

Sistemi e unità di misura

Sistema Internazionale (SI)

<i>Grandezza fondamentale</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Unità di misura</i>
Massa	M	kg
Lunghezza	L	m
Tempo	T	s

→ nel SI la grandezza fisica *Forza* (F) è una grandezza derivata

forza=massa·accelerazione

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$$

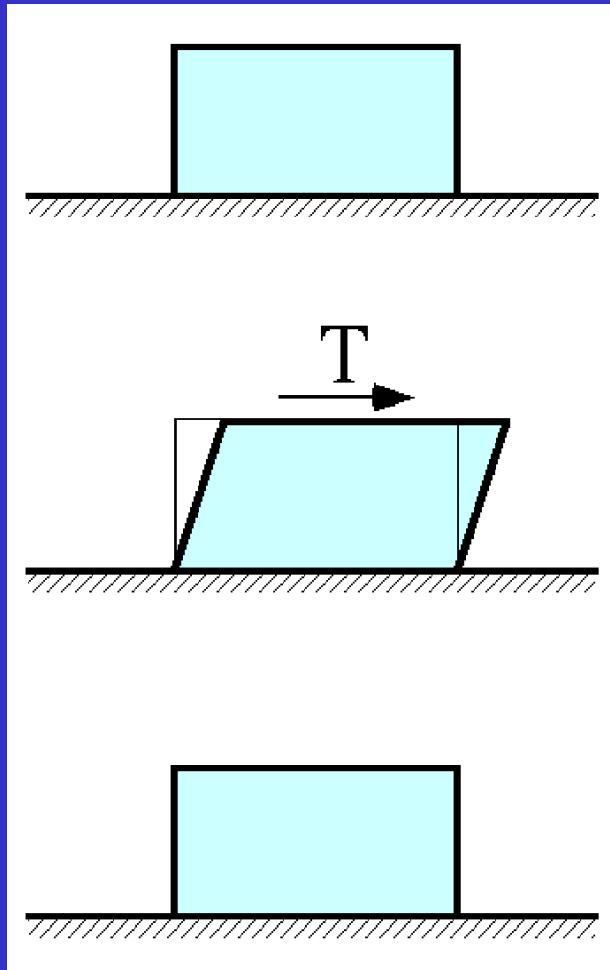
Definizione di fluido

Nozione intuitiva di ‘fluido’: pressoché elementare

Chi ci prova?

Definizione rigorosa: esame del comportamento
della sostanza **in risposta ad un generico sistema**
di forze che la sollecita

Sostanza allo stato solido – Forza tangenziale T



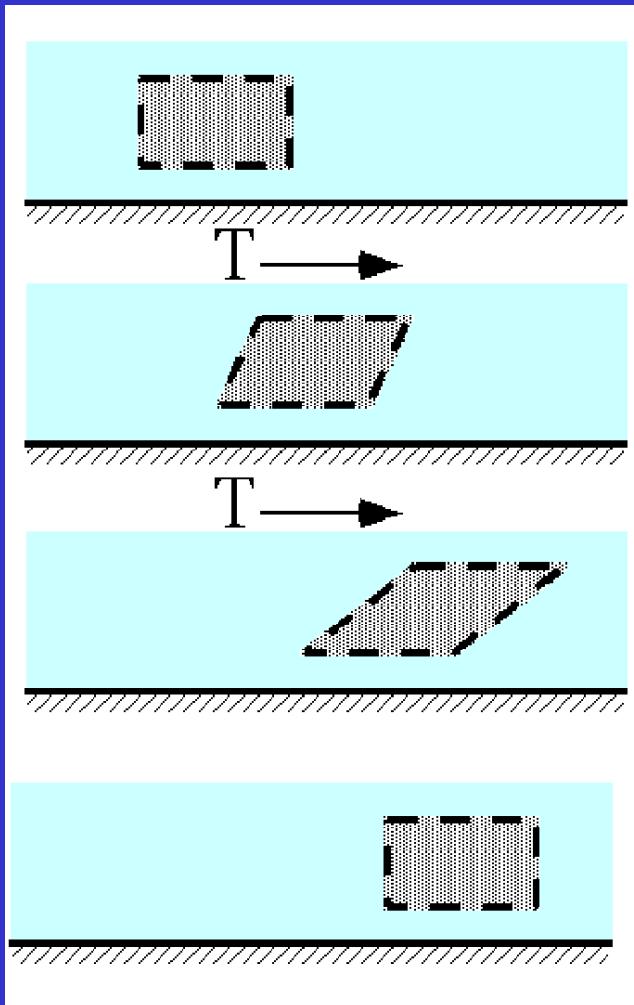
L'elemento solido è nella sua condizione indisturbata (ed equilibrata)

Sotto l'azione di T l'elemento si deforma e raggiunge una nuova, diversa, condizione di equilibrio.

Una volta che T viene rimosso la configurazione indisturbata originaria viene nuovamente raggiunta (hp comportamento elastico)

Sostanza allo stato fluido – Forza tangenziale T

L'elemento fluido è nella sua condizione (e posizione!) indisturbata di equilibrio.



Sotto l'azione di T , il fluido si deforma indefinitamente e comincia a muoversi (a fluire).

La deformazione e il movimento continuano finché dura l'applicazione di T .

Una volta che T viene rimossa il fluido cessa di muoversi (a meno dell'inerzia) e recupera la sua originaria configurazione indisturbata MA in una posizione differente

**Deformazione continua di una sostanza fluida:
strettamente legata alla natura dello stato di
aggregazione delle molecole costituenti.**

È consentito il reciproco scorrimento.

- **Liquidi:** mantengono pressoché costante, pur nel reciproco scorrimento, la distanza tra le molecole.
- **Gas:** le molecole possono in generale reciprocamente distanziarsi in qualsivoglia modo.

ATTENZIONE
usualmente, ‘ci si dimentica’ della natura
molecolare
si assume che il fluido sia un continuo.



Grandezze fisiche caratteristiche:
riguardate e definite come
funzioni continue dei punti dello spazio
occupato dal fluido.

δV

Volume elementare di fluido

δm

Massa del volume fluido

δG

Peso del volume fluido



Densità

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V} \quad \text{kg/m}^3$$

Peso specifico

$$\gamma = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta G}{\delta V} \quad \text{N/m}^3$$



$$\rho = \gamma / g$$

g acc. di gravità (9.81 m/s²)

Fluido *omogeneo*: grandezze fisiche caratteristiche indipendenti dalla posizione.

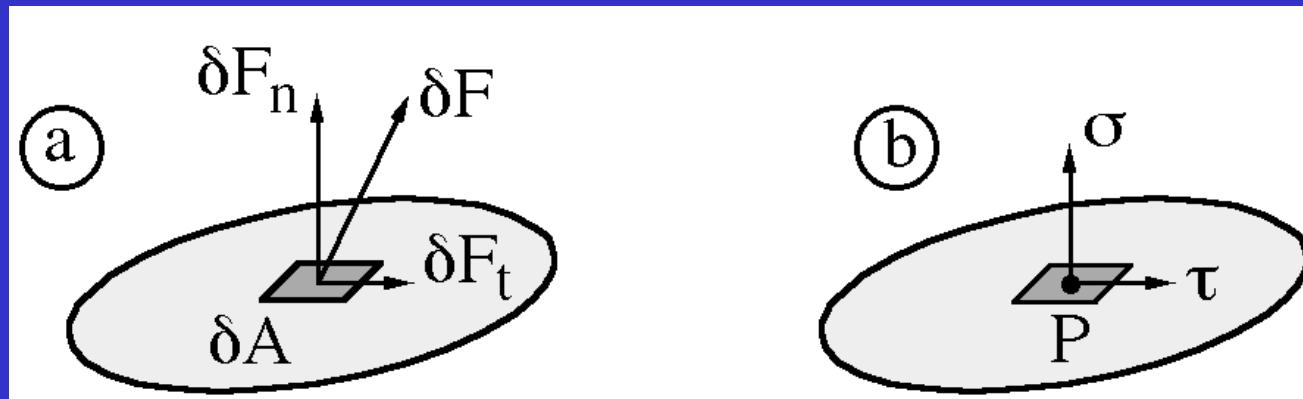
Fluido *isotropo*: grandezze fisiche caratteristiche indipendenti dalla direzione.

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_s = (1.05 \div 1.06) \rho_{H_2O}$$

$$\gamma_{H_2O} = 9810 \text{ N/m}^3$$

Stato di tensione in un fluido



$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A}$$

*Normal stress σ at point P
lying on the surface δA with normal n*

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A}$$

*Tangential (or shear) stress τ
at point P lying on the surface δA with normal n*

L'insieme di sforzo normale e sforzo tangenziale costituisce lo *stato di tensione nel punto P*, appartenente alla superficie δA di normale \vec{n} .

Lo stato di tensione dunque rappresenta la *sollecitazione trasmessa attraverso la superficie*, con cui il punto P può essere confuso, *da una parte all'altra del campo fluido* al quale la superficie stessa appartiene.

In generale, la *superficie* può anche essere *di separazione* tra due fluidi (acqua-atmosfera), ovvero *di contatto* tra il fluido e una superficie solida (superficie interna di un vaso sanguigno).

→ Per convenzione, si assume come *positivo*, per lo sforzo normale, il verso di compressione.

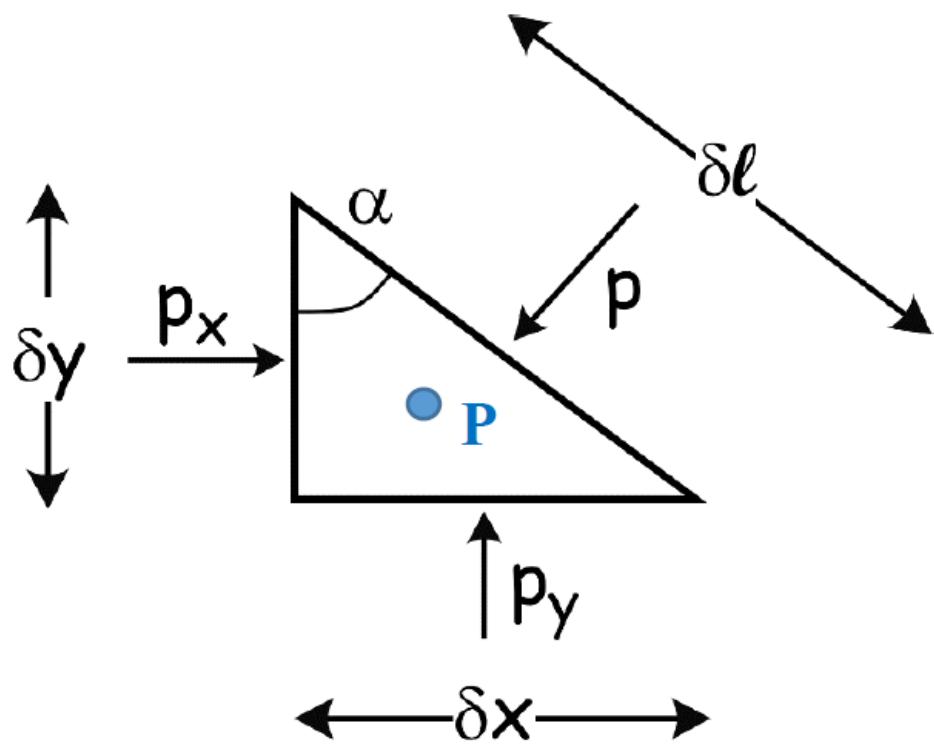
Sforzo normale positivo: denominato *pressione* indicato con p

Principio di Pascal: in un fluido soggetto a soli sforzi di pressione (fluido perfetto ovvero fluidi in quiete) la pressione si mantiene inalterata in ciascuna direzione.

Principio di Pascal

In un fluido perfetto e in un qualsiasi fluido purché in quiete
(i.e. nelle condizioni in cui lo stato di tensione è ridotto alla sola
 p , poiché $\tau=0$ sempre e ovunque)
gli sforzi si mantengono inalterati in ogni direzione

Dimostrazione



Considero una porzione elementare di fluido; per semplicità di dimostrazione assumo che tale porzione sia piana (2D e non 3D; la dimostrazione può comunque essere fatta anche per 3D), di lati δx , δy e δl . Le direzioni x , y e l di figura sono direzioni del tutto generiche dello spazio. Possono pensarsi come le tracce di tre generici piani passanti per il punto P con cui l'elemento di figura può essere confuso. Le notazioni sono riportate in figura.

Immaginiamo che su ciascuna faccia dell'elemento agisca una pressione diversa dalle altre (vedi notazioni). Osserviamo che non siamo interessati a quale sia il sistema di forze che produce dette pressioni, il sistema è del tutto generico.

Equilibrio alla traslazione lungo x ed y (l'elemento DEVE essere in equilibrio! In particolare, in equilibrio alla traslazione lungo la generica direzione):

$$p_x \delta y - p \delta l \cos \alpha = 0$$

$$p_y \delta x - p \delta l \sin \alpha = 0$$

Osservazione: le forze di volume sono proporzionali a $\delta x \delta y$ (e non a δx , o δy , o δl 'solamente') → di un ordine di grandezza più piccole e dunque trascurabili rispetto alle forze di superficie

Vale poi, per la geometria del problema:

$$\delta x = \delta l \sin \alpha$$

$$\delta y = \delta l \cos \alpha$$

Sostituendo:

$$p_x - p = 0$$

$$p_y - p = 0$$



$$p_x = p_y = p$$

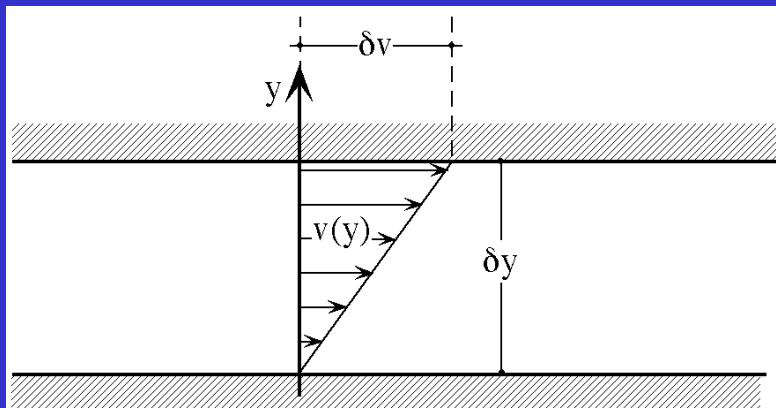
CVD

Risposta reologica

Risposta reologica: risposta fluido \leftrightarrow sforzi tangenziali

Specificare la risposta reologica di un fluido equivale quindi a definire la relazione

$$\tau = f(\text{«movimento fluido»})$$



$$\tau = f \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

velocità di
deformazione

*variazione della velocità nella direzione
normale a quella della velocità stessa*

Risposta reologica

Esperimento di Newton

Dispositivo sperimentale:

Due piastre piane parallele

Piastra inferiore fissa

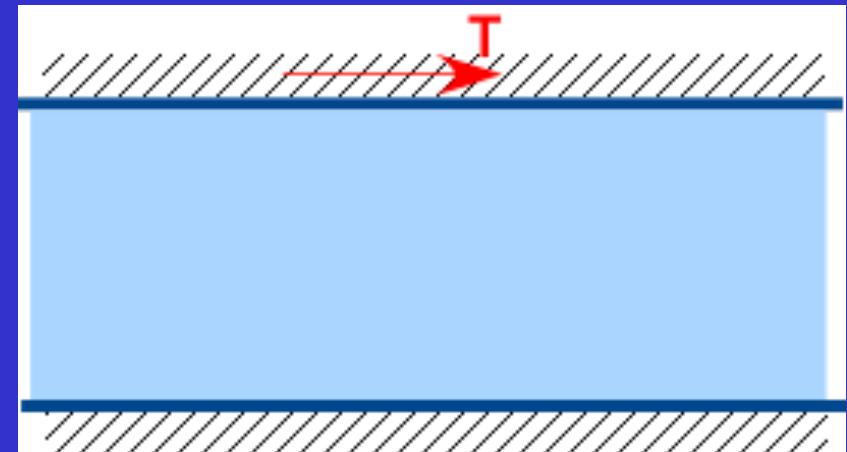
Piastra superiore mobile

Intercapedine tra le piastre riempita di acqua-olio-benzina-plasma....

Forza T applicata alla piastra superiore

→ La piastra si muove → si mette in movimento anche il fluido

COME?



Risposta reologica

Esperimento di Newton

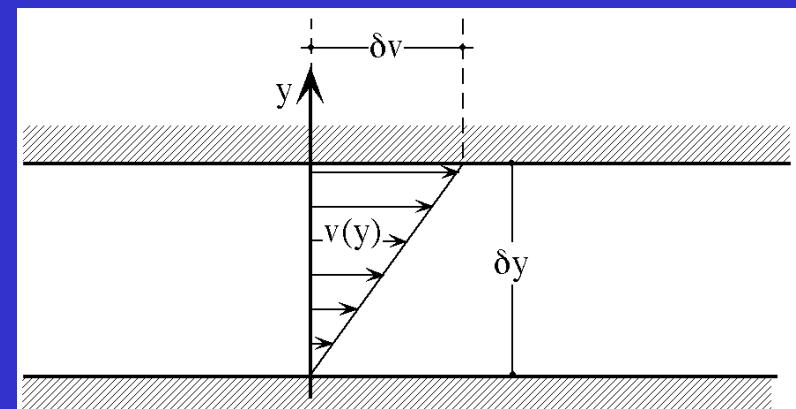
Misura della velocità:

Velocità fluido aderente alla piastra superiore=velocità piastra

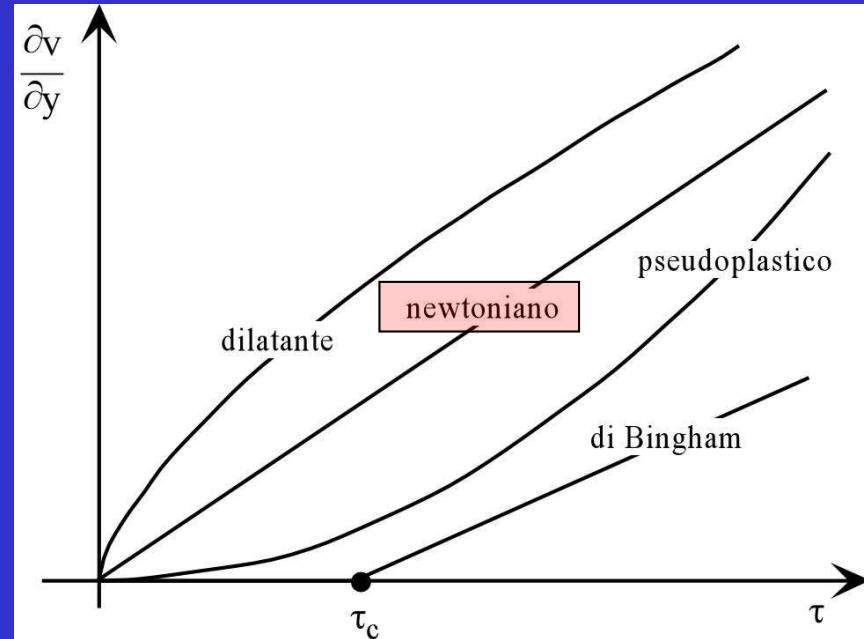
Velocità strati fluidi inferiori: linearmente decrescente fino alla velocità nulla (!) del fluido adiacente alla piastra inferiore

Misura sforzo tangenziale:

$$\tau \propto \frac{\delta v}{\delta y}$$



Fluidi newtoniani



$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

viscosità dinamica

Ns/m²=kg/ms

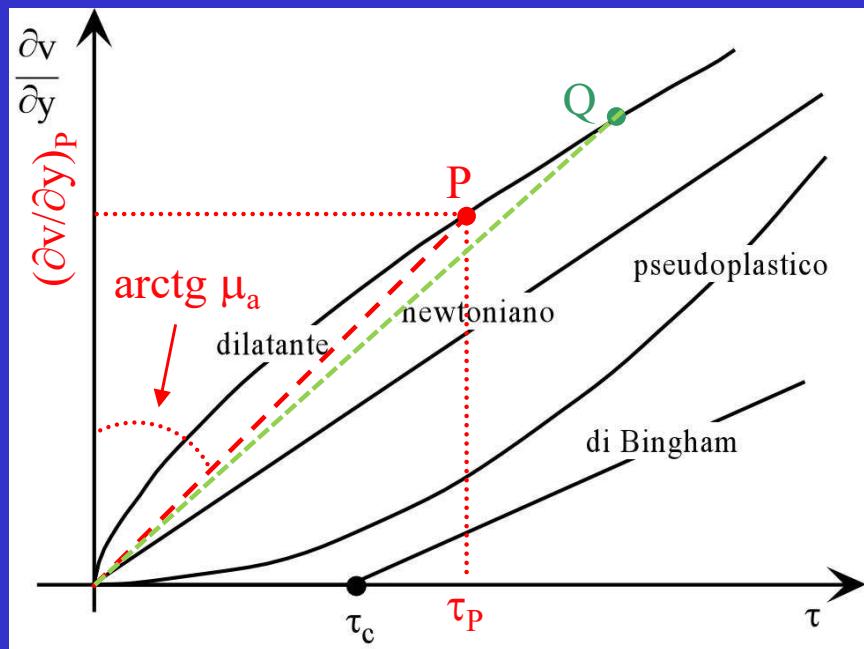
Newtoniani: acqua, soluzioni saline, plasma.

$$\mu_{H_2O} = 10^{-3} \text{ kg/ms} = 10^{-2} \text{ Poise} = 1 \text{ cP}$$

Il sangue non è newtoniano ma è spesso riguardato come tale

$$\mu_s = 4\mu_{H_2O}$$

Fluidi non newtoniani



Fluidi **dilatanti**

$$\tau = k \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^n$$

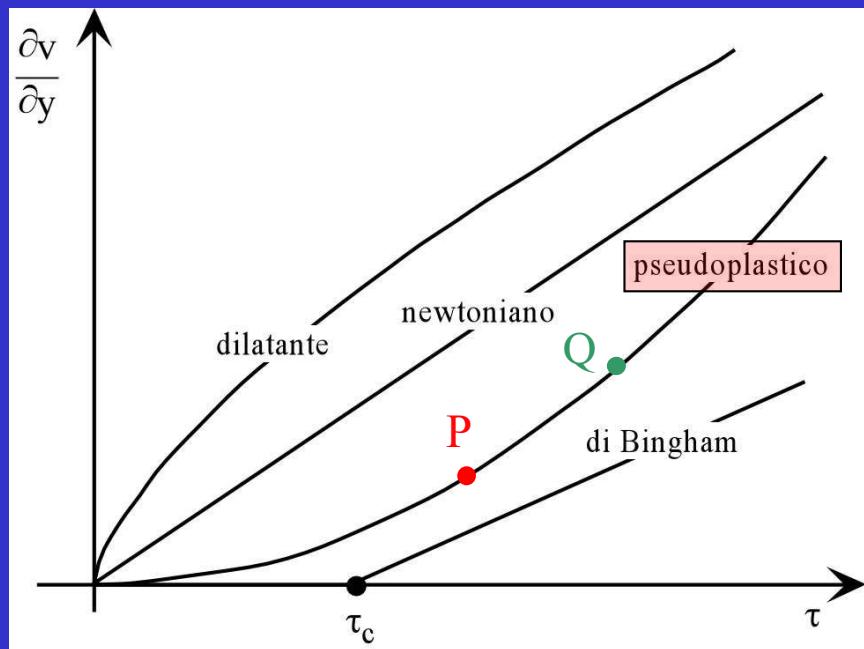
$$\begin{aligned} k &> 0 \\ n &> 1 \end{aligned}$$

$n > 1 \rightarrow$ la resistenza allo scorrimento aumenta all'aumentare della sollecitazione tangenziale

$$\tau_P = \mu_a (\partial v / \partial y)_P$$

$$(\mu_a)_Q > (\mu_a)_P$$

Fluidi non newtoniani



Fluidi **pseudoplastici**

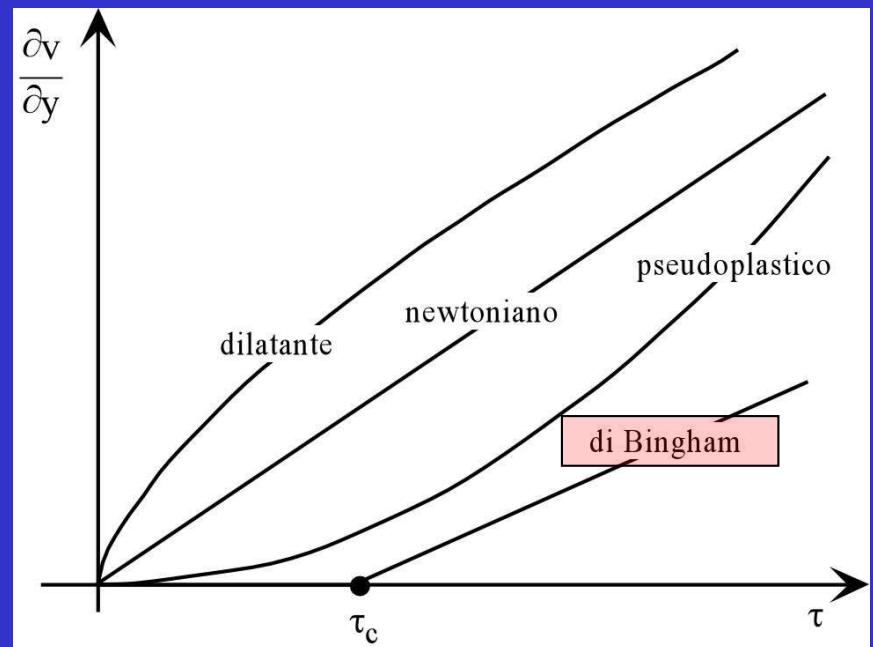
$$\tau = k \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^n$$

$$\begin{aligned} k > 0 \\ n < 1 \end{aligned}$$

$n < 1$ → la resistenza allo scorrimento diminuisce all'aumentare della sollecitazione tangenziale

$$(\mu_a)_Q < (\mu_a)_P$$

Fluidi non newtoniani



Fluidi **di Bingham**

$$\tau = \tau_c + \mu' \frac{\partial v}{\partial y}$$

Alcune definizioni

Fluidi newtoniani e non newtoniani: *fluidi reali*. La loro viscosità è non nulla → se in movimento, sono soggetti a sforzi tangenziali (oltre che di pressione).

Fluido perfetto: la sua viscosità è nulla → non è mai soggetto a sforzi tangenziali, ma solo a sforzi di pressione.

Alcune definizioni

ATTENZIONE: un fluido reale fermo si comporta come se fosse perfetto ($\tau=0$). (slide 8)

viscosità cinematica

$$\nu = \mu / \rho \quad \text{m}^2/\text{s}$$

$$\nu_{\text{H}_2\text{O}} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Comprimibilità dei liquidi

Vedi dispense

Noi tratteremo sempre e solo problemi di fluidi incomprimibili

Fluido incomprimibile: rigorosamente, è un fluido che non altera la propria densità o il proprio volume anche se sottoposto a variazioni sensibili di pressione.

Nell'uso comune, si dice incomprimibile un fluido per il quale ρ (ovvero γ) è costante nello spazio e nel tempo.

Reologia del sangue: accenni

Sangue: plasma + particelle solide

55%

45%

in volume



soluzione colloidale prevalentemente acquosa di particelle perlopiù proteiche

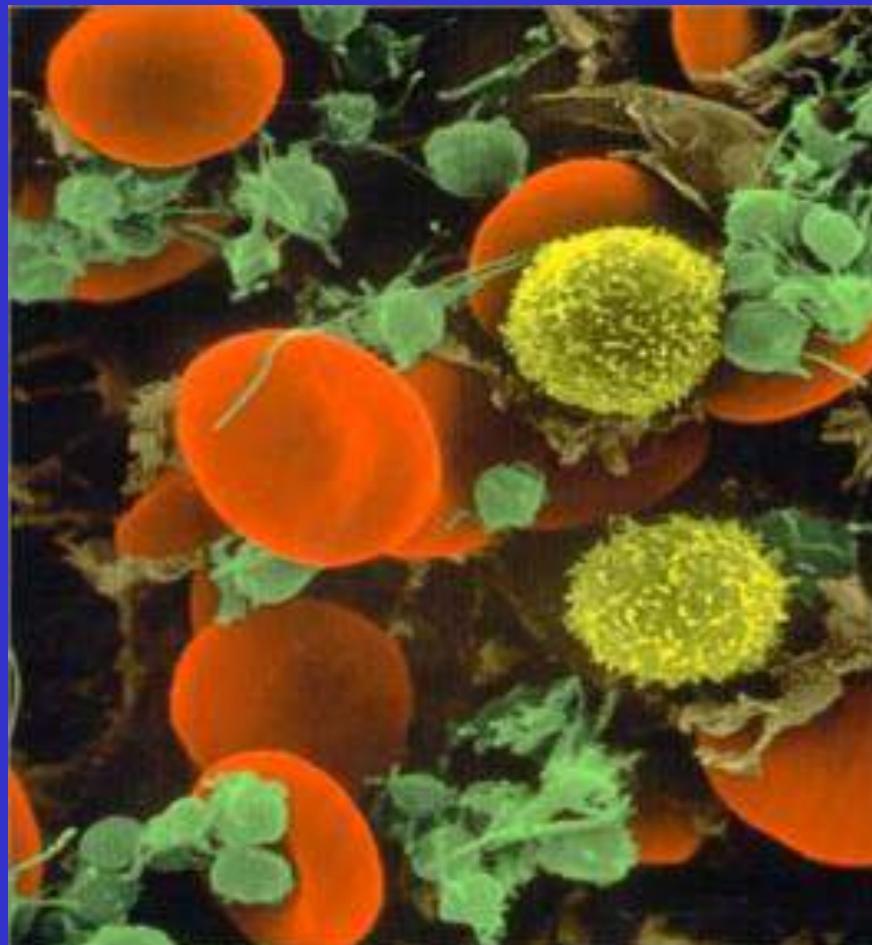
omogeneo, incomprimibile e newtoniano

plasma umano:

$$\mu_{pl} = (1.2 \div 1.6) \mu_{H_2O} \quad \rho_{pl} = (1.025 \div 1.035) \rho_{H_2O}$$

Reologia del sangue: accenni

Sangue: plasma + particelle solide



95 % **globuli rossi:**

dischi biconcavi $\phi = \text{circa } 8 \mu\text{m}$
 $s = 1 \mu\text{m}$ al centro $s = 2-3 \mu\text{m}$ al bordo

globuli bianchi

‘sfere’ $\phi = \text{circa } 10 \mu\text{m}$ circa
1-2 gb ogni 1000 gr

piastrine

‘ovali’ $\phi = \text{circa } 2-4 \mu\text{m}$
80-100 ogni 1000 gr

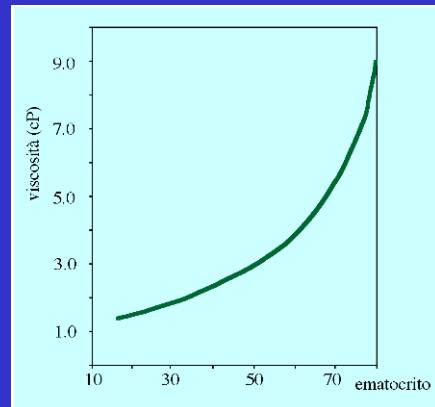
Reologia del sangue: accenni

Il legame sforzi-velocità di deformazione del sangue intero dipende da numerosi fattori.

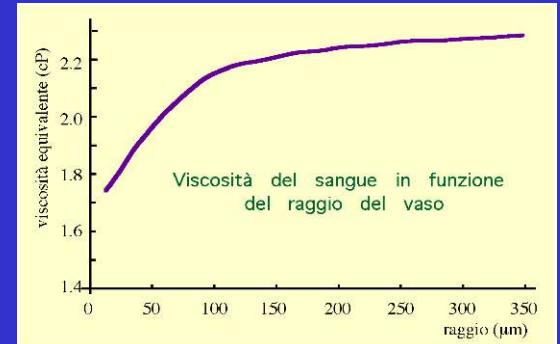
- Velocità di deformazione:

$\partial v / \partial y > 60 \div 100 \text{ s}^{-1}$ (grandi arterie) \rightarrow fluido newtoniano

- Ematocrito:



- ϕ vasi:



E quando è non-newtoniano? Bingham? Power Law (pseudoplastico)? Tixotropico (durata della sollecitazione)?

