Primo appello e preappello 22-01-24

Il 22-01-2024 alle h. 13:30 il primo appello e il preappello si sono svolti in contemporanea. Le domande erano le stesse, soltanto che l'appello completo ne conteneva 3 in più. Pertanto riporto solo lo svolgimento del primo appello. Le domande che NON c'erano nel preappello sono:

- Esercizio 1: volume solido di rotazione
- Esercizio 9: teorema centrale del limite
- Esercizio 10: derivate direzionali e piano tangente.

L'ultima domanda di teoria era diversa tra preappello e appello, pertanto in fondo ho riportato entrambe le versioni

Question **1**

Incorrect

Flag question

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il trapezoide

$$D = \{x \in [0,6] : 0 \leq y \leq 3\sqrt{\log(x+1)}\}.$$

attorno all'asse delle x.

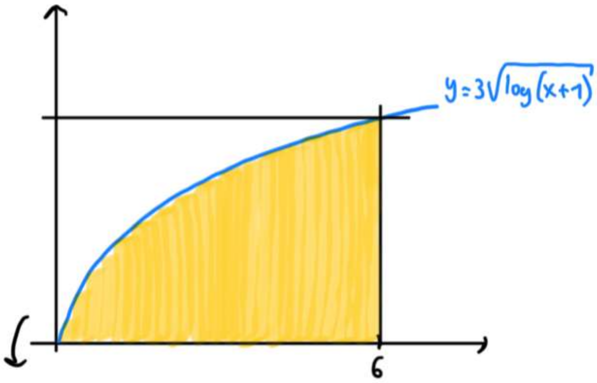
[Per qualcuno potrà essere utile ricordare che $\int \log x \, dx = x \log x - x + \text{cost}.$

Answer:

-5.9899 ✖

The correct answer is: 215.4892

$D = \{ x \in [0,6] : 0 \leq y \leq 3\sqrt{\log(x+1)} \}$



VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE X

SOL. USO PAPPO GULDINO

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\Omega) = 2\pi \frac{\int y_D}{\mathrm{Area}(D)} \cdot \mathrm{Area}(D) = 2\pi \int_D y \, dy \, dx}$$

$$\rightarrow 2\pi \int_0^6 \int_0^{3\sqrt{\log(x+1)}} y \, dy \, dx = 2\pi \int_0^6 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^{3\sqrt{\log(x+1)}} dx = \pi \cdot \int_0^6 9 \log(x+1) \, dx$$

$$= 9\pi \left[(x+1)\log(x+1) - (x+1)\right]_0^6 = 9\pi \left[7\log(7) - 7 + 1\right] = 215.4891$$

Question 2

Incorrect

Flag question

Sia

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{|y|}}{x^4 + y\sqrt{|y|}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare, se esiste, la derivata direzionale di f in $(0,0)$ rispetto al vettore $u = (1,4)$.

Esprimere il risultato troncando a 4 decimali. [Se non esiste scrivere -1000]

Answer:

-1000 ✖

Facciamo ad esempio la derivata direzionale rispetto al vettore $(1,2)$.

$$D_{(1,2)} f(0,0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(t(1,2)) - f(0,0)}{t}.$$

Si ha

$$\frac{f(t(1,2)) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{2}t^2\sqrt{|t|}}{t^4 + 2\sqrt{2}t\sqrt{|t|}} \sim_0 \frac{t\sqrt{}}{2t\sqrt{}}$$

The correct answer is: 0.2500

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{|y|}}{x^4 + y\sqrt{|y|}} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

CALCOLARE $D_u f(0,0)$ RISPETTO AL VETTORE $(1,4)$

Sol. USO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA DIREZIONALE

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+tu) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2\sqrt{|4t|}}{t(t^4 + 4t\sqrt{|4t|})} = \frac{t\sqrt{|4t|}}{t^4 + 4t\sqrt{|4t|}}$$

$$= \frac{\sqrt{|4t|}}{t^3 + 4\sqrt{|4t|}} = \frac{\sqrt{4t}}{t^3 + 4\sqrt{4t}} = \frac{2\sqrt{t}}{t^3 + 8\sqrt{t}} = \frac{2t}{t^3\sqrt{t} + 8t} = \frac{2}{t^2\sqrt{t} + 8} = \frac{2}{8} = 0.25$$

Question **3**

Incorrect

Flag question

Sia
$f(x,y) = (4/3)x^3 + 2x^2y - (1/2)x^2 + 2y^2 + 4$
.

