A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 4 febbraio 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia V il sottospazio vettoriale di equazione $x_1 - 2x_3 = 0$ e sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 1, 2)$, $u_2 = (-4, 4, -2, -3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base di V.

(b) Determinare la dimensione e una base di U e verificare che $U \subset V$.

(c) Trovare un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = V$. Tale L è unico?

(d) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e $x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Trovare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

Soluzione. (a) Dall'equazione $x_1 - 2x_3 = 0$ si ricava $x_1 = 2x_3$, quindi x_2, x_3 e x_4 sono liberi di variare. Pertanto V ha dimensione 3 e una sua base è formata dai vettori $(0, 1, 0, 0)$, $(2, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

(b) Bisogna verificare se i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti. Si trova invece che essi sono linearmente dipendenti (infatti $u_3 = 3u_1 + u_2$). Pertanto $\dim U = 2$ e una base di U è formata dai vettori u_1 e u_2. Per verificare che $U \subset V$ basta verificare che i vettori di base u_1 e u_2 verificano l'equazione di V.

(c) Dato che $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$, deve essere $\dim L = 1$. Come base di L bisogna prendere un vettore ℓ che appartenga a V ma non appartenga a U. Ci sono infinite scelte possibili di tale vettore, quindi L non è unico. Una possibile scelta è $\ell = (0, 0, 0, 1)$.

(d) Sia $u = a_1u_1 + a_2u_2 = (2a_1 - 4a_2, -a_1 + 4a_2, a_1 - 2a_2, 2a_1 - 3a_2)$ un generico vettore di U. Richiediamo che $u \in W$, quindi sostituiamo le coordinate di u nelle equazioni di W. Risolvendo queste equazioni si trova $a_1 = \frac{5}{2}a_2$, quindi possiamo porre $a_2 = 2$ e ottenere $a_1 = 5$. Usando questi valori di a_1 e a_2 si ottiene $u = (2, 3, 1, 4)$. Questo è un vettore di base di $U \cap W$, quindi $\dim(U \cap W) = 1$. Dalla formula di Grassmann si ricava $\dim(U + W) = 3$, quindi come base di $U + W$ possiamo prendere due vettori della base di U e uno dei vettori della base di W, oppure due vettori della base di W e uno dei vettori della base di U.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(1, -1, 0) = (1, -1, 0, -1), \quad f(0, -1, 1) = (0, -6, 4, -4), \quad f(1, 1, 0) = (3, 3, -4, 1).$$

(a) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche del dominio e del codominio.

(b) Trovare la dimensione e una base di $\operatorname{Im} f$ e di $\operatorname{Ker} f$.

(c) Dire per quale valore di α si ha $(6, -3, -2, \alpha) \in \operatorname{Im} f$.

(d) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ e sia U il sottospazio vettoriale di V definito da
$$U = \{\, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid f \circ g = 0 \,\}.$$
Trovare la dimensione e una base di U.

Soluzione. (a) Sommando $f(1, -1, 0) = (1, -1, 0, -1)$ con $f(1, 1, 0) = (3, 3, -4, 1)$ si ottiene $f(2, 0, 0) = (4, 2, -4, 0)$, quindi $f(1, 0, 0) = (2, 1, -2, 0)$. Questa è la prima colonna della matrice di f. Sottraendo $f(1, 0, 0) = (2, 1, -2, 0)$ da $f(1, 1, 0) = (3, 3, -4, 1)$ si ottiene $f(0, 1, 0) = (1, 2, -2, 1)$. Questa è la seconda colonna della matrice di f. Sommando $f(0, -1, 1) = (0, -6, 4, -4)$ con $f(0, 1, 0) = (1, 2, -2, 1)$ si ottiene $f(0, 0, 1) = (1, -4, 2, -3)$. Questa è la terza colonna della matrice di f. Quindi la matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Riducendo A in forma a scala si trova la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi A ha rango 2 e quindi una base di $\operatorname{Im} f$ è formata da due colonne di A. Il nucleo di f si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

Pertanto $\operatorname{Ker} f$ ha dimensione 1 e una sua base è formata dal vettore $(-2, 3, 1)$.

(c) Si ha $(6, -3, -2, \alpha) \in \operatorname{Im} f$ se e solo se il vettore $(6, -3, -2, \alpha)$ è combinazione lineare dei vettori di una base di $\operatorname{Im} f$, ad esempio delle prime due colonne di A. Da ciò si ricava $\alpha = -4$.