③

IDROSTATICHE - Fluidi in condizioni di quiete

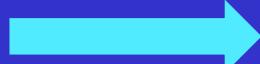
Obiettivi:

- a) determinare il comportamento dello stato di tensione nel campo fluido
- b) determinare la forza che il campo fluido trasmette a una superficie solida a contatto

In un fluido in quiete: sforzo tangenziale nullo!



stato di tensione in un punto = pressione



- a) andamento della pressione nel fluido
- b) spinta di pressione

IDROSTATICA

Equilibrio di un fluido pesante in quiete

soggetto alla gravità

sola pressione



Un volume fluido elementare è soggetto a:

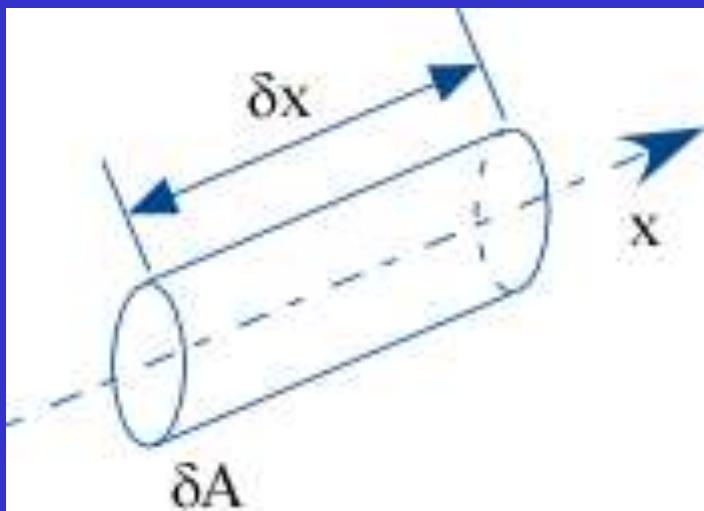
- **forza peso** δG (è una forza di volume: volume elemento, peso specifico del fluido)
 - **forza di pressione** δF_p (è una forza di superficie: superficie elemento e stato di pressione agente sulla superficie stessa)

Volume elementare in equilibrio



somma componenti forze agenti
(vettoriale & lungo una qualsiasi direzione)
deve essere nulla $\delta F_p + \delta G = 0$

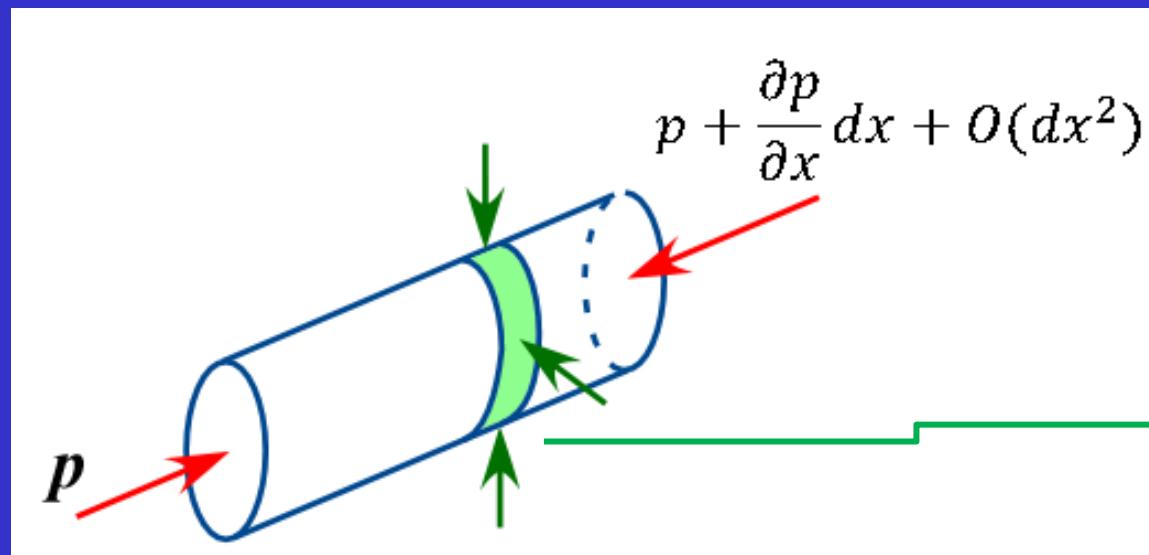
*Obiettivo: scrivere l'equilibrio lungo
una x generica*



Volume elementare
area trasversale δA
lunghezza δx

con x: direzione generica

- Forza di pressione in direzione x

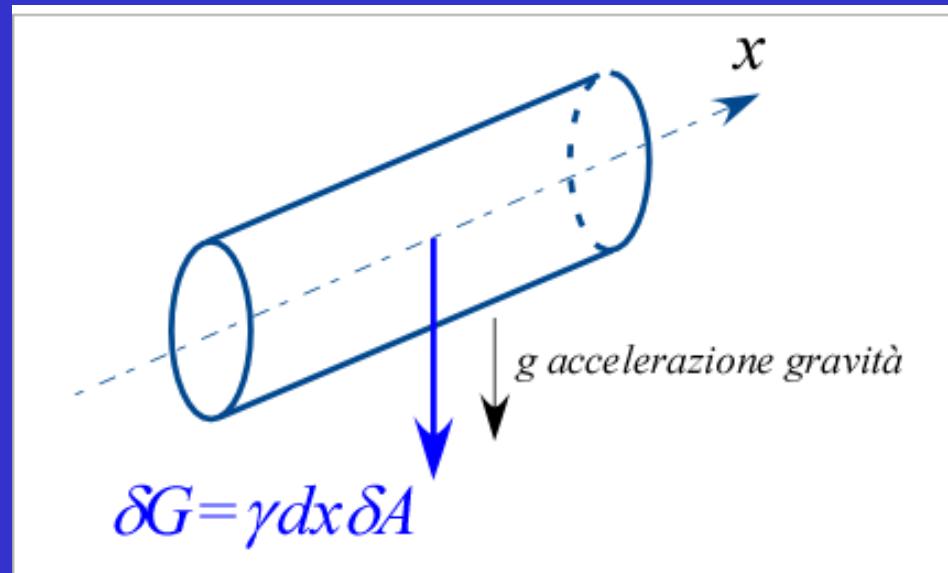


termine trascurabile

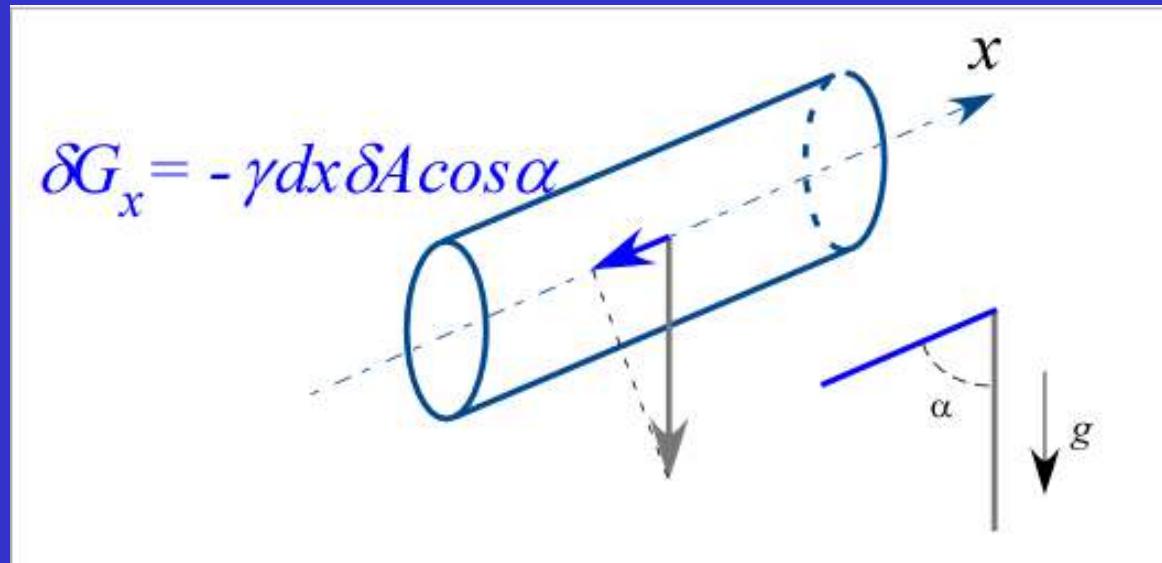
La pressione sulla
superficie laterale NON
contribuisce lungo x

$$\begin{aligned}\longrightarrow \quad \delta F_{p,x} &= p \delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \delta A \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x} dx \delta A\end{aligned}$$

- Forza peso



→ - contributo in direzione x



Lungo x l'equilibrio allora si scrive:

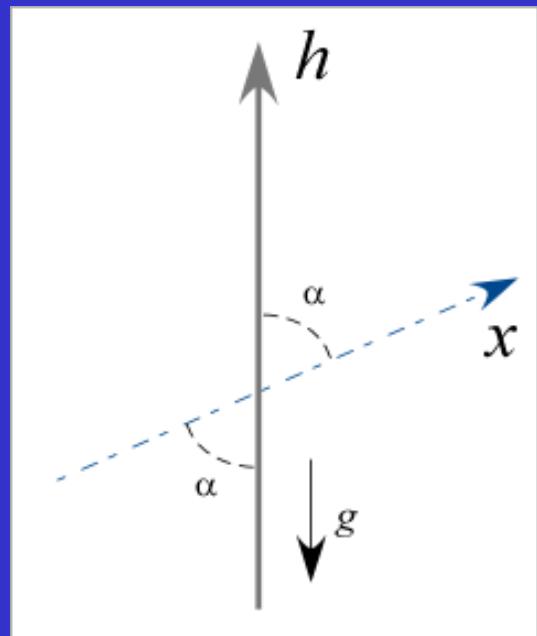
$$\delta F_{p,x} + \delta G_x = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx \delta A - \gamma dx \delta A \cos \alpha = 0$$

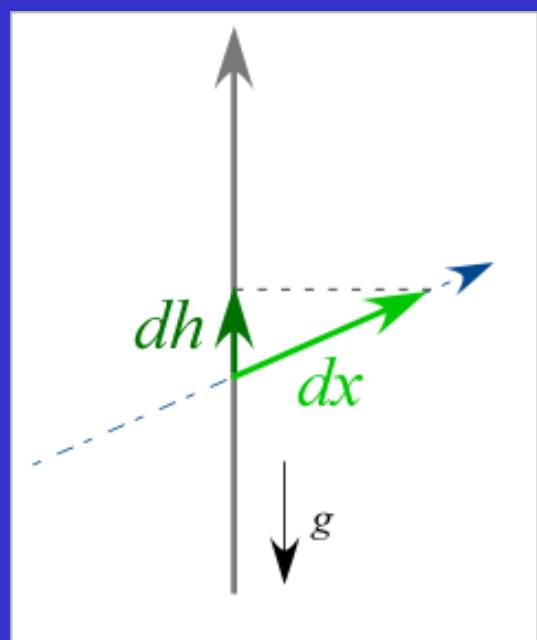
$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \cos \alpha = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \cos \alpha = 0}$$

Introduciamo ora una nuova variabile indipendente:



h : quota geodetica = asse della verticale fisica (i.e. parallelo a g) positivo verso l'alto per assunzione.



Vale allora:
 $dx \cdot \cos\alpha = dh$



$$\cos\alpha = \frac{dh}{dx}$$

Riprendiamo la condizione di equilibrio:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \cos \alpha = 0$$

e riscriviamola come:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

I medesimi ragionamenti possiamo ripeterli per gli assi (y,z) con cui completiamo la terna cartesiana (del tutto generica) di riferimento (provare!) ↓

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

Scrivendo insieme le tre relazioni scalari dell'equilibrio:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

e osserviamo che siamo passati dallo scrivere l'equilibrio del volumetto a relazioni che esprimono la condizione di equilibrio nel generico punto P in cui il volumetto fluido è centrato.

Possiamo perciò la relazione di equilibrio nel punto come

$$dp + \gamma dh = 0$$

che è evidentemente valida per ogni punto P del fluido

Nella relazione suddetta si ha dunque :

p = pressione nel punto

h = quota geodetica del punto



Se fluido omogeneo e incompressibile:

$$dp + d(\gamma h) = 0$$

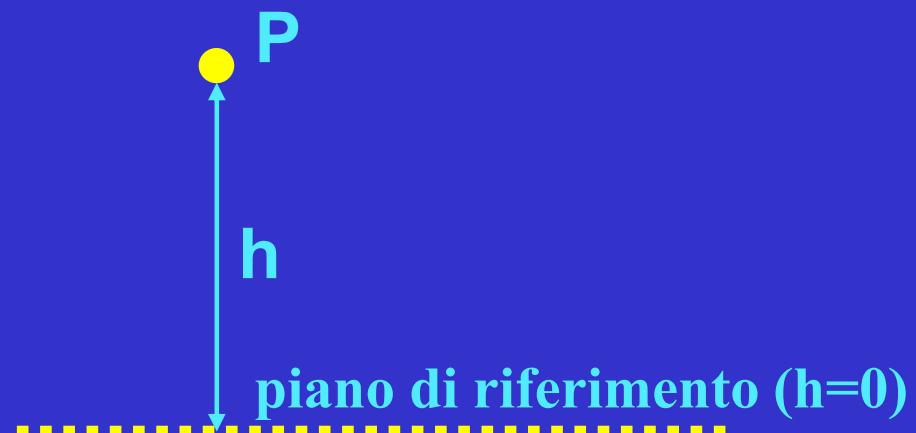


$$p + \gamma h = \text{cost}$$

valida per ogni punto P del fluido

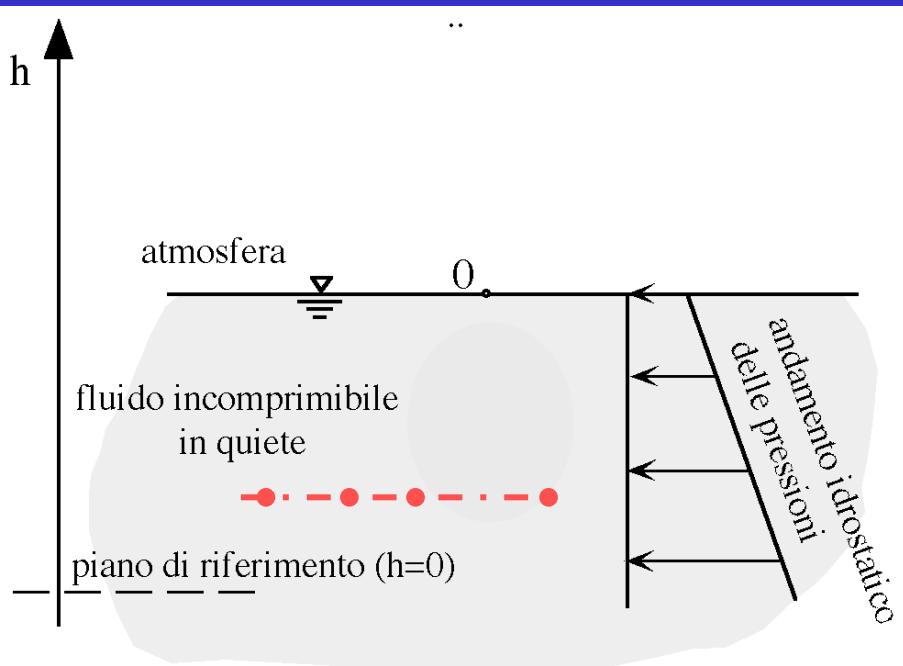
p=pressione nel punto

h=quota geodetica del punto



Equazione fondamentale dell'idrostatica

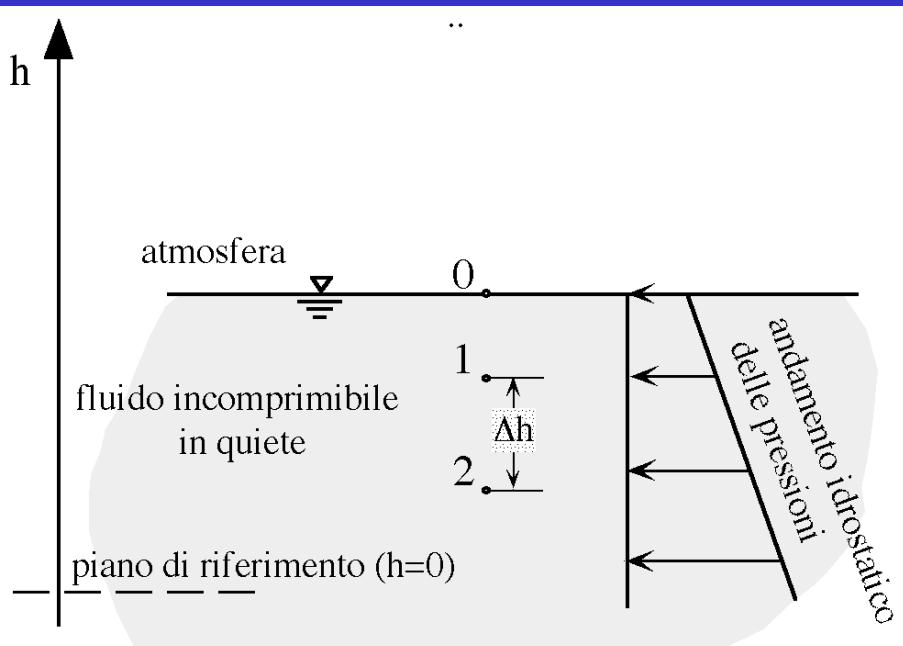
$$p + \gamma h = \text{cost}$$



- In un fluido pesante incompressibile in quiete p varia linearmente con h (*andamento idrostatico delle pressioni*)
- Punti appartenenti ad uno stesso campo fluido e ad una stessa superficie orizzontale (perciò con la medesima quota h) sono soggetti alla medesima pressione p .
Superficie Isobara.

Equazione fondamentale dell'idrostatica

$$p + \gamma h = \text{cost.}$$



- Conoscere la pressione in un punto di un fluido incompressibile in quiete equivale a conoscerla in tutti gli altri punti del medesimo fluido:

$$p_1 + \gamma h_1 = p_2 + \gamma h_2$$

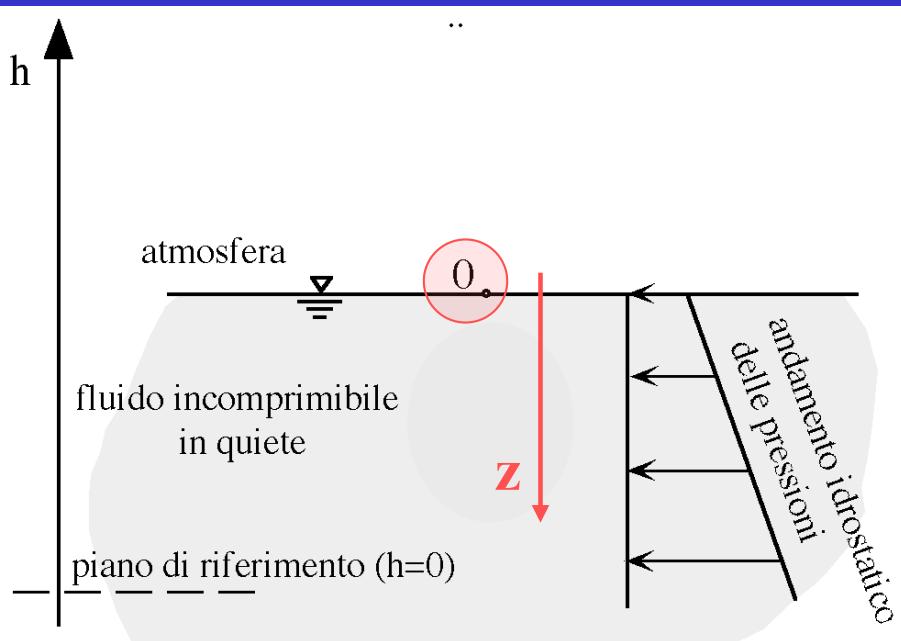
$$p_2 = p_1 + \gamma(h_1 - h_2) = p_1 + \gamma\Delta h_{1-2}$$



ATTENZIONE AL SEGNO DI Δh !!!

Equazione fondamentale dell'idrostatica

$$p + \gamma h = \text{cost.}$$



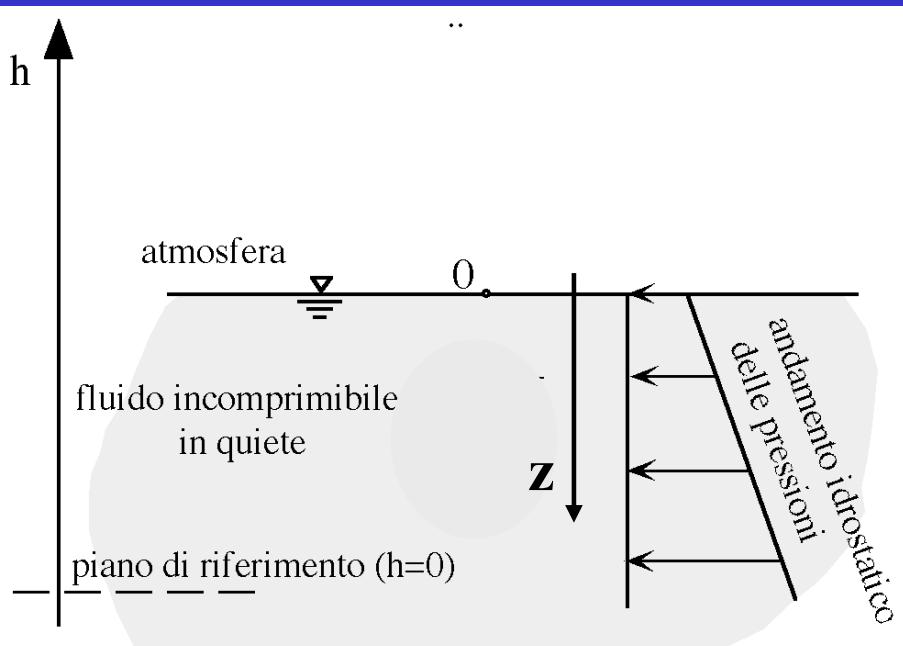
- Se il punto a pressione nota appartiene ad una *superficie libera* (di separazione tra il fluido e l'atmosfera) ed è perciò a pressione atmosferica (**punto 0**) la pressione di un generico punto interno al campo fluido risulta espressa dalla:

$$p = p_{\text{atm}} + \gamma z$$

dove z è la profondità del generico punto, misurata a partire dalla superficie libera

Equazione fondamentale dell'idrostatica

$$p + \gamma h = \cos t.$$



- La pressione p è la pressione assoluta. Si definisce pressione relativa la pressione .

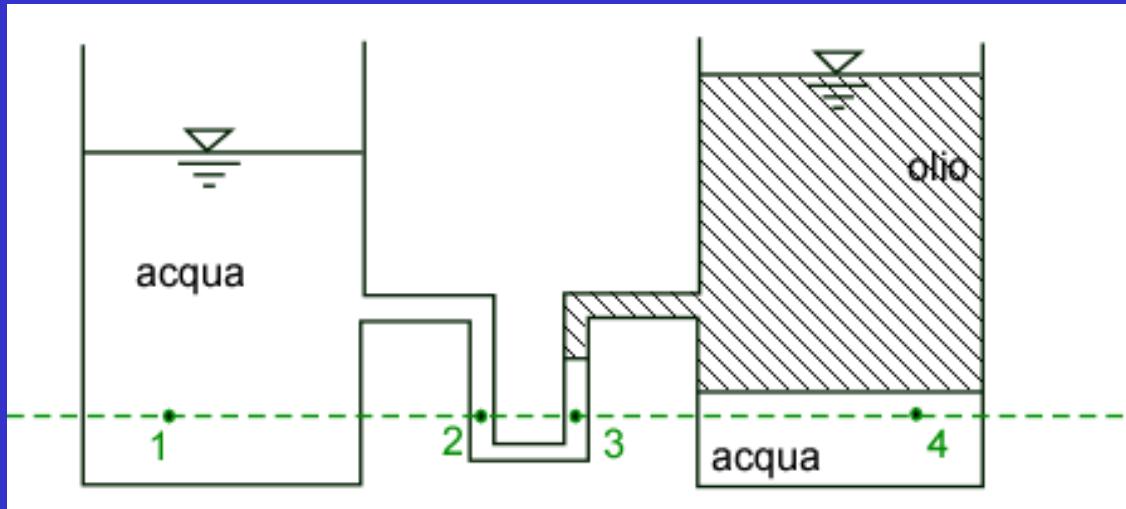
$$p_r = p - p_{atm}$$

- Si ha immediatamente che la pressione relativa in un punto è direttamente proporzionale alla profondità del punto rispetto alla superficie libera

$$p_r = \gamma z$$

**CONSIDEREREMO SEMPRE PRESSIONI RELATIVE,
SALVO DIVERSAMENTE SPECIFICATO**

appartenere al medesimo (campo) fluido = ?



I punti 1, 2 e 3 appartengono al medesimo (campo) fluido ‘acqua’
MA il punto 4 NON vi appartiene

poiché non esiste alcun percorso che colleghi il punto 1 (o 2 o 3) al punto 4

Perciò:

$$p_1 = p_2$$

e anche

$$p_2 = p_3$$

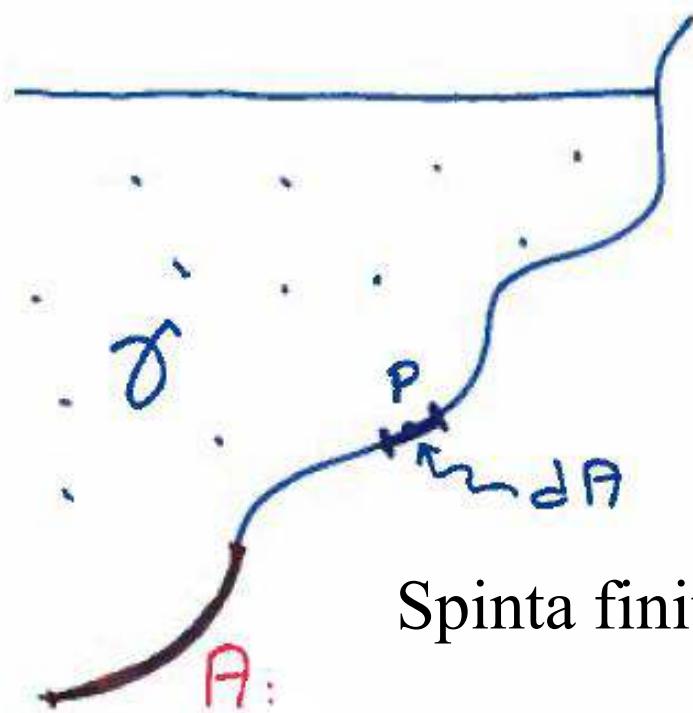
MA

$$p_1 = p_2 = p_3 \neq p_4$$

Non riesco a collegare da
nessuna parte le punti 4 con
gli altri punti; è un medesimo
campo fluido -

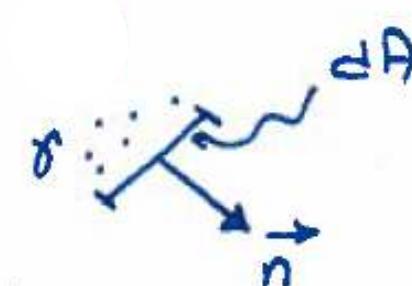
SPINTE IDROSTATICHE

Forza che un fluido in quiete trasmette a una superficie di contatto in virtù dello stato di pressione presente sui punti della superficie stessa



Spinta elementare o locale (sulla superficie elementare dA di normale \vec{n})

$$d\vec{S} = p \cdot \vec{n} dA$$



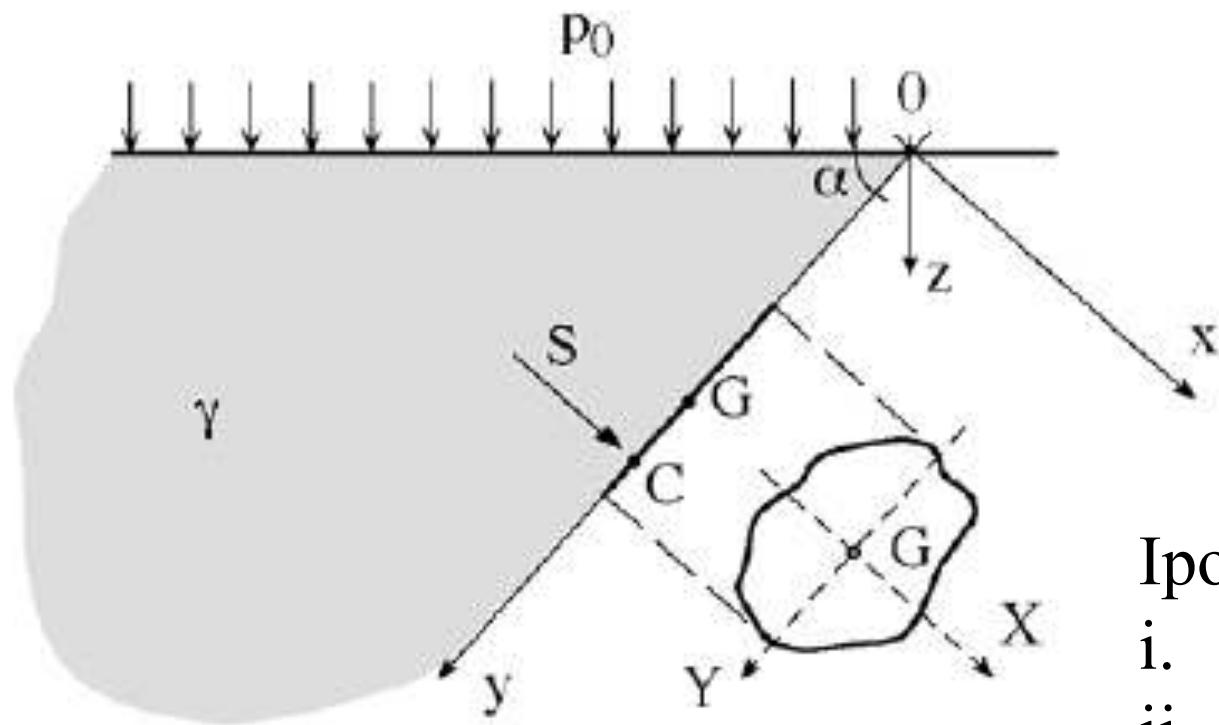
versore (unitario) \vec{n} positivo uscente

Spinta finita o globale (sulla superficie di area finita A)

$$\vec{S} = \int_A d\vec{S} = \int_A p \cdot \vec{n} dA$$

Le precedenti sono definizioni generali, i.e. valide indipendentemente dal tipo di superficie e di fluido

Spinte idrostatiche su superfici piane: teoria generale.



Ipotesi di lavoro:

- i. $p = p_0 + \gamma z$
- ii. la superficie A è piana

Si noti che l'ipotesi i) ci dice che il fluido è pesante, incomprimibile, in quiete

G è il baricentro di A

C è il centro di spinta, i.e. il punto di applicazione della spinta

Partiamo dalla definizione generale della spinta e applichiamo le ipotesi:

$$\vec{S} = \int_A \vec{p} \cdot \vec{n} dA$$

(per la planarità di A)

$$= \left(\int_A p dA \right) \cdot \vec{n}$$



- Il modulo della spinta è dato dall'integrale
- La spinta ha la direzione di \vec{n}

Per il modulo dunque:

$$\begin{aligned} \int_A p dA &= \int_A (p_0 + \gamma z) dA = \int_A p_0 dA + \int_A \gamma z dA \\ &= p_0 A + \gamma z_G A = \boxed{p_G A} \end{aligned}$$

avendo riconosciuto che $\int_A z dA = z_G A$, con z_G =profondità del baricentro

Possiamo perciò scrivere:

$$\vec{S} = p_G A \cdot \vec{n}$$

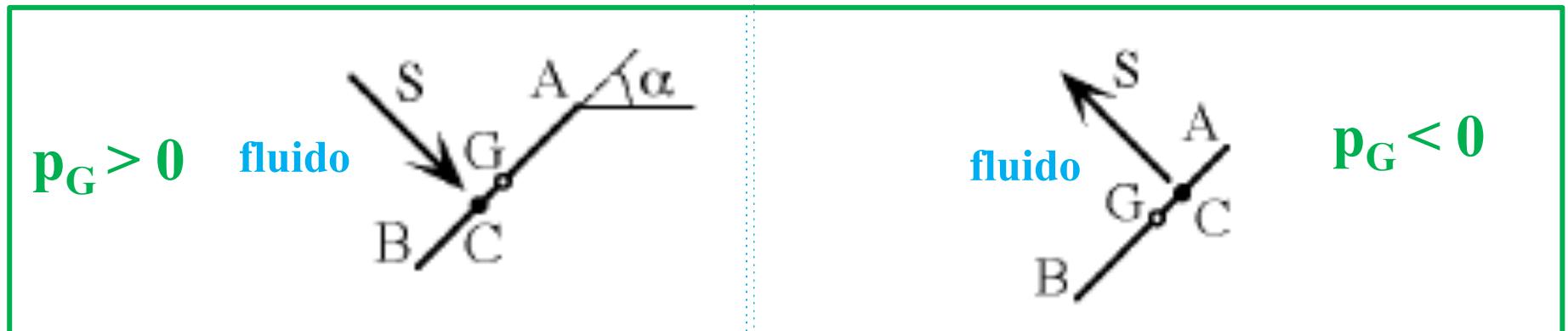
E il verso di S ?

Dipende dal segno della pressione (relativa!) baricentrica p_G

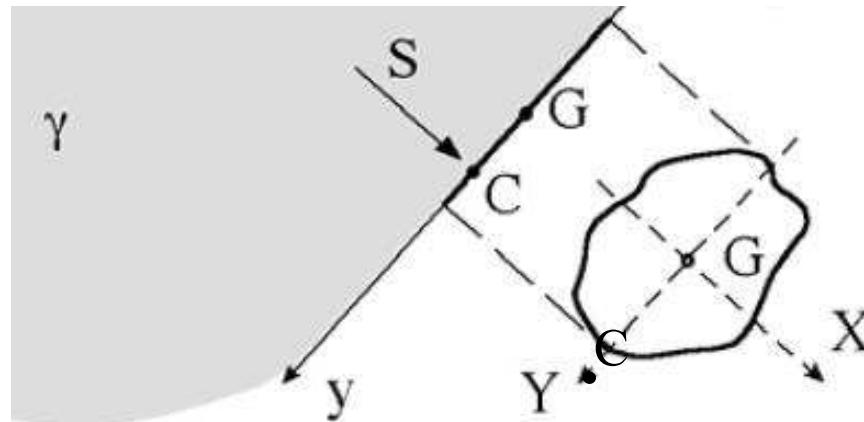
In particolare:

$p_G > 0$ la spinta va dal fluido verso la superficie (il fluido spinge su A)

$p_G < 0$ la spinta va dalla superficie verso il fluido ((il fluido «aspira» la superficie))



Centro di Spinta C



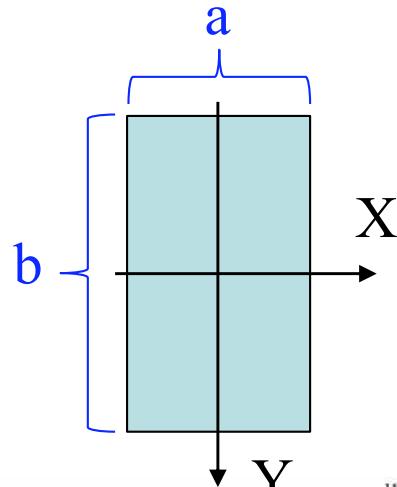
Ci interessa (capiremo perché negli esercizi) determinare la posizione di C lungo l'asse y.

In proposito, si può dimostrare che l'imposizione dell'equilibrio di A alla rotazione attorno all'asse X si traduce nella relazione

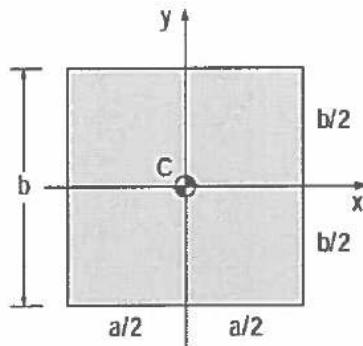
$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_x \sin \alpha}{S} = \frac{\gamma I_x \sin \alpha}{p_G A}$$

con $I_x = \int_A Y^2 dA$ momento di inerzia di A rispetto all'asse X

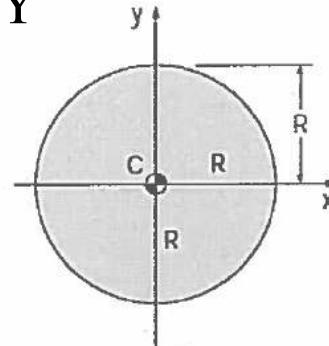
I_x dipende solo da forma e dimensioni di A, ad esempio per superficie rettangolare si ha



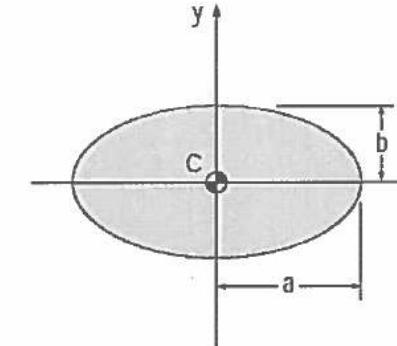
$$I_x = \frac{1}{12} ab^3 \text{ m}^4$$



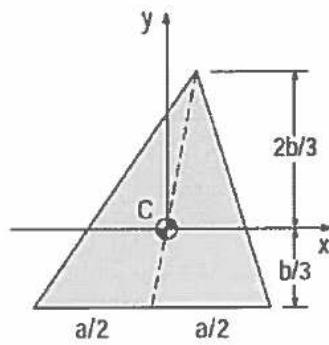
$A = ab, I_{xx,C} = ab^3/12$
(a) Rectangle



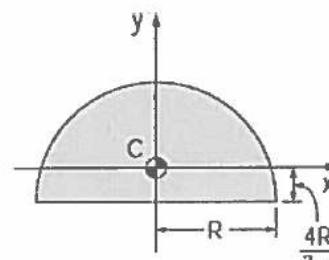
$A = \pi R^2, I_{xx,C} = \pi R^4/4$
(b) Circle



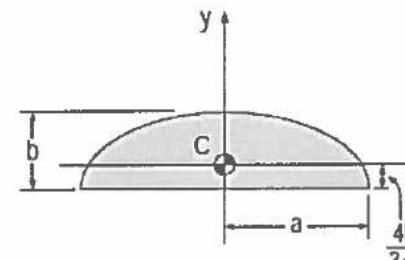
$A = \pi ab, I_{xx,C} = \pi ab^3/4$
(c) Ellipse



$A = ab/2, I_{xx,C} = ab^3/36$
(d) Triangle



$A = \pi R^2/2, I_{xx,C} = 0.109757R^4$
(e) Semicircle



$A = \pi ab/2, I_{xx,C} = 0.109757ab^3$
(f) Semiellipse

Osserviamo ora che

$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_x \sin \alpha}{p_G A}$$

ha il medesimo segno di p_G !

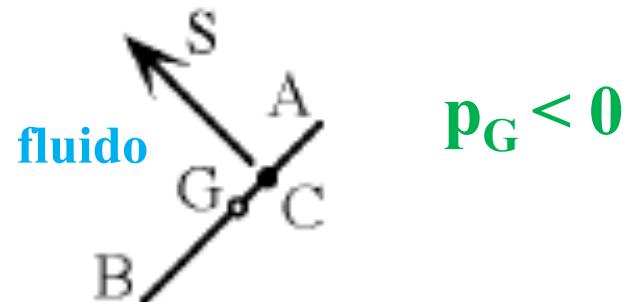
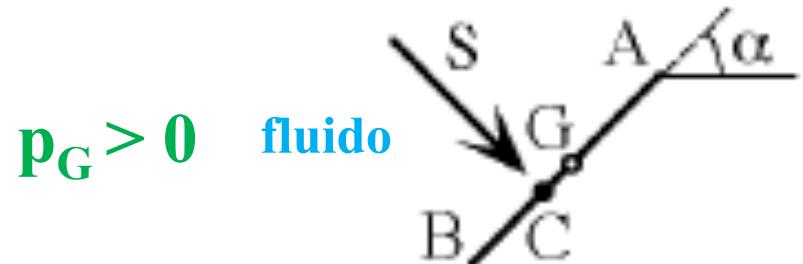


$$p_G > 0 \longrightarrow y_C - y_G > 0$$

Il centro di spinta C è collocato «più in profondità» del baricentro G

$$p_G < 0 \longrightarrow y_C - y_G > 0$$

Il centro di spinta C è collocato «meno in profondità» del baricentro G



SPINTE IDROSTATICHE SU SUPERFICI CURVE

$$\vec{S} = \int_A d\vec{S} = \int_A p \cdot \vec{n} dA$$

La definizione di spinta idrostatica è sempre la stessa
MA
non possiamo dir nulla circa la direzione della spinta,
né tantomeno quantificarne il modulo, perché il
versore **n** dipende da **dA!!!**



Dobbiamo sviluppare un metodo ad-hoc, che fornisca uno strumento operativo
semplice da applicare:

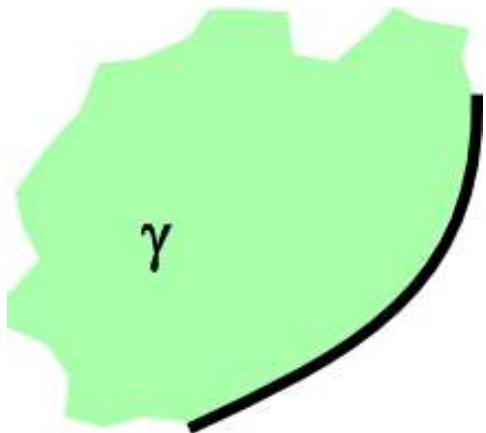
METODO DELL'EQUILIBRIO GLOBALE (MEG)

Riduce il calcolo di **S** al calcolo di un volume e di una (o più) spinta idrostatica
su superficie piana!

