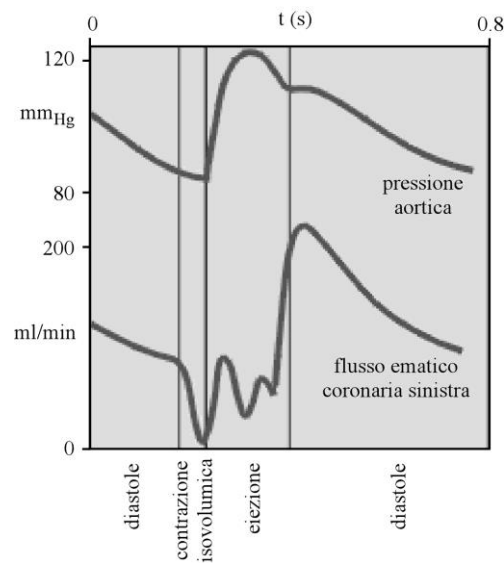


Francesca M. Susin

# ***DINAMICA DEI FLUIDI***

per il Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica



a.a. 2020-2021

## INTRODUZIONE AL CORSO

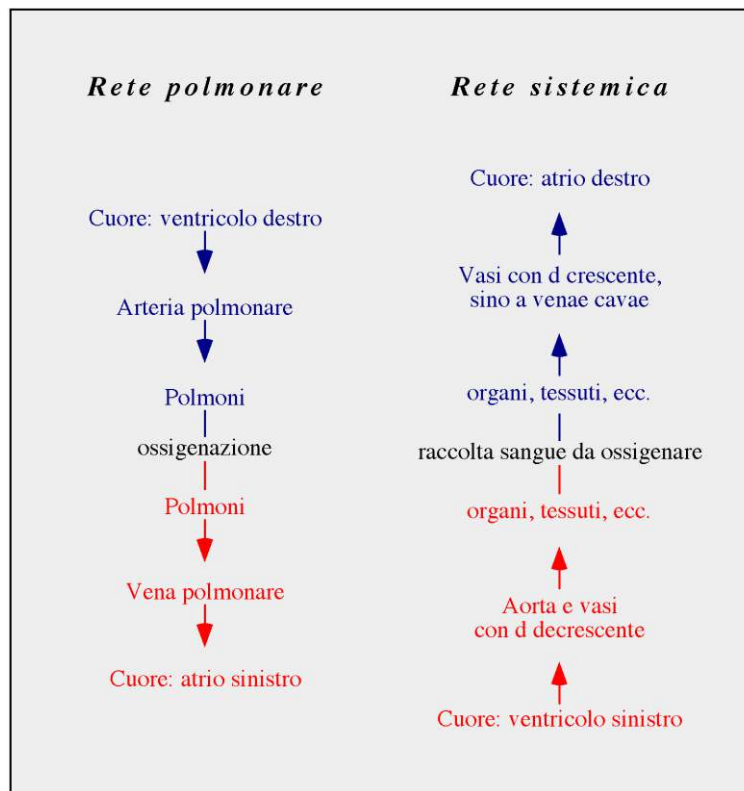
### **Moti fluidi in sistemi fisiologici e in dispositivi terapeutici.**

La presenza di sostanze fluide (liquide o gassose) in natura, ovvero in sistemi artificiali prodotti dall'uomo, è senza dubbio così ampia da poter dire che il ruolo svolto dalla meccanica dei fluidi nell'ambito dei fenomeni fisici che regolano la vita sulla Terra è fondamentale.

Nel caso dei sistemi fisiologici, e dei dispositivi terapeutici che la ricerca tecnologica mette a punto per sopperire alle fallanze dei sistemi fisiologici, sono numerosi gli esempi di grande rilevanza che possono essere proposti. Basti pensare al fatto che il corpo umano è prevalentemente composto da acqua, e che il regolare comportamento dei fluidi presenti nel nostro organismo è condizione fondamentale per il verificarsi di un corretto sviluppo e per il mantenimento di buone condizioni di salute.

Con riferimento alla fisiologia umana, il sistema che riveste maggiore importanza sia per la complessità che lo caratterizza che per l'entità degli sforzi che la comunità scientifica riversa nelle ricerche ad esso dedicate è il sistema cardiocircolatorio. La complessità del sistema cardiocircolatorio, che con estrema schematizzazione può dirsi costituito, dal punto di vista idraulico, da un insieme di condotti di dimensioni fortemente variabili (i vasi sanguigni) e da una doppia pompa dotata di valvole regolatrici (il cuore e le

valvole cardiache), discende da numerosi fattori. Innanzi tutto, dal punto di vista della configurazione strutturale del sistema è necessario distinguere la presenza di due diverse reti vascolari , ciascuna con un proprio percorso ed un proprio scopo: la *rete circolatoria polmonare* e la *rete circolatoria sistemica* (Figura 1).



*Figura 1. Rappresentazione schematica dei percorsi seguiti dal sangue nella rete polmonare e nella rete sistemica. In rosso. sangue ossigenato (o arterioso); in blu: sangue bisognoso di ossigenazione (o venoso).*

La prima trasporta, attraverso l'arteria polmonare ed una rete di vasi con diametro decrescente da monte verso valle, il sangue carente di ossigeno da condurre dal cuore ai polmoni e da questi, tramite vasi con diametro via via

crescente sino alla vena polmonare, riporta il sangue ossigenato al cuore. La seconda rete, invece, funge da collegamento tra il cuore ed 'il resto dell'organismo': da una parte per assicurare ad organi e tessuti il necessario apporto di sangue ossigenato, dall'altra per riportare da questi al cuore il sangue bisognoso di ossigenazione.

Accanto all'aspetto strutturale, di non minore complessità è l'aspetto legato alle proprietà meccaniche dei tessuti che compongono i vasi sanguigni, proprietà tali da non poter trascurare gli effetti dell'elasticità dei vasi stessi e cioè, dal punto di vista idraulico, la capacità di accumulare o di rilasciare volumi di fluido. Le caratteristiche meccaniche delle pareti arteriose e venose, inoltre, cambiano spostandosi nella rete lungo i diversi vasi, per la variazione sia delle tipologie che delle percentuali di presenza dei tessuti che formano le pareti stesse. Accanto a ciò, si deve considerare anche il fatto che la risposta reologica del sangue (si veda il capitolo 1) cambia al variare di parametri fisiologici fondamentali quali, ad esempio, la dimensione trasversale dei vasi e il fattore ematocrito. Non ultimo, infine, tra gli elementi che complicano la 'natura idraulica' del sistema cardiocircolatorio è il carattere di pulsatilità (cioè di variazione armonica nel tempo) che presenta l'andamento della pressione sanguigna, che altro non è se non la "forza motrice" di tutto il sistema.

Nell'ambito del sistema cardiocircolatorio, i temi principali affrontati dagli studiosi di meccanica dei fluidi riguardano

- l'emodinamica del sistema cardiovascolare completo, per la determinazione dell'andamento dell'onda di pressione e della

distribuzione del flusso ematico nelle diverse posizioni del sistema stesso;

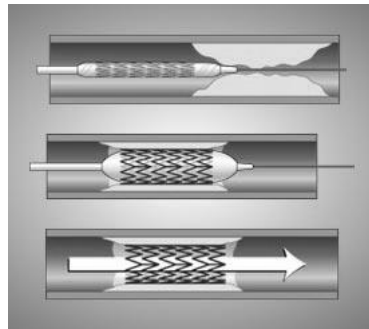
- l'emodinamica in corrispondenza di specifici distretti vascolari, quali ad esempio la biforcazione carotidea o l'aorta addominale, per la determinazione della distribuzione della velocità e delle sollecitazioni agenti (di pressione e tangenziali). E' ormai infatti ampiamente riconosciuto il ruolo svolto da un anormale comportamento delle grandezze fluidodinamiche nell'insorgenza e nell'evoluzione di patologie quali l'arteriosclerosi (fortemente influenzata dalla riduzione locale della velocità ematica, tale da favorire il deposito di materiale grasso e la progressiva ostruzione del vaso sanguigno) o l'aneurisma (cioè l'allargamento della sezione di un'arteria sino ad un'eventuale rottura, provocata da un'eccessiva sollecitazione di pressione sulle pareti del vaso);
- la dinamica intracardiaca, con particolare attenzione al ventricolo sinistro ed alla dinamica delle valvole mitralica e aortica;
- l'emodinamica delle valvole cardiache.

Da notare che l'indagine di ogni specifico problema deve riguardare sia condizioni fisiologiche normali che condizioni patologiche, allo scopo di evidenziarne le differenze fondamentali dal punto di vista fluidodinamico.

Accanto ai temi predetti, la dinamica dei fluidi nell'ingegneria biomedica esamina numerosi altri processi fisiologici, tra i quali la respirazione (nella quale il fluido principalmente coinvolto, l'aria, è comprimibile), la filtrazione

renale ed i relativi meccanismi di eliminazione, la circolazione fetoplacentare, la dinamica del vitreo oculare.

La conoscenza dei moti fluidi fisiologici si rivela fondamentale anche nel fornire elementi per la corretta progettazione di dispositivi terapeutici e di procedure chirurgiche e per la verifica della regolarità dei processi fisiologici in presenza di protesi artificiali. A titolo di esempio, si ricordano alcune applicazioni di utilizzazione largamente diffusa e spesso cruciale, quali i dispositivi utilizzati nelle angioplastiche e nelle valvuloplastiche, le protesi valvolari cardiache, di origine biologica o meccanica, i dispositivi di assistenza ventricolare, i dispositivi di bypass cuore-polmoni.

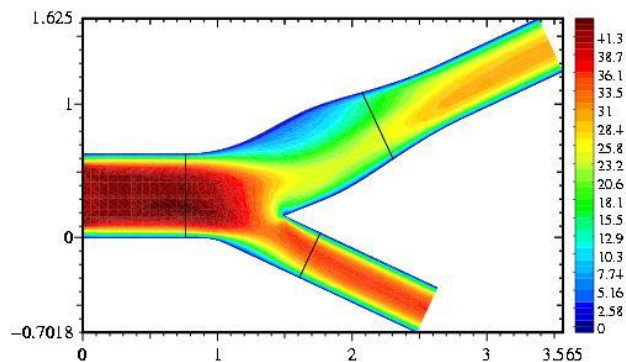


*Figura 2. Dispositivo (stent) per l'eliminazione di una stenosi vascolare. La stenosi viene rimossa grazie all'elemento espandibile. In loco viene lasciata una protesi 'in misura', che favorisce il mantenimento della regolare sezione di deflusso.*

Non ultimo, infine, è il ruolo svolto dalle ricerche di fluidodinamica per l'elaborazione di criteri di diagnosi precoce di predisposizione a specifiche patologie, ovvero per la definizione di indici affidabili utili alla quantificazione clinica del grado della patologia e della sua evoluzione

temporale. La conoscenza il più possibile di dettaglio dell'interazione tra la morfologia fisiologica ed i flussi fisiologici può permettere di stabilire se una anomala configurazione di una parte dell'organismo umano (si pensi, ad esempio, alla conformazione di una valvola cardiaca) può produrre malfunzionamenti e/o scompensi dell'intero sistema.

E' interessante chiedersi quali metodologie di indagine vengono oggi applicate alla dinamica dei fluidi. In generale, un ricercatore può svolgere le proprie indagini seguendo un approccio teorico, un approccio numerico ovvero un approccio sperimentale. In ambito biomedico, in particolare, l'approccio teorico 'cade in difetto' in virtù della difficoltà di applicazione che lo caratterizza quando il sistema indagato presenti anche solo modeste complessità. L'approccio sperimentale, in generale comunque sempre fortemente auspicabile per la verifica delle previsioni teoriche e numeriche, presenta ovvie difficoltà nella realizzazione di indagini 'in vivo' (peraltro, l'introduzione più o meno recente di dispositivi di indagine poco o per nulla invasivi ha prodotto un sostanziale progresso in questo settore) e presenta altresì non poche limitazioni nella riproduzione 'in vitro' delle condizioni fisiologiche esaminate, come ad esempio nell'adozione di fluidi 'inerti' adatti alla simulazione del comportamento ematico o nella messa a punto di dispositivi in grado di simulare gli effetti legati all'elasticità dei condotti vascolari. Risultano pertanto prevalenti, anche grazie alla sempre maggiore potenza dei mezzi di calcolo, le ricerche basate sulla modellazione numerica del processo fisiologico esaminato.



*Figura 3. Simulazione numerica del campo di velocità in una diramazione.*

E' evidente che la modellazione numerica di moti fluidi anche semplici richiede il possesso di adeguate conoscenze teoriche. Nell'ambito del corso a cui le presenti dispense sono rivolte, l'esiguo numero di ore disponibili certamente non permette di raggiungere detto livello di conoscenza. Obiettivo primario del corso è pertanto quello di acquisire l'uso critico e cosciente degli strumenti teorici più semplici messi a disposizione dall'idraulica, per essere in grado di descrivere adeguatamente alcuni semplici casi di moti fluidi in ambito biomedico, ovvero di valutare 'in prima battuta' quanto accade in sistemi più complessi.

### **Sistemi e unità di misura.**

Le grandezze fisiche caratteristiche dei fenomeni indagati nella meccanica dei fluidi vengono descritte adottando, quale sistema di misura, il *Sistema Internazionale di Unità (SI)*, definito nella seguente Tabella 1.



<b>Grandezza fondamentale</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Unità di misura SI</b>
Massa	M	kg (chilogrammo)
Lunghezza	L	m (metro)
Tempo	T	s (secondo)

*Tabella 1. Grandezze fondamentali e unità di misura nel Sistema Internazionale.*

Va da sé che nel SI la grandezza fisica *Forza* (F) è una grandezza derivata. Ricordando la legge fondamentale di Newton (forza=massa·accelerazione), l'unità di misura di F nel SI, detta Newton, è definita come la forza da applicare ad un corpo di massa pari ad 1 kg per imprimergli un'accelerazione di  $1 \text{ m/s}^2$ . Si ha cioè

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$$

Talvolta, una forza risulta espressa in chilogrammi (chilogrammo peso, kp, per distinguerlo dal 'chilogrammo massa'), secondo l'ormai desueto Sistema Tecnico. Poiché per definizione 1 kp è la forza che, quando applicata ad un corpo di massa pari ad 1 kg, imprime al corpo un'accelerazione pari alla accelerazione di gravità g (pari a  $9,81 \text{ m/s}^2$ ) vale la relazione di conversione

$$1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N}$$

Si riportano di seguito le unità di misura delle principali grandezze fisiche utilizzate dalla dinamica dei fluidi, per la cui definizione si rimanda ai capitoli successivi.

<b>Grandezza</b>	<b>Simbolo</b>	<b>Unità di misura SI</b>
Peso specifico	$\gamma$	$\text{N/m}^3$
Densità	$\rho$	$\text{kg/m}^3$
Viscosità dinamica	$\mu$	$\text{kg/sm}=\text{Pa}\cdot\text{s}^1$
Viscosità cinematica	$\nu$	$\text{m}^2/\text{s}$
Pressione	$p$	$\text{N/m}^2=\text{Pa}$

*Tabella 2. Unità di misura di grandezze significative, espresse nel SI.*

---

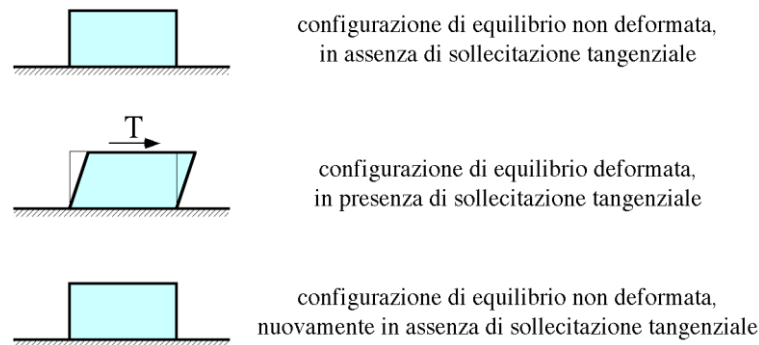
<sup>1</sup> Trattando fluidi biologici è spesso frequente trovare la viscosità dinamica espressa in centipoise (cP). Vale la relazione di conversione  $1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

## **1. CARATTERI GENERALI DEI FLUIDI**

### **1.1 Definizione di fluido. Densità e peso specifico.**

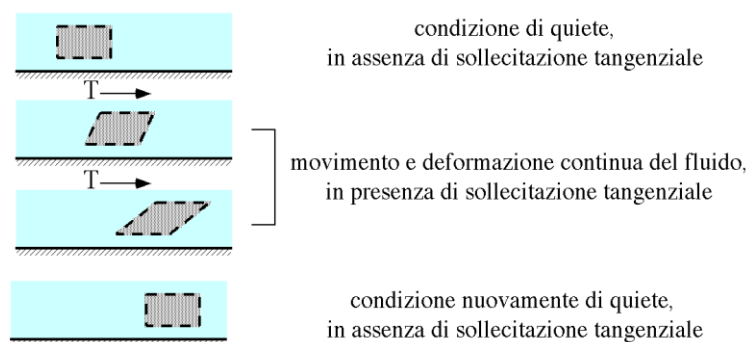
La nozione intuitiva di 'fluido' risulta probabilmente essere pressoché elementare. Più complessa, invece, è una definizione rigorosa, che non può prescindere dal considerare quale elemento caratteristico fondamentale il comportamento della sostanza in risposta ad un generico sistema di forze che la sollecitano.

