26 novembre MMXXI

I prova in itinere di FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Si possono tenere solo: articoli di cancelleria (penna, matita, etc.), fogli bianchi ed eventuali generi di conforto. Non si possono, in particolare, tenere fotocopie di alcun tipo, appunti, quaderni, etc. Inoltre, ciascuna Studentessa e ciascuno Studente deve svolgere la prova per proprio conto e può comunicare SOLO con il personale di sorveglianza per tutta la durata della prova.

Durata della prova: 80 minuti

Esercizio 1.

Si consideri il polinomio

$$P(s) = s^6 + 2s^5 + s^4 - 4s^2 + s + 1.$$

Si ha:

1. Tutti gli zeri di $P(s)$ hanno parte reale minore di -2;
2. $P(s)$ è un polinomio di Hurwitz;
3. GIUSTA $P(s)$ non è un polinomio di Hurwitz;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

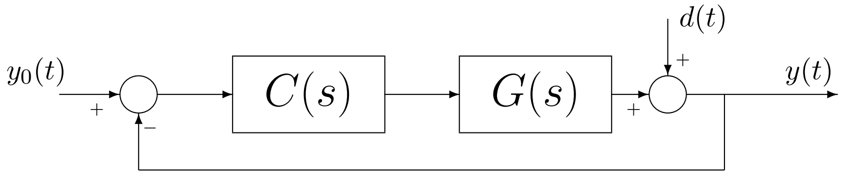
Motivazione della risposta. Nel polinomio $P(s)$ il segno del coefficiente del termine di secondo grado è discorde dal segno degli altri coefficienti (inoltre il coefficiente del termine di terzo grado è nullo). Pertanto, $P(s)$ non è un polinomio di Hurwitz.

Esercizio 2.

Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove

$$G(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \text{e} \qquad C(s) = \frac{K}{s+1}$$

e dove K è un parametro reale.



Si indichi con $W(s)$ la funzione di trasferimento da y_0 a y e con $W_d(s)$ la funzione di trasferimento da d a y. Si ha:

1. GIUSTA $W(s) = \frac{K}{s^2+3s+2+K}$ e $W_d(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+3s+2+K}$;
2. $W(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+3s+2+K}$ e $W_d(s) = \frac{K}{s^2+3s+2+K}$;
3. Le funzioni di trasferimento $W(s)$ e $W_d(s)$ non sono definite per valori negativi di K;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Calcolando

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} \qquad \text{e} \qquad W_d(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$$

si ottengono le espressioni riportate nella risposta 1.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema

$$\Sigma : \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 1]x + u \end{cases}$$

Sia $H(s)$ la funzione di trasferimento del sistema Σ. Si ha:

1. $H(s)$ non si può calcolare perché il sistema Σ non è stabile.
2. GIUSTA $H(s) = \frac{s^2-4s-3}{s^2-5s-2}$;
3. $H(s) = \frac{s-1}{s^2-5s-2}$;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Calcoliamo $H(s)$:

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1$$

ossia

$$H(s) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{s-4}{(s-1)(s-4)-6} & \star \\ \frac{3}{(s-1)(s-4)-6} & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 = \frac{s-1}{s^2-5s-2} + 1$$

e cioè

$$H(s) = \frac{s^2-5s-2+s-1}{s^2-5s-2} = \frac{s^2-4s-3}{s^2-5s-2}$$

Esercizio 4.

Si consideri il sistema

$$\Sigma : \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^2 - x_2^2 + 2u \\ -x_2^2 + u \end{bmatrix} \\ y = x_1 + u \end{cases}$$

e il suo punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u}) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 1 \right)$. Sia

$$\Sigma_L : \quad \begin{cases} \dot{\delta}_x = A\delta_x + b\delta_u \\ \delta_y = c\delta_x + d\delta_u \end{cases}$$

il sistema ottenuto linearizzando Σ attorno a $(\bar{x}, \bar{u})$. Si ha:

1. Σ_L è semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile;
2. GIUSTA il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è asintoticamente stabile per il sistema Σ;
3. Σ_L non è BIBO stabile;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

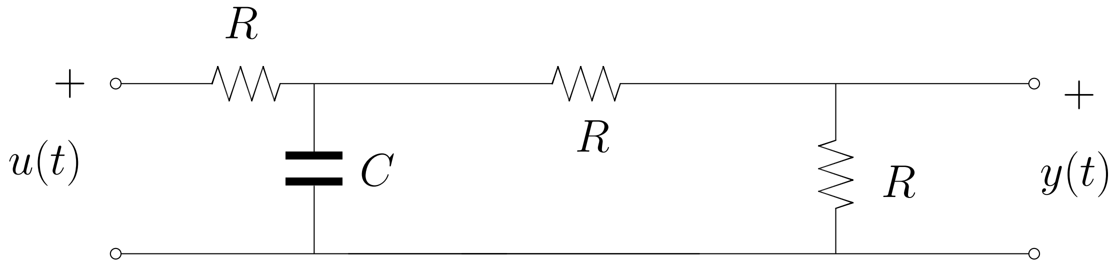
Motivazione della risposta. Calcoliamo la matrice di stato del sistema linearizzato. Si ha:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}} = \begin{bmatrix} -2x_1 & -2x_2 \\ 0 & -2x_2 \end{bmatrix}_{|x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

che ha il solo autovalore $\lambda = -2$. Quindi, Σ_L è asintoticamente stabile (e perciò anche BIBO stabile) e pertanto il punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è asintoticamente stabile per il sistema Σ.