(d) $f \circ g = 0$ significa che $f(g(v)) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^3$. Pertanto si deve avere $g(v) \in \operatorname{Ker} f$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, quindi $\operatorname{Im} g$ deve essere contenuta in $\operatorname{Ker} f$. Ora basta ricordare che $\operatorname{Im} g$ è generata dalle colonne della matrice di g, mentre $\operatorname{Ker} f$ è generato dal vettore $(-2, 3, 1)$. La conclusione di questo ragionamento è che le matrici di queste funzioni g devono avere sulle colonne dei multipli del vettore $(-2, 3, 1)$, quindi sono tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Dato che ci sono 3 parametri a, b, c, la dimensione di U è 3 e una base di U è formata dalle matrici

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Dire se esistono valori di α tali che la matrice A sia invertibile.
(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.
(c) Determinare una base degli autospazi e dire se la matrice A è diagonalizzabile.
(d) Ora poniamo $\alpha = 0$. Dire se, per tale valore di α, la matrice A è simile alla sua trasposta A^T (la risposta deve essere giustificata).

Soluzione. (a) Calcolando il determinante di A si trova $\det A = 0$ per ogni α (infatti la terza colonna è l'opposto della prima), quindi la matrice non è invertibile per nessun valore di α.

(b) Calcolando il polinomio caratteristico si trova che esso non dipende da α (tutti gli α si semplificano), quindi anche gli autovalori non dipendono da α. Gli autovalori sono 0 (con molteplicità 1) e 1 (con molteplicità 2).

(c) Per quanto riguarda l'autospazio associato all'autovalore 0 non ci sono problemi: esso ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_1 = (1, 0, 1)$. I problemi riguardano solo l'autospazio associato all'autovalore 1, che ha molteplicità algebrica 2. Infatti calcolando gli autovettori per l'autovalore 1 si trova che se $\alpha \neq 0$ tale autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_2 = (0, -1, 1)$. In questo caso la matrice A non è diagonalizzabile perché la dimensione dell'autospazio non è uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore 1.

(d) Rimane quindi solo da vedere cosa succede se $\alpha = 0$. In tal caso si trova che l'autospazio associato all'autovalore 1 ha dimensione 2, uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore 1. Pertanto se $\alpha = 0$ la matrice A è diagonalizzabile ed è simile alla matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice A^T è simile a D^T. Ma $D^T = D$, quindi A^T è simile a D che, a sua volta è simile ad A. Per la proprietà transitiva si conclude che A^T è simile ad A.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (3, -3, 0)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto P e perpendicolare alla retta r.

(b) Determinare la proiezione ortogonale di P sulla retta r e la distanza di P da r.

(c) Sia s la retta di equazioni parametriche $x = 2 + 2t$, $y = -3t$, $z = 1 - t$. Determinare se le rette r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(d) Scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ passante per il punto $A = (1, 2, -4)$ che interseca entrambe le rette r e s. Trovare le coordinate dei punti $\ell \cap r$ e $\ell \cap s$.

Soluzione. (a) Due punti della retta r sono $R_1 = (1, 0, 2)$ e $R_2 = (0, 2, 5)$, pertanto il vettore di r è $v_r = R_2 - R_1 = (-1, 2, 3)$. Dato che il piano π deve essere perpendicolare alla retta r, la sua equazione deve essere del tipo $-x + 2y + 3z + d = 0$. Per trovare il valore di d basta imporre la condizione di passaggio per il punto P. Si trova $d = 9$, quindi l'equazione di π è $-x + 2y + 3z + 9 = 0$.

(b) La proiezione ortogonale di P sulla retta r è il punto H di intersezione tra la retta r e il piano π. Mettendo a sistema le equazioni di r e di π si trova $H = (2, -2, -1)$. La distanza di P da r è la norma del vettore $HP = (1, -1, 1)$, quindi $\operatorname{dist}(P, r) = \sqrt{3}$.

(c) Il vettore della retta s è $v_s = (2, -3, -1)$. Dato che v_s e v_r non sono proporzionali, le rette s e r non sono parallele. Mettendo a sistema le equazioni di s con quelle di r si ottiene un sistema che non ha soluzione, quindi s e r non sono incidenti. Pertanto sono due rette sghembe.

(d) Iniziamo trovando l'equazione del piano che contiene la retta r e passa per il punto A. A tal fine consideriamo il fascio di piani di asse r:

$$\lambda(2x + y - 2) + \mu(x - y + z - 3) = 0.$$

Imponendo il passaggio per A si ottiene $\lambda = 4\mu$, quindi possiamo porre $\mu = 1$ e $\lambda = 4$. In questo modo si ottiene il piano di equazione $9x + 3y + z - 11 = 0$. Per trovare il punto $\ell \cap s$ basta mettere a sistema l'equazione del piano appena trovato con l'equazione della retta s: in questo modo si trova $\ell \cap s = (0, 3, 2)$. A questo punto possiamo trovare il vettore v_ℓ della retta ℓ come differenza tra il punto $A = (1, 2, -4)$ e il punto $\ell \cap s = (0, 3, 2)$: si trova $v_\ell = (1, -1, -6)$. Possiamo quindi scrivere le equazioni parametriche della retta ℓ:

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$$

Il punto $\ell \cap r$ si può ora trovare mettendo a sistema le equazioni di ℓ con le equazioni di r. Si trova $\ell \cap r = (-1, 4, 8)$.