Quiz 8

Question **1**

Not complete

Flag question

Dopo aver risolto l'equazione $y' = 2xy - 6e^{x^2}$ con la condizione $y(0) = 6$, calcolare $y(1)$.

Select one:

- 1
- 0
- $4 + e$
- $\dfrac{3e+1}{e}$
- e^4
- altro
- $3e$

Check

$$\begin{cases} y' = 2xy - 6e^{x^2} \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

CALCOLARE $y(1)$

SOL. E' UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DEL I ORDINE, LA CUI FORMULA RISOLUTIVA E':

$$\boxed{\begin{aligned} & y' + a(x)y = b(x) \\ & A = \int a(x)\,dx \\ & B = \int b(x)e^{A}\,dx \\ & \rightarrow y(x) = Be^{-A(x)} + Ce^{-A(x)}, \; C \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

$$y' - 2xy = -6e^{x^2}$$

DOVE $a(x) = -2x$
$b(x) = -6e^{x^2}$

$$A = \int a(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2$$

$$B = \int b(x)e^{-A(x)}dx = \int -6e^{x^2} \cdot e^{-x^2}dx = \int -6e^0\,dx = \int -6\,dx = -6x$$

$$\rightarrow y(x) = -6xe^{-x^2} + Ce^{-x^2}$$

IMPONGO LA CONDIZIONE INIZIALE $y(0) = 6$: $y(0) = -6 \cdot 0 \cdot e^0 + Ce^0 = 6 \rightarrow C = 6$

QUINDI, LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY E' $y(x) = -6xe^{-x^2} + 6e^{-x^2}$

CALCOLO $y(1) = -6e^{-1} + 6e^{-1} = 0$ V

Question **2**

Not complete

Flag question

Sia y soluzione del problema di Cauchy $y' = te^t/y$, $y(0) = 1$. Determinare $y(1)$.

Risposta es 4: $\boxed{a)1 \quad b)\sqrt{3} \quad c)\log 2 \quad d) -3 \quad e)\sqrt{2} \quad f)\sqrt{2}/2}$

Select one:

- a
- b
- c
- d
- e
- f

Check

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} te^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

DETERMINARE $y(1)$ TRA

a) 1
b) $\sqrt{3}$ V
c) $\log 2$
d) -3
e) $\sqrt{2}$
f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

SOL. E' UNA EQUAZIONE DIFFERENZIABILE A VARIABILI SEPARABILI
USO IL METODO DI RISOLUZIONE DELLE EQ. DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI

$$y' = \frac{1}{y} te^t$$

1. TROVO LE POSSIBILI SOLUZIONI COSTANTI

$h(y_0) = 0 \Rightarrow$ MAI, Y DEVE ESSERE PER FORZA $\neq 0$

2. PER $h(y_0) \neq 0 \Rightarrow$ SEPARO LE VARIABILI

$$y' = \frac{1}{y} te^t \rightarrow y \cdot y' = te^t \rightarrow \int y' y = \int te^t \, dt \xrightarrow[\text{SOSTITUISCO } u = y(t)]{} \int u \, du = \int te^t \, dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} u^2 = e^t (t-1) + c \rightarrow \frac{1}{2} y^2 = e^t (t-1) + c \rightarrow y^2 = 2e^t (t-1) + c$$

$$\rightarrow y(t) = \sqrt{2e^t (t-1) + c}$$

3. USO LA CONDIZIONE INIZIALE: $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 \longrightarrow 1 = \sqrt{2e^0 (0-1) + c} \longrightarrow 1 = \sqrt{-2+c} \rightarrow 1 = -2 + c \rightarrow c = 3$$

$\Rightarrow$ LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY E':

$$y(t) = \sqrt{2te^t - 2e^t + 3}$$

(sarebbero 2 soluzioni, tuttavia scelgo la positiva perché $y(0) = 1$

Calcolo $y(1)$: $y(1) = \sqrt{2e^t (t-1) + 3} = \sqrt{2e(1-1) + 3} = \sqrt{2e \cdot 0 + 3} = \sqrt{3}$ V

Question **3**

Not complete

Flag question

In quanti modi si possono distribuire 52 carte da gioco a 4 giocatori in modo che ciascuno abbia 13 carte?

Select one:

- a. $(13!)^4$
- b. $\dfrac{52!}{(13!)^4}$
- c. $\binom{52}{13}$
- d. $\dfrac{52!}{13! \times 26! \times 39!}$
- e. $\dfrac{52!}{13^4}$

Check

IN QUANTI MODI POSSO DISTRIBUIRE 52 CARTE IN PARTI UGUALI ?
4 GIOCATORI

[Se il problema 3 è diverso, controllare fine PDF]

SOL.

GIOCATORE 1 GIOCATORE 2 GIOCATORE 3 GIOCATORE 4

L'ORDINE CON CUI SI DISTRIBUISCONO LE CARTE A CIASCUN GIOCATORE NON CONTA. LA FORMULAZIONE DEL PROBLEMA È EQUIVALENTE A:

" QUANTI SOTTOINSIEMI DIVERSI DI 13 ELEMENTI DI 52 CARTE POSSO FORMARE?

IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI FORMATI DA K ELEMENTI DI UN INSIEME DI m ELEMENTI È: (T.1.39)

$$\boxed{C(m,K) = \frac{S(m,K)}{K!} = \binom{m}{K} = \frac{m!}{K!\,(m-K)!}}$$

• GIOCATORE 1: $C(52,13) = \dfrac{52!}{13!\,(52-13)!} = \dfrac{52!}{13!\cdot 39!}$

• GIOCATORE 2: $C(39,13) = \dfrac{39!}{13!\cdot 26!}$

• GIOCATORE 3: $C(26,13) = \dfrac{26!}{13!\cdot 13!}$

• GIOCATORE 4: $C(13,13) = \dfrac{13!}{13!\cdot 0!} = 1$

ORA APPLICO IL PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE:

$$\frac{52!}{13!\cdot 39!}\cdot\frac{39!}{13!\cdot 26!}\cdot\frac{26!}{13!\cdot 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$ ✓

Question **4**

Not complete

Flag question

In quanti modi 8 persone possono sedersi in fila se ci sono 4 coppie e ognuno è vicino al proprio partner?

Select one:

- a. 40320
- b. 1152
- c. 10080
- d. 384
- e. 2880

Check

8 PERSONE, 4 COPPIE

SOL. PROCEDO IN 2 TAPPE, POI APPLICO IL PRINCIPIO DI MOLTIPLICAZIONE (PM)

1) QUANTE SEQUENZE DI 2 PERSONE POSSO PRENDERE PER OGNI COPPIA?

$$\boxed{S(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}} \rightarrow S(2,2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2}{0!} = 2$$

IN QUANTI MODI POSSO PRENDERE 1 COPPIA DA 4?

$$C(n,k) = \binom{n}{k} = \binom{4}{1} = 4$$

2) IN QUANTI MODI POSSO DISPORRE LE COPPIE? APPLICO IL P.M.

$$\left[2!\binom{4}{1}\right]\cdot\left[2!\binom{3}{1}\right]\left[2!\binom{2}{1}\right]\cdot\left[2!\binom{1}{1}\right] = 2!(4\cdot 3\cdot 2) = 384$$

SUGGERIMENTO (NON OVVIO): PER CALCOLARE IL BINOMIALE SULLA CALCOLATRICE BISOGNA CERCARE LA FUNZIONE "nCr". PER ESEMPIO, SE VOGLIO CALCOLARE $\binom{8}{2}$, DEVO SCRIVERE 8C2

Question **5**

Not complete

Flag question

Un'urna è composta da 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono una ad una senza reimmissione e si mettono in fila in posti numerati da 1 a 10. In quanti modi si può fare in modo che le pari vadano sulle caselle pari e le dispari vadano sulle caselle dispari?

Esprimere il risultato con un intero

Answer:

Check

HO 10 PALLINE, ESTRAZIONE SENZA REIMMISSIONE

VOGLIO CHE: PALLINE PARI $\longleftrightarrow$ POSTI PARI
PALLINE DISPARI $\longleftrightarrow$ POSTI DISPARI

	D_1	P_1	D_2	P_2	D_3	P_3	D_4	P_4	D_5	P_5
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
POSSIBILITÁ:	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1

PER I POSTI PARI: 5! POSSIBILITÁ
PER I POSTI DISPARI: 5! POSSIBILITÁ

APPLICO IL PM: $5! \cdot 5! = (5!)^2 = 14400$ ✓

Question 6

Not complete

Flag question

Dire in quanti modi si possono distribuire 12 carte distinte a 4 giocatori N, S, E, W (senza che l'ordine delle carte conti per un singolo giocatore) in modo tale che:

- N abbia 2 carte;
- S abbia 4 carte;
- E abbia 2 carte;
- W abbia 4 carte.

Esprimere il risultato in forma di numero intero

Answer:

Check

DEVO DISTRIBUIRE 12 CARTE A 4 GIOCATORI, IN MODO TALE CHE:

N: 2 CARTE
S: 4 CARTE
E: 2 CARTE
W: 4 CARTE

SOL. · N HA $\binom{12}{2}$ POSSIBILITÀ

· S HA $\binom{12-2}{4}$ POSSIBILITÀ

· E HA $\binom{12-2-4}{2}$ POSSIBILITÀ

· W HA $\binom{4}{4} = 1$ POSSIBILITÀ

APPLICO IL P.M.: $\binom{12}{2} \times \binom{10}{4} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{4} = 207900$ ✓

Question 3
Correct
Flag question

Si deve formare un comitato formato da 3 uomini e 3 donne scelti da un gruppo di 8 donne e 6 uomini. Quanti comitati sono possibili se due degli uomini rifiutano di sedere assieme?

Select one:

- a. 1000
- b. 758
- c. 600
- d. 896 ✓
- e. 910

The correct answer is: 896

Correct
Marks for this submission: 1.00/1.00.

PROBLEMA EXTRA (CHE COMPARE SOLO AD ALCUNI)

INSIEME DI 3 UOMINI ← 6 UOMINI
3 DONNE ← 8 DONNE

CI SONO 2 UOMINI CHE NON VOGLIONO SEDERSI ASSIEME. QUANTI COMITATI SONO POSSIBILI?

SCELTE POSSIBILI: ⟶ DONNE: $\binom{8}{3}$

⟶ UOMINI: $\binom{6}{3}$

ORA PERÒ DOBBIAMO TOGLIERE I CASI IN CUI CI SONO I 2 MONA CHE NON VOGLIONO SEDERSI ASSIEME (PERCHÉ ALTRIMENTI SI MENANO):

$= 1 \cdot 1 \cdot 4$

1 SCELTA (MONA 1) | 1 SCELTA (MONA 2) | 4 SCELTE (TUTTI GLI ALTRI TOSI)

IN DEFINITIVA:

$$\binom{8}{3}\left[\binom{6}{3} - 1 \cdot 1 \cdot 4\right] = 56 \cdot 16 = 896$$