Fisica 1

Prof. Giampiero Naletto

a cura di Mattia Campagnolo

Sommario

Introduzione 1

Analisi Vettoriale 2

- Proprietà dei vettori 2
  - Prodotto vettore-scalare 2
  - Somma vettoriale 2
  - Scomposizione di un vettore e modulo 3
  - Prodotto scalare 4
  - Prodotto vettoriale 5
  - Derivata di un vettore e di un versore 5
  - Integrale di un vettore 6

Cinematica del punto materiale 7

- La velocità 7
  - Moto rettilineo uniforme (MRU) 8
- L'accelerazione 8
  - Moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA) 10
  - Moto verticale 11
  - Moto rettilineo smorzato esponenzialmente 12
  - Moto armonico semplice 12
- Moto nel piano 14
  - Moto parabolico 15
  - Moto circolare 17
  - Moto circolare non uniforme. 18

Dinamica del punto materiale 21

- Prima legge di Newton (o principio di inerzia) 21
  - La forza e la massa 21
- Seconda legge di Newton 21
- Terza legge di Newton (o principio di azione e reazione) 22
  - Reazione vincolare. 23
  - Teorema dell'impulso. 25
- Le forze 25
  - Forza peso 26
  - Forze di attrito radente. 26
  - Forze di attrito viscoso 28
  - La forza elastica 29
  - Forze centripete 30

Tensione ... 31
Lavoro, potenza e energia ... 33
Energia cinetica ... 35
Energia potenziale gravitazionale ... 35
Lavoro della forza d'attrito. ... 36
Forze conservative ed energia meccanica. ... 36
Moti relativi ... 39
Sistemi di riferimento inerziali ... 40
Sistemi di riferimento non inerziali. ... 41
Sistemi di punti ... 43
Momento angolare ... 43
Momento di una forza ... 43
Sistemi di punti materiali ... 44
Quantità di moto ... 44
Momento angolare ... 44
Energia cinetica ... 44
Centro di massa di un sistema di punti. ... 45
Teorema del momento angolare per un sistema di punti ... 47
Conservazione del momento angolare ... 48
Sistema di riferimento del centro di massa. ... 48
Teoremi di Köning. ... 50
Lavoro ed energie dei sistemi di punti. ... 51
Urti tra punti materiali ... 52
Urto completamente anelastico ... 54
Urto elastico ... 55
Gravitazione universale ... 57
Massa inerziale e gravitazionale ... 59
Energia potenziale gravitazionale ... 60
Campo gravitazionale ... 61
Corpi rigidi ... 63
Esempi di calcolo del centro di massa ... 65
Moto di rotazione: rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento ... 66
Esempi sugli effetti di non parallelismo tra I e ω ... 67
Esempi di calcolo del momento di inerzia ... 68
Teorema della figura piana ... 69
Teorema di Huygens-Steiner ... 70

Equazione differenziale del moto di rotazione 71
Energia cinetica del corpo rigido 72
Impulso del momento di una forza 72
Il giroscopio 74
Moto di puro rotolamento 74
Urti tra corpi rigidi 76
Fluidi 78
Statica dei fluidi 79
Forza di Archimede 81
Dinamica dei fluidi 81
Termodinamica 85
Principio zero della termodinamica 86
Lavoro 88
Primo principio della termodinamica 89
Trasformazioni puramente termiche 92
Cambiamenti di fase 94
I gas 94
Legge di Boyle 94
Legge di Volta-Gay-Lussac (v-gs) 95
Legge di Avogadro 96
Applicazione del primo principio nel caso di un gas 97
Trasformazioni dei gas 100
Modello cinetico dei gas 102
Gas reali 104
Secondo principio della termodinamica 107
I cicli 109
Energia resa inutilizzabile. 121
Temperatura assoluta 123

Introduzione

Il termine **fisica** deriva dal greco *φύσις* (*phýsis*), che significa "natura". Questa disciplina studia i fenomeni naturali principalmente dal punto di vista *quantitativo*, piuttosto che *qualitativo*. I fenomeni fisici sono molteplici: tra quelli affrontati in questo corso, si trovano la **meccanica**, che analizza i fenomeni legati al contatto tra corpi, e la **termodinamica**. La **fisica classica** comprende, oltre a queste, anche l'elettromagnetismo, l'acustica e lo studio della propagazione delle onde. La **fisica moderna**, sviluppatasi a partire dal 1900, si concentra invece su meccanica quantistica e relatività.

Essendo una scienza sperimentale, la fisica si basa sull'acquisizione di dati tramite misurazioni. Questi dati, organizzati in modo sistematico, danno origine alle **leggi fisiche**. L'obiettivo della disciplina è quindi osservare i fenomeni naturali e ricavarne leggi che li descrivano in modo rigoroso.

Il primo a condurre osservazioni sistematiche fu Galileo Galilei che, ad esempio, individuò una regolarità nel moto di un grave lungo un piano inclinato. Un'altra caratteristica fondamentale della fisica è la generalizzabilità delle leggi: partendo da osservazioni specifiche, è possibile applicare le leggi a contesti diversi e ampliarne la portata per formulare **teorie fisiche**. Un esempio celebre è quello di Isaac Newton che, ispirato dalla caduta di una mela, formulò la legge di gravitazione universale.

Il linguaggio della fisica è quello matematico, che ne garantisce precisione e universalità.

Analisi Vettoriale

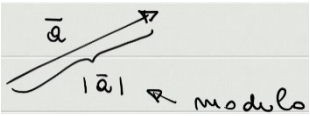
Le leggi fisiche hanno tutte la stessa espressione indipendentemente dal sistema di riferimento che viene preso, ciò vale se si utilizza un formalismo opportuno. Tutte le grandezze sono suddivise in due categorie:

1. Grandezze scalari
2. Grandezze vettoriali

<u>Le grandezze scalari.</u> Le **grandezze scalari** sono definite da un numero: quando viene dato il valore della grandezza automaticamente si sono date tutte le informazioni ad essa associate. Una grandezza scalare è scritta in font italico e seguita dal suo valore ($a = 30\ °C$).

<u>Le grandezze vettoriali.</u> Le **grandezze vettoriali** sono definite da un numero, una direzione e un verso. Le grandezze vettoriali vengono descritte da un punto di vista geometrico e analitico.

Dal punto di vista geometrico, esse sono rappresentabili tramite segmenti orientati la cui notazione è la seguente: $\bar{a}$. Il numero, più propriamente *modulo*, è la lunghezza della freccia che definisce l'entità della grandezza.



Due vettori sono uguali quando hanno stesso modulo, direzione e verso e punti di applicazione diversi. L'insieme dei vettori uguali è l'insieme dei vettori *equipollenti*.

Proprietà dei vettori

Prodotto vettore-scalare

Dati un vettore $\bar{a}$ e uno scalare m, il loro prodotto restituisce un vettore.

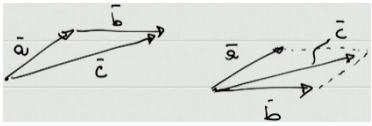
$$\bar{b} = m\bar{a}$$

- Il modulo è: $|\bar{b}| = |m\bar{a}| = m|\bar{a}|$
- $m \gtrless 0$, se $m < 0$, $\bar{b}$ ha verso opposto
  - Il *vettore opposto* è un vettore di modulo uguale ma di verso opposto $(\bar{b} = -\bar{a}: m = -1)$
  - Il *vettore unitario* o **versore** $\bar{\boldsymbol{u}}$ è un vettore con le stesse caratteristiche, eccetto il modulo che è unitario: $m = \frac{1}{|\bar{a}|} \Rightarrow \bar{b} = m\bar{a} = \frac{1}{\bar{a}}\bar{a} \Rightarrow |\bar{b}| = \frac{1}{|\bar{a}|}|\bar{a}| = 1$

Somma vettoriale

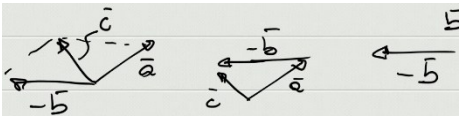
Dati due vettori $\bar{a}$ e $\bar{b}$, la loro somma restituisce un vettore:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$$



Dati due vettori $\bar{a}$ e $\bar{b}$, la loro differenza restituisce un vettore:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$$



Le proprietà della somma vettoriale sono:

- Proprietà commutativa: $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$
- Proprietà associativa: $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
- Se i vettori sono paralleli ($\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$): $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = |\bar{a}_1| \cdot \bar{u}_a + |\bar{a}_2| \cdot \bar{u}_a = (|\bar{a}_1| + |\bar{a}_2|) \cdot \bar{u}_a$

- Con n-vettori paralleli: $\sum_i \bar{a}_n = (\sum_i |\bar{a}_i|)\bar{u}_a$
- La somma vettoriale può essere fatta sommando le componenti dei singoli vettori tra di loro.

Scomposizione di un vettore e modulo

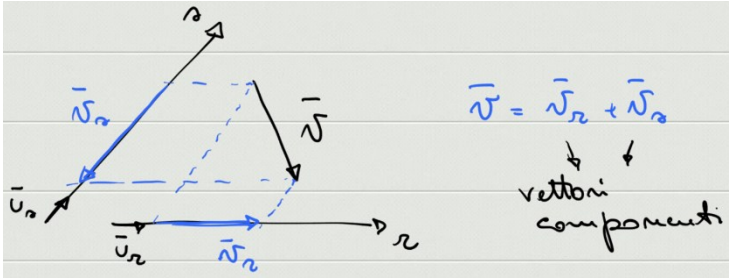
Si supponga di avere due direzioni s e r orientate nel piano e un vettore contenuto in esso. Tracciando le proiezioni del vettore sulle due direzioni, si scompone nei suoi *vettori componenti*.

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_s$$

Le direzioni possono essere caratterizzate dai versori corrispondenti; essi possono essere utilizzati per scrivere le *componenti del vettore*, le quali non sono uguali al modulo:

$$\bar{v} = v_r\bar{u}_r + v_s\bar{u}_s$$

NB: il modulo è sempre positivo, la componente è dotata di segno.

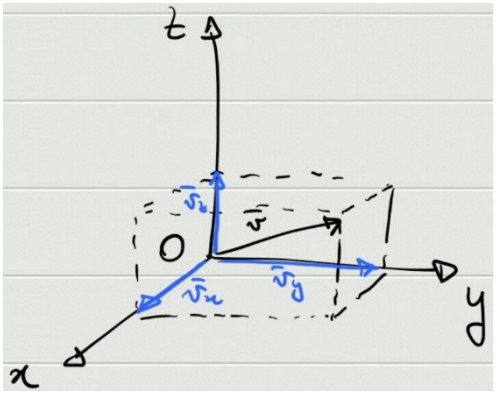


In una configurazione tridimensionale, il vettore $\bar{v}$ si scompone come la somma di tre componenti orientate.

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_s + \bar{v}_t = v_r\bar{u}_r + v_s\bar{u}_s + v_t\bar{u}_t$$

Con $\{\bar{u}_r, \bar{u}_s, \bar{u}_t\}$ base. Si utilizzano soprattutto sistemi di riferimento cartesiani ortogonali destrogiri, in cui ogni vettore è scomponibile nelle tre componenti x, y e z:

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z = v_x\bar{u}_x + v_y\bar{u}_y + v_z\bar{u}_z \Rightarrow \bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$$



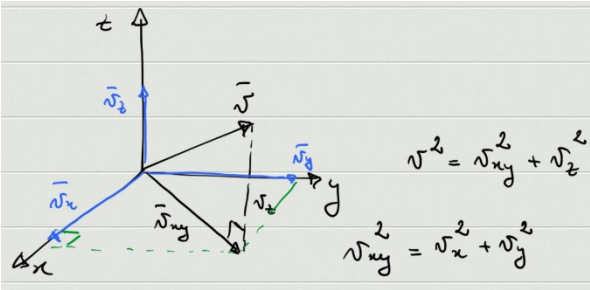
Esempio: siano dati i seguenti vettori $\bar{a} = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$ e $\bar{b} = b_x\bar{u}_x + b_y\bar{u}_y + b_z\bar{u}_z$, la loro somma vettoriale risulta:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z) + (b_x\bar{u}_x + b_y\bar{u}_y + b_z\bar{u}_z) = (a_x + b_x)\bar{u}_x + (a_y + b_y)\bar{u}_y + (a_z + b_z)\bar{u}_z$$

Quanto appena visto vale anche per la differenza.

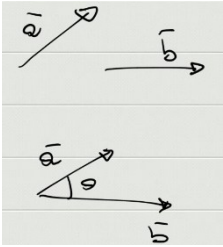
Il modulo di un vettore può anche essere scritto in funzione delle componenti:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



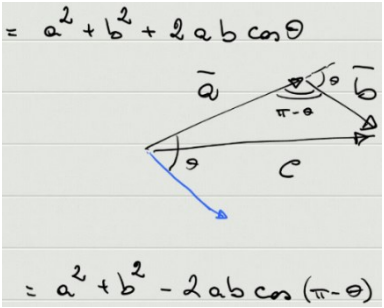
Prodotto scalare

Il **prodotto scalare** è un prodotto tra due vettori che restituisce uno scalare.

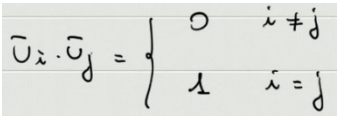


$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta$$

- $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$: $\begin{cases} a, b = 0 \\ \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
- $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\theta = ba\cos\theta = \bar{b} \cdot \bar{a}$
- $\bar{b} = a \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{a} = aa\cos 0 = a^2 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{a} = a^2$
- $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$: è un'espressione priva di significato, in quanto equivale a uno scalare per vettore e non ha senso mettere il puntino.
- $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (proprietà distributiva)
  - Sia $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, elevando al quadrato si ottiene: $c^2 = \bar{c} \cdot \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} = a^2 + b^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$



Siano $\bar{a} = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$ e $\bar{b} = b_x\bar{u}_x + b_y\bar{u}_y + b_z\bar{u}_z$ due vettori e si calcoli il prodotto scalare tra loro:



$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z) \cdot (b_x\bar{u}_x + b_y\bar{u}_y + b_z\bar{u}_z)$$
$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Il prodotto di due versori perpendicolari è 0. Il prodotto scalare tra due vettori può essere visto come il prodotto del primo per la componente del secondo proiettata sulla direzione del precedente

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\theta = (a\cos\theta)b$$

Prodotto vettoriale

Il **prodotto vettoriale** è un prodotto tra due vettori che restituisce un vettore perpendicolare a entrambi.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$$

Il vettore $\bar{c}$ può essere entrante ($\otimes$) o uscente ($\odot$) nel piano.

- Il modulo è $c = ab \sin\theta$
- Il prodotto vettoriale è anticommutativo: $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$
- $\bar{a} \times \bar{b} = 0 \begin{cases} a, b = 0 \\ \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi \end{cases}$
- $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ (proprietà distributiva)
- $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} \neq \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$, in generale

Siano $\bar{a} = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$ e $\bar{b} = b_x\bar{u}_x + b_y\bar{u}_y + b_z\bar{u}_z$ due vettori e si calcoli il prodotto vettoriale tra loro:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (\bar{a} = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z) \times (b_x\bar{u}_x + b_y\bar{u}_y + b_z\bar{u}_z) \\ &= a_xb_y\bar{u}_z + a_xb_z(-\bar{u}_y) + a_yb_x(-\bar{u}_z) + a_yb_z\bar{u}_x + a_zb_z\bar{u}_y + a_zb_y(-\bar{u}_x) \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{u}_x + (a_zb_x - a_xb_z)\bar{u}_y + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{u}_z = \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Derivata di un vettore e di un versore

Sia un vettore in funzione del tempo applicato in un certo punto; in un istante successivo il vettore sarà cambiato in modulo e direzione. La **derivata del vettore** rispetto al tempo è:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

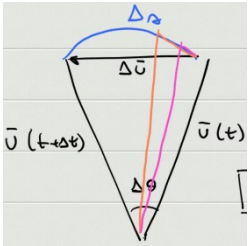
- La derivata di un vettore non è parallela al vettore.
- La derivata della somma di due vettori è: $\frac{d}{dt}(\bar{a} + \bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt}$
- La derivata del prodotto per una costante è: $\frac{d}{dt}(k\bar{v}) = k\frac{d\bar{v}}{dt}$
- La derivata del prodotto scalare-vettore è: $\frac{d}{dt}[f(t) \cdot \bar{v}(t)] = \frac{df}{dt}\bar{v}(t) + f(t)\frac{d\bar{v}}{dt}$
- La derivata del prodotto scalare è: $\frac{d}{dt}[\bar{a}(t) \cdot \bar{b}(t)] = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}$
- La derivata del prodotto vettoriale è: $\frac{d}{dt}[\bar{a}(t) \times \bar{b}(t)] = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}$
- Sia un vettore dipendente dal tempo espresso in funzione delle sue componenti del sistema di riferimento cartesiano ortogonale. La sua derivata è:

$$\bar{v}(t) = v_x(t)\bar{u}_x + v_y(t)\bar{u}_y + v_z(t)\bar{u}_z \Rightarrow \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\bar{u}_y + \frac{dv_z}{dt}\bar{u}_z$$

La **derivata di un versore** è un caso particolare perché il suo modulo non può cambiare.

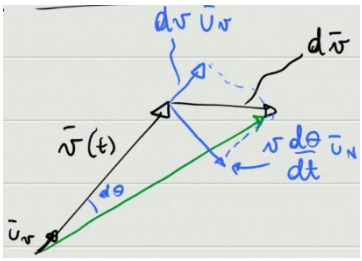
$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{u}(t + \Delta t) - \bar{u}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{u}}{\Delta t}$$

- Per $\Delta t \to 0, d\bar{u} \perp \bar{u}$.
- La variazione dell'angolo di circonferenza è $\Delta s = |\bar{u}|\Delta\theta$. Quando $\Delta t \to 0$, la corda si approssima sempre più all'arco.



$$\lim_{\Delta t \to 0}: \quad du = \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta\bar{u}| = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta s = ds = d\theta \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\bar{u}_N \quad (\bar{u}_N \perp \bar{u})$$

- La derivata di un vettore si può riscrivere:



$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_v + v\frac{d\bar{u}_v}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_v + v\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_N$$

che fornisce il significato intrinseco di derivata di un vettore, cioè una variazione sia in modulo che in direzione.
- Il modulo è dunque:

$$\left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$

  - Se $\frac{dv}{dt} = 0: v = cost. \Rightarrow \left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right| = v\frac{d\theta}{dt}$
  - Se $\frac{d\theta}{dt} = 0: v = cost. \Rightarrow \left|\frac{d\bar{v}}{dt}\right| = \frac{dv}{dt}$

Integrale di un vettore

Sia un vettore $\bar{a}(t) = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y + a_z\bar{u}_z$ definito in un intervallo temporale $[t_1, t_2]$.

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i \bar{a}(t_i)\Delta t_i \to \bar{A} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{a}(t)\,dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} a_x(t)\,dt\right)\bar{\mathrm{u}}_x + \left(\int_{t_1}^{t_2} a_y(t)\,dt\right)\bar{\mathrm{u}}_y + \left(\int_{t_1}^{t_2} a_z(t)\,dt\right)\bar{\mathrm{u}}_z$$
$$\Rightarrow A_x\bar{\mathrm{u}}_x + A_y\bar{\mathrm{u}}_y + A_z\bar{\mathrm{u}}_z$$

Si supponga di dividere una traiettoria nello spazio e di caratterizzarne la direzione tramite formalismo vettoriale: si suddivide la traiettoria in parti infinitesime, ciascuna delle quali tangente alla traiettoria stessa, tramite coordinata curvilinea s. Se questo oggetto è sottoposto a una grandezza fisica che dipende dalla posizione, essa dipenderà dalla coordinata curvilinea. La componente tange di un vettore è: $\bar{a}(s)\,d\bar{s} = a(s)ds\cos\theta = a_T(s)\,ds$. L'**integrale di linea** è così definito:

$$\int_A^B a_z(t)\,dt = \Gamma_{AB}$$

Se la traiettoria è una traiettoria chiusa, la **circuitazione** è definita:

$$\oint \bar{a}(s)\,d\bar{s} = \Gamma_C$$

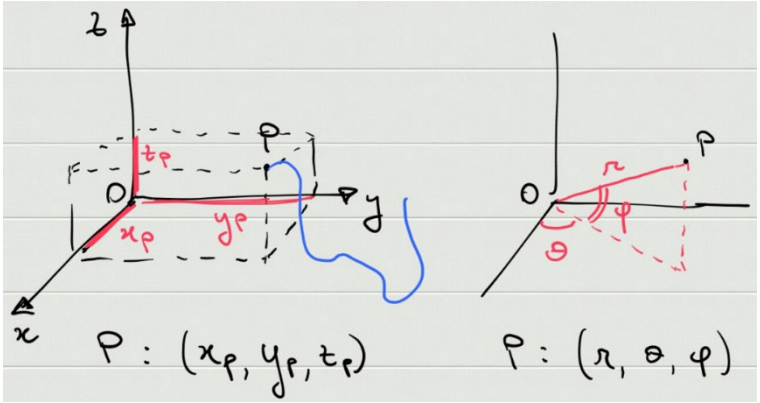
Cinematica del punto materiale

La **cinematica** è la branca della fisica che studia il moto dei corpi. Un esempio classico è l'esperimento di Galileo con una pallina che rotola lungo un piano inclinato: da questo esperimento, Galileo dedusse che la distanza percorsa dalla pallina è proporzionale al quadrato del tempo trascorso, cioè:

$$d \propto t^2$$

Si introduce il concetto di **punto materiale**, un oggetto ideale privo di dimensioni (adimensionale e infinitesimo). Un corpo può essere considerato un punto materiale quando le sue dimensioni sono così piccole da essere trascurabili rispetto all'ambiente in cui si muove.

Per descrivere il moto, è necessario definire un **sistema di riferimento**, cioè un sistema rispetto al quale si osservano e misurano i fenomeni fisici o gli oggetti in movimento. Un sistema di riferimento tridimensionale è composto da tre assi cartesiani, perpendicolari tra loro e con un'origine comune. In questo sistema, la posizione di un punto nello spazio è identificata da tre coordinate (x, y, z). Esiste anche il *sistema di riferimento polare*, in cui la posizione di un punto è descritta da coordinate polari (r, θ, φ). Se un corpo è in movimento, le sue coordinate cambiano nel tempo: quindi, la posizione del corpo sarà espressa da funzioni che dipendono dal tempo.



Un **diagramma orario** è un oggetto che permette di descrivere con continuità il moto di un punto: è un grafico della coordinata spaziale in funzione della coordinata temporale.

La velocità

Sia un diagramma spazio-tempo in cui è osservabile la traiettoria di un punto. Lo spostamento che viene compiuto ($\Delta x = x_2 - x_1$) può essere fatto in intervalli di tempi diversi. La **velocità media** descrive la rapidità con cui avviene uno spostamento e si definisce:

$$v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

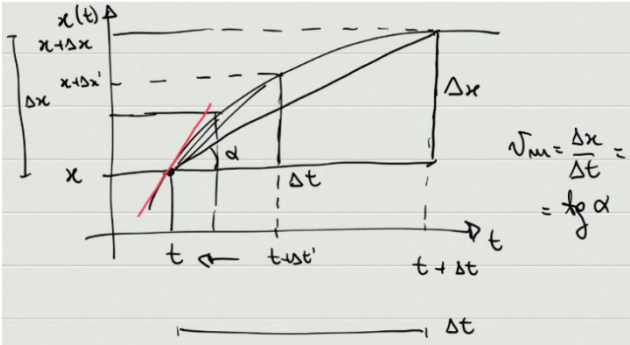
Nella definizione, in pratica, si fa il rapporto tra due cateti di un triangolo rettangolo e si calcola la tangente: questo è il significato geometrico della velocità media. Compiendo un passaggio al limite riducendo l'intervallo temporale, si calcola la **velocità istantanea** nell'istante t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

La velocità istantanea rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in un determinato istante.

- $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$: si viaggia nel verso concorde rispetto a quello concordato;
- $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} < 0$: si viaggia nel verso opposto rispetto a quello concordato.

NB: la quantità Δx rappresenta lo spostamento rispetto la posizione iniziale e non la distanza percorsa.



Moto rettilineo uniforme (MRU)

Usando la notazione di Leibnitz, $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$. A partire da questa relazione si può ottenere la coordinata spaziale:

$$dx = v(t)dt \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \rightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Conoscendo la legge oraria con cui varia la velocità nel tempo e la posizione iniziale, si può andare a sapere dove si trova un punto in un istante generico.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

- Muovendosi a velocità costante, si ottiene la legge del moto rettilineo uniforme ($v = cost.$):

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v(t - t_0)$$

- A velocità costante e tempo iniziale nullo: $x(t) = x_0 + vt$

NB: da un punto di vista matematico/geometrico si osservi che $v_m = \frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} = \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \langle v(t) \rangle$ è pari all'altezza media che determina l'area del rettangolo equivalente all'area sottesa alla curva (definizione di valor medio).

L'unità di misura della velocità è: $[v] = \frac{m}{s}$.

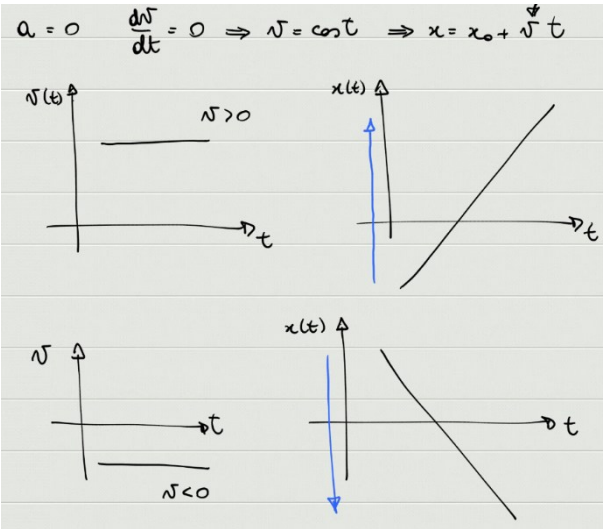
L'accelerazione

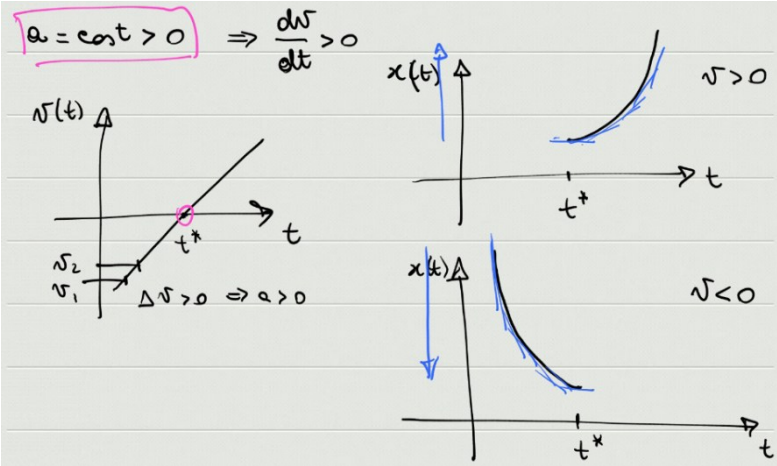
L'accelerazione misura quanto varia la velocità nel tempo. Analogamente a quanto visto prima, si definisce **accelerazione media** il rapporto:

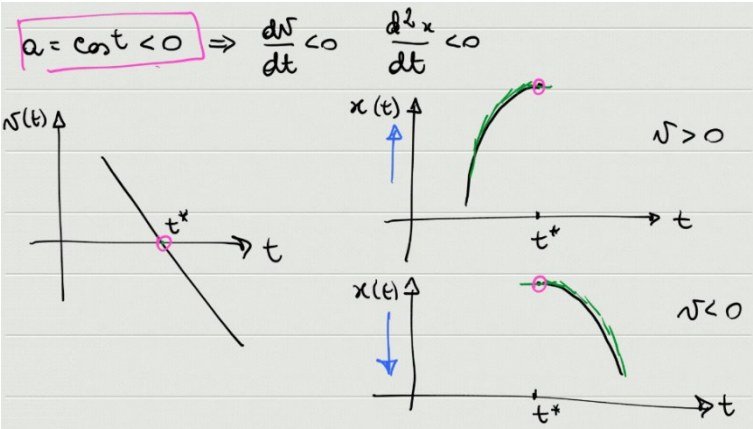
$$a_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Vale tutto ciò che è stato detto in precedenza. Si definisce **accelerazione istantanea** il rapporto:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t)$$







Se il corpo è fermo in un istante di tempo, non significa che la sua accelerazione è nulla.

Moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA)

Dalla scrittura differenziale è possibile determinare la legge con cui varia la velocità nel tempo.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Conoscendo la legge oraria con cui varia l'accelerazione nel tempo e la posizione iniziale, si può andare a sapere come si muove un punto in un istante generico.

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Muovendosi con accelerazione costante, si ottiene la legge del moto rettilineo uniformemente accelerato($a = cost.$):

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = v_0 + a(t - t_0)$$

Per conoscere la posizione, si sfrutta la relazione tra velocità e coordinata spaziale.

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{v(t)\,dt} = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right] dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0(t)\,dt + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

$$= x_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} a(t)\,dt\,dt$$

Se $a = cost$, $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$.

Con accelerazione costante e tempo iniziale nullo: $v(t) = v_0 + at$ e $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

L'unità di misura dell'accelerazione è: $[a] = \frac{m}{s^2}$.

<u>Dominio dello spazio.</u> Quando si esprimono velocità e accelerazione nel dominio dello spazio, esse devono essere viste come funzioni composte $v[x(t)], a[x(t)]$. Ricordando che $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx}$, si può concludere che:

$$\mathrm{a(x)} = \frac{dv(x)}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v(x)} v\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_{v_0}^{v(x)} = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2(x) - v_0^2)$$

$$= \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \Rightarrow v^2(x) = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)dx$$

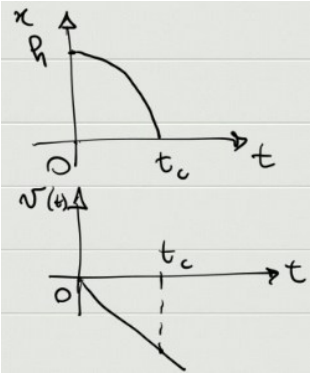
Nel MRUA: $v^2(x) = v_0^2 + 2a(x - x_0)$.

Moto verticale

Tutti i corpi sono soggetti all'accelerazione di gravità $\left(g = 9{,}81\frac{m}{s^2}\right)$. Si parlerà di $a = -g = -9{,}81\frac{m}{s^2}$ e la legge oraria sarà:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 - gt \\ x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2(x) = v_0^2 - 2g(x - x_0) \end{cases}$$

Nel moto in caduta libera, $x_0 = h > 0$ e $v_0 = 0$. La legge oraria risulta essere:



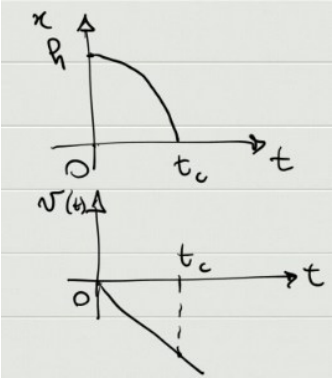
$$\begin{cases} v(t) = -gt \\ x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2(x) = -2g(x - h) \end{cases}$$

È possibile calcolare il *tempo di caduta* di un oggetto:

$$t_c = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}} \Rightarrow se\ (x = 0), t_c = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$$

La *velocità di caduta* è: $v_c = v(t_c) = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$.

Imprimendo una velocità iniziale a un corpo in caduta, $x_0 = h > 0$ e $v_0 = -v_1 < 0$. La legge oraria risulta essere:

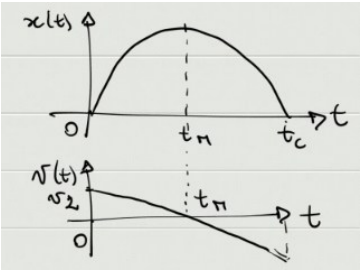


$$\begin{cases} v(t) = -v_1 - gt \\ x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2(x) = v_1^2 - 2g(x - h) \end{cases}$$

Il tempo di caduta è: $t_c = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2g(x-h)}}{g} \Rightarrow se\ (x = 0), t_c = \frac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - 2g(x)}}{g}$.

La velocità di caduta è: $v_c = v(t_c) = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$.

Lanciando un corpo verso l'altro, $x_0 = 0$ e $v_0 = v_2 > 0$. La legge oraria risulta essere:



$$\begin{cases} v(t) = v_2 - gt \\ x(t) = v_2 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ v^2(x) = v_2^2 - 2g(x) \end{cases}$$

L'istante in cui si raggiunge la massima altezza è $t_M = \frac{v_2}{g}$, mentre l'istante di caduta è $t_c = 2t_M = \frac{2v_2}{g}$.

La velocità di caduta è: $v_c = v(2t_M) = -v_2$.

Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Il moto rettilineo **smorzato esponenzialmente** è un moto vario in cui l'accelerazione non è costante. In particolare:

$$a = -kv, \quad k > 0$$

dove $[k] = \left[\frac{a}{v}\right] = s^{-1}$.

Si tratta di un moto che è sempre rallentato o *smorzato*: un tipico moto smorzato è il movimento all'interno di un fluido, come nel caso di un ciclista che si muove nell'aria. Per ricavare le formule del moto, bisogna ricorrere agli integrali trovati in precedenza.

Ricordando che $a = \frac{dv}{dt} = -kv$:

$$\frac{dv}{v} = -kdt \Rightarrow \int_{v_o}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -k \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow ln\, v(t) - ln\, v_0 = -k(t - t_0) \Rightarrow \frac{v(t)}{v_0} = e^{-k(t-t_0)}$$

$$v(t) = v_0 e^{-k(t-t_0)}$$

Sostituendo nella formula del moto:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-k(t-t_0)}\, dt = x_0 + v_0 \left(-\frac{1}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}\Big|_{t_0}^{t} = x_0 - \frac{v_0}{k}\left[e^{-k(t-t_0)} - 1\right]$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left[1 - e^{-k(t-t_0)}\right]$$

Velocità e accelerazione sono collegate da:

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \\ a = -kv \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \Rightarrow \int_{v_o}^{v(x)} dv = -k \int_{x_0}^{x} dx$$

$$v(x) = v_0 - k(x - x_0)$$

All'interno di questo tipo di equazioni del moto, k assume un significato particolare per la velocità di smorzamento del corpo. Si introduce ora la *costante di tempo* $\tau = \frac{1}{k}$ ($[\tau] = s$): il parametro dice in quanto un fenomeno fisico si smorza di 2,72 volte. Dopo un periodo di tempo pari a 5τ il fenomeno è ridotto di 150 volte e si definisce *fenomeno estinto*.

Moto armonico semplice

Il moto **armonico semplice** è un tipico esempio di moto periodico. Si definisce **moto periodico** un moto in cui un corpo passa nella stessa posizione a intervalli di tempo uguali e alla stessa velocità.

$$x(t) = x(t + T)$$

$$v(t) = v(t + T)$$

Nel caso del moto armonico semplice, l'equazione è:

$$x(t) = A\, sin(\omega t + \varphi)$$

Dove:

- A è l'ampiezza $[m]$;
- φ è la fase iniziale $[rad]$;
- $\omega t + \varphi$ è la fase $[rad]$;
- ω è la pulsazione $\left[\frac{rad}{s}\right]$.

Parentesi, definizione di radiante: costruendo un arco di cerchio, il radiante è definito dal rapporto tra arco e raggio*:* $\alpha[rad] = \frac{s}{R}$.

Si immagini un punto che si muove con velocità costante attorno a una circonferenza, l'angolo formato a $t_0 = 0$ rappresenta la fase iniziale. Quello che rappresenta l'equazione del moto è la proiezione del moto sull'asse x nell'ipotesi che il raggio valga A. Velocità e accelerazione sono pari a:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\, cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\, sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

NB: l'accelerazione non è costante e quindi non valgono le leggi del MRUA.

Data l'equazione del moto, per determinare ampiezza e fase iniziale si usano la coordinata iniziale x_0 e la velocità iniziale v_0.

$$\begin{cases} x_0 = x(t=0) = A\, sin\, \varphi \\ v_0 = v(t=0) = A\omega \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right)$$

$$\begin{cases} x_0^2 = A^2\, sin^2\, \varphi \\ v_0^2 = A^2\omega^2 \cos^2\varphi \end{cases} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Dalla relazione che lega accelerazione e velocità si ricava:

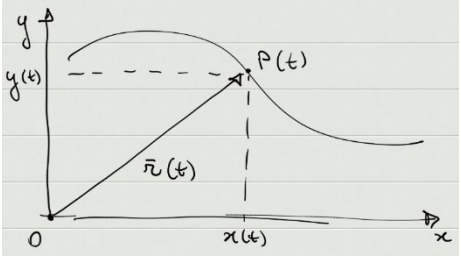
$$v^2(x) = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\, dx = v_0^2 - 2\omega^2 \int_{x_0}^{x} x\, dx \Rightarrow v^2(x) = v_0^2 + \omega^2(x_0^2 - x^2)$$

Un'altra equazione fondamentale è l'*equazione differenziale del moto armonico*:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ a &= \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

Moto nel piano

Si ipotizzi di avere un sistema di riferimento in cui è presente un corpo che si muove lungo il piano. Senza utilizzare i vettori, si può analizzare il moto di un punto tramite una coppia di funzioni che rappresentano le coordinate del punto al variare del tempo.



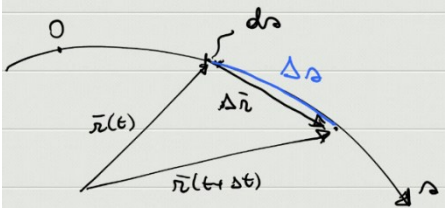
Se non è presente un sistema di riferimento, è possibile individuare la posizione di un punto P tramite un raggio vettore $\bar{r}$ la cui punta si sposta. In questo caso le coordinate del raggio vettore saranno:

$$\bar{r}(t) = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y$$

Si prenda ora un punto che si sposta in un intervallo Δt e se ne disegnino i rispettivi raggi vettori e si tracci poi il vettore differenza $\Delta\bar{r}$. Il vettore velocità media è dato da $\bar{v}_m = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$. La velocità istantanea è definita come:

$$\bar{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}(t+\Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Si tenga a mente che traiettoria percorsa e posizione del punto definita dal raggio vettore sono differenti. Prendendo una traiettoria curvilinea e dividendola in infinitesimi di traiettoria ds, è possibile dire che il modulo (si sa come avviene il moto, non serve ragionare coi vettori) della velocità è $v = \frac{ds}{dt}$. È sbagliato dire che $|\Delta\bar{r}| = \Delta s$; invece al limite:

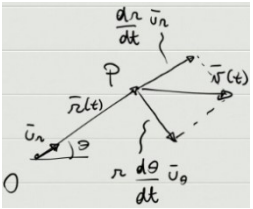


$$dr = \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta\bar{r}| = \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta s| = ds$$

Ecco che $d\bar{r} = ds \cdot \bar{u}_T$, dove $\bar{u}_T$ è il versore tangente alla traiettoria; ciò permette di riscrivere la velocità come $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\bar{u}_T = v \cdot \bar{u}_T$.

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{v}(t)dt \Rightarrow \int_{\bar{r}(t_0)}^{\bar{r}(t)} d\bar{r} = \int_{t_0}^{t} \bar{v}(t) \Rightarrow \bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(t)\, dt$$

La velocità può essere scritta anche come:



$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r(t) \cdot \bar{u}_r) = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

Dove $\bar{u}_\theta \perp \bar{u}_r$ e $\bar{v}_r$ è detta **velocità radiale**, mentre $\bar{v}_\theta$ è detta **velocità trasversa**.

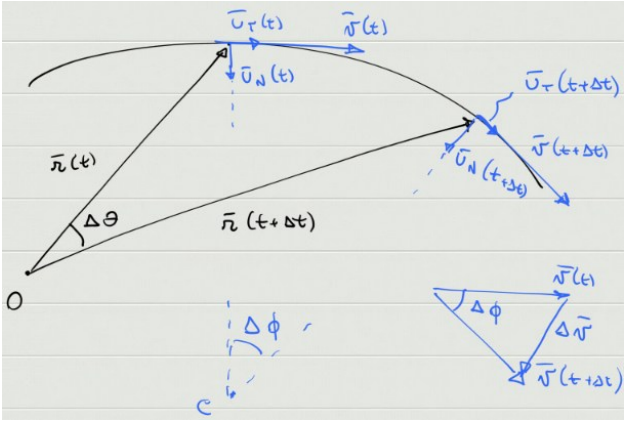
Analogamente a quanto fatto in precedenza, è possibile descrivere un'accelerazione media $\bar{a}_m = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ e una istantanea $\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$.

$$d\bar{v} = \bar{a}(t)dt \Rightarrow \int_{\bar{v}(t_0)}^{\bar{v}(t)} d\bar{v} = \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t)\, dt \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t)\, dt$$

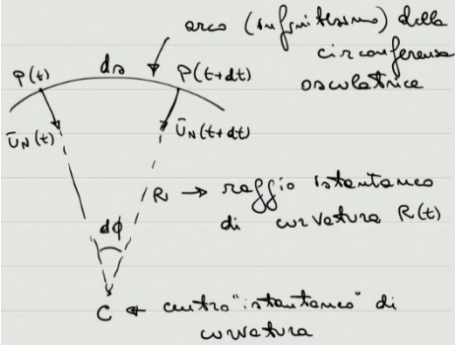
Inoltre, l'accelerazione può essere riscritta come:

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \bar{u}_T) = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\bar{u}_N = \bar{a}_T + \bar{a}_N$$

Dove $\bar{u}_N \perp \bar{u}_T$ e $\bar{a}_N$ è detta **accelerazione normale** o **centripeta**, mentre $\bar{a}_T$ è detta **accelerazione tangenziale**.



In una generica traiettoria, quando si fa il passaggio al limite tra due posizioni, l'arco di traiettoria che viene definito dai due istanti diventa via via più prossimo ad un arco di circonferenza. Istante per istante, si può definire la traiettoria tramite archi infinitesimi della *circonferenza oscuratrice*, di *centro istantaneo di curvatura* C e *raggio istantaneo di curvatura* R.



$$ds = R\,d\phi \Rightarrow \frac{ds}{dt} = R\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{R}$$

Tale relazione è importante perché, riprendendo la scrittura dell'accelerazione normale,

$$\bar{a}_N = v\frac{d\phi}{dt}\bar{u}_N = \frac{v^2}{R}\bar{u}_N$$

$$\Rightarrow \bar{a}(t) = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + \frac{v^2}{R}\bar{u}_N = \bar{a}_T + \bar{a}_N$$

Il modulo del vettore accelerazione si calcola a partire dalla componente tangenziale e centripeta:

$$a = |\bar{a}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$$

NB: L'accelerazione non è solo, come si è abituati intuitivamente a pensare, variazione del modulo della velocità, ma contiene anche la componente responsabile della variazione della direzione della velocità.

Moto parabolico

Il **moto parabolico** avviene in un piano e si verifica quando un corpo viene lanciato con una velocità $\bar{v}_0$ formando un angolo $\theta_0$con l'asse orizzontale. Questo oggetto è soggetto all'accelerazione di gravità.

L'equazione che descrive la velocità vettoriale è:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \Rightarrow \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}(t)} d\bar{v} = \int_{t_0}^{t} \bar{g}(t)\, dt \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \bar{g} \cdot t$$

Scomponendo in vettori:

$$\begin{cases} x: v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \quad (cost.) \\ y: v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt \end{cases} \Rightarrow \bar{v}(t) = v_x \bar{u}_x + v_y \bar{u}_y = (v_0 \cos\theta_0)\bar{u}_x + (v_0 \sin\theta_0 - gt)\bar{u}_y$$

Per trovare la legge del moto, si integra la velocità:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \int_0^t \bar{v}(t)\, dt = \bar{r}_0 + \int_0^t (\bar{v}_0 + \bar{g} \cdot t)\, dt = \bar{r}_0 + \bar{r}_0 t + \frac{1}{2}\bar{g} \cdot t^2$$

Scomponendo in vettori ($\bar{r}_0 = 0$):

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta_0 \cdot t \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \bar{r}(t) = (v_0 \cos\theta_0 \cdot t)\bar{u}_x + \left(v_0 \sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2\right)\bar{u}_y$$

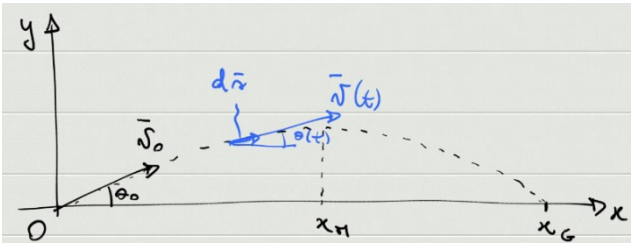
Esplicitando il tempo dalla componente x: $t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$.

Sostituendo poi nella componente y, si ottiene l'equazione di *una parabola*:

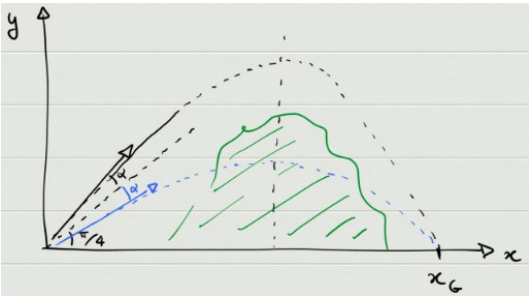
$$y[x(t)] = y(x) = v_0 \sin\theta_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0} \Rightarrow y = \tan\theta_0 \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0} \cdot x^2$$

<u>Proprietà:</u>

- trovare l'inclinazione istante per istante della velocità: $\tan(\theta) = \frac{dy}{dx} = \tan\theta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0} \cdot x$;
- trovare il punto di massima altezza $\boldsymbol{x_M}$: $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x_M = \tan\theta_0 \frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0$;



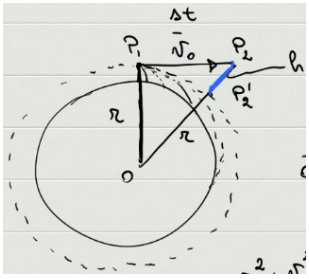
- trovare la **gittata**: $x_G = 2x_M = \frac{2v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin\theta_0$
  - l'angolo $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} \pm 2\alpha \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4} \pm \alpha$
    questo dice che, lanciando il corpo con un'inclinazione $\pm\alpha$ rispetto a $\frac{\pi}{4}$, atterra nello stesso punto di gittata.



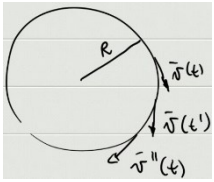
- trovare il tempo per raggiungere la massima altezza $\boldsymbol{t_M}$: $x_M = x(t_M) \Rightarrow v_0 \cos\theta_0 \cdot t_M = \frac{v_0^2}{g}\sin\theta_0 \cos\theta_0 \Rightarrow t_M = \frac{v_0}{g}\sin\theta_0$;
- trovare l'altezza massima $\boldsymbol{y_M}$: $y_M = y(t_M) = v_0 \sin\theta_0 \cdot \frac{v_0}{g}\sin\theta_0 - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2}\sin^2\theta_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\theta_0$;
- la velocità nel punto di contatto col suolo è in modulo uguale alla velocità iniziale, mentre l'angolo è opposto per la simmetria del sistema.

L'angolo che dà la massima gittata nel moto parabolico è $\frac{\pi}{4}$, perché $\frac{dx_G}{d\theta_0} = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{4}$.

Moto circolare



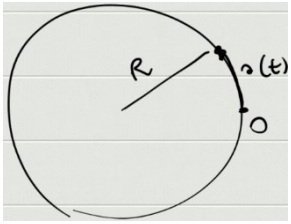
Si supponga di avere un satellite che ruota attorno alla Terra, perché esso non cade ma gira intorno? Per analogia si immagini di lanciare il satellite come un sasso con moto parabolico: più è maggiore la velocità iniziale, più lontano il corpo cadrà fino a quando non cadrà continuamente attorno alla Terra, senza mai colpirla. Se si ipotizza che non ci sia accelerazione, il corpo raggiungerebbe una posizione P_2; tuttavia raggiunge la posizione P_2' distante h da P_2. Per il teorema di Pitagora $\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2 = \overline{OP}^2 \Rightarrow r^2 + v_0^2\Delta t^2 = (r+h)^2 \Rightarrow h(h+2r) = v_0^2\Delta t^2$. Se $h \ll r$, $h + 2r \approx 2r \Rightarrow h = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0^2}{r}\right)\Delta t^2$ e $\frac{v_0^2}{r}$ corrisponde all'accelerazione a cui a è sottoposto il corpo e, sulla base di quanto descritto circa il moto in due dimensioni, $\frac{v_0^2}{r}$ rappresenta l'accelerazione centripeta.



Il **moto circolare** è un moto la cui traiettoria è un cerchio, il raggio di curvatura rimane costante e la velocità cambia continuamente perché cambia in orientazione; di conseguenza la derivata non è nulla ed esiste sempre un'accelerazione: un moto circolare è sempre *un moto accelerato.*

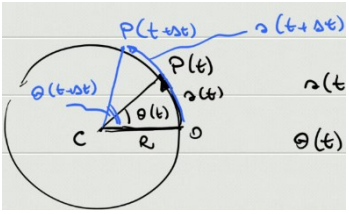
<u>Moto circolare uniforme.</u> Qualora il modulo della velocità rimanga costante, si parla di **moto circolare uniforme**.

$$v = |\bar{v}| = cost. \Rightarrow \bar{a}_T = 0 \Rightarrow \bar{a} = \bar{a}_N = \bar{a}_N(t)$$



Utilizzando una coordinata curvilinea, si definisce la posizione di un punto materiale che si sta muovendo. Le relazioni del moto sono:

$$\begin{cases} v = \dfrac{ds}{dt} = cost. \\ \displaystyle\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_0^t v\,dt \Rightarrow s(t) = s_0 + vt \end{cases}$$



Un secondo modo per descrivere il moto circolare uniforme consiste nella caratterizzazione della porzione di un punto tramite l'angolo. Si ricordi che $s(t) = R\theta(t)$ e $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$. Studiando il limite della variazione dell'angolo nel tempo si ricava la **velocità angolare $\boldsymbol{\omega(t)}$**:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{s(\theta)}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$

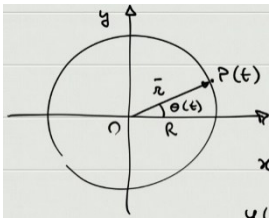
L'unità di misura della velocità angolare è: $[\omega] = rad/s$.

