Settimo test di autovalutazione di FONDAMENTI DI AUTOMATICA
A.A. 2020/21

Data: 15 Dicembre 2020

1. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

2. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(1 + s)}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa lineare) al più di 0.01;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 100$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 45^o.

3. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 0 con errore di regime permanente (al gradino unitario) all'incirca pari a 0.01;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 10000$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

4. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{1+s},$$

si progetti un controllore $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ proprio in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa lineare) pari a 0.1;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1$ rad/sec;

iii) abbia margine di fase pari di circa 80^o.

5. Con riferimento al processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{1+s},$$

si progetti un controllore $C(s)$ di tipo PI (proporzionale integrativo), e quindi con la seguente struttura

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

in modo tale che il risultante sistema retroazionato

i) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (al gradino unitario) all'incirca pari a 0.01;

e la funzione di trasferimento in catena aperta, $C(s)G(s)$,

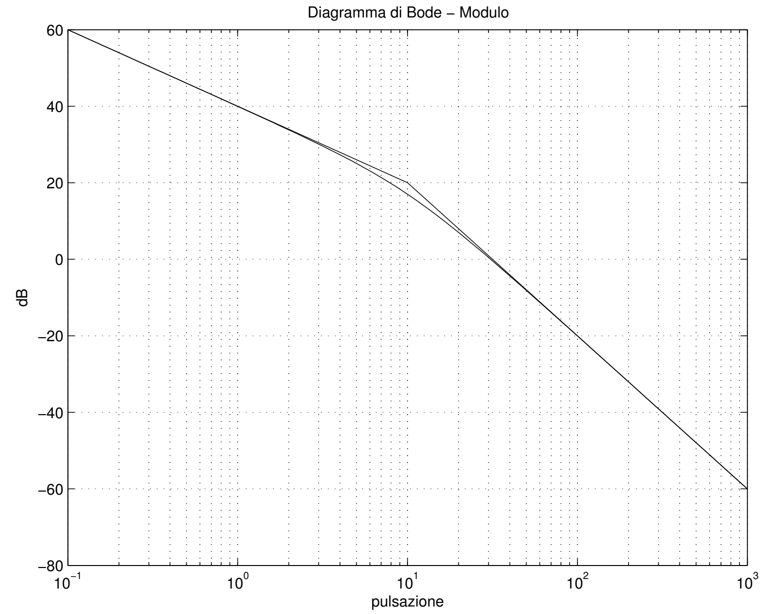
ii) abbia pulsazione di attraversamento all'incirca $\omega_A^* = 1000$ rad/sec;

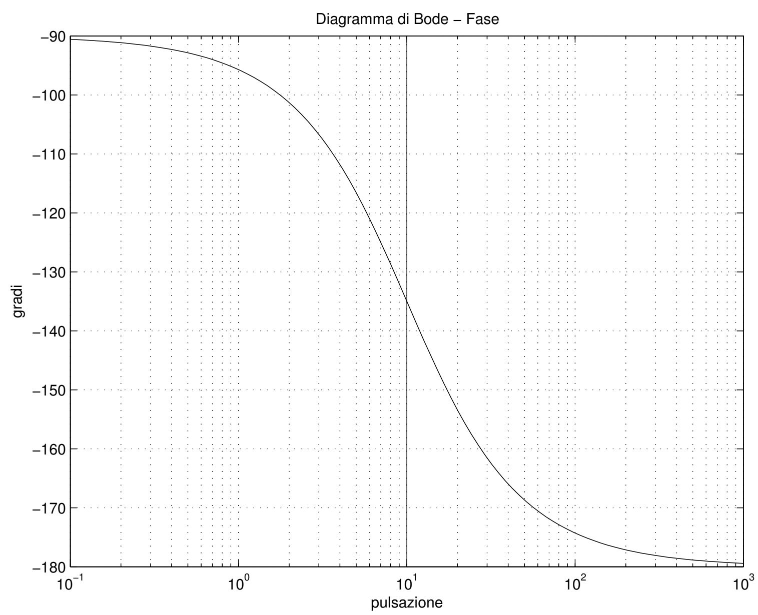
iii) abbia margine di fase pari almeno a 70^o.

RISPOSTE

1. Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo semplice nell'origine. Non essendoci vincoli sull'errore di regime permanente alla rampa lineare, possiamo assumere $C'(s) = \frac{1}{s}$.

