Quiz 12

Question 1

Not complete

Flag question

Il numero di automobili che passa al casello autostradale è descritta da un Processo di Poisson di intensità 870.6 all'**ora**. Qual è la probabilità che, ad un dato istante, la prima automobile passi dopo 0.05 **minuti**?

Answer:

Check

X = processo di Poisson di parametro λ

X_t = # di macchine che sono passate fino all'istante $t>0$

$P(T \geq 0,05)$?

SOL. SE PASSANO $\lambda = 870.6$ MACCHINE ALL'ORA, AL MINUTO PASSANO $\lambda = \frac{870.6}{60}$ MACCHINE

RICORDA CHE:

- IL PROCESSO DI POISSON CONTA IL NUMERO DI EVENTI IN UN DATO INTERVALLO DI TEMPO
- LA V.A. ESPONENZIALE CONTA IL TEMPO NECESSARIO AFFINCHÉ SI VERIFICHI IL PRIMO FENOMENO IN UN PROCESSO DI POISSON

V.A. CONTINUA ESPONENZIALE

SIA:

$(X_t)_t$: PROCESSO DI POISSON DI PARAMETRO λ

X_t : # DI FENOMENI VERIFICATESI FINO ALL'ISTANTE $t>0$

T: ISTANTE IN CUI SI VERIFICA IL 1° FENOMENO

$T \sim Exp(\lambda)$ dove $P(T>t) = P(X_t = 0) = e^{-\lambda t}$

$$P(T \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ 1-P(T>t) = 1-P(X_t=0) = 1-e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow T \sim Exp(\lambda)$

$$P(T \geq 0.05) = 1-P(T<0.05) = 1-(1-e^{-\lambda t}) = e^{-\frac{870.6}{60} \cdot 0.05} = 0.4840$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 1 (per avere solo il risultato)

$$SOL = e^{-\frac{\lambda}{60} \cdot t}$$

λ = # DI MACCHINE CHE PASSANO IN UN'ORA

t = TEMPO DOPO IL QUALE DEVE PASSARE LA PRIMA AUTOMOBILE (IN MINUTI)

Question 2

Not complete

Flag question

Sia X variabile uniforme sull'intervallo $[0, 3]$. Calcolare il valore atteso della variabile $\exp(3X - 3)$.

Answer:

Check

$X \sim U[0,3]$

NB: $Exp(x) = e^x$

$g: X \longrightarrow Exp(3X-3) = e^{3X-3}$

FORMULA DEL VALORE ATTESO DI UNA V.A. COMPOSTA

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx$$

SOSTITUISCO E OTTENGO:

$$E[\exp(3X-3)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x-3}\, f_X(x)\, dx$$

QUESTA E' LA DENSITÁ DI X, CHE E' UNIFORME

DISTRIBUZIONE DI UNA V.A. UNIFORME

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

(E' IL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{3x-3} \cdot \frac{1}{3-0}\, dx = \int_0^3 e^{3x-3} \cdot \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{3x-3}\, dx = \frac{e^{-3}}{3}\int_0^3 e^{3x}\, dx$$

$$= \frac{e^{-3}}{3} \cdot \frac{1}{3}\int_0^3 3e^{3x}\, dx = \frac{e^{-3}}{9}\left[e^{3x}\right]_0^3 = \frac{e^{-3}}{9}\left[e^9 - e^0\right] = \frac{e^{-3}}{9}\left[e^9 - 1\right] = 44.8198$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 2

$$SOL = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{cx+d}\, dx$$

$[a,b]$: INTERVALLO

e^{cx+d}: VARIABILE

(IN PRATICA, APPLICO IL TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE ALLA VARIABILE)

Question 3

Not complete

Flag question

Sia X variabile esponenziale di **media** (non parametro!) 3. Determinare il **valore atteso** di $\exp\left(-8X+7\right)$. (Notazione: $\exp(x) = e^{x}$)

Answer:

Check

$X \sim Exp(\lambda)$

VALORE ATTESO DI UNA V.A. ESPONENZIALE

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = 3 \quad \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow X \sim Exp\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$E[\exp(-8X+7)] = ?$$

FORMULA DEL VALORE ATTESO DI UNA V.A. COMPOSTA

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f_x(x)\, dx$$

$$g: X \rightarrow Y = Exp(-8X+7) = e^{-8x+7}$$

SOSTITUISCO:

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8x+7} \cdot f_x(x)\, dx$$

DENSITÀ DI UNA V.A. ESPONENZIALE $X = Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

