Sesto test di autovalutazione di FONDAMENTI DI AUTOMATICA A.A. 2020/21

Data: 25 Novembre 2020

1. Si tracci approssimativamente[1] i luoghi delle radici positivo e negativo associati alle seguenti funzione di trasferimento (in catena aperta):

   (1) $G(s) = \dfrac{s}{(s+5)(s+3)(s+2-j)(s+2+j)}$;

   (2) $G(s) = \dfrac{s(s+5)}{(s+1)(s+2)(s^2+4)}$;

   (3) $G(s) = \dfrac{(s^2+4s+5)(s-1)}{s(s+0.1)(s+2)(s^2+1)}$;

   (4) $G(s) = \dfrac{(s+1)(s-1)}{(s+10)(s+5)^2(s^2+1)}$;

   (5) $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s-5)(s^2+1)}$.

2. Data
$$G(s) = \frac{s(s+a)}{(s+3)(s-3)^2}$$
   - si determini $a \in \mathbb{R}$ sapendo che $s = -1$ è punto doppio del luogo;
   - si traccino i luoghi delle radici positivo e negativo della $G(s)$ per tale valore di a.

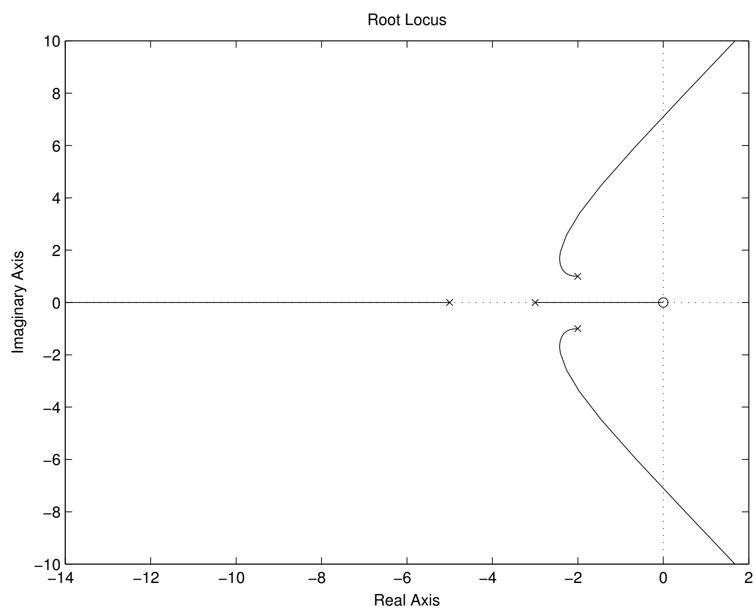
[1] Non è richiesto il calcolo di punti doppi e/o le intersezioni con gli assi.

RISPOSTE

1. (1) Adottando le regole per il tracciamento del luogo positivo delle radici,
   (a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -5]$ e $[-3, 0]$.
   (b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 1$, ne consegue che un ramo si chiude al finito (l'intervallo sul semiasse reale $[-3, 0]$) mentre tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/3, \pi$ e $5\pi/3$.
   (c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è

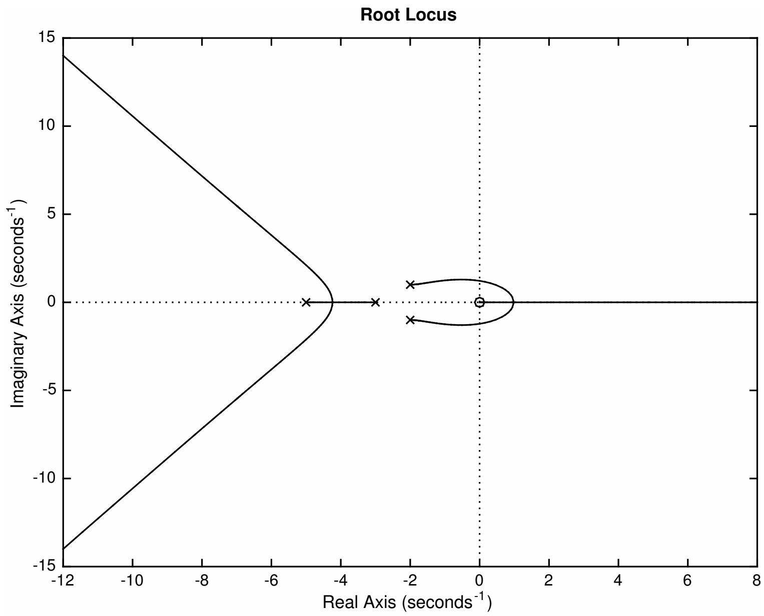
$$C = \frac{-5 - 3 - 2 - j - 2 + j - 0}{4 - 1} = -4.$$

