


densità di carica $\rho_c = \frac{d\varphi}{dV} \left[\frac{C}{m^3} \right] \Rightarrow q = \int \rho_c dV [C]$

corrente elettrica $i(t) = \frac{dq}{dt} [A = \frac{C}{s}]$

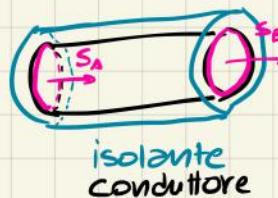
densità di corrente $\bar{J}(P, t) = \rho_c^+ \bar{v}^+ + \rho_c^- \bar{v}^-$ $\Rightarrow i(t) = \int_s \bar{J} \cdot \hat{n} ds$
 campo corrente velocità media portatori \oplus velocità media portatori \ominus
 $q = \int \rho_c \cdot dV = \int \rho_c \cdot \bar{v}_p^+ \cdot \hat{n} \Delta t \cdot ds \hookrightarrow \bar{J}$

legge di continuità $i_{usc}(t) = - \frac{dQ_{int}(t)}{dt}$

\Rightarrow in regime stazionario $I_{usc} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = 0$

$$\begin{cases} i(t) = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_c dV \\ i(t) = \int_s \bar{J} \cdot \hat{n} ds = \int_V \nabla \cdot \bar{J} dV \end{cases} \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = - \frac{d\rho_c}{dt} = 0$$

tubo di flusso



$$I_{usc} = 0 = -I(s_A) + I(s_B) + I(s_C) \Rightarrow I(s_A) = I(s_B)$$

$\hookrightarrow I$ sup laterale
= perche isolante

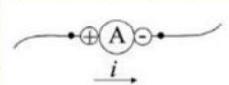
qualsunque sezione che tagli completamente il conduttore ha stesso corrente
 \Rightarrow conduttore è tubo di flusso per vettore densità corrente

corrente conduttori filiformi

$$i = \int_s \bar{J} \cdot \hat{n} \cdot ds = \bar{J} \cdot \hat{n} \cdot S = \bar{J} \cdot \hat{E} \cdot S \Rightarrow i = \pm JS$$

AMPEROMETRO IDEALE

misura corrente elettrica sezione S



- non perturba: non modifica condizioni preesistenti
- indica valore istante per istante

legge di coulomb

$$F_c(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_0}{r_{QP}^2} \bar{u}_{QP}$$

Campo elettostatico

cariche in quiete
e con valore costante

$$\bar{E}_c(P) = \frac{\bar{F}_c(P)}{q_0} \quad \left[\frac{N}{C} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{V}{m} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{P_c(Q)}{r_{QP}^2} \bar{u}_{QP} dV$$

principio di sovrapposizione $\bar{E}_c(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_k \frac{q_k(u_k)}{r_{Q_k P}^2} \bar{u}_{Q_k P}$

materiale uniforme: omogeneo proprietà non dipendono dal punto
lineare p. non dip dell'intensità del campo
isotropo p. non dip delle direzioni

PROPR CAMPO ELETROSTATICO

è conservativo

$$\oint_C \bar{E}_c \cdot \hat{E} dl = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A, l}^B \bar{E}_c \cdot \hat{E} dl = V(A) - V(B)$$

CAMPO ELETTRICO

$$\bar{E}(P, t) = \frac{\bar{F}_e(P, t)}{q_0}$$

$$\oint_C \bar{E}(P, t) \cdot \hat{l} dt = f.e.m. \text{ indotta}$$

> condizione elettostatica

cariche sorgente in quiete nello spazio e valore cost nel tempo

$$\bar{E}(P) = \bar{E}_c(P)$$

> regime stazionario

in ogni punto dello spazio i fenomeni elettromagnetici sono indip del tempo (campo elettrico è stazionario e conservativo)

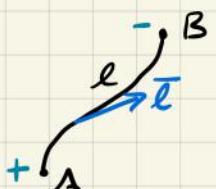
> condizioni variabili campo elettrico non è conservativo

FORZA ELETTRICA SPECIFICA

Carica puntiforme q_0 in moto con velocità \bar{v} in presenza di altre cariche

$$\frac{\bar{F}(P,t)}{q_0} = \bar{E}(P,t) + \bar{v} \times \underbrace{\bar{B}(P,t)}_{\text{induzione magnetica } [T = \frac{V \cdot S}{m^2}]} + \underbrace{\text{Forza elettrica specifica}}$$

TENSIONE ELETTRICA



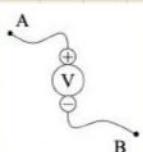
$$V_{AB}(t) = \int_l \bar{E}(P,t) \hat{l} \, dl$$

riferimento di tensione

A REGIME STAZIONARIO $V_{AB} = V_A - V_B$

VOLTOMETRO IDEALE

Misura tensione elettrica sulla linea l

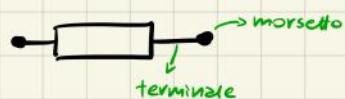


- non perturba: non modifica condizioni preesistenti
- indica valore istante per istante

INTRO MODELLO RETI ELETTRICHE

componente: oggetto delimitato da una sup limite con 2 o più

terminali dotati di morsetto



> regime stazionario

campo di corrente è solenoidale ($\nabla \cdot \bar{J} = 0$)

campo elettrico conservativo

> regime variabile quasi-stazionario

il modello stazionario vale solo quando calcoliamo:

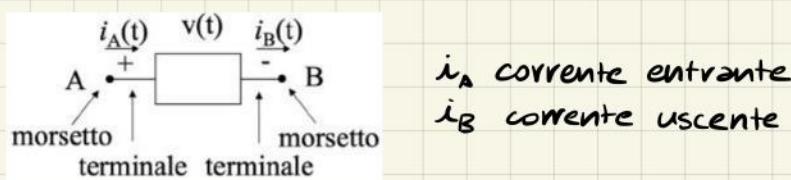
- le correnti totali uscenti da sup chiuse (che non intersecano sup limite)

- integrale di linea campo elettrico (per linee che non intersecano sup limite)

regime quasi-stazionario: quando rimanendo esterni o tangenti alle sup limite, correnti e tensioni sono funzioni del tempo tali che

- corrente totale uscente dai terminali = 0
- tensioni tra coppie di morsetti è ddp

