Quiz di algebra lineare e geometria

Spazi vettoriali, sottospazi vettoriali, vettori linearmente dipendenti, insiemi di generatori

- Sappiamo che un campo K è anche uno spazio vettoriale. Ma, in generale, uno spazio vettoriale V è un campo?
    - No
    - Sì
- Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai vettori $v = (a, b)$ con $a \geq 0$ e $b \geq 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
    - Vero
    - Falso
- Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai vettori $v = (2a, 3a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
    - Vero
    - Falso
- Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ costituito dai vettori $v = (a, a^2)$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
    - Vero
    - Falso
- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ due vettori non nulli e non paralleli sono linearmente indipendenti.
    - Vero
    - Falso
- In uno spazio vettoriale V se ho tre vettori e nessuno di questi è parallelo a uno degli altri due, allora i tre vettori dati sono linearmente indipendenti.
    - Vero
    - Falso
- Se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori linearmente dipendenti, allora sicuramente v_1 si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_2 e v_3.
    - Vero
    - Falso
- Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (2, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 2)$, $v_3 = (0, 2, a)$. Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ essi sono linearmente dipendenti?
    - $a = 0$
    - $a = 5$
    - per nessun valore di a
    - $a = 3$
- Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, -1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 1, a, 3)$, $v_3 = (0, 2, -1, 3)$. Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ essi sono linearmente dipendenti?
    - $a = -2$
    - $a = 0$
    - $a = 4$
    - per nessun valore di a
    - $a = -5$

- In $\mathbb{R}^3$ i vettori $v_1 = (1, -1, 2)$ e $v_2 = (0, 2, 1)$ formano un sistema di generatori.
  - Vero
  - Faso

Vettori linearmente dipendenti, insiemi di generatori, basi, dimensione, equazioni dei sottospazi vettoriali, intersezione, somma e somma diretta di sottospazi vettoriali

- Prendendo quattro vettori in $\mathbb{R}^3$ essi saranno linearmente dipendenti?
  - Sì, sempre
  - Dipende da come scelgo i vettori
- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \ \in V$. Una delle seguenti affermazioni è corretta:
  - se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti allora $k \geq n$
  - se $k \leq n$ allora $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti
  - se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti allora $k \leq n$
- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \ \in V$. Una delle seguenti affermazioni è corretta:
  - se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono un insieme di generatori di V allora $k \leq n$
  - se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono un insieme di generatori di V allora $k \geq n$
  - se $k \geq n$. allora $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono un insieme di generatori di V
- Dati tre vettori $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ tali che nessuno di essi è parallelo a uno degli altri due, il sottospazio vettoriale da essi generato ha necessariamente dimensione 3.
  - Vero
  - Falso
- In $\mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$ ha dimensione:
  - 1
  - 2
  - 3
- In $\mathbb{R}^3$ il sottospazio U di equazione $x_2 = 0$ ha dimensione:
  - 0
  - 2
  - 1
- Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Se U e W sono in somma diretta, allora deve necessariamente essere $U + W = \mathbb{R}^n$.
  - Vero
  - Falso
- Siano U_1, U_2, W sottospazi vettoriali di V. Se $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ allora deve necessariamente essere $U_1, = U_2$.
  - Vero
  - Falso
- Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$, entrambi di dimensione 2 e tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$. Allora è sempre possibile trovare un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ tale che $U1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U2 \oplus W = \mathbb{R}^4$.
  - Vero
  - Falso

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e siano U_1, U_2 sottospazi di V, con $\dim U_1 = 5$ e $\dim U_2 = 2$. Una delle seguenti affermazioni è vera.
    - $U_1 \cap U_2$ può avere dimensione 3 e in tal caso si ha $\dim(U_1 + U_2) = 4$
    - $U_1 \cap U_2$ può avere dimensione 0 e in tal caso U_1 e U_2 sono in somma diretta
    - La dimensione di $U_1 \cap U_2$ può essere solo 1 oppure 2

Funzioni lineari, nucleo e immagine, matrice di una funzione lineare, operazioni sulle matrici

