Dispensa 1: Conversione A/D

DIMOSTRAZIONE: Trasformata di Fourier di un segnale continuo e campionato

Definiti:

- $x(t)$ un segnale a tempo continuo e $X(f)$ la sua trasformata di Fourier tale che $X(f) = FT[x(t)]$
- $x^*(t)$ il segnale associato a tempo continuo e campionato, definito come:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT), \text{ dove T è il periodo di campionamento.}$$

DOMANDA: Calcolare $X^*(f) = FT[x^*(t)]$.

SVOLGIMENTO

Richiamiamo alcune proprietà della FT:

1. La trasformata di un prodotto di funzioni è uguale alla convoluzione delle trasformate
2. La trasformata di un treno di impulsi $\sqcup_T(t)$ è un treno di impulsi tale per cui:
   $FT[\sqcup_T(t)] = \frac{1}{T} \sqcup_{\frac{1}{T}} (f))$, dove $\sqcup_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

Svolgiamo il problema per sostituzione:
$X^*(f) = FT[x^*(t)] = FT[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT)] = FT[x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)]$
(infatti il termine $x(t)$ non dipende da n e quindi lo porto fuori dalla sommatoria)

Applico poi la proprietà 1 e ottengo:
$X^*(f) = X(f) * FT[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)]$

A questo punto applico la proprietà 2 e ottengo
$X^*(f) = X(f) * FT[\sqcup_T(t)] = X(f) * \frac{1}{T} \sqcup_{\frac{1}{T}} (f)$

Ricordando le proprietà della convoluzione, per cui la convoluzione è un operatore lineare e che $x(t)*\delta(t-\theta) = x(t-\theta)$ posso concludere:
$X^*(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sqcup_{\frac{1}{T}} (f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T})$

Razionale: La Trasformata di Fourier di un segnale continuo e campionato $x^*(t)$ con periodo T, è la ripetizione periodica della trasformata di Fourier di x(t) con periodo di ripetizione $F_c = \frac{1}{T}$.

ESERCIZI

Esercizio 1 Dato:

- $x(t)$ segnale generico continuo nel tempo definito in ampiezza per l'intervallo $[0, 100]$mV
- errore di quantizzazione massimo $e_q Max = 1$mV

DOMANDA: Calcolare il numero di bit in quantizzazione per *arrotondamento*.

SVOLGIMENTO

Dalla teoria ricordo che:

- il passo di quantizzazione è definito come $q = \frac{RangeDelSegnale}{NumeroLivelli}$
- $RangeDelSegnale = max[x(t)] - min[x(t)] = 100 - 0 = 100$mV
- nella quantizzazione per arrotondamento $e_q MAX = q/2 \leq 1mV$.
- Dato il range del segnale (definito solo per valori positivi) uso la codifica senza segno dove $NumeroLivelli = 2^{nbit}$

Applicando quanto sopra ottengo che:

$e_q MAX = q/2 = \frac{100}{2^{nbit}} \cdot \frac{1}{2} \leq 1mV$

$\implies 2^{nbit} \geq 100/2$

$\implies \log_2 2^{nbit} \geq 50$

$\implies nbit \geq 5.6 \implies nbit = 6$

ATTENZIONE: Questa approssimazione all'intero successivo è necessaria perché i bit di informazione sono definiti solo per numeri interi e non sono frazionabili

Esercizio 2

Dato:

- $x(t)$ segnale generico continuo nel tempo definito in ampiezza per l'intervallo $[0, 100]$mV
- errore di quantizzazione massimo $e_q Max = 1$mV

DOMANDA: Calcolare il numero di bit in quantizzazione per *troncamento*.

SVOLGIMENTO

Come dall'esercizio precedente, applichiamo la teoria per il calcolo del passo di quantizzazione $q = \frac{RangeDelSegnale}{NumeroLivelli} = \frac{100}{2^{nbit}}$

Ricordiamo che nella quantizzazione per troncamento $e_q MAX = q \leq 1mV$, quindi:

$\implies e_q MAX = q \leq 1mV$

$\implies \frac{100mV}{2^{nbit}} \leq 1mV$

$\implies 2^{nbit} \geq 100$

$\implies nbit \geq \log_2 100 = 6.64 \implies nbit = 7$

ATTENZIONE: Questa approssimazione all'intero sucessivo è necessaria perché i bit di informazione sono definiti solo per numeri interi e non sono frazionabili

Esercizio 3

Si consideri un termometro digitale con le seguenti specifiche:

- Range di temperatura = [0,200]°C
- Risoluzione = 0.5°C = (passo di quantizzazione q)
- $F_c = 0,5Hz$
- Grandezza, massima del supporto di memoria=3 KByte

DOMANDA: Calcolare il numero di supporti di memoria necessari per 7 giorni di registrazione.

SVOLGIMENTO

Calcolo il numero di livelli come $NumeroLivelli = \frac{Max-Min}{q} = \frac{200°C-0°C}{0.5°C} = 400$

A questo punto calcolo il numero di bit sapendo che $NumeroLivelli = 2^{nbit}$ [Dato il range del segnale (definito solo per valori positivi) uso la codifica senza segno]

Quindi ottengo: $nbit = \log_2(NumeroLivelli) = \log_2 400 = 8.64 \implies nbit = 9$ (arrotondo all'intero successivo, con 8 bit disporrei di solo 256 livelli)

Per calcolare la durata di un supporto ricordare che:

- Per convertire da bit a Byte devo dividere per 8
- il $BitRate$, cioè la velocità di di accumulo di bit, è calcolata come: $BitRate = Fc \cdot nbit$

Otteniamo dunque:

$Durata\ di\ un\ supporto = \frac{Dimensione\ supporto\ in\ bit}{BitRate} = \frac{Dimensione\ supporto\ in\ byte \cdot 8}{Fc \cdot nbit} = \frac{3000*8}{0.5*9} = 5333s$

$nfile = \frac{durata\ totale\ della\ registrazione\ (7\ giorni)}{Durata\ singolo\ supporto} = 113.4 \implies nfile = 114$ (il numero di file deve essere un numero intero)

Osservazioni generali su codifica analogico/digitale

1. Il numero di livelli è definito dalla codifica (con segno/senza segno) e non dal tipo di quantizzazione (troncamento/arrotondamento).

2. La scelta della codifica segno/senza segno dipende dal tipo di segnale:

   - simmetrico rispetto allo 0 $\implies$ codifica con segno
   - sbilanciato rispetto allo zero (es. [-20,1000] o completamente positivo/negativo $\implies$ codifica senza segno

3. Il tipo di quantizzazione (arrotondamento/troncamento) cambia il modo in cui mappo il segnale di interesse nei livelli di quantizzazione disponibili. ATTENZIONE: generalmente se q (passo di quantizzazione) è definito (e il numero di livelli e range del segnali sono noti), il tipo di quantizzazione non cambia la griglia dei livelli di quantizzazione, ma solo la mappatura del segnale.

4. Come costruire la griglia di quantizzazione:

   - caso codifica con segno:
     (a) definisco il valore zero $-E_qMAX < x_o < E_qMAX$
     (b) distribuisco equamente i rimanenti livelli sopra e sotto, aggiungendo $\pm nq$ agli estremi dell'intervallo centrale
   - caso codifica senza segno:
     (a) definisco il livello zero $x_0 =$ valore minimo del segnale
     (b) salgo di passo q per il $NumeroLivelli$ definito dalla codifica, fino al livello massimo quantizzabile (che idealmente dovrebbe essere associato al valore massimo del segnale)