Riportare la somma delle coordinate dei punti critici moltiplicata per 2, troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. Se ad esempio i punti critici trovati fossero $(3.2, 1), (-2, 2), (-3, 0)$ nello spazio della risposta si scrive 2.4.

Answer:

-7.5

The correct answer is: 1.0000

$$F(x,y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y - \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + 4$$

RIPORTARE SOMMA COORDINATE PUNTI CRITICI MOLT. PER 4

SOL. TROVIAMO I PUNTI CRITICI

$$\nabla F(x,y) = \left(4x^2 + 4xy - x \,,\, 2x^2 + 4y\right)$$

PER $x \neq 0$

$$\nabla F(x,y) = 0 \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4xy - x = 0 \\ 2x^2 + 4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(4x + 4y - 1) = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 4\left(-\frac{x^2}{2}\right) - 1 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x^2 + 4x - 1 = 0 \\ y = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$2x^2 - 4x + 1 = 0$ HA COME SOLUZIONI

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ y_1 = \frac{-3-2\sqrt{2}}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y_2 = \frac{-3+2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

PUNTO CRITICO 1: $(0,0)$

PUNTO CRITICO 2: $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{-3-2\sqrt{2}}{4}\right)$

PUNTO CRITICO 3: $\left(\frac{2-2\sqrt{2}}{2}, \frac{-3+2\sqrt{2}}{4}\right)$

SOMMA DELLE COORDINATE:

$$\frac{2+2\sqrt{2}}{2} + \frac{2-2\sqrt{2}}{2} - \frac{3+2\sqrt{2}}{4} - \frac{3-2\sqrt{2}}{4} = \frac{2+2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}}{2} + \frac{-3-2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}}{4}$$

$= 2 - \frac{6}{4} = \frac{1}{2}$ CHE MOLTIPLICATO PER 2 DÀ 1

V

Question **4**

Incorrect

Flag question

Nell'esercizio precedente, qual è la natura dell'unico punto critico la cui somma delle due coordinate è uguale a 0?

Attenzione: si perde il 25% del punteggio di questo esercizio con risposta errata.

Select one:

- massimo locale
- minimo locale
- sella
- Non voglio rispondere ✖

Your answer is incorrect.

The correct answer is: sella

$$\nabla F(x,y) = (4x^2 + 4xy - x \, , \, 2x^2 + 4y)$$

NATURA DEL PUNTO CRITICO $(0,0)$?

SOL. DETERMINIAMO LA MATRICE HESSIANA

$$\text{Hess } F(x,y) = \begin{bmatrix} 8x + 4y - 1 & 4x \\ 4x & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Hess } f(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \text{Hess } f(0,0) = -4 < 0$$

POICHÉ IL DETERMINANTE DELL'HESSIANA IN $(0,0)$ È NEGATIVO, PER IL CRITERIO DELL'HESSIANA SI CONCLUDE CHE $(0,0)$ È UN PUNTO DI SELLA ✓

Question **5**

Incorrect

Flag question

Una persona è dispersa durante una gita sui colli; il percorso si è svolto per il 71% in collina coperta da boschi e per il 29% in collina priva di alta vegetazione. Un drone, utilizzato per le ricerche, riesce ad individuare una persona su una zona coperta da alberi con probabilità del 30%, in una zona priva di boscaglia con probabilità del 69%.

1) Qual è la probabilità che la persona venga individuata? Nello spazio della risposta riportare il valore ottenuto troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. il Risultato va espresso come un numero tra 0 e 1 non in percentuale (es. 0.26 e non 26%).

Answer: 0.4031 ✖

The correct answer is: 0.4131

C = "collina senza boschi"
B = "collina con i boschi"
R = "la persona viene ritrovata"

$P(C) = 0.29$
$P(B) = 0.71$
$P(R|C) = 0.69$
$P(R|B) = 0.3$

$P(R) = ?$

Sol. $P(R) = P(R|C)\cdot P(C) + P(R|B)\cdot P(B) = 0.69 \times 0.29 + 0.3 \times 0.71 = 0.4131$ ✓

Question **6**

Incorrect

Flag question

Una persona è dispersa durante una gita sui colli; il percorso si è svolto per il 71% in collina coperta da boschi e per il 29% in collina priva di alta vegetazione. Un drone, utilizzato per le ricerche, riesce ad individuare una persona su una zona coperta da alberi con probabilità del 30%, in una zona priva di boscaglia con probabilità del 69%.

