segnale $x(n)$ come $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$

Per la proprietà di linearità, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\sum[\delta(n-k)]$ è equivalente all'espressione sopra. Da questa equivalenza si può vedere che il delta agisce separatamente su ogni delta shiftato.

Definiamo la convoluzione a tempo discreto come la relazione tra input e output in un sistema LTI attraverso la risposta impulsiva g. La convoluzione in tempo continuo, invece, è identificata da un integrale.

La relazione tra input e output è identificata univocamente dalla risposta impulsiva (se conosciamo la risposta impulsiva di un segnale, possiamo dire di conoscere completamente la sua azione).

↳ la convoluzione è il riferimento per tutti i sistemi lineari e tempo-invarianti

In generale, la convoluzione agisce su due segnali $x(t)$ e $y(t)$, producendo un terzo segnale z. $x * y = z$

Rappresentare la convoluzione consiste in:

- graficare $y(t)$;
- ribaltare e traslare il segnale $y'(t)$;
- moltiplicare il segnale $x(t)$ con la versione ribaltata e traslata $y'(t)$;
- integrare il prodotto ottenuto

↗ l'integrale del prodotto identifica solo un valore di t

↳ l'operazione di convoluzione è ben definita per:
- segnali ad energia finita
- segnali causali o loro traslazioni

LTI systems (convolution)

ES.1 calcola la convoluzione $z(n) = x * y(n)$ per $x(n) = A + \cos(\vartheta_0 n)$ e $y(n) = 1_0(n)\alpha^n$, $-1 < \alpha < 1$

Visualizziamo la versione ribaltata e traslata di y

Possiamo notare che $y_-(k-n) = y(n-k)$ ha estensione $(-\infty, n]$. Possiamo quindi facilmente interpretare la convoluzione z come

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y_-(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)y_-(k-n) = \sum_{k=-\infty}^{n} [A+\cos(\vartheta_0 k)]\,\alpha^{n-k}$$

Risolviamo la sommatoria esprimendo il coseno secondo la formula di Eulero: $z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} [A + \frac{1}{2}e^{j\vartheta_0 k} + \frac{1}{2}e^{-j\vartheta_0 k}]\,\alpha^{n-k}$

ovvero $\sum_{m=0}^{\infty}\left[A+\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}(n-m)+\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}(m-n)\right]\alpha^m = A\sum_{m=0}^{\infty}\alpha^m+\frac{1}{2}e^{j\varphi_0 n}\sum_{m=0}^{\infty}[\alpha e^{-j\varphi_0}]^m+\frac{1}{2}e^{-j\varphi_0 n}\sum_{m=0}^{\infty}[\alpha e^{j\varphi_0}]^m$

$$= \frac{A}{1-\alpha}+\frac{1}{2}\frac{e^{j\varphi_0 n}}{1-\alpha e^{-j\varphi_0}}+\frac{1}{2}\frac{e^{-j\varphi_0 n}}{1-\alpha e^{j\varphi_0}}$$

$$= \frac{A}{1-\alpha}+\mathbb{R}\left[\frac{e^{j\varphi_0 n}}{1-\alpha e^{-j\varphi_0}}\right]$$ sfruttando l'equivalenza $\boxed{2\mathbb{R}[x]=x+x^*}$ e $\boxed{|\alpha e^{\pm j\varphi_0}|=|\alpha|<1}$

Possiamo notare, ponendo $\beta=1-\alpha e^{-j\varphi_0}=|\beta|e^{j\varphi_0}$ $\rightarrow z(n)=\frac{A}{1-\alpha}+\frac{\cos(\varphi_0 n-\varphi_\beta)}{|\beta|}$. I contributo originali sono in qualche modo conservate

ES.2 $z(t)=x*y(t)$ per $x(t)=A+\cos(\omega_0 t)$ e $y(t)=1(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha>0$

Questo esercizio è la controparte continua dell'esercizio precedente. Osservato che $y_-(u-t)=y(t-u)$ ha estensione $e=(-\infty,t]$, possiamo interpretare l'operazione di convoluzione nella forma: $z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)y_-(u-t)du=\int_{-\infty}^{t}x(u)y_-(u-t)du$

ovvero $\int_{-\infty}^{t}[A+\cos(\omega_0 u)]e^{\alpha(u-t)}du$.

Attraverso l'identità di Eulero risolviamo l'espressione e tramite il cambio di variabile $v=t-u$ calcoliamo l'integrale.

$$z(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[A+\frac{1}{2}e^{j\omega_0 u}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 u}\right]e^{\alpha(u-t)}du=\int_0^{\infty}\left[A+\frac{1}{2}e^{j\omega_0(t-v)}+\frac{1}{2}e^{j\omega_0(v-t)}\right]e^{-\alpha v}dv$$

$$= A\int_0^{\infty}e^{-\alpha v}dv+\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+j\omega_0)v}dv+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\int_0^{\infty}e^{-(\alpha-j\omega_0)v}dv$$

$$= \frac{A}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{e^{j\omega_0 t}}{\alpha+j\omega_0}+\frac{1}{2}\frac{e^{-j\omega_0 t}}{\alpha-j\omega_0}=\frac{A}{\alpha}+\mathbb{R}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}}{\alpha+j\omega_0}\right]$$

Definito $\beta=\alpha+j\omega_0=|\beta|e^{j\varphi_\beta}$, otteniamo $z(n)=\frac{A}{\alpha}+\frac{\cos(\omega_0 t-\varphi_\beta)}{|\beta|}$ $\rightarrow$ il contributo originale della costante A a $x(t)$ è stato scalato. Anche il contributo di $\cos(\omega_0 t)$ risulta scalato e, inoltre, presenta anche un cambio nella fase.

Anche in questo caso, si dimostra che $\boxed{\text{i contributi originali sono in qualche modo mantenuti nella convoluzione}}$

ES.3 $z(t)=x*y(t)$ per $x(t)=\text{rect}(t/4D)$ e $y(t)=\text{rect}(t/2D)$

$y(u)=y_-(u)$ dato che il rettangolo è un segnale pari

Per risolvere l'esercizio senza applicare direttamente la formula, consideriamo i casi A-E:

A) $z(t)=0$. $t+D<-2D \rightarrow t<-3D$. $y(t-u)$ è alla sinistra di $x(u)$

B) $z(t)=0$. $t-D>2D \rightarrow t>3D$. $y(t-u)$ è alla destra di $x(u)$

C) $y(t-u)$ è dentro $x(u)$ $\rightarrow x(u)y(t-u)=y(t-u)$ e dato che l'area vale 2D, $z(t)=2D$ per $-D<t<D$

D) $z(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)y(t-u)du=\int_{-2D}^{t+D}1du=t+D-(-2D)=t+3D$ per $-3D<t<-D$

E) $z(t)=\int_{t-D}^{2D}1du=2D-(t-D)=3D-t$ per $D<t<3D$

Riassumendo otteniamo $z(t) = \begin{cases} 3D + t, & t \in (-3D, -D) \\ 2D, & t \in (-D, D) \\ 3D - t, & t \in (D, 3D) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ ovvero

La convoluzione di due rettangoli è un trapezoide

Es.4 Esprimi i seguenti segnali come convoluzione $z = x * y$

L'esercizio richiede di esprimere gli integrali nella forma $\boxed{z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, y(t-u)\, du \text{ o } z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, y(n-k)}$

* $z_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|} \sin(t-u)\, du \longrightarrow x(t) = e^{-|t|}$ e $y(t-u) = \sin(t-u)$

* $z_2(t) = \int_{0}^{\infty} e^{t-u} \sin(u+2)\, du \longrightarrow$ estendiamo l'integrale a $-\infty$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-u} \sin(u+2)\, \underbrace{1(u)}_{\text{questo termine annulla tutti i valori per } u<0} du$ quindi $x(u) = 1(u)\sin(u+2)$ e $y(t-u) = e^{t-u}$

* $z_3(n) = \sum_{-\infty}^{n} e^{k} \sin(n-k+2) \longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} e^{k} \sin(n-k+2)\, \underbrace{1_0(n-k)}_{\text{moltiplica per 1 tutti i termini per } k \le n}$ quindi $x(k) = e^{k}$ e $y(n-k) = \sin(n-k+2)\, 1_0(n-k)$

* $z_4(t) = \begin{cases} 0 & , t<0 \\ \int_0^t e^{t-u} \sin(u+2)\, du, & t>0 \end{cases} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-u} \sin(u+2)\, \underbrace{1(u)}_{0 \text{ per } u<0} \cdot \underbrace{1(t-u)}_{1 \text{ per } t \le u} du$ quindi $y(t-u) = e^{t-u} 1(t-u)$ e $x(u) = \sin(u+2)\, 1(u)$

Es.5 Dimostra che $z(t) = x * y(t)$ tra un segnale aperiodico $x(t)$ e uno periodico $y(t+T_p)$, è periodico di periodo T_p, ovvero $z(t+T_p) = z(t)$

$x * y(t+T_p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, y(t+T_p-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, y(t-u)\, du = x * y(t)$, $y(t+T_p-u) = y(t-u)$ per periodicità.

Es.6 Dimostra che:

* $\text{rect} * \text{rect}(t) = \text{triang}(t)$

Dato $y_-(t) = \text{rect}(t) = y(t)$, $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(u) \cdot \text{rect}(u-t)\, du = \begin{cases} 0, & t<-1 \\ \int_{-1/2}^{t+1/2} 1\, du = 1+t, & -1<t<0 \\ \int_{t-1/2}^{1/2} 1\, du = 1-t, & 0<t<1 \\ 0 & t>1 \end{cases} \equiv \text{triang}(t)$

* $1 * 1(t) = t \cdot 1(t)$

Dato $y(t) = 1(t)$ e $y_-(t) = 1(-t)$, $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(u)\, 1_-(u-t)\, du = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t 1\, du = t, & t>0 \end{cases} = \text{ramp}\, z(t) = t \cdot 1(t)$

Es.7 Calcola la convoluzione tra i seguenti segnali:

* $x(t) = 1(t)$ e $y(t) = \text{rect}(t)$

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t)\, \text{rect}(u-t)\, du = \begin{cases} 0 & , t<-1/2 \\ \int_0^{t+1/2} 1\, du = \frac{1}{2}+t, & -\frac{1}{2}<t<1/2 \\ \int_{t-1/2}^{t+1/2} 1\, du = 1, & t>1/2 \end{cases}$

* $x(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$ e $y(t) = \text{rect}(t)$

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t)\, \text{rect}(t-u)\, du = \begin{cases} 0 & , t<-1/2 \\ \int_0^{t+1/2} e^{-\alpha t} du = \frac{1-e^{-\alpha(t+1/2)}}{\alpha} & , -1/2<t<1/2 \\ \int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-\alpha t} du = \frac{e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}}{\alpha} e^{-\alpha t} & , t>1/2 \end{cases}$

* $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$ e $y(t) = \text{rect}(t/2D)$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 u)\,\text{rect}\left(\frac{u-t}{2D}\right)du = \int_{t-D}^{t+D} A\cos(\omega_0 u)\,du = \frac{A\sin(\omega_0 u)}{\omega_0}\Big|_{t-D}^{t+D} = A\,\frac{\sin(\omega_0 t+\omega_0 D) - \sin(\omega_0 t-\omega_0 D)}{\omega_0} = \frac{2A\sin(\omega_0 D)}{\omega_0}\cos(\omega_0 t)$$

* $x(n) = a^{-|n|}$ e $y(n) = \text{rect}\left(\frac{1}{1+2N}n\right)$

$y_-(n) = y(n)$ e $y_-(k-n) = \begin{cases} 1, & n-N \le k \le n+N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$. Possiamo distinguere tre casi:

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y_-(k-n) = \begin{cases} \sum_{k=n-N}^{n+N} a^{k}, & n+N \le 0 \\ \sum_{k=n-N}^{0} a^{k} + \sum_{k=1}^{n+N} a^{-k}, & -N < n < N \\ \sum_{k=n-N}^{n+N} a^{-k}, & n-N \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a^{-N}-a^{1+N}}{1-a}a^{n}, & n \le -N \\ \frac{1-a^{n-N-1}}{1-a^{-1}} + \frac{1-a^{-n-N-1}}{1-a^{-1}} - 1, & -N < n < N \\ a^{N} - a^{-(1+N)}, & n \ge N \end{cases}$$

* $x(t) = \text{rect}(t+1/2)$ e $y(t) = \text{sgn}(t)e^{-|t|}$

$y_-(t) = -y(t) = -\text{sgn}(t)e^{-|t|}$ con punto di discontinuità in zero. $z(t) = -\int_{-1}^{0} \text{sgn}(u+t)e^{-|u-t|}du$

$$z(t) = \begin{cases} -\int_{-1}^{0} e^{-(u-t)}du, & t < -1 \\ \int_{-1}^{t} e^{(u-t)}du - \int_{t}^{0} e^{-(u-t)}du, & -1 < t < 0 \\ \int_{-1}^{0} e^{(u-t)}du, & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} -(e-1)e^{t}, & t < -1 \\ e^{t} - e^{-t-1}, & -1 < t < 0 \\ (1-e^{-1})e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

* $x(t) = \text{rect}(t)$ e $y(t) = |t|\,\text{rect}(1/2t)$

$y_-(t) = y(t)$, quindi $z(t) = \int_{-1/2}^{1/2} |u-t|\,\text{rect}\left(\frac{1}{2}(u-t)\right)du =$

$$\begin{cases} \int_{-1/2}^{t+1/2} (u-t)\,du = 3/8 - 1/2t - 1/2t^2, & t \in (-3/2, -1/2) \\ \int_{t}^{1/2} (u-t)\,du - \int_{-1/2}^{t} (u-t)\,du = 1/4 + t^2, & t \in (-1/2, 1/2) \\ -\int_{t-1}^{1/2} (u-t)\,du = 3/8 + 1/2t - 1/2t^2, & t \in (1/2, 3/2) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Es.8 La convoluzione tra $x(t) = \delta(t)$ e $y(t) = \cos(t)$ vale

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\cos(t-u) = \cos(t)$ → rivela il segnale per $u=0$ (dove è centrato $\delta(u)$)

Es.9 $z(t) = x * y(t)$ con $x(t) = \delta(t-2)$ e $y(t) = \sin(t)$

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-2)\sin(t-u)\,du = \sin(t-2)$, ovvero l'integrale di $\sin(t-u)$ a $u=2$

Es.10 Dato $z(t) = x * y(t)$ con $x(t/2)$ e $y(t/2)$ la convoluzione vale $2z(t/2)$

Infatti $\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{u}{2}\right)y\left(\frac{t-u}{2}\right)du = 2\int_{-\infty}^{\infty} x(v)\,y\left(\frac{t}{2}-v\right)dv = 2z\left(\frac{t}{2}\right)$

Es.11 Dato $z(n) = x * y(n)$, la convoluzione tra $x(n-2)$ e $y(n+2)$ vale $z(n)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-2)y(n-k+2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\,y(\overbrace{n-(m+2)+2}^{n-m}) = z(n)$$

Nella convoluzione tra rettangoli si ottiene un trapezio ($b_1 > b_2$) con:

- base $M = b_1 + b_2$
- base $m = b_1 - b_2$
- altezza $= \min(h_1, h_2)$

2.4. Properties of convolution → utilizzate soprattutto come metodi per verificare i calcoli

commutativity $x * y = y * x$

associativity $x * y * z = (y * x) * z = x * (y * z)$

$$\Downarrow$$

$x * y * z = z * x * y = y * z * x$

linearity $(x + y) * z = x * z + y * z$
$x * (y + z) = x * y + x * z$

identity $x * \delta = x$

area $A_{x*y} = A_x A_y$

Grazie alla proprietà commutativa, possiamo decidere quale segnale vogliamo traslare e ribaltare per ottimizzare il calcolo.

La proprietà dell'area è particolarmente utile come prova. Controllare che l'area della convoluzione è uguale al prodotto delle aree dei segnali, ci permette di controllare se abbiamo effettuato i calcoli giusti.

Queste proprietà sono valide sia a tempi discreti che continui.

Un'altra interessante proprietà riguarda l'estensione.

A tempi continui $e(x*y) = [t_x+t_y, T_x+T_y]$, mentre a tempo discreto $e(x*y) = [n_x+n_y, N_x+N_y]$

Inoltre, per quanto riguarda segnali traslati nel tempo, osserviamo che possono essere espressi come il prodotto tra il segnale stesso ed un δ traslato di una certa quantità

$s(t-t_0) = s * \delta_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-t_0)s(t-u)du$ a tempi continui e $s(n-n_0) = s * \delta_{n_0}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k-n_0)s(n-k)$ a tempi discreti.

Nella composizione di traslazioni, invece, osserviamo che $x_{t_0} * y_{t_1}(t) = x * \delta_{t_0} * y * \delta_{t_1}(t) = x * y * \delta_{t_0+t_1}(t)$

ovvero $x_{t_0} * y_{t_1}(t) = x * y(t-(t_0+t_1))$.

Properties of convolution

Es 1. Calcola la convoluzione tra i rettangoli rappresentati in figura

Utilizzando la notazione $rect_T(t) = rect(t/T)$

$x(t) = 4\,rect_4(t+10) - 2\,rect_8(t-8)$

$y(t) = A\,rect_2(t-1)$

Applicando le proprietà di linearità e convoluzione otteniamo:

$$z(t) = x * y(t) = [4\,rect_4(t+10) - 2\,rect_8(t-8)] \cdot [A\,rect_2(t-1)] = 4A\,rect_4(t+10) * rect_2(t-1) - 2A\,rect_8(t-8) * rect_2(t-1)$$
$$= 4A\,rect_4 * rect_2(t+10-1) - 2A\,rect_8 * rect_2(t-8-1) = 4A\,rect_4 * rect_2(t+9) - 2A\,rect_8 * rect_2(t-9)$$

$rect_4 * rect_2$ è un trapezoide di base M $4+2=6$, base m $4-2=2$ e altezza 2

$rect_8 * rect_2$ ha base M 10, base m 6 e altezza 2. Otteniamo:

Grazie alla proprietà dell'area possiamo verificare

$A_z = 4 \cdot 4A - 8 \cdot 2A = 0 = A_x A_y = (4 \cdot 4 - 8 \cdot 2)2A$

Inoltre, per la proprietà dell'estensione:

$[-12, 12] + [0, 2] \rightarrow [-12, 14]$

Es.2 Calcola la convoluzione tra $x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$ e $y(n)=\text{rect}((n-1)/3)$

Come prima cosa osserviamo che $y(n)=\text{rect}((n-1)/3)=\begin{cases}1, & n=0,1,2\\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$

Per le proprietà della convoluzione otteniamo $z(n)=x*y(n)=[\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)]*y(n)$ quindi:

$$y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)=\begin{cases}1, & n=0\\ 3/2, & n=1,2\\ 1/2, & n=3\\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$$

Verifichiamo inoltre che $A_z=1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}=A_x A_y=3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

Inoltre, la convoluzione tra $x(n-3)$ e $y(n+2)$ risulta:

$$x*y(n)=x*y(n-3+2)=z(n-1)=\begin{cases}1, & n=1\\ 3/2, & n=2,3\\ 1/2, & n=4\\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$$, ovvero tutto traslato di 1 verso destra

Es.3 Calcola l'output della serie di due sistemi LTI con risposta impulsiva $h_1(n)=\sin(8n)$ e $h_2(n)=a^n 1_0(n)$, rispettivamente, considerando un input della forma $x(n)=\delta(n)-a\delta(n-1)$

Nella serie il primo output è $z(n)=x*h_1(n)$, mentre l'output finale è $y(n)=z*h_2(n)=x*h_1*h_2(n)$

Per la proprietà associativa e commutativa otteniamo:

$$x*h_2(n)=[\delta(n)-a\delta(n-1)]*h_2(n)=h_2(n)-ah_2(n-1)=a^n 1_0(n)-a\cdot a^{n-1}1_0(n-1)=a^n\cdot[1_0(n)-1_0(n-1)]=a^n\delta(n)=\delta(n)$$

Quindi $y(n)=\delta*h_1(n)=h_1(n)=\sin(8n)$

La convoluzione $z(n)=x*y(n)$ tra segnali dispari ha simmetria pari

Es.4 Calcola la convoluzione tra $x(t)=\text{sgn}(t)\,\text{rect}(1/4t)$ e $y(t)=A\,\text{rect}(1/2\,t)$

$x(t)=u(t-1)-u(t+1)$, $y(t)=Au(t)$, $u(t)=\text{rect}(1/2\,t)$

Per linearità e proprietà di traslazione otteniamo:

$x*y(t)=[u(t-1)-u(t+1)]*[Au(t)]=Au*u(t-1)-Au*u(t+1)$

con $u*u(t)=2\text{triang}(\frac{1}{2}t)$. Segue che $x*y(t)=2A\text{triang}(\frac{1}{2}(t-1))-2A\text{triang}(\frac{1}{2}(t+1))$

Es.5 Valuta l'output del sistema LTI con risposta impulsiva $g(t)=\text{rect}(t)$ con input $x(t)=\text{rep}_2\,\text{rect}(t-1/2)$

$x(t)=\text{rep}_2\,\text{rect}(t-1/2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{rect}(t-2k-1/2)$. L'output del sistema LTI diventa:

$y(t)=x*g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{rect}*\text{rect}(t-2k-1/2)=\text{rep}_2\,\text{triang}(t-1/2)$

Es.6 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(t)=e^{-at}\eta(t)$ con $a>0$, con l'input un'onda quadra $x(t)=\text{rep}_2\,\text{rect}(t)$

$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{rect}(t-2k)$. La risposta è $y(t)=x*g(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\text{rect}*g(t-2k)=\text{rep}_2\,\text{rect}*g(t)$

Quindi: $\text{rect}*g(t)=\begin{cases}0, & t<-1/2\\ \dfrac{1-e^{-a(t+1/2)}}{a}, & -1/2<t<1/2\\ \dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{a}e^{-at}, & t>1/2\end{cases}$

La ripetizione periodica dei segmenti attivi nel periodo $[-1/2,3/2]$ è mostrato in figura

Nel periodo di riferimento $[-1/2,3/2]$ la ripetizione periodica restituisce:

$y(t)=\text{rect}*g(t)+\sum_{k=-\infty}^{-1}\dfrac{e^{a/2}+e^{-a/2}}{a}e^{-a(t-2k)}=\text{rect}*g(t)+\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{a}e^{-at}\dfrac{e^{-2a}}{1-e^{-2a}}$, $t\in[-1/2,3/2]$ $\rightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}-k_a e^{-at}, & -1/2<t<1/2\\ k_a e^{-a(t-1)}, & 1/2<t<3/2\end{cases}$, $k_a=\dfrac{e^{a/2}-e^{-a/2}}{a(e^{a}-e^{-a})}$

Es.7 Calcola la convoluzione tra $x(n)=\delta(n)-1/2\delta(n-1)-1/2\delta(n+1)$ e $y(n)=a^{-n}1_0(-n)$, $|a|<1$

Per linearità e traslazione $\rightarrow z(n)=x*y(n)=[\delta(n)-\frac{1}{2}\delta(n-1)-\frac{1}{2}\delta(n+1)]*y(n)$

$=y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)-\frac{1}{2}y(n+1)=a^{-n}1_0(-n)-\frac{1}{2}a^{-(n-1)}1_0(-n+1)-\frac{1}{2}a^{-(n+1)}1_0(-n-1)$

quindi $\begin{cases}a^{-n}-\frac{1}{2}a^{-(n-1)}-\frac{1}{2}a^{-(n+1)}=-\frac{(1-a)^2}{2a}a^{-n}, & n<0\\ 1-1/2\,a+0=1-1/2\,a, & n=0\\ 0-1/2+0=-1/2, & n=1\\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}$

Es.8 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n)=\delta(n-1)-\delta(n+1)$, $a>0$ quando l'input è $x(n)=a^{|n|}$, $|a|<1$

Per linearità e proprietà di traslazione otteniamo

$y(n)=x*g(n)=x*[\delta(n-1)-\delta(n+1)]=x(n-1)-x(n+1)=a^{|n-1|}-a^{|n+1|}$

quindi $y(n)=\begin{cases}a^{-n+1}-a^{-n-1}=-(a^{-1}-a)a^{-n}, & n<0\\ a-a=0, & n=0\\ a^{n-1}-a^{n+1}=(a^{-1}-a)a^{n}, & n>0\end{cases}$

Es.9 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n)=\text{sgn}(n)$ quando l'input è $x(n)=|n|1_0(n-3)1_0(3-n)$

Possiamo notare che $x(n)=|n|1_0(n-3)1_0(3-n)=x(n)=|n|\delta(n-3)=3\delta(n-3)$

$y(n)=x*g(n)=x*\text{sgn}(n)\longrightarrow y(n)=3\delta*g(n)=3\,\text{sgn}(n)$

Es.10 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n)=1_0(n)$, quando l'input è $x(n)=\text{rect}((n-1)/3)$

Il segnale può essere riscritto come $x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$

Quindi $y(n)=x*g(n)=[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)]*g(n)=g(n)+g(n-1)+g(n-2)=1_0(n)+1_0(n-1)+1_0(n-2)=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n=0\\ 2, & n=1\\ 3, & n>1\end{cases}$

Es.11 Valuta la convoluzione tra $x(n)=2\delta(n)-\delta(n-1)-\delta(n+1)$ e $y(n)=1_0(n-1)-1_0(n-5)$

Possiamo riscrivere il segnale come $y(n)=\begin{cases}1, & n\in[1,4]\\ 0, & \text{altrimenti}\end{cases}=\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\delta(n-4)$

$z(n)=x*y(n)=[2\delta(n)-\delta(n-1)-\delta(n+1)]*y(n)=2y(n)-y(n-1)-y(n+1)=$

$=2\delta(n-1)+2\delta(n-2)+2\delta(n-3)+2\delta(n-4)-\delta(n-2)-\delta(n-3)-\delta(n-4)-\delta(n-5)-\delta(n)-\delta(n-1)-\delta(n-2)-\delta(n-3)=$

$=-\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-4)-\delta(n-5)$

2.5. Circular convolution

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)\,du \qquad x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

periodic T_p — aperiodic — periodic T_p ($t = t+T_p$) — periodic N — aperiodic — periodic N ($n = n+N$)

Nella convoluzione tra un segnale periodico ed uno aperiodico, otteniamo un segnale periodico di stesso periodo Tp (o N in caso discreto).

$$\cancel{x * y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overbrace{x(u)y(t-u)}^{\text{periodic } T_p}\,du$$

periodic T_p — periodic T_p

These diverge!

$$\cancel{x * y(n)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overbrace{x(k)y(n-k)}^{\text{periodic N}}$$

periodic N — periodic N

Per quanto riguarda la convoluzione tra due segnali periodici, invece, il loro prodotto sarà periodico di periodo Tp. Tuttavia, calcolando l'area di un segnale periodico, sia a tempo discreto che periodico, il risultato diverge.

