Dispensa 5: Progettazione Filtri

Esercizio 1

Dato il filtro causale:

$$H(z) = \frac{z}{z-p}$$

Determinare l'equazione alle differenze associata.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto riportiamo alla forma in z^{-1} (questo perché è più semplice da antitrasformare):

$$H(z) = \frac{z}{z(1-pz^{-1})} = \frac{1}{1-pz^{-1}}$$

A questo punto, ricordando che per i sistemi convoluzionali $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$, posso scrivere:

$$Y(z) = \frac{1}{1-pz^{-1}} X(z) \implies Y(z)(1-pz^{-1}) = X(z)$$

Dunque, antitrasformando, ottengo:

$$y(n) - py(n-1) = x(n)$$

Dall'equazione alle differenze si vede che il filtro è causale (definito solo per istanti passati), mentre la stabile dipende dal modulo del suo unico polo, tale che $|p| < 1$

Esercizio 2

Dato il filtro:

$$H(z) = \frac{z+1}{z-p}$$

Determinare l'equazione alle differenze associata.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto riportiamo alla forma in z^{-1} (questo perché è più semplice da antitrasformare):

$$H(z) = \frac{z+1}{z-p} = \frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}}$$

Quindi, per ispezione visuale, posso determinare i coefficienti b_k e a_k (da numeratore e denominatore rispettivamente). Quindi:

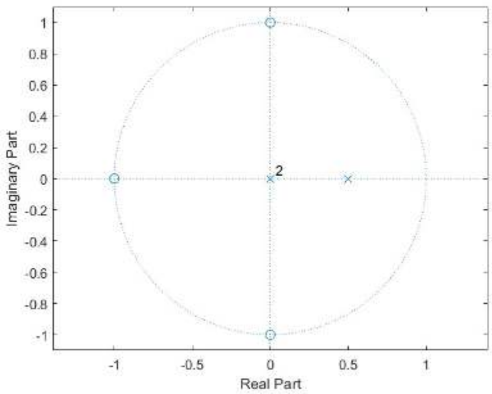
- $a_k = -p$ per $k = 1$
- $b_k = [1, 1]$ per $k = 0, 1$

Dunque ricordando che un filtro ARMA è definito come $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$, posso concludere che l'equazione alle differenze associata è:

$$y(n) = x(n) + x(n-1) + py(n-1)$$

Esercizio 3

Considerando il seguente diagramma zero-poli, determinare la funzione di trasferimento del filtro e l'equazione alle differenze associata.



SVOLGIMENTO

Dal diagramma posso ricavare zeri e poli e, di conseguenza, la funzione di trasferimento. Quindi:

- $zeri = [-1, j, -j]$
- $poli = [0, 0, 0.5]$

Dunque devo trovare i polinomi a numeratore e denominatore che abbiano rispettivamente zeri e poli come radici. Quindi:

$$H(z) = \frac{(z+1)(z+j)(z-j)}{z^2(z-p)} = \frac{(z+1)(z^2+1)}{z^2(z-p)} = \frac{z^3+z^2+z+1}{z^3-z^2p} = \\ = \frac{z^3(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})}{z^3(1-pz^{-1})} = \frac{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}}{1-pz^{-1}}$$

A questo punto, in modo analogo agli esercizi precedenti, trovo l'equazione alle differenze associata:

$$y(n) - py(n-1) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3)$$

Esercizio 4

Considerando un segnale campionato a $1000Hz$, si progetti un filtro che elimini le componenti a $50Hz$.

- $Fc = 1000Hz$ (frequenza di campionamento)
- $f_0 = 50$ Hz
- $\omega_0 = \frac{f_0 2\pi}{Fc} = \frac{50*2*\pi}{1000} = \frac{\pi}{10}$

Si progetti un filtro che elimini questa frequenza.

SVOLGIMENTO

Innanzitutto calcoliamo le pulsazioni da eliminare come:

$$\omega_0 = \frac{f_0 2\pi}{Fc} = \frac{50 \cdot 2\pi}{1000} = \frac{\pi}{10}$$

A questo punto un filtro notch (elimina banda) è facilmente implementabile come:

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\omega_0})(z - e^{-j\omega_0})}{(z - pe^{j\omega_0})(z - pe^{-j\omega_0})}$$

con $|p| < 1$ ma tendente ad 1 (La selettività del filtro notch dipende dalla vicinanza dei polo agli zeri)