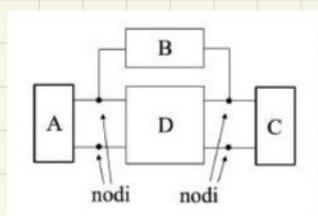
MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI



proprietà n-poli

- somma delle correnti uscenti = 0
- tensioni tra coppie di terminali sono ddp

interconnessioni



tutti i morsetti collegati allo stesso nodo sono equipotenziali e ad ogni nodo vale $\sum I = 0$

rete elettrica

costituita da componenti collegati

tipologia: tipi di componenti della rete

topologia: come i componenti sono connessi

BIPOLI



utilizzatore



generatore

• POTENZA SCAMBIAZ

$$P(t) = V(t) \cdot i(t) \quad [V \cdot A = \frac{J}{S} = W] \quad P(t) = \frac{dL(t)}{dt}$$

lavoro svolto

utilizzatori \Rightarrow P e L entrante / assorbita

$P_{\text{entrante}} = -P_{\text{uscrite}}$

generatori \Rightarrow P e L uscente / erogata

bipolo passivo: $L_{\text{entrante}} \geq 0$

può al massimo restituire tanta potenza quanto quella accumulata

• M - bipolo

n-polo costituito da sole porte elettriche

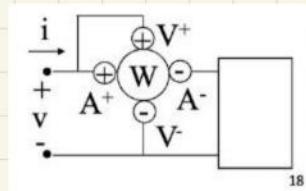
porta elettrica: coppia di morsetti tali che la corrente entrante in uno è uguale alla corrente uscente dall'altro (es: bipolo)

ha m porte elettriche (2m terminali) con le relative m correnti e tensioni

WATTMETRO IDEALE

misura potenza elettrica scambiata ad una porta

- non perturba: non modifica condizioni preesistenti
- indice valore istante per istante



LEGGE DI OHM

$$R = \frac{V}{I} \quad [\frac{V}{A} = \Omega] \quad G = \frac{1}{R} \quad [\frac{1}{\Omega} = S]$$

R dipende dal materiale

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

lunghezza
sezione
resistività

EFFETTO JOULE

dissipazione lavoro in calore $\Delta L_d = RI^2 \Delta t$

\Rightarrow potenza dissipata $P_d = RI^2$

• bilancio energetico

$$P_d = P_{\text{entrante}} \Rightarrow RI^2 = VI$$

RESISTORE IDEALE



convenzione utilizzatori $V = RI$

GENERATORI ELETTRICI

$$\bar{E}_g = \frac{\bar{F}_g}{q}$$

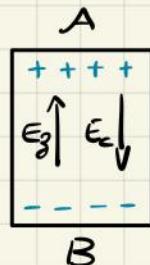
\bar{F}_g non conservativa (lavoro $\neq 0$ su linea chiusa)

↳ forza elettrica specifica

\bar{E}_g crea separazione di carica all'interno del generatore

\Rightarrow campo elettrostatico E_c ovunque

All'equilibrio $\bar{E}_g + E_c = 0$



$$\Rightarrow f.e.m. = E = \int_{B,L}^A \bar{E}_g \cdot \hat{l} dl = - \int_{B,L}^A \bar{E}_c \cdot \hat{l} dl = -V_{BA} = V_{AB}$$

$$V = E - R_i I$$

↳ resist int generatore

• gen ideale tensione

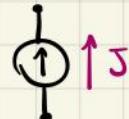
à regime stazionario con $R_i = 0 \Rightarrow V = E \quad \forall I$



• gen ideale corrente

$$V = E - R_i I \Rightarrow I = \frac{E}{R_i} - \frac{V}{R_i} = J - G_i V$$

à regime stazionario con $J \gg G_i V \Rightarrow I = J \quad \forall V$



BIPOLI PARTICOLARI

Cortocircuito $\rightarrow V = 0 \quad \forall I$ ($\rightarrow R = 0, \Phi E = 0$)

circuito aperto $\bullet \quad I = 0 \quad \forall V$ ($\rightarrow R = \infty, \Phi J = 0$)

GRAFFO

nodi della rete collegati da linee curve per ogni lato della rete

graffo connesso ogni coppia di nodi è raggiungibile percorrendo i lati

graffo piano i lati non si intersecano

MAGLIA parte del grafo tc. percorso chiuso e nodi toccati una sola volta

ANELLO maglia piano non contenente altri elementi del graffo

(se graffo connesso e piano $\rightarrow \# \text{ anelli} = m = l - n + 1$)

INSIEME DI TAGLIO sup chiusa che contiene almeno un nodo e interseca dei lati del graffo

ALBERO tutti i nodi + lati che li collegano ma senza formare maglie

($\# \text{ lati albero} = l_a = n - 1$)

COALBERO lati complementari all'albero ($l_c = l - l_a = l - n + 1$)

LEGGI DI KIRCHHOFF (eq topologiche)

• LKC $\sum_{\substack{\text{insieme} \\ \text{di taglio}}} \pm i(t) = 0$
($\nabla \cdot \vec{J} = 0$)

• LKT $\sum_{\substack{\text{maglia}}} \pm V(t) = 0$
(E conservativo)

data una rete, prendo albero e coalbero

- per ogni lato di coalbero scrivo LKT sulla sua maglia ($l - n + 1$)

- per ogni nodo + lato di albero prendo LKC su insieme di taglio

ANALISI RETE

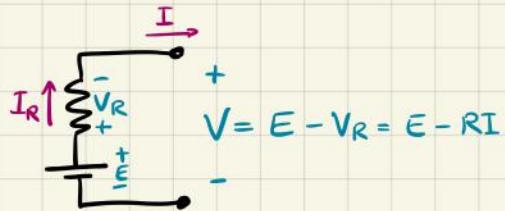
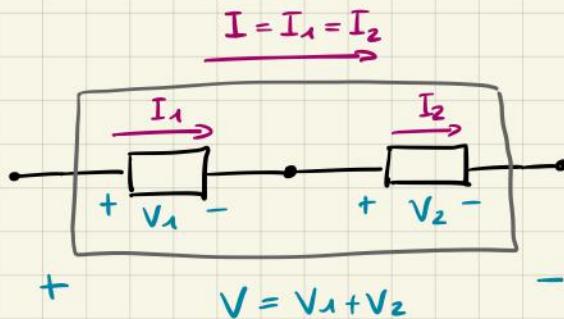
2R incognite (tensione + corrente di ogni bipolo)

ho le eq topologiche ($LKT = l - n + 1$, $LKC = n - 1$)

