

Lezione 12

- 1) Una macchina termica irreversibile opera tra due sorgenti, con temperature $T_1 = 273 \text{ } ^\circ\text{C}$ e $T_2 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$, producendo in un ciclo un lavoro L e assorbendo dalla sorgente a temperatura superiore una quantità di calore Q'_1 . Tra le medesime sorgenti opera anche una macchina frigorifera reversibile (una macchina di Carnot che opera come macchina frigorifera) che, utilizzando il lavoro L prodotto dalla prima macchina, assorbe dalla sorgente a temperatura inferiore una quantità di calore $Q_2 = 1000 \text{ cal}$ e cede alla sorgente a temperatura superiore una quantità di calore Q_1 . Sapendo che $\epsilon = Q'_1/Q_1 = 2$, determinare:

1. il rendimento η' della macchina irreversibile;
2. la variazione ΔS dell'entropia complessiva delle sorgenti in un ciclo di funzionamento delle due macchine.

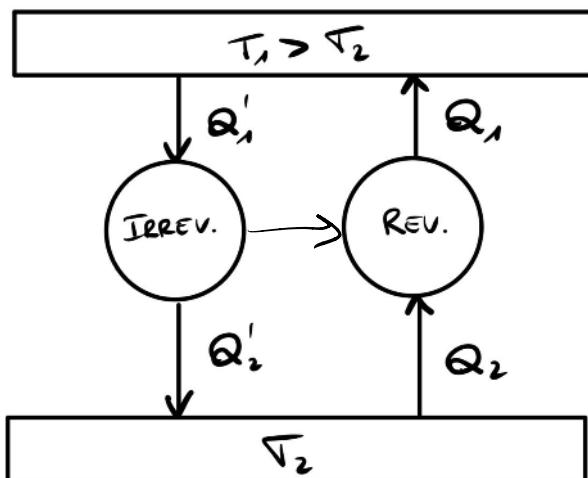


Figura 1: Rappresentazione grafica esercizio 1

- 2) Una macchina termica che lavora tra due sorgenti a temperatura costante T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$) ha un rendimento $\eta_1 = \epsilon\eta$, con $\epsilon = 0.6$, dove η è il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature. La sorgente ad alta temperatura (T_1) dalla quale la macchina riceve calore è costituita da una miscela di acqua e vapore acqueo in equilibrio alla pressione normale. Durante il suo funzionamento la macchina produce una potenza $P = 550 \text{ W}$ e cede calore alla sorgente a bassa temperatura (T_2) a un ritmo di 1200 kcal/h . Si determini la temperatura T_2 della seconda sorgente.
- 3) Il motore di un'automobile da 155 CV ha un rendimento pari al 15% e lavora fra le temperature estreme di $95 \text{ } ^\circ\text{C}$ (acqua di raffreddamento) e $495 \text{ } ^\circ\text{C}$ (miscela aria-benzina incendiata). Determinare:
1. il rapporto fra il suo rendimento e quello massimo raggiungibile;
 2. la potenza (espressa in W) utilizzata per muovere l'automobile;

3. il calore (espresso in J) dissipato in 1 h.

$$[1 \text{ kW} = 1.36 \text{ CV}]$$

- ④ Una macchina ciclica scambia calore con tre sorgenti a temperatura $T_1 = T$, $T_2 = \frac{2}{3}T$ e $T_3 = \frac{1}{3}T$. In ogni ciclo, la macchina assorbe la quantità di calore $Q_1 = Q$ dal primo serbatoio e compie il lavoro $L = \frac{3}{2}Q$. Invece, l'entropia dell'universo aumenta di $\frac{2Q}{T}$ a ogni ciclo. Questo fatto rende la macchina irreversibile. Determinare:

1. le quantità di calore Q_2 e Q_3 scambiate con le altre sorgenti;
2. il rendimento di una macchina reversibile che lavori con le stesse sorgenti, scambiando anch'essa con le prime due sorgenti le medesime quantità di calore Q_1 e Q_2 .