E' opportuno allora esprimere la definizione di fluido in contrapposizione alla definizione di sostanza solida la quale, come è ben noto, è in grado di resistere non solo ad azioni normali ma anche ad azioni tangenziali. La risposta di un elemento solido ad un'azione tangenziale si manifesta infatti con una deformazione finita, tale da garantire il raggiungimento di una nuova configurazione di equilibrio. Al cessare della sollecitazione, l'elemento solido assume nuovamente la configurazione originaria (solido elastico).



*Figura 1.1. Risposta di un elemento solido ad un'azione tangenziale.*

Una sostanza allo stato fluido, al contrario, non è in grado di resistere ad azioni tangenziali, per quanto modeste possano essere. La risposta di un fluido ad una qualsiasi azione tangenziale corrisponde ad una deformazione continua dell'elemento sollecitato, che si manifesta con il movimento del fluido stesso. La condizione indisturbata di quiete si ristabilisce solo al cessare dell'azione tangenziale.



*Figura 1.2. Risposta di un fluido ad un'azione tangenziale.*

La deformazione continua di una sostanza fluida soggetta a forze

tangenziali è strettamente legata alla natura dello stato di aggregazione delle molecole costituenti, tale da consentirne il reciproco scorrimento. Con riferimento alle caratteristiche di aggregazione molecolare è anche possibile operare per le sostanze fluide la distinzione tra liquidi, caratterizzati dal mantenere pressoché costante, pur nel reciproco scorrimento, la distanza tra le molecole, e gas, le cui molecole possono in generale reciprocamente distanziarsi in qualsivoglia modo. Ne consegue che mentre un gas assume il volume del recipiente che lo contiene, un liquido generalmente mantiene invariato il proprio volume.

Nonostante la definizione di fluido (e, nei fluidi, la distinzione tra liquidi e gas) faccia riferimento e trovi spiegazione nella natura dell'aggregazione molecolare del fluido stesso, il comportamento di un fluido, sia esso liquido o gassoso, in quiete o in movimento, viene normalmente indagato nell'ipotesi di poter considerare il fluido come un continuo.

In tal modo, preso a riferimento un volume fluido comunque piccolo, le grandezze fisiche che lo caratterizzano possono essere riguardate e definite come *funzioni continue dei punti dello spazio* occupato dal volume stesso. In particolare, indicati con  $\delta V$  un volume elementare e con  $\delta m$  e  $\delta G$  rispettivamente la massa fluida contenuta in detto volume ed il peso di detta massa fluida, si definisce *densità* la grandezza

$$\rho = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta m}{\delta V} \quad (1.1)$$

e *peso specifico* la grandezza

$$\gamma = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\delta G}{\delta V} \quad (1.2)$$

Va da sè che, stante la relazione tra la grandezza 'massa' e la grandezza 'peso', densità e peso specifico sono reciprocamente legati dalla relazione  $\rho = \gamma/g$ , essendo  $g$  l'accelerazione di gravità.

Un fluido si dice *omogeneo* quando le grandezze fisiche che lo caratterizzano non variano al variare della posizione, si dice *isotropo* quando sono indipendenti dalla direzione.

## 1.2 Stato di tensione in un fluido. Risposta reologica: fluidi newtoniani e non newtoniani.

Si consideri una superficie elementare  $\delta A$  appartenente ad un generico campo fluido, e sia  $\vec{n}$  il versore normale alla superficie, considerato positivo se uscente. Sulla superficie  $\delta A$  si consideri agente la forza  $\delta F$  comunque orientata (Figura 1.3a). Siano  $\delta F_t$  e  $\delta F_n$  le componenti rispettivamente normale e tangente alla superficie stessa, e  $P$  il punto con cui  $\delta A$  tende a coincidere per  $\delta A \rightarrow 0$ . Si definisce *sforzo normale*  $\sigma$  nel punto  $P$  la grandezza

$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \quad (1.3)$$

e si definisce *sforzo tangenziale*  $\tau$  nel punto  $P$  la grandezza

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A} \quad (1.4)$$

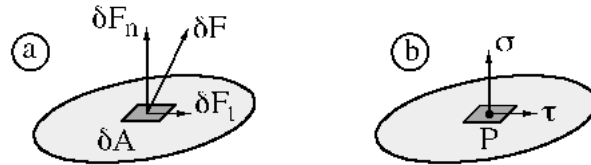


Figura 1.3. Forza  $\delta F$  sulla superficie elementare  $\delta A$  (a), e sforzo normale  $\sigma$  e tangenziale  $\tau$  nel punto  $P$  (b).

L'insieme di sforzo normale e sforzo tangenziale costituisce lo *stato di tensione* nel punto  $P$  appartenente alla superficie  $\delta A$  di normale  $\vec{n}$ . Lo stato di tensione dunque non rappresenta altro che la sollecitazione trasmessa attraverso la superficie  $\delta A$ , con cui il punto  $P$  può essere confuso, da una parte all'altra del campo fluido al quale la superficie stessa appartiene. Si noti che in generale la superficie  $\delta A$  può anche essere di separazione tra due fluidi (ad esempio la superficie libera dell'acqua a contatto con l'atmosfera), ovvero di contatto tra il fluido e una superficie solida (ad esempio la superficie interna di un vaso sanguigno).

Un fluido non resiste, per sua natura, a sforzi normali di trazione. Per tale motivo, viene per convenzione considerato positivo il verso corrispondente alla compressione. Lo sforzo normale positivo viene denominato *pressione*, ed indicato con la lettera  $p$ .

In un fluido soggetto a soli sforzi di pressione (il che si verifica nei fluidi

cosiddetti perfetti ovvero nei fluidi in quiete) la pressione si mantiene inalterata in ciascuna direzione (*Principio di Pascal*).

In un fluido cosiddetto *reale* è di fondamentale importanza stabilire il tipo di *risposta reologica*, cioè la natura del legame intercorrente tra gli sforzi tangenziali nel fluido e la risposta del fluido stesso a detti sforzi. Come affermato nella definizione di sostanza fluida (paragrafo 1.1), un fluido risponde ad una sollecitazione tangenziale deformandosi con continuità. Stabilire la risposta reologica del fluido equivale allora a definire con che velocità si deforma un elemento fluido soggetto ad una sollecitazione tangenziale.

Per un'ampia categoria di fluidi, cosiddetti *newtoniani* (tra i quali in particolare l'acqua, l'aria, gli olii, il plasma sanguigno ma non, in generale, il sangue), la relazione tra lo sforzo tangenziale e la velocità di deformazione è una relazione di proporzionalità diretta, con coefficiente di proporzionalità costante. Con riferimento al caso particolare di Figura 1.4, nel quale un fluido newtoniano scorre con velocità  $v(y)$  tra due piani paralleli in virtù del movimento del piano superiore (moto di Couette), la *legge di Newton* porge

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.5)$$

la *viscosità dinamica*  $\mu$  essendo la grandezza caratteristica del fluido (il cui valore dipende in generale dalla temperatura e dalla pressione) rappresentativa dell'attitudine di un elemento a deformarsi per effetto di un'azione tangenziale, ossia anche dell'attitudine del fluido a 'mettersi in



movimento'.

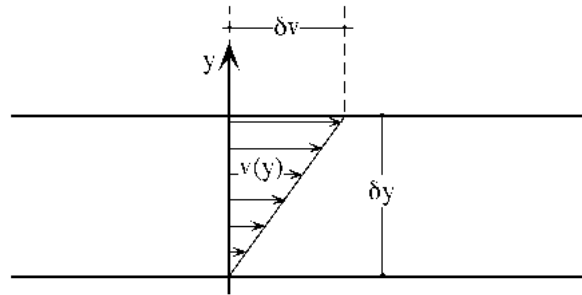


Figura 1.4. Profilo di velocità  $v(y)$  nel moto di Couette.

Si osservi che la validità della legge di Newton è indipendente dal *profilo* di velocità  $v(y)$ . Si osservi anche che l'equazione (1.5) permette ora di dare ragione dell'affermazione precedentemente riportata secondo la quale lo stato di tensione in un punto si riduce alla sola pressione nei fluidi cosiddetti perfetti e nei fluidi in quiete. Infatti, un fluido si definisce *perfetto* (o *ideale*) quando la sua viscosità è nulla; in un tal fluido gli sforzi tangenziali sono dunque assenti. Analogamente, in assenza di movimento (e dunque di gradiente di velocità) lo sforzo  $\tau$  è nullo per quanto grande possa essere la viscosità del fluido.

Non tutti i fluidi viscosi presentano comportamento reologico newtoniano. Per i fluidi cosiddetti non newtoniani è comunque generalmente possibile esprimere il legame tra forze tangenziali e velocità di deformazione nella forma

$$\tau = k \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n \quad (1.6)$$

dove  $k$  e  $n$  assumono valori caratteristici dello specifico fluido (per assegnati valori della temperatura e della pressione). In particolare, vengono detti *pseudoplastici* i fluidi nei quali, essendo  $n < 1$ , la resistenza allo scorrimento diminuisce all'aumentare della sollecitazione tangenziale. Viceversa, vengono detti *dilatanti* i fluidi per i quali  $n > 1$ , e nei quali dunque la resistenza aumenta all'aumentare della sollecitazione.

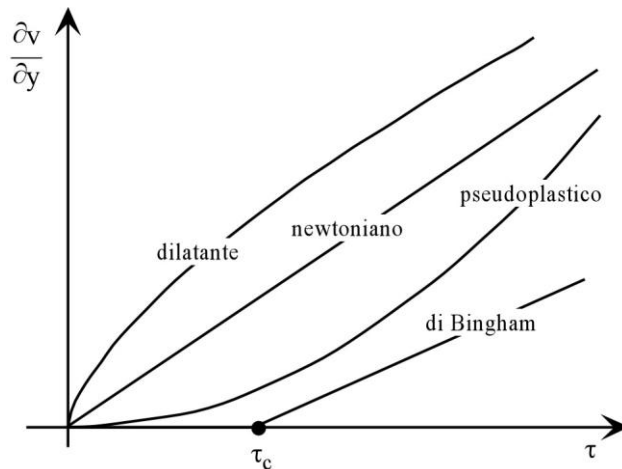


Figura 1.5. Risposta reologica di fluidi newtoniani e non newtoniani.

Vi è poi una classe di fluidi, che seguono il comportamento del cosiddetto *fluido plastico di Bingham*, per i quali i caratteri peculiari della 'fluidità' emergono solo a partire da sollecitazioni sufficientemente elevate. Detto  $\tau_c$  il valore critico dello sforzo tangenziale, per  $\tau < \tau_c$  il fluido plastico di Bingham si comporta di fatto come una sostanza allo stato solido, rispondendo alla sollecitazione con una deformazione finita. Per valori di  $\tau$

viceversa maggiori di  $\tau_c$  la risposta è invece una deformazione continua, ed il legame tra lo sforzo e la velocità di deformazione risulta espresso dalla

$$\tau = \tau_c + \mu' \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.7)$$

Per  $\tau > \tau_c$ , cioè, il fluido si comporta come un fluido newtoniano di viscosità dinamica  $\mu'$ , la velocità di deformazione essendo però proporzionale alla differenza tra lo sforzo agente e lo sforzo critico  $\tau_c$ .

### 1.3 Comprimibilità dei liquidi.

L'attitudine di una sostanza a modificare il proprio volume per effetto di una variazione di pressione è detta *comprimibilità*. Per i liquidi, il legame tra la variazione di volume  $d\forall$  e la variazione di pressione  $dp$  è di tipo lineare, secondo la relazione

$$\frac{d\forall}{\forall} = -\frac{dp}{E} \quad (1.8)$$

dove  $E$  è il *modulo di comprimibilità* o di *elasticità* del liquido. Il segno meno nella (1.8) discende dal fatto che ad una variazione positiva di pressione corrisponde una variazione negativa di volume.

La variazione di pressione può essere messa in relazione anche con una variazione della densità  $\rho$ . Detta  $m$  la massa che caratterizza il volume liquido  $\forall$ , il principio di conservazione della massa impone  $dm=0$ . Poiché  $dm = d(\rho\forall) = \rho d\forall + \forall d\rho$ , si ha subito che  $d\forall/\forall = -d\rho/\rho$  e dunque anche

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{E} \quad (1.9)$$

Un liquido aumenta dunque la propria densità (ovvero la diminuisce) all'aumentare (al diminuire) della pressione. Tuttavia, il modulo di comprimibilità dei liquidi è di norma piuttosto elevato; ad esempio per l'acqua a 20 °C  $E=2.12 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ , per il sangue umano  $E=1.67 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ . Di conseguenza i liquidi vengono normalmente riguardati come *fluidi incompressibili* (per lo meno quando le oscillazioni di pressione a cui sono soggetti sono sufficientemente contenute), trascurandone le variazioni di volume o di densità conseguenti a variazioni di pressione. Un fluido omogeneo incompressibile viene perciò usualmente definito come fluido a densità (e naturalmente a peso specifico) costante.

#### 1.4 Accenni alle proprietà reologiche del sangue e al comportamento meccanico dei vasi sanguigni.

Il sangue può essere definito come una sospensione di particelle solide<sup>1</sup> (che normalmente occupano circa il 45% del volume disponibile) in un mezzo di dispersione fluido detto plasma, a sua volta definibile come soluzione colloidale prevalentemente acquosa di particelle perlopiù proteiche.

---

<sup>1</sup> Le particelle solide sono costituite principalmente dai globuli rossi (dischi biconcavi flessibili con diametro, nella maggior parte dei mammiferi, di circa 8  $\mu\text{m}$  e spessore di circa 1  $\mu\text{m}$  al centro e 2-3  $\mu\text{m}$  al bordo). Vi sono poi i globuli bianchi, leggermente più grandi ma in numero decisamente inferiore rispetto ai globuli rossi (circa 1-2 globuli bianchi ogni 1000

Il plasma può normalmente riguardarsi come fluido omogeneo incompressibile e newtoniano, la cui viscosità dinamica, per il plasma umano e alla normale temperatura corporea, è pari a circa  $0,0012 \div 0,0016 \text{ kg/ms}$  (viscosità dinamica dell'acqua a  $20^\circ\text{C}$  circa pari a  $0,001 \text{ kg/ms}$ ). Nell'uomo, il peso specifico del plasma è circa  $1,025 \div 1,028$  volte il peso specifico dell'acqua ( $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 9806 \text{ N/m}^3$ ).

Al contrario il sangue, che viene ugualmente considerato un fluido incompressibile, non può altrettanto in generale riguardarsi né come omogeneo né come newtoniano. In particolare, il sangue non può essere trattato come omogeneo quando scorre entro i vasi della rete capillare, il cui diametro medio è dello stesso ordine di grandezza del diametro e della distanza media tra i globuli rossi. In tal caso, anzi, tende addirittura a decadere la possibilità di considerare il sangue come un mezzo continuo. Solo quando il diametro del vaso sanguigno supera grosso modo i  $100 \mu\text{m}$ , il sangue può ragionevolmente essere ritenuto un fluido omogeneo, di peso specifico pari a circa  $1,053 \div 1,059$  volte il peso specifico dell'acqua.

Anche la risposta reologica del sangue varia al variare della tipologia dei vasi in cui scorre. Misure sperimentali in vitro hanno mostrato che in generale il comportamento del sangue è assimilabile a quello di un fluido plastico di Bingham. Tuttavia, quando il flusso sanguigno è caratterizzato da velocità di deformazione maggiori di circa  $60 \div 100 \text{ s}^{-1}$  la risposta reologica

---

globuli rossi). Infine le piastrine, più numerose dei globuli bianchi (circa 80-100 piastrine ogni 1000 globuli rossi) ma significativamente più piccole (sfere di circa  $2\text{-}4 \mu\text{m}$  di diametro).

risulta essere sostanzialmente newtoniana, con viscosità dinamica  $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}^2$  (quattro volte superiore a quella dell'acqua). Nel distretto arterioso la velocità di deformazione supera usualmente (quanto meno in corrispondenza della parete dei vasi) il predetto valore di soglia, ed il sangue viene dunque normalmente ritenuto a comportamento newtoniano. Anche nella microcircolazione capillare la velocità di deformazione raggiunge valori elevati, ma gli effetti della presenza dei globuli rossi sulla risposta allo scorrimento non possono essere trascurati. Nella rete venosa, infine, soprattutto nelle grandi vene degli arti inferiori, il valore di soglia della velocità di deformazione può non essere superato. In tal caso il sangue tende a seguire un comportamento reologico di tipo pseudoplastico, eventualmente dipendente anche dalla durata della sollecitazione tangenziale.

I caratteri di un moto fluido a pressione dipendono oltre che dalle proprietà fisiche del fluido anche dalle caratteristiche dei condotti entro i quali il moto si svolge. In particolare, quando il moto è governato da pressioni non costanti nel tempo (come accade alla circolazione sanguigna corporea durante un ciclo cardiaco completo) diventano di fondamentale importanza le proprietà meccaniche dei condotti (nel caso specifico, le proprietà delle

---

<sup>2</sup> Tale valore della viscosità dinamica del sangue umano può variare in maniera anche sensibile in funzione di numerosi fattori, tra i quali il più importante è probabilmente il *valore ematocrito*, definito come il rapporto percentuale tra il volume occupato dai globuli rossi in un dato campione di sangue ed il volume del campione stesso. Le misure sperimentali mostrano che all'aumentare dell'ematocrito aumenta la viscosità. Si noti anche che il valore ematocrito varia, in uno stesso individuo, in funzione dell'origine del campione su cui viene effettuata la misura: risulta massimo nel sangue venoso, minimo nel sangue capillare ed intermedio nel sangue arterioso.

pareti dei vasi sanguigni), intimamente legate alle modalità di propagazione delle onde di pressione.