NB: vale la ‘solita’ ipotesi di fluido incompressibile pesante
in quiete (i.e. $p=p_0+\gamma z$)

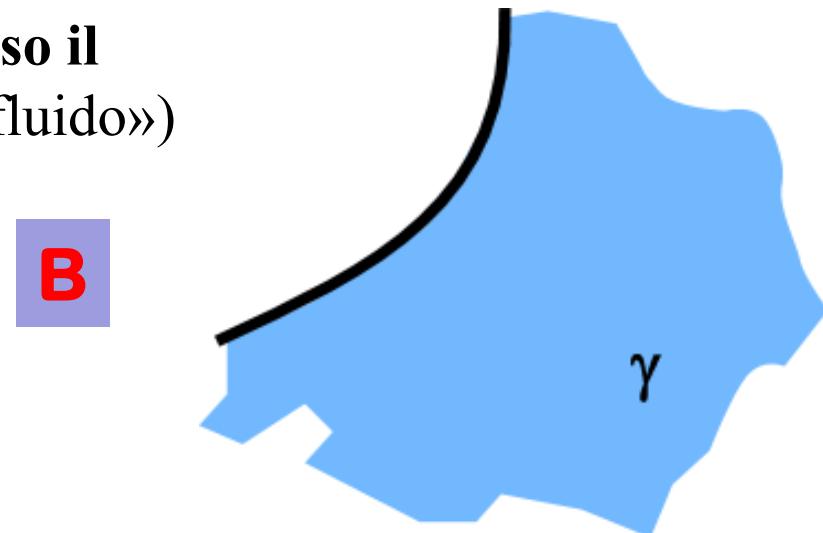
Si considerano **due diverse ‘configurazioni’ di superficie curva**, e si determina per ciascuna una specifica formulazione del MEG

(2)

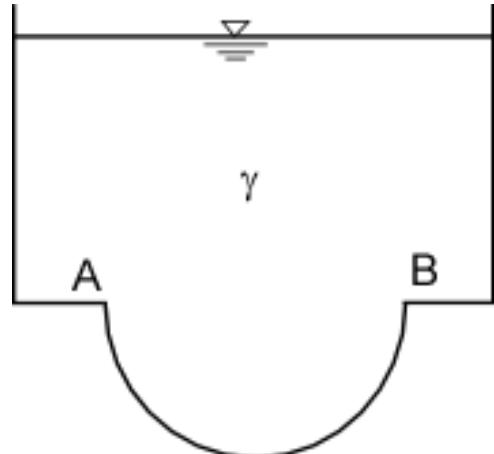


Superficie con **concavità verso il fluido**
«superficie riempita di fluido»)

Superficie con **convessità verso il fluido** («superficie che entra nel fluido»)



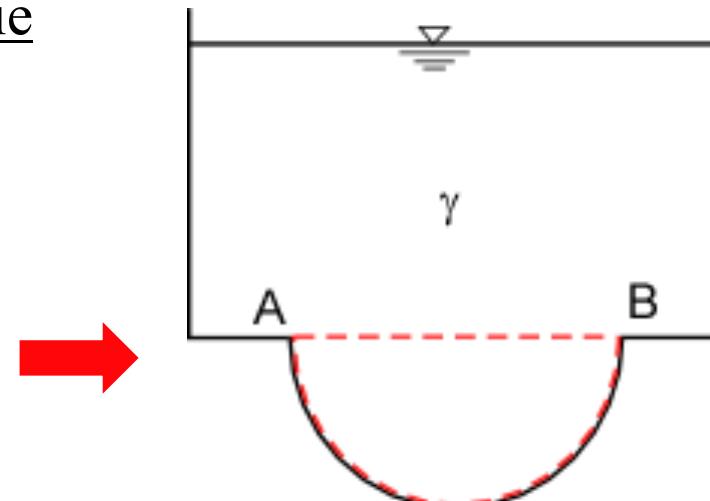
Superficie con concavità verso il fluido («superficie riempita di fluido»)



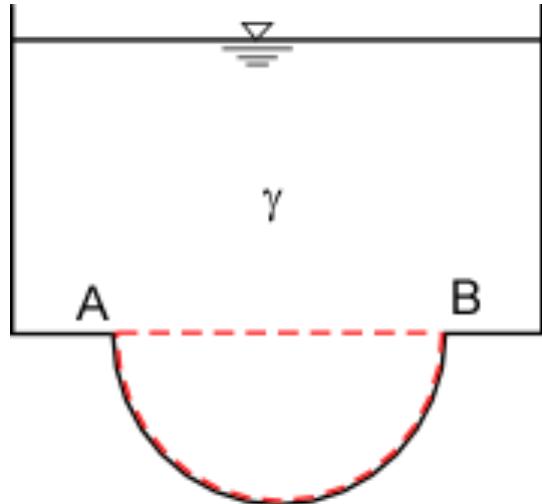
L'idea di base del MEG, in questo caso, è di **ISOLARE UN OPPORTUNO VOLUME FLUIDO** e **APPLICARE la CONDIZIONE DI EQUILIBRIO** delle forze che sollecitano il volume stesso.

Il volume da isolare è scelto in modo che la superficie che lo racchiude sia composta di:

l'intera superficie curva su cui si deve calcolare la spinta idrostatica
+
una (o più) superficie piana



Superficie con concavità verso il fluido («superficie riempita di fluido»)



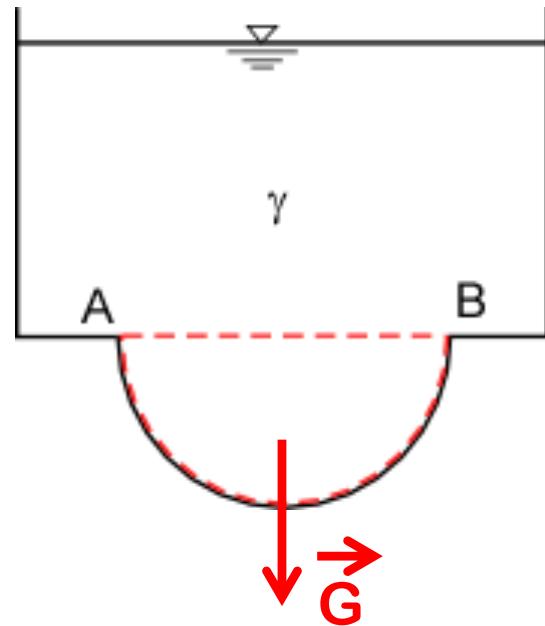
Forze che agiscono sul volume fluido isolato (in quiete):

- **Forza/e di volume: peso** \vec{G}
- **Forza/e di superficie: spinta di pressione attraverso l'intera superficie di contorno** \vec{P}

Condizione di equilibrio:

$$\vec{G} + \vec{P} = 0$$

Superficie con concavità verso il fluido («superficie riempita di fluido»)



$$\vec{G} = gV\vec{k}$$

$$\vec{P} = \int_{\widehat{ABA}} p \vec{n} dA = \int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA + \int_{\overline{AB}} p \vec{n} dA$$

Intera superficie di contorno 1 2

SUPERFICIE CURVA SUPERFICIE PIANA

Superficie con concavità verso il fluido (``superficie riempita di fluido'')

$$\vec{P} = \int_{\widehat{ABA}} p \vec{n} dA = \underbrace{\int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA}_1 + \int_{\overline{AB}} p \vec{n} dA_2$$

$\int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA$: spinta di pressione esercitata dalla superficie sul fluido isolato

i.e.: opposto della spinta idrostatica che vogliamo calcolare (fluido → superficie)

$$\overrightarrow{S_{\widehat{AB}}} = - \int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA$$

Superficie con concavità verso il fluido (``superficie riempita di fluido``)

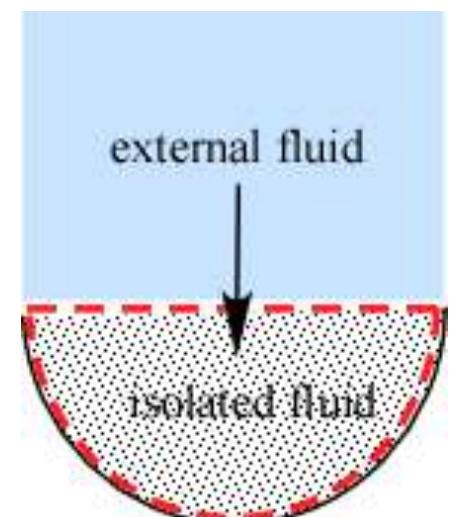
$$\vec{P} = \int_{\widehat{ABA}} p \vec{n} dA = \int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA + \int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA$$

1 2

$\int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA$: spinta di pressione esercitata dal fluido esterno sul fluido isolato attraverso la superficie piana

cioè : spinta idrostatica sulla superficie piana \overline{AB}

$$\vec{S}_{\overline{AB}} = \int_{\overline{AB}} p \vec{n} dA$$



Superficie con concavità verso il fluido (``superficie riempita di fluido'')

Condizione di equilibrio: $\vec{G} + \vec{P} = 0$

$$\vec{G} + \int_{\widehat{AB}} p \vec{n} dA + \int_{\overline{AB}} p \vec{n} dA = 0$$

$$\vec{G} - \overrightarrow{S_{\widehat{AB}}} + \overrightarrow{S_{\overline{AB}}} = 0$$

$$\overrightarrow{S_{\widehat{AB}}} = \vec{G} + \overrightarrow{S_{\overline{AB}}}$$

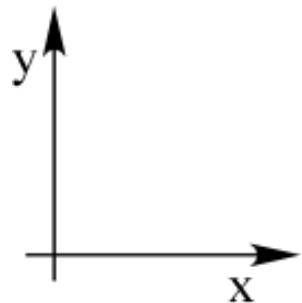


Se è presente più di una superficie piana, nel termine a destra compare la SOMMA delle relative spinte idrostatiche

Superficie con concavità verso il fluido (``superficie riempita di fluido'')

$$\overrightarrow{S_{\widehat{AB}}} = \vec{G} + \vec{S}_{\overline{AB}}$$

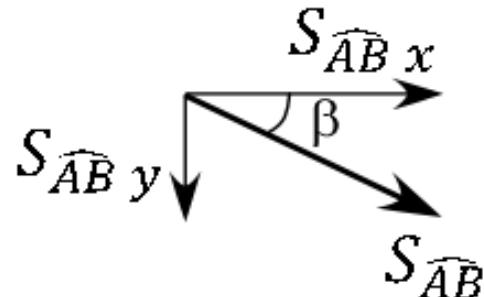
E' un'equazione VETTORIALE, che vale anche lungo ciascuna direzione:



$$S_{\widehat{AB}} x = (\vec{G} + \vec{S}_{\overline{AB}})_x = S_{\overline{AB}} x$$

$$S_{\widehat{AB}} y = (\vec{G} + \vec{S}_{\overline{AB}})_y = G + S_{\overline{AB}} y$$

$$S_{\widehat{AB}} = \sqrt{(S_{\widehat{AB}} x)^2 + (S_{\widehat{AB}} y)^2}$$

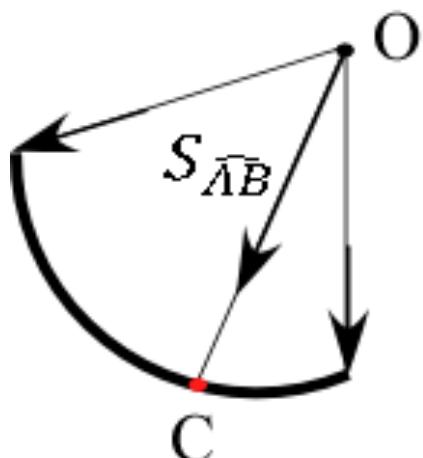


$$\beta = \text{atan} \frac{S_{\widehat{AB}} y}{S_{\widehat{AB}} x}$$

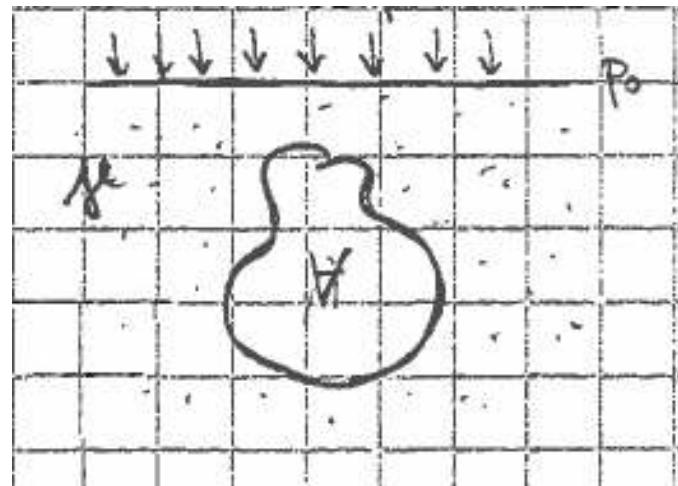
Superficie con concavità verso il fluido («superficie riempita di fluido»)

Centro di Spinta C:

- nel **caso generale** la sua posizione non può che essere calcolata numericamente;
- nel **caso di superfici «a curvatura costante»** (e.g., superfici cilindriche, sferiche) la **retta d'azione della spinta idrostatica passa per il centro di curvatura**, e dunque la posizione di C può essere determinata in modo semplice, quanto meno graficamente



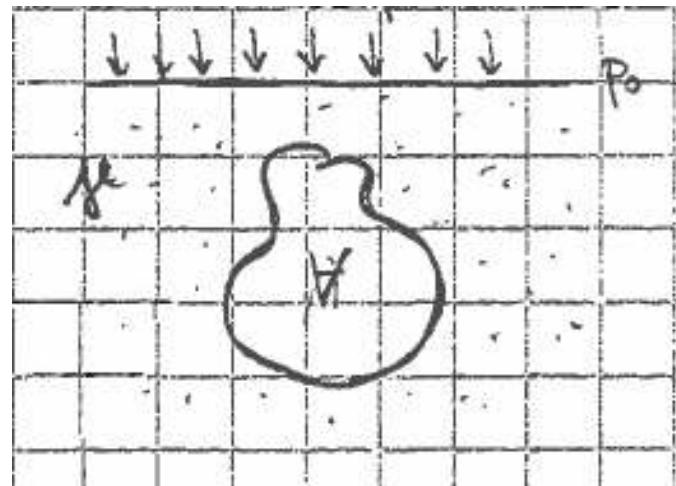
Spinta di ARCHIMEDE



E' la forza esercitata da un fluido incompressibile in quiete su di un corpo immerso nel fluido stesso, per effetto della pressione fluida agente sulla superficie di contorno del corpo, i.e. :

$$\overrightarrow{F}_A = \int_{A_{corpo}} p \vec{n} dA$$

Spinta di ARCHIMEDE



Si può dimostrare che, dato l'andamento idrostatico delle pressioni nel fluido, vale:

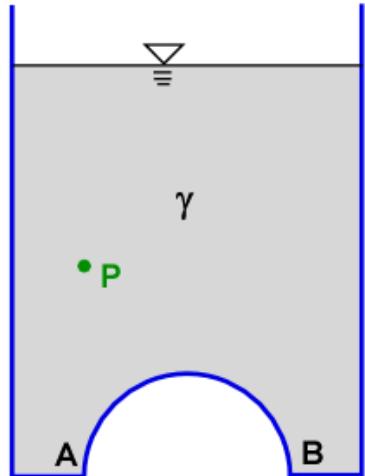
$$\vec{F}_A = \int_{A_{corpo}} p \vec{n} dA = \gamma V \vec{k}$$

dove γ è il peso specifico del fluido, V il volume (immerso) del corpo e k è il versore lungo la verticale, positivo verso l'alto

Superficie con convessità verso il fluido (``superficie che entra nel fluido``)

Problema assegnato(1)

ORIGINAL SYSTEM



Sistema equivalente (2)

EQUIVALENT SYSTEM

free surface at the same geodetic height



Notice that, in general, a separation surface with pressure p_0 is present

P and P' are 'corresponding' point in the two systems

same fluid (i.e. same specific gravity γ)

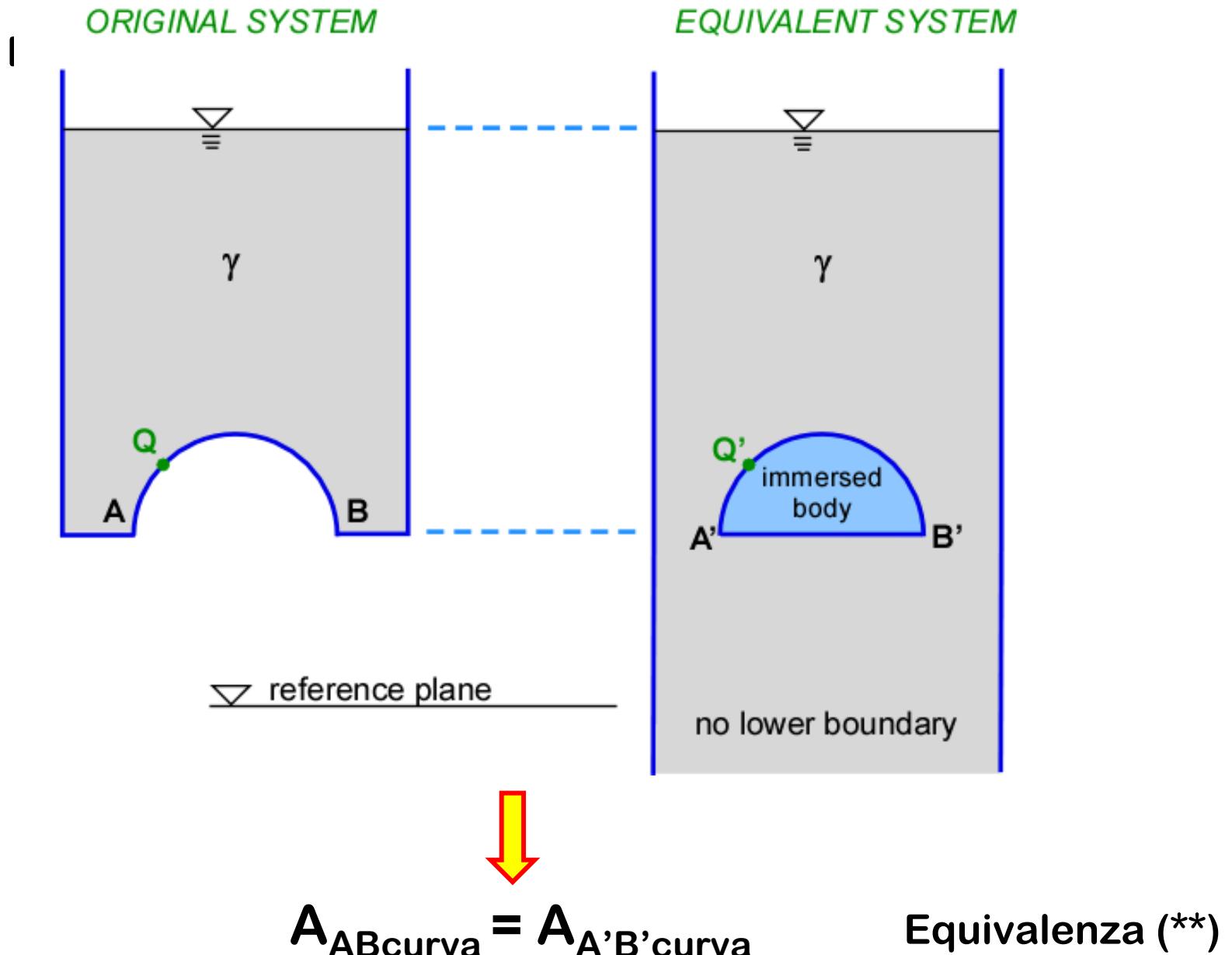
no lower boundary



$$p_P = p_{P'}$$

Equivalenza (*)

Superficie con convessità verso il fluido (``superficie che entra nel fluido``)



Superficie con convessità verso il fluido («superficie che entra nel fluido»)

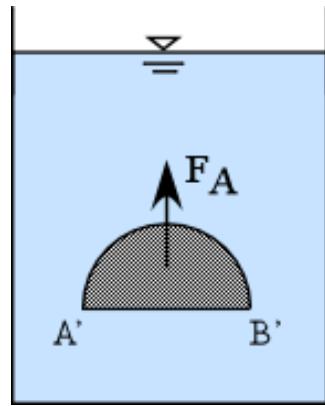
Le equivalenze (*) e (**) mostrano che il calcolo della **spinta idrostatica** sulla superficie curva $\widehat{A'B'}$ nel **problema equivalente** è del tutto **corrispondente** al calcolo della **spinta idrostatica** sulla superficie curva \widehat{AB} nel **problema originale**



D'ora in avanti il problema originale (1) è dimenticato e del tutto sostituito dal problema equivalente (2)

Superficie con convessità verso il fluido (``superficie che entra nel fluido``)

Nel sistema equivalente possiamo perciò scrivere che la spinta di Archimede è esprimibile come:



$$\vec{F}_A = \int_{\widehat{A'B'A'}} p \vec{n} dA = \int_{\widehat{A'B'}} p \vec{n} dA + \int_{\overline{A'B'}} p \vec{n} dA$$

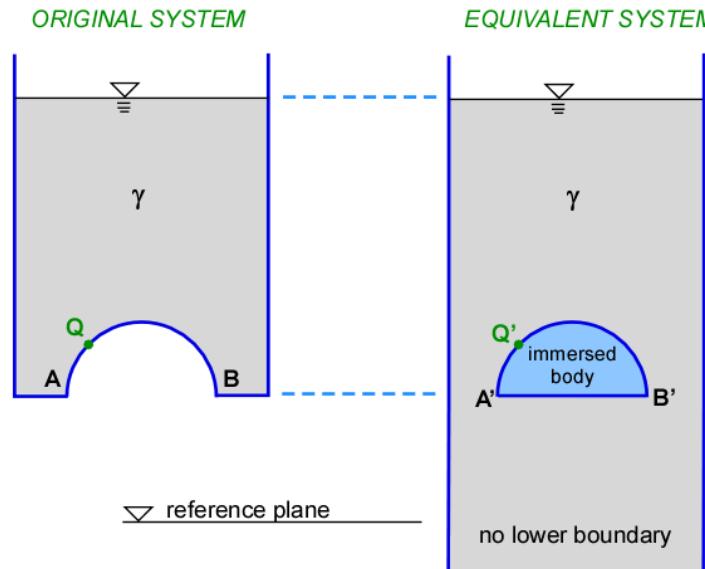
Spinta idrostatica
Fluido → Corpo
attraverso la superficie
di contorno del corpo

Spinta idrostatica
Fluido → Corpo
attraverso la superficie
curva

Spinta idrostatica
Fluido → Corpo
attraverso la superficie
piana

quella che cerchiamo!

Superficie con convessità verso il fluido (``superficie che entra nel fluido``)



La relazione precedente può essere
riscritta come:

$$\vec{F}_A = \vec{S}_{\widehat{A'B'}} + \vec{S}_{\overline{A'B'}}$$



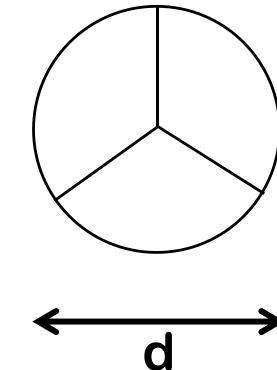
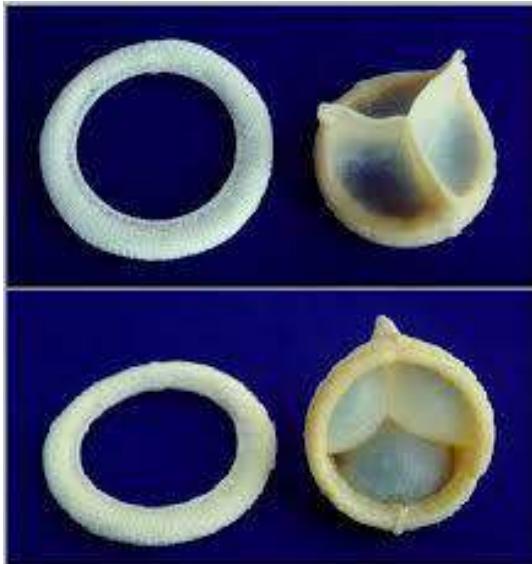
$$\vec{S}_{\widehat{A'B'}} = \vec{F}_A - \vec{S}_{\overline{A'B'}}$$

cioè è richiesto il **calcolo solo di un volume** (in F_A) e **di una (o più) spinte idrostatiche su superficie piana** per il calcolo della spinta idrostatica su superficie curva.

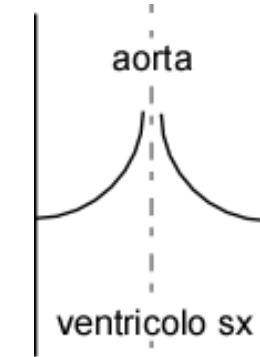
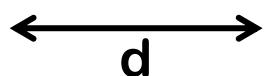
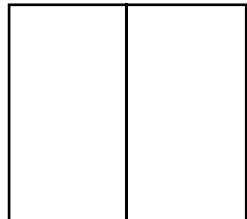
ATTENZIONE: equazione vettoriale!

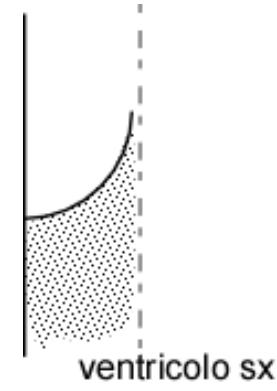
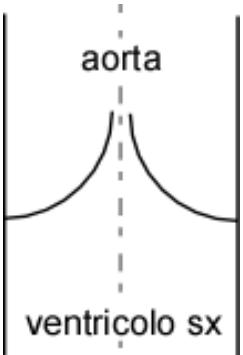
Stima della spinta idrostatica su valvole cardiache native e artificiali biologiche in posizione aortica

Lato Aortico



Lato Ventricolare

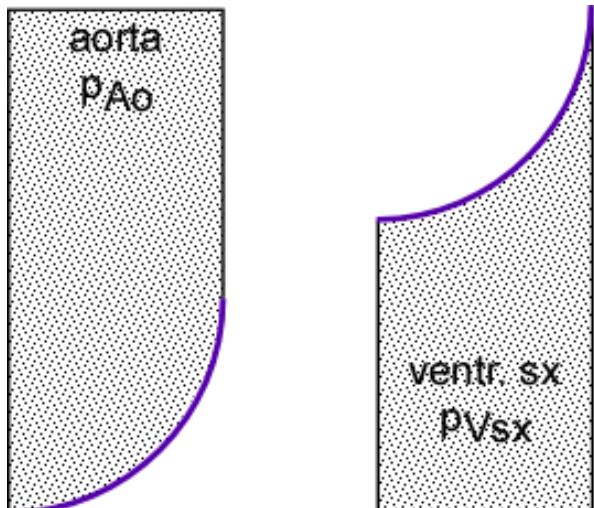




Il sangue entra nel leaflet → MEG 'con G'

Il leaflet 'entra nel' sangue → MEG 'con la F_A '

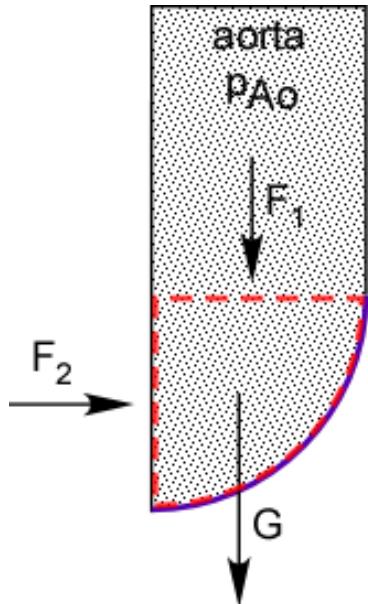
Schemi Idraulici



Aorta: recipiente chiuso che contiene sangue alla pressione costante p_{Ao}

Ventricolo sinistro: recipiente chiuso che contiene sangue alla pressione costante p_{VsX}

Ipotesi di lavoro: la pressione no cambia lungo la verticale (effetto del peso trascurabile – si veda il problema della BMHV)

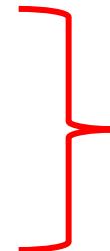


$$\vec{S}_1 = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

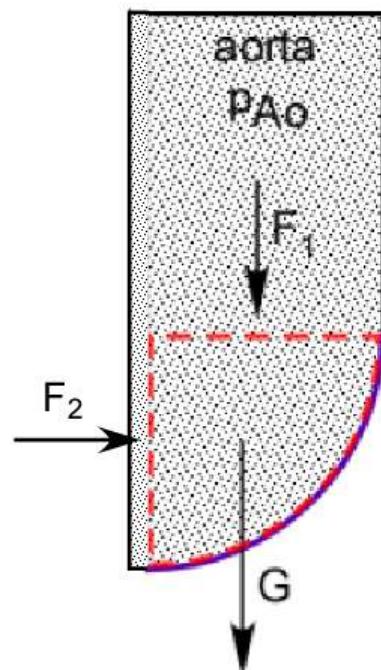
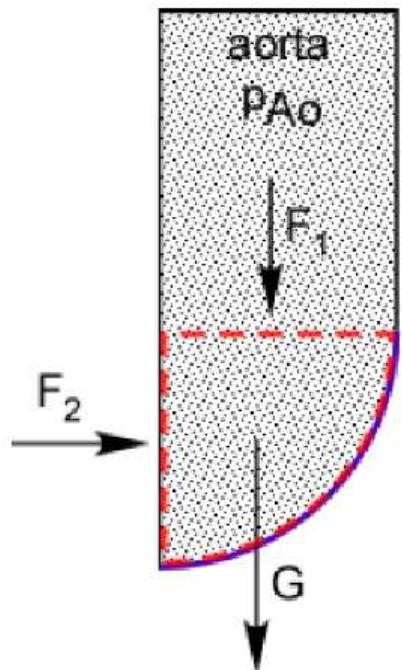
$$G = \gamma_s V$$

$$F_1 = p_{Ao} A_1$$

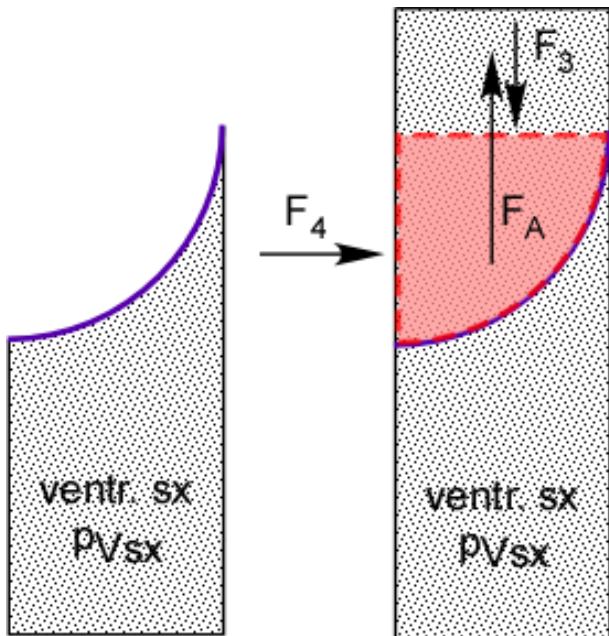
$$F_2 = p_{Ao} A_2$$



$p_{Ao} > 0 \rightarrow$ verso di F_1 e F_2 ok



NOTA:
Posso sostituire la parete di sx con uno strato fluido alla pressione p_{Ao} .
In questo modo è più semplice vedere che F_2 è la spinta idrostatica sulla superficie piana A_2 .



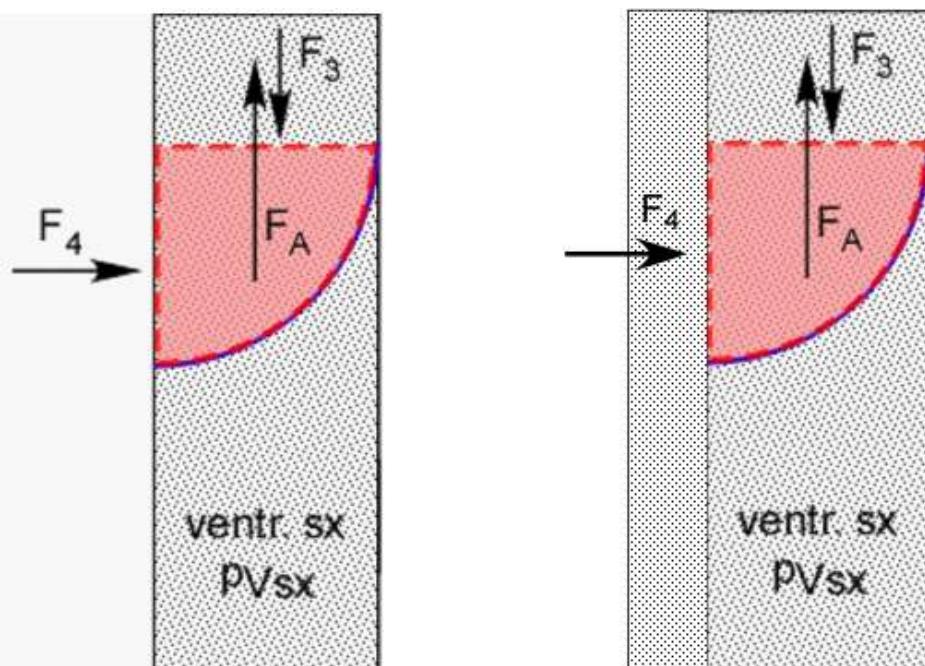
$$\vec{S}_2 = \vec{F}_A - \vec{F}_3 - \vec{F}_4$$

$$F_A = \gamma_s V$$

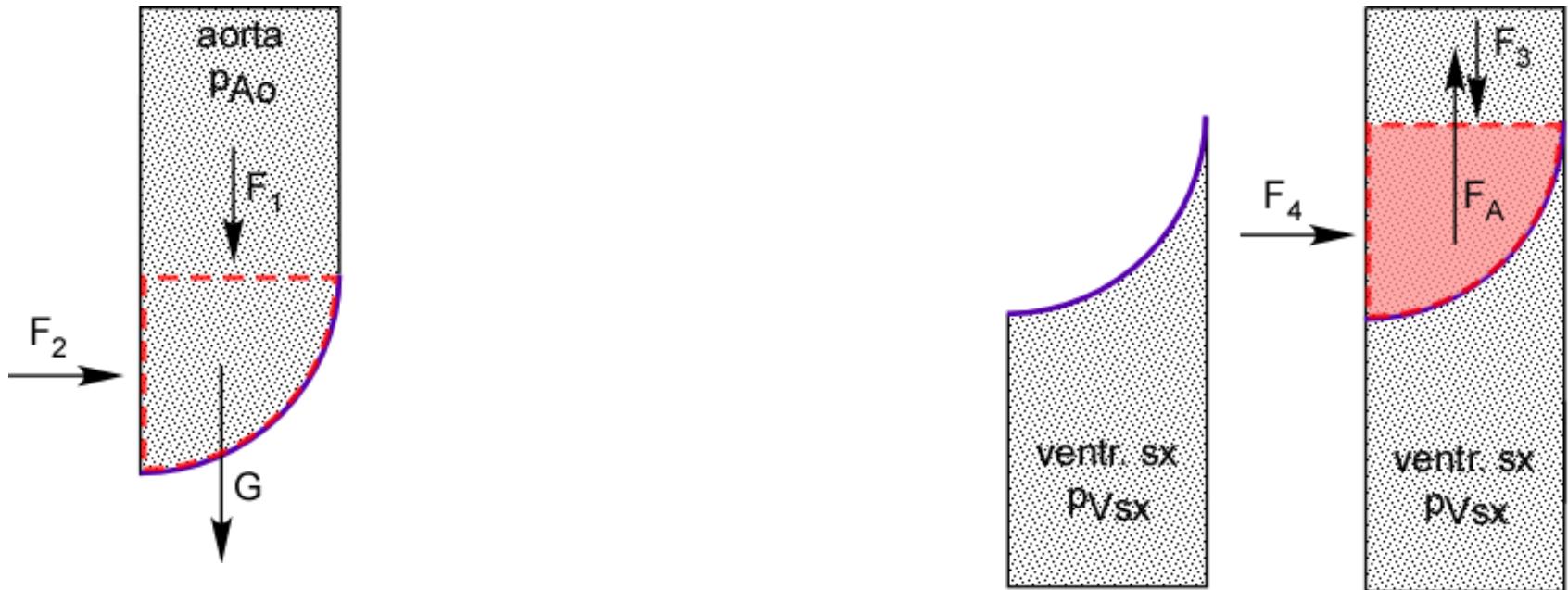
$$F_3 = p_{Vsx} A_1$$

$$F_4 = p_{Vsx} A_2 \longrightarrow \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} p_{Vsx} > 0 \rightarrow \text{verso di } F_3 \text{ e } F_4 \text{ ok}$$

**Sistema
equivalente**



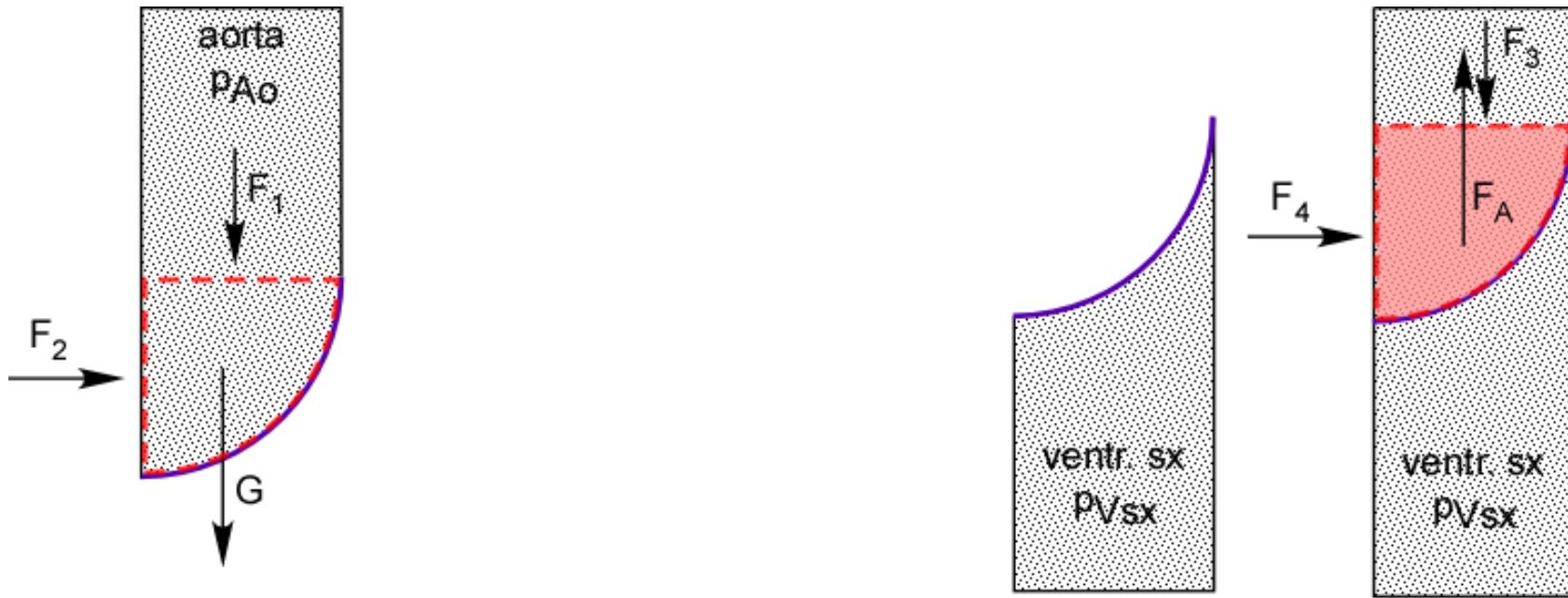
NOTA:
E' preferibile disegnare il sistema equivalente rappresentando anche il fluido di sinistra....!
In questo modo è più semplice vedere che F_4 è la spinta idrostatica sulla superficie piana A_2



$$\vec{S}_1 = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{S}_2 = \vec{F}_A - \vec{F}_3 - \vec{F}_4$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_A - \vec{F}_3 - \vec{F}_4$$



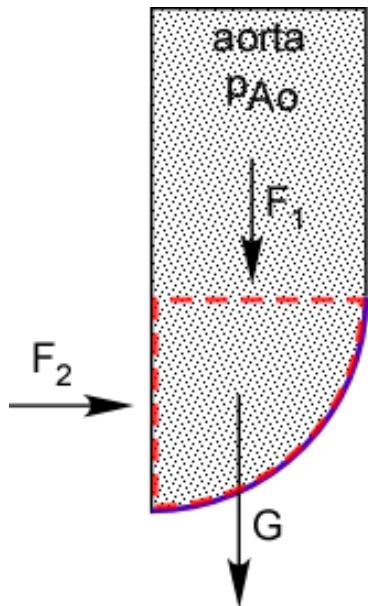
$$\vec{S}_1 = \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{S}_2 = \vec{F}_A - \vec{F}_3 - \vec{F}_4$$

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \cancel{\vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2} + \cancel{\vec{F}_A - \vec{F}_3 - \vec{F}_4}$$

A blue curved arrow points from the first term in the equation to the first term in the sum. A green curved arrow points from the second term in the equation to the second term in the sum.

