Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, Ing. per l'Ambiente e il Territorio*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 14 maggio 2011

Esercizio 1. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

V | F   Se r vettori di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, esiste sicuramente una base di V che li contiene.

V | F   Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

V | F   Se A è una matrice quadrata non nulla tale che $A^2 = 0$, allora A non è invertibile.

Esercizio 2. (a) Si scriva il numero complesso

$$z = \frac{2 + 2i + i^2 + i^3}{(2 - i)^2}$$

nella forma $a + ib$.
(b) Nel campo dei numeri complessi si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $(z - 2)^3 = 1$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 4, -1, 1)$, $u_2 = (1, -2, -1, -3)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$ e $2x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Dato il vettore $v = (0, 1, -1, 3)$, si determini l'equazione del più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e v.

(d) Dato $\bar{v} = (2, -1, 0, 3)$ si consideri l'insieme $S = \bar{v} + U = \{\bar{v} + u \mid u \in U\}$. Si scriva un sistema lineare che abbia S come insieme delle soluzioni.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0, 1)$, $f(1, 1, 0) = (1, 4, 2, 0)$, $f(1, 1, 1) = (2, 4, 5, 2)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle due equazioni $y_1 + y_2 + 7y_4 = 0$ e $5y_1 + 2y_3 + 8y_4 = 0$. Si dimostri che $f(U) = W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, -1, 1, 5) \in \mathbb{R}^4$, si determini il valore di t per cui si ha $f^{-1}(v_t) \neq \varnothing$.

Esercizio 5. Siano dati i vettori $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (-1, 2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare il cui nucleo è generato da v_1 e tale che $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = v_3$.

(a) Utilizzando la formula di cambiamento di basi, si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f$ sia invertibile (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, Ing. per l'Ambiente e il Territorio*)

PROF. F. BOTTACIN, B. CHIARELLOTTO

1ª Prova di accertamento — 14 maggio 2011

Esercizio 1. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tale che $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se A è una matrice quadrata non nulla tale che $A^3 = 0$, allora A non è invertibile.

$\boxed{\text{V}}\ \boxed{\text{F}}$ Se r vettori di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, esiste sicuramente una base di V che li contiene.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, -2, 8, 3)$, $u_2 = (-1, 4, 6, 1)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ e $x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$.

(a) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Dato il vettore $v = (1, -1, -1, 0)$, si determini l'equazione del più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e v.

(d) Dato $\bar{v} = (0, 1, 0, 2)$ si consideri l'insieme $S = \bar{v} + U = \{\bar{v} + u \mid u \in U\}$. Si scriva un sistema lineare che abbia S come insieme delle soluzioni.

Esercizio 3. Siano dati i vettori $v_1 = (2, -1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 2, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare il cui nucleo è generato da v_1 e tale che $f(v_2) = v_2$ e $f(v_3) = -2v_3$.

(a) Utilizzando la formula di cambiamento di basi, si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f$ sia invertibile (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 4. (a) Si scriva il numero complesso

$$z = \frac{4 - 2i + 2i^2 - i^3}{(2 + i)^2}$$

nella forma $a + ib$.

(b) Nel campo dei numeri complessi si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $(z - 1)^3 = -1$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo $f(1, 0, 0) = (1, 0, 3, -2)$, $f(1, 1, 0) = (3, 1, 2, -1)$, $f(1, 1, 1) = (2, 3, 2, 2)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle due equazioni $3y_1 + 10y_2 - 18y_3 = 0$ e $8y_2 - 9y_3 - 3y_4 = 0$. Si dimostri che $f(U) = W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (-1, 1, t, -2) \in \mathbb{R}^4$, si determini il valore di t per cui si ha $f^{-1}(v_t) \neq \varnothing$.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, Ing. per l'Ambiente e il Territorio*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 14 maggio 2011

Esercizio 1. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

V | F Se A è una matrice quadrata non nulla tale che $A^2 = 0$, allora A non è invertibile.

V | F Se r vettori di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, esiste sicuramente una base di V che li contiene.

