COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
13 Febbraio 2017

Esercizio 1. [10.5 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10^{-2}\, \frac{(s^2+1)(s-100)^2}{s^2(s^2-0.2s+1)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (non è richiesto il calcolo delle intersezioni con gli assi);

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$, al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. [7.5 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = u(t).$$

i) Si determini, se esiste, ricorrendo alle trasformate di Laplace la risposta transitoria e la risposta di regime permanente al segnale sinusoidale

$$u(t) = 10\cos t\ \delta_{-1}(t),$$

a partire da condizioni iniziali nulle;

ii) si determini, se possibili, per quali condizioni iniziali il sistema risponde al segnale sinusoidale

$$u(t) = 10\cos t\ \delta_{-1}(t),$$

con uscita $y(t)$ che coincide con la risposta di regime prima determinata per ogni istante $t \in \mathbb{R}$ (e non solo asintoticamente).

Esercizio 3. [8 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+100} \in \mathbb{R}(s)$$

di un processo, è richiesto il progetto di due compensatori razionali, propri e stabilizzanti in modo che essi siano in grado di garantire le seguenti prestazioni:

i) $C_1(s)$ deve garantire che il sistema retroazionato sia di tipo 0 con relativo errore di regime permanente $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.1$ (al gradino unitario), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ deve avere pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 100$ rad/sec e margine di fase $m_\psi \simeq 90°$;

ii) $C_2(s)$ dev'essere un controllore di tipo PID (eventualmente P, PI o PD) e garantire che il sistema retroazionato sia di tipo 1 con relativo errore di regime permanente $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.1$ (alla rampa lineare), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ deve avere pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 1000$ rad/sec e margine di fase $m_\psi \simeq 90°$.

iii) Si dimostri, ricorrendo al luogo positivo delle radici associato a $G(s)$, che esiste un controllore proporzionale stabilizzante $C(s) = K > 0$ che rende il sistema retroazionato BIBO stabile con un polo reale doppio.

Teoria. [4.5 punti] Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si dimostri analiticamente che nel caso di un sistema BIBO stabile valgono le seguenti condizioni:

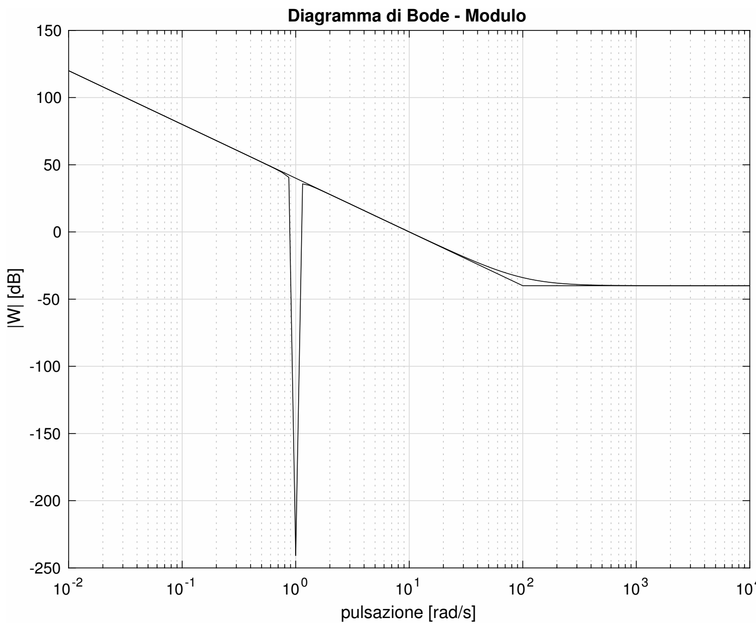
i) il sistema è di tipo 0 se e solo se $W(0) \neq 1$;

