Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 6

(1) Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 0.5$ kg poggia sul tratto orizzontale di una guida e viene lanciato orizzontalmente, con velocità $\vec{v_0}$, verso un secondo corpo di massa $m_2 = 1$ kg che è posto in quiete all'inizio del tratto curvo della guida. Tale tratto finisce a una quota $h_0 = 50$ cm con una pendenza rispetto all'orizzontale pari a $\theta = 45°$. Sapendo che dopo l'urto il corpo che prosegue verso destra raggiunge la sommità della guida e ricade al suolo a una distanza d = 1 m da essa, determinare il modulo di $\vec{v_0}$ a seconda che l'urto sia:

1. perfettamente elastico;
2. completamente anelastico.

[*Trascurare ogni tipo di attrito.*]

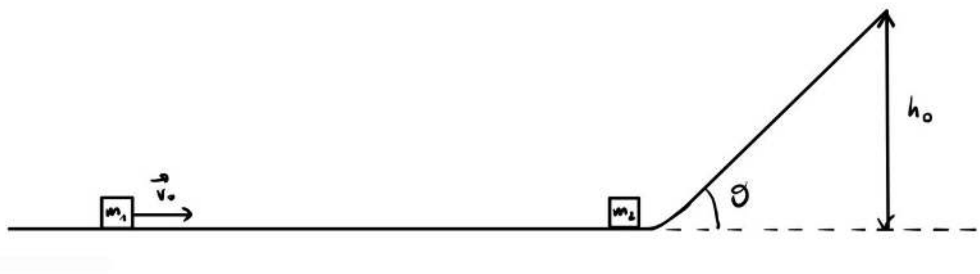

Figura 1: Rappresentazione grafica problema 1

(2) Un corpo agganciato a una molla di costante elastica $k = 4 \cdot 10^4$ N/m e inizialmente a riposo esplode dividendosi in due frammenti. Di questi, il primo, di massa $m_1 = 4$ kg, viene proiettato in avanti con velocità $v_1 = 12$ m/s; il secondo, di massa $m_2 = 1$ kg, rimanendo vincolato alla molla, viene proiettato all'indietro (verso la molla stessa) e, dopo averla compressa, inizia a oscillare. Determinare:

1. il valore Δx della massima compressione della molla;
2. l'energia meccanica totale del sistema dopo l'esplosione.

(3) Una cassa piena di sabbia di massa M = 50 kg poggia su un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$ ed è in quiete. Contro la cassa viene sparato orizzontalmente un proiettile di massa m = 1000 g. Il proiettile si conficca nella cassa alla velocità $v_0 = 300$ m/s e ne emerge dalla parete opposta alla velocità (sempre orizzontale) $v_1 = 50$ m/s; la cassa, invece, dopo l'urto si mette in moto. Determinare:

1. l'energia W_1 dissipata nel processo d'urto;
2. il tempo impiegato dalla cassa per fermarsi;
3. l'energia W_2 dissipata per attrito.

4. Un proiettile di massa m = 150 g colpisce orizzontalmente, con velocità v_0, un corpo di massa M = 600 g, appeso a un perno orizzontale per mezzo di un filo ideale di lunghezza l = 100 cm. Sapendo che l'urto tra i due corpi è completamente anelastico, si determini:

   1. il minimo valore, $v_{0,min}$, della velocità del proiettile in corrispondenza del quale il sistema corpo+proiettile riesce a fare un giro completo intorno al perno senza che il filo si allenti;
   2. la percentuale ϵ di energia persa nella collisione.