V | F Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo $f(1,0,0) = (0,2,-1,3)$, $f(1,1,0) = (2,3,1,4)$, $f(1,1,1) = (5,2,2,4)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle due equazioni $4y_1 - 12y_2 - 11y_3 = 0$ e $3y_2 + y_3 - y_4 = 0$. Si dimostri che $f(U) = W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (1, 2, -3, t) \in \mathbb{R}^4$, si determini il valore di t per cui si ha $f^{-1}(v_t) \neq \varnothing$.

Esercizio 3. (a) Si scriva il numero complesso

$$z = \frac{1 + 3i - i^2 + 2i^3}{(3 - i)^2}$$

nella forma $a + ib$.
(b) Nel campo dei numeri complessi si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $(z + 3)^3 = 1$.

Esercizio 4. Siano dati i vettori $v_1 = (1, -2, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (0, 2, -1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare il cui nucleo è generato da v_1 e tale che $f(v_2) = 3v_2$ e $f(v_3) = -2v_3$.

(a) Utilizzando la formula di cambiamento di basi, si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f$ sia invertibile (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (3, 1, 2, 1)$, $u_2 = (-1, 3, -4, -3)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ e $x_1 - x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Dato il vettore $v = (0, 2, 1, -1)$, si determini l'equazione del più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e v.

(d) Dato $\bar{v} = (1, 0, 0, 2)$ si consideri l'insieme $S = \bar{v} + U = \{\bar{v} + u \mid u \in U\}$. Si scriva un sistema lineare che abbia S come insieme delle soluzioni.

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

FONDAMENTI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

(*Ingegneria Civile, Ing. per l'Ambiente e il Territorio*)

Prof. F. Bottacin, B. Chiarellotto

1ª Prova di accertamento — 14 maggio 2011

Esercizio 1. Si dica se le seguenti affermazioni sono vere o false:

V | F Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

V | F Se r vettori di uno spazio vettoriale V sono linearmente indipendenti, esiste sicuramente una base di V che li contiene.

V | F Se A è una matrice quadrata non nulla tale che $A^3 = 0$, allora A non è invertibile.

Esercizio 2. Siano dati i vettori $v_1 = (2,1,1)$, $v_2 = (1,-1,0)$, $v_3 = (0,2,1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare il cui nucleo è generato da v_1 e tale che $f(v_2) = 2v_2$ e $f(v_3) = 3v_3$.

(a) Utilizzando la formula di cambiamento di basi, si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f$ sia invertibile (*la risposta deve essere adeguatamente giustificata*).

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita ponendo $f(1,0,0) = (1,3,0,2)$, $f(1,1,0) = (0,4,2,4)$, $f(1,1,1) = (0,6,3,3)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 + x_3 = 0$ e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle due equazioni $3y_1 + y_2 = 0$ e $y_2 - y_3 = 0$. Si dimostri che $f(U) = W$.

(c) Dato il vettore $v_t = (t, 5, -2, -4) \in \mathbb{R}^4$, si determini il valore di t per cui si ha $f^{-1}(v_t) \neq \varnothing$.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2,4,0,-3)$, $u_2 = (2,2,-2,-1)$ e W il sottospazio definito dalle equazioni $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ e $x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$.

(a) Si stabilisca se la somma di U e W è diretta e si determinino delle basi di $U + W$ e di $U \cap W$.

(b) Si determini, se possibile, una base di un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^4$.

(c) Dato il vettore $v = (1,-2,0,1)$, si determini l'equazione del più piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente U e v.

(d) Dato $\bar{v} = (0,2,1,-1)$ si consideri l'insieme $S = \bar{v} + U = \{\bar{v} + u \mid u \in U\}$. Si scriva un sistema lineare che abbia S come insieme delle soluzioni.

Esercizio 5. (a) Si scriva il numero complesso

$$z = \frac{3 - 3i + 2i^2 - i^3}{(1-2i)^2}$$

nella forma $a + ib$.
(b) Nel campo dei numeri complessi si trovino tutte le soluzioni dell'equazione $(z+2)^3 = -1$.