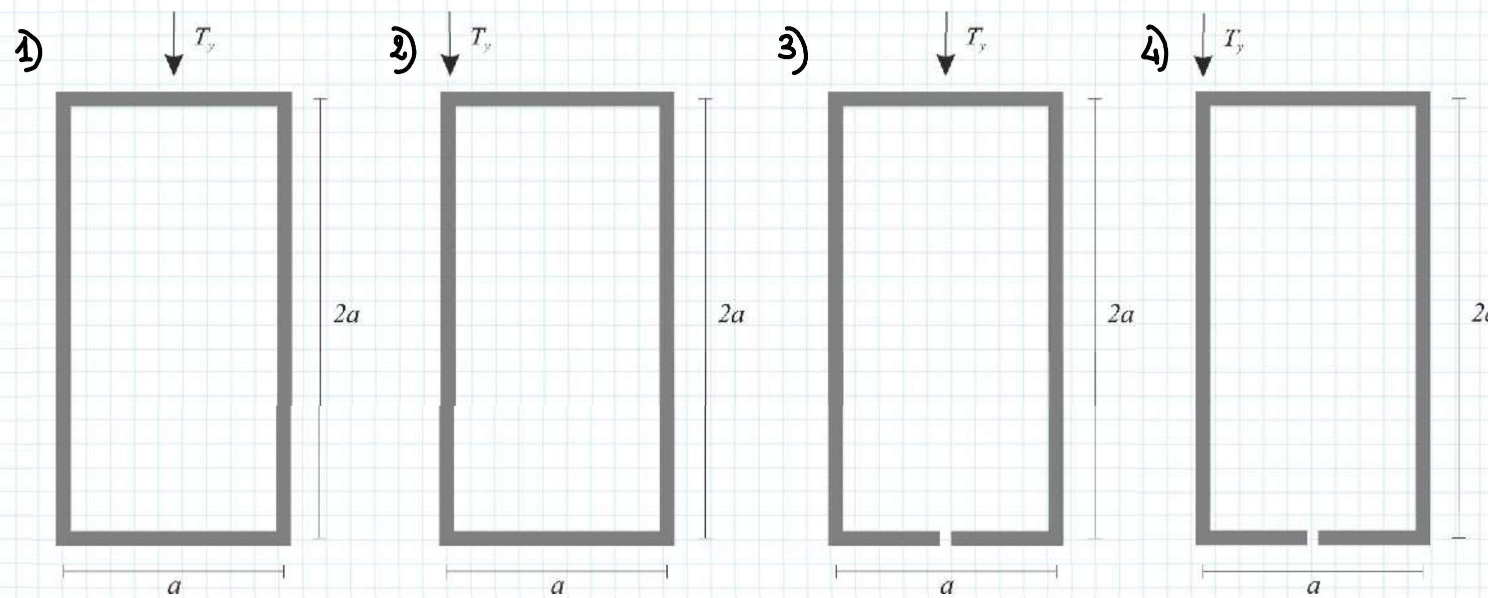
ESERCIZIO 6

Con riferimento alla sezione sottile in figura, si riportano quattro varianti. Per ogni caso, si valuti lo stato tensionale risultante, riportando valori, andamento e verso delle tensioni agenti. Si commentino le formule utilizzate e i risultati ottenuti. Si consideri la dimensione *a* pari a 10 mm, spessore δ = 0,5 mm, Ty = 100 N.

Varianti:

1) Sezione sottile chiusa, Ty applicato su asse di simmetria;
2) Sezione sottile chiusa, Ty applicato ad un'estremità della sezione;
3) Sezione sottile aperta con fessura trascurabile, Ty applicato su asse di simmetria;
4) Sezione sottile aperta con fessura trascurabile, Ty applicato ad un'estremità della sezione;



VARIANTE 1

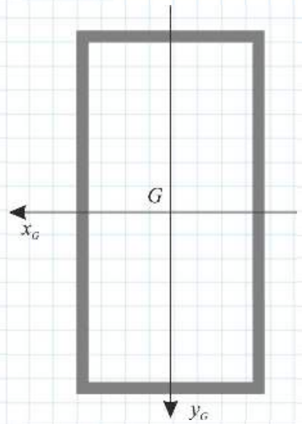
Se la forza di taglio Ty è applicata sull'asse di simmetria, poiché il centro di taglio giace sullo stesso asse, allora Ty è applicato nel centro di taglio, quindi nasceranno delle tensioni tangenziali τ_z generate esclusivamente da Ty.

