COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
25 Giugno 2015

Esercizio 1. [9.5 punti] Dato il sistema a tempo-continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(1+s^2)(s+10)}{(s-0.1)^2(s^2-8s+100)},$$

se ne traccino i diagrammi di Bode e Nyquist. Si studi, inoltre, la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ utilizzando il Criterio di Nyquist, e si individui il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. [10 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(s-2)},$$

è richiesto di

- tracciare luogo positivo e negativo, individuandone punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario;
- determinare per quali valori di K la funzione di trasferimento $W(s)$ è BIBO stabile;
- per ogni valore di K per cui $W(s)$ ha un polo multiplo, si determini la posizione di tutti i poli di $W(s)$.

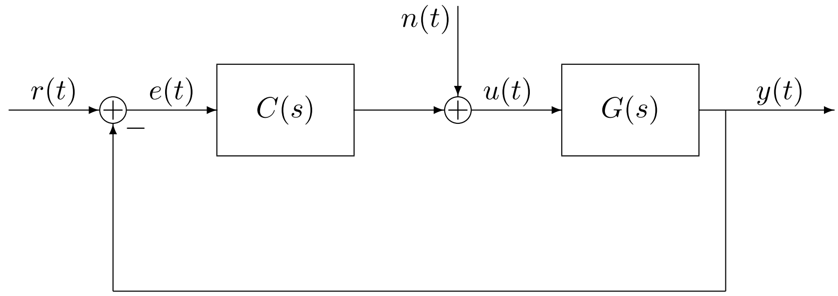
Esercizio 3. [6 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{(1+100s)^2}{(1+1000s)(1+s)^2}$$

è richiesto il progetto di due controllori stabilizzanti, $C_1(s)$ e $C_2(s) \in \mathbb{R}(s)$, in modo tale che

- $C_1(s)$ sia proprio e garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con $e_{rp}^{(0)} \simeq 0.01$ al gradino, mentre il sistema in catena aperta abbia $\omega_a \simeq 100$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$;
- $C_2(s)$ sia un PID (eventualmente un P, PI o PD) e garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1, con $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.01$ alla rampa lineare, mentre il sistema in catena aperta abbia $\omega_a \simeq 100\sqrt{10}$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5 punti] Si consideri il seguente schema a blocchi

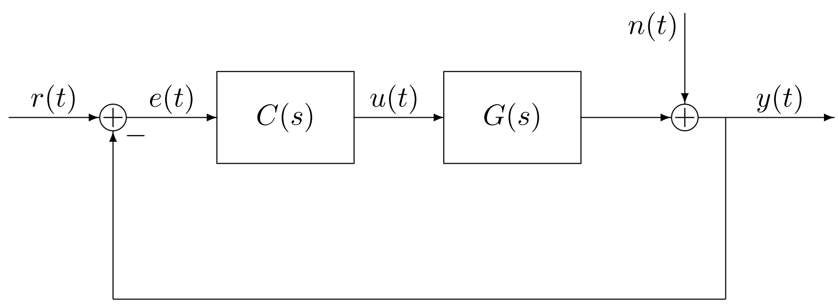


in cui $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ è una funzione razionale propria e $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ è un controllore stabilizzante, ovvero tale che la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}$$

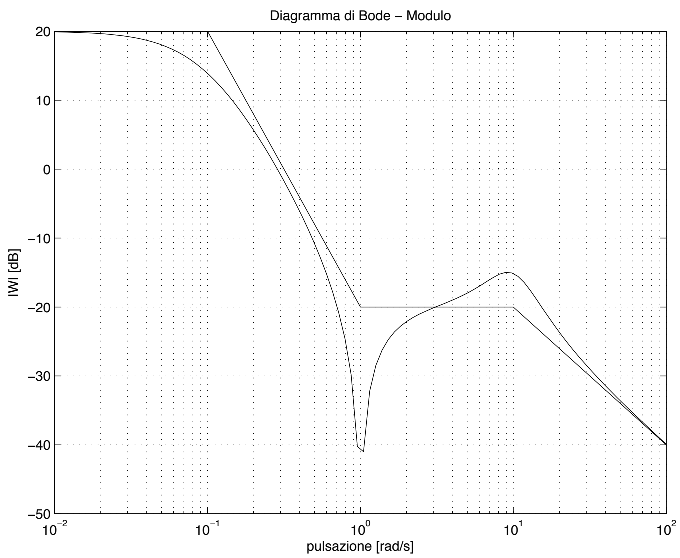
sia BIBO stabile.

