ESERCIZI GEOMETRIA delle AREE

Ripasso

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_A x\,dA \\ \int_A y\,dA \end{Bmatrix}$$

Se l'ORIGINE è G (BARICENTRO) $\Rightarrow S_x, S_y = 0$ $\Rightarrow$ $x_G = \dfrac{S_y}{A}$, $y_G = \dfrac{S_x}{A}$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int x^2 dA & \int xy\,dA \\ \int xy\,dA & \int y^2 dA \end{bmatrix}$$

Se sistema di riferimento PRINCIPALE $\Leftrightarrow I_{xy}=0$

→ gli assi sono ASSI PRINCIPALI D'INERZIA

Se un sistema di riferimento è BARICENTRICO e PRINCIPALE

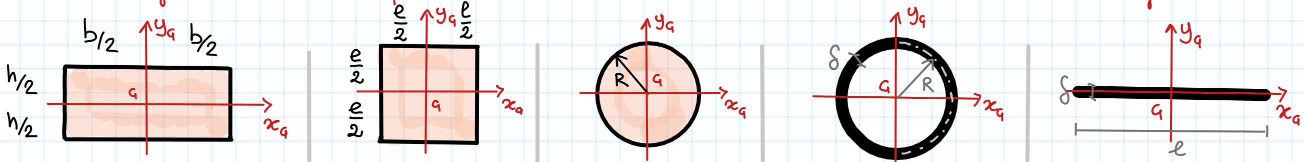
$\Downarrow$

CENTRALE

$S_x, S_y = 0$

$I_{xy} = 0$

SEZIONI NOTE

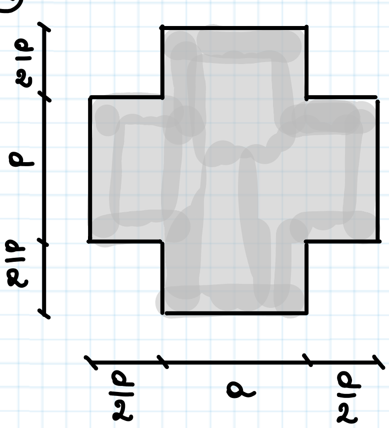


	rettangolo	quadrato	cerchio	corona circolare sottile	rettangolo sottile
				$\delta \ll R$	$\delta \ll e$
A	bh	e^2	πR^2	$\delta R 2\pi$	$e\delta$
S_x	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
S_y	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
I_x	$bh^3/12$	$e^4/12$	$\dfrac{\pi R^4}{4}$	$\delta R^3 \pi$	$\delta^3 e/12 \sim \emptyset$
I_y	$hb^3/12$	$e^4/12$	$\dfrac{\pi R^4}{4}$	$\delta R^3 \pi$	$e^3 \delta / 12$
I_{xy}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

sez. giroscopiche ($I_x = I_y$)

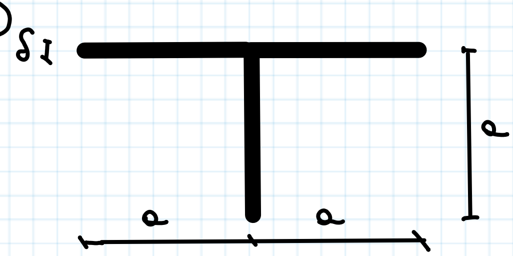
ESERCIZI - Calcolare i momenti d'inerzia assiali nel sistema di riferimento centrale

1



$a = 10$ mm

2

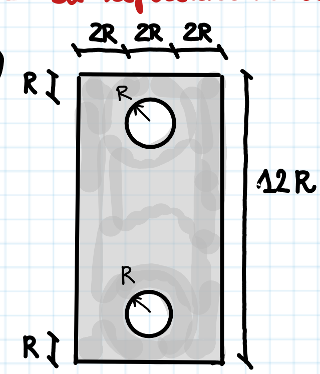


δ spessore costante

$\delta = 2$ mm

$a = 25$ mm

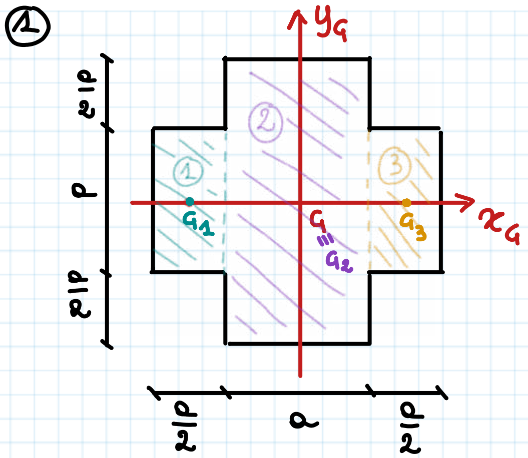
3



$R = 0.25$ mm

SOLUZIONI

①



a = 10 mm

Si possono identificare due assi di simmetria assiale retta, quindi quegli assi sono anche assi PRINCIPALI e il Baricentro $G \in a\ x_G \cap y_G$.

