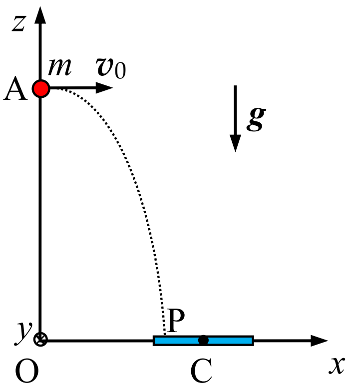
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - Canale 1 (Prof. G. Naletto)
Prova Scritta di Fisica Generale 1 - Padova, 10 febbraio 2023

Cognome .... Nome .... Matricola ....

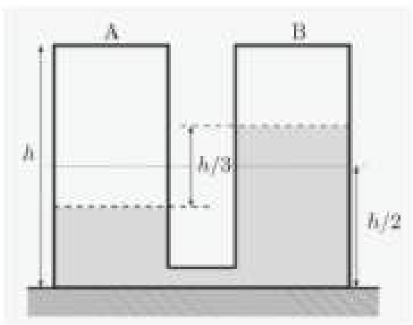
Problema 1



È dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxyz* in cui *xy* è il piano orizzontale e *z* è l'asse verticale rivolto verso l'alto. Una sferetta di dimensioni trascurabili e massa m = 0.1 kg è lanciata con velocità iniziale $\vec{v}_0 = 2\ \vec{u}_x$ m/s dalla posizione iniziale A di coordinate (0, 0, h) con h = 3 m. Un'asta sottile omogenea di massa M = 0.3 kg e lunghezza ℓ = 1.2 m, inizialmente ferma in posizione orizzontale, è vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse parallelo a z e passante per il suo centro C di coordinate (d, 0, 0) con d = 2 m. La sferetta urta l'asta nel punto P in modo completamente anelastico. Determinare:

a) la coordinata x_P del punto di impatto P;
b) il modulo ω_0 della velocità angolare dell'asta subito dopo l'urto;
c) l'energia E_{diss} dissipata nell'urto;
d) le componenti J_x e J_z dell'impulso $\vec{J}$ applicato al vincolo in C;
e) il modulo ω_{max} della massima velocità angolare raggiunta dall'asta.

Problema 2



Un recipiente chiuso a pareti rigide adiabatiche è costituito da due cilindri uguali, A e B, di sezione S = 0.05 m^2 e altezza h = 0.9 m, disposti verticalmente e collegati tra loro alla base da un condotto di volume trascurabile (vedi figura). Nella porzione inferiore del recipiente c'è del mercurio, che consideriamo essere un fluido incomprimibile, la cui densità è $\rho = 1.36 \cdot 10^4$ kg/m^3; nella parte superiore dei cilindri sono intrappolate rispettivamente n_A e n_B moli di gas ideale monoatomico; tra gas e mercurio ci sono dei setti isolanti a tenuta, di volume e massa trascurabili. Inizialmente, il livello del mercurio nel recipiente B eccede quello in A di h/3 (vedi figura), la pressione del gas in A è $p_{A,0} = 7 \cdot 10^4$ Pa e la temperatura dei gas in A e B è $T_{A,0} = T_{B,0} = T_0 = 200$ K. Determinare:

a) la pressione iniziale $p_{B,0}$ del gas in B.

Successivamente, al gas in B viene fornita reversibilmente una quantità di calore Q_B in modo che, alla fine, il mercurio raggiunga lo stesso livello $\ell = h/2$ nei due cilindri. Determinare:

b) i valori di n_A e n_B;
c) la pressione finale p_A del gas in A;
d) le temperature finali T_A e T_B rispettivamente dei gas in A e B;
e) il lavoro W_A subito dal gas in A durante la trasformazione.

