ESERCIZI SCHEDA 11

ESERCIZIO 1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$$

La funzione integranda è continua in $[0,+\infty)$, quindi è integrabile sull'intervallo $[0,+\infty)$.

$$\frac{1}{e^{2x}+1} \sim \frac{1}{e^{2x}} \quad \text{per } x\to+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1/e^{2x}}{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{e^{2x}} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{per } x\to+\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}}\,dx \text{ converge.}$$

$$\Rightarrow \text{Per confronto asintotico: } \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx \text{ converge}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx}_{} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx}_{\to\ cv} \to \text{È somma di integrali convergenti} \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

È un integrale definito in un intervallo finito in cui la funzione è continua, quindi è CONVERGENTE.

Calcolo il valore dell'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}+1-e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^{+\infty} 1-\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^{+\infty} 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^{b} 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[x-\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} b-\frac{1}{2}\log(e^{2b}+1)+\frac{1}{2}\log 2$$

$$= \lim_{b\to+\infty} b-\frac{1}{2}\log\left[e^{2b}\left(1+\frac{1}{e^{2b}}\right)\right]+\frac{1}{2}\log 2$$

$$= \lim_{b\to+\infty} b-\frac{1}{2}\log(e^{2b})-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{e^{2b}}\right)+\frac{1}{2}\log 2$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \cancel{b}-\cancel{b}-\underbrace{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{e^{2b}}\right)}_{\to 0}+\frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}\log 2$$

ESERCIZIO 2

$$\int_1^{+\infty} \frac{5}{x^\alpha(14+9\log x+\log^2 x)}\,dx$$

Verifico la continuità:

$$\log^2 x+9\log x+14\neq 0 \iff \log^2 x+2\log x+7\log x+14\neq 0$$

$$\iff (\log x+7)(\log x+2)\neq 0 \iff \log x\neq -2 \ \wedge\ \log x\neq -7$$

$$\iff x\neq e^{-2}=\frac{1}{e^2} \ \wedge\ x\neq e^{-7}=\frac{1}{e^7}$$

$\frac{1}{e^2},\frac{1}{e^7}\notin[1,+\infty) \Rightarrow f(x)$ è continua in $[1,+\infty) \Rightarrow f(x)$ è integrabile in $[1,+\infty)$.

Osservo che: $\dfrac{5}{x^\alpha(14+9\log x+\log^2 x)} \sim \dfrac{5}{x^\alpha\log^2 x}$

$$\int_1^{+\infty}\frac{5}{x^\alpha\log^2 x}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha>1 \text{ e anche se } \alpha=1, \text{ in quanto funzione del tipo } g_{\alpha,\beta}(x) \text{ con } \beta=2 \\ \text{diverge se } \alpha<1 \end{cases}$$

Per criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge se $\alpha\geq 1$.

Esercizio 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\log(1+\sqrt{x})(e^{x^\alpha}-1)}\,dx$$

La funzione integranda $f(x)$ è continua e quindi integrabile in $(0,1]$.

Utilizzo gli sviluppi di Taylor:

$\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0^+$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0^+ \Rightarrow \log(1+\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + o(x)$ per $x \to 0^+$

$e^x = 1 + x + o(x^2)$ per $x \to 0^+ \Rightarrow e^{x^\alpha} - 1 = \cancel{1} + x^\alpha + o(x^\alpha) - \cancel{1}$ per $x \to 0^+$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\log(1+\sqrt{x})(e^{x^\alpha}-1)} = \frac{x+o(x)}{\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}+o(x)\right)\left(x^\alpha+o(x^\alpha)\right)} = \frac{x+o(x)}{x^{\alpha+\frac{1}{2}} - \frac{x^{\alpha+1}}{2} + o(x^{\alpha+1}) + o(x^{\alpha+\frac{1}{2}}) + o(x^{\alpha+1}) + o(x^{\alpha+1})} = \frac{x+o(x)}{x^{\alpha+\frac{1}{2}} + o(x^{\alpha+\frac{1}{2}})} \sim \frac{x}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}} \quad \text{per } x \to 0^+$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha - \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ Per criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge per $\alpha < \frac{3}{2}$.

