ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione. Appello del 17.01.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x+1|}{x^2+4}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale:

$$Dominio = \mathbb{R};$$

studiarne il segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{|x+1|}{x^2+4} \geq 0 \qquad \text{Dunque } f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Inoltre } f(x) = 0 \iff x = -1;$$

calcolare i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{|x+1|}{x^2+4}\right) \underset{y=\frac{|x+1|}{x^2+4}}{=} \lim_{y\to 0} \arctan y = 0,$$

dunque $y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

(ii) Studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima:
Studiamo f separatamente nelle regioni

$x > -1 \iff |x+1| = x+1$ e

$x < -1 \iff |x+1| = -(x+1)$, per cui si ha:

$$f(x) = \arctan\left(\mp\frac{(x+1)}{x^2+4}\right) \qquad x \lessgtr -1,$$

e quindi

$$f'(x) = \frac{\mp\frac{x^2+4-2x(x+1)}{(x^2+4)^2}}{1+\frac{(x+1)^2}{(x^2+4)^2}} = \pm\frac{x^2+2x-4}{(x^2+4)^2+(x+1)^2} \qquad \text{if } \lessgtr -1,$$

$$\lim_{x\to-1-} f'(x) = -\frac{1}{5} \qquad \lim_{x\to-1+} f'(x) = \frac{1}{5} \implies f'_-(-1) = -\frac{1}{5}, \quad f'_+(-1) = \frac{1}{5}.$$

Dunque la funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ mentre in $x = -1$ vi un punto angoloso.

Studiare gli intervalli di monotonia:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x < -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2x-4 \geq 0 \\ x < -1 \end{cases} \iff x \leq -1-\sqrt{5}$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-\infty, -1-\sqrt{5}[$ e strettamente decrescente in $]-1-\sqrt{5}, -1[$.
Inoltre

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x > -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2x-4 \leq 0 \\ x > -1 \end{cases} \iff -1 < x \leq -1+\sqrt{5}.$$

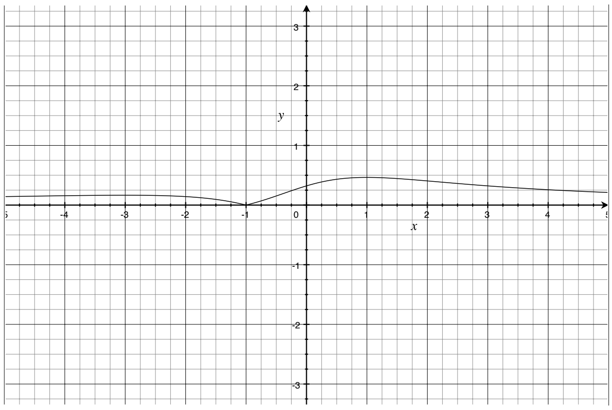

Figure 1: Grafico della funzione.

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-1,-1+\sqrt{5}[$ e strettamente decrescente in $]-1+\sqrt{5},+\infty[$. Infine,

$$f'(-1+\sqrt{5}) = f'(-1-\sqrt{5}) = 0$$

e i punti $-1-\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ sono di massimo relativo. Da $f(-1)=0$, il punto $x=-1$ punto di minimo assoluto.

(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -8 \iff z^3 = 8i = 8\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$

Dobbiamo cio trovare le radici terze di $8i$, cio, con la formula di De Moivre,

$$z_0 = 2\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = \sqrt{3}+i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\sqrt{3}+i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -2i.$$

(Stanno sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nel cerchio di raggio 2 con un vertice in $= -2i$)

Esercizio 3 [7 punti]
(i) Mediante opportuni sviluppi di Taylor, determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, uno sviluppo della successione

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Si ha

$$a_n = \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \alpha\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) - \alpha\frac{1}{n^3} + \alpha\frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{\alpha}{n^6}\right) =$$

$$= \frac{1-6\alpha}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-6\alpha}{6n} - \frac{1}{120n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

segue che, per $\alpha = \frac{1}{6}$, il termine generico della serie sempre negativo per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n^3}$. Pertanto la serie converge. Se invece $\alpha \neq \frac{1}{6}$, il termine generico della serie di segno costante per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n}$. Pertanto la serie diverge per $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

Esercizio 4 [8 punti]

(i) Usando la definizione, calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt;$$

Consideriamo la sostituzione $y = \arctan t$, che implica $dy = \frac{1}{1+t^2}dt$:

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt = \lim_{c\to+\infty} \int_0^{\arctan c} \frac{y}{y^2+8y+17}\, dy =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\log((y+4)^2+1) - 4\arctan(y+4)\right]_0^{\arctan c}$$

$$= \frac{1}{2}\log((\pi/2+4)^2+1) - 4\arctan(\pi/2+1) - \frac{1}{2}\log 17 + 4\arctan(4)$$

dove abbiamo usato:

$$\int \frac{y}{y^2+8y+17} dy = \int \frac{y}{y^2+8y+16+1} dy = \frac{1}{2}\int \frac{2(y+4)}{(y+4)^2+1} dy - 4\int \frac{1}{(y+4)^2+1} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\log((y+4)^2+1) - 4\arctan(y+4) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Facoltativo discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{2\alpha}(\arctan^2 t + 8\arctan t + 17)}\, dt;$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'integrando, per $t \to +\infty$, asintotico a

$$\frac{C}{t^{4\alpha}}$$

per una opportuna costante $C > 0$, dunque l'integrale converge per

$$4\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{4}.$$

TEMA 2

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|2x+1|}{x^2+5}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale:

$$Dominio = \mathbb{R};$$

studiarne il segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{|2x+1|}{x^2+5} \geq 0. \qquad \text{Dunque } f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Inoltre } f(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2};$$

calcolare i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{|2x+1|}{x^2+5}\right) \underset{y=\frac{|2x+1|}{x^2+5}}{=} \lim_{y\to 0} \arctan y = 0;$$

Dunque $y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima:
Studiamo separatamente f nelle regioni

$x > -\frac{1}{2} \iff |2x+1| = 2x+1$ e
$x < -\frac{1}{2} \iff |2x+1| = -2x-1$, per cui si ha:

$$f(x) = \arctan\left(\mp\frac{(2x+1)}{x^2+5}\right) \qquad x \lessgtr -\frac{1}{2},$$

e quindi

$$f'(x) = \frac{\mp\frac{2x^2+10-2x(2x+1)}{(x^2+5)^2}}{1+\frac{(2x+1)^2}{(x^2+5)^2}} = \pm 2\frac{x^2+x-5}{(x^2+5)^2+(2x+1)^2} \qquad \text{if } x \lessgtr -\frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-} f'(x) = -\frac{8}{21} \qquad \lim_{x\to-\frac{1}{2}+} f'(x) = \frac{8}{21} \implies f'_-(-1/2) = -\frac{8}{21}, \quad f'_+(-1/2) = \frac{8}{21}.$$

Dunque la funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ mentre in $x = -\frac{1}{2}$ vi un punto angoloso.
Studiare gli intervalli di monotonia:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-5 \geq 0 \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases} \iff x \leq \frac{-1-\sqrt{21}}{2}.$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-\infty, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}[$ e strettamente decrescente in $]\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}[$.

Inoltre

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-5 \leq 0 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \iff -\frac{1}{2} < x \leq \frac{-1+\sqrt{21}}{2}.$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}[$ e strettamente decrescente in $]\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, +\infty[$.
Infine,

$$f'\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) = f'\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right) = 0$$

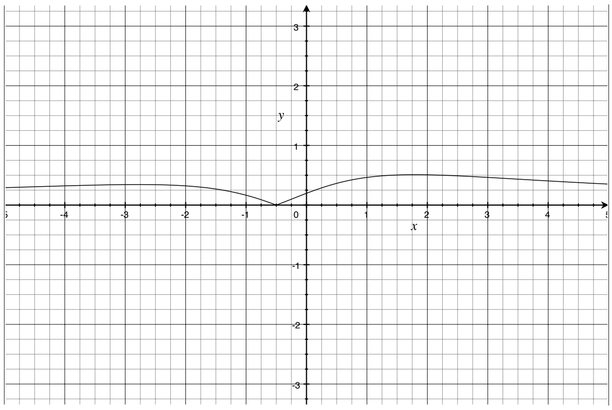

Figure 2: Grafico della funzione.

e i punti $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ sono di massimo relativo. Da $f(-\frac{1}{2}) = 0$, il punto $x = -\frac{1}{2}$ punto di minimo assoluto.