Nella descrizione del moto circolare tramite coordinate angolari:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \omega\, dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

e l'accelerazione centripeta è: $a_N = |\bar{a}_N| = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = cost.$

Un terzo modo di descrivere il moto del punto materiale consiste nell'utilizzo di vettori. Sia un raggio vettore $\bar{r}$ descritto dalle sue componenti $\left(\bar{r}(t) = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y\right)$. Le componenti dello spostamento sono:



$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) = R\cos[\theta_0 + \omega t] \\ y(t) = R\sin\theta(t) = R\sin[\theta_0 + \omega t] \end{cases}$$

Le componenti della velocità sono:

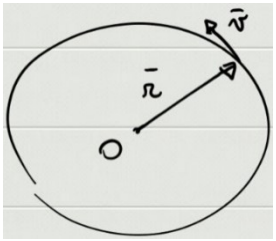
$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = -R\omega\sin\theta(\theta_0 + \omega t) \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = R\omega\cos\theta(t) \end{cases}$$

Si noti come questo moto sia descritto nelle sue componenti x e y come un moto armonico. Il periodo e il modulo della velocità sono rispettivamente:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R$$

$$T = \frac{2\pi}{R} = \frac{2\pi R}{v}$$

Un quarto modo di descrivere il moto circolare, sempre in termini vettoriali, utilizza la definizione di velocità radiale e trasversa:



$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\bar{u}_r) = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

Essendo che il raggio è costante, non c'è velocità radiale.

$$\begin{cases} \bar{r} = R\bar{u}_r \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{v}_r = 0 \\ v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt} = R\omega = \dfrac{d}{dt}(R\theta) = \dfrac{ds}{dt} \end{cases}$$

Moto circolare non uniforme.

Qualora il modulo della velocità non rimanga costante, si parla di **moto circolare non uniforme**.

$$v = |\bar{v}| \neq cost. \Rightarrow \bar{a}_T \neq 0 \Rightarrow a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Nel caso di *moto circolare uniformemente accelerato*, $a_T = cost.$, utilizzando una coordinata curvilinea:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t a_T\, dt \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a_T\, dt = v_0 + a_T t$$

Integrando ulteriormente per trovare la coordinata curvilinea:

$$\int_{s_0}^{s(t)} ds = \int_0^t v\, dt \Rightarrow s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2$$

In coordinate angolari è bene definire il concetto di **accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha(t)}$** come:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

L'unità di misura dell'accelerazione angolare è: $[\alpha] = \frac{rad}{s^2}$.

Integrando per trovare la velocità angolare:

$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t \alpha(t)\, dt \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha(t)\, dt = \omega_0 + \alpha t$$

Integrando ulteriormente per trovare l'angolo:

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_0^t \omega(t)\, dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Accelerazione angolare e accelerazione tangenziale sono collegate tra loro dalla seguente relazione:

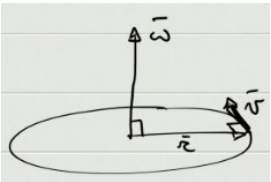
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

Dalla definizione di accelerazione angolare si può verificare la corrispondenza tra la descrizione del moto in coordinate spaziali e angolari:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega(\theta)} \omega\, d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha\, d\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\omega^2(\theta) - \frac{1}{2}\omega_0^2 = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha\, d\theta$$

$$\Rightarrow \omega^2(\theta) = \omega_0^2 + 2\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha\, d\theta \xRightarrow{\alpha = cost} \omega^2(\theta) = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

<u>Descrizione vettoriale del moto circolare.</u> Finora le quantità angolari sono state definite solamente tramite i moduli; le grandezze angolari si possono descrivere anche tramite i vettori. In termini vettoriali ω corrisponde a un vettore perpendicolare al piano del moto circolare e la cui orientazione è definita usando la regola della mano destra (il pollice dà l'orientazione della velocità angolare).



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

L'accelerazione α è un vettore che descrive la variazione della velocità angolare sia in modulo, che in direzione e verso. Il vettore velocità angolare, essendo che $\bar{\omega}$ è un vettore perpendicolare al piano, non può variare in direzione perché, se la cambiasse, vorrebbe dire che il piano dove avviene il moto sta modificandosi.

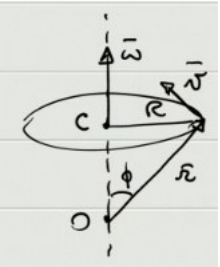
$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \quad \bar{\alpha} \parallel \bar{\omega}$$

Se $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, allora:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{a}_T + \bar{a}_N$$

$$\bar{a}_T = \bar{\alpha} \times \bar{r} \qquad\qquad \bar{a}_N = \bar{\omega} \times \bar{v}$$

NB: Se nel disegno della velocità angolare come vettore si disegna l'asse e si individua la posizione di ogni punto tramite raggio vettore $\bar{r}$, è possibile descrivere il moto circolare utilizzando un qualunque punto che giace sull'asse e la notazione vettoriale.



$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \Rightarrow v = \omega r \cdot \sin\phi = \omega R$$

Dinamica del punto materiale

La **dinamica** è la branca della fisica che studia le **cause del moto** dei corpi. Queste cause sono descritte dalle **tre leggi di Newton**, che spiegano come le forze influenzino il movimento degli oggetti. Le leggi della dinamica permettono di comprendere anche le interazioni a distanza, cioè quelle forze che agiscono tra i corpi senza la necessità di un contatto fisico diretto.

Il primo a formulare principi fondamentali sulla dinamica fu Galileo Galilei, il cui principio di inerzia anticipò e corrisponde alla prima legge di Newton.

Prima legge di Newton (o principio di inerzia)

"Ogni corpo, in assenza di interazioni, mantiene il suo stato di quiete o di moto uniforme".

$$\bar{v} = cost.$$

Dal punto di vista sperimentale, è estremamente difficile realizzare una condizione in cui non ci sono interazioni con l'ambiente.

La forza e la massa.

La prima legge di Newton presuppone implicitamente l'esistenza di interazioni tra i corpi. Il vero contributo di Newton, però, consiste nell'aver definito e descritto queste interazioni attraverso il concetto di **forza**. Per comprendere appieno il concetto di forza, è necessario introdurre quello di **massa**. La massa è una proprietà **intrinseca** di un corpo, che rimane costante indipendentemente dal luogo in cui viene misurata. Essa si manifesta quando due oggetti dotati di massa interagiscono tra loro.

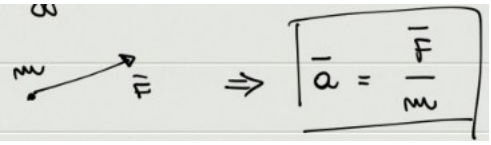
La massa rappresenta anche l'**inerzia** di un corpo, cioè la sua resistenza a variare il proprio stato di moto. Ad esempio, se si applica la stessa forza a due corpi di massa diversa, quello con minore inerzia (e quindi minore massa) acquisterà una velocità maggiore rispetto a quello con inerzia più elevata.

Infine, la **quantità di moto** (in inglese, *momentum*) è una grandezza fisica che combina l'inerzia di un corpo con la sua velocità. Essa è definita come il prodotto tra la massa (inerzia) e la velocità del corpo stesso.

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

Seconda legge di Newton

La forza è definita come variazione istantanea della quantità di moto nel tempo.



$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) \xRightarrow{m=cost.} m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}$$

"Applicando una forza a un corpo di massa m, esso risentirà di un'accelerazione pari a $\bar{a}$". Questa legge intrinsecamente contiene la prima, infatti:

$$\bar{F} = 0 \xRightarrow{m=cost.} \bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{v} = cost.$$

Esprimendo la legge come derivata seconda della coordinata spaziale, si è in grado di determinare la legge oraria di un corpo conscendo le forze che agiscono su di esso:

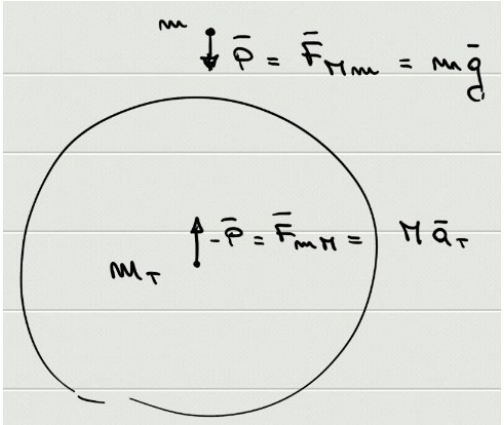
$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

L'unità di misura di una forza è il Newton $[F] = [ma] = \frac{kg \cdot m}{s^2} = N$.

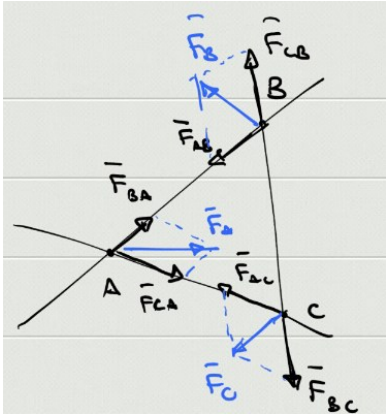
Terza legge di Newton (o principio di azione e reazione)

Quando due corpi, A e B, interagiscono tra loro, A esercita una forza su B e, allo stesso tempo, B esercita una forza su A. Queste forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo (intensità), versi opposti. Questo principio è noto come terza legge di Newton o *principio di azione e reazione*. Le forze possono essere di tipo **attrattivo** (come la gravità) o **repulsivo** (come la forza elettrostatica tra cariche dello stesso segno).

In alcune situazioni, una delle due forze può risultare più evidente dell'altra. Ad esempio, quando una mela cade verso la Terra, la forza peso che agisce sulla mela è chiaramente percepibile. Tuttavia, anche la mela esercita una forza sulla Terra, attratta verso di essa. Se consideriamo solo l'interazione tra la mela e la Terra, il moto della Terra risulta trascurabile perché, a causa della sua massa enormemente maggiore, subisce un'accelerazione estremamente piccola.



Forze di questo tipo esistono anche in sistemi di n corpi; si supponga di avere tre corpi che interagiscono tra di loro come in figura. In ogni punto, complessivamente viene applicata la somma delle varie forze, perché su ogni corpo agisce una forza risultante data da:



$$\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = m\bar{a}$$

Si noti come l'accelerazione complessiva è pari alla singola accelerazione dovuta ad ogni forza i-esima che agisce sul corpo; per cui, conoscendo le singole forze, è possibile determinare la risultante. Non è però possibile determinare il singolo contributo di ogni forza conoscendo la forza complessiva.

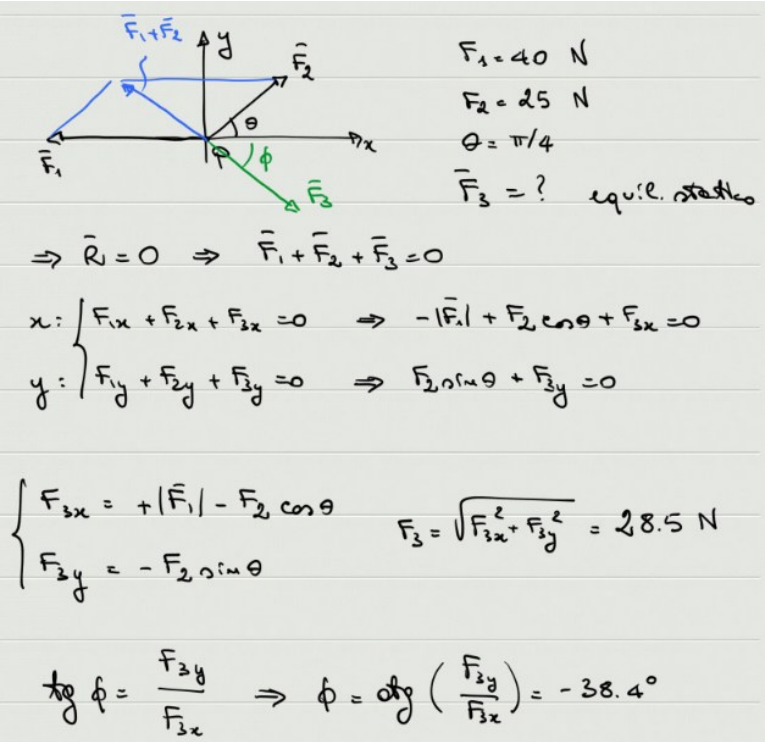
$$\bar{a} = \frac{\bar{R}}{m} = \frac{1}{m}\sum_i \bar{F}_i = \sum_i \frac{\bar{F}_i}{m} = \sum_i \bar{a}_i$$

Un caso particolare si verifica quando la risultante è nulla e quindi la velocità rimane costante. A seconda del valore, si distinguono:

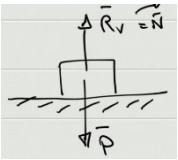
- *equilibrio statico*: $\bar{v} = 0$;
- *equilibrio dinamico*: $\bar{v} \neq 0$.

<u>Equilibrio statico.</u> Dire che la risultante è nulla, equivale a dire che ogni componente della risultante è nulla e ciò implica che è nulla la somma di tutte le componenti delle forze lungo gli assi.

Esempio:



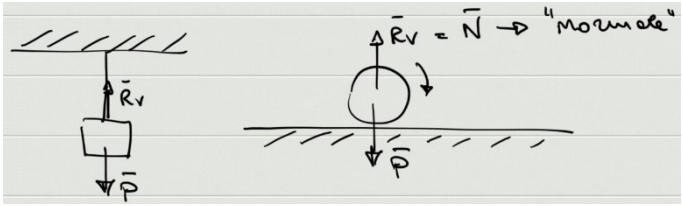
Reazione vincolare.



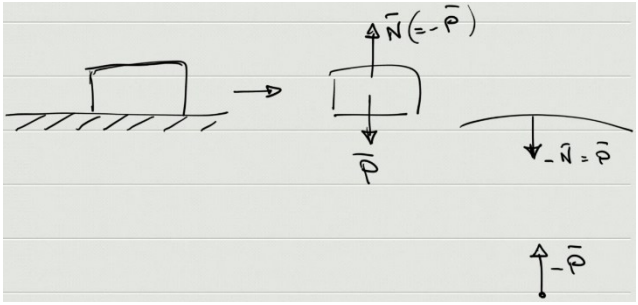
Ogni corpo è soggetto all'accelerazione di gravità. Per la seconda legge di Newton, un grave appoggiato su un piano orizzontale dovrebbe iniziare a scendere; per la terza legge di Newton sul corpo agisce una forza che bilancia la forza perso: la **razione vincolare**, forza che agisce ogni qual volta che è presente un vincolo. La reazione vincolare esiste anche nei corpi appesi e nei corpi in movimento. Spesso queste forze non sono esplicitate, ma sono facilmente deducibili dal contesto del problema.

Le reazioni vincolari si suddividono in:

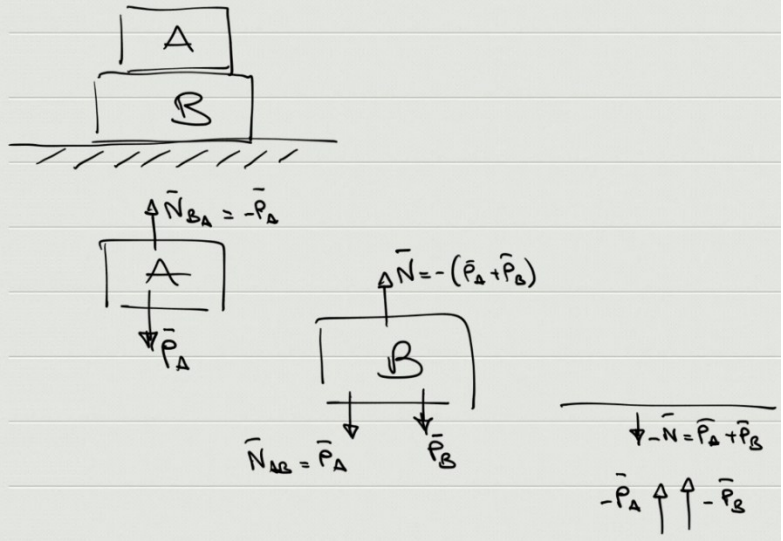
- *normale* al piano $(\bar{N})$
- *tangente* al piano



NB: le forze disegnate non sono quelle associate all'azione e reazione. Nel caso di un corpo appoggiato a un pavimento, la normale non è l'azione del corpo applicata alla Terra, bensì è l'azione che la superficie del pianeta esercita sul corpo: questo significa che sia la Terra che il corpo rimangono fermi.



Nel caso di due o più corpi appoggiati uno sopra l'altro, la scomposizione da fare è come nella seguente figura.

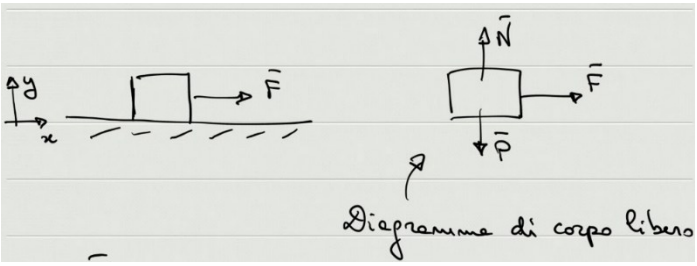


Per studiare il moto dei corpi, invece, bisogna isolare l'oggetto e valutare le forze che agiscono su di esso andando a rappresentare il **diagramma di corpo libero**. La seconda legge di Newton viene applicata andando a scrivere l'equazione per ogni asse:

$$\sum_i \bar{F}_i = \bar{F} + \bar{P} + \bar{N} = m\bar{a} \Rightarrow \begin{cases} x: F = ma_x \Rightarrow a_x = F_m \\ y: N - P = ma_y = 0 \Rightarrow N = P \end{cases}$$

Ogni qual volta bisogna studiare i problemi di dinamica, il procedimento è il seguente:

1. Si isola il corpo, se ne costruisce il diagramma di corpo libero e si guarda quali forze agiscono sul corpo.
2. Si scrive la seconda legge di Newton in forma vettoriale. Dato un sistema di riferimento, si scompone la seconda legge lungo gli assi.
3. Si risolvono le equazioni e si ricavano le incognite da trovare.



Teorema dell'impulso.

Nella concezione moderna di forza istantanea (cioè in un preciso istante di tempo), essa è definita come variazione della quantità di moto nel tempo, dove la quantità di moto è pari a $\bar{p} = m\bar{v}$. Riordinando i differenziali si ottiene:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \rightarrow \int_{\bar{p}_0}^{\bar{p}(t)} d\bar{p} = \int_0^t \bar{F}(t)\, dt$$

Questi termini possono essere esplicitati come segue:

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}(t) - \bar{p}_0 = \int_0^t \bar{F}(t)\, dt = \bar{J}$$

con $\bar{J}$ l'*impulso della forza*. Il teorema dell'impulso esprime la variazione della quantità di moto come l'impulso fornito dalla forza nell'intervallo di tempo. Nel caso di forza costante, la variazione di velocità viene calcolata come:

$$\Delta\bar{p} = \bar{F}\Delta t \Rightarrow m\Delta\bar{v} = \bar{F}\Delta t \Rightarrow \Delta\bar{v} = \frac{\bar{F}\Delta t}{m}$$

Nel caso di forza dipendente dal tempo, la variazione della velocità vale come:

$$\Delta\bar{v} = \frac{1}{m}\int_0^t \bar{F}(t)\, dt$$

In analogia con il valore medio visto precedentemente, il valore medio di una forza vale:

$$\langle\bar{F}(t)\rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \bar{F}(t)\, dt = \frac{\bar{J}}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = \frac{m\Delta\bar{v}}{\Delta t}$$

L'impulso e la quantità di moto hanno come unità di misura: $[J] = [p] = Ns = Kg\, ms^{-2} \cdot s = Kg\, ms^{-1}$.

Le forze

Le forze fondamentali utilizzate nella fisica classica sono:

1. Forza gravitazionale
2. Forza elettromagnetica

Entrambe queste forze sono associate a delle proprietà particolari, la prima al concetto di *massa* e la seconda al concetto di *carica*. Per descrivere il mondo del quotidiano, nella meccanica ci sono molte altre forze in gioco che non sono riconducibili in maniera macroscopica alle forze appena elencate. Queste forze verranno descritte da una serie di parametri.

$$\bar{F}(parametri) = m\bar{a}$$

Nel caso di accelerazione variabile, una forza risulta definita da due componenti, *forza tangenziale* (o *centrifuga*) e *forza normale* (o *centripeta)*.

$$\bar{F}(t) = m\bar{a}_T + m\bar{a}_N = m\frac{dv}{dt}\bar{u}_T + m\frac{v^2}{R}\bar{u}_N = \bar{F}_T + \bar{F}_N$$

La componente tangenziale fa variare il modulo della quantità di moto, mentre la componente normale è responsabile della variazione della quantità di moto nella direzione perpendicolare alla traiettoria del corpo.

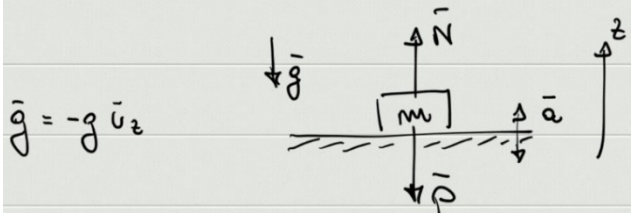
Forza peso

Applicando la forza sulla superfice della Terra, si trova che il corpo reagisce con un'accelerazione pari a all'accelerazione di gravità $\bar{g}$; si tratta di un vettore che punta sempre verso il basso e che ha come modulo sulla superficie terrestre, un valore di $|\bar{g}| = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$. Quindi, applicando la forza peso alle legge di Newton:

$$\bar{P} = m\bar{g}$$

Da questa scrittura si vede il perché della confusione tra peso e massa: il peso è una forza, mentre la massa una proprietà dei corpi ed è uno scalare. Nel sistema internazionale, in passato, è stato introdotto il *chilogrammo forza*: $1\ kgf = 1\ kgp = 9{,}8\ N$; ecco che un corpo di massa $1\ kg$ ha un peso di $1\ kgf/1\ kgN$.

Un corpo appoggiato su una piattaforma mobile presenta un peso che non varia, quello che cambia è la reazione normale della piattaforma; per esplicitare ciò, si scrive la seconda legge di Newton applicata a questo corpo:



$$\bar{P} + \bar{N} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{N} = m\bar{a} - \bar{P} = m(\bar{a} - \bar{g})$$

Consideriamo i seguenti casi:

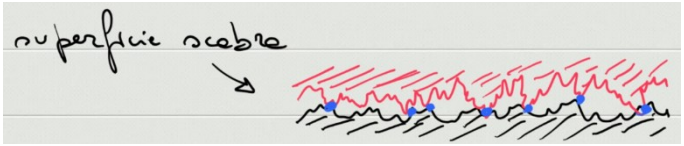
- La piattaforma non si muove: $\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{N}_0 = -m\bar{g}$
- La piattaforma scende, la normale è orientata verso l'alto:
$$\bar{a} = -a\bar{u}_z, 0 < a < g \Rightarrow \bar{N}_1 = m(-a\bar{u}_z + g\bar{u}_z) = m(g - a)\bar{u}_z$$
- La piattaforma sale, la normale è orientata verso l'alto:
$$\bar{a} = a\bar{u}_z, a > 0 \Rightarrow \bar{N}_2 = m(a\bar{u}_z + g\bar{u}_z) = m(g + a)\bar{u}_z$$

Considerando i casi, si osserva che $|\bar{N}_1| < |\bar{N}_0| < |\bar{N}_2|$. Prendendo l'esempio pratico di un ascensore, quando sale ci si sente più pesanti, quando scende più leggeri: è una *sensazione di peso apparente*.

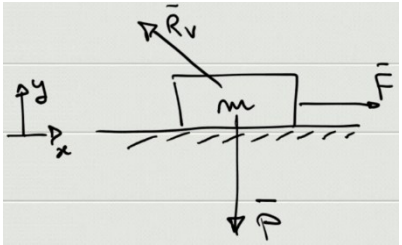
- La piattaforma è in caduta libera con accelerazione pari all'accelerazione di gravità:
$$\bar{a} = \bar{g}, \Rightarrow \bar{N}_3 = m(-a\bar{u}_z + g\bar{u}_z) = 0$$
Relativamente all'ascensore, si è fermi e non si hanno né sensazione di peso né di leggerezza.
- La piattaforma scende più velocemente dell'accelerazione di gravità e il corpo si stacca:
$$\bar{a} = -a\bar{u}_z, a > g \Rightarrow \bar{N}_4 = m(-a\bar{u}_z + g\bar{u}_z) = m(-a + g)\bar{u}_z$$

Forze di attrito radente.

Le **forze di attrito** o **di strisciamento** sono forze che si esercitano ogni qual volta che si prova a spostare un corpo che poggia su una superficie. L'**attrito** è l'interazione fra le superfici dei corpi stessi. Una superficie *scabra* presenta attrito, mentre una superficie *liscia* no.



Quando una forza viene applicata e il corpo rimane fermo, per la prima legge di Newton deve esistere una forza d'attrito uguale e contraria che bilancia il sistema, mantenendolo in equilibrio statico. Introducendo un sistema di riferimento e facendo l'analisi delle forze, si impone la seconda legge di Newton lungo i due assi:



$$\bar{R}_v + \bar{F} + \bar{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x: R_{v_x} + F = 0 \rightarrow R_{v_x} = F_{att} = -F \\ y: R_{v_y} - mg = 0 \end{cases}$$

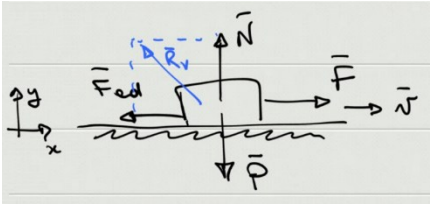
Essendo il corpo fermo, F_{att} è **forza di attrito statico** $F_{as} = F$.

Sottoponendo il corpo con una forza orientata con un certo angolo, la situazione è analoga alla precedente.

$$\bar{R}_v + \bar{F} + \bar{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x: R_{v_x} + F\cos\theta = 0 \rightarrow R_{v_x} = F_{as} = -F\cos\theta \\ y: R_{v_y} + F\sin\theta - mg = 0 \rightarrow R_{v_y} = N = mg - F\sin\theta \end{cases} \quad (*)$$

NB: la forza di attrito statico non ha un'espressione definita, dipende dalle forze che agiscono nel sistema.

Applicando una forza sufficientemente grande, il corpo inizierà a muoversi con una certa velocità: la forza ha superato il massimo valore di attrito statico. Il valore limite dell'attrito statico ha la seguente espressione: $F_{as} \leq F_{as,max} = \mu_s N$.Il **coefficiente di attrito statico**, μ_s, è un coefficiente adimensionale che dipende dalle caratteristiche superficiali.



La forza limite, o *di primo distacco*, a cui sottoporre un corpo affinché inizi a muoversi vale:

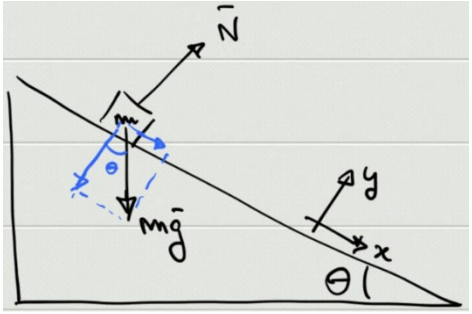
$$(*) \Rightarrow F_{as} = F\cos\theta \leq \mu_s N = \mu_s(mg - F\sin\theta) \rightarrow F(\cos\theta + \mu_s\sin\theta) \leq \mu_s mg \rightarrow F \leq \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}$$

Inoltre, se $N > 0, F < \frac{mg}{\sin\theta}$, altrimenti il corpo si solleva da terra.

Qualora il corpo inizi a muoversi, si è in condizioni dinamiche e si parla di **attrito dinamico**. La forza di attrito dinamico ha come espressione: $\bar{F}_{ad} = -\mu_d N\bar{u}_v$, con μ_d il **coefficiente di attrito dinamico** e $\bar{u}_v$ il versore del vettore velocità. La seconda legge di Newton si scrive come segue:

$$\bar{F}_{ad} + \bar{N} + \bar{F} + \bar{P} = m\bar{a} \Rightarrow \begin{cases} x: -\mu_d N + F = ma_x \rightarrow a = \frac{1}{m}(F - \mu_d mg) \\ y: N - mg = ma_y = 0 \rightarrow N = mg \end{cases}$$

<u>Piano inclinato.</u> Si supponga di avere un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale e sul quale e appoggiato un blocco di massa m; si suppone che inizialmente sia liscio. L'unica reazione vincolare che c'è è normale al piano. Per la seconda legge di Newton:

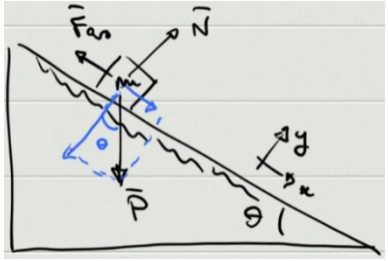


$$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{a} \Rightarrow \begin{cases} x: mg\sin\theta = ma_x \\ y: -mg\cos\theta + N = ma_y = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_x = g\sin\theta \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

L'accelerazione è costante, quindi si tratta di moto rettilineo uniformemente accelerato.

Supponendo il piano inclinato scabro, l'attrito è tale da mantenere il corpo fermo; la forza d'attrito statico tende verso l'alto perché il blocco tenderebbe a scendere. In analogia con quanto visto prima:

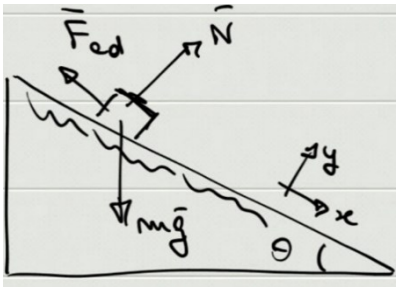


$$\bar{F}_{as} + \bar{N} + \bar{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x: -F_{as} + mg\sin\theta = 0 \rightarrow F_{as} = mg\sin\theta \\ y: N - mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = mg\cos\theta \end{cases}$$

Inoltre,

$$F_{as} \leq F_{as,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta \rightarrow mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta \Rightarrow \mu_s \geq \tan\theta$$

Se il corpo è in movimento lungo un piano scabro:



$$\bar{F}_{ad} + \bar{N} + \bar{P} = m\bar{a} \Rightarrow \begin{cases} x: -\mu_d N + mg\sin\theta = ma \\ y: N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_x = g(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

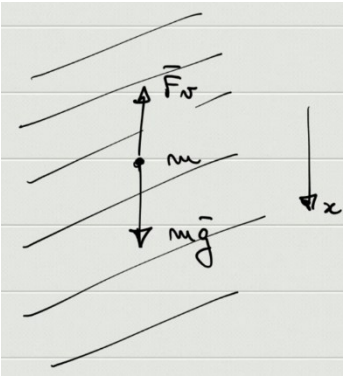
Forze di attrito viscoso

L'**attrito viscoso** è una forza che si esprime con la seguente relazione:

$$\bar{F}_v = -b\bar{v}, b > v \; e \; [b] = \left[\frac{F}{v}\right] = \frac{kg\, ms^{-2}}{ms^{-1}} = \frac{kg}{s}$$

La forza è proporzionale alla velocità, ma in verso opposto. L'accelerazione vale: $F_v = -bv = ma \Rightarrow a = -\frac{b}{m}v = -kb$, che è il caso di moto smorzato esponenzialmente.

Sia un corpo immerso in un fluido, sulla base della seconda legge di Newton:



$$m\bar{g} + \bar{F}_v = m\bar{a} \rightarrow mg - bv = ma$$

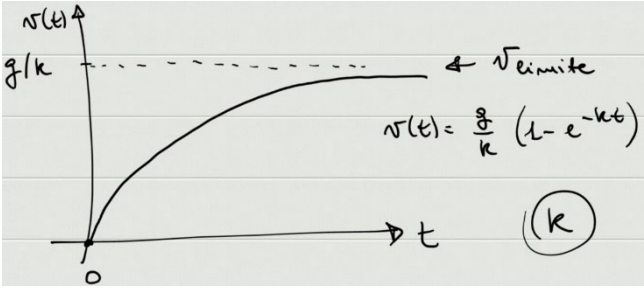
NB: è presente una dipendenza temporale in entrambi i membri, quindi la soluzione va trovata risolvendo l'equazione differenziale per separazione delle variabili.

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{m\,dv}{mg - bv} = dt \rightarrow \int_0^{v(t)} \frac{dv}{g - kv} = \int_0^t dt$$

$$\rightarrow -\frac{1}{k}\ln(g - kv)|_0^{v(t)} = t \rightarrow \ln\left(\frac{g - kv(t)}{g}\right) = -kt$$

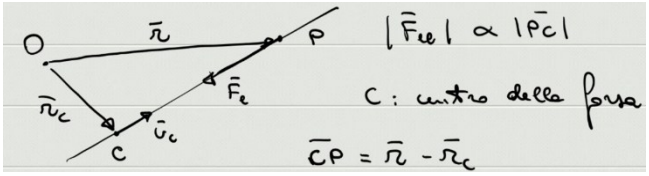
$$\rightarrow g - kv(t) = ge^{-kt} \rightarrow v(t) = g\left(1 - e^{-kt}\right) \Rightarrow v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Lo studio di questa funzione fa vedere come il corpo raggiunge una velocità limite. Questa forza può essere trovata scritta come $\bar{F}_v = -c\eta\bar{v}$, dove η è la *viscosità* del fluido e c un *coefficiente* che dipende dalla forma del corpo.



La forza elastica

La **forza elastica** è una forza che appartiene alla classe delle *forze di richiamo*, in quanto punta sempre verso un centro C e il cui modulo è proporzionale alla distanza tra il punto di applicazione e il centro della forza stessa.

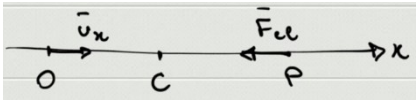


$$|\bar{F}_{el}| \propto |\overline{PC}|$$

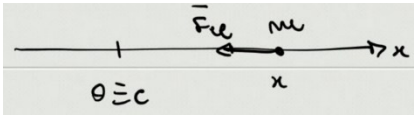
Supponendo di avere un origine di un sistema di riferimento, un raggio vettore che definisce la posizione del punto di applicazione della forza e un vettore che definisce la distanza del centro della forza, si può dire che il vettore $\overline{PC} = \bar{r} - \bar{r_C}$, tale che $\bar{F}_{el} = -k(\bar{r} - \bar{r_C}) = -k|\bar{r} - \bar{r_C}|\bar{u}_C$.

k è la *costante elastica* che ha come unità di misura $[k] = \left[\frac{F}{r}\right] = \frac{N}{m}$.

Agendo in un'unica dimensione, la forza elastica viene scritta come:



$$\bar{F}_{el} = -k(x - x_C)\bar{u}_C \Rightarrow F_{el} = -k(x - x_C) = -k\Delta x$$



$$F_{el} = ma \rightarrow -kx = m\,\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

definendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$, si trova l'equazione del moto armonico:

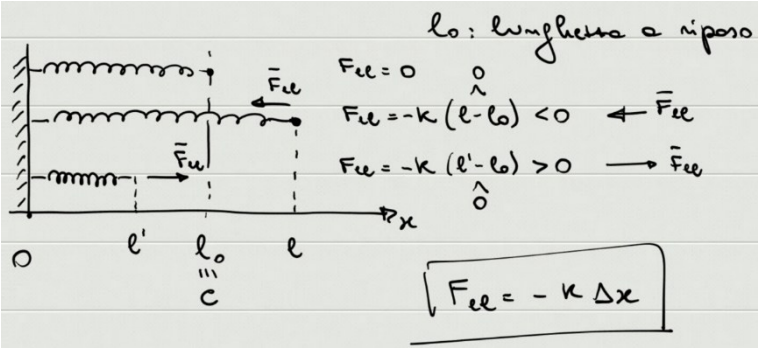
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

La cui soluzione è $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ $(*)$, mentre $v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

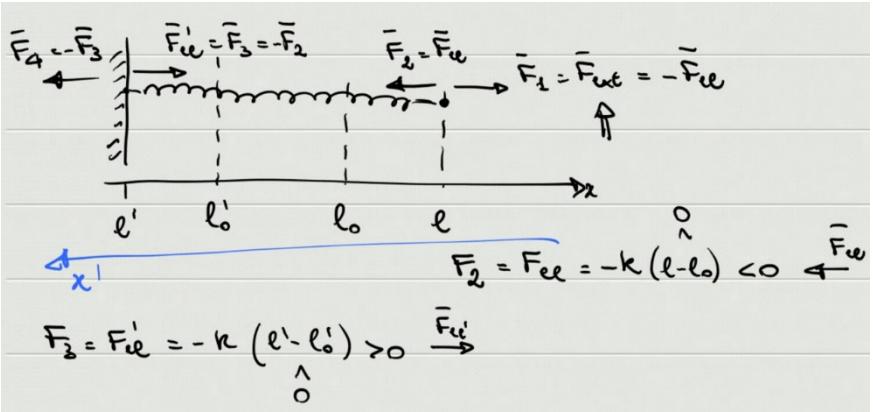
All'istante $t = 0$, $v(t = 0) = 0 = A\omega\cos\phi \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ e $x(t = 0) = x_0 = A\sin\phi = A$.

$$(*) \Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega t)$$

Una forza elastica si applica quando al corpo sono applicate delle *molle*. Una molla è caratterizzata da una costante elastica e da una lunghezza a riposo l_0, che coincide con il centro della forza. A seconda che vi sia compressione o trazione, la forza elastica è orientata come segue.



NB: una molla rimane allungata o compressa perché è tenuta ferma dalla parete; questo è vero perché in ogni punto vi è un allungamento e quindi due forze antagoniste.



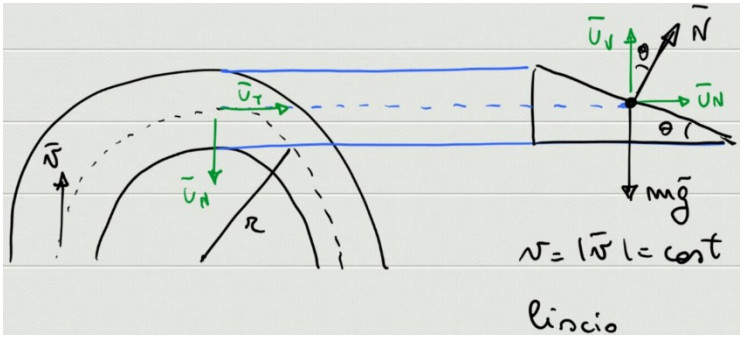
Forze centripete

Le **forze centripete** non sono interazioni tra corpi, bensì la componente perpendicolare al moto delle forze che agiscono.

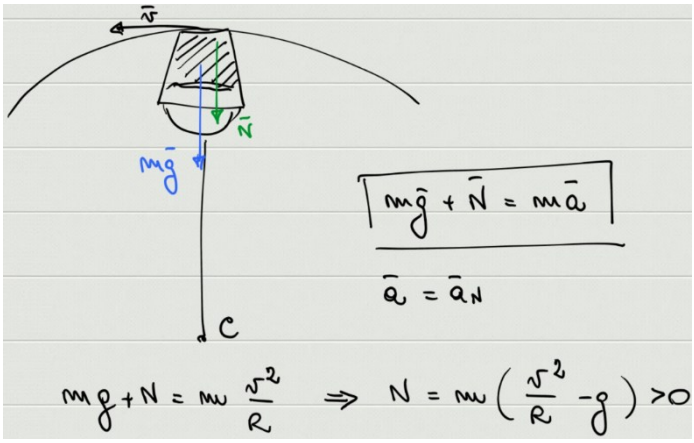
Esempio: sia un corpo che percorre una curva sopraelevata in assenza di attrito e che viaggia alla velocità v.Le uniche forze che agiscono sul corpo sono la forza peso e la normale al piano. Essendo la velocità costante, si tratta di un moto circolare uniforme in cui $a_T = 0$ e $a_N \neq 0$. Per convenienza, si studia il moto con un sistema di rifermento cartesiano ortogonale.

Per la seconda legge di Newton: $m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{a} = m\bar{a}_N \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_N: N\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \\ \bar{u}_T: N\cos\theta - mg = 0 \rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} \end{cases}$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

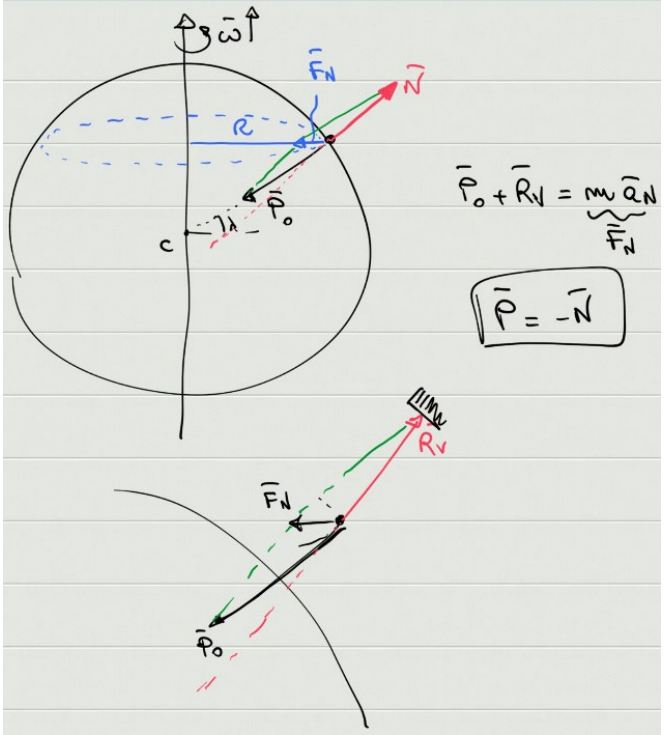


Esempio:



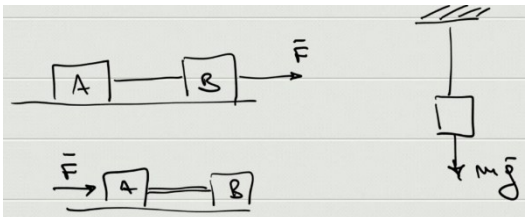
La velocità minima per mantenere il contatto col secchio è $v^2 > gR \rightarrow v > \sqrt{gR} = v_{min}$.

Esempio: sulla Terra, il peso di un corpo è diretto verso il centro solo se il corpo è fermo. Tuttavia, se il corpo percorre una traiettoria circolare di raggio R, è necessaria una componente centripeta. In questo caso, la reazione normale non è più rivolta verso il centro, ma risulta sfasata; di conseguenza, ciò che comunemente chiamiamo "peso" (ossia la forza opposta alla reazione normale) non punta più verso il centro. L'accelerazione che causa sfasamento vale: $a_N = \omega^2 R = \frac{2\pi}{24h} R_T \cos\lambda \approx 0{,}034 \cos\lambda \ m$, λ la latitudine.

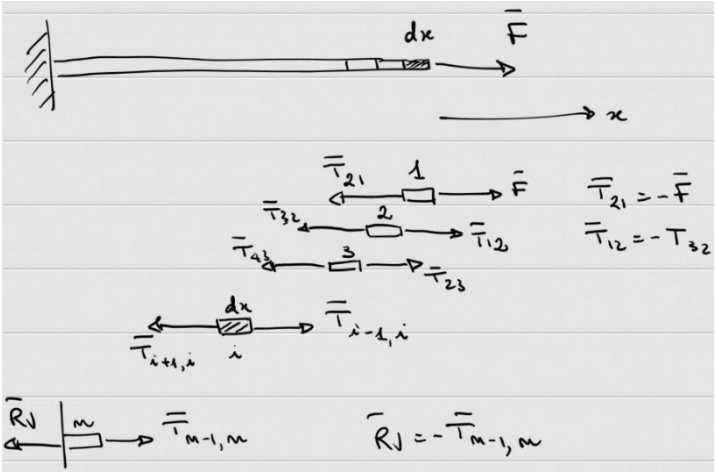


Tensione

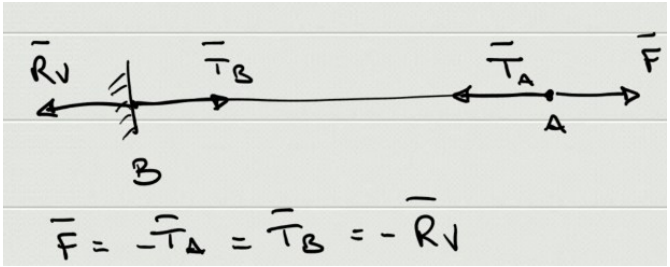
Per collegare tra di loro dei dispositivi fisici, vengono utilizzati dei *fili* o delle *sbarrette*, considerati privi di massa e inestensibili. I fili vengono utilizzati per mantenere un corpo sospeso, le sbarrette per trasferire una forza tra due corpi (ad esempio, per muoverli).



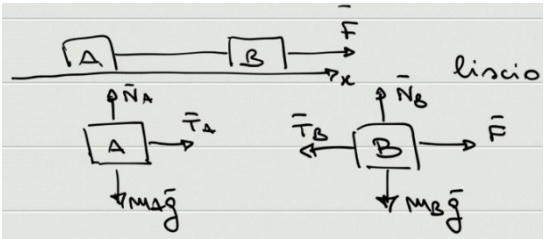
Per comprendere come una forza viene trasferita da un corpo ad un altro, si consideri l'esempio in figura.



Questa situazione viene schematizzata come una **tensione** opposta alla forza.



Esempio: due corpi trascinati su un piano liscio vengono studiati facendo l'analisi delle forze, principalmente lungo l'asse x. L'analisi è la seguente:

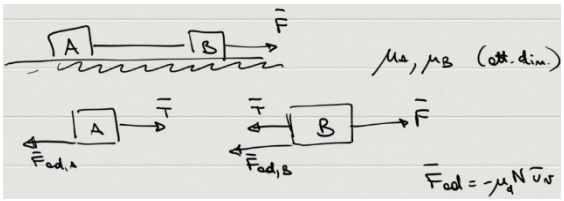


$$\begin{cases} A: T_A = m_A a_A \\ B: -T_B + F = m_B a_B \\ T_A = T_B \\ a_A = a_B = a \end{cases} \rightarrow F = (m_A + m_B)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{m_A + m_B}$$

La forza che agisce sui due corpi è $F_A = T = m_A a = \frac{m_A}{m_A+m_B} F$ e $F_B = F - T_B = m_B a = \frac{m_B}{m_A+m_B} F$.

Esempio: lo stesso caso, ma in presenza di attrito, ha il seguente sistema:

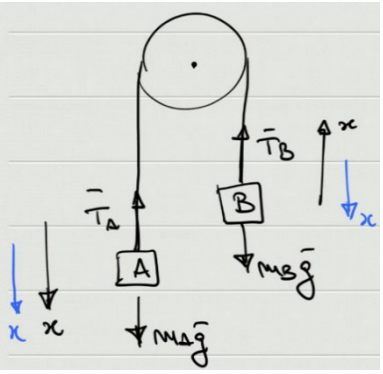


$$\begin{cases} A: T - \mu_A m_A g = m_A a_A \\ B: F - T - \mu_B m_B g = m_B a_B \\ T_A = T_B \\ a_A = a_B = a \end{cases}$$

$$\rightarrow F - (\mu_A m_A + \mu_B m_B)g = (m_A + m_B)a \Rightarrow a = \frac{F - (\mu_A m_A + \mu_B m_B)g}{m_A + m_B}$$

La tensione vale $T = \frac{m_A}{m_A+m_B}[F + (\mu_A - \mu_B)g]$.

Esempio (macchina di Atwood): viene introdotta la *carrucola*, oggetto di massa ideale che serve per cambiare direzione al filo. La macchina di Atwood è introdotta perché, in questo caso, risulta pratico utilizzare due sistemi di riferimento.

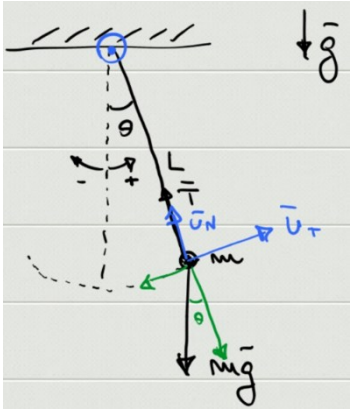


$$\begin{cases} A: m_A g - T_A = m_A a_A \\ B: t_B - m_B g = m_B a_B \\ T_A = T_B \\ a_A = a_B = a \end{cases} \rightarrow (m_A - m_B)g = (m_A + m_B)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} g$$

L'equazione delle accelerazioni è corretta per come sono stati orientati gli assi.

