Quiz 11

Question 1

Not complete

Flag question

In una zona sismica del pianeta, in un mese ci sono in media 10 terremoti di magnitudo maggiore di 4 (i mesi sono assunti di uguale durata). Se durante due mesi se ne sono verificati 14, qual è la probabilità che 8 di questi si siano verificati nel primo mese?

Answer:

Check

$E[X] = 10$

Sol. DEFINISCO X = # DI TERREMOTI AL MESE

"PROBABILITÀ CHE IN UN INTERVALLO DI TEMPO A AVVENGANO K EVENTI" $\Rightarrow$ PROCESSO DI POISSON

[IL PROCESSO DI POISSON DI INTENSITÀ λ È UNA FAMIGLIA DI V.A.

$\{\underbrace{X_t}_{\text{FENOMENI CHE SI VERIFICANO TRA 0 E } t} : \underbrace{t > 0}_{\text{TEMPO}}\} \rightarrow X_t \sim P_o(\underbrace{\lambda}_{\text{INTENSITÀ DEGLI EVENTI}} \underbrace{t}_{\text{TEMPO}})$]

λ = intensità degli eventi $= 10$

$X_{t+\tau} - X_t \sim P_o(\lambda\tau)$

$$P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

X_i = # di terremoti che si verificano nell'i-esimo mese

X_{0i} = # di terremoti che si verificano tra il mese 0 e la fine dell'i-esimo mese

$X_{01} = X_1 \sim P_o(\lambda \cdot t_{01} = 10 \cdot 1 = 10)$ TERREMOTI IN t_1 = 1° MESE

$X_{02} : X_2 \sim P_o(\lambda t_{02} = 10 \cdot 2 = 20)$ TERREMOTI NEI PRIMI 2 MESI

$X_2 \sim P_o(\lambda = 10) \leftrightarrow$ # terremoti in t_2 = 2° mese

$\rightarrow P(X_{01} = 8 \mid X_{02} = 14) = ?$

$$P[X_{01} = 8 \mid X_{02} = 14] = \frac{P(X_1 = 8 \cap X_{02} = 14)}{P_{X_{02}} = 14} = \frac{P(X_1 = 8) \cdot P(X_2 = 6)}{P_{X_{02}} = 14}$$

$$= \frac{\left[e^{-10} \cdot \frac{10^8}{8!}\right] \cdot \left[e^{-10} \cdot \frac{10^6}{6!}\right]}{\left[e^{-20} \cdot \frac{20^{14}}{14!}\right]} = 0.1832$$

V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 1

λ = # DI TERREMOTI MEDI AL MESE

A = # DI TERREMOTI CHE SI VERIFICANO NEL 1° MESE

B = # DI TERREMOTI CHE SI SONO VERIFICATI NEI PRIMI 2 MESI

$$P(A|B) = \frac{\left[e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{A}}{A!}\right] \cdot \left[e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{(B-A)}}{(B-A)!}\right]}{\left[e^{-\lambda \cdot 2} \cdot \frac{(\lambda \cdot 2)^{B}}{B!}\right]}$$

Question 2

Not complete

Flag question

20 persone estraggono una ad una due palline a testa senza reimmissione da un'urna che contiene inizialmente 67 palline Rosse e 133 palline Nere. (quindi la persona 1 estrae 2 palline che non vengono rimesse dentro, la persona 2 ne estrae 2 dalle rimanenti, ecc...) Determinare il numero atteso di persone che pescano due palline dello stesso colore.