Dalle informazioni desunte sulla base di queste regole è da escludere la presenza di punti doppi e quindi, senza fare ulteriori conti, possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del luogo positivo ottenendo in tal modo



Per quanto concerne il luogo negativo delle radici,
   (a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-5, -3]$ e $[0, +\infty)$.
   (b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 1$, ne consegue che un ramo si chiude al finito (va allo zero in 0) mentre tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $0, 2\pi/3$ e $4\pi/3$.
   (c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è stato calcolato prima ed è $C = -4$.

Chiaramente esistono due punti doppi: uno in $[-5, -3]$ e uno in $[0, +\infty)$ (ma il loro calcolo numerico è molto complesso). Il luogo negativo è allora il seguente:



(2) Adottando le regole per il tracciamento del luogo positivo delle radici,

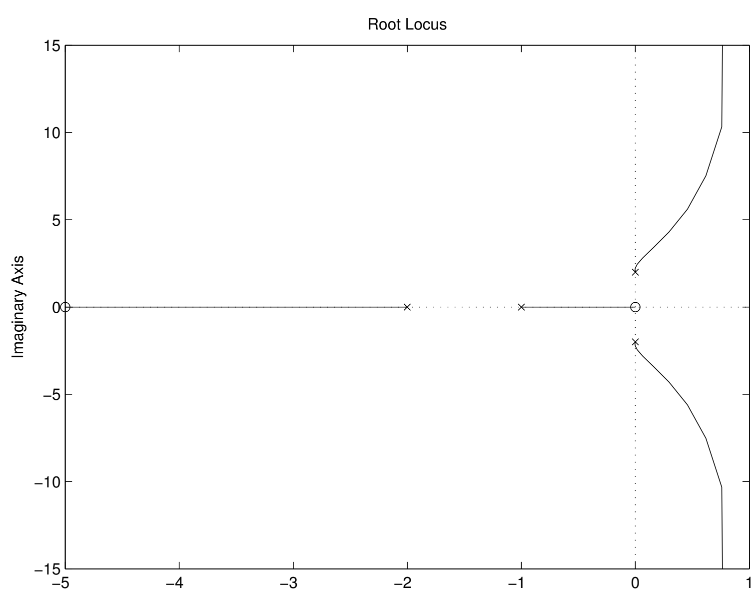
(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-5, -2]$ e $[-1, 0]$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 2$, ne consegue che due rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/2$ e $3\pi/2$.

(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$C = \frac{-2 - 1 - 2j + 2j + 5}{4 - 2} = 1.$$

Dalle informazioni desunte sulla base di queste regole è da escludere la presenza di punti doppi e quindi, senza fare ulteriori conti, possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del luogo positivo ottenendo in tal modo