Suddivido in 3 rettangoli la figura:

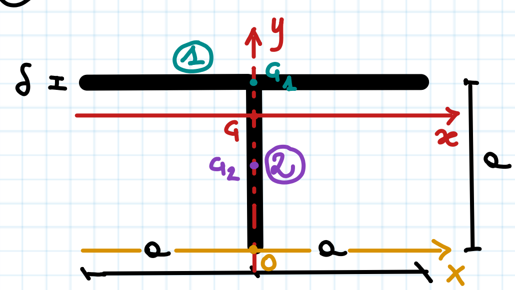
$$I_x = I^1_{x_G} + I^2_{x_G} + I^3_{x_G} = \underbrace{\frac{\frac{a}{2}\cdot a^3}{12} + \frac{a\cdot(2a)^3}{12} + \frac{\frac{a}{2}a^3}{12}}_{\text{i termini di trasporto sono nulli perché i baricentri hanno tutti le stesse ordinate}} = \frac{a^4}{24} + \frac{8}{12}a^4 + \frac{a^4}{24} = \frac{3}{4}a^4 = \frac{3}{4}(10)^4 = 7500\ \text{mm}^4$$

In maniera analoga calcolo I_y:

$$I_y = \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} + \left(\frac{3}{4}a\right)^2\frac{a^2}{2} + \frac{2a\,a^3}{12} + \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)^3}{12} + \left(\frac{3}{4}a\right)^2\frac{a^2}{2} = \frac{a^4}{96} + \frac{9}{32}a^4 + \frac{2a^4}{12} + \frac{a^4}{96} + \frac{9}{32}a^4 = \frac{1+27+16+1+27}{96}a^4 = \frac{72}{96}a^4$$

$$I_y = \frac{3}{4}a^4 = 7500\ \text{mm}^4$$ sez. giroscopica

②



La sezione sottile riportata presenta un asse di sym assiale retto, quindi è anche asse principale d'inerzia. Ipotizzo un sist. di rif. di partenza centrato in O e uso le formule del trasporto del momento statico per ricavare la posizione del baricentro (y_G).

considero la sezione formata da 2 rettangoli sottili:

$$\underset{\text{rispetto a O}}{S_x} = S^{(1)}_x + S^{(2)}_x = 2a\delta\cdot a + a\delta\cdot\frac{a}{2} = \frac{5}{2}a^2\delta$$

NB se avessi scelto l'origine $\equiv G_1$ il corpo ① avrebbe avuto $S^{(1)}_x = 0$.

$$A = 2a\delta + a\delta = 3a\delta$$

$$y_G = S_x/A = \frac{5}{2}a^2\delta / 3a\delta = \frac{5}{6}a$$

TRASLO IL SIST di RIF in $G\left(0, \frac{5}{6}a\right)$ questo è un sist di rif. CENTRALE

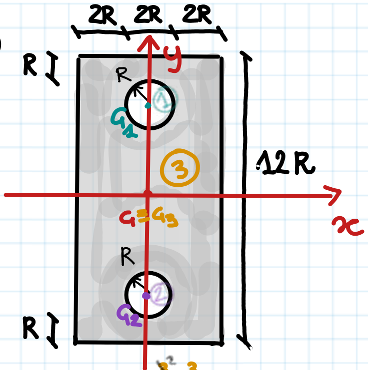
calcolo i momenti d'inerzia I_{x_G} e I_{y_G}:

$$I_{x_G} = I^{(1)}_{x_G} + I^{(2)}_{x_G} = \underset{\text{NO}}{\cancel{\frac{2a\delta^3}{12}}} + \left(\frac{a}{6}\right)^2 2a\delta + \frac{a^3\delta}{12} + \left(\frac{5}{6}a - \frac{a}{2}\right)^2 a\delta = \frac{a^3\delta}{18} + \frac{a^3\delta}{12} + \frac{1}{9}a^3\delta = \frac{a^3\delta}{4} = \frac{(25)^3\cdot 2}{4} = 7812{,}5\ \text{mm}^4$$

$$I_{y_G} = I^{(1)}_{y_G} + I^{(2)}_{y_G} = \frac{(2a)^3\delta}{12} + \underset{\text{NO}}{\cancel{\frac{a\delta^3}{12}}} = \frac{2}{3}a^3\delta = \frac{2}{3}(25)^3\cdot 2 = 20833{,}3\ \text{mm}^4$$

La sezione risulta avere molta più inerzia attorno all'asse y.

