Soluzioni del II homework.

1. I punti di equilibrio di Σ corrispondenti a uscita di equilibrio $\bar{y} = 1$ sono:

$$(\bar{x}', \bar{u}') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \right), \qquad (\bar{x}'', \bar{u}'') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, 0 \right).$$

2.

Primo punto di equilibrio:

- il p. di eq. è stabile e anche asintoticamente stabile.
- le equazioni del sistema linearizzato attorno al p. di eq. sono:

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{\delta}_x = A'\delta_x + b'\delta_u \\ \delta_y = c'\delta_x + d'\delta_u \end{cases}$$

con

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c' = [2 \quad -2], \qquad d' = 0.$$

- la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno al p. di eq. è:

$$W'(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

- il sistema linearizzato attorno al p. di eq. è BIBO stabile.

Secondo punto di equilibrio:

- il p. di eq. non è stabile e neanche asintoticamente stabile.
- le equazioni del sistema linearizzato attorno al p. di eq. sono:

$$\Sigma'' : \begin{cases} \dot{\delta}_x = A''\delta_x + b''\delta_u \\ \delta_y = c''\delta_x + d''\delta_u \end{cases}$$

con

$$A'' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c'' = [2 \;\; 2], \qquad d'' = 0.$$

- la funzione di trasferimento del sistema linearizzato attorno al p. di eq. è:

$$W''(s) = \frac{4s - 2}{(s+1)(s-2)}$$

- il sistema linearizzato attorno al p. di eq. non è BIBO stabile.

3. Non esiste un ingresso che permette di ottenere la *feedback linearization* del sistema Σ.

Ragionamenti e i passaggi per ottenere la soluzione

1. I punti di equilibrio corrispondenti a uscita di equilibrio $\bar{y} = 1$ si ottengono risolvendo il seguente sistema nelle incognite x_1, x_2 e u:

$$\begin{cases} -x_1^2 + x_1 + u = 0 \\ 1 - x_2^2 + u = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Dalla terza equazione ricaviamo $x_1^2 = x_2^2$ e dalla seconda ricaviamo $u = x_2^2 - 1$ e quindi $u = x_1^2 - 1$, che sostituita nella prima equazione dà $-x_1^2 + x_1 + x_1^2 - 1 = 0$ ossia $x_1 = 1$ e quindi $u = 0$ e $x_2 = \pm 1$. In conclusione, **ci sono due punti di equilibrio corrispondenti a uscita di equilibrio $\bar{y} = 1$; essi sono:**

$$(\bar{x}', \bar{u}') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \right), \qquad (\bar{x}'', \bar{u}'') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, 0 \right).$$

2.

a) punto di equilibrio $(\bar{x}', \bar{u}') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \right)$.

Lo Jacobiano dell'equazione di stato calcolato nel punto di equilibrio è:

$$A' := \begin{bmatrix} -2\bar{x}_1' + 1 & 0 \\ 0 & -2\bar{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di A' sono entrambi nel semipiano complesso sinistro aperto e pertanto il punto di equilibrio $(\bar{x}', \bar{u}')$ è asintoticamente stabile e quindi anche semplicemente stabile per il sistema Σ.

Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $(\bar{x}', \bar{u}') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \right)$ è:

$$\Sigma' : \begin{cases} \dot{\delta}_x = A'\delta_x + b'\delta_u \\ \delta_y = c'\delta_x + d'\delta_u \end{cases}$$

con

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(come già calcolato in precedenza),

$$b' := \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x = \bar{x}' \\ u = \bar{u}'}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c' := \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{\substack{x = \bar{x}' \\ u = \bar{u}'}} = [2 \quad -2], \qquad d' := \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right|_{\substack{x = \bar{x}' \\ u = \bar{u}'}} = 0.$$

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è

$$W'(s) = c'(sI - A')^{-1}b' + d' = [2 \quad -2] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Come già osservato, tutti gli autovalori di A' sono nel semipiano complesso sinistro aperto e pertanto il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $(\bar{x}', \bar{u}')$ è asintoticamente e quindi anche BIBO stabile.

b) punto di equilibrio $(\bar{x}'', \bar{u}'') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, 0 \right)$.

Lo Jacobiano dell'equazione di stato calcolato nel punto di equilibrio è:

$$A'' = \begin{bmatrix} -2\bar{x}_1'' + 1 & 0 \\ 0 & -2\bar{x}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice A'' ha un autovalore nel semipiano complesso destro aperto e pertanto il punto di equilibrio $(\bar{x}'', \bar{u}'')$ **non** è stabile (e, a maggior ragione, non è asintoticamente stabile) per il sistema Σ.

Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $(\bar{x}'', \bar{u}'') = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 0 \right)$ è:

$$\Sigma'' : \begin{cases} \dot{\delta}_x = A''\delta_x + b''\delta_u \\ \delta_y = c''\delta_x + d''\delta_u \end{cases}$$

con

$$A'' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(come già calcolato in precedenza),

$$b'' := \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x = \bar{x}'' \\ u = \bar{u}''}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad c'' := \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x = \bar{x}'' \\ u = \bar{u}''}} = [2 \ \ 2], \qquad d'' := \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x = \bar{x}'' \\ u = \bar{u}''}} = 0.$$

La funzione di trasferimento del sistema linearizzato è

$$W''(s) = c''(sI - A'')^{-1}b'' + d'' = [2 \ \ 2] \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s-2} = \frac{4s-2}{(s+1)(s-2)}$$

La funzione di trasferimento $W''(s)$ ha un polo in 2 e quindi il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio **non** è BIBO stabile.

3. Un ipotetico ingresso che permetta di ottenere la *feedback linearization* del sistema Σ dovrebbe essere una funzione $u = g(x, v)$ tale che $l_1(x, v) := -x_1^2 + x_1 + g(x, v)$ e $l_2(x, v) := 1 - x_2^2 + g(x, v)$ siano entrambe funzioni lineari rispetto a x, v. In particolare, quindi, $l_1(x, v) := -x_1^2 + x_1 + g(x, v)$ deve avere la forma $l_1(x, v) = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3v$ con k_i, $i = 1, 2, 3$ costanti reali opportune. Ma allora $g(x, v) = x_1^2 - x_1 + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3v$ e quindi $l_2(x, v) = 1 - x_2^2 + x_1^2 - x_1 + k_1x_1 + k_2x_2 + k_3v$ che **non** è lineare in x, v qualunque sia la scelta delle costanti reali k_i.