   I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s) = \frac{100}{s(1+0.1s)}$ sono i seguenti:



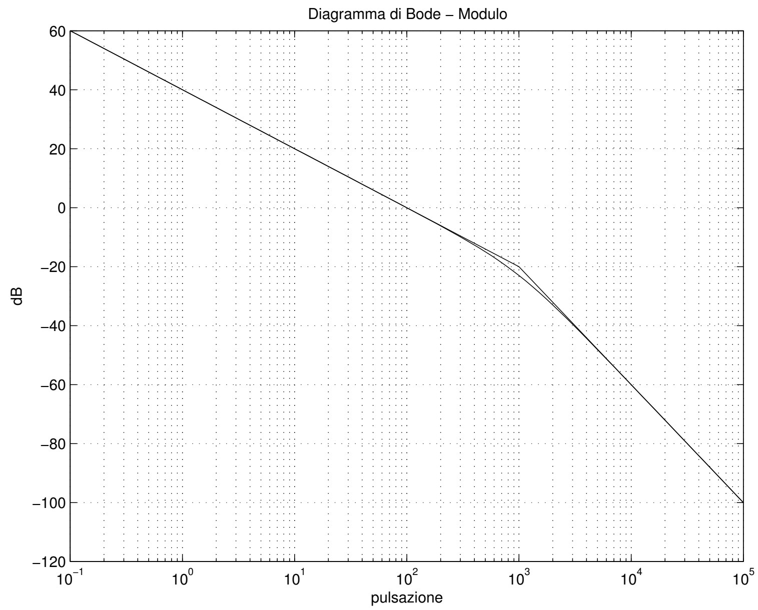


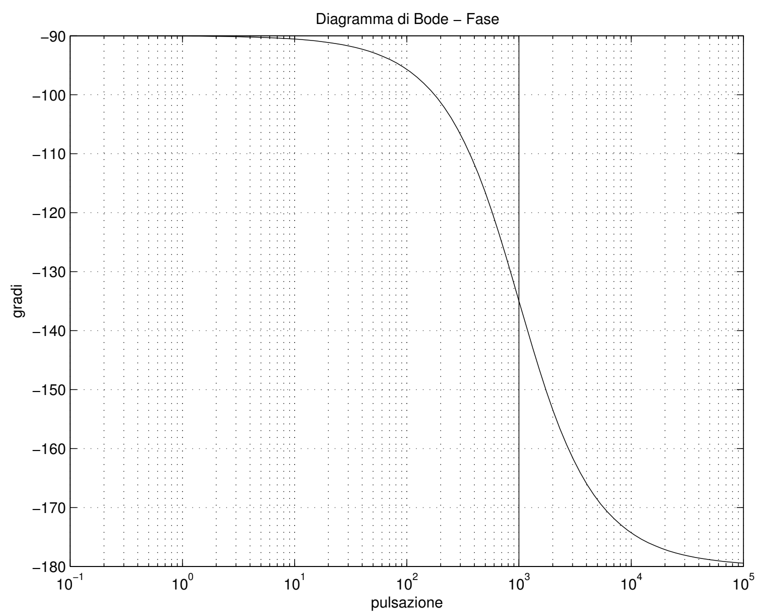
   Si trova $10^{3/2}$ rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 10^2$ rad/s e $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $5° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 45°$. Possiamo quindi applicare un'azione anticipatrice in modo da sollevare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= -|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da sollevare il diagramma delle fasi di almeno 40°.

   Di fatto a questo risultato è possibile pervenire mettendo uno zero stabile una decade prima della pulsazione $\omega_A^* = 10^2$ rad/s, ovvero cancellando il polo in -10, e inserendo un polo stabile a pulsazioni molto elevate, ad esempio in -1000. Per effetto del controllore complessivo

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot C_{ant}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 + 0.1s}{1 + 0.001s}$$