- ⑤ Un gas ideale è contenuto in un volume $V_A = 40 \text{ dm}^3$ alla pressione $p_A = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e alla temperatura $T_A = 300 \text{ K}$. Con una compressione isoterma reversibile, il gas raggiunge lo stato B con volume $V_B = \frac{1}{3}V_A$; durante tale trasformazione il gas compie un lavoro $L_{AB} = -4.394 \cdot 10^3 \text{ J}$. Poi, tramite un'isocora reversibile raggiunge lo stato C a temperatura $T_C = 600 \text{ K}$. Successivamente, in modo adiabatico irreversibile, il gas viene portato nello stato D con volume $V_D = V_A$ e temperatura $T_D > T_A$: in questa espansione il gas compie il lavoro $L_{CD} = 5.894 \cdot 10^3 \text{ J}$. Infine, con un'isocora reversibile il gas torna allo stato iniziale A. Sapendo che il rendimento del ciclo è $\eta = 0.15$, determinare:

1. i calori Q_{AB} , Q_{BC} e Q_{DA} ;
2. se il gas è monoatomico o biatomico;
3. il valore di T_D ;
4. la variazione di entropia ΔS_{CD} .

- ⑥ In un recipiente cilindrico, dotato di pistone, di volume $V_1 = 50 \text{ dm}^3$ sono contenute $n = 2.5 \text{ mol}$ di un gas ideale biatomico alla pressione di 1 atm in equilibrio termico con l'ambiente.

1. Determinare la temperatura dell'ambiente circostante.

A partire da questo stato (1) il gas subisce 3 trasformazioni: prima, agendo sul pistone, il gas viene compresso reversibilmente a adiabaticamente fino allo stato 2 con volume $V_2 = V_1/2$; poi, tenendo fisso il pistone, si attende fino a che il gas raggiunge lo stato 3 in cui è di nuovo in equilibrio termico con l'ambiente; infine sempre agendo sul pistone, il gas viene fatto espandere reversibilmente e isotermicamente fino a riportarlo allo stato 1. Determinare nel complesso di trasformazioni:

2. la massima temperatura raggiunta dal gas;
3. il lavoro complessivo fatto dal pistone sul gas;
4. la variazione di entropia dell'ambiente durante la seconda trasformazione.

ES. 1

Il rendimento della macchina termica irreversibile è, per definizione, pari a

$$\eta' = \frac{L}{Q'_1}$$

ma, dato che $Q'_1/Q_1 = \varepsilon$, possiamo anche scrivere

$$\eta' = \frac{L}{\varepsilon Q_1} = \frac{L}{\varepsilon}$$

In maniera più intuitiva, consideriamo che il rendimento della macchina frigorifera reversibile sarà

$$\eta = \frac{Q_2}{L} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = 1 \Rightarrow Q_2 = |L|$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2|L| \Rightarrow Q'_1 = 2|L| \cdot 2 = 4|L|$$

$$\text{Dunque } \eta' = \frac{L}{Q'_1} = \frac{L}{4|L|} = 0.25$$

dove η' è il rendimento di una macchina termica reversibile che opera tra le stesse sorgenti e che assorbe una quantità di calore Q'_1 dalla sorgente a temperatura maggiore e produce un lavoro L . Quest'ultima non è altro che la macchina di Carnot reversibile vista come macchina frigorifera e il cui rendimento (come macchina termica) è pari a

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Portanto, il rendimento della macchina irreversibile corrisponde a

$$\eta' = \frac{L}{\varepsilon Q_1} = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{T_1 - T_2}{\varepsilon T_1} = 0.25$$

D'altra parte, la variazione di entropia complessiva delle due sorgenti in un ciclo di funzionamento delle due macchine sarà pari a

$$\Delta S = \Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2} = -\frac{Q'_1}{T_1} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q'_2}{T_2}$$

ma, dato che per una macchina reversibile è

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{oppure} \quad Q_1 = \left(\frac{T_1}{T_2} \right) Q_2$$

$$\text{Mentre: } \Delta S = \frac{Q'_2}{T_2} - \frac{Q'_1}{T_1}$$

Notando che possiamo anche scrivere le seguenti

$$Q_1 = \left(\frac{T_1}{T_2} \right) Q_2 \Rightarrow Q'_1 = \varepsilon Q_1 = \varepsilon \left(\frac{T_1}{T_2} \right) Q_2$$

$$\eta' = \frac{Q'_1 - Q'_2}{Q'_1} \Rightarrow Q'_2 = Q'_1 - \eta' Q'_1 = (1 - \eta') Q'_1$$

Per la variazione di entropia delle sorgenti ricaviamo

$$\Delta S = (1-\eta') \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{Q_2}{\tau_2} - \varepsilon \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{Q_2}{\tau_1} = \varepsilon \frac{Q_2}{\tau_2} \left[(1-\eta') \frac{\tau_1}{\tau_2} - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right] = 15.3 \text{ J/K}$$

S'nota che tale risultato è in pieno accordo con la 2^a legge della termodinamica. Infatti, il sistema costituito dalle due macchine e dalle sorgenti è un sistema chiuso che (nel complesso) svolge una trasformazione irreversibile e pertanto (come abbiamo ricavato) deve subire una variazione di entropia positiva.