<u>Pendolo semplice.</u> Il **pendolo semplice** è un dispositivo che utilizza la tensione dei fili per compiere un arco di circonferenza oscillando. Le forze in gioco sono la forza peso e la tensione del filo:



$$m\bar{g} + \bar{T} = m\bar{a} = m(\bar{a}_T + \bar{a}_N) \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_T: -mg\sin\theta = ma_T & (*) \\ \bar{u}_N: -mg\cos\theta + T = ma_N = m\dfrac{v^2}{L} \\ a_T = \alpha L = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} L \end{cases}$$

NB: a seconda che il pendolo si trovi a sinistra o a destra della posizione di equilibrio, i segni cambiano perché l'angolo definito dal filo è positivo o negativo.

Per risolvere il moto del pendolo, si considerano le piccole oscillazioni ($\theta < 14°$) perché $\sin\theta \approx \theta$.

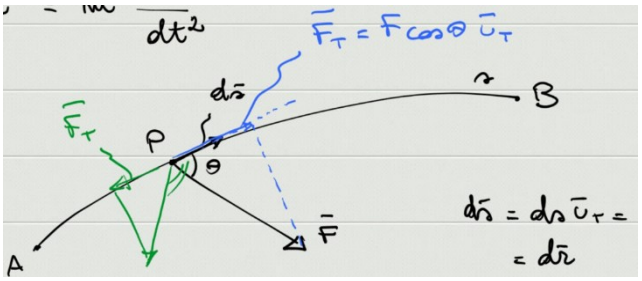
$$(*) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Si trova così un'equazione differenziale del moto armonico, $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$, di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

In termini di coordinate curvilinee, $s(t) = \theta(t)L = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$ e $v(t) = \frac{ds}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$. L'espressione della tensione vale: $T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{L} = T(t)$.

Lavoro, potenza e energia

Fino ad ora la dinamica è stata vista attraverso le leggi di Newton. Per consentire la trattazione dei problemi di dinamica nel dominio dello spazio, conviene introdurre nuove grandezze fisiche. Definiamo **lavoro (infinitesimo)** la quantità



$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = F ds \cos\theta = F_T ds$$

Si noti che la presenza del coseno definisce il lavoro come grandezza con segno, in particolare:

- $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow dW > 0$: lavoro motore e la componente tangenziale della forza sta aumentando il modulo della velocità.
- $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow dW < 0$: lavoro resistente e la componente tangenziale della forza sta diminuendo la velocità.
- $\theta = \frac{\pi}{2}, (\bar{F} = \bar{F}_N) \rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow dW = 0$: lavoro nullo.

Il lavoro compiuto da una forza che si sposta lungo una traiettoria curvilinea è definito:

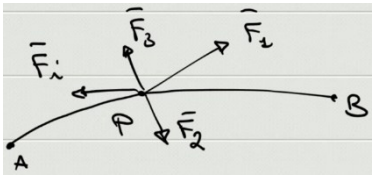
$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B F_T \, ds$$

Si tratta di un integrale di linea che rappresenta il calcolo della componente tangente della forza per il versore lungo tutti i punti della traiettoria. Nel caso più semplice $d\bar{s} = dx\bar{u}_x + dy\bar{u}_y + dz\bar{u}_z$ e $\bar{F} = F_x\bar{u}_x + F_y\bar{u}_y + F_z\bar{u}_z$.

$$\Rightarrow W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B \left(F_x \, dx + F_y \, dy + F_z \, dz\right) = \int_{x_A}^{x_B} F_x \, dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y \, dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z \, dz$$

NB: è sbagliato scrivere $W_{A\rightarrow B} = \int_A^B dW = W_B - W_A$ perché il differenziale del lavoro non è analogo al concetto di differenziale di una coordinata, in quanto il lavoro non è definibile in uno specifico punto dello spazio, ma viene svolto tra due punti.

Se sono applicate n forze, il lavoro viene definito dalla risultante delle forze:



$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B dW = \int_A^B \bar{R} \cdot d\bar{s} = \int_A^B \sum_i \bar{F}_i \cdot d\bar{s} = \sum_i \int_A^B \bar{F}_i \cdot d\bar{s}$$
$$= \sum_i (W_{A\rightarrow B})$$

Si definisce **potenza** il lavoro compiuto dal sistema per unità di tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{d\bar{s}}{dt} = F \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = F \cdot \bar{v}$$

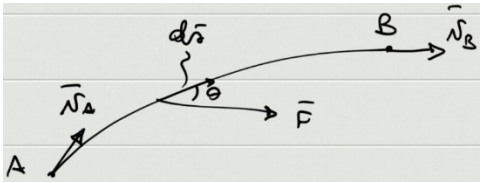
Si definisce **potenza media** tutto il lavoro fatto nell'intervallo di tempo, diviso tale intervallo:

$$\langle P \rangle_{\Delta t} = \frac{W_{\Delta t}}{\Delta t}$$

L'unità di misura del lavoro è: $[W] = [F \cdot s] = Nm = kg\, m^2 s^{-2} = J$. L'unità di misura della potenza è: $[P] = \left[\frac{W}{t}\right] = \frac{J}{s}$.

Energia cinetica

Dalla definizione di lavoro infinitesimo e usando il teorema differenziale totale, $ds = \left(\frac{ds}{dt}\right) dt$ e $dv = \left(\frac{dv}{dt}\right) dt$. Ecco che



$$dW = F_T ds = m\frac{dv}{dt} ds = m\, dv \cdot \frac{1}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) dt = m\, dv \frac{ds}{dt}$$
$$= mv\, dv$$

Il lavoro fatto complessivamente dalla forza per portare un corpo lungo una traiettoria può essere scritto come:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_{v_A}^{v_B} mv\, dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Si è passati da un integrale di linea ad un integrale che dipende dalla velocità, la grandezza ottenuta è l'**energia cinetica**.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Il risultato ottenuto è il **teorema fondamentale dell'energia cinetica** o **delle forze vive**, il quale dice che il lavoro compiuto da una forza per muovere un corpo da un punto A ad un punto B è pari alla variazione di energia cinetica.

$$W_{A\to B} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

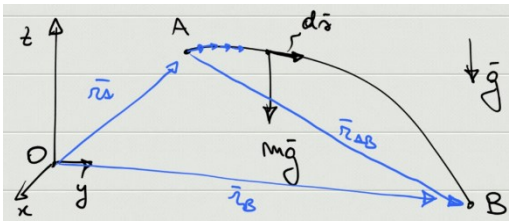
Il teorema dice che il movimento può essere utilizzato per generare un lavoro. L'energia cinetica è definita "a meno di una costante" e dipende dal sistema di riferimento che si prende in considerazione.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + cost.$$

L'unità di misura dell'energia cinetica è: $[E_k] = [W] = J$.

Energia potenziale gravitazionale

Si calcoli il *lavoro della forza peso* per portare un corpo lungo una traiettoria $\overline{AB}$.



$$W_{A\to B} = \int_A^B m\bar{g} \cdot d\bar{s} = m\bar{g} \int_A^B d\bar{s} = m\bar{g} \cdot \bar{r}_{AB}$$
$$= m\bar{g} \cdot (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \quad (*)$$

Definendo un sistema di riferimento in cui è presene un asse rivolto verso l'alto, $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$ e $\bar{g} = -g\bar{u}_z$.

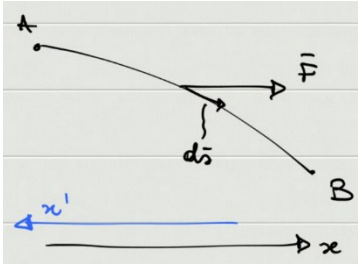
$$(*) \Rightarrow -mg(z_B - z_A)$$

Si noti come il risultato è analogo al concetto di energia cinetica visto in precedenza; si può pensare di riscrivere in maniera più compatta come segue, introducendo il concetto di **energia potenziale gravitazionale**. L'energia potenziale dipende dalla forza e dal sistema di rifermento.

$$E_{p,peso} = mgz \Rightarrow W_{A\to B} = -\left(E_{p,peso,B} - E_{p,peso,A}\right) = -\Delta E_{p,peso}$$

NB: dipendendo dalla coordinata z, l'energia potenziale varia al variare dell'altezza.

<u>Energia potenziale di una forza.</u> L'energia potenziale associata ad una forza costante vale:



$$W_{A\to B} = \int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_A^B \bar{F}\cdot\left(dx\bar{u}_x + dy\bar{u}_y + dz\bar{u}_z\right) = \int_{x_A}^{x_B} \bar{F}\,dx$$
$$= F(x_B - x_A) = -Fx_A + Fx_B = -\left(E_{p,F,B} - E_{p,F,A}\right)$$
$$= -\Delta E_{p,F}$$

<u>Energia potenziale elastica.</u> Si calcoli il *lavoro della forza elastica* per un corpo che si sposta da un punto A a un punto B.

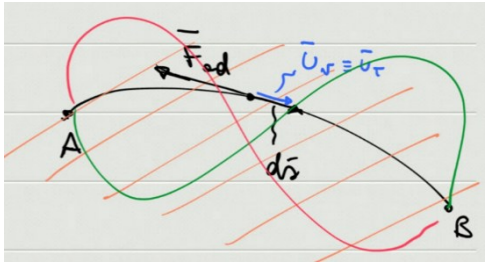
$$W_{A\to B} = \int_A^B \bar{F}_{el}\cdot d\bar{s} = \int_{x_A}^{x_B} -kx\cdot d\bar{x} = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_A}^{x_B} = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) = -\Delta E_{p,el}$$

L'**energia potenziale elastica** vale:

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$$

Lavoro della forza d'attrito.

Calcoliamo il *lavoro della forza di attrito radente* per muovere un corpo lungo la traiettoria $\overline{AB}$ in un piano scabro.

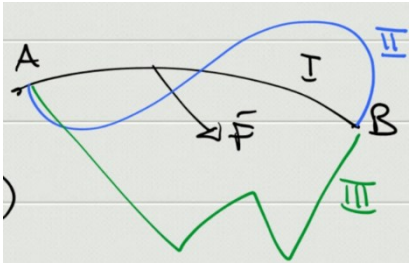


$$W_{A\to B} = \int_A^B \bar{F}_{ad}\cdot d\bar{s} = \int_A^B (-\mu_d N\bar{u}_v)\cdot d\bar{s} = -\mu_d N\int_A^B d\bar{s} = -\mu_d N$$

NB: L'integrale è calcolato sul modulo di ds, non sul vettore: il risultato dipende dalla traiettoria percorsa, non solo dai punti iniziale e finale. Concludiamo che non possiamo definire un'**energia potenziale d'attrito radente** perché l'integrale non dipende dalle coordinate iniziali e finali del punto.

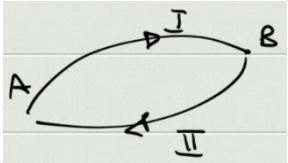
Forze conservative ed energia meccanica.

Abbiamo visto com'è possibile esprimere l'integrale del lavoro come l'opposto della variazione dell'energia potenziale. Se prendiamo le forze per le quali vale questa proprietà, possiamo fare la seguente considerazione: indipendentemente dalla traiettoria seguita, l'espressone dell'integrale deve essere sempre la stessa.



$$W_{A\to B} = \int_A^B (\bar{F}\cdot d\bar{s})_I = \int_A^B (\bar{F}\cdot d\bar{s})_{II} = \int_A^B (\bar{F}\cdot d\bar{s})_{III}$$

Portando a sinistra dell'uguale:



$$\int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I - \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II} = 0 \quad (*)$$

e osservando che:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -[-(E_{p,A} - E_{p,B})] = -\int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = W_{B\to A}$$

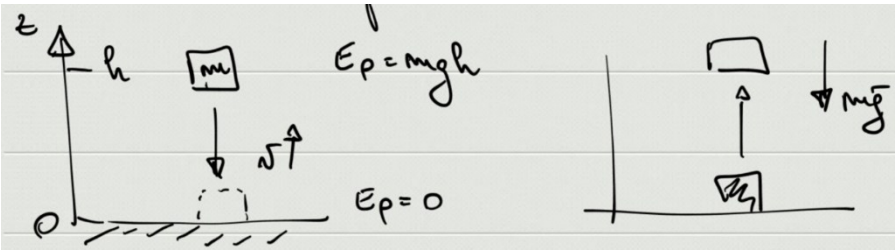
Possiamo quindi osservare che lungo un circuito chiuso :

$$(*) \Rightarrow \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I - \int_B^A (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II} = 0 \Rightarrow \oint \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0$$

L'integrale di linea fatto su un circuito chiuso prende il nome di **circuitazione** ed è sempre nulla. Questo integrale caratterizza le **forze conservative**, la cui caratteristica principale è che il loro lavoro può essere espresso come l'opposto della differenza dell'energia potenziale tra stato finale e stato iniziale.

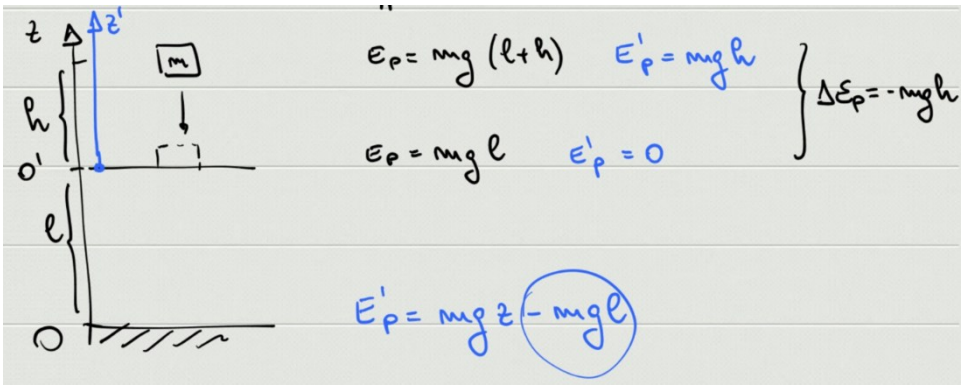
Quello che abbiamo visto finora ci permette di fare qualche considerazione sul significato di "energia potenziale". Posiamo scrivere:

$$W_{A\to B} = E_{p,inizio} - E_{p,fine} \begin{cases} > 0: motore & \Rightarrow E_{p,iniziale} > E_{p,finale} \\ < 0: resistente & \Rightarrow E_{p,iniziale} < E_{p,finale} \end{cases}$$



Tenendo conto che il lavoro motore è quello che va ad aumentare il modulo della velocità (la forza ha una componente concorde e parallela al verso della velocità), si vede che l'energia tende a diminuire, questo perché il sistema fisico utilizza tale energia per compiere un lavoro. Viceversa, se il sistema compie un lavoro resistente, l'energia potenziale finale è maggiore, ma questo non è un comportamento che avviene spontaneamente. Il concetto di energia potenziale esprime come il corpo disponga di essa per compiere lavoro: se un sistema dispone di un'energia potenziale maggiore di zero, spontaneamente tenderà a portarsi in situazioni in cui la sua energia potenziale diminuisce.

Sulla base della definizione appena data, è opportuno introdurre una costante va ad azzerare il valore dell'energia potenziale nel punto di minima energia, questo equivale a fare un cambio di coordinate. Si guardi il seguente esempio sull'energia potenziale della forza peso.



Per forze non conservative, o **forze dissipative**, non è possibile trovare un'espressione dell'energia potenziale per le quali è valida la relazione con il lavoro.

$$W_{A\to B} \neq -\Delta E_p$$

In entrambi i casi vale sempre il teorema dell'energia cinetica.

Avendo solo forze conservative, si possono eguagliare la variazione di energia cinetica e la variazione di energia potenziale

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p = \left(E_{p,B} - E_{p,A}\right) = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \to E_{k,B} + E_{p,B} = E_{k,A} + E_{p,A}$$

La somma di queste due energie si chiama **energia meccanica**, la relazione appena vista dice che se in un sistema agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica dello stato finale eguaglia l'energia dello stato iniziale.

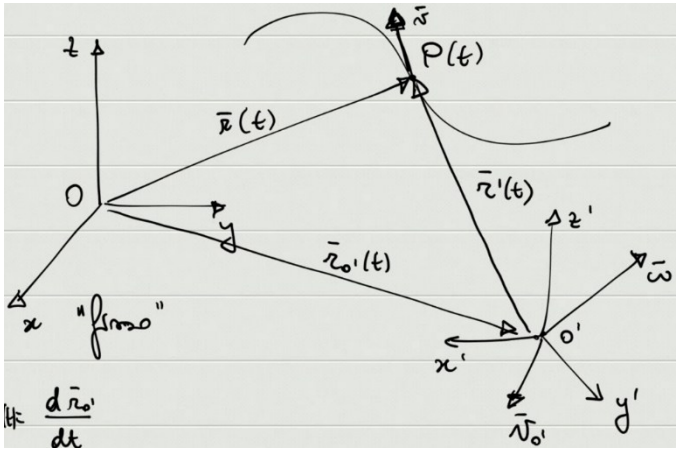
$$\Rightarrow E_{m,B} = E_{m,A}$$

Questo è il **principio di conservazione dell'energia meccanica**. Se siamo in presenza anche di forze non conservative, il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori delle forze conservative e non conservative.

$$W_{TOT,A\to B} = W_{f.non\ cons.,A\to B} + W_{f.cons.,A\to B} = W_{f.non\ cons.} - \Delta E_p = \Delta E_k \Rightarrow W_{f.non\ cons.} = \Delta\left(E_k + \Delta E_p\right) = \Delta E_m$$

$$\Rightarrow W_{f.non\ cons.} = E_{m,B} - E_{m,A}$$

Moti relativi



Per descrivere il moto di un corpo, è necessario definire un sistema di riferimento. Sistemi con orientamenti diversi possono descrivere lo stesso punto con un raggio vettore differente. Tuttavia, le leggi di Newton rimangono invariate al variare del sistema di riferimento: il formalismo vettoriale garantisce che le leggi fisiche siano indipendenti dalla scelta del sistema. Cambia solo la descrizione della traiettoria, che dipende dal sistema adottato.

Un sistema di riferimento mobile è un sistema che si sposta nello spazio, la cui origine segue una legge di moto specifica; inoltre, può anche ruotare. Il classico sistema di riferimento cartesiano (x, y, z) è detto **sistema di riferimento fisso**, mentre l'altro è il **sistema di riferimento mobile**. In realtà, non esiste un sistema di riferimento "fisso" in natura: in passato si è cercato di individuarne uno, ma si è scoperto che lo spazio è omogeneo e isotropo, quindi non esiste una direzione privilegiata. Per convenzione, si sceglie un sistema di riferimento "fisso" orientato in modo da mantenersi rigido rispetto a stelle fisse lontane.

Definito il sistema di riferimento fisso, si definisce il raggio vettore del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso; la velocità $\bar{v}_0'$ è misurata rispetto al sistema fisso.

$$\bar{v}_{0'}(t) = \frac{d\bar{r}_{0'}}{dt}$$
$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt}$$
$$\bar{v}'(t) = \frac{d\bar{r}'}{dt}$$

Date queste precisazioni, si vede che la posizione di $\bar{r}(t)$ è data dalla somma di due raggi:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}'(t) + \bar{r}_{0'}(t)$$

Il *teorema delle velocità relative* si ottiene derivando la somma vettoriale scritta poc'anzi e permette di trovare che:

$$\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{0'} + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}' + \bar{v}_t$$

dove $\bar{v}_t$ è la **velocità di trascinamento**, velocità misurata nel punto di coordinate $\bar{r}'$ che ha una velocità $v' = 0$ e che corrisponde alla velocità del punto dello spazio solidale al sistema di riferimento mobile. Queste sono le equazioni che permettono di trovare la velocità e la posizione di un corpo note le grandezze fisiche che sono in gioco.

Il *teorema delle accelerazioni relative* è il seguente:

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{0'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' + 2\bar{\omega} \times \bar{v}' = \bar{a}' + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

dove $\bar{a}_c$ è l'**accelerazione di Coriolis** e $\bar{a}_t$ l'**accelerazione di trascinamento** dello spazio solidale al sistema di riferimento mobile.

Nella risoluzione di problemi conviene esplicitare le quantità del sistema di riferimento mobile.

$$\begin{cases} \bar{r}' = \bar{r} - \bar{r}_{0'} \\ \bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_{0'} - \bar{\omega} \times \bar{r}' \\ \bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_{0'} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') - \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' - 2\bar{\omega} \times \bar{v}' \end{cases}$$

A volte si va a descrivere il moto di un punto rispetto ad un altro punto. Si va a fare la cosa seguente: si prende il raggio che unisce P_1 e P_2 e si studia la variazione nel tempo di questo vettore. Implicitamente si prende un sistema di riferimento mobile che ha gli assi che non ruotano rispetto al sistema fisso ($\omega = 0$) e che coincide con uno dei due punti. Sotto questa semplificazione, i teoremi delle velocità e delle accelerazioni relative risultano semplificati.

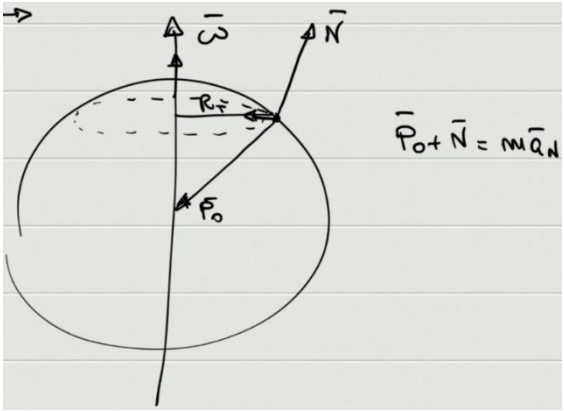
$$\begin{cases} \bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_{0'} - \bar{\omega} \times \bar{r}' \rightarrow \bar{v}_{21} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1 \quad (*) \\ \bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_{0'} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') - \dfrac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' - 2\bar{\omega} \times \bar{v}' \rightarrow \bar{a}_{21} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \end{cases}$$

$$(*) = \frac{d}{dt}(\bar{r}_{21}) = \frac{d}{dt}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \frac{d\bar{r}_2}{dt} - \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

Nel sistema di riferimento fisso il raggio vettore $\bar{r}_{21}$ non ha la base ferma, quindi la sua velocità è data dalla differenza della velocità di base e punta.

Sistemi di riferimento inerziali

Un sistema di riferimento si definisce **inerziale** quanto in esso vale rigorosamente il principio di inerzia. Sulla Terra il principio di inerzia non vale perché se un corpo viene messo in movimento, esso tenderà a fermarsi perché sottoposto alle forze di attrito che non sono conservative. Si consideri il seguente schema raffigurante la Terra visto in precedenza: in un sistema del genere la risultante delle forze non è nulla.



Si supponga di essere in un sistema di riferimento inerziale e di avere un corpo che non sia soggetto a reazioni, tali per cui $\sum_i \bar{F}_i = 0 \rightarrow \bar{a} = 0$. Si prenda un altro sistema che sia in moto relativo con una velocità costante, in cui non ci sono accelerazione dell'origine e rotazione degli assi. Per il teorema delle accelerazioni relative, $\bar{a}' = \bar{a}$. In particolare, se nel sistema di riferimento inerziale vi è un'accelerazione nulla, allora anche nel sistema mobile l'accelerazione è uguale a zero. Andando a guardare le forze che agiscono nel sistema di riferimento mobile, $\sum_i \bar{F}_i' = 0$, quindi si trova un altro sistema in cui vale il principio di inerzia. In conclusione, dato un sistema di riferimento inerziale, ogni altro sistema di riferimento mobile con $\bar{v}_0' = cost$. è a sua volta sistema di riferimento inerziale. Dato quello che è stato appena descritto, si conclude che non si è in grado di dire se un sistema di riferimento si sta muovendo a velocità costante rispetto ad un altro oppure è fermo; ciò implica che non esiste un sistema di riferimento privilegiato rispetto ad un altro nella classe dei sistemi di riferimento inerziali e che dunque non esiste moto assoluto, ma solo moti relativi.

Sistemi di riferimento non inerziali.

Un sistema di riferimento si definisce **non inerziale** quando non è rigorosamente valido il principio di inerzia. Si considerino un sistema inerziale e uno mobile dotato di $\bar{v}_0' \neq 0, \bar{a}_0' \neq 0$ e $\bar{\omega} \neq 0$; per il teorema delle accelerazioni relative $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_t + \bar{a}_c \rightarrow \bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_t - \bar{a}_c$. Si supponda di essere nel sistema di riferimento inerziale e di fare una misura fisica di una forza; nell'altro sistema di riferimento vedremo una forza relativa

$$\bar{F}' = m\bar{a}' = m\bar{a} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c = \bar{F} + (-m\bar{a}_t - m\bar{a}_c) = Forze\ vere + Forze\ apparenti$$

Le forze apparenti o **forze di inerzia** sono dovute al fatto che il sistema di riferimento mobile ha dei termini di accelerazione. Se nel sistema di riferimento inerziale non ci fossero forze applicate, rimarrebbero comunque le forze apparenti, quindi la forza nel sistema di riferimento mobile non è nulla e quindi

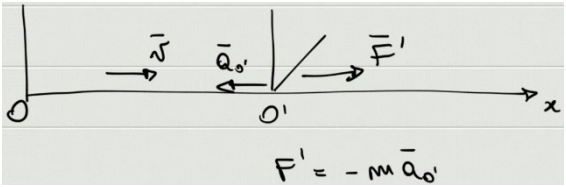
$$\bar{F}' = m\bar{a}' \neq 0$$

Ecco che si ha un sistema dove, pur non essendoci forze vere applicate, ci sono forze non dovute all'interazione con un altro corpo.

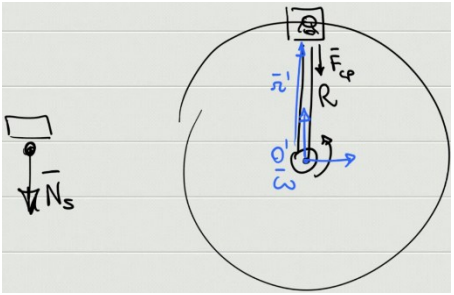
Esempio: in un autobus che viaggia a velocità costante i passeggeri rimangono in piedi perché sono in un sistema di riferimento inerziale rispetto al suolo. Nel momento in cui l'autobus frena bruscamente, c'è un'accelerazione negativa e si ritrovano con una forza che agisce sul loro corpo.

$$\bar{F}' = -m\bar{a}'$$

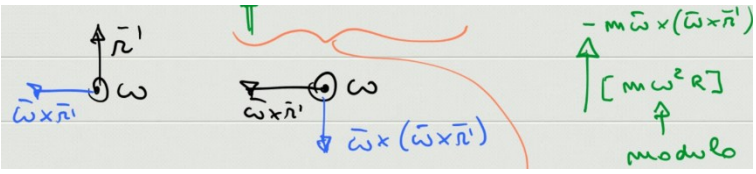
Si ritrovano "spinti" in avanti anche se non c'è nessuna interazione del nostro corpo con un altro.



Esempio: gli astronauti fanno i test nelle centrifughe che ruotano a velocità angolare costante. Dall'esterno l'astronauta sta compiendo un moto circolare uniforme, cioè la forza vera che agisce sul corpo (che è la normale del sedile) è pari a $\bar{F} = \bar{N} = m\omega^2 R\bar{u}_N$. Nel sistema di riferimento che ruota assieme alla centrifuga, l'astronauta sta fermo ma risente di una forza:

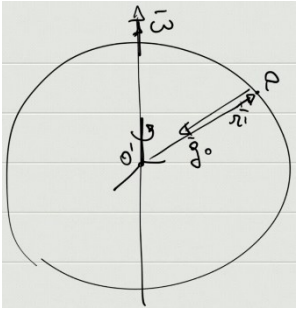


$$\bar{F}' = m\bar{a} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c = m\omega^2 R\bar{u}_N - m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$$



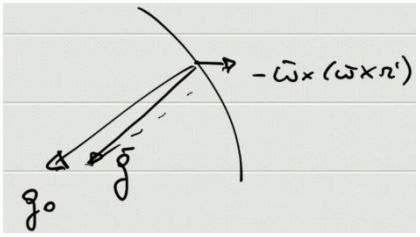
$m\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$ è la **forza centrifuga** che punta verso l'alto e ha modulo $m\omega^2 R$; la forza che agisce complessivamente è nulla, ciò è coerente perché nel sistema di riferimento mobile l'astronauta sta fermo. L'astronauta si sente schiacciato dalle due forze contrapposte.

Esempio: si è detto che la Terra non è un sistema di riferimento inerziale. Sia un sistema di riferimento con origine nel centro della Terra; sulla base del teorema delle accelerazioni relative, l'accelerazione di gravità vale:



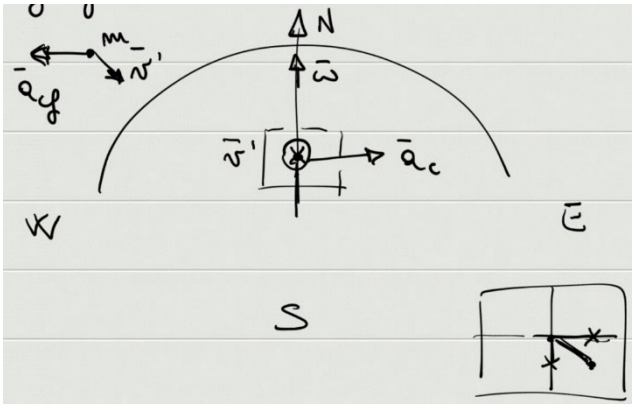
$$\bar{g}_0 = \bar{g} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') - 2\bar{\omega} \times \bar{v}' \rightarrow \bar{g} = \bar{g}_0 - -\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') - 2\bar{\omega} \times \bar{v}'$$

Considerando il caso in cui la velocità è nulla, si ritrova il caso visto, cioè l'accelerazione misurata sulla superficie della Terra è $\bar{g} = \bar{g}_0 - -\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$.



Il termine centrifugo, in modulo, vale $\omega^2 R_T \cos\theta = 3{,}38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \frac{m}{s^2}$.

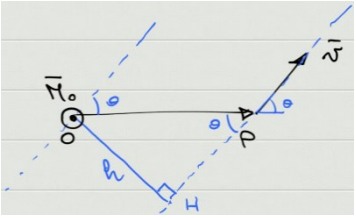
Il termine di Coriolis è una forza che devia un corpo verso Est: un oggetto in caduta libera, infatti, non si muove esattamente lungo la verticale, ma subisce una leggera deviazione. Il termine centrifugo, invece, sposta il corpo verso Sud. Complessivamente, un corpo in caduta libera risulta deviato verso Sud-Est.



Sistemi di punti

Finora è stata trattata la cinematica e la dinamica del punto materiale. Tuttavia, in fisica si studiano spesso anche gli oggetti rigidi, cioè sistemi costituiti da più punti materiali. Inizialmente si analizzano tali punti come entità distinte e separate, per poi considerarli come un insieme continuo.

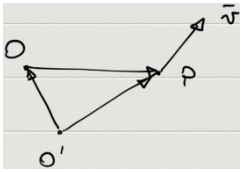
Una definizione importante è quella di **momento di un vettore**. Dato un vettore generico $\bar{v}$ applicato in un punto P, si definisce **momento del vettore** rispetto a un polo il seguente prodotto vettoriale:



$$\bar{M}_O = \overline{OP} \times \bar{v}$$

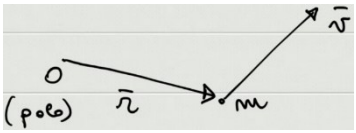
Le proprietà sono:

- $|\bar{M}_O| = |\overline{OP}||\bar{v}| \sin\theta = |\overline{OH}||\bar{v}|$
- La distanza tra le rette è il *braccio del momento*
- Il momento cambia rispetto ad un polo diverso:
  $\bar{M}_{O'} = \overline{O'P} \times \bar{v} = (\overline{O'O} + \overline{OP}) \times \bar{v} = \overline{O'O} \times \bar{v} + \overline{OP} \times \bar{v} = \overline{O'O} \times \bar{v} + \bar{M}_O$
- Se $\overline{O'O} \parallel \bar{v}$, $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O$.



Momento angolare

Il **momento angolare** è il momento della quantità di moto. Dato un polo O e un punto di massa m alla velocità $\bar{v}$:



$$\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times m(\bar{v}_\perp + \bar{v}_{//}) = \bar{r} \times m\bar{v}_\perp$$

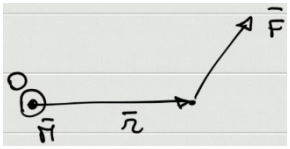
Il momento angolare si prende in considereazione soprattutto nel moto circolare.

$$\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times m(\bar{\omega} \times \bar{r}) = mR^2\omega\bar{u}_\omega = mR^2\bar{\omega}$$

L'unità di misura del momento angolare è: $[M] = [L \cdot m \cdot v] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = N \cdot m \cdot s$.

Momento di una forza

Per il **momento di una forza** valgono le stesse considerazioni che abbiamo fatto prima.



$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$$

Se nel punto sono applicate più forze, il momento complessivo rispetto al polo è uguale alla somma dei vari momenti:

$$\bar{M}_{TOT,O} = \sum_i \bar{M}_i = \bar{r} \times \bar{F}_1 + \bar{r} \times \bar{F}_2 + \cdots = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \cdots) = \bar{r} \times \sum_i \bar{M}_i = \bar{r} \times \bar{R}$$

L'unità di misura del momento di una forza è: $[M] = [F \cdot L] = N \cdot m$.

NB: a differenza del lavoro, che è una grandezza scalare, questa è una grandezza vettoriale.

<u>Teorema del momento angolare per un sistema di punti.</u> Il **teorema del momento angolare** per un punto dice che la derivata del momento angolare è uguale al momento della forza. Supponendo il polo fisso, la derivata rispetto al tempo del momento angolare vale:

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = 0 + \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times m\bar{F} = \bar{M}_O$$

Se le forze che agiscono sul sistema hanno risultante nulla, la derivata del momento angolare è nulla e ciò implica che il momento angolare è costante.

NB: con la seconda legge di Newton si sono analizzati i moti di traslazione. Quando si studieranno i corpi rigidi, soggetti sia a traslazione sia a rotazione, la relazione tra momento angolare e momento di una forza assumerà un ruolo fondamentale. Mentre la quantità di moto (in inglese, *momentum*) descrive come varia il prodotto tra massa e velocità in un moto lineare, il momento angolare (in inglese, *angular momentum*) è la grandezza che caratterizza la variazione del moto rotazionale.

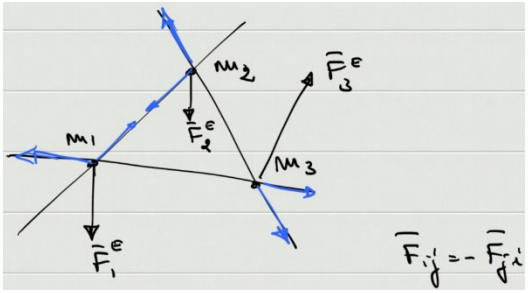
Sistemi di punti materiali

Il moto di un **sistema di punti materiali** è determinato dalle forze che agiscono su di esso. Queste forze possono essere classificate in due categorie: *forze esterne*, dovute all'interazione con l'ambiente circostante, e *forze interne*, generate dalle interazioni reciproche tra i punti del sistema.

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^I + \bar{F}_i^E$$

La risultante delle forze interne totali è nulla perché le forze sono tra loro mutue $\left(\bar{F}_{ij} = -\bar{F}_{ji}\right)$:

$$\bar{R}^I = \sum_i \bar{F}_i^I = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \bar{F}_{ji}\right) = 0$$



Quantità di moto

La quantità di moto totale del sistema è data dalla somma delle quantità di moto.

$$\bar{p} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i$$

Momento angolare

Il momento angolare del sistema è dato dalla somma dei momenti di ciascun punto rispetto allo stesso polo.

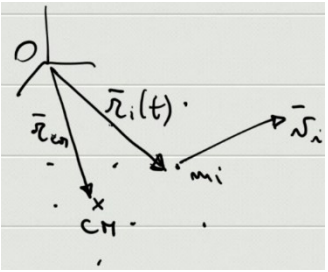
$$\bar{L}_O = \sum_i \bar{L}_{i,O} = \sum_i (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)$$

Energia cinetica

L'energia cinetica totale del sistema è data dalla somma di tutte le energie cinetiche.

$$\bar{E}_k = \sum_i \bar{E}_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Centro di massa di un sistema di punti.

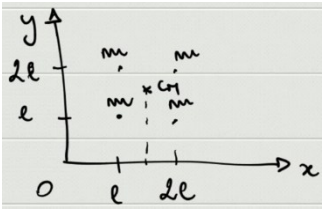


Sia un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale viene definita la posizione di ogni singolo punto di un sistema di punti tramite un raggio vettore $\bar{r}(t)$, il **centro di massa** è un punto nello spazio definito dal raggio vettore:

$$\bar{r}_{CM} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \cdots + m_i\bar{r}_i + \cdots + m_n\bar{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i\bar{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\bar{r}_i}{m_{TOT}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i\bar{x}_i}{m_{TOT}} \\ \bar{y}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i\bar{y}_i}{m_{TOT}} \\ \bar{z}_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i\bar{z}_i}{m_{TOT}} \end{cases}$$

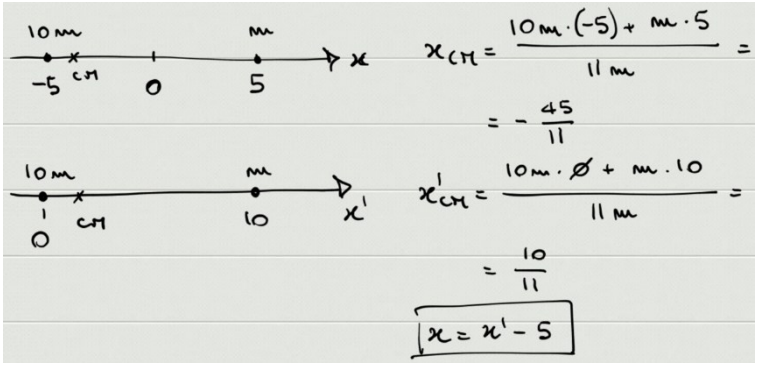
Si osservi che il centro di massa tende a spostarsi verso i punti di massa maggiore.



Esempio: consideriamo la disposizione simmetrica di quattro punti disposti ai vertici di un quadrato aventi la stessa massa.

$$\begin{cases} x_{CM} = \dfrac{ml + m2l + m2l + ml}{4m} = \dfrac{6ml}{4m} = \dfrac{3}{2}l \\ y_{CM} = \dfrac{ml + m2l + m2l + ml}{4m} = \dfrac{6ml}{4m} = \dfrac{3}{2}l \end{cases}$$

NB: la posizione del centro di massa è dipendente dalla posizione dei punti, ma non dal sistema di riferimento.



<u>Teorema del moto del centro di massa.</u> Per sua definizione, se i punti del sistema di punti si muovono, anche il centro di massa si sposta ed è dotato di velocità. La velocità vale:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{d\bar{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i\bar{r}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\bar{v}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \frac{\sum_i \bar{p}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\bar{p}}{m_{TOT}}$$

La quantità di moto totale può essere scritta anche come:

$$\bar{p} = m_{TOT}\bar{v}_{CM}$$

Questa è una scrittura statistica che permette di schematizzare tutto il sistema di punti come un unico punto con la massa totale del sistema e velocità del centro di massa.

Si definisce anche un'accelerazione del centro di massa facendo variare la velocità nel tempo:

$$\bar{a}_{CM} = \frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{a}_i}{\sum_i m_i} \Rightarrow \frac{\sum_i \bar{F}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i (\bar{F}_i^I + \bar{F}_i^E)}{m_{TOT}} = \frac{\bar{R}^I + \bar{R}^E}{m_{TOT}} = \frac{\bar{R}^E}{m_{TOT}}$$

Inoltre,

$$\bar{a}_{CM} = \frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{p}}{m_{TOT}}\right) = \frac{1}{m_{TOT}}\frac{d\bar{p}}{dt}$$

La risultante di tutte le forze esterne può essere scritta anche come:

$$\bar{R}^E = m_{TOT}\bar{a}_{CM} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

Questo risultato è noto come **teorema del moto del centro di massa** e afferma che, per un sistema di punti materiali, l'effetto delle forze esterne sul moto del centro di massa è descritto dalla seconda legge di Newton, come se tutta la massa del sistema fosse concentrata in tale punto.

Come caso particolare vi è quello in cui la risultante delle forze esterne è nulla.

$$\bar{R}^E = 0 \rightarrow \bar{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \bar{v}_{CM} = cost. = \bar{p}$$

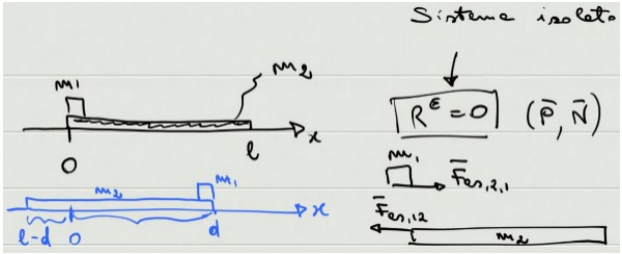
In condizioni statiche ($\bar{v}_{CM} = 0$), la coordinata del centro di massa si conserva.

$$\bar{v}_{CM} = \frac{d\bar{r}_{CM}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{r}_{CM} = cost.$$

NB: sono grandezze vettoriali, ciò vuol dire che se anche la risultante non è nulla, le sue componenti possono comunque conservarsi.

$$\bar{R}^E \neq 0 \; ma \; R^E_{\substack{x\\y\\z}} = 0 \Rightarrow p_{\substack{x\\y\\z}} = cost.$$

Esempio: in un piano liscio è appoggiata una sbarretta di massa m_2 e lunghezza l, sopra l'oggetto vi è un corpo di massa m_1 che si muove. Si deve calcolare di quanto si è spostato il corpo 1 rispetto all'origine del sistema di riferimento.



Mano a mano che il corpo 1 si sposta, il corpo 2 arretra perché tra i due vi è attrito, ma non tra il piano e la sbarretta. La quantità di moto del sistema è costante e vale:

$$\bar{p} = cost. \underbrace{=}_{v_{i0}=v_{20}=0} 0 = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 \rightarrow \bar{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\bar{v}_1$$

Nella situazione finale si ritrova che il corpo 2 è spostato verso sinistra e il corpo 1 a destra. Visto che la quantità di moto totale è zero, allora lo è anche la velocità del centro di massa, quindi significa che la sua coordinata è costante.

$$\bar{p} = 0 = m_{TOT}\bar{v}_{CM} \rightarrow \bar{v}_{CM} = 0 = \frac{d\bar{r}_{CM}}{dt} \Rightarrow \bar{r}_{CM} = x_{CM} = cost.$$

All'inizio:

$$x_{CM}^{i} = \frac{0 + m_2 \frac{l}{2}}{m_1 + m_2}$$

Alla fine:

$$x_{CM}^{f} = \frac{m_1 d + m_2 \left(\frac{l}{2} - (l - d)\right)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 d + m_2 \left(d - \frac{l}{2}\right)}{m_1 + m_2}$$

Mettendo assieme:

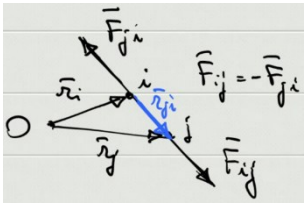
$$x_{CM}^{i} = x_{CM}^{f} = m_2 \frac{l}{2} = m_1 d + m_2 d + m_2 \frac{l}{2} \Rightarrow d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l$$

Teorema del momento angolare per un sistema di punti

Sia un sistema di punti mobile e si calcoli il momento angolare totale e poi la derivata.

$$\bar{L}_O = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i \rightarrow \frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i \times m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} =$$
$$= \sum_i (\bar{v}_i - \bar{v}_O) \times m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i = -\bar{v}_O \times \sum_i m_i \bar{v}_i + \sum_i \bar{r}_i \times \bar{F}_i =$$
$$= -\bar{v}_O \times m_{TOT} \bar{v}_{CM} + \sum_i (\bar{M}_O^E + \bar{M}_O^I) = -\bar{v}_O \times m_{TOT} \bar{v}_{CM} + \bar{M}_O^E + \bar{M}_O^I$$

Per quanto riguarda il momento delle forze interne, il termine va a zero perché, prendendo due punti che stanno interagendo tra di loro rispetto ad un polo O e andando a calcolare il momento delle due forze, esso è uguale a:



$$\bar{M}_O^{ij} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ji} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ij} = \bar{r}_i \times \bar{F}_{ji} - \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{F}_{ji} = \bar{r}_{ji} \times \bar{F}_{ji} = 0$$

Quindi, rimane il **teorema del momento angolare per un sistema di punti**:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = -\bar{v}_O \times m_{TOT} \bar{v}_{CM} + \bar{M}_O^E$$

Questo teorema si userà nei casi in cui il primo addendo si elimina; ciò si ha quando:

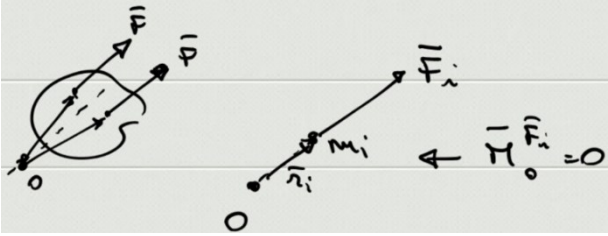
- il polo è fisso: $\bar{v}_O = 0$;
- il centro di massa è fisso: $\bar{v}_{CM} = 0$;
- il polo è coincidente con il centro di massa $O \equiv CM$;
- la velocità del polo è parallela alla velocità del centro di massa: $\bar{v}_O \| \bar{v}_{CM}$.

Sotto queste condizioni, si ritrova che:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E$$

Conservazione del momento angolare

Il momento risultante delle forze esterne rispetto a un polo può annullarsi in diverse condizioni. Una di queste si verifica quando la risultante di tutte le forze agenti sul sistema è nulla: in questo caso, il sistema è definito **isolato**. Tuttavia, il momento può essere nullo anche in altri scenari, come quando il polo si trova sulla retta di azione di una forza applicata oppure due forze uguali e opposte agiscono simmetricamente rispetto al polo.

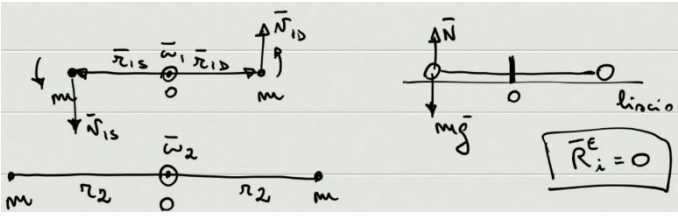


In tutti questi casi, accade che:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E = 0 \Rightarrow \bar{L}_O = cost.$$

In generale, guardando la singola component α del vettore:

$$\frac{dL_{O,\alpha}}{dt} = M_{O,\alpha}^E = 0 \Rightarrow L_{O,\alpha} = cost.$$



Esempio: si supponga di avere due punti materiali uniti da una sbarretta di massa trascurabile, i punti giacciono in un piano e l'asta è vincolata nel punto centrale. I due oggetti si muovono di moto rotatorio. La sbarretta è un sistema telescopico, quindi si può allungare. Quello che accade è che la velocità angolare cambia e se ne vuole calcolarne la variazione, prendendo come polo il perno O.

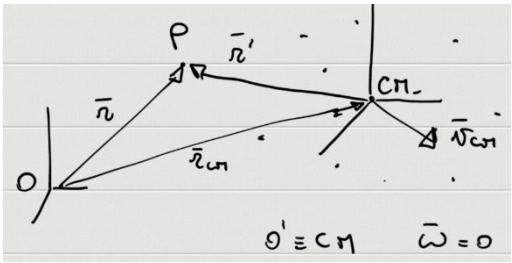
$$\bar{L}_{O,1} = \bar{r}_{1,D} \times m\bar{v}_{1,D} + \bar{r}_{1,S} \times m\bar{v}_{1,S} = 2\bar{r}_1 \times m\bar{v}_1$$

Visto che il sistema è isolato, si può dire che il momento angolare non cambia: si ha che $\bar{L}_{O,1} = \bar{L}_{O,2}$.

Entrambi i momenti angolari puntano verso l'alto, passando all'uguaglianza tra i moduli.

$$|\bar{L}_O| = 2rmv = 2m\omega r^2 \rightarrow 2m\omega_1 r_1^2 = 2m\omega_2 r_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < \omega_1$$

Sistema di riferimento del centro di massa.



Si è visto come nell'analisi dei sistemi fisici risulta talvolta necessario adottare un sistema di riferimento mobile rispetto a un sistema inerziale fisso. In particolare, si preferisce spesso utilizzare un sistema di riferimento con assi non rotanti e centrato nel centro di massa del sistema di punti materiali, in quanto questa scelta semplifica notevolmente lo studio del moto. In questo sistema, infatti, i teoremi delle velocità relative assumono una forma più semplice:

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}' + \bar{r}_{CM} \\ \bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{CM} \\ \bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{CM} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{r}' = \bar{r} - \bar{r}_{CM} \\ \bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_{CM} \\ \bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_{CM} \end{cases}$$

Si osservi come la coordinata del centro di massa misurata nel sistema di rifermento del centro di massa è zero, tuttavia per definizione:

$$\bar{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}'_i}{\sum_i m_i} = \sum_i m_i \bar{r}'_i = 0$$

Questa relazione è una proprietà tipica del sistema di riferimento del centro di massa. Analogamente, andando a vedere la velocità del centro di massa misurata nel centro di massa:

$$\bar{v}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}'_i}{\sum_i m_i} = \sum_i m_i \bar{v}'_i = 0$$

Questa relazione corrisponde alla quantità di moto totale del sistema di punti nel sistema di riferimento del centro di massa.

$$\bar{p}' = \sum_i \bar{p}'_i = \sum_i m_i \bar{v}'_i = 0 \Rightarrow \bar{p}' = \sum_i m_i (\bar{v}_i - \bar{v}_{CM}) = \sum_i m_i \bar{v}_i - \sum_i m_i \bar{v}_{CM} = \bar{p} - m_{TOT} \bar{v}_{CM} = 0$$

Andando infine a vedere l'accelerazione del centro di massa misurata nel centro di massa:

$$\bar{v}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{a}'_i}{\sum_i m_i} = \sum_i m_i \bar{a}'_i = 0$$

Questo rappresenta la risultante delle forze nel sistema di riferimento del centro di massa.

$$\Rightarrow \bar{R}' = \sum_i \bar{F}'_i = \sum_i m_i \bar{a}'_i = 0 \Rightarrow \bar{R}' = \sum_i m_i (\bar{a}_i - \bar{a}_{CM}) = \sum_i m_i \bar{a}_i - \sum_i m_i \bar{a}_{CM} = \sum_i \bar{F}_i - m_{TOT} \bar{a}_{CM} = 0$$

Parlando di termini associati al momento angolare, si consideri il momento angolare che ha come polo il centro di massa:

$$\bar{L}_{CM} = \sum_i \bar{L}_{i,CM} = \sum_i \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}_i = \sum_i \bar{r}'_i \times m_i (\bar{v}'_i + \bar{v}_{CM}) = \sum_i \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}'_i + \sum_i \bar{r}'_i \times m_i \bar{v}_{CM} =$$
$$= \sum_i \bar{L}'_{CM,i} + \sum_i m_i \bar{r}'_i \times \bar{v}_{CM} = \bar{L}'_{CM} \Rightarrow \bar{L}_{CM} = \bar{L}'_{CM}$$

Quindi, il momento angolare totale del sistema di punti misurato nel sistema di riferimento inerziale è uguale al momento angolare totale nel sistema di punti misurato nel sistema di riferimento del centro di massa.

