COMPITO DI FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Ingegneria Elettronica
30 Agosto 2021

Esercizio 1. [9.5 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 100}{s(s-10)}$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuandone asintoti ed intersezioni con gli assi.

iii) Si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$, e in caso non sia BIBO stabile si determini il numero di poli a parte reale positiva e/o a parte reale nulla.

Esercizio 2. [8.5 punti] Data

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-1)^2 s}$$

si traccino, in modo approssimato, i luoghi positivo e negativo (con analisi di asintoti, intersezioni con l'asse immaginario e calcolo esplicito dei punti doppi). Si discuta la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K, individuando, per ogni valore di K il numero di poli a parte reale positiva. Si discutano eventuali casi critici.

Esercizio 3. [7.5 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = u(t).$$

i) Si determini, se esiste, ricorrendo alle trasformate di Laplace la risposta transitoria e la risposta di regime permanente al segnale sinusoidale

$$u(t) = 10 \cos t \; \delta_{-1}(t),$$

a partire da condizioni iniziali nulle;

ii) si determini, se possibili, per quali condizioni iniziali il sistema risponde al segnale sinusoidale

$$u(t) = 10 \cos t \; \delta_{-1}(t),$$

con uscita $y(t)$ che coincide con la risposta di regime prima determinata per ogni istante $t \in \mathbb{R}$ (e non solo asintoticamente).

Teoria. [5 punti] Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si dimostri analiticamente che nel caso di un sistema BIBO stabile valgono le seguenti condizioni:

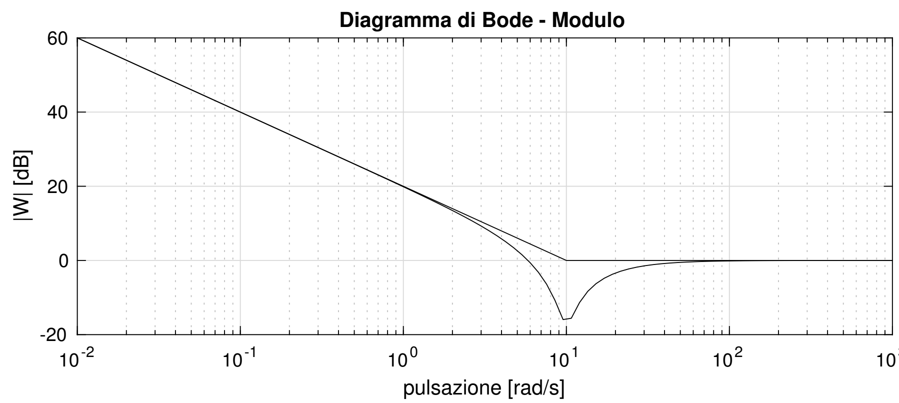
i) il sistema è di tipo 0 se e solo se $W(0) \neq 1$;

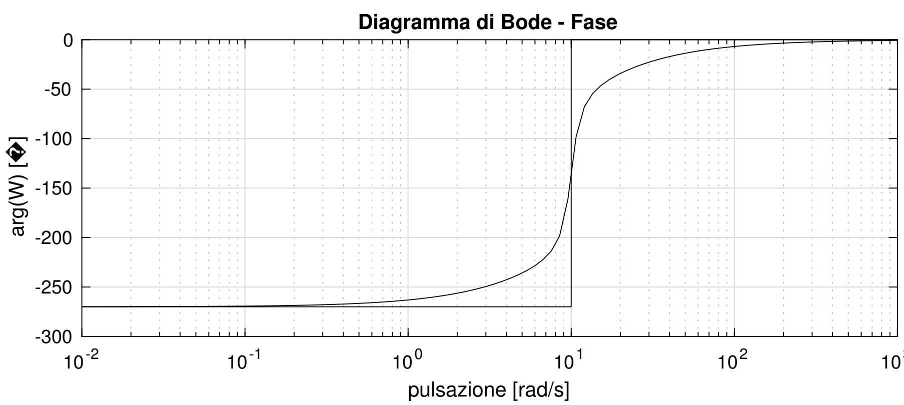
ii) il sistema è di tipo 1 se e solo se $W(0) = 1$ e $\left.\frac{dW(s)}{ds}\right|_{s=0} \neq 0$.