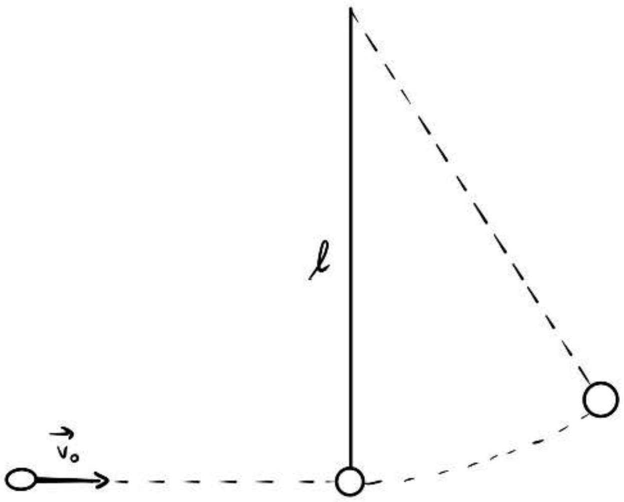

Figura 2: Rappresentazione grafica problema 4

5. Come indicato in Figura 3, i corpi 1, di massa $m_1 = m = 1.5$ kg, e 2, di massa $m_2 = 2m$, si trovano su uno stesso piano orizzontale. A un certo istante il corpo 1 viene lanciato con velocità iniziale $v_0 = 6$ m/s verso il corpo 2, inizialmente in quiete; l'urto tra i due è perfettamente elastico. A destra del corpo 2 vi è una molla ideale (di massa trascurabile), di costante elastica k = 300 N/m, il cui estremo destro è vincolato al piano di appoggio; la molla è inizialmente a riposo e il suo estremo sinistro si trova a una distanza d = 80 cm dalla posizione iniziale del corpo 2. Sapendo che il piano di appoggio è liscio (attrito trascurabile) e trattando i due corpi come puntiformi, determinare:

   1. le velocità v_1 e v_2 dei due corpi subito dopo l'urto (specificandone anche il segno);
   2. la massima compressione Δl della molla;
   3. dire se dopo l'urto menzionato i corpi 1 e 2 si incontrano di nuovo e, nel caso, determinare l'intervallo di tempo Δt tra il primo e il secondo urto.

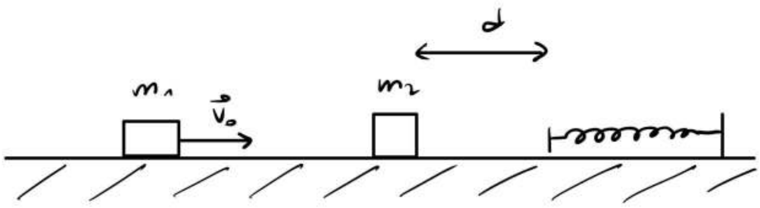

Figura 3: Rappresentazione grafica problema 5

6. Una pallina di massa $m_1 = 100$ g muovendosi su un piano orizzontale liscio con velocità $v_0 = 0.1$ m/s urta centralmente una seconda pallina di massa $m_2 = 200$ g poggiata sullo stesso piano e in quiete. La pallina 2 è ancorata all'estremo libero di una molla ideale (l'altro estremo è fissato al piano), di costante elastica k = 1 N/m, disposta lungo la direzione di moto (vedi Figura 4). Determinare la massima compressione della molla a seconda che l'urto tra le due sia:

1. elastico;
2. perfettamente anelastico.

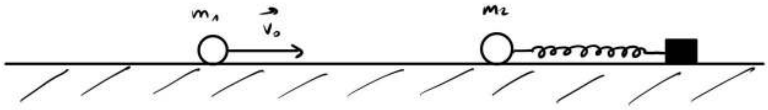

Figura 4: Rappresentazione grafica problema 6

(7) Un cuneo ha altezza massima h = 200 cm. La superficie piana superiore del cuneo è inclinata di una angolo $\theta = 25°$ rispetto all'orizzontale (vedi Figura 5) e su di essa, nel suo punto centrale, è appoggiato un corpo di massa $m_2 = 5$ kg in quiete. Dalla sommità del cuneo viene lanciato verso il corpo 2 un corpo di massa $m_1 = 1$ kg con una velocità $v_0 = 5$ m/s. La collisione tra i due corpi è perfettamente elastica. Sapendo che quando i corpi sono in movimento risentono di attrito caratterizzato da un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.6$ e che il cuneo rimane fermo, determinare:

1. la velocità con cui il corpo 1 urta il corpo 2;
2. la velocità dei due corpi immediatamente dopo l'urto;
3. la velocità finale o la quota di arresto del corpo 2, a seconda che raggiunga o meno il punto più basso del cuneo.