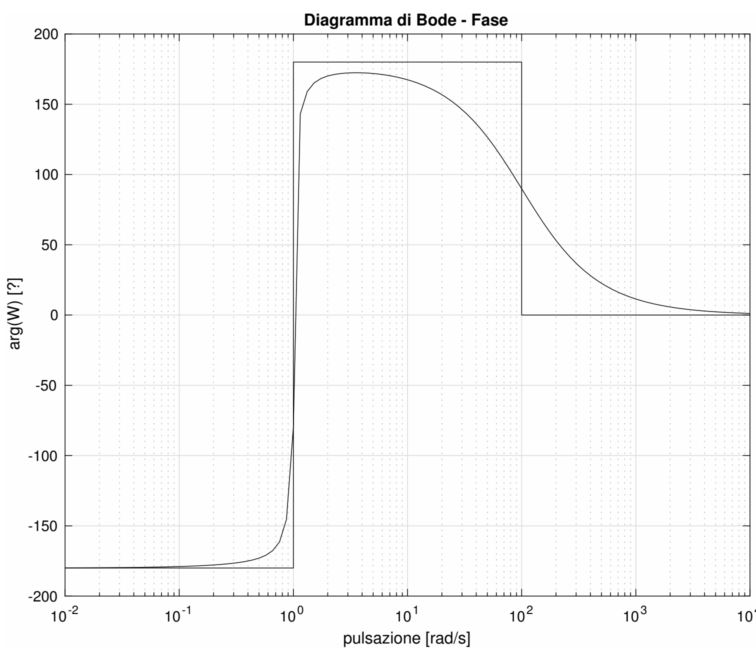
ii) il sistema è di tipo 1 se e solo se $W(0) = 1$ e $\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} \neq 0$.

In entrambi i casi si derivi l'espressione del relativo errore di regime permanente.
Si dica (senza dimostrarlo) sotto quali condizioni un sistema è di tipo $k > 1$ e in tal caso qual è l'espressione dell'errore di regime permanente.

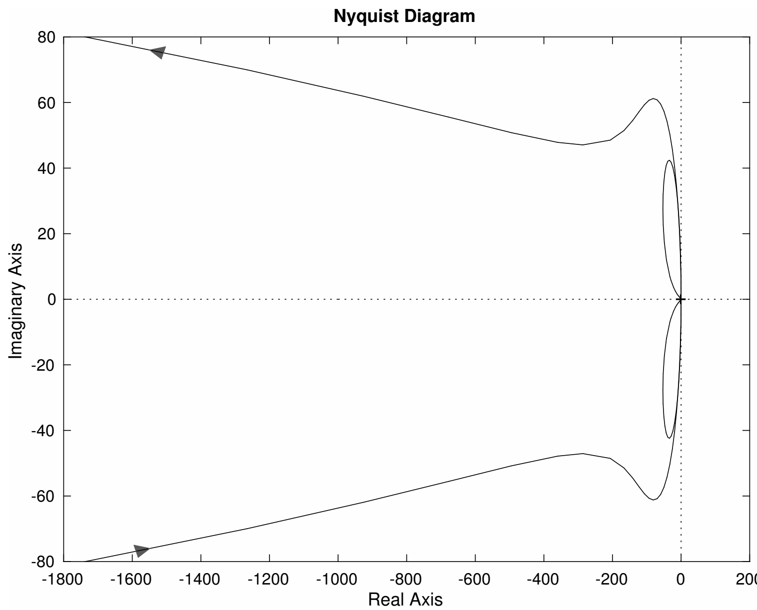
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Il diagramma di Bode è il seguente:

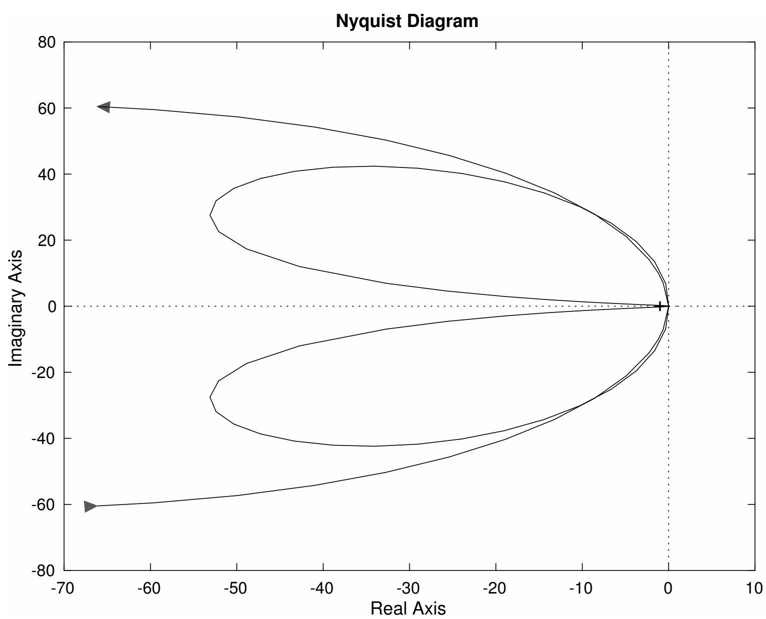


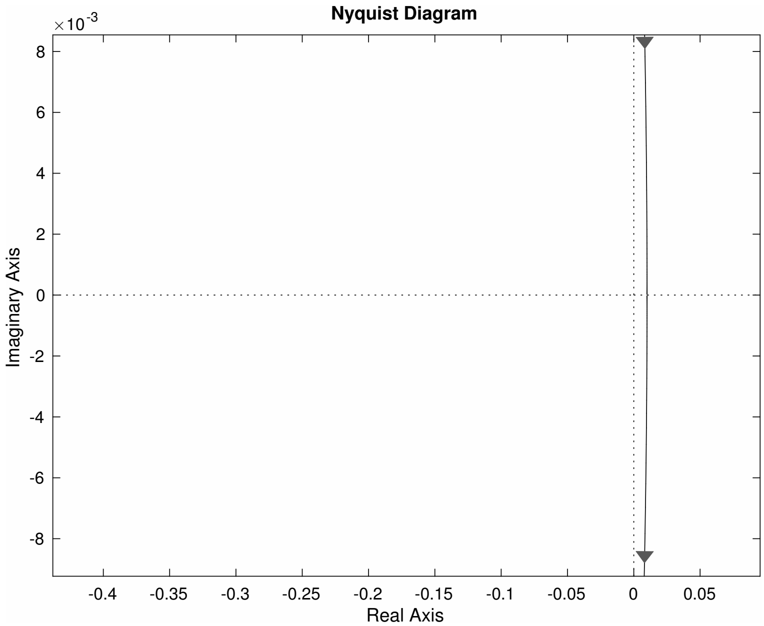


ii) Il diagramma di Nyquist è il seguente:



Due suoi dettagli sono riportati qui di seguito: il primo corrisponde a pulsazioni con $|\omega| \in [0.7, +\infty)$, il secondo corrisponde a pulsazioni con $|\omega| \in [100, +\infty)$:





Se consideriamo la sola porzione del diagramma per $\omega \geq 0$, il diagramma parte nel terzo quadrante dal punto improprio, con tangente parallela al semiasse reale negativo, e poi passa per l'origine con tangente parallela al semiasse immaginario negativo, esce dall'origine con tangente parallela al semiasse immaginario positivo, poi compie una rotazione in verso antiorario che lo avvicina al semiasse reale negativo per poi cambiare verso e finire (per $\omega = +\infty$) sul semiasse reale positivo nel punto $s = 0.01$. La chiusura del diagramma al finito avviene con un arco di 360° in verso orario che collega il punto corrisponde a $\omega = -\varepsilon$, nel secondo quadrante, con il punto corrisponde a $\omega = \varepsilon$, nel terzo quadrante.

iii) Osserviamo, preliminarmente, che $n_{G+} = 2$. Si distinguono i seguenti casi:

- per $K > 0$, $N = 0$ e quindi $n_{W+} = 2$;
- per $K < -100$, $N = -2$ e quindi $n_{W+} = 4$;
- per $0 > K > -100$, $N = -1$ e quindi $n_{W+} = 3$.

