Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 4

(1) Un oggetto di massa m = 1 kg viene scagliato verso l'alto con velocità v_0 = 2 m/s da un'altezza h = 100 cm dal suolo. L'oggetto, ricadendo al suolo, rimbalza verso l'alto e in ogni urto con il pavimento perde 1/4 della sua energia cinetica. Determinare:

1. la velocità dell'oggetto subito prima del contatto con il pavimento;
2. la massima quota che l'oggetto raggiunge dopo il primo urto con il pavimento;
3. dopo quanti rimbalzi la massima quota raggiunta dall'oggetto diventa inferiore a h/4

(2) Un corpo di massa m = 2.5 kg viene lanciato su per un piano inclinato di un angolo $\theta_0 = 30°$ rispetto all'orizzontale con una velocità iniziale pari a v_0 = 5 m/s. Nel primo tratto, di lunghezza l_0 = 100 cm, il corpo scivola senza attrito; la parte rimanente del piano inclinato presenta un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.5$ e uno di attrito statico pari a $\mu_s = 0.6$. Determinare:

1. di quanto si sposta il corpo lungo il piano inclinato prima di fermarsi;
2. l'espressione e il valore numerico dell'energia dissipata durante il moto.

Infine, dire se:

3. il corpo dopo essersi fermato (all'apice della traiettoria) ridiscende nuovamente lungo il piano inclinato

(3) Due cunei identici, di altezza h = 1 m e angolo d'inclinazione $\theta = 35°$, sono disposti specularmente come schematizzato in figura ad una distanza L = 2 m l'uno dall'altro e sono ancorati al piano su cui poggiano. Un corpo puntiforme di massa m = 1.5 kg viene lanciato lungo la parte inclinata del cuneo di destra per mezzo di una molla ideale, di lunghezza a riposo l_0 = 40 cm e costante elastica k = $1.26 \cdot 10^3$ N/m, il cui estremo inferiore è fissato al cuneo stesso. In seguito al lancio, dopo aver raggiunto la sommità del cuneo di destra, il corpo prosegue di moto parabolico raggiungendo il punto più in alto del cuneo di sinistra tangenzialmente alla sua superficie e quindi scivola fino in fondo a esso. Sapendo che la superficie del cuneo di destra è perfettamente liscia (assenza di attriti), mentre quella del cuneo di sinistra presenta un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.35$, determinare:

1. la lunghezza della molla al momento del lancio del corpo;
2. la massima altezza h_{max} raggiunta dal corpo durante il suo moto;
3. la velocità dello stesso quando raggiunge il punto più basso del cuneo di sinistra

(4) Un oggetto di massa m = 2 kg poggia su un piano orizzontale e tramite una molla, inizialmente compressa di Δx = 4 cm rispetto alla sua lunghezza di riposo, viene spinto verso destra. Sapendo che l'altro estremo della molla, di costante elastica k = 58.9 N/cm, è fissato a un fermo ancorato al piano orizzontale e che il coefficiente di attrito dinamico tra tavolo e oggetto è pari a $\mu_d = 0.6$, determinare lo spazio percorso dall'oggetto una volta lasciato libero.

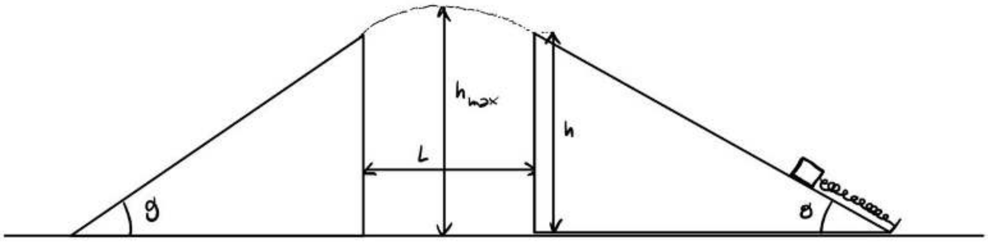


Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 3

(5) Un punto materiale di massa m sospeso al soffitto per mezzo di un filo ideale verticale è collegato al suolo per mezzo di una molla ideale, anch'essa verticale, di costante elastica k = 70 N/m; in tale situazione la molla si trova in condizione di riposo e nel filo si registra una tensione T = 4.9 N. Quindi si taglia il filo; ipotizzando che il sistema si mantenga verticale in ogni istante di tempo, determinare:

1. la massa del punto materiale;
2. la massima distanza percorsa dalla posizione iniziale dal punto materiale;
3. la posizione in cui la velocità del punto materiale è massima;
4. il valore massimo della velocità del punto materiale.