Answer:

Check

X = # DI PERSONE CHE PESCANO 2 PALLINE DELLO STESSO COLORE

" PROBABILITÀ CHE IN n TENTATIVI AVVENGANO (ALMENO) K SUCCESSI

P = probabilità di successo $\Rightarrow$ V.A. BINOMIALE : $X \sim B(n, p)$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\boxed{P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)}$$

$p = P(\text{SUCCESSO}) = P(\text{2 PALLINE}) = ?$, $n = 20$

67 R

133 N

$$P(\text{2 PALLINE}) = P(2R) + P(2N) = \frac{\{R,R\}}{\{X,X\}} + \frac{\{N,N\}}{\{X,X\}} = \frac{\binom{67}{2}}{\binom{200}{2}} + \frac{\binom{133}{2}}{\binom{200}{2}}$$

VALORE ATTESO DI UNA BINOMIALE

$$E[X \sim B(n,p)] = n \cdot p$$

$$\Rightarrow E[X] = n \cdot p = 20 \cdot P(\text{2 PALLINE}) = 20 \left[\frac{\binom{67}{2}}{\binom{200}{2}} + \frac{\binom{133}{2}}{\binom{200}{2}} \right] = 11.0442$$

V

FORMULA GENERALE ES. 2

n = # di persone

R = # di palline rosse

N = # di palline nere

$$E[X] = n \cdot \left[\frac{\binom{R}{2}}{\binom{(R+N)}{2}} + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{(R+N)}{2}} \right]$$

Question 3

Not complete

Flag question

Una variabile aleatoria discreta X assume i valori $\{1, 2, \dots, 15\}$ con densità discreta pari a

$$p_X(k) = \frac{23-k}{225}, \quad k = 1, \dots, 15.$$

Determinare la varianza di X

Answer:

Check

$X = \{0, 1, \dots 15\}$

$P_X(k) = \frac{23-k}{225} \quad , k = 1, \dots 15$

SOL. USO LA FORMULA (ALTERNATIVA) DELLA VARIANZA:

$$\boxed{Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2}$$

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i=1}^{15} i \left(\frac{23-i}{225}\right)$$

EXPECTED VALUE:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} X_i P_X(X_i)$$

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{15} i^2 \left(\frac{23-i}{225}\right)$$

E.V. DI COMPOSTE DI UNA V.A.

$$E(g \circ X) = E[g(X)] = \sum g(x) P_X(x)$$

SOSTITUISCO:

$$Var[X] = E[X^2] - \mu_X = \sum_{i=1}^{15} i^2 \left(\frac{23-i}{225}\right) - \left[\sum_{i=1}^{15} i \left(\frac{23-i}{225}\right)\right]^2 = 17.1180$$

V

Question 4

Not complete

Flag question

Un mazzo ha 11 carte Rosse e 7 carte Nere. Se ne estraggono tre. Qual è la varianza del numero di carte Rosse estratte?

Answer:

Check

11 R

7 N

X = # carte rosse estratte

$Var[X] = ?$

SOL. Uso la FORMULA (ALTERNATIVA) DELLA VARIANZA

$$\boxed{Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2}$$

$Im(X) = \{0,1,2,3\}$

$P_X(k) = P(X=k)$

$$P(X=1) = \frac{\{R,N,N\}}{\{X,X,X\}} = \frac{\binom{11}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{18}{3}} = \frac{11\cdot 21}{816} = \frac{231}{816}$$

$$P(X=2) = \frac{\{R,R,N\}}{\{X,X,X\}} = \frac{\binom{11}{2}\binom{7}{1}}{\binom{18}{3}} = \frac{385}{816}$$

$$P(X=3) = \frac{\{R,R,R\}}{\{X,X,X\}} = \frac{\binom{11}{3}}{\binom{18}{3}} = \frac{165}{816}$$

CALCOLO IL VALORE ATTESO:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{3} i\,P(X=i)$$

$$= 1\cdot\frac{231}{816} + 2\cdot\frac{385}{816} + 3\cdot\frac{165}{816} = \frac{1496}{816}$$

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{3} i^2 P(X=i)$$

$$= 1^2\cdot\frac{231}{816} + 2^2\cdot\frac{385}{816} + 3^2\,\frac{165}{816} = \frac{3256}{816}$$

⇒ SOSTITUISCO

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 0.6290$$ ✓

Question **5**

Not complete

Flag question

Supponiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate per attacchi violenti di asma in un dato ospedale sia una variabile aleatoria di Poisson di media 27. In giornate in cui l'inquinamento dell'aria aumenta, la distribuzione di attacchi su un giorno diventa una legge di Poisson con media 53. Se in un anno non bisestile(quindi formato da 365 giorni) 39 giorni sono di alto inquinamento, qual è la varianza dei ricoveri per asma in quell'anno?

Assumiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate sia indipendente da ciò che succede nelle altre giornate.

Answer:

Check

1. CALCOLO LA VARIANZA NEI GIORNI NORMALI

X = # DI PERSONE RICOVERATE NORMALMENTE IN 365 GG

$X \sim P_o(\lambda = 27 \cdot (365-39)) \Rightarrow Var[X \sim P_o(\lambda)] = \lambda \Rightarrow Var[X] = 8802$

numero di giorni normali

media di Poisson nei giorni normali

2. CALCOLO LA VARIANZA NEI GIORNI DI ALTO INQUINAMENTO

Y = # PERSONE RICOVERATE ALTO INQUINAMENTO IN 365gg

$Y \sim P_o(\lambda = 53 \cdot 39) \Rightarrow Var[X \sim P_o(\lambda)] = \lambda \Rightarrow Var[Y] = 2067$

n. giorni alto inquinamento

media della Poisson nei giorni alto inquinamento

n° giorni normali: 365 - 39 = 326

n° giorni alto inquinamento = 46

Z = # ricoveri in 365 gg

$Var[Z] = ?$

$Z = X + Y \Rightarrow Var[Z] = Var[X+Y]$

POICHÉ X E Y SONO INDIPENDENTI, LE VARIANZE SI SOMMANO

$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] = 8802 + 2067 = 10869$ ✓

Question 6
Not complete
Flag question

Il cosiddetto test del DNA non fa altro che misurare la lunghezza di K geni, senza controllare le basi azotate che li compongono. Per ognuno di tali geni, la probabilità che due dati individui presentino una lunghezza uguale viene assunta come pari a $1/10$. Un'altra ipotesi che viene comunemente fatta è che le lunghezze di geni diversi siano indipendenti l'una dall'altra. Supponiamo di misurare la lunghezza di $K = 7$ geni da un campione di DNA trovato su una scena del crimine. Supponendo di avere un database di 15473034 individui, calcolare il numero medio di individui che si troveranno con il test del DNA che corrisponde al campione incriminato.

Answer:

Check

SIA: X = # DI INDIVIDUI INCRIMINATI

"PROBABILITÀ CHE IN n TENTATIVI AVVENGANO (ALMENO) K SUCCESSI"
p = probabilità di successo $\Rightarrow$ V.A. BINOMIALE $X \sim B(n, p)$

n. tentativi = 15 473 034

$$p = p(\text{successo}) = p(\text{1 individuo che ha 7 geni incriminati}) = \left(\frac{1}{10}\right)^K = \left(\frac{1}{10}\right)^7$$

$$E\left[X \sim B\left(15\,473\,034, \left(\frac{1}{10}\right)^7\right)\right] = ?$$

VALORE ATTESO DI UNA BINOMIALE

$$\boxed{E\left[X \sim B(n,p)\right] = n \cdot p}$$

$$\Rightarrow E\left[X \sim B\left(15\,473\,034, \left(\frac{1}{10}\right)^7\right)\right] = 15\,473\,034 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^7 = 1{,}5473$$

✓

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 6

$$E\left(X \sim B(n,p)\right) = n \cdot (p)^K$$

n = # numero di persone nel database
K = numero di geni del campione di DNA
p = probabilità che 2 individui abbiano 2 geni uguali

Question 7

Not complete

Flag question

Due giocatori disputano una serie di partite che termina solo quando uno dei due arriva a vincerne due. Supponiamo che ogni partita venga vinta, indipendentemente dalle altre, dal primo giocatore con probabilità 0.44 e dall'altro con probabilità 1-0.44. Sia N la variabile aleatoria uguale al numero di partite disputate.

Calcolare la densità discreta di N e dedurne il valore atteso.