Si noti che per $K = -100$, $W(s)$ non è propria. Pertanto $W(s)$ non è mai BIBO stabile.

Esercizio 2. i) Chiaramente affinché esista la risposta di regime permanente a un segnale sinusoidale in corrispondenza a condizioni iniziali nulle occorre e basta che il sistema sia BIBO stabile. Poiché il sistema è del secondo ordine, la regola dei segni di Cartesio permette di dedurre che il sistema è asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile. Il calcolo della trasformata di Laplace dell'uscita (puramente forzata) porta a

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}\frac{10s}{s^2+1} = \frac{10s}{(s^2+2s+5)(s^2+1)},$$

che decomposta in fratti semplici, dopo un certo numero di passaggi numerici, porta a

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+1} - \frac{2(s+1)+3/2\cdot 2}{(s+1)^2+2^2},$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = y_f(t) = [2\cos t + \sin t] + [-2e^{-t}\cos(2t) - 3/2e^{-t}\sin(2t)]\delta_{-1}(t).$$

È immediato rendersi conto del fatto che

$$y_{rp}(t) = 2\cos t + \sin t,$$

mentre

$$y_{f,tr}(t) = -2e^{-t}\cos(2t) - 3/2e^{-t}\sin(2t).$$

ii) L'asintotica stabilità del sistema assicura che anche in presenza di condizioni iniziali non nulle esistano risposta di regime e risposta transitoria. L'unico modo per garantire che, in corrispondenza ad una specifica scelta delle condizioni iniziali, valga

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = y_\ell(t) + y_{f,tr}(t) + y_{rp}(t) = y_{rp}(t),$$

