

4.4 Criteri di stabilità

Le condizioni (4.2.10) e (4.2.11) o la (4.3.3) non richiedono di determinare la posizione esatta degli zeri p_i di $A(s)$ ma solo se questi appartengano tutti al semipiano sinistro del piano complesso.

Per calcolare i valori dei p_i in funzione dei coefficienti a_i del primo membro della (4.2.8) e cioè le radici dell'equazione algebrica:

$$A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = 0, \quad (4.4.1)$$

si dispone delle ben note espressioni analitiche molto semplici per $n = 1$ e $n = 2$, di espressioni analitiche più laboriose per $n = 3$ e $n = 4$, mentre per $n > 4$ nel caso generale si può ricorrere solo a procedimenti numerici (spesso preferiti alle espressioni analitiche anche quando $n = 3$ e $n = 4$).

Determinare le radici della (4.4.1), sia pure per valori abbastanza elevati di n , non pone ovviamente problemi anche nel caso di impiego di calcolatori di modesta potenzialità. Cionnondimeno, se si è interessati solo alla verifica delle condizioni citate (o alla determinazione dei numeri di radici con parte reale negativa, con parte reale nulla e con parte reale positiva di un polinomio), esistono metodi esatti che permettono di conseguire questo risultato con un numero finito (e piccolo) di operazioni aritmetiche sui coefficienti a_i . Da tali procedimenti si ottengono immediatamente condizioni necessarie e sufficienti di stabilità chiamate abitualmente "criteri di stabilità".

Prima di presentare questi criteri, si premette la seguente condizione solo necessaria, ma di verifica immediata, affinché il polinomio $A(s)$ sia hurwitziano (e cioè abbia solo zeri con parte reale negativa).

Proposizione 4.4.1 *Se il polinomio $A(s)$ è hurwitziano, allora tutti i suoi coefficienti a_i sono strettamente dello stesso segno.*

Dimostrazione. Il polinomio hurwitziano $A(s)$ può essere espresso come prodotto di a_n per fattori binomi $s + z_i$ ($z_i > 0$) corrispondenti a zeri reali e negativi $p_i = -z_i$ e fattori trinomi $(s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2) = (s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2)$ corrispondenti a coppie di zeri coniugati con parte reale α_i negativa, per le quali $\omega_i := \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$ e $\zeta_i := -\frac{\alpha_i}{\omega_i}$ sono quantità positive. Eseguendo i prodotti, risulta quindi evidente che tutti i coefficienti di $A(s)$ hanno lo stesso segno di a_n . ■

La condizione citata non è però sufficiente; ad esempio il polinomio:

$$s^3 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s + 1 = (s+1) \left(s^2 - \frac{1}{2}s + 1 \right) \quad (4.4.2)$$

ha tutti i coefficienti positivi, anche se ha due zeri nei punti $\frac{1}{4} \pm j\sqrt{\frac{15}{4}}$ che hanno parte reale positiva.

Simmetricamente, la presenza in $A(s)$ di un coefficiente a_i nullo o di segno diverso da quello di almeno uno degli altri coefficienti è condizione *sufficiente* (ma non necessaria) affinché $A(s)$ non sia hurwitziano.

Nelle sezioni successive si illustrano i criteri di hurwitzianità noti come criteri di Michajlov, di Routh e di Hurwitz.

Il primo, dovuto a A. V. Michajlov, è di natura grafica ed è basato sulla determinazione dell'angolo descritto da un vettore applicato nell'origine del piano, il cui vertice segue una curva del piano stesso. Gli altri due (proposti indipendentemente da Edward John Routh (1831-1907) nel 1877 e da Adolf Hurwitz (1857-1918) nel 1895) sono di tipo algebrico e si basano sulla valutazione dei segni di valori numerici ottenuti con semplici calcoli aritmetici a partire dai coefficienti a_i di $A(s)$.

