A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° appello — 5 luglio 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $2x_1 - x_4 = 0$ e sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (-1, 2, 1, 0)$ e $w_2 = (1, 0, 0, 1)$.

(a) Scrivere una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Trovare una base ortogonale di W.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di W e trovare una base di $U \cap W$.

(d) Dato $v = (3, -1, 2, 1)$ determinare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio U.

Soluzione. (a) Dall'equazione di U si ricava $x_4 = 2x_1$, per cui una base di U è formata dai vettori $u_1 = (1, 0, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 0)$. Dai coefficienti dell'equazione di U si ricava una base di $U^\perp$: essa è costituita dal vettore $u^\perp = (2, 0, 0, -1)$.

(b) Poniamo $w_1' = w_1$ e $w_2' = w_2 + \alpha w_1$. Richiedendo che sia $w_1' \cdot w_2' = 0$ si trova $\alpha = 1/6$, quindi $w_2' = w_2 + \frac{1}{6} w_1 = (5/6, 2/6, 1/6, 1)$. I vettori w_1' e w_2' formano una base ortogonale di W.

(c) Le equazioni parametriche di W sono

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha + \beta \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

Eliminando i parametri α e β si ottengono le seguenti equazioni cartesiane di W:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Per trovare una base di $U \cap W$ basta mettere a sistema l'equazione di U con le equazioni di W. Risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che $\dim(U \cap W) = 1$ e una base di $U \cap W$ è data dal vettore $(1, 2, 1, 2)$.

(d) Scriviamo $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$. Dato che $u^\perp$ è una base di $U^\perp$ si deve avere $v'' = \lambda u^\perp = (2\lambda, 0, 0, -\lambda)$. Pertanto si ha $v' = v - v'' = (3 - 2\lambda, -1, 2, 1 + \lambda)$. Dato che $v' \in U$ le sue coordinate devono soddisfare l'equazione di U. Da ciò si ricava $\lambda = 1$ e quindi $v' = (1, -1, 2, 2)$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -t \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & t & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una forma a scala di A e determinare il valore di t per cui $\dim(\operatorname{Ker} f) = 2$.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a) si scriva una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Poniamo $t = 0$. Si scriva la matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^4$ formata dai vettori $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ $v_3 = (1, 0, 1, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Poniamo $t = 0$. È possibile trovare delle basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f abbia la prima riga uguale alla seconda riga? (*la risposta deve essere motivata*)

Soluzione. (a) Una forma a scala di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -6-t \\ 0 & 0 & t-1 & t-1 \end{pmatrix}$$

quindi il rango di A è 3 se $t \neq 1$, mentre per $t = 1$ il rango di A è 2. Richiedere che $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$ equivale a richiedere che $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, cioè che il rango sia 2. Pertanto il valore cercato è $t = 1$.

(b) Per $t = 1$ si ha $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è formata da due colonne linearmente indipendenti di A (ad esempio, dalle prime due colonne).
Per $t = 1$ la forma a scala di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per trovare il nucleo di f basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -4x_2 + 7x_4 \end{cases}$$

Una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è quindi formata dai vettori $u_1 = (2, 1, -4, 0)$ e $u_2 = (-3, 0, 7, 1)$.

(c) Ponendo $t = 0$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$f(v_1) = Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(v_2) = Av_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad f(v_3) = Av_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad f(v_4) = Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pertanto la matrice di f cercata è

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) La risposta è NO, non è possibile trovare delle basi di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la matrice di f abbia la prima riga uguale alla seconda riga. Infatti una tale matrice avrebbe rango < 3, mentre per $t = 0$ si ha $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 3$.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ t & 2 & t \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Determinare per quale valore di t la matrice è diagonalizzabile. Per tale valore di t trovare una matrice invertibile P tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale.

(c) Si dica se la matrice $B = A \cdot A^T$ è diagonalizzabile per ogni valore di t (*la risposta deve essere motivata e NON è necessario calcolare il prodotto* $A \cdot A^T$)

Soluzione. (a) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ t & 2-\lambda & t \\ -2 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2$$

per cui gli autovalori sono $\lambda = 0$ (con molteplicità 1) e $\lambda = 2$ (con molteplicità 2).

(b) Gli autovettori corrispondenti a $\lambda = 0$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ tx + 2y + tz = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

L'autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $v_1 = (1, 0, -1)$.
Gli autovettori corrispondenti a $\lambda = 2$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ tx + tz = 0 \end{cases}$$

Se $t \neq 0$ questo autospazio ha dimensione 1 e quindi la matrice non è diagonalizzabile. Invece se $t = 0$ il sistema si riduce alla sola equazione $2x + 4z = 0$, cioè $x = -2z$, quindi l'autospazio ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (-2, 0, 1)$. In questo caso la matrice è diagonalizzabile.
La matrice P cercata è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Osserviamo che la matrice B è simmetrica, infatti si ha

$$B^T = (A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T = B.$$

Ora basta ricordare che ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile per concludere che B è diagonalizzabile per ogni valore di t.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$.

(a) Trovare il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da $A = (3, 3, 0)$.

(b) Sia $B = (0, -1, 1) \in \pi$. Scrivere l'equazione del piano σ parallelo a π e passante per il punto medio del segmento AB.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π, passante per il punto $B = (0, -1, 1)$ e tale che $\mathrm{dist}(A, s) = \mathrm{dist}(A, B)$.

(d) Sia r_1 la retta passante per il punto A e parallela al vettore $w = (1, 1, 0)$. Sia r_2 la retta passante per il punto B e parallela a r_1. Calcolare la distanza $\mathrm{dist}(r_1, r_2)$.

Soluzione. (a) Il punto A' è la proiezione ortogonale di A sul piano π. Un vettore ortogonale a π è $n = (1, 2, -1)$ e la retta ortogonale a π passante per A ha equazioni

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con il piano π si trova il punto $A' = (1, -1, 2)$.

(b) Il punto medio del segmento AB è $M = \frac{A+B}{2} = (3/2, 1, 1/2)$. Dato che il piano σ è parallelo a π, la sua equazione è del tipo $x + 2y - z + d = 0$. Imponendo la condizione di passaggio per M si trova $d = -3$, quindi l'equazione del piano σ è $x + 2y - z - 3 = 0$.

(c) Indichiamo con v_s un vettore direttore della retta s. Richiedere che $\mathrm{dist}(A, s) = \mathrm{dist}(A, B)$ equivale a richiedere che la retta s sia perpendicolare al segmento AB (cioè al vettore $A - B$). Dato che la retta s deve essere contenuta nel piano π il suo vettore direttore v_s deve essere ortogonale al vettore $n = (1, 2, -1)$, quindi come vettore v_s possiamo prendere il prodotto vettoriale tra il vettore $A - B = (3, 4, -1)$ e il vettore $n = (1, 2, -1)$:

$$v_s = (A - B) \times n = (-2, 2, 2).$$

Le equazioni parametriche della retta s sono quindi

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

(d) Dato che le rette r_1 e r_2 sono parallele, si ha $\mathrm{dist}(r_1, r_2) = \mathrm{dist}(A, r_2)$. Possiamo quindi usare la formula per la distanza di un punto da una retta:

$$\mathrm{dist}(A, r_2) = \frac{\|(A - B) \times w\|}{\|w\|} = \frac{\|(1, -1, -1)\|}{\|w\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$