Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - Canale 2 (Prof. G. Naletto)
Prova scritta di Fisica Generale 1 - Padova, 8 luglio 2021

Cognome .... Nome .... Matricola ....

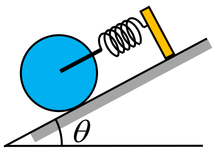
Aula .... Posto # ....

Problema 1

Due sfere omogenee A e B dello stesso materiale e raggio rispettivamente $R_A = 0.02$ m e $R_B = 2R_A$ sono tenute ferme soggette alla forza peso con i loro centri posti sull'asse verticale z orientato verso l'alto, con A sopra B. Le due sfere sono separate da una piccolissima distanza, ininfluente ai fini dei calcoli, e la distanza del centro di B dal suolo è $z_{B,o} = 0.5$ m. Ad un certo istante si lasciano le sfere libere di cadere: la sfera B urta dapprima il suolo e dopo un tempo trascurabile urta A, entrambi gli urti sono elastici. Determinare:

a) il modulo v_B della velocità di B un istante dopo l'urto con il suolo;
b) il modulo v'_A della velocità di A un istante dopo l'urto con B (suggerimento: si osservi che, dato il rapporto tra i raggi delle sfere, è possibile determinare il rapporto tra le masse delle stesse);
c) la massima altezza $z'_{A,max}$ rispetto al suolo raggiunta dal centro di A dopo l'urto.

Problema 2



Una sfera omogenea di massa $m = 1.8$ kg e raggio $R = 0.25$ m è appoggiata su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Una molla ideale di costante elastica $k = 120$ N/m posta parallela al piano inclinato e vincolata ad un estremo è collegata all'altro estremo, posto più in basso, all'asse orizzontale della sfera perpendicolare alla molla stessa (vedi figura). Inizialmente la molla è compressa di $\Delta x_o = 0.06$ m e la sfera è bloccata; poi si toglie il blocco e la sfera inizia a muoversi sul piano inclinato con moto di puro rotolamento. Determinare:

a) il modulo $a_{CM,o}$ dell'accelerazione iniziale del centro di massa della sfera;
b) valore minimo $\mu_{s,min}$ del coefficiente di attrito statico affinché la sfera rotoli senza strisciare sul piano;
c) il modulo v_{CM} della velocità del centro di massa della sfera nell'istante in cui la molla raggiunge la sua lunghezza di riposo.

Problema 3

Tre moli di un gas ideale monoatomico in un contenitore diatermico, inizialmente in equilibrio nello stato A alla pressione $p_A = p_{amb} = 10^5$ Pa in cui occupano un volume $V_A = 0.08$ m^3, vengono messe in contatto termico con un serbatoio di calore alla temperatura T_B mantenendo l'equilibrio con la pressione ambiente finché si portano allo stato di equilibrio B in cui occupano un volume $V_B = 0.1$ m^3. Poi si isola il contenitore dall'ambiente, e si fa compiere al gas una trasformazione estremamente lenta durante la quale il gas compie il lavoro $W_{BC} = 2000$ J e si porta allo stato C. Sottraendo poi molto gradualmente calore al gas mantenendolo a pressione costante, lo si porta nello stato D. Infine, sempre con il contenitore isolato dall'ambiente, si riporta rapidamente il gas nello stato iniziale A compiendo un lavoro esterno $W_{DA,ext} = 1750$ J. Disegnare nel diagramma pV il ciclo compiuto dal gas e determinare:

a) la temperatura T_B del gas nello stato B;
b) il volume V_C del gas nello stato C;
c) il rendimento η del ciclo;
d) la variazione di entropia $\Delta S_{UN,ciclo}$ dell'universo nel ciclo.

Soluzioni

Problema 1

a) $m_B g(z_{B,o} - R_B) = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \;\Rightarrow\; v_B = \sqrt{2g(z_{B,o} - 2R_A)} = 3\text{ m/s}$

b) Dopo l'urto (elastico) la velocità di B cambia segno (diventa concorde all'asse *z*), ma il modulo rimane v_B.

