Esercizi Tutorato Algebra

niccolo.turcato@studenti.unipd.it

Secondo semestre a.a. 21/22

1 Esercizi 1° Tutorato

1. Scrivere un vettore $w \in \mathbb{R}^3$ linearmente dipendente dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

3. Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

4. Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Se risultano linearmente dipendenti esprimere, quando possibile, ciascun vettore come combinazione lineare degli altri due.

5. Verificare se il seguente insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:
$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 + 2x_2 = 6x_1 + x_3 = 0 \}$$

6. Verificare se il seguente insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:
$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 + 2x_2 = x_2 + 3x_3 = 0 \}$$

7. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - Si determini una base di U ∩ V.
   - Si determini una base di U + V.

2 Esercizi 2° Tutorato

1. Si considerino i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$V = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >, \quad W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0\}$$

   - Calcolare V ∩ W
   - Calcolare dim W, dim V e dim V ∩ W
   - Calcolare dim(V + W)

2. Siano dati i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 3y = 0\}, \quad W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | 2x + y - z = 0\}$$

   determinare:

   - Dimensione e base di V e W
   - Il sottospazio V + W e una sua base
   - Il sottospazio V ∩ W e una sua base
   - La somma V + W è diretta?
   - A quale dei precedenti sottospazi appartiene il vettore: $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Determinare due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ U e W tali che $\mathbb{R}^4$ = U ⊕ W

4. Si consideri U = $< \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} >$ e il vettore $v_k = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si dica per quale valore di k si ha $v_k \in$ U
   Sia V = $\{x \in \mathbb{R}^4 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$, Si determini una base di V e una base di U ∩ V

5. Si consideri U, sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   - Dimensione e base di U
   - Completare la base di U a una base di $\mathbb{R}^4$

3 Esercizi 3° Tutorato

1. Si considerino le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g: \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} x_3 + x_1 \\ 3x_2 + 4x_1 + 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h: \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to \begin{pmatrix} x_3^2 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   - Verificare se sono lineari o meno.
   - Determinare una base per il nucleo delle funzioni che risultino essere lineari e stabilire se esse sono iniettive.

2. Siano V e W due spazi vettoriali, siano $v_1, v_2.v_3.v_4, w_1, w_2, w_3$ le rispettive basi, indichiamo con $f : V \to W$ un'applicatione lineare tale che:

$$
\begin{aligned}
f(v_1) &= w_1 - -w_3 \\
f(v_2) &= w_1 + w_2 \\
f(v_3) &= 2w_2 + w_3 \\
f(v_4) &= 4w_1 + 2w_2 - -2w_3
\end{aligned}
$$

   - Si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.
   - Si determini una base di Ker(f) e una base di Im(f)
   - Determinare $f^{-1}(w_1 + w_3)$
   - Dire se f è suriettiva e/o iniettiva

3. Sia:

$$f: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x+z \\ -y+t \\ x-y \\ x-t \end{pmatrix}$$

   - Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica.
   - Si determini $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$

4. Sia V = $\mathbb{R}^3$ e W lo spazio dei polinomi di $\mathbb{R}$ con grado minore o uguale a 4. Cosiderare:

$$f: \quad V \to W$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + cx + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + (a+3b-4c)x^4$$

   Calcolare la matrice associata nelle basi canoniche.

5. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da:

$$f(1,1,,0,0) = (3,1,2), \quad f(1,0,,1,0) = (2,0,2)$$
$$f(0,0,,1,0) = (-1,-2,1), \quad f(0,0,,1,1) = (1,-1,2)$$

   - Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche
   - Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.
   - Si determini una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap$ U , ove U è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $2x1 + x_2 + x_3 = 0$.

4 Esercizi 4° Tutorato

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (12, 3, -2, 3)^T$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.
   - Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W .
   - Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 3, 0)^T$ e $v_2 = (2, 3, 4, -1)^T$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di V + W .
   - Dato il vettore $v_t = (t, 0, 1, 2)^T$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1 , v_2 , v_t sono linearmente dipendenti.
   - Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia W=Ker$f$ e U=Imf .

2. Si determini per quali valori di $t \in R$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((0, 1, -1)^T = (3, -1, 0)^T$, $f((-2, 1, 3)^T) = (-t, -1, t + 3)^T$ e il nucleo di f sia generato dal vettore $(1, t^2 + 3t, -2)^T$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa è unica oppure no.
   Si fissi inoltre t=1, trovare $f((1, 6, -4)^T)$

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice:
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   rispetto alle basi canoniche. Dato il vettore u = $(1, - - 2) \in \mathbb{R}^2$, si determini $f^{-1}(u)$. La funzione f è invertibile? Quale è il rango di A?

4. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori:
   $$v_1' = (1, 1, 0)^T, v_2' = (1, -1, 1)^T, v_3' = (3, 0, 1)^T$$
   $$v_1'' = (2, 1, 1)^T, \quad v_2'' = (0, 2, 1)^T, v_3' = (3, 3, 2)^T$$
   Mostrare che $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ e $B'' = \{v_1'', v_2'', v_3''\}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$ e scrivere la matrice di cambiamento di base da B' a B''. Quale è il suo rango?

5. Considerare il bettore $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, disegnarlo nel piano cartesiano insieme ai vettori $x' = (1, 1)$ e $x' = (-1, 1)$. Disegnate le proiezioni di v_1 su x' e y' e trovare α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che sia $\alpha x' + \beta y' = v_1$. Verificare che $B' = \{x', y'\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ e trovare la matrice $M_c^{B'}$ di cambiamento di base dalla base canonica a B'. Calcolare il rango di $M_c^{B'}$. Calcolare $M_c^{B'} v_1$ e riflettere sul risultato.

5 Esercizi 5° Tutorato

1. Dal primo compitino 2019:
   In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $u_1 = (1,1,0,-1)^T, u2 = (2,3,-1,1)^T, u3 = (1,3,\alpha,5)^T$.

   - Determinare per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti e, per il valore di α trovato, scrivere uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri.
   - Poniamo ora $\alpha = 0$ e sia U il sottospazio generato da u_1, u_2, u_3. Scrivere un'equazione nelle incognite x1, x2, x3, x4, le cui soluzioni siano i vettori di U.
   - Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio dato dalle soluzioni del sistema

   $$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

     Si scriva una base di W e si dica se è vero che $U \cap W = W$
   - Si trovi una base di un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $dim(Z \cap W) = 1$ e $Z + U = \mathbb{R}^4$. E' possibile trovare un tale sottospazio Z di dimensione 1?

2. Sempre dal compitino 2019:
   Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   - Determinare una base del nucleo di f, una base dell'immagine di f e dire se è iniettiva.
   - Dire se esiste una funzione non identicamente nulla $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f \circ g$ sia la funzione nulla. Se una tale g esiste, scriverne una possibile matrice rispetto alle basi canoniche.
   - Trovare una matrice invertibile B tale che la matrice $A' = BA$ sia una forma a scala di A.

3. Dal primo compitino del 2018:
   Siano $v_1 = (2,1,0)^T, v_2 = (1,1,0)^T, v_3 = (-1,2,1)^T$, e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita poenendo $f(v_1) = (2,0,-1,2)^T, f(v_2) = (-1,1,t,0)^T, f(v_3) = (3,1,1,4)^T, t \in \mathbb{R}$.

   - Si scriva la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ del dominio e alla base canonica del codominio e si determini il rango di tale matrice al variare di t.
   - Per il valore di t per cui il rango non è massimo si scriva la matrice B di f rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio.
   - Per il valore di t per cui f non è iniettiva si determini una base di $\mathrm{Ker}(f)$ e una base di $\mathrm{Im}(f)$.
   - Dopo aver posto $t = 0$, si stabilisca se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità. Se una tale g esiste, è vero che anche la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è l'identità?

6 Esercizi 6° Tutorato

1. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato da:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

   - Si determini la dimensione e una base di U.
   - Si dica per quale valore di t il vettore $v_t = \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a U.
   - Si determinino le equazioni cartesiane di U.
   - Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
   - Si determini la dimensione e una base di $U + W$.

2. Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $\mathrm{Ker}(f) = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ e $\mathrm{Im}(f) = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} >$.

   Se ne dia la matrice associata alla base canonica. Tale f è unica? Perché? Si determini l'antimmagine di $(1,1,1)^T$ e di $(2,2,1)^T$ della funzione trovata.

3. Risolvere e discuretere il seguente sistema al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 2ax_3 + ax_4 = 1 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)ax_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - ax_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

4. Invertire la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

7 Esercizi 7° Tutorato

1. Calcolare i determiananti delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare il determinante della matrice A e determinare il rango al variare dei parametri:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & b+3 & -2 \\ -3 & 3a+6 & 3a-6 & 3 \\ 1 & a-b-1 & a-b+4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Si determini $t \in \mathbb{R}$ in modo tale che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & t-1 & -3 \end{pmatrix}$$

abbia -7 come autovalore. Per tale valore di t si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

4. Dati i vettori $v_1 = (2, --3, 1, 0)^T$ e $v_2 = (0, --1, 1, --1)^T$, sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = < v_1, v_2 >$.