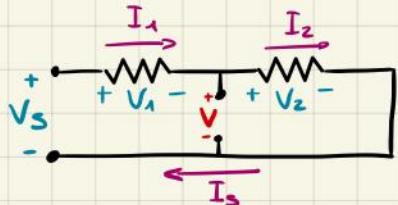
e le eq tipologiche dei componenti



• bipoli serie

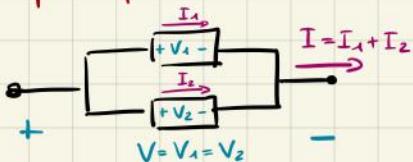


• partitore di tensione resistivo



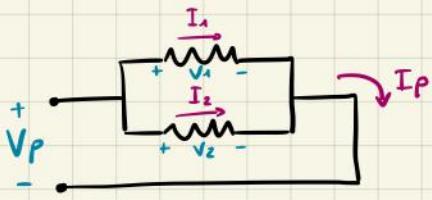
$$\begin{cases} V_2 = R_z I \\ I_s = \frac{V_s}{R_{eq}} \end{cases} \Rightarrow V_2 = \frac{R_z}{R_{eq}} V_s = V$$

• bipoli parallelo



$$J \uparrow \rightarrow I = J - I_R = J - \frac{1}{R} V$$

• partitore corrente resistivo



$$\begin{cases} I_2 = \frac{1}{R_z} V_2 = G_z V_p \\ V_p = R_{eq} \cdot I_p = \frac{I_p}{G_{eq}} \end{cases} \Rightarrow I_2 = \frac{G_z}{G_{eq}} I_p$$

SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI

calcolo corrente lato h facendo agire un solo GIC alla volta (NO GIT)

calcolo tensione lato h facendo agire un solo GIT alla volta (NO GIC)

sommo i risultati

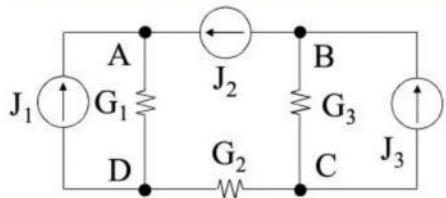
posso fare con più generatori ideali alla volta, ma tutti devono agire una sola volta

METODO POTENZIALE AI NODI

rete di bipoli costituita solo da J parallelo G

scelgo un nodo di riferimento (nodo di massa) a cui do $V=0$

risolvo usando le LKC ai nodi restanti



$$V_D = 0$$

$$\begin{cases} A: J_1 + J_2 = G_1(V_A - V_D) \\ B: J_3 - J_2 = G_3(V_B - V_C) \\ C: -J_3 = G_3(V_C - V_B) + G_2(V_C - V_D) \end{cases}$$

$$V_1 = V_{DA} = V_D - V_A = -V_A$$

$$V_2 = V_{BC} = V_B - V_C$$

3 eq in 3 incognite
 V_A, V_B, V_C

• lato anomalo

GIT senza resistenza in serie

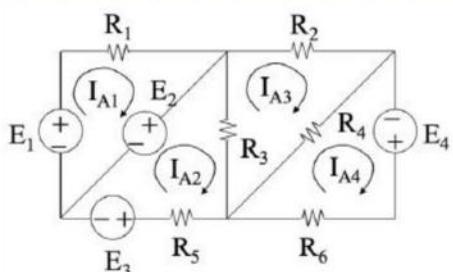
\Rightarrow aggiungo incognita I_E (corrente del lato del GIT)

aggiungo eq $A \xrightarrow{E} B \quad E = V_A - V_B$

CORRENTI DI ANELLO

rete di bipoli costituita solo da E serie R

per ogni anello ($m = l-n+1$) scrivo LKT usando le correnti ad anello



$$\begin{cases} A_1: E_1 - R_1 I_{A1} - E_2 = 0 \\ A_2: E_2 - R_3 (I_{A2} - I_{A3}) - R_5 I_{A2} - E_3 = 0 \\ A_3: -R_3 (I_{A3} - I_{A2}) - R_2 I_{A3} - R_4 (I_{A3} - I_{A4}) = 0 \\ A_4: E_4 - R_6 I_{A4} - R_4 (I_{A4} - I_{A3}) = 0 \end{cases}$$

• lato anomalo

GIC senza G in parallelo

\Rightarrow aggiungo incognita V_H (tensione del lato del GIC)

aggiungo eq



$$J = I_{A1} - I_{A2}$$

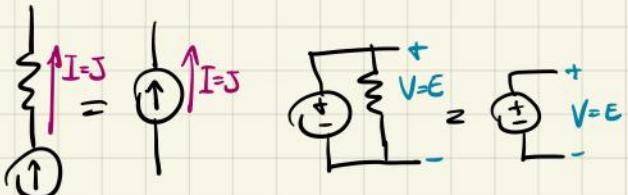
TEOREMA GENERATORI EQUIVALENTI

rete di bipoli \geq regime stazionario accessibile solo da due nodi,

la rete può essere vista come un bipolo avente per terminali gli stessi nodi

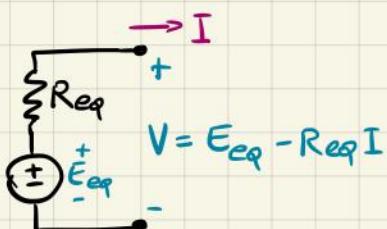
dato una rete lineare (resistori, GIT, GIC) questo bipolo è equivalente a:

- serie GIT resistenza (Thevenin)
- parallelo GIC conduttanza (Norton)



• Thevenin

Solo se rete funziona \geq vuoto



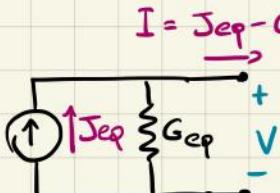
\geq vuoto $I=0 \Rightarrow V_o = E_{eq}$