DENSITÀ ESPONENZIALE

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8x+7} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-8x+7} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx = \frac{1}{3} \int_{0}^{+\infty} e^{-8x-\frac{1}{3}x+7}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{25}{3}x+7}\, dx = -\frac{3}{25} \cdot \frac{1}{3} \int_{0}^{+\infty} -\frac{25}{3} e^{-\frac{25}{3}x+7}\, dx = -\frac{1}{25} \left[e^{-\frac{25}{3}x+7}\right]_{0}^{+\infty} = -\frac{1}{25}\left[\overset{0}{\cancel{e^{-\infty}}} - e^{7}\right]$$

$$= \frac{e^7}{25} = 43.8653$$

V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 3

λ = PARAMETRO DELLA V.A. ESPONENZIALE

$$\text{SOL} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{cx+d}$$

λ = PARAMETRO DELLA V.A. ESPONENZIALE

e^{cx+d} = EXP DI CUI BISOGNA CALCOLARE IL VALORE ATTESO

Question **4**

Not complete

Flag question

Il periodo di quarantena per una certa malattia varia tra 4 e 14 giorni dal contagio. Il tempo che intercorre tra il contagio e l'apparizione dei sintomi è descritto da una variabile aleatoria continua X la cui densità su quell'intervallo è data da (t è espresso in giorni)

$$f(t) = \begin{cases} k(t-4)(14-t), & t \in [4, 14] \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Determinare la probabilità che i sintomi appaiano entro 9 giorni dal contagio.

Answer:

Check

X = tempo apparizione dei sintomi (in giorni), $X \in [4,14]$

$$f(t) = \begin{cases} K(t-4)(14-t) & , t \in [4,14] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NB: $P(a \leq X \leq b) = 1$ se $X \in [a,b]$

So che $P(4 \leq X \leq 14) = 1 \rightarrow F(14) - F(4) = 1$

TFCI, VARIABILE CONTINUA

$$\rightarrow \int_4^{14} K(t-4)(14-t)\,dt = 1 \rightarrow \frac{500}{3}K = 1 \rightarrow K = \frac{3}{500}$$

HO RISOLTO L'INTEGRALE IN FUNZIONE DI K CON WOLFRAM (MANCANZA DI VOGLIA)

$$P(X \leq 9) = P(4 \leq t \leq 9) \overset{\text{TFCI}}{=} F(9) - F(4) = \int_4^9 f(t)\,dt$$

$$\rightarrow K\int_4^9 (t-4)(14-t)\,dt = \frac{3}{500}\underbrace{\int_4^9 (t-4)(14-t)\,dt}_{=\frac{250}{3}\ (\text{WOLFRAM})} = \frac{3}{500}\cdot\frac{250}{3} = \frac{750}{1500} = 0.5$$

✓

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 4

$$SOL = \frac{1}{\int_a^b (t-a)(b-t)\,dt} \cdot \int_a^c (t-a)(b-t)\,dt$$

DOVE:

- $[a,b]$ È L'INTERVALLO DI TEMPO IN CUI POSSONO COMPARIRE I SINTOMI
- c È IL GIORNO DI CUI CALCOLIAMO LA PROBABILITÀ CHE I SINTOMI APPAIANO ENTRO TALE GIORNO

Question **5**

Not complete

Flag question

La durata, in chilometri, di uno pneumatico, è una variabile aleatoria espressa in **migliaia** di chilometri, la cui densità continua è data da

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/42}, x > 0, \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Determinare la probabilità che il pneumatico resista almeno 30 mila chilometri.

Answer:

Check

X = durata in migliaia di Km di uno pneumatico

$$f(x) = \begin{cases} K e^{-\frac{x}{42}} & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

DENSITÀ DELL'ESPONENZIALE

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{matrix} 0 & \text{se } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{matrix}$$

NB: $\int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

$$\rightarrow K \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{42}}\, dx}_{= 42} = 1 \rightarrow K \cdot 42 = 1 \rightarrow K = \frac{1}{42}$$

$\Rightarrow X \sim Exp\left(\frac{1}{42}\right)$

$$P(X \geq 30) = \int_{30}^{+\infty} \frac{1}{42} e^{-\frac{1}{42}x}\, dx = -\int_{30}^{+\infty} -\frac{1}{42} e^{-\frac{1}{42}x}\, dx = -\left[e^{-\frac{1}{42}x}\right]_{30}^{+\infty} = -\left[0 - e^{-\frac{30}{42}}\right]$$

$$= e^{-\frac{30}{42}} = 0.4895 \checkmark$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 5:

$$e^{-\frac{b}{a}}$$

- a: È IL DENOMINATORE DELL'ESPONENTE DELLA FUNZIONE

  es. $f(x) = K e^{-\frac{x}{42}} \rightarrow a = 42$

- b: QUANTO LO PNEUMATICO DEVE DURARE (in migliaia di Km)

(NB: si poteva fare anche con la formula di probabilità dell'esponenziale...)