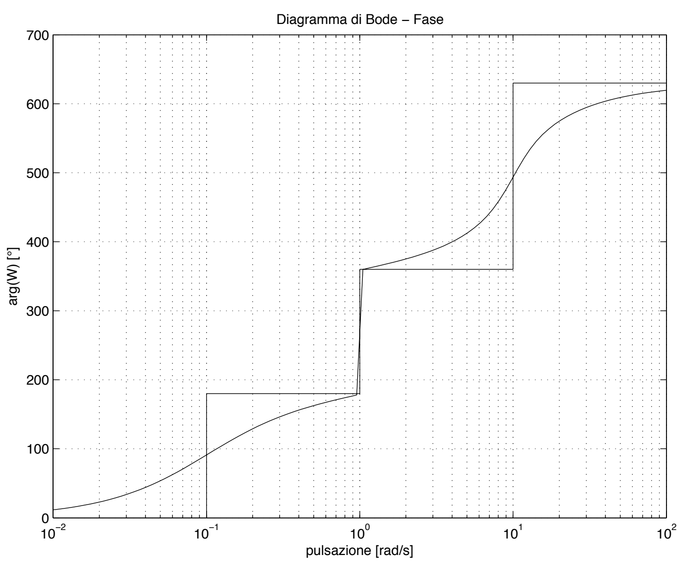
- Assumendo che il segnale di disturbo $n(t)$ sia un segnale a gradino, ovvero $n(t) = n_0\delta_{-1}(t)$, si determini sotto quali condizioni è possibile la reiezione a regime del disturbo in uscita (con ciò intendendo che la componente dell'uscita dovuta al solo disturbo tenda zero per $t \to +\infty$).
- Come cambierebbe la risposta alla precedente domanda nel caso in cui il segnale di disturbo invece di agire additivamente sull'ingresso del processo $G(s)$ agisse additivamente sull'uscita $y(t)$, come illustrato qui di seguito?



SOLUZIONI

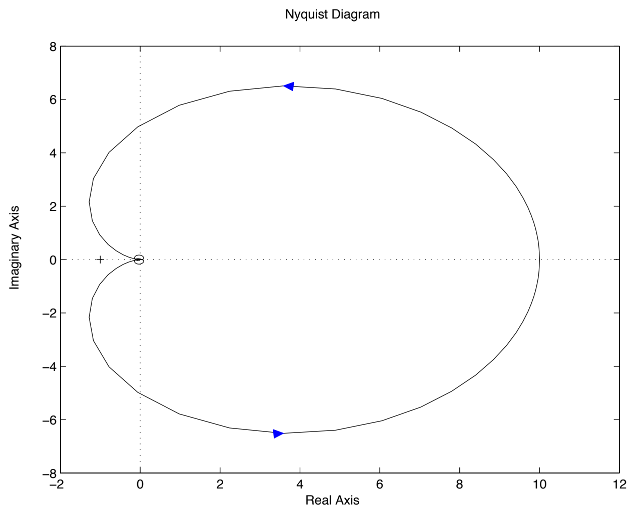
Esercizio 1. Diagrammi di Bode:

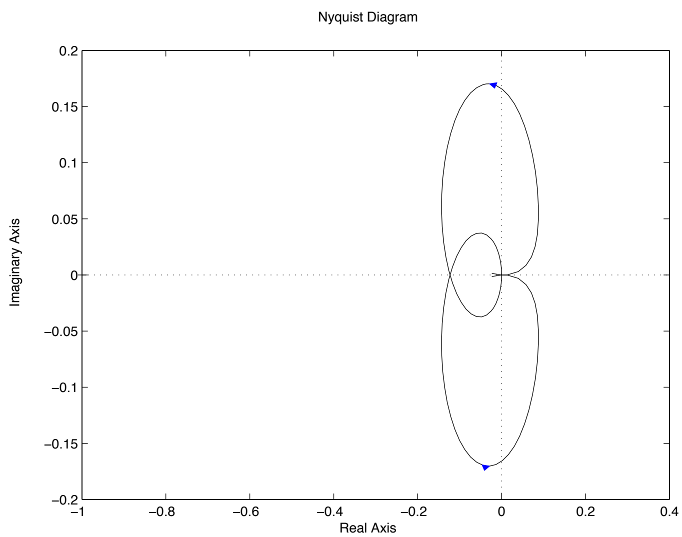




Il diagramma dei moduli esibisce un picco di antirisonanza infinito (anche se il diagramma in questione lo mostra finito!). Esso scende da 20 dB a $-\infty$ (in corrispondenza di $\omega = 1$ rad/s), poi risale e, raggiunto un massimo, ridiscende verso $-\infty$ (diagramma asintotico rettilineo di pendenza -20 dB/decade, visto il posizionamento di poli e zeri non nulli sullo stesso punto di spezzamento). Invece la fase fase parte da $0°$, sale fino a $180°$ in $\omega = 1$ rad/s, dove una discontinuità la porta a $360°$, per poi risalire verso $630°$ (ovvero $-90°$).

Diagramma di Nyquist e suo particolare:





Essendo $N = 0$ e $n_{G_+} = 4$, non si ha stabilità ($n_{W_+} = 4$).

Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi fattorizza facilmente come

$$s(s+1)(s-1)(s+4) = 0$$

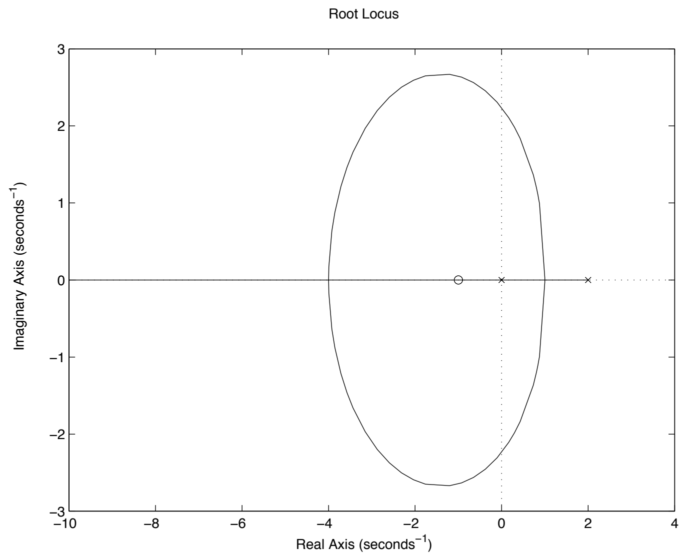
da cui i punti doppi *banali* $s = 0$ (per $K = 0$) e $s = -1$ (per $K = \infty$) ed i punti doppi non banali $s = 1$ (per $K = \frac{1}{4}$) e $s = -4$ (per $K = \frac{32}{3}$), entrambi appartenenti al luogo positivo. Cercando le intersezioni con l'asse immaginario si perviene a

$$j\omega(2K - \omega^2) + [2\omega^2 + K(1-\omega^2)] = 0.$$

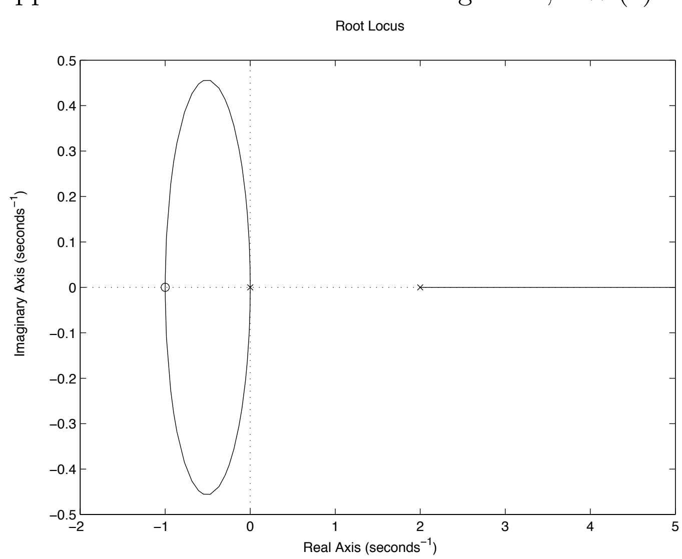
La parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ oppure $\omega^2 = 2K$, che sostituite nella parte reale porgono le soluzioni $\omega = 0$ ($K = 0$) e $\omega = \pm\sqrt{5}$ $\left(K = \frac{5}{2} > 0\right)$.