4.4.1 Il Criterio di Michajlov

Dato il polinomio $A(s)$ nella forma $\sum_{i=0}^n a_i s^i$, si consideri la funzione complessa $A(j\omega)$ della variabile reale ω . Questa può essere rappresentata con una curva parametrata in ω sul piano complesso le cui coordinate sono $R(\omega) = \operatorname{Re}[A(j\omega)]$ e $I(\omega) = \operatorname{Im}[A(j\omega)]$ (dove $\operatorname{Im}[A(j\omega)]$ indica il coefficiente della parte immaginaria di $A(j\omega)$).

Il criterio si può enunciare come segue:

Proposizione 4.4.2 *Il polinomio $A(s)$ è hurwitziano se e solo se il diagramma di $A(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ non passa per l'origine e la variazione dell'argomento di $A(j\omega)$ quando ω varia da 0 a $+\infty$ è pari a $n\pi/2$ radianti in senso antiorario.*

Dimostrazione. Si consideri la forma fattorizzata:

$$A(j\omega) = a_n \prod_{i=1}^n (j\omega - p_i) \quad (4.4.3)$$

del polinomio $A(j\omega)$ di grado n , non necessariamente hurwitziano. Con riferimento a tale espressione, i fattori $(j\omega - p_i)$ possono essere interpretati

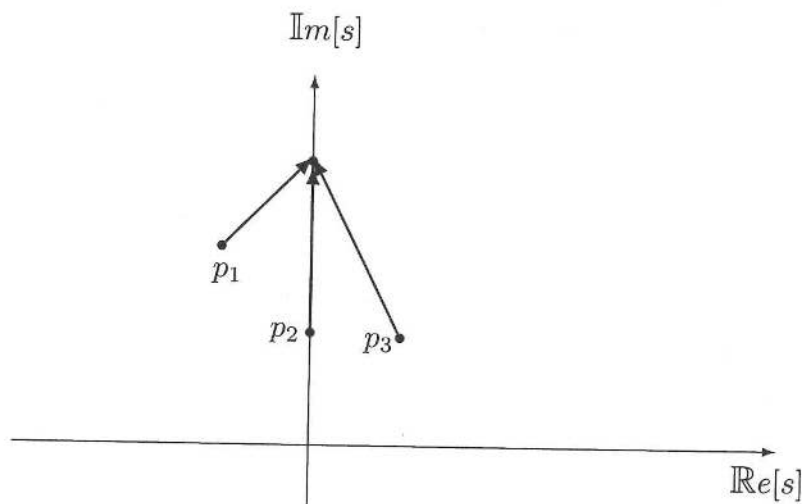


Figura 4.1: Interpretazione geometrica dei fattori $j\omega - p_i$.

geometricamente come vettori congiungenti ciascun punto p_i corrispondente ad uno zero di $A(s)$ al punto $j\omega$ dell'asse immaginario (cfr. Figura 4.1 dove sono indicati tre punti p_i , uno nel semipiano sinistro, uno sull'asse immaginario ed uno nel semipiano destro; è ovvio che, nel caso considerato di a_i reali, ad ogni p_i complesso corrisponde il suo coniugato). Per semplicità di esposizione ci si riferisce al caso di p_i semplici, l'estensione al caso di p_i multipli essendo immediata.

Il vettore congiungente un p_i del semipiano sinistro ad un punto dell'asse immaginario, quando tale punto percorre l'asse stesso da $-j\infty$ a $+j\infty$, descrive un angolo di π radianti in senso antiorario (che qui si assume come positivo); inoltre la sua ampiezza non si annulla mai.

Analogamente, il vettore che congiunge un p_i del semipiano destro al punto corrente lungo l'asse immaginario descrive un angolo di $-\pi$ radianti e la sua ampiezza non si annulla.

Infine, il vettore congiungente un p_i sull'asse immaginario al punto corrente lungo l'asse stesso ha fase che rimane costantemente uguale a $-\pi/2$ fino a che il punto corrente è al di sotto di p_i e commuta a $+\pi/2$ in corrispondenza dell'attraversamento di p_i , dove la sua ampiezza si annulla.