Answer:

Check

$P(1°) = 0{,}44$
$P(2°) = 1 - 0{,}44 = 0.56$

$n = \#$ partite disputate

$E[n] = ?$

VALORE ATTESO

$$\boxed{E(x) = \sum_{i \in Im(x)} x_i P_x(x_i)}$$

$Im(n) = \{2,3\}$

QUESTO PERCHÉ I 2 GIOCATORI POSSONO GIOCARE AL MASSIMO 3 PARTITE: O UNO NE VINCE 2 DI FILA, OPPURE GIOCATORE 1 VINCE LA PRIMA, GIOCATORE 2 VINCE LA SECONDA E LA TERZA LA VINCE UNO DEI DUE

$$P(n=2) = P(1°) \cdot P(1°) + P(2°) \cdot P(2°) = 0{,}44 \cdot 0{,}44 + 0{,}56 \cdot 0{,}56 = 0{,}44^2 + 0{,}56^2$$

$$P(n=3) = 1 - P(n=2) = 1 - [0{,}44^2 + 0{,}56^2]$$

$$E(n) = 2 \cdot P(n=2) + 3 \cdot P(n=3) = 2 \cdot [0{,}44^2 + 0{,}56^2] + 3 [1 - (0{,}44^2 + 0{,}56^2)] = 2.4928$$

✓

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 7

P_1 = probabilità che giocatore 1 vinca una partita
P_2 = Probabilità che giocatore 2 vinca una partita

$$E(n) = 2 \cdot (P_1^2 + P_2^2) + 3 \cdot [1 - (P_1^2 + P_2^2)]$$

Question 8

Not complete

Flag question

Sia X variabile di Poisson di parametro 1.4. Sia poi $g(x) = (1.4)^x$ per ogni $x \geq 0$. Calcolare il valore atteso di $g(X)$.

Answer:

Check

$X \sim P_o(\lambda = 1.4)$

$g(x) = (1.4)^x \qquad \forall x \geq 0$

$E(g(x)) = ?$

VALORE ATTESO DI COMPOSTE DI 1 V.A.

$$\boxed{E(g \circ X) = E(g(x)) = \sum_{K \in Im(x)} g(x) P_x(x)}$$

$P_x(X = K) = ?$

V.A. DI POISSON:

$$P(K) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!}$$

$$P_x(X = K) = e^{-1.4} \cdot \frac{(1.4)^K}{K!}$$

$$\Rightarrow E[g(x)] = \sum_{K=0}^{+\infty} (1.4)^K e^{-1.4} \frac{(1.4)^K}{K!}$$

$$= e^{-1.4} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{(1.4)^{2K}}{K!}$$

HO MOLTIPLICATO $(1.4)^K$ E PORTATO FUORI $e^{-1.4}$

$$= e^{-1.4} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{[(1.4)^2]^K}{K!}$$

RICORDA: $\sum_{K=0}^{+\infty} \frac{x^K}{K!}$ È LA SERIE DI e^x!

$$= e^{-1.4} \cdot e^{(-1.4)^2} = 1.7506$$

V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 8

λ = PARAMETRO DELLA POISSON

RISULTATO $= e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda}$

Question **9**

Not complete

Flag question

Sia X una variabile aleatoria su uno spazio con probabilità (Ω, P) la cui funzione di distribuzione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < -4, \\ 1/25, \ -4 \leq x < 0, \\ 6/75, \ 0 \leq x < 12, \\ \frac{6}{50} + \frac{19}{50}\frac{x-12}{5}, 12 \leq x < 17 \\ 1, \ x \geq 17. \end{cases}$$

Quanto vale $P(X \in]0, 17[)$?

Answer:

Check

$$P(X \in]0,17[) = P(0 < X < 17)$$

DALL'ESEMPIO 4.10 PAG. 42

$$3.\ P(a < X < b) = P(\{X < b\} \setminus \{X \leq a\}) = F_X(b^-) - F_X(a)$$

$$P(0 \leq X \leq 17) = P(X < 17) - P(X \leq 0) = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

$$= \lim_{x \to 17^-} \left[\frac{6}{50} + \frac{19}{50} \cdot \frac{(x-12)}{5}\right] - \frac{6}{75} = 0,42 \ ✓$$