\geq cortocircuito $V=0 \Rightarrow I_{cc} = \frac{E_{eq}}{R_{eq}} = \frac{V_o}{R_{eq}}$

$\Rightarrow R_{eq} = \frac{V_o}{I_{cc}}$ è la resistenza una volta azzerrati tutti i GIC e GIT

• Norton

Solo se rete funziona \geq cortocircuito

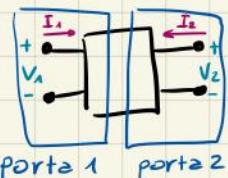


\geq vuoto $I=0 \Rightarrow V_o = \frac{I_{eq}}{G_{eq}} = \frac{I_{cc}}{G_{eq}}$

\geq cortocircuito $V=0 \Rightarrow I_{cc} = I_{eq}$

$\Rightarrow G_{eq} = \frac{I_{cc}}{V_o}$ è la conduttanza una volta azzerrati tutti i GIC e GIT

DOPPI BIPOLI



• doppio dipolo ideale inerte di ordine zero

ordine zero: relazioni lineari \geq coeff cost

inerte: se grandezze dip = 0 \Rightarrow grandezze indip = 0

convenzione utilizzatori \geq entrambe le porte

① rappresentazione controllata in corrente

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\text{matrice di resistenza}} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2$$

$$\Rightarrow R_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad \text{e così via per tutti}$$

② rappresentazione controllata in tensione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\text{matrice di conduttanza}} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

③ prima rappresentazione ibrida

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_{\text{prima matrice ibrida}} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

④ seconda rappresentazione ibrida

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}}_{\text{seconda matrice ibrida}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

⑤ prima rappresentazione di trasmissione

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\text{prima matrice di trasmissione}} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

⑥ seconda rappresentazione di trasmissione

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}}_{\text{seconda matrice di trasmissione}} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

trasformatore ideale

$$V_1 = nV_2$$

$$I_1 = -\frac{1}{n}I_2$$

$$\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

conserva la potenza (entrante parte 1 = uscente parte 2)

è passivo

amplifica tensioni o correnti

GENERATORI PILOTATI

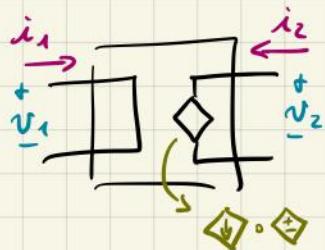
ESEMPIO L15 slide 8

doppio bipolo

parte 1: controllato in tensione \rightarrow circuito aperto

controllato in corrente \rightarrow cortocircuito

parte 2: grandezza controllata



① generatore di tensione pilotato in tensione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

2° rappresentazione ibrida

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ V_2 = K_2 V_1 \end{cases}$$

② generatore di tensione pilotato in corrente

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

rappr controlli in corrente

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = K_r I_1 \end{cases}$$

③ generatore di corrente pilotato in tensione

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

rappr controlli in tensione

$$\begin{cases} I_1 = 0 \\ I_2 = K_g V_1 \end{cases}$$

④ generatore di corrente pilotato in corrente

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

1° rappresentazione ibrida

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ I_2 = K_\beta I_1 \end{cases}$$

CONDENSATORE



convenzione utilizzatori

$$\begin{array}{c} i \\ \rightarrow \\ \text{---} \\ +v - \end{array} \quad i(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad V(t) = V(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

- energia immagazzinata

$$\begin{aligned} \text{L'entrante} &= \int_0^t \text{Pentrante}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} C V^2(t) \geq 0 \\ &= \text{energia immagazzinata } W_c \end{aligned}$$

$$\int_0^t V \cdot i d\tau = \int_C V \frac{dV}{dt} d\tau = C \int v dv = \frac{1}{2} C V^2$$

L'entrante ≥ 0 e dipende solo
dallo stato finale
condensatore è bipolo passivo

$$W_c(t) = \frac{1}{2} C V^2(t) \quad V \text{ è variabile di stato del condensatore}$$

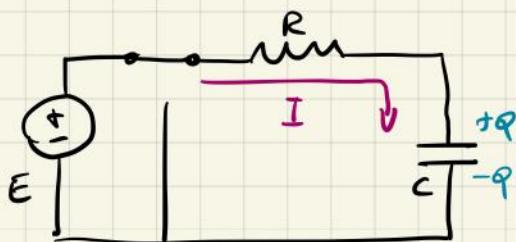
$$\text{Pentrante}(t) = \frac{d}{dt} W_c(t)$$

$$p = v \cdot i = C V \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C V^2 \right) = \frac{d}{dt} W_c$$

- regime stazionario

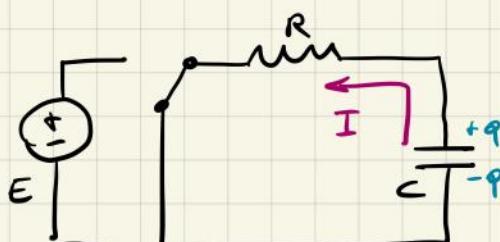
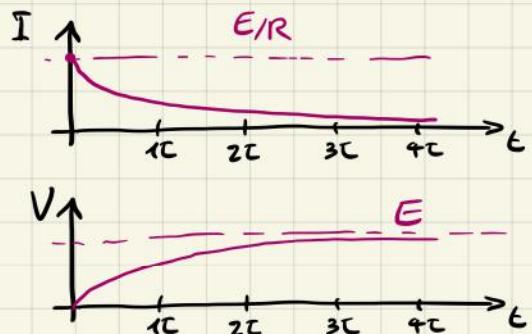
$I=0 \quad \forall V \Rightarrow$ diventa un circuito aperto

CARICA-SCARICA RC



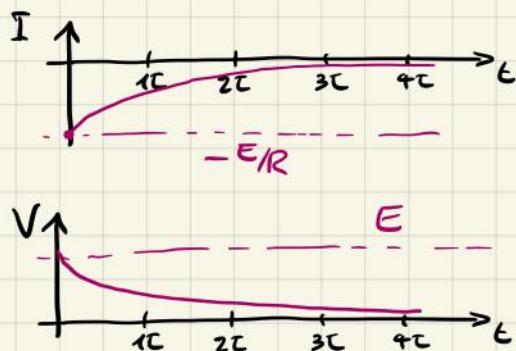
$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