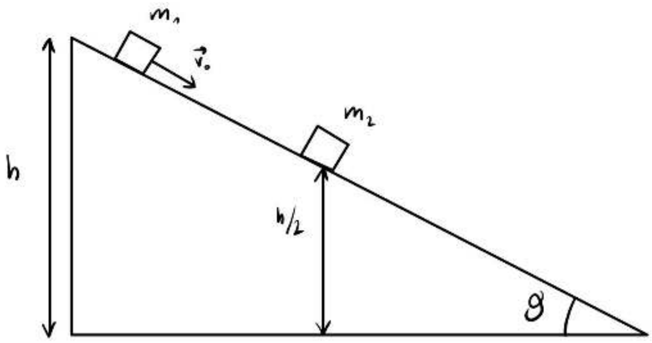

Figura 5: Rappresentazione grafica problema 7

Prima di procedere con gli esercizi, vediamo un breve riepilogo delle considerazioni valide per gli urti tra più corpi:

URTI

In questo capitolo sono trattati esclusivamente gli urti tra due punti materiali. Durante l'urto si sviluppano forze notevoli che però sono interne e non modificano il moto del centro di massa. In tali urti pertanto si conserva sempre la quantità di moto: il valore prima dell'urto e quello dopo l'urto sono eguali. Il risultato resta vero anche se durante l'urto agiscono forze esterne non impulsive, che cioè non possono variare rapidamente in tempi molto brevi, come sono i tempi di durata degli urti: quindi anche se agiscono ad esempio la forza peso o la forza elastica, queste non fanno praticamente variare la quantità di moto totale nel tempo dell'urto e la legge di conservazione della quantità di moto nell'urto resta valida.

Invece di norma in un urto tra due punti non si conserva l'energia e si dice che l'urto è anelastico; in particolare l'urto è completamente anelastico se i due punti restano attaccati dopo l'urto. Quando l'energia si conserva l'urto è detto elastico. Abbiamo parlato di conservazione o non conservazione dell'energia meccanica: in realtà nel breve istante dell'urto la posizione dei punti non cambia e l'energia potenziale non varia, per cui è l'energia cinetica totale che resta costante o subisce una variazione. In questo secondo caso si tratta sempre di una diminuzione, perché agiscono forze interne dissipative.

È bene quindi fare attenzione all'uso delle leggi di conservazione nei problemi d'urto tra due punti. Riepilogando schematicamente la situazione:

a) QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

PRIMA DELL'URTO: varia se agiscono forze esterne, è costante se $\vec{F}^{(e)} = 0$;

DURANTE L'URTO: è costante $\Rightarrow \vec{P}(t-\Delta t) = \vec{P}(t+\Delta t)$;

DOPO L'URTO: varia se agiscono forze esterne, è costante se $\vec{F}^{(e)} = 0$;

b) ENERGIA MECCANICA TOTALE

PRIMA DELL'URTO: è costante se tutte le forze sono conservative, con eventuali trasformazioni da una forma di energia all'altra; non è costante se agiscono forze dissipative;

DURANTE L'URTO: E_p è costante, ma E_k in generale diminuisce; solo se è detto esplicitamente che l'urto è elastico si può assicurare E_k costante;

DOPO L'URTO: vale quanto scritto per prima dell'urto.

In definitiva, quindi, per un sistema isolato di due corpi vale la seguente tabella riepilogativa:

	CONSERVAZIONE QUANTITÀ DI MOTO	CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA TOTALE
URTO ELASTICO	✓	✓
URTO ANELASTICO	✓	✗
URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO	✓	✗