$v_A = v_B;\; m_B = 8m_A; \quad v'_A = \dfrac{(m_A - m_B)(-v_A) + 2m_B v_B}{m_A + m_B} = \dfrac{23}{9} v_B = 7.68\text{ m/s}$

c) $0 = v'^2_A - 2g\left(z'_{A,max} - (2R_B + R_A)\right) \;\Rightarrow\; z'_{A,max} = 5R_A + \dfrac{v'^2_A}{2g} = 3.1\text{ m}$

Problema 2

a) Posto C come il punto di contatto della sfera con il piano e O come il suo centro, si ha:

$$\Sigma\vec{M}_C = I_C\vec{\alpha} \;\Rightarrow\; Rmg\sin\theta + Rk\Delta x_o = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right)\frac{a_{CM,o}}{R} \;\Rightarrow a_{CM,o} = \frac{5}{7}\left(g\sin\theta + \frac{k}{m}\Delta x_o\right) = 6.4\text{ m/s}^2$$

oppure

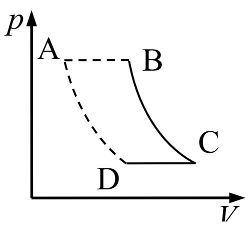
$$\begin{cases} \Sigma\vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}_o \\ \Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{CM,o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} RF_{as} = \dfrac{2}{5}mR^2\dfrac{a_{CM,o}}{R} \\ mg\sin\theta + k\Delta x_o - F_{as} = m\vec{a}_{CM,o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{as} = \dfrac{2}{5}ma_{CM,o} \\ a_{CM,o} = \dfrac{5}{7}\left(g\sin\theta + \dfrac{k}{m}\Delta x_o\right) \end{cases}$$

b) $F_{as} = \dfrac{2}{5}ma_{CM,o} \le F_{as,max} = \mu_s mg\cos\theta \;\Rightarrow\; \mu_s \ge \mu_{s,min} = \dfrac{2}{5}\dfrac{a_{CM,o}}{g\cos\theta} = \dfrac{2}{7}\left(\tan\theta + \dfrac{k\Delta x_o}{mg\cos\theta}\right) = 0.30$

c) $E_m = \text{cost} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2}k\Delta x_o^2 + mg\Delta x_o\sin\theta = \dfrac{1}{2}I_O\omega^2 + \dfrac{1}{2}mv_{CM}^2 \;\Rightarrow\; k\Delta x_o^2 + 2mg\Delta x_o\sin\theta = \dfrac{7}{5}mv_{CM}^2 \;\Rightarrow$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{5}{7}\left(2g\Delta x_o\sin\theta + \frac{k}{m}\Delta x_o^2\right)} = 0.77\text{ m/s}$$

Problema 3



a) $T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{p_A V_B}{nR} = 400.9\text{ K}$

b) $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_V(T_C - T_B) \;\Rightarrow\; T_C = T_B - \dfrac{W_{BC}}{nc_V} = 347.5\text{ K}$

$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \;\Rightarrow\; V_C = V_B\left(\dfrac{T_B}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = 0.124\text{ m}^3$

c) $T_A = \dfrac{p_A V_A}{nR} = 320.7\text{ K};$

$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_V(T_A - T_D) \;\Rightarrow\; T_D = T_A + \dfrac{W_{DA}}{nc_V} = T_A - \dfrac{W_{DA,ext}}{nc_V} = 274\text{ K}$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{nc_p(T_D - T_C)}{nc_p(T_B - T_A)} = 1 + \frac{T_D - T_C}{T_B - T_A} = 0.083$$

oppure

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{ASS}} = \frac{nR(T_B - T_A) - nc_V(T_D - T_C) + nR(T_D - T_C) - nc_V(T_A - T_D)}{nc_p(T_B - T_A)} = 1 + \frac{T_D - T_C}{T_B - T_A}$$

d) $\Delta S_{UN,ciclo} = \Delta S_{amb,ciclo} = \Delta S_{amb,AB+CD} = \Delta S_{amb,AB} - \Delta S_{gas,CD} = \dfrac{-Q_{AB}}{T_B} - nc_p\ln\dfrac{T_D}{T_C} = 2.35\text{ J/K}$

oppure

$p_D = p_C = \dfrac{nRT_C}{V_C} = 6.99\cdot 10^4\text{ Pa}; \quad V_D = \dfrac{nRT_D}{p_D} = 0.097\text{ m}^3$

$\Delta S_{UN,ciclo} = \Delta S_{UN,AB+DA} = \left(nc_p\ln\dfrac{T_B}{T_A} + \dfrac{-Q_{AB}}{T_B}\right) + nc_V\ln\dfrac{T_A}{T_D} + nR\ln\dfrac{V_A}{V_D} = 2.35\text{ J/K}$