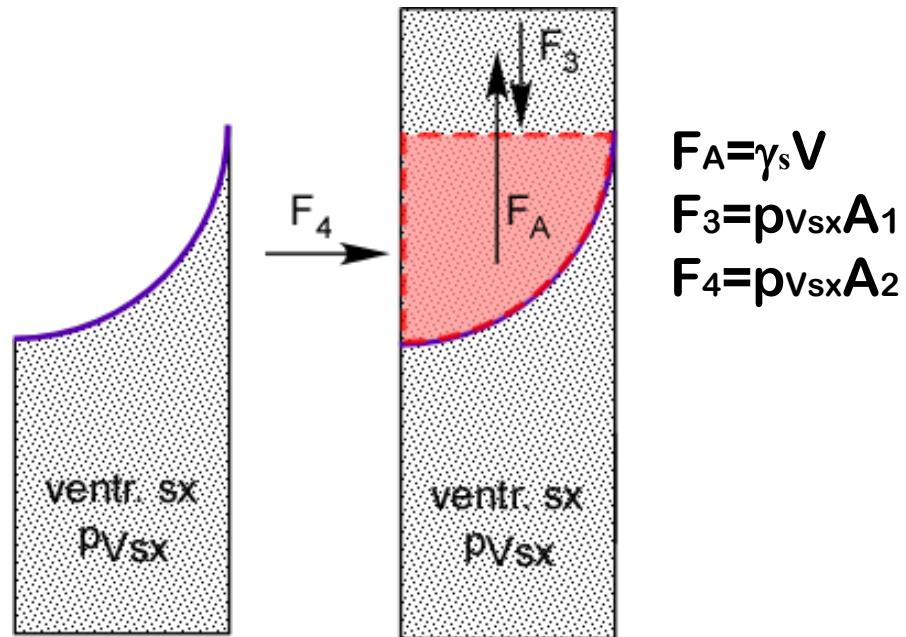
$$\vec{S} = (\vec{F}_1 - \vec{F}_3) + (\vec{F}_2 - \vec{F}_4)$$



$$G = \gamma_s V$$

$$F_1 = p_{A\text{o}} A_1$$

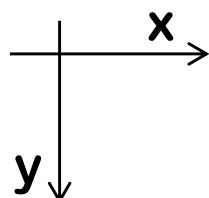
$$F_2 = p_{A\text{o}} A_2$$



$$\vec{S} = (\vec{F}_1 - \vec{F}_3) + (\vec{F}_2 - \vec{F}_4)$$

$$A_1 = A_2 = d/2 * d = (d = 3 \text{ cm}) = 4,5 \text{ cm}^2$$

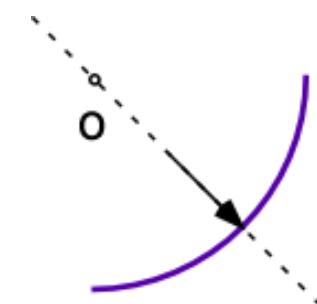
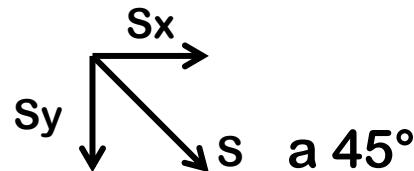
$$p_{A\text{o}} - p_{V\text{sx}} = 100 \text{ mmHg}$$



$$S_x = F_2 - F_4 = (p_{A\text{o}} - p_{V\text{sx}}) * d / 2 * d = 5,98 \text{ N}$$

$$S_y = F_1 - F_3 = (p_{A\text{o}} - p_{V\text{sx}}) * d / 2 * d = 5,98 \text{ N}$$

$$S = (S_x^2 + S_y^2)^{1/2} = 8,46 \text{ N}$$



ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

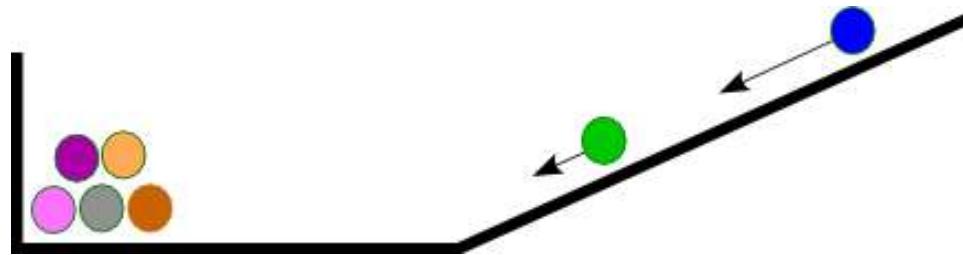
Oggetto: fluidi in movimento, senza porre attenzione alle forze che governano il movimento stesso

Obiettivo: determinare le grandezze cinematiche del problema fluido di interesse

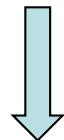
Quale tipo di approccio può essere seguito per raggiungere l'obiettivo?

<https://youtu.be/zUaD-GMARrA>

Approccio Lagrangiano: è quello a cui ci ha abituati la fisica dei sistemi materiali



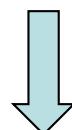
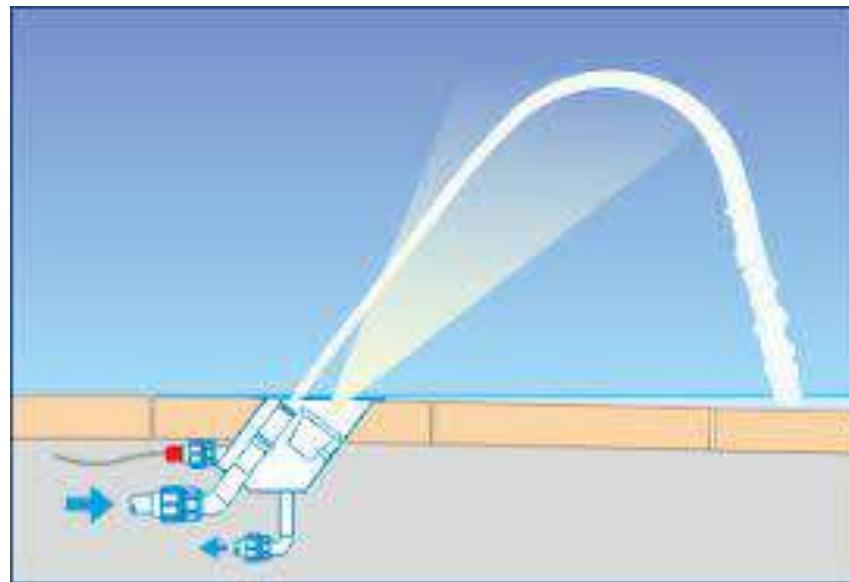
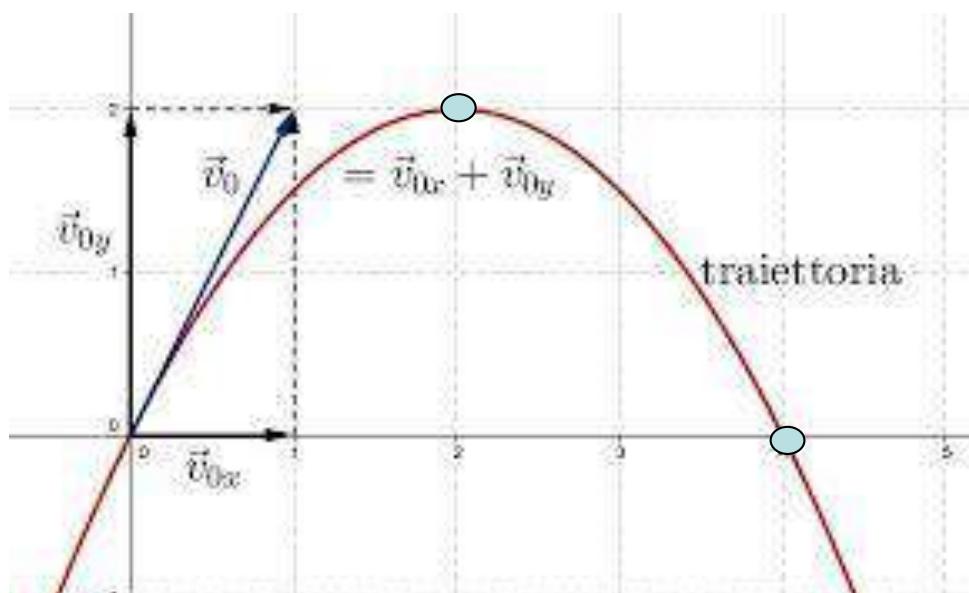
Seguo il comportamento dell'elemento materiale (e.g. la particella blu) istante per istante nel suo muoversi nello spazio e nel suo interagire con l'ambiente (e.g., la particella verde più lenta, il cambio di pendenza del piano di movimento, il muro e le particelle ammucchiate)



Cinematicamente, determino la **traiettoria** della particella e dunque la sua **velocità**, **accelerazione** ...

Esempio di metodo lagrangiano nell'idraulica: parabola del getto libero in atmosfera

Se l'interesse è stimare la
quota del vertice della
parabola e il punto di
massima distanza (trascurando
ogni effetto dissipativo):



$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \left(\frac{x - x_0}{v_{0x}} \right) + y_0 \end{cases}$$

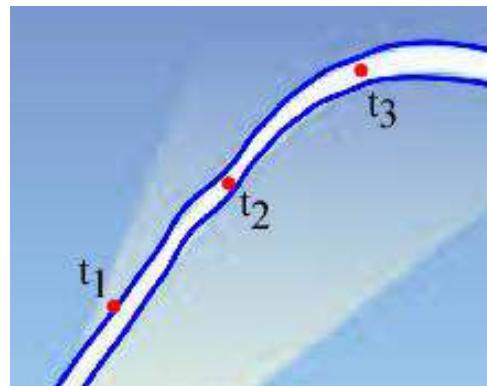
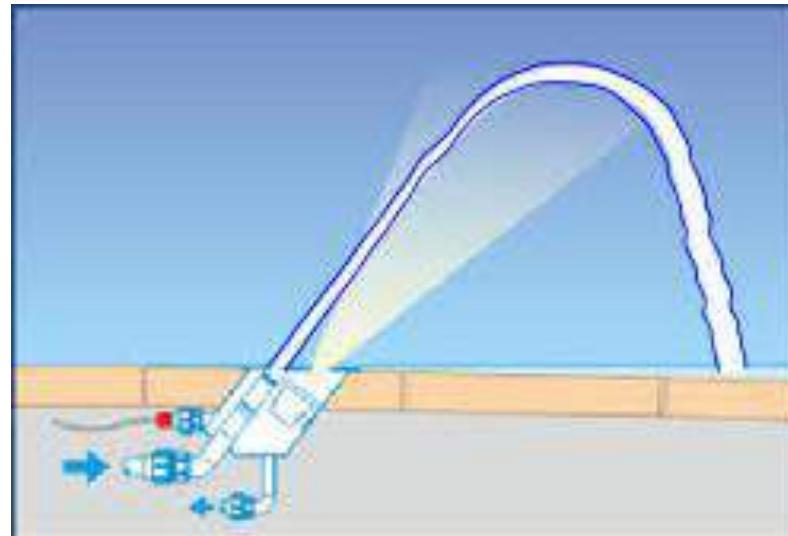
Homework: ricavare y_{\max} e x_{\max}

MA

Se l'interesse è determinare la configurazione del getto?

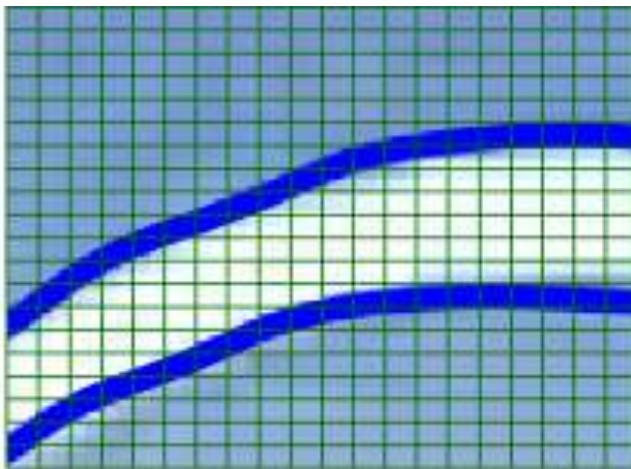
E' efficace e «efficiente» l'approccio Lagrangiano?

Quante sono le particelle di cui devo determinare la traiettoria per rispondere alla richiesta?



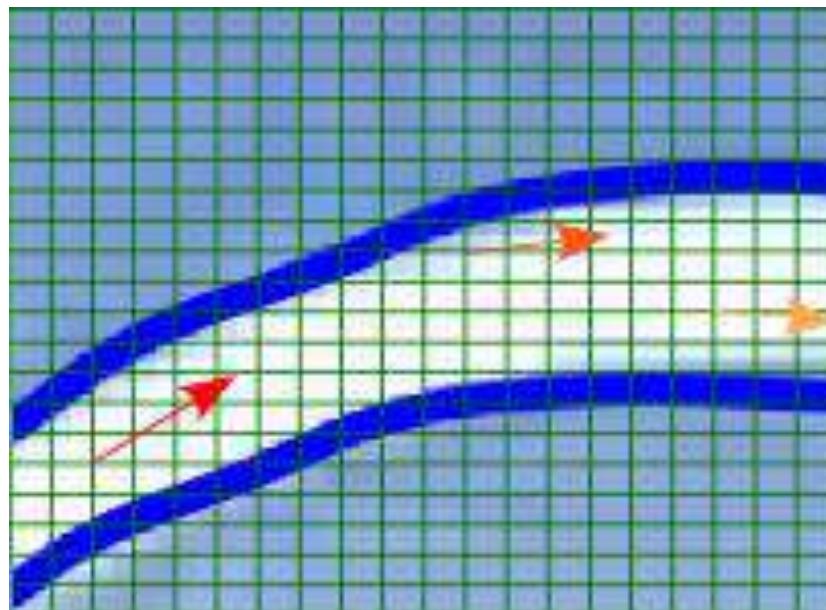
In generale, una particella fluida non «si muove» esclusivamente lungo il bordo del getto....

→ **Approccio Euleriano:** tipico della fluidodinamica – l'attenzione è posta non sulla singola particella ma su una regione dello spazio percorso dal fluido



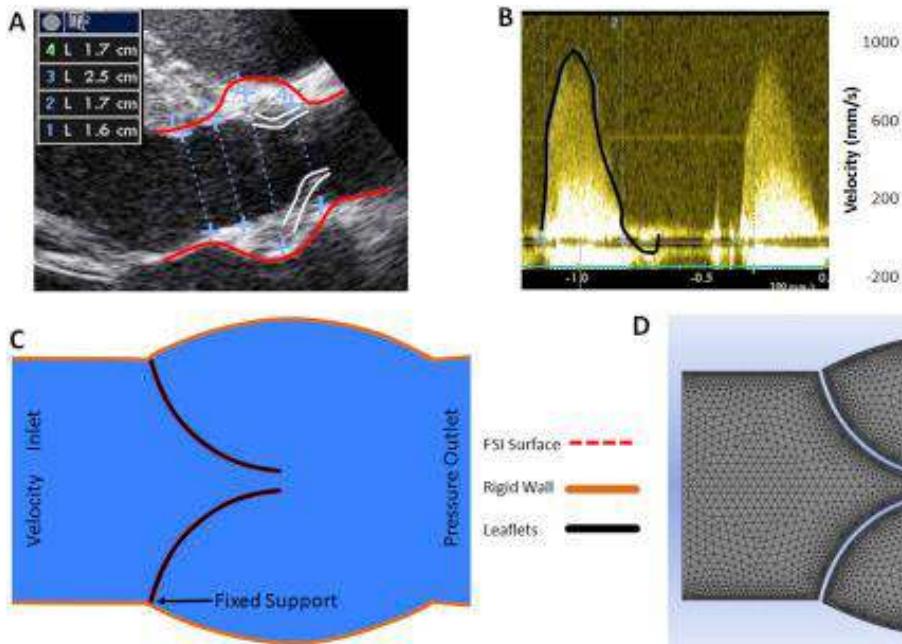
Individuo una regione dello spazio di interesse per il problema e la suddivido in una griglia di posizioni.

Determino le caratteristiche del moto fluido in ciascuna posizione e al generico istante (e.g., velocità → linee di corrente)



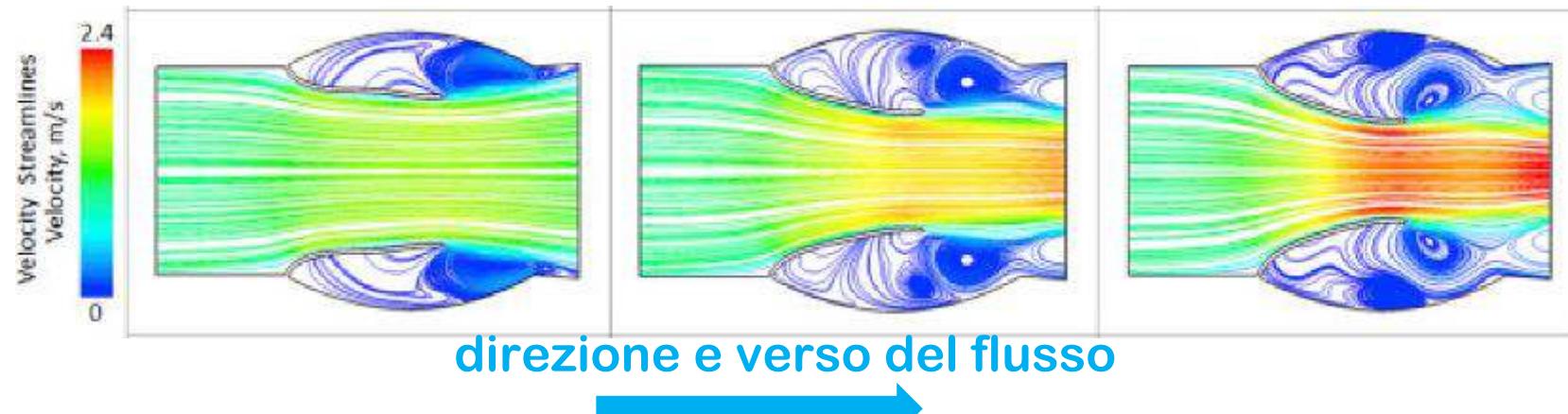
Approccio Euleriano

Esempio: flusso attraverso valvola aortica – [Informatics in Medicine Unlocked](#)
[Volume 9](#), 2017, Pages 191-199



Individuo una regione dello spazio di interesse per il problema e la suddivido in una griglia di posizioni.

Determino le caratteristiche del moto fluido in ciascuna posizione e al generico istante (e.g., velocità → linee di corrente)



Approccio Euleriano

Caratterizzare cinematicamente un fluido in movimento

=

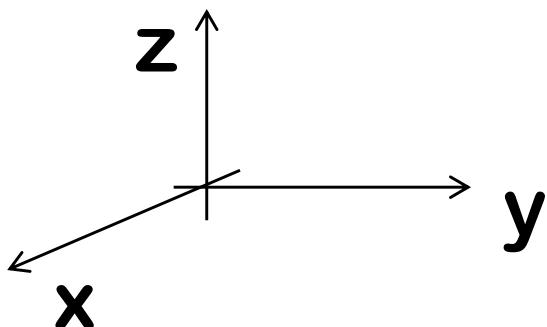
determinare, in tutti i punti del campo di moto e per ogni istante, il vettore

velocità

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

per ogni $[P(x, y, z), t]$

cioè le sue componenti



$$v_x = v_x(x, y, z, t)$$

$$v_y = v_y(x, y, z, t)$$

$$v_z = v_z(x, y, z, t)$$

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, \cancel{t})$$

moto permanente o stazionario

$$v_x = v_x(x, y, z, \cancel{t})$$

$$v_y = v_y(x, y, z, \cancel{t})$$

$$v_z = v_z(x, y, z, \cancel{t})$$

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, \underline{t})$$

moto vario

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

La variazione **totale** della velocità nel tempo definisce il vettore

accelerazione

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$$

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

Variazione TOTALE = ?

1) $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$

2) $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$



$$\ddot{\vec{a}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

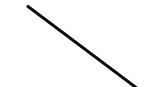
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$v_x = dx/dt \quad v_y = dy/dt \quad v_z = dz/dt$$



$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$



Accelerazione LOCALE o TEMPORALE

Accelerazione SPAZIALE o CONVETTIVA

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$



- un fluido in movimento può subire accelerazione non nulla anche quando la velocità è costante nel tempo.

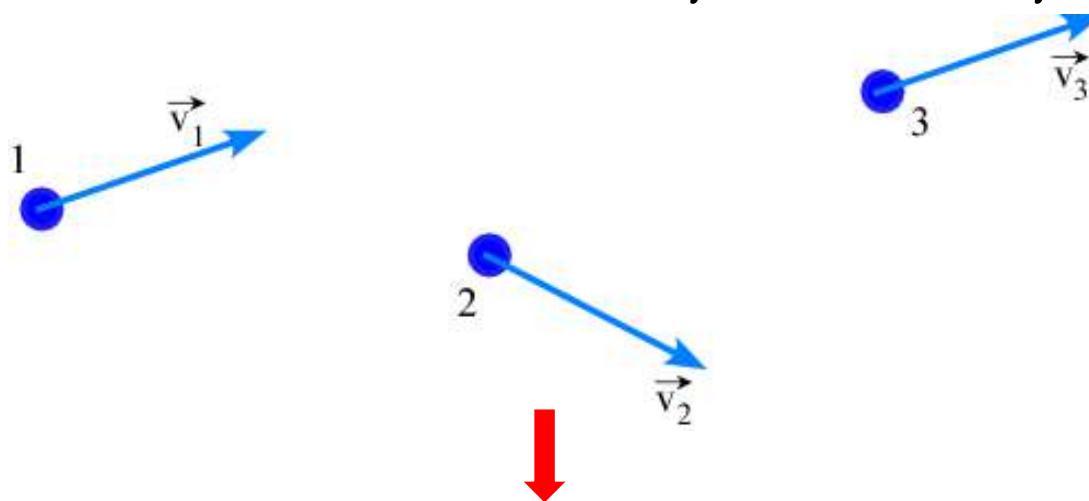
Cioè un moto stazionario è, in generale, comunque accelerato!

$$\vec{a} = \cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

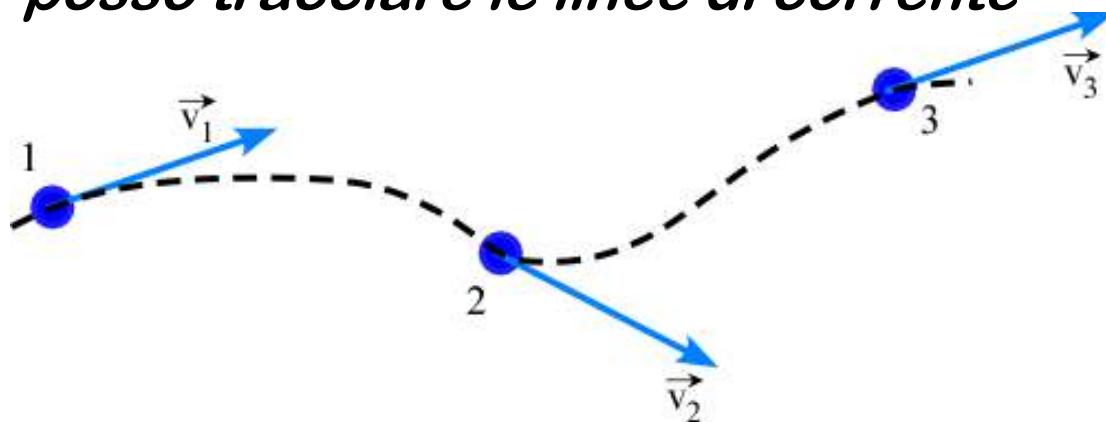
ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

Linea di corrente: linea che ad un dato istante è in ogni suo punto tangente al vettore velocità nel punto stesso

conosco le velocità nei punti dello spazio



posso tracciare le linee di corrente



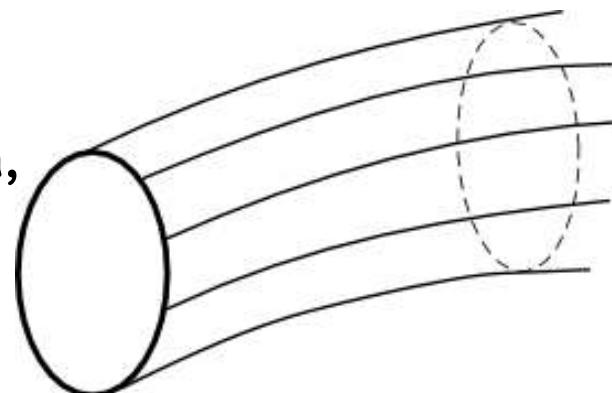
Osservazione: se il moto è vario la linea di corrente che passa per un punto cambia nel tempo

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

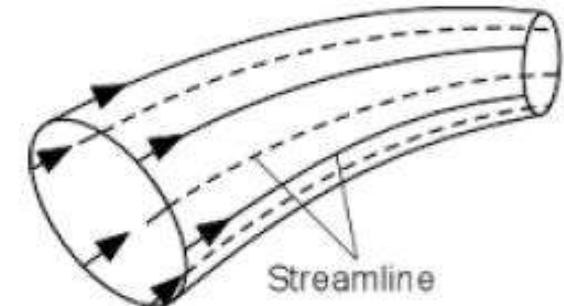
Tubo di flusso: porzione di campo fluido delimitata dalla superficie composta dalle linee di corrente che, ad un dato istante, si appoggiano alla linea chiusa scelta come riferimento

Linee di corrente che si
appoggiano alla linea chiusa

Linea chiusa,
NON di
corrente



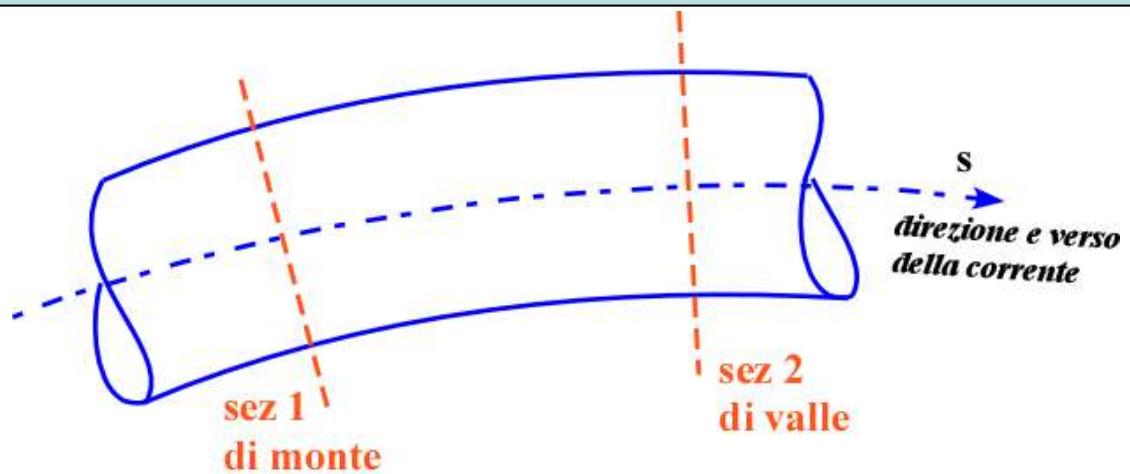
Data la definizione di tubo di flusso si ha subito che non può esserci passaggio di fluido attraverso la superficie laterale di contorno del tubo stesso, i.e. il fluido si muove esclusivamente nella direzione dell'asse longitudinale del tubo stesso



ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

Corrente (fluida) = moto fluido che si realizza lungo una direzione principale, non necessariamente rettilinea. La direzione della corrente definisce l'asse della corrente

Esempio: moto in un condotto

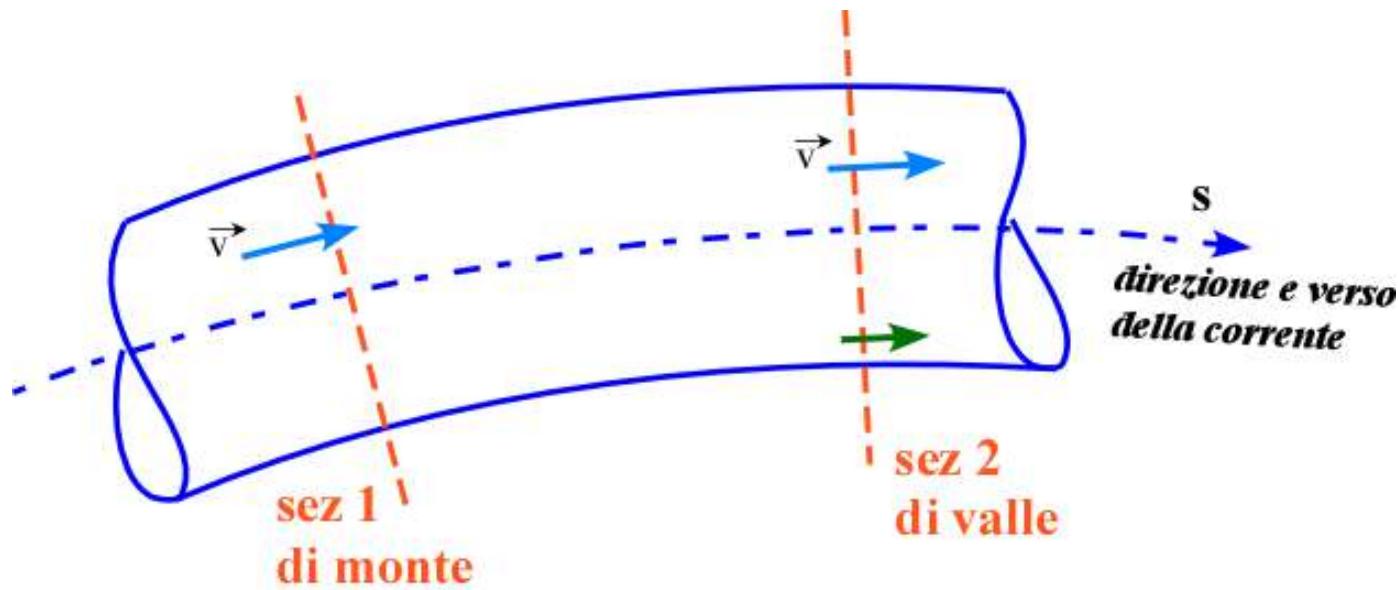


Sezione trasversale (della corrente) = sezione piana che taglia normalmente la corrente in una data posizione lungo l'asse

Tronco di corrente = porzione di corrente delimitata dalla superficie laterale della corrente e da due sezioni trasversali

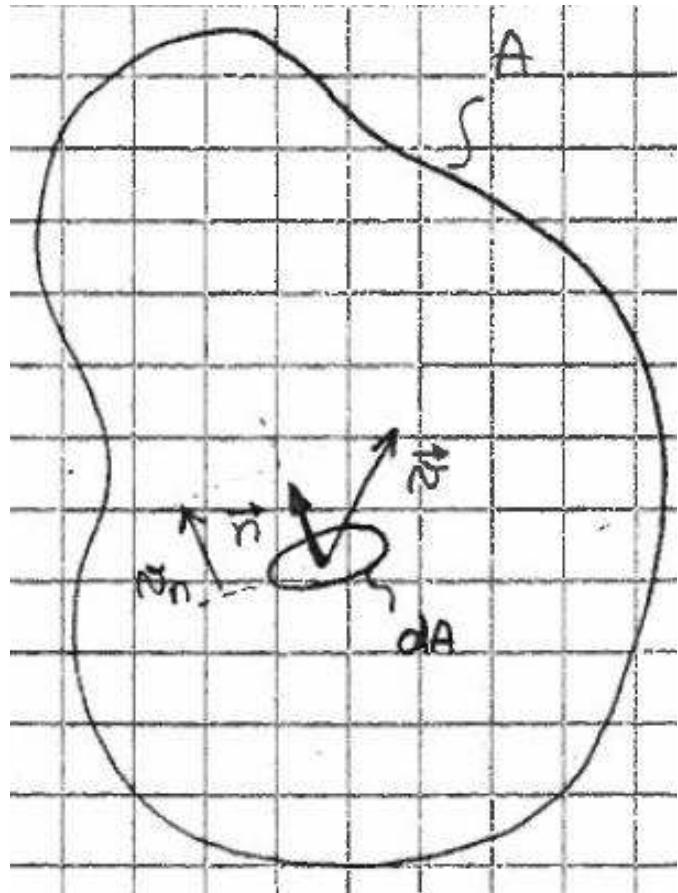
ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

(Corrente in) Moto uniforme = corrente in cui la velocità è indipendente dal tempo (moto permanente!) E dalla coordinata s.