2) Il drone ritrova la persona. Qual è la probabilità che sia stata ritrovata nella zona boscosa? Nello spazio della risposta riportare il valore ottenuto troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. il Risultato va espresso come un numero tra 0 e 1 non in percentuale (es. 0.26 e non 26%).

Answer: 0.5284 ✖

The correct answer is: 0.5156

$P(B|R) = ?$

SOL. USO LA FORMULA DI INVERSIONE

$$P(B|R) = \frac{P(R|B) \cdot P(B)}{P(R)} = \frac{0.3 \cdot 0.71}{0.4131} = 0.5156$$ ✓

Question **7**

Not answered

Flag question

Si suppone che la densità di popolazione in un paese di forma quadrata, che assumiamo coincidente con $[0,1] \times [0,1]$, l'unità di misura essendo in chilometri, sia una variabile congiunta (X, Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) \text{ se } (x,y) \in [0,1] \times [0. \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1) Calcolare la probabilità $P(X \le Y^2)$. Troncare il risultato a 4 decimali dopo la virgola.

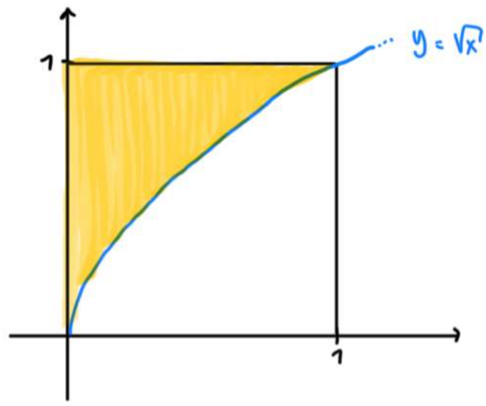
Answer:

The correct answer is: 0.1214

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) & \text{SE } x,y \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$P(X \leq Y^2) = ?$$

SOL. DISEGNO IL DOMINIO



$$D = \{ y \in [0,1] \, , 0 \leq x \leq y^2 \}$$

$$\rightarrow \int_0^1 \int_0^{y^2} \left(\frac{6}{5}x^2\right)(3-y) \, dx \, dy = 0.1214$$

√

Question **8**

Not answered

Flag question

Si suppone che la densità di popolazione in un paese di forma quadrata, che assumiamo coincidente con $[0,1] \times [0,1]$, l'unità di misura essendo in chilometri, sia una variabile congiunta (X, Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) \text{ se } (x,y) \in [0,1] \times [0, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

2) Sia f_Y la densità marginale di Y. Calcolare $f_Y(1/8)$.

Answer:

The correct answer is: 1.1500

CALCOLARE LA DENSITÀ MARGINALE $f_Y\left(\frac{1}{8}\right)$

SOL. LA DENSITÀ MARGINALE DI UNA V.A. CONTINUA È:

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x,y)\, dx}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}x^2(3-y)\,dx = (3-y)\left[\frac{6}{15}x^3\right]_0^1 = (3-y)\cdot\frac{6}{15} = \frac{2}{5}(3-y) = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}y$$

$$f_Y\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8} = \frac{23}{20} = 1.15 \checkmark$$

La prima parte del testo è stata tagliata perché la persona che me l'ha mandata non riusciva a fare lo screenshot. In ogni caso la parte tagliata recitava:
"*Si lancia una moneta che dà testa con una probabilità di 0.52 per 851 volte*"

0.52 per 851 volte. Usando una opportuna variabile continua, approssimare la probabilità che la moneta dia Testa per al massimo 429 volte (cioè da 0 a 429 volte).

Scrivere la formula sul foglio in funzione di $\Phi(y)$ per un opportuno $y \geq 0$. Approssimare (non troncare) y con un numero a due decimali dopo la virgola e usare la tabella qui sotto. Troncare il risultato a 4 decimali.