Se, nel caso di un p_i immaginario, si attribuisce alla brusca variazione di fase da $-\pi/2$ a $+\pi/2$ il valore di $-\pi$, che si otterrebbe seguendo il percorso uncinato illustrato in Figura 4.2(a) con il quale il p_i immaginario si trova, rispetto al percorso uncinato, dalla stessa parte dei p_i del semipiano destro, corrispondentemente si ha la deformazione indicata in Figura

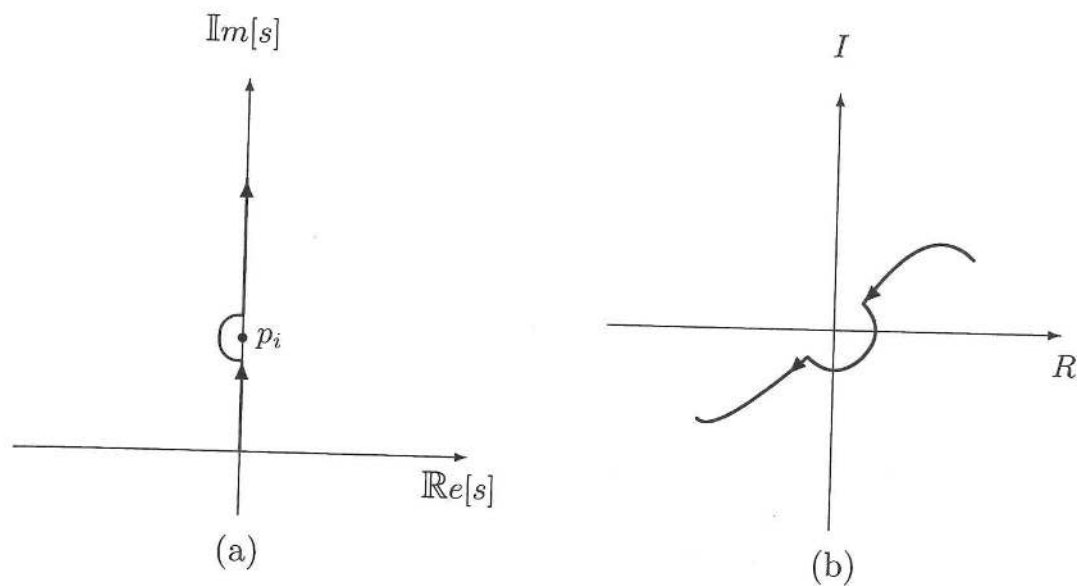


Figura 4.2: Percorsi uncinati: (a) percorso sul piano s e (b) percorso corrispondente sul piano R, I ; il raggio del percorso uncinato del piano s deve essere sufficientemente piccolo in modo da non includere altri zeri p_i .

4.2(b) del diagramma di $A(j\omega)$. Questo, invece di passare per l'origine, la evita lasciandola alla destra, se il diagramma è percorso nel senso delle ω crescenti, così come il punto p_i è lasciato alla destra del percorso uncinato della Figura 4.2(a).

Simmetricamente, se si considerasse un percorso uncinato che lascia il p_i immaginario alla propria sinistra (quando percorso nel senso delle ω crescenti), assimilandolo quindi a quelli del semipiano di sinistra, il diagramma di $A(j\omega)$ si deformerebbe in modo da lasciare l'origine alla propria sinistra anziché attraversarla.

Pertanto, detto n_n il numero dei p_i con parte reale negativa, n_o quello dei p_i con parte reale nulla e n_p quello dei p_i con parte reale positiva, si ha che:

1. il diagramma di $A(j\omega)$ sul piano R, I al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$ passa n_o volte per l'origine;
2. il vettore rappresentativo di $A(s)$, per s che segue il percorso uncinato che lascia alla propria destra i p_i immaginari, descrive un angolo di:

$$n_n\pi - (n_o + n_p)\pi = [n - 2(n_o + n_p)]\pi \quad (4.4.4)$$

radianti intorno all'origine (essendo la fase di $A(s)$ la somma di quelle dei suoi fattori).