Descrivere le caratteristiche meccaniche delle pareti dei vasi sanguigni in termini generali è di fatto improponibile, data la complessità e la varietà degli elementi che concorrono a stabilirle. In questa sede si ritiene significativo osservare semplicemente che il comportamento meccanico delle pareti arteriose, venose e capillari discende dalla combinazione, sia in termini di contenuto percentuale che di distribuzione spaziale, dei tre principali costituenti, ossia l'elastina, il collagene ed il muscolo liscio. Sebbene tali elementi, in particolar modo l'elastina ed il collagene, rispondano elasticamente alle sollecitazioni impresse (ossia producendo deformazioni finite proporzionali allo sforzo), alle pareti dei vasi sanguigni viene nel complesso usualmente attribuito un comportamento viscoelastico, cioè in parte di solido elastico ed in parte di fluido viscoso in funzione dello stato di tensione. Accanto a ciò, si deve anche osservare che non è in generale possibile attribuire alle proprietà meccaniche dei vasi né il carattere di isotropia né quello di omogeneità.

La complessità della natura della risposta meccanica delle pareti dei vasi sanguigni rende altrettanto complessa la descrizione del moto che vi si svolge, ed in effetti l'argomento è a tutt'oggi oggetto di numerose ricerche. Resta peraltro valido, quanto meno per un inquadramento di base, il classico approccio anelastico, che considera cioè, accanto all'ipotesi di incomprimibilità del fluido, l'ipotesi di rigidità dei condotti.

## 2. IDROSTATICA

### 2.1 Equilibrio di un fluido pesante in quiete. Distribuzione idrostatica delle pressioni.

In un fluido in condizioni di quiete lo stato di tensione in un punto si riduce alla sola componente normale (pressione). Se il fluido è pesante, le forze a cui è soggetto un volume fluido elementare sono quindi la forza peso (dipendente dal volume dell'elemento, nonché dal peso specifico del fluido) e la forza di pressione (funzione della superficie dell'elemento e dello stato di pressione agente sulla superficie stessa).

Affinché il volume elementare sia in equilibrio, la somma delle componenti di dette forze, lungo una qualsiasi direzione, deve essere nulla. Se il fluido è omogeneo e incompressibile, la suddetta condizione risulta espressa dalla relazione, valida per ogni punto del fluido

$$p + \gamma h = \text{cost.} \quad (2.1)$$

dove  $h$  rappresenta la *quota* del punto misurata rispetto ad un prescelto piano orizzontale.

L'equazione (2.1), detta *equazione fondamentale dell'idrostatica*, mostra dunque che, in condizioni di quiete, la pressione in un fluido pesante



incomprimibile varia linearmente con la quota  $h$  del punto (*andamento idrostatico delle pressioni*, Figura 2.1).

Dall'equazione predetta emergono facilmente alcune osservazioni significative. In particolare, si osserva che i punti appartenenti ad uno stesso campo fluido e ad una stessa superficie orizzontale (e perciò caratterizzati dalla medesima quota  $h$ ) sono soggetti alla medesima pressione  $p$ . Detta *superficie* si dice pertanto *isobara*.

Conoscere poi la pressione in un punto di un fluido incomprimibile in quiete equivale a conoscerla in tutti gli altri punti del medesimo fluido. Detti rispettivamente 1 e 2 due qualsiasi punti appartenenti allo stesso campo fluido (Figura 2.1), la pressione  $p_2$  è immediatamente determinata dall'equazione fondamentale dell'idrostatica, nota che sia la pressione  $p_1$  e la posizione reciproca dei punti. Vale infatti

$$p_2 = p_1 + \gamma(h_1 - h_2) = p_1 + \gamma\Delta h_{1-2} \quad (2.2)$$

dove  $\Delta h_{1-2}$  è il dislivello tra i due punti (positivo se il punto 2 è inferiore al punto 1).

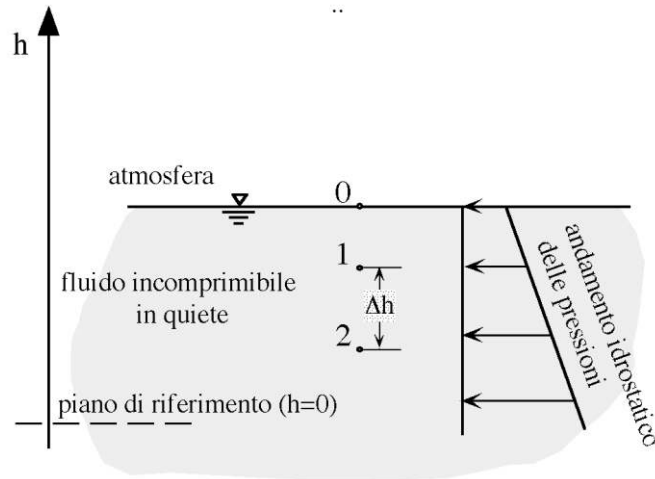
Se il punto a pressione nota appartiene ad una *superficie libera* (di separazione tra il fluido e l'atmosfera) ed è perciò a pressione atmosferica  $p_{\text{atm}}^1$  (punto 0 di Figura 2.1) la pressione di un generico punto interno al campo fluido risulta espressa dalla

---

<sup>1</sup>  $p_{\text{atm}} = 101325 \text{ Pa}$ .

$$p = p_{\text{atm}} + \gamma z \quad (2.3)$$

dove  $z$  rappresenta la *profondità* del punto considerato, misurata a partire dalla superficie libera.



*Figura 2.1. Pressione assoluta in un fluido incompressibile in quiete, in presenza di una superficie libera.*

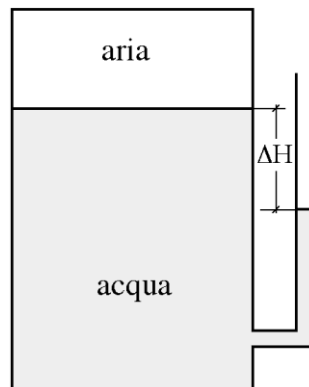
Nell'equazione (2.3), la pressione  $p$  è la *pressione assoluta*. Si definisce invece *pressione relativa* la pressione  $p_r = p - p_{\text{atm}}$ . Dalla (2.3) si ha immediatamente che la pressione relativa in un punto è direttamente proporzionale alla profondità del punto rispetto alla superficie libera (ove questa sia presente)

$$p_r = \gamma z \quad (2.4)$$

Nel seguito, salvo dove diversamente specificato, si indicherà la pressione relativa semplicemente con  $p$ , omettendo il pedice.

## 2.2 Misure piezometriche: esempi applicativi.

### Esempio 1



Un recipiente a tenuta contiene acqua ( $\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$ ) e aria. Calcolare la pressione dell'aria  $p_{\text{aria}}$  sapendo che nel piezometro semplice collegato al recipiente il menisco giace 0.12 m al di sotto della superficie aria-acqua ( $\Delta H = 0.12 \text{ m}$ ). Rappresentare inoltre l'andamento della pressione relativa all'interno del recipiente.

Nel volume d'aria contenuto nel recipiente la pressione si può considerare costante in ogni punto: il peso specifico dell'aria ( $\gamma_{\text{aria}} \cong 12 \text{ N/m}^3$ ) è infatti tale che le variazioni di pressione sono significative solo tra punti posti a quote sensibilmente diverse. In particolare, allora, nel punto A di figura vale

$$p_A = p_{\text{aria}}$$

Si consideri poi la superficie orizzontale B-B': tutti i punti che giacciono su tale superficie e appartengono all'acqua sono alla stessa pressione (B-B' è una superficie isobara) ed in particolare quindi:

$$p_B = p_{B'}$$

Applicando ora la (2.2) tra i punti A e B e osservando che il punto B' è a contatto con l'atmosfera, si può scrivere (in termini di pressioni relative)

$$p_B = p_A + \gamma \Delta H = p_{\text{aria}} + \gamma \Delta H$$

$$p_{B'} = 0$$

Vale perciò

$$p_B = p_{\text{aria}} + \gamma \Delta H = p_{B'} = 0$$

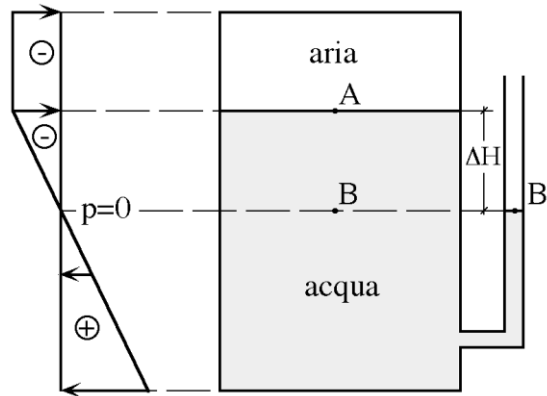
e dunque

$$p_{\text{aria}} = -\gamma \Delta H = -9806 \cdot 0,12 = -1176,72 \text{ Pa}$$

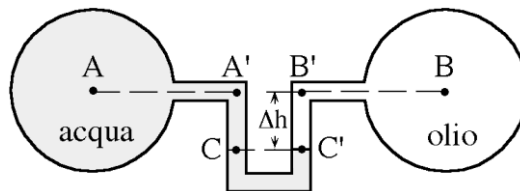
L'aria contenuta nel recipiente è cioè in *depressione* (pressione relativa negativa, ovvero pressione assoluta minore della pressione atmosferica).

Nel recipiente, la pressione varia secondo l'andamento riportato in figura: andamento costante (con  $p$  negativa) nell'aria, andamento idrostatico nell'acqua, per un generico punto della quale si può scrivere  $p = p_A + \gamma z$ ,  $z$  essendo la profondità del punto considerato rispetto al punto A. Si ha dunque  $p < 0$  da A a B (essendo  $z$  compreso tra 0 e  $\Delta H$ ),  $p = 0$  in B (dove  $z = \Delta H$ ) e  $p > 0$  da

B al fondo ( $z > \Delta H$ ).



### Esempio 2



I due recipienti sferici di figura contengono rispettivamente acqua ( $\gamma = 9806 \text{ N/m}^3$ ) e olio ( $\gamma_o = 0,6\gamma$ ). Determinare la differenza di pressione  $\Delta p = (p_B - p_A)$  tra i centri dei due recipienti, sapendo che la lettura al piezometro differenziale che li collega fornisce  $\Delta h = 0,2 \text{ m}$ .

Le superfici A-A', B-B' e C-C' sono superfici isobare; vale quindi

$$p_A = p_{A'}$$

$$p_B = p_{B'}$$

$$p_C = p_{C'}$$

Applicando la (2.2) rispettivamente tra i punti A' e C e tra i punti B' e C' si ha

$$p_C = p_A + \gamma \Delta h$$

$$p_{C'} = p_B + \gamma_o \Delta h$$

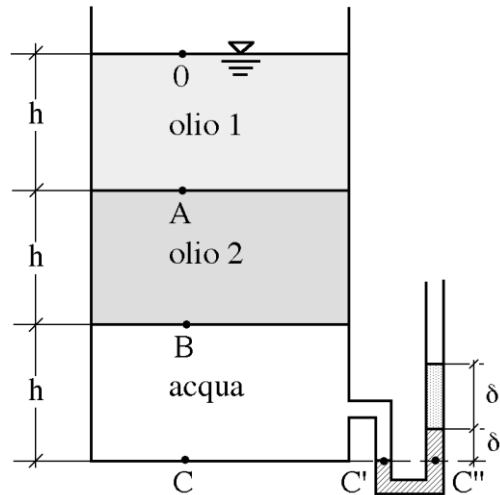
da cui subito

$$\begin{aligned} \Delta p = p_B - p_A &= (\gamma - \gamma_o) \Delta h = 0,4 \gamma \Delta h \\ &= 0,4 \cdot 9806 \cdot 0,2 = 784,48 \text{ Pa} \end{aligned}$$

*Osservazione:* la disposizione del manometro differenziale rappresentata in figura consente di misurare differenze di pressione olio-acqua positive (pressione nell'olio maggiore della pressione nell'acqua). Per misurare differenze di pressione olio-acqua negative, il piezometro deve essere 'capovolto' (configurazione ad U rovescia).

---

*Esempio 3*



Un recipiente a cielo aperto contiene tre diversi fluidi, ciascuno per il medesimo spessore  $h=30$  cm. Sapendo che il peso specifico dello strato superiore è  $\gamma_1 = 0.6\gamma$  e che il peso specifico dello strato intermedio è  $\gamma_2 = 0.8\gamma$  ( $\gamma$  essendo il peso specifico dell'acqua), determinare la pressione nei punti A, B e C di figura e tracciare l'andamento della pressione nel recipiente. Al recipiente è collegato un piezometro, che utilizza mercurio ( $\gamma_{Hg} = 13.56\gamma$ ) ed un altro fluido ausiliario di peso specifico  $\gamma_3$ . Sapendo che la lettura dei dislivelli significativi nel piezometro fornisce  $\delta = 3$  cm e  $\delta' = 6$  cm, determinare il valore di  $\gamma_3$ .

La pressione nei punti A, B e C può essere calcolata applicando 'in cascata' l'equazione (2.2), osservando che nel punto 0, appartenente ad una superficie libera, la pressione è nota. Operando in termini di pressioni relative si ha dunque

$$p_A = p_0 + \gamma_1 h = 0 + 0.6 \cdot 9806 \cdot 0.3 = 1765.08 \text{ Pa}$$

$$p_B = p_A + \gamma_2 h = 1765.08 + 0.8 \cdot 9806 \cdot 0.3 = 4118.52 \text{ Pa}$$

$$p_C = p_B + \gamma h = 4118.52 + 9806 \cdot 0.3 = 7060.32 \text{ Pa}$$

Applicando al generico punto interno a ciascuno dei tre strati l'equazione (2.2), si può facilmente vedere che la pressione relativa varia secondo le relazioni

$$\text{strato superiore} \quad p = \gamma_1 z$$

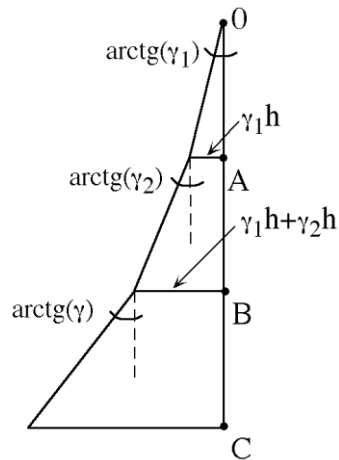
$$\text{strato intermedio} \quad p = \gamma_1 h + \gamma_2 z$$

$$\text{strato inferiore} \quad p = \gamma_1 h + \gamma_2 h + \gamma z$$

dove  $z$  è la profondità del punto misurata a partire dalla superficie di separazione con lo strato sovrastante (coincidente, per lo strato superiore, con la superficie libera).

La pressione in un generico punto risulta cioè essere pari alla somma del contributo idrostatico del fluido al quale il punto considerato appartiene e del termine rappresentativo del peso degli strati fluidi sovrastanti. Nella figura, si noti come l'inclinazione del contributo idrostatico vari al variare del peso specifico dello strato fluido.





I punti  $C$ ,  $C'$  e  $C''$  appartengono alla medesima superficie orizzontale e, a due a due, al medesimo fluido ( $C$  e  $C'$  all'acqua,  $C'$  e  $C''$  al mercurio). Vale quindi

$$p_C = p_{C'} = p_{C''}$$

Dalla lettura al piezometro si ha immediatamente

$$p_{C''} = \gamma_3 \delta' + \gamma_{Hg} \delta$$

e dunque anche

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \frac{p_{C''} - \gamma_{Hg} \delta}{\delta'} = \frac{p_C - \gamma_{Hg} \delta}{\delta'} \\ &= \frac{7060,32 - 13,56 \cdot 9806 \cdot 0,03}{0,06} = 51187,32 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

pari a  $5,22 \gamma$ .

### 2.3 Spinte idrostatiche su superfici piane: teoria generale.

Una superficie a contatto con un fluido in quiete è soggetta, in virtù dello

stato di pressione nel fluido, alla *spinta*

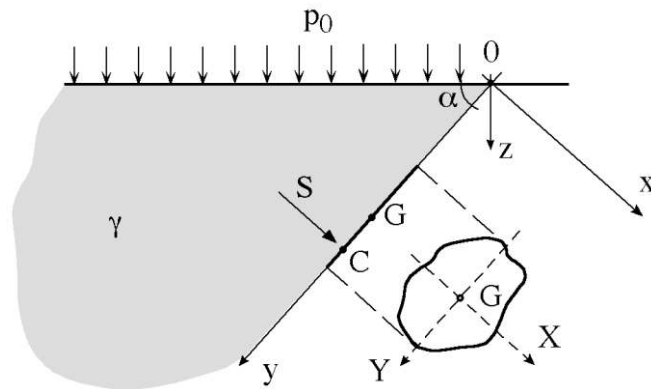
$$\vec{S} = \int_A p \cdot \vec{n} dA \quad (2.5)$$

dove  $A$  è l'area della superficie e  $p$  è lo sforzo di pressione agente sulla porzione elementare di area  $dA$  e versore normale  $\vec{n}$ . La spinta è dunque una grandezza vettoriale il cui modulo, direzione e verso dipendono in generale sia dalla distribuzione della pressione nella porzione di fluido che bagna la superficie che dalla geometria della superficie stessa.