Question 6

Not complete

Flag question

I risultati di un test universitario sono distribuiti con una variabile normale di media 66 e deviazione standard 17. Qual è la soglia di punteggio da assegnare affinché la probabilità di fallire al test sia la più vicina al 10.03%?

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

Answer:

X = risultato

$X \sim N(66, 17^2)$, $\begin{cases} \mu = 66 \\ \sigma^2 = 17 \end{cases}$ $\Rightarrow Z = \mu + \sigma X$, DOVE $X \sim N(0,1)$

SOL. SIA C LA SOGLIA DI PUNTEGGIO INCOGNITA. SOSTITUENDO $Z = \mu + \sigma X = 66 + 17X$

$P(66 + 17X < C) = 10.03\% \Rightarrow P\left(X < \frac{C-66}{17}\right) = 10.03\% = 0.1003$

PROBLEMA: 0.1003 NON C'È SULLA TABELLA. PASSO AL COMPLEMENTARE: $\varphi(x) = 1 - \varphi(-x)$

$\rightarrow 1 - \varphi\left(\frac{-C+66}{17}\right) = 0.1003 \rightarrow -\varphi\left(\frac{-C+66}{17}\right) = 0.1003 - 1 \rightarrow \varphi\left(\frac{-C+66}{17}\right) = -0.1003 + 1$

$\rightarrow \varphi\left(\frac{-C+66}{17}\right) = 0.8997 \rightarrow \frac{-C+66}{17} = \varphi^{-1}(0.8997) = 1.28$

$\rightarrow \frac{-C+66}{17} = 1.28 \rightarrow -C + 66 = 1.28 \cdot 17 \rightarrow -C = 1.28 \cdot 17 - 66 \rightarrow C = -1.28 \cdot 17 + 66$

$\rightarrow C = -1.28 \cdot 17 + 66 = 44.24$ ✓

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 6

SOL: $-\varphi^{-1}(1 - P \cdot 100) \cdot \sigma + \mu$

μ: MEDIA

σ^2: DEVIAZIONE STANDARD

P: PERCENTUALE

Question 7

Not complete

Flag question

Sia X variabile normale di media 18 e deviazione standard 7.3. Calcolare la probabilità che $X \in [16.5, 18.7]$.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

Answer:

VARIABILE NORMALE

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ SE $X = \mu + \sigma Z$ dove $Z \sim N(0,1)$

$X \sim N(18, 7.3^2)$, V.A. NORMALE $\Rightarrow X = 18 + 7.3 Z$

$P(X \in [16.5, 18.7]) = ?$

SOL. $P(X \in [16.5, 18.7]) = P(16.5 < X < 18.7) = P(16.5 \leq 18 + 7.3Z \leq 18.7) =$

$$P\left(\frac{16.5-18}{7.3} < Z < \frac{18.7-18}{7.3}\right) = \varphi\left(\frac{18.7-18}{7.3}\right) - \varphi\left(\frac{16.5-18}{7.3}\right) = \varphi(0.1) - [1 - \varphi(0.21)]$$

$\varphi(-x) = 1 - \varphi(x)$

$$= 0.5398 - [1 - 0.5832] = 0.123$$

V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 7

$$\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma^2}\right) - \left[1 - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma^2}\right)\right]$$

DOVE:
- $[a,b]$ È L'INTERVALLO DI X
- μ È LA MEDIA
- σ^2 È LA DEVIAZIONE STANDARD

Question 8

Not complete

Flag question

Un autovelox misura la velocità delle auto in tangenziale di Padova dove il limite è di 89 km/ora: chi supera i 89.3 km/ora prende la multa. Le velocità delle auto sono distribuite normalmente con media di 89 km/ora e deviazione standard di 13 km/ora. Qual è la probabilità che un'automobilista che passa davanti all'autovelox prenda la contravvenzione?