A tal proposito, quando si tratta convoluzione tra segnali periodici, è necessario avere una definizione specifica di essa stessa. Si parla di convoluzione circolare.

La convoluzione circolare consiste nel limitare l'integrale (o somma) ad un periodo. Per questo tipo di convoluzione valgono le seguenti proprietà:

- commutativa $x * y = y * x$
- associativa $x * y * z = z * x * y = y * z * x$
- linearità $(x+y) * z = x * z + y * z = x * (y+z) = x * y + x * z$
- area $A_{x*y} = A_x \cdot A_y$. In questo caso dobbiamo considerare l'area in un periodo
- identità $x * comb = x$. L'elemento d'identità diventa il δ periodico
- traslazione $x * comb_{t_0/n_0} = x_{t_0/n_0}$

$$x *_{\text{cir}} y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(u)y(t-u)\,du \qquad x *_{\text{cir}} y(n) = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x(k)y(n-k)$$

periodic T_p — periodic N

Se i segnali convoluti x e y sono ripetizioni periodiche di forma d'onda x_0 e y_0, allora la convoluzione circolare può essere interpretata come la ripetizione periodica di $x_0 * y_0$

$x(t) = \text{rep}_{T_p} x_0(t)$

$y(t) = \text{rep}_{T_p} y_0(t)$

$*_{\text{cir}}$

$$z(t) = x *_{\text{cir}} y(t) = \text{rep}_{T_p} x_0 * y_0(t) = x * y_0(t) = y * x_0(t)$$

Ad esempio, la convoluzione tra x_0 e y_0 con $x_0 = y_0 = \text{rep}_{T_p} \text{rect}(t)$, ovvero tra due rect periodica di stesso periodo, sarà la ripetizione periodica di un triangolo.

Circular convolution

Es.1. Calcola la convoluzione tra $x(t) = \text{rep}_3 \text{rect}(t-1/2)$ e $y(t) = \text{rep}_3 \text{rect}(t-5/3)$

$x * y(t) = \text{rep}_3 \text{triang}(t) \rightarrow \text{rep}_3 x_0 * y_0(t) = \text{rep}_3 \text{triang}(t-1/2-5/3) = \text{rep}_3 \text{triang}(t-3) = \text{rep}_3 \text{triang}(t)$

Es.2. Calcola la convoluzione circolare tra $x(t) = 4A\cos(2\pi t) + A$ e $y(t) = \sin(\pi t)$

Osserviamo che x(t) ha periodo $T_x = 1$ e per y(t) vale $T_y = 2$. La periodicità comune diventa $T_p = 2$. Applichiamo direttamente la definizione di convoluzione (con $t_0 = 0$) $\rightarrow z(t) = x *_{\text{circ}} y(t) = \int_0^2 x(u)y(t-u)\,du = \int_0^2 [4A\cos(2\pi u) + A]\sin(\pi(t-u))\,du$

A questo punto otteniamo:

$$z(t) = \frac{A}{2j}\int_0^2 [2e^{j2\pi u} + 2e^{-j2\pi u} + 1][e^{j\pi(t-u)} - e^{-j\pi(t-u)}]\,du$$ esprimiamo tramite l'identità di Eulero

$$= \frac{A}{2j}\int_0^2 2e^{j\pi(t+u)} + 2e^{\pi(t-3u)} + e^{j\pi(t-u)} - 2e^{-j\pi(t+u)} - 2e^{-\pi(t-3u)} - e^{-j\pi(t-u)}]\,du$$

$$= A\int_0^2 [2\sin(\pi(t+u)) + 2\sin(\pi(t-3u)) + \sin(\pi(t-u))\,du = 0$$

Es.3 Calcolare la convoluzione circolare tra due onde quadre di duty cycle d_x e d_y, rispettivamente con $d_x + d_y < 1$ e periodo T_p

Possiamo scrivere le due onde quadre come $x(t) = rep_{T_p} x_0(t)$ e $y(t) = rep_{T_p} y_0(t)$ con $x_0(t) = rect\left(\frac{t}{d_x T_p}\right)$ e $y_0(t) = rect\left(\frac{t}{d_y T_p}\right)$

$z(t) = x * y(t) = rep_{T_p} x_0 * y_0(t)$ dove $x_0 * y_0$ è un trapezoide con basi $B = T_p(d_x + d_y)$ e $b = T_p|d_x - d_y|$ e altezza $h = T_p \min(d_x, d_y)$

Otteniamo il segnale periodico $z(t)$ in figura

Es.4 Valuta la convoluzione circolare tra $x(t) = 4A\cos(2\pi t/T_p) + A$ e un segnale periodico $y(t)$, definito in $[-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p]$ come

$y(t) = 2\cos(\pi t/T_p)$

$y_0(t) = 2\cos(\pi t/T_p)\,rect(t/T_p)$. La convoluzione circolare può essere scritta nella forma $z(t) = x *_{circ} y(t) = x * y_0(t)$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(u)x(t-u)\,du = \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} 2\cos(\pi u/T_p)[4A\cos(2\pi(t-u)/T_p) + A]\,du$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} [e^{j\pi u/T_p} + e^{-j\pi u/T_p}][2e^{j2\pi(t-u)/T_p} + e^{-j2\pi(t-u)/T_p} + 1]\,du$$

$$= A\int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} [2e^{j\pi(2t-u)/T_p} + 2e^{j\pi(3u-2t)/T_p} + e^{-j\pi u/T_p}]\,du$$

$$= A\int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} [2e^{j\pi(2t-u)/T_p} + 2e^{j\pi(3u-2t)/T_p} + e^{j\pi u/T_p} + 2e^{j\pi(2t-3u)/T_p} + 2e^{-j\pi(2t-u)/T_p} + e^{-j\pi u/T_p}]\,du$$

$$= A\int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} [4\cos(\pi\frac{u-2t}{T_p}) + 4\cos(\pi\frac{3u-2t}{T_p}) + 2\cos(\pi\frac{u}{T_p})]\,du$$

Risolvendo l'integrale otteniamo $z(t) = x *_{circ} y(t)$

$$= \frac{AT_p}{\pi}\left[4\sin(\pi\tfrac{u-2t}{T_p}) + \tfrac{4}{3}\sin(\pi\tfrac{3u-2t}{T_p}) + 2\sin(\pi\tfrac{u}{T_p})\right]_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p}$$

$$= \frac{AT_p}{\pi}\Big[4\sin(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2\pi t}{T_p}) + \tfrac{4}{3}\sin(\tfrac{3\pi}{2} - \tfrac{2\pi t}{T_p}) + 2\sin(\tfrac{\pi}{2})$$
$$- 4\sin(-\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{2\pi t}{T_p}) - \tfrac{4}{3}\sin(-\tfrac{3\pi}{2} - \tfrac{2\pi t}{T_p}) - 2\sin(-\tfrac{\pi}{2})\Big]$$

$$= \frac{AT_p}{\pi}\left[8\cos(\tfrac{2\pi t}{T_p}) - \tfrac{8}{3}\cos(\tfrac{2\pi t}{T_p}) + 4\right]$$

$$= \frac{4AT_p}{\pi}\left[\tfrac{4}{3}\cos(\tfrac{2\pi t}{T_p}) + 1\right]$$

Es.5 Valuta la convoluzione circolare tra un segnale $x(n)$ periodico di periodo N e definito nel periodo $[0, N)$ come

$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N/2 - 1 \\ 0, & N/2 \le n < N \end{cases}$ e se stesso (self-convolution)

Riscrivo $x(n)$ come $x(n) = rep_n x_0(n)$ con $x_0(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0, k_x] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $k_x = \begin{cases} N/2 - 1, & N \text{ pari} \\ N/2 - 3/2, & N \text{ dispari} \end{cases}$

quindi $z(n) = x *_{circ} x(n) = rep_N x_0 * x_0(n)$ con $x_0 * x_0(n) = \begin{cases} 1+n, & n \in [0, k_x] \\ 1+2k_x-n, & n \in (k_x, 2k_x] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ con $2k_x = \begin{cases} N-2, & N \text{ pari} \\ N-3, & N \text{ dispari} \end{cases}$

Es.6 Identifica un segnale periodico $x(t)$ la quale self-circular convolution fornisce $z(t) = x * x(t) = rep_{T_p} triang(2t/T_p - 1)$

Cerchiamo $x(n) = rep_n u(n)$ tale che $u * u(t) = triang\left(\frac{t - 1/2 T_p}{1/2 T_p}\right)$ → triangolo isoscele con base T_p.

Scegliamo $u(t) = \frac{1}{\sqrt{1/2 T_p}} rect\left(\frac{t - T_p/4}{T_p/2}\right)$ → onda quadra $x(t)$ di duty cycle 1/2.

Notiamo che $rect\left(\frac{t}{1/2 T_p}\right) * rect\left(\frac{t}{1/2 T_p}\right) = \frac{1}{2} T_p\, triang\left(\frac{t}{1/2 T_p}\right)$

2.6. Filters in the time-domain

Abbiamo appreso che un sistema lineare tempo-invariante è definito univocamente dalla sua risposta impulsiva, che connette l'input e l'output con una convoluzione. Ricordiamo che $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)}^{LTI} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)h(t-u)\,du$ → se $h(t) = \delta(t)$ allora $y(t) = x(t)$ e la trasformazione è un'identità

A questo punto possiamo chiederci se e quali relazioni ci sono tra i sistemi LTI e le proprietà dei sistemi lineari?

Una serie di segnali LTI è un sistema la quale risposta impulsiva è la convoluzione tra le risposte dei segnali che lo compongono, per la proprietà associativa. $(g = g_1 * g_2)$

Per il parallelo, invece, secondo la linearità, la risposta impulsiva è la somma delle risposte dei segnali del sistema $(g = g_1 + g_2)$

Ogni sistema LTI è lineare e tempo-invariante per definizione. Inoltre:

- è reale, ogni qualvolta la risposta impulsiva è reale;
- è causale, se la risposta impulsiva è zero, ovvero è nulla a tempi negativi → se h è causale, il sistema è neanche causale
- è bibostabile, quando la risposta impulsiva è assolutamente integrabile a tempi continui o assolutamente sommabile a tempi discreti.

controllo più semplice rispetto alla classica prova di BIBO stabilità

$$\boxed{L_g < \infty} \qquad L_g = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\,dt \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| \end{cases}$$

$L_h = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

Possiamo individuare un ulteriore aspetto importante degli esponenziali complessi come autofunzioni dei sistemi LTI

In caso continuo λ è definito come un integrale dipendente dal valore di ω_0. Il valore $G(\omega_0)$ è complesso.

In caso discreto, almeno per quanto riguarda gli esponenziali complessi, la proprietà rivela che l'azione di un sistema LTI è un semplice prodotto

→ il concetto di autofunzione a tempi continui e discreti è lo stesso, cambiano i tempi

Filters in the time-domain

Es.1. Dimostra che una condizione necessaria e sufficiente per un filtro a tempo discreto per essere bibostabile è che la risposta impulsiva sia assolutamente sommabile

Prima di tutto dimostriamo che una $g(n)$ assolutamente sommabile identifica un sistema BIBO stabile:

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(n-k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|\,|g(n-k)| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_x \cdot |g(n-k)| = L_x \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |g(\ell)| = L_x \cdot L_g$$

A questo punto vogliamo dimostrare che un filtro BIBO stabile implica l'assoluta sommabilità di $g(n)$.

Assumendo per assurdo $L_g = \infty$, costruiamo un segnale limitato $x(n) = e^{-j\theta(-n)}$ dove $g(n) = |g(n)|e^{j\theta(n)}$, segnale che soddisfa la condizione $|x(n)| = 1$.

Tuttavia, il segnale limitato produce un output che non è limitato per n=0. Infatti $y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(0-k)$

ovvero $y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\theta(-k)}\cdot|g(-k)|e^{j\theta(-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|g(-k)| = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}|g(\ell)| = L_g$.

Abbiamo dimostrato la tesi per assurdo.

Es.2. Stabilire se il sistema con risposta impulsiva $g(n)=n\cos(n\frac{\pi}{4})1_0 n$ è BIBO stabile

Dal disegno possiamo osservare che la risposta impulsiva non "svanisce" nel tempo e quindi il valore di g(n) tende ad aumentare all'aumentare di n. Concludiamo che il segnale NON è assolutamente integrabile e quindi NON è BIBOstabile.

Es.3. Stabilire se il sistema con la risposta impulsiva $g(t)=e^{-t}\cos(t)1(t)$ è BIBOstabile

In questo caso, $L_g=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt=\int_0^{\infty}e^{-t}|\cos(t)|dt \le \int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$. Il sistema è BIBOstabile

In realtà **non è necessario conoscere il vero valore di L_g, basta sapere che sia limitato.**

Es.4 Per i sistemi che seguono stabilisci se sono LTI (Filtri). Se sì, identifica la risposta impulsiva e sfruttala per constatare la loro memoria e se sono BIBO stabili:

* $y(t)=2\int_{t-2}^{t+2}x(u)e^{u-t}du - x(t+2)$

Possiamo sostituire gli estremi di integrazione con una funzione rettangolare per ottenere.

$y(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}x(u)\cdot e^{-(t-u)}\,\mathrm{rect}\left(\frac{1}{4}(t-u)\right)du - x*\delta_{-2}(t)$

Questo sistema ha risposta impulsiva $g(t)=e^{-t}\mathrm{rect}(t/4)+\delta(t+2)$ con estensione $e(g)=[-2,2]$, quindi è un filtro dinamico (ma non causale) che è anche BIBOstabile dato che $\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt=\int_{-2}^{2}e^{-t}dt+1=e^{2}-e^{-2}+1<\infty$

Il filtro è reale dato $g(t)$ reale (e positivo)

* $y(t)=1(t-2)\int_{-1}^{t-2}x(u)\cos(t-u)du+3x(t-1)$

Sostituiamo gli estremi di integrazione con due gradini unitari

$y(t)=1(t-2)\int_{-\infty}^{\infty}x(u)1(u+1)\cdot\cos(t-u)1(t-u-2)du+3x*\delta_1(t)$

Tuttavia, l'integrale non può prendere la forma di una convoluzione, quindi il sistema non è un filtro.

* serie di due filtri con risposta impulsiva $g_1(n)=\sin(\beta n)$ e $g_2(n)=a^n 1_0(n)$, $-1<a<1$

Individuiamo la risposta impulsiva per convoluzione in tempo-discreto $\rightarrow g(n)=g_2*g_1(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k 1_0(k)\cdot\frac{1}{2j}\left[e^{j\beta(n-k)}-e^{-j\beta(n-k)}\right]$

quindi $g(n)=\frac{e^{j\beta n}}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}(ae^{-j\beta})^k-\frac{e^{-j\beta n}}{2j}\sum_{k=0}^{\infty}(ae^{j\beta})^k=\frac{1}{2j}\frac{e^{j\beta n}}{1-ae^{-j\beta}}-\frac{1}{2j}\frac{e^{-j\beta n}}{1-ae^{j\beta}}=\mathbb{R}\left[\frac{e^{j\beta n}}{1-ae^{-j\beta}}\right]$

Definendo $b=1-ae^{-j\beta}=|b|e^{j\varphi_b}$ otteniamo $g(n)=\frac{1}{|b|}\sin(\beta n-\varphi_b)$ con estensione $e(g)=(-\infty,\infty)$ $\rightarrow$ il filtro NON è BIBOstabile, ma è reale in quanto $g(n)\in\mathbb{R}$.

* $y(t)=\int_{t-1}^{2t+1} x(u)e^{t-u}\,du - x(t-2)$

Sostituiamo gli estremi di integrazione con due gradini unitari

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{t-u}\,1(u-t+1)\,1(2t-u-1)\,du - x * \delta_2(t)$.

Il contributo $1(2t-u-1)$ non può essere espresso come una funzione di $t-u$, quindi il sistema NON è LTI

* $y(n)=\begin{cases}\sum_{k=-10}^{n-9} x(k)e^{-(n-k)} & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$

$y(n)=\begin{cases}0, & n<0\\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(k)1_0(k+10)e^{-(n-k)}}\,1_0(n-k-9), & n\geq 0\end{cases}$

il sistema NON è tempo-invariante, quindi NON è LTI

* $y(t)=\int_{-\infty}^{t-2} e^{5(t-\tau)}x(\tau+2)\,d\tau+3x(t-7)$

$\overset{!}{=}\int_{-\infty}^{\infty} x(u+2)e^{5(t-u)}1(t-u-2)\,du+3x * \delta_7(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(v)e^{5(t-v+2)}1(t-v)\,dv+3x * \delta_7(t)$

è un sistema LTI con risposta impulsiva $g(t)=e^{5(t+2)}1(t)+3\delta(t-7)$ con $e(g)=[0,\infty)$ quindi è causale

La risposta impulsiva è reale quindi anche il filtro è reale. Tuttavia, il filtro non è BIBOstabile dato che $g(t)$ diverge per $t\to\infty$

* $y(t)=\begin{cases}0 & t\leq 2\\ \cos(t+2)\int_{-1}^{t-2} x(\tau)\,d\tau & t>2\end{cases}$

$y(t)=\cos(t+2)\begin{cases}0 & t\leq 2\\ \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,1(u+1)\,1(t-u-2)\,du, & t>2\end{cases}$

Il sistema NON è LTI a causa del prodotto per $\cos(t+2)$ che è lineare ma non tempo-invariante (anche $1(u+1)\cdot x(u)$ NON è tempo-invariante).

* $y(t)=x * g(t)$, $g(t)=\mathrm{sinc}(8t)$

Il sistema è evidentemente LTI con risposta impulsiva $g(t)=\mathrm{sinc}(8t)$ è anche dinamico e reale.

Tuttavia, il filtro NON è BIBOstabile in quanto il sinc non è assolutamente integrabile.

* $y(n)=\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{n-3} x(k)e^{-(n-k)} & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$

$y(n)=\begin{cases}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-(n-k)}\,1(n-k-3), & n\geq 0\\ & n<0\end{cases}$ → rivela una convoluzione con $g(n)=e^{-n}1(n-3)$ (causale e BIBOstabile)

Otteniamo $y(n)=1_0(n)\cdot x * g(n)$ dove la moltiplicazione per il gradino unitario rende il sistema NON LTI.

Es.5 Si definisce un filtro discreto con risposta impulsiva $h(n)=n\cos(n\pi/4)\,1_0(n)$. È BIBOstabile?

non è sempre strettamente necessario disegnare il grafico

$L_h=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\infty$ non è BIBOstabile perché non è assolutamente sommabile. Un controesempio sarebbe $x(n)=e^{-j\varphi(-n)}$ se $h(n)=|h(n)|e^{j\varphi(n)}$

ES. 6. $x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \xrightarrow{z(n)} \boxed{h_2(n)} \xrightarrow{y(n)}$

Discutere la BIBOSTABILITÀ e trovare $y(n)$ sapendo $h_1(n) = \sin(8n) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{4}{\pi} n\right)$ non periodico! e non BIBOstabile

$h_2(n)$ $a^n 1_0(n)$ $|a|<1$ → BIBOstabile

Definiamo $h(n) = h_1 * h_2(n)$ → NON BIBOstabile perché una delle sue componenti non è bibostabile

La convoluzione tra filtri BIBOstabili è BIBOstabile

A questo punto $y(n) = x * h_1 * h_2(n)$

$y(n) = (x * h_2) * h_1(n)$

$x * h_2(n) = h_2(n) - a h_2(n-1) = \delta(n)$

quindi $y(n) = \delta * h_1(n) = h_1(n) = \sin(8n)$

FOURIER TRANSFORM

Fourier series

3.1. Fourier series (part 1) - segnali continui e periodici

La trasformata di Fourier è la trasformata per segnali periodici a tempo continuo.

Abbiamo imparato in precedenza che un esponenziale complesso ($e^{j\omega_0}$) viene mappato in un filtro in $\lambda x(t)$ dove λ è una costante complessa che dipende dal valore di ω_0.

A questo punto, se un segnale può essere espresso come la composizione di un esponenziale complesso con pulsazione ω_k, allora l'azione del filtro è semplice: moltiplica ogni esponenziale complesso per un valore dipendente da ω_k, definito come $G(j\omega_k)$.

— By linearity we have

$$x(t) = \sum_k A_k \cdot e^{j\omega_k t}$$

$$y(t) = \sum_k [A_k G(j\omega_k)] \cdot e^{j\omega_k t}$$

We focus on **periodic** signals and linear complex exponentials that are periodic T_p

$\omega_k = k\, 2\pi/T_p$

esponenziali in relazione armonica

Volendosi concentrare solo su segnali periodici di periodo T_p, il valore degli esponenziali complessi che ci interessano è nella forma $\omega_k = k\frac{2\pi}{T_p}$. Nella loro parte reale ed immaginaria sono sinusoidi di periodo $T_p/|k|$, tutti con stesso periodo T_p.

periodic T_p

$$x(t) = \sum_k X_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

signal components

I vari componenti di un segnale possono essere estratti usando regole standard sui vettori, correttamente rielaborate per lo spazio periodico del segnale

La decomposizione in base ortogonale è illustrata dalla tabella raffigurata. Per proiettare una base ortogonale dobbiamo semplicemente aggiungere i contributi delle proiezioni lungo ogni vettore della base.

La chiave sta nell'identificare un prodotto interno corretto, che può essere definito come l'integrale su un periodo di $x(t) \cdot y^*(t)$.

	Complex vectors	Periodic signals
– Inner product	$\langle x, y\rangle = \sum_i x_i \underline{y_i^*}$ complesso coniugato	$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) y^*(t)\, dt$ generalizzazione del prodotto interno tra vettori
– Projection along y	$x_y = \frac{y}{\|y\|}\left\langle x, \frac{y}{\|y\|}\right\rangle = y\frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}$	$x_y(t) = y(t)\frac{\langle x(t), y(t)\rangle}{\|y(t)\|^2}$ componente di x che giace lungo y
– Decomposition wrt. an orthogonal basis	$\langle b_i, b_{j\neq i}\rangle = 0$ $x = \sum_i b_i \frac{\langle x, b_i\rangle}{\|b_i\|^2}$	$\langle b_i(t), b_{j\neq i}(t)\rangle = 0$ $x(t) = \sum_k b_k(t) \underbrace{\frac{\langle x(t), b_k(t)\rangle}{\|b_k(t)\|^2}}_{\text{signal components}}$

il segnale è in un certo senso un vettore di lunghezza infinita

Il punto fondamentale è quello di identificare una base ortogonale per segnali periodici a tempo continuo, che è identificata dall'esponenziale complesso $b_k(t) = e^{j\omega_0 kt}$, $\omega_0 = \frac{k2\pi}{T_p}$

È possibile estrarre i coefficienti da s(t) in tempo continuo e periodico.

Da S_k, invece, è possibile ricostruire il segnale se sussistono determinate condizioni.

s(t) e S_k sono alternative equivalenti per la rappresentazione di un segnale.

Quando è possibile ricostruire perfettamente un segnale a partire dai suoi coefficienti di Fourier S_k (o $s(t)$)? Definiamo a tal proposito alcune condizioni di invertibilità:

- qualsiasi segnale con energia finita in un periodo (condizione di Riesz-Fisher)
- qualsiasi segnale assolutamente integrabile con discontinuità finite + numero finito di max e min (condizione di Dirichlet)
- qualsiasi segnale con numero finito di delta in un periodo (condizione di Dirac)

In generale, in matematica, per ricostruzione perfetta di un segnale si intende che converge praticamente ovunque. Nei punti di discontinuità è infatti osservabile il fenomeno di Gibbs.

La convergenza della serie di Fourier NON è di tipo puntuale. La serie converge in media quadratica

Useful pairs

	time domain	Fourier domain	
constant	1	$\delta(k)$	delta
delta dual pair	$\mathrm{rep}_{T_p}\,\delta(t)$	$\frac{1}{T_p}$	constant
rect	$\mathrm{rep}_{T_p}\,\mathrm{rect}(\frac{t}{dT_p})$	$d\,\mathrm{sinc}(kd)$	sinc
sinc dual pair	$N\mathrm{sinc}_N(\frac{Nt}{T_p})$ $N = 1 + 2M$	$\mathrm{rect}(\frac{k}{N})$	rect
exponential	$e^{jm\omega_0 t}$	$\delta(k-m)$	delta
delta dual pair	$\mathrm{rep}_{T_p}\delta(t-t_1)$	$\frac{1}{T_p}e^{-jk\omega_0 t_1}$	exponential
sinusoid	$\cos(n\omega_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\delta(k-n) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\delta(k+n)$	

Fourier series (part 1)

Es.1 Dimostra che le seguenti coppie della serie di Fourier sono corrette:

→ n.b: Scegliamo l'intervallo d'integrazione $[-1/2T_p, 1/2T_p]$ in modo tale da includere solo un δ del comb.