per ogni $t \geq 0$, è scegliere tali condizioni in modo tale che

$$y_\ell(t) + y_{f,tr}(t) = 0$$

per ogni $t \geq 0$, ovvero

$$y_\ell(t) = 2e^{-t}\cos(2t) + 3/2e^{-t}\sin(2t).$$

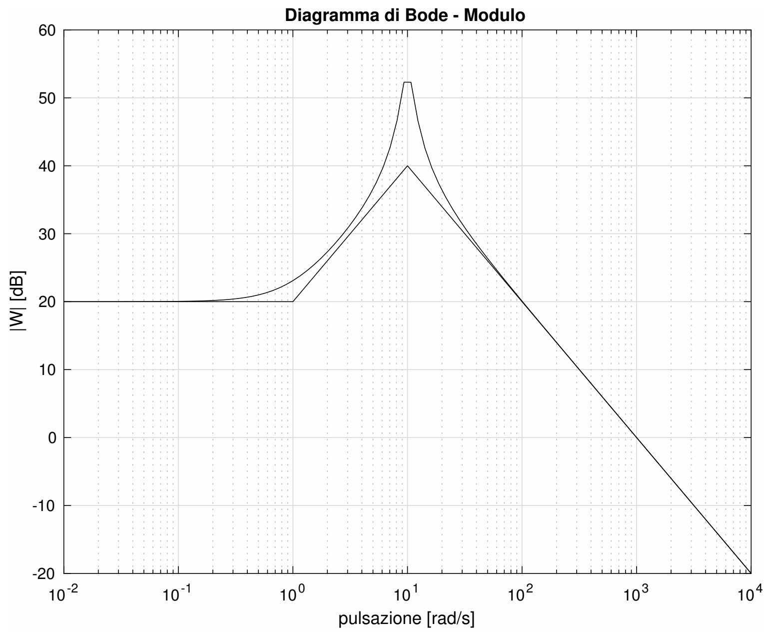
Il calcolo della derivata

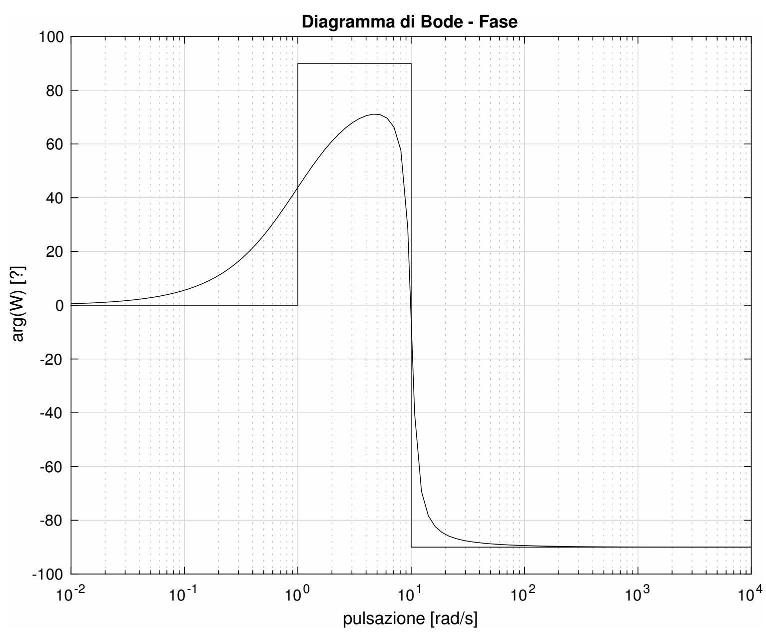
$$\frac{dy_\ell(t)}{dt} = e^{-t}\cos(2t) - \frac{11}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

e successivamente dei valori di $y_\ell(t)$ e $\frac{dy_\ell(t)}{dt}$ in $t = 0$ porta a

$$y(0^-) = y_\ell(0) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0)}{dt} = 1.$$

Esercizio 3. i) Il precompensatore che deve sistemare tipo ed errore di regime permanente è $C_1'(s) = 10^3$. Il diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s)$ presenta pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10^3$ rad/sec e margine di fase di circa 90°.





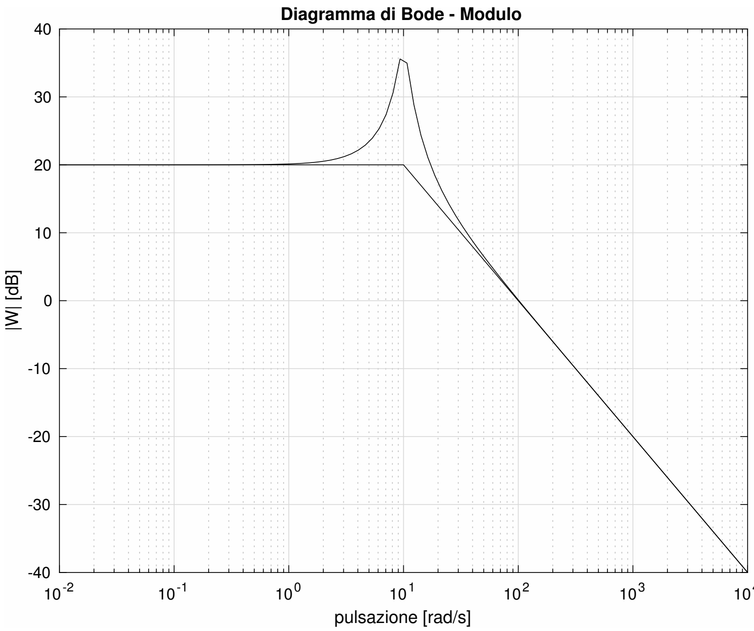
Dovendo abbassare $|C_1'(j\omega_a)G(j\omega_a)|$ di 20 dB, è necessario il ricorso ad una rete ritardatrice/attenuatrice con coppia polo-zero distanziata 1 decade e posizionata prima di $\omega_a \simeq 100$ rad/sec. Una possibilità consiste nel mettere un polo in $s = -1$ ed uno zero in $s = -10$ (che induce una doppia cancellazione zero-polo ammissibile), il che corrisponde ad assumere come rete ritardatrice/attenuatrice