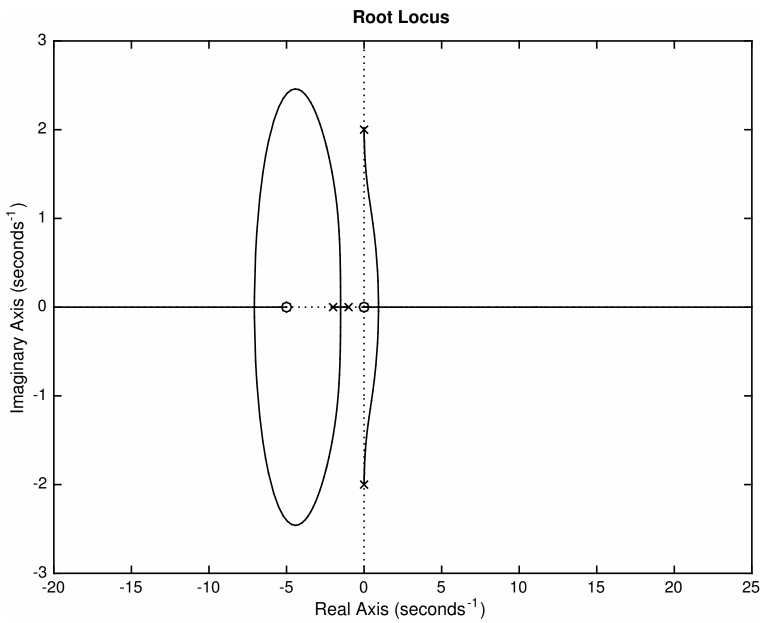
Per quanto concerne il luogo negativo delle radici,

(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -5]$, $[-2, -1]$ e $[0, +\infty)$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 1$, ne consegue che due rami si chiudono al finito (uno va allo zero in 0 e uno allo zero in -5) mentre due rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari 0 e π.

(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è stato calcolato prima ed è $C = 1$.

Chiaramente esistono tre punti doppi: uno in $(-\infty, -5]$, uno in $[-2, -1]$ e uno in $[0, +\infty)$ (ma il loro calcolo numerico è molto complesso). Il luogo negativo è allora il seguente:



(3) Adottando le regole per il tracciamento del luogo positivo delle radici,

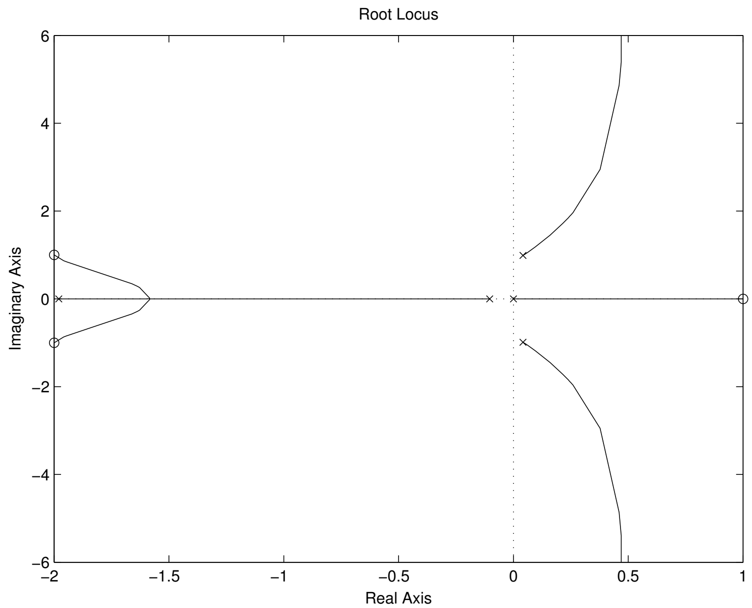
(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-2, -0.1]$ e $[0, 1]$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n = 5$ mentre il numero di zeri è $m = 3$, ne consegue che due rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/2$ e $3\pi/2$.

(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$C = \frac{(0 - 0.1 - 2 - j + j) - (-2 - j - 2 + j + 1)}{5 - 3} = 0.45.$$

L'unica soluzione possibile è che ci sia un punto doppio nell'intervallo $[-2, -0.1]$ da cui si dipartono due rami che si chiudono nei due zeri complessi $-2 \pm j$, mentre dai due poli immaginari coniugati $\pm j$ si dipartano due rami che assecondano gli asintoti verticali. Possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del sistema ottenendo in tal modo