È possibile determinare un valore di τ_z medio ($\bar{\tau}_z$) su una corda b al variare della posizione sulla sezione utilizzando la formula di Jourawsky:

$$\bar{\tau}_z = \frac{T_y \cdot S_x^*}{I_x\, b}$$

con I_x = momento d'inerzia assiale della sezione

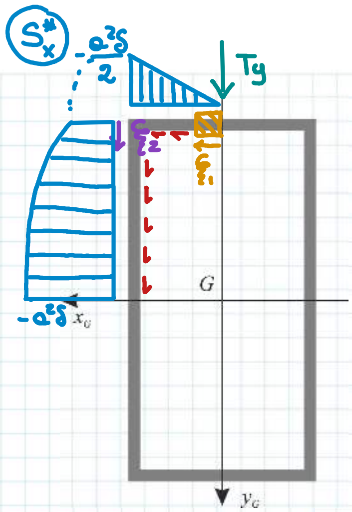
S_x^* = momento statico di una porzione di sezione identificata dalla corda b (in questo caso coincidente con lo spessore δ).



Considero il sistema di riferimento centrale identificato dai due assi di simmetria assiale retta.

Calcolo I_x (somma di rettangoli sottili):

$$I_x = 2\cdot\left(\frac{(2a)^3\delta}{12}\right) + 2\left(a\delta\cdot a^2\right) = \frac{4}{3}a^3\delta + 2a^3\delta = \frac{10}{3}a^3\delta = 1666{,}7\ \text{mm}^4$$



Posso determinare l'andamento delle $\bar{\tau}_z$ conoscendo l'andamento di S_x^* sulla sezione, poiché, essendo δ = costante, $\bar{\tau}_z \propto S_x^*$.
Inoltre, so che sull'asse y_G, per simmetria, le tensioni $\tau_z = 0$. Analizzo quindi metà sezione per il calcolo di $S_x^*(\xi)$ e definisco 2 ascisse curvilinee ξ_1 e ξ_2, come riportato.

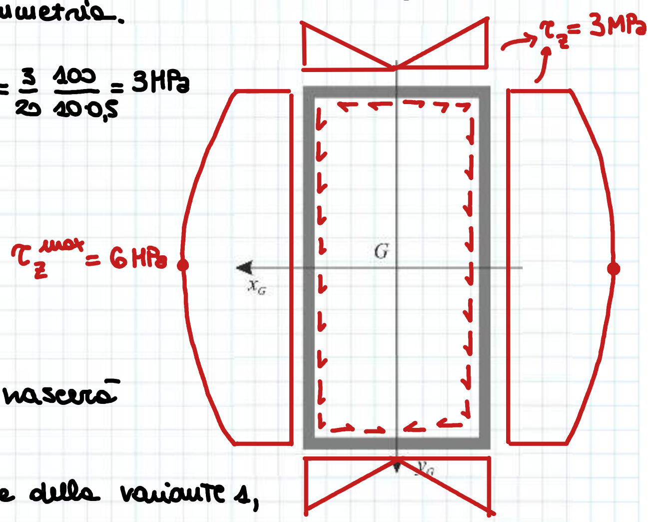
$S_x^*(\xi_1) = \xi_1 \delta (-a)$ andamento lineare

$S_x^*(\xi_1 = \frac{a}{2}) = -\frac{a^2\delta}{2}$ verso ⊖ ⇒ secondo la convenzione $\bar{\tau}_z$ uscenti dall'area considerata

$S_x^*(\xi_2) = -\frac{a^2\delta}{2} + \xi_2\delta\left(-a+\frac{\xi_2}{2}\right)$ andamento parabolico massimo sul baricentro.

$S_{x\,max}^*(\xi_2=a) = -\frac{a^2\delta}{2} + a\delta\left(-\frac{a}{2}\right) = -a^2\delta$ verso ⊖ ⇒ $\bar{\tau}_z$ uscenti

ANDAMENTI, VALORI E VERSI di τ_z



Per simmetria, posso specchiare S_x^* rispetto ai 2 assi di simmetria.