ES. 2

La sorgente ad alta temperatura è costituita da una miscela di acqua e vapore acqueo in equilibrio alla pressione normale. In effetti, l'acqua alla pressione normale (pressione atmosferica) è in equilibrio con il suo vapore alla temperatura di 100 °C (temperatura di ebollizione): quindi $\tau_1 = 100^\circ\text{C} = 373\text{K}$.

Per una macchina termica che lavora tra le sorgenti, il rendimento è dato da

$$\eta_1 = \frac{L}{Q_1} = \frac{L}{L+Q_2}$$

dove $L=Q_1-Q_2$ è il lavoro prodotto, mentre Q_1 e Q_2 sono i mutui dei calori scambiati con le sorgenti, rispettivamente, ad alta e bassa temperatura. Da dati del problema ricaviamo che in un'ora la nostra macchina produce un lavoro

$$L = P \cdot 3600s = 1.98 \cdot 10^6 \text{ J}$$

e cede alla sorgente a bassa temperatura, nello stesso tempo, una quantità di calore

$$Q_2 = 1200 \text{ Kcal} = 5.02 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Corrispondentemente è

$$\eta_1 = \frac{L}{L+Q_2} = 0.283$$

Inoltre, essendo $\eta_1 = \varepsilon \eta$ dove η è il rendimento di una macchina di Carnot che opera tra le stesse temperature, possiamo scrivere

$$\eta = 1 - \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\eta_1}{\varepsilon} \Rightarrow \tau_2 = \left(1 - \frac{\eta_1}{\varepsilon}\right) \tau_1 = 197\text{K} = -76^\circ\text{C}$$

ES. 3

Pensando alle macchine termiche che lavorano tra due temperature, sappiamo che quello con il rendimento più elevato è quello che realizza il ciclo di Carnot che ha un rendimento esprimibile come

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

dove T_1 e T_2 sono le temperature (esprese in Kelvin) delle sorgenti calda e fredda, rispettivamente.
Però, nel nostro caso, ponendo $T_1 = 495^\circ\text{C} \approx 768\text{ K}$ e $T_2 = 95^\circ\text{C} \approx 368\text{ K}$, si ottiene

$$\eta_c = 0.521$$

Consequently, il rapporto tra il rendimento del nostro motore e quello della corrispondente macchina di Carnot è

$$\frac{\eta}{\eta_c} = \frac{0.150}{0.521} = 0.288$$

La potenza che la macchina utilizza per muoversi è quindi proporzionale al motore, quindi

$$P = 155 \text{ CV} = 114 \text{ kW}$$

Ricordando la definizione di rendimento possiamo subito dire che se L è il lavoro prodotto dal motore in un ciclo, il calore assorbito è pari a

$$Q_2 = \frac{L}{\eta}$$

che in un'ora sarà pari a

$$Q_2 = \frac{P\Delta t}{\eta} = 2.73 \cdot 10^6 \text{ kJ}$$

Sai che ragionando come in una macchina di Carnot, potremmo dire che $L = Q_2 - Q_p$, dove Q_p corrisponde al calore ceduto alla sorgente a bassa temperatura. Dato che tale calore viene propria pesa, può essere visto come il calore dissipato, che quindi risulterà pari a

$$Q_p = Q_2 - L = \left(\frac{1}{2} - 1\right) P\Delta t = 2.33 \cdot 10^6 \text{ kJ}$$

ES. 6

A ogni ciclo della macchina il lavoro è pari alla somma delle quantità di calore scambiato

$$L = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q + Q_2 + Q_3 = \frac{3}{2} Q$$

D'altra parte la variazione di entropia dell'universo, che nel nostro caso coincide con le sorgenti, è