il sistema in catena aperta $C(s)G(s)$ presenta i seguenti diagrammi di Bode



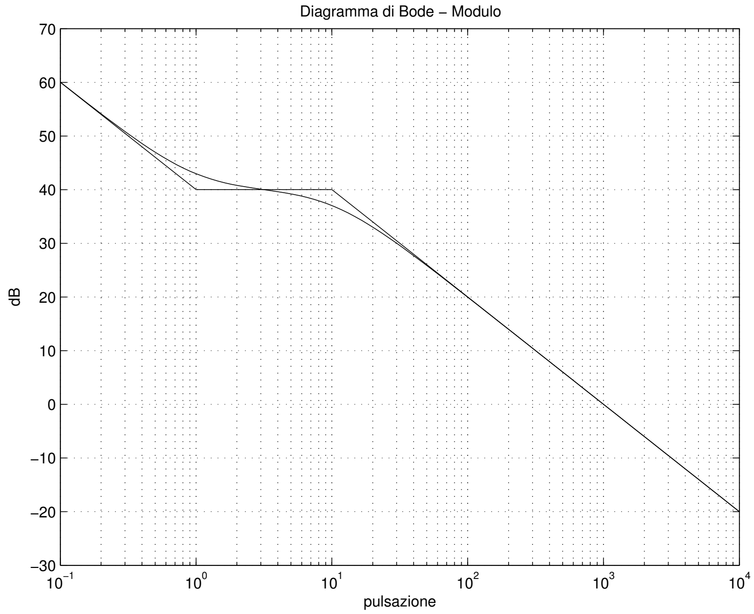


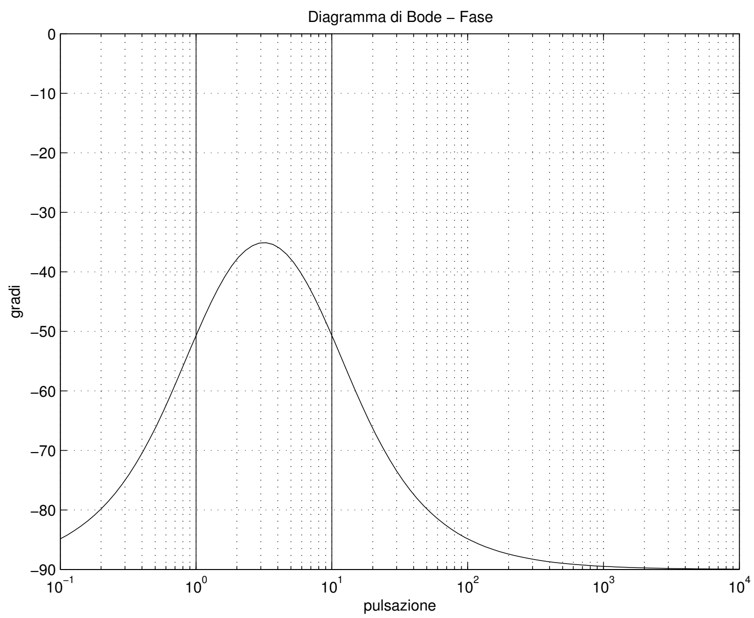
2. Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo semplice nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)10} \leq 0.01$$

da cui segue $K_B(C) \geq 10$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{10}{s}$.

I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s) = 100\ \frac{1+s}{s(1+0.1s)}$ sono i seguenti:



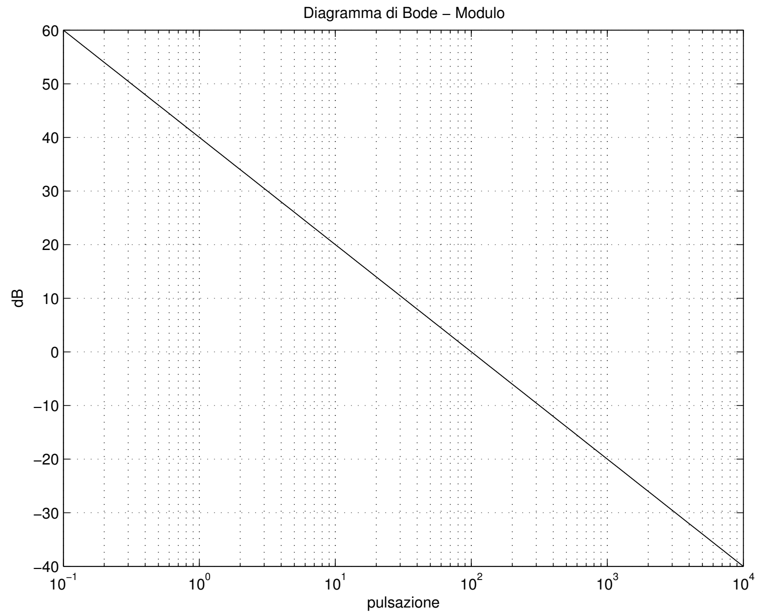


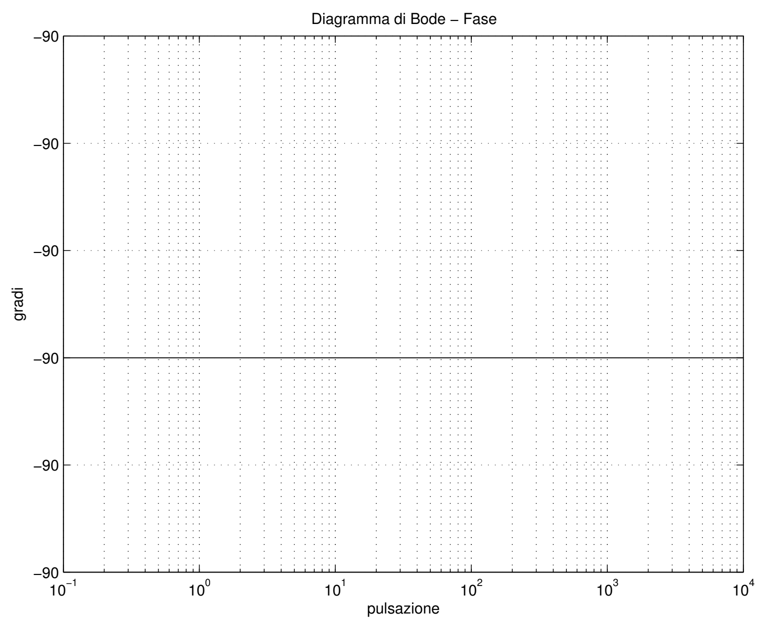
Si trova 10^3 rad/s $= \omega_A > \omega_A^* = 10^2$ rad/s e $95° \approx m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* = 45°$. Possiamo quindi applicare un'azione attenuatrice in modo da abbassare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= |C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da abbassare il diagramma delle fasi di non più di 50°.