I CORPI RIMANGONO ATTACCATI DOPO L'URTO ←

ES. 1

Dal momento che in questo problema ci vengono date le condizioni finali, partiamo dalla seconda parte del moto, in particolare del moto parabolico che il corpo che prosegue verso destra dopo l'urto effettuerà uscendo dalla guida. Indicando con v_u il modulo della velocità del corpo all'uscita dalla guida e decomponendo il moto lungo l'orizzontale e la verticale, le equazioni orarie del corpo sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = v_u \cos\theta \cdot t \\ y(t) = h_0 + v_u \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Imponendo le condizioni del problema, si ottiene

$$d = v_u \cos\theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{d}{v_u \cos\theta}$$

e anche

Sostituendo al posto di t l'espressione definita poco fa

$$0 = h_0 + v_u \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = h_0 + d \tan\theta - \frac{g d^2}{2 v_u^2 \cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow v_u^2 = \frac{g d^2}{2(h_0 + d\tan\theta)\cos^2\theta}$$

Da quest'ultima relazione, ricordando che $\theta = 45°$, si ricava

$$v_u = \sqrt{\frac{g d^2}{h_0 + d}} = 2.56 \ m/s$$

Ora, se l'urto tra i corpi è perfettamente elastico, è il corpo 2 (da solo) che raggiungerà la sommità della guida. Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra il punto di collisione e la sommità della guida, dovrà essere

Non agiscono forze di attrito

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 v_u^2 + m_2 g h_0 \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_u^2 + 2 g h_0} = 4.04 \ m/s$$

dove v_2 è la velocità del corpo 2 dopo l'urto con il corpo 1.
In tale urto si conserva sia la quantità di moto sia l'energia cinetica del sistema costituito dai due corpi e quindi deve essere

$$\begin{cases} m_1 v_{1,0} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_{1,0}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

In queste due equazioni, portando i termini con m_1 a primo membro e sottraendo membro a membro le due relazioni ottenute, si ricava la seguente

$$v_1 = v_2 - v_{1,0}$$

che inserita nella prima equazione definita nel sistema appena riportato, ci permette di scrivere

$$v_{1,0} = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v_2$$

Quindi, essendo la guida priva di attrito, il valore di v_0 é

$$v_0 = v_{1,0} = \frac{m_1+m_2}{2m_1} v_2 = 6.06 \ m/s$$

dove si é usato il valore di v_2 ottenuto prima.

Assumendo invece che l' urto tra i corpi sia completamente anelastico, sono i corpi uniti che raggiungono la sommità della guida. Applicando la conservazione dell' energia meccanica tra il punto di collisione e la sommità della guida, dovrà essere

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2) V^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2) v_u^2 + (m_1+m_2) g h_0$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{v_u^2 + 2gh_0} = 4.04 \ m/s$$

dove ora V é la velocità del corpo unione di 1 e 2 dopo l'urto. Si noti che V é identica alla v_2 calcolata in precedenza; questo é dovuto all' assenza di attrito.
Nell' urto si conserva solo la quantità di moto del sistema e quindi

$$m_1 v_{1,0} = m_1 v_0 = (m_1+m_2) V \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{m_1+m_2}{m_1} V = 12.1 \ m/s$$

$\boxed{\text{Es. 2}}$

L' esplosione é un fenomeno impulsivo, durante il quale la forza elastica della molla può essere trascurata; sicché le conseguenze possono essere valutate considerando l' oggetto come un sistema isolato. Applicando la conservazione della quantità di moto, si ha

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

dalla quale si ricavano la velocità v_2 della massa m_2 un istante dopo l' esplosione e la sua energia cinetica

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2m_2}$$

Quindi, tenendo presente l' energia cinetica della massa m_1, l' energia meccanica totale é

$$E_{tot} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = 1440 \ J$$

La massima compressione della molla si ha quando, nella successiva fase di moto, la massa m_2 converte tutta la sua energia cinetica in energia elastica della molla

$$\frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = K_2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2m_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{\frac{m_1^2 v_1^2}{k m_2}} = 24 \ cm$$

