A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° appello — 9 luglio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 + t\, x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore di t per cui U ha dimensione 2 e, per tale valore di t, scrivere una base di U.

(b) Applicando il procedimento di Gram–Schmidt alla base trovata al punto (a) ottenere una base ortogonale di U.

(c) Per il valore di t trovato al punto (a) scrivere una base del sottospazio $U^{\perp}$.

(d) Dato $v = (3, 2, 2, -2) \in \mathbb{R}^4$ scrivere l'equazione cartesiana di un sottospazio W di dimensione 3 tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1, 2, 1, 1)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z,\ -2x + 3y - z,\ y + 3z,\ -x + 3y + tz)$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono dei valori di t per cui f è suriettiva? Se sì, quali sono? Esistono dei valori di t per cui f è iniettiva? Se sì, quali sono?

(c) Per il valore di t per cui f ha rango 2 scrivere una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(d) Esistono dei valori di t per i quali il vettore $w = (1, 1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f?

(e) Ora poniamo $t = 0$. Esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? (La risposta deve essere motivata e **NON** è richiesto di trovare la funzione g)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A **non** è invertibile?

(b) Determinare gli autovalori di A e dire per quali $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori sono reali.

(c) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ ci sono autovalori con molteplicità > 1.

(d) Per ciascuno dei valori di t trovati al punto (c) scrivere una base degli autospazi corrispondenti agli autovalori con molteplicità > 1 e dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (6, -1, -4)$, $B = (1, 1, -1)$ e il piano $\pi : 2x - y - 2z = 3$.

(a) Sia C la proiezione ortogonale di A sul piano π. Determinare il punto C, verificare che $B \in \pi$ e calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta per A e B.

(d) Determinare il valore del parametro t affinché la retta $r_t : \begin{cases} t\, x - y + 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ sia parallela al piano π.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\text{o}}$ appello — 9 luglio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + t\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore di t per cui U ha dimensione 2 e, per tale valore di t, scrivere una base di U.

(b) Applicando il procedimento di Gram–Schmidt alla base trovata al punto (a) ottenere una base ortogonale di U.

(c) Per il valore di t trovato al punto (a) scrivere una base del sottospazio $U^\perp$.

(d) Dato $v = (0, -2, 4, 3) \in \mathbb{R}^4$ scrivere l'equazione cartesiana di un sottospazio W di dimensione 3 tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (-1, 1, 2, 3)$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z,\ 3x + y - 2z,\ -5y + 4z,\ -3x + 4y + tz)$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono dei valori di t per cui f è suriettiva? Se sì, quali sono? Esistono dei valori di t per cui f è iniettiva? Se sì, quali sono?

(c) Per il valore di t per cui f ha rango 2 scrivere una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(d) Esistono dei valori di t per i quali il vettore $w = (-1, 1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f?

(e) Ora poniamo $t = 0$. Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? (La risposta deve essere motivata e **NON** è richiesto di trovare la funzione g)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A **non** è invertibile?

(b) Determinare gli autovalori di A e dire per quali $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori sono reali.

(c) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ ci sono autovalori con molteplicità > 1.

(d) Per ciascuno dei valori di t trovati al punto (c) scrivere una base degli autospazi corrispondenti agli autovalori con molteplicità > 1 e dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ sono assegnati i punti $A = (0, 6, -4)$, $B = (-2, 1, -1)$ e il piano $\pi : x + 2y - 2z = 2$.

(a) Sia C la proiezione ortogonale di A sul piano π. Determinare il punto C, verificare che $B \in \pi$ e calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta per A e B.

(d) Determinare il valore del parametro t affinché la retta $r_t : \begin{cases} t\,x + 2y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ sia parallela al piano π.

C

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2$^{\mathbf{o}}$ appello — 9 luglio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + t\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore di t per cui U ha dimensione 2 e, per tale valore di t, scrivere una base di U.

(b) Applicando il procedimento di Gram–Schmidt alla base trovata al punto (a) ottenere una base ortogonale di U.

(c) Per il valore di t trovato al punto (a) scrivere una base del sottospazio $U^{\perp}$.

(d) Dato $v = (2, 1, 3, 5) \in \mathbb{R}^4$ scrivere l'equazione cartesiana di un sottospazio W di dimensione 3 tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (2, -1, 4, 2)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (x - 3y - z,\ -3x + 4y + 2z,\ -5y - z,\ 3x + y + tz)$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono dei valori di t per cui f è suriettiva? Se sì, quali sono? Esistono dei valori di t per cui f è iniettiva? Se sì, quali sono?

(c) Per il valore di t per cui f ha rango 2 scrivere una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(d) Esistono dei valori di t per i quali il vettore $w = (1, 2, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f?

(e) Ora poniamo $t = 0$. Esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? (La risposta deve essere motivata e **NON** è richiesto di trovare la funzione g)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & t \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A **non** è invertibile?

(b) Determinare gli autovalori di A e dire per quali $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori sono reali.

(c) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ ci sono autovalori con molteplicità > 1.

(d) Per ciascuno dei valori di t trovati al punto (c) scrivere una base degli autospazi corrispondenti agli autovalori con molteplicità > 1 e dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (-2, 4, -1)$, $B = (1, -1, 1)$ e il piano $\pi : 2x - 2y + z = 5$.

(a) Sia C la proiezione ortogonale di A sul piano π. Determinare il punto C, verificare che $B \in \pi$ e calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta per A e B.

(d) Determinare il valore del parametro t affinché la retta $r_t : \begin{cases} t\,x - y + 3 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ sia parallela al piano π.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° appello — 9 luglio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + t\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore di t per cui U ha dimensione 2 e, per tale valore di t, scrivere una base di U.

(b) Applicando il procedimento di Gram–Schmidt alla base trovata al punto (a) ottenere una base ortogonale di U.

(c) Per il valore di t trovato al punto (a) scrivere una base del sottospazio $U^{\perp}$.

(d) Dato $v = (2, 3, 2, -3) \in \mathbb{R}^4$ scrivere l'equazione cartesiana di un sottospazio W di dimensione 3 tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (-1, 3, 1, -1)$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ 2x + y - 3z,\ -y + z,\ 4x + y + tz)$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono dei valori di t per cui f è suriettiva? Se sì, quali sono? Esistono dei valori di t per cui f è iniettiva? Se sì, quali sono?

(c) Per il valore di t per cui f ha rango 2 scrivere una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(d) Esistono dei valori di t per i quali il vettore $w = (2, 1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f?

(e) Ora poniamo $t = 0$. Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità? (La risposta deve essere motivata e **NON** è richiesto di trovare la funzione g)

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & t \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A **non** è invertibile?

(b) Determinare gli autovalori di A e dire per quali $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori sono reali.

(c) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ ci sono autovalori con molteplicità > 1.

(d) Per ciascuno dei valori di t trovati al punto (c) scrivere una base degli autospazi corrispondenti agli autovalori con molteplicità > 1 e dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (0, 4, 3)$, $B = (2, 1, -2)$ e il piano $\pi : x - 2y - 2z = 4$.

(a) Sia C la proiezione ortogonale di A sul piano π. Determinare il punto C, verificare che $B \in \pi$ e calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta per A e B.

(d) Determinare il valore del parametro t affinché la retta $r_t : \begin{cases} t\,x - 2y + 4 = 0 \\ 3x - 2z + 2 = 0 \end{cases}$ sia parallela al piano π.