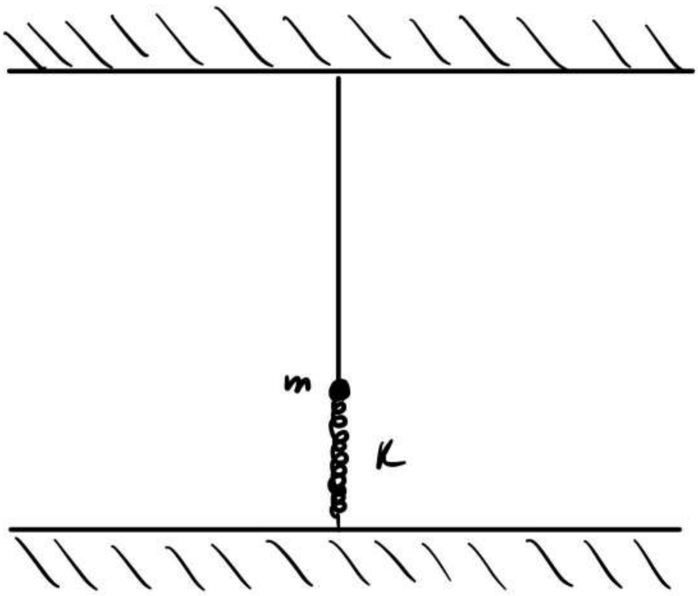


Figura 2: Rappresentazione grafica esercizio 5

(6) Si abbia la guida rigida mostrata in figura. La guida, che è formata da due tratti rettilinei e da due semicirconferenze di raggio R = 25 cm, è disposta su un piano verticale, poggia sul pavimento ed è mantenuta in quiete. Un punto materiale, di massa m = 1.5 kg, viene lasciato libero (con velocità iniziale nulla) da una quota $h_0 = 3 \cdot R$. Sapendo che il punto materiale scorre lungo la guida con attrito trascurabile senza mai staccarsi da essa,

1. determinare modulo, direzione e verso della reazione normale $\vec{\boldsymbol{N}}$ che la guida esercita sul punto materiale negli istanti in cui esso passa per i punti A, B, C e D

Si supponga poi che la quota iniziale h_0 possa essere variata. Nell'ipotesi che il punto materiale raggiunga comunque il punto D,

2. determinare per quale valore di h_0 la reazione normale della guida in C è nulla.

[*Come si vede dalla figura, il punto B è posizionato in modo che il raggio passante per esso formi un angolo di 30° con l'orizzontale.*]

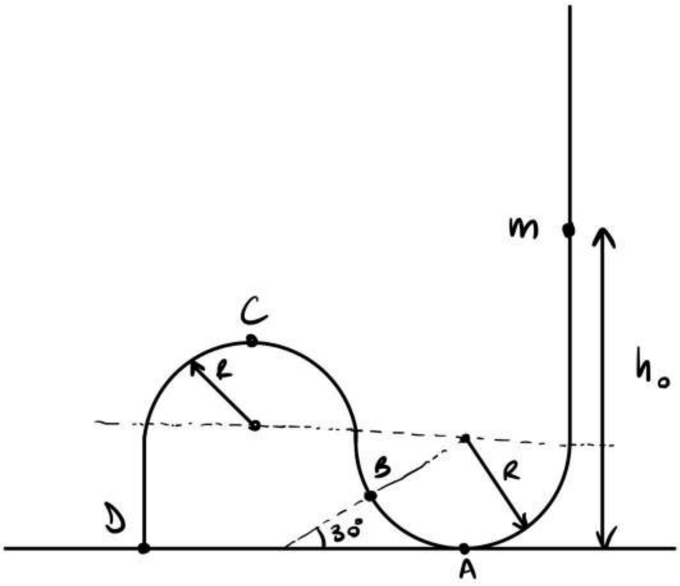
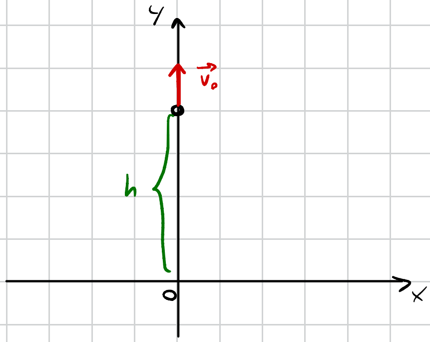