Per abbassare il modulo di 20 dB per $\omega_A^* = 10^2$ rad/s senza abbassare troppo la fase, dobbiamo inserire alla sinistra di ω_A^* una coppia polo/zero con il polo collocato esattamente una decade prima dello zero. Scegliendo come rete attenuatrice

$$C_{att}(s) = \frac{1 + 0.1s}{1 + s}$$

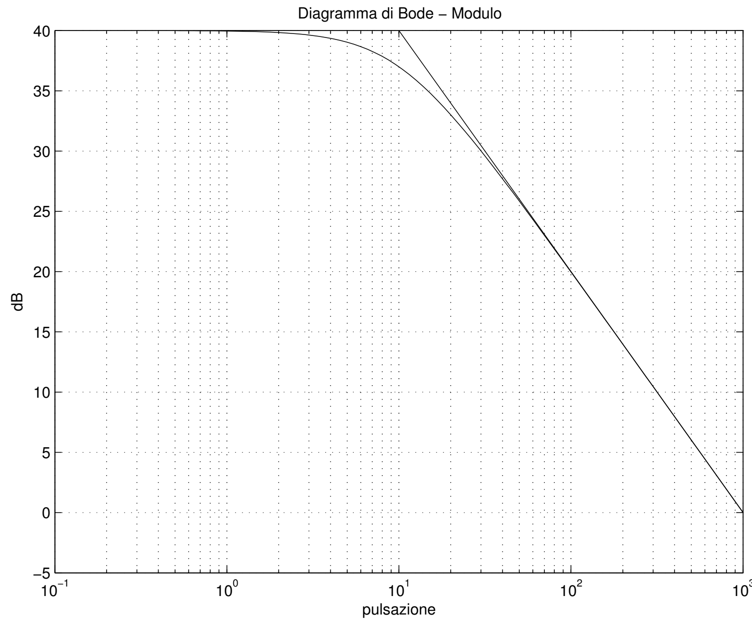
che corrisponde ad una doppia cancellazione polo/zero stabili, otteniamo il risultato desiderato. I diagrammi di Bode della funzione complessiva $C(s)G(s) = \frac{100}{s}$ sono i seguenti:

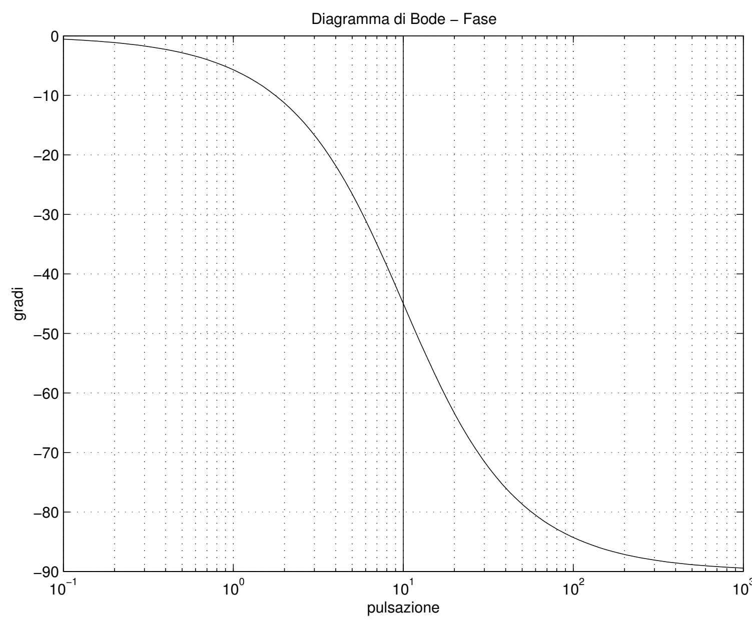




3. Il requisito sul tipo non richiede l'introduzione di poli nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone
$$e_{rp} = \frac{1}{1+K_B(C)} \approx 0.01$$
da cui segue $K_B(C) \approx 99$. Prendiamo $K_B(C) = 100$ a cui corrisponde $C'(s) = 100$.