Con un ragionamento del tutto analogo si può vedere che anche il momento delle forze esterne rispetto al centro di massa ha la stessa proprietà:

$$\bar{M}^E_{CM} = \bar{M}'^E_{CM}$$

A patto di prendere come polo il centro di massa, il teorema del momento angolare diventa:

$$\frac{d\bar{L}_{CM}}{dt} = \bar{M}^E_{CM} \Rightarrow \frac{d\bar{L}'_{CM}}{dt} = \bar{M}'^E_{CM}$$

Teoremi di Köning.

Sia un sistema di punti di cui tutte le caratteristiche in un sistema di riferimento inerziale sono note; per questo sistema di punti è possibile definire il momento angolare totale rispetto al polo O.

$$\bar{L}_O = \sum_i \bar{L}_{O,i} = \sum_i \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$$

Questa quantità si riscrive introducendo il sistema di riferimento del centro di massa.

$$\begin{aligned}
\bar{L}_O = \sum_i (\bar{r}_i' + \bar{r}_{CM}) \times m_i(\bar{v}_i' + \bar{v}_{CM}) = \\
&= \sum_i \bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_i' + \sum_i \bar{r}_i' \times m_i \bar{v}_{CM} + \sum_i \bar{r}_{CM} \times m_i \bar{v}_i' + \sum_i \bar{r}_{CM} \times m_i \bar{v}_{CM} = \\
&= \sum_i \bar{L}_{CM,i}' + \left(\sum_i m_i \bar{r}_i'\right) \times \bar{v}_{CM} + \bar{r}_{CM} \times \left(\sum_i m_i \bar{v}_i'\right) + \bar{r}_{CM} \times \sum_i m_i \bar{v}_{CM} = \\
&= \bar{L}_{CM}' + 0 + 0 + \bar{r}_{CM} \times m_{TOT} \bar{v}_{CM} = \bar{L}_{CM}' + \bar{L}_{O,CM}
\end{aligned}$$

È stato dimostrato che il momento angolare totale di un sistema, calcolato rispetto a un polo fisso come l'origine di un sistema di riferimento inerziale, può essere scomposto in due contributi fondamentali. Il primo contributo è il momento angolare del centro di massa, determinato rispetto allo stesso polo fisso e ottenuto trattando il centro di massa come un punto materiale con massa pari alla massa totale del sistema e velocità uguale a quella del centro di massa. Il secondo contributo, invece, è il momento angolare del sistema di punti, calcolato assumendo come polo il centro di massa stesso. Questa decomposizione, nota come **teorema di König per il momento angolare**, consente di scomporre il momento angolare totale in due termini: uno associato al moto del centro di massa e l'altro al moto dei punti rispetto al centro di massa. Facendo la derivata, si trova il momento delle forze esterne:

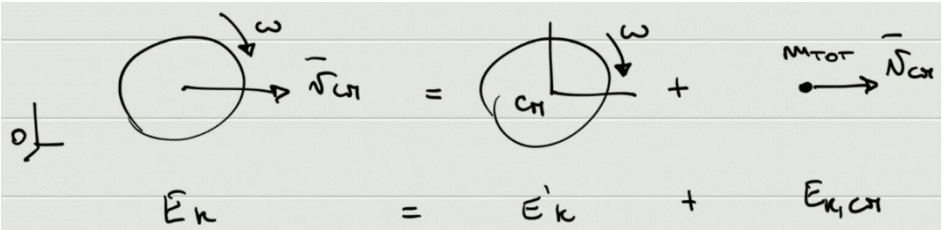
$$\bar{M}_O^E = \bar{M}_{CM}^E + \bar{M}_{O,CM}$$

Avendo lo stesso sistema, ora si calcola l'energia cinetica del sistema di punti nel sistema di riferimento inerziale.

$$\begin{aligned}
E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}_i' + \bar{v}_{CM})^2 = \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i 2\bar{v}_i' \cdot \bar{v}_{CM} = \\
&= \sum_i E_{k,i}' + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2 + \left(\sum_i m_i \, \bar{v}_i'\right) \cdot \bar{v}_{CM} = E_k' + \frac{1}{2} m_{TOT} v_{CM}^2 = E_k' + E_{k,CM}
\end{aligned}$$

L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali può essere espressa come la somma di due termini: l'energia cinetica misurata nel sistema di riferimento del centro di massa e l'energia cinetica nel sistema di riferimento inerziale del centro di massa stesso. Questa relazione è nota come **teorema di König per l'energia cinetica**.

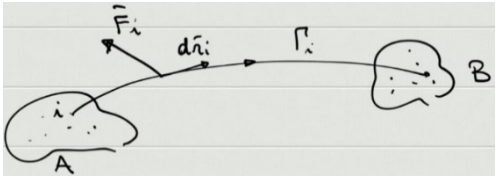
I due teoremi verranno applicati quando si tratteranno i corpi rigidi. Un esempio è il seguente:



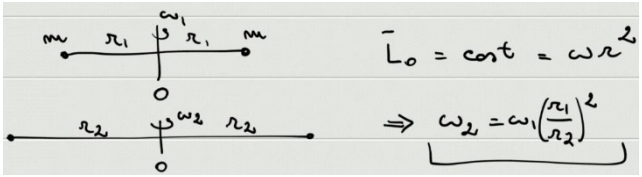
NB: Quando si trattano momento angolare e momento delle forze esterne, è fondamentale ricordare che queste grandezze sono associate al moto rotazionale del sistema. Al contrario, quantità di moto, risultante delle forze applicate ed energia cinetica (nel caso di moto traslatorio puro) sono grandezze legate al moto di traslazione del sistema.

Lavoro ed energie dei sistemi di punti.

Sia un sistema di punti in una configurazione iniziale chiamata A, i quali si spostano fino a giungere una configurazione B. Quello che si andrà a fare è estendere tutti i concetti visti per i punti al sistema di punti.



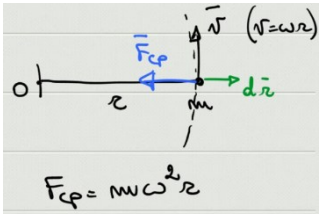
1. Lavoro elementare: $dW_i = \bar{F}_i\, d\bar{s}_i = \left(\bar{F}_i^I + \bar{F}_i^E\right) d\bar{s}_i = dW_i^I + dW_i^E$
2. Lavoro totale fatto dal sistema di punti: $W_{A\to B} = \sum_i W_{i,A\to B} = \sum_i \int_A^B dW_i = W_{A\to B}^I + W_{A\to B}^E$
   - Il lavoro infinitesimo associato alle forze interne tra due punti:
     $$dW^{ij} = \bar{F}_{ji} d\bar{r}_i + \bar{F}_{ij} d\bar{r}_j = \bar{F}_{ji} d\bar{r}_i - \bar{F}_{ji} d\bar{r}_j = \bar{F}_{ji}\left(d\bar{r}_i - d\bar{r}_j\right)$$
     $$= \bar{F}_{ji} d\left(\bar{r}_i - \bar{r}_j\right) = \bar{F}_{ji} d\bar{r}_{ji} \neq 0 \Rightarrow W^I \neq 0$$
3. Teorema dell'energia cinetica: $W_{TOT,A\to B} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$
   - Se sono applicate solo forze conservative: $W_{A\to B} = -\Delta E_p$
   - Se sono applicate forze non conservative: $W_{A\to B} = W_{fc,A\to B} + W_{nc,A\to B} = -\Delta E_p + W_{nc} = \Delta E_k \Rightarrow W_{nc} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_m$



Esempio: riprendendo l'esempio della sbarretta telescopica, si faccia il calcolo energetico. L'energia cinetica totale del sistema di due punti iniziale e finale è uguale a:

$$\begin{cases} E_{k,1} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 = m(\omega_1 r_1)^2 \\ E_{k,2} = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_2^2 = m(\omega_2 r_2)^2 = m\omega_1^2 \frac{r_1^4}{r_2^4} r_2^2 = m\omega_1^2 \frac{r_1^4}{r_2^2} \end{cases} \Rightarrow \Delta E_k = E_{k,2} - E_{k,1} = m\omega_1^2 r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right) < 0$$

Il sistema, anche se isolato, ha perso energia perché c'è un lavoro delle forze interne, in questo caso la tensione.



$$\Delta E_k = W_{TOT} = W_{1\to 2}^I = \int_1^2 dW^I = 2\int_1^2 \bar{F}_{cp}\, d\bar{r} = -2\int_{r_1}^{r_2} m\omega^2 r\, d\bar{r}$$

Siccome il momento angolare è costante, si osserva che:

$$\omega_1 r_1^2 = \omega(r) r^2 \to \omega(r) = \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

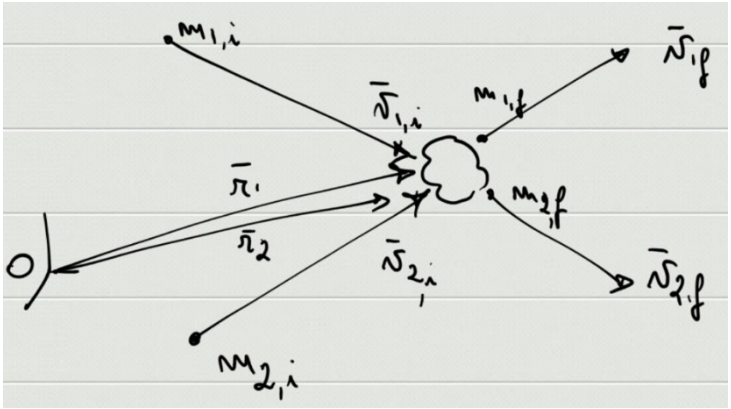
E sostituendo:

$$W_{1\to 2}^{I} = -2\int_{r_1}^{r_2} m\omega_1^2 \frac{r_1^4}{r^4} r\, d\bar{r} = -2m\omega_1^2 r_1^4 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^3} d\bar{r} = -2m\omega_1^2 r_1^4 \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r^2}\bigg|_{r_1}^{r_2} = m\omega_1^2 r_1^4 \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) =$$

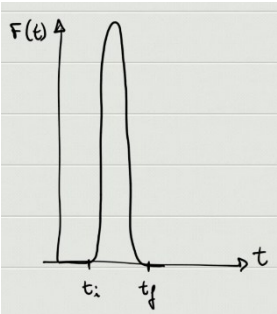
$$= m\omega_1^2 r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right)$$

Urti tra punti materiali

Si definisce un **urto** come l'interazione tra due corpi che entrano in contatto diretto o, più in generale, che modificano il proprio stato di moto a causa di un'interazione a distanza. In questo contesto si considereranno urti tutte le interazioni che avvengono in un intervallo di tempo molto breve, tale per cui la variazione delle coordinate che definiscono la posizione dei singoli punti dei corpi risulti trascurabile ($\bar{r}_1 \approx cost., \bar{r}_2 \approx cost.$).



L'intervallo di tempo in cui avviene l'urto, indicato con τ, è definito come la differenza fra l'istante iniziale e finale $\tau = \Delta t = [t_i, t_f]$. Una caratteristica fondamentale degli urti è che, durante l'interazione, agiscono forze di intensità molto elevata, dette *forze interne e impulsive*. La presenza di queste forze impulsive comporta una variazione della quantità di moto totale del sistema.



$$\bar{p}_i = m_1\bar{v}_{1,i} + m_2\bar{v}_{2,i}$$
$$\bar{p}_f = m_1\bar{v}_{1,f} + m_2\bar{v}_{2,f}$$

Ci sono diverse questioni da prendere in considerazione. Se il sistema è isolato, per il teorema del centro di massa la risultante delle forze esterne è uguale anche a:

$$\bar{R}^E = 0 = m_{TOT}\bar{a}_{CM} \to \bar{v}_{CM} = cost.$$

Di conseguenza:

$$\bar{p} = m_{TOT}\bar{v}_{CM} = cost. \Rightarrow \bar{p}_i = m_1\bar{v}_{1i} + m_2\bar{v}_{2i} = m_1\bar{v}_{1f} + m_2\bar{v}_{2f} = \bar{p}_f \quad (*)$$

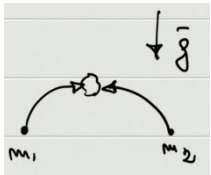
In particolare:

$$\Delta\bar{p}_1 = m_1\bar{v}_{1,f} - m_1\bar{v}_{1,i} = \bar{J}_{21} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{21}\, dt \neq 0$$

$$\Delta\bar{p}_2 = m_1\bar{v}_{2,f} - m_2\bar{v}_{2,i} = \bar{J}_{12} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{12}\, dt \neq 0$$

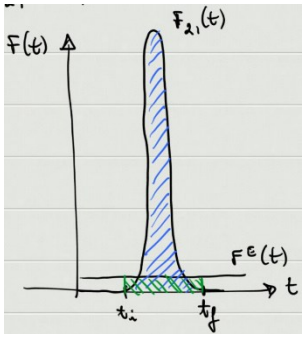
$$\rightarrow \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \Rightarrow \Delta\bar{p}_1 = -\Delta\bar{p}_2$$

Questo può essere dimostrato anche tramite $(*)$. Nel caso in cui $\bar{R} \neq 0$, la quantità di moto totale non si conserva. Tuttavia, si può osservare che l'intensità di una forza esterna non impulsiva risulta trascurabile rispetto all'ampiezza della forza impulsiva coinvolta nell'urto.



$$\Delta\bar{p}_1 = \Delta\bar{p}_1^I + \Delta\bar{p}_1^E = \bar{J}_{21} + \bar{J}_1^E = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}_{21}(t)\, dt + \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}^E(t)\, dt =$$

$$= [\langle\bar{F}_{21}\rangle_\tau + \langle\bar{F}^E\rangle_\tau]\tau \approx \langle\bar{F}_{21}\rangle_\tau\tau \Rightarrow \bar{p} = cost.$$



Si può quindi considerare trascurabile la variazione della quantità di moto dovuta alle forze esterne, anche se il sistema non è effettivamente isolato: durante il brevissimo intervallo di tempo in cui avviene l'urto, il loro effetto risulta minore rispetto a quello delle forze impulsive interne. Se però sono presenti forze esterne impulsive, come nel caso di un corpo vincolato, la quantità di moto totale del sistema non si conserva.

$$\bar{p} \neq cost$$

Dal punto di vista energetico, nel caso degli urti vale il teorema della non conservazione dell'energia meccanica quando sul sistema agiscono forze di tipo non conservativo. Ricordando che l'energia meccanica è stata definita come somma di energia cinetica e potenziale e che l'energia potenziale è funzione delle coordinate spaziali in gioco:

$$\bar{r}_i \approx cost. \rightarrow E_p = cost. \Rightarrow \Delta E_p = 0$$

Ecco che il teorema della non conservazione dell'energia meccanica diventa:

$$W_{nc} = \Delta E_k \rightarrow \begin{cases} forze\ cons.: W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E_k = 0 & (1) \\ forze\ n.cons.: W_{nc} \neq 0 \Rightarrow \Delta E_k = W_{nc} & (2) \end{cases}$$

Per distingue questi due casi, si parlerà di:

1. *urti elastici*: $E_{k,i} = E_{k,f}$
2. *urti anelastici*

Per il teorema di Köning, l'energia cinetica può essere scritta come:

$$E_k = E'_k + E_{k,CM} = \left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$$

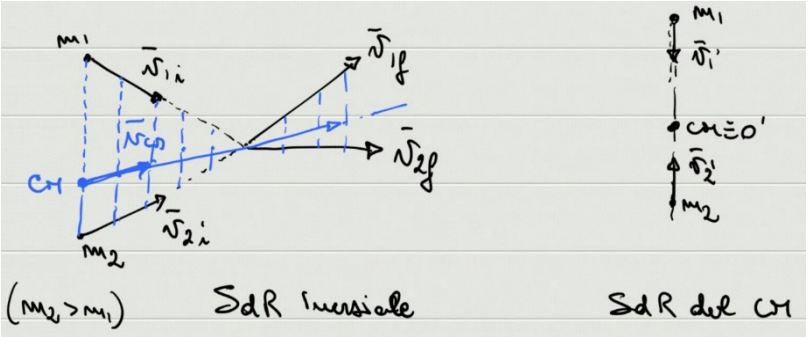
Andando a calcolare la variazione di energia cinetica:

$$\Delta E_k = \left(E'_{k,f} + E_{k,CM,f}\right) - \left(E'_{k,i} + E_{k,CM,i}\right) = \Delta E'_k$$

La variazione di energia cinetica corrisponde alla variazione di energia cinetica nel centro di massa, cioè possiamo fare il calcolo indipendentemente dal sistema considerato. Questo calcolo può essere più conveniente nel caso in cui:

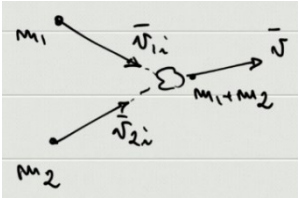
$$\bar{p}' = m_{TOT}\bar{v}'_{CM} = 0 = \sum_i \bar{p}' = m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2 \Rightarrow \bar{p}'_1 = m_1\bar{v}'_1 = -m_2\bar{v}'_2 = -\bar{p}'_2$$

Questo implica che, quando ci si pone nel sistema di riferimento del centro di massa, i due punti si avvicinano al centro di massa: l'urto è solo unidirezionale.



Urto completamente anelastico

Un **urto completamente anelastico** rientra nella categoria degli urti per cui vale la conservazione della quantità di moto totale, ma non la conservazione dell'energia cinetica.



$$\bar{p} = cost. \quad E_k \neq cost.$$

Un urto è di tipo completamente anelastico quando, a seguito dell'interazione tra due corpi, il risultato è quello di un unico oggetto che viaggia. La quantità di moto totale del sistema:

$$\bar{p} = m_1\bar{v}_{1,i} + m_2\bar{v}_{2,i} = (m_1 + m_2)\bar{v} = m_{TOT}\bar{v}_{CM}$$

Si può dire che, andando a vedere la variazione della quantità di moto:

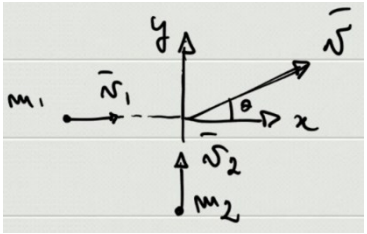
$$\Delta\bar{p}_1 = m_1\bar{v} - m_1\bar{v}_{1,i} = -\left(m_2\bar{v} - m_2\bar{v}_{2,i}\right) = -\Delta\bar{p}_2$$

Per quanto riguarda la variazione di energia:

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 - \left(\frac{1}{2}m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,i}^2\right)$$

NB: l'energia è quella che si ha nel sistema di riferimento del centro di massa.

Esempio: si supponga di avere un urto bidimensionale in cui due corpi, perpendicolari tra loro, si urtano. L'urto è completamente anelastico e avviene nell'origine di un sistema di riferimento. Bisogna determinare l'angolo θ e la velocità del corpo, scrivendo l'equazione della conservazione della quantità di moto.

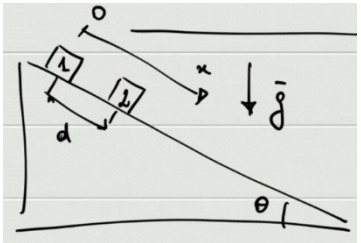


$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{v}$$

NB: negli urti bidimensionali le velocità sono quantità vettoriali, quindi le grandezze vanno scritte col segno del vettore, altrimenti si lavorerebbe coi moduli.

$$\begin{matrix} x: \\ y: \end{matrix} \begin{cases} m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \cos\theta \\ m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \sin\theta \end{cases} \rightarrow \tan\theta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} \rightarrow m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 = (m_1 + m_2) v^2$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}}{m_1 + m_2}$$



Esempio: in un piano inclinato di un angolo θ vi sono due corpi separati da una distanza d, bisogna determinare la velocità dopo l'urto completamente anelastico. Questo è uno dei casi in cui il sistema non è isolato per la presenza della forza peso, però il suo contributo ai fini dei calcoli è trascurabile. L'equazione del moto dei due corpi è la seguente:

$$\begin{matrix} 1: x_1(t) = v_{0,1} t + \frac{1}{2} a t^2 \\ 2: x_2(t) = d + v_{0,2} t + \frac{1}{2} a t^2 \end{matrix} \rightarrow x_1(t^*) = x_2(t^*) \Rightarrow v_{0,1} t^* + \frac{1}{2} a t^{*^2}$$

$$= d + v_{0,2} t^* + \frac{1}{2} a t^{*^2}$$

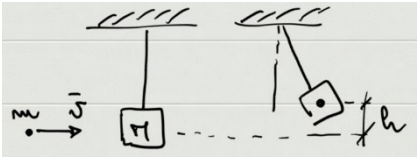
$$\Rightarrow t^* = \frac{d}{v_{0,1} - v_{0,2}}$$

Applicando ora la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1(t^*) + m_2 v_2(t^*) = (m_1 + m_2) v^*$$

$$\begin{matrix} v_1(t) = v_{0,1} + at \\ v_2(t) = v_{0,2} + at \end{matrix} \rightarrow m_1 v_{0,1} + m_1 a t^* + m_2 v_{0,2} + m_2 a t^* = (m_1 + m_2) v^*$$

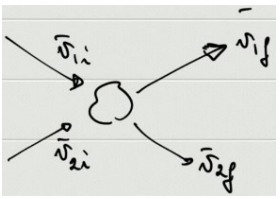
$$\Rightarrow v^* = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} + a t^* = v_{CM,0} + a t^*$$



Esempio (pendolo balistico): un corpo sospeso di massa M viene colpito da un proiettile che si conficca, il corpo si mette in moto e si alza di una quantità h. Dalla misura di h è possibile determinare la velocità del proiettile. Vi sono due equazioni: la prima è la conservazione della quantità di moto e la seconda la conservazione dell'energia:

$$\begin{cases} mv = (m + M) V \rightarrow V = \frac{m}{m + M} v \\ \frac{1}{2} (m + M) V^2 = (m + M) g h \end{cases} \rightarrow \frac{m^2}{(m + M)^2} v^2 = 2gh \Rightarrow v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh}$$

Urto elastico



Un **urto elastico** rientra nella categoria degli urti per cui vale sia la conservazione della quantità di moto totale, che la conservazione dell'energia cinetica.

$$\bar{p} = cost. \quad E_k = cost.$$

Anche conoscendo le condizioni iniziali, tuttavia, le equazioni derivate da questi principi non sono sufficienti a definire completamente l'esito dell'urto, poiché il sistema risulta sotto determinato. Per approfondire l'analisi, è utile estendere il problema a un contesto tridimensionale: in questo caso, la conservazione della quantità di moto, essendo una grandezza vettoriale, fornisce tre equazioni (una per ogni direzione spaziale), mentre la conservazione dell'energia cinetica contribuisce con un'unica

equazione scalare. Le incognite da determinare sono in totale sei. Se si considera invece un urto in due dimensioni, le equazioni si riducono a tre (due per la quantità di moto e una per l'energia), mentre le incognite scendono a quattro. Infine, nel caso monodimensionale, le equazioni diventano due (una per la quantità di moto e una per l'energia), e le incognite si limitano a due, rendendo il sistema risolvibile in modo univoco.

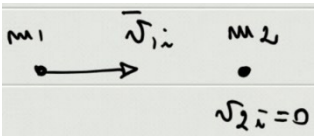
La soluzione in una dimensione si trova risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} v_{1,f} = \dfrac{(m_1 - m_2) v_{1,i} + 2 m_2 v_{2,i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2,f} = \dfrac{(m_2 - m_1) v_{2,i} + 2 m_1 v_{1,i}}{m_1 + m_2} \end{array}$$

Si introduce R il rapporto tra l'energia cinetica finale del corpo 2 e l'energia cinetica iniziale del corpo 1, tale che la sua radice sia il *coefficiente di restituzione*, un parametro che dà indicazione pratica di quanta energia cinetica venga trasferita tra i due corpi.

$$R = \frac{E_{k_{2,f}}}{E_{k_{1,i}}}$$

Esempio: un copro di massa m_1 urta un corpo di massa m_2 inizialmente fermo. Si vuole studiare l'urto in condizioni diverse, in particolare al variare della massa dei due corpi.



$$\begin{array}{l} v_{1,f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,i} \\ v_{2,f} = \dfrac{2 m_1}{m_1 + m_2} v_{1,i} \end{array} \rightarrow R = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2}{\frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2} = \frac{m_2}{m_1} \frac{\frac{4 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{1,i}^2}{v_{1,i}^2} = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Analizzando i vari casi di interesse:

- $m_1 = m_2 = m$ (urto delle palle da biliardo): $v_{1,f} = 0, \quad v_{2,f} = v_{1,i}, \quad R = 1$
- $m_1 \gg m_2$: $v_{1,f} \approx \frac{m_1}{m_1} v_{1,i} = v_{1,i}, \quad v_{2,f} \approx \frac{2 m_1}{m_1} v_{1,i} = 2 v_{1,i}, \quad R \approx \frac{4 m_1 m_2}{m_1^2} \approx 0$
- $m_1 \ll m_2$: $v_{1,f} \approx \frac{-m_2}{m_2} v_{1,i} = -v_{1,i}, \quad v_{2,f} \approx \frac{2 m_1}{m_2} v_{1,i} \approx 0, \quad R = \frac{4 m_1 m_2}{m_2^2} \approx 0$

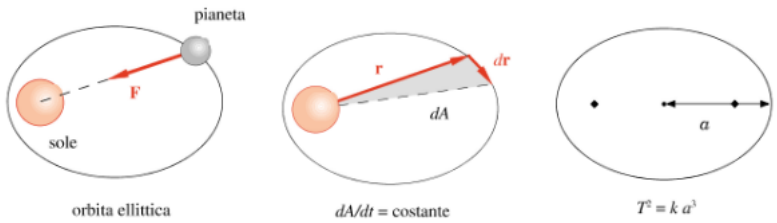
Gravitazione universale

Nella sua storia l'uomo è sempre stato affascinato dal movimento dei corpi celesti sopra la propria testa, dalle stelle che si muovono formando un arco. A seguito di questo mistero è sorta la necessità di spiegare che cosa stesse accadendo. La prima visione socialmente accettata fu quella *tolemaica* formulata da Tolomeo nel II sec. d.C.; la **visione geocentrica** sostiene come la Terra sia posta al centro dell'universo con le sfere celesti contenenti i pianeti che ruotano attorno ad essa. Cinque secoli prima Aristarco parlò di *eliocentrismo*.

La visione geocentrica rimase diffusa fino al XVI sec. d.C. quando Niccolò Copernico espresse la sua **teoria eliocentrica** nel 1543 con il *De revolutionibus orbium coelestium (Sulle rivoluzioni dei corpi celesti)*, l'opera che segnò l'inizio della "rivoluzione scientifica".

Fu Tycho Brahe, scienziato danese, il primo a pensare di osservare e misurare la posizione di stelle e pianeti mentre si muovevano. Se Brahe fu un grandissimo osservatore, il suo assistente Johannes Kepler fu un brillante matematico; infatti, riprese le misure del maestro e formulò le tre leggi che prendono il suo nome.

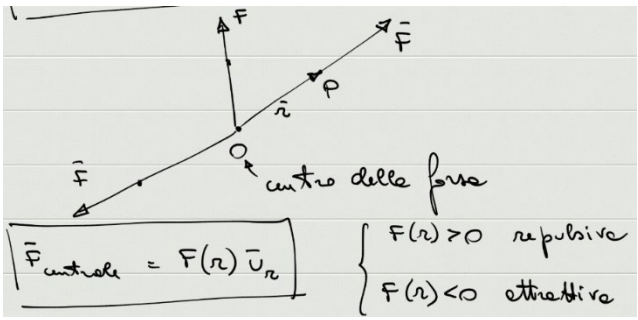
1. I pianeti si muovono su orbite ellittiche, di cui il sole occupa uno dei fuochi
2. Prendendo il raggio vettore che individua la posizione del pianeta in un istante, si nota che le aree spazzate dal raggio vettore per intervalli di tempo uguali sono tutte uguali
3. Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse



Queste leggi rispondevano alla cinematica, tuttavia non vi erano risposte per le domande relative alla dinamica.

Capire il perché tali pianeti si muovono era una questione di notevole importanza, che impiegava le più brillanti menti d'Europa. Isaac Newton, colui che descrisse i moti di orbita grazie al calcolo differenziale, dimostrò come la seconda legge di Keplero corrisponde ad asserire l'esistenza di una forza risentita da tutti i pianeti e diretta verso il Sole. Nel corso si dimostrerà ciò seguendo il ragionamento opposto, ossia che se esiste una forza centrata nel Sole, allora è valida la seconda legge.

Una **forza centrale** è una forza che agisce lungo una retta che congiunge il punto di applicazione con un punto fisso, detto *centro della forza*.



La forza centrale è una forza conservativa perché:

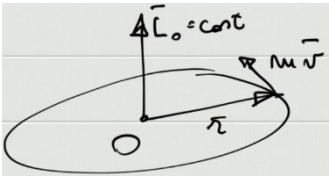
$$W_{A\to B} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B F(r)\bar{u}_r \, d\bar{s} = \int_A^B F(r)\, d\bar{s} \cos\theta = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\, d\bar{r} = f(r_B) - f(r_A)$$

Si consideri ora il centro della forza O come polo. Il momento angolare di una forza centrale, assumendo come polo il centro stesso della forza, è:

$$\bar{L}_O = cost. \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}(r) = 0 \\ \bar{M}_O = \dfrac{d\bar{L}_O}{dt} \end{cases}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta \Rightarrow \bar{L}_O = \bar{r} \times m(\bar{v}_r + \bar{v}_\theta) = \bar{r} \times m\bar{v}_\theta$$

Quindi il momento angolare è costante in direzione e modulo e risulta perpendicolare al piano, ne consegue che il moto possa solo avvenire in un piano.



Il fatto che il modulo del momento angolare sia costante dice che:

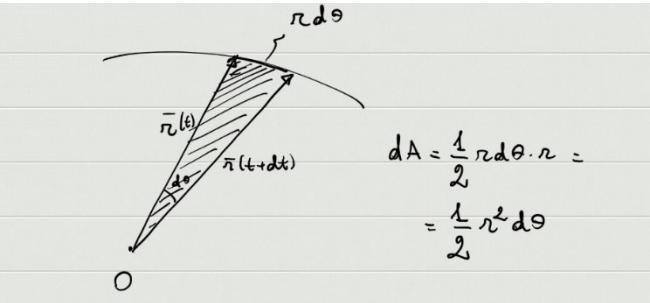
$$|\bar{L}_O| = |r \times m\bar{v}| = |\bar{r} \times m(\bar{v}_r + \bar{v}_\theta)| = \left|\bar{r} \times mr \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \bar{u}_\theta\right| = mr^2\frac{d\theta}{dt} = cost.$$

Assumendo la massa costante, di conseguenza $r^2\frac{d\theta}{dt} = cost.$.

L'area spazzata in un intervallo di tempo è pari a:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

In cui $\frac{dA}{dt}$ rappresenta l'area spazzata in un intervallo di tempo, che è costante ed è detta *velocità areale* e ha un significato simile a quello della velocità angolare. Assumere che il Sole sia il centro di una forza centrale a cui il pianeta è sottoposto dice che l'area percorsa nell'unità di tempo è costante, perché costante il fattore $r^2\frac{d\theta}{dt}$: la seconda legge di Keplero è verificata.



Per semplificazione si supponga ora che la traiettoria percorsa dal corpo sia circolare, ciò equivale a dire che il raggio è costante in modulo. Dire che il raggio è costante, equivale a dire che $\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{2\pi}{T} = cost.$ Questa forza centrale è una forza centripeta perché il pianeta compie un moto circolare uniforme e la componente tangenziale della forza è nulla:

$$\bar{F}_{SP} = m_P a_N = m_P \omega_P^2 r_{SP} = m_P \frac{4\pi^2}{T_P^2} r_{SP} = m_P \frac{4\pi^2}{k r_{SP}^3} r_{SP} = m_P \frac{4\pi^2}{k r_{SP}^2}$$

Così facendo è dimostrato che la forza dipende dal quadrato della distanza. Estendendo l'equazione a tutti i pianeti si nota come la forza dipenda unicamente dalla massa.

Facendo riferimento alla terza legge di Newton si ha che la forza che il Sole esercita sul pianeta è uguale in modulo a quella che il pianeta esercita sul Sole:

$$\bar{F}_{SP} = \bar{F}_{PS} \Rightarrow \frac{m_P}{k_S} = \frac{m_S}{k_P} \Rightarrow m_P k_P = m_S k_S \ = cost.$$

Riscrivendo la forza:

$$\bar{F}_{SP} = \frac{4\pi^2}{k_S}\frac{m_P}{r_{SP}^2}\frac{m_S}{m_S} = \frac{4\pi^2}{k_S m_S}\frac{m_S m_P}{r_{SP}^2} = \ \gamma\frac{m_P m_S}{r_{SP}^2}$$

Dove $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\left(\frac{Nm^2}{kg^2} = \frac{m^3}{kgs^2}\right)$. Più in generale:

$$\bar{F}_{12} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\bar{u}_{12}$$

Per capire se tale legge funzionava, essa venne applicata alla Terra. Questa forza è l'espressione generale di quello che sulla Terra viene chiamata *forza peso*.

$$P = mg = \gamma\frac{m_T m}{r_T^2} \Rightarrow g = \gamma\frac{m_T}{r_T^2}$$

La forza che la Terra esercita sulla Luna è uguale a

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_{TL} &= \gamma\frac{m_T m_L}{r_{TL}^2} \\ \bar{F}_{TL} &= m_L a_N = m_L \omega_L^2 r_{TL} \end{aligned}\right\} \rightarrow \gamma m_T = \omega_L^2 r_{TL}^3 \Rightarrow \gamma = \frac{\omega_L^2 r_{TL}^3}{m_T}$$

Nel 1687 Newton pubblicò i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, un trattato di tre libri nei quali enunciò le leggi della dinamica e la legge della gravitazione universale.

Massa inerziale e gravitazionale

Nella seconda legge di Newton, $F = ma$, compare la massa definita come inerzia, ovvero la capacità con cui un corpo si oppone a una qualsiasi sollecitazione e si dovrebbe indicare più propriamente con m_I. Nella legge di gravitazione universale, invece, il concetto di massa è indipendente dalla forza che si applica: esso è intrinsecamente diverso perché è una proprietà della forza e prende il nome di *massa gravitazionale*. Non è detto a priori che queste due masse siano la stessa cosa.

I due concetti di massa, sebbene non identici, sono coincidenti perché sperimentalmente si verifica che $m_G = cm_I$, secondo il *principio di equivalenza*. Analizzando la forza peso si ha che:

$$P = m_I g = \gamma\frac{m_{I_T} \cdot m_I}{r_T^2} = \gamma\frac{\frac{m_{GT}}{c} \cdot \frac{m_G}{c}}{r_T^2}$$

e chiamando $\gamma^* = \frac{\gamma}{c^2}$:

$$P = \ \gamma^*\frac{m_{GT} \cdot m_G}{r_T^2}$$

Allora si può considerare la forza di gravità come:

$$\bar{F}_G = -\gamma^* \frac{m_G m'_G}{r^2} \bar{u}_r$$

Facendo un confronto tra la forza peso scritta in questo modo e scritta utilizzando la massa inerziale, si verifica l'equivalenza tra le due ricavando l'espressione di g.

$$P = \gamma^* \frac{m_{GT} m_G}{r_T^2} = m_I g \Rightarrow g = \gamma^* \frac{m_{GT} m_G}{r_T^2 m_I} = \frac{\gamma}{c} \frac{c m_{I_T}}{r_T^2} c = \gamma \frac{m_{I\,T}}{r_T^2}$$

Il fatto che precedentemente sia stata utilizzata la massa inerziale al posto di quella gravitazionale è dovuto al fatto che, convenzionalmente, si è considerato $c = 1 \Rightarrow\ m_G = m_I$.

$$c = \frac{m_G}{m_I} = 1\ \Rightarrow \gamma^* = \gamma$$

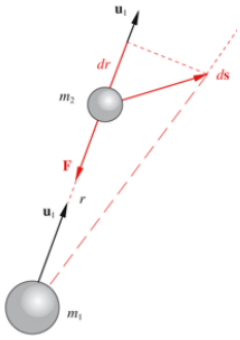
Newton si chiese se ci fossero differenze circa il valore di c al variare del materiale. Con l'esperimento della misura di un pendolo semplice a cui collegò masse di materiali differenti dimostrò l'invarianza della costante c con un'accuratezza dello 0,1% ca.

Energia potenziale gravitazionale

Dal momento che tutte le forze centrali sono conservative, anche la forza gravitazionale lo è e quindi è possibile associarle un'energia potenziale.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \bar{F}_G\, ds = \int_A^B \left(-\gamma \cdot \frac{mm'}{r^2} \cdot \bar{u}_r\right) ds = -\gamma \cdot mm' \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = -\gamma \cdot mm' \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \gamma \cdot mm' \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$
$$= -\Delta E_{p,G}$$

$$\Rightarrow E_{p,G} = -\gamma \frac{mm'}{r} + cost.$$



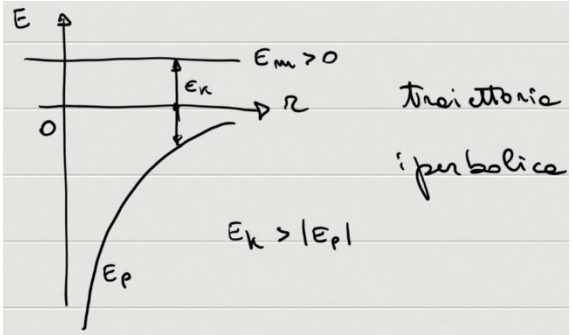
Per $r \to \infty$ non c'è più effetto della forza; l'energia quindi tende a zero.

$$E_{p,G_1^{(r\to\infty)}} \to 0 \Rightarrow cost. = 0$$

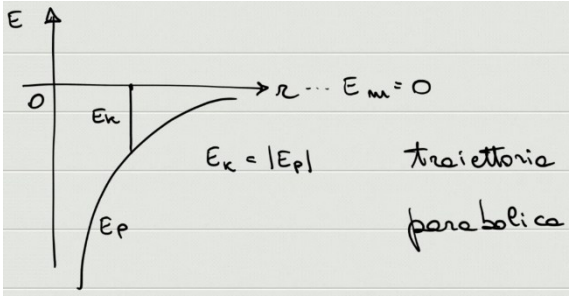
L'energia è negativa, ciò non deve preoccupare dal momento che è abitudine associare all'energia un valore positivo; quello che importa è quanto essa varia a mano a mano che un corpo si sposta da una posizione a un'altra.

Il fatto che l'energia potenziale sia negativa ha delle conseguenze osservabili dal grafico sottostante. La variazione di energia cinetica di un corpo soggetto all'attrazione gravitazionale può essere studiata in tre casi, a seconda che $E_m = E_k + E_p = cost. \begin{cases} > 0 \\ = 0. \\ < 0 \end{cases}$

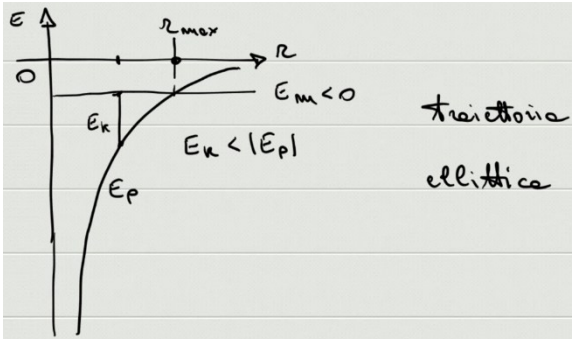
1. Nel caso di $E_m < 0$, un corpo che viaggia nel sistema solare con componente di velocità che non punta verso il Sole, risente della forza di gravità della stella e compie una traiettoria di tipo *iperbolica*.



2. Nel caso di $E_m = 0$, un corpo che viaggia nel sistema solare con componente di velocità che non punta verso il Sole, risente della forza di gravità della stella e compie una traiettoria di tipo *parabolico*.



3. Nel caso di $E_m < 0$, un corpo che viaggia e risente della gravità del Sole riesce a raggiungere un raggio massimo quando l'energia cinetica si esaurisce, compiendo una traiettoria di tipo *ellittico*. Questa è la situazione che comporta il moto dei pianeti.



Campo gravitazionale

Si supponga di essere nel vuoto e di avere un corpo di massa m a una distanza r da un punto P di massa m_1. In questo caso la forza vale:

$$\bar{F}_{1,P} = -\gamma \frac{m m_1}{r_P^2} \bar{u}_P$$

Variando i punti e le masse prese in considerazione, tutte le forze presentano un termine comune del tipo $-\gamma \frac{m}{r^2} \bar{u}_r$. Le forze si possono riscrivere isolando tale termine introducendo il **vettore campo gravitazionale**.

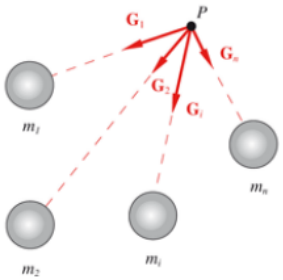
$$\bar{G}(m, \bar{r}) = -\gamma \frac{m}{r^2} \bar{u}_r = -\gamma \frac{m}{r^3} \bar{r}$$

Le forze vengono riscritte in maniera compatta come segue:

$$\bar{F}_{1,P} = m_1 \bar{G}(m, \bar{r}_P)$$

In maniera generale, la forza si riscrive

$$\bar{F} = m'\bar{G}(m, \bar{r})$$



Questo nuovo vettore $\bar{G}$ è associato sia al corpo, che alle posizioni nello spazio. Questo definisce un **campo vettoriale** perché in ogni punto dello spazio vi sarà un vettore che ha un certo significato. L'importanza di un vettore associato allo spazio risiede nella possibilità di esprimere l'interazione tra i corpi o in termini di forza o in termini di interazione spaziale.

Il Sole messo in un punto dello spazio altera le sue proprietà, creando un **campo gravitazionale**, la Terra risente che lo spazio non è più isotropo: l'interazione non è più tra Terra e Sole, bensì tra Terra e il punto dello spazio in cui si trova.

Trattandosi di una grandezza vettoriale, le varie forze si possono sommare; ecco che si perde il concetto di centro della forza. Più in generale si svincolerà il campo gravitazionale dalla massa e si parlerà di campo gravitazionale in un punto dello spazio.

Per ricavare il campo gravitazionale si è partiti dalla forza e dalla massa m'; un ragionamento analogo si può fare a partire dall'energia potenziale, isolando m' e introducendo il **potenziale gravitazionale**.

$$V(m, r) = -\gamma \frac{m}{r}$$

L'energia potenziale viene riscritta in maniera compatta come segue:

$$E_p = -\gamma \frac{mm'}{r} = m'V(m, r)$$

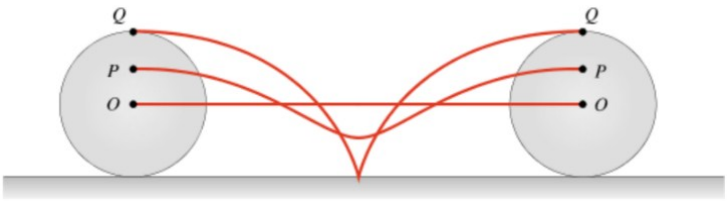
In dinamica di parlava di forze ed energia potenziale associata ad esse; in termini campo e potenziale se si mette nello spazio un corpo di massa m', risentirà di una forza $\bar{F} = m'\bar{G}(m, \bar{r})$ e acquisirà un'energia potenziale $E_p = m'V(m, r)$. A partire da questo si può anche determinare il lavoro:

$$w_{A \to B} - \Delta E_p = -m'\Delta V$$

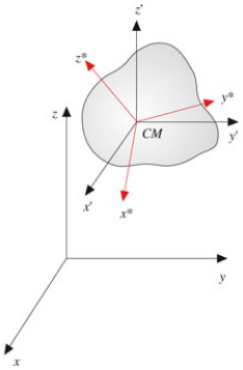
Corpi rigidi

Finora è stato analizzato il trattamento dei punti materiali e dei sistemi di punti. Si definisce **corpo rigido** un oggetto esteso nello spazio tridimensionale le cui distanze relative tra i singoli punti rimangono invariate. Un corpo rigido può essere considerato anche un corpo continuo nello spazio.

Se il corpo viene schematizzato come un sistema di punti, il moto del centro di massa risulta rettilineo. Tuttavia, considerando un punto diverso dal centro di massa, la descrizione del moto diventa più complessa, in quanto è data dalla combinazione di un moto di traslazione e un moto di rotazione.



Per studiare il moto di un corpo rigido, si introduce un sistema di riferimento solidale al corpo, con assi x^*, y^*, z^*.In tale sistema, i singoli punti non cambiano posizione, quindi il raggio vettore che unisce l'origine del sistema di riferimento al punto rimane costante. La descrizione del moto del corpo rigido coincide con quella del sistema di riferimento solidale ad esso.

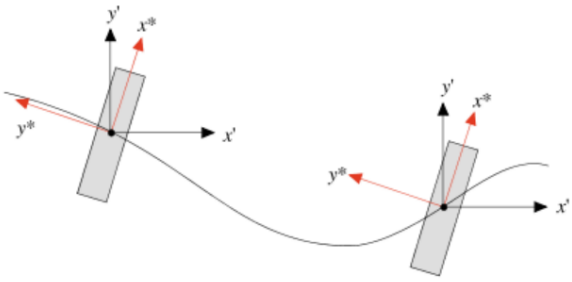


Per descrivere completamente il moto di un corpo rigido, sono necessari **sei gradi di libertà**: tre coordinate spaziali per definire la posizione del centro di massa e tre angoli per descrivere l'orientazione del sistema di riferimento solidale rispetto a un sistema inerziale.

<u>Moto di traslazione.</u> Tutti i punti si muovono in orizzontale con la stessa velocità, ossia $\bar{v}_i = \bar{v}_j, i \neq j$ e $\omega_i = 0$. Per il teorema del moto del centro di massa $\bar{R}^E = m\bar{a}_{CM} \Rightarrow \bar{q} = m\bar{v}_{CM}$. Ai fini dello studio del moto, questo corpo si può considerare come un punto in cui tutta la massa è concentrata nel centro di massa.

Per l'energia cinetica vale il teorema di König; dal momento che il corpo non ruota, i sistemi del corpo rigido e del centro di massa coincidono. Ecco che vale: $E_k = E'_k + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$.

Per il momento angolare sarà: $\bar{L}_0 = \bar{L}'_{CM} + \bar{r}_{CM} \times m\bar{v}_{CM} = \bar{r}_{CM} \times m\bar{v}_{CM}$

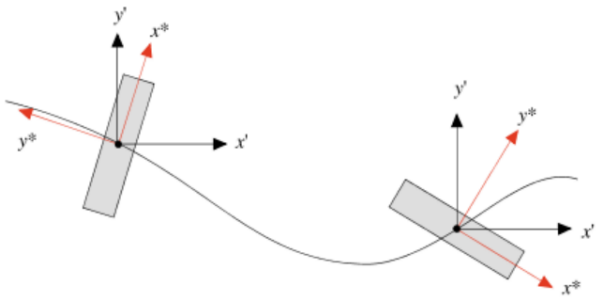


<u>Moto di rototraslazione.</u> Il moto di un corpo rigido è sempre una rototraslazione, almeno a livello infinitesimo. Per il teorema delle velocità relative si ha che $\bar{v}_P = \bar{v}'_p + \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \overline{OP}$. Passando alla forma differenziale:

$$\frac{d\bar{r}_P}{dt} = \frac{d\bar{r}_o}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\omega \times \overline{OP} \;\Rightarrow d\bar{r}_P = d\bar{r}_o + d\theta\bar{u}_\omega \times \overline{OP}$$

Analogamente per il punto Q si ha: $d\bar{r}_Q = d\bar{r}_o + d\theta\bar{u}_\omega \times \overline{OQ}$.

Se si fa la differenza tra i $d\bar{r}$ si ottiene: $d\bar{r}_P - d\bar{r}_Q = d\theta\bar{u}_\omega \times (\overline{OP} - \overline{OQ}) \Rightarrow d\bar{r}_P = d\bar{r}_Q + d\theta\bar{u}_\omega \times \overline{QP}$. Ciò significa che il corpo ha fatto una traslazione e una rotazione attorno a Q, ossia si ha la stessa posizione finale rispetto a un punto diverso; ne consegue che ci sono infiniti modi diversi per descrivere la rototraslazione e sono tutti equivalenti.