Figura 3: Rappresentazione grafica esercizio 6

ES. 1



Durante il moto dell' oggetto si conserva l' energia meccanica (quindi cinetica + potenziale). Confrontando l' istante iniziale con quello in cui raggiunge il suolo avremo

$$\underbrace{mgh + \frac{1}{2} m v_0^2}_{} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_1^2}_{}$$

Energia iniziale sarà data dall' energia potenziale (gravitazionale) sommata all' energia cinetica. La prima è dovuta al fatto che l' oggetto parte da una certa altezza iniziale rispetto al suolo, mentre la seconda è dovuta al fatto che nell' istante iniziale il nostro oggetto ha velocità <u>non-nulla</u>

L' energia finale, ovvero quando raggiunge il suolo (per la prima volta, in questo caso), sarà data dalla sola energia cinetica, poiché al suolo il nostro oggetto si troverà ad una altezza pari a 0

Da cui, isolando v_1 al primo membro:

$$v_1 = \sqrt{2gh + v_0^2} = 4.86\ m/s \rightarrow \text{Velocità con cui raggiunge il suolo}$$

→ Ma non quella con cui si stacca dal suolo subito dopo il primo urto (dato che perde energia)

Dopo il primo urto con il suolo l' oggetto si ritrova con un' energia cinetica diminuita del 25% rispetto a quella con cui era arrivato. Cioè

$$K_1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} m v_1^2 = 0.75 \cdot \frac{m}{2}\left(2gh + v_0^2\right) = \frac{3}{4}\left(mgh + \frac{1}{2} m v_0^2\right)$$

Applicando nuovamente la conservazione dell' energia meccanica, otteniamo

$$K_1 = mgh_1 \longrightarrow \frac{3}{4}\left(mgh + \frac{1}{2} m v_0^2\right) = mgh_1 \longrightarrow h_1 = \frac{3}{4}\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right) = 90.3\ cm$$

Nel punto più alto l' oggetto si ferma e smette di salire. Di conseguenza la velocità qui sarà nulla e l' energia sarà solamente potenziale (gravitazionale in questo caso)

Dalla conservazione dell' energia meccanica segue che l' energia potenziale posseduta dal corpo nel punto di massima quota dopo ogni rimbalzo è uguale all' energia cinetica con cui emerge dallo stesso rimbalzo

→ Se tra le energie cinetiche precedente e successiva a un dato rimbalzo vale la relazione $K_n = \frac{3}{4} K_{n-1}$, un' analoga relazione deve valere tra le energie potenziali del corpo relative alle massime quote raggiunte prima e dopo lo stesso rimbalzo

→ Se indichiamo con h_{n-1} e h_n tali quote, si avrà

$$mgh_n = \frac{3}{4} mgh_{n-1} \longrightarrow h_n = \frac{3}{4} h_{n-1}$$

Se indichiamo con h_0 la massima quota raggiunta dal corpo prima del primo rimbalzo, iterando la precedente relazione, si capisce facilmente che la quota massima dopo n rimbalzi può essere espressa come segue

$$h_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot h_0$$

Di conseguenza, ricavando h_0 come segue

$$mgh_0 = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2 \longrightarrow h_0 = h + \frac{v_0^2}{2g} = 1.204\ m$$

Il numero di rimbalzi cercato si ottiene impostando e risolvendo la seguente disuguaglianza

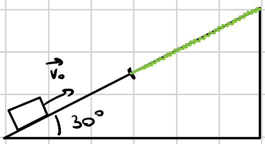
$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot h_0 < \frac{h}{4}$$