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} = 2 \frac{Q}{T} \Rightarrow -\frac{Q_2}{2} - Q_3 = Q$$

Mettendo i sistemi queste due relazioni, si ottiene

$$Q_2 = 3Q \quad \text{e} \quad Q_3 = -\frac{5}{2}Q$$

Quindi la macchina assorbe calore dalle sorgenti 1 e 2 e, perciò, il suo rendimento sarà

$$\eta = \frac{L}{Q_1 + Q_2} = \frac{\frac{3}{2}Q}{4Q} = \frac{3}{8}$$

Invece, per la macchina reversibile il rendimento sarà dato da

$$\eta_{rev} = \frac{L_{rev}}{Q_1 + Q_2}$$

dove, come in precedenza, il lavoro è messo pari alla somma dei calori scambiati con le tre sorgenti

$$L_{rev} = Q_1 + Q_2 + Q_{3,rev}$$

ma in questo caso $Q_{3,rev}$ deve essere tale da rendere la variazione di entropia nel ciclo nulla! Con questa condizione si ha

$$\Delta S_{rev} = -\frac{Q_1}{T} - \frac{Q_2}{\frac{2}{3}T} - \frac{Q_{3,rev}}{\frac{1}{3}T} = 0 \Rightarrow Q_{3,rev} = -\frac{11}{6}Q$$

e conseguentemente

$$L_{rev} = \frac{13}{6}Q$$

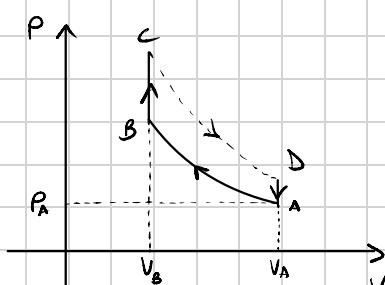
Pertanto, il rendimento della macchina reversibile è

$$\eta_{rev} = \frac{L_{rev}}{Q_1 + Q_2} = \frac{13}{24}$$

maggiore di quello della macchina irreversibile

ES. 5

Il ciclo definito nel testo del problema ha la forma seguente (la trasformazione $C \rightarrow D$ essendo irreversibile è stata definita su una linea tratteggiata).



Primo di tutto si noti che

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 1.604 \text{ mol}$$

Il lavoro totale e il calore complessivo scambiato nel ciclo sono pari a

$$L = Q = L_{AB} + L_{CD} = 1.5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Di altra parte $Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{DA}$. La trasformazione $A \rightarrow B$ è un'isocora reversibile e quindi

$$Q_{AB} = L_{AB} = n R T_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -4.394 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Notando poi che, lungo il ciclo, il calore viene assorbito solo nella trasformazione $B \rightarrow C$ e ricordando la definizione di rendimento, abbiamo

$$Q_{BC} = Q_{SC} = \frac{L}{2} = 10 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Inoltre, il calore scambiato nella trasformazione $D \rightarrow A$ è

$$Q_{DA} = L - Q_{AB} - Q_{BC} = -4.105 \cdot 10^3 \text{ J}$$

La trasformazione $B \rightarrow C$ è un'isocora reversibile e quindi deve essere

$$Q_{BC} = n c_v (\bar{T}_C - \bar{T}_B) \Rightarrow c_v = \frac{Q_{BC}}{n (\bar{T}_C - \bar{T}_B)}$$

Per meglio valutare la natura del gas, calcoliamo il rapporto c_v/R che nel nostro caso è pari a

$$\frac{c_v}{R} = \frac{Q_{BC}}{n R (\bar{T}_C - \bar{T}_B)} = 2.5 = \frac{s}{2}$$

Che ci permette di dire immediatamente che il gas è distorsio.

Considerando la trasformazione $D \rightarrow A$ possiamo scrivere

Si potrebbe ricavare anche considerando il lavoro nella trasformazione $C \rightarrow D$ che, essendo comunque un'adiabatica, per la 1^a legge della termodinamica è pari a

$$L_{CD} = -\Delta E_{int, CD} = -n c_v (\bar{T}_D - \bar{T}_C)$$

$$Q_{DA} = n c_v (\bar{T}_A - \bar{T}_D) \Rightarrow \bar{T}_D = \bar{T}_A - \frac{Q_{DA}}{n c_v} = 423.1 \text{ K}$$