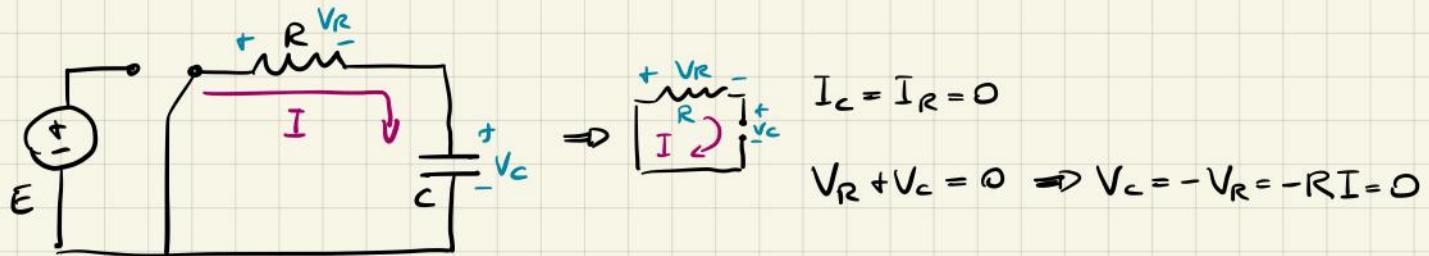


$$I(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V(t) = E e^{-\frac{t}{RC}}$$



• Carico



$E - V_R - V_C = 0$

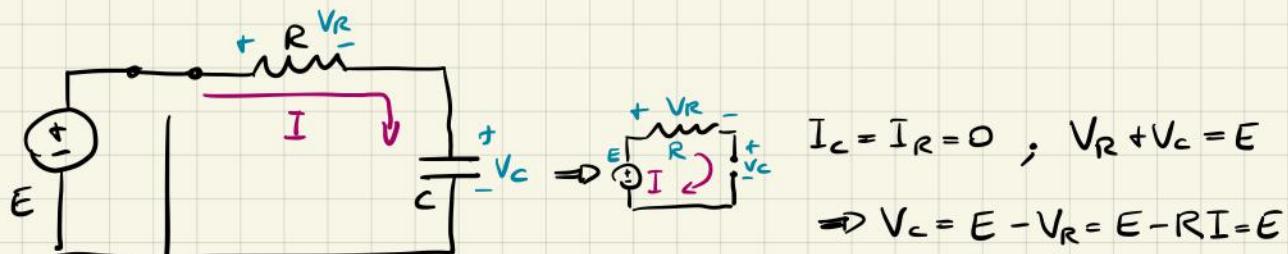
$E - R < \frac{dV_C}{dt} - V_C = 0$

$V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = E \Rightarrow V_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E$

$V_C(0^-) = V_C(0^+) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} Ae^{-\frac{1}{RC}t} + E = A + E \Rightarrow A + E = 0 \Rightarrow A = -E$

$\Rightarrow V_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$

• Scarico



$V_C + V_R = 0$

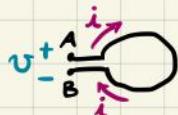
$V_C + RC \frac{dV_C}{dt} = 0$

$V_C = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

$V(0^-) = V(0^+) = E = \lim_{t \rightarrow 0^+} Ae^{-\frac{1}{RC}t} = A \Rightarrow A = E$

$\Rightarrow V_C = E e^{-\frac{1}{RC}t}$

INDUTTORE



convenzione utilizzatori

$$U(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

induttanza

$$L [H = \frac{V \cdot S}{A} = \Omega \cdot s]$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U(\tau) d\tau$$

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau$$

- energia immagazzinata

$$\begin{aligned} \text{Pentrante} &= \int_0^t \text{Pentrante}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} L i^2(t) \geq 0 \\ &= \text{energia immagazzinata } W_L \end{aligned}$$

$\text{Pentrante} \geq 0$ e dipende solo
dallo stato finale
induttore è bipolo passivo

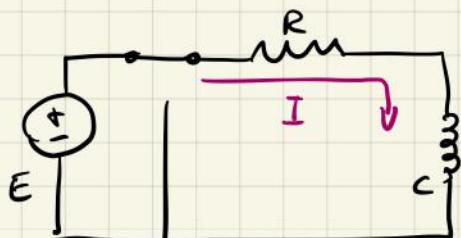
$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad i \text{ è variabile di stato dell'induttore}$$

$$\text{Pentrante}(t) = \frac{d}{dt} W_L(t) \quad p = v \cdot i = L i \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) = \frac{d}{dt} W_L$$

- regime stazionario

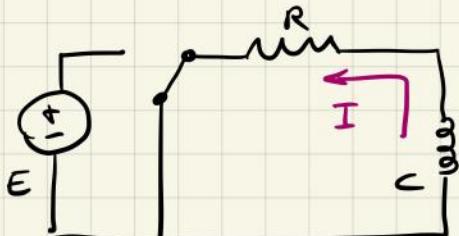
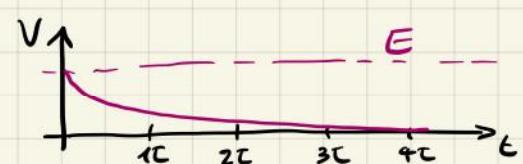
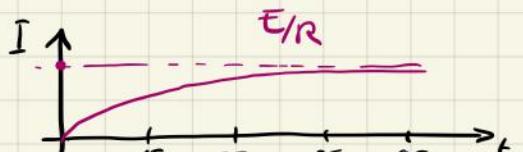
$V=0 \forall I \Rightarrow$ diventa un cortocircuito