Passando ai logaritmi naturali dei due membri, otteniamo

$$n\, ln\left(\frac{3}{4}\right) + ln(h_0) < ln\left(\frac{h}{4}\right) \rightarrow n > \frac{ln(h/4h_0)}{ln(3/4)} = 5.46$$

Che significa che dovremo aspettare il 6° rimbalzo per ottenere quanto richiesto

ES. 2



A causa dell'attrito presente nella seconda parte del piano inclinato, la variazione di energia meccanica del corpo dovrà essere pari al lavoro compiuto da tali forze.
→ Quindi, se con h indichiamo la quota massima raggiunta dal corpo dopo il lancio, potremo scrivere

$$mgh - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_d N(\ell - \ell_0)$$

Dove $N = mg\cos\theta_0$ è la reazione normale del piano. Perciò, essendo $h = \ell\sin\theta_0$, segue che

$$2g\ell\sin\theta_0 - v_0^2 = -2\mu_d g(\ell - \ell_0)\cos\theta \rightarrow 2g\ell(\sin\theta_0 + \mu_d\cos\theta_0) = v_0^2 + 2\mu_d g\ell_0\cos\theta_0$$

$$\rightarrow \ell = \frac{v_0^2 + 2\mu_d g\ell_0\cos\theta_0}{2g(\sin\theta_0 + \mu_d\cos\theta_0)} = 183\,cm$$

L'energia dissipata nel moto è pari al valore assoluto del lavoro fatto dalla forza di attrito, che è

$$W_d = \mu_d N(\ell - \ell_0) = \frac{(v_0^2 - 2g\ell_0\sin\theta_0)\mu_d m\cos\theta_0}{2(\sin\theta_0 + \mu_d\cos\theta_0)} = 8.81\,J$$

Infine, una volta raggiunta la massima quota, il corpo non riprende a scendere.
→ Si può vedere che il modulo della massima forza di attrito

$$F_{a,max} = \mu_s mg\cos\theta_0$$

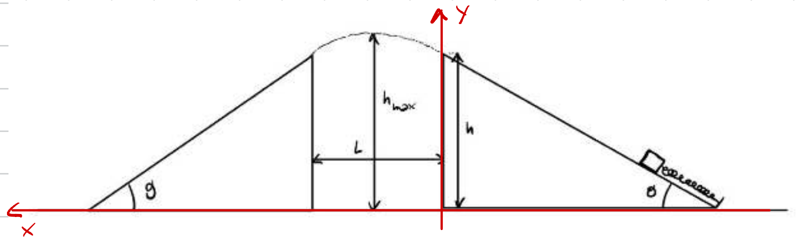
è maggiore della componente della forza gravitazionale (peso del corpo) lungo il piano (ovvero $mg\sin\theta_0$)

$$\mu_s \cancel{mg}\cos\theta_0 > \cancel{mg}\sin\theta_0 \rightarrow \mu_s > \tan\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577$$

ES. 3

Rifacendoci alla figura riportata nel testo del problema, si nota che le sommità dei due carrelli e le loro inclinazioni sono le stesse.
→ Il corpo lascia il carrello di destra e arriva su quello di sinistra seguendo una parabola perfettamente simmetrica e tangente alle superfici dei carrelli
→ Il modulo della velocità di uscita (dal carrello di destra) e di quella di entrata (dal carrello di sinistra) devono essere uguali (denominiamolo v_u)

Le equazioni orarie delle coordinate del corpo durante il moto parabolico (asse x orizzontale verso sinistra e asse y verticale e verso l'alto con origine alla base dei cunei) sono le seguenti



$$\begin{cases} x(t) = v_h \cos(\theta)\cdot t \\ y(t) = h + v_h \sin(\theta)\cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Imponendo $x(t^*) = L$ e $y(t^*) = h$ si ricava

$$t^* = \frac{L}{v_h \cos\theta} \rightarrow L \tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{v_h^2 \cos^2\theta} = 0 \rightarrow v_h^2 = \frac{gL}{2\cos\theta\sin\theta} \rightarrow v_h = 4.57 \text{ m/s}$$

Ora che conosciamo v_h, per determinare la lunghezza della molla iniziale, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia meccanica