* $s(t) = \mathrm{comb}_{T_p}(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\delta(t)$ e $S_k = \frac{1}{T_p}$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier applicando la relazione con il comb, ovvero

$$S_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \mathrm{rep}_{T_p}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-1/2T_p}^{1/2T_p} \mathrm{rep}_{T_p}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_{-1/2T_p}^{1/2T_p}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_p}e^{-jk\omega_0\cdot 0} = \frac{1}{T_p}$$

* $s(t) = 1$ e $S_k = \delta(k)$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(k)e^{jk\omega_0 t} = e^{j0\omega_0 t} = 1$$

* $s(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\mathrm{rect}(t/dT_p)$ e $S_k = d\,\mathrm{sinc}(kd)$, per $0<d<1$

$$S_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p}\mathrm{rep}_{T_p}\mathrm{rect}(\tfrac{t}{dT_p})e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-1/2T_p}^{1/2T_p}\mathrm{rep}_{T_p}\mathrm{rect}(\tfrac{t}{dT_p})e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-1/2T_p}^{1/2T_p}\mathrm{rect}(\tfrac{t}{dT_p})e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-1/2T_p}^{1/2T_p}e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Risolvendo l'integrale otteniamo:

$$S_k = \begin{cases} \frac{dT_p}{T_p} & , k=0 \\ \frac{1}{T_p}\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\Big|_{-d/2T_p}^{d/2T_p} & , k\neq 0 \end{cases} = \begin{cases} d & , k=0 \\ \frac{e^{jk\omega_0 d/2T_p} - e^{-jk\omega_0 d/2T_p}}{jk\omega_0 T_p} = \frac{e^{jkd\pi} - e^{-jkd\pi}}{2jk\pi} = \frac{\sin(kd\pi)}{k\pi} & , k\neq 0 \end{cases}$$

$\boxed{\omega_0 T_p = 2\pi}$

$\boxed{\mathrm{sinc}(0) = 1}$

$\boxed{\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$

Il risultato può essere scritto in forma compatta come $S_k = d\,\mathrm{sinc}(kd)$

* $s(t) = M\,\mathrm{sinc}_M(Mt/T_p) = \frac{\sin(\pi M t/T_p)}{\sin(\pi t/T_p)}$, $M = 1+2N$ e $S_k = \mathrm{rect}(k/M)$

$S_k = \mathrm{rect}\left(\frac{k}{1+2N}\right) = \begin{cases} 1, & k\in[-N,N] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ quindi $s(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{m=0}^{2N} e^{j(m-N)\omega_0 t} = e^{-jN\omega_0 t}\sum_{m=0}^{2N}(e^{j\omega_0 t})^m = e^{-jN\omega_0 t}\cdot\frac{1-e^{j(1+N)\omega_0 t}}{1-e^{j\omega_0 t}}$

quindi $\frac{e^{-jN\omega_0 t} - e^{-j(1+N)\omega_0 t}}{1-e^{j\omega_0 t}}\cdot\frac{e^{-j1/2\omega_0 t}}{e^{-j1/2\omega_0 t}} = \frac{e^{-j(1/2+N)\omega_0 t} - e^{-j(1/2+N)\omega_0 t}}{e^{-j1/2\omega_0 t} - e^{j1/2\omega_0 t}} = \frac{\sin((1/2+N)\omega_0 t)}{\sin(1/2\omega_0 t)} = \frac{\sin(1/2 M\omega_0 t)}{\sin(1/2\omega_0 t)} = M\,\mathrm{sinc}_M\left(\frac{Mt}{T_p}\right)$

* $s(t) = \cos(n\omega_0 t + \varphi_0)$ e $S_k = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\delta(k-n) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\delta(k+n)$

$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\delta(k-n) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\delta(k+n)\right]e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}e^{j(n\omega_0 t)} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}e^{-jn\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{jn\omega_0 t+\varphi_0} + \frac{1}{2}e^{-j(n\omega_0 t+\varphi_0)} = \cos(n\omega_0 t + \varphi_0)$

DAI VETTORI AI SEGNALI PERIODICI

N campioni = vettore lungo N

$$\lim_{N\to\infty}\langle \underline{x}_N, \underline{y}_N\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,y^*(nT) \qquad T = \frac{T_p}{N}$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ T\to 0^+}} T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,y^*(nT) = \int_0^{T_p} x(t)\,y^*(t)\,dt$$

la moltiplicazione per la costante T serve in modo tale che il limite sia uguale all'integrale

Es.2 Consideriamo l'onda quadra $s(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2a}\right)$ con duty cycle $d = 2a/T_p$

$S_k = \frac{1}{T_p}\int_{-1/2T_p}^{1/2T_p} s(t)e^{-j2\pi kt/T_p}dt$ $\quad \omega_0 = 2\pi/T_p \rightarrow S_k = \frac{1}{T_p}\int_{-a}^{a} e^{-j2\pi kt/T_p}dt$

l'integrazione vale da $-a$ ad a, intervallo dove il segnale vale 1

scelgo questo intervallo di integrazione in modo da considerare solo il rettangolo centrato in zero

Quindi:

$S_k = \frac{1}{T_p}\frac{e^{-j2\pi kt/T_p}}{-j2\pi k/T_p}\Big|_{-a}^{a} = \frac{e^{j2\pi ka/T_p} - e^{-j2\pi ka/T_p}}{j2\pi k} = \sin\frac{(2\pi ka/T_p)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi kd)}{\pi k} = d\,\mathrm{sinc}(kd)$

d = duty cycle

valido anche per k=0, caso da trattare a se stante

impulso fondamentale

3.2. Fourier series (part 2 - properties)

	time domain	Fourier domain
time-reversal	$x(-t)$	X_{-k}
conjugation	$x^*(t)$	X^*_{-k}
symmetries	**even** $x(t) = x(-t)$	**even** $X_k = X_{-k}$
	odd $x(t) = -x(-t)$	**odd** $X_k = -X_{-k}$
	real $x(t) = x^*(t)$	**Hermitian** $X_k = X^*_{-k}$
	real + even $x(t) = x^*(t) = x(-t)$	real + even $X_k = X^*_{-k} = X_{-k}$
	real + odd $x(t) = x^*(t) = -x(-t)$	imaginary + odd $X_k = X^*_{-k} = -X_{-k}$

In generale, se il segnale è reale, le serie troncate e le serie danno dei contributi reali

In molti casi risulta più semplice ottenere i coefficienti di Fourier tramite relazioni note

- l'inversione temporale corrisponde corrisponde ad una inversione equivalente nel dominio di Fourier;
- la coniugazione nel dominio del tempo equivale a coniugazione + ribaltamento nel dominio di fourier.

Queste relazioni influiscono sulle simmetrie

$S_{-k} = S_k^*$ → parte reale pari, parte immaginaria dispari
↳ proprietà utile per la serie trigonometrica *

$$* \; s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \overset{S^*_k}{S_{-k}} e^{-j\omega_0 t} = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Re[S_k] e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

esprimibile come un coseno

	time domain	Fourier domain
linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X_k + \beta Y_k$
time-shift	$x(t - t_1)$	$X_k e^{-jk\omega_0 t_1}$
modulation	$x(t) e^{jm\omega_0 t}$	X_{k-m}
dual pair		
convolution	$x *_{cir} y(t)$	$T_p X_k Y_k$
product	$x(t) y(t)$	$X_k * Y_k$
dual pair		
derivative	$\frac{dx(t)}{dt}$	$X_k \cdot jk\omega_0$
mean value	$m_x = X_0$	
power	$P_x = E_X$	
Parseval's theorem		

Oltre all'ovvia proprietà di linearità, in quanto l'integrale è un'operazione lineare:

- la traslazione di tempo t_1 corrisponde alla modulazione, ovvero la moltiplicazione per l'esponenziale complesso $e^{-jk\omega_0 t_1}$. Quando viene applicata la modulazione si cambia segno all'esponente
- la convoluzione circolare diventa T_p volte il prodotto, mentre il prodotto di due segnali diventa una convoluzione a pulsazione discreta. Queste due operazioni sono duali
- la derivata nel tempo corrisponde ad un prodotto per $jk\omega_0$
- il coniugio induce coniugio + ribaltamento

Secondo la regola dell'inversione è possibile risalire al segnale, a partire dalla derivata.

$x(t)$ → X_k → **derivative** → $y(t) = x'(t)$ → $Y_k = jk\omega_0 X_k$

the value at k=0 is lost since Y_0=0, the others are multiplied by a known factor

Moltiplicare X_k per $jk\omega_0$ implica che è possibile ricavare i coefficienti originali dividendo per $jk\omega_0$. Questa regola è vera per tutti i coefficienti tranne quelli con k=0. Questo valore viene, infatti, perso perché è moltiplicato per zero. Possiamo ricostruire il segnale solo se conosciamo il suo valore medio.

Infatti, il valore medio m_x corrisponde a X_0, coefficiente di Fourier per k=0

$$X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{jk\omega_0} & , k \neq 0 \\ \boxed{m_x} & , k = 0 \end{cases}$$

true period T_p

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

must be equal

period $T'_p = NT_p$ and $\boxed{\omega_1 = \omega_0/N}$

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{S}_m e^{jm\omega_0/Nt}$$

$$\tilde{S}_m = \begin{cases} S_k & m = Nk \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

interpolation effect

Se consideriamo un periodo errato?

Se consideriamo due serie di Fourier, una per il periodo minimo T_p e l'altra per NT_p, devono raffigurare lo stesso segnale. Ciò significa che i coefficienti alle stesse pulsazioni devono coincidere, $k\omega_0 = m\omega_1$.

Da questa relazione concludiamo che i coeff. per la serie a periodo non minimo valgono zero, tranne quando m = kN.

Fourier series (part 2 - properties)

Es.1. Prova che ogni segnale periodico reale a tempo continuo può essere espresso con la serie trigonometrica:

$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$, $S_k = |S_k| e^{j\varphi_k}$ con $\omega_0 = 2\pi/T_p$

Dato che il segnale è reale, possiamo sfruttare la simmetria Hermitiana secondo cui $S_k = S^*_{-k}$ quindi $S_{-k} = S^*_k = |S_k| e^{-j\varphi_k}$. In questo modo dimostriamo che S_0 (valore medio) $\in \mathbb{R}$. Detto questo, possiamo scrivere $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} S_k e^{jk\omega_0 t} + S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [S_k e^{jk\omega_0 t} + S_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$

quindi $s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |S_k| [e^{j\varphi_k} e^{jk\omega_0 t} + e^{-j\varphi_k} e^{-jk\omega_0 t}] = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |S_k| [e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}] = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

Es.2. Calcola i coefficienti di Fourier per $s(t) = e^{jm\omega_0 t}$ sfruttando la coppia di Fourier $x(t) = 1$, $X_k = \delta(k)$

Dato $s(t) = e^{jm\omega_0 t} = e^{jm\omega_0 t} \cdot 1 = e^{jm\omega_0 t} \cdot x(t)$, sfruttando la regola di modulazione otteniamo $S_k = X_{k-m} = \delta(k-m)$

Es.3. Calcola i coefficienti di Fourier per $s(t) = \text{rep}_{T_p} \text{triang}(2t/T_p)$

Il segnale è la ripetizione periodica di un triangolo. Sapendo che il triangolo è il prodotto della convoluzione tra due rettangoli, possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = u *_{circ} u(t)$ tra due onde quadre con duty cycle $d = 1/2$

$u(t) = \text{rep}_{T_p} \frac{1}{\sqrt{dT_p}} \text{rect}\left(\frac{t}{dT_p}\right)$, $d = 1/2$ in modo tale che il triangolo abbia altezza 1

A questo punto, i coefficienti di Fourier risultano essere ovvi: $U_k = \frac{1}{\sqrt{dT_p}} d\,\text{sinc}(kd)$

Inoltre, dalla proprietà della convoluzione circolare otteniamo $S_k = T_p X_k Y_k = T_p U_k^2$ quindi $S_k = d\,\text{sinc}^2(kd) = \frac{1}{2}\text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$

Es.4. Calcola i coefficienti di Fourier del segnale raffigurato

Il segnale raffigurato può essere interpretato come la composizione di tre onde quadre di duty cycle 1/8. Nello specifico $u(t) = \text{rep}_{T_p} \text{rect}\left(\frac{t}{dT_p}\right)$ con $U_k = d\,\text{sinc}(kd)$, $d = 1/8$

$T_p = 8T$. Possiamo scrivere $s(t) = u(t) + u(t-2T) + u(t+2T)$. Per la proprietà di traslazione otteniamo $S_k = U_k + U_k e^{-jk\omega_0 2T} + U_k e^{jk\omega_0 2T}$

quindi $S_k = U_k [1 + 2\cos(k\omega_0 2T)] = U_k [1 + 2\cos(k\pi/2)] = \frac{1}{8}\text{sinc}\left(\frac{k}{8}\right)[1 + 2\cos(k\pi/2)]$, per $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ otteniamo $\omega_0 = \frac{\pi}{4T}$

$s(t)$ è un segnale pari e reale, quindi anche S_k lo è

Es.5

$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

$= d + \sum_{k=1}^{\infty} 2d\,\text{sinc}(kd) \cos(k\omega_0 t)$

Es.6 Un ribaltamento nel dominio del tempo induce un ribaltamento in frequenza

→ i coefficienti presentano simmetria pari (vale per segnali reali e complessi)

Es.7 $s(t) = comb_{Tp}(t)$

$$S_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \qquad \omega_0 = 2\pi/T_p$$

Nell'integrazione consideriamo l'intervallo $[-T_p/2, T_p/2]$ per considerare solo il delta centrato in zero

$$S_k = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} \underbrace{s(t)}_{\delta(t)}\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \rightarrow S_k = 1/T_p = m_s = S_k(0)$$

$$comb_{T_p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - nT_p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overbrace{1}^{S_k} \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

inoltre $P_s = \dfrac{\int_{-T_p/2}^{T_p/2} \overbrace{\delta(t)\cdot\delta(t)}^{\text{il } \delta(t) \text{ vale } \infty \text{ a tempo continuo (Delta di Dirac)}} dt}{T_p} = \dfrac{\delta(0)}{T_p} = \infty$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p^2} = +\infty$$

Es.8 $s(t) = 1$

$$S_k = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad \text{con } \omega_0 = 2\pi/T_p$$

$$= \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{delta di Kronecker}$$

È possibile verificare i calcoli con:

$m_s = 1$ ok.

$$P_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 = |S_0|^2 = 1 \equiv |s(t)|^2 = 1 \quad \text{ok.}$$

Il segnale costante è il duale di un impulso ideale

$$\boxed{\begin{array}{l} s(t) = 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} S_k = \delta(k) \text{ kronecker} \\ s(t) = comb_{T_p}(t) \text{ Dirac} \xrightarrow{\mathcal{F}} S_k = \frac{1}{T_p} \end{array}}$$

Es.9 $s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ con $\omega_0 = 2\pi/T_p$

Rappresentiamo il coseno con Eulero

$$s(t) = \underbrace{\frac{Ae^{j\varphi_0}}{2}}_{B} \cdot e^{j\omega_0 t} + \underbrace{\frac{Ae^{-j\varphi_0}}{2}}_{B^*} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$= \underbrace{Be^{j\omega_0 t}}_{k=1} + \underbrace{B^* e^{-j\omega_0 t}}_{k=-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

In questo caso basta osservare la formula:

$$S_k = \begin{cases} B & k = 1 \\ B^* & k = -1 \\ 0 & |k| \neq 1 \end{cases}$$

sfruttando la regola di modulazione $x(t)e^{jm\omega_0 t} \rightarrow x_{k-m}$

$$s(t) = \frac{A}{2}\underbrace{e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}}_{m=1} + \frac{A}{2}\underbrace{e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 t}}_{m=-1}$$

possiamo interpretarlo come combinazione lineare

$$\boxed{e^{jm\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(k-m)}$$

I coefficienti della serie di Fourier diventano $S_k = \frac{A}{2}e^{j\varphi_0}\delta(k-1) + \frac{A}{2}e^{-j\varphi_0}\delta(k+1)$

ES.10 $s(t)=x(t)\cos(10\omega_0 t)$ periodico T_p ($\omega_0 = 2\pi/T_p$)

$$S(t)=\frac{1}{2}\overbrace{x(t)e^{j10\omega_0 t}}^{m=10}+\frac{1}{2}\overbrace{x(t)e^{-j10\omega_0 t}}^{m=-10}$$

Sono entrambi segnali periodici T_p + possiamo utilizzare la modulazione

$$S_k=\frac{1}{2}X_{k-10}+\frac{1}{2}X_{k+10}$$

Ovvero: introduciamo la forma d'onda del segnale intorno a +10 e -10

La media del segnale vale $m_s = S_k(0)=0$

ES.11 $s(t)$ è reale e dispari, periodico di periodo T_p, $S_k=0$ per $|k|>1$ e $P_s=1$, $s(t)=?$

$\omega_0=\frac{2\pi}{T_p}$

$$S_k=\begin{cases} S_0 & k=0 \\ S_1 & k=1 \\ S_{-1} & k=-1 \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Da $P_s=1 \rightarrow \sum_k |S_k|^2 = |S_0|^2+|S_1|^2+|S_{-1}|^2=1$

Reale e dispari $\rightarrow s(t)=s^*(t)$ ovvero $s(t)=-s(-t) \rightarrow S_k=-S_{-k}$ segnale immaginario e dispari

↳ da qui deduciamo che $S(0)=-S(0)\rightarrow 0$ e $S_{k+1}=-S_{k-1}$

ovvero $S_k \begin{cases} jA & k=1 \\ -jA & k=-1 \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$

$$s(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{j\omega_0 k t} = jAe^{j\omega_0 t} - jAe^{-j\omega_0 t} = -2A\sin(\omega_0 t)$$

Da $P_s=1 \rightarrow |S_1|^2+|S_{-1}|^2=1=A^2+A^2 \rightarrow A^2=\frac{1}{2} \rightarrow A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi $s(t)=\pm\sqrt{2}\sin(\omega_0 t)=\pm\sqrt{2}\sin(2\pi t/2)$

$=\pm\sqrt{2}\sin(\pi t)$

ES.12

$T_p=8T$

$$x(t)=\text{rep}_{T_p}\left(A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)+A\,\text{rect}\left(\frac{t-2T}{T}\right)+A\,\text{rect}\left(\frac{t+2T}{T}\right)\right)$$

Si può interpretare il sistema come una collezione di onde quadre

$u(t)=\text{rep}_{T_p} A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ $d=\frac{1}{8}$ e $T_p=8T \longrightarrow U_k = Ad\,\text{sinc}(kd)$

$x(t)=u(t)+u(t-2T)+u(t+2T)$

$$X_k = U_k + U_k e^{-j\omega_0 k 2T} + U_k e^{-j\omega_0 k(-2T)} \rightarrow X_k = U_k\left(1+e^{-j\omega_0 k 2T}+e^{j\omega_0 k 2T}\right)$$

$$= U_k\left(1+2\cos\left(\frac{2\pi}{8T}k2T\right)\right)$$

$$= Ad\,\text{sinc}(kd)\left[1+2\cos(\pi/2)\right] \text{ con } d=1/8$$

→ coefficienti reali e pari a partire da un segnale reale e pari

ES.13 Calcolare la potenza di $s(t)=\frac{3\sin(\pi t)}{5\sin\left(\pi\frac{t}{5}\right)}$. $P_x=?$

Calcolare P_x nel dominio del tempo è troppo difficile → ci spostiamo nel dominio di Fourier

$x(t)=\frac{3\sin(2\pi t/2)}{5\sin(2\pi t/10)}$ → $T_{p1}=2$, → $T_{p2}=10$ } $T_p=\cancel{10}\,5$

Identificabile osservando il grafico

→ tra 0-5 e 5-10 sia numeratore che denominatore cambiano di segno

Si ottiene un sinc periodico

$$x(t)=\frac{3}{5}\frac{e^{j\pi t}-e^{-j\pi t}}{e^{j\pi t/5}-e^{-j\pi t/5}}=\frac{3}{5}\frac{e^{j\pi t}\overbrace{(1-e^{-j2\pi t})}^{a^5}}{e^{j\pi t/5}\underbrace{(1-e^{-j2\pi t/5})}_{a}}$$

$$=\frac{3}{5}\frac{e^{j\pi t}}{e^{j\pi t/5}}\sum_{k=0}^{4} e^{-j2\pi k t/5}$$

Il tutto può essere inserito nella sommatoria:

$$x(t)=\frac{3}{5}\sum_{k=0}^{4} e^{-j2\pi(k-2)t/5} = \frac{3}{5}\sum_{m=-2}^{2} e^{-j2\pi m t/5} \quad \text{con } \omega_0=2\pi/5$$

ovvero $x(t)=\sum_{k=-2}^{2} e^{j\omega_0 k}$ per $k=-m$, $x(t)=\frac{3}{5}\sum_{k=-2}^{2} e^{j\omega_0 k t}$

$$P_x=\sum_k |X_k|^2 = 5\cdot\frac{9}{25}=\frac{9}{5} \quad (m_x = X_0 = 3/5$$

ES.14 $X_k=?$

$y(t)=x'(t)$

$y(t)=1-\text{rep}_1\delta(t)$

$Y_k=X_k\, j k\omega_0 = j2\pi k X_k$

$Y_k=\delta(k)-\frac{1}{T_p}=\delta(k)-1=\begin{cases}0 & k=0\\ -1 & k\neq 0\end{cases}$, $m_s=0$ → $X_k=\frac{Y_k}{jk\omega_0}=\frac{Y_k}{j2\pi k}$ $k\neq 0$ → $X_k=\begin{cases}\frac{-1}{-j2\pi k} & k\neq 0\\ m_x=\frac{1}{2} & k=0\end{cases}$

coeff. della serie di Fourier di un δ

estratto dal segnale nel tempo

La parte reale è PARI e quella immaginaria è DISPARI → simmetria HERMITIANA (a partire da un segnale reale)

ES.15 Prodotto è convoluzione sono due operazioni duali

$z(t)=\text{rep}_2\,\text{triang}(t)$

$T_p=2$

$\text{triang}(t)=\underbrace{\text{rect}}_{x_0(t)} * \underbrace{\text{rect}(t)}_{y_0(t)}$ → $z(t)=\text{rep}_2\,\underbrace{y_0 * x_0}_{z_0}(t)$

$y(t)=\text{rep}_2 y_0(t)$

$x(t)=\text{rep}_2\, x_0(t)=y(t)$

$z(t)=x*y(t)$ periodica

onda quadra $d=1/2$

$Z_k=T_p X_k Y_k=T_p\left(\frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2$ $X_k=Y_k$

Discrete Fourier Transform

3.3. Discrete Fourier transform (part 1)

Differenza rispetto alla serie di Fourier:
non a sono più k infiniti
Sono N → Finiti (questo NON è un problema)
Segnali discreti periodici di periodo N, sono definiti da N campioni di periodo

sin e cos campionati a frequenza doppia

Dato che gli esponenziali complessi a tempo discreto sono autofunzioni di filtri a tempo discreto, l'azione dei filtri è meglio compresa se il segnale viene espresso come la somma di esponenziali complessi a tempo discreto: selezioniamo quelli periodici di periodo N, ovvero quelli con fase $\varphi_k = \frac{k2\pi}{N}$

A partire da un segnale discreto e periodico s(n), possiamo estrarre le proiezioni lungo la base per ottenere i coefficienti DFT S_k. La somma può essere presa su ogni periodo, a partire da n_0 a n_0+N-1. Se vogliamo ricostruire il segnale originale dobbiamo sommare alla funzione della base. La sommatoria può coprire ogni periodo a partire da k_0 a k_0+N-1.

La DFT è l'unica forma della trasformata di Fourier implementabile in MatLab. Infatti, richiede un semplice prodotto tra matrici:

$S = (1/N)\, F\, s$ $\qquad$ $s = F^* S$

DFT matrix $F = \left[e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}\right]_{n,k=1,\dots,N-1}$

- raccogliamo i campionamenti del segnale su un periodo in un vettore s;
- raccogliamo i campionamenti DFT su un periodo in un vettore S;
- s e S sono in relazione grazie ad una matrice N-quadrata, definita F. Tale matrice raccoglie i valori $e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$.

Quindi, $S = (1/N)\, F \cdot s$

La trasformazione inversa si ottiene moltiplicando S per la matrice coniugata F^*, $s = F^* S$

Ad oggi, il prodotto matriciale ha una complessità quadratica in N, può quindi risultare molto difficile per valori di N molto elevati. Tuttavia, c'è un algoritmo definito Fast Fourier Transform (FFT) che sfrutta le simmetrie tra le matrici e valuta il prodotto con una complessità computazionale di N log2N

constant	1	$\mathrm{rep}_N \delta(k)$	delta
delta (dual pair)	$\mathrm{rep}_N \delta(n)$	$\frac{1}{N}$	constant
rect (dual pair)	$\mathrm{rep}_N \mathrm{rect}(\frac{n}{M})$	$\frac{M}{N} \mathrm{sinc}_M(\frac{M}{N}k)$	sinc
sinc (dual pair)	$M \mathrm{sinc}_M(\frac{M}{N}n)$, $M = 1+2K$	$\mathrm{rep}_N \mathrm{rect}(\frac{k}{M})$	rect
exponential	$e^{jm\frac{2\pi}{N}n}$	$\mathrm{rep}_N \delta(k-m)$	delta
delta (dual pair)	$\mathrm{rep}_N \delta(n-m)$	$\frac{1}{N} e^{-k\frac{2\pi}{N}m}$	exponential
sinusoid	$\cos(m\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\mathrm{comb}_N(k-m) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\mathrm{comb}_N(k+m)$	

Applicando la definizione di DFT su segnali ed impulsi semplici, troviamo le coppie raffigurate nella tabella. Esse presentano significative somiglianze con quelle della serie di Fourier

In generale, è possibile notare una forte corrispondenza tra le coppie, spiegabile tramite la regola della simmetria.

$$s(n) \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow S_k = \frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} s(n)\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x(n) = S_n \longrightarrow \boxed{\mathcal{F}} \longrightarrow X_k = \frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} S_n\, e^{j(-k)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}s(-k)$$

Secondo questa relazione, se esiste una coppia DFT $s(n)$ e S_k, allora possiamo invertire il dominio per ottenere un'altra coppia valida, dove i campioni DFT sono interpretati come segnali nel dominio del tempo. Ad esempio:

$$s(n) = 1 \qquad S_k = \mathrm{rep}_N\delta(k) \quad \Rightarrow \quad x(n) = S_n = \mathrm{rep}_N\delta(n) \qquad X_k = \frac{1}{N}s(-k) = \frac{1}{N}$$

Discrete Fourier Transform (part 1)

Es. 1. Prova che le seguenti coppie di trasformate discrete di Fourier siano corrette:

* $s(n) = 1$ e $S_k = \mathrm{rep}_N\delta(k)$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{rep}_N\delta(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1}\delta(k)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{j0\cdot\frac{2\pi}{N}n} = 1 \quad (\text{il } \delta \text{ è centrato in } k=0)$$

* $s(n) = \mathrm{rep}_N\delta(n)$ e $S_k = 1/N$

$$S_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{rep}_N\delta(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot 0} = \frac{1}{N}$$

* $s(n) = \mathrm{rep}_N\,\mathrm{rect}(n/M)$, $N > M = 1+2k$ e $S_k = \frac{M}{N}\mathrm{sinc}_M\left(\frac{Mk}{N}\right)$

Osserviamo che $\mathrm{rect}\left(\frac{n}{M}\right) = \begin{cases} 1 & , n \in [-k, k] \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

Dato $N > M = 1+2k$ non c'è aliasing nella ripetizione periodica $\rightarrow$ possiamo scegliere come periodo di riferimento $[-k, N-1-k]$ in modo da considerare solo il rettangolo centrato in 0. Otteniamo:

$$S_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-k}^{N-1-k}\mathrm{rep}_N\,\mathrm{rect}\left(\frac{n}{M}\right)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-k}^{k}e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2k}e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2k}e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-k)} = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}k}}{N}\sum_{m=0}^{2k}\left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}}\right)^m$$

$$= \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}k}}{N}\,\frac{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(\frac{1}{2}+k)}}{e^{jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{1}{N}\,\frac{\mathrm{sinc}\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{N}\,\frac{\sin\left(\frac{M}{N}k\pi\right)}{\sin\left(\frac{1}{N}k\pi\right)}$$

Il segnale che risulta è un sinc campionato periodico

$S_k = \frac{M}{N}\mathrm{sinc}_M\left(\frac{M}{N}k\right)$ con $\boxed{\mathrm{sinc}_M(x) = \frac{\sin(\pi x)}{M\sin\left(\pi\left(\frac{x}{M}\right)\right)}}$

* $s(n) = M\,\mathrm{sinc}_M\left(\frac{M}{N}n\right)$ e $S_k = \mathrm{rep}_N\,\mathrm{rect}\left(\frac{k}{M}\right)$, per $N > M = 1+2k$

Utilizzando la regola di simmetria dal risultato del punto precedente, scriviamo $x(n) = N\,\mathrm{rep}_N\,\mathrm{rect}\left(\frac{n}{M}\right)$ e quindi

$X_k = M\,\mathrm{sinc}_M\left(\frac{M}{N}k\right) \longrightarrow$ otteniamo $s(n) = x_n = M\,\mathrm{sinc}_M\left(\frac{M}{N}n\right)$ e $S_k = \frac{1}{N}x(-k) = \mathrm{rep}_N\,\mathrm{rect}\left(\frac{k}{M}\right)$

* $s(n) = \cos\left(m\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0\right)$ e $S_k = \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\mathrm{comb}_N(k-m) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\mathrm{comb}_N(k+m)$

$$s(n) = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1}\left[\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\mathrm{rep}_N\delta(k-m) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\mathrm{rep}_N\delta(k+m)\right]e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=m}^{m+N-1}\frac{1}{2}e^{j\varphi_0}\delta(k-m)e^{jk\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{k=-m}^{-m+N-1}\frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}\delta(k+m)\Big]e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{2}e^{j\varphi_0}e^{jm\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi_0}e^{-jm\frac{2\pi}{N}n} = \cos\left(m\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0\right) \rightarrow$$ sfruttiamo due valori diversi di n_0, ovvero $n_0 = \pm m$, per le due funzioni comb

2.4. Discrete Fourier transform (part 2 - properties)

	time domain	Fourier domain
time-reversal	$x(-n)$	X_{-k}
conjugation	$x^*(n)$	X^*_{-k}
symmetries		
	even x(n) = x(-n)	even $X_k = X_{-k}$
	odd x(n) = -x(-n)	odd $X_k = -X_{-k}$
	real x(n) = x*(n)	Hermitian $X_k = X^*_{-k}$
	real + even x(n) = x*(n) = x(-n)	real + even $X_k = X^*_{-k} = X_{-k}$
	real + odd x(n) = x*(n) = -x(-n)	imaginary + odd $X_k = X^*_{-k} = -X_{-k}$

	time domain	Fourier domain
linearity	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X_k + \beta Y_k$
time-shift	$x(n-n_1)$	$X_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_1}$
modulation dual pair	$x(n)e^{jm\frac{2\pi}{N}n}$	X_{k-m}
convolution	$x *_{cir} y(n)$	$N X_k Y_k$
product dual pair	$x(n)y(n)$	$X *_{circ} Y_k$
increment	$x(n) - x(n-1)$	$X_k \cdot (1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}})$
mean value	$m_x = X_0$	
power Parseval's theorem	$P_x = E_X(N)$	

Anche in questo caso, time-reversal e coniugazione corrispondono ad un time reversal o ad una combinazione tra quest'ultimo e la coniugazione. Questo implica che tutto ciò che abbiamo visto per le simmetrie è ancora valido.