Poiché la fase di $A(j\omega)$ è opposta a quella di $A(-j\omega)$ (e la proprietà è valida anche in presenza di punti coniugati dei percorsi uncinati), risulta che la variazione di fase (in radianti) del vettore che rappresenta $A(s)$ quando s segue il percorso uncinato da $\omega = 0$ a $\omega = \infty$ è:

$$n \frac{\pi}{2} - (n_o + n_p)\pi. \quad (4.4.5)$$

Ovviamente, se $a_0 = 0$ il percorso uncinato include un primo tratto che parte da un punto dell'asse reale alla sinistra dell'origine per raggiungere l'asse immaginario al di sopra di essa, con un contributo alla rotazione di $-\pi/2$ radianti.

Pertanto, condizione necessaria e sufficiente affinché $A(s)$ sia hurwitziano (e cioè $n_o = 0$ e $n_p = 0$) è che il diagramma di $A(j\omega)$

1. non attraversi l'origine ($n_o = 0$),
2. descriva intorno all'origine un angolo di $n\pi/2$ radianti in senso antiorario ($n_o + n_p = 0$).

■

Sulla base delle precedenti considerazioni, il diagramma di $A(j\omega)$ per $\omega \geq 0$ consente anche di determinare, quando $A(s)$ non è hurwitziano, i valori di n_n , n_o ed n_p . Per esempio, nel caso di p_i immaginari semplici, detto k il numero di passaggi per l'origine, si ha $n_o = 2k$ se $A(j0) \neq 0$ ed $n_o = 2k - 1$ se $A(j0) = 0$ (e cioè il diagramma parte dall'origine per $\omega = 0$ e si ha un p_i nell'origine).

Inoltre, dopo aver deformato il diagramma di $A(j\omega)$ in corrispondenza dei passaggi per l'origine, in modo da lasciare l'origine stessa alla destra nell'intorno del suo attraversamento quando il diagramma è percorso nel verso delle ω crescenti, la variazione di fase $\Delta\varphi$ del vettore applicato all'origine e che segue il diagramma deformato per $\omega \geq 0$ è:

$$\Delta\varphi = n \frac{\pi}{2} - (n_o + n_p)\pi \quad (4.4.6)$$

e quindi si ha:

$$n_p = \frac{n \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi}{\pi} - n_o. \quad (4.4.7)$$

La verifica del criterio (e la valutazione di n_o ed n_p nel caso in cui $A(s)$ non sia hurwitziano) può essere condotta anche in base all'esame dei diagrammi di $R(\omega)$ e di $I(\omega)$:

$$R(\omega) = \sum_{i=0}^{n_R/2} a_{2i}(-1)^i \omega^{2i}, \quad (4.4.8a)$$

$$I(\omega) = \sum_{i=0}^{(n_I-1)/2} a_{2i+1}(-1)^i \omega^{2i+1}. \quad (4.4.8b)$$

dove n_R ed n_I sono il numero pari e, rispettivamente, il numero dispari uguale o immediatamente inferiore a n . È chiaro infatti che, se il diagramma di $A(j\omega)$ sul piano R, I deve compiere, per $\omega \geq 0$, una rotazione di $n\pi/2$ radianti intorno all'origine, è necessario che esso, partendo dal punto $A(0) = a_o$, supposto positivo, attraversi successivamente n quadranti e quindi intersechi, in successione, il semiasse immaginario positivo ($R = 0$), il semiasse reale negativo ($I = 0$), il semiasse immaginario negativo ($R = 0$), di nuovo il semiasse reale positivo ($I = 0$) e così via.