Si consideri il caso di una superficie piana a contatto con un fluido di peso specifico  $\gamma$ , nel quale la pressione è distribuita secondo la legge

$$p = p_0 + \gamma z \quad (2.6)$$

dove  $z$  è la profondità del generico punto misurata a partire dalla superficie che delimita superiormente il campo fluido, e  $p_0$  è la pressione costante che, eventualmente, insiste su detta superficie (Figura 2.2).



*Figura 2.2. Superficie piana bagnata da un fluido pesante in quiete.<sup>2</sup>*

Il modulo di  $\vec{S}$  può essere facilmente ricavato sostituendo la distribuzione (2.6) nella definizione (2.5) e svolgendo l'integrale. Si ottiene in tal modo

$$S = p_G A = (p_0 + \gamma z_G) A \quad (2.7)$$

dove  $p_G = p_0 + \gamma z_G$  è la pressione nel baricentro  $G$  della superficie piana.

La direzione di  $\vec{S}$  coincide evidentemente con la normale alla superficie piana, mentre il verso dipende dal segno della pressione baricentrica: se  $p_G$  è positiva, la spinta è diretta dal fluido verso la superficie (il fluido cioè 'comprime' la superficie), viceversa se  $p_G$  è negativa.

L'intersezione tra la retta d'azione di  $\vec{S}$  e la superficie piana è detta *centro di spinta C*. Le coordinate del punto  $C$  rispetto agli assi  $(x,y)$  di Figura 2.2 sono date dalle

$$\begin{aligned} y_C &= y_G + \frac{\gamma I_{X\text{sen}\alpha}}{S} \\ x_C &= x_G + \frac{\gamma I_{xy\text{sen}\alpha}}{S} \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove  $I_X$  è il momento di inerzia della superficie piana rispetto all'asse  $X$  e  $I_{xy}$  è il momento centrifugo della superficie piana rispetto agli assi  $(x,y)$ .

---

<sup>2</sup> Asse  $y$ : disposto lungo la traccia della superficie piana, con origine nel punto  $O$  appartenente alla superficie da cui ha inizio il fluido.

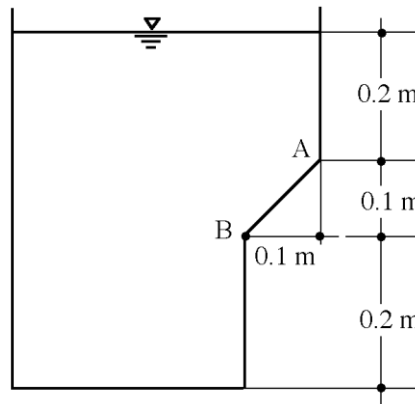
Asse  $Y$ : coincidente con l'asse  $y$ , ma con origine nel baricentro  $G$  della superficie.

Asse  $X$ : perpendicolare all'asse  $Y$ , e con origine in  $G$ .

### 2.3 Esempi applicativi.

#### Esempio 1

Il recipiente a cielo aperto di figura contiene una soluzione omogenea di acqua e cloruro di sodio di peso specifico  $\gamma=10,5 \text{ kN/m}^3$ . Sapendo che la larghezza del recipiente è pari a  $B=0,25 \text{ m}$ , determinare la spinta  $\vec{S}$  (modulo, direzione, verso e posizione) che il fluido esercita sulla superficie rettangolare di traccia  $AB$ .



La pressione nel baricentro della superficie  $AB$  è pari a

$$p_G = \gamma z_G = 10,5 \cdot (0,2 + 0,05) = 2,625 \text{ kPa}$$

essendo nulla, in presenza della superficie libera, la pressione  $p_0$ .

Dall'equazione (2.7) si ha subito per il modulo della spinta

---

Asse  $x$ : parallelo all'asse  $X$ , con origine in  $O$ .

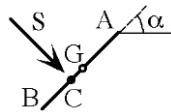
$$S = p_G (L_{AB} \cdot B) = 2,625 \cdot 0,1\sqrt{2} \cdot 0,25 = 0,0928 \text{ kN} = 92,8 \text{ N}$$

La posizione, lungo la traccia AB, del centro di spinta rispetto al baricentro può essere valutata mediante la prima delle equazioni (2.8)

$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_X \sin \alpha}{S} = \frac{10,5 \cdot 5,892 \cdot 10^{-5} \cdot 0,707}{0,0928} = 4,713 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,713 \text{ mm}$$

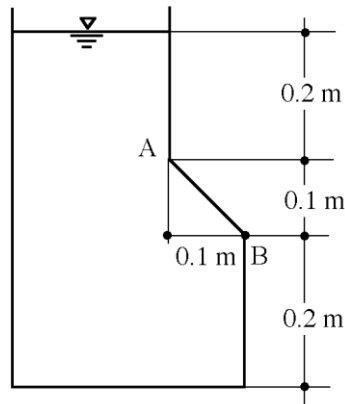
essendo  $I_X = \frac{1}{12} (0,1\sqrt{2})^3 \cdot 0,25 = 5,892 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$  il momento di inerzia della superficie e  $\alpha = 45^\circ$  l'angolo che la traccia AB forma con l'orizzontale (da cui  $\sin \alpha = 0,707$ ).

Infine, S è diretta lungo la normale alla direzione della traccia AB e, essendo positiva la pressione baricentrica, va dal fluido verso la superficie.

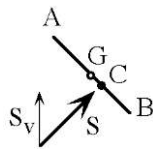


### Esempio 2

Il recipiente a cielo aperto di figura contiene una soluzione omogenea di acqua e cloruro di sodio di peso specifico  $\gamma = 10,5 \text{ kN/m}^3$ . Sapendo che la larghezza del recipiente è pari a  $B = 0,25 \text{ m}$ , determinare la spinta  $\vec{S}$  (modulo, direzione, verso e posizione) che il fluido esercita sulla superficie rettangolare di traccia AB.

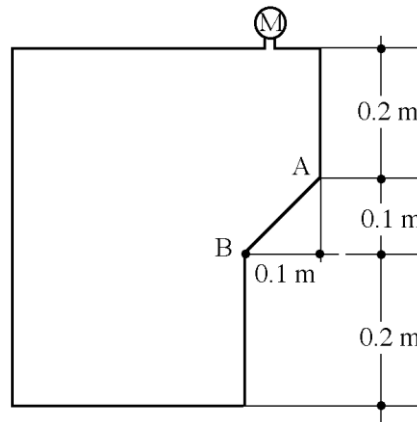


Nulla cambia rispetto al caso precedente, se non la direzione della spinta (che è normale alla superficie) e dunque il verso della sua componente verticale.



### Esempio 3

Il recipiente a tenuta di figura, di larghezza  $B=0,3$  m, contiene acqua. In corrispondenza del tetto del recipiente, un manometro fornisce  $p_M=-4$  kPa. Determinare la spinta  $\vec{S}$  (modulo, direzione, verso e posizione) che l'acqua esercita sulla superficie rettangolare di traccia AB.



La pressione nel baricentro della superficie AB è pari a

$$p_G = p_M + \gamma z_G = -4 + 9,81 \cdot (0,2 + 0,05) = -1,547 \text{ kPa}$$

Nel baricentro, dunque, la pressione risulta negativa.

Il modulo della spinta vale pertanto

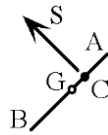
$$S = -1,547 \cdot 0,1\sqrt{2} \cdot 0,3 = -0,0656 \text{ kN} = -65,6 \text{ N}$$

dove il segno negativo indica che la spinta è 'di trazione' per la superficie AB.

La posizione del centro di spinta (si ponga attenzione al fatto che nell'equazione che segue 'S' viene presa con il suo segno) è pari a

$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_{Xs} \sin \alpha}{S} = \frac{9,81 \cdot 5,892 \cdot 10^{-5} \cdot 0,707}{-0,0656} = -6,23 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -6,23 \text{ mm}$$

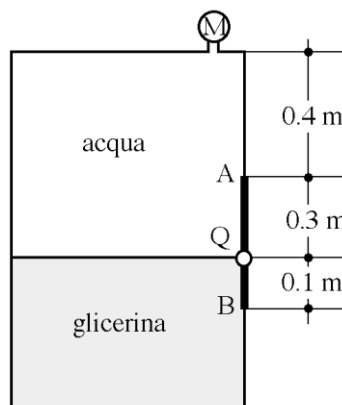
Il centro di spinta risulta cioè superiore al baricentro (si veda la figura seguente).



Infine,  $S$  è diretta lungo la normale alla direzione della traccia  $AB$  e, essendo negativa la pressione baricentrica, va dalla superficie verso il fluido.

#### Esempio 4

Il recipiente a tenuta di figura, di larghezza  $B=0,3$  m, contiene acqua (peso specifico  $\gamma$ ) e glicerina ( $\gamma_g=1,27\gamma$ ). In corrispondenza del tetto del recipiente, un manometro misura la pressione  $p_M = 10$  kPa. Su una parete verticale del recipiente è praticata un'apertura rettangolare, chiusa da una superficie piana di traccia  $AB$ . Determinare la spinta  $\bar{S}$  (modulo, direzione, verso) che i due fluidi esercitano sulla suddetta superficie. Determinare inoltre il momento esterno da applicare alla superficie  $AB$  affinché la superficie stessa, che è incernierata in  $Q$ , non sia apra.





Nel caso in esame, in cui la superficie complessiva risulta bagnata da fluidi diversi, si deve valutare separatamente la spinta idrostatica che ciascun fluido esercita sulla porzione di superficie con cui è a contatto.

### Spinta dell'acqua:

La pressione nel baricentro  $G_1$  della porzione di superficie bagnata dall'acqua è

$$p_{G_1} = p_M + \gamma z_{G_1} = 10 + 9,81 \cdot (0,4 + 0,15) = 15,395 \text{ kPa}$$

Il modulo della spinta dell'acqua vale pertanto

$$S_1 = 15,395 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 1,386 \text{ kN}$$

Il centro di spinta di  $S_1$  si trova ad una distanza da  $G_1$  pari a

$$y_{C_1} - y_{G_1} = \frac{\gamma I_X \sin \alpha}{S_1} = \frac{9,81 \cdot 6,75 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{1,386} = 4,78 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,78 \text{ mm}$$

essendo  $I_X = \frac{1}{12} 0,3^4 = 6,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$  il momento di inerzia della superficie e

$\alpha = 90^\circ$  l'angolo con l'orizzontale (da cui  $\sin \alpha = 1$ ).

Infine,  $S_1$  è diretta dall'acqua verso la superficie (data la positività della pressione baricentrica), lungo l'orizzontale (data la verticalità della

superficie).

Spinta della glicerina:

La pressione nel baricentro  $G_2$  della porzione di superficie bagnata dalla glicerina è

$$p_{G_2} = p_Q + \gamma_g z_{G_2} = (10 + 9,81 \cdot 0,7) + 1,27 \cdot 9,81 \cdot 0,05 = 17,490 \text{ kPa}$$

Si osservi che la pressione 'trasmessa' dal campo fluido superiore è  $p_Q = (p_M + \gamma(0,4 + 0,3))$  e che la profondità  $z_{G_2}$  è valutata a partire dalla superficie di separazione tra acqua e glicerina.

Il modulo della spinta dovuta alla glicerina risulta pari a

$$S_2 = 17,490 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,525 \text{ kN}$$

Il centro di spinta di  $S_2$  si trova pertanto ad una distanza da  $G_2$  pari a

$$y_{C_2} - y_{G_2} = \frac{\gamma_g I_X \sin \alpha}{S_2} = \frac{1,27 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1}{0,525} = 5,933 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,593 \text{ mm}$$

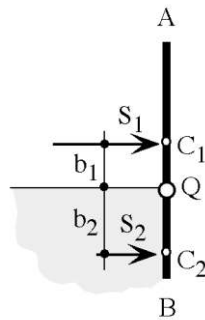
Anche  $S_2$  è diretta dal fluido verso la superficie, lungo l'orizzontale.

Spinta risultante:

La spinta  $\bar{S}$  è la somma vettoriale delle due spinte sopra calcolate. Poiché tali spinte sono entrambe dirette lungo la stessa direzione, il modulo della risultante  $S$  è pari alla somma algebrica dei moduli delle spinte componenti  $S_1$  e  $S_2$

$$S = 1,386 + 0,525 = 1,911 \text{ kN}$$

Il valore risulta, ovviamente, positivo, ad indicare che anche  $S$  è diretta dal campo fluido verso la superficie.



Le spinte  $S_1$  ed  $S_2$  producono momento rispetto alla cerniera in Q. Affinché la superficie di traccia AB non si apra, si deve dunque applicare ad essa un momento esterno il cui modulo è pari alla somma algebrica dei momenti  $M_1$  ed  $M_2$ , ed il cui verso di rotazione è opposto al verso del momento risultante. Assunto positivo il verso di rotazione orario, si ha pertanto, quale momento risultante esercitato dalle spinte idrostatiche

$$M = S_1 \cdot b_1 - S_2 \cdot b_2$$

dove  $b_1$  e  $b_2$  sono i bracci di  $S_1$  ed  $S_2$  rispettivamente, valutati rispetto alla cerniera Q. Vale pertanto

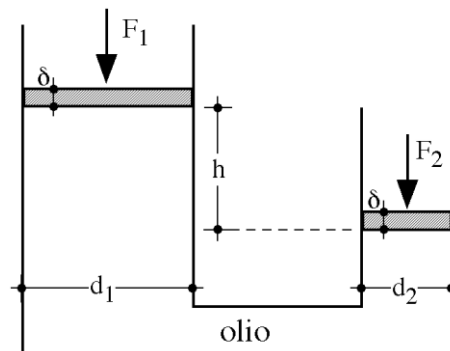
$$M = 1,386 \cdot (0,15 - 4,78 \cdot 10^{-3}) - 0,525 \cdot (0,05 + 5,933 \cdot 10^{-4}) = 0,174 \text{ kNm}$$

positivo, cioè orario.

Il momento esterno da applicare alla superficie AB affinché la stessa sia in equilibrio ha pertanto modulo pari a 0,174 kNm e verso di rotazione antiorario.

### Esempio 5

Il sistema di figura, contenente olio di peso specifico  $\gamma_o = 0,8\gamma$ , è chiuso da due pistoni a tenuta distanti tra loro  $h = 0,15 \text{ m}$ . I pistoni hanno spessore  $\delta = 0,01 \text{ m}$  e diametro rispettivamente pari a  $d_1 = 0,1 \text{ m}$  e  $d_2 = 0,05 \text{ m}$ , ed il materiale di cui sono costituiti ha peso specifico  $\gamma_m = 2,5\gamma$ . Sapendo che il pistone di sinistra è sollecitato dalla forza  $F_1 = 10 \text{ N}$ , determinare l'entità della forza  $F_2$  da applicare al pistone di destra affinché il sistema si mantenga in equilibrio.



Il pistone di sinistra è sollecitato, oltre che dalla forza esterna  $F_1$ , dal peso proprio  $G_1$  e dalla spinta  $S_1$  trasmessagli dall'olio attraverso la superficie di base.

Il pistone è in equilibrio, così come richiesto, se la somma vettoriale di tutte le suddette forze è nulla. Assumendo come positivo per la direzione verticale il verso della gravità e supponendo che  $S_1$  sia diretta verso l'alto (ma non può essere altrimenti, dato che sia  $F_1$  che  $G_1$  sono dirette verso il basso), si ha quindi la relazione (scalare) di equilibrio

$$F_1 + G_1 - S_1 = 0$$

Il peso proprio del pistone è pari a

$$G_1 = \gamma_m \delta \frac{\pi d_1^2}{4} = 2,5 \cdot 9806 \cdot 0,01 \cdot \frac{\pi 0,1^2}{4} = 1,925 \text{ N}$$

e la spinta dell'olio è data dalla

$$S_1 = p_1 \frac{\pi d_1^2}{4}$$

dove  $p_1$  è la pressione che agisce nel baricentro della superficie di base del pistone.

Si ha quindi, dalla relazione di equilibrio

$$p_1 = \frac{F_1 + G_1}{\pi d_1^2 / 4} = \frac{10 + 1,925}{0,00785} = 1518,338 \text{ Pa}$$

Nota  $p_1$ , la pressione  $p_2$  agente alla base del pistone di destra si ricava

immediatamente dalla (2.2), risultando

$$p_2 = p_1 + \gamma_o h = 1518,338 + 0,8 \cdot 9806 \cdot 0,15 = 2695,058 \text{ N}$$

La spinta che l'olio trasmette al pistone di destra è pertanto pari a

$$S_2 = p_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 2695,058 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 5,292 \text{ N}$$

Il peso proprio del pistone è pari a

$$G_2 = \gamma_m \delta \frac{\pi d_2^2}{4} = 2,5 \cdot 9806 \cdot 0,01 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 0,481 \text{ N}$$

Il pistone di destra è a sua volta in equilibrio se la somma vettoriale di  $G_2$ ,  $S_2$  e della forza incognita  $F_2$  è pari a zero. Assumendo ancora come positivo per la direzione verticale il verso della gravità e supponendo che  $F_2$  sia diretta verso il basso, si ha la relazione scalare di equilibrio

$$F_2 + G_2 - S_2 = 0$$

da cui subito

$$F_2 = S_2 - G_2 = 5,292 - 0,481 = 4,811 \text{ N}$$

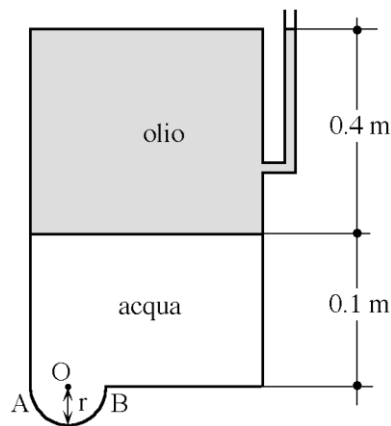
Il segno positivo ottenuto dal calcolo di  $F_2$  indica che detta forza è effettivamente diretta verso il basso, così come ipotizzato.