Parlando di corpo rigido è bene porre attenzione sul significato di **corpo continuo**, ossia come un corpo costituito da un insieme di tanti volumi infinitesimi dV aventi massa dm detti **elementi di massa** o di **volume**. Si considereranno questi elementi di massa come punti: se prima $\bar{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$, adesso è possibile estendere questa definizione a un sistema continuo e non ai singoli punti, ecco che:

$$\Rightarrow \bar{r}_{CM} = \frac{\int_{corpo} \bar{r}\, dm}{\int_{corpo} dm} = \frac{1}{m}\int_{corpo} \bar{r}\, dm$$

Per riuscire a risolvere l'integrale si introduce una nuova grandezza: la **densità**. La densità si definisce come $\rho = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z)$. Qualora la densità sia uniforme, si parlerà di corpi *omogenei*, altrimenti di *non omogenei*.

$$dm = \rho\, dV \Rightarrow \bar{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_{volume} \bar{r}\rho\, dV$$

Matematicamente parlando si lavora con un integrale triplo

$$\int_z^{z+\Delta z}\int_y^{y+\Delta y}\int_x^{x+\Delta x} (x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Nel corso si avrà a che fare con corpi la cui densità è costante. Ecco che allora l'integrale diventa:

$$\bar{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_{volume} \bar{r}\rho\, dV = \frac{1}{\rho V}\rho\int_{volume} \bar{r}\, dV = \frac{1}{V}\int_{volume} \bar{r}\, dV$$

Si noti come nei corpi omogenei l'integrale dipende solo dalla geometria del copro. L'unità di misura della densità è $\rho = kg\, m^3$. Non tutti i corpi sono definiti nello spazio tridimensionale, anche per questi oggetti si può definire una densità. Ecco allora che si ha densità superficiale: $\rho_s = \frac{dm}{dS}$ e $\bar{r}_{CM} = \frac{\int_{corpo} \bar{r}\, dm}{\int_{corpo} dm} = \frac{1}{m}\int_{superficie} r\rho_S\, dS$. Considerando il corpo omogeneo:

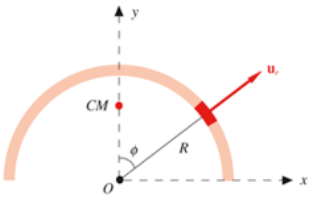
$$dm = \rho_s\, dS \Rightarrow \bar{r}_{CM} = \frac{1}{\rho_s S}\rho_s \int_{superficie} \bar{r}\, dS = \frac{1}{S}\int_{superficie} \bar{r}\, dS$$

E densità lineare: $\rho_l = \frac{dm}{dL}$ e $\bar{r}_{CM} = \frac{\int_{corpo} \bar{r}\, dm}{\int_{corpo} dm} = \frac{1}{m}\int_{linea} r\rho_l\, dL$. Considerando il corpo omogeneo:

$$dm = p_l\, dL \Rightarrow \bar{r}_{CM} = \frac{1}{L}\int_{linea} \bar{r}\, dL$$

Esempi di calcolo del centro di massa

Semianello omogeneo di raggio r e massa totale m:

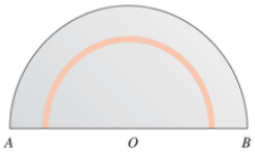


$$\bar{r}_{CM} = \frac{1}{\pi R}\int_{semianello} \bar{r}\, dL = \frac{1}{\pi R}\int_0^{\pi} R\bar{u}_r R\, d\theta = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\theta\bar{u}_x + \sin\theta\,\bar{u}_y\right) d\theta$$
$$= \frac{R}{\pi}\left[\sin\theta\bar{u}_x - \cos\theta\bar{u}_y\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \bar{r}_{CM} = \frac{2R}{\pi}\bar{u}_y$$

Proprietà: si supponga di avere due sistemi di punti. Se ci sono più centri di massa possibile trovare il centro di massa dei centri di massa. Questa proprietà torna utile per problemi come il seguente:

- Semidisco:



$$\bar{r}_{CM} = \frac{1}{S}\int_S \bar{r}\, dS$$

È possibile considerare il semidisco come un insieme di numero infinito di semianelli.

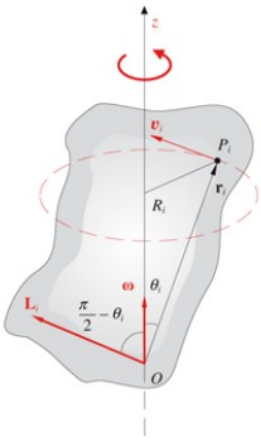
$$\bar{r}_{cM} = \frac{\int \bar{r}_{CM,semianello}\, dm_{semianello}}{\int dm_{sa}} = \frac{1}{m}\int \frac{2r}{\pi}\bar{u}_y\, dm_{semianello}$$

Essendo omogeneo: $dm = \rho_s\, dS = \frac{2m}{\pi R^2}\pi r\, dr$

$$\Rightarrow \bar{r}_{CM,sa} = \frac{2\bar{u}_y}{\pi m}\int_0^R r\frac{2m}{R^2} r\, dr = \frac{4\bar{u}_y}{\pi R^2}\int_0^R r^2\, dr = \frac{4\bar{u}_y}{\pi R^2}\left|\frac{1}{3}r^3\right|_0^R = \frac{4R}{3\pi}\bar{u}_y$$

Moto di rotazione: rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento

Si vada ora a vedere come si descrive il moto di rotazione di un corpo rigido che sta ruotando attorno a un asse di rotazione, chiamato z.



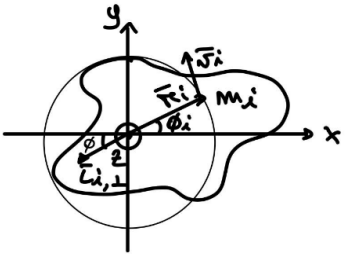
Prendendo un generico punto P_i a una distanza R_i, si ha che esso sta compiendo un moto circolare uniforme attorno all'asse. Per il teorema di König si ha che il momento angolare per un generico punto P_i rispetto al polo O è dato da $\bar{L}_i = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$: $\bar{L}_i$ è ortogonale al piano individuato dai vettori $\bar{r}_i$, $\bar{v}_i$ e forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ con l'asse z. Si trova che la componente z del momento angolare associato a questo punto è:

$$\Rightarrow L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_1 i r_i R_i \sin\theta_i \omega = m_i R_i^2 \omega$$

La componente perpendicolare sarà:

$$L_{i\perp} = L_i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = m_i r_i R_i \cos\theta_i \omega = m_i R_i z_i \omega$$

Supponendo di vedere il corpo in proiezione dall'alto:



$$m_i R_i z_i \omega \begin{cases} L_{i,x} = m_i R_i z_i \cos\phi_i \omega = m_i x_i z_i \omega \\ L_{iy} = m_i R_i z_i \sin\phi_i \omega = m_i y_i z_i \omega \end{cases}$$

Tutto questo è per il singolo punto. Pendendo tutti i punti che costituiscono il corpo rigido, si trova che:

$$L_z = \sum_i L_{i,z} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega = I_{zz}\omega$$

$$L_x = \sum_i L_{i,x} = \left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega = I_{xz}\omega$$

$$L_y = \sum_i L_{i,y} = \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega = I_{yz}\omega$$

In conclusione, è stato trovato che un corpo rigido che ruota rispetto a un'asse z:

$$\bar{L}_0 = \left(I_{xz}\bar{u}_x + I_{yz}\bar{u}_y + I_{zz}\bar{u}_z\right)\omega$$

Questo ragionamento è valido sono perché la velocità angolare ha componente z. Lavorando su tutti gli assi, il momento angolare totale che si ha è una matrice 3×3:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \bar{\bar{I}}\omega$$

Dove $\bar{\bar{I}}$ prende il nome di **tensore di inerzia**. Questo ragionamento si può semplificare perché è sempre possibile trovare un opportuno sistema di riferimento in cui la matrice è diagonalizzabile. Per fare ciò si lavora con gli **assi principali di inerzia (a.p.i.)**:

$$\bar{L}_0 = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_x \end{pmatrix} = I_x\omega_x\bar{u}_x + I_y\omega_y\bar{u}_y + I_z\omega_z\bar{u}_z$$

In un sistema in cui sono presi gli a.p.i. viene a mancare la componente perpendicolare del momento angolare $L_\perp$ quando vi è simmetria rispetto all'asse di rotazione.

Si definisce **momento di inerzia** il termine $I_z = \sum_i m_i R_i^2$. Esso dipende dalla scelta dell'asse. Il significato del momento di inerzia è equivalente alla quantità di moto di un punto: se uno è associato alla traslazione, l'altro è associato alla rotazione. La sostanziale differenza risiede nel fatto che la massa è uno scalare, dunque è costante, mentre il momento di inerzia varia in base alla distanza rispetto all'asse di rotazione.

Poiché L è vincolato al corpo, esso ruota attorno all'asse di rotazione e il suo moto si chiama *moto di precessione*. Quando vi è il moto di precessione di un vettore, di modulo costante, vale:

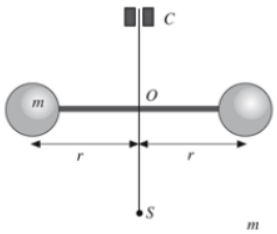
$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{L} \Rightarrow \left|\frac{d\bar{L}}{dt}\right| = |\bar{\omega} \times \bar{L}| = \omega L_\perp$$

Se $z = a.p.i.: \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{M}^E = 0 \Rightarrow \bar{L} = cost.$

Se $z \neq a.p.i.: L_\perp \neq 0 \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \bar{M}^E \neq 0$

Esempi sugli effetti di non parallelismo tra I e ω

Sia il corpo rigido più semplice possibile, due punti materiali di eguale massa m collegati tra loro da un'asta di massa trascurabile e lunga $2r$. Si faccia ruotare questo corpo attorno all'asse di simmetria verticale passante per il centro di massa O e ortogonale all'asta di collegamento: in figura S è il supporto dell'asse e C un cuscinetto che assicura la verticalità. Sia ora e nei casi successivi la velocità angolare costante e che non ci siano attriti.

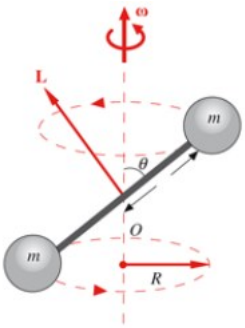


I momenti angolari dei due punti, qualunque sia il polo sull'asse, hanno la stessa componente lungo l'asse di rotazione e componenti opposte ortogonalmente all'asse, per cui:

$$L = L_z = 2mrv = 2mr^2\omega = I_z\omega, \quad L_\perp = 0$$

Se $\bar{L}$ è costante, il momento delle forze è nullo. A ciascun punto è applicata la forza $m\bar{g}$ e, tramite l'aggancio all'asta, la forza centripeta che è eguale in modulo a $m\omega 2r$: i momenti delle forze peso rispetto ad un polo sull'asse sono eguali ed opposti, le due forze centripete formano una coppia di braccio nullo. Per quanto riguarda le forze, la risultante vale $2m\bar{g}$ ed è applicata nel centro di massa O del corpo. Il supporto S sostiene il corpo esplicando la reazione $-2m\bar{g}$ e, a rigore, il cuscinetto C non ha alcuna funzione poiché in condizioni di perfetta simmetria l'asse resta spontaneamente verticale.

Adesso si ruoti il sistema come mostrato nella figura. I momenti angolari dei due punti, prendendo il centro di massa O come polo, sono uguali, la risultante $\bar{L}$ non è parallela all'asse e ha le componenti:



$$\begin{cases} L_z = 2m(r\sin\theta)^2\omega, & costante \\ L_\perp = 2mrR\omega^2\cos\theta\,, & variabile\ in\ direzione \end{cases}$$

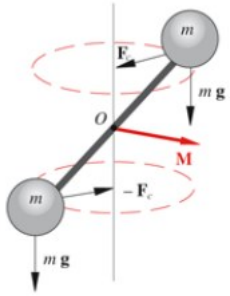
$\bar{L}$ precede uniformemente e la sua variazione è legata al momento delle forze esterne secondo:

$$M = L_\perp\omega = 2mrR\omega^2\cos\theta$$

Le forze peso rispetto ad O continuano ad avere momenti eguali ed opposti e non contribuiscono al momento risultante; invece, le forze centripete, ciascuna pari a $m\omega^2 R$, sono ora una coppia di braccio $2r\cos\theta$ (vedi

figura sotto) con momento $2mrR\omega^2 \cos\theta$. In conclusione, quando le masse sono distribuite in modo tale che $\bar{L}$ e $\bar{\omega}$ non siano paralleli, esiste un momento esterno responsabile della variazione di $\bar{L}$ nel tempo, pur essendo la rotazione uniforme: tale momento è il momento delle forze centripete che permettono il verificarsi del moto rotatorio. Il risultato non dipende dalla scelta del polo perché non ne dipende $\bar{M}$; cambiando polo cambia il momento angolare, ma non la sua derivata rispetto al tempo.

Dalla figura si capisce che l'azione del momento tende a modificare la direzione dell'asse di rotazione, per cui il cuscinetto C viene sollecitato; tutta la struttura di sostegno (non disegnata) reagisce sviluppando un momento uguale e contrario a $\bar{M}$, così da mantenere verticale l'asse di rotazione. La sollecitazione è proporzionale a ω^2 e richiede un adeguato dimensionamento di cuscinetto e sostegno per evitarne la rottura. La risultante delle forze invece non cambia passando dalle due conformazioni delle prime immagini del paragrafo; inoltre le reazioni in C sono certamente ortogonali all'asse e il sostegno S deve reagire soltanto al peso.



Esempi di calcolo del momento di inerzia

Il momento di inerzia per un corpo continuo si calcola come

$$I_z = \int_{corpo} R^2\, dm$$

dove R è la distanza del singolo punto dall'asse.

- *Anello:*

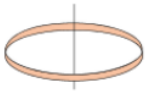
$$I_z = \int_{corpo} R^2\, dm = R^2 \int_{corpo} dm = mR^2$$

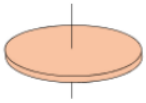
- *Disco:* se si considera l'elemento di massa come densità per superficie ci si troverebbe a lavorare con un integrale in due dimensioni. Sapendo che i momenti di inerzia si definiscono tramite sommatoria, è possibile semplificare il calcolo considerando il disco come un numero infinito di anellini.

$$I_{z,disco} = \int dI_{anello} = \int r^2\, dm_{anello} I_{z,d} =$$

Dove $dm_{anello} = \rho_s\, dS = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r\, dr = \frac{m}{R^2} 2r\, dr$

$$\Rightarrow \int_0^R r^2 \frac{2m}{R^2} r\, dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3\, dr = \frac{1}{2} mR^2$$


anello $I = m\,R^2$


disco $I = \frac{1}{2}\, m\,R^2$

- *Guscio sferico sottile:*

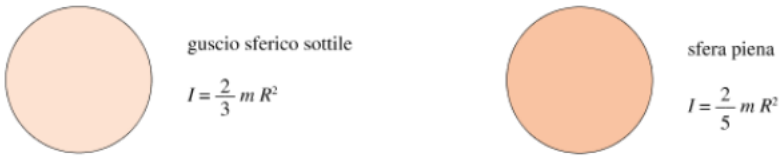
$$I_z = \frac{2}{3} mR^2$$

- *Sfera piena:* consideriamo la sfera come un numero infinito di gusci sferici.

$$I_{z,s} = \int dI_g = \int \frac{2}{3} R^2\, dm_g$$

Dove $dm_{guscio} = \rho_v \, dV = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 \, dr = \frac{3m}{R^3} r^2 \, dr$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \int_0^R r^2 \frac{3m}{R^3} r^2 \, dr = \frac{2m}{R^3} \int_0^R r^4 \, dr = \frac{2}{5} m R^2$$

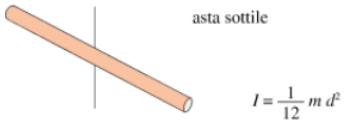


- *Asta sottile:*

$$I_z = \int x^2 \, dm$$

Dove $dm = \rho_l \, dx = \frac{m}{L} dx = \frac{3m}{R^3} r^2 \, dr$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \, dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} m L^2$$



Se l'asse passa per un suo estremo

$$I_z = \int R^2 \, dm = \int x^2 \, dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \frac{1}{3} m L^2$$

Teorema della figura piana

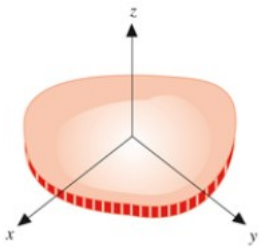
Si supponga di avere un corpo che abbia una dimensione molto sottile ($z \cong 0$), con tre assi che stanno nel piano del corpo. Per definizione:

$$I_z = \int R_z^2 \, dm = \int (x^2 + y^2) \, dm$$

Calcolando il momento di inerzia rispetto agli altri due assi si ha che:

$$I_x = \int R_x^2 \, dm = \int (y^2 + z^2) \, dm \cong \int y^2 \, dm$$

$$I_y = \int R_y^2 \, dm = \int (x^2 + z^2) \, dm \cong \int x^2 \, dm$$

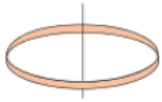


Si nota come il momento di inerzia rispetto a z è la somma dei momenti di inerzia rispetto ai momenti degli assi x e y.

$$I_z = I_x + I_y$$

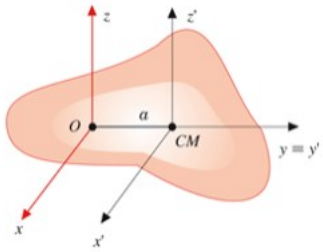
Il momento di inerzia rispetto all'asse di cui il corpo ha la dimensione trascurabile si può calcolare come la somma dei momenti di inerzia rispetto agli assi che giacciono sulla figura piana.

L'utilizzo di questo teorema si ha in situazioni tipo la seguente: si supponga di avere un anello in cui un asse passa per il centro dell'anello e gli altri due sono complanari al piano dell'anello. Per simmetria $I_x = I_y \Rightarrow I_z = 2I_x$ e quindi $I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2}\, mR^2$



Teorema di Huygens-Steiner

Si vuole calcolare il momento di inerzia rispetto a un asse non passante per il centro di massa di un corpo. Il teorema permette di calcolare il momento rispetto l'asse, secondo alcune condizioni. $\begin{cases} x = x' \\ y = y' + a \\ z = z' \end{cases}$



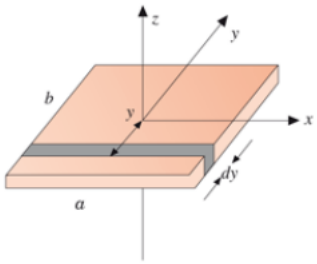
$$
\begin{aligned}
I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) &= \sum_i m_i\left[x_i'^2 + (y_i + a)^2\right] \\
&= \sum_i m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2 + a^2 + 2ay_i'\right) \\
&= \sum_i m_i\left(x_i'^2 + y_i'^2\right) + \sum_i m_i a^2 + 2a \sum_i m_i y_i'
\end{aligned}
$$

Dove il primo termine rappresenta le coordinate del punto nel sistema di riferimento che ha origine nel centro di massa e rappresenta r_i', cioè la distanza dei punti rispetto a z'. Poiché $y_{CM}' = \frac{\sum_i m_i y_i'}{\sum_i m_i}$ è la coordinata del centro di massa nel sistema di riferimento del centro di massa è nulla, $\sum_i m_i y_i'$ si annulla.

$$\Rightarrow I_z = I_{z'} + ma^2$$

<u>Calcolo momento di inerzia di alcuni corpi.</u>

- *Lamina sottile di lati a e b:* Per il teorema di Huygens-Steiner, si può pensare alla lastra come una somma di sbarrette di spessore infinitesimo, in cui $I_{z,sb} = \frac{1}{12} ml^2$.

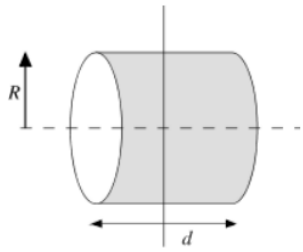


$$
\begin{aligned}
I_{z,lamona} = \int dI_{z,sbarretta} &= \int \left(dI_{z',sbarretta} + dmx^2\right) \\
&= \int \frac{1}{12} dma^2 + \int x^2\, dm
\end{aligned}
$$

Sapendo che è omogenea: $d_m = \rho_s\, dS = \frac{m}{ab} a\, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} a^2 \int dm + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \frac{m}{b} dx = \frac{1}{2} ma^2 + \frac{m}{b} \frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{3} \frac{m}{b} \frac{b^3}{4} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

- *Guscio cilindrico:* per il teorema di Huygens-Steiner, si può pensare al cilindro come una somma di anellini di spessore infinitesimo dx



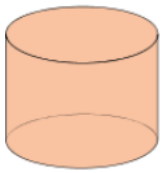
$$I_z = \int dI_{z,anello} = \int \left(dI_{z',anello} + dmx^2\right)$$
$$= \int \frac{1}{2} dmR^2 + \int x^2\, dm$$

Dove $dm = \rho_s\, dS = \frac{m}{2\pi Rl} 2\pi R dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mR^2 + \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{m}{l}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{12}md^2$$

- *Cilindro pieno:*

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2$$



NB: Possiamo prendere una qualunque figura piana e la estendiamo lungo l'asse rispetto al quale abbiamo determinato il momento di inerzia, l'espressione non cambia.

Equazione differenziale del moto di rotazione

Sapendo che $\bar{L}_O = \bar{\bar{I}}\bar{\omega} = I_z\bar{\omega}$ e ricordando che per il teorema del momento angolare $\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}^E - \bar{v}_o \times m\bar{v}_{CM} = \bar{M}^E$ dal momento che la velocità del polo è nulla. Ricordando che $\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F}$, se il polo coincide con l'asse ecco che il copro è messo in rotazione. Sostituendo si ha che:

$$\bar{M}_O^E = \frac{d\bar{L}_o}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\bar{\omega}) = I_z\frac{d\bar{\omega}}{dt} = I_z\bar{\alpha}$$

Se $\bar{M}_O^E = 0 \Rightarrow \bar{\alpha} = 0 \Rightarrow \bar{\omega} = cost.$

Se $\bar{M}_O^E = cost. \Rightarrow \bar{\alpha} = cost. \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$ e $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Analogia tra moto di traslazione e moto di rotazione: ricordando che $\bar{F} = m\bar{a} = m\bar{a}_T + m\bar{a}_N = m\frac{dv}{dt}\bar{u}_T + m\frac{u^2}{R}\bar{u}_N, \bar{L} = I_z\bar{\omega} + \bar{L}_\perp$.

$$\bar{M}_O^E = \frac{d\bar{L}_O}{dt} = I_z\bar{\alpha} + \frac{d\bar{L}_\perp}{dt} \Rightarrow \begin{cases} \bar{M}_z^E = I_z\bar{\alpha} = I_z\dfrac{d\omega}{dt} \\ \bar{M}_\perp^E = \dfrac{d\bar{L}_\perp}{dt} \end{cases}$$

NB: quando si lavora con le equazioni del moto del centro di massa, bisogna mettere tutte le forze che vengono applicate al copro. Quando due corpi sono collegati tra loro si ricordi che l'accelerazione angolare e di un copro che scende, sono in relazione. Per cui $a = a_T = \alpha R$.

Energia cinetica del corpo rigido

Si considereranno i corpi rigidi che ruotano rispetto a un'asse fisso. L'energia cinetica del corpo rigido sarà la somma di tutte le energie dei singoli punti rispetto all'asse preso in considerazione. $E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$. La velocità di un punto che ruota è $v_i = \omega R_i$.

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega R_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Se il corpo trasla, si considera anche l'energia cinetica di traslazione che è uguale a quella del centro di massa. Il teorema dell'energia cinetica ($W_{TOT} = \Delta E_k$) si applica anche per i corpi rigidi.

$$\Rightarrow W_{\theta_i \to \theta_f} = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_i^2$$

In forma differenziale: $dW = dE_k = d\left(\frac{1}{2} I_z \omega^2\right) = \frac{1}{2} I_z 2\omega d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha \, dt = I_z \alpha \, d\theta = M^E \, d\theta$.

$$\Rightarrow W_{\theta_i \to \theta_f} = \int_{\theta_i}^{\theta_f} M^E \, d\theta$$

La potenza è pari a: $P = \frac{dW}{dt} = M^E \frac{d\theta}{dt} = M^E \omega$.

Se il centro di massa non appartiene all'asse di rotazione, per il teorema di Huygens-Steiner è possibile considerare l'energia cinetica come:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(I_{z'} + ma^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m(a\omega)^2$$

I due termini che si ottengono sono quelli che si ottengono dal teorema di König.

Impulso del momento di una forza

Come per un punto materiale vale $\bar{J} = \int \bar{f} \, dt = \int d\bar{q} = \Delta \bar{q}$, allo stesso modo per il momento di un a forza si può dire che $\int_{t_i}^{t_f} \bar{M}^E \, dt = \int_{\bar{L}_i}^{\bar{L}_f} dL = \bar{L}_f - \bar{L}_i = \Delta \bar{L}$. Dove l'integrale $\int_{t_i}^{t_f} \bar{M}^E \, dt$ prende il nome di **impulso del momento**. Il teorema dell'impulso del momento ha lo stesso significato del teorema dell'impulso.

"Se si applica una forza esterna per un certo intervallo di tempo, il momento angolare del corpo cambia"

Il teorema del momento dell'impulso invece dice che:

$$\int \bar{M}_o^E \, dt = \int \bar{r} \times \bar{F}_{impulsiva} \, dt = \bar{r} \times \int \bar{F}_{imp} \, dt \Rightarrow \int \bar{M}_o^E \, dt = \bar{r} \times \bar{J}$$

<u>Pendolo composto.</u> Il centro di massa è posizionato al di fuori dell'asse di rotazione.

$$\bar{M}_o^E = I_z \bar{\alpha}$$

Per descrivere il moto si mette anche la verticale passante per l'origine. Passando per l'analisi delle forze, l'unico momento che agisce è quello della forza peso. Dunque: $\bar{h} \times m\bar{g} = I_z \bar{\alpha}$. Specificando il versore $\bar{u}_z$ e dando un segno alla rotazione, diviene $hmg \sin\theta \, (-\bar{u}_z) = I_z \alpha \bar{u}_z$. Guardando l'asse come uscente dal piano

della lavagna, l'angolo θ risulta positivo quando il corpo ruota in senso antiorario e negativo quando ruota in senso opposto, questo comporta la presenza del segno "$-$" al versore $\bar{u}_z$.

$$\Rightarrow -hmg\theta = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Che è l'equazione del moto armonico.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$$

Si può indicare $\Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_o \sin(\Omega t + \phi)$$

E il periodo è: $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$.

In analogia col periodo del pendolo semplice si ha che: $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l^*}{g}}$. Dove $l^* = \frac{I_z}{mh}$ è la lunghezza ridotta del pendolo composto, la lunghezza equivalente di un pendolo semplice che dà lo stesso periodo di oscillazione. I pendoli composti sono reversibili, ovvero un qualunque corpo rigido può essere messo in rotazione attorno a un asse diverso con lo stesso periodo.

Calcolando il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa:

$$l^* = \frac{I_z}{mh} = \frac{I_{CM} + mh^2}{mh} = \frac{I_{CM}}{mh} + h$$

Una prima osservazione è che la lunghezza ridotta è maggiore della distanza h tra l'asse di rotazione e il centro di massa. Introducendo un nuovo parametro $h' = \frac{I_{CM}}{mh}$:

$$l^* = \frac{mhh'}{mh} + h = h' + h$$

Costruendo un altro asse z' parallelo a z e a una distanza h' dal centro di massa, mettendo in oscillazione si troverà una pulsazione $\Omega' = \sqrt{\frac{mgh'}{I_z}}$ e un periodo $T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l'^*}{g}}$. Con $l'^* = \frac{I_z}{mh'}$.

Applicando nuovamente il teorema di Steiner si ottiene: $l'^* = \frac{I_z}{mh'} = \frac{I_{CM}+mh'^2}{mh'} = \frac{I_{CM}}{mh'} + h'$ e poiché $I_{CM} = mhh'$:

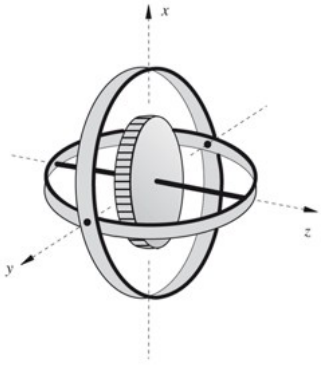
$$\Rightarrow l'^* = \frac{mhh'}{mh'} + h' = h + h'$$

Le lunghezze ridotte coincidono.

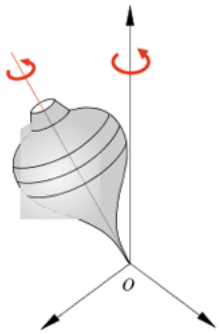
Il giroscopio

Il giroscopio è un corpo rigido in cui un punto rimane fisso nello spazio. Gli unici moti che ha solo quelli di rotazione attorno ad un punto; l'asse non è detto che sia fisso in quel punto, però ci passa sempre.

1. *I° esempio ($O \equiv CM, \bar{M}^E = 0$, z è a.p.i. ossia $\bar{\omega} = cost.$)*: Il giroscopio cardanico viene utilizzato negli stabilizzatori di direzione e serve a calcolare l'inclinazione di un corpo rispetto al suolo.



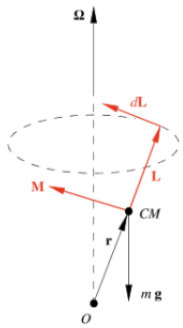
2. *II° esempio ($O \not\equiv CM$, $\bar{M}^E \neq 0$)*: L'esempio tipico è quello della trottola. Qui, essendo l'asse simmetrico, $\bar{L} = I\bar{\omega}$. Supponendo la velocità angoalre costante, vale che $\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\Omega} \times \bar{L}$.



$$\left.\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\Omega} \times \bar{L} = I\bar{\omega} \\ \bar{M} &= \bar{r} \times m\bar{g} \end{aligned}\right\} \rightarrow \bar{\Omega} \times I\bar{\omega} = -m\bar{g} \times \bar{r}$$

$$\bar{\Omega} = -\frac{mr}{I\omega}\bar{g}$$

Cioè, è opposto a $\bar{g}$ e inversamente con la velocità angolare. Per il teorema dell'impulso del momento di una forza,

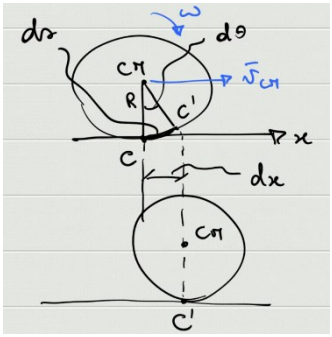


$$\left.\begin{aligned} \int \bar{M}\, dt &= \Delta\bar{L} = \bar{L}_f - \bar{L}_i \\ \int \bar{M}\, dt &= \bar{M}^E \Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{M}^E \Delta t + \bar{L}_i = \bar{L}_f$$

La trottola precede perché il momento della forza peso è più piccolo di quello del momento angolare iniziale.

Moto di puro rotolamento

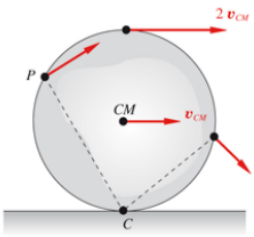
Il **moto di puro rotolamento** è un tipo particolare di rototraslazione in cui si considera il moto in cui tutti i punti si appoggiano uno per uno con continuità, ma senza strisciare.



Affinché si manifesti un moto di puro rotolamento, si deve avere che $dx = R\, d\theta$. La relazione che lega la velocità del centro di massa con la velocità angolare è $v_{CM} = \omega R$, perché $v_{CM} = \frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$.

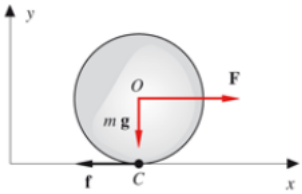
Derivando si ottiene che $a_{CM} = \alpha R$.

Volendo determinare la velocità di un punto generico P nel disco, si usa il teorema delle velocità relative $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{o'} + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ con sistema di riferimento solidale al corpo rigido e solidale al centro di massa. Ecco che diventa $\bar{v}_P = \bar{v}_{CM} + \bar{\omega} \times \bar{r}'_P$. Sono da tenere in considerazione il punto di contatto e quello diametralmente opposto. $\bar{v} = \bar{v}_{CM} + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}_{CM} + \omega R \bar{u}x = 2\omega R \bar{u}_x$, ossia $\bar{v} = 2\bar{v}_{CM}$.



La velocità del punto di contatto C è pari a $\bar{v}_C = \omega R \bar{u}_x + \omega R(-\bar{u}x) = 0$. Ciò significa che il punto di contatto ha velocità istantanea nulla. Questo significa che il moto di rototraslazione può essere visto come pura rotazione attorno al punto di contatto: il moto di puro rotolamento può essere visto come una serie di rotazioni attorno a un numero infinito di assi di rotazione.

Quando si applica una forza nel centro di massa, ma il piano è liscio, quel che si ha è un moto di pura traslazione. Se il piano è scabro si ha interazione tra i corpi, ciò significa che è possibile avere il moto di puro rotolamento dovuto alla presenza della forza d'attrito (traslazione causata dalla forza e rotolamento causato dall'attrito). Si noti che se si tratta di un moto di puro rotolamento non c'è strisciamento; dunque, la **forza di attrito** è **statica**.



Trattandosi di un corpo rigido, si applicano le equazioni del moto del centro di massa e dei momenti, tenendo presente che l'asse può essere nel punto di contatto o nel centro di massa:

$$\begin{cases} \bar{F} + m\bar{g} + \bar{N} + \bar{f}_{as} = m\bar{a}_{CM} \\ \bar{r} \times \bar{f}_{as} = I_z \bar{\alpha} \\ a_{CM} = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F - f_{as} = m a_{CM} \\ R f_{as} = I_z \alpha = I_z \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

Si noti che il sistema qui sopra è valido solo per forze applicate nel centro di massa.

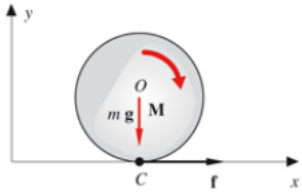
L'accelerazione vale:

$$a_{CM} = \frac{\dfrac{F}{m}}{1 + \dfrac{I}{R^2}}$$

Per la forza di attrito statico bisogna imporre la condizione per cui sia minore o uguale al massimo valore possibile per la forza:

$$f_{as} = \frac{F}{1 + \dfrac{mR^2}{I}} \leq \mu_s m g \Rightarrow F \leq \mu_s m g \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$$

Un altro modo per indurre un moto di puro rotolamento è come quello della catena posteriore di una bici, in cui il moto viene trasmesso dalla catena. In questi casi si parla di momento assiale. Le forze che si hanno sono:



$$\begin{cases} m\bar{g} + \bar{N} + \bar{f}_{as} = m\bar{a}_{CM} \\ \bar{M} + \bar{r} \times \bar{f}_{as} = I_z \bar{\alpha} \\ a_{CM} = \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_a = m a_{CM} \\ M - R f_a = I\alpha = I \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

$f_a = m a_{CM}$ è la forza effettiva che manda avanti la ruota. L'accelerazione vale:

$$a_{CM} = \frac{\frac{M}{mR}}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

La forza di attrito statico vale:

$$f_{as} = \frac{\frac{M}{R}}{1 + \frac{I}{mR^2}} \leq \mu_s mg$$

Il momento massimo che si può applicare vale:

$$M \leq 0\mu_s mgR\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)$$

In generale possono essere applicati un momento e una forza, in questi casi si consiglia di dare un verso all'asse e di orientare la forza di attrito statico concorde all'asse, questo perché la forza d'attrito generata dai momenti è in verso opposto a quella generata dalle forze. Qui l'accelerazione del centro di massa vale:

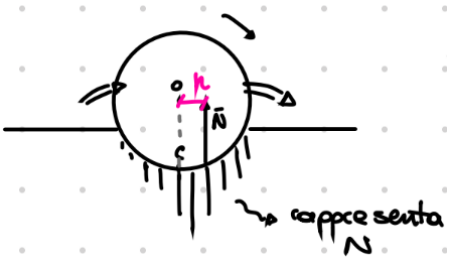
$$a_{CM} = \frac{1}{m}\frac{\frac{M}{R} + F}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

La forza di attrito:

$$f_{as} = \frac{\frac{M}{R} - \frac{1}{mR^2}F}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

NB: dire che la forza di attrito statico è nulla non vuol dire che non ci sia moto di puro rotolamento, significa che il momento sta imprimendo un moto di rotazione perfettamente equivalente a quello di puro rotolamento.

A livello energetico ci sono forze dissipative in gioco, tuttavia non è l'attrito in quanto istantaneamente il punto di contratto sta fermo, dunque $W = \int \bar{F}\, d\bar{s} = 0$.La forza dissipativa che si ha è dovuta a una distribuzione asimmetrica delle forze: la reazione normale non è simmetrica rispetto al punto di contatto, è spostata in direzione del moto. Così facendo la reazione normale induce un **momento di attrito volvente**



$$\bar{M}_v = \bar{r} \times \bar{N} = -hN\bar{u}_\omega$$

Urti tra corpi rigidi

La distinzione tra urti anelastici ed elastici fatta per i punti materiali è valida anche per i corpi rigidi: si hanno *urti elastici* quando $\Delta E_m = 0$, si avranno *urti anelastici* quando $\Delta E_m \neq 0$.

Analogamente nei corpi rigidi si ha che se il sistema è isolato, si conserva la quantità di moto:

$$\bar{R}^E = 0 \Rightarrow \bar{p} = cost.$$

Se il sistema non è isolato, agiscono forze esterne. In tal caso, la variazione della quantità di moto è data da:

$$|\Delta\bar{p}^E| = |\langle\bar{F}^E\rangle\tau|$$

dove $\tau \ll |\Delta\bar{p}^I|$ è il tempo caratteristico dell'urto. Non si osserva alcuna variazione della quantità di moto solo se le forze esterne sono di tipo impulsivo, come avviene nei corpi rigidi fissati.

Quando un corpo rigido ruota, l'equazione che ne definisce il moto rotazionale è:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^E$$

Se il sistema è isolato $\bar{M}^E = 0 \Rightarrow \bar{L} = cost.$. Quando il sistema non è isolato, scegliendo un polo opportuno si può avere che $\bar{M}^E = 0 \Rightarrow \bar{L} = cost.$. Se $\bar{M}^E \neq 0$, ma le forze non sono impulsive, si può considerare la conservazione del momento angolare perché

$$|\Delta\bar{L}^E| = \left|\int \bar{M}^E\, dt\right| = |\langle\bar{M}^E\rangle_\tau|\tau \ll |\langle\bar{M}^I\rangle_\tau|\tau = |\Delta\bar{L}^I|$$

Se ci sono vincoli, le forze esterne sono di tipo impulsivo, dunque non si conserva $L \neq cost.$. Per calcolare l'**impulso dovuto a un vincolo** durante un urto, si utilizza la relazione:

$$\bar{J}_{vincolo} = \int \bar{F}_{impulsive}\, dt = \Delta\bar{p} = \bar{p}^+ - \bar{p}^-$$

Dovendo calcolare l'integrale dell'impulso del momento:

$$\left(\int \bar{M}\, dt\right)_{vincolo} = \Delta\bar{L} = \bar{L}^+ - \bar{L}^-$$

Fluidi

In natura, alcune sostanze non possono essere descritte come singole unità discrete, ma come sistemi continui. Queste sostanze vengono definite **fluidi**.

La materia può presentarsi in diversi stati fondamentali. Nella *fase solida*, volume e forma sono definiti: gli atomi occupano posizioni fisse e oscillano attorno a una posizione di equilibrio, come se fossero collegati da molle. L'ampiezza di queste oscillazioni, nota come agitazione termica, aumenta con la temperatura. Se la temperatura diventa troppo elevata, i legami tra gli atomi si rompono e la struttura solida non si mantiene più.

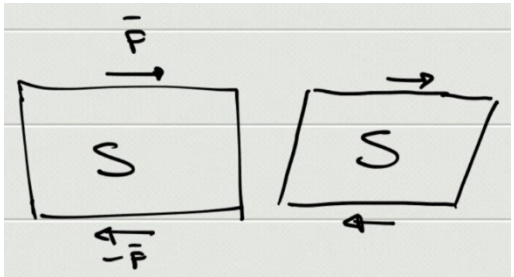
Nella *fase liquida*, solo il volume è definito, mentre la forma no. Gli atomi sono distribuiti in modo casuale, ma rimangono legati tra loro da forze di coesione. Un ulteriore aumento della temperatura può portare alla separazione degli atomi, trasformando il liquido in gas.

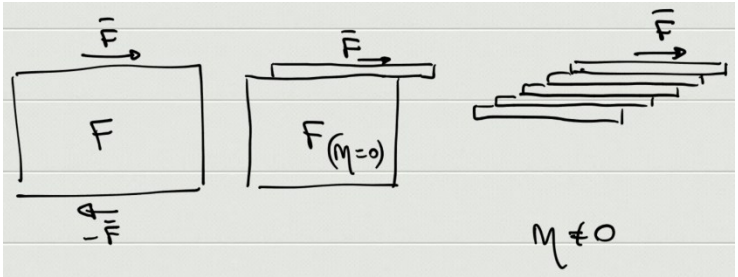
Nella *fase gassosa*, né il volume né la forma sono definiti. Le particelle sono libere e indipendenti, con interazioni minime tra loro. Ad esempio, a temperatura ambiente e con un raggio atomico di $1\ cm$, in un metro cubo di gas si trovano circa 27 particelle.

Esiste anche un quarto stato della materia, *il plasma*, che differisce dagli altri perché è costituito da ioni positivi ed elettroni, non da atomi neutri. Le sue proprietà fisiche sono influenzate da fenomeni elettromagnetici.

Da questo punto in poi, liquidi e gas verranno trattati come fluidi. Il loro studio utilizza tecniche simili a quelle impiegate per i corpi solidi: i fluidi verranno analizzati come elementi di volume infinitesimi dV, ciascuno contenente una massa elementare dm.

Una differenza fondamentale tra fluidi e solidi riguarda la risposta agli sforzi di taglio. Se si applica una coppia di forze tangenziali opposte a un cubo solido, esso si deforma temporaneamente, ritornando alla forma originale una volta rimosse le forze. Nei fluidi, invece, si osserva una deformazione permanente, causata dallo scorrimento relativo di sottili strati che compongono il fluido. Questo scorrimento è caratterizzato da un coefficiente di viscosità η, che misura l'attrito interno del fluido. Per semplificare l'analisi, si considereranno fluidi ideali, in cui la viscosità è nulla ($\eta = 0$).

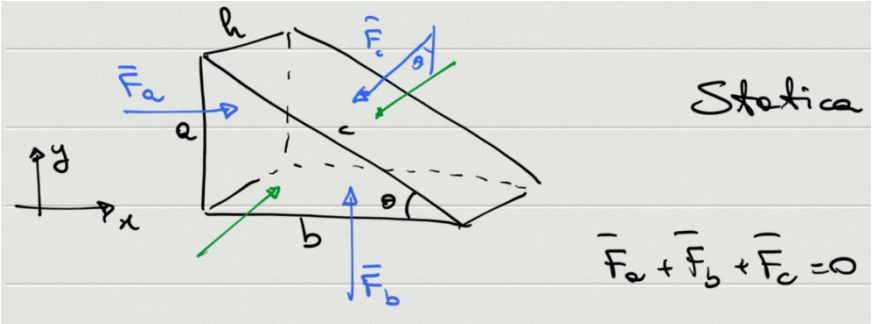




Statica dei fluidi

Prendendo un fluido statico non possono venire applicati sforzi di taglio; tuttavia, vengono applicate altre forze perpendicolari alla superficie (*forze di superficie*), caratterizzate da un parametro che è la **pressione**. Si definisce pressione il rapporto $p = \frac{F\perp}{dS}$ che ha come unità di misura $[p] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{N}{m^2} = \frac{Kgms^{-2}}{m^2} = kgm^{-1}s^{-2} = Pa$ (*Pascal*) . Altre unità di misura sono $1\ bar = 10^5\ Pa$ e $P_{atm} = 1{,}01325 \cdot 10^5\ Pa$. Una caratteristica della pressione è il fatto di essere una quantità scalare.

Si prenda un elemento di fluido isolato a forma di prisma come in figura. Essendo un fluido statico, in esso le uniche forze che agiscono sono forze di superficie: la conferma della loro esistenza è data dal fatto che, rimuovendo questa regione di fluido, il vuoto che si crea viene a riempirsi.



In tale condizione quel che si può dire è che $\sum_i \bar{F}_i = 0$: necessariamente $\bar{F}_a + \bar{F}_b + \bar{F}_c = 0$. Scomponendo queste tre forze e osservando il triangolo di proiezione del solido, si nota che $a = c \cdot \sin\theta$ e $b = c \cdot \cos\theta$. Si ottiene ciò:

$$x: \quad F_a - F_c \sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad p_a \cancel{a}\cancel{h} = p_c \cancel{c}\cancel{h} \cancel{\sin\theta}$$

$$y: \quad F_b - F_c \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad p_b \cancel{b}\cancel{h} = p_c \cancel{c}\cancel{h} \cancel{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow p_a = p_c \qquad p_b = p_c \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_a = p_b = p_c}$$

Indipendentemente da come sono orientate le superfici dell'elemento di fluido che si isola, la pressione è la stessa.

Si supponga ora di avere un fluido in un cilindro a cui viene applicata una forza perpendicolare provocante uno spostamento infinitesimo dh. Ha senso parlare di lavoro infinitesimo $dW = \bar{F}_\perp\, d\bar{h} = pSdh$. Ma Sdh rappresenta il volume infinitesimo dV, ecco che:

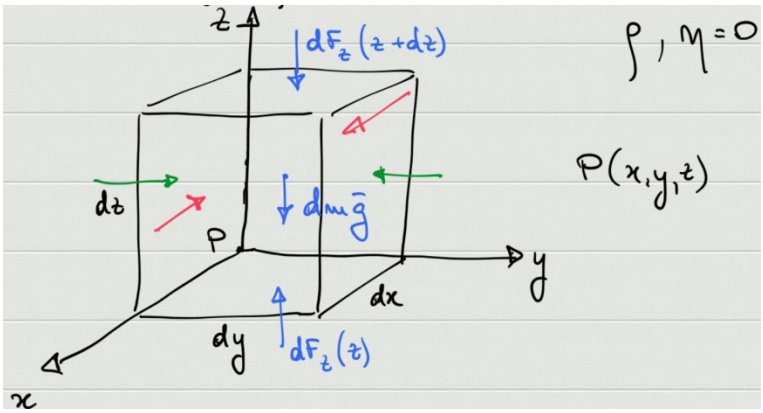
$$\Rightarrow dW = p\, dV$$

$$\Rightarrow W_{i\to f} = \int_{V_i}^{V_f} p\, dV$$

Immaginando di immergere una pallina da ping-pong in una piscina, si osserva che viene a schiacciarsi a causa della pressione: la pressione cambia al variare dell'altezza/profondità. La variazione di pressione implica la presenza di altre forze in un fluido statico: le *forze di volume*. Le forze di volume sono delle forze proporzionali al volume del corpo.

$$dF_v = k\, dV$$

Una forza di volume è la forza peso: $dP = gdm = g\rho\, dV$. La presenza di questa forza di volume fa sì che le forze lungo l'asse verticale non siano più bilanciate tra di loro.



Su questo blocco $d\bar{F}_s + d\bar{F}_v = 0$. Lungo i tre assi le forze che agiscono sono:

$$x: dF_x(x) - dF_x(x+dx) = 0$$
$$y: dF_y(y) - dF_y(y+dy) = 0$$
$$z: dF_z(z) - dF_z(z+dz) - dm\, g = 0$$

Lungo gli assi x e y:

$$x: \quad dF_x(x) = dF_x(x+dx)$$
$$p(x)\, \cancel{dy dz} = p(x+dx)\, \cancel{dy dz}$$
$$\Rightarrow p(x) = p(x+dx)$$
$$y: \quad \Rightarrow p(y) = p(y+dy)$$

Lungo l'asse z la situazione è diversa perché bisogna considerare le forze di volume:

$$\Rightarrow \frac{p(z+dz) - p(z)}{dz} = -\rho g = \frac{d\rho}{dz} \Rightarrow dp = -\rho g\, dz$$

$$z: \quad p(z)\, \cancel{dx dy} - p(z+dz)\, \cancel{dx dy} = \rho g\, \cancel{dx dy}\, dz$$

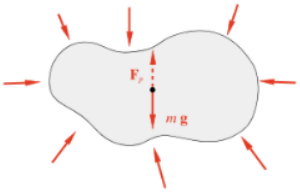
A sx si ha la derivata della pressione lungo l'asse z.

$$\int_{p_1=p(z_1)}^{p_2=p(z_2)} dp = -\int_{z_1}^{z_2} \rho g\, dz \Rightarrow p(z_2) = p(z_1) - \rho g(z_2 - z_1)$$

Questa è la legge che descrive come varia la pressione lungo l'asse z in presenza della forza peso. Partendo dalla superficie, essa prende il nome di **legge di Stevino**.

$$p(h) = p(0) + \rho g h$$

Forza di Archimede



Andando a considerare un fluido in una certa porzione di spazio, si prenda un volume di fluido di massa m e in condizioni statiche. Assumiamo che abbia viscosità nulla $(\eta = 0)$ e che la densità sia costante $(\rho = cost.)$. Essendo soggetto alla forza peso, di conseguenza si deve avere che $\bar{F}_S + m\bar{g} = 0$, e dunque $\bar{F}_S = -m_f\bar{g}$.

