Esercizi di Fondamenti di Automatica - 1
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
A.A. 2020/2021

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a(a-1)\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = a\frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

dove a è un numero reale.

i) Si studi, al variare di a, la stabilità asintotica.

ii) Si studi, al variare di a, la stabilità BIBO del sistema.

iii) Per i valori di a per cui il sistema è BIBO stabile, si determini la risposta (forzata) di regime permanente al segnale $u(t) = \sin(at)\ \delta_{-1}(t)$.

iv) Per $a = 1$, si determini, se possibile la risposta di regime permanente e la risposta transitoria in corrispondenza al segnale $u(t) = (1 + \cos t)\ \delta_{-1}(t)$ e alle condizioni iniziali $y(0^-) = 1$ e $\frac{dy(0^-)}{dt} = -1$.

Esercizio 2. Si consideri un modello ingresso/uscita a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale del solito tipo, e avente funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 4}.$$

i) Si discuta (se possibile) la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

iii) Il sistema dato può ammettere tra le sue evoluzioni libere in uscita una funzione del seguente tipo:

$$y_\ell(t) = e^{2t}?$$

In caso negativo si giustifichi la risposta, in caso affermativo si determini una possibile equazione differenziale descrittiva del modello.

Esercizio 3. Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo, la cui risposta impulsiva è

$$w(t) = (ae^{at} - e^{-4t})\ \delta_{-1}(t),$$

con a parametro reale,

i) si studi la stabilità BIBO del sistema;

ii) per i valori di a per cui il sistema non è BIBO stabile, si determini un ingresso limitato a cui corrisponde un'uscita illimitata e (se possibile) un ingresso limitato a cui corrisponde un'uscita limitata;

iii) si determini per quali valori di a la funzione di trasferimento del sistema è priva di zeri.

Esercizio 4. Si determini, attraverso il criterio di Routh, quali di questi polinomi è di Hurwitz e, per quelli che non sono di Hurwitz si valuti, se possibile, il numero delle radici a parte reale positiva.

i) $p(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$;

ii) $p(s) = s^3 + 4s^2 - 5s + 2$;

iii) $p(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2$;

iv) $p(s) = s^4 + 5s^3 + 2s^2 - s - 1$;

v) $p(s) = s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s$;

vi) $p(s) = s^4 + s^3 + 2s + 1$;

vii) $p(s) = s^4 - 2s^3 + 2s + a$, con a reale;

viii) $p(s) = s^4 + 4s^3 + s - a$, con a reale.

Esercizio 5. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2-a)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (3-2a)\frac{dy(t)}{dt} - 3ay(t) = 2\frac{du(t)}{dt} - 2u(t), \qquad t \in [0, +\infty),$$

dove a è un numero reale.

i) Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

ii) Si studi, al variare di a, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

iii) Per $a = 1$ si determini, se possibile, la risposta (forzata) di regime permanente al segnale di ingresso

$$u(t) = \sin t \cos t \ \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 6. Sia

$$y_\ell(t) = 4e^{-t}\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0,$$

l'evoluzione libera di un sistema SISO descritto dalla consueta equazione differenziale generica, in corrispondenza ad una determinata scelta delle condizioni iniziali.

i) Si determini un modello alle equazioni differenziali compatibile con la precedente evoluzione libera, e

ii) di tale modello si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO.

Esercizio 7. Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

ii) Si determini la risposta in frequenza del sistema.

iii) Si calcoli l'uscita forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \sin(t)\delta_{-1}(t) + \delta_{-1}(t-1)$, evidenziandone la componente di regime permanente.

Soluzioni numeriche di alcuni esercizi

Esercizio 5. i) La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{2s-2}{s^3+(2-a)s^2+(3-2a)s-3a},$$

dove a è un numero reale.

ii) Per studiare la stabilità asintotica costruiamo la tabella di Routh associata al polinomio dell'equazione caratteristica

$$d(s) = s^3+(2-a)s^2+(3-2a)s-3a.$$

Si trova:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3-2a \\ 2 & 2-a & -3a \\ 1 & \frac{2a^2-4a+6}{2-a} & 0 \\ 0 & -3a & 0 \end{array}$$

Poiché il primo elemento della prima colonna della tabella è positivo, il polinomio $d(s)$ risulta di Hurwitz se e solo se tutti i coefficienti in prima colonna sono positivi e ciò si verifica se e solo se

$$\begin{cases} 2-a & > & 0 \\ a^2-2a+3 & > & 0 \\ -3a & > & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a & < & 0 \\ a^2-2a+3 & > & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a<0.$$