Esercizio 5.

Si consideri un circuito con la struttura rappresentata in figura, dove R e C sono parametri positivi costanti.



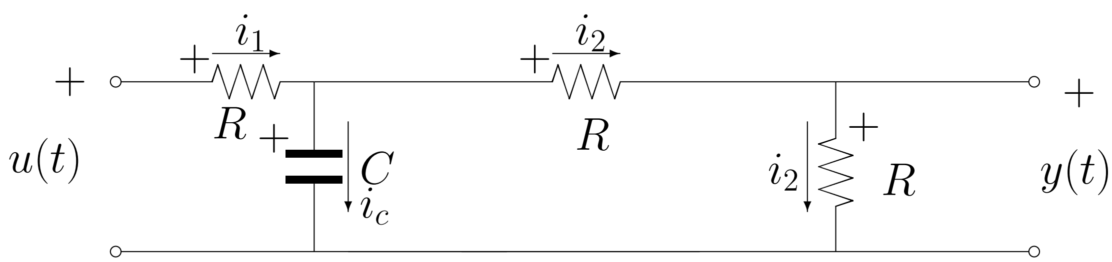
Fissate le unità di misura, si consideri la tensione $u(t)$ applicata come ingresso del circuito e la tensione $y(t)$ (a morsetti di uscita aperti) come uscita. Sia $y_i(t)$ la risposta indiciale del sistema che rappresenta il circuito e si consideri il seguente limite:

$$\lim_{t \to +\infty} y_i(t). \tag{1}$$

Si ha

1. Il limite (1) non esiste o non è finito;
2. Il limite (1) è uguale a 3;
3. Il limite (1) è uguale a 1;
4. GIUSTA nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Adottiamo le seguenti scelte dei segni delle tensioni e delle correnti nei vari componenti del circuito.



Scegliamo come unica variabile di stato la tensione ai capi del condensatore: $x = v_c$. Si ha:

$$\dot{x} = \frac{1}{C}\, i_c$$

con $i_c = i_1 - i_2 = \frac{u-x}{R} - \frac{x}{2R}$. Pertanto,

$$\dot{x} = \frac{1}{C}\left[\frac{u-x}{R} - \frac{x}{2R}\right] = \frac{1}{RC}\frac{2u-3x}{2} = -\frac{3}{2RC}\, x + \frac{1}{RC}\, u.$$

Inoltre

$$y = R\, i_2 = \frac{1}{2}x.$$

Dunque la relativa funzione di trasferimento è

$$W(s) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{3}{2RC}\right)^{-1}\frac{1}{RC} = \frac{\frac{1}{2RC}}{s + \frac{3}{2RC}}.$$

Poiché R e C sono parametri positivi, il sistema è BIBO stabile e quindi la relativa risposta indiciale converge a

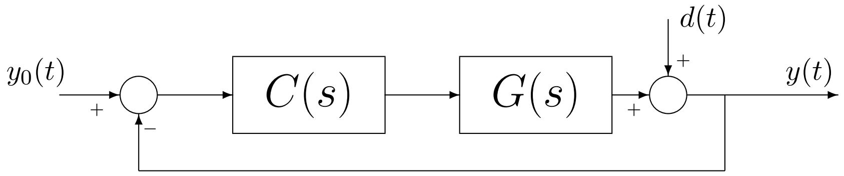
$$W(0) = 1/3.$$

In altre parole il limite (1) è pari a 1/3.

Esercizio 6.

Si consideri lo schema a catena chiusa rappresentato in figura dove

$$G(s) = \frac{1}{s-1}, \qquad C(s) = 1.$$



Sia $y_r(t)$ l'uscita di regime in corrispondenza a

$$y_0(t) = \sin(t) \cdot 1(t) \quad \text{e} \quad d(t) = 0.$$

Si ha:

1. $y_r(t) = \sin(t - \pi/2)$;
2. $y_r(t) = \sqrt{2}\sin(t + \pi/4)$;
3. $y_r(t) = 0$;
4. GIUSTA nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. La funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa è $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{1}{s}$. Pertanto il sistema non è BIBO stabile e non possiamo applicare i risultati della risposta in frequenza. Per scrupolo, calcoliamo comunque

$$Y(s) = \frac{1}{s}Y_0(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} + \frac{a}{s-j} + \frac{\bar{a}}{s+j},$$

con $a = -1/2$ (che si può comunque fare a meno di calcolare). Pertanto,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = [1 + ae^{jt} + \bar{a}e^{-jt}]1(t) = [1 + 2\mathbb{R}\mathrm{e}[ae^{jt}]]1(t)$$

da cui risulta evidente che nessuna delle espressioni proposte è corretta.