Si immagini di rimuovere questo volume e di sostituirlo con un altro di densità diversa in modo tale da avere una forza peso differente, dovuta da una massa pari a $m' = \rho' V$. Viene meno la condizione di equilibrio, per cui:

$$\bar{R} = \bar{F}_S + m'\bar{g} \neq 0$$

Avendo trovato in precedenza che$\bar{F}_S = -m_f\bar{g}$:

$$\Rightarrow -m_f\bar{g} + m'\bar{g} = \bar{R} = (m' - m_f)\bar{g} = (p' - \rho_f)V\bar{g}$$

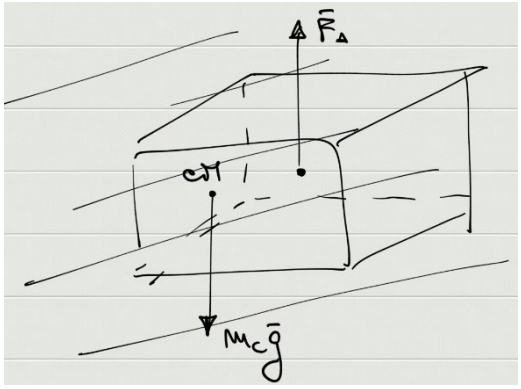
Si hanno ora tre situazioni possibili:

- $\rho' > \rho_f$: la risultante è un vettore concorde a $\bar{g}$ e spinge il corpo verso il basso;
- $\rho' < \rho_f$: la risultante è un vettore opposto a $\bar{g}$ e il corpo galleggia;
- $\rho = \rho_f$: la risultante è nulla e si è in condizioni statiche.

Ciò che è appena stato constatato è il **principio di Archimede**, il quale asserisce che "un corpo immerso in un fluido risente di una forza $\bar{F}_A = \bar{F}_S = -m_f\bar{g}$ pari al peso del volume di fluido spostato".

$$\bar{R} = \bar{P} + \bar{F}_A$$

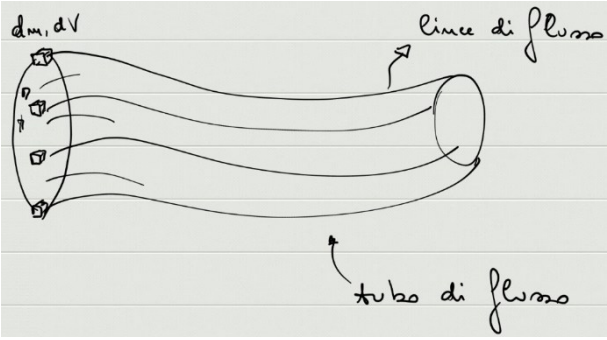
La spinta di Archimede viene applicata nel centro di massa del volume. Se il corpo ha una massa omogenea, i due centri di massa coincidono; se il corpo ha una massa non omogenea, le forze vengono applicate in due punti diversi provocando non solo una traslazione, ma anche una rotazione.



Dinamica dei fluidi

Parlando di fluidi in movimento, ci riconduciamo alle condizioni ideali di viscosità nulla $(\eta = 0)$ e densità costante $(\rho = cost.)$. Essendo i fluidi caratterizzati da un moto complesso, verranno trascurati i moti vorticosi (ogni elemento di fluido non ruota attorno al suo asse e non compie moti a spirale). Un'ulteriore semplificazione del moto di un fluido la si può avere trovandosi in un *regime stazionario*: ogni elemento di fluido ha la stessa velocità in modulo, direzione e verso nel tempo (si può pensare a ciò che accade in tubo dell'acqua).

Preso un elemento di fluido di massa dm e volume dV, la curva che definisce la sua traiettoria si definisce *linea di corrente* ed è tangente alla velocità punto per punto. Prendendo una sezione che raggruppi un certo numero di linee di corrente, si ottiene un *tubo di flusso*.



Prendendo un tubo di flusso in un tempo iniziale t_0 e lasciando passare un tempo dt si trova che gli elementi presenti nella superficie S_1 sono traslati più avanti di una distanza dl_1, ugualmente sulla superficie S_2. Volendo valutare quanta massa di flusso attraversa la superficie S_1, si nota che è pari alla massa contenuta nel volume di base S_1 e altezza dl_1: $dm_1 = \rho\, dV_1 = \rho S_1 V_1\, dt$; analogamente: $dm_2 = \rho\, dV_2 = \rho S_2 V_2\, dt$.

Immaginando di entrare con una massa maggiore di quella che esce dal tubo, all'interno avviene una compressione con conseguente aumento di densità, ma la densità non può cambiare trovandosi in regime stazionario: ne consegue che $dm_1 = dm_2$ ed eguagliandole si trova che

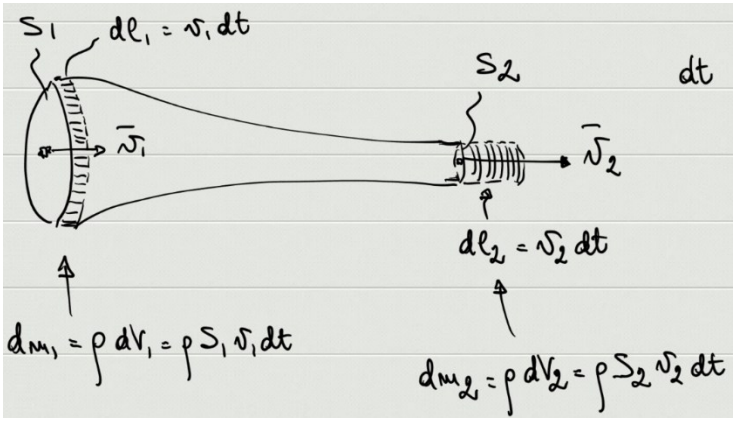
$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Estendendo il ragionamento a una qualunque sezione del flusso, si può dire che nel regime stazionario:

$$q = vS = cost.$$

e prende il nome di *portata media del flusso*.

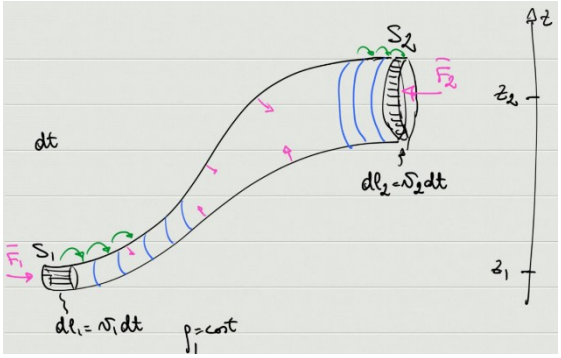
$$q = \int dq = \int v\, dS = V_m S$$



Si consideri un tubo di flusso a sezione variabile e ad altezza variabile. Quel che si vuol fare è un bilancio energetico di ciò che varia in termini di energia per il tubo di flusso che avanza dall'inizio alla fine. Per il teorema dell'energia cinetica $dE_k = dW_{TOT} = dW_{F_S} + dW_{F_V}$.

Esplicitando i termini:

- $dW_{F_V} = -\,dE_{p,peso}$: che sarà uguale alla differenza tra la situazione iniziale (S_1, S_2) e finale $(S_1\, dl_1, S_2 + dl_2)$. L'energia potenziale sarà pari alla somma delle energie di tutti gli elementi, tenendo conto che quelli compresi tra S_2 e dl_1 si semplificano tra di loro. Gli unici che rimangono sono quelli di S_1 e dl_2.
$$dW_{F_V} = -\,dE_{p,peso} = -(dmgz_2 - dmgz_1) = -\rho dV(z_2 - z_1)g$$
- dW_{F_S}: la superficie laterale risente delle forze perpendicolari dovute dal fluido che sta attorno (non essendoci attriti). Ecco che il lavoro delle forze della superficie laterale è nullo. Sulla base S_1 agisce una forza di pressione $\bar{F}_1$, su S_2 agisce una forza $\bar{F}_2$ che si oppone all'avanzata del fluido.



$$dW_{F_S} = \bar{F}_1\, d\bar{l}_1 + \bar{F}_r\, d\bar{l}_2 = F_1\, dl_1 - F_2\, dl_2$$
$$= p_1 S_1\, dl_1 - p_2 S_2\, dl_2$$

Ma sezione per spostamento è pari a un volume; quindi $dW_{F_S} = p_1 dV_1 - p_2 dV_2$ e siccome il volume è lo stesso:

$$dW_{F_S} = (p_1 - p_2)\, dV$$

Esprimendo la variazione di energia cinetica tra S_1, S_2 e $S_1 + dl_1, S_2 + dl_2$, esse equivale a:

$$dE_k = \frac{1}{2} dmv_2^2 - \frac{1}{2} dmv_1^2 = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2)$$

In definitiva:

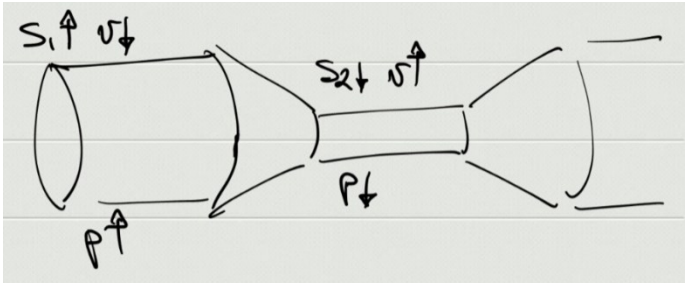
$$\frac{1}{2} dmv_2^2 - \frac{1}{2} dmv_1^2 = \frac{1}{2}\rho dV(v_2^2 - v_1^2) = (p_1 - p_2)\, dV - \rho dV(z_2 - z_1)g$$

$$\Rightarrow p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

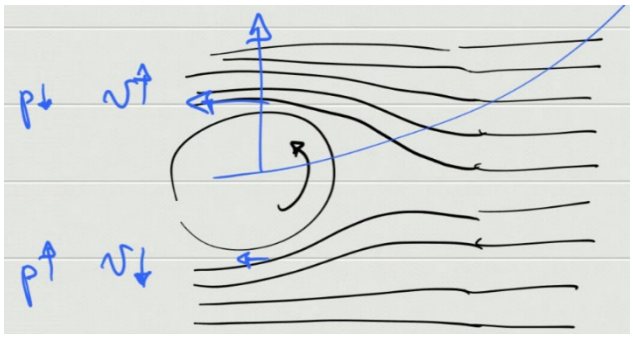
Concludendo, si può dire che per una qualunque sezione di flusso $p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost.$ e ciò prende il nome di **teorema di Bernoulli**.

Questo teorema ha molteplici applicazioni. Se:

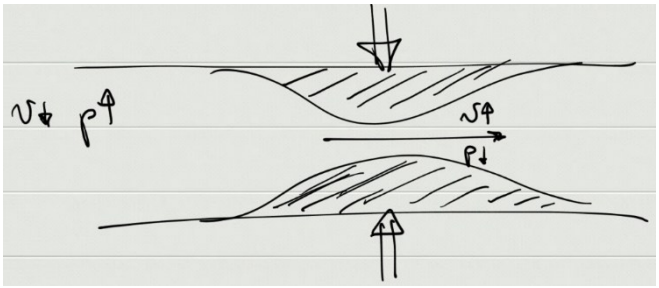
- $v = 0$: $p + \rho g z = cost.$ che è la legge di Stevino.
- $z = cost. \Rightarrow p + \frac{1}{2}\rho V^2 = cost.$: si ha nel *tubo di Venturi* dove si osserva che per una sezione grande, la velocità è piccola e viceversa. Per una velocità piccola si ha una pressione elevata, per una velocità alta la pressione è bassa. Creando un'apertura nella zona di bassa pressione, tutto ciò che sta in prossimità di essa viene aspirato all'interno. I nebulizzatori sono basati su questo principio.



- *Effetto Magnus*, effetto utilizzato nel volo degli aerei.



- Aterosclerosi:



Termodinamica

La **termodinamica** rappresenta un'estensione della meccanica e si occupa dello studio delle interazioni tra un sistema termodinamico e l'ambiente che lo circonda. Mentre un approccio puramente meccanico allo studio di un gas si scontra con difficoltà insormontabili, legate al grande numero di particelle e alle loro interazioni, la termodinamica adotta un approccio macroscopico. Questo approccio si basa su variabili misurabili e su un numero limitato di parametri, senza la necessità di conoscere dettagli microscopici come massa, velocità e forze agenti su ogni particella.

La termodinamica semplifica il problema rispetto al rigore della meccanica, adottando un approccio statistico. Attraverso la **meccanica statistica**, i parametri microscopici vengono mediati per ottenere un'analisi macroscopica che descrive l'evoluzione dei sistemi. Le variabili termodinamiche, simili alle coordinate spaziali della meccanica, cambiano nel tempo e permettono di descrivere i sistemi macroscopici.

Per descrivere i sistemi macroscopici si utilizzeranno delle *variabili/coordinate termodinamiche* che cambiano nel tempo come le coordinate spaziali della meccanica. I sistemi termodinamici si dividono in tre categorie:

1. *Aperti*: scambiano materia ed energia con l'ambiente.
2. *Chiuso*: scambiano solo energia con l'ambiente.
3. *Isolato*: non scambia né materia né energia con l'ambiente.

L'unione dell'ambiente più sistema costituisce l'*universo* che è un sistema isolato.

Un gas è caratterizzato da parametri macroscopici come *massa*, *pressione*, *volume* e *temperatura*. Un sistema termodinamico raggiunge una condizione di equilibrio quando questi parametri sono definiti e costanti. Questa condizione è detta *stato di equilibrio*, e durante tale stato è possibile determinare una relazione tra le coordinate termodinamiche, nota come **equazione di stato**.

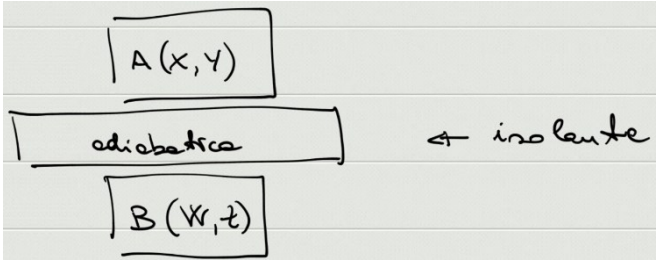
Lo stato di equilibrio in termodinamica è caratterizzato da tre diverse forme di equilibrio:

$$\begin{cases} meccanico\ (\bar{R}^E = 0, \bar{M}^E = 0) \\ chimico\ (no\ reazioni\ chimiche) \\ termico\ (temperatura\ costante) \end{cases}$$

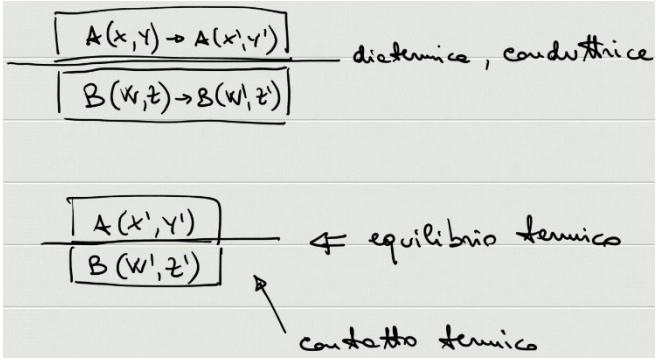
In meccanica, l'energia meccanica è data dalla somma di energia cinetica e potenziale, associata al movimento macroscopico degli oggetti. A livello microscopico, tuttavia, anche il movimento degli atomi genera energia, che in meccanica viene apparentemente dissipata. Questa energia non viene persa, ma si trasforma in agitazione termica. Si introduce quindi il concetto di **energia interna**, associata ai moti microscopici delle particelle. La percezione di caldo e freddo è legata proprio all'energia interna: un corpo è caldo quando le sue particelle possiedono un'elevata energia interna, mentre è freddo quando questa energia è bassa.

Per analizzare l'equilibrio termico, si considera inizialmente il ruolo delle pareti del recipiente che contiene il sistema termodinamico. Le pareti possono essere di diversi tipi, a seconda delle loro proprietà termiche e meccaniche.

- *Adiabatiche* (perfettamente isolante): si suppone di avere due sistemi caratterizzati rispettivamente da variabili $(x, y, z, \dots)$ e $(x', y', z', \dots)$. Mettendo entrambi questi sistemi a contatto con una parete adiabatica, non cambia nulla.



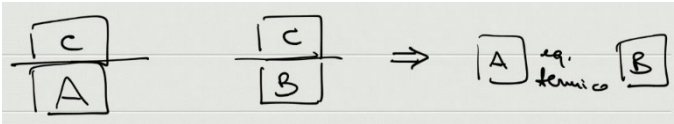
- *Diatermiche*: prendendo gli stessi due sistemi e mettendoli in contatto con una parete diatermica, si verifica un'interazione tra i due che li porta ad avere parametri diversi $(x^*, y^*, z^*, \dots)$ e $x'^*, y'^*, z'^*, \dots)$, fino ad ottenere una situazione di equilibrio termico. Si chiama anche parete *conduttrice* e quando sono in contatto con essa si dice che sono in **contatto termico**.



Due corpi sono in equilibrio termico tra di loro quando sono messi in contatto con una superficie diatermica e le loro variabili termodinamiche non cambiano (sono alla stessa temperatura).

Principio zero della termodinamica

Siano due sistemi termodinamici A e C in equilibrio termico tra loro e sia lo stesso sistema C in equilibrio termico con B. Mettendo in contatto termico A e B, si avrà che anch'essi sono in equilibrio termico tra di loro per proprietà transitiva. Per caratterizzare la temperatura dei corpi, è necessario misurarla attraverso dei termometri.

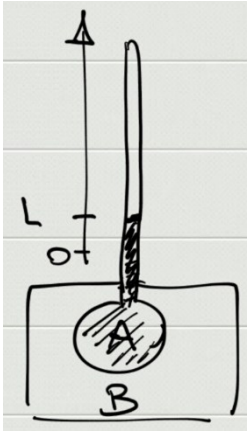


<u>Scala di temperatura.</u> Vi è la necessità di trovare uno strumento che sia in grado di fornire un valore numerico alla temperatura, l'oggetto che permette di farlo è il **termometro**. Si considererà come termometro un qualunque sistema termodinamico in cui una delle variabili termodinamiche dipende dalla temperatura: $X = X(t)$. In particolare, questo oggetto prende il nome di *caratteristica termometrica*.

Si definisce poi una funzione che abbia come variabile questa caratteristica termometrica: **funzione termometrica** $\theta = \theta(x) = t$. Quel che si fa è associare alla funzione un valore numerico corrispondente alla temperatura.

Esempio pratico: il termometro a mercurio è un capillare con un serbatoio di mercurio, un metallo che a temperatura ambiente si trova allo stato liquido e caratterizzato da un elevato coefficiente di espansione

termica. In funzione della temperatura la colonnina di mercurio sale fino a una certa altezza L, che sarà la caratteristica termometrica del termometro. Per definire la temperatura, invece, si può immaginare di assegnare una funzione lineare del tipo $\theta = \theta(x) = aX + b$, per cui bisogna trovare due valori per i due coefficienti. Quello che tipicamente si fa in modo arbitrario è assegnare dei valori numerici a degli stati caratteristici della materia; in particolare a temperatura ambiente:



- scala centigrada:
    - la temperatura del punto di fusione del ghiaccio è $t_g = 0\ °C$;
    - la temperatura del punto di ebollizione dell'acqua è $t_v = 100\ °C$

La scala lineare sarà della forma $t = aL + b$. Si mette il termometro in equilibrio/contatto termico col ghiaccio che fonde e si misura il valore L_g della colonna di mercurio.

$$t_g = 0\ °C = aL_g + b$$

Mettendo il termometro in equilibrio termico con l'acqua che sta bollendo, si ottiene una lunghezza della colonnina L_v.

$$t_v = 100\ °C = aL_v + b$$

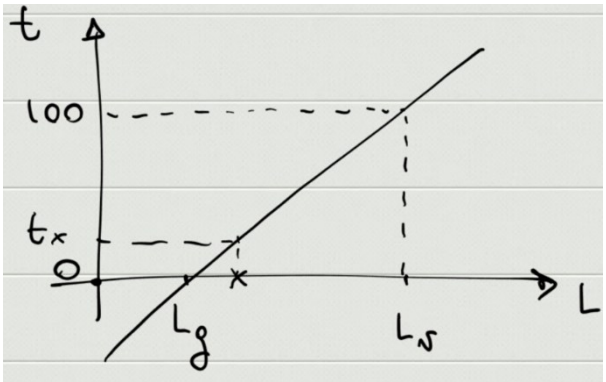
Mettendo a sistema e risolvendo si ottengono i due coefficienti.

$$\begin{cases} t_g = 0\ °C = aL_g + b \\ t_v = 100\ °C = aL_v + b \end{cases} \Rightarrow 100 = a(L_v - L_g) \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{100}{(L_v - L_g)} \\ b = -\dfrac{100L_g}{L_v - L_g} \end{cases}$$

E dunque:

$$t = 100\frac{L - L_g}{L_v - L_g} = 100\frac{X - X_g}{X_v - X_g}$$

Costruendo un grafico:



I termometri a colonnina di mercurio presentano limiti significativi in termini di affidabilità. L'errore nella lettura della colonnina di mercurio può essere notevole e, inoltre, sussistono problemi di natura costruttiva. Il principale ostacolo è rappresentato dalla difficoltà di garantire un contatto efficace tra il termometro e i valori di riferimento durante la fase di calibrazione.

Per applicazioni scientifiche, la scala Celsius non risulta particolarmente adatta. Per questo motivo, si preferisce utilizzare i termometri a gas, che offrono un intervallo di misura più ampio. La scala di temperatura che si ottiene con questi strumenti è lineare e si basa su un'unica relazione del tipo $t = aX$. Per definire questa scala, è sufficiente stabilire un unico punto di riferimento, generalmente il **punto triplo dell'acqua**, in cui

coesistono i tre stati della materia (solido, liquido e gassoso) e che corrisponde a $t_{pt} = 273{,}16°$. Utilizzando questo valore, è possibile determinare il coefficiente aaa attraverso una procedura simile a quella adottata per altri tipi di termometri.

$$t_{pt} = 273{,}16° = aX_{pt} \Rightarrow a = \frac{273{,}16}{X_{pt}}$$

$$t = 273{,}16\frac{X}{X_{pt}}$$

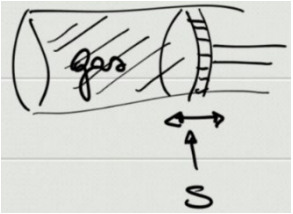
Un vantaggio di questa scala è il seguente: queste scale di temperatura sono scale che misurano *temperature empiriche*, chiamate così per distinguerle dalla **temperatura assoluta** ($\boldsymbol{T}$), la quale ha lo stesso valore numerico della temperatura empirica calcolata in relazione al punto triplo dell'acqua e non si esprime in gradi. L'unità di misura della temperatura assoluta è il *Kelvin* (K).

- $T_{pt} = 273{,}16\ K$
- $T_g = 273{,}15\ K$
- $T_v = 373{,}15\ K$

Per convertire: $T(°C) = T(K) - 273{,}15$

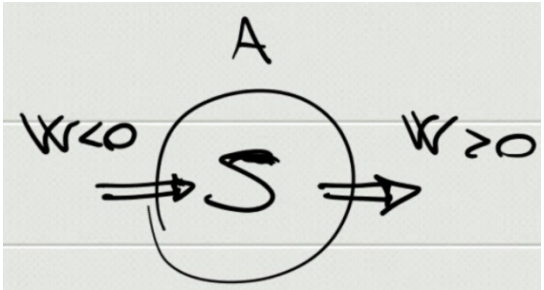
Lavoro

Dalla meccanica si può dividere il lavoro in W^I e W^E. Per il momento si può non considerare il lavoro dovuto dalle forze interne, mentre si deve tenere in considerazione quello dovuto dalle forze esterne che agisce sul contenitore del gas. Si immagini di mettere il gas in un cilindro con un pistone che lo può comprimere o dilatare.



In termodinamica il lavoro si vede prevalentemente dal punto di vista del sistema, cioè dal punto di vista del gas.

- Lavoro è *positivo* ($W > 0$): il sistema compie lavoro sull'ambiente; il gas si espande, le molecole spingono e spostano il pistone verso destra: la forza è concorde allo spostamento.
- Lavoro *negativo* ($W < 0$): il sistema compie lavoro sull'ambiente, ma lo spostamento avviene al contrario perché il gas si comprime.



Il lavoro sarà uguale a: $W = \int \bar{F}\, d\bar{s} = \int pdS\, ds\, p\, dS\, ds = \int p\, dV = \int p(V)\, dV$.

Per calcolare quel valore della pressione è necessario trovarsi in uno stato di equilibrio, ma in uno stato di equilibrio vi è anche equilibrio meccanico. Per poter risolvere l'integrale è necessario sapere come varia la pressione in funzione del volume; tuttavia, in queste trasformazioni che avvengono in modo abbastanza rapido l'integrale non è risolvibile.

Un escamotage consiste nel considerare il sistema con un insieme di coordinate x, y, z che rimangono fisse nel tempo e allentando la definizione affermando che rimango nello stato di equilibrio anche allontanandosi di un infinitesimo dalle condizioni iniziali $(x \pm dx, y \pm dy, z \pm dz)$. Si può passare dallo stato iniziale allo stato finale passando con continuità attraverso i suoi stati di equilibrio mediante **trasformazioni quasi statiche**.

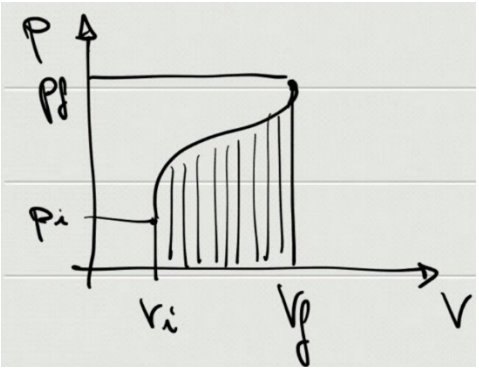
Nel piano pressione-volume (*piano di Clapeyron*) il calcolo della pressione corrisponde a calcolare l'area definita dalla curva che dà la trasformazione rispetto l'asse delle ascisse.

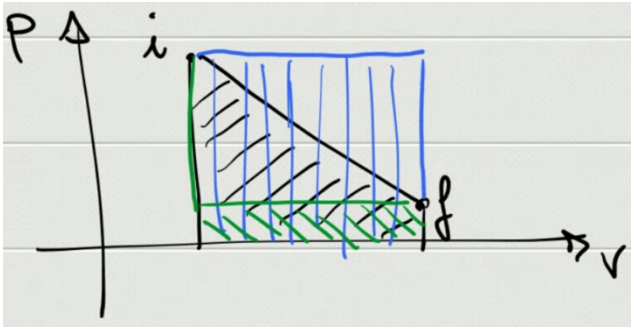
Oppure, si può considerare la trasformazione mantenendo prima la pressione costante e poi mantenendo il volume invariato ottenendo un valore differente del lavoro. Si noti allora come l'integrale del lavoro non sia definito e che:

$$W_{i \to f} = \int_{V_i}^{V_f} p(V)\, dV \neq f(V_f) - f(V_i)$$

Per ricordare questa proprietà del lavoro, si scriverà il lavoro come differenziale non esatto e bisognerà conoscere le trasformazioni implicate:

$$\delta W = p\, dV$$

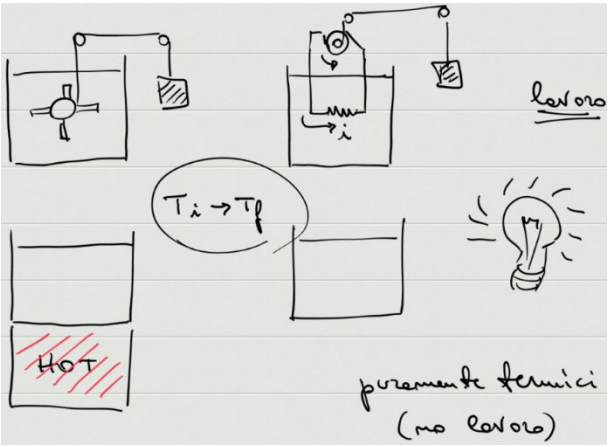




Primo principio della termodinamica

Nel considerare casi di trasformazioni quasi statiche, si fa riferimento a un esperimento condotto da Joule. Tale esperimento prevede di riempire un recipiente d'acqua e portarla da una temperatura iniziale T_i a una temperatura finale T_f senza variare altri parametri, compiendo processi quasi statici e attendendo che il sistema ritorni in condizioni di equilibrio. Sono state analizzate quattro diverse tipologie di trasformazione:

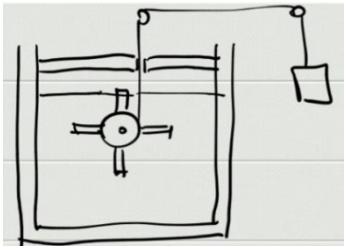
1. In un recipiente, tramite un sistema di carrucole e pesi, vengono messe in moto delle pale che, per attrito, riscaldano l'acqua.
2. In un recipiente viene posta una resistenza collegata a una dinamo azionata da pesi. Il movimento dei pesi genera una corrente che circola nella resistenza, producendo calore.
3. Un recipiente d'acqua viene posto in contatto termico con un contenitore a una temperatura $T > T_f$. In questo caso non è presente alcuna trasformazione meccanica.
4. Un corpo che irraggia viene posto vicino a un recipiente, riscaldando l'acqua al suo interno senza contatto termico.



Nei primi due esperimenti è presente lavoro meccanico, mentre negli ultimi due no. In passato, per spiegare i fenomeni osservati negli esperimenti 3 e 4, si ipotizzava l'esistenza del *calorico*, una presunta forma di energia presente in quantità maggiore nei corpi più caldi. Il problema principale consisteva nel comprendere l'origine di questo "calorico".

Il **calore** viene definito come una forma di energia trasferita da un corpo caldo a uno freddo, associata alla differenza di temperatura. Il calore e il "calorico" non sono equivalenti: il primo rappresenta un trasferimento di energia, mentre il secondo era considerato una proprietà intrinseca dei corpi.

Ritornando agli esperimenti 1 e 2, Joule condusse anche prove con contenitori adiabatici, in modo che l'unica forma di scambio di energia tra sistema e ambiente avvenisse tramite lavoro meccanico. Si osservò che $W_{adiabatico} = cost.$: ogni volta che è presente lavoro meccanico e il contenitore è adiabatico, la stessa trasformazione termodinamica richiede lo stesso quantitativo di lavoro.



In meccanica, il lavoro è costante quando sono coinvolte forze conservative, secondo la relazione:

$$W_{fc} = \int_i^f \bar{F}\, d\bar{s} = -\Delta E_p$$

poiché dipende solo dalle coordinate iniziali e finali. Analogamente, in termodinamica, indipendentemente dalla traiettoria o trasformazione seguita (in termini di coordinate termodinamiche), il lavoro non cambia e può essere espresso come l'opposto della variazione di un'energia:

$$W_{adiabatico} = cost. = -\Delta U$$

dove U indica l'**energia interna** del sistema, che corrisponde all'insieme delle energie a livello microscopico presenti all'interno dei corpi. Ne consegue che l'energia apparentemente dissipata per attrito viene in realtà trasferita agli atomi, causando un aumento della temperatura. La temperatura, quindi, rappresenta un indicatore del livello di energia interna dei corpi.

Negli esperimenti 3 e 4, in cui le pareti sono diatermiche, l'energia interna varia a causa di uno scambio di energia non dovuto al lavoro meccanico. È necessario, quindi, considerare che l'energia interna cambi anche tramite forme diverse dal lavoro, introducendo così il concetto di calore.

Estendendo l'analogia con i sistemi meccanici, si può ipotizzare che l'energia interna di un sistema termodinamico vari a causa dello scambio di calore. Il calore rappresenta una forma di scambio di energia a livello microscopico che consente ai sistemi termodinamici di trasferire energia tra loro. In particolare, se la variazione di energia interna avviene esclusivamente tramite scambio termico, si ha:

$$\Delta U = Q_{puramente\ termici}$$

Da questa osservazione emerge che la variazione di energia interna può essere indotta sia dal lavoro adiabatico che dal calore:

$$\Delta U = \begin{cases} -W_{adiabatico} \\ Q_{puramente\ termici} \end{cases}$$

Ciò dimostra l'**equivalenza tra calore e lavoro**, espressa dalla relazione:

$$Q \sim W \Rightarrow Q = -W$$

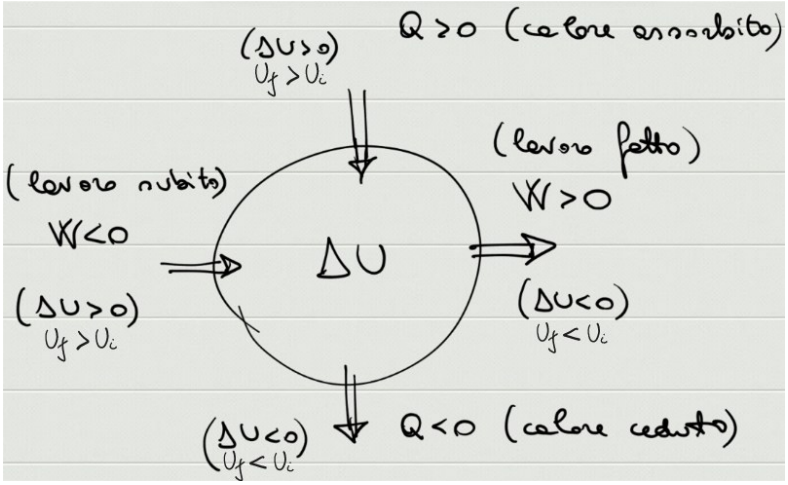
In condizioni intermedie, in cui il sistema scambia sia calore che lavoro, la relazione generale diventa:

$$\Delta U = Q - W$$

Questa equazione rappresenta il **primo principio della termodinamica**, che può essere riformulato come:

$$Q = \Delta U + W$$

Il primo principio afferma che "l'energia interna di un sistema termodinamico può variare a causa di scambi di calore con l'ambiente o di lavoro compiuto sul sistema". Macroscopicamente, questa relazione rappresenta la somma di tutte le energie microscopiche delle particelle che costituiscono il sistema.



L'energia interna è una funzione esclusiva delle **coordinate termodinamiche** del sistema, analogamente a come, in meccanica, l'energia potenziale dipende dalle coordinate spaziali dei punti materiali: $U = U(x, y, z)$. Un **processo ciclico** si verifica quando un sistema termodinamico parte da uno stato iniziale e vi ritorna dopo una serie di trasformazioni. In tale processo, l'energia interna finale è uguale a quella iniziale:

$$U_f \equiv U_i \Rightarrow \Delta U = 0$$

Un esempio tipico di processo ciclico è rappresentato dalle *macchine termodinamiche*. In queste macchine, poiché $\Delta U = 0$, si ha che:

$$Q = W$$

In particolare, se:

- $Q = W > 0$: macchine termiche;
- $Q = W < 0$: macchine frigorifere (il sistema subisce lavoro dall'ambiente e cede calore all'ambiente).

Dal punto di vista energetico, in meccanica il lavoro è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative e non conservative. Tuttavia, si è compreso che il lavoro delle forze non conservative corrisponde alla variazione di energia interna del sistema:

$$W = \Delta E_k = W_{fc} + W_{nc} = -\Delta E_p - \Delta U \Rightarrow \Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U = 0$$

Ma $\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_m$, ecco che

$$\Delta E_m + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta E_m + \Delta U = cost.$$

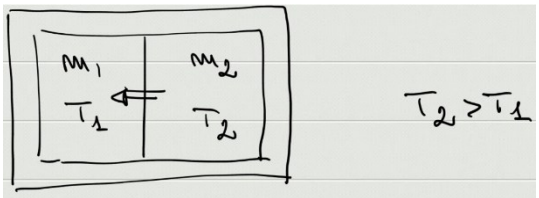
Questo risultato conferma che l'energia totale si conserva. Il primo principio della termodinamica funge anche da definizione di calore, inteso come quella forma di scambio di energia per un sistema termodinamico, data dalla somma della variazione di energia interna e del lavoro meccanico.

Completando l'analogia col lavoro, si è visto in precedenza come $W_{i\to f} = \int_{V_i}^{V_f} p(V)\, dV \Rightarrow \delta W$, ma essendo calore e lavoro equivalenti tra loro ha senso parlare di *variazioni infinitesime di calore* δQ (differenziale non esatto perché dipende dalla trasformazione). Riscrivendo il primo principio in forma differenziale

$$\delta Q = dU + \delta W$$

Tenendo presente che dU è un differenziale esatto che dipende solo dalle coordinate iniziali e finali del sistema.

Trasformazioni puramente termiche



Esistono trasformazioni termodinamiche in cui è possibile esprimere il calore scambiato in funzione delle variabili termodinamiche coinvolte. Si considerino due sistemi termodinamici alle temperature T_1 e T_2 ($T_1 < T_2$), separati da una parete diatermica e posti all'interno di un recipiente adiabatico. Dopo un certo tempo, i due sistemi raggiungeranno una temperatura di equilibrio T_e, tale che $T_1 < T_e < T_2$.

Se i due sistemi sono statici, non viene compiuto alcun lavoro meccanico ($W_1 = W_2 = 0$) e i rispettivi calori saranno:

$$Q_1 = \Delta U_1 \; e \; Q_2 = \Delta U_2$$

La somma dei calori scambiati è:

$$Q_1 + Q_2 = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

Poiché il sistema complessivo è adiabatico, non può scambiare calore con l'esterno, quindi la somma dei calori scambiati deve essere nulla:

$$Q_1 = -Q_2$$

Questo significa che:

- $Q_2 < 0$: calore ceduto, $\Delta U_2 < 0$ ($\Delta U_2 \downarrow$)
- $Q_1 > 0$: calore assorbito, $\Delta U_1 > 0$ ($\Delta U_1 \uparrow$)

Per quantificare il calore scambiato, si utilizzano i **calorimetri**. Un metodo comune per misurare il calore è il mulinello di Joule, che dimostra come il calore sia proporzionale alla massa e alla variazione di temperatura:

$$Q \propto m\Delta T$$

$$Q_p = mc\Delta T$$

dove $c = c(sostanza, T)$ prende il nome di **calore specifico** e rappresenta quanto calore serve per far variare di $1\ K$ una massa di $1\ kg$. L'unità di misura è $[c] = \frac{J}{kgK}$.

$$c = \frac{1}{m}\frac{Q}{\Delta T}$$

La **capacità termica** invece è definita come:

$$C = mc = \frac{Q}{\Delta T}$$

Applicando il concetto di calore specifico all'esperimento descritto, si ottiene:

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2) = Q_2$$

Da questa relazione, è possibile ricavare la temperatura di equilibrio:

$$m_1 c_1 T_e + m_2 c_2 T_e = m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 \Rightarrow T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{n_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2}{C1 + C_2}$$

Questa espressione rappresenta una media pesata delle temperature iniziali dei due sistemi, dove i pesi sono le rispettive capacità termiche.

In termini infinitesimi, il calore specifico può essere espresso come:

$$Q = \int \delta Q = \int_{T_i}^{T_f} mc(T)\, dT$$

Se $c(T) = cost.$, allora:

$$Q = mc \int_{T_i}^{T_f} dT = mc(T_f - T_i)$$

Per i gas, la formula è analoga, ma si utilizza il **calore specifico molare** c_m, definito come:

$$c_m = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT}$$

dove n è il numero di moli e l'unità di misura è $[c_m] = \left[\frac{J}{mol\ K}\right]$. Una **mole** è una quantità di sostanza che contiene lo stesso numero di molecole presenti in 12 grammi di carbonio-12, corrispondente al **numero di Avogadro**: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$.

Il calore specifico dell'acqua è $c_{H_2O} = 41868\ \frac{J}{mol\ K} = 1\ Cal$, che equivale a 1 caloria per un aumento di temperatura da $14{,}5\ °C$ a $15{,}5\ °C$ in $1\ kg$ di acqua. La **caloria** è definita come la quantità di calore necessaria per aumentare di $1\ °C$ la temperatura di $1\ kg$ di acqua.

Cambiamenti di fase

Un **cambiamento di fase** è un processo isotermico in cui una sostanza passa tra stati diversi.

- Solido → liquido: fusione
- Liquido → vapore: evaporazione
- Liquido → solido: solidificazione
- Vapore → liquido: condensazione
- Solido ↔ vapore: sublimazione

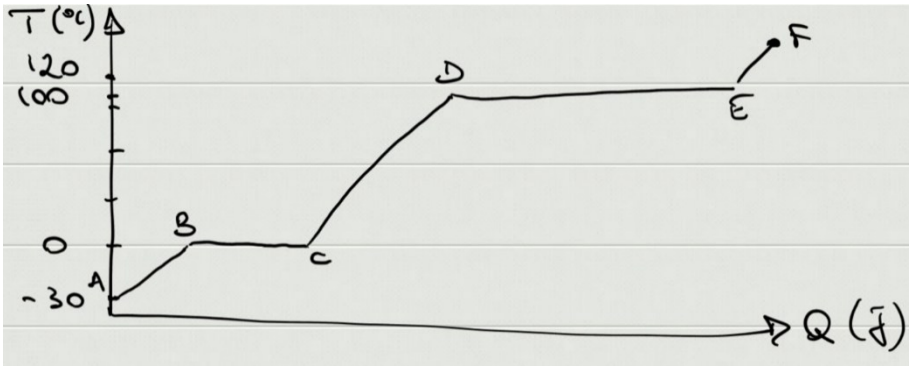
Sono processi quasi statici e reversibili (ossia passano dallo stato iniziale e finale attraverso gli stessi identici processi). Anche in questo caso il calore scambiato durante un cambiamento di fase è proporzionale alla massa della sostanza in gioco $Q \propto m$. Ecco allora che

$$|Q| = m\lambda$$

Dove λ prende il nome di **calore latente**.

Si parla più propriamente di "punto di ebollizione" e non di evaporazione perché è la temperatura a cui la tensione di vapore della sostanza eguaglia la pressione ambiente.

Per un cubetto di ghiaccio di massa $1\ g$, il seguente diagramma illustra l'andamento del calore per portarlo da una temperatura di $-30\ °C$ fino a $120\ °C$.

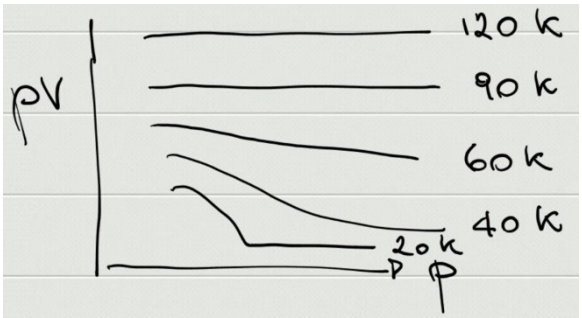


I gas

I **gas** sono dei fluidi la cui caratteristica è quella di riempire tutto lo spazio a disposizione in quanto non hanno volume proprio. I parametri termodinamici che permettono di definire uno stato di equilibrio di un gas sono la *pressione* (p)*, il volume* (V) *e la temperatura* (T).

Legge di Boyle

Si caratterizzano ora le condizioni in cui un gas verrà utilizzato. Sia un grafico in cui il prodotto pV è in funzione della pressione e si consideri l'idrogeno gassoso H_2; disegnando le isoterme e diminuendo la temperatura, il grafico risulta come in figura.



A mano a mano che la temperatura diminuisce, aumenta la densità perché ci si avvicina sempre più al punto di transizione di Waals. Per caratterizzare tutte queste curve per un singolo gas si utilizzano le *equazioni del viriale*.

$$pV = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \cdots$$

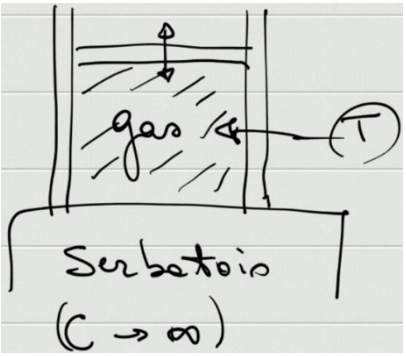
Sono degli sviluppi in serie dove i coefficienti c_i dipendono dalla temperatura e dal tipo di gas. Facendo degli sviluppi in funzione del volume si ottiene che:

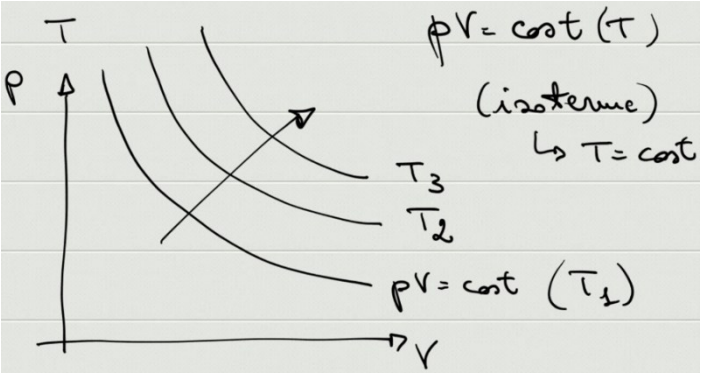
$$pV = d_0 + \frac{d_1}{V} + \frac{d_2}{V^2} + \frac{d_3}{V^3} + \cdots$$

Per pressioni basse (aumentando il volume) si ha che: $p \to 0 \Rightarrow pV \to c_0$ e $V \to \infty \Rightarrow pV \to d_0$.

La relazione $pV = cost.$ è la *legge di Boyle* e si applica a condizione che la pressione del gas sia bassa. Si definisce **gas ideale/perfetto** un gas al quale è possibile applicare la legge di Boyle, a patto che la temperatura sia costante.

Una **trasformazione isoterma** ($T = cost.$) si rappresenta mediante un recipiente adiabatico collegato a un serbatoio di calore (un dispositivo che permette di scambiare calore con un qualunque sistema termodinamico mantenendo la sua temperatura costante). Nel diagramma di Clapeyron, invece, una trasformazione isoterma viene rappresentata da un ramo di iperbole.





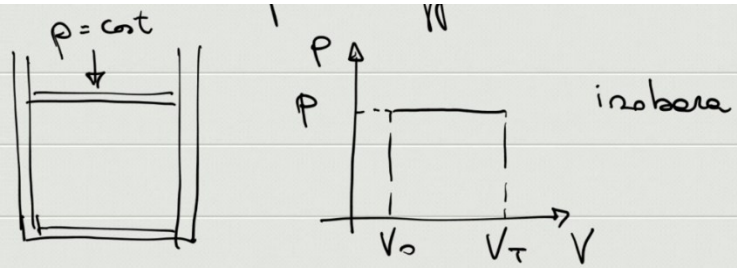
Legge di Volta-Gay-Lussac (v-gs)

Compiendo una trasformazione a *pressione costante* (**isobara**) nel diagramma di Clapeyron verrà rappresentata come una retta parallela all'asse delle ascisse. Sperimentalmente si ricava che $V(t) = V_0(1 + \alpha t)$.

Dove:

- t: è espresso in gradi centigradi;
- α: è una costante che varia poco al variare del gas;
- V_0: è il valore del volume a $0\ °C$.

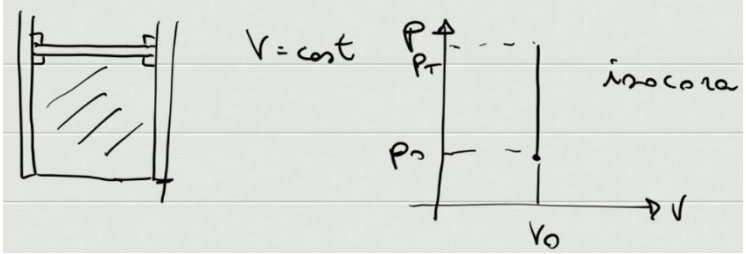
Tale legge prende il nome di *legge di Volta-Gay-Lussac*.



Facendo una trasformazione a *volume costante* (**isocora**) nel diagramma di Clapeyron verrà rappresentata come una retta parallela all'asse delle ordinate. Si trova che la relazione che esprime la pressione in funzione della temperatura è simile a quella vista in precedenza: $p(t) = p_0(1 + \beta t)$.

Dove:

- t: è espresso in gradi centigradi;
- β: è una costante che varia poco al variare del gas;
- p_0: è il valore del volume a $0\ °C$.



Se il gas è ideale: $\alpha = \beta = \frac{1}{273{,}15}\ °C^{-1}$. Riscrivendo le due equazioni si ottiene che

$$V = V_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = V_0\alpha(273{,}15 + t) = V_0\alpha T = V(T)$$

$$p = p_0\alpha\left(\frac{1}{\alpha} + t\right) = p_0\alpha(273{,}15 + t) = p_0\alpha T = p(T)$$

Si osservi come sia il volume che la pressione sono due funzioni lineari della temperatura e che dipendano unicamente e rispettivamente dal volume e dalla pressione a $0\ °C$.

Legge di Avogadro

Nella produzione di acido cloridrico secondo la reazione $H_2 + Cl_2 \rightleftharpoons 2HCl$, *Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro* osservò che, a parità di temperatura e pressione, i volumi dei gas coinvolti nella reazione erano sempre in rapporti interi o frazionari, indipendentemente dalle quantità relative di cloro e idrogeno utilizzate.

Se si considera una massa generica M_{gas} di un gas, e si conosce la massa di una singola molecola $m_{molecola}$, è possibile calcolare il numero di molecole come:

$$N = \frac{M_{gas}}{m_{molecola}}$$

Con:

- n: il numero di moli;
- M^*_{mol}: la massa di una mole;
- $M^*_{mol} = \#g$, e # è la massa molecolare espressa in unità di masse atomiche

Esempi:

- O_2: $A = 8, Z = 16\ (8p + 8n) \rightarrow \# = 2 \cdot 16 = 32$. Ecco che 1 mol di $O_2 = 32\ g$.
- H_2O: $2H\ (Z = 1) + 1O\ (Z = 16) \rightarrow \# = 18$. Ecco che 1 mol di $H_2O = 18\ g$.