CARICA-SCARICA RL



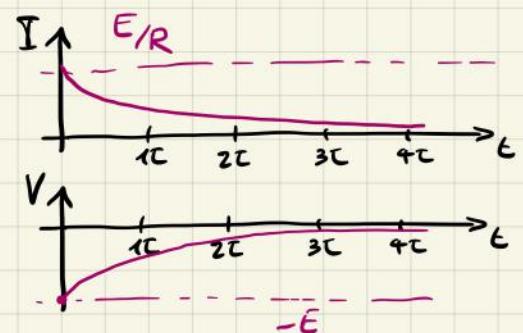
$$I(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{1}{LR}t})$$

$$V(t) = E e^{-\frac{1}{LR}t}$$

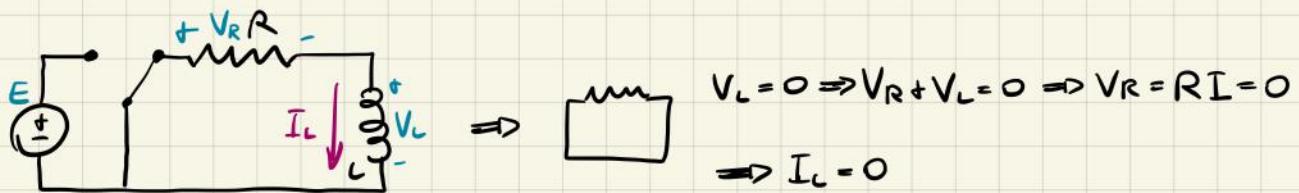


$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{LR}t}$$

$$V(t) = -E e^{-\frac{1}{LR}t}$$



• CIRCUITI



$$E - V_R - V_L = 0$$

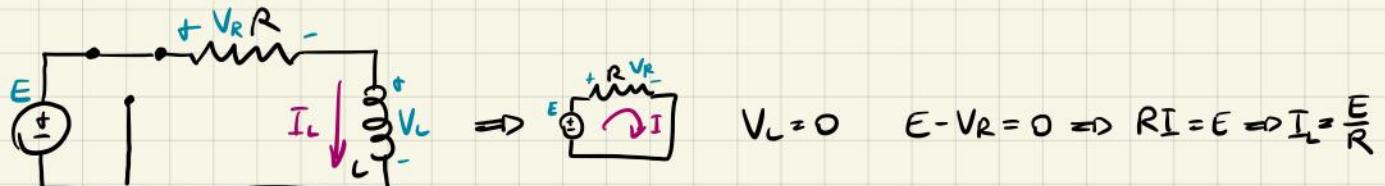
$$E - RI_L - L \frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_L + \frac{L}{R} \frac{dI_L}{dt} = \frac{E}{R} \Rightarrow I_L = Ae^{-\frac{1}{LR}t} + \frac{E}{R}$$

$$I(0^-) = I(0^+) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} Ae^{-\frac{1}{LR}t} + \frac{E}{R} = A + \frac{E}{R} \Rightarrow A = -\frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{1}{LR}t})$$

• SCENARI



$$V_R + V_L = 0$$

$$RI_L + L \frac{dI_L}{dt} = 0$$

$$I_L + \frac{L}{R} \frac{dI_L}{dt} = 0 \Rightarrow I_L = Ae^{-\frac{1}{LR}t}$$

$$I(0^-) = I(0^+) = \frac{E}{R} = \lim_{t \rightarrow 0^+} Ae^{-\frac{1}{LR}t} = A \Rightarrow A = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{LR}t}$$

RETI A REGIME SINUSOIDALE

rete a regime sinusoidale permanente: tensioni e correnti sono funzioni sinusoidali isofrequenziali

funzione periodica $a(t) = a(t + nT)$

periodo [s] $\xrightarrow{\text{intero}}$
frequenza $f = \frac{1}{T}$ [Hz = $\frac{1}{s}$]

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

ampiezza $\xrightarrow{\text{pulsazione}} = 2\pi f$ [$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]
fase iniziale $\in (-\pi, \pi]$
fase istantanea

fissata ω , le funzioni si distinguono solo per A_m e α

VALORE EFFICACE: $A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_T a^2(t) dt} = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$

Sfasamento differenza delle fasi istantanee di due funzioni sinusoidali

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha)$$

$$b(t) = B_m \sin(\omega t + \beta)$$

$$\varphi = \angle_a - \angle_b = \alpha - \beta$$

$\xrightarrow{\text{anticipo di fase di } a \text{ su } b}$

$\varphi = 0$ in fase

$\varphi = \pi$ opposizione di fase

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ a è in quadratura di anticipo su b

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ a è in quadratura di ritardo su b

- Numeri complessi

$$\dot{z} = x + iy \quad \operatorname{Re}[\dot{z}] = x, \operatorname{Im}[\dot{z}] = y \quad j = \sqrt{-1} \quad \frac{1}{j} = -j$$

$$\dot{z} = \frac{p \cos \theta}{x} + j \frac{p \sin \theta}{y}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[formula di eulero $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$]

$$\dot{z} = p e^{j\theta}$$

• rappresentazione simbolica

$$z(t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \bar{A} = A e^{j\alpha}$$

$$z(t) = \operatorname{Im}[\sqrt{2} \bar{A} e^{j\omega t}]$$

$$\text{es: } c(t) = \sqrt{2} A \cos(\omega t + \gamma) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}) = A e^{j(\gamma + \frac{\pi}{2})}$$

> somma

$$c(t) = z(t) + b(t) \Rightarrow \bar{c} = \bar{z} + \bar{b}$$

> moltiplicazione per costante

$$c(t) = k z(t) \Rightarrow \bar{c} = k \bar{z}$$

> derivata temporale

$$c(t) = \frac{d}{dt} z(t) \Rightarrow \bar{c} = j\omega \bar{z} = \omega A e^{j\frac{\pi}{2}}$$



POTENZA ISTANTANEA E ATTIVA $p(t), P$

$$v(t) = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\varphi = \alpha - \beta$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta)$$

\hookrightarrow fase di anticipo della tensione sulla corrente

$$\Rightarrow \varphi_{\text{con gen}} = \varphi_{\text{conv util}} \pm \pi$$

$$\underbrace{p(t)}_{\substack{\text{potenza} \\ \text{istantanea}}} = v(t) \cdot i(t) = V I \cos \varphi + \underbrace{p_f(t)}_{\substack{\text{potenza} \\ \text{fluttuante}}} \quad p_f(t) = -VI \cos(2\omega t + \alpha + \beta)$$

POTENZA ATTIVA $P = \frac{1}{T} \int p(t) dt = VI \cos \varphi$

$\underbrace{\text{media su un periodo della pot istantanea}}$

• LAVORO SCAMBIAZTO

$$\Delta L = \int_{\Delta t} p(t) dt \quad \text{se } \Delta t \gg T \Rightarrow \Delta L = P \Delta t$$