   - Si scriva la matrice A di una tale f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.
   - Si determinino gli autovalori e gli autovettori di A e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

5. Si consideri:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   - Si determini $t \in \mathbb{R}$ in modo tale che $v = (1, 1, -1)^T$ sia autovettore.
   - Per il valore di t trovato al punto precedente, si determinino gli autovalori e gli autovettori della matrice e si stabilisca se è diagonalizzabile.
   - Esiste una matrice non diagonale simile alla matrice A ?

8 Esercizi 8° Tutorato

1. Sia V uno spazio vettoriale con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e sia $f : V \to V$ la funzione lineare definita da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1 + 3v_2 \\ f(v_2) &= 3v_1 + 2v_2 \\ f(v_3) &= v_1 + 3v_3 + 2v_4 \\ f(v_4) &= 2v_1 - v_2 + 2v_3 + 3v_4 \end{aligned}$$

   Si determinino tutti gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile. (suggerimento: due matrici sono simili se rappresentano la stessa funzione in basi diverse)

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare definita ponendo:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ f(v_2) &= w_2 \\ f(v_3) &= w_3 \end{aligned}$$

   dove:

$$\begin{aligned} &v_1 = (1, 2, 3)^T, v_2 = (2, -1, 0)^t, v_3 = (0, -1, -1)^T \\ &w_1 = (6, 4, 10)^T, w_2 = (5, -1, 4)^T, w_3 = (-1, -2, -3)^T \end{aligned}$$

   - Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   - Si determini una base del nucleo e una base dell'immagine di f.
   - Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f e si dica se f è diagonalizzabile.

3. Siano dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1)^T, v_2 = (2, 0, 1)^T, v_3 = (1, 1, 3)^T$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $f(v_1) = 3v_1, f(v_2) = 2v_2, f(v_3) = 2v_3 + 2v_2$.

   - Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
   - Si determinino gli autovalori e gli autovettori di f.
   - Si verifichi che gli autospazi di f sono in somma diretta.

9 Esercizi 9° Tutorato

1. Sia A la matrice:

$$\begin{pmatrix} -t & 3+t & -t \\ 3-t & t & 3-t \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

si stabilisca se esistono dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per i quali A è invertibile. Si determini inoltre per quale valore di t la matrice A è diagonalizzabile. Per tale valore di t si determini una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che si abbia $A = PDP^{-1}$.

2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x + y - z = 0$. Si esprima il vettore $v = (3, -2, 4)^T$ come somma $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione che associa a un vettore $w \in \mathbb{R}\ 3$ la sua proiezione ortogonale $f(w)$ sul sottospazio U. Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}$.

3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -2, 0)^T$, $u_2 = (-3, -6, 6, 2)^T$ e $u_3 = (0, 3, 0, -1)^T$.

   - Si determinino le equazioni cartesiane e una base di U e del sottospazio $U^\perp$ (ortogonale di U).
   - Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione ortogonale sul sottospazio $U^\perp$. Si scriva la matrice di π rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino il nucleo e l'immagine di π.
   - Dato il vettore $v = (1, 1, 1, 1)^T$ si scriva v nella forma $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$.

4. Siano dati i vettori:

$$(1, -1, 0)^T, (2, 0, 1)^T, (0, -1, 1)^T$$

   - Calcolare l'angolo tra i primi due vettori.
   - Far vedere che formano una base di $\mathbb{R}^3$.
   - Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
   - Calcolare le coordinate del vettore $x = (2, -5, 1)^T$ nella base ortonormale ottenuta al punto precedente.

10 Esercizi 10° Tutorato

1. Siano dati i vettori:

$$(1,-1,0)^T, (2,0,1)^T, (0,-1,1)^T$$

   - Calcolare l'angolo tra i primi due vettori.
   - Far vedere che formano una base di $\mathbb{R}^3$.
   - Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
   - Calcolare le coordinate del vettore $x = (2,-5,1)^T$ nella base ortonormale ottenuta al punto precedente.

2. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

   Si dimostri che g è non degenere e si determini una base ortogonale di V. Si determinino inoltre una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^T G P$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   - Trovare una base di Imf e una base di $(Imf)^\perp$ e verificare che $(Imf)^\perp = Kerf$.
   - Usando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una base ortogonale di Imf.
   - Dato il vettore $v = (1,5,-3,1)$, trovare $u \in Kerf$ e $w \in Imf$ tali che $v = u + w$.

11 Esercizi 11° Tutorato

1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, si consideri il sottospazio U di equazione $x - 2y + 3z + 2w = 0$.