Il numero di molecole può essere espresso come:

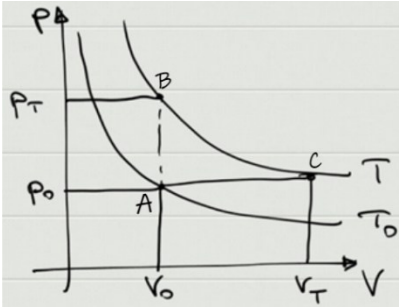
$$N = \frac{M_{gas}}{m_{molecola}} = \frac{nM^*_{mol}}{M^* \cdot uma}$$

con M^*: numero di unità di masse atomiche

$$N = \frac{M_{gas}}{m_{molecola}} = \frac{nM^*_{mol}}{M^* \cdot uma} = \frac{n}{uma} = \frac{n}{1{,}6604 \cdot 10^{-24}} = n \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{N}{n} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$$

Tornando all'esperimento iniziale, è possibile calcolare il volume occupato da una mole di gas in condizioni standard di temperatura e pressione. Il **volume molare**, $V_m = 0{,}022414\, m^3$, è definito come il volume che occupa una mole di gas a $T_0 = 273{,}15\, K$ e $p_0 = 101325 \cdot 10^5\, Pa$.



Per ricavare la relazione tra le variabili termodinamiche dei gas, si consideri un gas in condizioni iniziali a p_0 e $V_0 = nV_m$. Attraverso una trasformazione isocora e una isobara, utilizzando l'equazione di V-GL, si ottiene:

$$p_T = p_0 \alpha T \; e \; V_T = V_0 \alpha T$$

Per la legge di Boyle, si può dire che il prodotto $p_c V_c = p_B V_B$.

$$\Rightarrow p_T V_0 = p_0 V_T = \; pV(T) \quad (per\ qualunque\ stato\ che\ si\ trovi\ a\ quella\ stessa\ temperatura)$$

$$pV = p_0 \alpha T V_0 = n(p_0 \alpha V_m)T$$

Essendo che $p_0 \alpha V_m$ sono tutte costanti, le si possono chiamare R.

$$pV = nRT$$

Questa è l'**equazione di stato dei gas perfetti**, dove $R = 8{,}314 \frac{J}{mol\ K}$ è la *costante universale dei gas*.

L'equazione di stato può essere riscritta in termini del numero di molecole:

$$pV = \frac{N}{N_a} RT = NK_B T$$

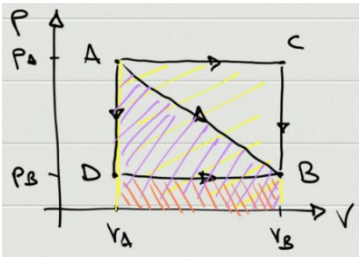
Con $\frac{R}{N_a} = K_B = 1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ la *costante di Boltzmann*.

Applicazione del primo principio nel caso di un gas

Parlando del lavoro di un gas, si è visto come per i fluidi $\delta W = \bar{F} d\bar{s} = pSds = pdV$. Ecco allora che:

$$W_{A \to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B p\, dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV$$

NB: la temperatura non si può portar fuori facilmente dal segno di integrale perché dipende anch'essa dal volume.



<u>Lavoro di un gas.</u> Sia il diagramma di Clapeyron. Se non si conoscono le trasformazioni specifiche tra gli stati A e B, si può immaginare una trasformazione generica che non passa necessariamente per stati di equilibrio. Tuttavia, se si considerano trasformazioni che passano per stati di equilibrio, come ad esempio una trasformazione $A \to C \to B$ (isocora seguita da isobara), il lavoro può essere calcolato come:

$$W_{A\to C\to B} = W_{AC} + W_{CB} = \int_A^B p_A\, dV + \emptyset = p_A \int_{V_A}^{V_C=V_B} dV = p_A(V_B - V_A)$$

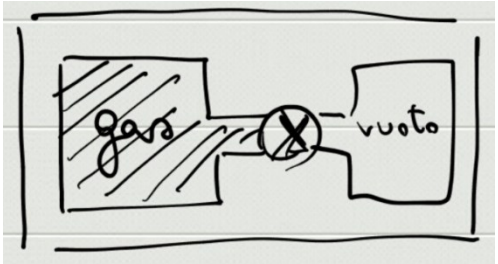
Analogamente, se si considera una trasformazione $\mathrm{A} \to \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ (isobara seguita da isocora), il lavoro è:

$$W_{A\to D\to B} = p_B p_A \int_{V_A=V_D}^{V_B} dV = p_B(V_B - V_A)$$

Se la trasformazione è rappresentata da un segmento nel piano pV, il lavoro è dato dall'area del trapezio:

$$W_{AB} = \int_A^B p\, dV = \frac{1}{2}(p_A + p_B)(V_B - V_A)$$

Nel caso di trasformazioni cicliche, il lavoro corrisponde all'area del ciclo tenendo conto che se si va in un verso il segno è positivo, se si va in un altro è negativo.



<u>Energia interna di un gas.</u> Passando all'energia interna, si immagini di aver un contenitore pieno di un gas collegato ad un altro vuoto tramite una valvola e il tutto contenuto in pareti adiabatiche. Aprendo la valvola, accade che il gas riempie completamente tutto il recipiente (**espansione libera**) e non avviene scambio di calore. Non vi è nemmeno lavoro in gioco perché le molecole si spostano liberamente e non ci sono spostamenti; infatti, la valvola non viene mossa dalla pressione del gas. Applicando il primo principio, si osserva che:

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0 \\ W = 0 \\ Q = \Delta U + W \end{array}\right\} \to \Delta U = 0 \Rightarrow U = cost.$$

In precedenza, si è visto come l'energia interna è una funzione di stato che dipende solo dalle coordinate iniziali e finali $U = U(x, y, z) = U(p, V, T)$. Tuttavia, tramite l'equazione di stato, è possibile esprimere U in funzione di sole due variabili, ad esempio:

$$U = U(p, V, T) = \begin{cases} U(p, T) \\ U(T, V) \\ U(p, V) \end{cases}$$

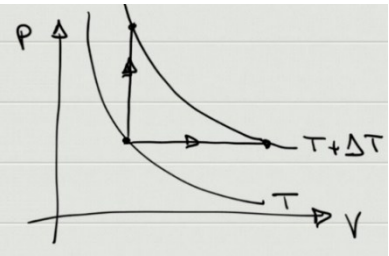
Sperimentalmente, si osserva che per un gas ideale l'energia interna dipende solo dalla temperatura:

$$U = U(T)$$

Si osserva che la dipendenza è quella di una funzione crescente:

- Q aumenta: $U \uparrow$
- Q diminuisce: $U \downarrow$

<u>Calore.</u> Passando al calore, siano il diagramma pV e un'isoterma alla temperatura T. Ricordando che coi gas si parla di calore molare, $c_m = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow \delta Q = mc_m\, dT$, e integrando si ottiene:



$$Q = \int \delta Q = \int_T^{T+\Delta T} nc_m\, dT$$

Il calore può essere scambiato in due modi principali:

1. Isocora: $V = cost. \Rightarrow W = 0 \Rightarrow\ Q_V = \Delta U$
2. Isobara: $p = cost. \Rightarrow Q_p = \Delta U(> 0) + W(> 0)$

Poco fa si è visto che l'energia interna dipende dalla temperatura; quindi, la variazione dell'energia interna è la stessa indipendentemente dalla trasformazione che viene compiuta. Tuttavia, i due calori sono diversi a parità di ΔT dal momento che nell'isobara è presente un termine di lavoro.

$$Q_p > Q_V$$

Riprendendo l'integrale di prima e assumendo che il calore specifico sia costante:

$$Q = nc_m \int_T^{T+\Delta T} dT = nc_m \Delta T$$

Apparentemente può sembrare di aver trovato una discrepanza (due calori diversi ma il modo di calcolarlo è identico). Quel che si fa è modificare il calore specifico: si hanno valori diversi per trasformazioni diverse.

$$nc_m \Delta T \Rightarrow \begin{cases} c_V \rightarrow c_m(V = cost.) \\ c_p \rightarrow c_m(p = cost.) \end{cases}$$

Riscrivendo:

3. $c_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{V=cost} \Rightarrow \delta Q_V = nc_V dT \Rightarrow Q_V = \int_T^{T+\Delta T} nc_V\, dT \Rightarrow Q_{AB,isocora} = nc_V(T_B - T_A)$
4. $c_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_{p=cost} \Rightarrow \delta Q_p = nc_p dT \Rightarrow Q_p = \int_T^{T+\Delta T} nc_p\, dT \Rightarrow Q_{AB,isobara} = nc_p(T_B - T_A)$

Mettendo assieme 1, 2, 3 e 4 e considerando che $W = \int p\, dV = p \int dV = p\Delta V$:

$$Q_p = nc_p \Delta T = nc_V \Delta T + p\Delta V$$

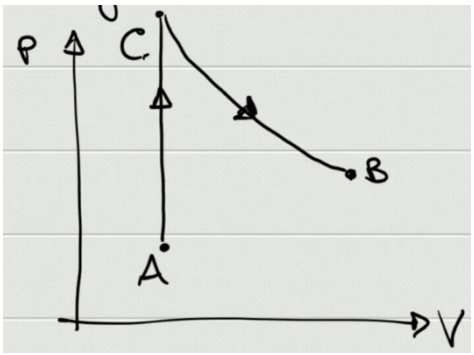
Se si usa l'equazione di stato, la si differenzia e si integra, si ottiene che:

$$pV = nRT \Rightarrow p\, dV = nRdT \Rightarrow p\Delta V = nR\Delta T$$

E riscrivendo: $Q_p = nc_p \Delta T = nc_V \Delta T + nR\Delta T \Rightarrow c_p - c_V = R$. Questa equazione prende il nome di **relazione di Mayer**:

$$c_p - c_V = R$$

Ultime considerazioni:



1. La variazione di energia interna in una trasformazione a volume costante è $\Delta U = nc_V \Delta T$. Per trovare la variazione di energia interna tra due stati A e B, si può introdurre uno stato intermedio C tale che $T_C = T_B$ e $V_C = V_A$:
   $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AC} + \Delta U_{CB} = nc_V(T_C - T_A) = nc_V(T_B - T_A)$
   Si noti che non è presente il termine ΔU_{CB} dal momento che $U(T) \Rightarrow \Delta U = 0$. In conclusione, quando si hanno due stadi di cui si conoscono le temperature si ha che
   $$\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$$
   Da qui si ricava un'espressione diversa del calore specifico molare:
   $$dU = nc_V\, dT \Rightarrow c_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = c_V(T)$$
2. Il calore scambiato in una trasformazione è dato da
   $$\delta Q = nc_v\, dT + \delta W \Rightarrow Q_{AB} = \int_A^B nc_V\, dT + W_{AB}$$
   Assumendo che il calore specifico molare sia costante: $Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) + W_{AB}$.
   Se la trasformazione che si considera è *reversibile*, $\delta W = pdV$,
   $$\Rightarrow \delta Q = nc_V(T_B - T_A) + pdV \Rightarrow Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) + \int_A^B p(V)\, dT$$
3. In casi particolari:
   - in caso di *isoterma* $(dT = 0)$: $c_{m,T=cost} \to \infty$;
   - in caso di *adiabatica* $(\delta Q = 0)$: $c_{m,adiabatica} = 0$.

Infine, si introduce un parametro $\gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1$.

	c_V	c_p	γ	$\gamma - 1$	$\frac{1-\gamma}{\gamma}$
Gas monoatomici	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5}$
Gas biatomici	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{7}$
Altri gas	$c_p = a + bT + cT^2$				

Trasformazioni dei gas

- *Isoterma* $(T = cost.)$:
  - Irreversibile: $\Delta U = nc_V(T_f - T_i) = 0 \Rightarrow Q = W$
  - Reversibile: $\delta W = pdV \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B p\, dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT\, ln\frac{V_B}{V_A} = Q_{AB}$
- *Adiabatica* $(Q = 0)$:
  - Reversibili e irreversibili: $Q = 0 \Rightarrow W = -\Delta U = -nc_V \Delta T \Rightarrow W_{AB} = -nc_V(T_B - T_A)$
  - Alternativamente: $W_{AB} = -\frac{c_v}{R}(p_B V_B - p_A V_A)$. Ricordando la relazione di Mayer, per cui $\frac{c_V}{R} = \frac{c_V}{c_p - c_V} = \frac{1}{\frac{c_p}{c_V} - 1} = \frac{1}{\gamma - 1}$,

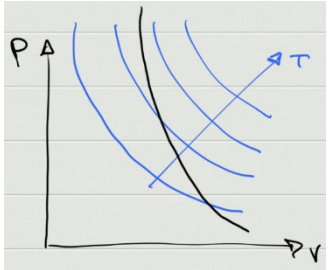
$$W_{AB} = -\frac{c_v}{R}(p_B V_B - p_A V_A) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_A V_A - p_B V_B)$$

- Adiabatica reversibile: $\delta W = pdV$. Riscrivendo l'equazione del primo principio in forma differenziale, $\delta W = -dU \Rightarrow pdV = -nc_V dT c_p - c_V \frac{nRT}{V} dV = -nc_V dT$. Separando le variabili e integrando: $\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = -\int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1)\, ln \frac{V_B}{V_A} = -\, ln \frac{T_B}{T_A}$. E quindi:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{-1} \Rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

  In generale, per un'adiabatica reversibile:
  - Avendo informazioni su temperatura e volume: $TV^{\gamma-1} = cost.$
  - Avendo informazioni su temperatura e pressione: $T\left(\frac{nRT}{p}\right)^{\gamma-1} = cost. \Rightarrow T^{\gamma} p^{1-\gamma} = cost. \Rightarrow \sqrt[\gamma]{T^{\gamma} p^{1-\gamma}} = T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cost.$
  - Avendo informazioni su pressione e volume: $\frac{pV}{nR} V^{\gamma-1} = cost. \Rightarrow pV^{\gamma} = cost.$

  Se si rappresenta questa equazione nel piano di Clapeyron, si trova una funzione che taglia tutti i rami di iperbole delle isoterme:



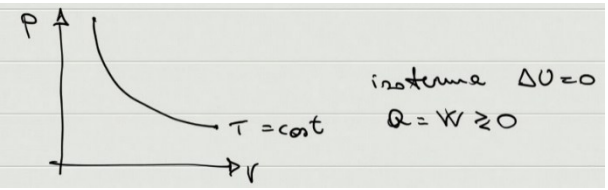
- *Isocora* ($V = cost.$):
  - Reversibili e irreversibili: $W = 0 \Rightarrow Q = \Delta U = nc_V \Delta T \Rightarrow Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A)$
  - Alternativamente: $\left.\begin{matrix} p_A V_A = nRT_A \\ p_B V_B = nRT_B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{p_B}{p_A} = \frac{T_B}{T_A} \Rightarrow \frac{T_B}{p_B} = \frac{T_A}{p_A}$
- *Isobara* ($p = cost.$):
  - $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} \Rightarrow nc_p(T_B - T_A) = nc_V(T_B - T_A) + W_{AB} \Rightarrow W_{AB} = n(c_p - c_V)(T_B - T_A)$

$$W_{AB} = nR(T_B - T_A)$$

  - Alternativamente: $\left.\begin{matrix} p_A V_A = nRT_A \\ p_B V_B = nRT_B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_B}{T_A} \Rightarrow \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_A}{T_A}$

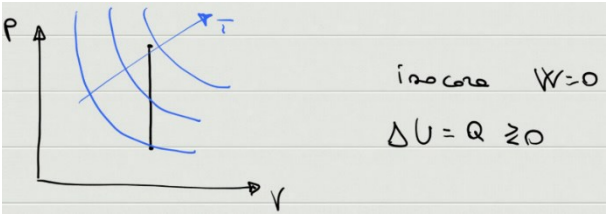
È importante capire che:

- In un'espansione del gas il lavoro è positivo e la pressione diminuisce.
- In una compressione del gas, il lavoro è negativo e la pressione aumenta.



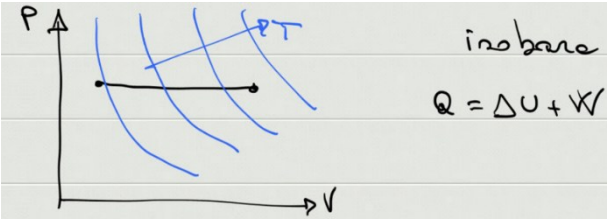
È importante capire che:

- Se la pressione aumenta, la temperatura aumenta e si assorbe calore.
- Se la pressione diminuisce, la temperatura diminuisce e si cede calore.



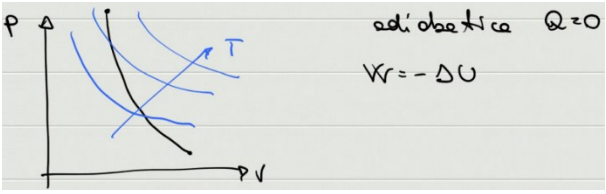
È importante capire che:

- Un'espansione isobara corrisponde a un lavoro positivo e a una temperatura crescente($Q > 0$).
- Una compressione isobara corrisponde a un lavoro negativo e a una temperatura che diminuisce ($Q < 0$).



È importante capire che:

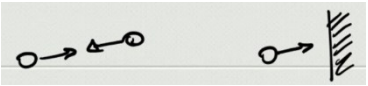
- Un'espansione adiabatica corrisponde a un lavoro positivo e a una temperatura decrescente.
- Una compressione adiabatica corrisponde a un lavoro negativo e a una temperatura crescente.



Modello cinetico dei gas

Si proverà ora a trattare un gas dal punto di vista di un numero elevato di particelle. Alcuni presupposti di partenza sono i seguenti:

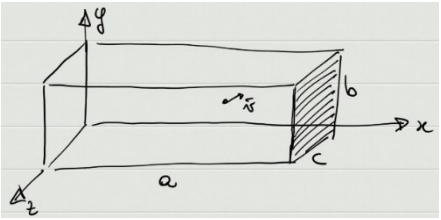
1. Molecole tutte uguali e che siano in un moto caotico.
2. Le molecole possono interagire tra di loro o con le pareti del recipiente (urti elastici).
3. Forze intermolecolari solo negli urti.
4. Le dimensioni sono molto piccole rispetto alle distanze ($D \ll L$).



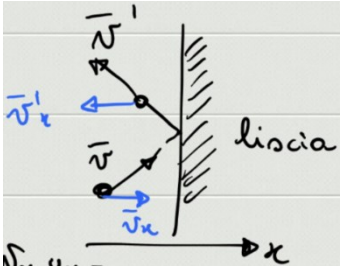
Conseguenze:

1. Il moto caotico impone che non vi sia una direzione privilegiata; andando vedere qual è il valor medio della velocità, risulta che $\langle \bar{v}_u \rangle = 0$. Dire che la velocità media è nulla, equivale a dire che $\bar{p} = m_{TOT}\bar{v}_{CM} = 0$. La densità è costante ($\rho = cost.$) perché il moto è caotico e la situazione confusa ma omogenea sotto quel punto divista.
2. Interazione molecola-molecola: $(A) \Rightarrow \Delta E_k = 0, \Delta\bar{p} = 0$
   Interazione molecola-parete: $(B) \Rightarrow \Delta E_k = 0, \Delta\bar{p} \neq 0$
3. Si considerano solo energie cinetiche e non potenziali: ogni qual volta una molecola viene urtata, essa si muove di moto rettilineo uniforme ($\bar{a} = 0$).
4. Il volume del gas è molto minore del volume del contenitore ($V_{gas} \ll V_{contenitore}$).

Si possono sfruttare queste proprietà per ricavare delle informazioni. Sia un sistema di riferimento $Oxyz$ dove viene disegnato un contenitore di lati $a \times b \times c$ contenente N molecole di massa m in moto caotico. L'obiettivo è calcolare la pressione esercitata dalle molecole sulla superficie di area bc.



Per determinare la forza esercitata dalle molecole di un gas su una superficie, si considera una particella di massa m e velocità vettoriale $\bar{v}$. Poiché compie un urto elastico, la velocità finale è in modulo uguale perché l'energia si conserva, ma varia la quantità di moto; la componente parallela alla superficie rimane invariata, mentre quella ortogonale cambia segno: la variazione della quantità di moto è



$$\Delta\bar{p} = m\bar{v}_f - m\bar{v}_i = [-mv_x - mv_x]\bar{u}_x = -2mv_x\bar{u}_x$$

dove v_x è la componente della velocità angolare alla superficie.

Secondo il teorema dell'impulso, la parete esercita sulla molecola una forza che provoca una variazione della quantità di moto pari a:

$$\Delta\bar{q} = \bar{J} = \int \bar{F}\, dt \Rightarrow J_{molecola} = -2mv_x$$

Per la terza legge di Newton, la molecola esercita sulla parete una forza uguale ed opposta: $J_{parete} = 2mv_x$.

Supponendo che le N molecole siano suddivise in gruppi, ciascuno con N_i molecole alla velocità in modulo v_{x_i}, si calcola l'impulso di uno di questi gruppi e poi si fa la somma di tutti i gruppi. Prendendo una porzione del parallelepipedo di lato $v_{x_i}\Delta t$, si trova che metà delle molecole contenute urtano la parete:

$$N_i' = \frac{N_i}{2}\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}N_i\frac{v_{x_i}\Delta tbc}{abc} = \frac{1}{2}N_i\frac{v_{x_i}\Delta t}{a}$$

Quindi, l'impulso totale trasferito alla parete è:

$$\left.\begin{aligned} J_{parete} &= N_i' 2mv_{x_i} = \frac{N_i m v_{x_i}^2 \Delta t}{a} \\ J_{parete} &= \int_t^{t+\Delta t} \bar{F}_i\, dt = \langle\bar{F}_i\rangle\Delta t \end{aligned}\right\} \rightarrow \langle\bar{F}_i\rangle = \frac{N_i m v_{x_i}^2}{a}$$

Questa risulta essere la forza che viene applicata sulla parete dalle molecole di uno dei gruppi. Il calcolo della pressione risulta uguale a:

$$p_i = \frac{\langle\bar{F}_i\rangle}{bc} = \frac{N_i m v_{x_i}^2}{abc} = \frac{N_i m v_{x_i}^2}{V}$$

Mettendo ad agire complessivamente sulla parete bc tutte le molecole, si troverà che la pressione complessiva è data dalla somma di tutte le pressioni parziali:

$$p = \sum_i p_i = \frac{m}{V}\sum_i N_i v_{x_i}^2$$

Ricordando che la definizione di valore medio è $\langle x^2\rangle = \frac{\sum_1^n x_i^2}{N} = \frac{\sum_i N_i x_i^2}{\sum_i N_i}$, si riscrive:

$$p = \sum_i p_i = \frac{m}{V}\sum_i N_i v_{x_i}^2 = \frac{m}{V}N\langle v_x^2\rangle$$

In generale, la velocità in modulo è $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \langle v^2\rangle = \langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle$ e, poiché è un moto caotico, non vi è alcun motivo per cui una direzione sia preferenziale e quindi tutte e tre le componenti saranno uguali tra di loro.

$$\langle v^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle$$

$$p = \frac{m}{V} N\langle v_{x_i}^2 \rangle = \frac{1}{3}\frac{m}{V} N\langle v^2 \rangle$$

Se si divide e moltiplica per 2, si trova che $pV = \frac{2}{3} N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle$ rappresenta l'energia cinetica media di traslazione:

$$pV = \frac{2}{3}\langle E_k \rangle$$

Adesso si possono compiere due strade:

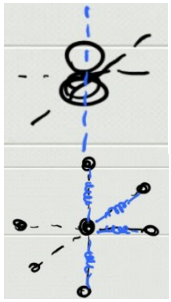
1. La termodinamica:

$$\left.\begin{aligned} pV &= \frac{2}{3}\langle E_k \rangle \\ pV &= nRT = \frac{N}{N_a} RT = N k_B T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

2. La meccanica statistica usa il *teorema di equipartizione dell'energia*, il quale dice come in una condizione di equilibrio l'oggetto preso in considerazione di un sistema termodinamico ha un'energia media pari a

$$\langle E \rangle = l \frac{1}{2} k_B T$$

Con l che rappresenta i **gradi di libertà del sistema**, cioè le direzioni dello spazio in cui si muove.
Esempi:



- *Una molecola biatomica*: l'energia non è associata solo ai suoi moti di traslazione, ma anche a quelli di rotazione: $E_k = \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2\right)$. I gradi di libertà sono 5.
- *Atomi legati al cristallo*: nella struttura cristallina gli atomi oscillano, il calcolo della loro energia cinetica è dovuto da tre termini cinetici e tre termini del moto di oscillazione: $E_k = \frac{1}{2} m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(k_x x^2 + k_y y^2 + k_z z^2\right)$. I gradi di libertà sono 6.

Si noti che:

1. la relazione dà il significato microscopico di temperatura assoluta:

$$\frac{1}{2} m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}$$

2. la scrittura dell'energia cinetica rappresenta anche la scrittura dell'energia interna di ogni molecola di gas: $U = N \frac{l}{2} k_B T$. E la variazione sarà:

$$\left.\begin{aligned} \Delta U &= N \frac{l}{2} k_B \Delta T = n N_a \frac{l}{2} K_B \Delta T = n \frac{l}{2} R \Delta T \\ \Delta U &= n c_v \Delta T \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_v = \frac{l}{2} R \Rightarrow \begin{cases} l = 3, monoatomici \\ l = 5, biatomici \end{cases}$$

Gas reali

Fino a questo punto è stato trattato esclusivamente il modello dei gas ideali o perfetti, che rappresenta un'idealizzazione dei gas reali comunemente osservati. Attraverso l'equazione di stato dei gas perfetti, il prodotto pressione-volume viene descritto mediante uno sviluppo in serie, noto come equazione del viriale.

$$pV = \begin{cases} c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + \cdots \\ d_0 + \dfrac{d_1}{V} + \dfrac{d_2}{V^2} + \dfrac{d_3}{V^3} + \cdots \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} p \to 0 \\ V \to \infty \end{matrix}\right\} pV = c_0 = d_0 = nRT$$

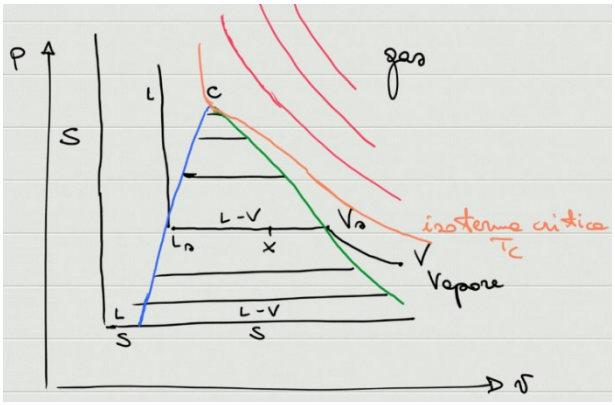
Queste sono le equazioni che valgono per i gas reali.

- L'equazione di stato del gas è un'idealizzazione dei gas reali:

$$\left.\begin{matrix} p \to 0 \\ V \to \infty \end{matrix}\right\} pV = c_0 = d_0 = nRT$$

- Se per i gas ideali l'energia interna è solo in funzione della temperatura, per i gas reali l'energia interna dipende anche dalla pressione:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_{T=cost} \neq 0$$



<u>Studio di un gas reale nel diagramma pV.</u> Per analizzare questo processo, è preferibile utilizzare un diagramma pressione-volume specifico $\left(v = \frac{V}{m}\right)$ anziché il diagramma di Clapeyron. Si consideri una quantità di acqua a una temperatura elevata, ma ancora inferiore al punto di ebollizione, immersa in un ambiente in vuoto. Inizialmente, il sistema occupa uno stato di vapore insaturo (V) Attraverso una trasformazione isoterma quasi-statica, il vapore viene compresso fino a raggiungere lo stato di vapore saturo $(V_s = V_L)$. A questo punto, ha inizio un cambiamento di fase: il vapore inizia a condensare, e lungo una curva di tensione di vapore coesistono sia la fase liquida che quella gassosa (*tensione di vapore*). Questo processo continua finché tutto il vapore non si trasforma in liquido saturo $(L_s = V_L)$. Per descrivere uno stato intermedio generico lungo questa transizione, si può indicare con x una miscela in cui coesistono vapore e liquido.

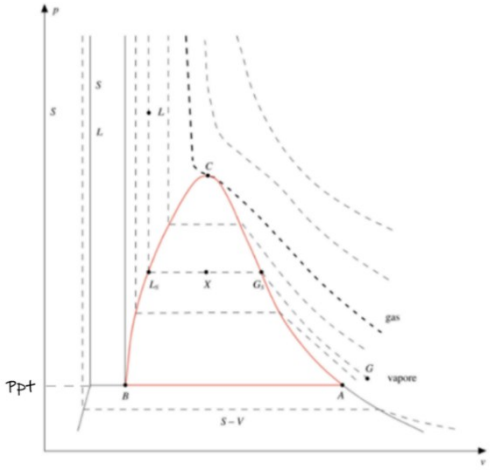
Lo stato x ha un volume specifico:

$$v_x = \frac{V_x}{m_x} = \frac{V_L + V_v}{m_L + m_v} = \frac{m_L v_L + m_V v_v}{m_L + m_V} = \frac{v_L + \frac{m_v}{m_L} v_v}{1 + \frac{m_V}{m_L}} \Rightarrow v_x + v_x \frac{m_V}{m_L} = v_L + \frac{m_v}{m_L} v_v \Rightarrow \frac{m_V}{m_L} = \frac{v_x - v_L}{v_v - v_x}$$
$$= \frac{|\overline{xL_s}|}{|\overline{V_s x}|}$$

Dal posizionamento del punto lungo il segmento compreso tra L_s e V_s è possibile determinare il rapporto tra la massa di vapore $(\overline{xL_s})$ e la funzione di liquido $(\overline{V_s x})$: tale rapporto segue un andamento proporzionale. Raggiunto lo stato di liquido saturo, una ulteriore compressione isoterma provoca una discontinuità, rappresentata da una curva quasi verticale. All'aumentare della temperatura, il comportamento delle isoterme segue l'andamento mostrato nel grafico, fino al **punto critico** $(\boldsymbol{C})$, dove liquido saturo e vapore saturo coesistono. A questa condizione corrisponde l'isoterma critica, associata alla temperatura critica (T_C). Oltre il punto critico, le isoterme assumono una forma simile a rami di iperbole, tipica dei gas. Se la temperatura di un gas viene abbassata al di sotto di T_C, mantenendo però pressioni elevate, si osserva una transizione immediata allo stato liquido, senza sviluppo di calore latente

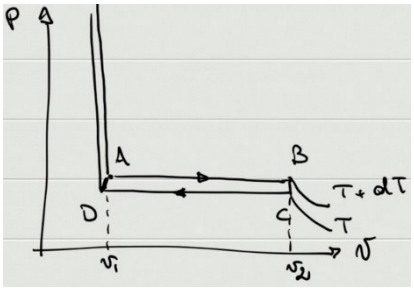
- Temperatura critica dell'acqua: 374,15 °C

Si noti che un liquido passa dallo stato di vapore allo stato liquido a qualunque temperatura senza portarlo a ebollizione (questo spiega perché, se si lascia un bicchiere d'acqua su un tavolo, dopo un po' rimane vuoto).



Al diminuire della temperatura, si raggiunge un'isoterma in cui, oltre alla coesistenza tra liquido e vapore, si stabilisce anche l'equilibrio tra solido e vapore: questa condizione identifica la **curva del punto triplo**. Alla pressione del punto triplo (p_{pt}). i tre stati della materia, solido, liquido e vapore, coesistono simultaneamente. Al di sopra di questa curva, il passaggio di fase avviene per sublimazione (da solido a vapore), mentre al di sotto si verifica il brinamento (da vapore a solido).

- Temperatura di fusione del ghiaccio: $373{,}15$



Nel diagramma pressione-volume specifico, considerando due isoterme con cambiamento di fase alle temperature T e $T + dT$, si può analizzare un ciclo termodinamico che parte dallo stato A e raggiunge lo stato B, dove avviene il cambiamento di fase lungo l'isoterma $T + dT$. Successivamente, il ciclo prosegue da B a C, passando all'isoterma T con una variazione infinitesima di pressione dp. Da C i procede verso D, dove si verifica il cambiamento di fase lungo l'isoterma T, per poi tornare allo stato iniziale A attraverso un'ulteriore trasformazione infinitesima a pressione variabile dp.

Si può pensare che i calori scambiati tra le trasformazioni infinitesime BC e DA siano trascurabili e che quindi possano essere approssimate a due adiabatiche reversibili: quindi, questo è un ciclo di Carnot.

- Il lavoro da questo ciclo è: $\delta W_m = dp(v_2 - v_1)$
- Il calore assorbito è: $Q_{AB,m} = \frac{m\lambda}{m} = \lambda$
- Il rendimento è: $\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{\delta W_m}{Q_{ASS,m}} = \frac{dp(v_2-v_1)}{\lambda} \\ \eta &= 1 - \frac{T}{T+dT} = \frac{T+dT-T}{T+dT} = \frac{dT}{T} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dT}{dp} = \frac{T(v_2-v_1)}{\lambda} \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2-v_1)}$
    - Queste ottenute sono le **formule di Clapeyron** che valgono per qualunque cambiamento di fase.

<u>Applicazioni:</u>

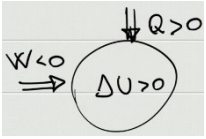
- H_2O in ebollizione a p_{amb}:
    - $T = 373{,}15\ K, \lambda_{eb} = 2{,}26 \cdot 10^6 \frac{J}{kg}, v_2 = 1{,}72 \frac{m^3}{kg}, v_1 = 10^{-3} \frac{m^3}{kg}$
    - $\frac{dp}{dT} \approx 3500 \frac{Pa}{K}$: se c'è una variazione di pressione ambiente del 3,5%, la temperatura di ebollizione dell'acqua cambia di 1 K.
- H_2O nel punto di fusione a p_{amb}:
    - $T = 273{,}15\ K, \lambda_g = 3{,}3 \cdot 10^5 \frac{J}{kg}, v_2 = 1{,}72 \frac{m^3}{kg}, v_1 = 1{,}09 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{kg}$
    - $\frac{dp}{dT} \approx -1{,}34 \cdot 10^7 \frac{Pa}{K} = 132\ atm$: variando la pressione di 132 volte, il punto di fusione cambia, se aumenta la pressione diminuisce il punto di fusione. È il meccanismo alla base dei movimenti dei ghiacciai in pendenza: la pressione degli strati diminuisce la temperatura di

fusione del ghiaccio a contatto con la montagna. Il principio vale anche per i pattini sul ghiaccio.

Secondo principio della termodinamica

Sebbene il primo principio della termodinamica stabilisca una relazione tra calore, lavoro ed energia interna, esso non impone limiti specifici sulla realizzabilità dei processi.

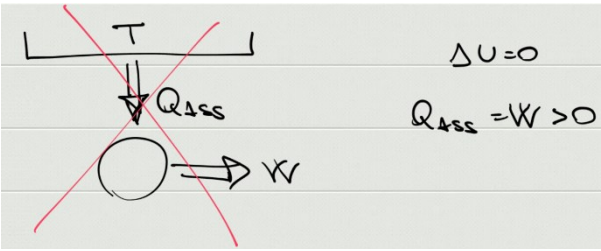
Ad esempio, è possibile aumentare l'energia interna di un sistema termodinamico attraverso processi adiabatici, in cui si considera esclusivamente il lavoro, o processi puramente termici, in cui si prende in esame solo il calore scambiato.



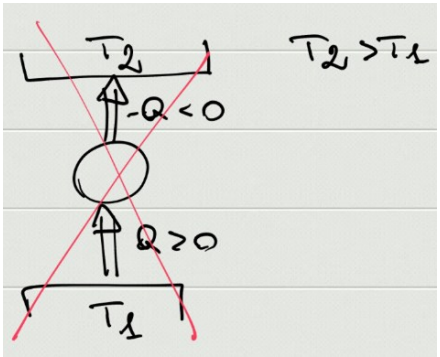
Al contrario, per ridurre l'energia interna, il sistema deve cedere calore o compiere lavoro. Tuttavia, se si tenta di diminuire l'energia interna a vantaggio di un aumento del lavoro, si riscontra una limitazione fondamentale: sebbene l'energia meccanica possa convertirsi in energia interna tramite il calore, il processo inverso non è sempre possibile.

Questa limitazione è descritta dal **secondo principio della termodinamica**, che afferma: *"Non tutti i processi dinamici permessi dal primo principio sono effettivamente realizzabili in natura".* Non esiste una formulazione analitica per descrivere il secondo principio, esso viene espresso tramite enunciati equivalenti tra loro e dettati dall'esperienza.

- **I° enunciato (di Kelvin-Planck):** *"Non è possibile realizzare una trasformazione termodinamica il cui unico risultato sia la produzione di lavoro a partire da un serbatoio a temperatura uniforme."*
    - Nella pratica l'enunciato parla di processi ciclici.



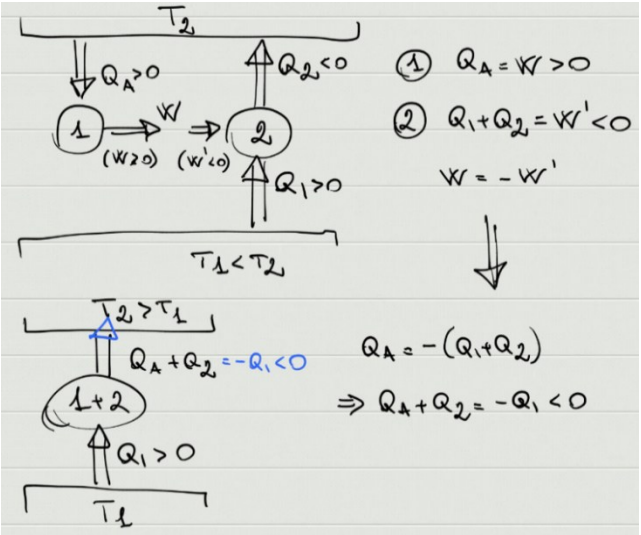
    - Macchine monotermiche (un solo serbatoio) non possono funzionare in questo modo, ma è possibile costruirne in modo tale da compiere il processo opposto. Se fosse una macchina reversibile, i segni cambierebbero e otterrebbe, avendo visto che $Q = W > 0$ non è contemplato, che $Q = W = 0$.
- **II° enunciato (di Clausius):** *"Non è possibile realizzare un processo termodinamico il cui unico risultato sia il trasferimento di calore da un corpo a un altro di temperatura maggiore."*
    - Nella pratica l'enunciato parla di processi ciclici.



    - È possibile costruire una macchina del genere solo se vi è anche un lavoro meccanico fatto dall'esterno, come nel caso dei frigoriferi.

Una caratteristica dei vari enunciati è l'equivalenza tra di loro: se l'enunciato di Clausius dice che non è possibile assorbire calore da un serbatoio, automaticamente ciò implica anche l'enunciato di Kelvin-Planck. Per dimostrare l'equivalenza si suppone per assurdo che uno dei due enunciati non valga.

Supponendo che non valga l'enunciato di Kelvin-Planck, si ipotizza la possibilità di costruire una macchina che assorbe calore e produce lavoro (macchina 1). Si consideri inoltre una macchina frigorifera che richiede un lavoro per funzionare (macchina 2). Si assume che il lavoro prodotto dalla macchina 1 venga fornito alla macchina frigorifera, sincronizzando il loro funzionamento.



Il lavoro W prodotto dalla macchina 1 è positivo, mentre il lavoro W' assorbito dalla macchina 2 è negativo, poiché uno è l'ambiente dell'altro e viceversa. Complessivamente, la macchina composta riceve un calore Q_2 e produce un calore $Q_2 + Q_{ASS}$.

Il bilancio energetico della macchina 1 è:

$$Q_{ASS} = W > 0$$

mentre quello della macchina 2 è:

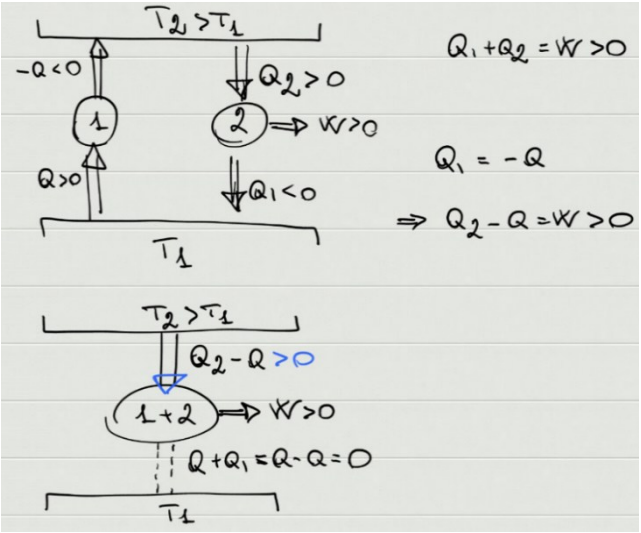
$$Q_1 + Q_2 = W' < 0$$

Complessivamente, per il sistema formato dalle due macchine, si ha:

$$Q_1 + Q_2 = W = -W = -Q_{ASS} \Rightarrow Q_{ASS} + Q_2 = -Q_1$$

In questo modo, si è costruita una macchina che viola l'enunciato di Clausius, poiché il calore assorbito Q_1 viene ceduto senza alcuna compensazione. Questo dimostra che la negazione di uno degli enunciati comporta la violazione dell'altro, confermando la loro equivalenza.

Un ragionamento analogo può essere applicato nel caso in cui si neghi l'enunciato di Clausius. Si ipotizzi l'esistenza di una macchina che assorbe una quantità di calore Q da un serbatoio freddo e la cede a un serbatoio caldo (macchina 1). Si consideri inoltre una seconda macchina sincrona che opera tra gli stessi due serbatoi, assorbendo una quantità di calore Q_2, producendo lavoro W e cedendo una quantità di calore $Q_1 = -Q$ (macchina 2).



Combinando le due macchine, si ottiene un sistema (macchina 1+2) in cui il calore scambiato complessivamente con il serbatoio a temperatura T_1 è nullo. Questo implica che il serbatoio T_1 non è necessario per il funzionamento del sistema combinato

Il bilancio energetico della macchina 2 è dato da:

$$Q_1 + Q_2 = W$$

da cui si ricava:

$$-Q + Q_2 = W > 0$$

Questo risultato indica che il sistema combinato assorbe calore $Q_2 - Q$ e produce lavoro W, violando così l'enunciato di Kelvin-Planck, poiché il sistema produce lavoro assorbendo calore da un unico serbatoio.

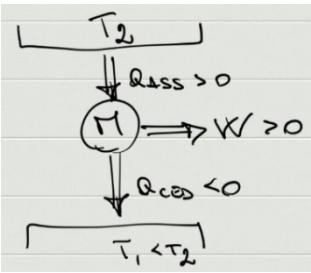
I cicli

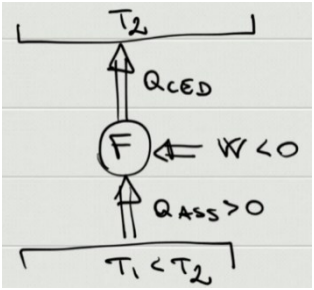
Un **ciclo termodinamico** è costituito da una serie di trasformazioni che riportano un sistema al suo stato iniziale. Poiché non vi è variazione di energia interna, il primo principio della termodinamica stabilisce che il calore scambiato è uguale al lavoro compiuto o subito:

$$Q = W \rightarrow \begin{cases} > 0, macchine\ termiche \\ < 0, macchine\ frigorifere \end{cases}$$

Le **macchine termiche** assorbono calore per produrre lavoro, ma durante il processo si genera attrito a causa del riscaldamento delle componenti. Queste componenti devono poi essere raffreddate, il che implica che la macchina cede anche calore. Nel caso più semplice, una macchina termica opera tra due serbatoi, uno freddo e uno caldo.

Le **macchine frigorifere**, invece, assorbono lavoro per trasferire calore dal serbatoio freddo a quello caldo.





Essendo una macchina un dispositivo costruito in modo tale da essere efficiente, si introduce ora un coefficiente detto **rendimento**:

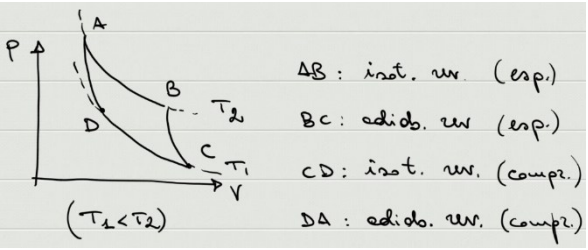
$$\eta = \frac{W}{Q_{ASS}}$$

Poiché $Q = W$ e $Q = Q_{TOT} = Q_{ASS} + Q_{CED}$:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} = \frac{Q_{ASS} + Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}}$$

$$0 \leq \eta < 1$$

<u>Ciclo di Carnot.</u> Con i suoi studi *Nicolas Léonard Sadi Carnot* dimostrò che, per una qualunque macchina termica che opera tra due serbatoi di calore, esiste un **rendimento massimo** che dipende esclusivamente dalle temperature dei serbatoi. Questo rendimento massimo è realizzato dal **ciclo di Carnot**, composto da quattro trasformazioni reversibili.



Per un gas ideale, le trasformazioni nel piano pV sono:

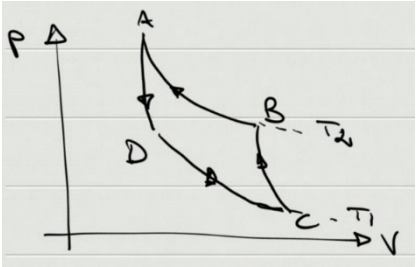
1. AB: $\Delta U_{AB} = 0 \Rightarrow Q_{AB} = W_{AB} = nRT_2 \, ln\frac{V_B}{V_A} > 0$
2. BC: $Q_{BC} = 0 \Rightarrow W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_1 - T_2) \Rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$
3. CD: $\Delta U_{CD} = 0 \Rightarrow Q_{CD} = W_{CD} = nRT_1 \, ln\frac{V_D}{V_C} < 0$
4. DA: $Q_{DA} = 0 \Rightarrow W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_V(T_2 - T_1) \Rightarrow T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{nRT_1 \, ln\frac{V_D}{V_C}}{nRT_2 \, ln\frac{V_B}{V_A}}$$

2 e 4 si riscrivono associando a T_D e T_C la temperatura T_1 e a T_A e T_B la temperatura T_2. Facendo il rapporto tra 2 e 4, risulta che $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$.

$$\eta = 1 + \frac{-T_1 \, ln\frac{V_C}{V_D}}{T_2 \, ln\frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_{max}$$

Il ciclo di Carnot per una macchina frigorifera avviene in verso opposto, i conti sono gli stessi, ma cambiano di segno.



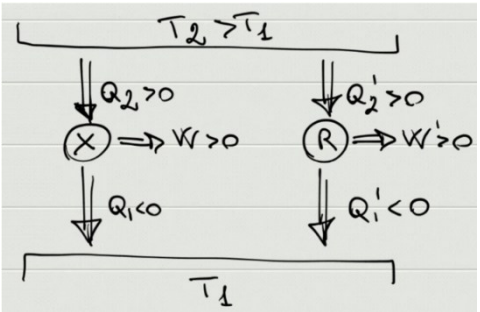
1. BA, compressione isoterma reversibile
2. CB, compressione adiabatica reversibile
3. DC espansione isoterma reversibile
4. AD espansione isoterma reversibile

Si introduce ora per le macchine frigorifere un parametro definito **efficienza/coefficiente di prestazione**:

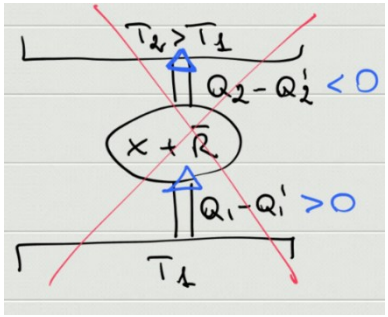
$$\xi = \frac{Q_{ASS}}{|W_{FORNITO}|} = \frac{Q_{ASS}}{|Q_{ASS} + Q_{CED}|} = \frac{nRT_1 \, ln\frac{V_C}{V_D}}{\left|nRT_1 \, ln\frac{V_C}{V_D} + nRT_2 \, ln\frac{V_A}{V_B}\right|} = \frac{T_1}{|T_1 - T_2|} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} > 0$$

<u>Teorema di Carnot.</u> Sadi Carnot formulò un teorema che afferma: *"Tra tutte le macchine termiche che operano tra gli stessi due serbatoi di calore, quelle reversibili hanno lo stesso rendimento massimo* $\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2}$. *Qualsiasi altra macchina che operi tra gli stessi serbatoi avrà un rendimento* $\eta_X \leq \eta_R$ *."*

- *Prima parte*: si costruiscano due serbatoi e due macchine termiche, una generica e l'altra reversibile, che lavorino tra di essi. Ricordando che $\frac{W}{Q_2} \leq \frac{W'}{Q_2'}$, si può immaginare di costruire la macchina reversibile in modo tale che $W' = W$, ciò non va ad inficiare la dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che $\eta_X > \eta_R$ e osserviamo le conseguenze che questo comporta: invertendo il ciclo otteniamo una macchina $\bar{R}$ che subisce un lavoro $-W$.



