COMPLEMENTI : DERIVATA di UNA FUNZIONE INTEGRALE

Prop:

Sia f continua su $[a,b]$

Siano $g, h \in C^1(I)$, I intervallo e t.c. $\mathrm{Im}\, g, \mathrm{Im}\, h \subseteq [a,b]$.

Definiamo
$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt \quad \text{per } x \in I$$

Allora G e' derivabile e verifica:

$$G'(x) = f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x)$$

Dim: Per $y \in [a,b]$, sia
$$F(y) = \int_a^y f(t)\,dt.$$

Allora, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, $F \in C^1([a,b])$ e $F'(y) = f(y)$.

D'altra parte la G soddisfa:

$$G(x) = F(g(x)) - F(h(x)) \qquad \forall x \in I$$

ed e' quindi derivabile in quanto composizione e somma di derivabili. Si ha

$$G'(x) = F'(g(x))\, g'(x) - F'(h(x))\, h'(x)$$
$$= f(g(x))\, g'(x) - f(h(x))\, h'(x).$$