COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
1 Settembre 2016

Esercizio 1. [9.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = K\frac{(1+s^2)(1-s)}{s^2(1+s)}$$

è richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode per $K = 1$;
- tracciare il diagramma di Nyquist per $K = 1$, individuando asintoti ed intersezioni con gli assi (se presenti);
- studiare la stabilità BIBO del sistema $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ al variare del parametro reale K, ricorrendo al Criterio di Nyquist;
- qualora non ci sia stabilità, discutere il numero di poli a parte reale positiva e/o nulla, al variare di K reale.

Esercizio 2. [8.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+5}{(s+4)^2(s-3)}$$

è richiesto il tracciamento del luogo delle radici positivo e negativo, calcolando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, e studiando di conseguenza la stabilità BIBO al variare di K sui numeri reali.

Esercizio 3. [7 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$$

è richiesto

- il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ che soddisfi le specifiche: errore a regime alla rampa lineare pari a circa 0.1, $\omega_a \simeq 1$ rad/s, $m_\psi \simeq 90°$;
- il progetto di un controllore stabilizzante $C_2(s)$ di tipo PID (eventualmente solo P, PI, o PD) che soddisfi le specifiche: errore a regime alla rampa lineare pari a 1, $\omega_a \simeq 1$ rad/s, $m_\psi \simeq 90°$.

Teoria. [5+1.5 punti] Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si dimostri analiticamente che nel caso di un sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da un sistema di funzione di trasferimento razionale e propria $G(s)$, e quindi di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)},$$

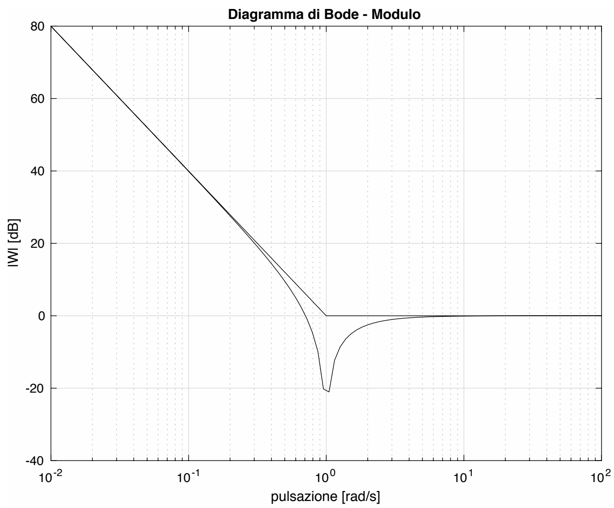
il tipo k coincide con la molteplicità del polo nell'origine di $G(s)$ e l'errore di regime permanente $e_{rp}^{(k+1)} \neq 0$ che corrisponde al tipo è esprimibile in funzione del guadagno di Bode K_B della $G(s)$.
[Facoltativo] Assumendo che la funzione $G(s)$ sia ottenuta a sua volta per retroazione unitaria negativa da una funzione $P(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)}$, con z_1, z_2, p_1, p_2 numeri reali, distinti e tutti positivi, applicando un controllore proporzionale $C(s) = K > 0$, ovvero

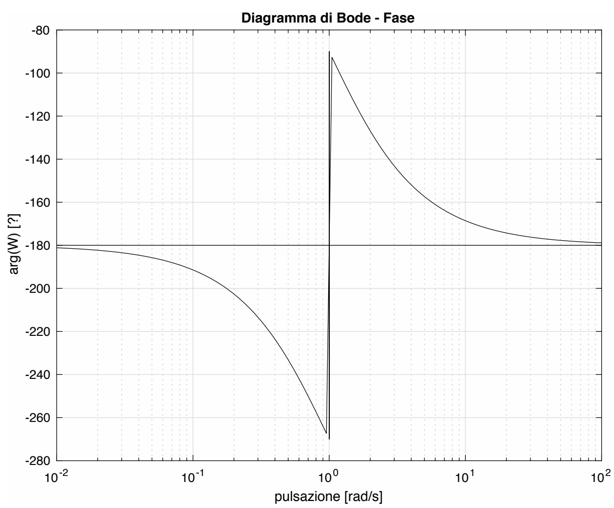
$$G(s) = \frac{KP(s)}{1 + KP(s)},$$

si dica se esistono valori di $K > 0$ per cui la $W(s)$ è di tipo 1. Cambierebbe la risposta se gli zeri e i poli fossero a coppie complesse coniugate? [Suggerimento: si consideri il luogo delle radici positivo associato a $P(s)$].