Il luogo positivo ha 2 rami che, partendo dai poli $s = 0$ e $s = 2$ e muovendosi sull'asse reale, si incontrano nel punto doppio $s = 1$, poi escono dall'asse reale, attraversano l'asse immaginario in $s = \pm j\sqrt{5}$ per $K = \frac{5}{2}$, quindi entrano nel punto doppio $s = -4$, dopodiché

1 ramo va verso $-\infty$ e l'altro verso lo zero $s = -1$, muovendosi sull'asse reale. Infine, un terzo ramo esce dal polo doppio $s = 0$ e va verso lo zero doppio $s = -1$, muovendosi entrambi sull'asse reale. Si ha quindi stabilità BIBO per $K > \frac{5}{2}$.



Nel luogo negativo solo il ramo che dal polo $s = 2$ va verso $+\infty$ giace sull'asse reale, mentre gli altri 2 rami sono complessi e vanno dal polo doppio verso lo zero doppio, senza mai entrare nell'asse reale né attraversare l'asse immaginario perché nel luogo negativo non ci sono né punti doppi né intersezioni con l'asse immaginario, e $W(s)$ è sempre instabile.

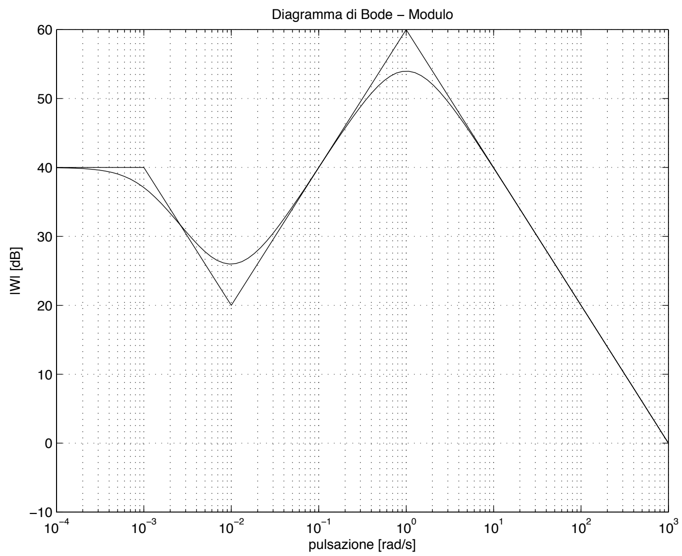


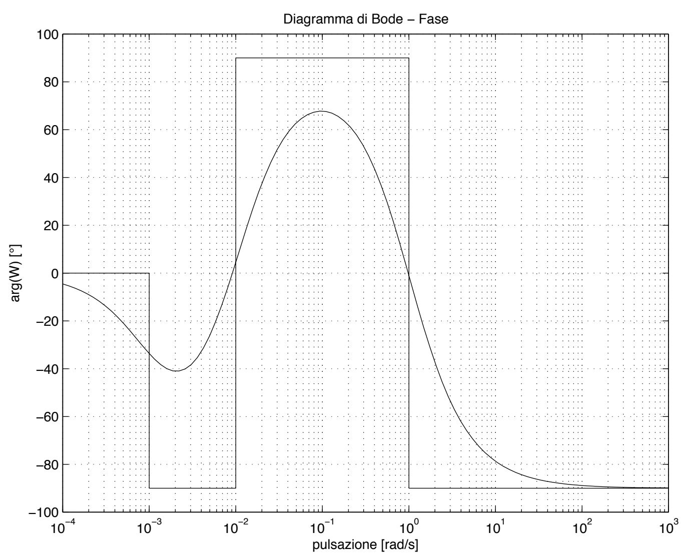
Quindi $K > \frac{5}{2}$ rappresenta tutti e soli i valori di K che rendono $W(s)$ BIBO stabile. Infine, per $K = \frac{1}{4}$ e $K = \frac{32}{3}$ si ha

$$\begin{array}{rcl} s^2(s-2) + \frac{1}{4}(s+1)^2 & = & (s-1)^2\left(s+\frac{1}{4}\right) \\ s^2(s-2) + \frac{32}{3}(s+1)^2 & = & (s+4)^2\left(s+\frac{2}{3}\right) \end{array}$$

avendo sfruttato la divisibilità dei due polinomi rispettivamente per $(s-1)^2$ e per $(s+4)^2$, da cui i poli $1, 1, -\frac{1}{4}$ per $K = \frac{1}{4}$ e $-4, -4, -\frac{2}{3}$ per $K = \frac{32}{3}$.

