A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3$^{\text{o}}$ Appello — 8 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $U \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici A tali che il vettore $(1, -2)$ appartiene al nucleo di A. Sia $W \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici B tali che l'immagine di B è contenuta nella retta di equazione $y = 2x$.

(a) Si determini la dimensione e una base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

(c) Data la matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ t & -1 \end{smallmatrix}\right)$ si dica per quale valore di t l'insieme $\{C + A \,|\, \text{per ogni } A \in U\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(d) Si determini (se possibile) una base di un sottospazio vettoriale $L \subset V$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & t & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quale valore di t l'immagine di f ha dimensione 1. Per tale valore di t si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si determini una base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ abbia la seconda riga nulla.

(c) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità.

(d) Dopo aver posto $t = 0$, sia $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$h(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^3.$$

Si scriva la matrice di h rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 2t-1 & t & t \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di f sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

(c) Si determini il valore di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori di f e si scriva una tale base.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia ℓ la retta passante per il punto $(1, 1, -2)$ e parallela al vettore $v_\ell = (1, 0, -1)$ e sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C = (1, -2, 1)$ e raggio 3.

(a) Si determini la distanza di C dalla retta ℓ e il punto C' simmetrico di C rispetto a ℓ.

(b) Si determinino le equazioni parametriche di due rette sghembe r e s passanti rispettivamente per i punti $R_1 = (4, 2, -1)$ e $S_1 = (2, 3, 1)$ e incidenti la retta ℓ rispettivamente nei punti R_2 e S_2, in modo tale che R_2 e S_2 siano i punti di minima distanza delle rette r e s.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette di direzione $\langle(2, -1, 2)\rangle$ tangenti alla sfera $\mathcal{S}$ e incidenti la retta ℓ.

B

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 8 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $U \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici A tali che il vettore $(3, -1)$ appartiene al nucleo di A. Sia $W \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici B tali che l'immagine di B è contenuta nella retta di equazione $y = 3x$.

(a) Si determini la dimensione e una base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

(c) Data la matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ -1 & t \end{smallmatrix}\right)$ si dica per quale valore di t l'insieme $\{C + A \mid \text{per ogni } A \in U\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(d) Si determini (se possibile) una base di un sottospazio vettoriale $L \subset V$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quale valore di t l'immagine di f ha dimensione 1. Per tale valore di t si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si determini una base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ abbia la seconda riga nulla.

(c) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità.

(d) Dopo aver posto $t = 0$, sia $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$h(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^3.$$

Si scriva la matrice di h rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 2t-1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di f sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

(c) Si determini il valore di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori di f e si scriva una tale base.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia ℓ la retta passante per il punto $(-2, 5, -1)$ e parallela al vettore $v_\ell = (0, 1, -1)$ e sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C = (2, 1, 1)$ e raggio 3.

(a) Si determini la distanza di C dalla retta ℓ e il punto C' simmetrico di C rispetto a ℓ.

(b) Si determinino le equazioni parametriche di due rette sghembe r e s passanti rispettivamente per i punti $R_1 = (3, 3, 1)$ e $S_1 = (1, -2, 0)$ e incidenti la retta ℓ rispettivamente nei punti R_2 e S_2, in modo tale che R_2 e S_2 siano i punti di minima distanza delle rette r e s.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette di direzione $\langle(2, 1, -2)\rangle$ tangenti alla sfera $\mathcal{S}$ e incidenti la retta ℓ.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 8 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $U \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici A tali che il vettore $(2, 1)$ appartiene al nucleo di A. Sia $W \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici B tali che l'immagine di B è contenuta nella retta di equazione $y = -2x$.

(a) Si determini la dimensione e una base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

(c) Data la matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} -3 & 6 \\ 2 & t \end{smallmatrix}\right)$ si dica per quale valore di t l'insieme $\{C + A \,|\, \text{per ogni } A \in U\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(d) Si determini (se possibile) una base di un sottospazio vettoriale $L \subset V$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & t & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quale valore di t l'immagine di f ha dimensione 1. Per tale valore di t si trovi una base di $\operatorname{Ker}(f)$ e una base di $\operatorname{Im}(f)$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si determini una base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ abbia la seconda riga nulla.

(c) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità.

(d) Dopo aver posto $t = 0$, sia $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$h(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^3.$$

Si scriva la matrice di h rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 2t-1 \\ 1-t & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di f sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

(c) Si determini il valore di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori di f e si scriva una tale base.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia ℓ la retta passante per il punto $(3, -1, -3)$ e parallela al vettore $v_\ell = (0, 1, -2)$ e sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C = (0, 1, -1)$ e raggio 3.

(a) Si determini la distanza di C dalla retta ℓ e il punto C' simmetrico di C rispetto a ℓ.

(b) Si determinino le equazioni parametriche di due rette sghembe r e s passanti rispettivamente per i punti $R_1 = (1, 4, 2)$ e $S_1 = (0, 4, -3)$ e incidenti la retta ℓ rispettivamente nei punti R_2 e S_2, in modo tale che R_2 e S_2 siano i punti di minima distanza delle rette r e s.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette di direzione $\langle(2, -1, -2)\rangle$ tangenti alla sfera $\mathcal{S}$ e incidenti la retta ℓ.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3$^{\text{o}}$ Appello — 8 settembre 2014

Esercizio 1. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $U \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici A tali che il vettore $(1, 3)$ appartiene al nucleo di A. Sia $W \subset V$ il sottospazio formato dalle matrici B tali che l'immagine di B è contenuta nella retta di equazione $y = -3x$.

(a) Si determini la dimensione e una base dei sottospazi U e W.

(b) Si determini la dimensione e una base di $U + W$ e $U \cap W$.

(c) Data la matrice $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ t & 2 \end{smallmatrix}\right)$ si dica per quale valore di t l'insieme $\{C + A \,|\, \text{per ogni } A \in U\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

(d) Si determini (se possibile) una base di un sottospazio vettoriale $L \subset V$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = U + W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & t & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quale valore di t l'immagine di f ha dimensione 1. Per tale valore di t si trovi una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si determini una base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ abbia la seconda riga nulla.

(c) Si dica per quali valori di t esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sia l'identità.

(d) Dopo aver posto $t = 0$, sia $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita ponendo

$$h(v) \cdot w = v \cdot f(w), \qquad \forall v \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^3.$$

Si scriva la matrice di h rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} t & 2t-1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Si dica per quali $t \in \mathbb{R}$ gli autovalori di f sono reali, specificando i casi in cui tali autovalori hanno molteplicità maggiore di 1.

(b) Si determini per quali valori di t la matrice A è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

(c) Si determini il valore di t per cui esiste una base ortonormale di autovettori di f e si scriva una tale base.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia ℓ la retta passante per il punto $(3, -3, -4)$ e parallela al vettore $v_\ell = (1, 2, 0)$ e sia $\mathcal{S}$ la sfera di centro $C = (1, -1, -1)$ e raggio 3.

(a) Si determini la distanza di C dalla retta ℓ e il punto C' simmetrico di C rispetto a ℓ.

(b) Si determinino le equazioni parametriche di due rette sghembe r e s passanti rispettivamente per i punti $R_1 = (-4, -2, 1)$ e $S_1 = (3, 2, -2)$ e incidenti la retta ℓ rispettivamente nei punti R_2 e S_2, in modo tale che R_2 e S_2 siano i punti di minima distanza delle rette r e s.

(c) Si scrivano le equazioni parametriche delle rette di direzione $\langle(1, -2, -2)\rangle$ tangenti alla sfera $\mathcal{S}$ e incidenti la retta ℓ.