SOLUZIONI

Esercizio 1. Il diagramma di Bode per $K = 1$ è illustrato in figura (il picco di antirisonanza nel diagramma dei moduli è in realtà infinito)



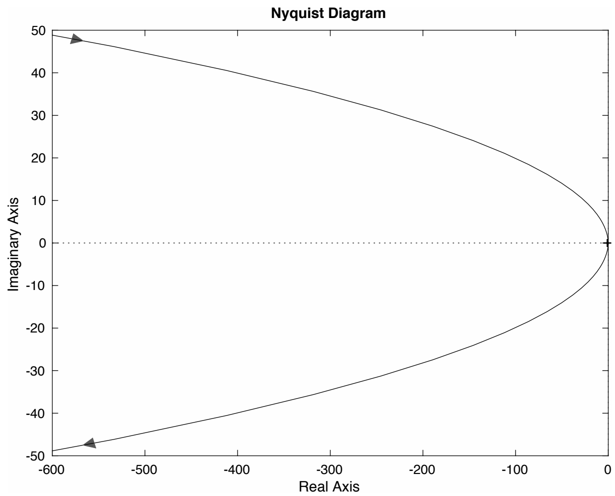


Il diagramma di Bode asintotico del modulo ha pendenza -40 dB/dec prima di $\omega = 1$ rad/s e 0 dB/dec dopo, mentre il diagramma reale ha un picco di antirisonanza infinito in $\omega = 1$ rad/s. La fase asintotica rimane invece sempre a $-180°$, mentre quella reale scende da $-180°$ fino a $-270°$ in $\omega = 1$ rad/s, dove una discontinuità di $+180°$ la riporta a $-90°$, per poi ridiscendere fino a $-180°$. Calcolando $G(j\omega)$ per $K = 1$ si ottiene

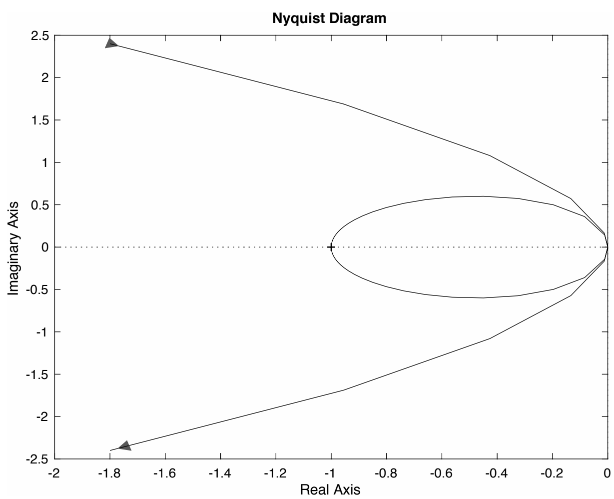
$$G(j\omega) = -\frac{(1-\omega^2)^2}{(1+\omega^2)\omega^2} + j\frac{2(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)}.$$

Considerando solo $\omega \geq 0$, sia la parte reale che quella immaginaria si annullano solo per $\omega = 1$ (quindi il diagramma passa per l'origine). Per $\omega \to 0^+$ non ci sono asintoti (andamento di forma parabolica con entrambe le parti reale ed immaginaria che tendono all'infinito), mentre per $\omega \to +\infty$ la parte reale tende a -1 e quella immaginaria a 0.