(iii) abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(-\frac{z}{i}\right)^3 = 27.$$

$$\left(-\frac{z}{i}\right)^3 = 27. \iff z^3 = 27i = 27\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$

Dobbiamo cio trovare le radici terze di $27i$, cio, con la formula di De Moivre,

$$z_0 = 3\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$$

$$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -3i.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \alpha\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right), \qquad \text{la convergenza della serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n.$$

Si ha

$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \alpha\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{120n^5} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) + \alpha\frac{1}{n^3} - \alpha\frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{\alpha}{n^6}\right) =$$

$$= \frac{-1+6\alpha}{6n^3} + \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

(ii) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1+6\alpha}{6n} + \frac{1}{120n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

segue che, per $\alpha = \frac{1}{6}$, il termine generico della serie sempre positivo per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n^3}$. Pertanto la serie converge. Se invece $\alpha \neq \frac{1}{6}$, il termine generico della serie di segno costante per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n}$. Pertanto la serie diverge per $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione (e il metodo di sostituzione), calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 4\arctan t + 5)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{(\alpha-1)}(\arctan^2 t + 4\arctan t + 5)}\, dt.$$

Consideriamo la sostituzione $y = \arctan t$, che implica $dy = \frac{1}{1+t^2}dt$:

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 4\arctan t + 5)}\, dt = \lim_{c\to+\infty} \int_0^{\arctan c} \frac{y}{y^2+4y+5}\, dy =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\log((y+2)^2+1) - 2\arctan(y+2)\right]_0^{\arctan c}$$

$$= \frac{1}{2}\log((\pi/2+2)^2+1) - 2\arctan(\pi/2+2) - \frac{1}{2}\log 5 + 2\arctan 2$$

dove abbiamo usato:

$$\int \frac{y}{y^2+4y+5}dy = \int \frac{y}{y^2+4y+4+1}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2(y+2)}{(y+2)^2+1}dy - 2\int \frac{1}{(y+2)^2+1}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\log((y+2)^2+1) - 2\arctan(y+2) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{(\alpha-1)}(\arctan^2 t + 4\arctan t + 5)}\, dt.$$

L'integrando, per $t \to +\infty$, asintotico a

$$\frac{C}{t^{2\alpha-2}}$$

per una opportuna costante positiva $C > 0$, dunque l'integrale converge per

$$2\alpha - 2 > 1 \iff \alpha > \frac{3}{2}.$$

TEMA 3

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-5|}{x^2+3}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale:

$$Dominio = \mathbb{R};$$

studiarne il segno,

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{|x-5|}{x^2+3} \geq 0. \qquad \text{Dunque } f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Inoltre } f(x) = 0 \iff x = 5;$$

calcolare i limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{|x-5|}{x^2+3}\right) \underset{y=\frac{|x-5|}{x^2+3}}{=} \lim_{y\to 0} \arctan y = 0.$$

Dunque $y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima:
studiamo f separatamente nelle regioni

$x > 5 \iff |x-5| = x-5$ e

$x < 5 \iff |x-5| = -x+5$, per cui

$$f(x) = \arctan\left(\mp\frac{(x-5)}{x^2+3}\right) \qquad x \lessgtr 5,$$

e quindi

$$f'(x) = \frac{\mp\frac{x^2+3-2x(x-5)}{(x^2+3)^2}}{1+\frac{(x-5)^2}{(x^2+3)^2}} = \pm\frac{x^2-10x-3}{(x^2+3)^2+(x-5)^2} \qquad \text{if } x \lessgtr 5$$

e

$$\lim_{x\to 5-} f'(x) = -\frac{1}{28} \qquad \lim_{x\to 5+} f'(x) = \frac{1}{28} \implies f'_-(5) = -\frac{1}{28}, \quad f'_+(5) = \frac{1}{28}.$$

Dunque la funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{5\}$ mentre in $x = 5$ vi un punto angoloso.

Studiare gli intervalli di monotonia:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 10x - 3 \geq 0 \\ x < 5 \end{cases} \iff x \leq 5 - 2\sqrt{7}$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-\infty, 5-2\sqrt{7}[$ e strettamente decrescente in $]5-2\sqrt{7}, 5[$.
Inoltre

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x > 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 10x - 3 \leq 0 \\ x > 5 \end{cases} \iff 5 < x \leq 5 + 2\sqrt{7}.$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]5, 5+2\sqrt{7}[$ e strettamente decrescente in $]5+2\sqrt{7}, +\infty[$.
Infine,

$$f'(5+2\sqrt{7}) = f'(5-2\sqrt{7}) = 0$$

e i punti $5+2\sqrt{7}$, $5-2\sqrt{7}$ sono di massimo relativo. Da $f(5) = 0$, il punto $x = 5$ di minimo assoluto.

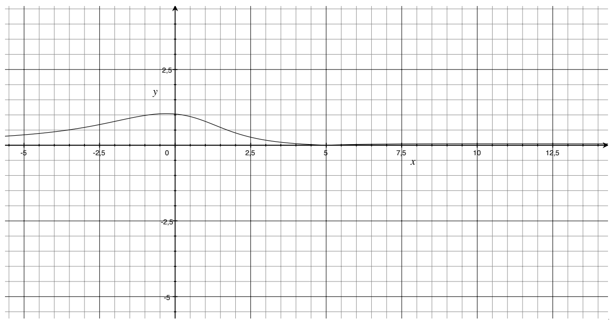

Figure 3: Grafico della funzione.