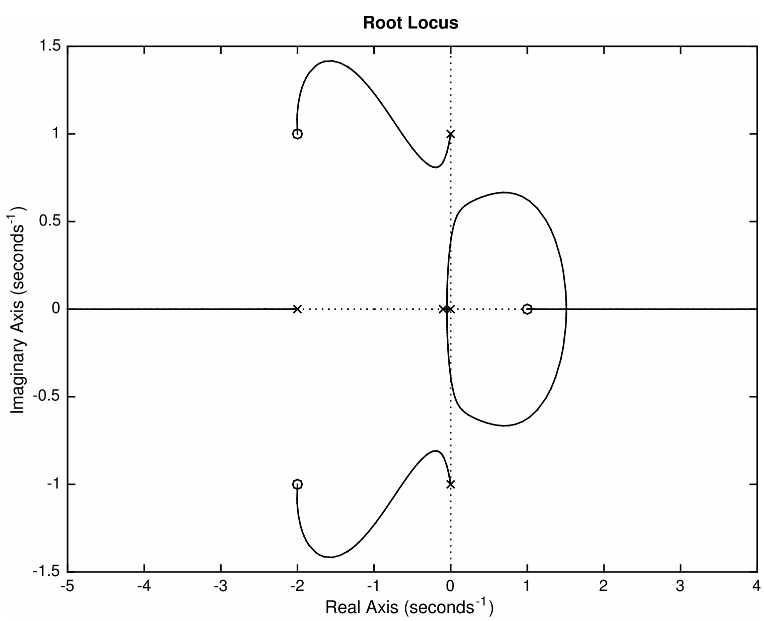
Per quanto concerne il luogo negativo delle radici,

(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -2]$, $[-0.1]$ e $[0, +\infty)$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 1$, ne consegue che due rami si chiudono al finito (uno va allo zero in 0 e uno allo zero in -5) mentre due rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari 0 e π.

(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è stato calcolato prima ed è $C = 0.45$.

A prima vista esistono varie soluzioni possibili ed il calcolo dei punti doppi è estremamente complicato. La soluzione più ragionevole, legata a ragioni di prossimità delle varie coppie di punti, è che i due rami che partono dai due poli complessi vadano a finire sui due zeri complessi e da 0 partano due rami che vanno a finire in un punto doppio collocato in $[0, +\infty)$. Il luogo negativo è allora il seguente:



(4) Adottando le regole per il tracciamento del luogo positivo delle radici,

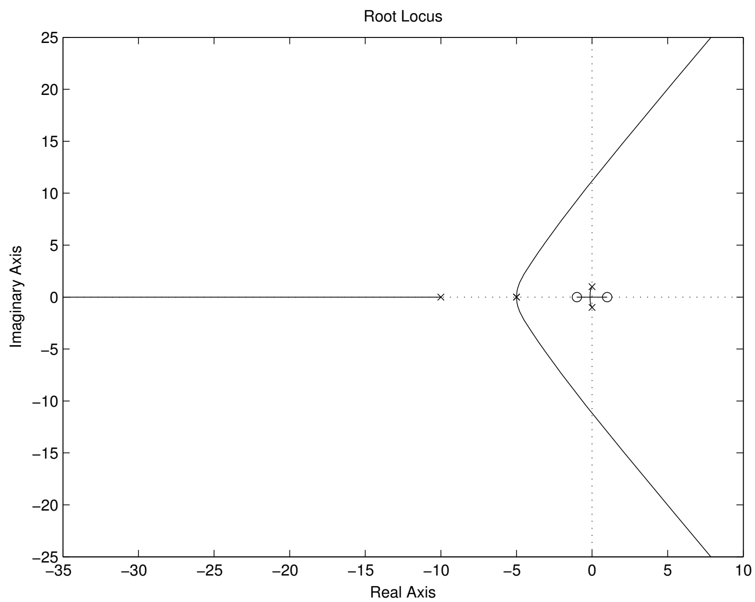
(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -10]$ e $[-1, 1]$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n = 5$ mentre il numero degli zeri è $m = 2$, ne consegue che tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/3, \pi$ e $-\pi/3$.