Nyquist arriva dall'infinito (da sinistra in alto) e passa per l'origine per $\omega = 1$ con tangente verticale, rispunta nel terzo quadrante dove si muove in direzione del punto -1, raggiunto asintoticamente. In figura Nyquist per $K = 1$:



e il suo dettaglio in un intorno di 0:



Valutando il numero di giri attorno a $-\frac{1}{K}$, dopo aver aggiunto il cerchio orario all'infinito dovuto al polo doppio in $s = 0$, si trova, essendo $n_{G_+} = 0$

$$\begin{array}{lcl} K < 0 & \Rightarrow & N = -1, n_{W_+} = 1 \\ 0 < K < 1 & \Rightarrow & N = -2, n_{W_+} = 2 \\ K > 1 & \Rightarrow & N = -3, n_{W_+} = 3 \end{array}$$

Nel caso critico $K = 1$, l'arrivo asintotico nel punto critico rende $W(s)$ impropria (con due poli a parte reale positiva, per motivi di continuità - si pensi al Luogo delle Radici). Pertanto non c'è stabilità BIBO per nessun valore di K, e non esistono valori di K per cui la $W(s)$ abbia poli a parte reale nulla.

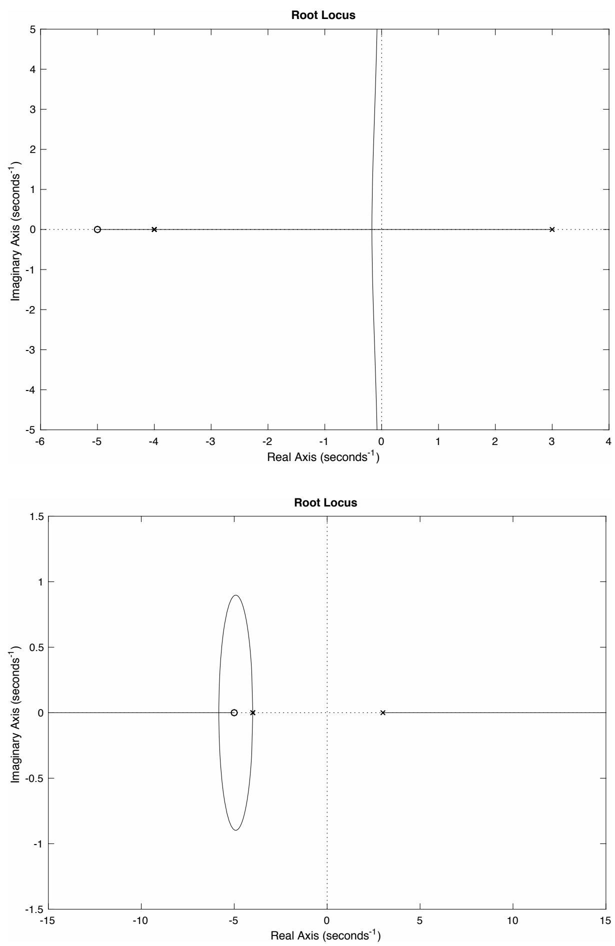
Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi porge facilmente

$$(s + 4)(s^2 + 6s + 1) = 0$$

da cui le tre soluzioni $s = -4$ (punto doppio iniziale del luogo, $K = 0$), $s = 2\sqrt{2} - 3 \simeq -0.17$ (corrispondente a $K = 16\sqrt{2} - 13 \simeq 9.63 > 0$, quindi nel luogo positivo), $s = -2\sqrt{2} - 3 \simeq -5.83$ (corrispondente a $K = -16\sqrt{2} - 13 \simeq -35.6 < 0$, quindi nel luogo negativo). Ponendo $s = j\omega$ nell'equazione del luogo, si ottiene

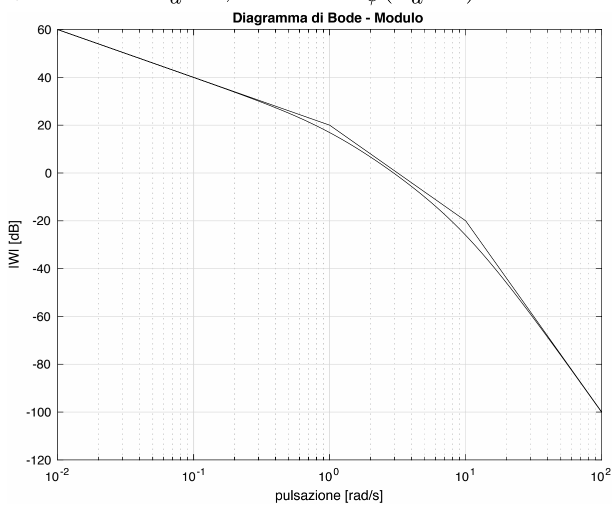
$$(5K - 48 - 5\omega^2) + j\omega(K - 8 - \omega^2) = 0$$