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

Answer:

$X \sim N(89, 13^2) \Rightarrow X = 89 + 13Z$

$P(X > 89.3) = P(89 + 13Z > 89.3) = P\left(Z > \frac{89.3 - 89}{13}\right) = P\left(Z > \frac{0.3}{13}\right)$

IO SO CHE $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Z(t)\,dt$, MA IO VOGLIO $\int_{x}^{+\infty} f_Z(t)\,dt$

PROBABILITÀ CHE UN AUTOMOBILISTA NON PRENDA LA MULTA

PROBABILITÀ DI PRENDERE LA MULTA

PERCIÒ FACCIO $P(Z > K) = 1 - \varphi(K)$ [QUINDI, $P(Z \leq K) = \varphi(K)$]

$\rightarrow P(Z > K) = 1 - \varphi(K) = 1 - \varphi(0.02) = 1 - 0.5080 = 0.492$ V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 8

$1 - \varphi\left(\frac{V - N}{\sigma^2}\right)$

DOVE:

- V: VELOCITÀ OLTRE LA QUALE SI PRENDE LA MULTA
- N: MEDIA
- σ^2 : DEVIAZIONE STANDARD

Question **9**

Not complete

Flag question

La durata di una pila per orologi è una variabile aleatoria continua di media 109 ore e deviazione standard σ ore. Usando il Teorema Centrale del Limite calcolare, approssimativamente, il minimo valore di σ affinché utilizzando 223 pile si possa garantire il funzionamento dell'orologio per almeno 24324 ore con una probabilità superiore a 0.0778. Non usare la correzione di continuità.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

$X \sim N(109, \sigma^2)$

$N = 109$

$n = 223$

$a = 24324$

APPROSSIMAZIONE IN DISTRIBUZIONE DI $X_1, \dots X_n$

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq a) \approx P(nN + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \leq a) \qquad n \to +\infty \quad Z \sim N(0,1)$$

"PROBABILITÀ CHE USANDO n PILE SI POSSA UTILIZZARE L'OROLOGIO PER ALMENO a ORE" ≥ 0.0778

$$P(223 \cdot 109 + \sqrt{223\sigma^2}\, Z \geq 24324)$$

PROBABILITÀ INVERSA: $P(X \geq K) = 1 - P(X < K)$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{24324 - 223 \cdot 109}{\sqrt{223\sigma^2}}\right) \geq 0.0778$$

$$\rightarrow 1 - \varphi\left(\frac{24324 - 223 \cdot 109}{\sqrt{223\sigma^2}}\right) \geq 0.0778$$

trovo K tale che $\varphi(K) = 0.9222$

$$\rightarrow \varphi\left(\frac{24324 - 223 \cdot 109}{\sqrt{223\sigma^2}}\right) \leq 1 - 0.0778 = 0.9222 = \varphi(1.42)$$

$$\rightarrow \varphi\left(\frac{24324 - 223 \cdot 109}{\sqrt{223\sigma^2}}\right) \leq \varphi(1.42) \rightarrow \varphi^{-1}\left[\varphi\left(\frac{24324 - 223 \cdot 109}{\sqrt{223\sigma^2}}\right)\right] \leq \varphi^{-1}[\varphi(1.42)]$$

$$\rightarrow \frac{24324 - 223 \cdot 109}{\sqrt{223\sigma^2}} \leq 1.42 \rightarrow \frac{17}{\sqrt{223\sigma^2}} \leq 1.42 \rightarrow \frac{17}{1.42} \leq \sqrt{223\sigma^2}$$

$$\rightarrow \sigma = \frac{17}{1.42 \cdot \sqrt{223}} = 0.7424 \quad \text{V}$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 9

$$\sigma = \frac{a - n \cdot N}{\varphi^{-1}(1-P) \cdot \sqrt{n}}$$

DOVE:

a: # DI ORE PER CUI L'OROLOGIO

n: NUMERO DI PILE

N: MEDIA DELLA V.A.

P : PROBABILITÀ [illegible]

Question 10

Not complete

Flag question

In un esperimento di telepatia, una persona scelta a caso da un computer tra quattro individui effettua una telefonata ad uno sperimentatore. Qual è la probabilità che lo sperimentatore indovini correttamente chi lo sta chiamando per almeno 1492 volte su 6107 esperimenti effettuati scegliendo a caso uno dei quattro interlocutori? Non serve utilizzare la correzione di continuità.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

Answer:

X_i = SCELTA DI 1 PERSONA ALL'i-ESIMA PROVA

$$X_i \sim Be\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow E[X_i] = \frac{1}{4} \rightarrow Var[X_i] = E[X_i^2] - E^2[X_i] = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

DEVIAZIONE STANDARD: $\sigma = \sqrt{Var(X_i)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$P(X_1 + \dots + X_{6107})$?