Osservazione: in generale, la velocità di un moto uniforme dipende dalle altre coordinate spaziali

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI



A = superficie di area finita in un fluido entro un fluido in movimento
 dA = elementino d'area
 \vec{n} = versore normale a dA
 \vec{dA} = elementino d'area orientato
 \vec{v} = vettore velocità nel punto P centrato in dA
 v_n = componente di v lungo n

Portata (volumetrica) elementare

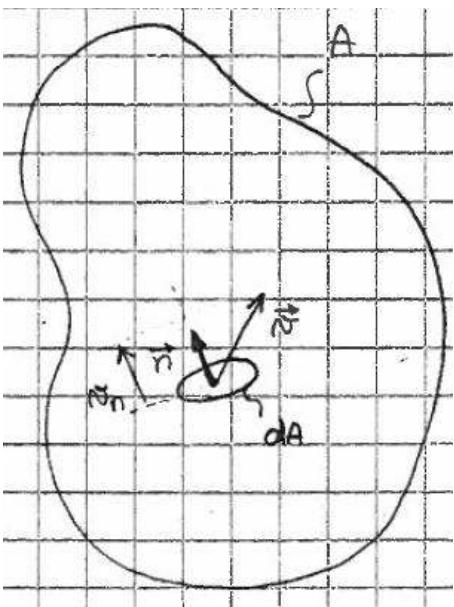
$$dQ = v_n dA = \vec{v} \cdot \vec{dA}$$

$$[\text{m}^3/\text{s} \text{ m}^2 = \text{m}^3/\text{s}]$$



dQ è quindi il volume fluido che attraversa dA nell'unità di tempo

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI



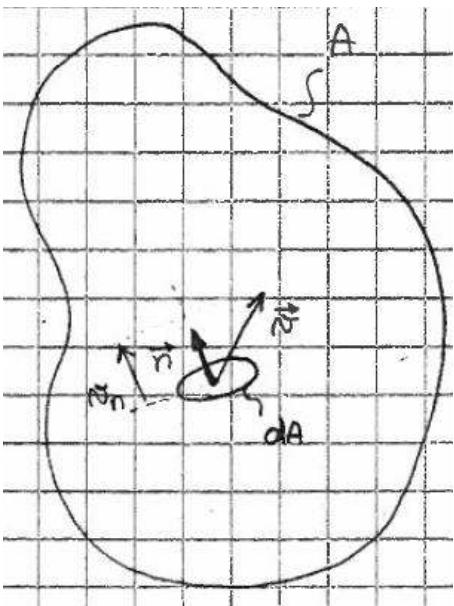
Portata (volumetrica, finita)

$$Q = \int_A dQ = \int_A v_n dA = \int_A \vec{v} \cdot \vec{dA}$$

Se A è sezione trasversale di un tronco di corrente, allora $\vec{v} \parallel \vec{n}$ e $|\vec{v}| = v_n$ cosicché:

$$Q = \int_A dQ = \int_A v_n dA = \int_A v dA$$

ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI



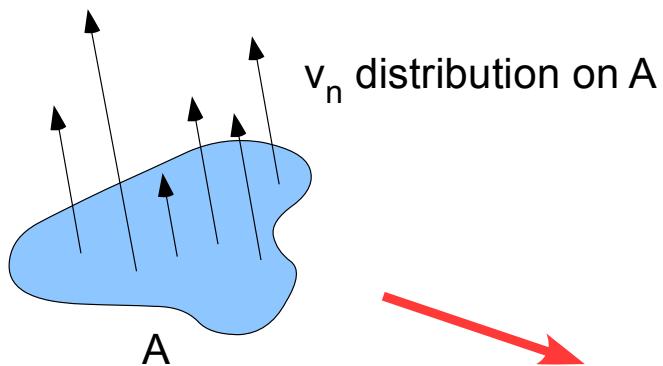
Velocità Media

$$V = \frac{Q}{A}$$

E' la velocità che si dovrebbe avere in ogni punto della superficie A perché fosse attraversata proprio dalla portata Q

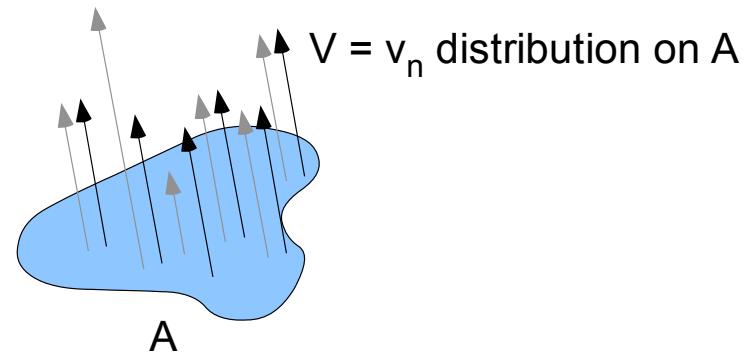
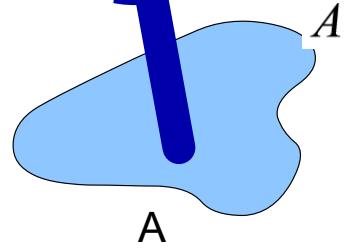
Infatti se $v_n = V$ in ogni punto di A (distribuzione di velocità di tipo uniforme/costante), allora

$$\int_V v_n dA = \int_V V dA = V \int_V dA = VA = Q$$



$$Q = \int_A v_n dA$$

is the flow rate across A



$$Q = \int_A v_n dA$$

the same flow rate crosses A!

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA ('equazione di continuità')

Principio di conservazione fondamentale: la massa associata ad un qualsiasi sistema (fluido) è costante nel tempo, i.e.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (*)$$

Due le formulazioni di (*) fondamentali in dinamica dei fluidi:

- Forma locale: conservazione di m nel generico P in un dato campo fluido (i.e. per volume fluido elementare centrato in P)
- Forma globale: conservazione di m per volume fluido finito

Both formulations hold at any instant in time

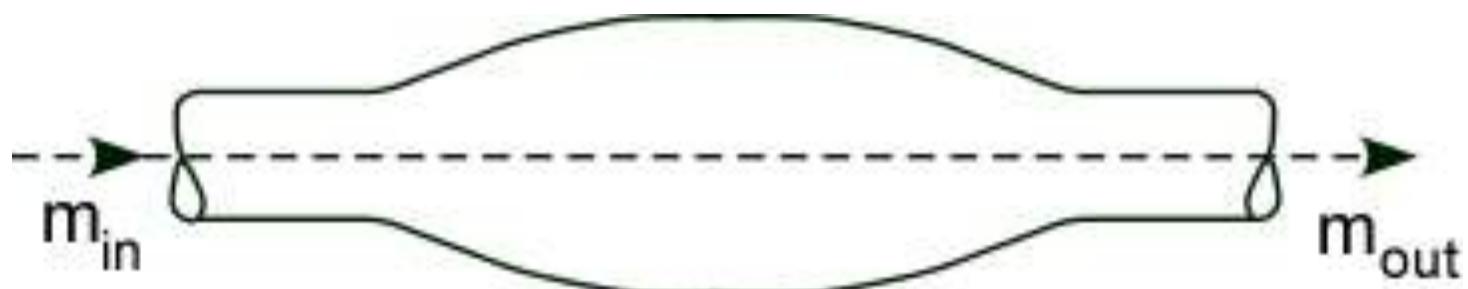
GLOBAL

Conservazione della massa per un tubo di flusso

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$$

La differenza tra la massa fluida entrante
(m_{in}) e uscente (m_{out}) nel/dal tubo di flusso in
 dt è uguale alla variazione in dt della massa
fluida contenuta nel tubo di flusso.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho Q}{\partial s} \\ \frac{\partial \rho A}{\partial t} \end{array} \right\}$$



CASI PARTICOLARI

1) HP:

(a) fluido incomprimibile (* prossima slide)

(b) moto stazionario OPPURE contorno rigido (e.g. tubo rigido)

$$(a) = \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

(b) = geometria del contorno costante nel tempo, i.e. $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$$

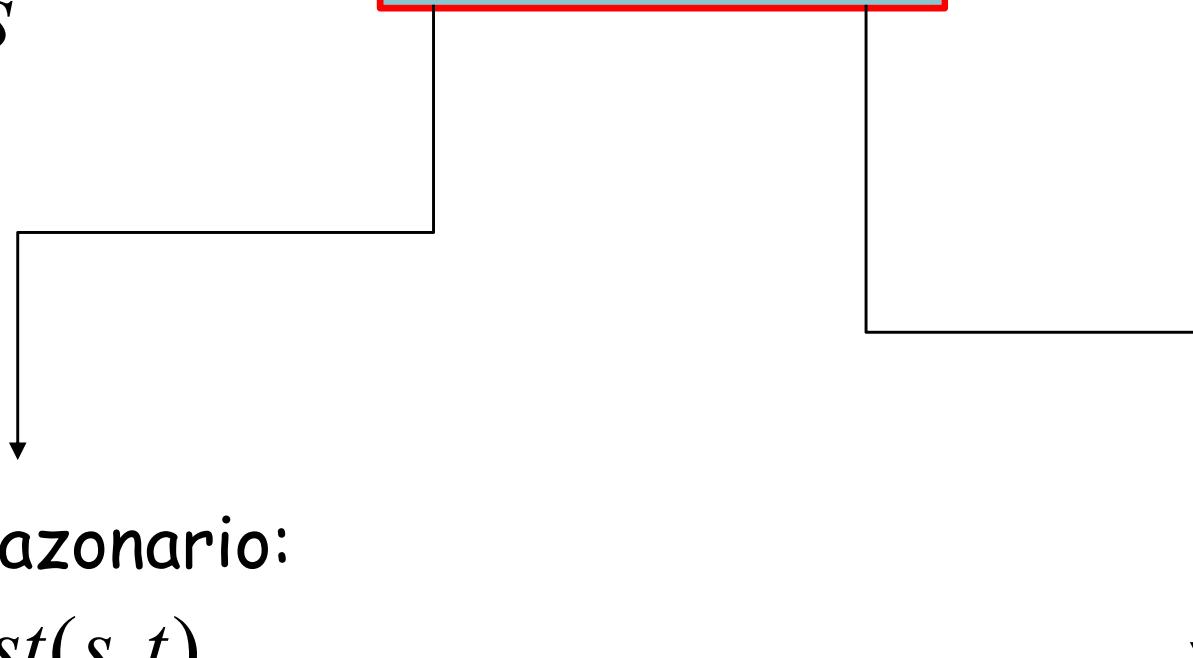
$$Q \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$Q \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial s}} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} + A \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \cancel{\frac{\partial A}{\partial t}} = 0$$

$$\rho \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow Q = \text{const}(s)$$



Moto stazionario:

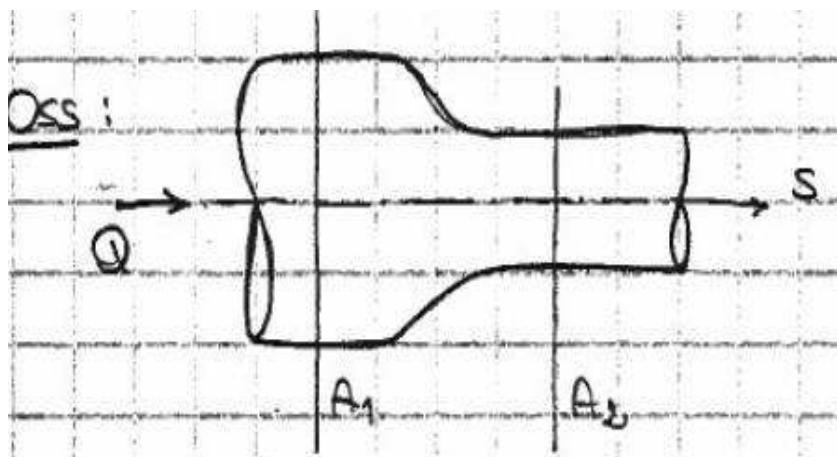
$$Q = \text{const}(s, t)$$

Moto vario:

$$Q = \text{const}(s) \text{ ad ogni } t$$

L'ipotesi di fluido incomprimibile 'transforma' la conservazione della massa in conservazione di volume!

HP: fluido incomprimibile & moto stazionario



$$Q = \text{const}(s, t)$$

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} \quad V_2 = \frac{Q}{A_2} = V_1 \frac{A_1}{A_2} \quad V_1 \neq V_2$$

i.e. cioè accelerazione non nulla nonostante la stazionarietà del moto! La variazione di velocità (i.e. accelerazione) è dovuta alla variazione della geometria!
Accelerazione convettiva!

CASI PARTICOLARI

2) HP:

(a) fluido comprimibile

(b) moto stazionario

$$(a) = \frac{\partial \rho}{\partial s} \neq 0$$

$$(b) = \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \text{ and } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$Q \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

$$Q \frac{\partial \rho}{\partial s} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} + A \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \cancel{\frac{\partial A}{\partial t}} = 0$$

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0$$

$$\rho Q = \text{const}(s, t)$$

i.e. portata di massa costante! [kg/s]

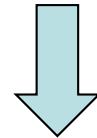
PARTICULAR CASES

3) HP:

(a) fluido incompressibile $\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

(b) moto vario E contorno deformabile

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0$$



$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

Consideriamo variazioni finite, i.e.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta s} + \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0$$

e moltiplichiamo per Δs

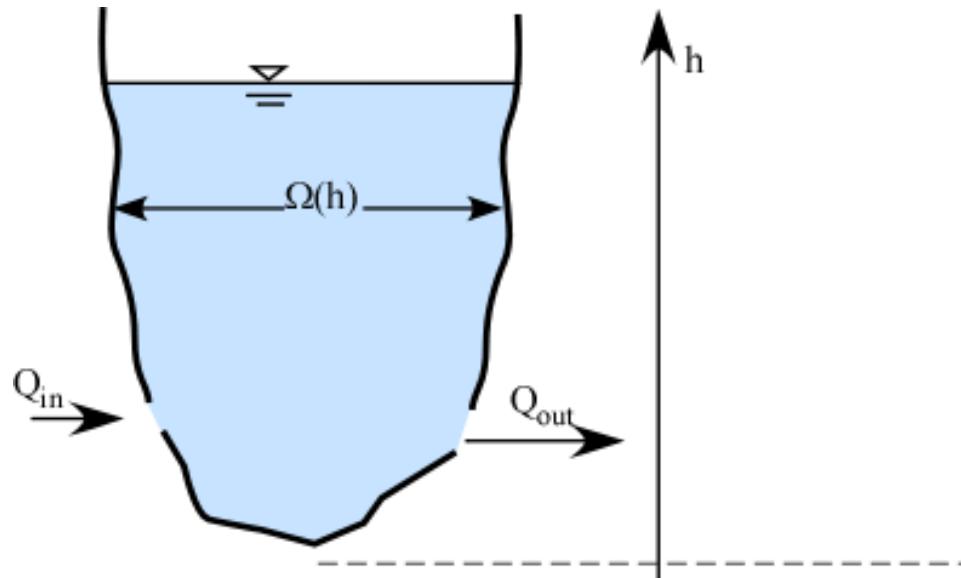
$$\Delta s \left(\frac{\Delta Q}{\Delta s} + \frac{\Delta A}{\Delta t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta Q + \frac{\Delta A \cdot \Delta s}{\Delta t} = 0$$

Variazione di
volume



$$\Delta Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Conservazione della massa in un serbatoio a superficie libera



3) HP:

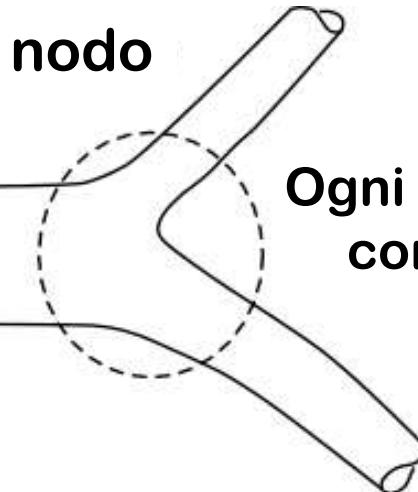
(a) fluido incompressibile $\frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Delta Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

(b) moto vario E contorno deformabile

$$Q_{in}(t) - Q_{out}(t) = \Omega(h) \frac{dh}{dt}$$

Equazione di continuità in un nodo



Ogni volta che un condotto si dirama in due o più rami, in corrispondenza dell'innesto dei rami si ha un **NODO**

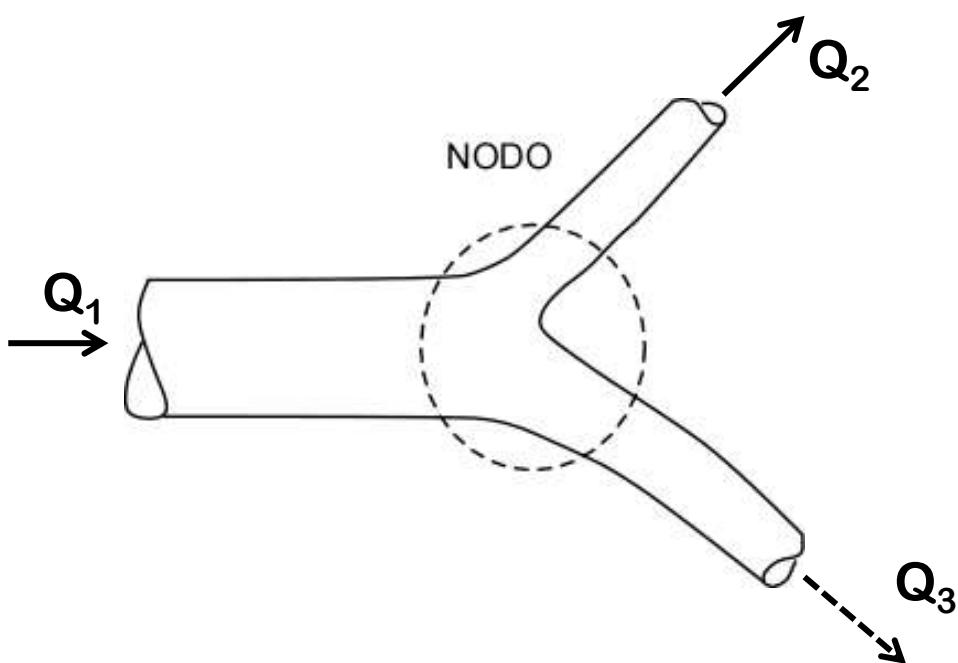
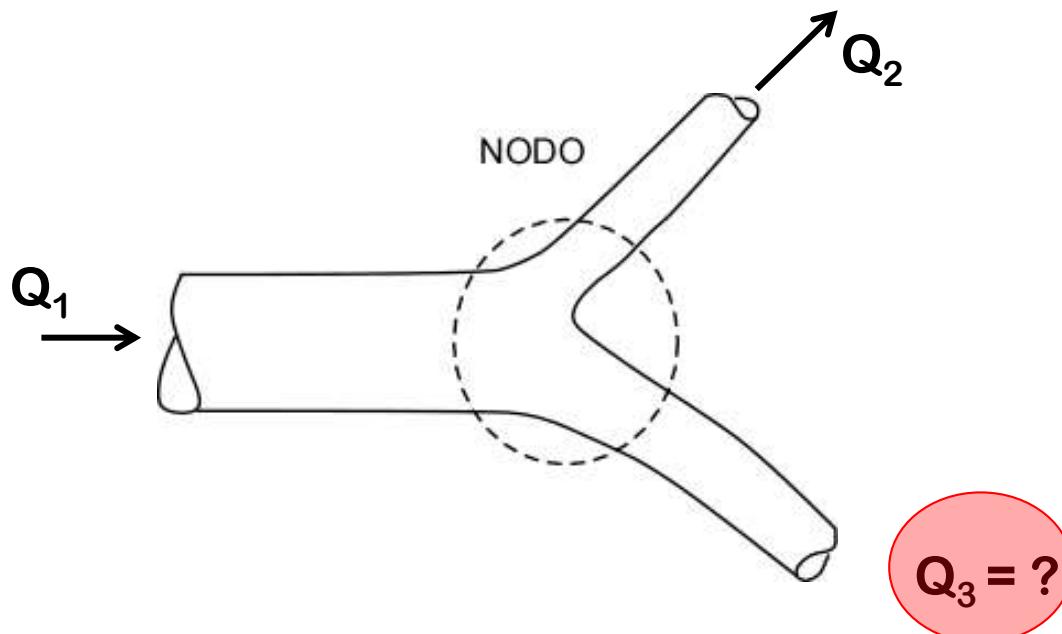
HP:

- (a) fluido incomprimibile
- (b) moto stazionario O moto vario + contorno deformabile

$$\sum_{j=1}^{N_{in}} Q_{in_j}(t) = \sum_{j=1}^{N_{out}} Q_{out_j}(t)$$

La somma delle portate che entrano nel nodo è uguale alla somma delle portate che escono dal nodo

Equazione di continuità in un nodo



$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

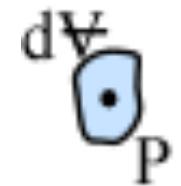
$$Q_3 = Q_1 - Q_2$$

Se $Q_3 > 0$ allora hp è corretta, i.e. Q_3 esce dal nodo

Se $Q_3 < 0$ allora hp è sbagliata, i.e. Q_3 entra nel nodo

Principio di conservazione della massa (Equazione di continuità) in forma locale

Conservazione della massa di un volume elementare



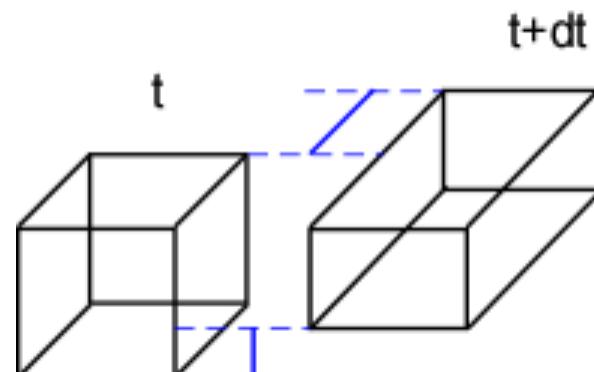
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Hp: fluido incompressibile

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Significato fisico: il volume di un
elementino fluido ‘confondibile’ con
un punto non cambia nel tempo



ELEMENTI DI CINEMATICA DEI CAMPI FLUIDI

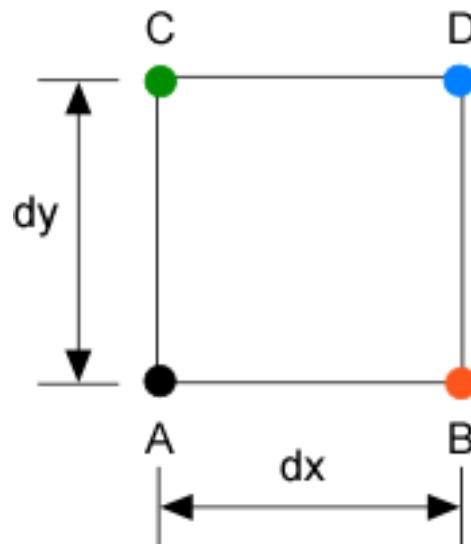
SPOSTAMENTI E DEFORMAZIONI DI UN ELEMENTO FLUIDO

(significato fisico di $\nabla \vec{v}$)

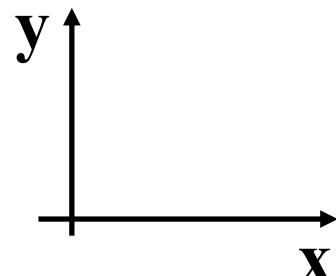
$$\nabla \vec{v} = D = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ipotesi (semplificative – risultati estendibili al caso 3D completo):

- campo fluido 2D
- non nulla la sola v_x



Elemento fluido infinitesimo di lati (dx, dy)



Velocità dei vertici dell'elemento al tempo t:

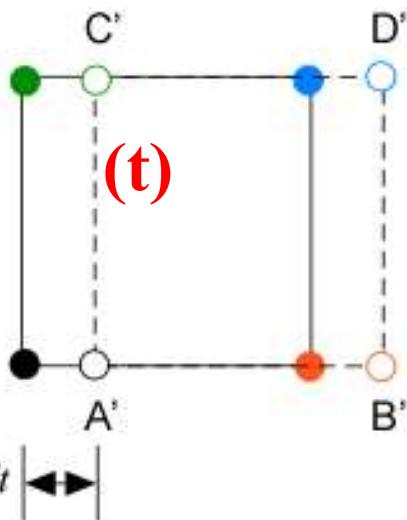
$$A: (v_x, 0)$$

$$C: \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, 0 \right)$$

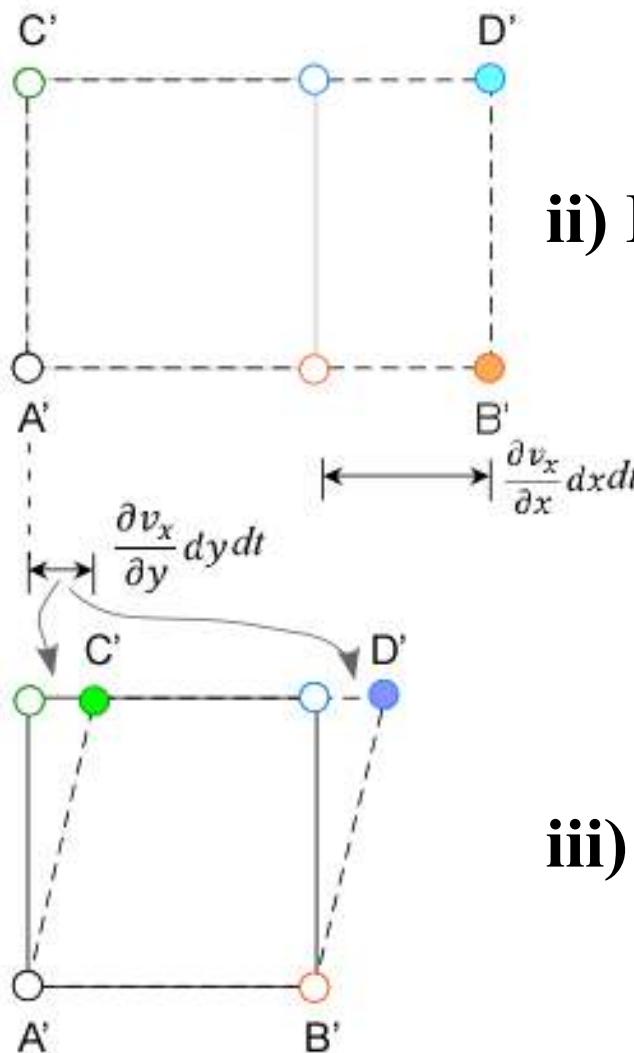
$$B: \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, 0 \right)$$

$$D: \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy, 0 \right)$$

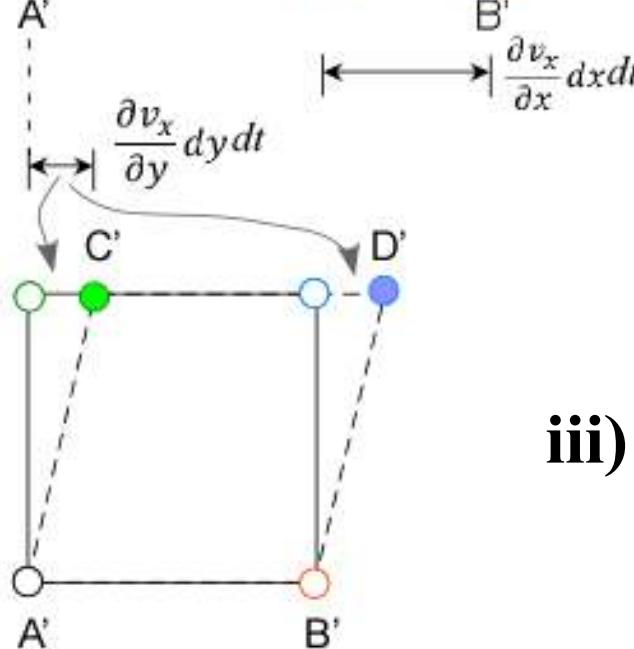
Dove si trovano i vertici dell'elemento a $(t+dt)$?



i) A,B,C,D: spostamento lungo x pari a $v_x dt$

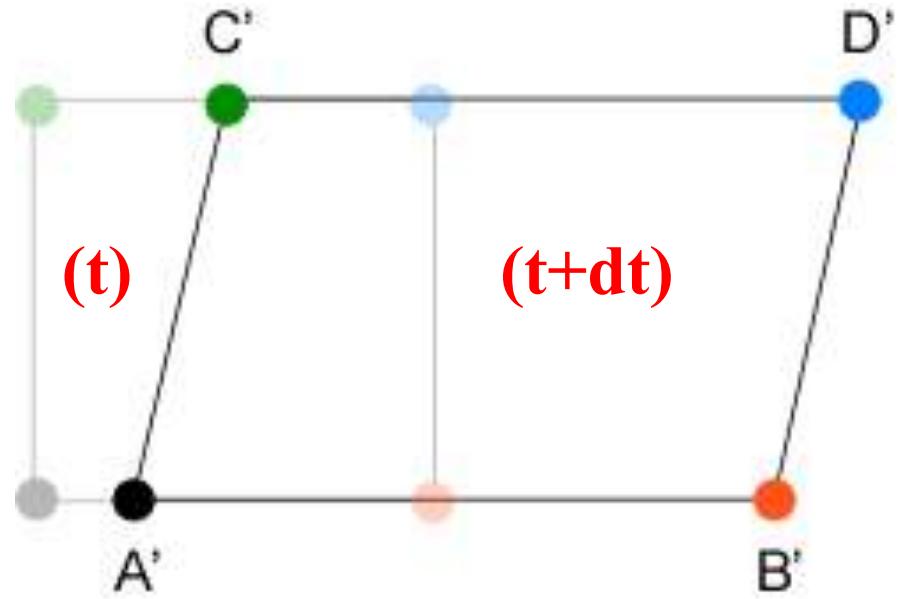
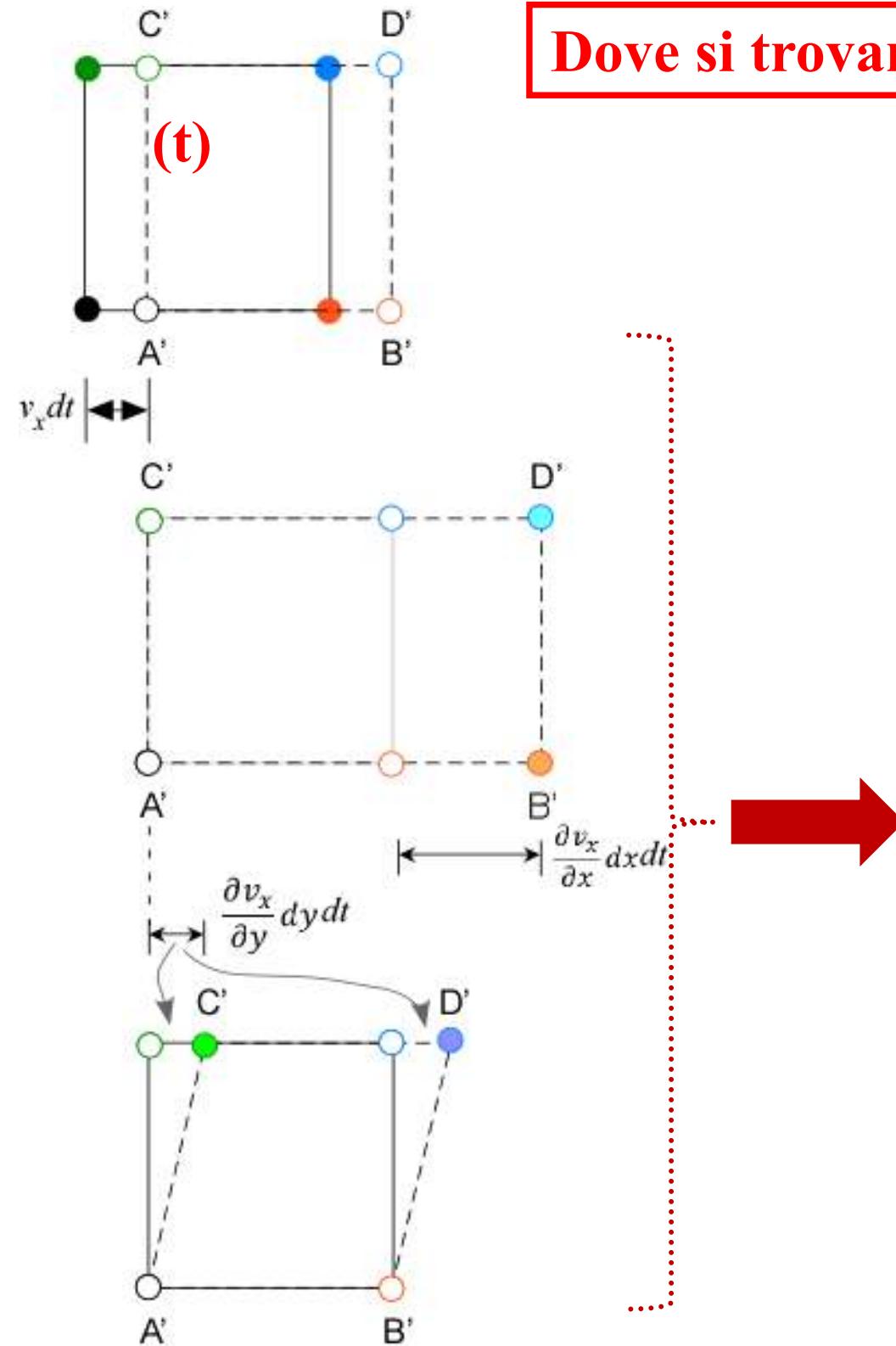


ii) B,D: spostamento lungo x pari a $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$



iii) C,D: spostamento lungo x pari a $\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt$

Dove si trovano i vertici dell'elemento a $(t+dt)$?