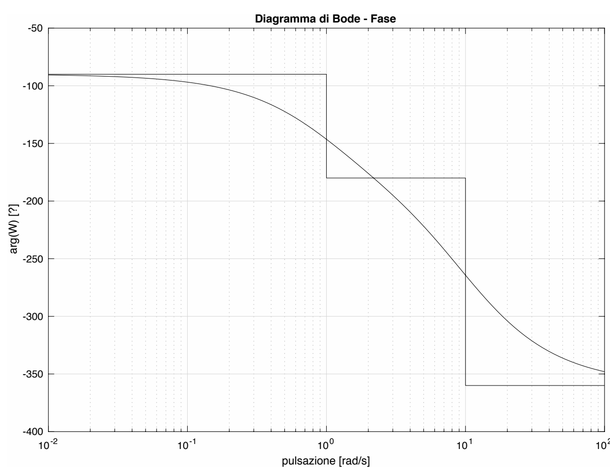
da cui $\omega = 0$ che implica $K = \frac{48}{5} = 9.6$ e $\omega^2 = K - 8$ che implica che la parte reale non può annullarsi. Quindi il luogo interseca l'asse immaginario solo in $s = 0$ per $K = 9.6 > 0$ (e quindi nel luogo positivo). Infine abbiamo due asintoti verticali centrati in $s = 0$ (asse immaginario) nel luogo positivo, ed i semiassi reali positivo e negativo come asintoti nel luogo negativo. In figura i luoghi positivo e negativo.



Il luogo positivo ha quindi due rami che, partendo da $s = -4$ e da $s = 3$, si muovono sull'asse reale, attraversando l'origine per $K = 9.6$, ed incontrandosi nel punto doppio $s = 2\sqrt{2} - 3$ per $K \simeq 9.63$, per poi andare lungo la direzione dell'asse immaginario senza mai più intersecare l'asse immaginario stesso. Il terzo ramo dal polo $s = -4$ si dirige verso lo zero in $s = -5$. Quindi per $K > 9.6$ abbiamo tutti i rami del luogo sul semipiano sinistro, e c'è quindi stabilità. Il luogo negativo ha invece un ramo che da $s = 3$ si dirige sull'asse reale verso $+\infty$, mentre gli altri due rami escono dal polo doppio $s = -4$ sul piano complesso, rientrano nell'asse reale in $s = -2\sqrt{2} - 3$ per $K \simeq -35.6$, quindi un ramo si dirige verso lo zero in $s = -5$, l'altro verso $-\infty$. In questo caso non ci sono mai intersezioni con l'asse immaginario, ed un ramo del luogo è sempre contenuto nel semipiano destro, da cui non c'è mai stabilità per $K < 0$. In conclusione, stabilità BIBO solo per $K > 9.6$.

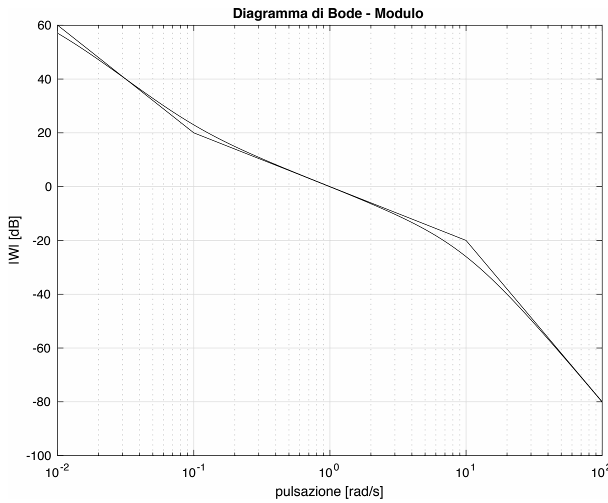
Esercizio 3. Nel primo caso si ha (dopo aver adottato $C'(s) = \frac{1}{s}$ per l'errore a regime) che ω_a è circa pari a $\sqrt{10} > 1 = \omega_a^{DES}$, mentre $m_\psi(\omega_a^{DES}) \simeq 45° < m_\psi^{DES} \simeq 90°$,