Esercizio 4

$$\int_3^{\frac{7}{2}} \frac{\sin[(x-3)^\alpha](x-4)}{(x-3)^2\log(x-2)}\,dx$$

La funzione integranda $f(x)$ è continua e quindi integrabile in $(3, \frac{7}{2}]$

cambio di variabile: $t = x-3$ ⇝ nuovi estremi di integrazione: $(x=3, x=\frac{7}{2}]$ ⇝ $(t=3-3=0,\ t=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}]$

⇝ nuovo differenziale: $dt = (x-3)'dx = dx$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(t^\alpha)\cdot(t-1)}{t^2\log(t+1)}\,dt$$

Uso gli sviluppi di Taylor:

$\sin t = t + o(t)$ per $t \to 0^+ \Rightarrow \sin(t^\alpha) = t^\alpha + o(t^\alpha)$ per $t \to 0^+$

$\log(t+1) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0^+$

$$\frac{\sin(t^\alpha)\cdot(t-1)}{t^2\log(t+1)} = \frac{(t^\alpha+o(t^\alpha))(t-1)}{t^2\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)} = \frac{t^{\alpha+1} - t^\alpha + o(t^{\alpha+1}) + o(t^\alpha)}{t^3 - \underbrace{\frac{t^4}{2} + o(t^4)}_{=o(t^3)}} = \frac{-t^\alpha + o(t^\alpha)}{t^3 + o(t^3)} \sim -\frac{t^\alpha}{t^3} = -\frac{1}{t^{3-\alpha}} \quad \text{per } t \to 0^+$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{t^{3-\alpha}}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{3-\alpha}}\,dx$ converge $\Leftrightarrow 3-\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$

$\Rightarrow$ Per criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge per $\alpha > 2$.

Esercizio 5

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

La funzione integranda $f(x)$ è continua e quindi integrabile in $(0,+\infty)$

Separo l'integrale in due studi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\arctan x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{x\arctan x}{x^\alpha}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\arctan x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}}\,dx$

$$\frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}} = \frac{x+o(x)}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{x}{x^{\alpha-1}} = \frac{1}{x^{\alpha-2}} \quad \text{per } x \to 0^+$$

$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-2}}\,dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$

$\Rightarrow$ Per criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge per $\alpha < 3$.

II) $$\int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}}\,dx$$

$$\frac{\arctan x}{x^{\alpha-1}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\alpha-1}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{\alpha-1}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx \quad \text{converge} \iff \alpha-1>1 \iff \alpha>2$$

$\Rightarrow$ Per criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge per $\alpha > 2$.

convergenze: $\begin{cases} \text{I)} & \alpha > 2 \\ \text{II)} & \alpha < 3 \end{cases} \Rightarrow$ convergenza per $\alpha \in (2,3)$

Esercizio 6

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} x^\alpha \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

La funzione integranda $f(x)$ è continua e quindi integrabile in $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$.

cambio di variabile: $t = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{t}$ $\rightsquigarrow$ nuovi estremi di integrazione: $\left[x = \frac{2}{\pi},\ x = +\infty\right) \rightsquigarrow \left[t = \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ t = \frac{1}{x} = 0\right)$

$\rightsquigarrow$ nuovo differenziale: $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} \iff dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos t}{t^\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+2}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos t}{t^{\alpha+2}}\,dt$$

$$\frac{1-\cos t}{t^{\alpha+2}} = \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^{\alpha+2}} = \frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^{\alpha+2}} \sim \frac{\frac{t^2}{2}}{t^{\alpha+2}} = \frac{1}{2t^\alpha} \quad \text{per } t \to 0^+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2t^\alpha}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad \text{converge} \iff \alpha < 1$$

$\Rightarrow$ Per criterio del confronto asintotico, l'integrale di partenza converge per $\alpha < 1$.

Per $\alpha = -3$ e dopo aver già fatto il cambio di variabile, calcolo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos t}{t^{-3+2}}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(1-\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt$$

Integrazione per parti: $\begin{cases} f(t) = t \\ g'(t) = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = 1 \\ g(t) = \sin t \end{cases}$

$$\Rightarrow \int t\cos t\,dt = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \int -\sin t\,dt = t\sin t + \cos t + c$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[t\sin t + \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - 0 - \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} - \cancel{0\cdot\sin 0} - \cos 0\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1$$