(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$C = \frac{(-10 - 5 - 5 - j + j) - (-1 + 1)}{5 - 2} = -20/3.$$

L'unica soluzione possibile è che ci sia un punto doppio nell'intervallo $[-1, 1]$ a cui pervengono i due rami che partono dai due poli complessi $\pm j$, mentre dal polo in -5 si dipartano due rami che assecondano gli asintoti a $\pm\pi/3$. Senza fare ulteriori conti possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del sistema ottenendo in tal modo



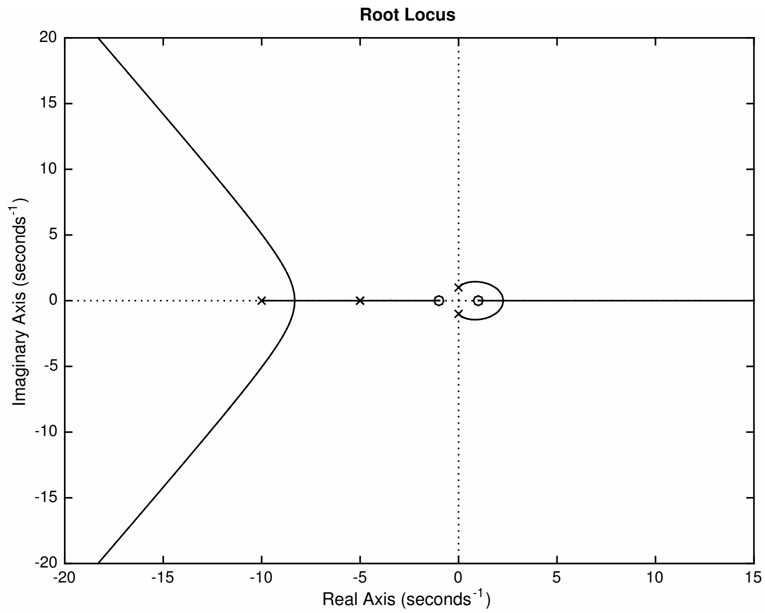
Per quanto concerne il luogo negativo delle radici,

(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-10, -1]$ e $[1, +\infty)$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n = 5$ mentre il numero di zeri è $m = 2$, ne consegue che due rami si chiudono al finito (uno va allo zero in -1 e uno allo zero in 1) mentre tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $0, 2\pi/3$ e $4\pi/3$.

(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è stato calcolato prima ed è $C = -20/3$.

Chiaramente esistono 2 punti doppi: uno in $[-10, -5]$ e uno in $[1, +\infty)$ (ma il loro calcolo numerico è molto complesso). Il luogo negativo è allora il seguente:

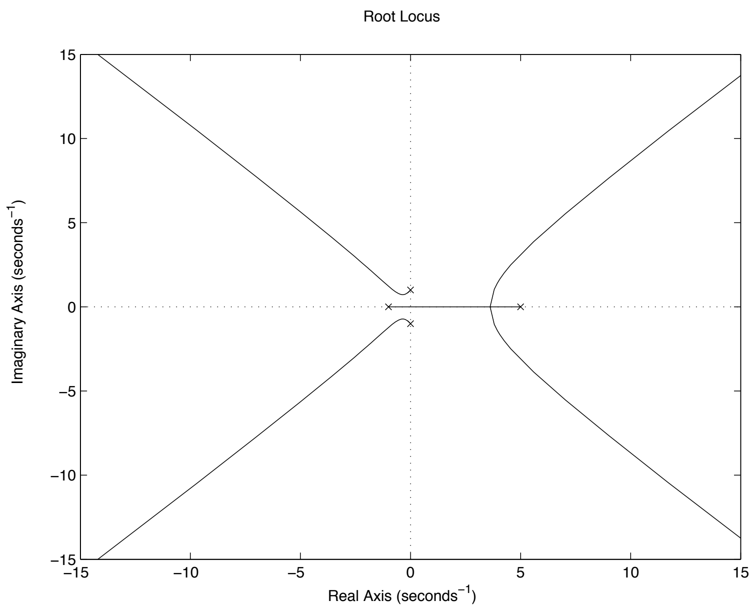


(5) Adottando le regole per il tracciamento del luogo positivo delle radici,

   (a) verifichiamo subito che appartiene al luogo positivo solo l'intervallo sul semiasse reale negativo $[-1, 5]$.
   (b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero degli zeri è $m = 0$, ne consegue che i 4 rami del luogo delle radici vanno tutti al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ e $7\pi/4$.
   (c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è