Per quanto concerne la stabilità BIBO del sistema, chiaramente si ha stabilità BIBO per tutti i valori del parametro a per cui si ha stabilità asintotica e quindi per $a<0$. Andiamo ora a verificare se esistono dei valori del parametro a per cui c'è stabilità BIBO senza che ci sia stabilità asintotica. Osservo che l'unico zero del polinomio al numeratore è $s=1$ che è instabile. Si trova che $s=1$ è anche zero del denominatore se e solo se

$$0 = d(s)|_{s=1} = 1+2-a+3-2a-3a = 6-6a$$

ovvero se e solo se $a=1$. Per $a=1$ il polinomio $d(s)$ fattorizza nella forma

$$d(s) = (s-1)(s^2+2s+3)$$

e quindi una rappresentazione irriducibile di $W(s)$ diventa

$$W(s) = \frac{2}{s^2+2s+3},$$

da cui si vede (sfruttando Cartesio) che $W(s)$ è BIBO stabile. Pertanto il sistema è BIBO stabile se e solo se $a \in (-\infty, 0) \cup \{1\}$.

iii) Il segnale di ingresso può essere riscritto in forma equivalente come

$$u(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)\delta_{-1}(t).$$

D'altra parte, come abbiamo già osservato, per $a = 1$ la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 3}.$$

La risposta di regime permanente (per condizioni iniziali nulle) all'ingresso dato è

$$y_{rp}(t) = \frac{1}{2}|W(j2)|\sin(2t + \arg W(j2)).$$

Si trova

$$W(j2) = \frac{2}{-1 + j4},$$

da cui

$$|W(j2)| = \frac{2}{\sqrt{17}} \quad \arg W(j2) = -\arg(-1 + j4) = -\tan^{-1}(-4) + \pi = \tan^{-1}(4) + \pi.$$

Esercizio 7. i) Il polinomio dell'equazione caratteristica è $d(s) = s^3 + s^2 - 2$. Sapendo che condizione necessaria affinché un polinomio sia di Hurwitz è che esso abbia i coefficienti tutti non nulli e di ugual segno, se ne deduce subito che $d(s)$ non è di Hurwitz e quindi il sistema non è asintoticamente stabile. D'altra parte la funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s-1}{s^3 + s^2 - 2} = \frac{s-1}{(s-1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2},$$

da cui, per la regola dei segni di Cartesio applicata al denominatore, posso dedurre che il sistema è BIBO stabile.

ii) La risposta in frequenza è:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(2 - \omega^2) + j2\omega},$$

iii) Osservo che $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, dove $u_1(t) = \sin t\delta_{-1}(t)$ e $u_2(t) = \delta_{-1}(t-1)$. Posto $\bar{u}_2(t) = \delta_{-1}(t)$, è immediato verificare che se calcolo le risposte forzate di $u_1(t)$ e $\bar{u}_2(t)$, attraverso il ricorso alle trasformate di Laplace, e le indico con $y_1(t)$ e $\bar{y}_2(t)$, allora la risposta forzata del sistema a $u(t)$ è

$$y_f(t) = y_1(t) + \bar{y}_2(t-1).$$

Calcolo $y_1(t)$ attraverso Laplace:

$$Y_1(s) = W(s)U_1(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}\frac{1}{s^2 + 1} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s+1)^2 + 1^2}.$$

Facendo denominatore comune al secondo membro e imponendo l'eguaglianza dei numeratori al primo ed al secondo membro, si ottiene attraverso semplici conti

$$Y_1(s) = \frac{-2/5s + 1/5}{s^2 + 1} + \frac{2/5s + 3/5}{(s+1)^2 + 1^2} = \frac{-2/5s + 1/5}{s^2 + 1} + 2/5\frac{(s+1) + 1/2}{(s+1)^2 + 1^2},$$

a cui corrisponde

$$y_1(t) = \Big[-2/5 \cos t + 1/5 \sin t + 2/5(e^{-t} \cos t + 1/2\ e^{-t} \sin t)\Big]\,\delta_{-1}(t).$$

Calcolo $\bar{y}_2(t)$ attraverso Laplace:

$$\bar{Y}_2(s) = W(s)\bar{U}_2(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+1^2}.$$

Facendo denominatore comune al secondo membro e imponendo l'eguaglianza dei numeratori al primo ed al secondo membro, si ottiene attraverso semplici conti

$$\bar{Y}_2(s) = \frac{1/2}{s} + -1/2\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1^2},$$

a cui corrisponde

$$\bar{y}_2(t) = \Big[1/2 - 1/2\ (e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t)\Big]\,\delta_{-1}(t).$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \Big[-2/5 \cos t + 1/5 \sin t + 2/5(e^{-t} \cos t + 1/2 e^{-t} \sin t)\Big]\,\delta_{-1}(t) \\ &+ \Big[1/2 - 1/2(e^{-(t-1)} \cos(t-1) + e^{-(t-1)} \sin(t-1))\Big]\,\delta_{-1}(t-1), \end{aligned}$$

la cui componente di regime permanente (la cui esistenza è teoricamente provata dal fatto che il sistema è BIBO stabile e operiamo in pura evoluzione forzata) è:

$$y_{f,rp}(t) = -2/5 \cos t + 1/5 \sin t + 1/2.$$