COGNOME:	NOME:	MATR.:

Università degli Studi di Padova – Ingegneria Biomedica

II compitino di **FAMP**, 4 febbraio 2015

ISTRUZIONI: 1) Inserire qui e sul foglio intestato le proprie generalità. 2) Riportare sul foglio intestato il nome del tema (A, B, C,...) alla voce "N. Tema". COSA CONSEGNARE: questo foglio con le risposte sintetiche RIPORTATE nei riquadri E il foglio intestato con gli SVOLGIMENTI degli esercizi. REGOLE: NON INSERIRE FOGLI DI BRUTTA COPIA - Risposte non giustificate sul foglio protocollo o non coerenti con quanto scritto nell'elaborato non saranno prese in considerazione - TEMPO II compitino: 1 ora e 30 minuti

Probabilità (II compitino) - Tema **Prob A**

1. Disponiamo di due mazzi di carte: il mazzo A ha 30 carte rosse e 22 carte nere, mentre il mazzo B ha 20 carte rosse e 32 carte nere. Si sceglie uno dei due mazzi: il mazzo A viene scelto con probabilità 2/3, il mazzo B con probabilità 1/3. Poi viene estratta una carta dal mazzo. N.B. **Esprimere i risultati come frazioni ridotte ai minimi termini semplificando il più possibile:**

   (a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia rossa? *Risposta*

   (b) La carta estratta è rossa. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dal mazzo B?

   Risposta

   (c) La carta viene rimessa nel mazzo, e si procede ad una nuova estrazione dallo stesso mazzo. Si suppone che, una volta *scelto* il mazzo, le estrazioni siano indipendenti. Siano R_1 e R_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima estratta è rossa" e "la seconda estratta è rossa".

      i. Si realizza R_1. Qual è la probabilità che si realizzi R_2? *Risposta*

      ii. Gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti? *Risposta*

2. Un cromosoma legato alla cecità muta in media in un caso su 10 000. Si considera una popolazione di 20 000 persone.

   (a) Utilizzando una opportuna variabile binomiale X scrivere qual è la probabilità che il cromosoma sia mutato su al massimo due persone, cioè su nessuno o su 1 o su 2 persone(**esprimere il risultato con una formula, senza semplificare**); *Risposta*

   (b) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile di Poisson Y? In tal caso dire di quale parametro ed (**esprimere il valore di tale approssimazione attraverso una espressione del tipo ae^b, con a e b da determinare esplicitamente**; *Risposta*

   (c) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile normale W? In tal caso dire di quali parametri. *Risposta*

3. Si consideri la variabile congiunta (X, Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+xy) & \text{se } x, y \in [0,1], \\ 0 \text{ altrimenti}, \end{cases}$$

   dove c è un numero reale positivo.

   (a) Determinare c; *Risposta*

   (b) Calcolare $P(X > Y)$; *Risposta*

   (c) Determinare le densità marginali f_X e f_Y di X e di Y, dire se X e Y sono indipendenti.

   Risposta

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Università degli Studi di Padova – Ingegneria Biomedica

II compitino di **FAMP**, 4 febbraio 2015

ISTRUZIONI: 1) Inserire qui e sul foglio intestato le proprie generalità. 2) Riportare sul foglio intestato il nome del tema (A, B, C,...) alla voce "N. Tema". COSA CONSEGNARE: questo foglio con le risposte sintetiche RIPORTATE nei riquadri E il foglio intestato con gli SVOLGIMENTI degli esercizi. REGOLE: NON INSERIRE FOGLI DI BRUTTA COPIA - Risposte non giustificate sul foglio protocollo o non coerenti con quanto scritto nell'elaborato non saranno prese in considerazione - TEMPO II compitino: 1 ora e 30 minuti

Probabilità (II compitino) - Tema **Prob B**

1. Disponiamo di due mazzi di carte: il mazzo A ha 20 carte rosse e 32 carte nere, mentre il mazzo B ha 30 carte rosse e 22 carte nere. Si sceglie uno dei due mazzi: il mazzo A viene scelto con probabilità 2/3, il mazzo B con probabilità 1/3. Poi viene estratta una carta dal mazzo. N.B. **Esprimere i risultati come frazioni ridotte ai minimi termini semplificando il più possibile:**

   (a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia rossa? *Risposta*

   (b) La carta estratta è rossa. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dal mazzo B?

