ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**$2^{o}$ appello — 3 luglio 2020**

---

**Esercizio 1.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di $t$ in modo che il vettore $v = (1, -1, -1)$ sia un autovettore di $A$.

(b) Per il valore di $t$ trovato al punto (a) scrivere il polinomio caratteristico e trovare tutti gli autovalori reali di tale matrice.

(c) Per il valore di $t$ trovato al punto (a), la matrice $A$ è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali? Quale sarebbe la risposta se lavorassimo nel campo dei numeri complessi?

(d) Esiste un valore di $t$ per il quale è possibile trovare una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$? [*la risposta deve essere giustificata*]

**Soluzione.** (a) Se il vettore $v$ deve essere autovettore di $A$ si deve avere

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ove $\lambda$ è l'autovalore corrispondente. Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ -1 = -\lambda \\ -3 - t = -\lambda \end{cases}$$

da cui si ricava $\lambda = 1$ e $t = -2$.

(b) Il polinomio caratteristico è

$$\det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 1 & -2 \\ 1 & -1 - \lambda & 3 \\ -2 & -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 1 - \lambda^3 = (1 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

Ponendo $1 - \lambda = 0$ si trova l'autovalore reale $\lambda = 1$, con molteplicità 1. Ponendo $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ si trovano le soluzioni

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

e quindi ci sono anche due autovalori complessi

$$\lambda = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

(c) La matrice non è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali perché non ha tutti i suoi autovalori reali. Invece nel campo dei numeri complessi ci sono tre autovalori distinti

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

e quindi la matrice è diagonalizzabile.

(d) Affinché esista una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $A$, la matrice $A$ deve essere simmetrica. L'unico valore per cui $A$ è simmetrica è $t = 3$.

**Esercizio 2.** In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale sia $U$ il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base ortogonale di $U$.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Dato $v = (3, 0, -2, 6)$ si trovino dei vettori $u \in U$ e $w \in U^\perp$ tali che $v = u + w$.

(d) Si scriva la matrice $G$ del prodotto scalare nel sottospazio $U^\perp$ rispetto alla base trovata nel punto (b).

**Soluzione.** (a) Si ha

$$U : \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_4 = 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che una base di $U$ è formata dai vettori $u_1 = (1, 0, 1, 1)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 2)$. Questi due vettori non sono ortogonali, quindi usiamo il procedimento di Gram–Schmidt:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 = (1, 0, 1, 1) \\ u_2' &= u_2 + \alpha u_1' \end{aligned}$$

Ora imponiamo che $u_1' \cdot u_2' = 0$ da cui ricaviamo $\alpha = -\frac{u_1 \cdot u_2}{u_1 \cdot u_1} = -\frac{2}{3}$. Si ha quindi

$$u_2' = u_2 - \frac{2}{3}u_1 = \left(-\frac{2}{3}, 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

I vettori $u_1'$ e $u_2'$ formano una base ortogonale di $U$.

(b) I vettori formati dai coefficienti delle equazioni di $U$, cioè i vettori

$$w_1 = (1, 0, -1, 0), \qquad w_2 = (0, 2, 1, -1)$$

sono una base di $U^\perp$.

(c) Vogliamo scrivere $v$ come $v = u + w$. Dato che $w \in U^\perp$ si deve avere

$$w = aw_1 + bw_2 = (a, 2b, -a + b, -b)$$

Si ha poi

$$u = v - w = (3 - a, -2b, -2 + a - b, 6 + b)$$

Dato che $u \in U$ le sue coordinate devono soddisfare le equazioni di $U$. Sostituendo quindi il vettore $u = (3 - a, -2b, -2 + a - b, 6 + b)$ nelle equazioni di $U$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2a - b = 5 \\ a - 6b = 8 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

I vettori $u$ e $w$ sono quindi

$$u = (1, 2, 1, 5), \qquad w = (2, -2, -3, 1).$$

(d) In base alla definizione, la matrice $G$ del prodotto scalare nel sottospazio $U^\perp$ rispetto alla base trovata nel punto (b) è:

$$G = \begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & w_1 \cdot w_2 \\ w_2 \cdot w_1 & w_2 \cdot w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 3.** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (4, -3, -1)$ sulla retta $r$.

(b) Stabilire se $r$ e $s$ sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente la retta $r$ e parallelo alla retta $s$.

(d) Determinare due punti $R \in r$ e $S \in s$ tali che la retta passante per $R$ e $S$ sia perpendicolare ad entrambe le rette $r$ e $s$.

**Soluzione.** (a) Consideriamo due punti $R_1 = (0, 1, 1)$, $R_2 = (1, 0, -1)$ sulla retta $r$. Il vettore direttore della retta $r$ è $v_r = R_2 - R_1 = (1, -1, -2)$ e quindi un generico punto di $r$ ha coordinate $X = R_1 + tv_r = (t, 1 - t, 1 - 2t)$. Consideriamo il vettore $w = X - P = (t - 4, 4 - t, 2 - 2t)$, tale vettore deve essere ortogonale al vettore $v_r$, quindi si deve avere $v_r \cdot w = 0$. Si ottiene l'equazione $6t - 12 = 0$ da cui si ricava $t = 2$. Sostituendo questo valore di $t$ nel punto $X = (t, 1 - t, 1 - 2t)$ si ottiene il punto $H = (2, -1, -3)$ che è la proiezione ortogonale di $P$ sulla retta $r$.

(b) Per vedere se $r$ e $s$ sono incidenti mettiamo a sistema le equazioni di $r$ e quelle di $s$. Si ottiene un sistema con 4 equazioni che non ammette soluzioni, quindi le due rette non sono incidenti. Consideriamo due punti $S_1 = (2, 1, 0)$, $S_2 = (2, 3, 1)$ sulla retta $s$. Il vettore direttore della retta $s$ è $v_s = S_2 - S_1 = (0, 2, 1)$. Si vede quindi che i vettori $v_r$ e $v_s$ non sono proporzionali, quindi le rette $r$ e $s$ non sono parallele. Si conclude che $r$ e $s$ sono due rette sghembe.

(c) Il piano $\pi$ contiene la retta $r$ (quindi contiene il punto $R_1$) ed è parallelo ai vettori $v_r$ e $v_s$, quindi le sue equazioni parametriche sono

$$\pi : \begin{cases} x = 0 + a \\ y = 1 - a + 2b \\ z = 1 - 2a + b \end{cases}$$

Eliminando i parametri $a$ e $b$ da questo sistema si ottiene l'equazione cartesiana del piano $\pi$:

$$\pi : 3x - y + 2z - 1 = 0.$$

(d) Un generico punto di $r$ ha coordinate $X = R_1 + tv_r = (t, 1 - t, 1 - 2t)$. Analogamente, un generico punto di $s$ ha coordinate $Y = S_1 + \ell v_s = (2, 1 + 2\ell, \ell)$. Il vettore che congiunge $X$ e $Y$ è

$$Y - X = (2 - t, 2\ell + t, \ell + 2t - 1).$$

Questo vettore deve essere ortogonale a $v_r$ e a $v_s$, cioè si deve avere $(Y-X)\cdot v_r = 0$ e $(Y-X)\cdot v_s = 0$. Si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} -6t - 4\ell + 4 = 0 \\ 5\ell + 4t - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \ell = -5/7 \\ t = 8/7 \end{cases}$$

Sostituendo questi valori nei punti $X$ e $Y$ si trovano i seguenti punti:

$$R = \left(\frac{8}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}\right), \qquad S = \left(2, -\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right).$$