## 2.4 Spinte idrostatiche su superfici curve: metodo dell'equilibrio globale.

Il calcolo della spinta idrostatica (2.5) non è normalmente di semplice

svolgimento se la superficie sollecitata non è piana. La valutazione di  $\bar{S}$  per superfici curve può però essere effettuata attraverso l'applicazione di specifici metodi, tra i quali è spesso agevole il *metodo dell'equilibrio globale* (MEG). L'idea è di ridurre il calcolo della spinta su una superficie curva al calcolo di volumi di semplice configurazione geometrica ed al calcolo di spinte idrostatiche su superfici piane. Si considerino pertanto i seguenti esempi, che riguardano rispettivamente il caso in cui 'il fluido entra nella superficie curva', ovvero il caso in cui 'la superficie curva entra nel fluido'.

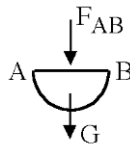
### Esempio 1



Il recipiente di figura contiene acqua ed olio ( $\gamma_o = 0,8\gamma$ ). Nel piezometro, il menisco è alla medesima quota del tetto del recipiente. Determinare la spinta (modulo, direzione, verso e posizione del centro di applicazione) che l'acqua esercita sulla superficie semisferica di traccia AB, sapendo che il suo raggio è pari a  $r = 0,04$  m.

Si immagini di isolare il volume d'acqua contenuto nella semisfera.

Tale volume è soggetto alla propria forza peso  $\vec{G}$ , alla forza  $\vec{F}_{AB}$  che gli viene trasmessa dalla superficie piana (ideale) di traccia AB ed alla forza  $\vec{F}_{\text{semisfera}}$  che gli viene trasmessa dalla superficie semisferica.



Poiché il volume "isolato" è in equilibrio, vale la relazione

$$\vec{G} + \vec{F}_{\text{semisfera}} + \vec{F}_{AB} = 0$$

Si osservi ora che la spinta  $\vec{S}$  che l'acqua trasmette alla superficie semisferica non è altro che la forza opposta alla  $\vec{F}_{\text{semisfera}}$  (forza superficie semisferica  $\rightarrow$  acqua). Si ha perciò, in base a tale osservazione ed in base all'equazione precedente,

$$\vec{S} = -\vec{F}_{\text{semisfera}} = \vec{G} + \vec{F}_{AB} \quad (2.9)$$

Quest'ultima equazione rende chiara l'idea su cui si basa il MEG: calcolare la spinta su una superficie curva (la  $\vec{S}$ ) attraverso il calcolo di volumi 'semplici' (in questo caso, il volume semisferico di peso  $\vec{G}$ ) e di spinte su superfici piane (qui, la  $\vec{F}_{AB}$ ).

Si osservi che l'equazione (2.9) è una relazione vettoriale. Il computo di  $\vec{S}$  si svolge allora a partire dalla determinazione delle sue componenti, proiettando l'equazione (2.9) lungo le direzioni della terna di riferimento.



Nel caso in esame, entrambe le forze che concorrono a comporre  $\vec{S}$  sono verticali. Tale sarà quindi, necessariamente, anche  $\vec{S}$ . In particolare, per il peso si ha

$$G = \gamma \frac{2}{3} \pi r^3 = 9806 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 0,04^3 = 1,314 \text{ N} \quad \text{verticale, diretta verso il basso}$$

(↓).

Per la spinta trasmessa attraverso la superficie piana AB, applicando la teoria generale,

$$F_{AB} = p_{AB} A_{AB}$$

nella quale  $A_{AB}$  e  $p_{AB}$  sono rispettivamente l'area della superficie piana (che risulta essere un cerchio) e la pressione agente nel baricentro di detta superficie. Dai dati del problema, si ha subito

$$p_{AB} = \gamma_o \cdot 0,4 + \gamma \cdot 0,1 = 9806 \cdot (0,8 \cdot 0,4 + 0,1) = 4118,52 \text{ Pa}$$

e dunque

$$S_{AB} = 4118,52 \cdot \pi \cdot 0,04^2 = 20,702 \text{ N} \quad \text{che, essendo } p_{AB} \text{ positiva, risulta}$$

diretta verso il basso (↓).

Si ha pertanto, assunto come positivo per la verticale y il verso della gravità

$$S_y = S = 1,314 + 20,702 = 22,016 \text{ N} \quad \text{positiva, cioè concorde al verso}$$

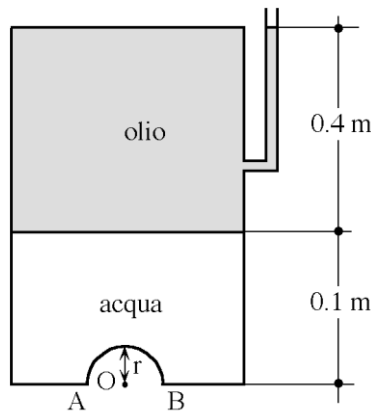
assunto come positivo per y (↓).

Per quanto riguarda il punto di applicazione, si osservi che *la spinta idrostatica esercitata su una superficie a curvatura costante ha sempre retta d'azione passante per il centro di curvatura*. Nel caso esaminato, pertanto,  $\vec{S}$  passa certamente per il centro  $O$  della sfera.

---

### Esempio 2

Il recipiente di figura contiene acqua ed olio ( $\gamma_o = 0,8\gamma$ ). Nel piezometro, il menisco è alla medesima quota del tetto del recipiente. Determinare la spinta (modulo, direzione, verso e posizione del centro di applicazione) che l'acqua esercita sulla superficie semisferica di traccia  $AB$ , sapendo che il suo raggio è pari a  $r = 0,04$  m.



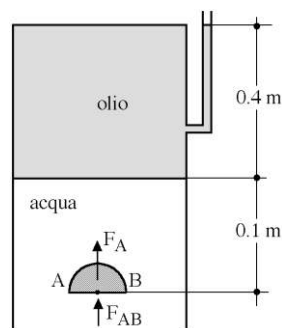
E' opportuno, prima di esprimere la formulazione del MEG che si adotta quando la curvatura della superficie è tale per cui è la superficie stessa 'ad

entrare' nel fluido (come nel caso in esame), introdurre il *Principio di Archimede*. Detto principio afferma che un corpo di volume  $\forall$  completamente immerso in un fluido incompressibile di peso specifico  $\gamma$  in condizioni di quiete riceve dal fluido la spinta

$$\vec{F}_A = \int_A p \cdot \vec{n} dA = \gamma \forall \vec{j} \quad (2.10)$$

nella quale  $\vec{j}$  è il versore della verticale, diretto verso l'alto. La *spinta di Archimede*, espressa dall'equazione (2.10), è cioè una forza verticale diretta verso l'alto, pari al peso fluido del volume del corpo.

Si immagini ora, con riferimento all'esercizio proposto, che nel recipiente sia immerso il corpo senza peso racchiuso dalla superficie semisferica<sup>3</sup> e dalla superficie piana di traccia AB, secondo quanto rappresentato nella figura seguente.



La spinta che l'acqua trasmette al corpo, data dall'equazione (2.10), può

---

<sup>3</sup> La superficie semisferica che costituisce parte della superficie del corpo considerato è la medesima superficie proposta dall'esercizio. Poiché non se ne altera la geometria (forma e dimensione) né la collocazione all'interno del recipiente (quindi, si mantiene inalterato lo stato di pressione cui è soggetta) è la medesima anche la spinta che l'acqua le trasmette.

essere scomposta nella spinta  $\vec{S}$  trasmessa dall'acqua attraverso la superficie semisferica (la spinta incognita, dunque, richiesta dall'esercizio) e nella spinta  $\vec{F}_{AB}$  trasmessa attraverso la superficie piana. Si può cioè scrivere

$$\int_A p \cdot \vec{n} dA = \int_{A_{\text{semisfera}}} p \cdot \vec{n} dA + \int_{A_{AB}} p \cdot \vec{n} dA = \vec{S} + \vec{F}_{AB} = \vec{F}_A$$

avendo indicato con  $A_{\text{semisfera}}$  e con  $A_{AB}$  l'area della superficie semisferica e l'area della superficie piana, rispettivamente.

Si ha perciò, in base all'equazione precedente

$$\vec{S} = \vec{F}_A - \vec{F}_{AB} \quad (2.11)$$

Nel caso in esame, entrambe le forze che concorrono a comporre  $\vec{S}$  sono verticali. Tale sarà quindi, necessariamente, anche  $\vec{S}$ . In particolare, per la spinta di Archimede si ha

$$F_A = \gamma \frac{2}{3} \pi r^3 = 9806 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 0,04^3 = 1,314 \text{ N verticale, diretta verso l'alto } (\uparrow).$$

Per la spinta trasmessa attraverso la superficie piana AB, applicando la teoria generale,

$$F_{AB} = p_{AB} A_{AB}$$

nella quale  $A_{AB}$  e  $p_{AB}$  sono rispettivamente l'area della superficie piana (che risulta essere un cerchio) e la pressione agente nel baricentro di detta superficie. Dai dati del problema, si ha subito

$$p_{AB} = \gamma_o \cdot 0,4 + \gamma \cdot 0,1 = 9806 \cdot (0,8 \cdot 0,4 + 0,1) = 4118,52 \text{ Pa}$$

e dunque

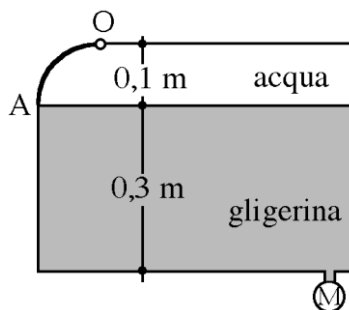
$$S_{AB} = 4118,52 \cdot \pi \cdot 0,04^2 = 20,702 \text{ N} \quad \text{che, essendo } p_{AB} \text{ positiva, cioè diretta dal fluido verso la superficie, risulta diretta verso l'alto } (\uparrow).$$

Si ha pertanto, assunto come positivo per la verticale  $y$  il verso opposto a quello della gravità

$$S_y = S = 1,314 - 20,702 = -19,388 \text{ N} \quad \text{negativa, cioè discorde rispetto al verso assunto come positivo per } y (\downarrow).$$

Per quanto riguarda il punto di applicazione, in base all'osservazione riportata nell'esercizio precedente,  $\bar{S}$  passa certamente per il centro  $O$  della sfera.

### Esempio 3



Determinare la spinta agente sulla valvola cilindrica di traccia AO di figura,

larga  $b=0,2$  m, sapendo che la pressione letta al manometro è pari a  $p_M=1000$  Pa. Determinare inoltre il modulo e il verso della forza orizzontale da applicare alla valvola nel punto A affinché la valvola stessa, che è incernierata in A, non si apra.

Si isoli il volume d'acqua racchiuso dalla superficie della valvola e dalla superficie piana di traccia AO che, data la geometria del sistema, risulta essere un rettangolo di lati  $\overline{AO}=0,1\sqrt{2}=0,141$  m e  $b=0,2$  m.

Con riferimento alla (2.9) si ha

$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{F}_{AO}$$

Il peso del volume isolato, indicando con  $r=0,1$  m il raggio della valvola, vale

$$G = \gamma \left( \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \right) = 9806 \left( \frac{\pi 0,1^2}{4} - \frac{0,1^2}{2} \right) = 27,947 \text{ N} \quad \text{verticale, diretta}$$

verso il basso ( $\downarrow$ ).

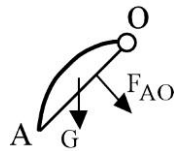
Il calcolo della spinta trasmessa al volume isolato attraverso la superficie piana richiede la determinazione della pressione agente nel baricentro della superficie stessa. Dai dati del problema si ha

$$p_G = p_M - \gamma_g \cdot 0,3 - \gamma \cdot \frac{0,1}{2} = 1000 - 9806 \cdot (1,27 \cdot 0,3 + 0,05) = -3226,39 \text{ Pa}$$

La spinta  $\vec{F}_{AO}$  vale dunque

$F_{AO} = p_G A_{AO} = -3226,39 \cdot 0,141 \cdot 0,2 = -90,984 \text{ N}$  dove il segno negativo, che deriva dal segno della pressione baricentrica, indica che la spinta è diretta dalla superficie verso il fluido interno al recipiente. Detta spinta inoltre, che per definizione è normale alla superficie piana, è inclinata di  $45^\circ$ .

Graficamente si ha perciò:



Proiettando l'equazione del MEG lungo l'orizzontale  $x$  (assunta positiva verso destra,  $\rightarrow$ ) e lungo la verticale  $y$  (assunta positiva verso il basso,  $\downarrow$ ) si ha quindi per le componenti di  $\vec{S}$ <sup>4</sup>

$$S_x = F_{AO} \cos 45^\circ = 90,984 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 64,335 \text{ N} \quad \text{positiva, quindi concorde con il verso assunto positivo per } x (\rightarrow)$$

$$S_y = G + F_{AO} \sin 45^\circ = 27,947 + 90,984 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 92,282 \text{ N} \quad \text{positiva, quindi concorde al verso assunto positivo per } y (\downarrow).$$

Il modulo di  $\vec{S}$  è pari a

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{64,335^2 + 92,282^2} = 112,494 \text{ N}$$

---

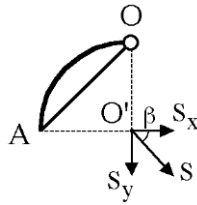
<sup>4</sup> La spinta  $\vec{S}$  è la somma vettoriale delle forze di figura. Nello scrivere le relazioni scalari per il computo delle componenti della spinta, si deve considerare il valore assoluto del modulo delle forze ed assegnare il segno ai diversi contributi in relazione ai versi assunti positivi per  $x$  e per  $y$ .

La sua direzione, definita come l'angolo  $\beta$  che la retta d'azione forma con l'orizzontale, è pari a

$$\beta = \arctan \frac{S_y}{S_x} = 55,12^\circ$$

mentre il verso si individua dalla composizione grafica di  $S_x$  e  $S_y$ .

La retta d'azione di  $\vec{S}$ , infine, passa certamente per il punto  $O'$ , centro di curvatura della superficie (a curvatura costante) della valvola.



La seconda parte dell'esercizio richiede, per la sua risoluzione, l'imposizione della condizione di equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera  $O$ . Devono cioè essere uguali ed opposti il momento esercitato da  $\vec{S}$  ed il momento esercitato dalla forza  $\vec{F}$  da applicare in  $A$ .

Per la determinazione del momento esercitato da  $\vec{S}$  rispetto al polo  $O$ , la spinta può pensarsi applicata in un qualsiasi punto della sua retta d'azione. Considerandola, in particolare, applicata in  $O'$ , e scomponendola in  $S_x$  e  $S_y$  si osserva facilmente che  $S_y$  dà momento nullo, dato che la sua retta d'azione passa per il polo. La forza  $\vec{F}$ , quindi, deve avere modulo pari al modulo di  $S_x$ , e verso opposto

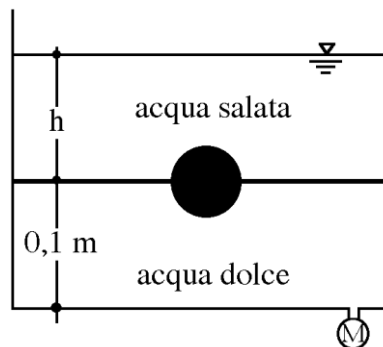


$F=64,335 \text{ N}$       diretta verso destra ( $\rightarrow$ ).

---

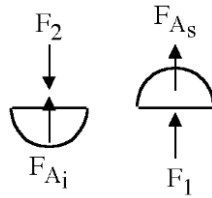
#### Esempio 4

Il recipiente di figura è diviso in due vani, completamente separati grazie ad un setto rigido orizzontale. Nel setto è praticato un foro circolare, chiuso da una valvola sferica di raggio  $r=0,05 \text{ m}$ . Sapendo che la pressione letta al manometro è pari a  $p_M=1500 \text{ Pa}$  e che l'acqua salata ha peso specifico  $\gamma_s=1,03\gamma$ , determinare il valore del livello  $h$  necessario perché la valvola si mantenga in posizione.



E' immediato osservare che le forze che sollecitano la valvola (spinte idrostatiche trasmesse dai due fluidi alla semisfera superiore ed inferiore rispettivamente) sono verticali, e passanti per il centro della sfera. La valvola si mantiene dunque in posizione quando la spinta sulla semisfera superiore e la spinta sulla semisfera inferiore sono uguali in modulo ed opposte in verso.

Per entrambe le porzioni della valvola, la spinta si determina a partire dall'imposizione della relazione del MEG nella formulazione proposta per il caso di 'superficie che entra nel fluido' (equazione (2.11)).