Nuove posizioni:

$$A' = A + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$$

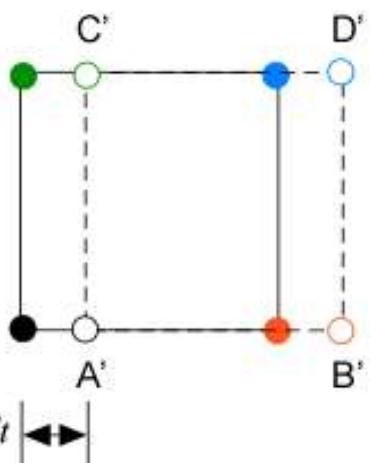
$$B' = B + ?$$

$$C' = C + ?$$

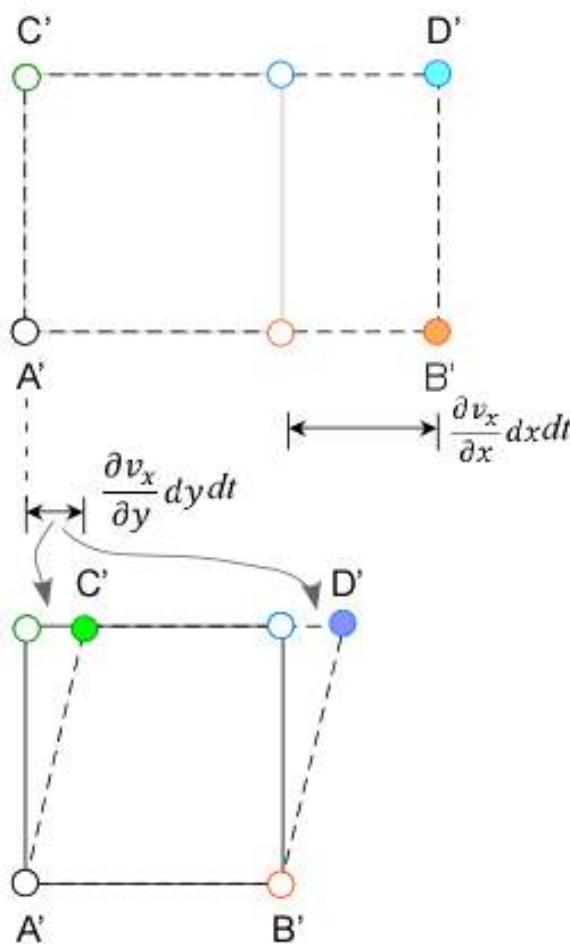
$$D' = D + ?$$

homework

ATTENZIONE



i) Per effetto di v_x l'elemento subisce una
TRASLAZIONE RIGIDA lungo x



ii) Per effetto di $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ l'elemento subisce una
DEFORMAZIONE LINEARE lungo x

iii) Per effetto di $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ l'elemento subisce una
DEFORMAZIONE ANGOLARE nel piano xy

ATTENZIONE

I medesimi ragionamenti possono farsi:

- nel piano xy assumendo $v_y \neq 0$

- v_y determina *TRASLAZIONE RIGIDA lungo y*
- $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ determina una *DEFORMAZIONE LINEARE lungo y*
- $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ determina una *DEFORMAZIONE ANGOLARE NEL PIANO xy*

OSSERVAZIONE: la **deformazione angolare nel piano xy** risulta quindi **complessivamente** prodotta da $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$

ATTENZIONE

I medesimi ragionamenti possono farsi:

- nel piano xz assumendo $v_x \neq 0$ e $v_z \neq 0$
- nel piano yz assumendo $v_y \neq 0$ e $v_z \neq 0$

Homework: estendere i risultati precedenti ai piani xz e yz («chi fa cosa» in termini di componenti delle velocità, del gradiente di velocità, di movimenti e di deformazioni)

RIASSUMENDO

\vec{v} determina la **traslazione rigida** dell'elemento fluido in x,y,z

$$\nabla \vec{v} = D = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Determina **deformazioni linearie e angolari** dell'elemento fluido nei tre piani coordinati

$$\frac{\partial v_i}{\partial i}$$

i,j = x,y,z

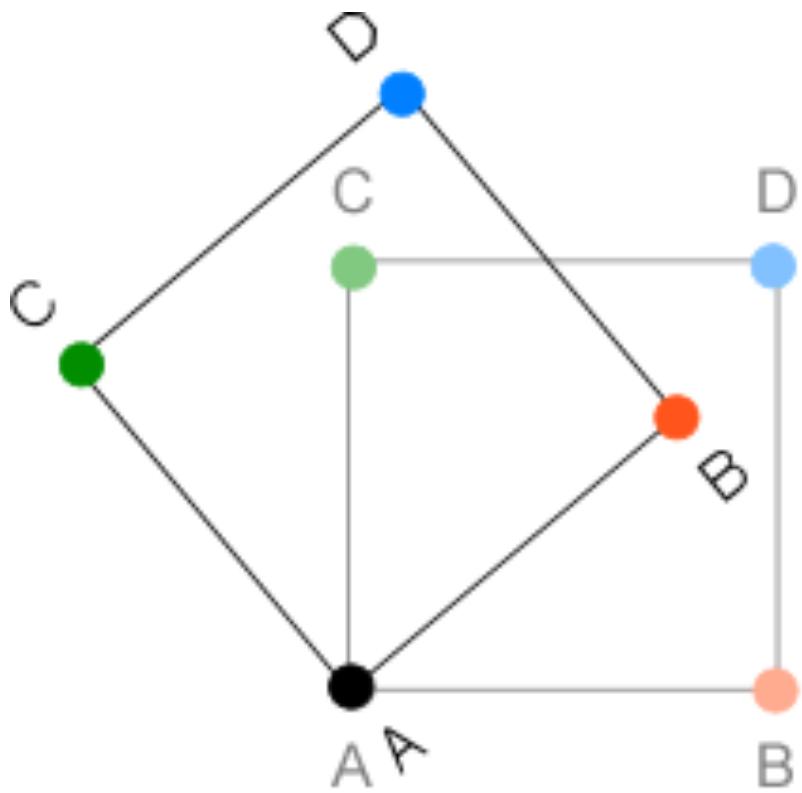
$$\frac{\partial v_i}{\partial j} + \frac{\partial v_j}{\partial i}$$

i ≠ j

«regola» mnemonica

PER CONCLUDERE

L'elemento fluido è in generale soggetto non solo a traslazione, deformazione lineare e deformazione angolare **MA ANCHE A ROTAZIONE RIGIDA**



L'entità della rotazione dipende ancora da $\frac{\partial v_i}{\partial j}$ ($i \neq j$), valendo le seguenti relazioni:

Velocità di rotazione angolare $\vec{\omega}$:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

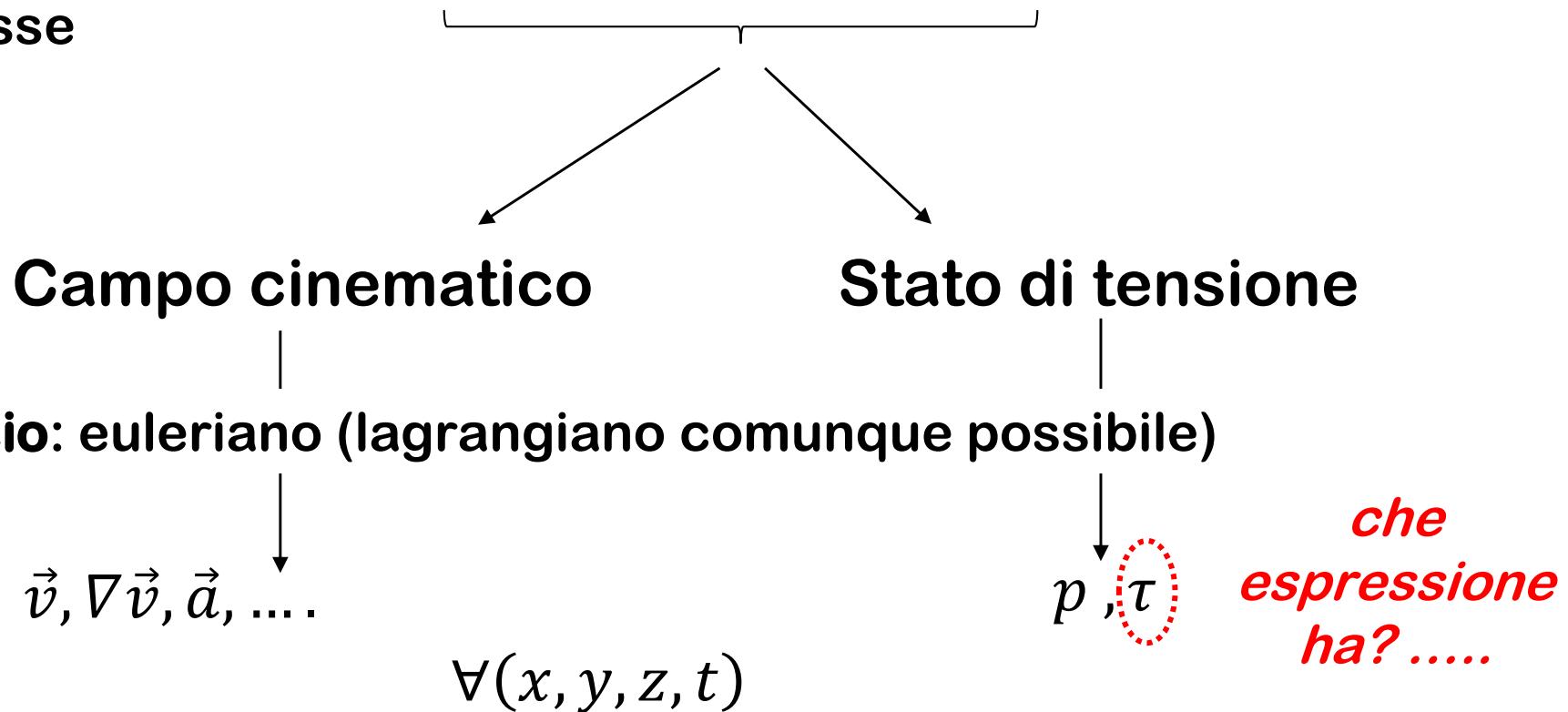
$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

4

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

Oggetto: fluidi in movimento, CON INCLUSIONE delle forze che governano il movimento stesso

Obiettivo: determinare le grandezze dinamiche del problema fluido di interesse



ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

Principio di conservazione della quantità di moto in forma locale:

eq. Di NAVIER_STOKES

$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Esprime la condizione di equilibrio delle forze applicate a un volumetto fluido infinitesimo (punto P)

∇p rappresenta il contributo delle forze di pressione;

$\gamma \nabla h$ rappresenta il contributo della forza peso;

$-\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$ rappresenta il contributo della forza di inerzia;

$\mu \nabla^2 \vec{v}$ rappresenta il contributo delle forze di attrito viscose.

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

Conservazione quantità di moto

$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

(*) $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ *Conservazione massa*

Opportune c.i. e c.c.

→ [4 incognite (v_x, v_y, v_z, p) e 4 eq.ni]

Qualsiasi moto di fluido incompressibile newtoniano è descritto da questo set di equazioni.

Obiettivo della dinamica dei fluidi!

$$\vec{v}, p, \tau \quad \forall (x, y, z, t)$$

Equazioni alle derivate parziali, non lineari

La soluzione analitica del problema (*) è possibile solo in pochi casi reali (altrimenti: numerica).

Vedremo i casi ‘semplici’ E svilupperemo metodi per descrivere comunque la dinamica di campi di moto fluido per i quali () non ha soluzione analitica.*

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Le caratteristiche di un campo di moto governato da N.S risultano influenzate in maniera determinante dal

NUMERO DI REYNOLDS

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Esprime e quantifica il rapporto tra le forze di inerzia (convettiva) e le forze viscose

Parametro adimensionale (*verificarlo sostituendo le unità di misura!*)

L'entità di Reynolds dice quali caratteristiche presenta il moto (*lo vedremo tra poco*)

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Grandezze scala (o di riferimento):

U_0 : velocità di riferimento

L : lunghezza di riferimento

Both U_0 and L are characteristic of the specific flow field, and ‘describe’ it from the global point of view

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Uguale al **rapporto** tra (convective) **forze di inerzia (convettiva)** e **forze viscose**

Inertial Force: $m \cdot a \sim \rho L^3 \cdot U_0 / (L/U_0) = \rho L^2 \cdot U_0^2$

Viscous Force: $\tau \cdot A \sim \mu U_0 / L \cdot L^2 = \mu U_0 L$

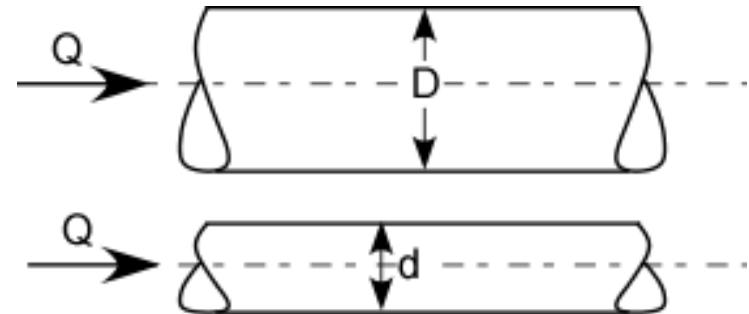
IF/VF = $\rho U_0 L / \mu = Re$ cvd

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Esempio: Moto in un condotto circolare

U_0 : ?
 L : ?



Provare a rispondere!

Quale velocità descrive **globalmente** il moto nel condotto?

Quale «lunghezza» descrive **globalmente** il moto nel condotto?

dimensione lineare! Non per forza la «lunghezza del campo di moto (i.e. dimensione lineare ‘longitudinale’)»

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

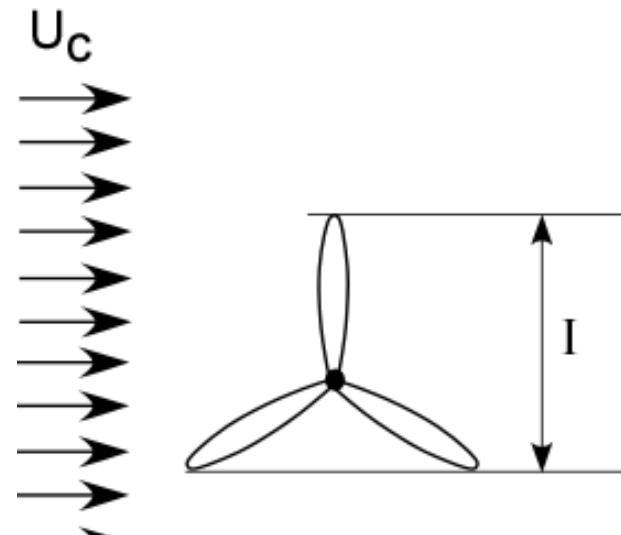
$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Campo di moto: Corrente d'aria con velocità costante U_c che impatta su un'elica

Esempio: moto attorno a un'elica

U_0 : U_c
 L : I

$$Re = \frac{U_c I}{\nu}$$



Fluido: aria – $\nu = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$U_c = 30 \text{ km/h} = 8 \text{ m/s}$

$I = 2 \text{ m}$

$Re = 1.06 \times 10^6$

Pala eolica



$U_c = 3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$

$I = 0,02 \text{ m}$

$Re = 1.3 \times 10^3$

girandola

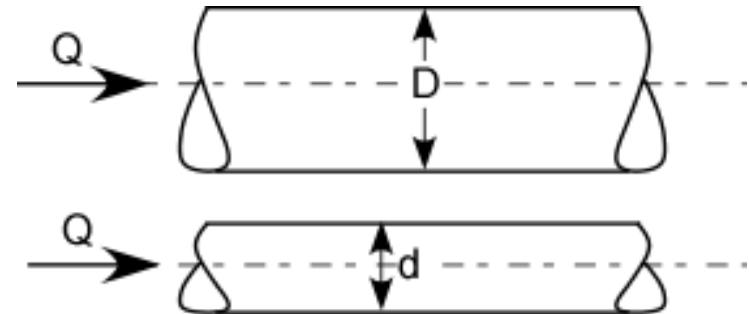


ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu}$$

Esempio: moto in condotto circolare

U₀: V velocità media = Q/A
L: D



$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

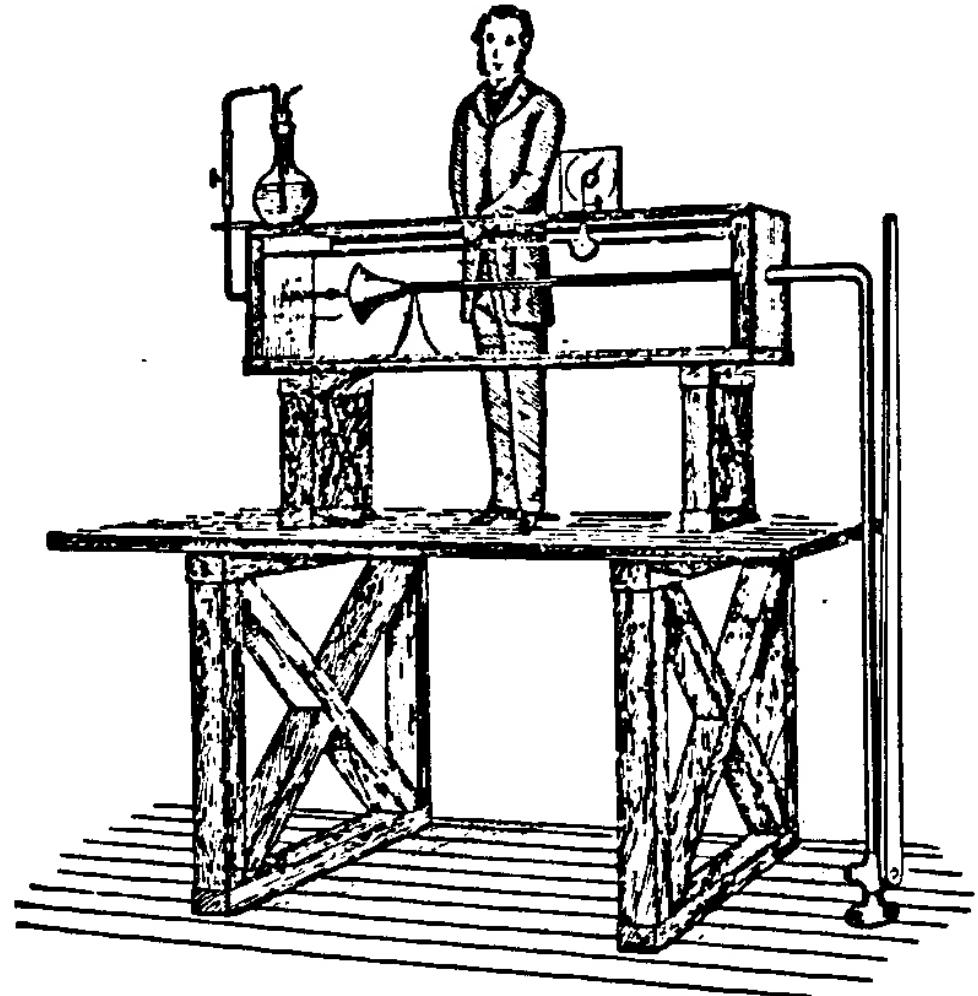
Moto in condotto circolare

Ovvio che, a parità di VD, la viscosità del fluido può cambiare le carte in tavola....

DESCRIZIONE DELL'ESPERIMENTO DI REYNOLDS



Osborne Reynolds (1842–1912), born in Belfast, made fundamental contributions to our understanding of fluid dynamics.



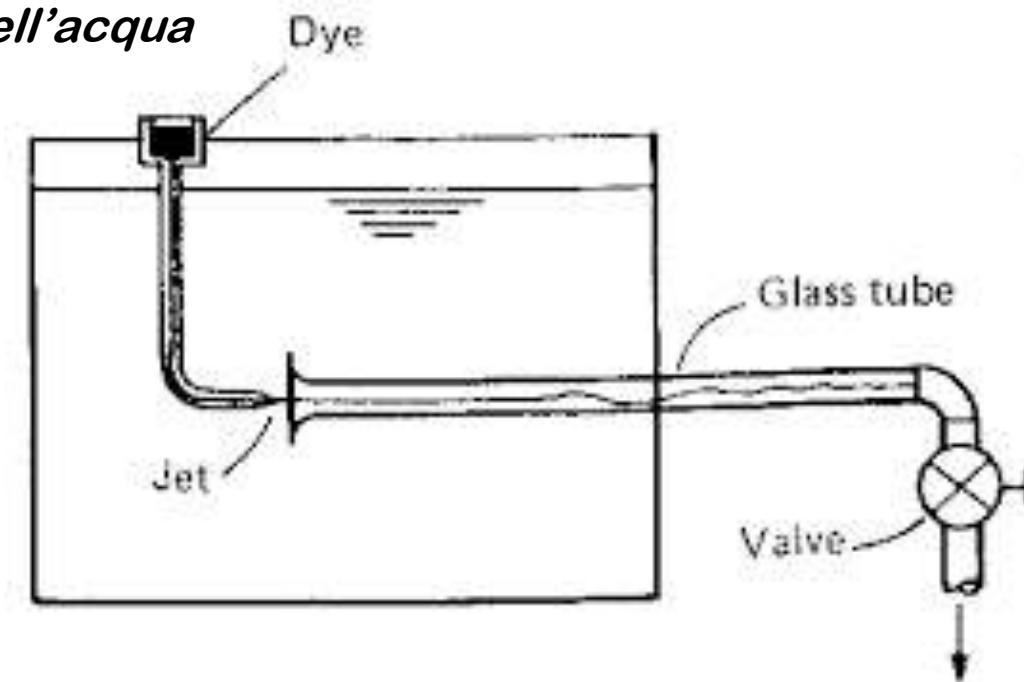
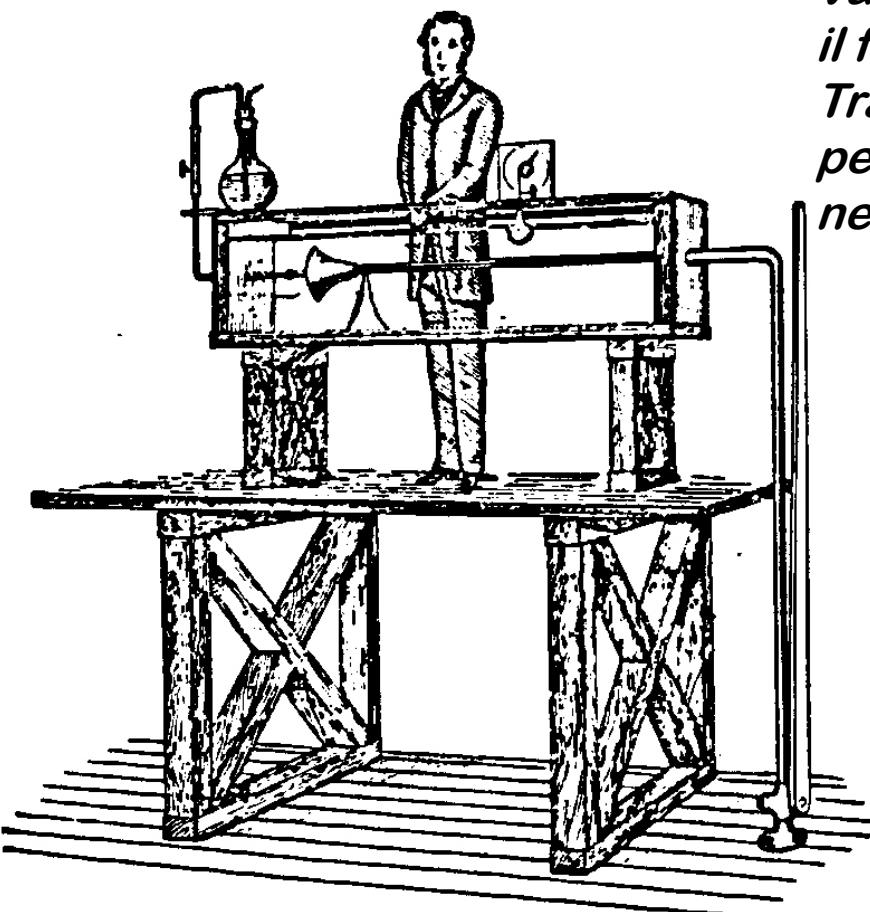
DESCRIZIONE DELL'ESPERIMENTO DI REYNOLDS

Allestimento sperimentale

Serbatoio che alimenta un condotto circolare. Fluido: acqua

Valvola di regolazione nella sezione terminale, controlla il flusso

Tracciante colorato iniettato nella sezione di ingresso per visualizzare il comportamento delle linee di corrente nel moto dell'acqua



$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu}$$

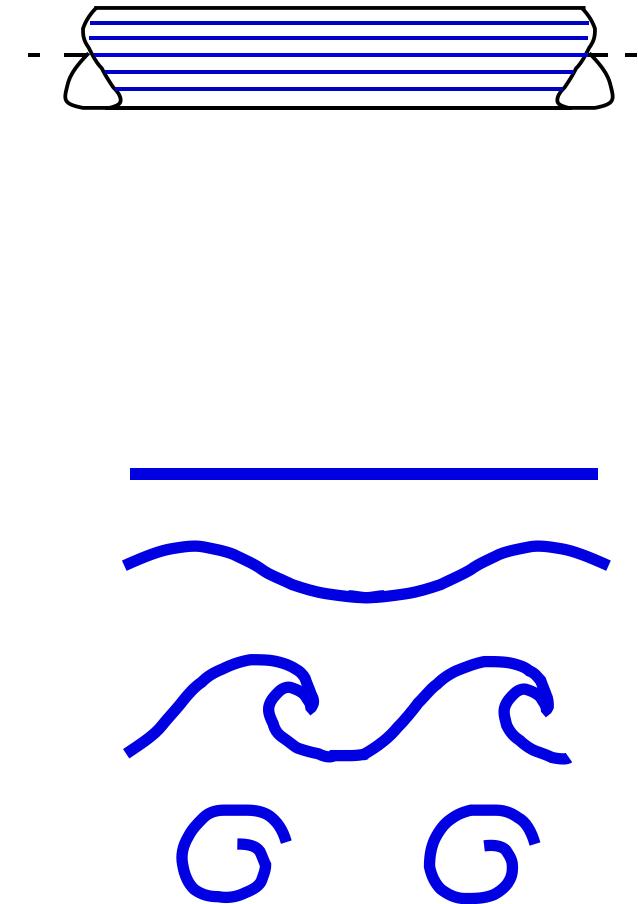
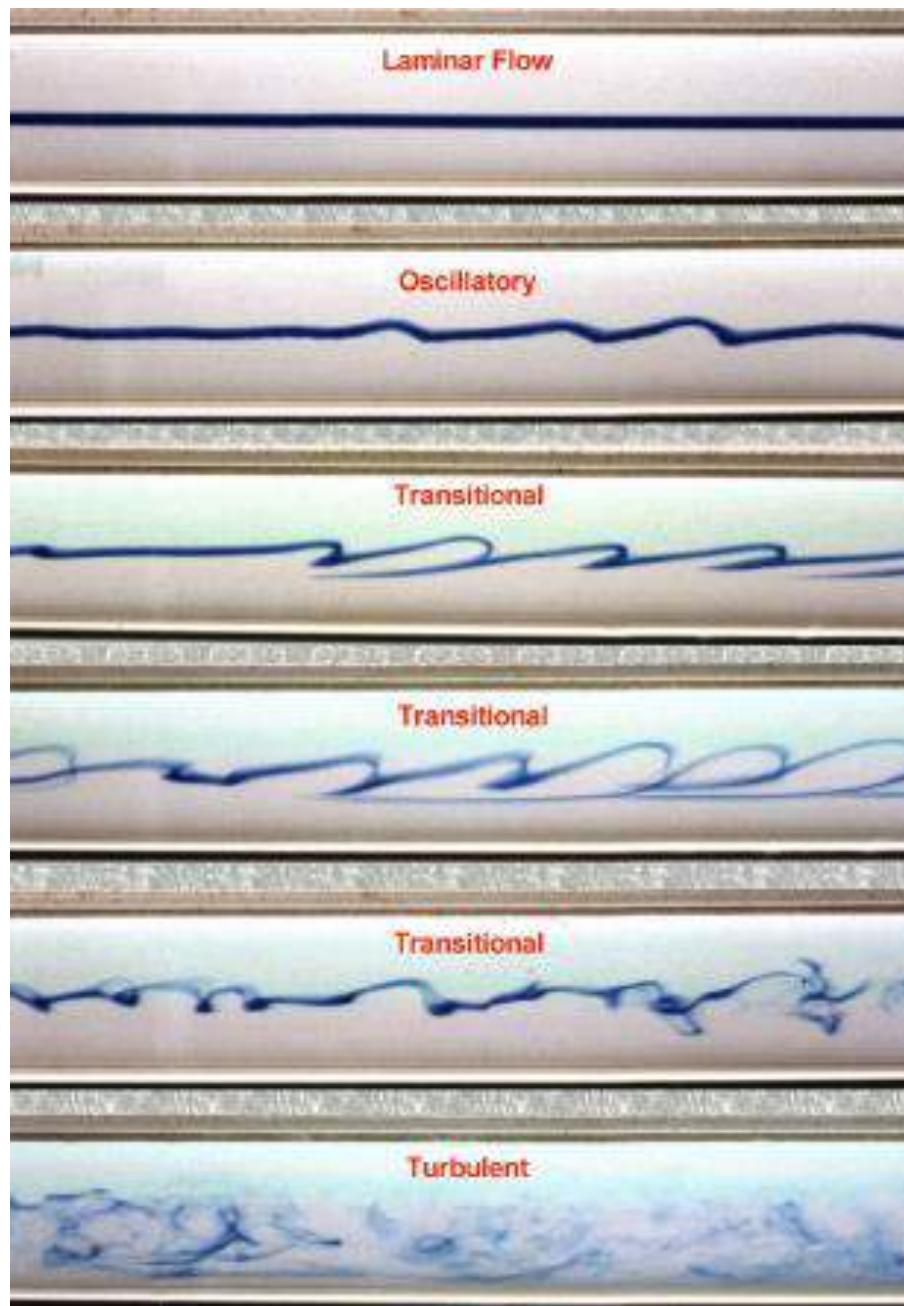
$$Q \uparrow \rightarrow Re \uparrow$$

aumentando Q , aumenta Reynolds

ESPERIMENTO DI REYNOLDS: DESCRIZIONE

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D\nu}$$

Portata → Reynolds crescente



VIDEO!

DESCRIZIONE DELL'ESPERIMENTO DI REYNOLDS

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D\nu}$$

Moto uniforme all'interno di un condotto circolare:

- regime laminare $Re < 2000 \div 2500$
- regime turbolento $Re > 4000$ circa

- Valori intermedi di Re:

- difficile classificazione.
- condizioni di laminarità ovvero di turbolenza in successione nel tempo e nello spazio

ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI NEWTONIANI INCOMPRESSIBILI

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \text{Opportune c.i. e c.c.} \end{array} \right.$$

→ [4 incognite (v_x, v_y, v_z, p) e 4 eq.ni] $\vec{v}(P, t); p(P, t) \quad \forall (P, t)$

In realtà, questo è possibile in termini pratici (soluzione analitica del problema (*)) solo in pochi casi particolari **di moto LAMINARE**

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

IPOTESI DI LAVORO:

Fluido newtoniano incompressibile

Condotto rettilineo di diametro costante

Moto permanente

Moto laminare

$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

c.c.

Moto laminare

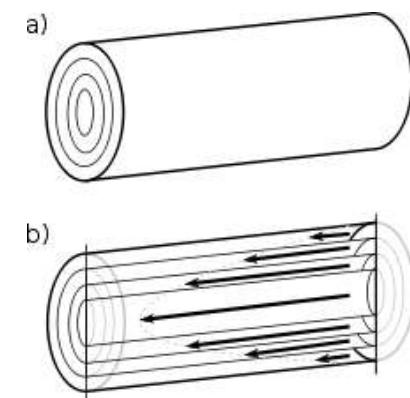
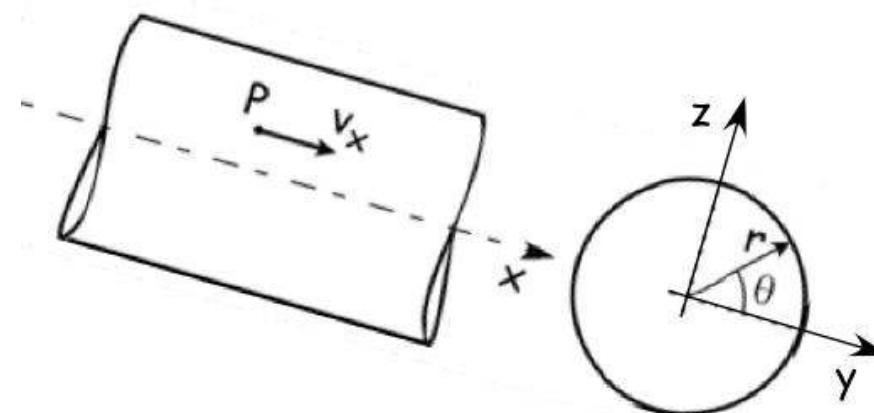
Condotto rettilineo

di diametro costante

Moto permanente



Il fluido si muove solo lungo x, secondo lamine cilindriche concentriche



MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

Conservazione massa

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

IPOTESI:

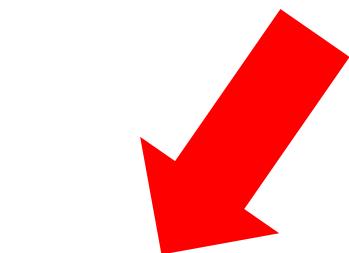
Condotto rettilineo di diametro costante

Moto laminare

Moto permanente

$$\rightarrow v_x \neq 0 \quad v_y = v_z = 0$$

*Tenendo conto nella (1)
di quanto sopra*



$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow v = v_x = v_x(y, z, t)$$

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

Conservazione quantità di moto $\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v}$ Eq.ne Navier-Stokes vettoriale

$v = v_x = v_x(y, z, t)$ Unica componente non nulla



Eq.ni Navier-Stokes scalari

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}(p + \gamma h) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y}(p + \gamma h) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(p + \gamma h) = 0 \end{array} \right]$$

Scritte così perché?
Prossima slide

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) = 0$$

Hp fluido incompressibile!
→ γ può essere portato
dentro le derivate!

$$v_y = v_z = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow \vec{v} \nabla v_y = \vec{v} \nabla v_z = 0$$

$$\rightarrow \mu \nabla^2 v_y = \mu \nabla^2 v_z = 0$$

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

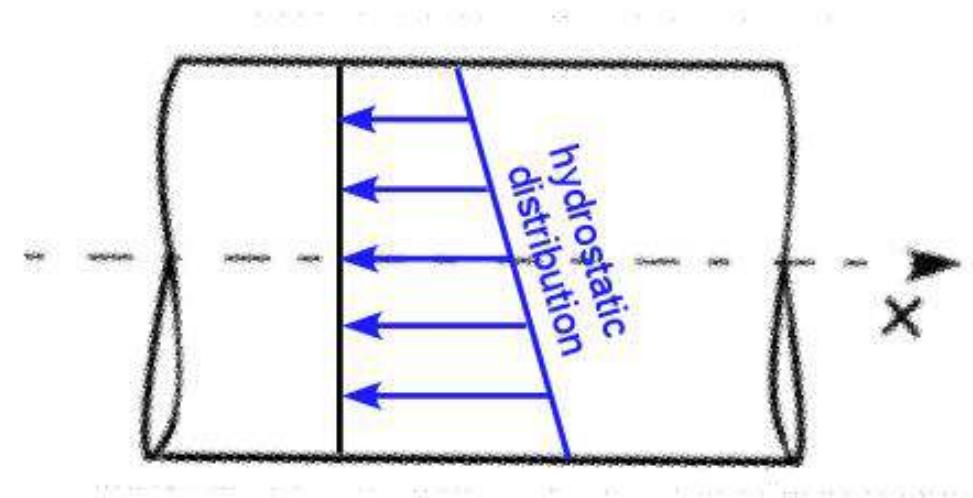
$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\bar{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \bar{v}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} (p + \gamma h) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma h) = 0 \end{cases}$$

Qual è il significato fisico di queste due equazioni, così scritte? Che informazione forniscono immediatamente sulla dinamica del moto in esame?

$$(p + \gamma h) = \text{cost}(y, z)$$

i.e. nel moto in esame la pressione è distribuita idrostaticamente nella sezione (lungo la normale alla direzione del moto)



MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

- Il termine convettivo è nullo! $\vec{v} \nabla v_x = 0$

perché $v_y = v_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

- Il termine viscoso è come scritto

perché $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$

- Se ora si introduce anche l'ipotesi di stazionarietà del moto

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) = \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

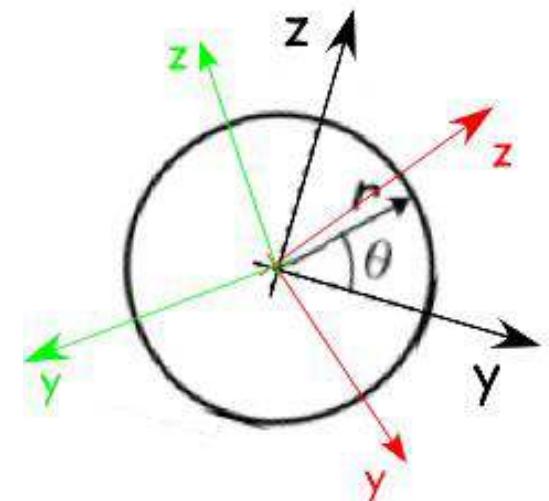
Homework:
svilupparlo per
esteso

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

- Osserviamo ora che per l'assialsimmetria del dominio geometrico, i.e. del campo di moto

$$y = z = r$$
$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}$$
$$v_x(r)$$



$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \gamma h) = 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}$$

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

La riscriviamo come

$$\frac{d^2 v_x}{dr^2} = \frac{1}{2\mu} \frac{d}{dx} (p + \gamma h)$$

Eq.ne differenziale lineare del 2° ordine

con l'obiettivo di integrarla per ricavare $v_x(r)$

- *Riscriviamo:*

$$\frac{d}{dx} (p + \gamma h) = \gamma \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) = \gamma \frac{dh^*}{dx}$$

$$h^* = \frac{p}{\gamma} + h$$

quota piezometrica

- *e introduciamo la **cadente piezometrica***

$$i = - \frac{dh^*}{dx}$$

N.B. h^ diminuisce nella direzione del moto!*

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

- e introduciamo la *cadente piezometrica*

$$i = -\frac{dh^*}{dx}$$

- ❖ adimensionale (m/m)
- ❖ positiva per assunzione
- ❖ Il segno ‘-’ compare di conseguenza perché h^* diminuisce nella direzione del moto («il moto avviene ‘consumando’ h^* »)
- ❖ indipendente da r (poiché $(p + \gamma h) = \text{cost}(y, z) = \text{cost}(r)$)



$$\frac{d^2 v_x}{dr^2} = \frac{-\gamma i}{2\mu}$$

è una costante!

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

- *Prima integrazione*

$$\frac{dv_x}{dr} = \frac{-\gamma i}{2\mu} r + c_1$$

- *Seconda integrazione*

$$v_x = \frac{-\gamma i}{2\mu} \frac{r^2}{2} + c_1 r + c_2$$



- *Condizioni al contorno per c_1 e c_2*

- *la velocità è massima sull'asse*
- *condizione di aderenza alla parete*

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

- *Condizioni al contorno per c_1 e c_2*

- la velocità è massima sull'asse
(vai a prossima slide)

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

$$\left. \frac{dv_x}{dr} \right|_{r=0} = c_1 = 0$$

- condizione di **aderenza alla parete**
(vai a prossima slide)

$$v_x \Big|_{r=r_0} = v_{parete} = 0$$

$$v_x \Big|_{r=r_0} = \frac{-\gamma i}{2\mu} \frac{r_0^2}{2} + c_2 = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{\gamma i}{2\mu} \frac{r_0^2}{2}$$

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

la velocità è massima sull'asse per l'assialsimmetria del problema

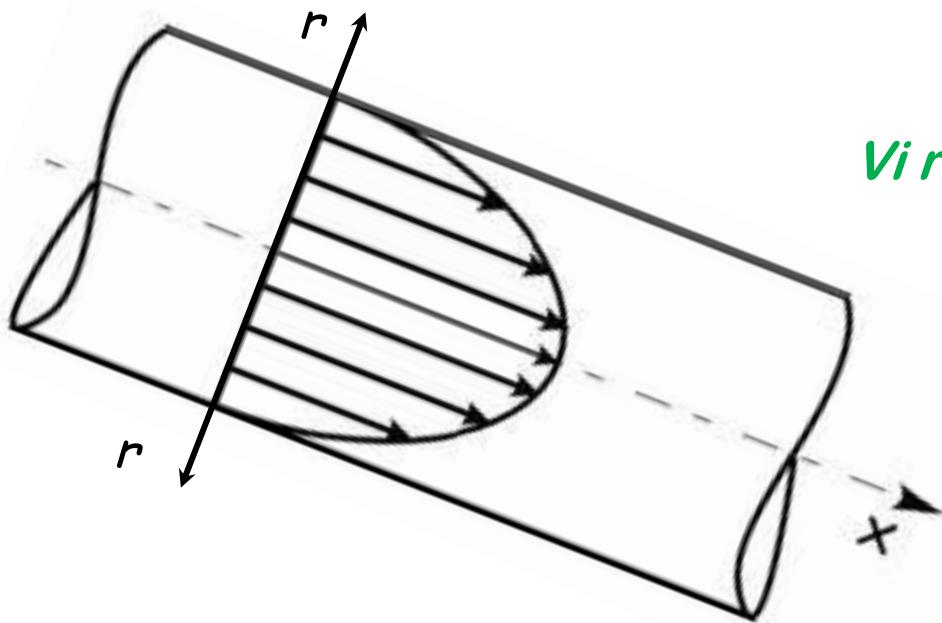
Aderenza alla parete: la velocità di un fluido viscoso in prossimità di una parete DEVE essere pari alla velocità della parete stessa!