Esercizio 7.

Si consideri il controllo a catena aperta e il controllo a catena chiusa. Si ha:

1. GIUSTA tra i vantaggi del controllo a catena chiusa vi è la possibilità di contrastare gli effetti dei disturbi;
2. il controllo a catena chiusa è sempre preferibile rispetto a quello a catena aperta;
3. tra i vantaggi del controllo a catena aperta vi è la robustezza rispetto alle approssimazioni del modello matematico che descrive il sistema fisico da controllare;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Visto nella teoria.

Esercizio 8.

Si consideri un sistema lineare Σ di ordine 5. Sia A la matrice di stato di Σ. Sapendo che A è singolare e che tra i modi del sistema vi sono le due funzioni

$$te^{-t}, \qquad e^{-t}\cos(t),$$

si può concludere che:

1. GIUSTA Σ è semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile;
2. Σ è BIBO stabile;
3. Σ non è semplicemente stabile;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Il polinomio caratteristico $\pi_A(s)$ di A ha grado 5. Inoltre:
1. Poiché A è singolare, si ha: $0 \in \sigma(A)$.
2. Poiché te^{-t} è modo del sistema, si ha $-1 \in \sigma(A)$ e $ma(-1) \geq 2$.
3. Poiché $e^{-t}\cos(t)$ è modo del sistema, si ha $-1 \pm j \in \sigma(A)$.
In conclusione, $\pi_A(s)$ ha grado 5, ha uno zero doppio in -1 e una coppia di zeri in $-1 \pm j$. Pertanto, lo zero in 0 di $\pi_A(s)$ è semplice ossia la molteplicità algebrica di 0 come autovalore di A è pari a 1. Pertanto tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa eccetto l'autovalore in zero che ha molteplicità algebrica uguale a 1. Quindi Σ è semplicemente stabile ma non asintoticamente stabile.

Esercizio 9.

Si consideri un sistema Σ di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{1}{-s^2-s+K}$ dove K è un parametro reale. Si ha:

1. Qualunque sia il valore del parametro reale K, Σ non è BIBO stabile;
2. Σ è BIBO stabile per ogni valore reale di K;
3. GIUSTA Σ è BIBO stabile per ogni $K < 0$;
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. In base al criterio di Cartesio, il denominatore di $W(s)$ è di Hurwitz se e solo se $K < 0$.

Esercizio 10.

Si consideri un sistema lineare Σ. Sapendo che:

a) il sistema ha ordine 2;

b) la matrice di stato del sistema NON è diagonalizzabile;

c) detta $y(t)$ la risposta indiciale del sistema, si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1, \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{dy}{dt} = 0;$$

d) l'uscita (forzata) di regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = \sin(t)$ è una sinusoide di ampiezza pari a $1/2$ e fase non nota;

si determini, se possibile, la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema.

Si ha:

1. non esiste alcuna funzione di trasferimento che rispetti le condizioni assegnate;
2. le condizioni assegnate non sono sufficienti a determinare la funzione di trasferimento $G(s)$.
3. GIUSTA le condizioni assegnate permettono di determinare la funzione di trasferimento $G(s)$: il suo valore in 1 è $G(1) = \frac{1}{4}$.
4. nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Motivazione della risposta. Sia A la matrice di stato di Σ.
1. Da a) segue che il polinomio caratteristico $\pi_A(s)$ di A ha grado 2.
2. Da b) segue che il polinomio caratteristico $\pi_A(s)$ ha almeno uno zero doppio, e quindi, è del tipo $\pi_A(s) = (s-\lambda)^2$. Di conseguenza, la funzione di trasferimento $G(s)$ ha la forma

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-\lambda)^2}.$$

3. Dalle ultime due uguaglianze del punto c) segue che $\mathrm{reldeg}[G(s)] \geq 2$ e quindi $G(s)$ ha la forma

$$G(s) = \frac{K}{(s-\lambda)^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

4. Dalla prima uguaglianza del punto c) segue che $G(s)$ è BIBO stabile (ossia $\lambda < 0$) e $G(0) = 1$, ossia $\frac{K}{\lambda^2} = 1$ da cui $K = \lambda^2$. Quindi $G(s)$ ha la forma

$$G(s) = \frac{\lambda^2}{(s-\lambda)^2}, \qquad \lambda < 0.$$

5. Da d) segue che $|G(j)| = 1/2$, ossia $2|G(j)| = 1$ e cioè $2\frac{\lambda^2}{|j-\lambda|^2} = 1$. Pertanto,

$$2\lambda^2 = |j-\lambda|^2 = 1 + \lambda^2 \;\Rightarrow\; \lambda^2 = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = -1,$$

dove abbiamo escluso la soluzione $\lambda = 1$ perché sappiamo che $\lambda < 0$. In conclusione,

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow\; G(1) = 1/4.$$