→ Indicando con $\Delta\ell$ la compressione della molla, confrontando il momento del lancio del corpo con quello in cui lo stesso raggiunge la sommità del cuneo di destra, possiamo scrivere

$$U_i + K_i = U_f + K_f \rightarrow mg(\ell_0 - \Delta\ell)\sin\theta + \frac{1}{2} k \Delta\ell^2 = mgh + \frac{1}{2} m v_h^2$$

dalla quale si ricava la seguente equazione di 2° grado in $\Delta\ell$ (sostituendo al posto di v_h l'espressione di prima)

$$k\Delta\ell^2 - 2mg\sin\theta\cdot\Delta\ell - 2mg\left(h + \frac{L}{4\cos\theta\sin\theta} - \ell_0\sin\theta\right) = 0$$

Risolvendo (e considerando la soluzione con il "+", l'unica con senso fisico) si ottiene

Il determinante sarà: $4m^2g^2\sin^2\theta + 4k\cdot 2mg\left(h + \frac{L}{4\cos\theta\sin\theta} - \ell_0\sin\theta\right)$

↓

$$\Delta\ell = \frac{mg\sin\theta + \sqrt{m^2g^2\sin^2\theta + 2kmg\left(h + \frac{L}{4\cos\theta\sin\theta} - \ell_0\sin\theta\right)}}{k} = 0.214 \text{ m}$$

E quindi la lunghezza iniziale della molla è

$$\ell_i = \ell_0 - \Delta\ell = 0.186 \text{m}$$

La quota massima raggiunta dal corpo corrisponde a $y(t^*/2)$, pari a

$$y_{max} = y(t^*/2) = h + v_h \sin\theta\cdot\left(\frac{t^*}{2}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{t^*}{2}\right)^2 = h + \frac{L}{2}\tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{L^2}{4 v_h^2 \cos^2\theta}$$

E sostituendo h e semplificando si ricava

$$y_{max} = h + \frac{L}{4}\tan\theta = 1.35 \text{m}$$

Infine, dato che lungo la discesa entra in gioco anche una forza di attrito dinamico di modulo

$$F_a = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta$$

La variazione di energia meccanica sarà pari al lavoro di tale forza

$$\Delta K + \Delta U = L_{n.c}$$

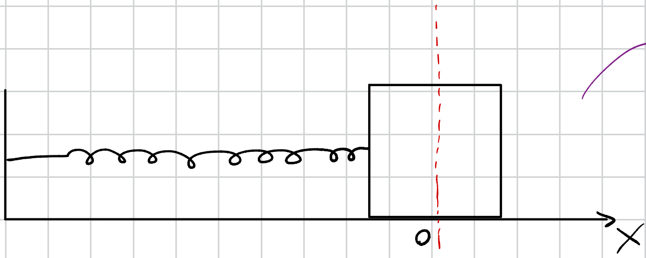
$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_h^2 - mgh = -\mu_d mg\cos\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta}$$

→ Questo è equivalente a considerare la differenza tra l'energia dell'oggetto quando raggiunge il fondo del carro di sinistra e quella all'apice. Nonostante la regola generale sulla conservazione dell'energia meccanica, la differenza sarà $\neq 0$ per via del lavoro delle forze non conservative (ovvero attrito)

Dove v_f è la velocità del corpo in fondo al carro di sinistra. Ricavando v_f si ha

$$v_f = \sqrt{v_h^2 + 2gh\left(1 - \mu_d \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} = 5.54 \text{ m/s}$$

$\boxed{\text{ES. 4}}$



→ Assumiamo che questo sia l'istante iniziale (con la molla compressa di Δx), con l'asse x orientato nel verso del moto e avente origine nel punto di partenza (ovvero quello in cui si trova l'oggetto quando la molla è al massimo della compressione)

Risolviamo il problema considerando la conservazione dell'energia. In questo caso, oltre alla forza elastica (che è conservativa), è presente costantemente anche la forza di attrito dinamico.