- Per quale valore di t la funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x,y) = 2x - 3y + txy$ è lineare?
    - Per ogni valore di t
    - Per $t = 0$
    - Per $t = 1$
- Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x, a coefficienti reali. La funzione che ad ogni polinomio $p(x) \in V$ associa la sua derivata $p'(x)$ è una funzione lineare.
    - Vero
    - Falso
- Sia $f: V \to W$ una funzione lineare e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ vettori linearmente indipendenti. I vettori $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2), \dots, w_k = f(v_k)$ sono linearmente indipendenti?
    - Sì, se il nucleo di f è $\{0\}$
    - Sì, ma solo se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono una base di V
    - Sì, sempre
- Sia $f: V \to W$ una funzione lineare e siano $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ un sistema di generatori di V. I vettori $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2), \dots, w_k = f(v_k)$ sono un sistema di generatori di W?
    - Sì, ma solo se f e suriettiva
    - Sì, ma solo se $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono una base di V
    - Sì, sempre
- Siano $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ due funzioni lineari. Il nucleo della funzione composta $g \circ f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ deve necessariamente avere dimensione ≥ 1?
    - Sì, indipendentemente da f e g
    - No, può anche avere dimensione 0
- Sia $f: V \to V$ una funzione lineare. Una delle seguenti affermazioni è vera:
    - se f è iniettiva non è detto che sia anche suriettiva
    - se f è suriettiva non è detto che sia anche iniettiva
    - se f è iniettiva allora deve essere anche suriettiva
- Esiste una funzione lineare $f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tale che il nucleo di a è uguale all'immagine di f.
    - Vero
    - Falso
- Esiste una funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che il nucleo di f è uguale all'immagine di f.
    - Vero
    - Falso
- Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare definita ponendo $f(x,y) = (2x - 3y, x + 4y)$. Sia $v_1 = (1,1), v_2 = (2,-1)$. La matrice di f rispetto alla base di $\mathbb{R}^2$ formata dai vettori v_1, v_2 è:
    - $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
    - $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

- Esistono matrici non nulle A e B tali che la matrice prodotto AB sia nulla.
  - Vero
  - Falso

Funzioni lineari, nucleo e immagine, matrice di una funzione lineare, cambiamento di basi, sistemi lineari, riduzione di una matrice in forma a scala

- Esistono delle matrici A e B tali che $AB = I$ ma $BA \neq I$.
  - Vero
  - Falso
- Date due matrici A e B si ha, in generale, ${}^{T}(AB) = {}^{T}A^{T}B$.
  - Vero
  - Falso
- Per quale valore di t la seguente matrice non ha rango 3? $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & t & 0 \end{pmatrix}$
  - $t = 3$
  - $t = 4$
  - $t = 0$
- Se A è una matrice quadrata tale che $A^2 = 0$ allora la matrice $I - A$ è invertibile.
  - Vero
  - Falso
- Sia A una matrice reale quadrata di ordine n, con $n \geq 2$. Siano P e Q matrici reali quadrate invertibili di ordine n. Allora la matrice $A' = PAQ$ ha lo stesso rango di A.
  - Vero
  - Falso
- Sia V uno spazio vettoriale reale e $f: V \to V$ una funzione lineare. Sia $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V e indichiamo con A la matrice di f rispetto alla base v. Supponiamo che $A = aI$, ove I è la matrice identica e $a \in \mathbb{R}$. Allora la matrice A' di f rispetto ad una qualunque altra base $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ di V deve necessariamente essere uguale alla matrice A.
  - Vero
  - Falso
- Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ due basi di V. Le colonne della matrice di cambiamento di base $M_v^{v'}(id)$ sono:
  - le coordinate dei vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ rispetto alla base $v_1', v_2', \dots, v_n'$
  - le coordinate dei vettori $v_1', v_2', \dots, v_n'$ rispetto alla base $v_1, v_2, \dots, v_n$
- Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ due basi di V. La matrice di cambiamento di base $M_v^{v'}(id)$ agisce nel modo seguente:
  - $M_v^{v'}(id)$ moltiplica il vettore colonna delle coordinate di un vettore u rispetto alla base $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e dà come risultato il vettore colonna delle coordinate di u rispetto alla base $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$
  - $M_v^{v'}(id)$ moltiplica il vettore colonna delle coordinate di un vettore u rispetto alla base $\mathrm{v}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ e dà come risultato il vettore colonna delle coordinate di u rispetto alla base $\mathrm{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Una matrice triangolare superiore è sempre una matrice a scala.
  - Vero
  - Falso