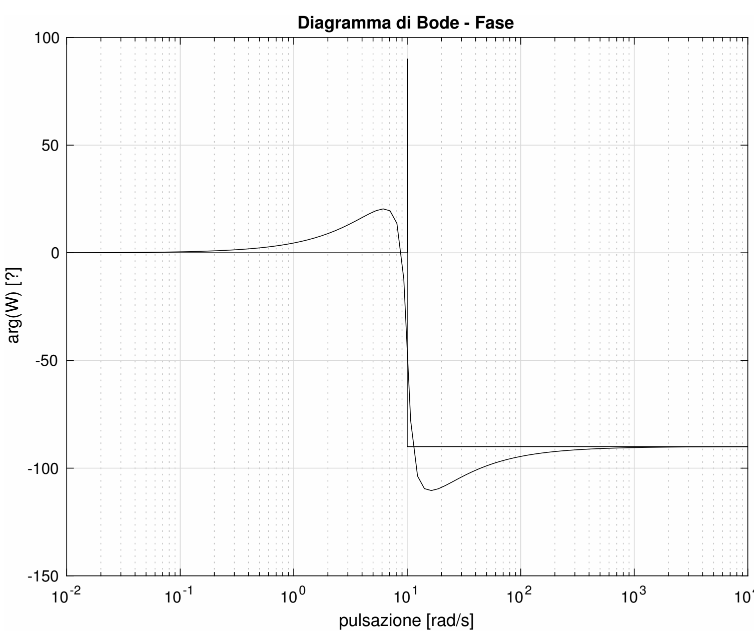
$$C_1''(s) = \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + s}$$

e quindi come controllore complessivo

$$C_1(s) = 1000\frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + s}.$$

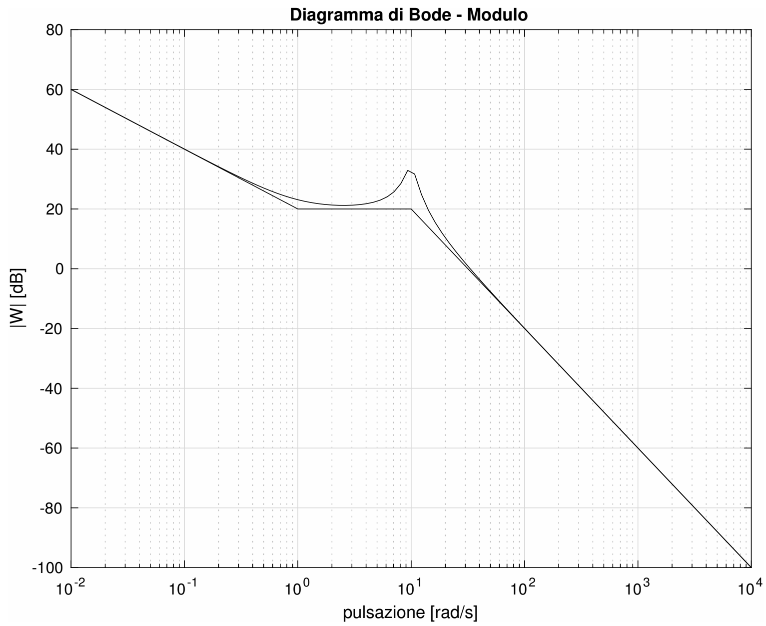
La funzione di trasferimento in catena aperta finale $C_1(s)G(s)$ ha diagrammi di Bode