BIPOLLO PASSIVO $\Delta L_{\text{entrante}} \geq 0 \Rightarrow P = VI \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

POTENZA REATTIVA Q

$$Q = VI \sin \varphi \quad [\text{VAR} = \text{volt-ampere reattivi} \equiv \text{W}]$$

POTENZA APPARENTE $|S|$

$$S = VI \geq 0 \quad [VA = \text{volt-ampere} \equiv W]$$

non è legata alla convenzione della porta

fattore di potenza $\cos \varphi = \frac{P}{S}$

POTENZA COMPLESSA $\dot{S} = P + jQ$

$$\begin{cases} P = S \cos \varphi \\ Q = S \sin \varphi \\ S = \sqrt{P^2 + Q^2} = VI \end{cases} \quad \dot{S} = P + jQ = VI e^{j\varphi} = \bar{V} \bar{I}^*$$

VOLTMETRO IDEALE A VALORE EFFICACE

misura valore efficace tensione

AMPEROMETRO IDEALE A VALORE EFFICACE

misura valore efficace corrente

WATTMETRO IDEALE A VALORE MEDIO

misura potenza attiva P

GENERATORI IDEALI SINUSOIDALI

- tensione

$$v(t) = e(t) = \sqrt{2} E \sin(\omega t + \alpha) \Rightarrow \bar{V} = \bar{E} = E e^{j\alpha}$$

- corrente

$$i(t) = j(t) = \sqrt{2} J \sin(\omega t + \beta) \Rightarrow \bar{I} = \bar{J} = J e^{j\beta}$$

BIPOLI PASSIVI IN REGIME SINUSOIDALE

- resistore ideale

$$v(t) = R i(t) \Rightarrow v(t) = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \alpha) = R i(t) = \sqrt{2} RI \sin(\omega t + \beta)$$

$$\bar{V} = R \bar{I}$$

$$\Rightarrow V = RI \quad \alpha = \beta \Rightarrow \varphi = 0 \text{ tensione e corrente sono in fase}$$

> potenze

$$\dot{S}_{\text{entrante}} = \bar{V} \bar{I}^* = RI^2$$

$$\dot{S} = P + jQ \Rightarrow \begin{cases} P = RI^2 = \frac{V^2}{R} \geq 0 \quad [\text{W}] \\ Q = 0 \quad [\text{VAR}] \end{cases}$$

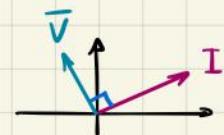
$$|\dot{S}| = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R} \quad [\text{VA}]$$

• induttore ideale

$$U(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow U(t) = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \alpha) = L \frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2} \omega L I \sin(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow V = \omega L I \quad \varphi = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} = \omega L I e^{j(\beta + \frac{\pi}{2})}$$



realtanza induttiva: $X_L = \omega L > 0 \quad [\Omega] \rightarrow \bar{V} = jX_L \bar{I}$

susettanza induttiva: $B_L = -\frac{1}{X_L} = -\frac{1}{\omega L} < 0 \quad [\text{S}] \rightarrow \bar{I} = jB_L \bar{V}$

> potenze

$$\dot{S}_{\text{entrante}} = \bar{V} \bar{I}^* = j\omega L I^2$$

$$\dot{S} = P + jQ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \quad [\text{W}] \\ Q = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} = -B_L V^2 \geq 0 \quad [\text{VAR}] \end{cases}$$

$$|\dot{S}| = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L} \quad [\text{VA}]$$

$$Q_{\text{entrante}} = X_L I^2 = \omega L I^2 = \omega \left(\frac{1}{2} L I_{\max}^2 \right) = \underline{\omega W_{L\max}}$$

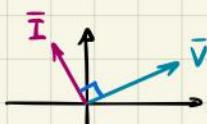
energia induttiva massima

$$\Rightarrow W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = W_{L\max} \sin^2(\omega t + \beta)$$

• condensatore ideale

$$i(t) = C \frac{dU(t)}{dt} \Rightarrow i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \beta) = C \frac{dU(t)}{dt} = \sqrt{2} \omega C V \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow I = \omega C V \quad \varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bar{I} = j\omega C \bar{V} = \omega C V e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})}$$


reattanza capacitiva: $X_C = -\frac{1}{\omega C} < 0$ [Ω] $\rightarrow \bar{V} = jX_C \bar{I}$

suscettanza capacitiva: $B_C = -\frac{1}{X_C} = \omega C > 0$ [S] $\rightarrow \bar{I} = jB_C \bar{V}$

> potenze

$$\dot{S}_{\text{entrante}} = \bar{V} \bar{I}^* = jX_C I^2$$

$$\dot{S} = P + jQ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \text{ [W]} \\ Q = X_C I^2 = \frac{V^2}{X_C} = -B_C V^2 \leq 0 \text{ [VAR]} \end{cases}$$

$$|\dot{S}| = VI = -X_C I^2 \text{ [VA]}$$

$$|Q_{\text{entrante}}| = \omega C V^2 = \omega (\frac{1}{2} C V_{\text{max}}^2) = \omega \underline{W_{C \text{ max}}} \quad \text{energia capacitiva massima}$$

$$\Rightarrow W_C(t) = \frac{1}{2} C V^2(t) = W_{C \text{ max}} \sin^2(\omega t + \alpha)$$

IMPEDENZA $\bar{Z} = \dot{z} \bar{I}$

$$\dot{z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} \quad |\dot{z}| = \frac{V}{I} = \sqrt{Z_{\text{Re}}^2 + Z_{\text{Im}}^2} \quad [\Omega]$$

$$\angle \dot{z} = \varphi = \arctan \frac{Z_{\text{Im}}}{Z_{\text{Re}}} \quad [\text{rad}]$$

resistore

$$\dot{z}_R = R + j0 = Re^{j0}$$

induttore

$$\dot{z}_L = 0 + jX_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} \quad X_L = \omega L > 0$$

condensatore

$$\dot{z}_C = 0 + jX_C = jX_C e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} < 0$$