ES. 3

Essendo molto elevate le velocità di entrata e uscita del proiettile, supporremo che il processo d'urto con la cassa sia sufficientemente rapido da poterlo considerare istantaneo. In tali condizioni, per il sistema proiettile + cassa possiamo imporre la conservazione della quantità di moto e scrivere la seguente

$$m v_0 = m v_1 + M V \implies V = \frac{m}{M}(v_0 - v_1) = 5 \ m/s$$

dove V è la velocità della cassa subito dopo la fuoriuscita del proiettile.
La conoscenza di tale velocità ci permette di valutare l'energia cinetica della cassa dopo l'urto e di verificare, come detto nel testo del problema, che l'energia cinetica totale del sistema non è conservata. In effetti, l'energia dissipata nel processo d'urto può essere ricavata come segue

$$W_1 = K_i - K_f = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} M V^2$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} \frac{m^2}{M}(v_0 - v_1)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{M}\left[M(v_0 + v_1) - m(v_0 - v_1)\right](v_0 - v_1) = 4.31 \cdot 10^4 \ J$$

Dopo l'urto la cassa si muove di moto uniformemente decelerato con velocità iniziale V e accelerazione $a = -F_a/M = -\mu_d g$. Il tempo in cui essa si ferma è quindi

$$v(t_1) = V - \mu_d g t_1 = 0 \implies t_1 = \frac{V}{\mu_d g} = \frac{m}{\mu_d g M}(v_0 - v_1) = 0.728 \ s$$

In tale intervallo di tempo l'energia cinetica acquisita dalla cassa nell'urto con il proiettile viene totalmente dissipata. Quindi, la risposta alla terza domanda è

$$W_2 = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v_0 - v_1)^2 = 625 \ J$$

ES. 4

Nella collisione tra proiettile e corpo si conserva solo la quantità di moto e quindi

$$m v_0 = (m + M) v_1 \implies v_1 = \frac{m}{m + M} v_0$$

dove v_1 è la velocità del sistema corpo + proiettile subito dopo l'urto.
Dopo l'urto, la traiettoria del sistema corpo + proiettile sarà circolare, a patto che la tensione del filo non si annulli mai. Conseguentemente, se vogliamo che il sistema corpo + proiettile effettui un giro completo lungo una circonferenza (di raggio l), alla sommità della

traiettoria il modulo della tensione del filo deve essere ancora ≥ 0. Quindi, dato che in tale punto le forze $\vec{T}$ (con modulo pari alla tensione del filo) e $(m+M)\vec{g}$ agenti sul corpo sono parallele e dirette verso il basso, dovremo avere che

$$T + (m+M)g = F_c$$

dove F_c è pari alla forza centripeta. Di conseguenza, detta v_2 la velocità del sistema corpo+proiettile in tale punto, possiamo ricavare

$$T = F_c - (m+M)g \geq 0$$

E sapendo che $F_c = (m+M)\frac{v_2^2}{\ell} \Rightarrow (m+M)\frac{v_2^2}{\ell} \geq (m+M)g \Rightarrow v_2^2 \geq g\ell$

Infine, ricordando che lungo la traiettoria si conserva l'energia meccanica, abbiamo

$$\frac{1}{2}(m+M)v_1^2 = 2(m+M)g\ell + \frac{1}{2}(m+M)v_2^2 \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 + 4g\ell$$

E quindi dalle precedenti relazioni si ricava

$$v_1^2 \geq 5g\ell \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{(m+M)^2}{m^2}5g\ell \Rightarrow v_0 \geq v_{0,min} = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{5g\ell} = 35 \text{ m/s}$$

La frazione di energia persa nella collisione è quindi pari a:

$$\mathcal{E} = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)v_1^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{m - \frac{m^2}{(m+M)}}{m} = \frac{M}{m+M} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Corrispondente all'80%

$\boxed{\text{Es. 5}}$

Il corpo 1 raggiunge il 2 con velocità v_0. Nell'urto elastico con il corpo 2 si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica; possiamo quindi scrivere le seguenti

$$\begin{cases} m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \\ m_1v_0^2 = m_1v_1^2 + m_2v_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(v_0 - v_1) = m_2v_2 \\ m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_2v_2^2 \end{cases}$$