Quindi l'energia meccanica non è conservata

$$\Delta E_{mecc} = L_a \rightarrow -\frac{1}{2} k \Delta x^2 = -\mu_d mg \cdot d$$

Dove $\frac{k}{2}\Delta x^2$ è l'energia potenziale elastica inizialmente immagazzinata dalla molla e, se d è la lunghezza del tratto percorso complessivamente dal corpo, $L_a = -\mu_d mg \cdot d$ è il conseguente lavoro compiuto dalla forza di attrito. Quindi

$$d = \frac{k\Delta x^2}{2\mu_d mg} = 40.0 \text{ cm}$$

VEDIAMO ORA UN METODO ALTERNATIVO PER RISOLVERE IL PROBLEMA

Il corpo è soggetto alla forza di attrito dinamico durante tutto il suo moto. Invece, la forza esercitata dalla molla agisce solo per il primo tratto di lunghezza Δx.

→ Applicando la seconda legge della dinamica, nei due tratti valgono le seguenti equazioni del moto

$$ma = F_{el} - F_a \overset{*}{=} -k(x - \Delta x) - F_a; \qquad ma = -F_a = -\mu_d mg$$

Nel tratto con la forza elastica — Nel tratto senza forza elastica

Dove $F_a = \mu_d N = \mu_d mg$ è la forza di attrito dinamico

La prima equazione vale nell'intervallo $[0, \Delta x]$ e possiamo scrivere

Applicando la regola della catena per le derivate

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} = v^{-1} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = mv\frac{dv}{dx} = mv \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \underbrace{m\frac{dv}{dt}}_{= m \cdot a} \overset{*}{=} -k(x - \Delta x) - \mu_d mg$$

→ (VEDI PAGINA SUCCESSIVA)

Questa è la derivata dell'energia cinetica. Quindi stiamo calcolando la velocità con cui varia lungo x

$$\rightarrow d(v^2) = \frac{2}{m}\left[-k(x-\Delta x) - \mu_d mg\right] dx$$

Di conseguenza, integrando ambo i membri possiamo scrivere

$$v^2(\Delta x) = \frac{2}{m}\int_0^{\Delta x}\left[-k(x-\Delta x) - \mu_d mg\right] dx = \frac{k}{m}\Delta x^2 - 2\mu_d g \Delta x$$

Come mostrato dalla corrispondente equazione del moto, la seconda parte del moto è uniformemente decelerata con accelerazione in modulo pari a $\mu_d g$. Tenendo conto delle condizioni iniziali $x_0 = \Delta x$ e $v_0 = v(\Delta x)$, posizione e velocità istantanee del corpo sono determinate dalle seguenti equazioni

$$x(t) = \Delta x + v(\Delta x)t - \frac{1}{2}\mu_d g t^2; \qquad v(t) = v(\Delta x) - \mu_d g t$$

Il corpo si fermerà all'annullarsi della sua velocità e quindi

$$v(t_1) = 0 \longrightarrow t_1 = \frac{v(\Delta x)}{\mu_d g}$$

corrispondente alla posizione

$$x(t_1) = \Delta x + v(\Delta x)t_1 - \frac{1}{2}\mu_d g t_1^2 = \Delta x + \frac{v^2(\Delta x)}{2\mu_d g} = \frac{k\Delta x^2}{2\mu_d mg} = 40.0 \text{ cm}$$

ES. 5

Il moto si sviluppa nella sola direzione verticale, per cui è ragionevole utilizzare un sistema di riferimento con l'asse y verticale diretto verso l'alto; sia y_0 la quota iniziale del punto materiale.

Nella situazione iniziale di equilibrio, la molla (che per ipotesi si trova in condizione di riposo) non imprime alcuna forza; il punto materiale si trova quindi soggetto solo alla forza di gravità e alla tensione esercitata dal filo.

→ Il secondo principio della dinamica si scrive dunque come

$$T - mg = ma_y = 0$$ → si sono proiettate forze e accelerazioni lungo l'asse y

$$\Rightarrow m = \frac{T}{g} = 0.50 \text{ kg}$$

Una volta tagliato il filo, il sistema si comporta come una massa-molla sotto l'effetto della gravità
→ Questo sistema può essere convenientemente assimilato a un sistema massa-molla in assenza di gravità perché se ne ridefinisca il punto di equilibrio, la cui posizione y_1 può essere determinata dall'equilibrio delle forze:

$$mg = k(y_0 - y_1)$$

$$\rightarrow y_0 - y_1 = \frac{mg}{k}$$

Noto che il sistema evolve sotto l'azione di forze conservative, si conserva l'energia meccanica del punto materiale; confrontando il valore di tale quantità nell'istante iniziale (in cui il punto è fermo) e in quello successivo in cui il punto materiale si trova nuovamente in quiete, si trova

$$\frac{1}{2}k(y_0 - y_1)^2 = \frac{1}{2}k(y_{min} - y_1)^2$$ ⟶ L'energia potenziale elastica ora è riferita al nuovo punto di equilibrio y_1. Questo è un artificio che permette di convolvere in tale termine anche il contributo dell'energia potenziale gravitazionale

$$\downarrow$$

$$y_1 - y_{min} = y_0 - y_1$$ ⟶ Scelta dei segni dettata dal fatto che $y_{min} < y_1 < y_0$

E da ciò si determina la massima distanza dalla posizione iniziale raggiunta dal punto materiale

$$y_0 - y_{min} = y_0 - y_1 + y_1 - y_{min} = 2(y_0 - y_1) = 2\frac{mg}{k} = 14 \text{ cm}$$

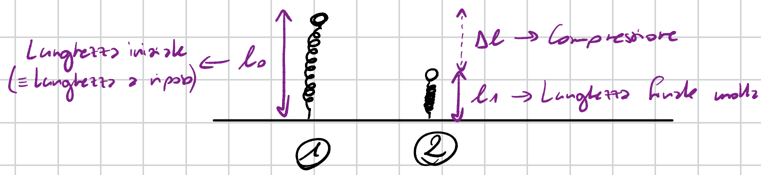
In questa fase di moto il punto materiale raggiunge la velocità massima in corrispondenza al nuovo punto di equilibrio (posizionato a distanza $y_0 - y_1 = \frac{mg}{k} = 7.0$ cm dal punto iniziale)

La velocità massima può essere determinata dalla conservazione dell'energia meccanica, confrontando tale quantità nell'istante di moto in cui l'energia potenziale è nulla (ovvero quando il punto si trova in corrispondenza del nuovo punto di equilibrio y_1) con quello in cui il punto raggiunge la massima elongazione (in cui si annulla la componente cinetica dell'energia meccanica)

$$\frac{1}{2}m v_{max}^2 = \frac{1}{2}k(y_{min} - y_1)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 \rightarrow v_{max} = g\sqrt{\frac{m}{k}} = 0.83 \text{ m/s}$$

VEDIAMO ORA UN MODO ALTERNATIVO DI PROCEDERE

Un ulteriore modo di procedere nella risoluzione del problema è il seguente: consideriamo le seguenti situazioni, e le relative energie meccaniche (senza analogismi o "cambi di sistema")



$$\boxed{l_0 = l_1 + \Delta l}$$

$$E_1 = mgl_0 = \underbrace{mg(l_1 + \Delta l)}_{\text{Energia potenziale gravitazionale}}$$

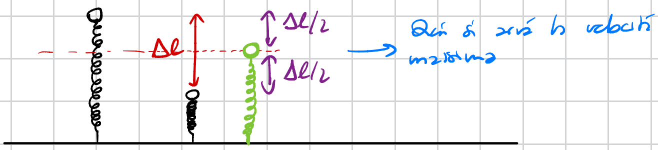
$$E_2 = \underbrace{\frac{k}{2}\Delta l^2 + mgl_1}_{\text{Energia potenziale (gravitazionale + elastica)}}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica: $E_1 = E_2$

$$\cancel{mgl_1} + mg\cancel{\Delta l} = \frac{k}{2}\Delta l^{\cancel{2}} + \cancel{mgl_1}$$

$$mg = \frac{k}{2}\Delta l \longrightarrow \Delta l = \frac{2mg}{k} = 14\ cm$$

Il punto di massima velocità dell'oggetto, nel suo moto armonico, sarà nel punto di equilibrio rappresentato dal sistema massa+molla, ovvero il punto in cui $F_{el} = P$, ovvero il centro delle oscillazioni, posto a metà tra l_1 e l_0