> potenza

$$\dot{S}_{\text{entrante}} = \bar{V} \bar{I}^* = \dot{z} \bar{I} \bar{I}^* = \dot{z} I^2 = Z_{\text{Re}} I^2 + Z_{\text{Im}} I^2 = P_{\text{entr}} + jQ_{\text{entr}}$$

$$\begin{cases} P = \dot{z}_{\text{Re}} I^2 = z \cos \varphi I^2 > 0 \\ Q = \dot{z}_{\text{Im}} I^2 = z \sin \varphi I^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$|\dot{S}| = Z I^2 \geq 0$$

AMMETTENZA $\bar{I} = \dot{Y} \bar{V}$

$$\dot{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{I}{V} e^{-j\varphi} = \frac{1}{Z}$$

$$|\dot{Y}| = \frac{I}{V} = \sqrt{Y_{Re}^2 + Y_{Im}^2} [S]$$

$$\angle \dot{Y} = -\varphi = \arctg \frac{Y_{Im}}{Y_{Re}} [\text{rad}]$$

resistore $\dot{Y}_R = G + j0 = Ge^{j0}$

induttore $\dot{Y}_L = 0 + j\left(-\frac{1}{X_L}\right) = 0 + jB_L = |B_L|e^{-j\frac{\pi}{2}}$ $B_L = -\frac{1}{\omega L} < 0$

condensatore $\dot{Y}_C = 0 + j\left(\frac{1}{X_C}\right) = 0 + jB_C = B_C e^{j\frac{\pi}{2}}$ $B_C = \omega C > 0$

RETE SIMBOLICA ITALIANA

LKT $\sum \dot{V} = 0$

LKC $\sum \dot{I} = 0$

$$\bar{V} = \bar{E}, \bar{I} = \dot{J}, \bar{V} = \dot{Z} \dot{I}, \bar{I} = \dot{Y} \bar{V}$$

- conservazione potenze complesse

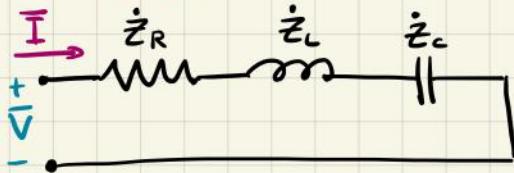
$$\sum \dot{S}_h = \sum \bar{V}_h \bar{I}_h^* = 0 = \sum P_h + jQ_h = 0 + j0 \Rightarrow \begin{cases} \sum P_h = 0 \\ \sum Q_h = 0 \end{cases}$$

- teoremi

Vale quanto detto per il regime stazionario ma usando i fesori, e usando \dot{Z} al posto di R e \dot{Y} al posto di G

RLC

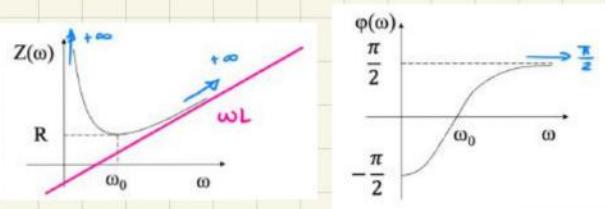
SERIE RLC



$$\dot{Z} = \dot{z}_R + \dot{z}_L + \dot{z}_C = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad \varphi(\omega) = \arctg \left[\frac{1}{R} (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right]$$

$$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



$$|\dot{Z}|_{\min} \Leftrightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

pulsazione di risonanza

$$\dot{z}(\omega_0) = R \quad \varphi(\omega_0) = 0$$

• Funzionamento in risonanza (serie)

Se $\omega = \omega_0 \Rightarrow X_L + X_C = 0$

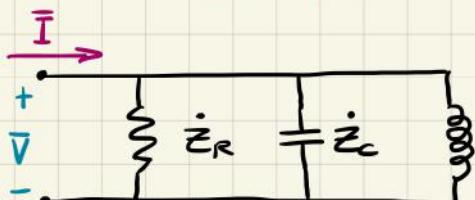
$$\begin{cases} Q_{L\text{entr}} = X_L I^2 \\ Q_{C\text{entr}} = X_C I^2 \end{cases} \Rightarrow Q_{L\text{entr}} + Q_{C\text{entr}} = 0$$

> serie di L e C con $\omega = \omega_0$

$$X_L + X_C = 0 \Rightarrow \frac{\dot{z}_L}{j} + \frac{\dot{z}_C}{j} = 0 \Rightarrow \dot{z}_L + \dot{z}_C = 0$$

$$V = (\dot{z}_L + \dot{z}_C) \bar{I} = 0 \quad \forall \bar{I} \Rightarrow \text{cortocircuito}$$

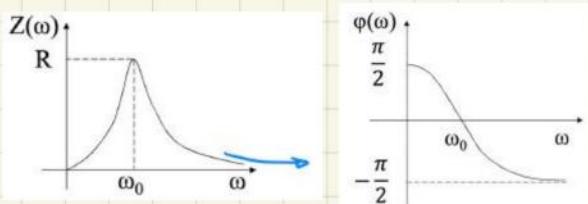
PARALLELO RLC



$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L = G + jB_C + jB_L = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$\dot{Z}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} \quad \varphi(\omega) = \arctg \left[R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right]$$

$$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$



$$|\dot{Z}|_{\min} \Leftrightarrow \omega C - \frac{1}{\omega L} \Big|_{\omega=\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

pulsazione di risonanza

$$\dot{z}(\omega_0) = R \quad \varphi(\omega_0) = 0$$

• Funzionamento in antirisonanza (parallelo)

Se $\omega = \omega_0 \Rightarrow X_L + X_C = 0$

$$\begin{cases} Q_{L\text{entr}} = \frac{V^2}{X_L} \\ Q_{C\text{entr}} = \frac{V^2}{X_C} \end{cases} \Rightarrow Q_{L\text{entr}} + Q_{C\text{entr}} = 0$$

> parallelo di L e C con $\omega = \omega_0$

$$B_L + B_C = 0 \Rightarrow \frac{\dot{Y}_L}{j} + \frac{\dot{Y}_C}{j} = 0 \Rightarrow \dot{Y}_L + \dot{Y}_C = 0$$

$$\bar{I} = (\dot{Y}_L + \dot{Y}_C) \bar{V} = 0 \quad \forall \bar{V} \Rightarrow \text{cicuito aperto}$$