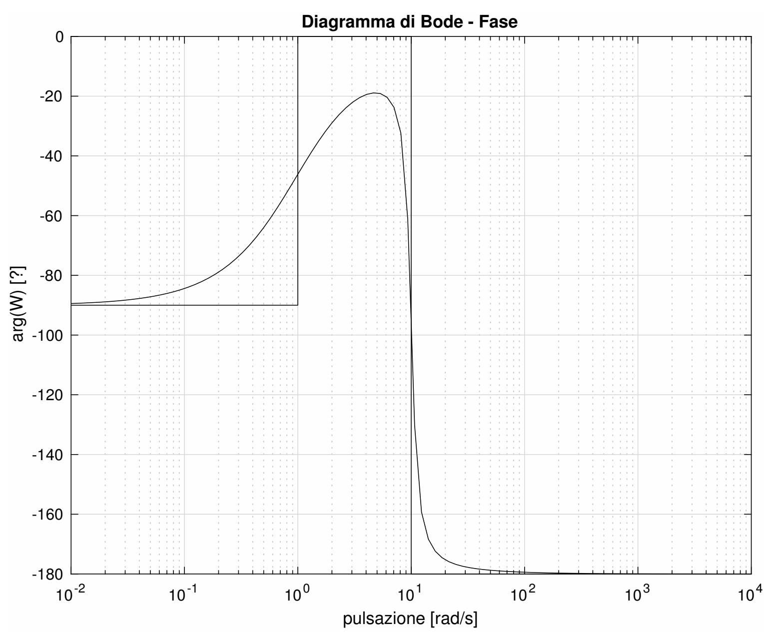




In base al criterio di Bode, il sistema retroazionato finale risulta BIBO stabile.

ii) Il precompensatore che deve sistemare tipo ed errore di regime permanente è $C_2'(s) = \frac{10^3}{s}$. Il diagramma di Bode di $C_2'(s)G(s)$ presenta pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10\sqrt{10}$ rad/sec e un margine di fase molto piccolo.