⇒ le $\bar{\tau}_z$ quindi risulteranno: $\bar{\tau}_z\left(\xi_1=\frac{a}{2}\right) = \frac{T_y\cdot\frac{a^2\cancel{\delta}}{2}}{\frac{10}{3}a^3\delta\cancel{\delta}} = \frac{3}{20}\frac{T_y}{a\delta} = \frac{3}{20}\frac{100}{10\cdot 0{,}5} = 3\,MPa$

la massima τ_z : $\bar{\tau}_z(\xi_2=a) = \frac{T_y\cdot a^2\delta}{\frac{10}{3}a^3\delta\cdot\delta} = \frac{3}{10}\frac{T_y}{a\delta} = 6\,MPa$

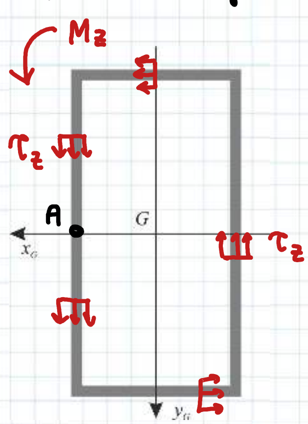
VARIANTE 2

In questo caso Ty NON è applicato nel centro di taglio, quindi nascerà un momento torcente $M_z = T_y\cdot\frac{a}{2}$ con verso antiorario.
Le tensioni tangenziali τ_z date da taglio rimangono le stesse della variante 1, mentre le τ_z derivanti da M_z si ricavano con la formula di Bredt per sezioni sottili chiuse:

$\tau_z = \frac{M_z}{2\Omega\delta}$ con $\Omega = 2a^2$ area contenuta dalla linea media della sezione.

$\tau_z = \frac{T_y\cdot\frac{a}{2}}{4a^2\delta} = \frac{1}{8}\frac{T_y}{a\delta} = \frac{100}{8\cdot10\cdot0{,}5} = 2{,}5$ MPa, costanti lungo tutta la linea media, e poiché δ = costante, sono costanti anche su tutta la sezione.

verso: lo stesso di M_z



In A $\tau_z(T_y)$ e $\tau_z(M_z)$ sono concordi e parallele quindi si possono sommare.

τ_{max} sulla sezione: 6 MPa + 2,5 MPa = 8,5 MPa

VARIANTE 3 : non cambia nulla rispetto alla variante 1.

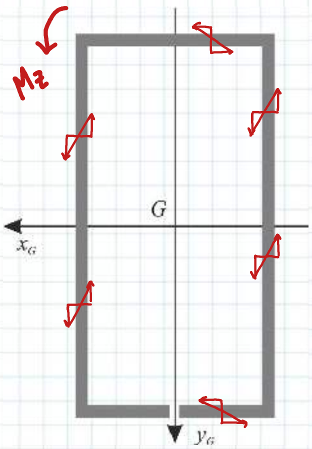
VARIANTE 4

Anche in questo caso nasce $M_z = T_y \cdot \frac{a}{2}$ (verso antiorario) ma questa volta, trattandosi di sezione sottile APERTA, le τ_z derivanti da M_z saranno pari a: $\tau_z = \frac{M_z}{I_t} \cdot \delta$ con I_t rigidezza torsionale della sezione:

$$I_t = 2\left(\frac{1}{3}2a\delta^3 + \frac{1}{3}a\delta^3\right) = 2a\delta^3 = 2,5\ mm^4$$

Poiché δ è costante lungo tutta la sezione, $\tau_z^{max} = \frac{T_y \cancel{a}/2}{2\cancel{a}\,\delta^{\cancel{3}\,2}}\cancel{\delta} = \frac{1}{4}\frac{T_y}{\delta^2} = \frac{100}{4(0,5)^2} = 100$ MPa

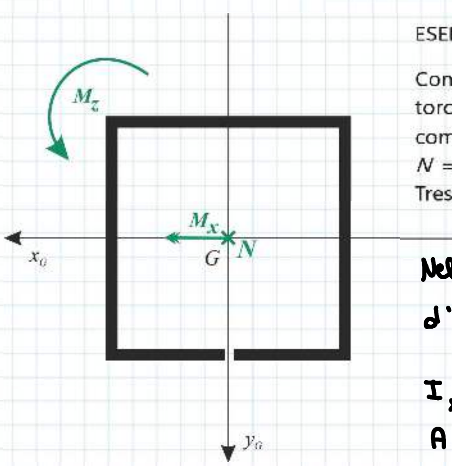
sul bordo dello spessore



andamento lineare (analogia idrodinamica):

massimo sui bordi, nullo sulla linea media.

Noto che: $\frac{\tau_z(M_z, \text{variante } 4)}{\tau_z(M_z, \text{variante } 2)} = \frac{100}{2,5} = 40$ le τ_z nella sezione aperta sono 40 volte maggiori delle τ_z nella sezione chiusa a parità di M_z.