USO L'APPROSSIMAZIONE DI DISTRIBUZIONE $X_1, \dots X_n$

$\forall a \in \mathbb{R}$:

$X_1, \dots X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ per $n \to +\infty$

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq a) \approx P(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \leq a) \quad \underset{Z \sim N(0,1)}{n \to +\infty}$$

$n = 6107$

$\mu = \frac{1}{4}$

$\sigma = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$a = 1492$

$$P(X_1 + \dots + X_{6107} \geq 1492) = 1 - P(X_1 + \dots + X_{6107} \leq 1492)$$

$$= 1 - P\left(6107 \cdot \frac{1}{4} + \sqrt{6107 \cdot \frac{3}{16}}\, Z \leq 1492\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{1492 - 6107 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{6107 \cdot \frac{3}{16}}}\right) = 1 - \varphi(-1.03) = 1 - [1 - \varphi(1.03)]$$

$$= \varphi(1.03) = 0.8485$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 10

$$\varphi\left(\frac{K - \frac{n}{4}}{\sqrt{n \cdot \frac{3}{16}}}\right)$$

DOVE:

n: # ESPERIMENTI

K: SUCCESSI (SPERIMENTATORE INDOVINA)

Question 11

Not complete

Flag question

Un gioco elettronico fa uscire 3 valori:

- 1 con probabilità 1/2
- 2 con probabilità 1/4
- 3 con probabilità 1/4

Si effettuano un certo numero n di giocate indipendenti e si sommano i punteggi ottenuti. Determinare il minimo n naturale affinché la somma dei punti ottenuti sia maggiore o uguale a $n \times 1.72$ con probabilità maggiore o uguale a 0.8105. Non usare la correzione di continuità.

Rispondere con un numero intero (es. 198); tolleranza di ± 10.

Funzione di distribuzione della normale standard

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

Answer:

Check

$$P(X_1 + \ldots + X_n \geq 1.72n) \geq 0.8105$$

SIA X_i LA i-ESIMA GIOCATA. CALCOLO VALORE ATTESO E DEVIAZIONE STANDARD

- $E[X_i] = E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

- $Var[X_i] = E[X^2] - E^2[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{4} - \frac{49}{16} = 0.6875$

- $\sigma = \sqrt{Var[X_i]} = \sqrt{0.6875}$

ORA USO LA FORMULA DI APPROSSIMAZIONE DI UNA DISTRIBUZIONE $X_1 \ldots X_n$

$$\boxed{P(X_1 + \ldots + X_n \leq a) \approx P(n\mu + \sqrt{n\sigma^2}\, Z \leq a) \quad \begin{matrix} n \to +\infty \\ Z \sim N(0,1) \end{matrix}}$$

$$P(X_1 + X_2 + \ldots + X_n \geq 1.72n) \geq 0.8105$$

LA FORMULA DI APPROSSIMAZIONE FUNZIONA CON "$\leq$". IO QUI HO "$\geq$", DEVO USARE IL COMPLEMENTARE

$$\to P\left(\frac{7}{4}n + \sqrt{n} \cdot \sqrt{0.6875}\, Z \geq 1.72n\right) \geq 0.8105$$

$$\to 1 - P\left(\frac{7}{4}n + \sqrt{n} \cdot \sqrt{0.6875}\, Z \leq 1.72n\right) \geq 0.8105$$

$$\to 1 - \varphi\left(\frac{\sqrt{n}\left(1.72 - \frac{7}{4}\right)}{\sqrt{0.6805}}\right) \geq 0.8105 \quad \to 1 - \varphi\left(\frac{-0.03\sqrt{n}}{\sqrt{0.6875}}\right) \geq 0.8105$$

$$\to 1 - \left[1 - \varphi\left(\frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{0.6875}}\right)\right] \geq 0.8105$$

$$\to \varphi\left(\frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{0.6875}}\right) \geq 0.8105 \quad \to \quad \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{0.6875}}\right)\right) \geq \varphi^{-1}(0.8105)$$

$$\to \frac{0.03\sqrt{n}}{\sqrt{0.6875}} \geq 0.88 \quad \to \quad n = \left(\frac{0.88 \cdot \sqrt{0.6875}}{0.03}\right)^2 = 592$$

V

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 11

$$n = \left[\frac{\varphi^{-1}(P) \cdot \sqrt{0.6875}}{\left(B - \frac{7}{4}\right)}\right]^2$$

DOVE:

P: PROBABILITÀ MAGGIORE O UGUALE DI CUI VOGLIAMO CHE n SIA MAGGIORE

B: VOGLIAMO CHE LA SOMMA DEI PUNTI SIA $\geq$ A $n \times B$

(es. $n \times 1.72$, con $B = 1.72$)

[PER TROVARE $\varphi^{-1}(p)$ USO LA TABELLA: NON È NECESSARIO TROVARE IL VALORE ESATTO, BASTA TROVARE UN VALORE VICINO PERCHÉ LA RISPOSTA HA UNO SCARTO DI ± 10]