In entrambi i casi si derivi l'espressione del relativo errore di regime permanente.
Si dica (non è necessario dimostrarlo) sotto quali condizioni un sistema è di tipo $k > 1$ e in tal caso qual è l'espressione dell'errore di regime permanente.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Una volta riportata la funzione di trasferimento in forma di Bode si nota che essa ha guadagno di Bode $K_B = -10$, due zeri complessi coniugati a parte reale negativa con $\omega_n = 10$ e $\xi = 0.1$, un polo in 0 e un polo reale instabile in 10. Quindi il diagramma di Bode asintotico del modulo prima scende con pendenza -20 dB/dec e poi diventa piatto da $\omega = 10$ rad/s in poi. Il diagramma reale dei moduli ha un picco di antirisonanza in corrispondenza a $\omega = 10$ rad/s. Il diagramma delle fasi invece sale sempre, passando da 90° fino a 360° in un intorno della pulsazione $\omega = 10$ rad/s.





ii) Per quanto concerne il diagramma di Nyquist, osserviamo che

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2 - 120}{100 + \omega^2} + j\frac{1000 - 12\omega^2}{\omega(100 + \omega^2)}.$$

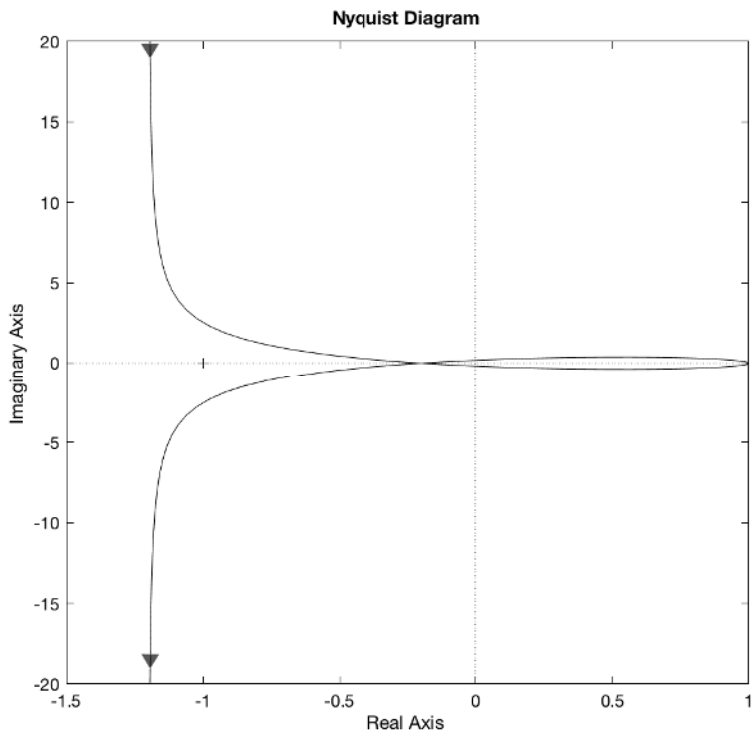
Limitandosi alle pulsazioni non negative, è immediato verificare che la parte immaginaria si annulla solo per $\omega = \omega_1 := \sqrt{1000/12} = \sqrt{250/3} \approx 9.13$ e per tale pulsazione la parte reale vale $-1/5 = -0.2$. Invece la parte reale si annulla solo per $\omega = \omega_2 := \sqrt{120} \approx 10.95$ e per tale pulsazione la parte immaginaria vale $-2/\sqrt{120} \approx -0.18$. Infine,

$$\lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Re}(G(j\omega)) = -1.2, \qquad \lim_{\omega \to 0^+} \mathrm{Im}(G(j\omega)) = +\infty,$$

mentre

$$\lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Re}(G(j\omega)) = 1, \quad \lim_{\omega \to +\infty} \mathrm{Im}(G(j\omega)) = 0.$$

Di conseguenza il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$, per $\omega \geq 0$, parte (per $\omega = 0^+$) parallelo all'asintoto verticale di ascissa Re $= -1.2$, poi scende (ruotando in verso antiorario) e prima attraversa il semiasse reale negativo in -0.2 per $\omega = \omega_1$, poi il semiasse immaginario negativo in -0.18 per $\omega = \omega_2$ e infine arriva nel punto $(-1, 0)$ per $\omega = +\infty$.
La parte relativa alle pulsazioni negative si trova per simmetria Hermitiana. Il diagramma finale è illustrato in figura.