Se così non fosse, a parete nascerebbero sforzi tangenziali infiniti (i.e. fisicamente non possibili)

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

- *Soluzione – PROFILO DI VELOCITA'*

$$v = v_x(r) = \frac{-\gamma i}{4\mu} (r^2 - r_0^2)$$



Vi ricorda qualcosa?



$$v_{max} = v_x(r = 0) = \frac{\gamma i}{4\mu} r_0^2$$

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

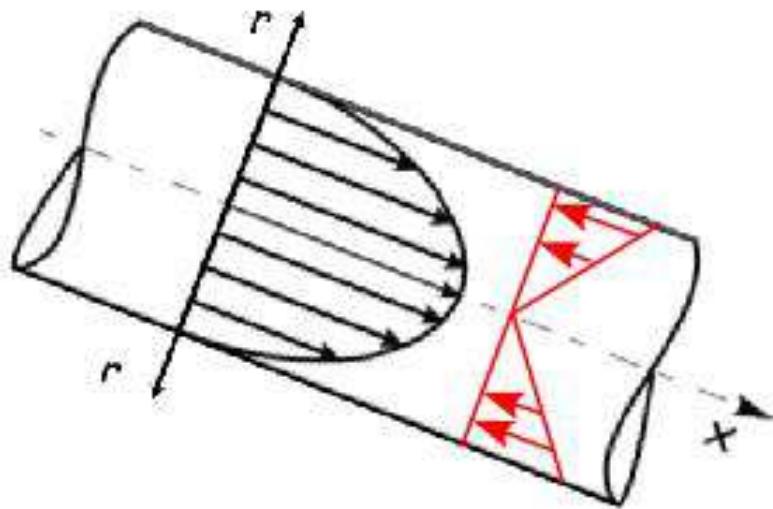


i.e. $y = -r$

$$\tau = -\mu \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\gamma i}{2} r$$



Andamento degli sforzi tangenziali nel moto di Poiseuille in un condotto



$\tau = 0$ nell'asse ($r=0$)

$\tau = \tau_{\max}$ sulla parete ($r=r_0$)

Attrito! Resistenza al moto!

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

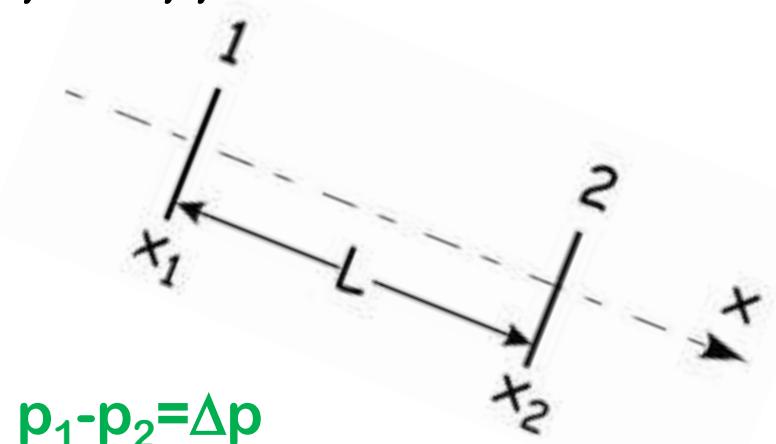
AMBITO EMODINAMICO

- Il moto di Poiseuille è il più semplice modello fluidodinamico con cui si può descrivere il flusso cardiovascolare. Limiti:
 - Grandi vasi: stazionarietà del modello, diametro costante in x
 - Microcircolazione: reologia newtoniana
- La forza gravitazionale viene usualmente trascurata rispetto al contributo della pressione
- Il gradiente di pressione in un tratto lungo L può approssimarsi con

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} = - \frac{p_1 - p_2}{L}$$



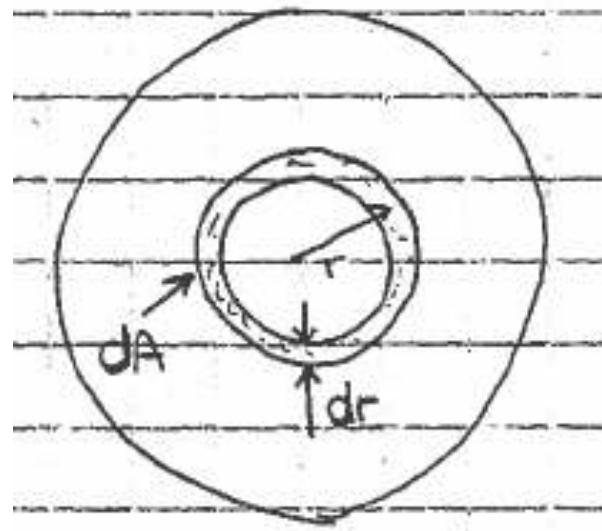
$$v_x(r) = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{(r_0^2 - r^2)}{4\mu}$$



MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

Portata:

$$Q = \int_A v_n dA \quad \rightarrow \quad Q = \int_A v_x dA$$



$$A = \pi r_0^2$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$\rightarrow Q = \int_0^{r_0} 2\pi r \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{(r_0^2 - r^2)}{4\mu} dr = \boxed{\frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu}}$$

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

$$\rightarrow Q = \int_0^{r_0} 2\pi r \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{(r_0^2 - r^2)}{4\mu} dr = \boxed{\frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu}}$$

Velocità media: $V = \frac{Q}{A} = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \frac{1}{\pi r_0^2} = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{r_0^2}{8\mu}$

$$= \frac{v_{max}}{2}$$

Homework: verificare l'uguaglianza tra velocità media e massima

Homework: ricavare l'espressione di Q e V ;
ricavare il legame tra velocità media e massima;
per il caso generale (effetto gravitazionale non trascurato).

MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

Riprendiamo l'espressione:

$$\rightarrow Q = \frac{p_2 - p_1}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu}$$

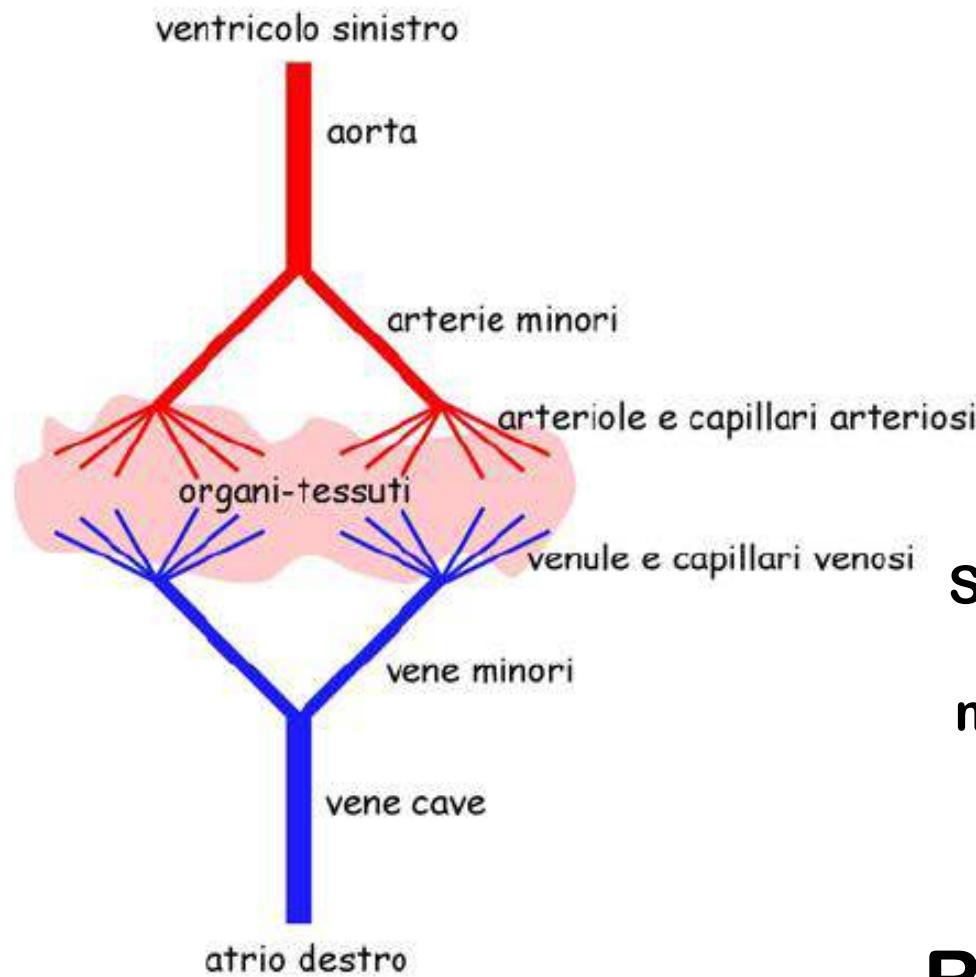
Spesso si trova scritta nella forma:

$$Q = \frac{\Delta p}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu} = \frac{\Delta p}{R}$$

Con

$$R = \frac{8\mu L}{\pi r_0^4}$$

RESISTENZA DEL CONDOTTO

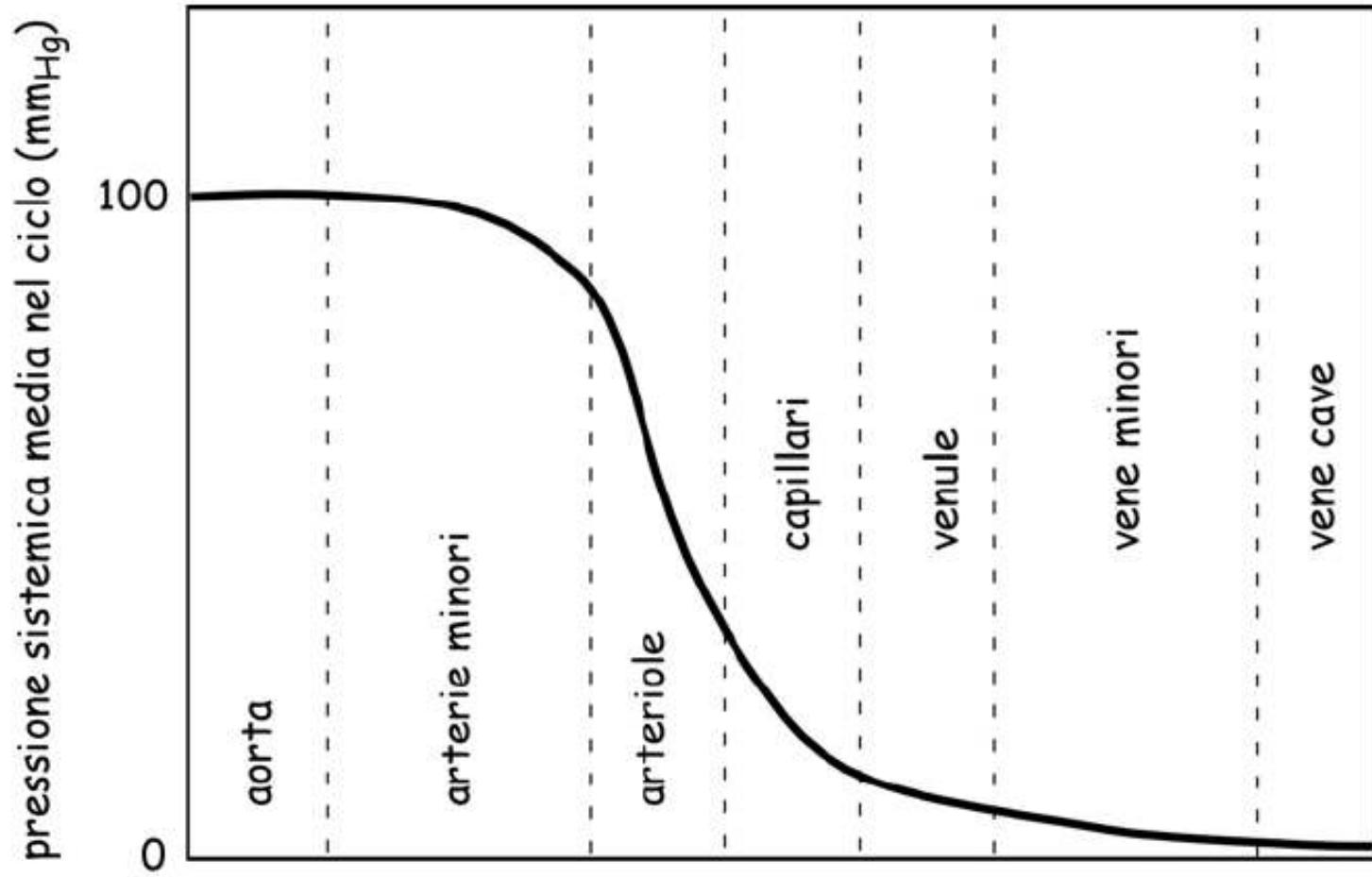


$$R = \frac{8\mu L}{\pi r_0^4}$$

!!!!

Si intuisce che i vasi con resistenza maggiore sono quelli di calibro minore: arteriole, venule e capillari
RESISTENZA PERIFERICA

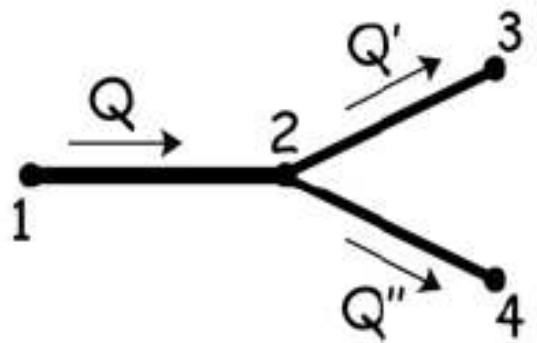
$R_{\text{aorta}} \ll R_{\text{capillari}}$



$$\Delta p = Q \cdot R$$

$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{aorta}} = Q_{\text{capillari}} \\ R_{\text{aorta}} \wedge R_{\text{capillari}} \end{array} \right.$
→
 $\Delta p_{\text{capillari}} \gg \Delta p_{\text{aorta}}$

Vasi in serie: ripartizione della portata



$$Q = \frac{\Delta p_{1 \rightarrow 2}}{R} = \frac{p_1 - p_2}{R}$$

$$Q' = \frac{\Delta p_{2 \rightarrow 3}}{R'} = \frac{p_2 - p_3}{R'}$$

$$Q'' = \frac{\Delta p_{2 \rightarrow 4}}{R''} = \frac{p_2 - p_4}{R''}$$

$$Q = Q' + Q''$$

Ipotesi: $p_3 = p_4$

$$Q'' = \frac{\Delta p_{2 \rightarrow 3}}{R''} = \frac{p_2 - p_3}{R''}$$

Vasi in serie: ripartizione della portata

$$\Delta p_{2 \rightarrow 3} = Q' R' = Q'' R'' = (Q - Q') R''$$



$$Q' (R' + R'') = QR''$$



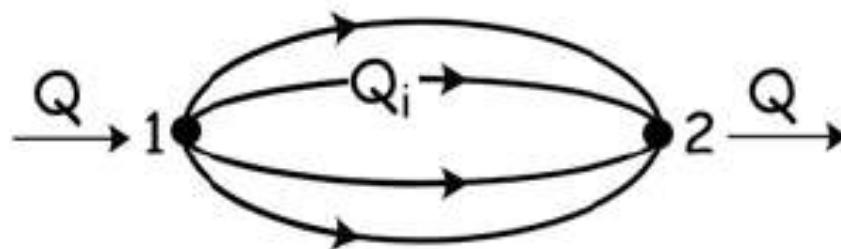
$$Q' = Q \frac{R''}{(R' + R'')} \quad Q'' = Q \frac{R'}{(R' + R'')}$$

La portata si ripartisce in funzione della resistenza del singolo vaso

i.e. resistenza maggiore implica portata minore

Il caso particolare: $R' = R'' \rightarrow Q' = Q'' = Q/2$

Vasi in parallelo: resistenza totale



$$Q_i = \frac{\Delta p_{1 \rightarrow 2}}{R_i}$$

$$Q = \sum_{i=1}^N Q_i = \Delta p_{1 \rightarrow 2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Introducendo la resistenza totale come:

$$Q = \frac{\Delta p_{\text{tot}}}{R_{\text{tot}}} = \frac{\Delta p_{1 \rightarrow 2}}{R_{\text{tot}}}$$

R_i tutte uguali tra loro

$$\rightarrow \frac{1}{R_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{N}{R_i} \Rightarrow R_{\text{tot}} = \frac{R_i}{N}$$

Esempio applicativo

Aorta:

$$r_{Ao} = 1.5 \text{ cm}$$

$$L_{Ao} = 50 \text{ cm}$$

$$R_{Ao} = \frac{8\mu}{\pi r_{Ao}^4} L_{Ao} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0.015^4} 0.5 \cong 1 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}}$$

$$R_{Art} = \frac{8\mu}{\pi r_{art}^4} L_{Art} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (7.5 \cdot 10^{-6})^4} 1 \cdot 10^{-3} \cong 3 \cdot 10^{15} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{s}}$$

R_{art}/R_{Ao} vale cioè circa $3 \cdot 10^{10}$!

arteriole sistema di vasi in parallelo $N = 3 \cdot 10^8$

$$R_{tot_art} = \frac{R_{art}}{N} = \frac{3 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^8} = 10^7$$

R_{tot_art}/R_{Ao} risulta perciò dell'ordine di 100

Arteriola singola

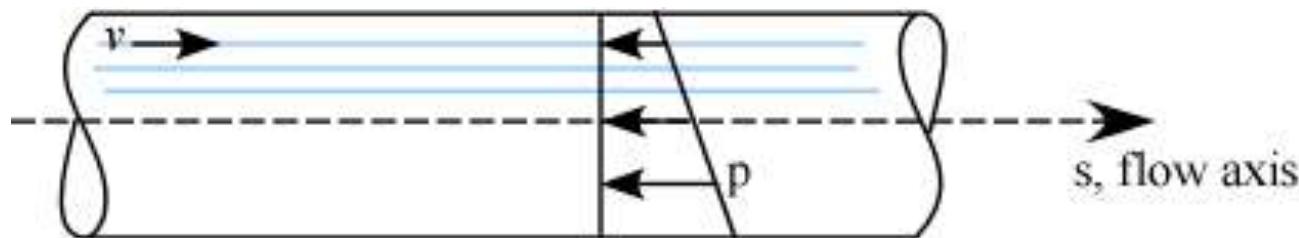
$$r_{art} = 7.5 \mu\text{m}$$

$$L_{Art} = 1 \text{ mm}$$

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

Corrente monodimensionale (1D)

- Il moto avviene lungo una direzione prevalente, **sensibilmente rettilinea** (asse della corrente)
- $L \gg B$, dove L ande B sono la dimensone longitudinale della corrente, rispettivamente (e.g. aorta toracica&addominale $L=30$ cm, $B=D=2$ cm)



- Le linee di corrente sono parallele all'asse, e così pure la velocità
- Distribuzione idrostatica della pressione nella direione normale al moto (all'asse s), i.e. nella sezione.

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

E : energia specifica nel generico punto P al generico istante t (i.e. energia dell'elementino fluido) - «carico totale»

$$E = \frac{p}{\gamma} + h + \frac{v^2}{2g}$$

p : pressione

h : quota geodetica

v : velocità (modulo della vel)

} nel punto P del campo di moto
(non necessariamente corrente 1D!)

$h^* = p/\gamma + h$ altezza piezometrica
o carico idraulico

$$E = h^* + \frac{v^2}{2g}$$

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- E è misurata in [m]; è l'energia (di un volumetto fluido) *per unità di peso*.

dV volume elementino fluido in P, di densità ρ → $dm = \rho dV$
è la massa

$$dH_{\text{pot}} = dm \cdot g \cdot h = \rho dV \cdot g \cdot h = \underbrace{\gamma dV h}_{\text{peso dell'elementino}}$$

→ $h = \frac{dH_{\text{pot}}}{\gamma dV}$ è l'energia potenziale per unità di peso

$$\frac{p}{\gamma}$$
 è l'energia «di pressione» per unità di peso

$$\frac{v^2}{2g}$$
 è l'energia cinetica per unità di peso

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- Energia specifica della corrente in una generica sezione (corrente 1D):

nel generico $P \in A$

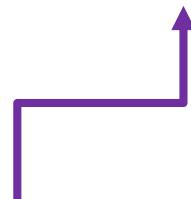
$$\begin{aligned} E_{1D} &= \frac{1}{A} \int_A EdA = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{p}{\gamma} + h + \frac{v^2}{2g} \right) dA \\ &= \underbrace{\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) dA}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{A} \int_A \frac{v^2}{2g} dA}_{(**)} \end{aligned}$$

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- Energia specifica della corrente in una generica sezione (corrente 1D):

Si può dimostrare che:

$$(*) \quad \int_A \left(\frac{p}{\gamma} + h \right) dA = \frac{p_G}{\gamma} + h_G = \frac{p}{\gamma} + h$$



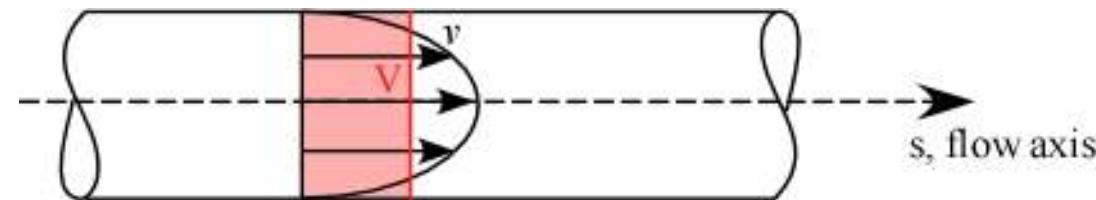
In qualsiasi punto!
Distribuzione idrostatica di p nella sezione!

Velocità media nella sezione!

$$(**) \quad = \frac{1}{A} \int_A \frac{v^2}{2g} dA = \alpha \frac{V^2}{2g}$$

con:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \frac{v^2}{V^2} dA$$

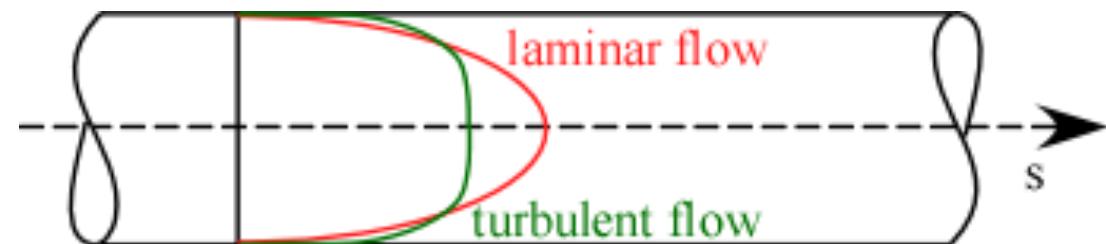


Fattore di correzione che tiene conto
dell'effettivo profilo di velocità nella sezione

Per condotto circolare e moto
uniforme:

$$\alpha = 2 \text{ laminare}$$

$$\alpha \sim 1 \text{ turbolento}$$



Moto di Poiseuille! Soluzione esatta!

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

In conclusione:

- Energia specifica della corrente in una generica sezione (corrente 1D):

$$E = \frac{p}{\gamma} + h + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

$$E = h^* + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

Nota: il pedice 1D si omette

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- Il moto di una corrente 1D può essere descritto mediante la

**Equazione di conservazione
dell'energia specifica**
(forma differenziale o
«locale»)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{1}{g} \beta \frac{\partial V}{\partial t} - j$$

$\frac{1}{g} \beta \frac{\partial V}{\partial t}$: inerzia temporale del moto

β : fattore di correzione

Condotto circolare e moto uniforme:

$\beta = 1,33$ laminare

$\beta \sim 1$ turbolento

j : dissipazione di energia per unità di lunghezza (e di peso)

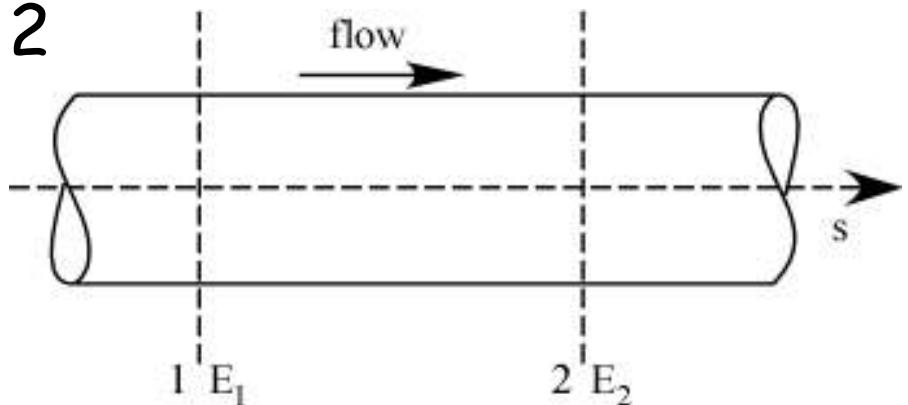
- [adimensionale]

- Positiva per definizione

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- Integrazione tra sezioni 1 e 2

$$\int_1^2 \frac{\partial E}{\partial x} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{g} \beta \frac{\partial V}{\partial t} - j \right) dx$$



$$E_2 - E_1 = -\frac{\beta}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} dx - \int_1^2 j dx$$

Equazione di conservazione
dell'energia specifica
Forma globale

$$E_2 - E_1 = -\frac{\beta}{g} \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} dx - \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

Dissipazione totale di energia tra
sezione 1 e sezione 2

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- Hp moto stazionario $E_2 - E_1 = -\Delta E_{1 \rightarrow 2}$
 $\left(\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \right)$

$$E_1 - E_2 = \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

L'energia della sezione di monte meno l'energia della sezione di valle è pari alla dissipazione di energia che si produce tra le due sezioni (i.e. 'lungo il percorso').

- La dissipazione di energia è dovuta al carattere viscoso del fluido. Cioè, se il fluido è ideale o perfetto (viscosità nulla!) $\Delta E_{1 \rightarrow 2} = 0$ and l'equazione scritta sopra diventa

$$E_1 = E_2 = \text{const}$$

Principio di Bernoulli

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- Meccanismi fisici della dissipazione di energia specifica:

$$\Delta E_{1 \rightarrow 2} = \Delta E_{1 \rightarrow 2}^{\text{cont}} + \Delta E_{1 \rightarrow 2}^{\text{loc}}$$

Perdite continue

Perdite localizzate

$$\boxed{\Delta E_{1 \rightarrow 2}^{\text{cont}}}$$

Si realizzano con continuità lungo il tratto $1 \rightarrow 2$ per effetto dell'attrito viscoso tra strati fluidi adiacenti e tra fluido e parete

In condizioni di moto uniforme:

$$\boxed{\Delta E_{1 \rightarrow 2}^{\text{cont}} = jL_{1 \rightarrow 2}}$$

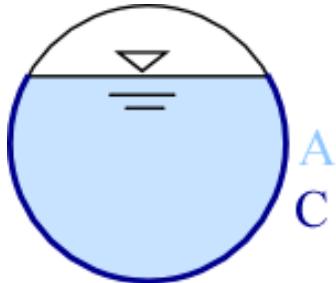
- L_{12} è la lunghezza del tratto $1 \rightarrow 2$

Perdite continue lungo tratti 'brevi': trascurabili

- $j = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g}$ formula di Darcy-Weisbach

$$j = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g}$$

- $R_h = \frac{\text{Area Liquida}}{\text{Contorno Bagnato}} = \frac{A}{C}$



E' una quantità puramente idraulica (non geometrica)

Per condotto circolare pieno: $R_h = D/4$

e Darcy-Weisbach diventa:

$$j = \frac{f}{d} \frac{V^2}{2g}$$

f : coefficiente di resistenza (adimensionale).

Dipende dal regime del moto

Moto di Poiseuille (laminare)

$$f = \frac{64}{Re} = f(Re)$$

Soluzione esatta!

Nessuna dipendenza con la 'natura' della parete!!!

Moto turbolento

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{e/d}{3.71} + \frac{2.52}{\sqrt{f} Re} \right) = f(e/d, Re)$$

Equazione di Colebrook-White

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

D-W

$$j = \frac{f}{d} \frac{V^2}{2g}$$

Moto di Poiseuille (laminare)

$$f = \frac{64}{Re} = f(Re)$$

Soluzione esatta!

Homework: dimostrare questa relazione!

(*)

Suggerimenti:

- ottenere f da D-W
- dimostrare che $i=j$ [definizione di i + (*) & (**) for moto stazionario....]
- si ottenga $f=64/Re$ dall'equazione di Poiseuille....

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{g} \beta \frac{\partial V}{\partial t} - j$$

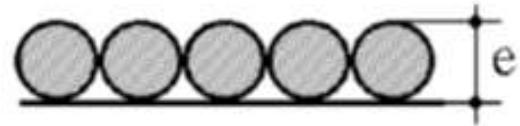
$$E = h^* + \frac{V^2}{2g}$$

(**)

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)



Caso reale: distribuzione casuale della scabrezza di parete



Caso concettuale (e in-vitro): distribuzione uniforme di grani di sabbia di diametro costante 'e' (modello equivalente).

Scabrezza equivalente assoluta 'e': diametro di grani di sabbia uniformemente distribuiti sulla parete che esercitano sul fluido il medesimo effetto della parete reale relativamente alla resistenza al moto per attrito. E' una 'proprietà' del tubo, specificata dal produttore.

Scabrezza equivalente relativa 'e/d'

Equazione di Colebrook-White (semi-empirica)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{e/d}{3.71} + \frac{2.52}{\sqrt{f} Re} \right) = f(e/d, Re)$$

implicita

$$Re = VD/\nu = (Q/A)D/\nu$$

(Moto turbolento)

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{e/d}{3.71} + \frac{2.52}{\sqrt{f} Re} \right) = f(e/d, Re)$$

al denominatore!

Re range: $4000 \rightarrow \infty$

- i. Quando **Re** è *sufficientemente* piccolo per il dato e/d

Moto turbolento su parete idraulicamente liscia
 $f=f(Re)$ solo !

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.52}{\sqrt{f} Re} \right) = f(Re)$$

- ii. Quando **Re** è *sufficientemente* grande per il dato e/d

Moto turbolento su parete idraulicamente scabra
 $f=f(e/d)$ solo !

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{e/d}{3.71} \right) = f(e/d)$$

- iii. Quando **Re** ha valori 'intermedi'

Moto turbolento in condizioni di transizione tra i) and ii)

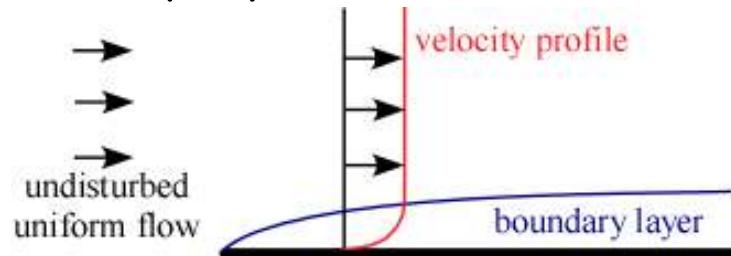
$$f=f(e/d, Re)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{e/d}{3.71} + \frac{2.52}{\sqrt{f} Re} \right) = f(e/d, Re)$$

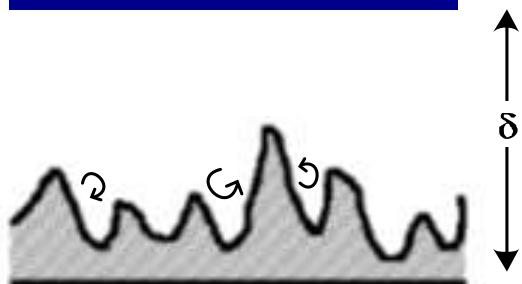
CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

La dipendenza di f da Reynolds mostra che **l'attrito nel condotto dipende dalla portata nel condotto!** Perché? Perché f non dipende esclusivamente dalla scarezza della parete?

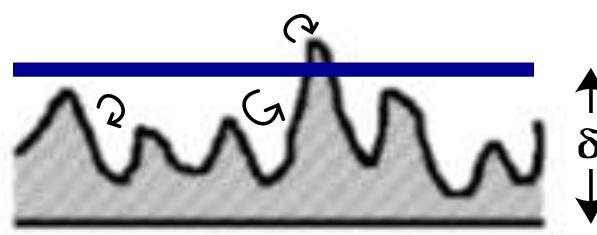
Strato limite: strato fluido in prossimità della parete del tubo in cui gli effetti della viscosità tendono a essere preponderanti



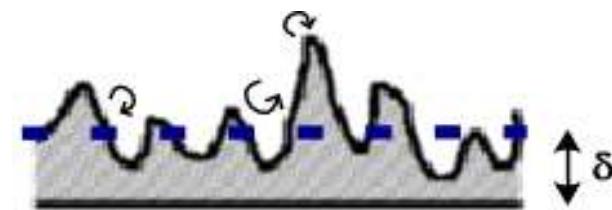
Spessore dello strato limite δ : $\sim 1/Re^n$ i.e. $\delta \uparrow$ per $Re \downarrow$



Re sufficientemente piccolo



Re 'intermedio'

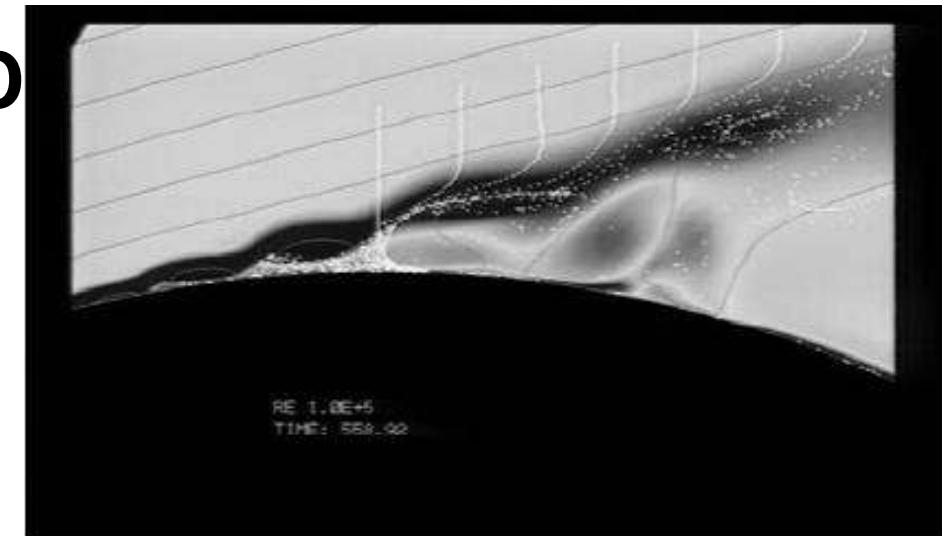
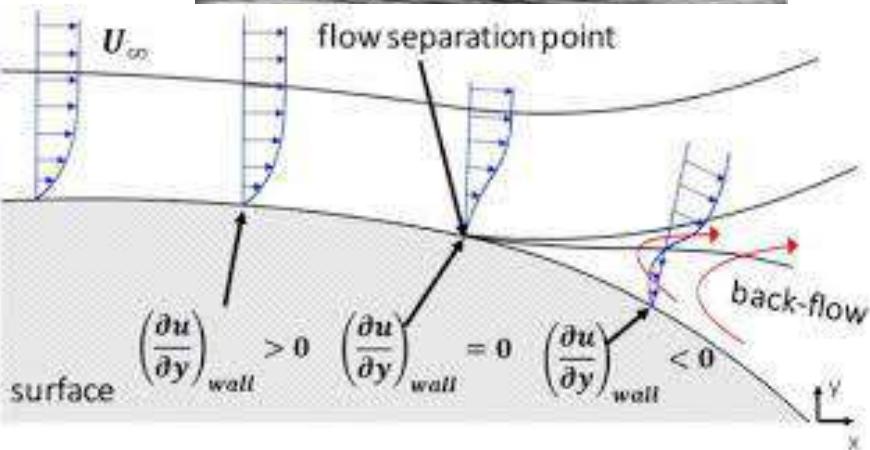


Re sufficientemente grande

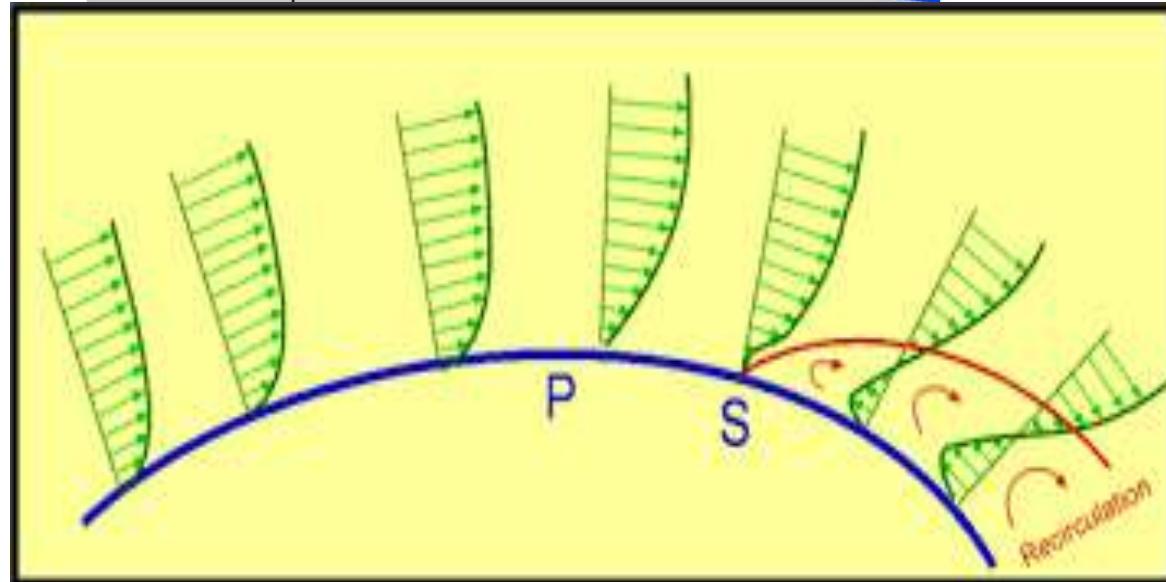
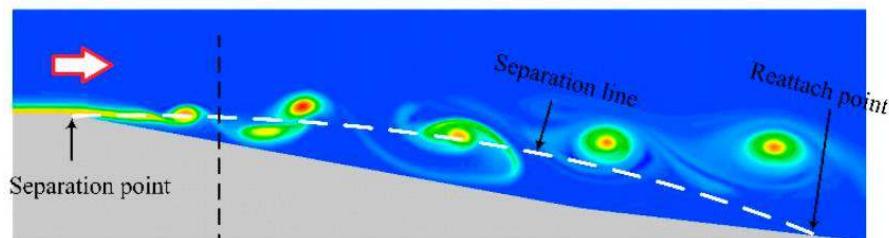
CORRENTI MONOD

Dissipazioni locali $\Delta E_{loc.}$

Quando la geometria dei contorni solidi induce decelerazioni nella corrente si realizza **separazione della corrente** dai contorni stessi. Nelle zone di separazione si creano vortici, che provocano dissipazioni locali di energia nella corrente.

