Lezione 26 - 23/05/2024

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$

b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$

c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$

d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$

e) l'**impulso** $s(t) = A\, \delta(t)$

f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\, \delta(t-t_0)$

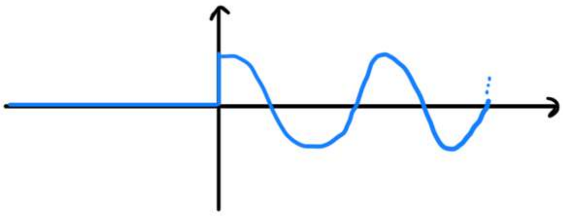
g) i segnali $s(t) = t^k\, e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s

h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

$x(t) = \cos(\omega_0 t)\,1(t)$

$X(s) = ?$

$\Gamma_x = ?$



SOL. POTREI USARE LA DEFINIZIONE E SCRIVERE IL COSENO CON EULERO

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{\overbrace{j\omega_0}^{s_1 = j\omega_0} t}\, 1(t) + \frac{1}{2} e^{\overbrace{-j\omega_0}^{s_2 = -j\omega_0} t}\, 1(t)$$

MA NOI CONOSCIAMO GIÀ UNA T.L. (lezione scorsa)

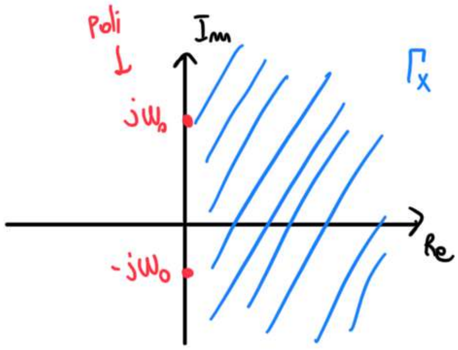
$$e^{s_0 t}\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s - s_0} \qquad \{Re[s] > Re[s_0]\}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega_0}$$

$$\{Re[s] > \underbrace{Re[\cancel{j}\omega_0]}_{0}\} \qquad \{Re[s] > \underbrace{Re[-\cancel{j}\omega_0]}_{0}\}$$

$$X(s) = \frac{1}{2}\frac{s + j\omega_0 + s - j\omega_0}{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\Gamma_x = \{Re[s] > 0\}$$



POLI: VALORI CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE : $s^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow s^2 = -\omega_0^2$

$\rightarrow s = \pm j\omega_0$

LA TRASFORMATA DEL COSENO È FONDAMENTALE

X casa: es. 1b

$$\sin(\omega_0 t)\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \qquad \Gamma = \{Re[s] > 0\}$$

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$

b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$

c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$

d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$

e) l'**impulso** $s(t) = A\,\delta(t)$

f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\,\delta(t-t_0)$

g) i segnali $s(t) = t^k e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s

h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

$x(t) = 1(t)$

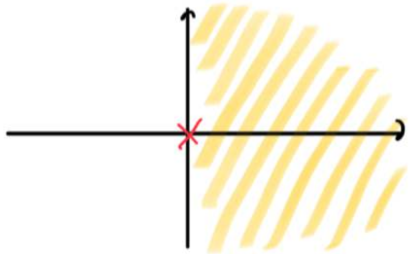
$X(s) = ?$

Sol. SAPPIAMO CHE

$$\cos(\omega_0 t)\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$e^{s_0 t}\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s-s_0}$$

$X(s) = \frac{1}{s}$



perché $\cos(\omega_0 t)\, 1(t) \longrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

se pongo $\omega_0 = 0$

$\underset{1}{\cancel{\cos(0)}}\, 1(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$

b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$

c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$

d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$

e) l'**impulso** $s(t) = A\,\delta(t)$

f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\,\delta(t-t_0)$

g) i segnali $s(t) = t^k e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s

h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

$x(t) = \mathrm{rect}(t)$

$X(s) = ?$

SOL. USO LA DEFINIZIONE

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{s}{2}} - e^{+\frac{s}{2}}}{-s} = \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{-s}$$

HA DEI POLI QUESTA FUNZIONE? $\quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\, e^{-0\cdot t}\, dt = 1$

NO.