Inoltre, la variazione di entropia nella trasformazione $C \rightarrow D$ (non nulla perché anche se adiabatica è irreversibile), è data dalla seguente

$$\Delta S_{CD} = n c_v \ln\left(\frac{\bar{T}_D}{\bar{T}_C}\right) + n R \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = 3 \text{ J/K}$$

ES. 6

La temperatura del gas nello stato 1 corrisponde anche alla temperatura dell'ambiente circostante ed è

$$\Gamma_1 = \frac{P_1 V_1}{n R} = 266 \text{ K}$$

Il complesso di trasformazioni costituisce un ciclo. Nel ciclo abbiamo una prima compressione adiabatica reversibile (1 → 2), poi una trasformazione isocora irreversibile (2 → 3) e quindi un'espansione isocora reversibile (3 → 1). Nella trasformazione 1 → 2 deve essere $T V^{n-1} = \text{cost.}$ con

$$\gamma = c_p/c_v = 7/5 \quad (\text{dato che il gas è bitemico})$$

$$\text{Quindi: } \Gamma_2 V_2^{\gamma-1} = \Gamma_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow \Gamma_2 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \cdot \Gamma_1 = 2^{\gamma-1} \cdot \Gamma_1 = 322 \text{ K}$$

Questo costituisce anche la massima temperatura raggiunta dal gas.

Dalla prima legge della termodinamica abbiamo subito ricavare che il lavoro compiuto in tale trasformazione è

$$L_{1 \rightarrow 2} = -\Delta E_{\text{int}, 1 \rightarrow 2} = -n c_v (\Gamma_2 - \Gamma_1) = \frac{s}{2} n R (1 - 2^{\gamma-1}) \Gamma_1 = \frac{s}{2} n R (1 - 2^{2/5}) \Gamma_1$$

Nella trasformazione 2 → 3 il pistone è mantenuto fisso e quindi il lavoro compiuto è nullo. Inoltre, nella trasformazione 3 → 1 il lavoro compiuto è pari a

$$L_{3 \rightarrow 1} = \int_3^1 P dV = n R \Gamma_1 \int_3^1 \frac{dV}{V} = n R \Gamma_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

Il lavoro complessivo fatto dal gas è quindi

$$L = L_{1 \rightarrow 2} + L_{3 \rightarrow 1} = n R \Gamma_1 \left[\frac{s}{2} (1 - 2^{2/5}) + \ln 2 \right] = -536 \text{ J}$$

Essendo questo il lavoro compiuto dal gas nel ciclo, il lavoro compiuto dal pistone sarà pari a

$$L_{\text{pistone}} = -L = 536 \text{ J}$$

Nella trasformazione isocora 2 → 3 il gas scambia calore irreversibilmente con l'ambiente circostante. Dalla prima legge della termodinamica abbiamo

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta E_{\text{int}, 1 \rightarrow 2} = n c_v (\Gamma_2 - \Gamma_1) = n c_v (\Gamma_1 - \Gamma_2) = \frac{s}{2} n R \Gamma_1 (2^{2/5} - 1)$$

e quindi il calore scambiato dall'ambiente durante tale trasformazione è

$$Q_{\text{amb}, 2 \rightarrow 3} = -Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{s}{2} n R \Gamma_1 (2^{2/5} - 1) > 0$$

Però, la corrispondente variazione di entropia (l'ambiente si mantiene a temperatura costante T_1) è

$$\Delta S_{\text{amb},12} = \frac{Q_{\text{amb},23}}{T_1} = \frac{s}{2} n R (2^{2/3} - 1) = 16.6 \text{ J/K}$$

S'nota che durante la stessa trasformazione la variazione di entropia subita dal gas è

$$\Delta S_{23} = n c_v \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) = n \frac{s}{2} R \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = n \frac{s}{2} R (1-n) \ln 2 = -n R \ln 2 = -16.4 \text{ J/K}$$

Conseguentemente, durante la seconda trasformazione la variazione di entropia dell'universo (gas + ambiente) è

$$\Delta S_{\text{universo},23} = \Delta S_{23} + \Delta S_{\text{amb},23} = n R \left[-\ln 2 + \frac{s}{2} (2^{2/3} - 1) \right] = 2.19 \text{ J/K} > 0$$

In accordo con il fatto che la trasformazione è irreversibile e che l'universo è un sistema chiuso.