$$C = \frac{(-1 + 5 - j + j)}{4} = 1.$$

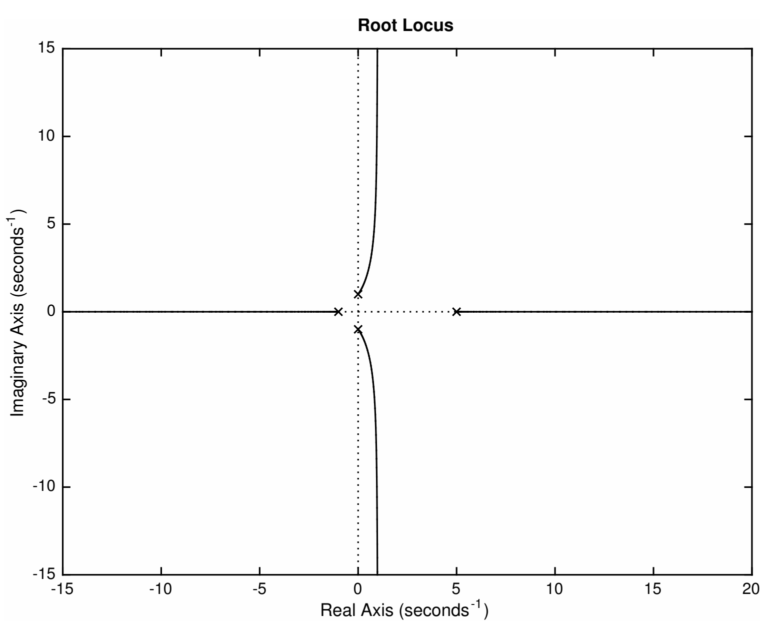
L'unica soluzione possibile è che ci sia un punto doppio nell'intervallo $[-1, 5]$ da cui si dipartono i due rami che vanno al punto improprio con direzioni $\pi/4$ e $7\pi/4 = -\pi/4$, mentre dai poli in $\pm j$ si dipartano i due rami che assecondano gli asintoti a $3\pi/4$ e $5\pi/4$. Senza fare ulteriori conti possiamo dedurre ora l'andamento qualitativo del luogo positivo ottenendo in tal modo



Per quanto concerne il luogo negativo delle radici,

(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty, -1]$ e $[5, +\infty)$.
(b) Poichè il numero dei poli è $n = 4$ mentre il numero di zeri è $m = 0$, ne consegue che tutti e 4 rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$.
(c) Il baricentro da cui partono gli asintoti è stato calcolato prima ed è $C = 1$.

Il luogo negativo è allora il seguente:



2. Per determinare i punti doppi del luogo delle radici bisogna determinare le soluzioni dell'equazione
$$d(s)\frac{d}{ds}[n(s)] - n(s)\frac{d}{ds}[d(s)] = 0,$$
dove $d(s) = (s + 3)(s - 3)^2$ mentre $n(s) = s(s + a)$, ma dobbiamo ricordarci che da tali soluzioni vanno eliminati gli eventuali zeri multipli di $n(s)$ o di $d(s)$. In questo caso, $n(s)$ non

ha zeri multipli ma $d(s)$ ha uno zero doppio in 3 che pertanto andrà eliminato. L'equazione precedente (in cui abbiamo raccolto il termine $s-3$, comune a tutti i termini) è