QUINDI: $\quad X(s) = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \dfrac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s} & s \neq 0 \end{cases} \qquad \Gamma_x = \mathbb{C}$

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$
b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$
c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$
d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$
e) l'**impulso** $s(t) = A\,\delta(t)$
f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\,\delta(t-t_0)$
g) i segnali $s(t) = t^k e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s
h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

$x(t) = \delta(t)$

$X(s) = ?$

SOL. INTEGRALE:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = 1 \qquad \Gamma_x = \mathbb{C}$$

proprietà rivelatrice della delta (campiona segnale in $x=0$)

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$

b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$

c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$

d) il **rettangolo** $s(t) = rect(t)$

e) l'**impulso** $s(t) = A\, \delta(t)$

f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\, \delta(t-t_0)$

g) i segnali $s(t) = t^k e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s

h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

$$x(t) = \delta(t-t_0)$$
$$X(s) = ?$$

Sol. PER LA REGOLA DI TRASLAZIONE

$$X(s) = 1 \cdot e^{-st_0} = e^{-st_0}$$

SE AVESSIMO FATTO L'INTEGRALE:

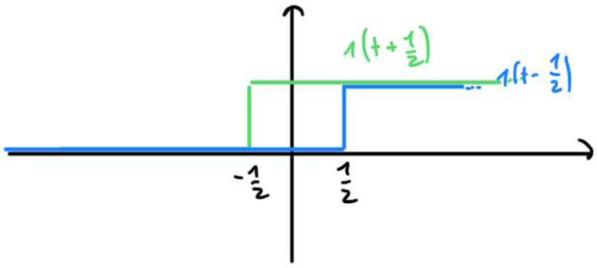
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, e^{-st}\, dt = e^{-st_0}$$

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\ 1(t)$
b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\ 1(t)$
c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$
d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$
e) l'**impulso** $s(t) = A\ \delta(t)$
f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\ \delta(t\text{-}t_0)$
g) i segnali $s(t) = t^k\ e^{s_0 t}\ 1(t)$, sfruttando la derivazione in s
h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

STAVOLTA USIAMO REGOLA DI TRASLAZIONE



$$x(t) = rect(t) = 1\left(t + \frac{1}{2}\right) - 1\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}$$

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)\, e^{-st_0}$$

TRASLAZ. $-\frac{1}{2}$ TRASLAZ. $\frac{1}{2}$

$$rect(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} e^{\frac{s}{2}} - \frac{1}{s} e^{-\frac{s}{2}} = \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s}$$

ROC: $\{Re[s] > 0\}$

SE SCRIVO: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$e^{\frac{s}{2}} = 1 + \frac{s}{2} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-\frac{s}{2}} = 1 - \frac{s}{2} + \frac{\left(-\frac{s}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3}{3!}$$

$$\frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{s} = 1 + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^2}{3!} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^6}{6!}$$

ESERCIZIO DI APPLICAZIONE REGOLA DI MODULAZIONE

$$1(t) \xrightarrow{s} \frac{1}{s} \qquad \Gamma = \{Re[s] > 0\}$$

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) la **sinusoide** $s(t) = \cos(\omega_0 t)\, 1(t)$
b) la sinusoide $s(t) = \sin(\omega_0 t)\, 1(t)$
c) Il **gradino** $s(t) = 1(t)$
d) il **rettangolo** $s(t) = \mathrm{rect}(t)$
e) l'**impulso** $s(t) = A\, \delta(t)$
f) l'**impulso** traslato $s(t) = A\, \delta(t-t_0)$
g) i segnali $s(t) = t^k e^{s_0 t}\, 1(t)$, sfruttando la derivazione in s
h) Le derivate dell'impulso $s(t) = \delta^{(k)}(t)$

$$x(t) = t^K e^{s_0 t} \, 1(t) \qquad K \geq 0$$

$$X(s) = \ ?$$

Sol. IPOTIZZIAMO $K = 0$

$K = 0$: $$x_0(t) = e^{s_0 t} \, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s - s_0} \qquad Re[s] > Re[s_0]$$