Per la semisfera superiore, a contatto con l'acqua salata, detta  $\vec{F}_1$  la spinta sulla superficie piana (cerchio mediano) che chiude la semisfera, la spinta idrostatica è data dalla

$$\vec{S}_s = \vec{F}_{A_s} - \vec{F}_1$$

essendo

$$F_{A_s} = \gamma_s \frac{2}{3} \pi r^3 = 1,03 \cdot 9806 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 0,05^3 = 2,643 \text{ N} \quad (\text{spinta archimedeica, } \uparrow)$$

$$F_1 = p_1 \pi r^2 = \gamma_s h \pi r^2 = 1,03 \cdot 9806 \cdot h \cdot \pi \cdot 0,05^2 = 79,286 \cdot h \text{ N} \quad (\text{certamente } \uparrow, \text{ data la positività di } h).$$

Vale perciò, assunto come positivo per la verticale y il verso  $\uparrow$

$$S_s = S_{sy} = 2,643 - 79,286 \cdot h \text{ N}$$

Per la semisfera inferiore, a contatto con l'acqua dolce, detta  $\vec{F}_2$  la spinta sulla superficie piana (cerchio mediano) che chiude la semisfera, la spinta

idrostatica è data dalla

$$\vec{S}_i = \vec{F}_{A_i} - \vec{F}_2$$

essendo

$$F_{A_i} = \gamma \frac{2}{3} \pi r^3 = 9806 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 0,05^3 = 2,566 \text{ N} \quad (\text{spinta archimedeica, } \uparrow)$$

$$F_2 = p_2 \pi r^2 = (p_M - \gamma \cdot 0,1) \pi r^2 = (1500 - 9806 \cdot 0,1) \cdot \pi \cdot 0,05^2 = 4,077 \text{ N} \quad (\text{positiva, data la positività della pressione baricentrica } p_2, \text{ quindi } \downarrow).$$

Vale perciò, assunto come positivo per la verticale y il verso  $\uparrow$

$$S_i = S_{iy} = 2,566 - (-4,077) = 6,643 \text{ N} \quad (\text{positiva, quindi } \uparrow).$$

La sfera si mantiene in posizione se

$$S_i = -S_s \quad \text{cioè per } 6,643 = -(2,643 - 79,286 \cdot h)$$

da cui, per il livello cercato,

$$h = 0,117 \text{ m}$$

### 3. ELEMENTI DI CINEMATICA

#### 3.1 Velocità e accelerazione.

Caratterizzare cinematicamente un fluido in movimento equivale a determinare, in tutti i punti del campo di moto e per ogni istante, il vettore *velocità*  $\vec{v}$  (metodo di indagine cosiddetto *euleriano*). La velocità, in generale, dipende sia dal tempo che dalla posizione del punto considerato, sicché per le sue componenti valgono relazioni del tipo

$$\begin{aligned}v_x &= v_x(x, y, z, t) \\v_y &= v_y(x, y, z, t) \\v_z &= v_z(x, y, z, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

nelle quali  $(x, y, z)$  sono le coordinate del generico punto in un sistema di riferimento cartesiano e  $t$  è il tempo.

Se nelle (3.1) non compare la variabile  $t$ , cioè se la velocità è costante nel tempo, il moto si dice *permanente*, viceversa il moto si dice *vario*.

La variazione totale della velocità nel tempo definisce il vettore *accelerazione*

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\tag{3.2}$$

Tenuto conto, in base alle (3.1), che in generale la velocità dipende dal tempo non solo esplicitamente ma anche 'attraverso lo spazio' (una stessa particella, infatti, ad istanti diversi si trova in posizioni diverse), per l'accelerazione si può scrivere

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.3)$$

cioè anche, osservando che per definizione vale  $v_x = dx/dt$   $v_y = dy/dt$   $v_z = dz/dt$ ,

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z \quad (3.4)$$

Alcune osservazioni emergono dalla relazione precedente:

- l'accelerazione discende sia da variazioni locali della velocità nel tempo (accelerazione locale o temporale,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ ), che da variazioni spaziali della velocità (accelerazione spaziale o convettiva,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z = \vec{v} \nabla \vec{v}$ );
- un fluido in movimento può subire accelerazione non nulla anche quando la velocità è costante nel tempo.

### 3.2 Linee di corrente, traiettorie, tubo di flusso, corrente, tronco di corrente.

Si introducono di seguito alcune definizioni significative.

- *Linea di corrente*: è una linea che, ad un dato istante, è in ogni suo punto tangente al vettore velocità nel punto stesso. In un campo fluido in movimento esistono  $\infty^2$  linee di corrente il cui andamento cambia, in generale, al cambiare del tempo. Se il moto è permanente, anche l'andamento delle linee di corrente è invariabile nel tempo. In questo caso, le linee di corrente coincidono con le *traiettorie* (una traiettoria è l'insieme dei punti che vengono attraversati nel tempo da una data particella fluida in movimento).
- Si definisce *tubo di flusso* la porzione di fluido delimitata da una superficie (ideale) costituita dall'insieme delle linee di corrente che, ad un dato istante, si appoggiano ad una linea chiusa (che non sia, a sua volta, linea di corrente). Detta superficie non è, evidentemente, attraversata da flusso di corrente.
- Un moto nel quale si possa individuare una direzione prevalente, non necessariamente rettilinea, costituisce una *corrente*. La direzione del moto viene usualmente indicata con  $s$  (coordinata curvilinea). Una porzione di corrente delimitata da una superficie non attraversata da flusso e da due sezioni trasversali (normali, cioè, alla direzione  $s$ ) rispettivamente 'a monte' e 'a valle' è detta *tronco di corrente*. Un tipico esempio di corrente è il moto entro un condotto, sia esso rigido o deformabile, e una porzione di condotto rappresenta un tronco di corrente. In un moto permanente, un tubo di flusso è anche tronco di corrente.

- Una corrente permanente in cui la velocità è indipendente da  $s$  si dice *uniforme*.

### 3.3 Portata, equazione di continuità, velocità media.

Si consideri una superficie finita  $A$  appartenente ad un fluido in moto e, in essa, una superficie  $dA$  sufficientemente piccola da poter essere confusa con un punto. Sia  $\vec{v}$  il vettore velocità nel punto, e  $v_n$  la componente di  $\vec{v}$  normale a  $dA$ . La quantità

$$Q = \int_A v_n dA \quad (3.5)$$

è detta *portata*. Essa rappresenta il volume di fluido che nell'unità di tempo attraversa la superficie  $A$ .

Indicando con  $A$ , in particolare, la sezione trasversale di un tronco di corrente, in ogni punto della quale, per definizione, è  $v=v_n$ , si ha  $Q = \int_A v dA$ . Si definisce *velocità media* nella sezione trasversale  $A$  la grandezza

$$V = \frac{Q}{A} \quad (3.6)$$

L'applicazione del principio di conservazione della massa ad un tronco di corrente fornisce una delle equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi, detta *equazione di continuità*. Essa afferma che la differenza tra

la massa entrante e la massa uscente nel tronco di corrente in un dato intervallo di tempo è pari alla massa 'aggiunta' (ovvero 'sottratta') in detto intervallo di tempo alla massa inizialmente contenuta nel tronco di corrente stesso. La formulazione analitica generale dell'equazione di continuità per un tronco di corrente è

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0 \quad (3.7)$$

E' immediato dimostrare che l'equazione (3.7) assume le seguenti formulazioni, in funzione delle diverse ipotesi che si assumono per il campo di moto:

- in una corrente di fluido incompressibile in moto permanente (ovvero in moto vario purché entro un contorno indeformabile, cosicché la generica sezione trasversale si mantiene invariabile nel tempo) **la portata si mantiene costante lungo la direzione del moto**. Tale condizione è da intendersi valida, nel moto vario, ad un generico istante.

Discende subito la seguente considerazione fondamentale: se  $A_1$  ed  $A_2$  sono due sezioni trasversali del tronco di corrente, in generale di diversa dimensione, e  $V_1$  e  $V_2$  sono le velocità medie nelle due suddette sezioni, si ha

$$Q = \text{cost} = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (3.8)$$

L'equazione (3.8) mostra che, nelle ipotesi di lavoro sottolineate, in un condotto di sezione via via crescente la velocità va diminuendo (e



viceversa).

- Se il fluido è comprimibile e il moto è permanente, è la *portata di massa*  $\rho Q$  che si mantiene costante lungo  $s$ .
- In un tronco di corrente di fluido incompressibile in moto vario entro un contorno deformabile la differenza tra la portata entrante e la portata uscente dal tronco di corrente ad un dato istante è pari alla variazione istantanea del volume contenuto nel tronco. Un caso particolare è quello in cui la corrente alimenta un recipiente a superficie libera (che contiene, cioè, un fluido la cui superficie superiore è a contatto con l'atmosfera), nel quale il volume fluido contenuto può variare solo per effetto di uno spostamento della superficie libera stessa (si veda lo schema dell'esempio 5). In questo caso si ha che, detta  $h$  la quota della superficie libera al generico istante ed  $\Omega$  la sezione trasversale del recipiente, supposto cilindrico,

$$Q_e - Q_u = \Omega \frac{dh}{dt} \quad (3.9)$$

dove  $Q_e$  e  $Q_u$  sono rispettivamente la portata entrante ed uscente dal recipiente. L'equazione (3.9) è detta *equazione di continuità per un serbatoio*.

E' importante ricordare anche la cosiddetta *equazione di continuità in un nodo*. Si definisce nodo l'intersezione di tre o più correnti (come si può avere, ad esempio, quando un condotto si dirama). In questo caso, se il fluido è incompressibile e il moto è permanente (ovvero se il moto è vario

ed il contorno è indeformabile) , la somma delle  $N_e$  portate entranti del nodo è pari alla somma delle  $N_u$  portate uscenti dal nodo

$$\sum_{i=1}^{N_e} Q_{ei} = \sum_{i=1}^{N_u} Q_{ui} \quad (3.10)$$

### 3.4 Esempi applicativi.

#### *Esempio 1*

La portata  $Q=0,5$  l/s fluisce in un condotto circolare di diametro  $d=1,5$  cm, occupandone l'intera sezione. Determinare la velocità media  $V$  della corrente nel condotto.

Il moto in pressione entro un condotto costituisce un tipico esempio di corrente.

La sezione trasversale della corrente coincide con la sezione circolare del condotto. Vale dunque

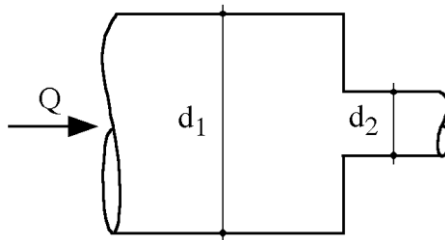
$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.015^2}{4} = 1,77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Dall'equazione (3.6) si ha perciò per la velocità media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{1,77 \cdot 10^{-4}} = 2,829 \text{ m/s}$$

*Esempio 2*

Un condotto circolare presenta, in un tratto iniziale, diametro  $d_1=2$  cm e, in un tratto successivo, diametro  $d_2=1$  cm. Sapendo che la corrente nel tratto di monte ha velocità media  $V_1= 1,6$  m/s, determinare la portata fluente nel tratto stesso. Sapendo inoltre che il fluido nel condotto è incompressibile e che il moto è permanente, determinare la portata fluente nel tratto di valle e la velocità media della corrente in detto tratto.



La portata fluente nel tratto di monte si determina a partire dalla definizione di velocità media (equazione (3.6)). Si ha pertanto

$$Q = V_1 \cdot A_1 = 1,6 \frac{\pi \cdot 0,02^2}{4} = 0,0005026 \text{ m}^3/\text{s} = 5,026 \cdot 10^{-1} \text{ l/s}$$

Poiché il fluido è incompressibile e il moto è permanente, per l'equazione di continuità la portata  $Q$  fluente nel tratto di monte fluisce anche nel tratto di valle. In altre parole, lungo il condotto si ha portata costante.

La velocità media nel tratto di valle può quindi essere immediatamente valutata dalla (3.6) ovvero dall'equazione di continuità nella forma (3.8),

che porge

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = (\text{per sezioni circolari}) = V_1 \cdot \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 1,6 \cdot \left( \frac{0,02}{0,01} \right)^2 = 6,4 \text{ m/s}$$


---

### Esempio 3

In un condotto circolare di diametro  $d=2$  mm fluisce  $Q=0,02$  l/s. Quale diametro  $d'$  si deve assegnare ad un diverso condotto affinché vi fluisca una portata  $Q'=1,5 \cdot Q$ , mantenendo invariata la velocità media della corrente?

Dalla definizione (3.6) si ha che, affinché nei due condotti sia abbia la stessa velocità media, deve essere

$$\frac{Q}{A} = V = \frac{Q'}{A'}$$

Si ha perciò, per l'area e per il diametro

$$\frac{A'}{A} = \frac{Q'}{Q}$$

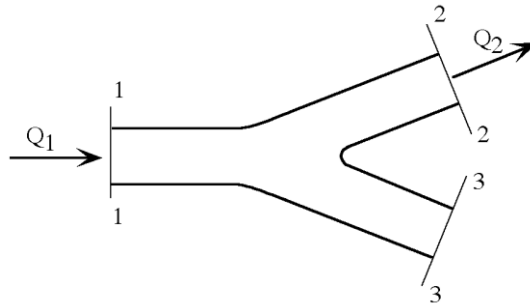
$$\frac{d'}{d} = \sqrt{\frac{Q'}{Q}} = \sqrt{1,5} = 1,225$$

da cui  $d'=1,225d=2,45 \text{ mm}$ .

---

#### Esempio 4

Nel nodo 1-2-3 di figura, attraverso la sezione 1 entra la portata  $Q_1=0,1 \text{ l/s}$  ed attraverso la sezione 2 esce la portata  $Q_2=0,04 \text{ l/s}$ . Sapendo che il fluido è incompressibile e che il nodo è costituito da materiale infinitamente rigido, determinare il valore ed il verso della portata fluente attraverso la sezione 3.



Date le ipotesi di fluido incompressibile e di 'recipiente' indeformabile, al nodo si applica l'equazione di continuità nella forma (3.10). Assumendo che la portata  $Q_3$  sia uscente dal nodo si ha dunque

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

da cui, per la portata attraverso la sezione 3,

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0,1 - 0,04 = 0,06 \text{ l/s}$$

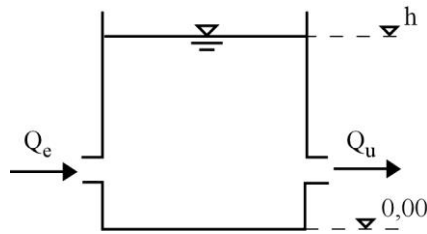
Il fatto che dall'equazione precedente la  $Q_3$  calcolata risulti positiva,

indica che il verso ipotizzato per la  $Q_3$  stessa è corretto ( $Q_3$  uscente dal nodo).

---

### Esempio 5

Nel recipiente di figura, a pareti rigide e di sezione  $\Omega = 1 \text{ m}^2$ , entra la portata  $Q_e = 0,5 \text{ l/s}$  ed esce la portata  $Q_u = 0,3 \text{ l/s}$ . Sapendo che il fluido è incomprimibile e che all'istante  $t = 0 \text{ s}$  la superficie libera è alla quota  $h_0 = 0,1 \text{ m}$ , determinare il tempo necessario affinché il livello nel recipiente si porti alla quota  $h_1 = 0,18 \text{ m}$ .



Il problema si risolve attraverso l'equazione di continuità dei serbatoi (equazione (3.9)). In particolare, nel caso in esame la differenza tra la portata entrante e la portata uscente dal recipiente risulta essere costante nel tempo. Dalla continuità si ha quindi, per la velocità con cui si sposta il livello nel serbatoio

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_e - Q_u}{\Omega} = k = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Integrando l'equazione precedente tra l'istante  $t=0$  (con livello a quota  $h=h_0$ ) e l'istante  $t$  generico (con livello a quota  $h$ ) si ottiene, per l'andamento del livello nel tempo

$$h = h_0 + k \cdot t$$

La quota della superficie libera, cioè, aumenta (linearmente) nel tempo, come già intuibile semplicemente osservando che la portata in ingresso nel serbatoio è maggiore della portata in uscita. Si ha, in particolare, che la quota  $h_1=0,18$  m viene raggiunta all'istante

$$t_1 = \frac{h_1 - h_0}{k} = \frac{0,18 - 0,1}{2 \cdot 10^{-4}} = 400 \text{ s}$$

## 4. ELEMENTI DI DINAMICA DEI FLUIDI REALI

### 4.1 Equazioni di Navier-Stokes. Numero di Reynolds. Moto laminare e moto turbolento.

Il moto di un fluido pesante incompressibile con risposta reologica newtoniana è retto dalle *equazioni di Navier-Stokes*, che in forma vettoriale si scrivono

$$\nabla p + \gamma \nabla h = -\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (4.1)$$

In questa sede, pur omettendo l'esposizione del procedimento teorico che porta alla scrittura dell'equazione (4.1), risulta utile commentare il significato fisico dei diversi termini che compaiono nell'equazione stessa.

E' opportuno mettere in evidenza che l'equazione di Navier-Stokes esprime la condizione di equilibrio del fluido in movimento, secondo la quale l'insieme di tutte le forze che ad un dato istante agiscono su di un volume elementare di fluido deve essere nullo. Ciascun termine della (4.1) rappresenta una forza. In particolare

- $\nabla p$  rappresenta il contributo delle forze di pressione;<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Si ricorda che il simbolo  $\nabla$  indica l'operatore 'gradiente'. Il gradiente di uno scalare è un vettore le cui componenti sono pari alle derivate parziali dello scalare rispetto alle direzioni di una terna cartesiana di riferimento. Ad esempio:  $\nabla p \equiv (\partial p / \partial x, \partial p / \partial y, \partial p / \partial z)$ . Il simbolo



- $\gamma \nabla h$  rappresenta il contributo della forza peso;
- $-\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$  rappresenta il contributo della forza di inerzia;
- $\mu \nabla^2 \vec{v}$  rappresenta il contributo delle forze di attrito viscoso.