(iii) Abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

$$\left(\frac{z}{i}\right)^3 = -\frac{1}{8}. \iff z^3 = \frac{1}{8}i = \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$

Dobbiamo cio trovare le radici terze di $\frac{1}{8}i$, cio, con la formula di De Moivre,

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right) = -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4}i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -\frac{1}{2}i.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n = \frac{1}{n} - \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right), \qquad \text{la convergenza della serie}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n.$$

Si ha

$$a_n = \frac{1}{n} - \sinh\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha\log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right) + \alpha\frac{1}{n^3} - \alpha\frac{1}{2n^6} + o\left(\frac{\alpha}{n^6}\right) =$$

$$= \frac{-1+6\alpha}{6n^3} - \frac{1}{120n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1+6\alpha}{6n} - \frac{1}{120n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

segue che, per $\alpha = \frac{1}{6}$, il termine generico della serie sempre negativo per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n^3}$. Pertanto la serie converge. Se invece $\alpha \neq \frac{1}{6}$, il termine generico della serie di segno costante per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n}$. Pertanto la serie diverge per $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione (e il metodo di sostituzione), calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 6\arctan t + 10)}\, dt.$$

Consideriamo la sostituzione $y = \arctan t$, che implica $dy = \frac{1}{1+t^2}dt$:

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 6\arctan t + 10)}\, dt = \lim_{c\to+\infty} \int_0^{\arctan c} \frac{y}{y^2+6y+9+1}\, dy =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\log((y+3)^2+1) - 3\arctan(y+3)\right]_0^{\arctan c}$$

$$= \frac{1}{2}\log((\pi/2+3)^2+1) - 3\arctan(\pi/2+3) - \frac{1}{2}\log 10 + 3\arctan 3$$

dove abbiamo usato:

$$\int \frac{y}{y^2+6y+10}dy = \int \frac{y}{y^2+6y+9+1}dy = \frac{1}{2}\int \frac{2(y+3)}{(y+3)^2+1}dy - 3\int \frac{1}{(y+3)^2+1}dy =$$

$$= \frac{1}{2}\log((y+3)^2+1) - 3\arctan(y+3) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{(\alpha+3)}(\arctan^2 t + 6\arctan t + 10)}\, dt.$$

L'integrando, per $t \to \infty$, asintotico a

$$\frac{C}{t^{2\alpha+6}}$$

per una opportuna costante $C > 0$, dunque l'integrale converge per

$$2\alpha + 6 > 1 \iff \alpha > -\frac{5}{2}.$$

TEMA 4

Esercizio 1 [10 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|2x+3|}{x^2+9}\right),$$

(i) individuarne il dominio naturale:

$$Dominio = \mathbb{R};$$

studiarne il segno:

$$f(x) \geq 0 \iff \frac{|2x+3|}{x^2+9} \geq 0. \qquad \text{Dunque } f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Inoltre } f(x) = 0 \iff x = -\frac{3}{2};$$

calcolare i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan\left(\frac{|2x+3|}{x^2+9}\right) \underset{y=\frac{|2x+3|}{x^2+9}}{=} \lim_{y\to 0} \arctan y = 0.$$

Dunque $y = 0$ asintoto orizzontale a $-\infty$ e a $+\infty$.

(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima:
studiamo f separatamente nelle regioni

$x > -\frac{3}{2} \iff |2x+3| = 2x+3$ e

$x < -\frac{3}{2} \iff |2x+3| = -2x-3$, per cui si ha

$$f(x) = \arctan\left(\mp\frac{(2x+3)}{x^2+9}\right) \qquad x \lessgtr -\frac{3}{2},$$

e quindi

$$f'(x) = \mp\frac{\frac{2x^2+18-2x(2x+3)}{(x^2+9)^2}}{1+\frac{(2x+3)^2}{(x^2+9)^2}} = \pm 2\frac{x^2+3x-9}{(x^2+9)^2+(2x+3)^2} \qquad \text{if } x \lessgtr -\frac{3}{2}$$

e

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}^-} f'(x) = -\frac{8}{45} \qquad \lim_{x\to-\frac{3}{2}^+} f'(x) = \frac{8}{45} \implies f'_-(-\frac{3}{2}) = -\frac{8}{45}, \quad f'_+(-\frac{3}{2}) = \frac{8}{45}.$$

Dunque la funzione derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{3}{2}\}$ mentre in $x = -\frac{3}{2}$ vi un punto angoloso.
Studiare gli intervalli di monotonia:

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+3x-9 \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \iff x \leq -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-\infty, -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{45}}{2}[$ e strettamente decrescente in $]-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{45}}{2}, -\frac{3}{2}[$.
Inoltre

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+3x-9 \leq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \iff -\frac{3}{2} < x \leq -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2}$$

Dunque la funzione strettamente crescente in $]-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{45}}{2}[$ e strettamente decrescente in $]-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{45}}{2}, +\infty[$.
Infine,

$$f'(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{45}}{2}) = f'(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{45}}{2}) = 0$$

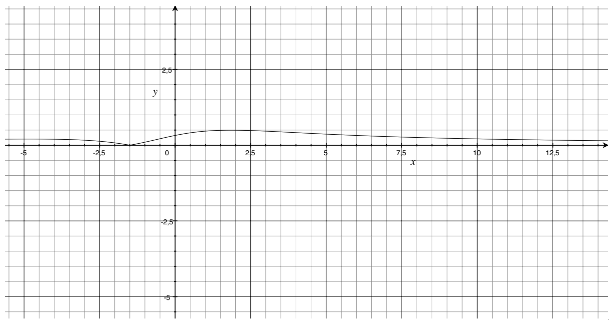

Figure 4: Grafico della funzione.

e i punti $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{45}}{2}$, $-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{45}}{2}$ sono di massimo relativo. Da $f(-\frac{3}{2})=0$, il punto $x=-\frac{3}{2}$ di minimo assoluto.

(iii) Abbozzare il grafico di f.

Esercizio 2 [7 punti] Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(-\frac{z}{i}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

$$\left(-\frac{z}{i}\right)^3=\frac{1}{27}. \iff z^3=\frac{1}{27}i=\frac{1}{27}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$$

Dobbiamo cio trovare le radici terze di $(1/27)i$, cio, con la formula di De Moivre,

$$z_0=\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)=\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{6}i$$

$$z_1=\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)=-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{6}i$$

$$z_2=\frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)=-\frac{1}{3}i.$$

Esercizio 3 [7 punti]
Studiare, utilizzando opportuni sviluppi di Mac Laurin applicati alla successione

$$a_n=\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}-\alpha\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right), \quad \text{la convergenza della serie}$$

Si ha

$$a_n=\sinh\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}-\alpha\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)=\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{120n^5}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)-\alpha\frac{1}{n^3}+\alpha\frac{1}{2n^6}+o\left(\frac{\alpha}{n^6}\right)=$$

$$=\frac{1-6\alpha}{6n^3}+\frac{1}{120n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n.$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-6\alpha}{6n} + \frac{1}{120n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

segue che, per $\alpha = \frac{1}{6}$, il termine generico della serie sempre positivo per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n^3}$. Pertanto la serie converge. Se invece $\alpha \neq \frac{1}{6}$, il termine generico della serie di segno costante per n sufficientemente grande ed asintotico a $\frac{1}{n}$. Pertanto la serie diverge per $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

Esercizio 4 [8 punti]
Usando la definizione, (e il metodo di sostituzione) calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 2\arctan t + 2)}\, dt.$$

Facoltativo: Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{(1+t^2)^{\alpha-2}(\arctan^2 t + 2\arctan t + 2)}\, dt.$$

Consideriamo la sostituzione $y = \arctan t$, che implica $dy = \frac{1}{1+t^2} dt$:

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{\arctan t}{(1+t^2)(\arctan^2 t + 2\arctan t + 2)}\, dt = \lim_{c\to+\infty} \int_0^{\arctan c} \frac{y}{y^2+2y+2}\, dy =$$

$$= \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\log((y+1)^2+1) - \arctan(y+1)\right]_0^{\arctan c}$$

$$= \frac{1}{2}\log((\pi/2+1)^2+1) - \arctan(\pi/2+1) - \frac{1}{2}\log 2 + \pi/4$$

dove abbiamo usato:

$$\int \frac{y}{y^2+2y+2} dy = \int \frac{y}{y^2+2y+1+1} dy = \frac{1}{2}\int \frac{2(y+1)}{(y+1)^2+1} dy - \int \frac{1}{(y+1)^2+1} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\log((y+1)^2+1) - \arctan(y+1) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Facoltativo: l'integrando, per $t \to +\infty$, asintotico a

$$\frac{C}{t^{2\alpha-4}}$$

per una opportuna costante $C > 0$, dunque l'integrale converge per

$$2\alpha - 4 > 1 \iff \alpha > \frac{5}{2}.$$

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore.

È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2m+1}) \qquad \forall m \geq 0$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^m) \qquad \forall m \geq 1$$