Answer:

0.5039 ✗

The correct answer is: 0.1768

$P(T) = 0.52$

$n = 851$

$a = 429$

SOL. PER L'APPROSSIMAZIONE IN DISTRIBUZIONE DELLA BINOMIALE

$$\boxed{P\left(B(n,p) \le a\right) \approx P\left(N(np,\, np(1-p)) \le a\right)}$$

$\mu = n \cdot p = 442.52$

$\sigma^2 = np(1-p) = 212.4096$

$\sigma = \sqrt{212.4096}$

$$P(\mu + \sigma Z \le a) = P\left(Z \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{429 - 442.52}{\sqrt{212.4096}}\right) \simeq \Phi(-0.93)$$

$$\Phi(-0.93) \simeq 1 - \Phi(0.93) = 1 - 0.8238 \approx 0.1762$$

(NON È ESATTAMENTE 0.1768, MA CREDO SIA GIUSTO COSÍ. QUESTO PERCHÉ SE FOSSE 0.1768 DOVREI CERCARE SULLA TABELLA IL VALORE DI ϕ PER CUI $\phi(x) = 0.8232$, CHE NON C'È SULLA TABELLA)

10)

Sia $r : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 tale che $r(0) = (3,2)$ e $r'(0) = (4,a)$. Quanto deve valere a affinché sia $\frac{d}{dt}|r(t)|^2_{t=0} = 0$?

Select one:

- a. -6
- b. nessun valore di a
- c. $8/3$ ✖
- d. -2
- e. altro
- f. non voglio rispondere

$r : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$

$r(0) = (3,2)$
$r'(0) = (4,a)$

det. a tale che $\left.\frac{d}{dt}|r(t)|^2\right|_{t=0} = 0$

Sol. SE r È C^1 IN $[-1,1]$, r È DIFFERENZIABILE IN $[-1,1]$, E VALE:

$$\boxed{r(t_0) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0)}$$

$$r(t) = r(0) + r'(0)(t-0) = (3,2) + (4,a)(t-0) = (3,2) + (4,a)\cdot t = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 2+at \end{pmatrix}$$

$$|r(t)|^2 = \sqrt{(3+4t)^2 + (2+at)^2}^{\,2} = 9 + 24t + 16t^2 + 4 + 4at + a^2t^2$$

$$= (16+a^2)t^2 + (24+4a)t + 13$$

SE DEVE VALERE $\frac{d}{dt}|r(t)|^2 = 0$, ALLORA $\left.\frac{d}{dt}\left[(16+a^2)t^2 + (24+4a)t + 13\right]\right|_{t=0} = 0$

$$= 2\cdot 0(16+a^2) + 24 + 4a = 0 \to 24 + 4a = 0 \to a = -\frac{24}{4} = -6$$

Question **11**
Incorrect
Flag question

Sia X una variabile aleatoria con valore atteso $E(X) = 5$ e varianza $\mathrm{Var}(X) = 2$. Quanto vale $E(X^2)$?

Answer:

-23 ✖

The correct answer is: 27

X VARIABILE ALEATORIA

$E[x] = 5$

$Var[x] = 2$

$E[x^2] = ?$

SOL. LA FORMULA DELLA VARIANZA È:

$$\boxed{Var[x] = E[x^2] - E^2[x]}$$

$\rightarrow 2 = E[x^2] - 25$

$\rightarrow E[x^2] = 2 + 25 = 27$

Question **8**

Correct

Flag question

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$, con

$f(0,1) = 0,\ \partial_x f(0,1) = 2,\ \partial_y f(0,1) = -5$

Determinare l'ordinata z nel punto $(0.1, 0.9)$ del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, f(0,1))$

Select one:

- a. 0.6
- b. 0.7✔
- c. 0.23
- d. non voglio rispondere
- e. 0.83
- f. altro

Your answer is correct.

$f(0,1) + \partial_x f(0,1) \times (0.1 - 0) + \partial_y f(0,1)$

$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad C^1,$

$F(0,1) = 0$

$\partial_x F(0,1) = 2$

$\partial_y F(0,1) = -5$

DETERMINARE $F(0.1, 0.9)$

SOL. SE UNA FUNZIONE E' DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO P, VALE LA LINEARIZZAZIONE DI F IN P

$$\boxed{L(x,y) = F(p) + \nabla F(p)\left[(x,y) - p\right]}$$

$$L(0.1, 0.9) = F(0,1) + \nabla F(0,1)(0.1-0, 0.9-1)$$

$$= 0 + (2,-5)\cdot(0.1, -0.1) = 2\cdot 0.1 + (-5\cdot(-0.1)) = 0.7$$

V