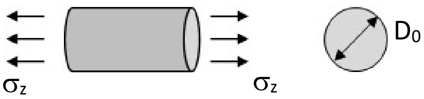
BIOMECCANICA A.A. 2024-25
MODELLI COSTITUTIVI ELASTICI LINEARI

1. STATO DEFORMATIVO PER UNA LEGA DI TITANIO

Data una lega di Titanio gr. 4 avente modulo elastico longitudinale E pari a 105 GPa, coefficiente di Poisson ν pari a 0.33 e tensione limite elastica σ_s (tensione di snervamento) pari a 630 MPa, calcolare lo stato deformativo alle condizioni limite del comportamento elastico per un provino cilindrico di raggio iniziale D_0 sottoposto ad uno stato di trazione mono-assiale.



La figura mostra la condizione indicata, avendo ipotizzato che la direzione di applicazione delle tensioni coincida con l'asse z. Le relazioni tra stato deformativo e tensionale per un materiale elastico lineare isotropo sono date da:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G}$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G}$$

essendo G il modulo elastico tangenziale. Sostituendo i valori di tensione (valori tutti nulli all'infuori di σ_z), si ottiene:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Per le componenti non nulle di deformazione si perviene ai seguenti valori:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -0.33\frac{630}{105'000} = -0.00198 = -0.198\%$$
$$\varepsilon_z = \frac{630}{105'000} = 0.006 = 0.6\%$$

Il diametro del provino di materiale nella condizione deformata, indicato con D, risulta pari a:

$$D = (1+\varepsilon_z)D_0 = (1-0.00198)D_0 = 0.998 \cdot D_0$$

Il rapporto tra area trasversale deformata A e area trasversale indeformata A_0 del provino è pertanto:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\pi D^2/4}{\pi D_0^2/4} = 0.998^2 = 0.996$$

In tali condizioni, ai fini delle applicazioni di tipo ingegneristico, è possibile approssimare il valore dell'area trasversale deformata a quella indeformata.

2. EFFETTI DELLA CONTRAZIONE LATERALE

Si consideri un materiale con comportamento elastico lineare isotropo, avente modulo elastico longitudinale E pari a 10 GPa e coefficiente di Poisson ν pari a 0.2. Si calcolino gli stati deformativi indotti da uno stato di tensione mono-assiale con σ_x = 100 MPa e quelli indotti da uno stato di tensione bi-assiale con σ_x = 100 MPa e σ_x = 100 MPa.

Prendendo in esame le relazioni utilizzate nell'esercizio precedente, le componenti di scorrimento angolare rispetto al sistema di riferimento indicato risultano tutte nulle. Le componenti dirette per il primo stato di tensione indicato risultano come segue:

$$\varepsilon_x = \frac{100}{10'000} = 0.01$$

$$\varepsilon_y = -0.2\frac{100}{10'000} = -0.002$$

$$\varepsilon_z = -0.2\frac{100}{10'000} = -0.002$$

Per il secondo stato di tensione risulta invece:

$$\varepsilon_x = \frac{100}{10'000} - 0.2\frac{50}{10'000} = 0.009$$

$$\varepsilon_y = -0.2\frac{100}{10'000} + \frac{50}{10'000} = 0.003$$

$$\varepsilon_z = -0.2\frac{100}{10'000} - 0.2\frac{50}{10'000} = -0.003$$

Si noti come, comparando gli effetti nei due stati di tensioni proposti, la deformazione in direzione x si riduce per l'effetto indiretto della tensione normale applicata in direzione y. In direzione z gli effetti indiretti delle due tensioni (di segno concorde) si sommano.

3. EFFETTI DELLA CONTRAZIONE LATERALE

Si consideri un materiale con comportamento elastico lineare isotropo, avente modulo elastico longitudinale E pari a 10'000 MPa e coefficiente di Poisson ν pari a 0.4. Si calcoli quale valore di componente di tensione normale deve essere applicata in direzione y per compensare a zero la componente di deformazione diretta in direzione x indotta da una tensione normale σ_x = –100 MPa.