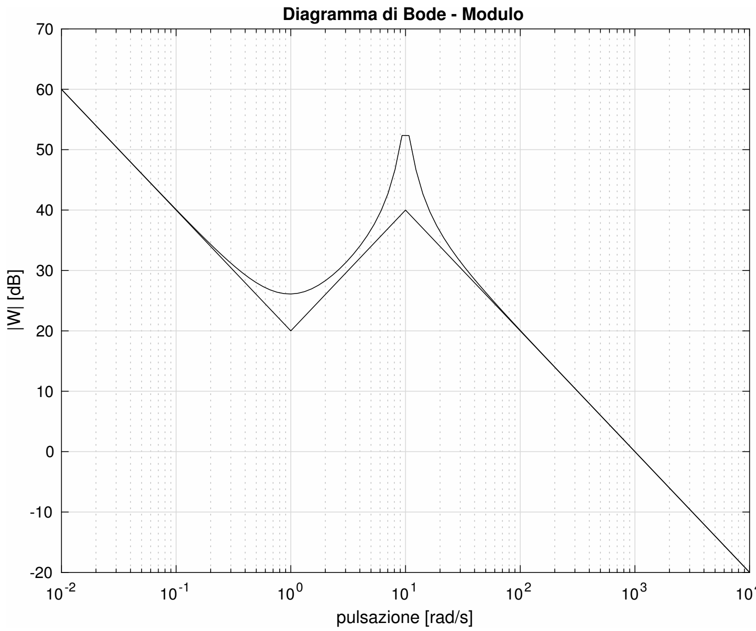


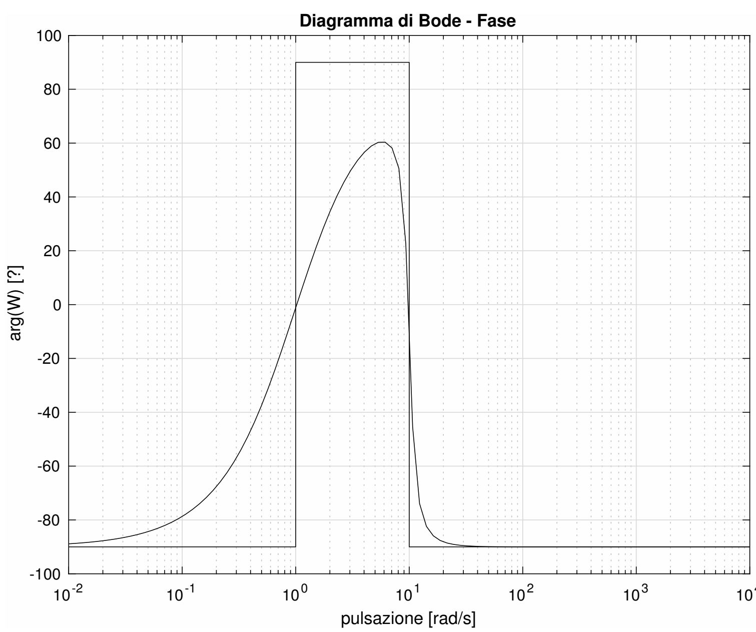


Un solo zero in $s = -1$ è sufficiente a sistemare i requisiti, pertanto il PI

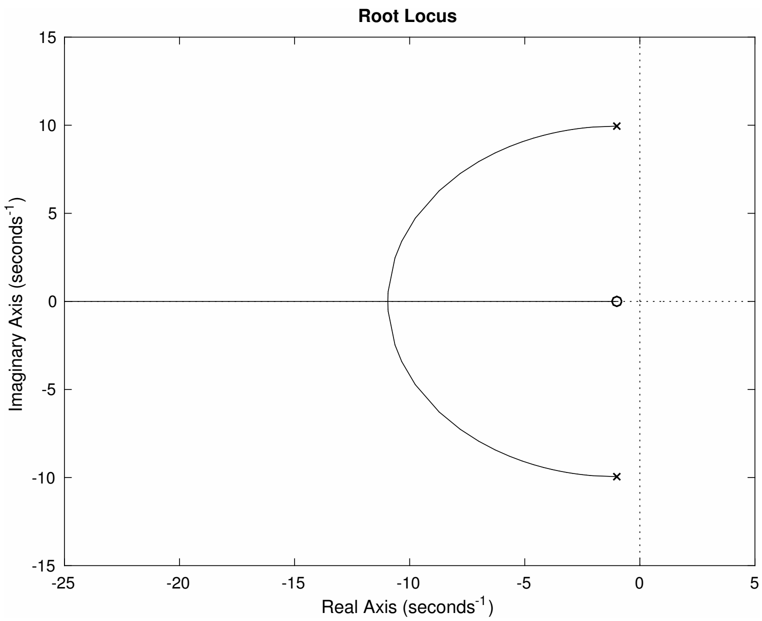
$$C_2(s) = 10^3 \ \frac{1+s}{s} = \frac{10^3}{s} + 10^3$$

permette il soddisfacimento di tutte le specifiche, inclusa la stabilità BIBO del sistema retroazionato, in base al criterio di Bode.





iii) Il luogo delle radici positivo è banalmente il seguente e chiaramente presenta un punto doppio.



Il punto doppio può essere calcolato risolvendo l'equazione dei candidati punti doppi:

$$(2s+2)(s+1) - (s^2+2s+100) = s^2+2s-98 = 0,$$

le cui radici sono approssimativamente 9 e -11. Chiaramente il punto doppio in questione è -11 e lo si trova per $K = \sqrt{396} \approx 20$.

Teoria. Si veda il Capitolo 6, pag. 170 e seguenti, del Libro di testo.