Dato che il tempo è discreto, non abbiamo una regola di derivazione in questo caso. Tuttavia, questa regola è sostituita dalla regola dell'incremento

the value at k=0 (mod N) is lost since Y_0=0, the others are multiplied by a known factor

Inversion rule

$$X_k = \begin{cases} \dfrac{Y_k}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} * & , k \neq 0 \pmod N \\ \boxed{m_x} & , k = 0 \pmod N \end{cases}$$

Tutti i valori sono ottenuti dividendo per il fattore *.

Il valore per k_0 e multipli, invece, è ricavato sfruttando il valore medio, come nell'inversione della derivazione.

Nel caso in cui si valuti un periodo errato: se prendiamo K volte il periodo minimo, allora i coefficienti sono interpolati aggiungendo k-1 zeri dopo ogni vero coefficiente.

Discrete Fourier Transform (part 2 - properties)

Es.1. Calcola i coefficienti DFT di $s(n) = e^{jm\frac{2\pi}{N}n}$ utilizzando la coppia di Fourier $x(n) = 1$, $X_k = rep_N \delta(k)$

Dato $e^{jm\frac{2\pi}{N}n} = e^{jm\frac{2\pi}{N}} \cdot 1 = e^{jm\frac{2\pi}{N}n} x(k)$, possiamo sfruttare la proprietà di modulazione per provare che:

$S_k = X_{k-m} = rep_N \delta(k-m)$

Es.2. Dimostra sfruttando la proprietà dell'incremento che i coefficienti DFT dell'onda quadra campionata $s(n) = \begin{cases} 1 & , n \in [0, M) \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$ per $N > M$. Può essere espresso come $S_k = \frac{M}{N} \text{sinc}_M\left(\frac{M}{N}k\right) e^{-j\frac{M-1}{N}k\pi}$

Sfruttando la regola dell'incremento $x(n) = s(n) - s(n-1)$ otteniamo

ovvero $x(n) = rep_N \delta(n) - rep_N \delta(n-M)$

A questo punto risulta semplice calcolare i coefficienti DFT: $X_k = \frac{1}{N}(1 - e^{jk\frac{2\pi}{N}M})$ e per inversione della regola dell'incremento: $S_k = \begin{cases} \dfrac{X_k}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \dfrac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}M}}{N(1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}})} & , k \neq 0 \\ m_s = \dfrac{M}{N} & , k = 0 \end{cases}$ → moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{jk\frac{\pi}{N}(M+1)}$

otteniamo S_k (per $k \neq 0$) $= \dfrac{\sin\left(\frac{M}{N}k\pi\right) e^{jk\frac{\pi}{N}}}{N \sin\left(\frac{1}{N}k\pi\right) e^{jk\frac{\pi}{N}M}} = \dfrac{M}{N} \text{sinc}_M\left(\frac{M}{N}k\right) e^{-j\frac{M-1}{N}k\pi}$

Fourier transform per segnali continui aperiodici

3.5. Fourier transform (part 1)

n.b: $S(j\omega)$ è, in realtà, una funzione solamente di ω, ma scriviamo $j\omega$ per convenzione

absolutely integrable + finite number of finite discontinuities + finite number of max and min	Dirichlet
finite energy	Riesz-Fisher
finite number of delta functions	Dirac

Le condizioni di invertibilità sono le stesse che per la serie di Fourier ma, in questo caso, le proprietà si riferiscono all'intero asse temporale, invece che ad un solo periodo. La convergenza nella trasformazione inversa vale nel senso debole, cioè la $s(t)$ recuperata è uguale a quella originale quasi ovunque tranne che per alcuni punti specifici, come le discontinuità.

constant	1	$2\pi\,\delta(\omega)$	delta
delta	$\delta(t)$	1	constant
dual pair			
rect	$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$	sinc
sinc	$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$	rect
dual pair			
exponential	$e^{j\omega_1 t}$	$2\pi\,\delta(\omega-\omega_1)$	delta
delta	$\delta(t-t_1)$	$e^{-j\omega t_1}$	exponential
dual pair			
sinusoid	$\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$	$\pi\, e^{j\varphi_1}\,\delta(\omega-\omega_1)+\pi\, e^{-j\varphi_1}\,\delta(\omega+\omega_1)$	

triangle	$\mathrm{triang}(t)$	$\mathrm{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$	squared sinc
squared sinc	$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\mathrm{triang}(\frac{\omega}{2\pi})$	triangle
dual pair			
sign	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{-2j}{\omega}$	hyperbola
hyperbola	$\frac{j}{\pi t}$	$\mathrm{sgn}(\omega)$	sign
dual pair			
unit step	$1(t)$	$\frac{-j}{\omega}+\pi\delta(\omega)$	
	$\frac{j}{2\pi t}+\frac{1}{2}\delta(t)$	$1(\omega)$	unit step
dual pair			

Tutte queste coppie derivano dalla regola di simmetria, equivalente per la DFT.

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

I domini coincidono ed entrambi i tempi sono continui ed aperiodici.

Ad esempio:

$$x(t) = S(jt) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(jt)\, e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi s(-\omega)$$

$$s(t) = \mathrm{rect}(t) \Rightarrow x(t) = S(jt) = \mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2\pi})$$
$$S(j\omega) = \mathrm{sinc}(\tfrac{\omega}{2\pi}) \qquad X(j\omega) = 2\pi s(-\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega)$$

Le coppie sopra definite possono essere trovate anche sfruttando la regola di scala secondo la quale la trasformata di Fourier di x scalato di un fattore a, equivale ad a volte la trasformata di x scalata di un fattore 1/a

Quindi $x(t) \xrightarrow{\text{scala}} x(t/a)$ e $X(j\omega) \xrightarrow{\text{scala}} a\,X(ja\omega)$. Ad esempio:

$$x(t) = \mathrm{sinc}(\tfrac{t}{2\pi}) \qquad X(j\omega) = 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega) \xrightarrow{a = \frac{1}{2\pi}} y(t) = x(t/a) = \mathrm{sinc}(t)$$
$$Y(j\omega) = a\,X(ja\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi})$$

Fourier transform (part 1)

Es. 1. Prova che le seguenti coppie di trasformate di Fourier siano vere:

* $s(t) = \delta(t)$ e $S(j\omega) = 1$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

* $s(t) = 1$ e $S(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \; e^{-j\omega 0} = 1 \longrightarrow \text{sfruttiamo la proprietà rivelatrice del delta}$$

Oppure, sapendo che $s(t) = x(jt) = 1$, $S(j\omega) = 2\pi x(-\omega) = 2\pi\delta(t)$

* $s(t) = \text{rect}(t)$ e $S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} 1, & \omega = 0 \\ \left.\dfrac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-1/2}^{1/2} = \dfrac{2\sin(1/2\,\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases} \longrightarrow S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

* $s(t) = \text{sinc}(t)$ e $S(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(u) e^{j2\pi u t} du = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi u t} = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \left.\dfrac{e^{j2\pi u t}}{j2\pi t}\right|_{-1/2}^{1/2} = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \end{cases} \longrightarrow s(t) = \text{sinc}(t)$$

* $s(t) = \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ e $S(j\omega) = \pi e^{j\varphi_1}\delta(\omega - \omega_1) + \pi e^{-j\varphi_1}\delta(\omega + \omega_1)$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\pi e^{j\varphi_1}\delta(\omega - \omega_1) + \pi e^{-j\varphi_1}\delta(\omega + \omega_1)\right] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} e^{j\varphi_1} e^{j\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{-\varphi_1} e^{-j\omega_1 t} = \frac{1}{2} e^{j(\omega_1 t + \varphi_1)} + \frac{1}{2} e^{-j(\omega_1 t + \varphi_1)}$$
$$= \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

* $s(t) = e^{-at} 1(t)$, $a > 0$ e $S(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} 1(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

ES.2 $s(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$ $\alpha > 0$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \left.\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)}\right|_0^{+\infty} = \frac{0 - 1}{-(\alpha + j\omega)} = \frac{1}{\alpha + j\omega} \cdot \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

per razionalizzare

modalità standard per disegnare un segnale

ES.3 $s(t) = \text{rect}(t)$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}}{-j\omega} = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega}$$
$$= \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} = \text{sinc}(\omega/2\pi)$$

si ottiene un sinc scalato $\longrightarrow$ si annulla nei multipli di 2π

La trasformata di un δ è una costante e viceversa

ES.4 $s(t) = \delta(t)$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt = 1$$

3.6. Fourier transform (part 2 - properties)

	time domain	Fourier domain
time-reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
symmetries	**even** $x(t) = x(-t)$	**even** $X(j\omega) = X(-j\omega)$
	odd $x(t) = -x(-t)$	**odd** $X(j\omega) = -X(-j\omega)$
	real $x(t) = x^*(t)$	**Hermitian** $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$
	real + even $x(t) = x^*(t) = x(-t)$	real + even $X(j\omega) = X^*(-j\omega) = X(-j\omega)$
	real + odd $x(t) = x^*(t) = -x(-t)$	imaginary + odd $X(j\omega) = X^*(-j\omega) = -X(-j\omega)$

	time domain	Fourier domain
linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$
time-shift	$x(t - t_0)$	$X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
modulation	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(j\omega - j\omega_0)$
dual pair		
convolution	$x * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
product	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X * Y(j\omega)$
dual pair		
derivation	$x'(t)$	$j\omega \cdot X(j\omega)$
product by t	$tx(t)$	$jX'(j\omega)$
dual pair		
integration	$\int_{-\infty}^{t} x(u)\,du$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi A_x \delta(\omega)$
area	$A_x = S(j0)$	
energy	$E_x = \frac{1}{2\pi}E_X$	
Parseval's theorem		

Anche in questo caso sussiste una forte relazione con le altre trasformate. Quello che cambia è unicamente la notazione.

$A_x = 2\pi s(0)$

Anche in questo caso vale la regola dell'inversione, con più o meno le medesime considerazioni per i valori a $\omega = 0$ e multipli

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{derivative}} \rightarrow y(t) = x'(t)$$

$$X(j\omega) \qquad\qquad Y(j\omega) = j\omega \cdot X(j\omega)$$

the value at ω=0 is lost since Y(j0)=0, the others are multiplied by a known factor

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + \boxed{m_x} 2\pi\,\delta(\omega)$$

questo termine permette di recuperare anche l'informazione sul valore medio

No need to correct for a finite value at ω=0

se la funzione è continua calcoliamo il valore in 0 con l'equivalente tra lim dx e sx

possiamo ricostruire per tutti i punti fuorché in zero

Un aspetto interessante dei segnali aperiodici a tempo continuo è che possiamo definire l'integrazione, che sappiamo essere equivalente alla convoluzione con il gradino.

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{integration}} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)\,du = x * 1(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j\omega)\delta(\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi \boxed{X(0)}\delta(\omega)$$

area

L'effetto dell'integrazione corrisponde alla moltiplicazione di X per la trasformata di Fourier del gradino unitario, secondo la regola di convoluzione. Si ottiene un'equazione strettamente relazionata a quella della regola di inversione della derivata. La differenza è che $X(\omega)$ con $\omega = 0$ sostituisce $2m_x$.

Fourier transform (part 2 - properties)

Es. 1. Calcola la trasformata di Fourier dei seguenti segnali:

* $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t - t_1}{T}\right)$

  Possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = y(t - t_1)$, $y(t) = x(t/T)$, $x(t) = \text{rect}(t)$

  L'espressione consiste quindi di un'operazione di scala seguita da una traslazione. $Y(j\omega) = T\,\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)e^{-j\omega t_1}$

* $s(t)=x(t)\cos(\omega_0 t)$ in funzione di $X(j\omega)$

Possiamo riscrivere il segnale attraverso l'identità di Eulero $\rightarrow s(t)=\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$. Applicando la regola di modulazione otteniamo $S(j\omega)=\frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0))+\frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0))$

Otteniamo così il risultato in figura $\longrightarrow$

* $s(t)=\mathrm{sgn}(t)$

Per risolvere questo esercizio sfruttiamo la regola di derivazione $x(t)=s'(t)=2\delta(t)$ quindi $X(j\omega)=2$

Sfruttando la $\boxed{\text{regola di inversione } S(j\omega)=\frac{X(j\omega)}{j\omega}+m_s 2\pi\delta(\omega)}$ otteniamo $S(j\omega)=\frac{2}{j\omega}=\frac{-2j}{\omega}$ dato che il segno ha $m_s=0$

Otteniamo:

* $s(t)=\frac{j}{\pi t}$

Applichiamo la simmetria ottenuta dall'esercizio precedente $x(t)=\mathrm{sgn}(t)\rightarrow X(j\omega)=\frac{-2j}{\omega}$ ed otteniamo $y(t)=X(jt)=\frac{-2j}{t}$

quindi $Y(j\omega)=2\pi x(-\omega)=-2\mathrm{sgn}(\omega)$

Definendo $s(t)=-\frac{1}{2\pi}y(t)$ otteniamo $s(t)=-\frac{1}{2\pi}y(t)=\frac{j}{\pi t}\longrightarrow S(j\omega)=-\frac{1}{2\pi}Y(j\omega)=\mathrm{sgn}(\omega)$

* $s(t)=u(t)$

Esprimiamo $s(t)=u(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)+\frac{1}{2}$. A questo punto $S(j\omega)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2j}{\omega}+\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega)=\frac{-j}{\omega}+\pi\delta(\omega)$

In alternativa, dato che il gradino unitario ha media $m_s=\frac{1}{2}$ e $x(t)=s'(t)=\delta(t)$ e $X(j\omega)=1\rightarrow S(j\omega)=\frac{1}{j\omega}+\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega)=\frac{-j}{\omega}+\pi\delta(\omega)$

* $s(t)=\mathrm{triang}(t)$ sapendo la coppia $\mathrm{rect}(t)\rightarrow \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Possiamo sfruttare la proprietà di convoluzione ovvero $s(t)=x*x(t)$ con $x(t)=\mathrm{rect}(t)$ e quindi sapendo che $X(j\omega)=\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ possiamo dire che $S(j\omega)=X(j\omega)X(j\omega)=X^2(j\omega)=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

* $s(t)=\mathrm{sinc}^2(t)$

Sfruttando $x(t)=\mathrm{sinc}(t)$ e $X(j\omega)=\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ abbiamo $s(t)=x(t)x(t)$ e quindi $\frac{1}{2\pi}X*X(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\,\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right]=\mathrm{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

Il triangolo ottenuto dalla convoluzione dei due rettangoli $X(j\omega)$ ha altezza 2π dato che è l'estensione di ogni rettangolo.

ES. 2. Calcola la convoluzione $\mathrm{sinc}*\mathrm{sinc}(t)$

In questo caso risulta più semplice calcolare la convoluzione nel dominio di Fourier e poi ottenere il risultato nel dominio del tempo invertendo la trasformata.

Quindi $x(t)=\mathrm{sinc}(t)$ e $X(j\omega)=\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\rightarrow S(j\omega)=X^2(j\omega)=\mathrm{rect}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ quindi invertendo la trasformata otteniamo $s(t)=\mathrm{sinc}(t)$

ES.3. Calcola l'area e l'energia di $\text{sinc}\left(\frac{t-t_1}{T}\right)$

Area ed energia non cambiano se il segnale è sottoposto a traslazione. Quindi possiamo identificare area ed energia di $x(t) = \text{sinc}(t/T)$. Il calcolo risulta più facile nel dominio di Fourier $X(j\omega) = T\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$

Quindi $A_S = A_X = X(j0) = T$ ed $E_S = E_X = \frac{1}{2\pi} E_X = \frac{1}{2\pi} \cdot T^2 \frac{2\pi}{T} = T$

Nel calcolo di E_S abbiamo sfruttato $|X(j\omega)| = T^2\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$ e il fatto che sia un rettangolo di base $2\pi/T$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t-t_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \\ x(t)e^{j\omega_0 t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega - j\omega_0) \\ \delta(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \frac{1}{2\pi} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\omega) \\ \text{rect}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \end{aligned}}$$

ES.4 $s(t) = 1$

$S(j\omega) = \delta(\omega)2\pi$

ES.5 $s(t) = \delta(t-t_0)$

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$

$\underbrace{x(t-t_0)}_{\delta(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{X(j\omega)}_{1} e^{-j\omega t_0}$

$\rightarrow S(j\omega) = 1 e^{-j\omega t_0} = e^{-j\omega t_0}$

$\overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$

dal delta traslato otteniamo un esponenziale complesso a fase lineare

ES.6 $s(t) = e^{j\omega_0 t}$

$x(t) = 1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\rightarrow S(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$s(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega - j\omega_0)$

$$\boxed{\text{dualità della esponenziale: } e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad \text{e} \quad \delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}}$$

ES.7 $s(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\varphi_0}$

$S(j\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$

$= \pi e^{j\varphi_0}\delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\varphi_0}\delta(\omega + \omega_0)$

I due fattori sono l'uno il complesso coniugato dell'altro (esistono a pulsazioni l'una l'inverso dell'altra)

Il segnale ha simmetria Hermitiana (ce lo aspettavamo dato che il coseno è un segnale reale)

$$\boxed{\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)}$$

ES.8 $s(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$

Ipotizziamo di conoscere $X(j\omega)$

$s(t) = x(t)\left[\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}\right]$

$= \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$

$S(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_0)$

ES.9 **Regola della scala**

$y(t) = x(t/a)$ e $Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t/a)e^{-j\omega t}dt$

quindi $Y(j\omega) = a\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\omega a u}du = aX(ja\omega)$

$s(t) = \text{rect}(t/T)$

$S(j\omega) = T\,\text{sinc}\left(\frac{T\omega}{2\pi}\right)$

$= T\,\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi \cdot \frac{1}{T}}\right)$ ω_0

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t/2\pi) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\,\mathrm{rect}(\omega) = X(j\omega)$$

$$x(t) = \mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \mathrm{sinc}(\omega/2\pi)$$

ES.10 $s(t) = \mathrm{sinc}(t)$ $\quad S(j\omega) = ?$

Dato $s(t) = x(t/a) \xrightarrow{\mathcal{F}} a X(ja\omega)$

$\overset{!}{=} \mathrm{sin}(t/2\pi a)$ Vogliamo $a = \frac{1}{2\pi}$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X\left(j\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

ES.11 $s(t) = \mathrm{sinc}(t/T)$

per la regola di scala:

$$\mathrm{sinc}(t/T) \xrightarrow{\mathcal{F}} T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

ES.12 $s(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$

$y(t) = \cos(\omega_0 t) \rightarrow Y(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \left[\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)\right] \longrightarrow \text{REGOLA DEL PRODOTTO}$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_0)$$

ES.13 $s(t) = \mathrm{trang}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$ $\quad \left(\mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{sin}(\omega/2\pi)\right)$

$S(j\omega) = \mathrm{sinc}^2(\omega/2\pi)$

ES.14 $s(t) = \mathrm{triangle}(t/D)$ $\quad S(j\omega) = ?$

$$x * y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)Y(j\omega)$$

$$x(t)y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$$

$$x(t/a) \xrightarrow{\mathcal{F}} a X(ja\omega) \rightarrow \text{Regola di scala}$$

$$\{x(t), X(j\omega)\} \rightarrow \{X(jt), 2\pi x(-\omega)\} \rightarrow \text{Regola di simmetria}$$

$u(t) = \mathrm{triangle}(t) = \mathrm{rect} * \mathrm{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} U(j\omega) = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $\longrightarrow$ a partire dal triangolo di riferimento lo scaliamo tramite la regola

$s(t) = u(t/D) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = D\,U(j\omega D) = D\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right)^*$

.. oppure $s(t) = x * x(t)$, $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$

con $X(j\omega) = D\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right)$

$$S(j\omega) = X(j\omega)^2 = D^2\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right)^*$$

se scalo nel tempo di D, le ampiezze vengono amplificate della stessa costante, perché l'integrale viene esteso

* i risultati sono simili... ma nel secondo c'è un errore... infatti il calcolo corretto deve essere normalizzato

ovvero $s(t) = \frac{1}{D} x * x(t)$ ovvero $S(j\omega) = \frac{1}{D} X^2(j\omega) = D\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right)$

ES.15 $s(t) = \text{sinc}^2(t/T)$

$\{\text{triang}(t) = \text{sinc}^2(\omega/2\pi)\}$ e $\{\text{sinc}^2(t/2\pi),\ 2\pi\,\text{triang}(-\omega)\}$ con $\text{triang}(-\omega) = \text{triang}(\omega) \rightarrow$ funzione pari

quindi $x(t) = \text{sinc}^2(t/2\pi) \rightarrow X(j\omega) = 2\pi\,\text{triang}(\omega)$

$s(t) = x(t/a) \rightarrow S(j\omega) = a\,X(ja\omega) = 2\pi a\,\text{triang}(\omega \cdot a)$

vogliamo $s(t) = \text{sinc}^2(t/2\pi \cdot a)$, vogliamo $2\pi \cdot a = T$ quindi $a = T/2\pi$

quindi $\text{sinc}^2(t/T) \xrightarrow{\mathcal{F}} T\,\text{triang}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

ES.16 $s(t) = \text{sinc} * \text{sinc}(t)$. $S(j\omega) = ?$

$S(j\omega) = \left[\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right]^2 = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$\boxed{\text{sinc} * \text{sinc}(t) = \text{sinc}(t)}$

è un segnale a due livelli (0,1) come il rect(t)

$0^2 = 0$ e $1^2 = 1 \rightarrow$ il segnale non cambia

*cambierebbe nei punti di discontinuità, ma essendo solamente punti hanno lunghezza nulla

ES.17 $s(t) = \text{sinc}(t)$. $A_s = ?$ $E_s ?$

$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \rightarrow$ impossibile identificare la primitiva

$s(t) = \text{sinc}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$A_s = (S; 0) = 1$

$E_s = \frac{1}{2\pi} E_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right|^2 d\omega = 1$

ES.18 $s(t) = \text{sinc}^3(t)$ $A_s = ?$

$s(t) = \underbrace{\text{sinc}(t)}_{x(t)} \cdot \underbrace{\text{sinc}^2(t)}_{y(t)}$ con $X(j\omega) = \text{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ $Y(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jv)\,Y(j\omega - jv)\,dv$

$A_s = S(j0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(jv)\,Y(-jv)\,dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{triang}\left(\frac{v}{2\pi}\right) \text{rect}\left(\frac{-v}{2\pi}\right) dv$ con $\text{rect}\left(\frac{-v}{2\pi}\right) = \text{rect}\left(\frac{v}{2\pi}\right) \rightarrow$ PARI

$A = \frac{3}{2}\pi$ ovvero $\frac{3}{4} \cdot 2\pi$ → area rect(t)

$A_s = \frac{1}{2\cancel{\pi}} \cdot \frac{3}{2}\cancel{\pi} = \frac{3}{4}$

ES.19 $s(t) = \text{sign}(t)$

$\boxed{\begin{aligned} x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \cdot X(j\omega) \\ t\,x(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} j\,X'(j\omega) \end{aligned}}$

$u(t) = s'(t) = 2\delta(t)$

$U(j\omega) = j\omega S(j\omega)$

$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$ quindi $U(j\omega) = 2$

$S(j\omega)\,j\omega = \frac{2}{j\omega} = -\frac{2j}{\omega}$ $\omega \neq 0$

in $\omega = 0$ $S(j\omega)$ vale $A_s = 0$ quindi $S(j\omega) = \begin{cases} -\frac{2}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$

risultato notevole:

$\boxed{\text{sign}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}}$

Es.20 $s(t) = 1(t)$. $S(j\omega) = ?$

$$s(t) = 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

valor medio $\cdot\, 2\pi\delta(\omega)$

$\frac{1}{2}$ (nel dominio della pulsazione dirac la presenza di ω)

... soluzione alternativa:

$u(t) = s'(t) = \delta(t)$

Nel dominio della pulsazione $U(j\omega) = 1 = j\omega S(j\omega)$ per $\omega \neq 0$

ovvero $S(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ A_\delta & \omega = 0 \end{cases} \longrightarrow$ $\boxed{\text{quando } A_\delta = 0,\ S(0) = m_1 \cdot 2\pi\delta(\omega)}$

Es.21 $S(j\omega) = ?$

δ che deriva dalla discontinuità

$$u(t) = s'(t) = A/_T\,\mathrm{rect}(t/T) - A\delta(t - T/2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - T/2)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$U(j\omega) = j\omega S(j\omega) = \frac{A}{T}\, T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) - A e^{-j\omega T/2}$$

quindi $S(j\omega) = \begin{cases} A\dfrac{\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right) - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ \dfrac{AT}{2} & \omega = 0 \end{cases}$

Relations among the transforms and filters → relazione periodico/aperiodico

3.7. Relations among Fourier transforms

$$s(t) = s(t+T_p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

The Fourier transform of a periodic signal

$$\boxed{\tilde{S}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi S_k \delta(\omega - k\omega_0)}$$

δ centrati in $k\omega_0$

combinazione lineare di δ

una struttura a δ equispaziati equivalente alla struttura di un segnale periodico

L'area è 2π volte il coefficiente di Fourier per quel valore

collezione di δ centrati ai multipli di ω_0

Che cosa succede se utilizziamo la trasformata di Fourier, invece che la serie di Fourier di un segnale periodico?