Esercizio 3. Nel primo caso occorre utilizzare $C_1'(s) = 10$ per soddisfare i requisiti a regime. Dal diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s) = 10G(s)$



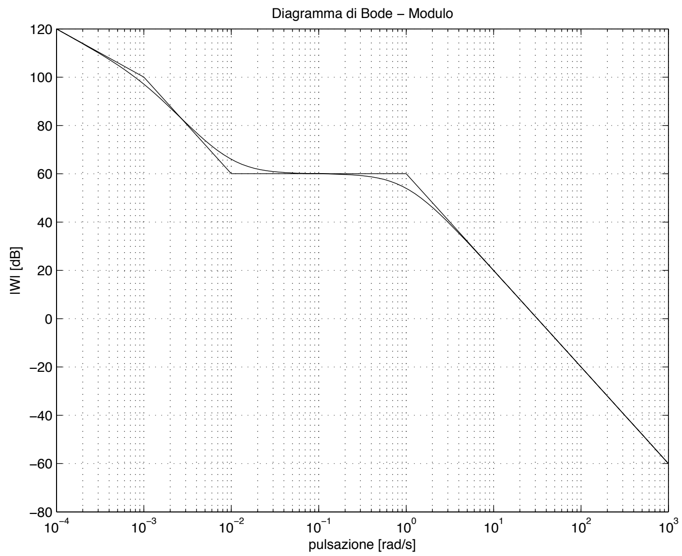


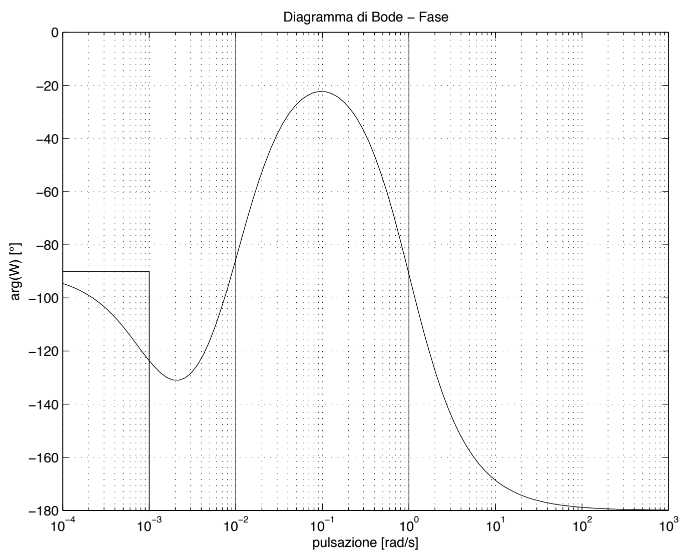
si vede che esso taglia l'asse a 0 dB in $\omega = 1000$ rad/s, per cui è necessario abbassare il modulo di 20 dB per tagliare una decade prima, e non è necessario manipolare il margine di fase (già a posto in $\omega = 100$ rad/s). Una rete ritardatrice con coppia polo-zero piazzata prima di $\omega = 100$ rad/s e con distanza polo-zero di una decade risolve il problema, da cui, ad esempio

$$C_1(s) = 10\frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + s}$$

che soddisfa a tutte le specifiche (compresa la stabilizzazione per il Criterio di Bode).

Nel secondo caso occorre utilizzare $C_2'(s) = \frac{10}{s}$ per soddisfare i requisiti a regime. Dal diagramma di Bode di $C_2'(s)G(s) = \frac{10}{s}G(s)$





si vede che esso taglia l'asse a 0 dB in $\omega = 10\sqrt{10}$ rad/s (con pendenza -40 dB/decade), per cui è necessario alzare il modulo di 40 dB per spostare la pulsazione di attraversamento di una decade a destra, ed è anche necessario aumentare di 90° il margine di fase. Uno zero piazzato 2 decadi prima di $100\sqrt{10}$ risolve il problema, per cui è necessario un PI della forma

$$C_2(s) = 10\frac{1+\frac{s}{\sqrt{10}}}{s} = \frac{10}{s} + \sqrt{10}$$

che soddisfa a tutte le specifiche (compresa la stabilizzazione per il Criterio di Bode).

Teoria. Si veda il Libro di Testo (II Edizione), pag. 278-279.