iii) Considerando il cerchio all'infinito (chiuso in verso orario dal ramo in basso verso il ramo in alto) ed il punto critico $s = -\frac{1}{K}$, si trova che

$$-\tfrac{1}{K} \;<\; -\tfrac{1}{5}\ (0 < K < 5) \;\Rightarrow\; N = -1,\ n_{G_+} = 1,\ n_{W_+} = 2$$

$$-\tfrac{1}{5} \;<\; -\tfrac{1}{K} < 1\ (K < -1 \text{ oppure } K > 5) \;\Rightarrow\; N = 1\ n_{G_+} = 1,\ n_{W_+} = 0$$

$$-\tfrac{1}{K} \;>\; 1\ (-1 < K < 0) \;\Rightarrow\; N = 0,\ n_{G_+} = 1,\ n_{W_+} = 1$$

Si nota inoltre che per $K = 5$ la $W(s)$ ha due poli immaginari coniugati, mentre per $K = -1$ non è propria. Quindi $W(s)$ è BIBO stabile se e solo se $K < -1$ oppure $K > 5$.

Esercizio 2. Osserviamo preliminarmente che $n = 3 > 2 = m$ e quindi sia nel luogo positivo che nel luogo negativo c'è un singolo asintoto, di pendenza π radianti nel luogo positivo e 0 rad nel luogo negativo. Il baricentro della stella di asintoti (peraltro irrilevante essendo $n - m = 1$) è:

$$(x_B, 0), \quad \text{con} \quad x_B = 4.$$

Se considero il luogo positivo noto che appartengono ad esso dell'asse reale solo i punti della semiretta: $(-\infty, 0)$. Invece la semiretta $(0, +\infty)$ appartiene al luogo negativo.
Una valutazione preliminare ci porta quindi a dire che nel luogo positivo c'è un punto doppio sull'asse reale in $(-\infty, -1)$, mentre nel luogo negativo ci deve essere un punto doppio nell'intervallo $(0, 1)$. Nel luogo positivo i due rami uscenti da 1 si incrociano in qualche punto dell'intervallo $(-\infty, -1)$ e poi vanno l'uno a $-\infty$ e l'altro a -1. Simultaneamente il terzo ramo parte da 0 e va a sua volta a -1, rimanendo sull'asse reale. Per quel che concerne il luogo negativo, invece, abbiamo un ramo sull'asse reale che da 1 va a $+\infty$ e due rami che partono l'uno da 0 e uno da 1, si incontrano in qualche punto intermedio dell'intervallo $(0, 1)$, sull'asse reale, e poi lasciano l'asse reale per finire nello zero doppio collocato in -1.
Chiaramente sia nel luogo positivo che in quello negativo due rami attraverseranno l'asse immaginario.
Per prima cosa andiamo a determinare i punti doppi del luogo. L'equazione dei candidati punti doppi, dopo un paio di passaggi, si riduce a:

$$0 = (s + 1)(s - 1)[-s^2 - 4s + 1].$$

Le prime due soluzioni vanno eliminate giacché corrispondono a $K = \infty$ e $K = 0$, quindi non sono punti del luogo se non al limite. L'equazione di secondo grado ha soluzioni

$$s = -2 + \sqrt{5} \approx 0.2361$$

corrispondente a $K = -\frac{(3-\sqrt{5})^2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-1)^2} < 0$ e

