ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 11 luglio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 1, 0, -2)$, $u_2 = (2, 0, 1, -1)$, $u_3 = (1, -3, 2, 4)$.

(a) Determinare la dimensione e una base **ortogonale** di U.

(b) Scrivere una base di $U^\perp$.

(c) Sia $w = (1, -2, -1, 0)$ e sia $W = \langle w \rangle^\perp$. Scrivere una base di W.

(d) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(e) Sia P la matrice (quadrata di ordine 4) della proiezione ortogonale su U, cioè la matrice tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, il vettore $v' = Pv$ è la proiezione ortogonale di v su U. Spiegare perché si ha $P^2 = P$ (NON è richiesto di calcolare P!).

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Trovare per quale valore di t il vettore $v = (1, 1, t, 1)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare l'antiimmagine di v.

(c) Trovare una base di un sottospazio U, di dimensione 3, tale che la funzione $f|_U\colon U \to \mathbb{R}^4$, $u \mapsto f(u)$, sia iniettiva.

(d) Sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0, -1)$. Verificare che per ogni $w \in W$ si ha $f(w) \in W$. Sia $g\colon W \to W$ la funzione definita ponendo $g(w) = f(w)$. Scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1, -1, t)$ è autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare gli autovettori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale D.

(d) Esiste un sottospazio U di dimensione 2 tale che tutti i vettori di U sono autovettori di A? Se U esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale sottospazio non esiste.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $P = (1, 0, 2)$, $Q = (3, -2, 4)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 4z = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q. Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s. Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.

(b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia ortogonale alla retta r e la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M.

(c) Sia π il piano di equazione $2x + y - 3z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\mathrm{dist}(P, \sigma) = \mathrm{dist}(Q, \sigma)$.

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 11 luglio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 0, 2, -1)$, $u_3 = (3, -2, -4, 3)$.

(a) Determinare la dimensione e una base **ortogonale** di U.

(b) Scrivere una base di $U^\perp$.

(c) Sia $w = (1, -1, 0, -3)$ e sia $W = \langle w \rangle^\perp$. Scrivere una base di W.

(d) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(e) Sia P la matrice (quadrata di ordine 4) della proiezione ortogonale su U, cioè la matrice tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, il vettore $v' = Pv$ è la proiezione ortogonale di v su U. Spiegare perché si ha $P^2 = P$ (NON è richiesto di calcolare P!).

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Trovare per quale valore di t il vettore $v = (1, -1, t, 1)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare l'antiimmagine di v.

(c) Trovare una base di un sottospazio U, di dimensione 3, tale che la funzione $f|_U\colon U \to \mathbb{R}^4$, $u \mapsto f(u)$, sia iniettiva.

(d) Sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0, -1)$. Verificare che per ogni $w \in W$ si ha $f(w) \in W$. Sia $g\colon W \to W$ la funzione definita ponendo $g(w) = f(w)$. Scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (1, -1, t)$ è autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare gli autovettori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale D.

(d) Esiste un sottospazio U di dimensione 2 tale che tutti i vettori di U sono autovettori di A? Se U esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale sottospazio non esiste.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $P = (-1, 3, 0)$, $Q = (1, 1, 4)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y = -11 \\ 3x + z = -13 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q. Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s. Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.

(b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia ortogonale alla retta r e la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M.

(c) Sia π il piano di equazione $x - 3y + 2z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\text{dist}(P, \sigma) = \text{dist}(Q, \sigma)$.

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^o appello — 11 luglio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 1, 0, -2)$, $u_2 = (1, 0, 2, -2)$, $u_3 = (4, 3, -4, -2)$.

(a) Determinare la dimensione e una base **ortogonale** di U.

(b) Scrivere una base di $U^\perp$.

(c) Sia $w = (2, 0, 1, -1)$ e sia $W = \langle w \rangle^\perp$. Scrivere una base di W.

(d) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(e) Sia P la matrice (quadrata di ordine 4) della proiezione ortogonale su U, cioè la matrice tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, il vettore $v' = Pv$ è la proiezione ortogonale di v su U. Spiegare perché si ha $P^2 = P$ (NON è richiesto di calcolare P!).

Esercizio 2. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Trovare per quale valore di t il vettore $v = (-1, -1, t, 5)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare l'antiimmagine di v.

(c) Trovare una base di un sottospazio U, di dimensione 3, tale che la funzione $f|_U \colon U \to \mathbb{R}^4$, $u \mapsto f(u)$, sia iniettiva.

(d) Sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (0, -1, 0, 1)$. Verificare che per ogni $w \in W$ si ha $f(w) \in W$. Sia $g \colon W \to W$ la funzione definita ponendo $g(w) = f(w)$. Scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (2, -2, t)$ è autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare gli autovettori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale D.

(d) Esiste un sottospazio U di dimensione 2 tale che tutti i vettori di U sono autovettori di A? Se U esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale sottospazio non esiste.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $P = (2, 0, -1)$, $Q = (4, 2, -3)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 4z = 7 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q. Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s. Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.

(b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia ortogonale alla retta r e la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M.

(c) Sia π il piano di equazione $3x + 2y + z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\mathrm{dist}(P, \sigma) = \mathrm{dist}(Q, \sigma)$.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2º appello — 11 luglio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 2, -2, 0)$, $u_2 = (-2, 0, 2, 1)$, $u_3 = (-1, 6, -2, 2)$.

(a) Determinare la dimensione e una base **ortogonale** di U.

(b) Scrivere una base di $U^{\perp}$.

(c) Sia $w = (1, 0, 1, 2)$ e sia $W = \langle w \rangle^{\perp}$. Scrivere una base di W.

(d) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(e) Sia P la matrice (quadrata di ordine 4) della proiezione ortogonale su U, cioè la matrice tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, il vettore $v' = Pv$ è la proiezione ortogonale di v su U. Spiegare perché si ha $P^2 = P$ (NON è richiesto di calcolare P!).

Esercizio 2. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(b) Trovare per quale valore di t il vettore $v = (3, 1, t, -5)$ appartiene all'immagine di f. Per tale valore di t determinare l'antiimmagine di v.

(c) Trovare una base di un sottospazio U, di dimensione 3, tale che la funzione $f|_U \colon U \to \mathbb{R}^4$, $u \mapsto f(u)$, sia iniettiva.

(d) Sia W il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0, 1)$. Verificare che per ogni $w \in W$ si ha $f(w) \in W$. Sia $g \colon W \to W$ la funzione definita ponendo $g(w) = f(w)$. Scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{w_1, w_2\}$ di W.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Si dica per quale valore di t il vettore $v = (2, -2, t)$ è autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Determinare gli autovettori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale D.

(d) Esiste un sottospazio U di dimensione 2 tale che tutti i vettori di U sono autovettori di A? Se U esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale sottospazio non esiste.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $P = (0, 3, 1)$, $Q = (2, 1, 3)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q. Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s. Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.

(b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia ortogonale alla retta r e la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M.

(c) Sia π il piano di equazione $x + 2y - z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\operatorname{dist}(P, \sigma) = \operatorname{dist}(Q, \sigma)$.