   I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

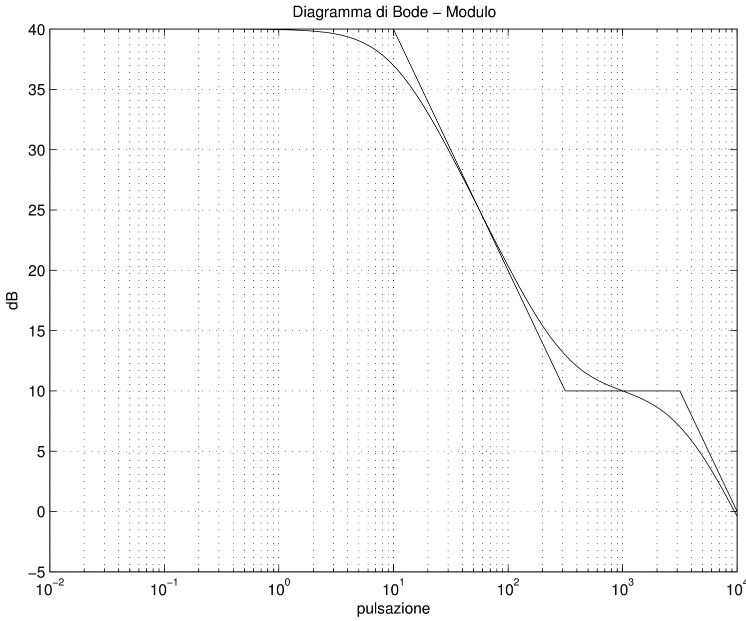


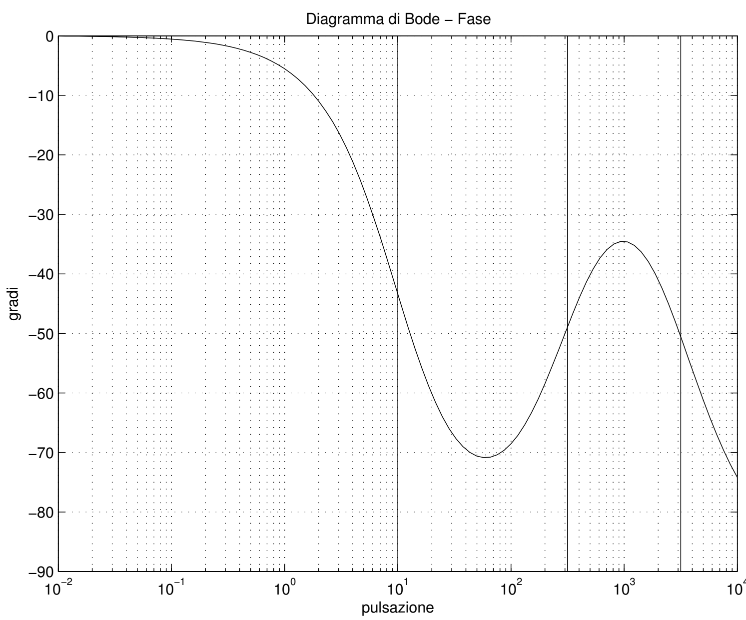


Si trova 10^3 rad/s $= \omega_A < \omega_A^* = 10^4$ rad/s e $95° \approx m_\psi(\omega_A^*) > m_\psi^* = 70°$. Saremmo tentati di applicare un'azione puramente proporzionale, tuttavia in questo caso il vincolo sull'errore di regime permanente vincola il valore del guadagno di Bode in catena aperta e pertanto non possiamo accrescerlo. Il soddisfacimento dei vincoli su pulsazione di attraversamento e margine di fase sono tuttavia soddisfacibili attraverso una rete anticipatrice. Una soluzione ad occhio consiste nell'inserire uno zero in $-10^{5/2}$ e successivamente un polo in $-10^{7/2}$. In tal modo si ottiene