$K = 1$: $$x_1(t) = t \, x_0(t) \xrightarrow{\alpha} -X_0'(s) = -\cancel{1} \cdot (\cancel{-1}) \frac{1}{(s-s_0)^2}$$

$K = 2$: $$x_2(t) = t \, x_1(t) \xrightarrow{\alpha} -X_1'(s) = -1 \cdot \frac{-2}{(s-s_0)^3}$$

$K = 3$: $$x_3(t) = t \, x_2(t) \xrightarrow{\alpha} -X_2'(s) = -1 \frac{(-3 \cdot 2)}{(s-s_0)^4} = \frac{3!}{(s-s_0)^4}$$

$K = 4$: $$x_4(t) = t \, x_3(t) \xrightarrow{\alpha} -X_3'(s) = -1 \frac{(-4 \cdot 3!)}{(s-s_0)^5} = \frac{4!}{(s-s_0)^5}$$

PER INDUZIONE:

K GENERICO: $$x_K(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{K!}{(s-s_0)^{K+1}}$$

QUINDI: $$\frac{t^K e^{s_0 t}}{K!} \, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{K!}{(s-s_0)^{K+1}} \qquad \{Re[s] > Re[s_0]\}$$

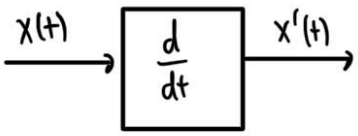
Esempio derivazione nel tempo

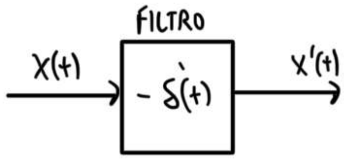
$$x(t) = 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s} \qquad \Gamma_x = \{Re[s] > 0\}$$

$$y(t) = x'(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = s\,X(s) = s \cdot \frac{1}{s} = 1 \qquad \Gamma_y = \mathbb{C}$$

$$z(t) = x''(s) = \delta'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s\,Y(s) = s$$

RISPOSTA IMPULSIVA
DI UN BLOCCO DI DERIVAZIONE





$$\frac{\partial^k \delta(t)}{\partial t^k} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^k \qquad \Gamma = \mathbb{C}$$

derivata k-esima = filtro che dà in uscita derivata di ordine k

Usiamo la regola di integrazione

$$1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s}$$

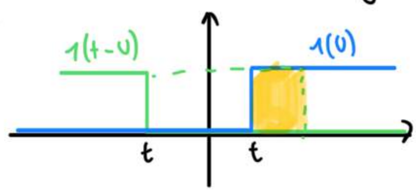
$$t \cdot 1(t) = 1 * 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{t^2}{2} \cdot 1(t) = 1 * 1 * 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s^3}$$

$$\frac{t^3}{3!} \cdot 1(t) = 1 * 1 * 1 * 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s^4}$$

$$\frac{t^4}{4!} \cdot 1(t) = 1 * 1 * 1 * 1 * 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s^5}$$

RICORDA: la convoluzione tra un gradino e sé stesso:



É LA RAMPA

$$\frac{t^K 1(t)}{K!} \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s^{K+1}} \qquad \{Re[s] > 0\}$$

REGOLA MODULAZIONE

$$\frac{t^K e^{s_0 t} 1(t)}{K!} \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{(s-s_0)^{K+1}} \qquad \{Re[s] > Re[s_0]\}$$

QUESTE REGOLE VANNO IMPARATE PER FARE GLI ESERCIZI