③



$R = 0.25\ mm$

La sezione presenta 2 assi di sym assiale retta ortogonali tra loro, pertanto quei due assi identificano il sist. di rif. CENTRALE
la sezione è suddivisa in un rettangolo ③ e due fori circolari ① e ②

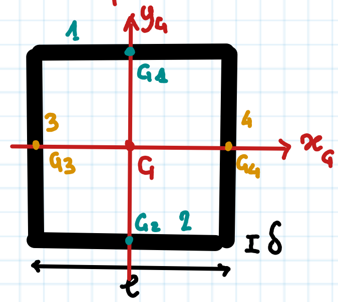
$$A = 12R\cdot 6R - 2\pi R^2 = 72R^2 - 2\pi R^2 = 2R^2(36-\pi) = 2\cdot 0.25^2(36-\pi) = 4{,}11\ mm^2$$

$$I_{x_G} = \frac{6R\cdot(12)^3R^3}{12} - 2\left(\frac{\pi R^4}{4} + (4R)^2\pi R^2\right) = 864R^4 - 2\left(\frac{65}{4}\pi R^4\right) = 864(0.25)^4 - \frac{65}{2}\pi(0.25)^4 = 2{,}976\ mm^4$$

$$I_{y_G} = \frac{6^3R^3\cdot 12R}{12} - 2\left(\frac{\pi R^4}{4}\right) = 216R^4 - \frac{\pi R^4}{2} = 0.838\ mm^4$$

ESERCIZI VISTI IN CLASSE (non commentati)

• sez. sottile quadrata



$x_G G y_G$ SIST CENTRALE

→ 4 rettangoli sottili $A_{TOT} = 4\delta\ell$

$S_x = S_y = 0$

$$I_x = \cancel{I_{x1}}^{\,0} + \boxed{A_1 y_{G1}^2} + \cancel{I_{x2}}^{\,0} + \boxed{A_2 y_{G2}^2} + \boxed{I_{x3}} + \cancel{A_3 y_{G3}^2}^{\,0} + \boxed{I_{x4}} + \cancel{A_4 y_{G4}^2}^{\,0}$$

uguali   uguali

$\ell = 25\ mm$

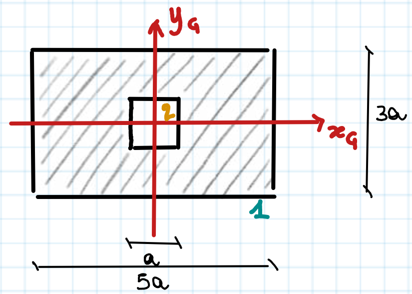
$\delta = 2\ mm$

$$I_x = 2A_1 y_{G1}^2 + 2I_{x3} = 2\cdot\delta\ell\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + 2\frac{\ell^3\delta}{12} = \frac{\delta\ell^3}{2} + \frac{\delta\ell^3}{6} = \frac{2}{3}\delta\ell^3 = 20833.3\ mm^4$$

$$I_y = \text{analogo a } I_x = 2I_{y1} + 2A_3 x_{G3}^2 = 2\frac{\ell^3\delta}{12} + 2\delta\ell\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^3\delta}{6} + \frac{\ell^3\delta}{2} = \frac{2}{3}\delta\ell^3$$

Sez. GIROSCOPICA

• Sez. piena rettangolare con foro quadrato



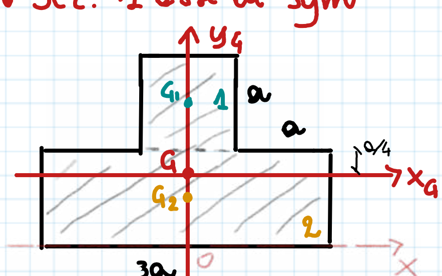
$$A_{TOT} = 3a\cdot 5a - a^2 = 14a^2$$

$$I_x = \frac{b_1h_1^3}{12} - \frac{b_2h_2^3}{12} = \frac{5a(3a)^3}{12} - \frac{a^4}{12} = \left(\frac{135}{12} - \frac{1}{12}\right)a^4 = \frac{67}{6}a^4$$

$$I_y = \frac{b_1^3h_1}{12} - \frac{b_2^3h_2}{12} = \frac{(5a)^3 3a}{12} - \frac{a^4}{12} = \left(\frac{375}{12} - \frac{1}{12}\right)a^4 = \frac{187}{6}a^4$$

con $a = 5mm$ $A = 200\ mm^2$, $I_x = 6979{,}2\ mm^4$, $I_y = 19479{,}2\ mm^4$

• Sez. 1 asse di sym



$a = 10\ mm$

$$\left.\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = 4(10)^2 = 400\ mm^2 \\ S_x &= 3a^2\cdot\frac{a}{2} + a^2\frac{3}{2}a = \frac{3}{2}a^3 + \frac{3}{2}a^3 = 3a^3 \end{aligned}\right\} \quad x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{3a^3}{4a^2} = \frac{3}{4}a = \frac{3(10)}{4} = 7.5\ mm$$

$$I_x = \frac{a^4}{12} + a^2\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{3a\cdot a^3}{12} + 3a^2\left(-\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^4}{12} + \frac{9}{16}a^4 + \frac{a^4}{4} + \frac{3}{16}a^4 = \frac{\overbrace{4+27+12+9}^{52}}{48}a^4 = \frac{13}{12}a^4$$

$$I_y = \frac{a^4}{12} + a^2(0)^2 + \frac{(3a)^3a}{12} + 3a^2(0) = \frac{a^4}{12} + \frac{27a^4}{12} = \frac{7}{3}a^4$$

$I_x = 1{,}083\cdot 10^4\ mm^4$ $I_y = 2{,}333\cdot 10^4\ mm^4$