

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1, 3)$, $u_3 = (1, 2, 1, 3)$.

- (a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U .
- (b) Trovare una base di U^\perp .
- (c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (2, -1, -3, 2)$. Dato $v = (-1, 3, 4, 0) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.
- (d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (5, 1, 2, 1)$, $f(0, 1, -1) = (-2, 1, 0, -1)$, $f(1, 0, -1) = (-1, -3, -2, 1)$.

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^4 .
- (b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f .
- (c) Sia $w_\alpha = (3, \alpha, -2, 3)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \text{Im } f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-2y + 2z, -x + y - 2z, -x + 2y - 3z)$$

- (a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?
- (b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.
- (c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati il punto $P = (1, 2, 2)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P .
- (b) Sia σ il piano di equazione $2x + z - 2 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ .
- (c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (3, 2, 6)$ sul piano σ . Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\text{dist}(B, H) = 2 \text{dist}(A, H)$.
- (d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + \beta)x + (\alpha + 2\gamma)y + (2\alpha - \beta + \gamma)z = 2\beta + \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 2, 0, -1)$, $u_2 = (3, 1, -2, -1)$, $u_3 = (-3, 4, 4, -1)$.

- (a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U .
- (b) Trovare una base di U^\perp .
- (c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (-2, -1, 2, 3)$. Dato $v = (0, 1, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.
- (d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (0, 2, -2, 6)$, $f(0, 1, -1) = (3, -3, -3, -3)$, $f(1, 0, -1) = (2, -2, -2, -2)$.

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^4 .
- (b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f .
- (c) Sia $w_\alpha = (4, -1, \alpha, 5)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \text{Im } f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-2x + 4y - 8z, 2x + 4z, 2x - 2y + 6z)$$

- (a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?
- (b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.
- (c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati il punto $P = (1, -1, 0)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} y - 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P .
- (b) Sia σ il piano di equazione $2y - z + 2 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ .
- (c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (-2, -3, 6)$ sul piano σ . Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\text{dist}(B, H) = 2 \text{dist}(A, H)$.
- (d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + \beta)x + (2\gamma - \alpha)y + (\beta - \alpha - \gamma)z = 3\beta + \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, -1, 1, 0)$, $u_2 = (2, -1, 3, 1)$, $u_3 = (1, 1, 3, 2)$.

- (a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U .
- (b) Trovare una base di U^\perp .
- (c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (2, -3, 2, -1)$. Dato $v = (-1, 4, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.
- (d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (0, 2, 2, 3)$, $f(0, 1, -1) = (-1, 2, 3, 1)$, $f(1, 0, -1) = (-2, 2, 4, -1)$.

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^4 .
- (b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f .
- (c) Sia $w_\alpha = (2, \alpha, 0, 7)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \text{Im } f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (y - z, 2x - y + 2z, 2x - 2y + 3z)$$

- (a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?
- (b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.
- (c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati il punto $P = (2, 2, -1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P .
- (b) Sia σ il piano di equazione $x - 2z - 1 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ .
- (c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (3, -2, 6)$ sul piano σ . Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\text{dist}(B, H) = 2 \text{dist}(A, H)$.
- (d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + 2\beta)x + (\alpha + 3\gamma)y + (\alpha - \beta + \gamma)z = 4\beta + \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (3, -2, -1, 1)$, $u_3 = (-3, 4, -1, 4)$.

- (a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U .
- (b) Trovare una base di U^\perp .
- (c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (-2, 2, 3, -1)$. Dato $v = (0, 2, 4, 1) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.
- (d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (3, -5, -1, 3)$, $f(0, 1, -1) = (2, 2, 2, -2)$, $f(1, 0, -1) = (-1, -1, -1, 1)$.

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e di \mathbb{R}^4 .
- (b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f .
- (c) Sia $w_\alpha = (2, 6, \alpha, -5)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \text{Im } f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-6x - 4y - 4z, 2x + 2z, 4x + 4y + 2z)$$

- (a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?
- (b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.
- (c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.
- (d) Sia $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [la risposta deve essere giustificata]

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati il punto $P = (0, 3, 1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P .
- (b) Sia σ il piano di equazione $x + 2z - 1 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ .
- (c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (5, 2, 3)$ sul piano σ . Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\text{dist}(B, H) = 2 \text{dist}(A, H)$.
- (d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha + 2\beta)x + (\beta - \alpha + \gamma)y + (3\gamma - \alpha)z = 4\beta - \gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.