Pertanto $A(s)$ è hurwitziano se e solo se:

1. la somma del numero degli zeri (semplici e ovviamente reali) di $R(\omega)$ per $\omega > 0$ e di quello degli zeri (anch'essi semplici e reali) di $I(\omega)$ per $\omega \geq 0$ è n (ciò che implica che non ci siano zeri multipli di queste due funzioni); ovviamente per $\omega = 0$ si ha uno zero di $I(\omega)$ e, se $A(s)$ è hurwitziano, l'ultimo zero che si incontra sull'asse ω è di $R(\omega)$ se n è pari e di $I(\omega)$ se n è dispari;
2. gli zeri di $R(\omega)$ separano quelli di $I(\omega)$ e viceversa (nel senso che fra due zeri consecutivi di $R(\omega)$ è sempre compreso uno zero di $I(\omega)$ e fra due zeri consecutivi di $I(\omega)$ è sempre compreso uno zero di $R(\omega)$);
3. $I(\omega_0)$ è positivo, essendo ω_0 il più piccolo zero positivo di $R(\omega)$.

La verifica del carattere hurwitziano di $A(s)$ risulta dunque immediata considerando l'andamento sovrapposto dei diagrammi di $R(\omega)$ e di $I(\omega)$. Da questi è ovviamente possibile (anche se più laboriosa) la valutazione di n_n , n_o ed n_p , quando $A(s)$ non è hurwitziano.

Allo scopo si possono adottare le seguenti regole.

1. Il numero n_o si deduce immediatamente dal numero k di volte in cui uno zero di $R(\omega)$ coincide con uno zero di $I(\omega)$ per $\omega \geq 0$; nel caso

considerato di zeri tutti semplici, $n_o = 2k$ se $R(0) \neq 0$ e $n_o = 2k - 1$ se $R(0) = 0$.

2. Se $n_o \neq 0$, si deformano i diagrammi in modo coerente con l'adozione dei percorsi uncinati che sostituiscono gli archi passanti per l'origine del piano R, I ; precisamente, adottando la convenzione di lasciare alla destra l'origine di tale piano, si anticipa lo zero di $I(\omega)$ rispetto a quello di $R(\omega)$ quando $R(\omega)$ ed $I(\omega)$ hanno lo stesso segno prima e dopo l'attraversamento dell'origine, mentre si ritarda lo zero di $I(\omega)$ rispetto a quello di $R(\omega)$ quando hanno segno opposto.
3. Si determina $\Delta\varphi$ come somma di addendi uguali a $\pm\frac{\pi}{2}$ o 0 secondo quanto qui di seguito indicato:
 - 3a: dopo uno zero di I in corrispondenza al quale $R > 0$ (intersezione con il semiasse reale positivo nel diagramma di $A(j\omega)$ sul piano R, I), se lo zero immediatamente successivo (nel senso delle ω crescenti) è ancora di I , il contributo a $\Delta\varphi$ è nullo, se è di R il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ quando ivi $I > 0$ (intersezione con il semiasse immaginario positivo) ed è di $-\frac{\pi}{2}$ quando ivi $I < 0$ (intersezione con il semiasse immaginario negativo); se si tratta dell'ultimo di tutti gli zeri, per n pari il contributo è 0 e per n dispari il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ se $I > 0$ per valori di ω maggiori di quello che caratterizza lo zero considerato e di $-\frac{\pi}{2}$ se $I < 0$;
 - 3b: dopo uno zero di R in corrispondenza al quale $I > 0$ (intersezione con il semiasse immaginario positivo), se lo zero immediatamente successivo è ancora di R , il contributo a $\Delta\varphi$ è nullo; se è di I il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ quando ivi $R < 0$ e di $-\frac{\pi}{2}$ quando ivi $R > 0$; se si tratta dell'ultimo zero, per n dispari il contributo è nullo e per n pari il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ se $R < 0$ e di $-\frac{\pi}{2}$ se $R > 0$ per valori più elevati di ω ;
 - 3c: dopo uno zero di I in corrispondenza al quale $R < 0$ (intersezione con il semiasse reale negativo), se lo zero immediatamente successivo è ancora di I il contributo a $\Delta\varphi$ è nullo; se è di R il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ quando ivi $I < 0$ e di $-\frac{\pi}{2}$ quando $I > 0$; se si tratta dell'ultimo zero, per n pari il contributo è 0 e per n dispari il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ se $I < 0$ e di $-\frac{\pi}{2}$ se $I > 0$ per valori più elevati di ω ;
 - 3d: dopo uno zero di R in corrispondenza al quale $I < 0$ (intersezione con il semiasse immaginario negativo), se lo zero imme-