Dato che un segnale periodico può essere espresso attraverso la Serie di Fourier, se consideriamo la sua trasformata, ogni esponenziale complesso è mappato in una sua versione shiftata del delta nel dominio di Fourier. La trasformata di Fourier diventa la raccolta di delta shiftati di $k\omega_0$ e moltiplicati per $2\pi S_k$

Cambiando la prospettiva, che cosa succede se consideriamo i coefficienti di Fourier di una ripetizione periodica?

Il campionamento nel tempo è il procedimento duale della ripetizione periodica nel dominio di Fourier.

Che cosa succede se campioniamo un segnale periodico?

Il campionamento nel tempo corrisponde a ripetizione periodica nel dominio di Fourier.

Che cosa succede se combiniamo periodicamente un segnale aperiodico a tempo continuo x(t) e poi lo campioniamo?

A partire da un segnale a tempo continuo ed aperiodico otteniamo un segnale discreto periodico di fase N.

Relations among the Fourier transforms

Es.1 Calcola i coefficienti di Fourier dell'onda quadra $s(t) = \text{rep}_{T_p} \text{rect}\left(\frac{t}{dT_p}\right)$, $0 < d < 1$

Dalle coppie di Fourier sappiamo che $X(j\omega) = dT_p \text{sinc}\left(dT_p \frac{\omega}{2\pi}\right) = dT_p \text{sinc}\left(\frac{d\omega}{\omega_0}\right)$ con $\omega_0 = 2\pi/T_p$

Inoltre, $S_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) = \frac{1}{T_p} \cdot dT_p \text{sinc}(kd) = d\,\text{sinc}(kd)$

Es. 2 Calcola i coefficienti DFT dell'onda quadra $s(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0, M) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ per $N > M$.

$s(n) = rep_N\, x(t)\big|_{t=n}$, $x(x) = rect\left(\frac{t - 1/2(M-1)}{M}\right)$ con $T_p = N$. Per le proprietà di Fourier $X(j\omega) = M\,sinc\left(M\frac{\omega}{2\pi}\right)e^{-j\omega/2(M-1)}$

quindi $S_k = rep_N \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) = rep_N \frac{M}{N} sinc\left(\frac{M}{N}k\right) e^{-j\pi\frac{M-1}{N}k}$

Es. 3

$s(t) = rep_{T_p} \overbrace{rect\left(\frac{t}{2D}\right)}^{u(t)}$ con $U(j\omega) = 2D\,sinc\left(\frac{\omega 2D}{2\pi}\right)$

$S_k = \frac{1}{T_p} U(jk\omega_0)$ con $\omega_0 = 2\pi/T_p$

$= \frac{1}{T_p} \cdot 2D\,sinc\left(\frac{k\omega_0 2D}{2\pi T_p}\right) = d\,sinc(kd)$

sfruttando la regola di campionamento della trasformata di Fourier

Es. 4

$s(t) = rep_{T_p}\, triang(t-1)$

trasformata del triang

regola della traslazione nel tempo

$u(t) = triang(t-1) \rightarrow U(j\omega) = sinc^2(\omega/2\pi)e^{-j\omega 1}$

$S_k = \frac{1}{T_p} U(jk\omega_0)$

$= \frac{1}{2} U\left(jk\frac{2\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} sinc^2\left(\frac{k\pi}{2\pi}\right)e^{-jk\pi} = \frac{(-1)^k}{2} sinc^2\left(\frac{k}{2}\right)$

Es. 5

$s(t) = |\cos(2\pi f_1 t)|$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} = 4\pi f_1 = 2\omega_1$ con $\omega_1 = 2\pi f_1$

$s(t) = rep_{T_p}\, u(t)$

$u(t)^* = \cos(\overbrace{2\pi f_1}^{\omega_1} t)\, \overbrace{rect(t/T_p)}^{x(t)}$

$U(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_1) + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_1)$ e $X(j\omega) = T_p\,sinc\left(T_p\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$U(j\omega) = \frac{T_p}{2} sinc\left(\frac{T_p}{2\pi}(\omega - \omega_1)\right) + \frac{T_p}{2} sinc\left(\frac{T_p}{2\pi}(\omega + \omega_1)\right)$

quindi $S_k = \frac{1}{T_p} U(jk\omega_0) = \frac{1}{2} sinc\left(\frac{T_p}{2\pi}(k\omega_0 - \omega_1)\right) + \frac{1}{2} sinc\left(\frac{T_p}{2\pi}(k\omega_0 + \omega_1)\right)$ $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$ e $\omega_0 = 2\pi/p$

$= \frac{1}{2} sinc(k - 1/2) + \frac{1}{2} sinc(k + 1/2)$

regola di moltiplicazione per il coseno:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= \cos(\overbrace{2\pi f_1}^{\omega_1} t)\, x(t) \\ U(j\omega) &= \frac{1}{2}X(j\omega - j\omega_1 + \frac{1}{2}X(j\omega + j\omega_1) \end{aligned}}$$

3.8. Filters in the Fourier domain

L'introduzione della rappresentazione di un segnale nel dominio di Fourier è la chiave per la comprensione della connessione tra la trasformata di Fourier e i filtri a tempo continuo. Ricordiamo che nella pratica, h(t) è sempre aperiodico.

L'effetto del filtraggio è più facilmente comprensibile nel dominio di Fourier dove, dalla regola della convoluzione, sappiamo che l'output Y della trasformata è semplicemente l'input X moltiplicato per la trasformata H della risposta impulsiva.

La trasformata di un segnale periodico è la collezione di delta equispaziati di ω_0. Per la proprietà di rivelazione, ogni δ contiene un valore diverso di H.

$$x(t) = x(t + T_p) \quad \text{h(t)} \quad y(t) = x * h(t)$$

Nel caso in cui il segnale sia periodico di periodo Tp, la trasformata di Fourier diventa una collezione di delta. In seguito alla moltiplicazione per H, data la proprietà rivelatrice, ogni delta avrà un diverso valore di H. Nello specifico, il delta centrato in $k\omega_0$ è moltiplicato per $H = jk\omega_0$, come mostrato nel disegno sopra.

L'azione del filtro consiste nel moltiplicare il k-esimo coefficiente di Fourier X_k per la trasformata di Fourier H, campionata a $k\omega_0$.

Nella serie di due filtri il prodotto nel dominio di Fourier è applicato due volte, ovvero moltiplichiamo per H_1 e H_2. La serie è quindi un sistema lineare tempo-invariante. Il parallelo, invece, funziona come una somma della moltiplicazione per H_1 e H_2. Per la serie $Y(j\omega) = X(j\omega)H_1H_2$, per il parallelo $Y(j\omega) = X(j\omega)H_1 + X(j\omega)H_2$.

$$x(t) = A e^{j\omega_0 t} \quad \text{h(t)} \quad y(t) = H(j\omega_0)\, x(t)$$

complex constant

Gli esponenziali complessi sono eigenfunction di un filtro. Infatti la trasformata di Fourier di un esponenziale complesso è un delta che, in seguito ad una moltiplicazione per $H(j\omega)$ conserva solo la trasformata H di $j\omega_0$, campionato alla pulsazione di riferimento ω_0.

Il fattore moltiplicativo per un esponenziale complesso è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva ad ω_0

$$\boxed{\text{Il filtro NON distorce il segnale se } y(t) = Ax(t - t_0) \text{ ovvero } Y(j\omega) = AX(j\omega)\exp(-j\omega t_0)}$$

Un filtro reale ha trasformata a simmetria Hermitiana.

Dato che la trasformata di Fourier di una sinusoide con pulsazione ω_0 è composta da due delta, centrati a $\pm\omega_0$, l'azione del filtro moltiplica i 2 per due valori differenti che, tuttavia, in questo contesto, sono l'uno il coniugato dell'altro.

L'output del filtro è semplicemente il segnale d'ingresso stesso scalato (di $H(j\omega_0)$) e traslato (di $H(j\omega_0)$). In questo caso si dice che il filtro non distorce il segnale. $y(t) = A x(t-t_0)$

Esistono alcune classi di filtri detti filtri "reali" che hanno delle caratteristiche molto semplici. In particolare, considerano una sola parte dello spettro, ovvero del dominio di Fourier. Sono:

* Filtri passa-basso: selezionano solo parti di segnale fino ad una pulsione ω cut-off di riferimento. Nel dominio di Fourier hanno forma rettangolare;
* Filtri passa-alta: eliminano parti di segnale fino ad una certa ω_0;
* Filtri passa-banda: sono una combinazione dei filtri nominati sopra.

all non BIBO stable

Mantengono il segnale attorno ad una certa pulsazione ω_0, sopra una banda di estensione ω_b. Tutto questo affinché il filtro risulti simmetrico.

Questo tipo di filtri viene utilizzato, ad esempio, per rimuovere rumori ed altri tipi di disturbo dagli elettrocardiogrammi (ECG). In particolare, rimuove sinusoidi troppo lente o, al contrario, troppo veloci.

Nessuno di questi tipo di filtri è BIBO stabile. Inoltre, la loro risposta impulsiva ha una durata ampia nel dominio del tempo, quindi sono difficili da implementare.

Nella pratica vengono implementati filtri che "smussano" la forma rettangolare in modo da ottenere altri tipi di forme che evitano le discontinuità. Ad esempio, la forma raffigurata è quella di un coseno rialzato, dove il passaggio dal livello 1 al livello 0 assume la forma di un arco sinusoidale.

Questa forma con intervallo compatto corrisponde ai filtri BIBO stabili

Filters in the Fourier domain

Es.1. Il segnale con la funzione di trasferimento raffigurata in figura distorce il segnale $x(t) = \cos(50\pi t) + 5\cos(120\pi t)$?

Osserviamo che il filtro è reale data la simmetria Hermitiana nel dominio di Fourier che assicura un valore assoluto pari ed una fase dispari.

L'output può essere calcolato semplicemente applicando la proprietà per una

sinusoide attraverso un filtro. Nello specifico, $y(t) = |H(j50\pi)|\cos(50\pi t + \varphi(50\pi)) + 5|H(j120\pi)|\cos(120\pi t + \varphi(120\pi))$

Otteniamo i valori osservando il grafico, quindi $y(t) = 4\cos(50\pi t + \frac{50\pi}{25}) + 5 \cdot 2\cos(120\pi t + \frac{120\pi}{25})$

In quanto le sinusoidi sono moltiplicate tramite pattern diversi, il segnale risulta essere DISTORTO

Es.2. Il segnale $x(t) = A\cos^n(\omega_0 t)$, con $\omega_0 > 0$ viene inviato ad un filtro passa-basso ideale con pulsazione di cut-off $\omega_c > 0$.

Ovvero $H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$. Identifica la dipendenza dal valore di n, il range di ω_0 garantisce $y(t) = x(t)$.

Data la natura del filtro passa-basso, è sufficiente che l'estensione del segnale nel dominio di Fourier soddisfi $e(X) \in (-\omega_c, \omega_c)$

Inoltre, dato che il segnale è la potenza n-esima di un segnale di riferimento $s(t) = \cos(\omega_0 t)$ con estensione di Fourier $e(S) = [-\omega_0, \omega_0]$, allora, dato che $X(j\omega)$ è la convoluzione ripetuta di $S(j\omega)$, per la regola dell'estensione otteniamo $e(X) = [-n\omega_0, n\omega_0]$, quindi è sufficiente che $n\omega_0 < \omega_c$.

Es.3. Un filtro ha funzione di trasferimento $H(j\omega) = 1 + j\omega T$. È reale? Calcola l'output corrispondente all'input $x(t) = \text{rect}(t/T)$.

Il filtro è Hermitiano nel dominio di Fourier perché ha parte reale pari e parte immaginaria dispari. Inoltre, la sua risposta impulsiva risulta essere reale $\rightarrow$ anche il filtro è reale

L'output vale $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = T\,\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right) \cdot [1 + j\omega T] = X(j\omega) + T \cdot j\omega X(j\omega)$

$\boxed{\delta(t/T) = T\delta(t)}$

Inoltre, sfruttando la proprietà di derivazione della trasformata di Fourier, il segnale viene mappato nel dominio del tempo come $y(t) = x(t) + Tx'(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + \text{rect}'\left(\frac{t}{T}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + \delta\left(\frac{t}{T} + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + T\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - T\delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$.

Es.4. I segnali di input e output di un filtro sono $x(t) = \text{triang}\left(\frac{t}{3}\right)$ e $y(t) = \text{triang}\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2\text{triang}\left(\frac{t}{3}\right) + 4\text{triang}\left(\frac{t-1}{3}\right)$. Calcola $H(j\omega)$, la risposta impulsiva $h(t)$ e la risposta a $x(t) = 1(t)$. Il filtro è BIBO stabile?

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3\,\text{sinc}^2\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)[e^{j2\omega} + 2 + 4e^{-j\omega}]}{3\,\text{sinc}^2\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right)} = e^{j2\omega} + 2 + 4e^{-j\omega}$$. La trasformata inversa è $h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t) + 4\delta(t-1)$.

Il filtro è BIBO stabile, dato $|h(t)| = h(t)$ e $A_h = 1 + 2 + 4 = 7$ (finita).

La risposta al gradino diventa $y(t) = h * 1(t) = [\delta(t+2) + 2\delta(t) + 4(\delta(t-1)] * 1(t) = 1(t+2) + 2 \cdot 1(t) + 4 \cdot 1(t-1)$

Es.5

$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{\omega}{2\pi}$

$G(j\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\omega}{2B}\right)$

$g(t) = \delta(t) - \frac{1}{T}\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$

Es.6 Un filtro reale generico $h(t)$ distorce il segnale $x(t) = \cos(\omega_0 t)$?

$x(t) = \cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(.)} \longrightarrow y(t) \overset{?}{=} A\cos(\omega_0(t - t_0))$

Passiamo al dominio di Fourier *

$* \; X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) \longrightarrow \otimes \longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

$H(j\omega)$

$= \pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$ delta centrato in ω_0

$+ \pi H(j\omega_0)\delta(\omega + \omega_0)$ delta centrato in $-\omega_0$

Sfruttando la simmetria Hermitiana otteniamo:

$Y(j\omega) = H^*(j\omega_0)$ con $H(j\omega_0) = Ae^{j\varphi_0}$

ovvero $Y(j\omega) = \pi A e^{j\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0) + \pi A e^{-j\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)$

A questo punto calcoliamo l'antitrasformata per trovare $y(t) \rightarrow y(t) = \pi A e^{j\varphi_0}\frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} + \pi A e^{-j\varphi_0}\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi}$

$$= A\left(\frac{e^{j(\varphi_0+\omega_0 t)} + e^{-j(\varphi_0+\omega_0 t)}}{2}\right) = A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

con $A = |H(j\omega_0)|$, $\varphi_0 = \angle H(j\omega_0)$

$$\cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(\cdot)} \longrightarrow A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$$

reale, $t_0 = \frac{-\varphi_0}{\omega_0}$

Il filtro è reale e NON distorcente

ES.7 $x(t) \longrightarrow \boxed{g(\cdot)} \longrightarrow y(t)$ $\quad x(t) = \cos(50\pi t) + 5\cos(120\pi t)$

Notiamo che:

- il valore assoluto è pari quindi $|G(-j\omega)| = |G(j\omega)|$
- la fase è dispari quindi $\arg(G(-j\omega)) = -\arg(G(j\omega))$

$$G(-j\omega) = Ae^{j\varphi} = \underbrace{|G(j\omega)|e^{-j\arg(G(j\omega))}}_{G^*(j\omega)}$$

* simmetria Hermitiana: $\begin{cases} \text{Parte reale pari + immaginaria dispari} \\ \text{!} \\ = \text{modulo pari + fase dispari} \end{cases}$

Identificando una simmetria hermitiana deduciamo che il filtro reale

$x(t) = \cos(50\pi t) + 5\cos(120\pi t)$

$\downarrow 4,\frac{2}{3}\pi \qquad \downarrow 2,\frac{8}{5}\pi$

$y(t) = 4\cos(50\pi t + \frac{2}{3}\pi) + 10\cos(120\pi t + \frac{8}{5}\pi)$ i due coseni sono stati amplificati di costanti diverse, quindi il segnale è sicuramente distorto $y(t) \neq Ax(t-t_0)$

$= 4\cos(50\pi(t+\frac{1}{75})) + 10\cos(120\pi(t+\frac{1}{75}))$

NB: "catturare la linearità della fase": perché ci sia la stessa traslazione in tutte le componenti la fase deve essere lineare

ES.8 $x(t) \longrightarrow \boxed{h(\cdot)} \longrightarrow y(t)$ $\quad x(t) = \text{tring}(t/2)$

$y(t) = \text{tring}\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2\,\text{tring}\left(\frac{t}{3}\right) + 4\,\text{tring}\left(\frac{t-1}{3}\right)$

$h(t)$? $H(j\omega)$? BIBOstabile?

$x * 1(t) = ?$

$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \rightarrow$ azione del filtro con $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$y(t) = x(t+2) + 2x(t) + 4x(t-1) \rightarrow$ da qui deduciamo che $h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t) + 4\delta(t-1)$

$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega)\cdot e^{j2\omega} + 2X(j\omega) + 4X(j\omega)e^{-j\omega}}{X(j\omega)} = e^{j2\omega} + 2 + 4e^{-j\omega}$$

collezione di 3 δ di area $A_a = 1 + A_2 = 2 + A_2 = 3$

In quanto $|h(t)| = h(t)$ con $A_h = 7$ il filtro è assolutamente integrabile e quindi BIBOstabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 7 < +\infty$$

ES.9. $s(t) = \sum_{n=3}^{\infty} \text{tring}\left(\frac{t-6n}{2}\right) - \text{tring}\left(\frac{t+6n}{2}\right)$ $\quad m_s = ?$ $\quad P_s = ?$

$\text{tring}\left(\frac{t}{2}\right) =$

dato che la ripetizione di campionamento è di passo 6, deduciamo che non c'è aliasing

$m_s = 0$ perché il segnale è dispari e l'integrale si bilancia

Per calcolare la potenza, invece, consideriamo $|s(t)|^2$

Possiamo esprimere il segnale come $|s(t)|^2 = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{triang}^2\left(\frac{t-6n}{2}\right)}_{x(t)=\text{periodico}} - \underbrace{\overbrace{\sum_{k=-2}^{2} \text{triang}^2\left(\frac{t-6k}{2}\right)}^{\text{correzione}}}_{y(t)=\text{aperiodico con area finita}}$

$P_s = m_x - m_y \equiv m_x$ $\boxed{P_s = m_{|s|}}$

$$m_x = \frac{\text{Area nel periodo}}{\text{periodo}} = \frac{\int_{-3}^{3} \text{triang}^2(t/2)\,dt}{6} = 2\int_0^2 \frac{1+\frac{t^2}{4}-t}{6}\,dt = \frac{1}{3}\left(t+\frac{t^3}{12}-\frac{t^2}{2}\right)_0^2 = \frac{1}{3}\left(2+\frac{8}{12}-\frac{4}{2}\right) = \frac{2}{9}$$

il periodo è lungo 6!

$m_y = 0$ (perché il segnale $y(t)$ è un segnale limitato nel tempo e nelle ampiezze, ha area finita)

Dato $s(t) = \underbrace{x(t)}_{\text{periodico}} + \underbrace{y(t)}_{\text{aperiodico con area finita}}$ $\longrightarrow$ $s^2(t) = \underbrace{x^2(t)}_{\text{periodico}} + \underbrace{y^2(t)}_{\text{energia finita}} + \underbrace{2x(t)y(t)}_{z(t)}$ $\rightarrow$ xy area finita

A patto che $z(t)$ abbia area finita, $m_{s^2} = m_{x^2}$ $P_s = P_x$

Es.10 $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} (t-u)\,x(u)\,du$ Causale? lineare? tempo invariante? BIBO stabile?

Cerchiamo di ricondurci ad una convoluzione...

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |t-u|\,\text{rect}\left(\frac{u-t}{2}\right) x(u)\,du$

il rect limita l'intervallo di integrazione $(-\infty, +\infty)$ a $(t-u, t+u)$

con $|t-u|\,\text{rec}\left(\frac{t-u}{2}\right) \equiv h(t-u)$

Il sistema NON è causale perché $h(t)$ non è causale. Inoltre, nell'integrale si tiene conto anche dei contributi $(t+u)$. Il sistema è LTI perché è una convoluzione

Infine, in quanto $h(t)$ è limitato nell'ampiezza e nel tempo è BIBO stabile

Es.11 $y(n) = \min(|x(n)|, |n|)$

Il sistema è causale perché è sufficiente conoscere x al tempo stesso. È una trasformazione <u>istantanea</u>

$y(n) = \min(|x(n)|, |n|) \leq \min(L_x, |n|) \leq L_x$ (se fosse stato con max allora NON sarebbe stato BIBO stabile)

Il sistema NON è lineare perché $|n|$ non lo è

Per valutare la tempo invarianza consideriamo:

$y(n-n_0) = \min(|x(n-n_0)|, |n-n_0|)$ e lo paragoniamo a $\min(|x_{n_0}(n)|, |n|) = \min(|x(n-n_0)|, |n|)$

Le due espressioni NON coincidono quindi il segnale NON è tempo-invariante.

DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM AND SAMPLING THEOREM

Discrete-time Fourier transform - segnali discreti

4.1. Discrete-time Fourier transform

Ci sono svariati modi per ottenere questa trasformata. Uno di questi è scambiare i domini: costruiamo una serie di Fourier per segnali di periodo 2π, i quali coefficienti di Fourier operano ad una $\omega_0 = 1$ di riferimento.

Reinterpretando X_n come un segnale a tempi discreti e $x(\theta)$ come la trasformata di Fourier, otteniamo la cosiddetta trasformata di Fourier a tempi discreti.

La DTFT funziona per segnali aperiodici $s(n)$, che vengono trasformati in una DTFT $S(e^{j\theta})$ secondo una regola praticamente equivalente a quella della controparte discreta di una trasformata standard. La trasformata risultante è periodica di periodo 2π.

Un segnale aperiodico a tempi discreti mappa in una DTFT a fase periodica continua.

constant delta dual pair	1 $\delta(n)$	$2\pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)$ * 1	delta constant
rect sinc dual pair	$\mathrm{rect}(\frac{n}{N})$ $N = 1 + 2M$ $d\,\mathrm{sinc}(nd)$	$N\,\mathrm{sinc}_N(\frac{\theta N}{2\pi})$ $\mathrm{rep}_{2\pi}\,\mathrm{rect}(\frac{\theta}{2\pi d})$	sinc rect
exponential delta dual pair	$e^{j\theta_0 n}$ $\delta(n-m)$	$2\pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0)$ $e^{-j\theta m}$	delta exponential
sinusoid	$\cos(n\theta_0 + \vartheta_0)$	$\pi e^{j\vartheta_0}\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0)$ $+ \pi e^{-j\vartheta_0}\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta + \theta_0)$	

* il segnale deve avere una struttura periodica

* traslato della fase dell'esponenziale

	time domain	Fourier domain
time-reversal	$x(-n)$	$X(e^{-j\theta})$
conjugation	$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\theta})$
symmetries	**even** x(n) = x(-n)	**even** $X(e^{j\theta}) = X(e^{-j\theta})$
	odd x(n) = -x(-n)	**odd** $X(e^{j\theta}) = -X(e^{-j\theta})$
	real x(n) = x*(n)	**Hermitian** $X(e^{j\theta}) = X^*(e^{-j\theta})$
	real + even x(n) = x*(n) = x(-n)	real + even $X(e^{j\theta}) = X^*(e^{-j\theta}) = X(e^{-j\theta})$
	real + odd x(n) = x*(n) = -x(-n)	imaginary + odd $X(e^{j\theta}) = X^*(e^{-j\theta}) = -X(e^{-j\theta})$

	time domain	Fourier domain
linearity	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$
time-shift modulation dual pair	$x(n - n_0)$ $x(n)e^{j\theta_0 n}$	$X(e^{j\theta})e^{-j\theta n_0}$ $X(e^{j(\theta-\theta_0)})$
convolution product dual pair	$x * y(n)$ $x(n)y(n)$	$X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$ $\frac{1}{2\pi}X *_{\text{cir}} Y(e^{j\theta})$
increment product by n dual pair	$x(n) - x(n-1)$ $nx(n)$	$X(e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta})$ $jX'(e^{j\theta})$
current sum	$\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$	$\frac{X(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + \pi A_x \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)$
area		$A_s = S(e^{j0})$
energy Parseval's theorem		$E_s = P_S$

Anche in questo caso vale l'equivalente della regola di derivazione (nel continuo), ovvero la regola dell'incremento (nel discreto).