   Risposta

   (c) La carta viene rimessa nel mazzo, e si procede ad una nuova estrazione dallo stesso mazzo. Si suppone che, una volta *scelto* il mazzo, le estrazioni siano indipendenti. Siano R_1 e R_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima estratta è rossa" e "la seconda estratta è rossa".

   i. Si realizza R_1. Qual è la probabilità che si realizzi R_2? *Risposta*

   ii. Gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti? *Risposta*

2. Un cromosoma legato alla cecità muta in media in un caso su 15 000. Si considera una popolazione di 30 000 persone.

   (a) Utilizzando una opportuna variabile binomiale X scrivere qual è la probabilità che il cromosoma sia mutato su al massimo tre persone, cioè su nessuno o su 1, su 2 o su 3 persone (**esprimere il risultato con una formula, senza semplificare**); *Risposta*

   (b) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile di Poisson Y? In tal caso dire di quale parametro ed (**esprimere il valore di tale approssimazione attraverso una espressione del tipo ae^b, con a e b da determinare esplicitamente**; *Risposta*

   (c) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile normale W? In tal caso dire di quali parametri. *Risposta*

3. Si consideri la variabile congiunta (X, Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 + xy) & \text{se } x, y \in [0,1], \\ 0 \text{ altrimenti}, \end{cases}$$

   dove c è un numero reale positivo.

   (a) Determinare c; *Risposta*

   (b) Calcolare $P(X > Y)$; *Risposta*

   (c) Determinare le densità marginali f_X e f_Y di X e di Y, dire se X e Y sono indipendenti.

   Risposta

Tema A

Es 1. (a) $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)$

$$= \frac{30}{52}\times\frac{2}{3} + \frac{20}{52}\times\frac{1}{3} = \frac{80}{156} = \boxed{\frac{20}{39}}$$

(b) $$P(B|R) = \frac{P(R|B)P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{20}{52}\times\frac{1}{3}}{P(R)} = \frac{\frac{20}{156}}{\frac{80}{156}} = \frac{20}{80} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(c) Per ogni C indichiamo con $Q_C(\cdot) = P(\cdot|C)$.

Vogliamo calcolare $P(R_1|R_2) = Q_{R_2}(R_1)$.

Si ha

$$Q_{R_1}(R_2) = Q_{R_1}(R_2|A)\,Q_{R_1}(A) + Q_{R}(R_2|B)\,Q_{R_1}(B)$$

Ora $Q_{R_1}(R_2|A) = P(R_2|A\cap R_1) = Q_A(R_2|R_1)$ $\quad (Q_A(\cdot) = P(\cdot|A))$

$= Q_A(R_2) = \frac{30}{52}$ per indipendenza condizionata alla scelta del mazzo

$Q_{R_1}(A) = P(A|R_1) = 1 - P(B|R_1) = \frac{3}{4}$

$Q_{R_1}(R_2|B) = Q_B(R_2|R_1) = Q_B(R_2) = \frac{20}{52}$; $\quad Q_{R_1}(B) = P(B|R_1) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P(R_2|R_1) = \frac{30}{52}\times\frac{3}{4} + \frac{20}{52}\times\frac{1}{4} = \frac{15}{26}\times\frac{3}{4} + \frac{10}{26}\times\frac{1}{4}$$

$$= \frac{45}{104} + \frac{10}{104} = \boxed{\frac{55}{104}}.$$

(ii) $P(R_2) = P(R_2|A)P(A) + P(R_2|B)P(B) = P(R_1) = \frac{20}{39} \neq P(R_2|R_1)$:

gli eventi non sono indipendenti.

Es 2. (a) $X \sim B\left(20.000, \frac{1}{10.000}\right)$

$$P(X\le 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{20000}{k}\left(\frac{1}{10000}\right)^k\left(1-\frac{1}{10000}\right)^{2000-k}$$

$(\simeq 0.6766)$

b) Sì, $p = \frac{1}{10.000}$ è piccolo e $n = 20.000$ è "grande"!

$Y \sim Po\left(20.000 \times \frac{1}{10.000}\right) = Po(2)$ e

$P(X \leq 2) \simeq P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2}\right)$ 0.2706705664732254

$= \boxed{5e^{-2}}$

$\simeq 0.6766$

c) $P(X \leq 2) \simeq P(W \leq 2)$ con

$W \sim N\left(20.000 \times \frac{1}{10000}, \sigma^2\right)$,

$\sigma^2 = 20000 \times \frac{1}{10.000} \times \left(1 - \frac{1}{10.000}\right)$

$\Rightarrow W \sim N\left(2, \frac{5555}{9999}\right)$

3. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2+xy) & x,y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

a) $\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff c \int_{[0,1]\times[0,1]} x^2+xy\,dx\,dy = 1$

ed è $\int_{[0,1]\times[0,1]} x^2+xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 x^2+xy\,dx\right] dy$

$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y\right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{1}{3} + \frac{1}{2}y\,dy$

$= \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ da cui $\boxed{c = \frac{12}{7}}$

b) $P(X > Y) = \int_{x>y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$= c \int_0^1 \int_0^x (x^2 + xy)\,dy\,dx$

$$= c \int_0 \int_0 (x^2 + xy)\, dy \quad dx$$

$$= c \int_0^1 \left[x^2 y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= c \int_0^1 \frac{3x^3}{2} \, dx = \frac{3c}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \cdot \frac{12}{7} = \frac{9}{14}$$

c) $$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ c\int_0^1 x^2 + xy \, dy & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

$$c\left[x^2 y + x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = c\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{12}{7}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right) = \frac{6}{7} x (2x+1)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin [0,1] \\ c\int_0^1 x^2 + xy \, dx = c\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{7}(4+6y) & y \in [0,1] \end{cases}$$

Si ha $$f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{6}{49} x(2x+1)(4+6y) & \text{se } x,y \in [0,1], \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che $f_X(x) f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ segue che X, Y non sono indipendenti.