diatamente successivo è ancora di R , il contributo a $\Delta\varphi$ è nullo; se è di I , il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ quando ivi $R > 0$ e di $-\frac{\pi}{2}$ quando ivi $R < 0$; se si tratta dell'ultimo zero, per n dispari il contributo è nullo e per n pari il contributo è di $+\frac{\pi}{2}$ se $R > 0$ e di $-\frac{\pi}{2}$ se $R < 0$ per valori più elevati di ω .

Riassumendo, le regole espone nei punti 3a, 3b, 3c e 3d possono essere compendiate nelle due tabelle relative al caso in cui uno zero di ω_i è seguito da uno zero ω_{i+1} e, rispettivamente, al caso in cui dopo ω_i non vi siano altri zeri (e quindi il rapporto R/I conserva per $\omega > \omega_i$ lo stesso segno):

Valori in ω_i	Valori in ω_{i+1}			
	$I = 0; R > 0$	$R = 0; I > 0$	$I = 0; R < 0$	$R = 0; I < 0$
$I = 0; R > 0$	0	$+\pi/2$	-	$-\pi/2$
$R = 0; I > 0$	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$	-
$I = 0; R < 0$	-	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$
$R = 0; I < 0$	$+\pi/2$	-	$-\pi/2$	0

Valori in ω_i	Segno di R/I per $\omega > \omega_i$ (ω_i ultimo zero)			
	n pari; $R/I > 0$	n dispari; $R/I > 0$	n pari; $R/I < 0$	n dispari; $R/I < 0$
$I = 0; R > 0$	0	$+\pi/2$	0	$-\pi/2$
$R = 0; I > 0$	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$	0
$I = 0; R < 0$	0	$+\pi/2$	0	$-\pi/2$
$R = 0; I < 0$	$-\pi/2$	0	$+\pi/2$	0

4.4.2 Il Criterio di Routh

Il criterio di Routh, nella sua formulazione tradizionale, consiste nel costruire una tabella (detta appunto *tabella di Routh*) di numeri in cui le prime due righe sono formate dai coefficienti del polinomio $A(s)$ nel modo qui indicato:

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{array}$$

Se n è pari, a_0 appartiene alla prima riga, che risulta formata di $(n+2)/2$ elementi, mentre la seconda è formata di $n/2$ elementi e termina con a_1 , disposto sotto a_2 ; se invece n è dispari, entrambe le righe sono formate di $(n+1)/2$ elementi, la prima termina con a_1 e la seconda con a_0 .

Gli elementi di ciascuna riga successiva:

Capitolo 8

Il Criterio di Nyquist

8.1 Il Teorema di Nyquist

Il Criterio di Nyquist consiste in un procedimento di tipo grafico che consente di determinare il numero di poli con parte reale positiva (e quindi la stabilità) di un sistema a retroazione dall'esame del diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento ad anello aperto.

Qui il criterio verrà esposto inizialmente per il caso di sistemi a retroazione unitaria considerando successivamente l'estensione, del resto immediata, al caso di retroazione non unitaria. Si farà dunque riferimento allo schema di Figura 8.1, in cui si suppone che $G(s)$ sia una funzione *razionale propria*.

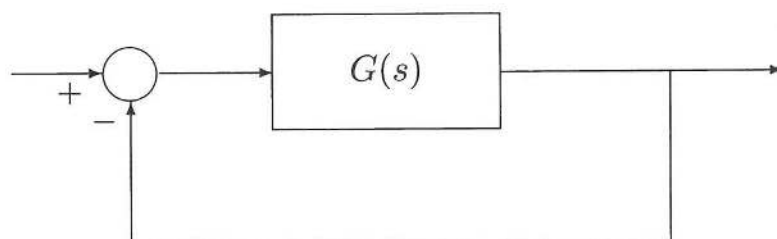


Figura 8.1: Schema a retroazione unitaria.