Il valore a $\theta_0 = 0$ si perde in quanto $Y(e^{j0}) = 0$. Tutti gli altri sono moltiplicati per un fattore noto. In fine, anche in questo caso, per una corretta inversione del segnale si considera m_x per $\theta = 0$

$$X(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + 2\pi \boxed{m_x}\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)$$

No need to correct for a finite value at θ=0 (mod 2π)

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Current sum}} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = x * 1_0(n)$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\theta}) &= X(e^{j\theta})\left[\frac{1}{1-e^{-j\theta}} + \pi \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)\right] \\ &= \frac{X(e^{j\theta})}{1-e^{-j\theta}} + \pi X(e^{j\theta})\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta) \\ &= \frac{X(e^{j\theta})}{1-e^{-j\theta}} + \pi \underbrace{\boxed{X(e^{j0})}}_{\text{area}}\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta) \end{aligned}$$

La somma corrente è correlata all'incremento come inverso e può essere scritta come la convoluzione con il gradino unitario a tempi discreti. Per la regola di convoluzione nel dominio DTFT si ha una moltiplicazione con il gradino.

Discrete-time Fourier transform

Es. 1. Prova la validità delle seguenti trasformate:

* $s(n) = \delta(n)$ e $S(e^{j\theta}) = 1$

  $S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\theta n} = 1$ sfruttando la proprietà rivelatrice del delta.

* $s(n) = 1$ e $S(e^{j\theta}) = 2\pi \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)$

  $s(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta) e^{j\theta n} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) e^{j\theta n} d\theta = 1$. Usiamo l'intervallo $(-\pi, \pi)$ in modo da includere solo uno dei delta ripetuti che costituiscono il comb.

* $s(n) = d\,\mathrm{sinc}(nd)$, $0<d<1$ e $S(e^{j\theta}) = \mathrm{rep}_{2\pi}\, \mathrm{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi d}\right)$

  $$s(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{rep}_{2\pi}\, \mathrm{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi d}\right) e^{j\theta n} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi d}^{\pi d} e^{j\theta n} d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi d}{2\pi} = d & , n=0 \\ \left.\frac{e^{j\theta n}}{j2\pi n}\right|_{-\pi d}^{\pi d} = \frac{e^{j\pi d n} - e^{-j\pi d n}}{j2\pi n} = \frac{\sin(\pi d n)}{\pi n} & , n \neq 0 \end{cases} \longrightarrow s(n) = d\,\mathrm{sinc}(nd)$$

Es. 2. Calcola la trasformata di Fourier a tempo discreto dei seguenti segnali:

* $s(n) = e^{j\theta_0 n}$

  Per la risoluzione sfruttiamo $x(n) = 1$ con $X(e^{j\theta}) = 2\pi \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)$.

  La trasformata può essere individuata sfruttando la proprietà di modulazione. Dato $s(n) = e^{j\theta n} = x(n) e^{j\theta_0 n}$, la trasformata risultante vale $S(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\theta_0)}) = 2\pi \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0)$

* $s(n) = \mathrm{sgn}(n)$

  Sfruttiamo la proprietà dell'incremento ed otteniamo $y(n) = s(n) - s(n-1) = \delta(n) + \delta(n-1) \rightarrow Y(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta}$

  Invertendo l'incremento otteniamo $S(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{1-e^{-j\theta}} + 2\pi m_s \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta) = \frac{1+e^{-j\theta}}{1-e^{-j\theta}}$ ($s(n) = \mathrm{sgn}(n)$ ha $m_s = 0$)

  Otteniamo $S(e^{j\theta}) = -j\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

* $s(n) = 1_0(n)$

  $y(n) = s(n) - s(n-1) = \delta(n) \rightarrow Y(e^{j\theta}) = 1$

  Invertendo l'incremento e ricordando che $m_s = \frac{1}{2}$ otteniamo $S(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{1-e^{-j\theta}} + 2\pi m_s \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta) = \frac{1}{1-e^{-j\theta}} \pi \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta)$

* $s(n) = n\alpha^n 1_0(n)$, $|\alpha|<1$. Per quali valori di α il valore assoluto di $|S(e^{j\theta})|$ è una funzione pari?

  Possiamo scrivere il segnale in forma $s(n) = n x(n)$ con $x(n) = \alpha^n 1_0(n)$ e sfruttare la proprietà del prodotto per n

Per la trasformata otteniamo $X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n 1_0(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\theta})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}}$

Quindi $S(e^{j\theta}) = j\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}}\right) = -j\frac{j\alpha e^{-j\theta}}{(1-\alpha e^{-j\theta})^2} = \frac{\alpha e^{-j\theta}}{(1-\alpha e^{-j\theta})^2}$

Per valutare la parità del valore assoluto consideriamo:

Dato $\alpha = |\alpha| e^{j\varphi_\alpha}$, l'unica possibilità per ottenere una funzione pari e che $\varphi_\alpha = 0$ o π (per ottenere $\pm\cos(\theta)$) ovvero un valore di α reale (positivo o negativo).

$$
\begin{aligned}
|S(e^{j\theta})| &= \frac{|\alpha|}{|1-\alpha e^{-j\theta}|^2} \\
&= \frac{|\alpha|}{(1-\alpha e^{-j\theta})(1-\alpha e^{-j\theta})^*} = \frac{|\alpha|}{(1-\alpha e^{-j\theta})(1-\alpha^* e^{j\theta})} \\
&= \frac{|\alpha|}{1-\alpha e^{-j\theta} - \alpha^* e^{j\theta} + |\alpha|^2} \\
&= \frac{|\alpha|}{1-|\alpha| e^{-j(\theta-\varphi_\alpha)} - |\alpha| e^{j(\theta-\varphi_\alpha)} + |\alpha|^2} \\
&= \frac{|\alpha|}{1-2|\alpha|\cos(\theta-\varphi_\alpha) + |\alpha|^2}
\end{aligned}
$$

Es.3 $s(n) = \delta(n)$ $\quad S(e^{j\theta}) = ?$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) \underbrace{e^{-j\theta n}}_{y(n)} = 1$$

Es.4 $s(n) = \delta(n-n_0)$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0) e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n_0}$$

Il δ nel dominio del tempo da un esponenziale complesso nel dominio di Fourier

Es.5 $s(n) = 1$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\theta - 2\pi k) = X(\theta)$$

antitrasformata

... verifichiamo $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overset{2\pi\delta(\theta)}{\cancel{2\pi X(\theta)}} e^{j\theta n} d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 1 \cdot 2\pi = 1$ □

aggiunto per controbilanciare l'antitrasformata

$$\boxed{s(n) = 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{comb}_{2\pi}(\theta) \cdot 2\pi}$$

Es.6 $s(n) = A\cos(\theta_0 n + \theta_a)$ (reale) $\quad S(e^{j\theta}) = ?$

$$s(n) = \frac{A}{2} e^{j\theta_a} \cdot e^{j\theta_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\theta_a} \cdot e^{-j\theta_0 n}$$

proprietà di modulazione

$$S(e^{j\theta}) = \frac{A}{\cancel{2}} e^{j\theta_a} \cancel{2}\pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta-\theta_0) + \frac{A}{\cancel{2}} e^{-j\theta_a} \cancel{2}\pi\,\mathrm{comb}_{2\pi}(\theta+\theta_0)$$

Struttura di comb simmetrica rispetto all'origine

Per θ_a molto piccolo

$$S(e^{j\theta}) = \mathrm{rep}_{2\pi}\{\pi A e^{j\theta_a}\delta(\theta-\theta_0) + \pi A e^{-j\theta_a}\delta(\theta+\theta_0)\}$$

Es.7 $s(n) = \mathrm{rect}\left(\frac{n}{2n_0+1}\right)$ questo rect ha ampiezza $2n_0+1$. Valutiamo il rect attivo con valore 1 dall'istante $-n_0$ a $+n_0$

Assicuriamo che il valore del nostro segnale è identicamente 1 nell'intervallo $[-n_0, n_0]$ e fuori vale 0. Il valore 1/2 del rect continuo si troverebbe a $n_0 + \frac{1}{2}$ (che però NON è un intero e quindi quell'istante non viene mai valutato nel discreto)

$$s(n) = \begin{cases} 1 & -n_0 \le n \le n_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-n_0}^{n_0} \overset{1}{\cancel{s(n)}} e^{-j\theta n} = \sum_{n=-n_0}^{n_0} e^{-j\theta n}$$

Possiamo riscrivere la sommatoria con $m = n + n_0$

$$\sum_{n=0}^{2n_0} e^{-j\theta(m-n_0)} = e^{j\theta n_0} \sum_{m=0}^{2n_0} e^{-j\theta m} \alpha^m \quad \text{con } \alpha = e^{-j\theta} = e^{j\theta n_0} \frac{1-e^{-j\theta(2n_0+1)}}{1-e^{-j\theta}} \cdot \frac{e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2}}$$

$e^{j\theta(n_0+1/2)}$

quindi $S(e^{j\theta}) = \dfrac{\sin(\theta(n_0+1/2))}{\sin(\theta/2)}$ sinc periodico

Es.8 $s(n) = \mathrm{sgn}(n)$ Sfruttiamo la regola dell'incremento $y(n) = s(n) - s(n+1)$ con

$$S(e^{j\theta}) \longrightarrow \underset{1-e^{-j\theta}}{\times} \xrightarrow{Y(e^{j\theta})} Y(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta}$$

Ricaviamo che $\overset{1+e^{-j\theta}}{\cancel{Y(e^{j\theta})}} = (1-e^{-j\theta})S(e^{j\theta})$ con

$S(e^{j\theta}) = \dfrac{1+e^{-j\theta}}{1-e^{-j\theta}}$ MA la regola è valida solo per $\theta \neq 2k\pi$. Nei multipli di 2π si dividerebbe per 0.

Per $\theta = 2k\pi$ $S(e^{j\theta})$ vale $A_\Delta\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta(n)\right)$. Unendo i risultati $S(e^{j\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1+e^{-j\theta}}{1-e^{-j\theta}} & \theta \neq 2k\pi \quad * \\ 0 & \theta = 2k\pi \end{cases}$

* possiamo riscrivere come:

$$\frac{1+e^{-j\theta}}{1-e^{-j\theta}} \cdot \frac{e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2}} = \frac{e^{j\theta/2}+e^{-j\theta/2}}{e^{j\theta/2}-e^{-j\theta/2}} = \frac{\cancel{2}\cos(\theta/2)}{\cancel{2}j\sin\theta/2} = -j\cot(\theta/2)$$

Segnale IMMAGINARIO e DISPARI (infatti era REALE e DISPARI nel dominio del tempo)

$$\boxed{\begin{aligned} s(n) = 1 &\xrightarrow{\mathcal{F}} S(e^{j\theta}) = 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta) \\ s(n) = \mathrm{sgn}(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} S(e^{j\theta}) = -j\cot(\theta/2) \\ s(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) e^{-j\theta n} \end{aligned}}$$

Es.9 $s(n) = 1_0(n)$ $\longrightarrow$ $\boxed{s(n) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n) \equiv s(n) = 1_0(n)}$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} \cdot -j\cot(\theta/2) + \frac{1}{2} 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta) + \frac{1}{2} \cdot 1$$

... con la regola dell'incremento $\rightarrow y(n) = s(n) \rightarrow Y(e^{j\theta}) = 1 \rightarrow S(e^{j\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-e^{-j\theta}} & \theta \neq 2k\pi \\ * & \theta = 2k\pi \end{cases}$

dato $A_s = \infty$ consideriamo $m_s = 1/2$, ovvero $*\ S(e^{j2k\pi}) = m_s \cdot 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta)$

riscriviamo il segnale come $S(e^{j\theta}) = \dfrac{1}{1-e^{-j\theta}} + \underbrace{\dfrac{1}{2} \cdot 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta)}_{\text{trasformazione di Fourier del valore medio}}$

DTF: discrete Fourier transform (periodic signals)

Il dominio di Fourier è discreto, ma anche periodico

Anche in questo contesto vengono utilizzate le proprietà valide anche per le altre trasformate

4.2. Relations among transforms (part 2)

Che cosa succede se consideriamo la DTFT di un segnale discreto periodico invece che la sua DFT?

Se esprimiamo un segnale tramite l'inversa DFT, che è una collezione di N esponenziali complessi, allora la DTFT è facilmente ottenibile da coppie di segnali conosciute e corrisponde ad una serie di segnali comb moltiplicati per $2\pi S_k$. Sostituiamo, quindi, la struttura discreta della DFT con i delta scalati del fattore 2π.

Nel dominio di Fourier, quando campioniamo un segnale, otteniamo la DTFT $Y(e^{j\theta})$, ottenuto a partire da $X(j\omega)$ scalando il dominio di pulsazione per T e ripetendo periodicamente il risultato di 2π e dividendo per T

Questo risultato è particolarmente rilevante quando scegliamo T=1

Per T=1, se conosciamo la trasformata di x, allora la DTFT di y è ottenuta tramite semplice ripetizione periodica.

Che cosa succede se ripetiamo periodicamente un segnale discreto aperiodico? In questo caso, la relazione tra la DTFT del segnale originale x(n) e la DFT della ripetizione periodica y(n) è una semplice operazione di campionamento. Ovvero, a partire da x(n) otteniamo $y(n) = \mathrm{rep}_N x(n)$ che, nel dominio di Fourier diventa un effetto di campionamento da $X(e^{j\theta})$ continuo e periodico di fase 2π a $Y_k = X(e^{jk2\pi/N})$ segnale discreto periodico a fase N.

È possibile combinare le due operazioni, utile per la rappresentazione su Matlab →

Relations among transforms (part 2)

Es. 1. Calcola la trasformata di Fourier a tempi discreti di $d\,\mathrm{sinc}(nd)$, $0 < d < 1$

Sfruttiamo la proprietà di campionamento con T=1 applicata alla coppia $x(t) = d\,\mathrm{sinc}(dt)$ e $X(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi d}\right)$

La trasformata di Fourier è ottenuta tramite semplice applicazione della proprietà di scala: $S(e^{j\theta}) = \mathrm{rep}_{2\pi} X(j\theta) = \mathrm{rep}_{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi d}\right)$ che è un'onda quadra.

4.3. Filters in the Fourier domain (part 2)

L'approccio ai filtri a tempo discreto è praticamente equivalente a quello dei filtri a tempo continuo.

Per un segnale discreto aperiodico, l'output DTFT è il prodotto tra l'input DTFT e la trasformata della risposta impulsiva.

Contrariamente a quanto accade a tempo continuo, in questo caso le trasformate sono periodiche di periodo 2π, quindi l'azione del filtro può essere studiato su un periodo, solitamente $[-\pi,\pi]$.

Quando il segnale in input è periodico, la DTFT consiste solo in impulsi, che collezionano valori differenti della trasformata h.

La serie e il parallelo seguono le stesse regole e considerazioni del tempo continuo.

Un esponenziale complesso campionato è un autofunzione di un filtro a tempo discreto. La sua DTFT è un segnale comb shiftato del valore della fase dell'esponente θ_0. L'azione del filtro è il prodotto con la costante $H(e^{j\theta_0})$

Per le sinusoidi vale la stessa regola delle sinusoidi a tempo continuo. L'output è la sinusoide originale con fase θ_0 moltiplicata per il valore assoluto $|H(e^{j\theta_0})|$ e con una fase addizionale uguale alla fase del valore complesso $H(e^{j\theta_0})$

Il risultato può essere verificato tramite la simmetria Hermitiana.

low-pass

$$H(e^{j\theta}) = \mathrm{rep}_{2\pi}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\theta}{2\theta_c}\right)$$

$$h(n) = \frac{\theta_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\theta_c}{\pi}n\right)$$

non BIBO stable

BIBO stable low-pass

$$H(e^{j\theta}) = \mathrm{rep}_{2\pi}\mathrm{rcos}\left(\frac{\theta}{2\theta_c}\right) \qquad h(n) = \frac{\theta_c}{\pi}\,\mathrm{ircos}\left(\frac{\theta_c}{\pi}n\right)$$

I filtri selettivi hanno lo stesso nome di quelli a tempo continuo.

Tuttavia, in questo caso le forme di riferimento sono relative al periodo di riferimento $[-\pi,\pi]$. Le versioni ideali non sono BIBOstabili. Serve ottener la controparte campionata basata su coseni rialzati, o simili, per la BIBOstabilità.

Filters in the Fourier domain (part 2)

Es.1. Identifica la classe di filtri a tempo discreto tali per cui $x(n) = e^{-j\frac{\pi}{6}n}$ e $y(n) = \frac{1}{8}e^{-j\frac{\pi}{6}n}$

In generale, dato che in questo caso $y(n) = H(e^{j\pi/6})\,x(n)$ è sufficiente avere $H(e^{j\pi/6}) = 1/8$

Es.2 Il segnale $x(n)=\delta(n-1)-\delta(n+1)$ è prima filtrato da un filtro passa-basso ideale con fase di cut-off $\theta_c=\frac{\pi}{2}$, poi l'output è moltiplicato per $v(n)=1-e^{j\pi n}=1-(-1)^n$ per ottenere l'output $y(n)$. Identifica $y(n)$

Analizzando il sistema nel dominio di Fourier. Per l'input, trasformando i due delta otteniamo $X(e^{j\theta})=e^{-j\theta}-e^{j\theta}=-2j\sin(\theta)$

Per assunzione il filtro è $H(e^{j\theta})=\text{rep}_{2\pi}\,\text{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$ ovvero un'onda quadra con duty-cycle $d=\frac{1}{2}$.

Quindi $Z(e^{j\theta})=X(e^{j\theta})H(e^{j\theta})=-2j\sin(\theta)\cdot\text{rep}_{2\pi}\,\text{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)=\text{rep}_{2\pi}-2j\sin(\theta)\,\text{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$.

La trasformata di Fourier $y(n)=z(n)v(n)=z(n)-z(n)e^{j\pi n}$ fornisce, tramite la regola di modulazione $Y(e^{j\theta})=Z(e^{j\theta})-Z(e^{j(\theta-\pi)})$

Quindi $Y(e^{j\theta})=-2j\sin(\theta)$ e quindi $y(n)=x(n)$

This exercise can also be solved in the time domain, which can be done graphically, by observing that $h(n)=\frac{1}{2}\,\text{sinc}(\frac{n}{2})$ and therefore $z(n)=x*h(n)=h(n-1)-h(n+1)$, while it is

$$v(n)=1-(-1)^n=\begin{cases}2 & ,\ n \text{ odd}\\ 0 & ,\ n \text{ even}\end{cases}$$

From the figure we see that $h(n)$ is zero for n even, except at $n=0$, which implies that $z(n)$ is zero for n odd, except at $n=\pm1$. Since $v(n)$ is zero for n even, the only two values that are maintained in the product $y(n)=z(n)v(n)$ are the ones at $n=\pm1$, which provides the result $y(n)=x(n)$.

Es.3. Identifica la risposta impulsiva di un filtro passa alto con cut-off $\theta_c\in(0,\pi)$

L'espressione del filtro nel dominio di Fourier è $H(e^{j\theta})=1-\text{rep}_{2\pi}\,\text{rect}\left(\frac{\theta}{2\theta_c}\right)$.

La sua trasformata inversa può essere ottenuta invertendo separatamente i due contributi.

Per il contributo costante $1\to\delta(n)$; mentre per la ripetizione periodica, la interpretiamo come una operazione di campionamento applicata alla coppia di Fourier $\frac{\theta_c}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\theta_c}{\pi}t\right)\to\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\theta_c}\right)$

Quindi $h(n)=\delta(n)-\frac{\theta_c}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{\theta_c}{\pi}n\right)$ con $d=\frac{\theta_c}{\pi}$ duty-cycle dell'onda quadra.

4.4. Wrap up on Fourier transform

frequenza continua

frequenza discreta

continuous-time	discrete-time	
$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$ $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{s(t)e^{-j\omega t}}dt$ ω t	$s(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} S(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta$ $S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boxed{s(n)e^{-j\theta n}}$ θ n variabile di questo dominio	time aperiodic
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$ $S_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} \boxed{s(t)e^{-jk\omega_0 t}}dt$ $k\omega_0$ t frequenza aperiodica	$s(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} S_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ k è il periodo $S_k = \frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \boxed{s(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$ $k\frac{2\pi}{N}$ n frequenza periodica	time periodic
Fourier series	DFT	

→ le varie strutture si assomigliano

Proprietà di MODULAZIONE

continuous-time	discrete-time	
$x(t-t_0)$ $X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$ $x(t)\boxed{e^{j\omega_0 t}}$ $X(j\omega - j\omega_0)$ ω_0 t traslazione	$x(n-n_0)$ $X(e^{j\theta})e^{-j\theta n_0}$ $x(n)\boxed{e^{j\theta_0 n}}$ $X(e^{j(\theta-\theta_0)})$ θ_0 n	time aperiodic
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ $x(t-t_1)$ $X_k e^{-jk\omega_0 t_1}$ $x(t)\boxed{e^{jm\omega_0 t}}$ X_{k-m} $m\omega_0$ t	DFT → la struttura della fase è campionata $x(n-n_1)$ $X_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_1}$ $x(n)\boxed{e^{jm\frac{2\pi}{N}n}}$ X_{k-m} $m\frac{2\pi}{N}$ n	time periodic
Fourier series	DFT	

Proprietà di CONVOLUZIONE

continuous-time	discrete-time	
$x * y(t)$ $X(j\omega)Y(j\omega)$ $x(t)y(t)$ $\frac{1}{2\pi}X * Y(j\omega)$	$x * y(n)$ $X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$ $x(n)y(n)$ $\frac{1}{2\pi}X *_{\text{cir}} Y(e^{j\theta})$	time aperiodic
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ $x *_{\text{cir}} y(t)$ $T_p X_k Y_k$ $x(t)y(t)$ $X_k * Y_k$	$x *_{\text{cir}} y(n)$ $N X_k Y_k$ $x(n)y(n)$ $X *_{\text{circ}} Y_k$	time periodic
Fourier series	DFT	

→ prodotto e convoluzione sono operazioni duali

Proprietà di DERIVAZIONE

continuous-time	discrete-time	
$x'(t)$ $j\omega \cdot X(j\omega)$ $tx(t)$ $jX'(j\omega)$	$x(n) - x(n-1)$ $X(e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta})$ $nx(n)$ $jX'(e^{j\theta})$	time aperiodic
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ $x'(t)$ $X_k \cdot jk\omega_0$	$x(n) - x(n-1)$ $X_k \cdot (1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}})$	time periodic
Fourier series	DFT	

Area ed Energia

continuous-time	discrete-time	
$s(0) = A_s$ $A_x = S(j0)$ $E_x = \frac{1}{2\pi}E_X$	$s(0) = m_s$ $A_s = S(e^{j0})$ $E_s = P_S$ dominio di Fourier	time aperiodic
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ $s(0) = A_x$ $m_x = X_0$ $P_x = E_X$ dominio del tempo	$s(0) = m_s N$ $m_x = X_0$ $P_x = E_X(N)$	time periodic
Fourier series	DFT	

Trasformata del DELTA δ

continuous-time	discrete-time	
$e^{j\omega_1 t}$ $2\pi\,\delta(\omega - \omega_1)$ $\delta(t-t_1)$ $\boxed{e^{-j\omega t_1}}$	$e^{j\theta_0 n}$ $2\pi\,\text{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0)$ $\delta(n-m)$ $\boxed{e^{-j\theta m}}$	time aperiodic
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ $e^{jm\omega_0 t}$ $\delta(k-m)$ $\text{rep}_{T_p}\delta(t-t_1)$ $\frac{1}{T_p}\boxed{e^{-jk\omega_0 t_1}}$	$e^{jm\frac{2\pi}{N}n}$ $\text{rep}_N\delta(k-m)$ $\text{rep}_N\delta(n-m)$ $\frac{1}{N}\boxed{e^{-k\frac{2\pi}{N}m}}$	time periodic
Fourier series	DFT	

Trasformata del RECT

Trasformata del SINC

Sampling

Periodic Repetition

Wrap-up on Fourier transforms

Es.1 Il segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \mathrm{rect}(t-k)$ è fornito ad un filtro passa-basso con pulsazione di cut-off $\omega_c = \frac{3}{2}\pi$. Calcola l'output $y(t)$

Il filtro ha periodo $T_p = 2$, può essere riscritto come $x(t) = 2\mathrm{rep}_2\,\mathrm{rect}(t) - 1$ → è la differenza tra un'onda quadra ed una costante.

I suoi coefficienti di Fourier sono: $X_k = 2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{k}{2}) - 1 = \mathrm{sinc}(\frac{k}{2}) - 1$ associati alle pulsazioni $k\omega_0 = k\pi$

il rect ha duty cycle = 1/2

In quanto $\omega_c = \frac{3}{2}\pi$ gli unici coefficienti mantenuti sono $k = -1, 0, 1$.

Quindi, i coefficienti dell'output sono $Y_k = \begin{cases} X_k & , k = 0, \pm 1 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{sinc}(\frac{1}{2}) = \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} & , k = \pm 1 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

Per la trasformata inversa otteniamo $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{2}{\pi}e^{j\pi t} + \frac{2}{\pi}e^{-j\pi t} = \frac{4}{\pi}\cos(\pi t)$

Es.2 Calcola la trasformata di Fourier per un segnale reale pari e periodico di periodo T_p, definito da $s(t) = t^2$ nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}T_p]$

Possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} t^2 \mathrm{rect}(\frac{t}{T_p})$ quindi $x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{T_p}) \to X(j\omega) = T_p\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi/T_p})$

A questo punto applichiamo la proprietà del prodotto per $t \rightarrow y(t) = t^2 \, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) \rightarrow Y(j\omega) = -j^2 X''(j\omega) = -\frac{T_p^3}{4\pi^2} \mathrm{sinc}''\left(\frac{\omega}{2\pi/T_p}\right)$

Per il campionamento a $k\omega_0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$ otteniamo $S_k = \frac{1}{T_p} Y(jk\omega_0) = -\frac{T_p^2}{4\pi^2} \mathrm{sinc}''(k) = \frac{T_p^2}{4\pi^2} \cdot \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & , k=0 \\ \frac{2(-1)^k}{k^2} & , k \neq 0 \end{cases}$

Es. 3. Calcola la trasformata di Fourier per $s(t) = \mathrm{sinc}(t) \cdot \mathrm{sinc}(2(t-1))$

Possiamo interpretare il segnale come un prodotto $s(t) = x(t)y(t)$ dove $x(t) = \mathrm{sinc}(t) \rightarrow X(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ e

$y(t) = \mathrm{sinc}(2(t-1)) \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) e^{-j\omega}$ ↳ sinc scalato e traslato

Applicando la regola del prodotto $\boxed{S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)}$ otteniamo $S(j\omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot \begin{cases} \int_{-2\pi}^{\omega+\pi} e^{-ju} \, du & , \omega \in (-3\pi, -\pi) \\ \int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi} e^{-ju} \, du & , \omega \in (-\pi, \pi) \\ \int_{\omega-\pi}^{2\pi} e^{-ju} \, du & , \omega \in (\pi, 3\pi) \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

Risolvendo l'integrale otteniamo: $S(j\omega) = \frac{j}{4\pi} \cdot \begin{cases} -e^{-j\omega} - 1 & , \omega \in (-3\pi, -\pi) \\ 1 + e^{-j\omega} & , \omega \in (\pi, 3\pi) \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

Shannon's sampling theorem

Idea: il campionamento è un'operazione perfettamente reversibile per segnali limitati nel dominio della pulsazione

4.5. Interpolation in the time-domain

Qual è la relazione che intercorre tra un segnale e quello campionato?

l'informazione non viene persa, a patto che non ci sia aliasing

Ma quanto devono essere vicini i campioni?

