A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 + x_4,\ -x_1 + x_3 - \frac{1}{2}x_4,\ x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4,\ 2x_2 + x_3\Big)$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di A.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 2, -2)$, $u_2 = (0, 1, -4, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (-1, 4, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1, 1, -2, 0)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0, \qquad \sigma_\alpha : (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α.

(b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \Big(x_1 - x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4,\ 2x_2 + 4x_3,\ -2x_1 + x_2 - x_4,\ x_1 + x_2 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_4\Big)$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di A.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A ? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2,-1,0,1)$, $u_2 = (5,-2,2,0)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (3,2,-4,2) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (0,1,2,-1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : x + 2y - z - 2 = 0, \qquad \sigma_\alpha : 3x + (\alpha+3)y - \alpha z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α.

(b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1,0,-1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 2x_4,\ 2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}x_3 - 2x_4,\ 2x_2 + x_3 + 4x_4,\ -x_1 + x_3\right)$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di A.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, -2, 0)$, $u_2 = (4, 0, -5, 3)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (6, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (3, 1, -4, 0)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : x - y + 2z + 1 = 0, \qquad \sigma_\alpha : 2x + \alpha y + (2 - \alpha)z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α.

(b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 2, 0) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(2x_2 - x_3 - x_4,\ x_1 - 2x_3,\ 2x_1 - x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4,\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4\right)$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di A.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,-2,0,-1)$, $u_2 = (0,5,-2,2)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (3,3,0,3) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1,-1,2,1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : x - 2y + z - 2 = 0, \qquad \sigma_\alpha : \alpha x + (3-\alpha)y - 3z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α.

(b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1,0,1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π.