Soluzioni

Problema 1

a) $h = \frac{1}{2} g t_P^2 \;\Rightarrow\; t_P = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.78$ s; $x_P = v_0 t_P = 1.56$ m

b) $\vec{v}_P = \vec{v}_{P,x} + \vec{v}_{P,z} = v_0 \vec{u}_x - g t_P \vec{u}_z$; $|CP| = d - x_P = 0.44$ m; $I_C = \frac{1}{12} M\ell^2 + m|CP|^2 = 0.055$ kgm^2

$$L_y = \text{cost} \;\Rightarrow\; \left|\left(\overrightarrow{CP} \times m\vec{v}_P\right)_y\right| = I_C \omega_0 \;\Rightarrow\; |CP| m g t_P = I_C \omega_0 \;\Rightarrow\; \omega_0 = \frac{|CP| m g t_P}{I_C} = 6.1 \text{ rad/s}$$

c) $E_{diss} = |\Delta E_k| = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{1}{2} I_C \omega_0^2 = \frac{1}{2} m [v_0^2 + (g t_P)^2] - \frac{1}{2} I_C \omega_0^2 = 2.13$ J

d) $\vec{J} = \Delta \vec{P} \;\Rightarrow\; J_x = \Delta P_x = 0 - m v_{P,x} = -m v_0 = -0.20$ kgm/s
$J_z = \Delta P_z = -m\omega_0 (d - x_P) - (-m g t_P) = 0.50$ kgm/s

c) $E_m = \text{cost} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} I_C \omega_0^2 = \frac{1}{2} I_C \omega_{max}^2 - m g |CP| \;\Rightarrow\; \omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2mg|CP|}{I_C}} = 7.25$ rad/s

Problema 2

a) La forza di pressione agente sul mercurio in A all'altezza corrispondente alla superficie di separazione con il gas deve essere uguale alla forza di pressione agente sul mercurio alla stessa altezza in B (in alternativa, basta applicare la legge di Stevino):

$$p_{A,0} S = p_{B,0} S + \rho g \frac{h}{3} S \;\Rightarrow\; p_{B,0} = p_{A,0} - \rho g \frac{h}{3} = 3 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

b) Siccome il mercurio alla fine riempie i cilindri fino a metà, si ricava facilmente che il volume iniziale del gas in A e B è rispettivamente pari a $V_{A,0} = \frac{2}{3} hS$ e $V_{B,0} = \frac{1}{3} hS$, e che quello finale è $V_A = V_B = \frac{1}{2} hS$.

$$p_{A,0} V_{A,0} = n_A R T_{A,0} \;\Rightarrow\; n_A = \frac{p_{A,0} V_{A,0}}{R T_{A,0}} = \frac{2 p_{A,0} hS}{3 R T_0} = 1.26 \text{ mol}$$

$$p_{B,0} V_{B,0} = n_B R T_{B,0} \;\Rightarrow\; n_B = \frac{p_{B,0} V_{B,0}}{R T_{B,0}} = \frac{p_{B,0} hS}{3 R T_0} = 0.27 \text{ mol}$$

c) Il gas in A, isolato, compie una trasformazione adiabatica reversibile:

$$p_{A,0} {V_{A,0}}^{\gamma} = p_A {V_A}^{\gamma} \;\Rightarrow\; p_A = p_{A,0} \left(\frac{V_{A,0}}{V_A}\right)^{\gamma} = p_{A,0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma} = 1.13 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

d) $p_A V_A = n_A R T_A \;\Rightarrow\; T_A = \frac{p_A V_A}{n_A R} = \frac{p_A hS}{2 n_A R} = 242$ K

oppure $\quad T_{A,0} {V_{A,0}}^{\gamma-1} = T_A {V_A}^{\gamma-1} \;\Rightarrow\; T_A = T_{A,0} \left(\frac{V_{A,0}}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{4}{3}\right)^{\gamma-1}$

$$p_B V_B = n_B R T_B \;\Rightarrow\; T_B = \frac{p_B V_B}{n_B R} = \frac{p_A hS}{2 n_B R} = 1132 \text{ K}$$

e) $Q_A = 0 = W_A + \Delta U_A \;\Rightarrow\; W_A = -\Delta U_A = -n_A c_V (T_A - T_0) = -666$ J