$$C(s) = 100\ \frac{1 + 10^{-5/2}s}{1 + 10^{-7/2}s}.$$

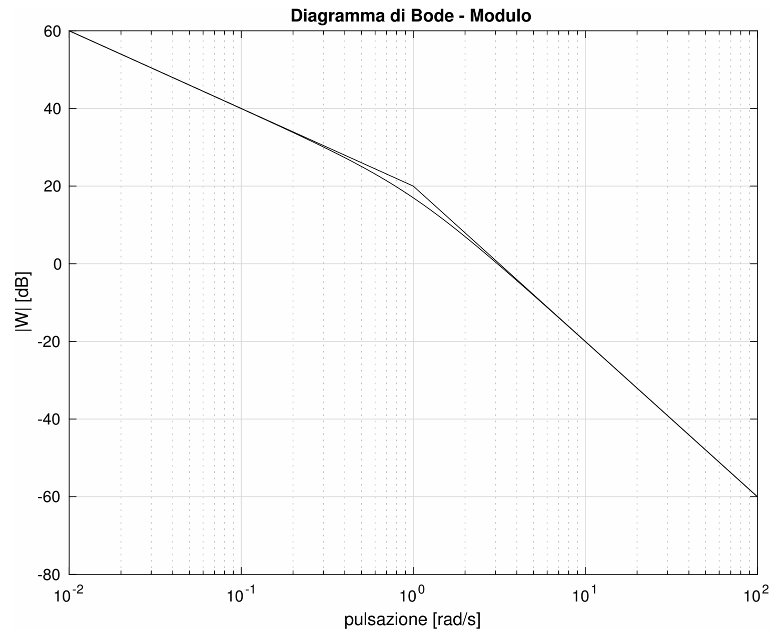
I diagrammi di Bode di $C(s)G(s)$ sono i seguenti:

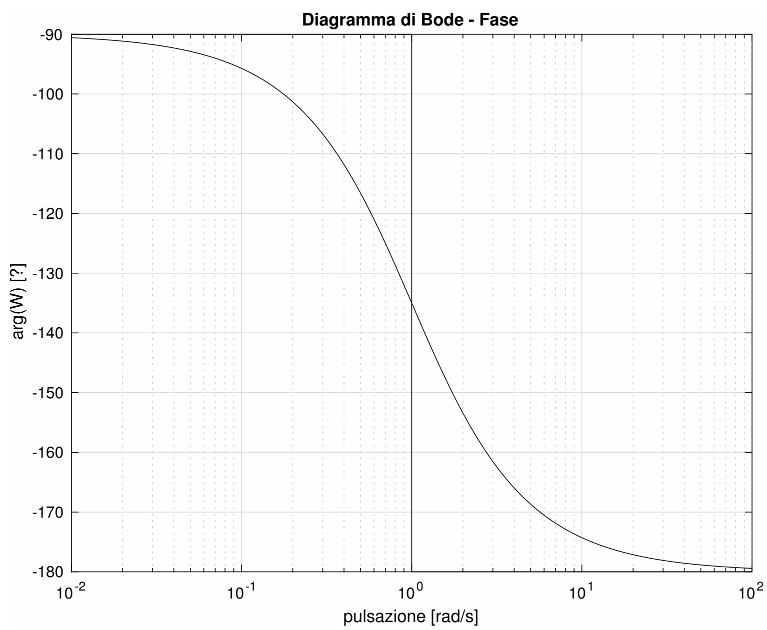




[Soluzione alternativa: $C(s) = 100\ \frac{1+10^{-1}s}{1+10^{-2}s}$.]

4. Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo semplice nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone
$$e_{rp} = \frac{1}{K_B(C)} \approx 0.1$$
da cui segue $K_B(C) \approx 10$. Prendiamo $K_B(C) = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = \frac{10}{s}$.
I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s) = 10\ \frac{1}{s(1+s)}$ sono i seguenti:



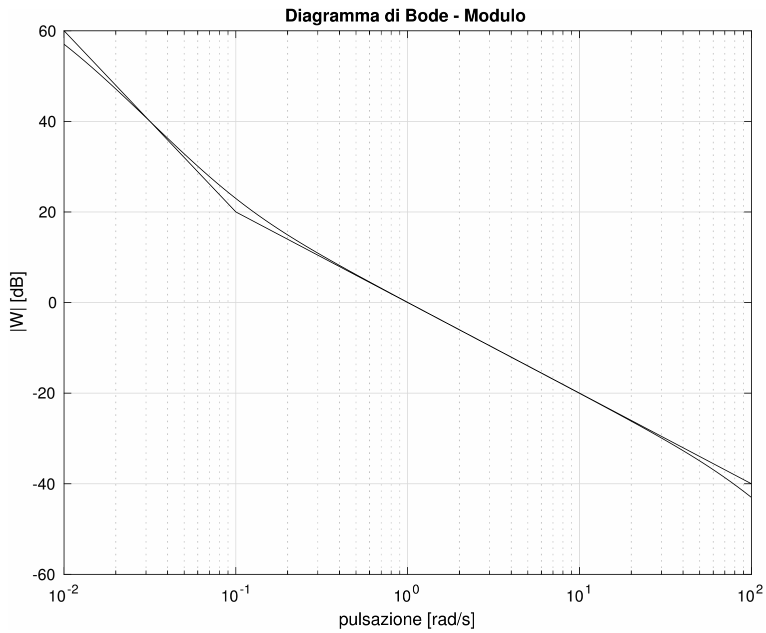


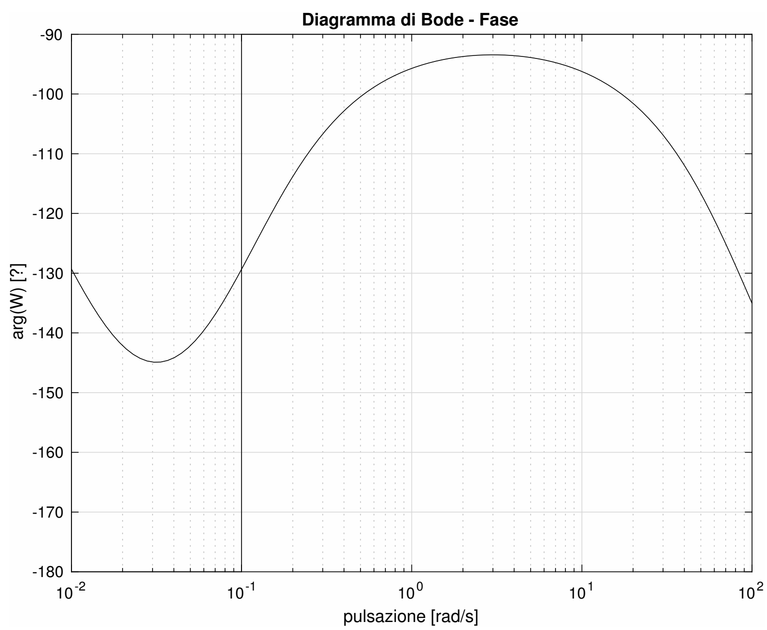
Si trova $10^{1/2}$ rad/s $= \omega_A > \omega_A^* = 1$ rad/s e $45° \approx m_\psi(\omega_A^*) < m_\psi^* = 90°$. Dobbiamo quindi applicare una rete a sella in modo da abbassare il diagramma delle ampiezze di 20 dB $= |C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ e da alzare il diagramma delle fasi di circa 35°.

Scegliendo

$$C_{sella}(s) = \frac{1+\frac{s}{0.1}}{1+\frac{s}{0.01}} \frac{1+s}{1+\frac{s}{100}}$$

otteniamo il duplice obbiettivo di abbassare il modulo di 20 dB e di alzare la fase di quasi 90^o in corrispondenza a $\omega_A^* = 1$ rad/sec. I diagrammi di Bode della funzione complessiva $C(s)G(s) = 10\frac{(1+s/0.1)}{s(1+s/0.01)(1+s/100)}$ sono i seguenti:





5. Un controllore PI può essere riscritto nel seguente modo

$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} = K_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i} s}{s}$$

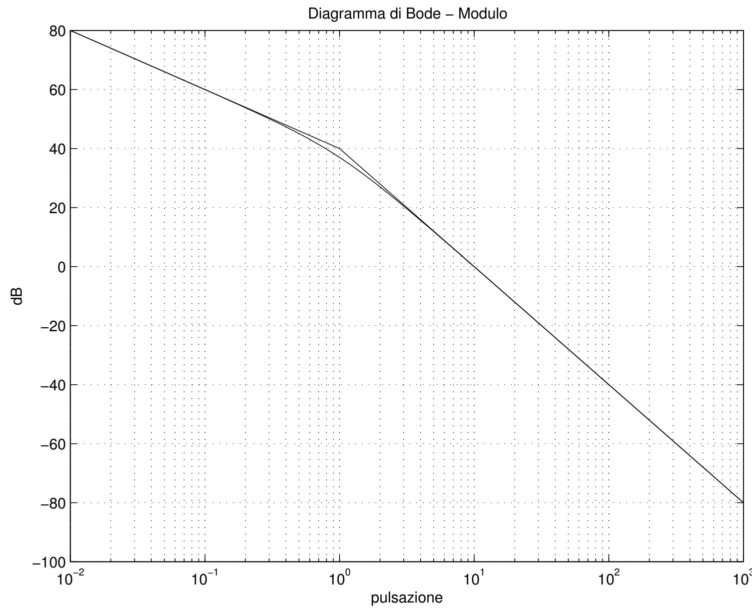
e pertanto consta di un polo in 0 con cui accresco il tipo (da 0 a 1), un guadagno di Bode, con cui sistemo l'errore di regime permanente (in questo caso alla rampa lineare) e, infine, mi rimane uno zero con cui devo aggiustare, se possibile, pulsazione di attraversamento e margine di fase.