Il seguente risultato è noto come Teorema di Nyquist.

Teorema 8.1.1 [di Nyquist] *Siano $G(s)$ una funzione razionale propria e P_p il numero dei poli con parte reale positiva di $G(s)$. Si assuma inoltre*

che $G(s)$ non abbia poli sull'asse immaginario.¹

1. Nel caso in cui il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non attraversi il punto $-1 + j0$, sia N il numero complessivo di giri in senso orario compiuti dal diagramma di Nyquist di $G(s)$ (orientato nel verso delle ω crescenti) intorno al punto $-1 + j0$.² Allora il numero Z_p dei poli con parte reale positiva della funzione di trasferimento del sistema retroazionato:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (8.1.1)$$

è pari a:

$$Z_p = N + P_p. \quad (8.1.2)$$

2. Nel caso in cui il diagramma di Nyquist di $G(s)$ attraversi il punto $-1 + j0$, a ciascun passaggio del diagramma di Nyquist di $G(s)$ per tale punto corrisponde un polo di $W(s)$ sull'asse immaginario o, se ciò avviene per $\omega \rightarrow \infty$, un polo all'infinito (ossia $W(s)$ è impropria).

Prima di dimostrare tale teorema si enunciano due corollari di immediata deduzione. Il primo è noto come *Criterio di Nyquist* (per sistemi a retroazione unitaria negativa).

Corollario 8.1.1 [Criterio di Nyquist]. *Il sistema di Figura 8.1 è stabile in senso BIBO se e solo se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non attraversa il punto $-1 + j0$ e inoltre:*

$$N = -P_p. \quad (8.1.3)$$

Corollario 8.1.2 [Criterio di Nyquist in forma ridotta]. *Se $G(s)$ non ha poli con parte reale positiva, allora il sistema di Figura 8.1 è stabile in senso BIBO se e solo se il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non attraversa e non circonda il punto $-1 + j0$.*

¹Da tale ipotesi consegue che il diagramma di Nyquist di $G(s)$ è una curva continua del piano complesso. Infatti, esso è l'immagine, attraverso la mappa continua $G(\cdot)$, dell'asse immaginario che è una curva continua. Inoltre, dall'ipotesi che $G(s)$ sia propria segue che $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)$, cosicché al tendere di ω a $+\infty$ ed a $-\infty$ il diagramma di Nyquist tende al medesimo punto (al finito) del piano complesso e la curva corrispondente risulta così chiusa.

²Qui e nel seguito, per "numero di giri in senso orario [antiorario] di una curva intorno ad un punto" si intende che tale numero è considerato come negativo se i giri sono compiuti in senso antiorario [orario].

Dimostrazione del Teorema 8.1.1. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato (8.1.1) ha come poli gli zeri della funzione razionale propria:³

$$D(s) := 1 + G(s). \quad (8.1.4)$$

Rappresentando la $G(s)$ come rapporto di polinomi coprimi nella forma:

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}, \quad (8.1.5)$$

anche la (8.1.4) può essere espressa come rapporto di polinomi coprimi nella forma:

$$D(s) = \frac{D_G(s) + N_G(s)}{D_G(s)}. \quad (8.1.6)$$

I poli di $D(s)$, ossia gli zeri di $D_G(s)$, coincidono con i poli di $G(s)$ e quindi per ipotesi hanno parte reale non nulla, cosicché il diagramma di Nyquist di $D(s)$ rimane al finito. Si supponga inoltre, in prima istanza, che $D(s)$ non abbia zeri sull'asse immaginario (incluso il punto improprio⁴) cosicché il diagramma di Nyquist di $D(s)$ non passi per l'origine.