È una domanda troppo complicata a cui rispondere nel dominio del tempo.

Nel dominio di Fourier, invece, notiamo che $-\pi/T$ e π/T mappano in $-\pi$ e π, in seguito a ripetizione, si ottiene un segnale periodico (non c'è sovrapposizione)

Questo teorema ci permette di eliminare le ripetizioni periodiche mantenendo solamente l'informazione sul segnale originario $X(j\omega)$

pre-filtraggio per evitare l'aliasing

In realtà, come mostrato a lato, ogni segnale può essere filtrato con un filtro passa-basso, in modo da evitare l'aliasing.

Questo metodo di ricostruzione del segnale è detto interpolazione.

Come è possibile connettere i campionamenti $x(n)$ in modo da produrre segnali a tempo continuo che mettono in relazione i campionamenti?

Anche l'operazione di interpolazione ricorda una convoluzione

$\boxed{y(nT) = x(n)} \rightarrow h(nT) = \delta(n) \rightarrow \frac{1}{T}\text{rep}_{2\pi}H(j\theta/T) = 1$

$y(nT) = \sum_k x(k)h(nT-kT)$

$= x(n) * h(nT) = x(n) \longleftrightarrow h(nT) = \delta(n)$

l'h campionata a passo T ci permette di ottenere un $\delta(n)$ di Kronecker

Questi esempi soddisfano i criteri per un'interpolazione corretta.

Tendenzialmente una buona funzione interpolatrice sarà un sinc, o un segnale analogo

questo tipo di filtro permette di ricostruire il segnale continuo a partire dai suoi campioni (filtro di ricostruzione)

In the Fourier domain *

$$\delta(n) = h(nT) \implies 1 = \frac{1}{T}\,\mathrm{rep}_{2\pi} H(j\tfrac{\theta}{T})$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j\tfrac{\theta-2\pi k}{T})$$
$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j(\tfrac{\theta}{T}-\tfrac{2\pi}{T}k))$$
$$= \frac{1}{T}\,\mathrm{rep}_{2\pi/T} H(j\omega)\Big|_{\omega=\frac{\theta}{T}}$$

$$\boxed{\mathrm{rep}_{2\pi/T} H(j\omega) = T}$$

NON BIBOSTABILE

impulso a coseno rialzato

* lavorando con θ o ω è indifferente (scalare una costante dà la costante stessa)

4.6. Shannon's sampling theorem

interpolazione in frequenza come scala e filtraggio

Il filtro di interpolazione scala la DTFT di x per 1/T, poi moltiplica il risultato per la trasformata di Fourier della risposta impulsiva.

In questo caso la scala corrisponde a cambiare gli assi di Fourier affinché la periodicità di 2π venga mappata in una periodicità di 2π/T.

permette di eliminare la ripetizione periodica

Cosa succede se consideriamo campionamento ed interpolazione uno dopo l'altro in serie?

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\,\mathrm{rep}_{2\pi} S(j\tfrac{\theta}{T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(j(\tfrac{\theta}{T}-\tfrac{2\pi}{T}k))$$

$$Y(j\omega) = X(e^{j\omega T})H(j\omega) = \frac{1}{T}H(j\omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(j(\omega-\tfrac{2\pi}{T}k))$$

Shannon's base-band version

A continuous-time signal s(t) can be **perfectly recovered** from its samples x(n) = s(nT), with **sampling spacing T**, under the condition that its Fourier transform S(jω) has an **extension e(S) contained in the interval [-π/T, π/T]**

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT)\,\mathrm{sinc}(\tfrac{t-nT}{T})$$

Il teorema del campionamento in banda base significa un filtro per pulsazioni che stanno attorno al valore 0

Si dice "banda base" perché la rappresentazione del segnale si trova vicino all'origine, attorno a ω_0

Shannon's sampling theorem

Es.1 $s(n) = \text{sinc}(nd) \quad 0<d<1 \quad S(e^{j\theta}) = ?$

s[n] è un sinc campionato

se $x(t) = \text{sinc}(t) \rightarrow X(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

quindi $s(n) = x(nT)$ con $T = d$

Otteniamo $S(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\text{rep}_{2\pi} X\left(j\frac{\theta}{T}\right) = \frac{1}{T}\text{rep}_{2\pi}\text{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi T}\right)$

Es.2 $s(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{2n_0+1}\right) \quad S(e^{j\theta}) = ?$

$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$ con $T_0 = 2n_0+1 \rightarrow X(j\omega) = T_0\,\text{sinc}\left(\frac{\omega T_0}{2\pi}\right)$

$S(e^{j\theta}) = x(nT)$ con $T=1$ (rect campionato agli interi n)

$= \frac{1}{T}\text{rep}_{2\pi} \underbrace{X\left(j\frac{\theta}{T}\right)}_{X(j\omega)|_{\omega=\frac{\theta}{T}}} = \text{rep}_{2\pi} T_0\,\text{sinc}\left(\frac{\theta}{2\pi/T_0}\right)$

Es.3 Proporre uno schema di ricostruzione dai campioni per $s(t) = \text{sinc}^3(t)$

$s(t) \longrightarrow \boxed{\downarrow_T} \xrightarrow{x(n)=s(nT)} \boxed{T\,h(\cdot)} \xrightarrow{y(t)=s(t)}$ $\quad T = ? \quad h(t) = ?$ per $T < 1/2B$ con $h(t) = \text{sinc}(t/T)$

Dobbiamo capire quanto vale B

$s(t) = \text{sinc}(t)\cdot\text{sinc}^2(t)$

$\downarrow \mathcal{F}$

$S(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * \text{trang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

L'estensione diventa $e[S] = [-\pi-2\pi, \pi+2\pi] = [-3\pi, 3\pi]$ e quindi $B = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$, ovvero $T < \frac{1}{2\cdot 3/2} = 1/3$

Es.4 $s(t) = \text{sinc}^2(t)\,e^{j\frac{19}{2}\pi t}$

CAMP. + INTERP. con T più grande possibile

NB: cascata campionamento - interpolazione

$\longrightarrow \boxed{\text{rep}_{2\pi/T}} \longrightarrow \otimes \longrightarrow$ $\quad \frac{H(j\omega)}{T}$

posso usare filtri a coseno rialzato se $T < 1/2B$ (passo di riferimento)

più piccolo è T, più distanti sono le ripetiz. periodiche

$s(t) \longrightarrow \boxed{\downarrow_T} \xrightarrow{s(nT)} \boxed{\uparrow h} \xrightarrow{s(t)}$

$T = ? \qquad h(t) = ?$

$S(j\omega) \longrightarrow \boxed{\text{rep}_{2\pi/T}} \longrightarrow \otimes \xrightarrow{S(j\omega)}$

$H(j\omega)/T$

richiesta di perfetta ricostruzione

$2\pi B = \frac{23}{2}\pi \rightarrow B = \frac{23}{4}$ ovvero $T < \frac{1}{2B} = \frac{2}{23}$ dal Teorema del campionamento in banda base... ma non è la soluz. migliore

NON deve esserci aliasing quindi $\frac{2\pi}{T} \geq 4\pi$ ovvero $T \leq 1/2$

per $T = 1/2$ $\quad h(t) = \text{sinc}(2t)\,e^{j\frac{19}{2}\pi t}$

quindi $\frac{H(j\omega)}{T} = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{4\pi}\right)$ con $h(t) = 2T\,\mathrm{sinc}(2t)\,e^{j19/2\pi t}$

$\downarrow \mathcal{F}$

$2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\right)$

... o meglio $\rightarrow \frac{H(j\omega)}{T} = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{2\pi/T}\right)$

con $h(t) = \mathrm{sinc}(t/T)\,e^{j19/2\pi t}$ e $h(nT) = \delta(n)$

ES.5 $x(t) \rightarrow \otimes_{\cos(4\pi t)} \rightarrow \boxed{h_1} \xrightarrow{v(t)} \boxed{\downarrow_{T=\frac{1}{2}}} \rightarrow \boxed{\uparrow h_2} \xrightarrow{y(t)}$ $H_1(j\omega) = 2 - 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ e $H_2(j\omega) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$

$X(j\omega) = \left[1 - \mathrm{trang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$ con $Z(j\omega) = \frac{1}{2}X(j(\omega - 14\pi)) + \frac{1}{2}X(j(\omega + 14\pi))$

Nel dominio della pulsazione $H_1(j\omega)$ è rappresentabile come:

In seguito, con il campionamento:

$\rightarrow y(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$

In generale, i sistemi si studiano meglio nel dominio del tempo o della pulsazione

LAPLACE TRANSFORMS

The Laplace transform

5.1. The Laplace transform

Interpolazione per un segnale causale:

Alcuni segnali in Fourier divergono. La trasformata di Laplace permette di smorzare tali segnali e renderli quindi analizzabili.

La regione di convergenza è fondamentale per definire la trasformata:

Le ROC sono regioni verticali delimitate dalla presenza di poli (non contengono poli). Sono dette regioni analitiche

A volte l'asse immaginario può essere incluso nella ROC (= caso in cui esiste anche la trasformata di Fourier), altre volte può non essere incluso (= la trasformata di Laplace riesce a gestire segnali che altrimenti non sarebbero gestibili con Fourier).

* Per un dato σ, moltiplico il segnale $x(t)$ per $e^{-\sigma t}$ e applico l'integrale di Fourier → si ottiene un effetto smorzamento

I poli sono punti in cui l'espressione analitica della trasformata diverge (stanno al limitare o al di fuori della ROC)

Proprietà della trasformata (bilatera di Laplace)

	time domain	Laplace domain
linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$
time-reversal	$x(-t)$	$X(-s)$
conjugation	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$
scale	$x(t/a)$	$aX(as)$
time-shift	$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$
modulation dual pair	$x(t)\,e^{s_0 t}$	$X(s-s_0)$
convolution	$x * y(t)$	$X(s)Y(s)$
derivation	$x'(t)$	$sX(s)$
product by t dual pair	$tx(t)$	$-X'(s)$
integration	$x * 1(t)$	$\frac{X(s)}{s}$

→ tendenzialmente le ROC si intersecano MA non è sempre detto, va verificato

→ $\Gamma_y = -\Gamma_x$

$\Gamma_y = \Gamma_x^* = \Gamma_x$

$\Gamma_y = \Gamma_x / a$

→ la traslazione nel tempo si gestisce allo stesso modo che con Fourier (l'azione di traslazione non cambia la regione di convergenza, a meno che non ci sia la somma tra due contributi

→ derivando la trasformata di Laplace si ottiene la trasformata di Laplace di -T volte il segnale x(t) La ROC coincide con quella da cui siamo partiti

integrale nel tempo

Derivando nel dominio del tempo sfruttiamo l'antitrasformata di Laplace: $y(t) = x'(t) \rightarrow Y(s) = sX(s)$

$\Gamma_y > \Gamma_x$ → questa operazione può cambiare la reazione di convergenza

Useful pairs	time domain	Laplace domain	ROC
constant	1	does not exist!	
unit step	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re[s] > 0$
ramp	$\frac{t^k}{k!}1(t)$	$\frac{1}{s^{k+1}}$	
delta	$\delta(t)$	1	
delta derivatives	$\delta^{(k)}(t)$	s^k	any s
exponential	$e^{j\omega_1 t}$	does not exist!	
one-sided exp	$e^{p_1 t}\,1(t)$	$\frac{1}{s-p_1}$	$\Re[s] > \Re[p_1]$
exponential ramp	$\frac{t^k}{k!}e^{p_1 t}\,1(t)$	$\frac{1}{(s-p_1)^{k+1}}$	
sinusoids	$\cos(\omega_0 1)\,1(t)$ $\sin(\omega_0 1)\,1(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re[s] > 0$

Quando i segnali di interesse sono causali o, più in generale, quando siamo interessati solamente alla parte causale di un segnale, allora la trasformata di Laplace è mappata in una trasformata unilaterale di Laplace che limita l'integrale da 0 a infinito. In modo da catturare i δ in 0, l'integrale è in realtà attivo da 0⁻

5.2 The unilateral Laplace transform

(causal part)
t > 0_ only

$$x_+(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} X_+(s)\,e^{st}\,ds$$

signal reconstruction

projection onto an orthogonal basis

$$X_+(s) = \int_{0-}^{\infty} x_+(t)\,e^{-st}\,dt$$

complex valued
$s = \sigma + j\omega$
analytic in the ROC

time domain
continuous-time and aperiodic

Laplace domain
continuous and complex s

(sempre a destra)
rightmost ROC

the Fourier transform exists in the imaginary axis

$X(j\omega)$

an alternative (and equivalent) signal representation

	time domain	Laplace domain
linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$
conjugation	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$
scale	$x(t/a)$	$aX(as)$
modulation	$x(t)\,e^{s_0 t}$	$X(s-s_0)$
convolution	$x * y(t)$	$X(s)Y(s)$
derivation	$x'(t)$	$s\,X(s) - x(0_-)$
product by t	$tx(t)$	$-X'(s)$
integration	$x * 1(t)$	$\frac{X(s)}{s}$

Tutti i segnali nel dominio del tempo sono causali

Trasformate di Laplace razionali

Improper version (m≥n)

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

→ polinomio in s di grado m fratto un polinomio in s di grado n

Il trucco è mappare il caso impropno (= quando il grado del numeratore è maggiore o uguale al denominatore) in una versione propria (funzione razionale propria).

→ dividendo numeratore per denominatore si ottiene un quoziente (ed un resto). Il nuovo polinomio ha al più esponente n-1

→ nel dominio del tempo sappiamo che i termini del quoziente sono legati alla presenza di un delta.

Proper counterpart (m≥n)

$$H(s) = q(s) + \frac{r(s)}{a(s)}$$

quotient — reminder

$$= q_0 + q_1 s + \ldots + q_{m-n} s^{m-n} + \frac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2 + \ldots + r_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

delta impulses in the time-domain

?

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n}$$

m<n

$$= K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

zeros

distinct poles

partial fraction

$$= \frac{R_1}{(s - p_1)} + \frac{R_2}{(s - p_2)} + \ldots + \frac{R_n}{(s - p_n)}$$

residue

$$R_i = \lim_{s \to p_i} H(s)(s - p_i)$$

The general case

$$H(s) = K \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)^{\mu_j}}$$

m<n — distinct poles — pole multiplicity

$$= \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{R_{i,j}}{(s - p_j)^i}$$

partial fractions

pole index — multiplicity index

caso di poli multipli

residues

$$R_{\mu_j - k, j} = \frac{1}{k!} \lim_{s \to p_j} \frac{d^k [H(s)(s - p_j)^{\mu_j}]}{ds^k}$$

$$R_{\mu_j, j} = \lim_{s \to p_j} H(s)(s - p_j)^{\mu_j}$$

highest degree case

Per identificare l'antitrasformata di una funzione razionale di questo tipo (m<n), il modo più corretto è quello di identificare all'interno del polinomio gli zeri del denominatore (poli) e del numeratore (zeri)

Come otteniamo una forma di espressione trattabile con la trasformata di Laplace?

Con poli semplici (distinti), H(s) si può considerare come combinazione lineare di residui $\frac{R_i}{(s-p_i)}$

Antitrasformata causale

$$H(s) = \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{R_{i,j}}{(s - p_j)^i}$$

Inversion by known transforms

causal signal

$$h(t) = \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} R_{i,j} \frac{t^{i-1} e^{p_j t} 1(t)}{(i-1)!}$$

Se abbiamo un'espressione di una trasformata di Laplace che è data da una funzione razionale propria (con grado del polinomio al numeratore strettamente minore di quello al denominatore) sappiamo calcolare il segnale nel dominio del tempo associato a tale trasformata.

→ indirettamente cerchiamo la corrispondenza con un segnale causale

Laplace transform

Es.1 $x(t) = e^{s_0 t} 1(t)$ $\quad s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

$= e^{\sigma_0 t} e^{j\omega_0 t} 1(t) = e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) 1(t) + j e^{\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t) 1(t)$

0 se $Re[-(s+s_0)] < 0$

$$X(s) = \int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\infty} e^{s_0 t} \cancel{1(t)} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{e^{-(s-s_0)\infty}}{-(s-s_0)} - \frac{1}{-(s-s_0)} = \begin{cases} \frac{1}{-(s-s_0)}, & Re[s_0] < Re[s] \\ \text{non converge, altrimenti} \end{cases}$$

Es.2 $x(t) = -e^{s_0 t} 1(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{0} -e^{s_0 t} \cancel{1(-t)} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{-e^{-(s-s_0)t}}{-(s-s_0)} \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1 - e^{(s-s_0)\infty}}{s-s_0} = \begin{cases} \frac{1}{s-s_0} & Re(s-s_0) < 0 \\ \text{diverge,} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi:

$X(s) = \frac{1}{s-s_0}$

$\Gamma_x = \{s \mid Re[s] < Re[s_0]\}$

Due segnali posso avere la stessa espressione analitica della trasformata, ma avere ROC diversa

Es.3 $x(t) = e^{s_1(t)} 1(t) + e^{s_2(t)} 1(-t)$

$\downarrow L \qquad \downarrow L$

$X(s) = \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}$

$Re(s) > Re(s_1) \qquad Re(s) < Re(s_2)$

La regione di convergenza complessiva diventa:

$\Gamma_x = \{s \mid Re(s_1) < Re(s) < Re(s_2)\}$

appare quasi sempre, siamo maggiormente interessati a segnali causali

Es.4 $x(t) = \cos(\omega_0 t) 1(t)$

$$= \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} 1(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} 1(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} 1(t) = X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{s+j\omega_0 + s-j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad Re(s) > 0$$

$\pm j\omega_0$

$e^{s_0 t} 1(t) \rightarrow \frac{1}{s-s_0} \quad Re(s) > Re(s_0)$

La ROC diventa $\rightarrow$

poli $\pm j\omega_0$ (entrambi causali)

Es.5 $x(t) = 1(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s} \quad Re(s) > 0$ ovvero $e^{s_0 t} 1(t)$ per $s_0 = 0$ quindi $\frac{1}{s-s_0} = \frac{1}{s}$

Es.6 $x(t) = rect(t) = 1(t+1/2) - 1(t-1/2)$

Sfruttando la regola di traslazione $\left(y(t-t_0) \xrightarrow{L} Y(s) e^{-st_0} \quad \Gamma_y\right)$:

$X(s) = \frac{1}{s} e^{1/2 s} - \frac{1}{s} e^{-1/2 s} = \frac{e^{s/2} - e^{-s/2}}{s} = \sinh$

sfrutto la trasformata del gradino e la combina con la proprietà di traslazione tramite esponenziale complesso

In alternativa, $X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} rect(t)\, e^{-st}\,dt = \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{+s/2}-e^{-s/2}}{-s}$ (stesso risultato di sopra)

Possiamo concludere che $\Gamma_x = \mathbb{C}$, ovvero in questa espressione lo zero non è più un polo

Per segnali limitati nel tempo la convergenza della trasformata di Laplace c'è su tutto il piano complesso $\mathbb{C}$

Es. 7 $x(t)=t^k e^{s_0 t}1(t)$ $X(s)$? Γ_x=?

$$\boxed{t^k y(t) \xrightarrow{L} (-1)^k Y^k(s)}$$

Ricordando che $ty(t) \xrightarrow{L} -Y'(s)$, Γ_y

$Y(s)=\frac{1}{s-s_0}$ $\Gamma_y=\{s \mid Re(s)>Re(s_0)\}$

$X(s)=(-1)^k Y^{(k)}s$, $\Gamma_x=\Gamma_y$ con $Y(s)$

derivata k-esima

$=(-1)^k\frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}(-1)^k=\frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}(-1)^{2k}=\frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}$

$Y'(s)=\frac{-1}{(s-s_0)^2}$

$Y''(s)=\frac{2}{(s-s_0)^3}$

$Y'''(s)=\frac{-2\cdot 3}{(s-s_0)^4}$

$Y^{IV}(s)=\frac{-2\cdot 3(-4)}{(s-s_0)^5}$ ...

$\rightarrow$ $\boxed{Y^{(k)}(s)=\frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}\cdot(-1)^k}$

quindi $\boxed{t^k e^{s_0 t}1(t) \xrightarrow{L} \frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}}}$ $Re(s)>Re(s_0)]$

polo in s_0

$$\boxed{\frac{t^k e^{s_0 t}1(t)}{k!} \xrightarrow{L} \frac{1}{(s-s_0)^{k+1}}}$$

Es. 8 $x(t)=\frac{\partial^k \delta(t)}{\partial t}=\delta^{(k)}t$ → derivata k-esima del δ

$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta^{(1)}(t)} \longrightarrow -x'(t)$ e $x(t) \longrightarrow \boxed{\delta^{(2)}(t)} \longrightarrow x''(t)$

↳ filtro derivatore (a meno del segno meno)

↳ derivata seconda

$X(s)$=? Γ_x=?

$y'(t) \xrightarrow{L} sY(s)$

$y''(t) \xrightarrow{L} s\cdot sY(s)=s^2Y(s)$

$\boxed{y^{(k)}(t) \xrightarrow{L} s^k Y(s)}$ $\longrightarrow$ $y(t)=\delta(t)$ quindi $Y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1$ $\Gamma_y=\mathbb{C}$

per tutti i valori complessi, moltiplicati per zero daranno zero (proprietà rivelatrice del delta)

Es. 9 $H(s)=\frac{s-3}{s+2}$. $h(t)$ che corrisponde ad un segnale causale?

La regione di convergenza alla quale siamo interessati è quella di $\Gamma_h=\{s \mid Re(s)>-2\}$ → utilizziamo il metodo dei residui

Dividiamo $\frac{s-3 : s+2 = 1}{/-5}$ (quoziente: 1; resto: -5) $\longrightarrow$ $H(s)=1+\frac{-5}{s+2}$

antitrasformiamo singolarmente i due contributi

Data $H(s)$ trovata sopra $h(t)=\delta(t)-5e^{-2t}1(t)$

Es. 10 $H(s)=\frac{1}{s^3+s^2-6s}$. $h(t)$ causale?

Cerchiamo di esprimere il denominatore come prodotto tra monomi per identificare i poli

$H(s)=\frac{1}{s(s^2+s-6)}=\frac{1}{s(s+3)(s-2)}$

polo 1 $=-3$ polo 2 $=2$

$H(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s-2} + \frac{R_2}{s+3}$ → sono tutti poli semplici!

$R_0 = H(s)s\big|_{s=0} = \frac{1}{(s-2)(s+3)}\Big|_{s=0} = -\frac{1}{6}$

$R_1 = H(s)\cdot(s-2) = \frac{1}{s(s+3)}\Big|_{s=2} = \frac{1}{10}$ → $H(s) = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s-2} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{s+3}$

$R_2 = H(s)\cdot(s+3) = \frac{1}{s(s-2)}\Big|_{s=-3} = \frac{1}{15}$

antitrasformate

A questo punto $h(t) = -\frac{1}{6}1(t) + \frac{1}{10}e^{2t}1(t) + \frac{1}{15}e^{-3t}1(t)$

Es.11 $H(s) = \frac{4s-1}{2s^3-2s^2}$. h(t) causale?

$= \frac{2s-1/2}{s^3-s^2} = \frac{2s-1/2}{s^2(s-1)}$ funzione propria

$H(s) = \frac{R_0}{s-1} + \overbrace{\frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s^2}}^{*}$

$R_0 = H(s)(s-1)\big|_{s=1} = \frac{2s-1/2}{s^2}\Big|_{s=1} = \frac{3}{2}$

$R_2 = H(s)s^2\big|_{s=0} = \frac{2s-1/2}{s-1}\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$

R_1 ha un calcolo più complicato → è necessario derivare $R_1 = \frac{\partial[H(s)s^2]}{\partial s}\Big|_{s=0} = \frac{2}{s-1} + \frac{(2s-1/2)}{(s-1)^2}\Big|_{s=0}$

importante ricordarsi l'applicazione delle derivate

quindi $R_1 = -2-\frac{(-1/2)}{1} = -\frac{3}{2}$

$H(s) = \frac{3/2}{s-1} - \frac{3/2}{s} + \frac{1/2}{s^2}$ → $h(t) = \frac{3}{2}\cdot e^{t}1(t) - \frac{3}{2}1(t) + \frac{1}{2}t\cdot 1(t)$

Derivations of order k

First derivative $sX(s) - x(0^-)$

Second derivative

$$s\Big(sX(s) - x(0^-)\Big) - x'(0^-)$$

Third derivative

$$s^3X(s) - s^2x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$$

kth derivative

$$\boxed{s^k\,X(s) - \sum_{\ell=0}^{k-1} x^{(\ell)}(0^-)\,s^{k-1-\ell}}$$

Solving differential equations

5.3 Differential equations

A linear (constant) model

differential equation

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) + \ldots + a^n y^{(n)}(t)$$
$$= b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) + \ldots + b^m x^{(m)}(t)$$

input signal (known) $x(t), t > 0^-$ in generale $n \neq m$

initial conditions (known)

$$y(0^-), y'(0^-), \ldots, y^{(n-1)}(0^-)$$

Per semplicità possiamo dire di conoscere l'uscita del segnale y in 0.