Di conseguenza, per trovare ora la velocità massima sfruttiamo sempre la conservazione dell'energia

$$E_{\Delta l/2} = mg\left(\cancel{l_0} - \frac{\Delta l}{2}\right) + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{\Delta l}{2}\right)^2 = \cancel{mgl_0} = E_{l_0}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mg\frac{\Delta l}{2} - \frac{k}{2}\frac{\Delta l^2}{4}$$

$$mv_2^2 = mg \cdot \frac{2mg}{k} - \frac{\cancel{k}}{4} \cdot \frac{4m^2g^2}{k^{\cancel{2}}}$$

$$mv_2^2 = 2\frac{m^2g^2}{k} - \frac{m^2g^2}{k}$$

$$v_2^2 = \frac{mg^2}{k} \longrightarrow v_2 = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

ES. 6

Data l'assenza di attriti, l'energia meccanica del corpo si deve conservare. Pertanto, per una quota h generica (misurata dal suolo) possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}m\underbrace{v^2(h)}_{} + mgh = mgh_0 \longrightarrow v^2(h) = 2g(h_0-h)$$

$v(h)$ è il modulo della velocità del punto materiale alla quota h

Osservando che le quote dei punti A, B, C e D sono rispettivamente pari a

$$h_A = 0; \qquad h_B = R - R\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}R; \qquad h_C = 2R; \qquad h_D = 0$$

Otteniamo

$$v_A^2 = v^2(h_A) = 6gR; \qquad v_B^2 = v^2(h_B) = 5gR$$

$$v_C^2 = v^2(h_C) = 2gR; \qquad v_D^2 = v^2(h_D) = 6gR$$

Durante il moto del punto materiale il prodotto tra la sua massa e il vettore accelerazione deve uguagliare (2ª legge della dinamica) la risultante delle forze che agiscono su di esso. Le forze agenti sul corpo sono la forza di gravità $m\vec{g}$ e la reazione normale della guida $\vec{N}$.

Nei tratti verticali il corpo non grava in nessun modo sulla guida e quindi la reazione normale sarà nulla; quindi, in D la reazione normale è nulla.

Stiamo considerando, per ogni punto, la direzione che punta verso il centro della circonferenza

Invece, nei due tratti circolari della guida la somma della componente radiale di $m\vec{g}$ e della reazione normale $\vec{N}$ dovrà essere pari al prodotto tra m e l'accelerazione centripeta. Prendendo un asse radiale diretto verso il centro di curvatura dell'arco di guida considerato, in corrispondenza dei punti A, B e C possiamo scrivere le seguenti

Perché un oggetto che si muove di moto circolare risente, nel complesso, di questa accelerazione

$$m\frac{v_A^2}{R} = N_A - mg \longrightarrow N_A = m\frac{v_A^2}{R} + mg = 7mg = 103\,N$$

$$m\frac{v_B^2}{R} = N_B - mg\sin(30^\circ) \longrightarrow N_B = m\frac{v_B^2}{R} + \frac{1}{2}mg = \frac{11}{2}mg = 80.9\,N$$

$$m\frac{v_C^2}{R} = N_C + mg \longrightarrow N_C = m\frac{v_C^2}{R} - mg = mg = 14.7\,N$$

In questo caso abbiamo assunto un verso concorde tra N_C e la forza peso (altrimenti avremmo avuto $N_C - mg$). Se avessimo fatto l'assunzione opposta (ovvero $N_C - mg$) non sarebbe comunque stato un problema dato che avremmo trovato semplicemente lo stesso valore in modulo, ma di segno opposto (a indicare che il verso è l'opposto rispetto a quello che avevamo supposto)

Dove N_A, N_B e N_C corrispondono ai moduli delle rispettive reazioni normali. Ovviamente, i vettori $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ e $\vec{N}_C$ sono diretti verso i rispettivi centri di curvatura dei tratti circolari di guida.

Se vogliamo che al passaggio in C la reazione normale sia nulla, l'ultima delle equazioni appena scritte impone che

$$m\frac{v_C^2}{R} = mg \longrightarrow v_C^2 = gR$$

E quindi, utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C = mgh_0' \longrightarrow h_0' = \frac{1}{g}\left[\frac{1}{2}v_C^2 + 2gR\right] = \frac{5}{2}R = 62.5\,cm$$