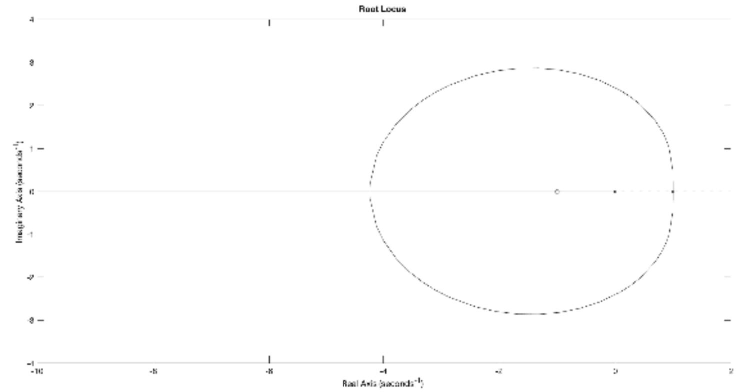
$$s = -2 - \sqrt{5} \approx -4.236$$

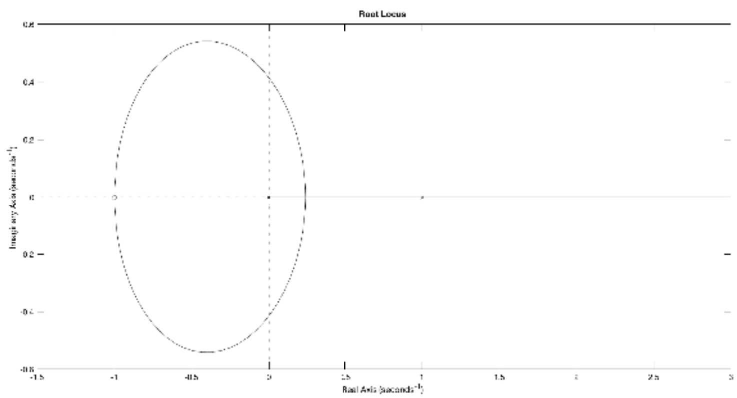
corrispondente a $K = \frac{(3+\sqrt{5})^2(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}+1)^2} > 0$.
La ricerca delle intersezioni con l'asse immaginario conduce a

$$(j\omega - 1)^2 j\omega + K(j\omega + 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \omega(1 - \omega^2 + 2K) = 0 \\ 2\omega^2 + K(1 - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Una soluzione possibile è $\omega = 0$ per $K = 0$. Un'altra soluzione della prima equazione è $\omega^2 = 1 + 2K$ che sostituita nella seconda porta all'equazione $K^2 - 2K - 1 = 0$, le cui soluzioni sono $K_1 = 1 + \sqrt{2} > 0$ e $K_2 = 1 - \sqrt{2} < 0$. In corrispondenza alla prima troviamo $\omega = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, mentre in corrispondenza alla seconda troviamo $\omega = \pm\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.

I luoghi positivo e negativo sono riportati qui di seguito:





È immediato quindi verificare che nel luogo negativo uno dei rami è interamente contenuto nel semipiano reale positivo e conseguentemente per ogni $K < 0$ il sistema retroazionato non è BIBO stabile. Invece nel luogo positivo noto che per $K > 1 + \sqrt{2}$ i punti sui tre rami del luogo sono tutti contenuti nel semipiano reale negativo, mentre per $0 < K \leq 1 + \sqrt{2}$ due dei poli di $W(s)$ si trovano su due rami che sono contenuti in $\mathrm{Re}(s) \geq 0$. Pertanto si ha stabilità BIBO se e solo se $K > 1 + \sqrt{2}$.

Esercizio 3. i) Chiaramente affinché esista la risposta di regime permanente a un segnale sinusoidale in corrispondenza a condizioni iniziali nulle occorre e basta che il sistema sia BIBO stabile. Poiché il sistema è del secondo ordine, la regola dei segni di Cartesio permette di dedurre che il sistema è asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile. Il calcolo della trasformata di Laplace dell'uscita (puramente forzata) porta a

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{1}{s^2+2s+5}\frac{10s}{s^2+1} = \frac{10s}{(s^2+2s+5)(s^2+1)},$$

che decomposta in fratti semplici, dopo un certo numero di passaggi numerici, porta a

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+1} - \frac{2(s+1)+3/2 \cdot 2}{(s+1)^2+2^2},$$

la cui antitrasformata è

$$y(t) = y_f(t) = [2\cos t + \sin t] + [-2e^{-t}\cos(2t) - 3/2 e^{-t}\sin(2t)]\delta_{-1}(t).$$

È immediato rendersi conto del fatto che

$$y_{rp}(t) = 2\cos t + \sin t,$$

mentre

$$y_{f,tr}(t) = -2e^{-t}\cos(2t) - 3/2e^{-t}\sin(2t).$$

ii) L'asintotica stabilità del sistema assicura che anche in presenza di condizioni iniziali non nulle esistano risposta di regime e risposta transitoria. L'unico modo per garantire che, in corrispondenza ad una specifica scelta delle condizioni iniziali, valga

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = y_\ell(t) + y_{f,tr}(t) + y_{rp}(t) = y_{rp}(t),$$

per ogni $t \geq 0$, è scegliere tali condizioni in modo tale che

$$y_\ell(t) + y_{f,tr}(t) = 0$$

per ogni $t \geq 0$, ovvero

$$y_\ell(t) = 2e^{-t}\cos(2t) + 3/2e^{-t}\sin(2t).$$

Il calcolo della derivata

$$\frac{dy_\ell(t)}{dt} = e^{-t}\cos(2t) - \frac{11}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

e successivamente dei valori di $y_\ell(t)$ e $\frac{dy_\ell(t)}{dt}$ in $t = 0$ porta a

$$y(0^-) = y_\ell(0) = 2, \qquad \frac{dy(0^-)}{dt} = \frac{dy_\ell(0)}{dt} = 1.$$

Teoria. Si veda il Capitolo 6, pag. 170 e seguenti, del Libro di testo.