   - Si determini la dimensione e una base di U.
   - Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, si determini una base ortonormale di U.
   - Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (3, 1, 0, -2)^T$ sul sottospazio U.

2. (Sett 2020) Consideriamo la matrice e il vettore:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$$

   - Usando il Teorema di Rouché-Capelli dire per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ il sistema $Ax = B$ ha soluzioni.
   - Trovare gli autovalori di A e dire se è diagonalizzabile.
   - Dire se A 'e simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   - La matrice A è simile a A^2 ? La matrice A è simile a A^3 ?

3. (Feb 2021) Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette:

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

   - Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.
   - Determinare (se esiste) una retta l che intersechi r e s e sia parallela a entrambi i piani $\pi : x + y = 0$e $\pi' : x + z + 1 = 0$.

12 Esercizi 12° Tutorato

1. (Feb 2021) Nello spazio euclideo tridimensionale sono date le rette:

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

   - Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.
   - Determinare (se esiste) una retta l che intersechi r e s e sia parallela a entrambi i piani $\pi : x + y = 0$e $\pi' : x + z + 1 = 0$.
   - Determinare l'equazione (parametrica o cartesiana) della retta r' passante per l'origine, perpendicolare alla retta r e contenuta nel piano π.
   - Determinare l'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e parallelo alla retta s.

2. In $\mathbb{R}^4$ sia U il più piccolo sottospazio vettoriale che contiene tutti i vettori del tipo $(1+a, 1-b, a+b, a-b)$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Si trovi la dimensione e una base di U.

   Sia $W_\alpha \in \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha - 1 \\ -x_1 + 3x_2 + (\alpha - 1)x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 1 - \alpha \\ 2x_2 + \alpha x_3 + (\alpha + 1)x_4 = 0 \end{cases}$$

   - Si riduca tale sistema in forma a scala.
   - In base al valore di α si dica se W_α è un sottospazio vettoriale o un sottospazio affine.
   - Si determini la dimensione di W_α, al variare di $\alpha in \mathbb{R}$.

3. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio V dato dall'equazione:

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

   - Dare una base di V.
   - Determinare la proiezione ortogonale di $v = (1, 1, 1, 1)^T$ su V.
   - Dato $< (1, 2, -1, 0)^T >$ sottospazio di V si determini M sottospazio di V tale che abbia dimensione 2 e che sia generato da vettori ortogonali a $< (1, 2, -1, 0) >$.
   - Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ che hanno come proiezione ortogonale su V il vettore $(1, 2, -1, 0)^T$.

13 Esercizi 13° Tutorato

1. (Feb 2022) In $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio vettoriale di equazione $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$ e W il sottospazio generato dal vettore $w = (1, 1, 1, 1)^T$.

   - Verificare che $W \in U$ e trovare due vettori u_1, u_2 tali che w, u_1, u_2 sia una base di U.
   - Scrivere le coordinate del vettore w rispetto alla base di U trovata nel punto precedente.
   - Scrivere la matrice (rispetto alla base canonica) di una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = Imf$ e $W = Kerf$. Se una tale funzione non esiste, si spieghi perchè.

2. (Feb 2022) Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni:

$$U = \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

   e sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $l = (0, 1, 1, 0)^T$.

   - Trovare una base ortogonale di U.
   - Sia $V = U^\perp \cap L^\perp$. Trovare una base di V.
   - Dato il vettore $w = (2, 3, -2, 2)^T \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su $V^\perp$.

3. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (2, 1, -1)^T, B = (4, -2, 0)^T$ e la retta r di equazioni $x - 2y - 5 = 0$ e $2y - z = 0$.

   - Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C equidistante da A e B.
   - Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per il punto C, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta r.

14 Esercizi 14° Tutorato

1. (Sett 2019) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   - Scrivere la matrice B di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^3$ formata dai vettori $v_1 = (0, 1, 1)^T, v_2 = (1, 0, 1)^T, v_3 = (1, 1, 0)^T$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.
   - Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$ e calcolare P^{-1}.
   - Determinare il nucleo di f, prima usando la matrice A e poi usando la matrice B. Usando le matrici A e B si 'e trovato lo stesso sottospazio $Ker(f) \subset \mathbb{R}^3$? (spiegare).

2. (Giugno 2019) Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, -1, 0)^T, u_2 = (0, 1, 1, 0)^T, u_3 = (0, -2, 0, 1)^T$.

   - Scrivere la matrice G del prodotto scalare nel sottospazio U, rispetto alla base u_1, u_2, u_3.
   - Utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt trovare una matrice invertibile P tale che $P^T GP$ sia una matrice diagonale.
   - Dato $v = (1, -7, 5, -3) \in \mathbb{R}^4$ determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.