Si considera la relazione che fornisce la componente di deformazione diretta lungo x:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E}$$

Imponendo a zero la deformazione, ricavando la tensione lungo y e sostituendo i valori si ottiene:

$$\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \frac{1}{\nu}\sigma_x = \frac{1}{0.4}\sigma_x = 250\,\text{MPa}$$

4. MODULO DI RIGIDEZZA VOLUMETRICA

Un materiale a comportamento elastico lineare isotropo, soggetto a tensione mono-assiale lungo x, mostra una deformazione diretta ε_x pari a 0.01 e una contrazione laterale ε_y pari a – 0.002. Inoltre, il materiale in compressione confinata evidenzia un modulo di rigidezza H pari a 150 MPa. Sulla base dei dati indicati, si deduca il modulo di rigidezza volumetrica del materiale.

I dati relativi alle componenti di dilatazione della deformazione, nelle condizioni di tensione mono-assiale, consentono di ricavare il coefficiente di Poisson del materiale, che risulta essere:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{-0.002}{0.01} = 0.2$$

Il modulo di rigidezza a compressione confinata è definito come:

$$H = \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{E}{1-2\nu}$$

avendo indicato con E il modulo elastico longitudinale. Il modulo di rigidezza volumetrica K_v è invece definito come:

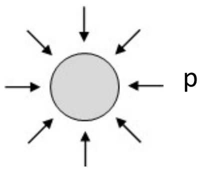
$$K_v = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Per confronto con la relazione precedente, si ottiene quindi:

$$K_v = \frac{H}{3} \cdot \frac{1+\nu}{1-\nu} = \frac{150}{3} \cdot \frac{1+0.2}{1-0.2} = 75\,\text{MPa}$$

5. DEFORMAZIONE VOLUMETRICA

Un corpo sferico di materiale elastico lineare isotropo, con modulo elastico longitudinale E pari a 25 GPa e coefficiente di Poisson ν pari a 0.3, è soggetto ad una tensione idrostatica p pari a –20 MPa. Calcolare la variazione di volume del corpo.



Il modulo di rigidezza, definito come nel precedente esercizio, indica il rapporto tra pressione idrostatica applicata e la conseguente variazione relativa di volume, rispetto al volume indeformato V_0, essendo ΔV la variazione di volume:

$$K_v = \frac{p}{\Delta V / V_0}$$

Si ricava il valore del modulo di rigidezza volumetrica:

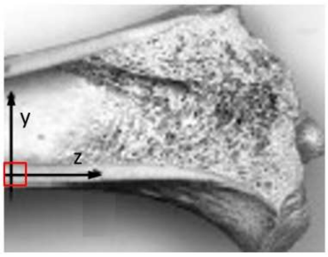
$$K_v = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{25'000}{3(1-2\cdot 0.3)} = 20'833\,\text{MPa}$$

$$\Delta V / V_0 = \frac{p}{K_v} = \frac{-20}{20'833} = -0.00096$$

Il volume iniziale si riduce quindi di una quantità pari a 0.096%.

6. MATERIALE TRASVERSALMENTE ISOTROPO

Un tessuto osseo corticale prelevato da femore umano (vedi figura) è provato meccanicamente a trazione mono-assiale nella direzione prossimale-distale (asse z) e nelle direzioni locali radiale (y) e circonferenziale (x). Il tessuto mostra un comportamento trasversalmente isotropo nel piano perpendicolare a z, con i seguenti valori dei parametri elastici: E_z = 17 GPa, $E_x = E_y$ = 11.5 GPa, ν_{zx} = 0.3, ν_{zy} = 0.3. Calcolare gli stati deformativi per uno stato di tensione mono-assiale di compressione in direzione z, pari a 50 MPa.



Le componenti di scorrimento angolare risultano tutte nulle, essendo nulle le componenti di tensione tangenziale. Per quanto concerne le componenti dirette della deformazione, queste si ottengono dalle formule generali per un materiale ortotropo, con la scelta opportuna dei parametri relativi al piano di isotropia:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yx}\frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{zx}\frac{\sigma_z}{E_z}$$

$$\varepsilon_y = -\nu_{yx}\frac{\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_{zy}\frac{\sigma_z}{E_z}$$

$$\varepsilon_z = -\nu_{xz}\frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_{yz}\frac{\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z}$$

Considerando la sola componente non nulla di tensione, le precedenti relazioni si semplificano come segue e porgono i seguenti risultati per le deformazioni:

$$\varepsilon_x = -\nu_{zx}\frac{\sigma_z}{E_z} = -0.3\frac{-50}{17'000} = 0.0009$$

$$\varepsilon_y = -\nu_{zy}\frac{\sigma_z}{E_z} = -0.3\frac{-50}{17'000} = 0.0009$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E_z} = \frac{-50}{17'000} = -0.0029$$