Inoltre conosciamo l'andamento x(t) a partire dall'istante 0^-

Uno degli esempi più semplici è rappresentato dal filtro RC in elettrotecnica

differential equation

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$
$$y'(t) = \frac{i(t)}{C}$$

derivata prima del voltaggio

$$\boxed{y(t) + RC\,y'(t) = x(t)}$$

l'equazione identifica interdipendenza tra voltaggio di entrata e di uscita nel filtro RC

Un altro esempio... applicato alla fisica

differential equation

$$F(t) = x(t) - ky(t)$$

forza imposta dalla molla

$$F(t) = m\,y''(t)$$

derivata seconda della posizione

$$\boxed{m\,y''(t) + ky(t) = x(t)}$$

Nella trasformata di Laplace unilaterale...

$$\sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t)$$

unilateral Laplace transform

non serve ricordare la formula a memoria, sono suff. le regole semplici sulle prime derivate

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}_{b_m(s)} X(s) - \boxed{\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{\ell=0}^{k-1} x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}}_{x_{m-1}(s)}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}_{a_n(s)} Y(s) - \boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{i-1} a_i y^{(j)}(0^-) s^{i-1-j}}_{y_{n-1}(s)}$$

contributi che appaiono con la regola di derivazione

$$Y(s) = \boxed{\frac{b_m(s)}{a_n(s)}} X(s) + \boxed{\frac{y_{n-1}(s) - x_{m-1}(s)}{a_n(s)}}$$

forced response $Y_f(s)$ — transfer function H(s) — natural response $Y_n(s)$ (initial conditions only)

espressione razionale in s

espressione razionale che nel dominio del tempo equivale ad un h(t) causale

inverse unilateral Laplace

→ la risposta $y_f(t)$ è forzata perché dipende dall'evoluzione dell'ingresso

$y_n(t)$ dipende dalle condizioni iniziali

Le equazioni differenziali identificano dei sistemi lineari tempo-invarianti

1. **Filter h(t) BIBO stable**
   - **m≤n**, otherwise delta derivatives
   - **Re[pi]<0**, otherwise h(t) not absolutely integrable
2. **Natural response $y_n(t)$ limited**
   - m≤n, otherwise deltas appear
   - Re[pi]<0, guarantees a limit

h(t) è assolutamente integrabile? Se m>n, dato $H(s) = \frac{b_m(s)}{a_n(s)}$.

Se otteniamo un coefficiente in s, appare un δ' nel dominio del tempo MA il filtro derivatore non è bibostabile.

Quindi è necessario che m≤n. Inoltre, la parte reale del polo deve essere <0, altrimenti, ad esempio, nel caso $\frac{t^k}{k!} e^{p_i t} \cdot 1(t)$ con $Re[p_i > 0]$ divergerebbe ad infinito.

At steady state t≫0

Se il sistema é BIBOstabile, per $t \gg 0$ l'andamento decade esponenzialmente.

Sia $h(t)$ che y_n vanno a zero → il sistema si comporta come un semplice filtro

y_n é detta evoluzione libera

Maggiore é t più infinitamente piccoli sono i valori di h sull'asse negativo (e quindi smorza un eventuale segnale attivo anche a tempi negativi

Nella controparte discreta...

Or discrete differential equations

$k \geq 0$

differential equation

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n)$$
$$= b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \ldots + b_m x(k-m)$$

input signal (known) $x(k)\ ,\ k \geq -m$

initial conditions (known)

$$y(-n), \ldots, y(-2), y(-1)$$

Le condizioni iniziali sono i valori dell'ingresso e dell'uscita nel passato: é sufficiente conoscere l'entrata x e l'uscita y dall'istante -m

Possiamo estrarre y(k) in funzione di tutto il resto

Se io conosco l'istante iniziale e il valore di x nel tempo, numericamente posso valutare quanto vale y(k) nel tempo.

Differential equations with Laplace unilateral transform

Es. 1 Filtro RC $y(t) + RCy'(t) = x(t)$ con $x(t) = A$, $y(0^-) = V_0$ $y(t) = ?\ t>0$

Come prima cosa mappiamo in Laplace i vari contributi

$y(t) + RC\, y_+'(t) = x_+(t)$

$\downarrow L \qquad \downarrow L \qquad \downarrow L \qquad \rightarrow Y(s)(1+RCs) - RCV_0 = X(s)$

$Y(s) + RC(sY(s) - y(0^-)) = X(s)$ ovvero $Y(s) = \dfrac{X(s)}{(1+RCs)} + \dfrac{RCV_0}{(1+RCs)}$

condizione iniziale

risposta forzata

evoluzione libera

Riscriviamo ed otteniamo $Y(s) = H(s)X(s) + \dfrac{V_0}{s+1/RC}$ con $H(s) = \dfrac{1}{1+RCs} = \dfrac{1/RC}{s+1/RC} \xrightarrow{L^{-1}} h(t) = \dfrac{1}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} 1(t)$

$\xrightarrow{L^{-1}} y_n(t) = V_0 e^{-t/RC} 1(t)$

$P_1 = -\frac{1}{RC}$

$Re[P_1] < 0$

Valutiamo la risposta forzata:

$$Y_F(s) = H(s)X(s) = \frac{1/RC}{s+1/RC} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A/RC}{s(s+1/RC)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+1/RC} \longrightarrow R_1 = Y_F(s)(s+1/RC)\Big|_{s=-1/RC} = \frac{A/RC}{s}\Big|_{s=-1/RC} = -A$$

$x_F(t) = A \cdot 1(t)$ $\xrightarrow{L}$

$$R_0 = Y_F(s)\cdot s\Big|_{s=0} = \frac{A/RC}{s+1/RC}\Big|_{s=0} = A$$

$$= \frac{A}{s} - \frac{A}{s+1/RC} \xrightarrow{L^{-1}} A\cdot 1(t) - Ae^{-t/RC}1(t) = y_F(t)$$

$$y_+(t) = y_F(t) + y_n(t) = A\cdot 1(t) - Ae^{-t/RC}1(t) + V_0 e^{-t/RC}1(t) = A\cdot 1(t) + (V_0 - A)e^{-t/RC}1(t)$$

con il tempo, ai capi del condensatore ottengo il voltaggio A (vale sia per $V_0 > A$ che per $V_0 < A$)

A regime $y(t) = A$

$$x(t) = A \longrightarrow \boxed{h(\cdot)}^{\,t\gg 0} \longrightarrow y(t) = H(j0)\cdot A$$

Es.2 $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$

1) $H(s)$?

2) BIBOstabile?

3) Risposta forzata con $x(t) = 1(t)$?

4) $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$ e condizioni iniziali nulle $\rightarrow$ trovare ω_0 che garantisca un comportamento a regime $y(t) = \frac{1}{5}x(t-t_0)$ per $t \gg 0$

$$H(s) = \frac{1}{1+sRC}\Big|_{s=0} = 1$$

a regime ci aspettiamo che il valore corrisponda con quello della tensione in ingresso

1) $H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ ovvero dipende dai polinomi che contengono le costanti dell'equazione differenziale

Da $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$ $\rightarrow$ non è necessario (per questo punto) considerare le condizioni iniziali

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2-s-6}$$

2) Per capire se è BIBOstabile troviamo le radici del polinomio al denominatore. $R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$ $\rightarrow$ in questo caso uno non ha parte reale < 0 quindi APPARENTEMENTE NON è BIBOstabile...

Ma... se riscriviamo $H(s) = \frac{s-\cancel{3}}{(\cancel{s-3})(s+2)} = \frac{1}{s+2}$ notiamo che $H(s)$ è BIBOSTABILE

$H(s) = \frac{1}{s+2}$ BIBOstabile con equazione differenziale equivalente $x(t) = y'(t) + 2y(t)$

3) La risposta forzata corrisponde al caso in cui le condizioni iniziali sono nulle

$$Y_F(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s+2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+2} \longrightarrow y_F(t) = \frac{1}{2}1(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}1(t)$$

con $R_0 = Y_F(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$

$R_1 = Y_F(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$

4) A regime, quando $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$, tutto si comporta come un filtro

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$ l'uscita del filtro catturà la trasformata di Laplace (in $j\omega_0$)

$H(s) = \frac{1}{s+2}$

$h(t) = e^{-2t}\mathbb{1}(t)$

REALE

$A|H(j\omega_0)|\cos[\omega_0 t + \theta_0 + \angle H(j\omega_0)]$

$= \frac{1}{s} \times (t - t_0)$

$\longrightarrow$ ovvero $|H(j\omega_0)| = \frac{1}{5} = \left|\frac{1}{2+j\omega_0}\right|$

altrimenti $|2+j\omega_0| = 5 \rightarrow 4+\omega_0^2 = 25$

$\omega_0^2 = 21$

$\omega_0 = \pm\sqrt{21}$

con questa pulsazione otteniamo un coseno con la stessa frequenza di quello di entrata, ma moltiplicato per 1/5

A regime, a patto che il sistema sia BIBOstabile, è possibile applicare quanto visto per Fourier

Es.9 $x(t) = ky(t) + my''(t)$

$x(t) = F_0\cos(\omega_0 t)$ con condizioni iniziali $y(0_-) = y_0$ e $y'(0_-) = v_0$. Quanto vale $y(t) = ?$ $t \geq 0$

costruiamo una "mappa" nel dominio di Laplace (in questo caso teniamo conto delle condizioni iniziali)

$x(t) = ky(t) + my''(t)$

$\downarrow L \quad \downarrow L \quad \downarrow L$

$Y(s) = kY(s) + m(s^2Y(s) - s\cancel{y(0_-)}^{y_0} - \cancel{y'(0_-)}^{v_0})$

$\downarrow$

$Y(s)(k+ms^2) - m(sy_0 + v_0) = X(s)$

$\downarrow$

$Y(s) = \frac{X(s)}{(k+ms^2)} + \frac{m(sy_0+v_0)}{(k+ms^2)}$

ottenuto

$Y(s) = \underbrace{\frac{1/m}{s^2+k/m}}_{H(s)} \cdot X(s) + \frac{v_0 + sy_0}{s^2+k/m}$

$h(t) = \frac{1/m}{\sqrt{k/m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\mathbb{1}(t)$

$= \frac{1}{\sqrt{km}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\mathbb{1}(t) \rightarrow$ NON è BIBOstabile

$\cos(\omega_0 t)\mathbb{1}(t) \xrightarrow{L} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

$\sin(\omega_0 t)\mathbb{1}(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

$Y(s) = \underbrace{\frac{1/m}{s^2+k/m} \cdot X(s)}_{Y_F(s)\text{ risposta forzata}} + \underbrace{\frac{v_0 + sy_0}{s^2+k/m}}_{Y_L(s)\text{ evoluzione libera}}$

$X(s) = \frac{F_0 s}{s^2+\omega_0^2}$

$Y_L(s) = v_0\frac{1}{s^2+k/m} + y_0\frac{s}{s^2+k/m}$ trasformata di un coseno

$= \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} \cdot \frac{\sqrt{k/m}}{s^2+k/m} + y_0\frac{s}{s^2+km} = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\mathbb{1}(t) + y_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\mathbb{1}(t)$

la combinazione lineare di seno e coseno è una sinusoide

$Y_F(s) = \frac{F/m \cdot s}{(s^2+k/m)(s^2+\omega_0^2)}$ con $\omega_0^2 \neq \frac{k}{m}$ poli $\pm j\omega_0 \pm j\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\rightarrow Z(s^2) = \frac{1}{(s^2+k/m)(s^2+\omega_0^2)} = \frac{R_0}{s^2+\omega_0^2} + \frac{R_1}{s^2+k/m}$ residuo

$R_0 = Z(s^2)(s^2+\omega_0^2)\Big|_{s^2=-\omega_0^2} = \frac{1}{s^2+k/m}\Big|_{s^2=\omega_0^2} = \frac{1}{\frac{k}{m}-\omega_0^2}$

valutata nel polo

$R_1 = Z(s^2)(s^2+k/m)\Big|_{s^2=-\frac{k}{m}} = \frac{1}{s^2+\omega_0^2}\Big|_{s^2=-\frac{k}{m}} = \frac{1}{-\frac{k}{m}+\omega_0^2} = -R_0$

A questo punto esprimiamo $Y_F(s) = F_0/m \cdot s \cdot R_0\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{s^2+k/m}\right) = \frac{F_0}{k-\omega_0^2 m}\left(\frac{s}{s^2+\omega_0^2} - \frac{s}{s^2+k/m}\right)$

$y_F(t) = \frac{F_0}{k-\omega_0^2 m}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos\left(\sqrt{k/m}\,t\right)\right)\mathbb{1}(t)$

5.4. The unilateral Z Transform

(causal part)
n ≥ 0 only

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_r X(z)z^{n-1}dz$$

signal reconstruction

projection onto an orthogonal basis

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

complex valued
$z = re^{j\theta}$
analytic in the ROC

time domain
discrete-time and aperiodic

Z domain
continuous and complex z

an alternative (and equivalent) signal representation

Generalizzazione per segnali discreti aperiodici e per rappresentare la parte causale di un segnale.

La forma della regione di convergenza ROC è limitata da una circonferenza (si esclude un cerchio di raggio r, centrato nell'origine)

È delimitata dal polo che ha valore assoluto maggiore (come per Laplace)

Useful pairs

	time domain	Z domain	ROC
unit step	$1_0(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
ramp	$\frac{1}{k!}(n+k)\dots(n+2)(n+1)\,1_0(n)$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^{k+1}}$	
delta	$\delta(n)$	1	
shifted delta	$\delta(n-n_0)$	z^{-n_0}	$\lvert z\rvert > 0$
one-sided exp	$p_0^{n+1}\,1_0(n)$	$\frac{1}{p_0^{-1}-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert p_0\rvert$
exponential ramp	$\frac{1}{k!}(n+k)\dots(n+2)(n+1)\,p_0^{n+k+1}\,1_0(n)$	$\frac{1}{(p_0^{-1}-z^{-1})^{k+1}}$	

	time domain	Z domain
linearity	$\alpha x(n)+\beta y(n)$	$\alpha X(z)+\beta Y(z)$
modulation	$p_0^n x(n)$	$X(z/p_0)$
convolution	$x * y(n)$	$X(z)Y(z)$
product by n	$nx(n)$	$-zX'(z)$
time-shift	$x(n-n_0)$	$X(z)z^{-n_0} + \sum_{m=-n_0}^{-1} x(m)z^{-(m+n_0)}$

Tutti i segnali nel dominio del tempo sono causali

$$\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell\, x(k-\ell) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, y(k-i)$$

unilateral Z transform

$$\underbrace{\sum_{\ell=0}^{m} b_\ell z^{-\ell}}_{b_m(z)} X(z) + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=-\ell}^{-1} b_\ell x(j) z^{-(j+\ell)}}_{x_{m-1}(z)}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i z^{-i}}_{a_n(z)} Y(z) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=-i}^{-1} a_i y(k) z^{-(k+i)}}_{y_{n-1}(z)}$$

Equazione del sistema alle differenze nel discreto

Tramite la trasformata Z è possibile capire la struttura del sistema (si ottiene una struttura parallela a quella di Laplace)

Of a difference equation

fractional functions in z^{-1}

$$Y(z) = \frac{b_m(z)}{a_n(z)} X(z) + \frac{y_{n-1}(z) - x_{m-1}(z)}{a_n(z)}$$

forced response $Y_f(z)$

transfer function H(z)

natural response $Y_n(z)$ (initial conditions only)

inverse unilateral Z transform

(composizione di delta ed espressioni)

BIBO stability conditions

Of a difference system

1. **Filter h(k) BIBO stable**
   - **$|p_i|<1$**, otherwise h(k) not absolutely integrable → è necessario considerare la posizione dei poli
2. **Natural response $y_n(k)$ limited**
   - $|p_i|<1$, guarantees a limit

here deltas are not a problem

The unilateral z transform

Es.2) Trovare $X(z)$ per $x(n) = p_0^n 1_0(n)$ $p_0 \in \mathbb{C}$

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{p_0^n 1_0(n) \cdot z^{-n}}_{(p_0 \cdot z^{-1})^n} = \frac{1}{1-p_0 z^{-1}}$$ equivale alla serie geometrica

$\rightarrow$ converge per $|p_0 z^{-1}| < 1$ ovvero $|p_0| < |z|$

Es.2) $X(z)$ per $x(n) = \cos(\theta_0 n) 1_0(n)$

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\theta_0 n) 1_0(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j\theta_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\theta_0 n} = \frac{1}{2}(e^{j\theta_0})^n + \frac{1}{2}(e^{-j\theta_0})^n$$

$$x(n) = \frac{1}{2}\underbrace{(e^{j\theta_0})^n 1_0(n)}_{\downarrow z} + \frac{1}{2}\underbrace{(e^{-j\theta_0})^n 1_0(n)}_{\downarrow z}$$

$$X_+(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\theta_0} z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\theta_0} z^{-1}}$$ converge per $|z| > |e^{\pm j\theta_0}| = 1$

$$= \frac{1-e^{-j\theta_0} z^{-1} + 1 - e^{j\theta_0} e^{-z}}{2(1-e^{j\theta_0} z^{-1})(1-e^{-j\theta_0} z^{-1})} = \frac{1 - z^{-1}\frac{e^{j\theta_0}+e^{-j\theta_0}}{2}}{1 - z^{-1}(e^{j\theta_0}+e^{-j\theta_0}) + \cancel{\frac{e^{j\theta_0}e^{-j\theta_0}}{2}} - 2} = \frac{1-\cos\theta_0 z^{-1}}{1-2\cos\theta_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

Es.3) $X(z)$ per $x(n) = -p_0^{n+1} 1_0(n)$

$$x(n) = -p_0 \cdot p_0^n 1_0(n) \xrightarrow{z} X_+(z) = -p_0 \cdot \frac{1}{1-p_0 z^{-1}} \quad |z| > |p_0| \quad = \frac{1}{z^{-1} - \frac{1}{p_0}}$$

Attenzione! es. $\frac{1}{z^{-1}-3}$ ha un polo in $p_0 = \frac{1}{3}$

$\downarrow z^{-1}$

$-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} 1_0(n)$

Es.4) Trovare $x(z)$ per $x(n) = (n+1) p_0^{n+2} 1_0(n)$

$$x(n) = p_0 (n \cdot p_0^{n+1} 1_0(n) + p_0^{n+1} 1_0(n))$$

$z \downarrow$ $\quad \downarrow z \quad \downarrow z$

$$X_+(z) = p_0 \left(\frac{-z \underbrace{Y'(z)}_{\frac{-1 \cdot -1 \cdot -z^{-2}}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2}}}{} + \underbrace{\frac{-1}{z^{-1}-p_0^{-1}}}_{Y(z)} \right) = p_0 \left(\frac{z^{-1}}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2} + \frac{z^{-1}+p_0^{-1}}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2} \right)$$

$$= \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} (n+1) p_0^{n+2} 1_0(n) &\xrightarrow{z} \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2} \\ -p_0^{n+1} 1_0(n) &\xrightarrow{z} \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})} \\ -\frac{(n+1)(n+2)}{2} p_0^{n+3} 1_0(n) &\xrightarrow{z} \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})^3} \end{aligned}}$$

Es.5) $x(n) = y(n-2) + y(n-1) - 6y(n)$

$x(n) = A$ $\qquad$ 1) $h(n) = ?$ BIBO stabile?

$y(-1) = k_1$, $y(-2) = k_2$ $\qquad$ 2) $y(n) = ?$ $n \geq 0$

1) Possiamo non considerare le condizioni iniziali. $h(n)$ dipende solo dai coefficienti delle equazioni alle differenze

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1}{z^{-2} + z^{-1} - 6 z^{0}} \rightarrow$$ serve identificare i poli per poter invertire la formula

$$z^{-1}_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \rightarrow H(z) = \frac{1}{(z^{-1}-2)(z^{-1}+3)} = \frac{R_0}{z^{-1}-2} + \frac{R_1}{z^{-1}+3}$$

Non sono i poli, ma i punti in cui il polinomio si annulla in z^{-1}

i poli sono l'inverso di queste quantità

$$R_0 = \frac{1}{z^{-1}+3}\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{5}$$

$$R_1 = \frac{1}{z^{-1}-2}\Big|_{z^{-1}=-3} = -\frac{1}{5}$$

È necessario ricordare anche che $\boxed{\frac{1}{z^{-1}-p_0^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} -p_0^{n+1} 1_0(n)}$

i poli sono all'interno della circonferenza di raggio unitario, quindi il sistema è BIBO stabile

$$h(n) = \frac{1}{5}\cdot -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1_0(n) - \frac{1}{5}\cdot -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} 1_0(n)$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1_0(n) + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} 1_0(n)$$

2) $x(n) = y(n-2) + y(n-1) - 6y(n)$

$\downarrow z \quad \downarrow z \quad \downarrow z \quad \downarrow z$

teniamo conto anche delle condizioni iniziali!

$$X(z) = z^{-2}Y(z) + z^{-1}Y(z) - 6Y(z) + z^{-2}\cancel{y(-1)}_{k_1} + y(-1)\cancel{z^{-1}}_{k_2} + y(-2)\cancel{z^{-2}}_{k_2}$$

quindi $Y(z)(z^{-2}+z^{-1}-6) = \dfrac{X(z) - z^{-1}k_1 + k_1 + k_2}{z^{-2}+z^{-1}-6}$

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{(z^{-1}-2)(z^{-1}+3)} X(z)}_{Y_F(z)} - \underbrace{\frac{z^{-1}k_1 + k_1 + k_2}{(z^{-1}-2)(z^{-1}+3)}}_{Y_E(z)}$$

stiamo prendendo la trasformata di $x_+(n) = A\cdot 1_0(n)$ (dato $x(n) = A$) $\rightarrow X(z) = \dfrac{-A}{z^{-1}-1}$

$$R_0 = \frac{-A}{(z^{-1}+3)(z^{-1}-1)}\Bigg|_{z^{-1}=2} = -\frac{A}{5}$$

$$R_1 = \frac{-A}{(z^{-1}-2)(z^{-1}-1)}\Bigg|_{z^{-1}=-3} = -\frac{A}{20}$$

$$R_2 = \frac{-A}{(z^{-1}-2)(z^{-1}+3)}\Bigg|_{z^{-1}=1} = \frac{A}{4}$$

$$Y_F(z) = \frac{-A}{(z^{-1}-2)(z^{-1}+3)(z^{-1}-1)} = \frac{R_0}{z^{-1}-2} + \frac{R_1}{z^{-1}+3} + \frac{R_2}{z^{-n}-1}$$
$$= -\frac{A}{5}\cdot -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1_0(n) - \frac{A}{20} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} 1_0(n) + \frac{A}{4} - (1)^{n+1} 1_0(n)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (n+1)\,p_0^{n+2}\,1_0(n) \longrightarrow \dfrac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2} \\ -p_0^{n+1}\,1_0(n) \longrightarrow \dfrac{1}{z^{-1}-p_0^{-1}} \end{array}}$$

ES. 6) $h(n) = (1+2n)(-1)^n 1_0(n) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 1_0(n)$

$x(n) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 1_0(n)$ e condizioni iniziali nulle

1) BIBO stabile? $\rightarrow$ è sufficiente osservare la formula per capire che NON è BIBO stabile

2) Equazione alle differenze $\rightarrow$ serve $H(z)$

3) Evoluzione libera e risposta forzata

2) $h(n) = \overbrace{2(n+1)-1}^{1+2n}(-1)^n 1_0(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1_0(n)$

$= 2(n+1)(-1)^{n+2} 1_0(n) + (-1)^{n+2} 1_0(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} 1_0(n)$

$$H(z) = \frac{2}{(z^{-1}+1)^2} - \frac{1}{z^{-1}+1} + \frac{1}{z^{-1}+2} = \frac{2(z^{-1}+2) - (z^{-1}+1)(z^{-1}+2) + (z^{-1}+1)^2}{(z^{-1}+1)^2(z^{-1}+2)} = \frac{z^{-1}+3}{(z^{-1}+1)^2(z^{-1}+2)}$$

I poli sono $p_0 = -1$ e $p_1 = -\frac{1}{2}$

NON è BIBO stabile!

$(z^{-2}+2z^{-1}+1)(z^{-1}+2)$

$= z^{-3} + \boxed{4}z^{-2} + z^{-1} + 2z^{-2} + \underline{5}z^{-1} + 2$

equazione alle differenze

$x(n-1) + 3x(n) = y(n-3) + \boxed{4}y(n-2) + \underline{5}y(n-1) + 2y(n)$

3) L'evoluzione libera è nulla perché non ci sono condizioni iniziali.

La risposta forzata, invece, dipende dall'ingresso e da H

$$x(n) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \Delta_0(n) = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\Delta_0(n) \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{z^{-1}+3} \to -\frac{1}{p_0}$$

$$Y_F(z) = H(z)X(z) = \frac{\cancel{z^{-1}+3}}{(z^{-1}+1)^2(z^{-1}+2)} \cdot \frac{1}{\cancel{z^{-1}+3}} = \frac{R_0}{(z^{-1}+1)^2} + \frac{R_1}{(z^{-1}+1)} + \frac{R_2}{z^{-1}+2}$$

$$R_0 = \frac{1}{z^{-1}+2}\Big|_{z^{-1}=-1} = 1$$

$$R_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x+2}\right)\Big|_{x=-1} = \frac{-1}{(x+2)^2}\Big|_{x=-1} = -1$$

stiamo derivando in z^{-1}

NOTA:

$$H(z) = \frac{1}{z^{-1}+1}$$

$$h(n) = (-1)^n \Delta_0(n)$$

INSTABILE!

→ Trovare $x(n)$ limitato che dà $y_F(n)$ NON limitata

$$x(z) = \frac{1}{z^{-1}-p_0^{-1}}$$

$$Y_F(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(z^{-1}+1)(z^{-1}-p_0^{-1})} = \frac{R_0}{z^{-1}+1} + \frac{R_1}{z^{-1}-p_0^{-1}}$$

$$Y_F(n) = \alpha(-1)^n\Delta_0(n) + \beta(p_0)^n\Delta_0(n)$$

$|p_0| \leq 1$ affinché sia limitato

CASO $p_0 \neq -1$

CASO $p_0 = -1$

$$Y_F(z) = \frac{1}{(z^{-1}+1)^2} \xrightarrow{Z_0^{-1}} (n+1)(-1)^{n+2}\Delta_0(n) \text{ NON limitata } \square$$

Se un sistema ha dei poli che stanno al limite tra la bibostabilità e la bibo instabilità, nel caso della trasformata Z sul cerchio di raggio unitario, nel caso della trasformata di Laplace sull'asse immaginario; per creare un'uscita che sia illimitata, a partire da un ingresso limitato, basta scegliere un ingresso che sia attivo in uno dei poli non stabili.