Le caratteristiche di un campo di moto governato dall'equazione (4.1) risultano influenzate in maniera cruciale dal rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscoso. Detto rapporto, denominato *numero di Reynolds*, è in generale espresso dalla relazione

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} = \frac{U_0 L}{\nu} \quad (4.2)$$

nella quale  $U_0$  e  $L$  rappresentano rispettivamente la velocità e la dimensione lineare caratteristiche del campo di moto considerato e  $\rho$ ,  $\mu$  e  $\nu$  sono la densità, la viscosità dinamica e la viscosità cinematica del fluido. Nel caso di moto all'interno di un condotto circolare, in particolare, si assume  $U_0 = V$  (velocità media) e  $L = d$  (diametro del condotto).

Il ruolo fondamentale svolto dal rapporto tra le forze di inerzia e le forze viscoso è stato messo in evidenza per la prima volta nel XIX secolo da O. Reynolds in un celebre esperimento, teso alla visualizzazione delle caratteristiche del moto dell'acqua all'interno di un condotto circolare di diametro costante nel quale viene immesso, quale tracciante, un filamento

---

$\nabla^2$  indica l'operatore di Laplace. L'operatore di Laplace applicato ad un vettore è un vettore, la cui  $i$ -esima componente ( $i=x,y,z$ ) è pari alla somma delle derivate parziali del secondo ordine della  $i$ -esima componente del vettore rispetto alle direzioni di una terna cartesiana di riferimento.

d'acqua colorata. Si deve innanzi tutto considerare che se il moto si svolgesse in un sistema perfettamente isolato dall'esterno, cioè in assenza di perturbazioni delle sue grandezze caratteristiche (pressione, velocità, densità), il campo di moto presenterebbe indefinitamente (nel tempo e nello spazio) un carattere ordinato. Il filamento colorato, in particolare, si manterrebbe comunque ben delineato e compatto, e parallelo all'asse del condotto. In realtà, l'ambiente esterno trasferisce al campo di moto fluido disturbi che, anche quando estremamente piccoli, tendono ad alterare la regolarità del campo di moto stesso. L'alterazione è resa evidente, nell'esperienza di Reynolds, dalla deformazione del filamento colorato. Tuttavia, quando nel sistema fluido le forze viscosive sono sufficientemente elevate rispetto alle forze di inerzia (quando, cioè, il numero di Reynolds assume valori sufficientemente modesti) gli effetti dissipativi della viscosità riescono a smorzare i disturbi, e a mantenere il carattere ordinato del moto. Viceversa, quando sono preponderanti le forze di inerzia (quando, cioè, il numero di Reynolds assume valori sufficientemente elevati) i disturbi crescono in ampiezza sino a produrre nel campo la formazione di un insieme di infiniti piccoli vortici in condizioni di estremo 'disordine'. In questa circostanza, il filamento colorato dell'esperimento di Reynolds non risulta più distinguibile dal resto del campo di moto, poiché il tracciante viene 'trasportato e disperso' dalle strutture vorticosse.

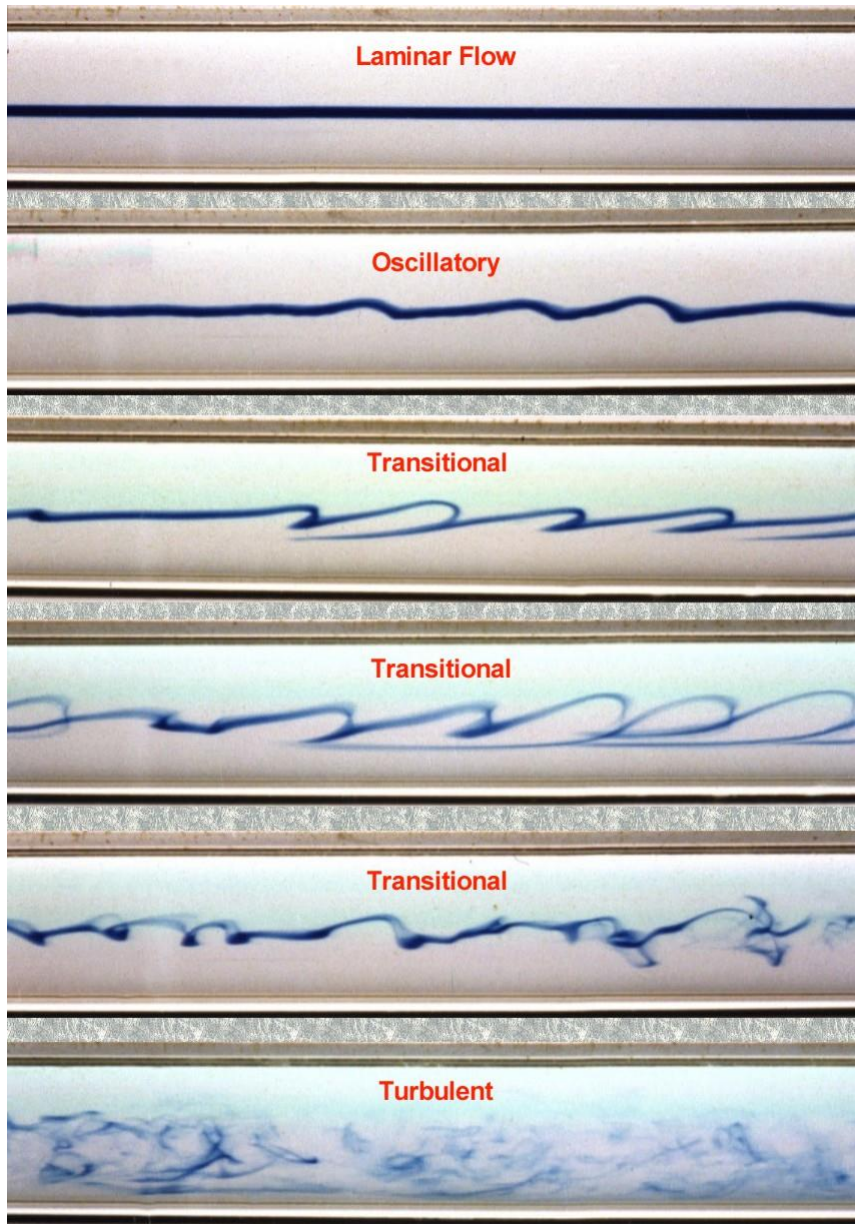


Figura 4.1. Esperienza di Reynolds (tratto da: Kamran Mohseni, Dep. of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado - Boulder).

In sintesi, si può affermare che per un moto fluido governato dall'equazione (4.1) esistono due diversi possibili regimi dinamici, in funzione

dell'entità del rapporto tra forze inerziali e forze viscosi:

- regime di moto laminare, in cui, essendo  $Re$  sufficientemente modesto, sono preponderanti le forze viscosi ed il moto si presenta regolare ed ordinato;
- regime di moto turbolento, in cui, essendo  $Re$  sufficientemente elevato, sono preponderanti le forze inerziali ed il moto si presenta estremamente disordinato.

Per il moto uniforme all'interno di un condotto circolare, numerose indagini hanno permesso di stabilire che il regime laminare si produce e si mantiene quanto  $Re < 2000 \div 2500$ , mentre il regime turbolento corrisponde a  $Re > 4000$  circa. Per valori intermedi del numero di Reynolds, il carattere del campo di moto è di difficile classificazione, potendosi presentare condizioni che tendono alla laminarità ovvero alla turbolenza, anche in successione nel tempo e nello spazio, in relazione ad ulteriori fattori oltre che all'entità di  $Re$ .

#### 4.2 Moto laminare in un tubo circolare.

L'equazione (4.1) può essere risolta analiticamente quando il moto si svolge in un tubo circolare di diametro costante, in condizioni indipendenti dal tempo ed in regime di moto laminare ( $Re < 2000 \div 2500$ ). In tali condizioni, che definiscono il cosiddetto *moto di Poiseuille*, l'unica componente di velocità non nulla è quella parallela all'asse  $s$  del condotto e, per un'assegnata distanza  $r$  misurata lungo un qualsiasi raggio, detta velocità

è indipendente da  $s$ : il moto, cioè, è uniforme. Si determina, in particolare, per il profilo di velocità, l'espressione

$$v(r) = \frac{\gamma i}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \quad (4.3)$$

dove  $r_0$  è il raggio del condotto e  $i$  è la *cadente piezometrica*, definita dalla

$$i = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\gamma} + h \right) \quad (4.4)$$

nella quale  $(p/\gamma + h)$  è la *quota piezometrica* (spesso indicata con il simbolo  $h^*$ ) cioè la grandezza che, di fatto, rappresenta la 'forza motrice' del sistema<sup>2</sup>. Si può facilmente dimostrare che nelle condizioni qui esaminate la quota piezometrica in una data sezione del condotto (fissata, cioè, l'ascissa  $s$ ) è indipendente da  $r$ . Nella sezione si ha, cioè, una distribuzione idrostatica della pressione (vedi Capitolo 2).

L'equazione (4.3) mostra che la velocità, la cui rappresentazione grafica è illustrata in Figura 4.1, presenta valore nullo alla parete ( $r=r_0$ ) e valore massimo al centro ( $r=0$ ), pari a

$$v_{\max} = \frac{\gamma i}{4\mu} r_0^2 \quad (4.5)$$

Ricordando la definizione di portata (equazione (3.5)) ed osservando che nel caso in esame  $v_n=v$ , si ottiene subito per  $Q$  l'espressione, nota come *formula di Hagen-Poiseuille*

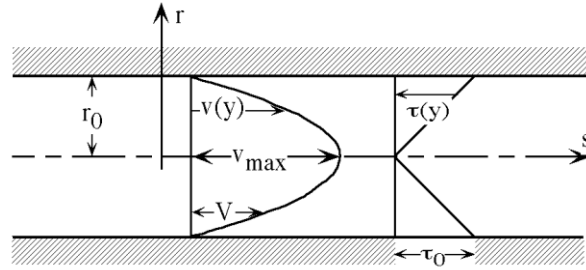
---

<sup>2</sup> Il segno negativo nell'equazione (4.4) è determinato dal fatto che  $(p/\gamma + h)$  diminuisce lungo  $s$ .

$$Q = \int_{r=0}^{r=r_0} v \cdot 2\pi r dr = \int_{r=0}^{r=r_0} \frac{\gamma i}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \cdot 2\pi r dr = \frac{\gamma i \pi r_0^4}{8\mu} \quad (4.6)$$

La velocità media, ricordando che per definizione  $V=Q/A$ , risulta quindi pari a

$$V = \frac{\gamma i}{8\mu} r_0^2 = \frac{1}{2} v_{\max} \quad (4.7)$$



*Figura 4.1. Andamento della velocità e dello sforzo d'attrito nel moto di Poiseuille.*

Dall'equazione del profilo di velocità è immediato ricavare l'andamento degli sforzi tangenziali. Ricordando l'equazione costitutiva di un fluido newtoniano (equazione (1.5)) nella quale ora ad  $y$  si sostituisce  $-r$ , si ha subito

$$\tau = \frac{\gamma i}{2} r \quad (4.8)$$

Lo sforzo tangenziale varia cioè linearmente con la distanza dall'asse, presentandosi massimo alla parete, dove vale  $\tau_0 = \frac{\gamma i}{2} r_0$  (Figura 4.1). Da sottolineare il fatto che l'equazione (4.8), e dunque anche l'espressione dello sforzo alla parete  $\tau_0$ , si può dimostrare valida anche in caso di moto

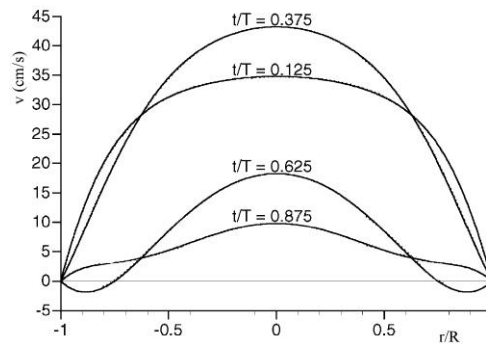
turbolento.

Per concludere, è significativo osservare che il moto del sangue entro la rete vascolare si svolge generalmente con numeri di Reynolds tipici del regime laminare. Il moto di Poiseuille rappresenta quindi il modello teorico più semplice con cui si possono rappresentare i processi emodinamici.

Tuttavia, come riportato nel capitolo introduttivo e nel paragrafo 1.4, giocano un ruolo fondamentale nel determinare le caratteristiche del campo di moto elementi quali la pulsatilità della pressione sanguigna e l'elasticità delle pareti dei condotti vascolari. Senza entrare nel merito della derivazione di soluzioni teoriche o di indagini numeriche che forniscono l'andamento della velocità quando si tenga conto delle predette condizioni fisiologiche, si può comunque osservare che, in particolare, la pulsatilità della pressione determina profili di velocità variabili nel tempo (Figura 4.2.).

La soluzione del problema indagato da Womersley, brevemente riassunto nella didascalia di Figura 4.2, mostra che i profili di velocità possono risultare, in funzione dell'istante considerato e dell'entità di parametri fondamentali quale la frequenza dell'onda di pressione, anche considerevolmente 'appiattiti' rispetto all'andamento parabolico dato dall'equazione (4.3), ovvero presentare zone di controcorrente in prossimità della parete. Quest'ultima circostanza, tra l'altro, favorisce l'insorgenza di strutture vorticosi locali che possono, qualora si estendano a tutta la corrente, determinare un regime turbolento. Giova anche osservare in questa sede che il carattere di pulsatilità del moto si manifesta prevalentemente nel

distretto arterioso; nella rete venosa, viceversa, possono mediamente dirsi verificate condizioni di stazionarietà. Infine, si fa presente che quando si consideri la deformabilità dei vasi sanguigni, il vettore velocità presenta sia componente parallela all'asse che componente radiale.



*Figura 4.2. Moto laminare di fluido newtoniano soggetto ad un gradiente di pressione uniforme nello spazio e variabile sinusoidalmente nel tempo. Il moto si svolge entro un condotto circolare rigido. I profili di velocità rappresentati in figura corrispondono alla soluzione analitica del problema dedotta da Womersley (1955), per diversi istanti  $t$  adimensionalizzati con il periodo  $T$  dell'onda di pressione.*

### 4.3 Esempi applicativi.

#### *Esempio 1*

In un condotto circolare di diametro  $d=1$  cm scorre un fluido incompressibile newtoniano di densità  $\rho=1,05\rho_{\text{H}_2\text{O}}$  e viscosità dinamica  $\mu=4\mu_{\text{H}_2\text{O}}$ . La portata fluente è  $Q=0,05$  l/s. Determinare il numero di Reynolds  $Re$  del moto nel

<sup>3</sup> Si ricorda che si può assumere, per l'acqua,  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup> e  $\mu=10^{-3}$  kg/ms, da cui si ha  $\nu=10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.



condotto, e stabilire la tipologia del regime dinamico.

Il numero di Reynolds può essere calcolato a partire dall'equazione (4.2), ricordando che per il moto entro il condotto circolare si assume usualmente come velocità caratteristica la velocità media e come lunghezza caratteristica il diametro del condotto. Vale pertanto

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}$$

Nel caso in esame la velocità media risulta pari a

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,05 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,01^2} = 0,637 \text{ m/s}$$

e la viscosità cinematica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4}{1,05} \nu_{\text{H}_2\text{O}} = 3,809 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

e quindi per il numero di Reynolds si ha

$$Re = \frac{V d}{\nu} = \frac{0,637 \cdot 0,01}{3,809 \cdot 10^{-6}} = 1672,355$$

Poiché risulta  $Re < 2000 \div 2500$ , il moto entro il condotto risulta essere in regime laminare.

*Esempio 2*

Il moto descritto nell'esempio precedente si svolge in condizioni indipendenti dal tempo. Determinare il valore della velocità massima nel condotto e il valore della velocità nei punti posti ad una distanza dall'asse pari a  $r=r_0/2$ .