- Un sistema lineare in cui sono presenti più incognite che equazioni ha sempre infinite soluzioni.
    - Vero
    - Falso

Funzioni lineari e matrici, operazioni elementari, calcolo del rango di una matrice, eliminazione di Gauss, sistemi di equazioni lineari

- Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In questo caso è possibile trovare una base $\mathrm{v} = (v_1, v_2, v_3)$ del dominio tale che la matrice di f rispetto alla base v del dominio e alla base canonica del codominio sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    - Vero
    - Falso
- Il rango di una matrice A è:
    - il numero di righe non nulle di A
    - il numero di colonna lineamenti indipendenti di A
    - il numero di righe linearmente indipendenti di A
    - il numero di righe non nulle in una forma a scala di A
    - il numero di colonne non nulle di A
    - il numero di colonne non nulle in una forma a scala di A
- Volendo determinare il rango di una matrice mediante la riduzione in forma a scala si possono effettuare operazioni elementari sia sulle righe che sulle colonne.
    - Vero
    - Falso
- Sia A una matrice $m \times n$. Allora:
    - $\text{rango}(A) = \max\{m, n\}$
    - $\text{rango}(A) = \text{mmin}\{m, n\}$
    - $\text{rango}(A) \leq \min\{m, n\}$
- L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo è un sottospazio vettoriale.
    - Vero
    - Falso
- Il sistema lineare $AX = B$ ha soluzione se e solo se:
    - $\text{rango}(A) < \text{rango}(A|B)$
    - $\text{rango}(A|B) = \text{rango}(A) + 1$
    - $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B)$
- Un sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni se e solo se:
    - B appartiene allo spazio generato dalle righe di A
    - B appartiene allo spazio generato dalle colonne di A
- Volendo calcolare l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 2 & t \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ utilizzando l'eliminazione di Gauss, per quale valore di t non è posibile determinare A^{-1}?
    - $t = -1$
    - $t = 3$
    - $t = 6$
    - $t = 0$

- Nella permutazione $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ quante sono le inversioni presenti?
    - 3
    - 4
    - 5
- Il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è uguale a:
    - 7
    - 0
    - 5

Determinanti, autovalori, autovettori, diagonalizzazione di una matrice

- Moltiplicando tutti gli elementi di una matrice quadrata per uno stesso numero α il determinante della matrice risulta moltiplicato per α.
    - Vero
    - Falso
- Se A è una matrice quadrata di ordine n si ha $det(-A) = -det(A)$.
    - Vero
    - Falso
- Se due matrici quadrate di ordine n hanno lo stesso determinante allora sono simili.
    - Vero
    - Falso
- Se una funzione lineare $f: V \to V$ non è iniettiva allora il determinante della matrice di f rispetto a una qualunque base di V è uguale a 0.
    - Vero
    - Falso
- Se una funzione lineare $f: V \to V$ è suriettiva allora il determinante della matrice di f rispetto a una qualunque base di V è necessariamente diverso da 0.
    - Vero
    - Falso
- Esistono matrici quadrate di ordine n, diverse dalla matrice identica, che sono simili alla matrice identica.
    - Vero
    - Falso
- Se due matrici quadrate di ordine n, A e B, sono entrambe diagonalizzabili, allora ciò significa che A e A sono simili.
    - Vero
    - Falso
- Se v_1 e v_2 sono autovettori di $f: V \to V$ allora sicuramente anche $v_1 + v_2$ è un autovettore di f.
    - Vero
    - Falso
- Se due matrici quadrate A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico allora sono simili.
    - Vero
    - Falso

