Soluzioni del IV homework.

1. La funzione di trasferimento $C(s)$ ottenuta con il primo progetto è

$$C(s) = \frac{15.5s^2 + 8.28s + 0.114}{s}.$$

2. Per soddisfare effettivamente le specifiche si sono imposti i seguenti valori:

$$t_r^* = 80 \text{ minuti} , \qquad M_p^* = 2\%$$

e si è così ottenuta la funzione di trasferimento

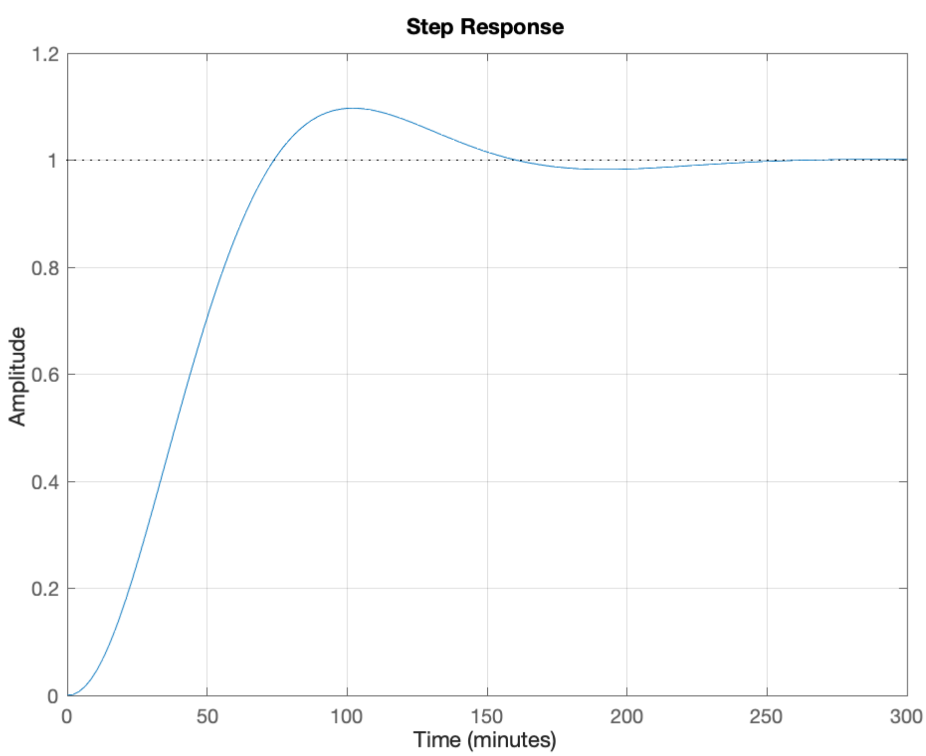
$$C(s) = \frac{28.78s^2 + 5.52s + 0.114}{s}$$

La funzione di trasferimento del relativo sistema a catena chiusa è:

$$W(s) = \frac{0.0009209s^2 + 0.0001767s + 0.000003661}{s^4 + 0.1833s^3 + 0.01015s^2 + 0.0003048s + 0.000003661}$$

I valori effettivi del tempo di salita e della massima sovraelongazione della risposta indiciale del sistema a catena chiusa di funzione di trasferimento $W(s)$ sono: $t_r \simeq 52$ minuti e $M_p \simeq 9.7\%$.

3. Il grafico della risposta indiciale del sistema a catena chiusa è:



Ragionamenti e i passaggi per ottenere la soluzione

Si verifica facilmente che $G(s)$ è BIBO stabile e $G(0) > 0$. Consideriamo la funzione di trasferimento del PID scritta nella forma

$$C(s) = \frac{K_I}{s}\left[1 + T_I s + T_D T_I s^2\right].$$

La specifica A. è automaticamente soddisfatta dalla presenza del polo in zero. Per la specifica B., ricordiamo che $e_r = 1/K_B$, dove K_B è il guadagno di Bode della funzione di trasferimento $H(s) = C(s)G(s)$, ossia $K_B = K_I G(0)$. Poniamo $e_r = e_r^* = 35$ e quindi

$$K_I = \frac{1}{G(0)e_r^*} \simeq 0.114$$

Per affrontare le specifiche C. e D. utilizziamo le formule approssimate

$$\omega_A \simeq 2/t_r, \qquad m_\varphi \simeq 1.04 - 0.8\,M_p \quad \text{(con } m_\varphi \text{ in radianti)},$$

che permettono di tradurre tali specifiche nelle:

$$\omega_A = \omega_A^* := 2/t_r^* = 2/60 = 1/30 \simeq 0.0333,$$

e

$$m_\varphi \geq m_\varphi^* := 1.04 - 0.8\,M_p^* = 1.04 - 0.08 = 0.96 \quad \text{(con } m_\varphi \text{ in radianti)}.$$

Poniamo dunque

$$G_1(s) := \frac{K_I}{s}G(s) = \frac{0.000003661}{s^4 + 0.1833s^3 + 0.009228s^2 + 0.0001281s}$$

e quindi

$$M := 1/|G_1(j\omega_A^*)| \simeq 2.5573$$

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \arg[G_1(j\omega_A^*)] \simeq 1.2322 \;\; \text{rad}$$