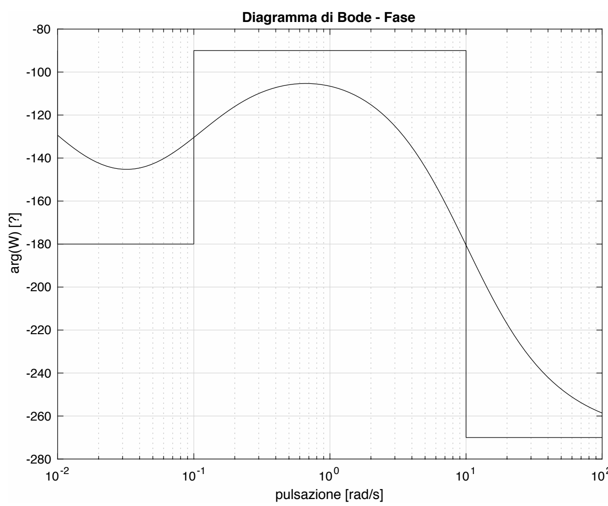




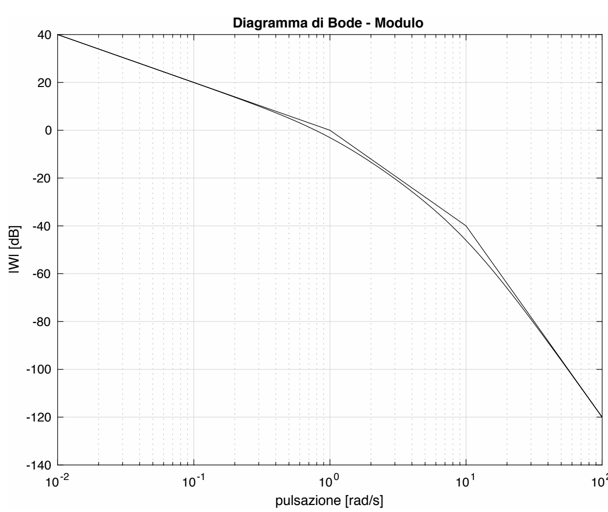
quindi è necessaria una rete a sella. Posizionando uno zero in $\omega = 0.1$ rad/s ed un polo 1 decade prima, ed un'altro zero in $\omega = 1$ rad/sper cancellare il polo e sistemare la fase, oltre ad un altro polo in alta frequenza (che però non risulta necessario in quanto il termine $\frac{1}{s}$ rende già proprio $C_1(s)$), si ottiene il desiderato abbassamento del modulo di 20 dB e la sistemazione della fase, nonchè la stabilità BIBO per il Criterio di Bode. Quindi una soluzione possibile è

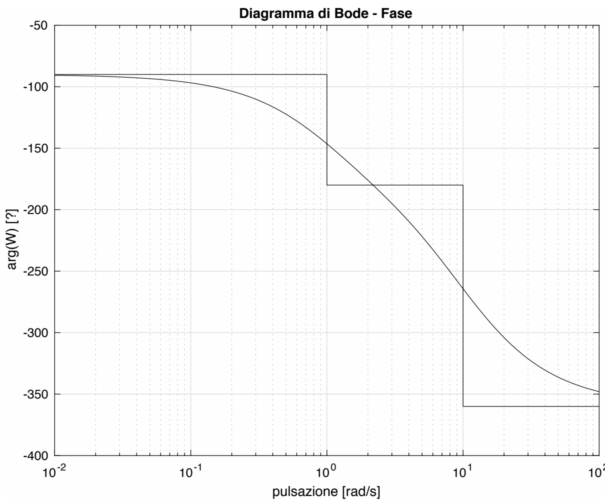
$$C_1(s) = \frac{(1+s)(1+10s)}{s(1+100s)}.$$