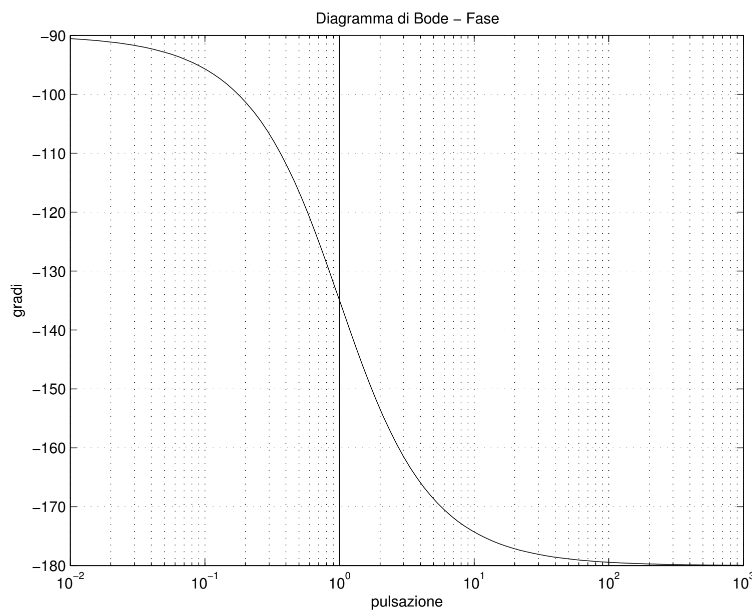
Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp} = \frac{1}{K_i 10} \approx 0.01$$

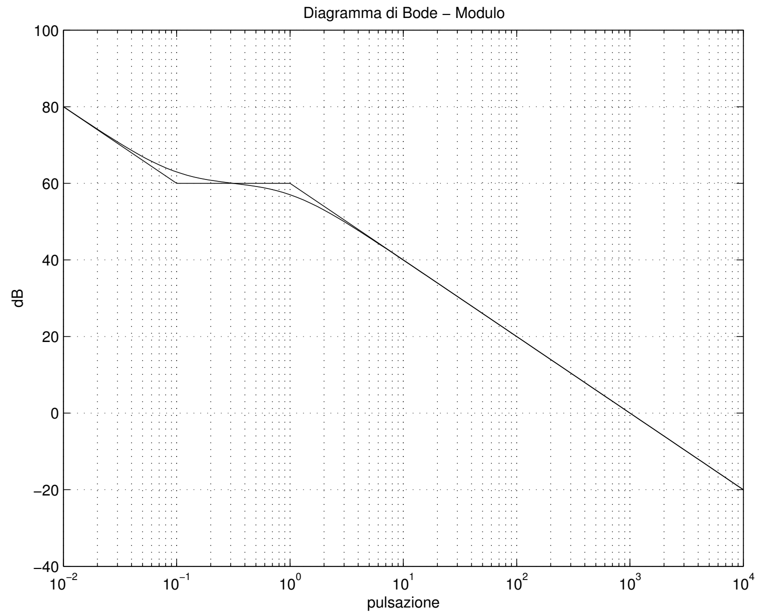
da cui segue $K_i \approx 10$. Prendiamo $K_i = 10$ a cui corrisponde $C'(s) = 10$.

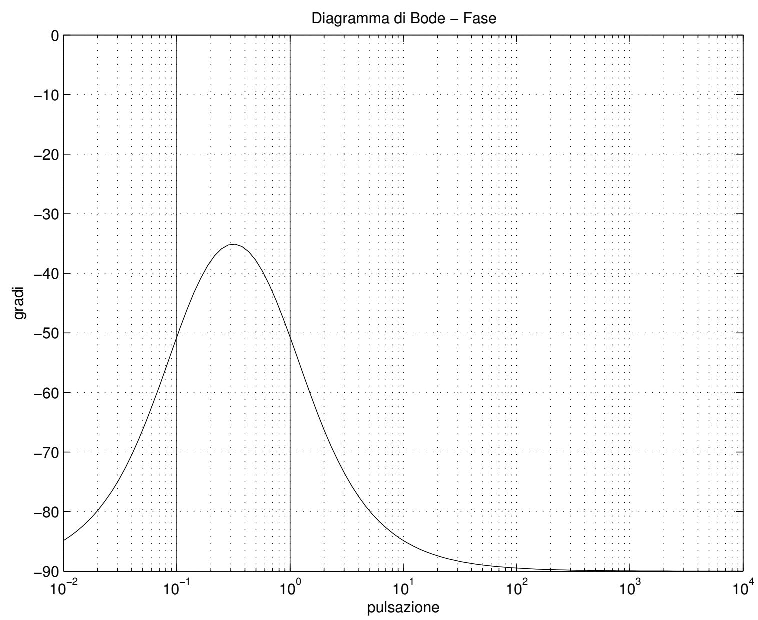
I diagrammi di Bode di $C'(s)G(s)$ sono i seguenti:





Mettendo uno zero in -0.1 ovvero assumendo $\frac{K_p}{K_i} = 10$, si soddisfano proprio le specifiche assegnate. I diagrammi di Bode della funzione complessiva $C(s)G(s)$ sono, infatti, i seguenti:





Pertanto $K_i = 10$ e $K_p = 100$.