Per determinare T_I e T_D usiamo le formule

$$\begin{cases} T_I = \dfrac{1}{\omega_A^*} M \sin(\varphi) \simeq 72.3633 \\ T_D = \dfrac{1 - M\cos(\varphi)}{T_I(\omega_A^*)^2} = \dfrac{1}{\omega_A^*}\dfrac{1 - M\cos(\varphi)}{M\sin(\varphi)} \simeq 1.8719 \end{cases}$$

Di conseguenza, poniamo $C(s) = \frac{15.7s^2 + 8.225s + 0.113}{s}$ e quindi la funzione di trasferimento della catena di azione diretta è

$$H(s) = C(s)G(s) = \frac{0.000496s^2 + 0.000265s + 0.000003661}{s^4 + 0.1833s^3 + 0.009228s^2 + 0.0001281s}$$

Infine, la funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa è

$$W(s) = H(s)/(1 + H(s)) = \frac{0.000496s^2 + 0.000265s + 0.000003661}{s^4 + 0.1833s^3 + 0.009724s^2 + 0.0003931s + 0.000003661}$$

Di seguito si riporta il codice Matlab che permette di ottenere quanto sopra.

```
clear all
close all

s=tf(’s’,’TimeUnit’,’minutes’) %fisso l’unita‘ di misura del tempo in minuti
G0=-3.2e-05/((s+0.0233)*(s+0.05)*(s+0.11))  %fisso la f. di t. del sistema da controllare
G=-G0 %cambio segno in modo da riportarmi al caso di PID con coefficienti positivi

er=35 %fisso l’errore a regime in risposta a una rampa
K_B= dcgain(G) %calcolo il guadagno di Bode di G
Ki=1/(K_B*er) %calcolo il coefficiente Ki del PID
tr=60 %fisso il tempo di salita (ovviamente in minuti)
Mp=0.10 %fisso la massima sovraelongazione

w_A= 2/tr %calcolo la pulsazione di attraversamento da richiedere
m_phi=1.04-0.8*Mp %calcolo il margine di fase da richiedere
G1= Ki*3.2e-05/(s*(s+0.0233)*(s+0.05)*(s+0.11)) %calcolo la f.di t. G1=(ki/s)*G

%di seguito calcolo la fase di G1 alla pulsazione wA
FaseG1_wA=-pi/2-atan(w_A/0.0233)-atan(w_A/0.05)-atan(w_A/0.11)
%di seguito calcolo il modulo di G1 alla pulsazione wA
ModG1_wA=abs(evalfr(G1,i*w_A))

%di seguito calcolo i parametri M e phi
M=1/abs(evalfr(G1,i*w_A))
phi=m_phi-pi-FaseG1_wA

%di seguito calcolo i parametri Ti e Td del PID
Ti=M*sin(phi)/w_A
Td=(1-M*cos(phi))/(Ti*(w_A^2))

Nc=[Ki*Ti*Td Ki*Ti Ki] %calcolo il numeratore del PID
Dc=[1 0] %calcolo il denominatore del PID
C=tf(Nc,Dc,’TimeUnit’,’minutes’) %calcolo la f. di t. del PID (specificando che il tempo e‘ i
H=series(C,G) %calcolo la f. di t. della C.A.D.

W=feedback(H,1) %calcolo la f. di t. a catena chiusa ...
step(W)  % ... e la sua risposta indiciale
grid
stepinfo(W,"SettlingTimeThreshold",0.01)
```

Ora possiamo tracciare la risposta al gradino per controllare che a grandi linee sia conforme a quello che ci aspettiamo (e in effetti così è). Bisogna però controllare se le specifiche C. e D. sono soddisfatte. Il comando finale, ossia,

```
stepinfo(W,'SettlingTimeThreshold',0.01)
```

calcola i valori effettivi di tempo di salita e massima sovraelongazione. Otteniamo i seguenti valori EFFETTIVI di t_r e M_p:
$t_r \simeq 39$ minuti, $M_p \simeq 11\%$.

Il valore di t_r è sensibilmente inferiore a quanto richiesto (e minore dei 45 minuti minimi tollerati) mentre la sovrelongazione è, seppur di poco, più elevata del massimo tollerato.

Dunque dobbiamo ripetere il progetto imponendo valori più elevati di t_r e valori inferiori per M_p. Per esempio scegliamo

$$t_r^* = 80 \;\text{ minuti}, \qquad M_p^* = 5\%$$

Ripetendo il progetto con questi nuovi valori di t_r^* e M_p^* otteniamo i seguenti valori EFFETTIVI di t_r e M_p:
$t_r \simeq 51$ minuti, $M_p \simeq 10.87\%$.

Questa volta il tempo di salita è ancora inferiore al massimo consentito e però è ben superiore al limite minimo di 45 minuti: quindi va benissimo. La sovraelongazione è ancora leggermente troppo elevata. Ripetiamo ancora il progetto diminuendo ulteriormente il valore di M_p. Per esempio scegliamo

$$t_r^* = 80 \;\text{ minuti}, \qquad M_p^* = 2\%$$

Ripetendo il progetto con questi nuovi valori di t_r^* e M_p^* otteniamo la funzione $C(s)$ e la corrispondente risposta indiciale del sistema a catena chiusa riportate in prima pagina. I valori EFFETTIVI di t_r e M_p sono:
$t_r \simeq 52$ minuti, $M_p \simeq 9.7\%$.
Abbiamo pertanto soddisfatto le specifiche e quindi il problema è risolto.