- Se λ è un autovalore di una matrice quadrata A allora, per ogni intero $n \geq 1$, λ^n è un autovalore di A^n.
  - Vero
  - Falso

Prodotto scalare di vettori, angoli, aree, volumi, ortogonalità tra vettori e tra sottospazi, proiezioni ortogonali

- Se $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono due vettori paralleli, si ha sempre $\| v + w \| = \| v \| + \| w \|$.
  - Vero
  - Falso
- Siano $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli a due a due ortogonali, cioè tali che $v_i \cdot v_j = 0$ per ogni $i \neq j$. Allora essi sono linearmente indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^n$.
  - Vero
  - Falso
- Siano $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ vettori di $\mathbb{R}^2$ e sia P il parallelogramma di lati v e w. L'area di P è uguale al valore assoluto del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
  - Vero
  - Falso
- Se $S \subset \mathbb{R}^n$ non è un sottospazio vettoriale e se poniamo $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | v \cdot u = 0, \forall u \in S\}$ $S^\perp$ è comunque un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
  - Vero
  - Falso
- Se $S \subset \mathbb{R}^n$ non è un sottospazio vettoriale e se poniamo $S^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n | v \cdot u = 0, \forall u \in S\}$ allora si ha $(S^\perp)^\perp = S$.
  - Vero
  - Falso
- Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha $(U + W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
  - Vero
  - Falso
- Siano U e W sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha $(U \cap W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
  - Vero
  - Falso
- Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e consideriamo due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$. Siano u_1 e u_2 le proiezioni ortogonali di v_1 e v_2 su U. Allora la proiezione ortogonale di $v_1 + v_2$ su U è data dalla somma $u_1 + u_2$.
  - Vero
  - Falso
- In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $v = (2, -1, 0)$ e $w = (1, 1, -2)$. L'area del parallelogramma determinato dai vettori v e w è:
  - $\sqrt{29}$
  - $\sqrt{15}$
  - $\sqrt{34}$
  - $\sqrt{27}$

- In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $v = (1, 0, 1)$ e $w = (0, 1, -1)$. L'angolo compreso tra i vettori v e w è:
  - 120 gradi
  - 90 gradi
  - 30 gradi
  - 60 gradi

Basi ortogonali e ortonormali, forme bilineari simmetriche, matrici delle forme bilineari simmetriche, forme definite positive, negative, indefinite, vettori isotropi

- La funzione $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo $g\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 - y_1y_2 + 2x_1y_2$ è una forma bilineare simmetrica.
  - Vero
  - Falso
- Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ la funzione che associa a due matrici $A, B \in V$ la traccia della matrice prodotto AB (la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale). La funzione g così definita è una forma bilineare simmetrica.
  - Vero
  - Falso
- Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica e sia S l'insieme dei vettori isotropi: $S = \{v \in V \mid g(v, v) = 0\}$. S è sempre un sottospazio vettoriale di V.
  - Vero
  - Falso
- Due matrici A e B sono congruenti se esiste una matrice invertibile P tale che:
  - $B = P^{-1}AP$
  - $B = P^TAP$
- Due matrici congruenti G e G' hanno lo stesso determinante.
  - Vero
  - Falso
- Due matrici congruenti G e G' non hanno necessariamente lo stesso determinante, ma $\det G$ e $\det G'$ hanno lo stesso segno.
  - Vero
  - Falso
- La matrice $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ è:
  - definita negativa
  - definita positiva
  - indefinita
- Sia $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica indefinita. Allora esistono sicuramente dei vettori isotropi non nulli.
  - Vero
  - Falso

- Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $g: V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica che associa a due matrici $A, B \in V$ la traccia della matrice prodotto AB (la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale principale). La forma g è:
    - definita negativa
    - definita positiva
    - indefinita
- La forma bilineare simmetrica $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice (rispetto alla base canonica) è $G = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ è:
    - degenere
    - non degenere