Tenendo presente che $v_0^2 - v_1^2 = (v_0+v_1)(v_0-v_1)$ e dividendo membro a membro le equazioni di destra, si ottiene la seguente

$$v_0 + v_1 = v_2$$

Sostituendo questa nella prima equazione del sistema precedente, si ricava

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_0 + m_2 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 = \frac{m - 2m}{m + 2m} v_0 = -\frac{1}{3} v_0 = -2 \ m/s$$

Di conseguenza si avrà: $v_2 = v_0 + v_1 = v_0 - \frac{1}{3} v_0 = \frac{2}{3} v_0 = 4 \ m/s$

Quindi il corpo 1 torna indietro con velocità $v_1 = -\frac{1}{3} v_0$. Invece, il corpo 2 procede verso la molla con velocità $\frac{2}{3} v_0$ percorrendo il tratto di lunghezza d in un tempo

$$t_1 = \frac{d}{v_2} = \frac{3d}{2v_0} = 0.2 \ s$$

A questo punto, la molla comprimendosi ridurrà la velocità del corpo 2 fino ad annullarla e, successivamente, lo rilancerà indietro con una velocità speculare a quella con il quale esso è arrivato.
Questo è frutto della conservazione dell'energia meccanica, tramite la quale possiamo determinare la massima compressione Δl della molla come segue

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{m_2 v_2^2}{k}} = \sqrt{\frac{8 m v_0^2}{9k}} = 40 \ cm$$

Si noti che, durante la compressione e il successivo riallungamento della molla, il moto del corpo è assolutamente identico a quello che esso avrebbe avuto nella prima metà dell'oscillazione che si sarebbe ottenuta nel caso in cui esso fosse rimasto agganciato alla molla!
Questa considerazione ci deve far capire che il tempo che intercorre tra l'inizio e la fine della compressione della molla è pari a metà del periodo della suddetta oscillazione e cioè

$$t_2 = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} = \pi \sqrt{\frac{2m}{k}} = 0.314 \ s$$

Successivamente, il corpo 2 ripercorre a ritroso il tratto di lunghezza d che lo separava inizialmente dalla molla con la stessa velocità (in modulo) di prima; ovviamente impiegherà lo stesso tempo di prima, t_1, a coprire tale distanza.

Riassumendo: dopo un tempo $\Delta t = 2t_1 + t_2$ il corpo 2 si ritrova nella posizione iniziale con velocità $-\frac{2}{3} v_0$; nello stesso istante il corpo 1, che viaggia alla velocità $-\frac{1}{3} v_0$, si trova ad una distanza

$$d_1 = \frac{1}{3} v_0 (2t_1 + t_2)$$

alla sinistra del corpo 2.
Considerando un asse x diretto verso destra con origine nella posizione attuale del corpo 2 (identica a quella iniziale) e iniziando a misurare il tempo da tale istante, le equazioni orarie dei corpi sono le seguenti

$$\begin{cases} x_1(t) = -d_1 - \frac{1}{3} v_0 t \\ x_2(t) = -\frac{2}{3} v_0 t \end{cases}$$

Conseguentemente, i due corpi si incontreranno di nuovo quando

$$x_1(t^*) = x_2(t^*) \Rightarrow -d_1 - \frac{1}{3}v_0 t^* = -\frac{2}{3}v_0 t^*$$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{1}{3}v_0 t^* \Rightarrow t^* = \frac{3d_1}{v_0} = 2t_1 + t_2 = 0.714 \text{ s}$$

Tenendo conto del tempo in cui il corpo 2 è andato avanti e indietro, l'intervallo di tempo tra i due urti è quindi

$$\Delta t = 2(2t_1 + t_2) = 1.43 \text{ s}$$

$\boxed{\text{ES. 6}}$

Nel caso di urto elastico la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica impone che

$$\begin{cases} m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases}$$

Ricavando v_1 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, otteniamo la velocità v_2 della pallina 2 subito dopo l'urto come segue

$$m_1(m_1+m_2)v_2^2 - 2m_1 m_2 v_0 v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_0$$

Negli istanti successivi, la molla si contrae e, data l'assenza di attriti, applicando la conservazione dell'energia meccanica, in corrispondenza del suo massimo accorciamento avremo