Prendendo il sistema come costituito dalle due macchine sincrone, si può dire che il lavoro prodotto dalla macchina X entra nella macchina $\bar{R}$ e quindi si ottiene un'unica macchina $X + \bar{R}$. Dal punto di vista energetico, il lavoro complessivo è nullo ($W - W = 0$), per la macchina X: $Q_1 + Q_2 = W$ e per la macchina reversibile: $Q_1' + Q_2' = W' = W$. In più, per ipotesi:



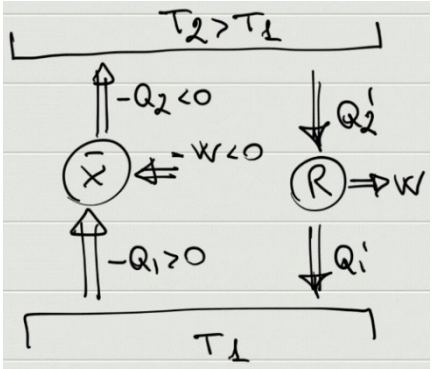
$$\eta_X > \eta_R \Rightarrow \frac{W}{Q_2} > \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow Q_2' > Q_2 \Rightarrow Q_2' - Q_2 > 0$$

E si trova che la quantità $Q_2 - Q_2' < 0$, cioè che il calore è ceduto. Dai singoli bilanci energetici si trova che: $Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \Rightarrow Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2 > 0$. Quindi è un calore assorbito e in particolare il calore assorbito e ceduto sono uguali in modulo.

Se l'ipotesi per assurdo fosse vera, sarebbe possibile costruire una macchina che viola l'enunciato di Clausius.

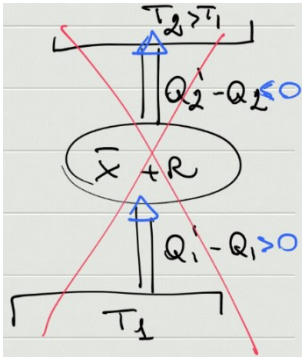
$$\Rightarrow \eta_X \leq \eta_R$$

- *Seconda parte*: si costruiscano due serbatoi e due macchine termiche, una generica e l'altra reversibile, che lavorino tra di essi. Ponendo che anche X sia reversibile, per il teorema di Carnot vale che $\eta_X = \eta_R$. Per assurdo, si supponga che $\eta_X < \eta_R$ e si valutino le conseguenze che questo comporta: invertendo il ciclo di X si ha una macchina $\bar{X}$ che subisce un lavoro $-W$.



Come in precedenza, si può immaginare che lavorino in modo sincrono e che siano un'unica macchina $\bar{X} + R$ tale per cui $W - W = 0$. Dal punto di vista energetico, per la macchina X: $Q_1 + Q_2 = W$ e per R: $Q_1' + Q_2' = W$. Per ipotesi:

$$\eta_X < \eta_R \Rightarrow \frac{W}{Q_2} < \frac{W}{Q_2'} \Rightarrow Q_2' < Q_2 \Rightarrow Q_2' - Q_2 < 0$$

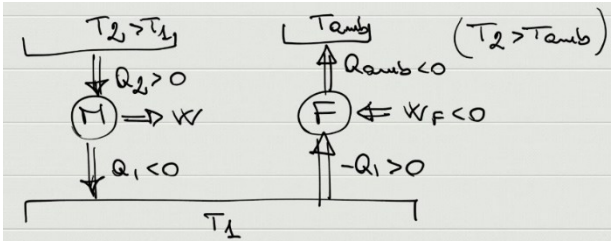


E si trova che $Q_2 - Q_2' < 0$, cioè il calore è ceduto dalla macchina. Dai singoli bilanci energetici: $Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \Rightarrow Q_1' - Q_1 = Q_2 - Q_2' > 0$. Quindi è un calore assorbito e in particolare il calore assorbito e ceduto sono uguali in modulo.

Se l'ipotesi per assurdo fosse vera, sarebbe possibile costruire una macchina che viola l'enunciato di Clausius.

$$\eta_X \geq \eta_R \bigcap \eta_X \leq \eta_R \Rightarrow \eta_X = \eta_R$$

Se si cerca di costruire una macchina che rende molto ($\eta = 1$), si può immaginare di portare il serbatoio T_1 a temperature molto basse tramite un frigorifero che cede calore all'ambiente.



Complessivamente viene costruita una macchina che assorbe calore dal serbatoio T_1 e lo cede al serbatoio

T_{AMB}. Andando a vedere il rendimento della macchina $M+F$, esso è $\eta = \frac{W+W_F'}{Q_2} = \frac{(Q_1+Q_1')+(Q_{AMB}-Q_1)}{Q_2} = \frac{Q_2+Q_{AMB}}{Q_2} = 1 + \frac{Q_{AMB}}{Q_2}$.

Se si vuole avere rendimenti elevati, bisogna alzare la temperatura del serbatoio caldo. Un'altra conseguenza del teorema dice che per una macchina generica il rendimento è:

$$\eta_X = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2}$$

Per una macchina reversibile il rendimento è:

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Andando a riscrivere:

$$\eta_X \leq \eta_R \Rightarrow 1 + \frac{Q_1}{Q_2} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} \leq -\frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \begin{cases} reversibile = 0 \\ irreversibile < 0 \end{cases}$$

Infine, sapendo che il rendimento è $\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} \leq \eta_R = \eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$, si può dire che a parità di calore assorbito il lavoro è:

$$W \leq \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_{ASS} = W_{max}$$

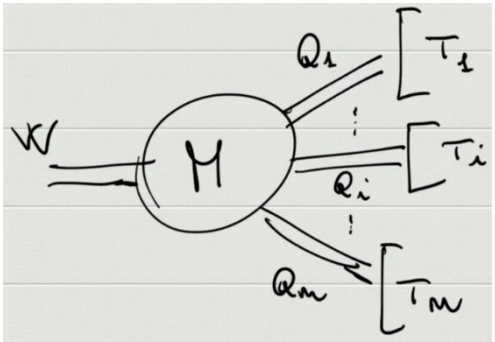
e corrispondere al massimo lavoro che si può ottenere tra quei serbatoi. Alternativamente, si può dire che tra gli stessi due serbatoi

$$Q_{ass} \geq \frac{W}{1 - \frac{T_1}{T_2}} = Q_{ASS,min}$$

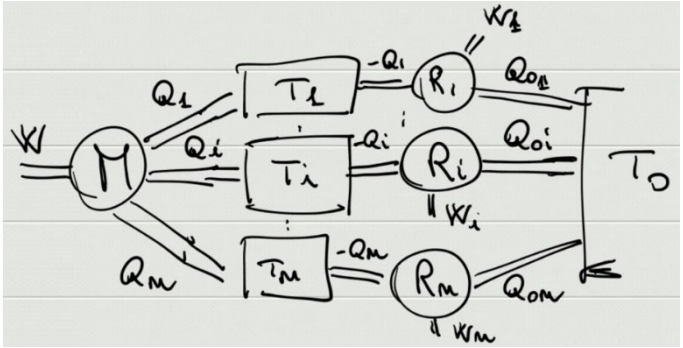
che rappresenta il calore minimo che si può assorbire a parità di lavoro fatto.

<u>Teorema di Clausius.</u> *Rudolf Clausius* generalizzò il teorema di Carnot per macchine che operano con n serbatoi a temperature diverse*: "Per una qualunque macchina che opera con n serbatoi, la somma dei rapporti tra i calori scambiati e le temperature è sempre minore o uguale a zero"*:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

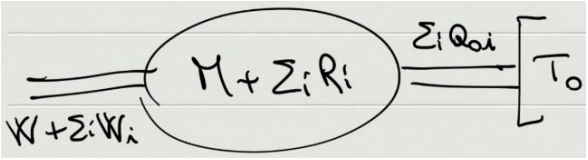


La dimostrazione si svolge aggiungendo macchine reversibili.



Ogni macchina reversibile scambia calore con un serbatoio T_0 e produce un lavoro. Dal teorema di Carnot, il rapporto $\frac{-Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0,i}}{T_0} = 0 \Rightarrow \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_{0,i}}{T_0}$.

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \frac{1}{T_0} \sum_i Q_{0,i}$$



Supponendo che il calore Q_i sia ceduto dalla macchina M (e quindi la freccia vada dalla macchina al serbatoio T_i), $-Q_i > 0$. L'aver aggiunto le macchine reversibili fa sì che il calore transiti attraverso i serbatoi che quindi possono essere eliminati: si è così ottenuta una macchina monoterma composta costituita da $M + \sum_i R_i$ che scambia un calore $\sum_i Q_{0,i}$ solo col serbatoio a temperatura T_0 e produce un lavoro $\mathrm{W} + \sum_\mathrm{i} \mathrm{W_i}$.

Per l'enunciato di K-P del secondo principio della termodinamica, si sa che queste macchine non possono assorbire calore e produrre lavoro ma possono solo cedere calore $\sum_i Q_{0i} \leq 0$.

$$\Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \frac{1}{T_0} \sum_i Q_{0,i} \leq 0$$

È possibile generalizzare questo teorema usando un integrale al posto della sommatoria pensando a un numero infinito di serbatoi di calore (si applica ogni volta che ci sono trasformazioni reversibili in cui si passa con continuità da una temperatura iniziale a una temperatura finale).

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Se la macchina M è reversibile, cambiano i segni:

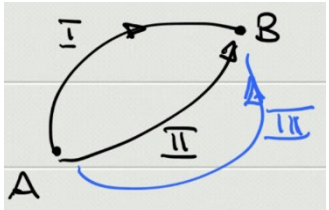
- Numero finito di serbatoi:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} reversibile: \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \geq 0 \Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \; per\; l'enunciato di\; K-P \\ irreversibile: \sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0 \end{cases}$$

- Numero infinito di serbatoi:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} reversibile: \oint \frac{\delta Q}{T} \geq 0 \Rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \; per\; l'enunciato di\; K-P \\ irreversibile: \oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \end{cases}$$

Entropia



Si consideri un sistema termodinamico che passa da uno stato A a uno stato B attraverso una trasformazione reversibile (1). Si ipotizzi inoltre l'esistenza di un'altra trasformazione reversibile (2) che porta dallo stesso stato A allo stato B. Applicando il teorema di Clausius a un ciclo composto dalle due trasformazioni, si ottiene che la somma degli integrali

$$\oint_{1-2} \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Scomponendo l'integrale e invertendo gli estremi del secondo integrale (cambiando segno), si ha:

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{-2} = 0 \rightarrow \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_1 = -\int_B^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{-2} \Rightarrow \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{1,rev} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{2,rev}$$

Che è uguale al valore che si ottiene compiendo una trasformazione reversibile (3).

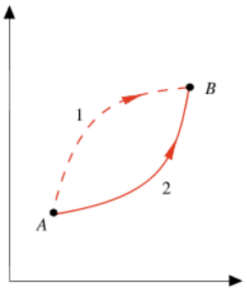
$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{1,rev} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{2,rev} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{3,rev}$$

Ciò dimostra che il valore dell'integrale di $\frac{\delta Q}{T}$ per una trasformazione reversibile dipende solo dagli stati iniziale e finale e non dal percorso seguito. Tale quantità definisce una funzione di stato chiamata **entropia** ($\boldsymbol{S}$). La variazione di entropia tra due stati è quindi:

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} = S_B - S_A = \Delta S_{AB}$$

In termini differenziali:

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev}$$



Se una delle due trasformazioni è irreversibile (1) e l'altra reversibile (2), il teorema di Clausius impone che:

$$\oint_{1-2} \frac{\delta Q}{T} < 0 \Rightarrow \underbrace{\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{1,irrev}}_{<0} + \int_B^A \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{-2,rev} < 0 \Rightarrow \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{1,irrev} - \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{2,rev}$$

$$\rightarrow \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{1,irrev} < \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{2,rev}$$

Dunque:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{2,rev} > \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{1,irrev} \Rightarrow dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} > \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{irrev}$$

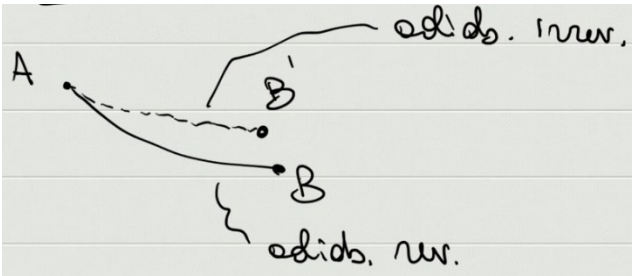
Questa prende il nome di *disuguaglianza di Clausius*.

Nei sistemi isolati, non vi è scambio di calore con l'ambiente ($\delta Q = 0$). Per una trasformazione irreversibile, l'integrale di $\frac{\delta Q}{T}$ non è calcolabile direttamente, ma si può affermare che:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} > 0 \Rightarrow S_B > S_A$$

Se si prende un sistema isolato e si compie una trasformazione reversibile tra due stati, l'entropia rimane costante:

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} = 0 \Rightarrow S_B = S_A$$



Chiarimento: si è detto che l'entropia è una funzione di stato, quindi, avendo uno stato iniziale e uno stato finale la variazione di entropia resta la stessa. Si sta dicendo che se si va da A a B tramite una trasformazione reversibile, non c'è variazione di entropia; se invece la trasformazione è irreversibile, l'entropia aumenta. Si viene a creare una contraddizione: o $S_B = S_A$ oppure $S_B > S_A$. Si vedrà che compiendo una trasformazione a entropia costante, si può arrivare a certi stati B; compiendo invece una trasformazione irreversibile, non si potrà mai arrivare alla stessa trasformazione B.

In conclusione, la disuguaglianza di Clausius per un sistema termicamente isolato può essere solamente positiva o al più nulla:

$$dS \geq 0$$

Questa scrittura si dice essere la *formulazione matematica del secondo principio della termodinamica*. L'importanza di questi ragionamenti si ha se si pensa all'*universo termodinamico*, che è un sistema isolato.

$$\Delta S_{AB,U} = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} reversibile: \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb} \\ irreversibile: \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} > 0 \end{cases}$$

Nulla toglie che in una trasformazione irreversibile il sistema o l'ambiente diminuisca la sua entropia, in ogni caso l'universo ha l'entropia che aumenta. Se il sistema è una macchina ciclica:

$$\Delta S_{sist} = 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} = \Delta S_{amb} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} reversibile: \Delta S_{amb} = 0 \\ irreversibile: \Delta S_{amb} > 0 \end{cases}$$

L'unità di misura dell'entropia è $[S] = \frac{J}{K}$.

<u>Calcolo variazione di entropia per un gas.</u> Si procede ora con il calcolo dell'entropia nel caso dei gas. Il primo principio della termodinamica dice che $\delta Q = dU + \delta W$ e nel caso dei gas $\delta Q = nc_V \Delta T + pdV$, per una trasformazione reversibile tra stati generici. Quindi:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{nc_V dT}{T} + \frac{pdV}{T}\right) = nc_V \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nc_V \, ln \frac{T_B}{T_A} + nR \, ln \frac{V_B}{V_A}$$

Usando nuovamente l'equazione di stato dei gas e la relazione di Mayer, si può dire che per $T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$ e $T_A = \frac{p_A V_A}{nR}$:

$$\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{p_B V_B}{p_A V_A} + nR \, ln\frac{V_B}{V_A} = nc_V \, ln\frac{p_B}{p_A} + nc_V \, ln\frac{V_B}{V_A} + n(c_p - c_V) \, ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{p_B}{p_A} + nc_p \, ln\frac{V_B}{V_A}$$

Invece, andando a sostituire il volume, $V_B = \frac{nRT_A}{p_B}$ e $V_A = \frac{nRT_A}{p_A}$:

$$\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{T_B}{T_A} + nR \, ln\frac{T_B p_A}{p_B T_A} = nc_V \, ln\frac{T_B}{T_A} + n\left(c_p - c_V\right) ln\frac{T_B}{T_A} + nR \, ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)^{-1}$$

$$\Delta S_{AB} = \; nc_p \, ln\frac{T_B}{T_A} - \; nR \, ln\frac{p_B}{p_A}$$

Ricapitolando, le equazioni per trasformazioni generiche sono:

- In funzione di temperatura e volume:

$$\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{T_B}{T_A} + nR \, ln\frac{V_B}{V_A} = nc_V \left(ln\frac{T_B}{T_A} + \frac{c_p - c_V}{c_V} ln\frac{V_B}{V_A}\right) = nc_V \left[ln\frac{T_B}{T_A} + ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}\right]$$
$$= nc_V \, ln\frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}}$$

- In funzione di pressione e volume:

$$\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{p_B}{p_A} + nc_p \, ln\frac{V_B}{V_A} = nc_V \left(ln\frac{p_B}{p_A} + \gamma \, ln\frac{V_B}{V_A}\right) = nc_V \, ln\frac{p_B V_B^{\gamma}}{p_A V_A^{\gamma}}$$

- In funzione di pressione e temperatura:

$$\Delta S_{AB} = nc_p \, ln\frac{T_B}{T_A} - \; nR \, ln\frac{p_B}{p_A} = nc_p \left(ln\frac{T_B}{T_A} - \frac{c_p - c_V}{c_p} ln\frac{p_B}{p_A}\right) = nc_p \left(ln\frac{T_B}{T_A} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} ln\frac{p_B}{p_A}\right)$$
$$= nc_p \left(ln\frac{T_B}{T_A} + \frac{1-\gamma}{\gamma} ln\frac{p_B}{p_A}\right) = nc_p \, ln\frac{T_B p_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{T_A p_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$$

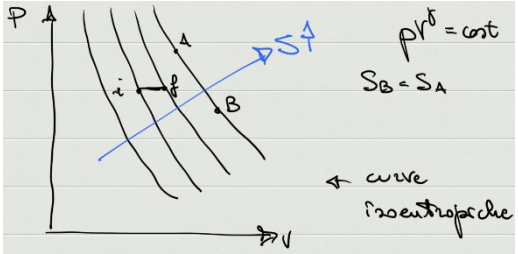
Se invece:

- La trasformazione è isoterma ($T_A = T_B$): $\Delta S_{AB} = nR \, ln\frac{V_B}{V_A} = -nR \, ln\frac{p_B}{p_A}$.
- La trasformazione è isocora ($V_A = V_B$): $\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{T_B}{T_A} = nc_V \, ln\frac{p_B}{p_A}$.
- La trasformazione è isobara ($p_A = p_B$): $\Delta S_{AB} = \; nc_p \, ln\frac{V_B}{V_A} = nc_p \, ln\frac{T_B}{T_A}$.

Se la trasformazione è adiabatica reversibile: $\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} = 0$ e quindi le equazioni per le trasformazioni generiche vanno tutte a 0. Ciò equivale a dire che l'argomento del logaritmo vale 1:

- Temperatura e volume: $\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_A V_A^{\gamma-1}} = 0 \Rightarrow TV^{\gamma-1} = cost.$
- Pressione e volume: $\Delta S_{AB} = nc_V \, ln\frac{p_B V_B^{\gamma}}{p_A V_A^{\gamma}} = 0 \Rightarrow pV^{\gamma} = cost.$
- Pressione e temperatura: $\Delta S_{AB} = nc_p \, ln\frac{T_B p_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{T_A p_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = 0 \Rightarrow Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cost.$

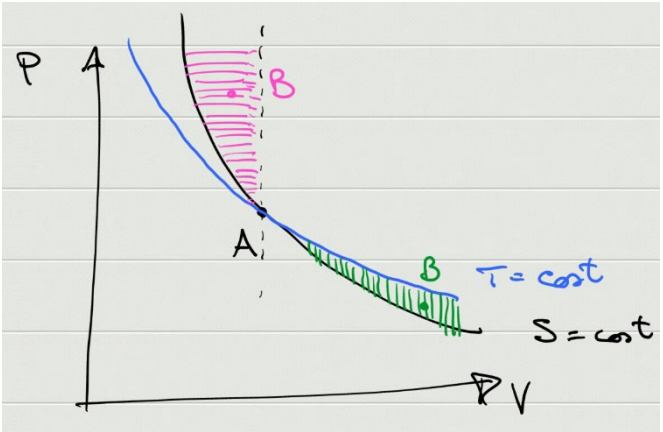
Le adiabatiche reversibili sono trasformazioni a *entropia costante*, per questo sono dette **isoentropiche**. Se si costruiscono altre curve isoentropiche nel diagramma pV e si va dallo stato i allo stato f, il calcolo della variazione di entropia:



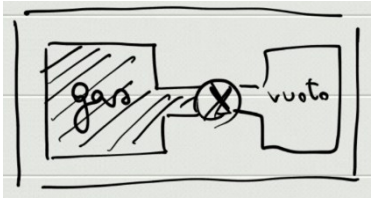
$$\Delta S_{if} = nc_p \, ln \frac{V_f}{V_i} > 0 \Rightarrow S_f > S_i$$

Riprendendo in considerazione la disuguaglianza di Clausius, se parto da A e compio una trasformazione *adiabatica reversibile*, non ci sono variazioni di entropia.

Compiendo una trasformazione *adiabatica irreversibile*, si trova che $\Delta S_{AB} > 0 \Rightarrow \Delta S_B > \Delta S_A$. Sia che faccia un'espansione o una compressione, lo stato B finale dovrà essere a destra della curva ma entro certi limiti. Per il primo principio della termodinamica, poiché $Q_{AB} = 0$, $W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_V(T_B - T_A)$. Compiendo un'espansione adiabatica irreversibile, il volume aumenta $W_{AB} = -nc_V(T_B - T_A) > 0 \Rightarrow T_B < T_A$. Dunque, lo stato B deve stare nella regione verde del grafico. Compiendo una compressione adiabatica irreversibile, la pressione aumenta e il volume diminuisce: lo stato B starà nella regione rosa del grafico.



<u>Espansione libera del gas.</u> L'espansione libera di un gas rappresenta un caso particolare di trasformazione adiabatica irreversibile. Per calcolare la variazione di entropia associata a questo processo, si osserva che la temperatura del gas rimane costante ($T_A = T_B$). Di conseguenza, la variazione di entropia è data esclusivamente dalla relazione:



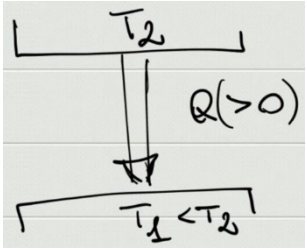
$$\Delta S_{AB} = nR \, ln \frac{V_B}{V_A}$$

In questa trasformazione, lo stato finale B si colloca all'estremo dei valori possibili nel diagramma termodinamico, corrispondendo alla massima variazione di entropia per un dato volume finale. L'espansione libera offre una chiave per comprendere il significato fisico dell'entropia. Quando il gas si espande nel vuoto, l'apertura del rubinetto innesca una trasformazione estremamente disordinata, che porta il sistema da uno stato di equilibrio iniziale a uno finale caratterizzato da una distribuzione caotica delle molecole. La variazione di entropia, in questo contesto, diventa un **indice del grado di irreversibilità** del processo e una **misura del disordine** introdotto nel sistema termodinamico.

In altre parole, l'entropia quantifica quanto un sistema si allontana da uno stato ordinato e prevedibile, evolvendo verso una condizione di maggiore disorganizzazione e casualità.

Calcolo della variazione di entropia.

- Quando due serbatoi a temperature diverse vengono messi in contatto termico, avviene uno scambio netto di calore. La variazione di entropia dell'universo è data dalla somma delle variazioni di entropia dei due serbatoi:



$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

Dal punto di vista del serbatoio preso in considerazione, si osserva che $|Q| = \begin{cases} Q_2 = -Q < 0 \\ Q_1 = Q > 0 \end{cases}$

Ricordando che $\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev}$ e tenendo presente che lo scambio di calore tra due corpi è una situazione irreversibile perché caotica, bisogna cercare di trovare una situazione reversibile che porta dallo stato iniziale A allo stesso stato finale B. Bisogna trovare una trasformazione che scambia un quantitativo di calore pari a δQ.

$$\Delta S_{AB} = \frac{1}{T}\int_A^B (\delta Q)_{rev}$$

Per il serbatoio T_2 $\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}\int(\delta Q_2)_{rev}$. Si può pensare di attaccare il serbatoio a un altro $T_2 - dT$ con cui scambia un calore infinitesimo e così via, in modo tale che alla fine ha scambiato un calore pari a $|Q|$.

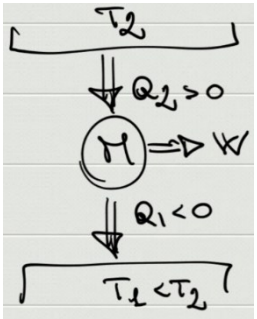
$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}Q_2 = -\frac{Q}{T_2}$$

Analogamente per il serbatoio T_1, $\Delta S_1 = \frac{1}{T_1}\int(\delta Q_1)_{rev}$, e si può immaginare di collegare un altro serbatoio $T_1 + dT$ con cui scambia un calore infinitesimo.

$$\Delta S_1 = \frac{1}{T_1}Q_1 = \frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$$

- e tra i due serbatoi è posta una macchina termica che opera in modo ciclico, la variazione di entropia della macchina è nulla. Pertanto, la variazione di entropia dell'universo è data solo dalle variazioni di entropia dei serbatoi:



$$\Delta S_U = \Delta S_{macchina} + \Delta S_{serbatoi}$$

Essendo che la macchina lavora su cicli, ecco che

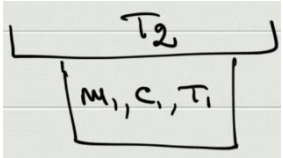
$$\Delta S_{macchina} = 0 \Rightarrow \Delta S_U = \Delta S_{serbatoio\ 1} + \Delta S_{serbatoio\ 2}$$

I conti sono stati appena fatti, però bisogna prestare attenzione: il calore Q_2 viene assorbito dalla macchina, il calore Q_1è ceduto dalla macchina. Quello che è stato calcolato in precedenza è il calore scambiato dal punto di vista dei serbatoi, ora è necessario cambiare i segni:

$$\frac{Q_{serb,1}}{T_1} - \frac{Q_{serb,2}}{T_2} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{-Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right) \geq 0$$

per il teorema di Carnot.

- Sia ora un serbatoio in contatto termico con un corpo di massa m, calore specifico c e temperatura T_1. Alla fine, il corpo avrà una temperatura pari a T_2. Qui



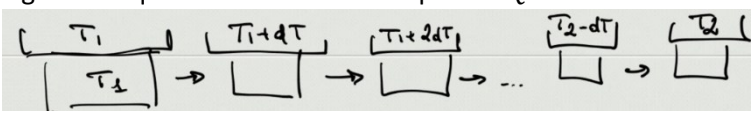
$$\Delta S_U = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente} \rightarrow \Delta S_{\text{ambiente}} = \Delta S_{\text{serb}} = \frac{Q_{\text{serb},2}}{T_2}$$

Il calore scambiato è $Q_{corpo} = nc\Delta T = nc(T_2 - T_1)$:

$$\Delta S_{ambiente} = \Delta S_{serb} = \frac{Q_{serb,2}}{T_2} = -\frac{mc(T_2 - T_1)}{T_2}$$

$$\Delta S_{sistema} = \Delta S_{corpo} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev}$$

Dal momento che non è una trasformazione reversibile, quello che si può pensare di fare in questo caso è di mettere il corpo in contatto termico con serbatoi inizialmente con temperatura che si discosta da T_1 di un dT, per poi raggiungere la temperatura finale T_1. In particolare, il calore scambiato per ognuna di queste trasformazioni è pari a $dQ = nctT$.



Ecco che si può immaginare di compiere infinite trasformazioni reversibili. È ora possibile calcolare l'integrale.

$$\Delta S_{corpo} = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc\, dT}{T} = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc\, ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S_U = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente} = mc\, ln\frac{T_2}{T_1} - \frac{mc(T_2 - T_1)}{T_2}$$

Supponendo $T_2 > T_1$, si ragiona in forma differenziale:

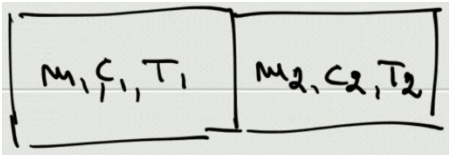
$$dS = \frac{mcdT}{T} - \frac{mcdT}{T_2} = mcdT\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$$

dove $T_1 \leq T \leq T_2$.
Supponendo $T_1 > T_2$, il ragionamento è analogo.

$$dS = \frac{mcdT}{T} - \frac{mcdT}{T_2} = mcdT\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$$

dove $T_2 \leq T \leq T_1$. In questo caso la variazione di entropia è sempre positiva perché anche il $dT < 0$.

- Siano ora due corpi, uno di massa m_1, calore specifico c_1 e temperatura T_1 e l'altro di massa m_2, calore specifico c_2 e temperatura T_2, entrambi in un contenitore adiabatico. Si è già visto che la temperatura di equilibrio è



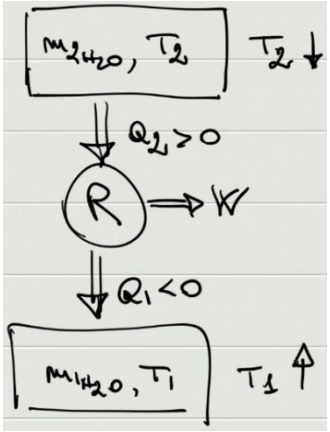
$$T_e = \frac{m_1c_1T_1 + m_2c_2T_2}{m_1c_1 + m_2c_2}$$

Poco fa invece si è calcolata la variazione di entropia di un corpo, quindi:

$$\Delta S_U = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1c_1\, ln\frac{T_e}{T_1} + m_2c_2\, ln\frac{T_e}{T_2} > 0$$

  - *Esercizio*: si immagini di avere due corpi di acqua, uno di massa m_1, calore specifico c e temperatura T_1 e l'altro di massa m_2, calore specifico c e temperatura T_2. Entrambi i corpi

sono collegati a una macchina termica che produce lavoro. Si vuole calcolare la temperatura finale di equilibrio e il rendimento totale dopo i cicli $\eta_{TOT} = \frac{W_{TOT}}{Q_{ASS,TOT}}$.



Con problemi di questo genere bisogna verificare che la macchina sia reversibile e dunque $\Delta S_U = 0$.

$$\Delta S_U = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{ambiente} = 0 + \Delta S_{ambiente}$$

Perché la macchina non lavora più su un vero e proprio ciclo che ritorna nello stesso punto, ma ritorna molto vicino e si può approssimare a un ciclo vero e proprio.

$$\Delta S_U = \Delta S_{ambiente} = m_1 c \, ln \frac{T_e}{T_1} + m_2 c \, ln \frac{T_e}{T_2} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta S_U = ln \left(\frac{T_e}{T_1}\right)^{m_1} + ln \left(\frac{T_e}{T_2}\right)^{m_2} = ln \left(\frac{T_e^{m_1+m_2}}{T_1^{m_1} T_2^{m_2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow T_e = \sqrt[m_1+m_2]{T_1^{m_1} T_2^{m_2}}$$

Il rendimento è:

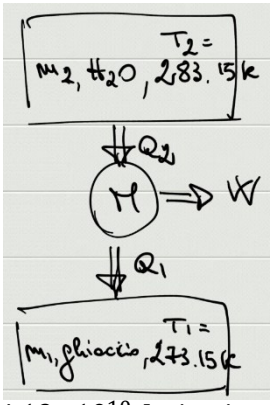
$$\eta_{TOT} = \frac{W_{TOT}}{Q_{ASS,TOT}} = 1 + \frac{Q_{CED,TOT}}{Q_{ASS,TOT}} = 1 + \frac{-Q_{ASS,1}}{-Q_{CED,2}} = 1 + \frac{m_1 c (T_e - T_1)}{m_2 c (T_e - T_2)}$$

$-Q_{ASS,1}$ e $-Q_{CED,2}$ corrispondono ai calori che la macchina assorbe/cede, cioè l'opposto dei calori che i serbatoi cedono/assorbono.

- <u>Cambiamento di fase:</u> sono tra i pochi processi reversibili esistenti; sono isotermi in cui $|Q| = m\lambda$. La variazione di entropia è:

$$\Delta S = \int \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{rev} = \frac{1}{T} \int \delta Q = \pm \frac{m\lambda}{T}$$

  - *Esercizio:* si immagini di avere due corpi di acqua, uno di massa $m_1 = 0{,}2 \cdot 10^6 \, kg$, calore specifico $c_{ghiaccio}$ e temperatura $T_1 = 273{,}15 \, K$ e l'altro di massa $m_2 = 10^6 \, kg$, calore specifico c_{H_2O} e temperatura $T_2 = 283{,}15 \, K$. Entrambi i corpi sono collegati a una macchina termica che produce lavoro. Si vuole calcolare quanto è il lavoro massimo ottenibile.



    Un primo problema da capire è se la macchina è in grado di trasformare tutto il ghiaccio in acqua oppure quando la temperatura della massa d'acqua è scesa fino a $T_2 = T_1$ è possibile considerare il blocco di ghiaccio come un serbatoio.

    Il massimo calore estraibile da m_2: $Q_{2,max} = m_2 c_{H_2O} |T_1 - T_2| = 4{,}19 \cdot 10^{10} \, J$. Il calore necessario per fondere il ghiaccio: $Q_{1,fusione\ ghiaccio} = m_1 \lambda = 6.7 \cdot 10^{10} > Q_{2,max}$.

    Il massimo rendimento lo si può ottenere solo se la macchina è reversibile.

$$\Delta S_U = 0 = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q_g}{T_1} + m_2 c_{H_2O} \, ln \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow Q_g = -T_1 m_2 c_{H_2O} \, ln \frac{T_1}{T_2} = 4{,}11 \cdot 10^{10} \, J$$

$$= -Q_{1,TOT}$$

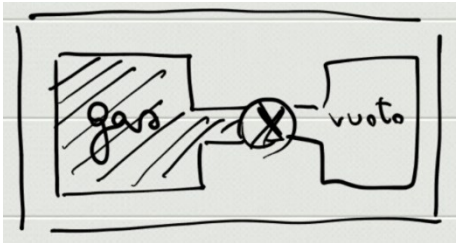
$$\Rightarrow W_{TOT} = Q_{1,TOT} + Q_{2,TOT} = -Q_g + m_2 c_{H_2O} (T_2 - T_1) = 8 \cdot 10^8 \, J$$

Energia resa inutilizzabile.

Nei processi termodinamici, non tutta l'energia disponibile viene convertita in lavoro utile: una parte si disperde sotto forma di energia interna dei corpi coinvolti o viene ceduta all'ambiente. Questa frazione di energia, che non viene sfruttata efficacemente, rappresenta l'energia dissipata. È possibile quantificare tale energia, valutando quanto del potenziale iniziale viene "perso" a causa di processi irreversibili, come attriti, turbolenze o scambi termici non ideali. In altre parole, si tratta di misurare l'energia che, invece di essere trasformata in lavoro, contribuisce ad aumentare il disordine del sistema o viene dispersa nell'ambiente.

Si vedranno adesso alcune applicazioni da cui poi si ricaverà l'energia cercata.

- *Espansione libera di un gas:* trasformazione adiabatica irreversibile in cui non c'è lavoro in gioco $W_{IRR} = 0$. La si porta da un volume iniziale $V_A \rightarrow V_B$. Si può pensare di prendere lo stesso gas allo stesso volume iniziale e portarlo allo stesso volume finale tramite un processo sfruttabile per fare un po' di lavoro: si compie una isoterma reversibile $W_R = nRT\, ln\frac{V_B}{V_A}$.



$$W_R - W_{IRR} = W_R = nRT\, ln\frac{V_B}{V_A}$$

Questo valore rappresenta l'energia che c'era a disposizione, ma viene resa inutilizzabile. Volendo calcolare la variazione di entropia, si può dire che trattandosi di una trasformazione irreversibile si calcola la variazione di entropia per una reazione reversibile dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale:

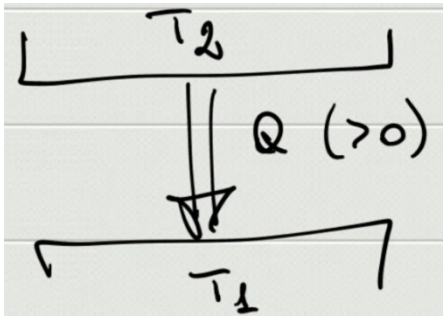
$$\Delta S_U = nR\, ln\frac{V_B}{V_A}$$
$$\Rightarrow W_R - W_{IRR} = T\Delta S_U$$

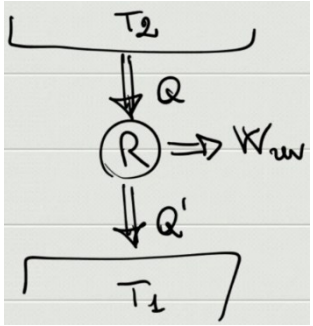
- *Passaggio diretto di calore da un serbatoio caldo a uno freddo* $(T_1 < T_2)$*:* si tratta di un'altra trasformazione irreversibile per cui $W_{IRR} = 0$. Per sfruttare al meglio il tutto, posso pensare di collegare una macchina reversibile al serbatoio 2 per produrre un lavoro reversibile. In questa situazione compie un lavoro pari a: $W_R = \eta_R Q = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q$.

$$W_R - W_{IRR} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q = T_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) Q$$

La variazione di entropia per la trasformazione irreversibile è:

$$\Delta S_U = \Delta S_{serb,1} + \Delta S_{serb,2} = \frac{Q}{T_1} + \frac{-Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$
$$\Rightarrow W_R - W_{IRR} = T_1 \Delta S_U$$





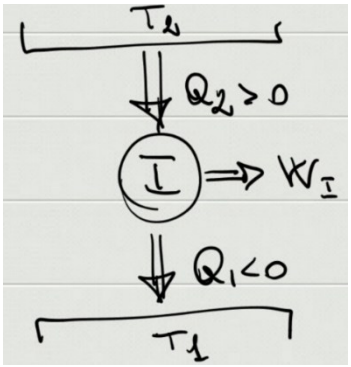
- *Una macchina irreversibile sposta tra due serbatoi:* il lavoro compiuto qui è $W_I = Q_1 + Q_2$, che non è ottimale in quanto la macchina non è reversibile. Se al posto della macchina irreversibile ci fosse una macchina reversibile, in questo caso il lavoro fatto sarebbe: $W_R = \eta_R Q = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2$.

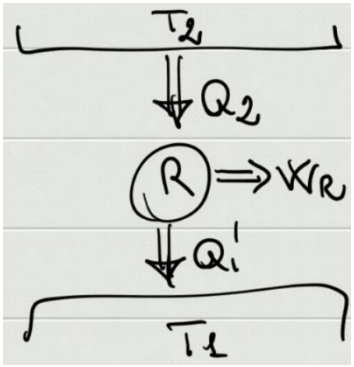
$$W_R - W_{IRR} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) Q_2 - (Q_1 + Q_2) = T_1 \left(-\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1}\right)$$

La variazione di entropia dell'universo è:

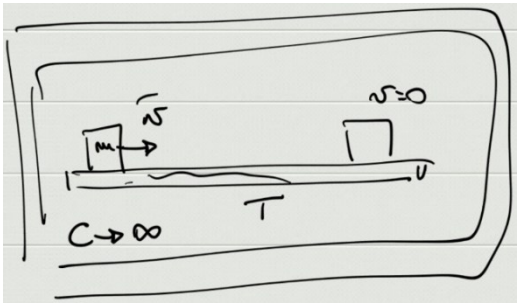
$$\Delta S_U = \Delta S_{sistema} + \Delta S_{amb} = \Delta S_{serb,1} + \Delta S_{serb,2} = \frac{-Q_1}{T_1} + \frac{-Q_2}{T_2}$$

$$\Rightarrow W_R - W_{IRR} = T_1 \Delta S_U$$





- *Blocco in movimento su un piano con attrito:* il piano è alla temperatura ambiente T. Essendoci l'attrito, dopo un po' il blocco si ferma e per la dissipazione di energia aumenta l'energia interna del blocco e del piano ($T' > T$). Dopo un po' la temperatura torna ad essere quella dell'ambiente. Si osserva che l'energia cinetica iniziale $E_k = \frac{1}{2} m v^2$ non c'è più perché viene dissipata. Quando il blocco si ferma, essendo un processo irreversibile il lavoro è $W_{IRR} = 0$ perché l'energia cinetica non è stata convertita in lavoro ($\nexists W_R = E_k$): $W_R - W_{IRR} = E_k$.
  Dopo un po' il blocco e il piano si raffreddano perché trasferiscono la loro energia interna tramite il calore all'ambiente. Considerando l'ambiente come un grande serbatoio:
  $$\Delta S_U = \frac{Q_{amb}}{T} = \frac{E_k}{T}$$
  Dove il calore che assorbe l'ambiente è pari all'energia cinetica iniziale.
  $$\Rightarrow W_R - W_{IRR} = E_k = T \Delta S_U$$



In conclusione, quando ci sono dei processi dissipativi l'energia che non viene sfruttata al meglio viene ceduta all'ambiente, ma sottoforma di un'energia non utilizzabile nell'universo termodinamico preso in considerazione: si definisce **energia resa inutilizzabile**.

$$E_{IN} = T_{min} \Delta S_U$$

NB: generalmente l'energia resa inutilizzabile è pari alla variazione tra il lavoro massimo reversibile e il lavoro fatto realmente:

$$E_{IN} = \Delta W = W_{min} - W_{reale}$$

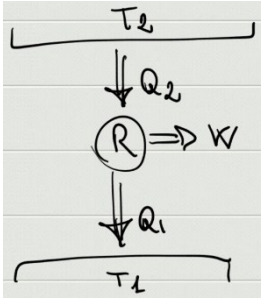
Pompe di calore

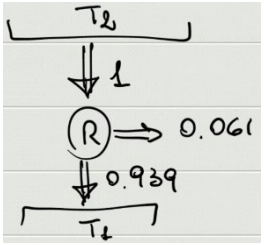
Sia una macchina termica reversibile posta tra due serbatoi. Si sa che il rendimento di questa macchina è pari a:

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{\Delta T}{T_2}$$

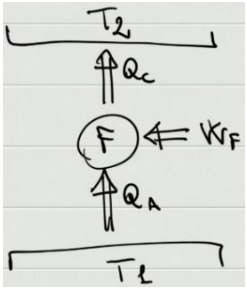
Volendo avere un rendimento elevato, bisogna avere un $\Delta T \uparrow$.

Supponendo di aver $\left.\begin{matrix} T_1 = 277{,}5\ K \\ T_2 = 295{,}5\ K \end{matrix}\right\} \rightarrow \eta_R = 0{,}061$. Ecco che siccome $\eta = \frac{W}{Q_2}$, se la macchina assorbe una quantità unitaria di calore unitaria, $\eta = W = 0{,}061$ e quindi il serbatoio 1 assorbe il restante 0,939.





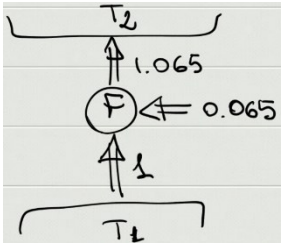
Sia ora una macchina frigorifera reversibile posta tra due serbatoi. Si è definita l'efficienza come



$$\xi_R = \frac{Q_1}{|W_F|} = \frac{T_1}{|T_1 - T_2|} = \frac{T_1}{\Delta T}$$

Volendo avere un'efficienza elevata, bisogna avere un $\Delta T \downarrow$.

Supponendo di aver $\left.\begin{matrix} T_1 = 277{,}5\ K \\ T_2 = 295{,}5\ K \end{matrix}\right\} \rightarrow \xi_R = 15{,}4$. Vuol dire che se dal serbatoio freddo viene assorbita una quantità di calore unitaria, il lavoro assorbito è $W_F = \frac{Q_1}{\xi_R} = 0{,}065$ e il calore ceduto è pari a 1,065.



Solitamente la macchina frigorifera viene usata per raffreddare un ambiente, ma se lo si volesse usare per scaldare l'ambiente a temperatura T_2? Si può vedere la macchina frigorifera come una *pompa di calore* perché basta assorbire un po' di calore dall'ambiente freddo e tramite poco lavoro si può scaldare in maniera efficiente.

Temperatura assoluta

Fino a questo punto, le temperature sono state misurate tramite scale empiriche, legate a specifici termometri e caratterizzate da limiti di validità. Tuttavia, esiste una scala più fondamentale: la scala assoluta, che si basa su un riferimento universale come il punto triplo dell'acqua.

Per comprendere il concetto di temperatura assoluta, è utile partire dal teorema di Carnot. Secondo questo teorema, se una macchina termica reversibile opera tra due serbatoi a temperature empiriche t_1 e t_2, il suo rendimento è sempre lo stesso, indipendentemente dalla natura della macchina o del fluido utilizzato. Questa proprietà suggerisce l'esistenza di una scala di temperatura che non dipende dagli strumenti di misura, ma da principi fisici universali.

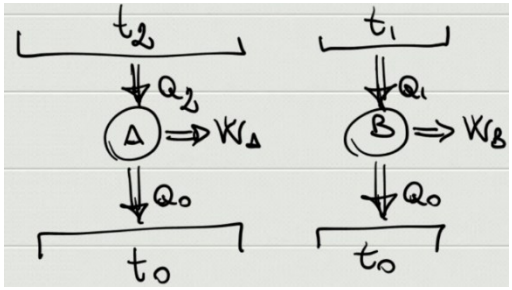
$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2}$$

Vale che η_R è lo stesso per ogni macchina reversibile.

$$f(t_1, t_2) := \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|$$

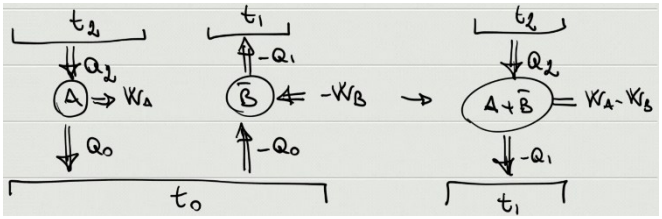
Dove il valore assoluto viene posto perché vale anche per le macchine frigorifere.

Andando ora a prendere due macchine reversibili A e B che lavorano tra le temperature $T_0 < T_1 < T_2$ e producono lo stesso calore come in figura. Applicando la relazione trovata in precedenza si ha che:



$$A: \left|\frac{Q_2}{Q_0}\right| = f(t_0, t_2)$$
$$B: \left|\frac{Q_1}{Q_0}\right| = f(t_0, t_1)$$

Invertendo la macchina B e sincronizzandola con la macchina A, si ottiene una macchina che assorbe calore dal serbatoio T_2 e lo cede al serbatoio T_1. Applicando la stessa relazione alla macchina reversibile si trova che:



$$\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| = f(t_1, t_2) = \left|\frac{Q_2}{Q_0}\right| \left|\frac{Q_0}{Q_1}\right| = \frac{f(t_0, t_2)}{f(t_0, t_1)}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| = \frac{h(t_0)g(t_2)}{h(t_0)g(t_1)}$$

Senza sapere nulla del rendimento, si conclude che il rapporto dei calori è descritto dal rapporto della stessa funzione empirica calcolata tra le due temperature.

Si prenda ora un sistema composto da una macchina reversibile posta tra due serbatoi, uno alla temperatura incognita t_x e l'altro alla temperatura del punto triplo dell'acqua. Si può pensare di utilizzare la macchina reversibile come termometro per realizzare la temperatura incognita perché utilizza le relazioni trovate in precedenza.

$$\left|\frac{Q_x}{Q_{pt}}\right| = \frac{g(t_x)}{g(t_{pt})}$$

Formalmente non si conosce la funzione $g(t)$, si può però pensare di associare a questa funzione il significato di *caratteristica termometrica* (funzione che dà una temperatura), cioè $g(t) \mapsto T$. Al punto triplo dell'acqua: $g(t_{pt}) = 273{,}16 \Rightarrow g(t_x) = 273{,}16 \left|\frac{Q_x}{Q_{pt}}\right|$. Chiamando $g(t_x)$ la temperatura incognita T_x, viene definita una scala di temperatura pari a:

$$T_x = 273{,}16 \left|\frac{Q_x}{Q_{pt}}\right|$$

Con questo approccio, si ottiene un sistema in cui una macchina termica reversibile funge da termometro: la scala di temperatura viene definita a partire dalla misura dei calori scambiati. L'utilità di questo metodo risiede nel fatto che il rendimento di una macchina reversibile è sempre lo stesso, indipendentemente dal tipo di termometro utilizzato. Ciò consente di superare i limiti dei termometri tradizionali (come quelli a gas o a mercurio), la cui accuratezza dipende dalle proprietà specifiche dei materiali impiegati (ad esempio, la fusione del gas o l'evaporazione del mercurio). In questo modo, la definizione di temperatura risulta universale e oggettiva. La temperatura assoluta, dunque, non dipende dal mezzo usato.

In conclusione,

$$\left.\begin{aligned} \eta_R &= 1 - \left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| \\ \eta_R &= 1 - \frac{t_1}{t_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| = \frac{t_1}{t_2}$$

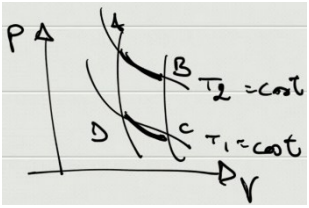
ma $\left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| = \frac{g(t_1)}{g(t_2)} = \frac{T_1}{T_2}$.

Si noti che i rapporti delle temperature empiriche coincidono con i rapporti corrispondenti delle temperature assolute.

$$T \propto t \Rightarrow T = ct$$

Essendo che si impone che $t_{pt} \equiv T_{pt} \Rightarrow c = 1$.

Per definizione: $T_{pt} = 273{,}16\ K \ \Rightarrow 1\ K = \frac{1}{273{,}16} T_{pt}$. Il kelvin stesso è definito a partire dalla temperatura assoluta:

$$1\ K = \frac{1}{273{,}16} T_{pt}$$

L'equazione $T = 273{,}16 \left|\frac{Q}{Q_{pt}}\right|$ dice cos'è lo **zero assoluto**. Una temperatura di $0\ K$ corrisponde a una temperatura in cui la macchina di Carnot reversibile non scambia calore nell'isoterma posta in contatto termico con il corpo a temperatura incognita (la temperatura è 0).