ESERCIZIO 7

Con riferimento alla sezione sottile in figura sottoposta a carico di sforzo normale N, momento retto M_x e momento torcente M_z, si valuti lo stato tensionale risultante, riportando valori, andamento e verso delle tensioni agenti. Si commentino le formule utilizzate e i risultati ottenuti. Si consideri la dimensione a pari a 300 mm, spessore b = 5 mm, N = 100 kN, M_x =25 kNm, M_z =1000 Nm. Si verifichi la sezione nei punti maggiormente sollecitati con il criterio di Tresca, nota una tensione ammissibile σ_{amm} = 200 MPa.

Nel sistema di riferimento centrale riportato, calcolo il momento d'inerzia assiale I_x e l'area A:

$$I_x = 2\frac{a^3b}{12} + 2ab\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^3b}{6} + \frac{1}{2}a^3b = \frac{2}{3}a^3b = 90\ 10^6\ mm^4$$

$$A = 4(ab) = 6000\ mm^2$$

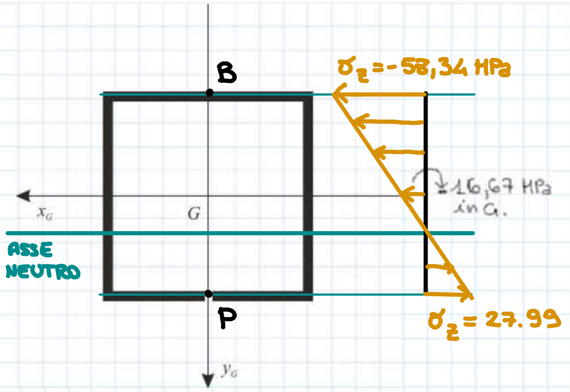
A seguito dei carichi riportati, possiamo affermare che $N + M_x \Rightarrow$ pressoflessione $\Rightarrow$ tensione normale σ_z

$M_z \rightarrow$ torsione $\rightarrow \tau_z$ (tensione tangenziale)

$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y$ poiché $N<0$ (compressione) $\sigma_z = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y$

Ricavo l'eq^{ne} dell'asse neutro (luogo dei punti in cui $\sigma_z = 0$): $-\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}y = 0$ $\quad y = \frac{I_x N}{A M_x}$

$$= \frac{90 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^6} = 60\ mm$$



σ_z nel baricentro: $\sigma_z = -\frac{N}{A} = -\frac{100\cdot 10^3}{6\cdot 10^3} = -16,67$ MPa

$\sigma_z(B) = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}\left(-\frac{a}{2}\right) = -16,67 + \frac{25\cdot 10^6}{90\cdot 10^6}(-150) = -16,67 - 41,66 = -58,34$ MPa COMPRESSIONE

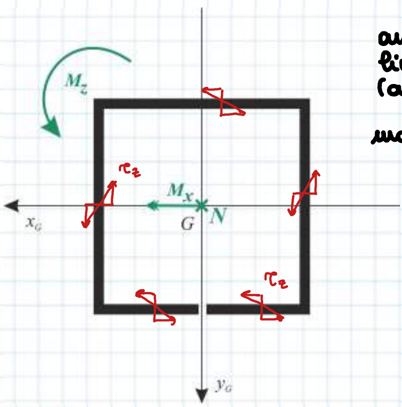
$\sigma_z(P) = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x}\left(\frac{a}{2}\right) = (-16,67 + 41,66)$ MPa $= 24,99$ MPa TRAZIONE

$\sigma_z(B)$ valore massimo in modulo.

la presenza di un momento torcente M_z comporta la presenza di $\tau_z = \frac{M_z}{I_t} b$ formula per la tensione τ_z in sezioni sottili aperte, con I_t = fattore di rigidezza torsionale

$I_t = 4\left(\frac{1}{3} a b^3\right) = \frac{4}{3} a b^3 = \frac{4}{3} 300 \cdot 5^3 = 50 \cdot 10^3$ mm^4

$\tau_z^{max} = \frac{M_z}{I_t} \cdot b$ con b costante su tutta la sezione $\tau_z^{max} = \frac{1\cdot 10^6}{50\cdot 10^3} \cdot 5 = 100$ MPa



andamento lineare (analogia idrodinamica): massimo sui bordi, nullo sulla linea media.

Su tutti i punti aventi l'ordinata del punto B, sia σ_z sia τ_z sono massime: calcolo la tensione equivalente con il metodo di Tresca:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} = \sqrt{(58,34)^2 + 4(100)^2} = 208,34 \text{ MPa} > \underbrace{200 \text{ MPa}}_{\sigma_{amm}}$$

Nei punti maggiormente sollecitati la tensione equivalente è maggiore della tensione ammissibile, pertanto la sezione non risulta verificata con il criterio di Tresca.