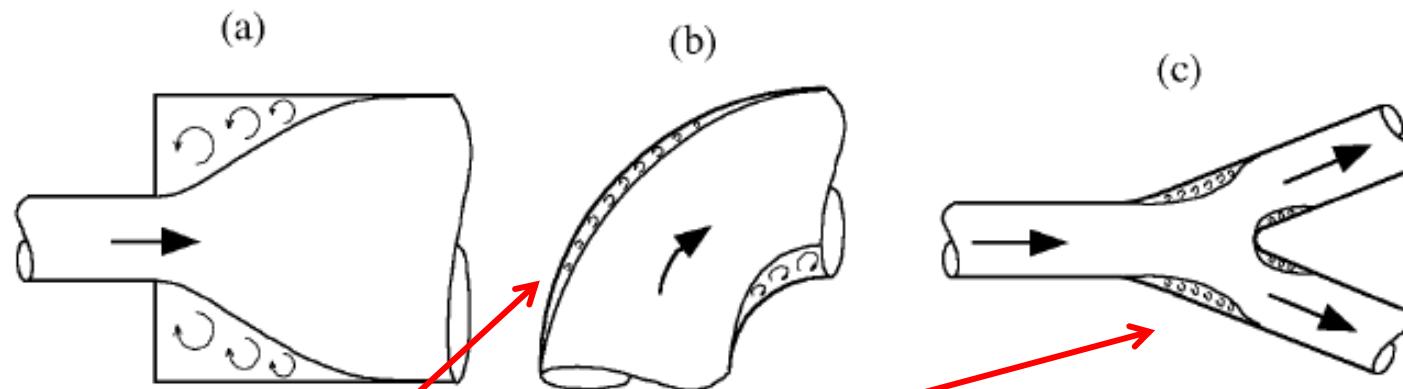


Separazione della corrente (dalla parete)



CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

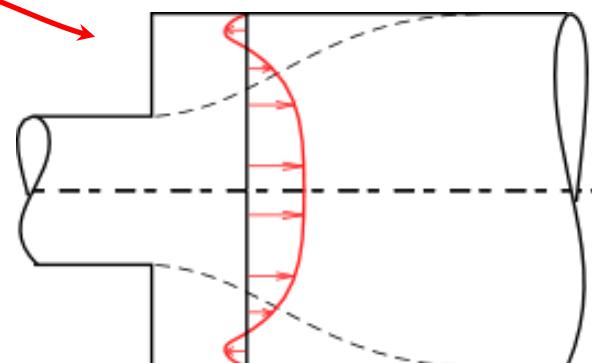
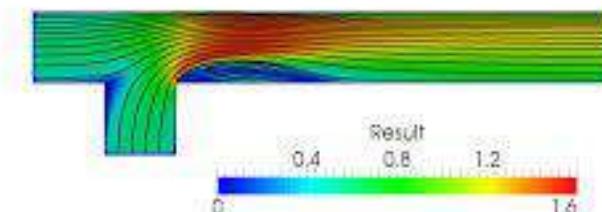
Alargamenti, restringimenti, curve, gomiti, organi di regolazione....



Zone di ricircolazione- zone 'morte'

Vortici → dissipazione localizzata di energia

Fluido mediamente fermo

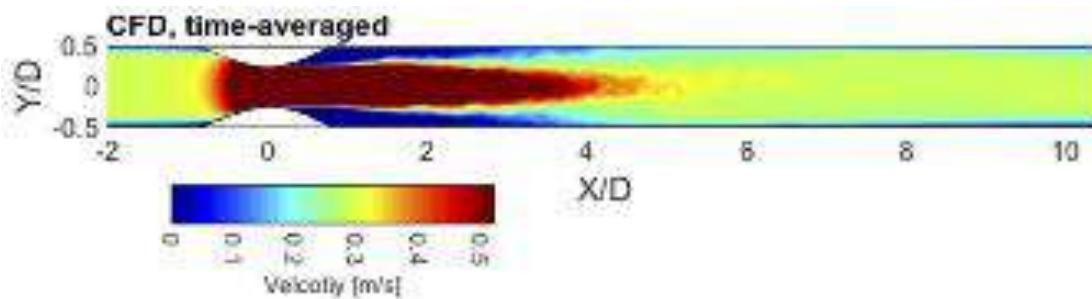
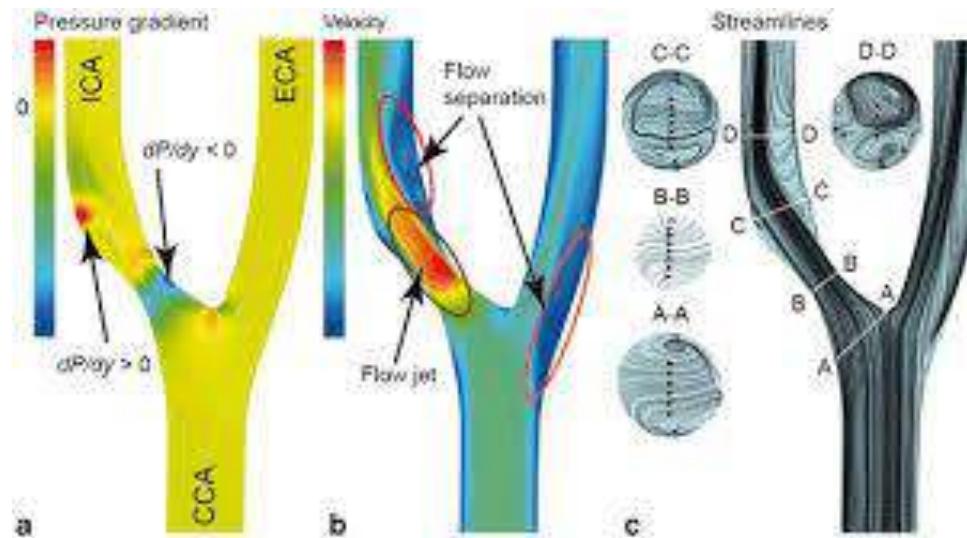


Brusco allargamento

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

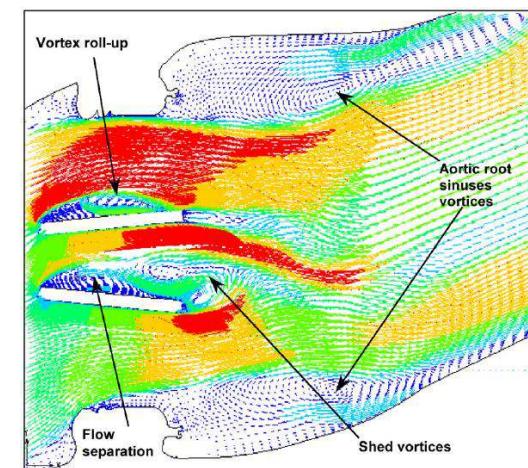
Separazione della corrente nei flussi ematici: alcuni esempi

Biforcazione carotidea



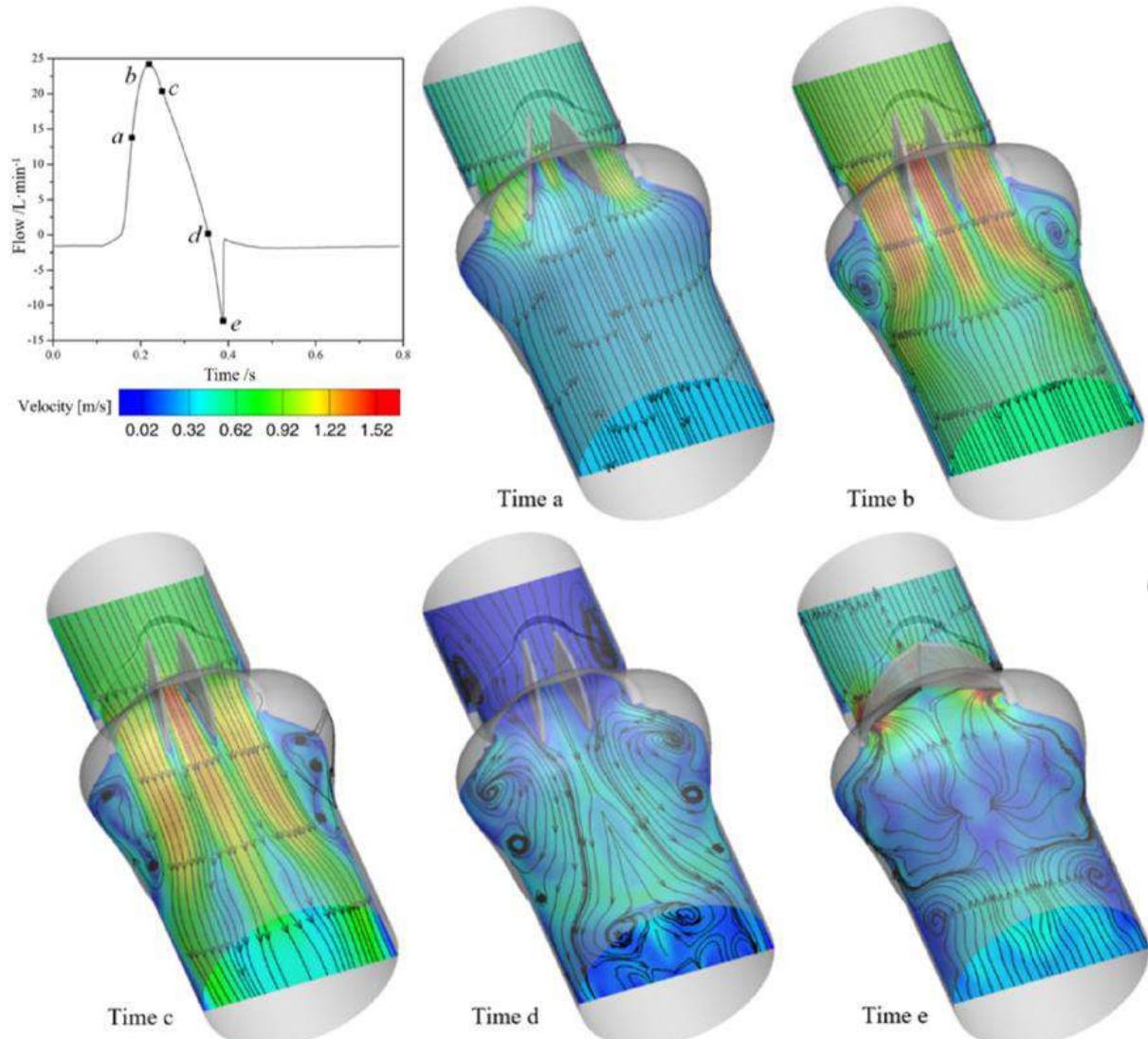
Ostruzione arteriosa (stenosi vascolare)

Valvola bileaflet 'malallineata'



CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

Separazione della corrente nei flussi ematici: alcuni esempi



Valvola bileaflet
normofunzionante - diversi istanti
di tempo

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

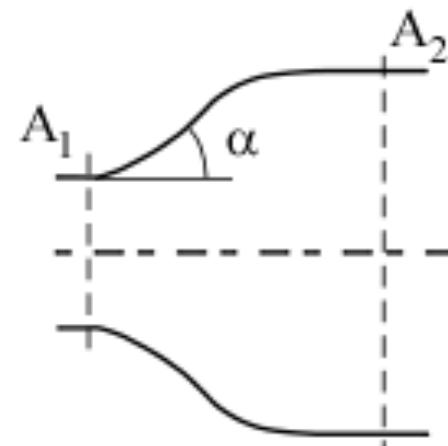
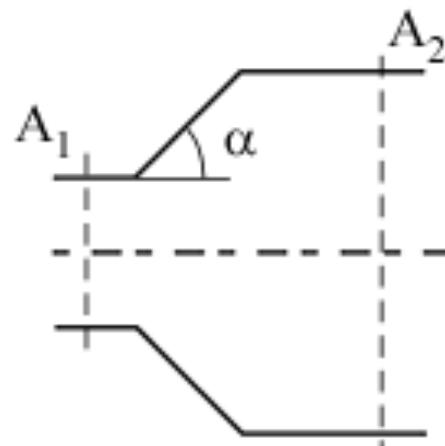
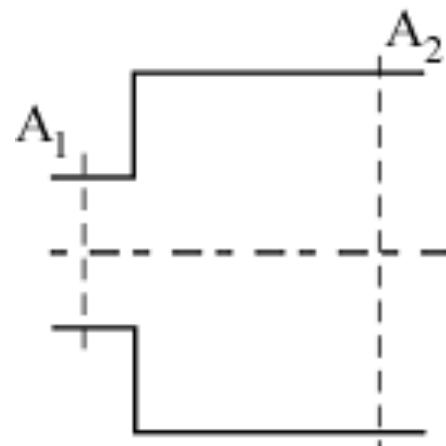
$$\Delta E_{loc.} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

V: velocità media della corrente indisturbata

Di solito, la corrente in avvicinamento alla variazione di geometria

$\xi = \xi (Re, geometry)$

Corrente indisturbata contorni



Esempio: allargamento

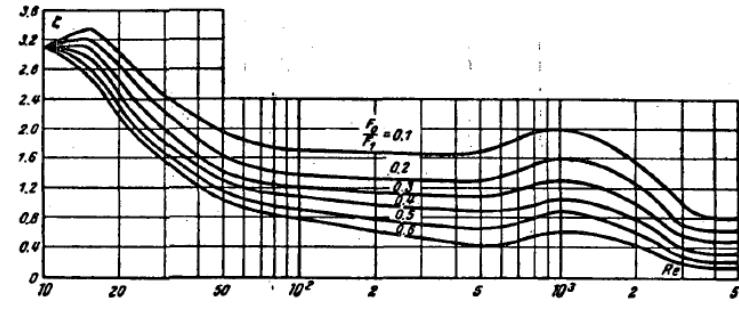
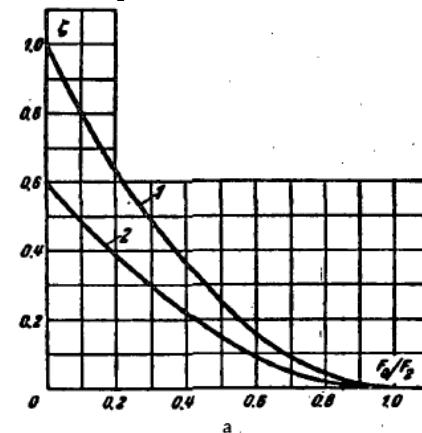
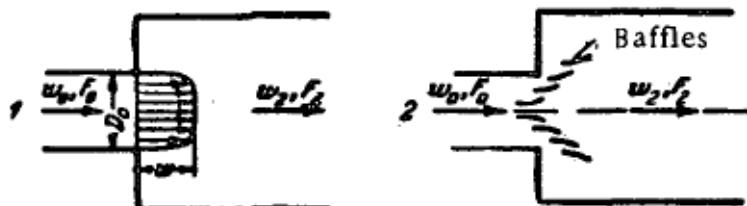
$\xi = \xi (Re, A_1/A_2, \alpha, curvatura)$

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

Esperimenti di laboratorio (see for example 'Handbook of hydraulic resistance' by I.E. Idel'chik - <https://www.nrc.gov/docs/ML1220/ML12209A041.pdf>) hanno mostrato che

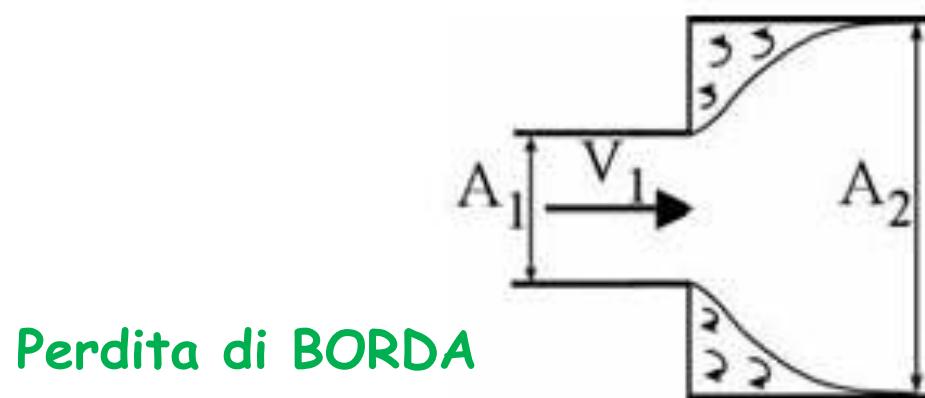
- Per $Re > \sim 10^5$ (i.e. moto pienamente turbolento) $\xi = \xi$ (geometry) only
- For $Re < \sim 2500$ (i.e. moto laminare) $\xi = \xi$ (Re,geometria) con una forte dipendenza da Re!

Data la geometria, è di solito disponibile un gran numero di tabellagrafici da cui estrarre ξ . Peraltro, qualsiasi configurazione particolare, specifica, deve essere esplorata sperimentalmente per determinare $\xi = \xi$ (Re,geometria).



CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

Brusco allargamento di sezione.



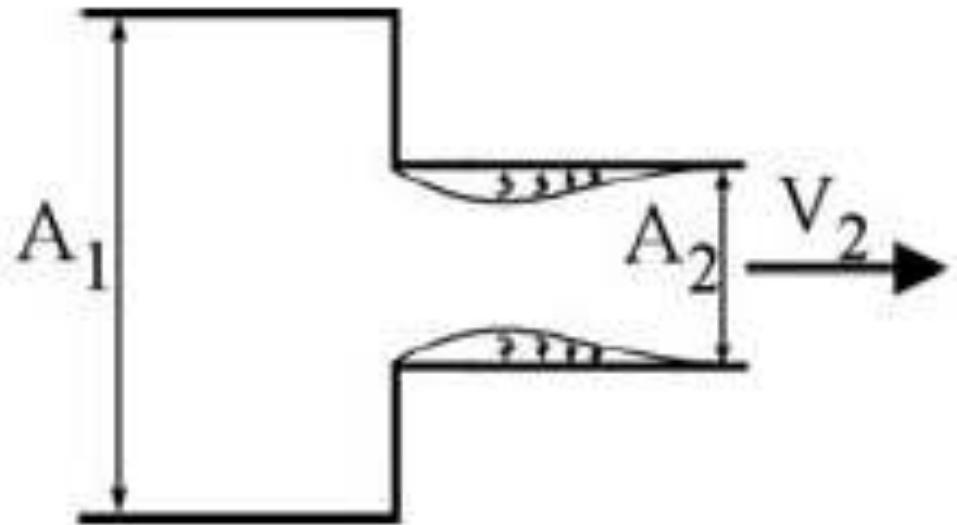
Moto turbolento ($Re > 4000$):

$$\Delta E = \frac{V_1^2}{2g} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$$

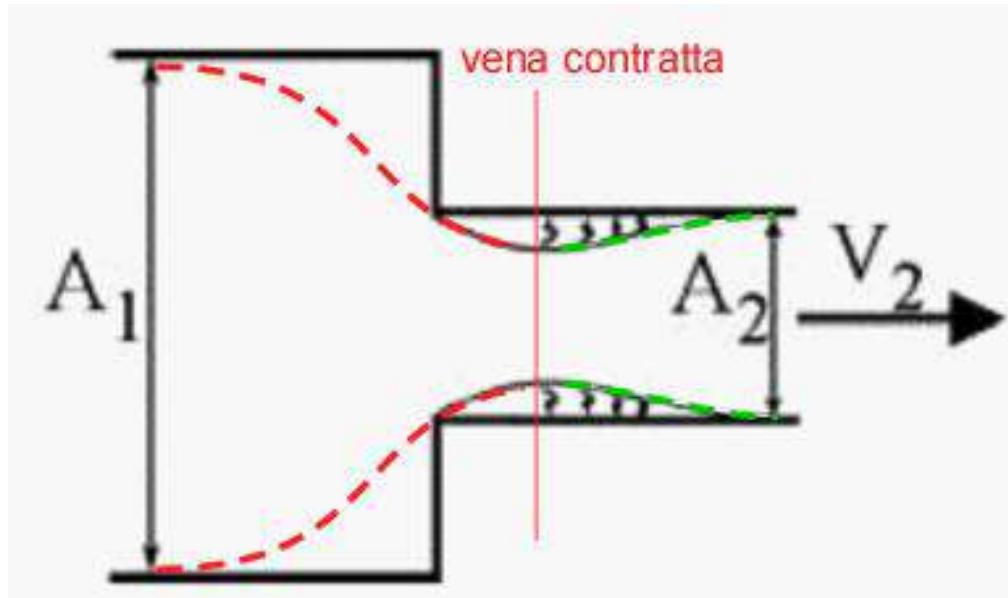
Dimostreremo la formula (se ne avremo il tempo...)

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

Brusco restringimento di sezione.



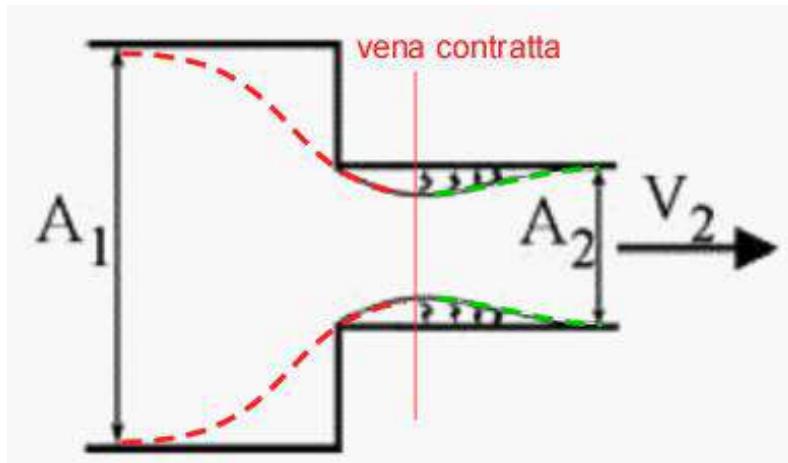
CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)



Descrizione fenomenologica del comportamento della corrente che entra nel brusco restringimento:

- La corrente indisturbata di monte 'sente' il restringimento di sezione come un ostacolo a cui deve 'adattarsi'
- Da una certa distanza a monte comincia a restringersi, in modo da presentarsi, in corrispondenza dell'ingresso al restringimento, con sezione A_2
- Il restringimento della corrente non si esaurisce all'ingresso, ma prosegue per un certo tratto a valle, fino alla vena contratta (=sezione di minima area)
- A valle della vena contratta, la corrente comincia ad allargarsi per occupare l'intera sezione a disposizione
- → il tratto vena contratta-valle presenta la medesima configurazione fluidodinamica del brusco allargamento!!! Vortici → dissipazioni

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)



Moto turbolento:

$$\Delta E = \frac{V_2^2}{2g} \left(\frac{1}{c_c} - 1 \right)^2 = \frac{V_1^2}{2g} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \left(\frac{1}{c_c} - 1 \right)^2$$

c_c : coefficiente di contrazione = (nel caso qui presentato) = A_c/A_2

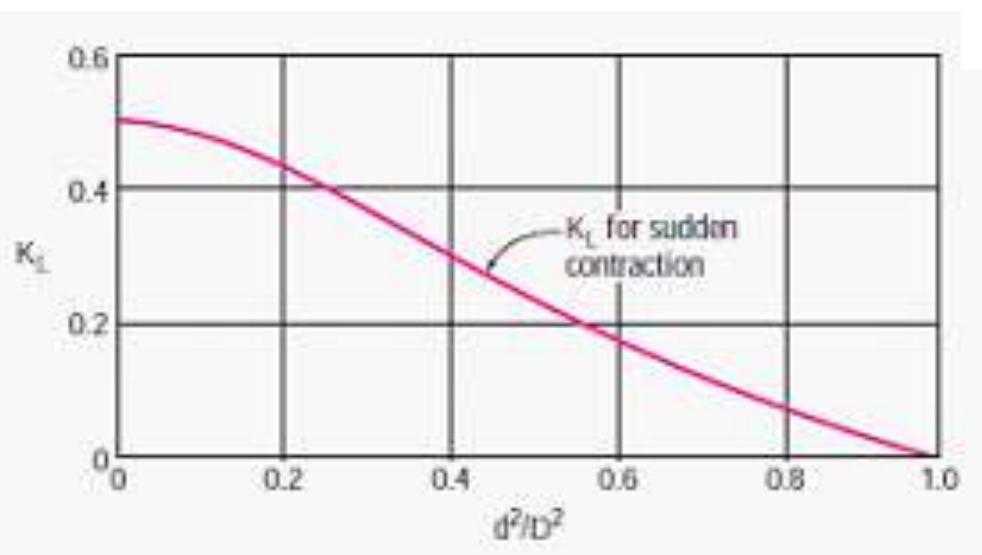
c_c : rapporto di aree!!!

il valore dipende da geometria sistema (A_2/A_1 , forma,) e da Re

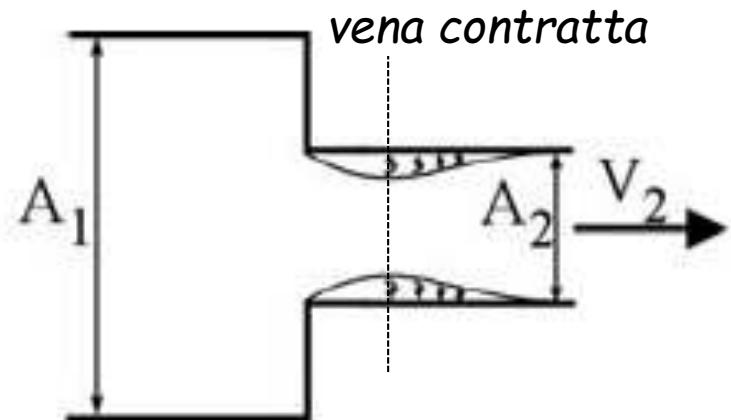
$c_c=0,61$ per $A_2 \ll A_1$, geometria circolare, angolo 90° , moto turbolento

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

Brusco restringimento



Moto turbolento:



Imparare a leggere grafici/tabelle con attenzione alle notazioni adottate!

Allargamento&restringimento graduati

$$\Delta E = K_L \frac{V^2}{2g}$$

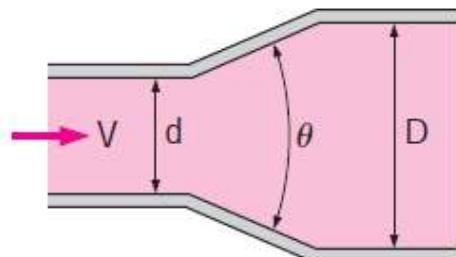
Turbulent flow:

Expansion:

$$K_L = 0.02 \text{ for } \theta = 20^\circ$$

$$K_L = 0.04 \text{ for } \theta = 45^\circ$$

$$K_L = 0.07 \text{ for } \theta = 60^\circ$$



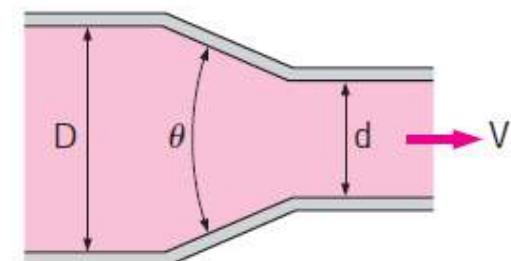
Contraction (for $\theta = 20^\circ$):

$$K_L = 0.30 \text{ for } d/D = 0.2$$

$$K_L = 0.25 \text{ for } d/D = 0.4$$

$$K_L = 0.15 \text{ for } d/D = 0.6$$

$$K_L = 0.10 \text{ for } d/D = 0.8$$



CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

$$\Delta E = K_L \frac{V^2}{2g}$$

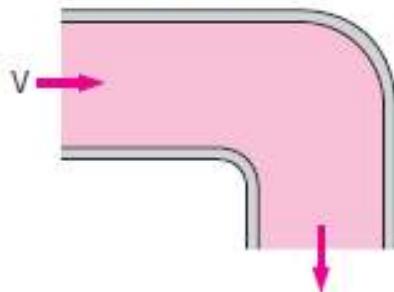
Moto turbolento

Bends and Branches

90° smooth bend:

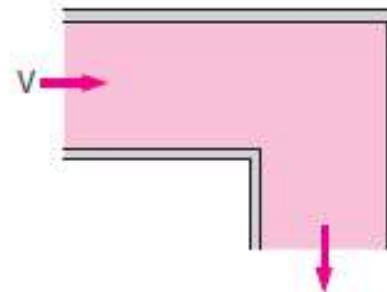
Flanged: $K_L = 0.3$

Threaded: $K_L = 0.9$



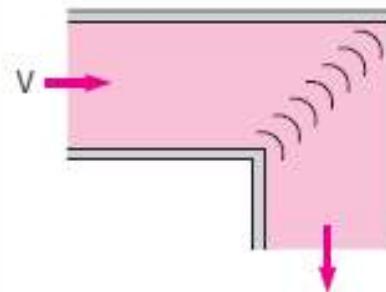
90° miter bend

(without vanes): $K_L = 1.1$



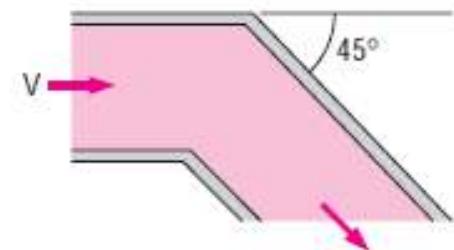
90° miter bend

(with vanes): $K_L = 0.2$



45° threaded elbow:

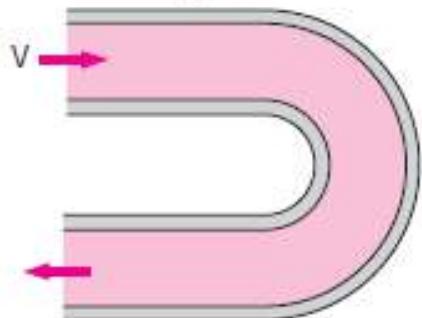
$K_L = 0.4$



180° return bend:

Flanged: $K_L = 0.2$

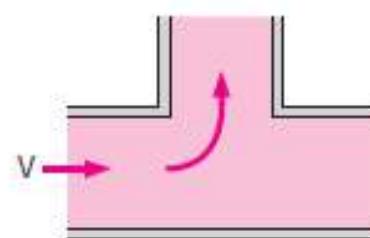
Threaded: $K_L = 1.5$



Tee (branch flow):

Flanged: $K_L = 1.0$

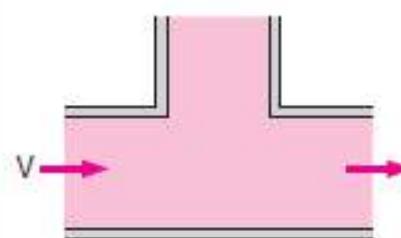
Threaded: $K_L = 2.0$



Tee (line flow):

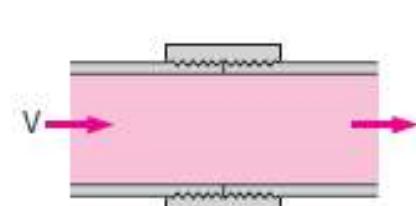
Flanged: $K_L = 0.2$

Threaded: $K_L = 0.9$

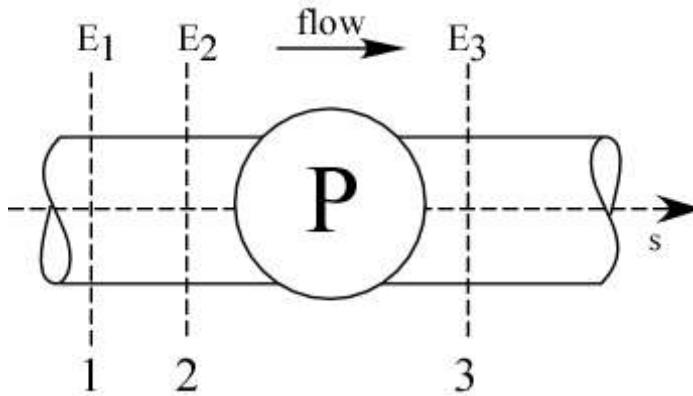


Threaded union:

$K_L = 0.08$



CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)



Prevalenza: energia fornita dalla pompa alla corrente (pompata).
Simbolo: H_P , u.m. [m]

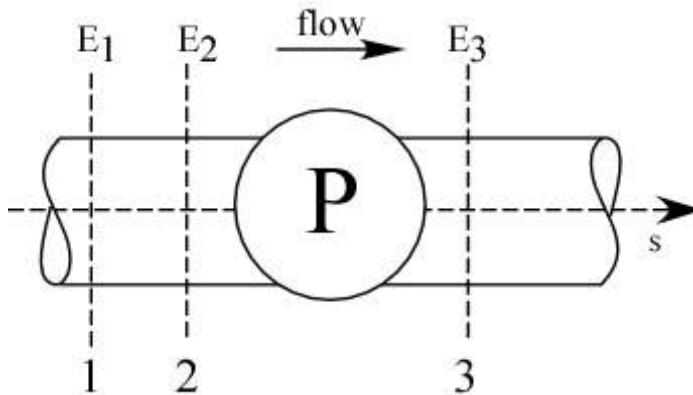
Potenza utile: potenza meccanica fornita dalla pompa alla corrente (pompata). Simbolo: P_u , u.m. [W]

$$P_u = \gamma Q H_P$$

Potenza assorbita: potenza richiesta dalla pompa per lavorare e fornire P_u alla corrente. Simbolo: P_{ass} , u.m. [W]

Rendimento della pompa: rapporto P_u/P_{ass} . Simbolo: η .

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)



Equazione di conservazione dell'energia in presenza di pompa

Quando (e solo quando) tra la sezione di monte e la sezione di valle è collocata una pompa la prevalenza della pompa deve essere conteggiata nel bilancio come ulteriore energia 'adisposizione' della corrente. Cioè, con riferimento alla figura:

$$E_1 + H_p = E_3 + \Delta E_{1 \rightarrow 3}$$

azione della pompa!

$$E_2 + H_p = E_3 + \Delta E_{2 \rightarrow 3}$$

azione della pompa!

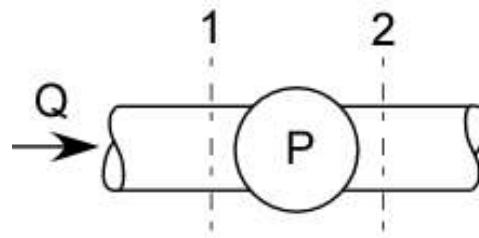
but

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

nessuna
azione della pompa!

CORRENTI MONODIMENSIONALI (1D)

La pompa fornisce energia sotto forma di salto di pressione. Infatti:



d costante
Fluido incompressibile
Moto stazionario

$$E_1 + H_p = E_2 + \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

$$E_1 + H_p - E_2 = \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \alpha \frac{V_1^2}{2g} \right) + H_p - \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \alpha \frac{V_2^2}{2g} \right) = \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

$$\left(\frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \alpha \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} \right) + H_p - \left(\frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \alpha \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} \right) = \Delta E_{1 \rightarrow 2}$$

- $V_1 = V_2$
- Tratto 'corto' & Nessuna variazione geometria locale

$$H_p = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

Principio di funzionamento del cuore!