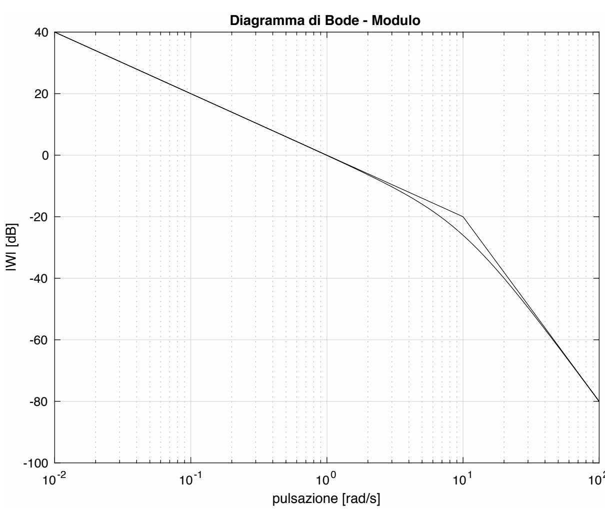
Nel secondo caso è necessario un termine $C'(s) = \frac{1}{10s}$ per sistemare l'errore alla rampa,

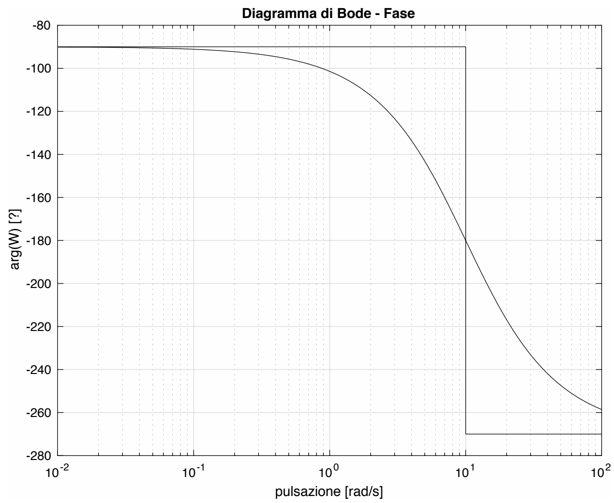




dopodichè un unico zero che cancella il polo in $s = -1$ rende soddisfatti i rimanenti vincoli. Si ottiene quindi il PD, stabilizzante per il Criterio di Bode

$$C_2(s) = \frac{1}{10s}(1+s) = \frac{1}{10s} + \frac{1}{10}$$





Teoria. Per la prima parte si veda il Capitolo 9, pp. 255-256, del Libro di testo (seconda edizione).

Per la parte facoltativa: nel caso in cui tutti i parametri, z_1, z_2, p_1 e p_2 siano positivi, la $P(s)$ ha due poli e due zeri reali negativi ed è immediato rendersi conto che la parte del luogo positivo che interseca l'asse reale è data da due segmenti (i cui estremi dipendono dall'ordine dei parametri z_1, z_2, p_1 e p_2) entrambi contenuti nel semiasse reale negativo. Quindi l'origine non fa parte del luogo, ovvero la $G(s)$ non ha mai poli in 0 per $K > 0$, e di conseguenza a $W(s)$ non sarà mai di tipo 1. Val la pena osservare che essendo $d(s) = (s+p_1)(s+p_2)$ e $n(s) = (s+z_1)(s+z_2)$ due polinomi di Hurwitz, i loro coefficienti sono tutti positivi e quindi anche $d(s)+Kn(s)$ è un polinomio di secondo grado a coefficienti tutti positivi per ogni $K > 0$. Da Cartesio segue che il polinomio è di Hurwitz per ogni $K > 0$ e ciò assicura che il luogo positivo sia interamente contenuto nel semipiano reale negativo.

Se $z_2 = \bar{z}_1$ e $p_2 = \bar{p}_1$, indipendentemente da dove le coppie di zeri e poli siano collocati, il luogo delle radici positivo non ha nessun intersezione con l'asse reale e quindi, in particolare, non passa mai per l'origine. Pertanto anche in questo caso $G(s)$ non ha mai poli in 0 per $K > 0$ e quindi la $W(s)$ non sarà mai di tipo 1.