Tema B

lunedì 26 gennaio 2015 18:30

Tema B

Es 1. (a) $P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B)$

$$= \frac{20}{52} \times \frac{2}{3} + \frac{30}{52} \times \frac{1}{3} = \frac{70}{156} = \boxed{\frac{35}{78}}$$

(b) $$P(B|R) = \frac{P(R|B)P(B)}{P(R)} = \frac{\frac{30}{52} \times \frac{1}{3}}{P(R)} = \frac{\frac{30}{156}}{\frac{70}{156}} = \frac{30}{70} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

(c) Per ogni C indichiamo con $Q_C(\cdot) = P(\cdot|C)$.

Vogliamo calcolare $P(R_1|R_2) = Q_{R_2}(R_1)$.

Si ha

$$Q_{R_1}(R_2) = Q_{R_1}(R_2|A)\,Q_{R_1}(A) + Q_{R}(R_2|B)\,Q_{R_1}(B)$$

Ora $Q_{R_1}(R_2|A) = P(R_2|A \cap R_1) = Q_A(R_2|R_1)$ $\quad (Q_A(\cdot) = P(\cdot|A))$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\uparrow}{=} Q_A(R_2) = \frac{20}{52}$

per indip. condizionata alla scelta del mazzo A.

$Q_{R_1}(A) = P(A|R_1) = 1 - P(B|R_1) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

$Q_{R_1}(R_2|B) = Q_B(R_2|R_1) = Q_B(R_2) = \frac{30}{52}$; $\quad Q_{R_1}(B) = P(B|R_1) = \frac{3}{7}$

$$\Rightarrow P(R_2|R_1) = \frac{20}{52} \times \frac{4}{7} + \frac{30}{52} \times \frac{3}{7} = \frac{170}{364} = \frac{85}{182}$$

(ii) $P(R_2) = P(R_2|A)P(A) + P(R_2|B)P(B) = P(R_1) = \frac{35}{78} \neq P(R_2|R_1)$:

gli eventi non sono indipendenti

Es 2. a) $X \sim B\left(30.000, \frac{1}{15000}\right)$

$$\boxed{P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{30000}{k} \left(\frac{1}{15000}\right)^k \left(1 - \frac{1}{15000}\right)^{30000-k}}$$

b) Sì, $p = \frac{1}{15.000}$ è piccola e $n = 30.000$ è "grande".

$Y \sim Po\left(30.000 \times \frac{1}{15.000}\right) = Po(2)$ e

$$P(X \leq 3) \simeq P(Y \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3!}\right) =$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right)$$

$$= \boxed{\frac{19}{3} e^{-2}}$$

c) $P(X \leq 3) \simeq P(W \leq 3)$ con

$W \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$\mu = np = 2; \quad \sigma^2 = np(1-p) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{15.000}\right)$$

$$= 2 \cdot \frac{14999}{15.000} = \frac{14.999}{7500}$$

3. $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 + xy) & x, y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

a) $\int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff c \int_{[0,1]\times[0,1]} y^2 + xy \,dx\,dy = 1$

ed è $\int_{[0,1]\times[0,1]} y^2 + xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 y^2 + xy\,dy\right] dx$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \quad \text{da cui} \quad \boxed{c = \frac{12}{7}}$$

b) $P(X > Y) = \int_{x>y} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

$$= c \int^1 \int^x (y^2 + xy)\,dy \quad dx$$

$$= c\int_0 \int_0 (y^2+xy)\,dy \quad dx$$

$$= c\int_0^1 \left[\frac{y^3}{3}+x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{x} dx = c\int_0^1 5\,\frac{x^3}{6}\,dx$$

$$= \frac{5c}{24} = \frac{5}{24}\cdot\frac{12}{7} = \boxed{\frac{5}{14}}$$

c)
$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ c\int_0^1 y^2+xy\,dy & \text{se } x \in [0,1] \end{cases} \qquad \overset{\shortparallel}{c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x\right)} = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{7}(4+6x)}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \notin [0,1] \\ c\int_0^1 y^2+xy\,dx = c\left[y^2x+y\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = c\left(y^2+\frac{y}{2}\right) = \frac{12}{7}y\left(y+\frac{1}{2}\right) & \\ = \frac{1}{7}(12y^2+6y) \quad y\in[0,1] & \end{cases}}$$

Si ha
$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{49}(4+6x)\,y\,(12y+6) & \text{se } (x,y)\in[0,1]^2; \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato che $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ segue che X, Y non sono indipendenti.