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2 \Rightarrow \Delta x_{max}^2 = \frac{m_2}{k} v_2^2$$

$$\Rightarrow \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{m_2}{k}}\, v_2 = \sqrt{\frac{m_2}{k}} \cdot \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_0 = 2.98 \text{ cm}$$

Invece, nel caso di urto completamente anelastico abbiamo solo la conservazione della quantità di moto e perciò

$$m_1 v_0 = (m_1+m_2) v \Rightarrow v = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_0$$

dove ora v è la velocità subito dopo l'urto del corpo formato dalle due palline.
Perciò, riapplicando la conservazione dell'energia meccanica otteniamo

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2) v^2 = \frac{1}{2} k \Delta x_{max}^2 \Rightarrow \Delta x_{max}^2 = \frac{m_1+m_2}{k} v^2$$

$$\Rightarrow \Delta x_{max} = \sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}\, v = \frac{m_1}{\sqrt{k(m_1+m_2)}} v_0 = 1.82 \text{ cm}$$

ES. 7

Nella discesa del corpo 1 la sua energia meccanica non si conserva, ma la sua variazione dovrà essere pari al lavoro compiuto dalla forza di attrito. Pertanto, dato che la sua quota si riduce di $\frac{1}{2}h$ e il corpo percorre un tratto di lunghezza $\frac{h}{2\sin\theta}$, possiamo scrivere

$$\Delta K + \Delta U = L_a$$

Con

$$\Delta K = \frac{1}{2}m_1\left(v_{0,1}^2 - v_0^2\right); \qquad \Delta U = -\frac{1}{2}m_1 g h; \qquad L_a = -\mu_d m_1 g\cos\theta \cdot \frac{h}{2\sin\theta}$$

Quindi: $v_{0,1}^2 = v_0^2 + gh - \mu_d g h \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow v_{0,1} = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\mu_d\cos\theta}{\sin\theta} - 1\right)gh} = 4.4\ m/s$

In queste relazioni $v_{0,1}$ è la velocità del corpo 1 subito prima dell'impatto con il corpo 2. Nel successivo urto elastico si conservano sia la quantità di moto sia l'energia cinetica e quindi valgono le seguenti

$$\begin{cases} m_1 v_{0,1} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ m_1 v_{0,1}^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \end{cases}$$

dove ora v_1 e v_2 sono le velocità dei due corpi dopo l'urto. Risolvendo si ha

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{0,1} = -2.93\ m/s; \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{0,1} = 1.47\ m/s$$

Infine, il corpo 2 prende a scendere lungo la seconda metà del canale e, se v_2 è sufficientemente grande, potrebbe raggiungere il punto più basso. Per verificare se le cose stanno così applichiamo ancora la conservazione dell'energia (analogamente a quanto fatto per la discesa del corpo 1) e scriviamo

$$\frac{1}{2}m_2\left(v_{2,f}^2 - v_2^2\right) - \frac{1}{2}m_2 g h = -\mu_d m_2 g\cos\theta \cdot \frac{h}{2\sin\theta}$$

dalla quale si ricaverebbe

$$v_{2,f}^2 = v_2^2 - \left(\frac{\mu_d\cos\theta}{\sin\theta} - 1\right)gh < 0$$

Ma, come indicato, l'ultima quantità è negativa! Questo sta a significare che, in realtà, il corpo non riesce a raggiungere la fine del canale; si fermerà a una quota $h_f > 0$. Perciò, riapplicando la conservazione dell'energia a tale situazione possiamo scrivere

$$-\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_2 g\left(\frac{h}{2} - h_f\right) = -\mu_d m_2 g\left(\frac{h}{2} - h_f\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

dalla quale otteniamo

$$v_2^2 = 2g\left(\frac{\mu_d\cos\theta}{\sin\theta} - 1\right)\left(\frac{h}{2} - h_f\right) \Rightarrow h_f = \frac{h}{2} - \frac{v_2^2}{2g\left(\frac{\mu_d\cos\theta}{\sin\theta} - 1\right)} = 0.615\ m$$