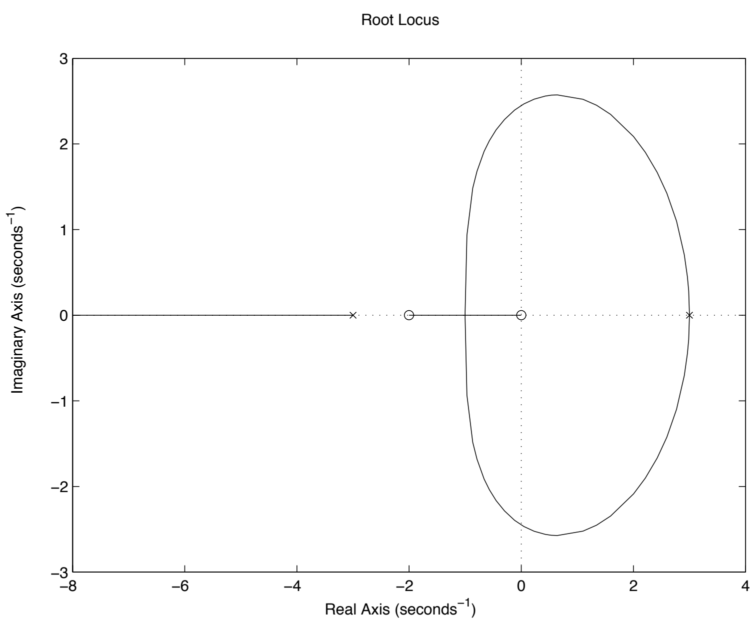
$$(s-3)[(2s+a)(s+3)(s-3)-3s(s+1)(s+a)]=0.$$

Ponendo $s=-1$, si trova $a=2$. Adottando le regole per il tracciamento del luogo (positivo) delle radici,

(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $(-\infty,-3]$ e $[-2,0]$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n=3$ mentre il numero degli zeri è $m=2$, ne consegue che 1 ramo va al punto improprio nella direzione angolare π. Questo asintoto di fatto è già stato evidenziato nel tracciamento dei punti reali del luogo.

Chiaramente abbiamo un punto doppio in -1 a cui pervengono i due rami del luogo che partono dal polo doppio in 3. Non essendo necessari ulteriori conti, troviamo facilmente il seguente luogo delle radici:

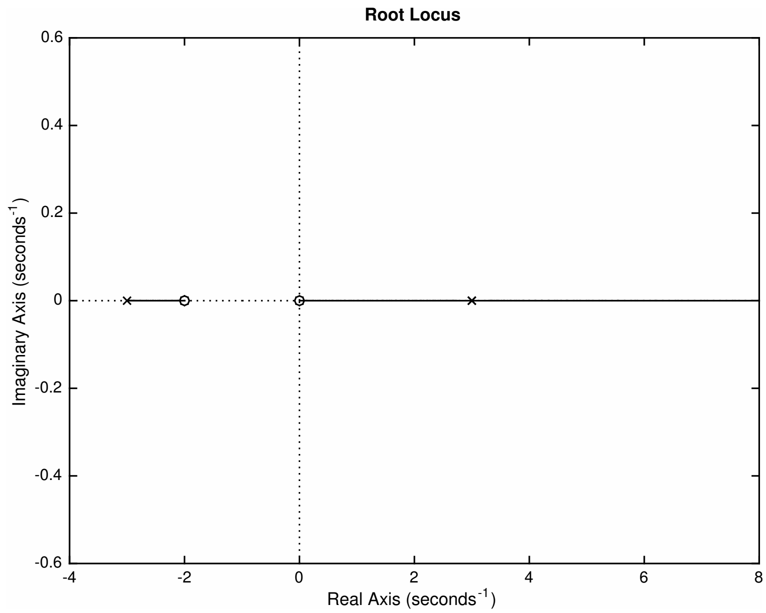


Per quanto concerne il luogo negativo delle radici,

(a) verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici gli intervalli sul semiasse reale negativo $[-3,-2]$ e $[0,+\infty)$.

(b) Poichè il numero dei poli è $n=3$ mentre il numero di zeri è $m=2$, ne consegue che due rami si chiudono al finito mentre un ramo va al punto improprio nella direzione angolare 0.

Il luogo negativo è allora il seguente:


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^-1)
Real Axis (seconds^-1)
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-4
-2
0
2
4
6
8