La variazione di fase del diagramma di Nyquist di $D(s)$ (orientato nel verso delle ω crescenti), cioè la rotazione che questo descrive attorno all'origine, può essere calcolata grazie al "principio dell'argomento" già presentato a proposito del Criterio di Michailov (cfr. Sezione 4.4.1). Se dunque Z_p è il numero di zeri con parte reale positiva⁵ di $D_G(s) + N_G(s)$ e $n = \deg[D_G(s) + N_G(s)] = \deg[D_G(s)]$, le variazioni di fase $\Delta\varphi_1$ di $D_G(s) + N_G(s)$ e $\Delta\varphi_2$ di $D_G(s)$ per s che percorre l'intero asse immaginario risultano rispettivamente:

$$\Delta\varphi_1 = (n - 2Z_p)\pi \quad \text{e} \quad \Delta\varphi_2 = (n - 2P_p)\pi. \quad (8.1.7)$$

Pertanto la variazione di fase complessiva del diagramma di Nyquist di $D(s)$ è:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = -2\pi(Z_p - P_p). \quad (8.1.8)$$

³La funzione $D(s)$ viene detta in inglese *return difference* in quanto, usando il simbolismo introdotto a proposito dei grafi di flusso di segnale, coincide con la differenza $1 - L(s)$, essendo $L(s)$ la cosiddetta *loop transference* che nel caso considerato di retroazione negativa e unitaria vale $-G(s)$.

⁴Ciò implica, in particolare, che $\deg[D_G(s) + N_G(s)] = \deg[D_G(s)]$.

⁵L'uso tradizionale del simbolo Z_p è legato al fatto che questo è anche il numero degli zeri a parte reale positiva di $D(s) = 1 + G(s)$.

Si osservi che $\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$ è pari al numero di giri in senso antiorario che il diagramma di Nyquist di $D(s)$ descrive attorno all'origine; tale numero coincide con quello dei giri in senso antiorario che il diagramma di Nyquist di $G(s) = D(s) - 1$ descrive attorno al punto $-1 + j0$. Poiché con le convenzioni adottate si ha $N = -\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$, la (8.1.8) è equivalente alla (8.1.2).

Si è fino ad ora assunto che $D(s)$ non abbia zeri sull'asse immaginario né nel punto improprio o, equivalentemente, che il diagramma di Nyquist di $G(s)$ non attraversi il punto critico $-1 + j0$. Ciò invece può accadere nei seguenti due casi.

1. Esistono dei valori finiti di ω per i quali $G(j\omega) = -1$. In corrispondenza a questi il denominatore della (8.1.1) si annulla mentre il suo numeratore è pari a -1 . Risulta quindi chiaro che $W(j\omega)$ ha un polo per tali valori di ω .
2. Il diagramma di Nyquist di $G(s)$ tende al punto $-1 + j0$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$. Ciò significa che, con riferimento alla (8.1.5), $N_G(s)$ e $D_G(s)$ hanno lo stesso grado n e valori opposti dei coefficienti di s^n . Ne consegue che la funzione:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{N_G(s)}{D_G(s) + N_G(s)} \quad (8.1.9)$$

ha il numeratore di grado n , mentre il suo denominatore è di grado $n - 1$, o minore nel caso in cui anche altri termini, oltre a quello di grado massimo, si cancellino nella somma $D_G(s) + N_G(s)$. La funzione di trasferimento a catena chiusa $W(s)$ è dunque impropria e quindi ha un polo nel punto all'infinito.

Esempio 8.1.1 Si consideri la funzione:

$$G(s) = \frac{3}{(1 + s)^4}, \quad (8.1.10)$$

il cui diagramma di Nyquist è rappresentato nel riquadro di sinistra in Figura 8.2, dove la linea a tratto intero corrisponde a valori positivi di ω e quella tratteggiata a valori negativi. Come si vede, la curva non circonda il punto critico $-1 + j0$ (cioè si ha $N = 0$) e, poiché $G(s)$ non ha poli nel semipiano destro ($P_p = 0$), dalla (8.1.2) si ha $Z_p = 0$ e pertanto il sistema a retroazione unitaria è stabile.