Date le condizioni in esame, il moto risulta essere 'alla Poiseuille'. Vale pertanto la relazione (si ricordi l'equazione (4.7))

$$v_{\max} = 2V = 2 \cdot 0,637 = 1,274 \text{ m/s}$$

Il calcolo della velocità puntuale  $v(r)$  può essere effettuato per mezzo dell'equazione (4.3) purché sia nota la cadente piezometrica  $i$ . Quest'ultima può determinarsi utilizzando l'equazione (4.5) (ovvero la (4.6) o la (4.7)). Si ha pertanto

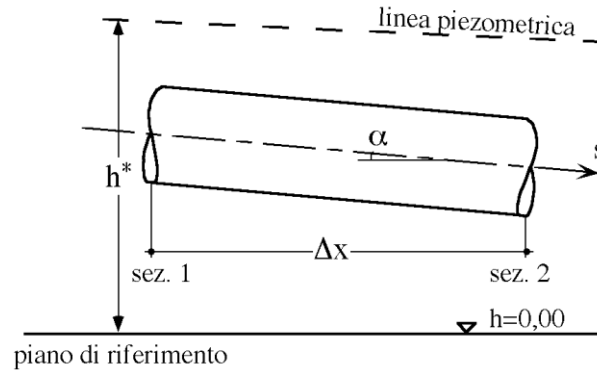
$$i = v_{\max} \frac{4\mu}{\gamma r_0^2} = 1,274 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1,05 \cdot 9806 \cdot 0,005^2} = 6,22 \cdot 10^{-2}$$

I punti distanti  $r=r_0/2=0,25$  cm dall'asse del condotto sono perciò caratterizzati dalla velocità

$$v = \frac{\gamma i}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \Big|_{r=r_0/2} = \frac{1,05 \cdot 9806 \cdot 6,22 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} (0,005^2 - 0,0025^2) = 0,75 \text{ m/s}$$


---

## Esempio 3



All'interno di un tubo circolare di diametro  $d=0,02$  m ed inclinato di  $\alpha=10^\circ$  rispetto all'orizzontale fluisce la portata  $Q=0,06$  l/s, costante nel tempo. Il fluido che vi scorre è incompressibile e newtoniano ( $\rho=1,05\rho_{H_2O}$ ;  $\mu=4\mu_{H_2O}$ ). Sapendo che le sezioni 1 e 2 di figura sono poste alla distanza  $\Delta x=5$  cm, determinare la differenza di pressione  $\Delta p=p_2-p_1$  che c'è tra le due sezioni.

Date le caratteristiche del sistema indagato (caratteristiche fisiche del fluido, caratteristiche geometriche del condotto e caratteristiche cinematiche), si può supporre che nel condotto si realizzi un moto alla Poiseuille. La verifica di tale ipotesi viene svolta calcolando il numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu}$$

dove

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,06 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 0,191 \text{ m/s}$$

Si ha quindi

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1,05 \cdot 1000 \cdot 0,191 \cdot 0,02}{4 \cdot 10^{-3}} = 1002,75 < 2000.$$

Dall'equazione (4.6) si determina il valore della cadente piezometrica

$$i = \frac{8\mu}{\gamma \pi r_0^4} Q = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1,05 \cdot 9806 \cdot \pi \cdot 0,01^4} \cdot 0,06 \cdot 10^{-3} = 0,00593$$

In base alla definizione data nella (4.4), la cadente piezometrica può essere

calcolata come  $i = -\frac{\Delta h^*}{\Delta s}$ , dove  $\Delta h^*$  è la differenza di quota piezometrica tra due sezioni distanti  $\Delta s$ . Con riferimento alle sezioni 1 e 2 di figura si ha perciò

$$i = -\frac{(h_2^* - h_1^*)}{\Delta x / \cos \alpha} = -\frac{[(p_2 / \gamma + h_2) - (p_1 / \gamma + h_1)]}{\Delta x / \cos \alpha} = -\frac{[(p_2 / \gamma - p_1 / \gamma) - (h_1 - h_2)]}{\Delta x / \cos \alpha}$$

dove la differenza tra le quote baricentriche è nota da semplici considerazioni geometriche

$$(h_1 - h_2) = \frac{\Delta x}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{0,05}{\cos 10^\circ} \sin 10^\circ = 8,816 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

La differenza di pressione cercata è dunque data da

---

<sup>4</sup> Si noti che per definizione la cadente piezometrica fornisce la variazione di pressione lungo la direzione  $s$  del moto. Qualora la distanza tra le sezioni di misura sia data lungo la direzione orizzontale  $x$ , si deve 'tradurre'  $\Delta x$  in  $\Delta s$ , in funzione dell'angolo di inclinazione  $\alpha$  del condotto.

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= (p_2 - p_1) = -\gamma [i \cdot \Delta x / \cos \alpha - (h_1 - h_2)] = \\
 &= -1,05 \cdot 9806 \cdot [0,00593 \cdot 0,05 / \cos(10^\circ) - 8,816 \cdot 10^{-3}] = \\
 &= 87,672 \text{ Pa} \cong 0,659 \text{ mm}_{\text{Hg}}
 \end{aligned}$$


---

#### Esempio 4

Determinare il valore dello sforzo tangenziale massimo nel moto di cui all'esempio precedente.

Lo sforzo tangenziale viscoso massimo si realizza in corrispondenza della parete del condotto, dove  $r=r_0$ . In base all'equazione (4.8) si ha perciò

$$\tau_0 = \frac{\gamma i}{2} r_0 = \frac{1,05 \cdot 9806 \cdot 0,00593}{2} \cdot 0,01 = 0,305 \text{ N/m}^2$$


---

#### Esempio 5

In un tubo orizzontale lungo  $L=20$  cm scorre, in condizioni laminari stazionarie, acqua. La differenza di pressione tra la sezione di valle e la sezione di monte vale  $\Delta p=p_2-p_1=-500$  Pa. Determinare l'entità della portata fluente per i due seguenti valori del raggio:  $r_0=0,5$  cm e  $r_0'=1$  cm.

E' immediato osservare che lungo un tubo orizzontale la quota piezometrica

$h^*$  varia in virtù della variazione della sola pressione. Si ha, cioè,  $\Delta h^* = \Delta p$ . Se il moto si svolge in condizioni laminari, detta  $\Delta p$  la differenza di pressione tra valle e monte in un tratto lungo  $L$  la portata risulta quindi data dalla relazione (si veda la formula di Hagen-Poiseuille)

$$Q = -\frac{\Delta p}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu}$$

Nel caso in esame dunque, per i due valori del raggio risulta rispettivamente

$$Q = -\frac{\Delta p}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu} = -\frac{-500}{0,20} \frac{\pi \cdot 0,005^4}{8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 6,13 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s} = 0,613 \text{ l/s}$$

$$Q' = -\frac{\Delta p}{L} \frac{\pi r_0'^4}{8\mu} = -\frac{-500}{0,20} \frac{\pi \cdot 0,01^4}{8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 9,812 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 9,812 \text{ l/s}$$

Si noti che, in virtù del legame della portata con la quarta potenza del raggio, a fronte di  $r_0'/r_0=2$  si ha  $Q'/Q=16$ .

## 5. CORRENTI MONODIMENSIONALI

### 5.1 Definizioni.

Si definisce *corrente monodimensionale* (o *lineare*) un moto fluido che si svolge secondo una direzione prevalente sensibilmente rettilinea (*asse della corrente*) e che presenta limitata estensione trasversale rispetto alla lunghezza su cui il moto stesso si svolge. Le velocità attraverso ogni sezione della corrente possono dunque considerarsi parallele all'asse. Una corrente monodimensionale gode di una proprietà fondamentale: lungo la normale alle linee di corrente (lungo la normale all'asse) la pressione è distribuita idrostaticamente (equazione (2.1)). Ciò equivale ad affermare che lungo la normale alle linee di corrente la quota piezometrica  $h^*$  presenta valore costante, indipendentemente dalla posizione del punto considerato. Tipicamente, il moto entro un condotto circolare di diametro costante e ad asse rettilineo costituisce una corrente monodimensionale.

Si definisce *energia specifica* (o *carico totale*) nel punto generico di un fluido di peso specifico  $\gamma$  la quantità

$$E = \frac{p}{\gamma} + h + \frac{v^2}{2g} = h^* + \frac{v^2}{2g} \quad (5.1)$$

E' immediato osservare che l'energia  $E$  è misurata in termini di altezza. Si tratta, pertanto, di un'energia per unità di peso di fluido. I tre termini che compongono l'energia specifica hanno, dal punto di vista energetico, il seguente significato:

- $h$ , quota geodetica del punto considerato misurata rispetto ad un prescelto piano orizzontale di riferimento, rappresenta il contributo dell'energia potenziale;
- $\frac{v^2}{2g}$ , dove  $v$  è il modulo della velocità nel punto considerato, rappresenta il contributo dell'energia cinetica;
- $\frac{p}{\gamma}$ , dove  $p$  è la pressione nel punto considerato, rappresenta il contributo dell'energia 'di pressione'.

Si noti che la definizione di energia specifica è indipendente dalle caratteristiche del fluido e dai caratteri del moto. In generale, quindi,  $E$  risulta dipendere dalla posizione del punto considerato e dall'istante di tempo in cui detta grandezza viene valutata.

## 5.2 Equazione dell'energia per una corrente monodimensionale.

Si può dimostrare che in una corrente monodimensionale di fluido pesante incompressibile l'energia varia tra le generiche sezioni trasversali 1 e 2 (dove 1 è la sezione di monte e 2 è la sezione di valle) in base alla relazione (equazione dell'energia in forma integrale, o equazione di bilancio dell'energia)



$$\left( \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right) - \left( \frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} \right) = -\frac{\beta}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds - (\Delta E)_{1-2} \quad (5.2)$$

I diversi termini dell'equazione precedente hanno il seguente significato:

- $\left( \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} \right)$  è l'energia specifica caratteristica della sezione, nella quale  $p_2$  e  $h_2$  sono rispettivamente la pressione e la quota misurate nel baricentro della sezione 2,  $V_2$  è la velocità media nella sezione e  $\alpha_2$  è un coefficiente correttivo che tiene conto dello scostamento della velocità puntuale dalla velocità media. Normalmente, per il moto entro un condotto circolare, ad  $\alpha_2$  si assegna valore pari a 2 in regime laminare e pari ad 1 in regime turbolento. Le medesime considerazioni si applicano, naturalmente, alle quantità indicate con pedice 1 (relative, cioè, alla sezione 1). Si noti che, in generale, le diverse grandezze sono da considerarsi al generico istante  $t$ ;
- $-\frac{\beta}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds$  rappresenta la variazione istantanea di energia specifica tra le sezioni 1 e 2 per effetto dell'inerzia temporale del moto, in cui  $V$  è la velocità media nella sezione generica compresa tra la sezione 1, di ascissa  $s_1$ , e la sezione 2, di ascissa  $s_2$ . Il coefficiente  $\beta$  è introdotto per tener conto della non uniforme distribuzione di velocità nella sezione e, generalmente, viene posto pari a 1;
- $(\Delta E)_{1-2}$  rappresenta le dissipazioni di energia specifica tra le

sezioni 1 e 2 provocate, in generale, sia dall'attrito tra il fluido e il contorno della corrente che da fenomeni localizzati, nei quali si manifestano distacchi della corrente dai contorni e conseguenti perdite energetiche.

Quando la corrente monodimensionale è in moto permanente, l'equazione (5.2) si semplifica notevolmente (scompare, evidentemente, il termine legato all'inerzia temporale). In questo caso la (5.2) diventa una delle equazioni fondamentali per la risoluzione pratica dei problemi di dinamica dei fluidi, quantomeno ogni qual volta si sia in grado di esprimere e valutare con sufficiente correttezza le dissipazioni di energia  $(\Delta E)_{1-2}$ . In questo senso, la condizione più semplice è rappresentata dal caso di fluido ideale o perfetto (paragrafo 1.2) nel quale, per essere nulla la viscosità, sono nulle anche le dissipazioni di energia. In queste ipotesi l'equazione (5.2) si semplifica nella relazione che esprime il *Principio di Bernoulli*

$$\left( \frac{p_1}{\gamma} + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} \right) = \left( \frac{p_2}{\gamma} + h_2 + \frac{V_2^2}{2g} \right) \quad (5.3)$$

L'equazione (5.3) sancisce la costanza dell'energia specifica in una corrente monodimensionale permanente quando si possa assumere valida l'ipotesi di fluido ideale<sup>1</sup> (ovvero di dissipazioni nulle). Si noti che nella

---

<sup>1</sup> Il principio di Bernoulli si ricava in realtà a partire dalle equazioni della dinamica di un fluido ideale (ottenibili eliminando il termine viscoso dall'equazione (4.1)). In particolare, si può dimostrare che nel moto permanente di un fluido ideale incompressibile l'energia specifica si mantiene costante in tutti i punti appartenenti ad una stessa linea di corrente. Se, inoltre, il

predetta equazione non compare il coefficiente correttivo  $\alpha$  perché in una corrente monodimensionale ideale la velocità puntuale coincide con la velocità media nella sezione considerata.

Si noti che l'equazione di Bernoulli descrive i fenomeni reali in termini sufficientemente accurati solo in un circoscritto numero di casi. Normalmente si deve invece tener conto delle dissipazioni di energia, per la cui valutazione ci si basa generalmente sulle relazioni esposte nel paragrafo seguente.

### 5.3 Dissipazioni di energia continue e localizzate.

I meccanismi che determinano le dissipazioni di energia nel moto di un fluido reale sono sostanzialmente distinguibili in due classi. Da una parte si verificano fenomeni di attrito viscoso tra strati fluidi adiacenti animati da velocità diverse, ed in particolare tra il fluido e le superfici di contorno. L'effetto di tali fenomeni, in termini energetici, si manifesta con una diminuzione continua dell'energia specifica lungo il percorso del moto e si parla, in tal caso, di *dissipazioni continue*. Dall'altra parte si possono verificare, per talune condizioni geometriche e dinamiche del campo di moto, fenomeni locali di distacco della corrente dai contorni che la guidano, con conseguente formazione di strutture vorticose entro le quali viene dissipata ulteriore energia. In tal caso, si parla di *dissipazioni localizzate*.

---

vettore velocità è tale che nel campo di moto non può nascere vorticità (*moto irrotazionale*), l'energia specifica si mantiene costante in tutti i punti del campo di moto.

### 5.3.1 Dissipazioni continue in una corrente monodimensionale in moto uniforme.

Le dissipazioni continue che si realizzano in una corrente in moto uniforme tra due generiche sezioni distanti  $\Delta s$  si calcolano mediante l'espressione

$$\Delta E_{\text{cont.}} = j \cdot \Delta s \quad (5.4)$$

nella quale  $j$  è la *dissipazione unitaria* (dissipazione per unità di peso fluido e per unità di lunghezza nella direzione del moto) definita dalla relazione  $j = -\partial E / \partial s$  ( $j$  è infatti denominata anche *cadente energetica*).

Tra le numerose espressioni proposte in letteratura per la valutazione di  $j$  la più generale è nota come *formula di Darcy-Weisbach*

$$j = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (5.5)$$

dove

- $R_h = A/C$  è il *raggio idraulico* della corrente, definito dal rapporto tra l'area liquida  $A$  ed il contorno bagnato  $C$ . Per il moto in pressione in un tubo circolare di diametro  $d$ , risulta essere  $R_h = d/4$ ;
- $f$  è il *numero di resistenza*, cioè il coefficiente che quantifica la resistenza al moto offerta dalle pareti entro cui il moto stesso si svolge.

L'entità dei fenomeni di attrito che generano le dissipazioni continue, e quindi il coefficiente  $f$ , dipende innanzi tutto dal regime dinamico del moto.

Per il moto entro un condotto circolare, in condizioni di regime laminare alla Poiseuille ( $Re < 2000 \div 2500$ ) il valore di  $f$  è funzione esclusiva del numero di Reynolds. Si può infatti facilmente dimostrare<sup>2</sup> la validità della relazione

$$f = \frac{64}{Re} \quad (5.6)$$

In condizioni di regime turbolento ( $Re > 4000$ ), al contrario,  $f$  risulta in generale dipendere sia dal numero di Reynolds che dalla natura della parete, secondo quanto espresso dall'equazione di Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{e/4R_h}{3,71} + \frac{2,52}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (5.7)$$

dove  $e$ , denominata *scabrezza equivalente assoluta*, è la grandezza attraverso la quale si tiene conto delle rugosità presenti sulla superficie della parete di contorno (Figura 5.1).

La struttura dell'equazione (5.7) mostra che un condotto di assegnata *scabrezza relativa*  $e_r = e/4R_h$  può manifestare, in termini di resistenza al moto, due diversi 'comportamenti limite'. Per valori del numero di Reynolds sufficientemente piccoli da rendere prevalente la quantità  $(2,52/Re\sqrt{f})$  rispetto alla quantità  $(e/4R_h/3,71)$ , il numero di resistenza  $f$  dipende

---

<sup>2</sup> Si osservi innanzitutto che in un moto uniforme l'indipendenza della velocità da  $s$  fa sì che la cadente piezometrica  $i$  e la cadente energetica  $j$  coincidano. Sulla base di tale considerazione, l'equazione (5.6) emerge subito dall'uguagliare le espressioni di  $i$  e di  $j$  date rispettivamente dall'equazione (4.7) e dall'equazione di Darcy-Weisbach.

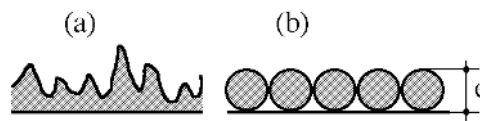
esclusivamente dal numero di Reynolds. Si parla, in tal caso, di condizioni di *parete idraulicamente liscia*, per le quali la (5.7) si semplifica nella

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2,52}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (5.8)$$

Per valori del numero di Reynolds viceversa sufficientemente grandi da rendere prevalente la quantità  $(e/4R_h/3,71)$  rispetto alla quantità  $(2,52/\text{Re} \sqrt{f})$ , il numero di resistenza  $f$  dipende esclusivamente dalla scabrezza relativa. Si parla, in tal caso, di condizioni di *parete idraulicamente scabra*, per le quali la (5.7) si semplifica nella

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{e/4R_h}{3,71} \right) \quad (5.9)$$

Quando, infine, il numero di Reynolds presenta valori tali da rendere ugualmente importanti entrambi i termini dell'argomento del logaritmo nell'equazione (5.7), l'equazione stessa deve essere considerata in forma completa. Si parla, in tal caso, di condizioni di *transizione* tra parete idraulicamente liscia e parete idraulicamente scabra.

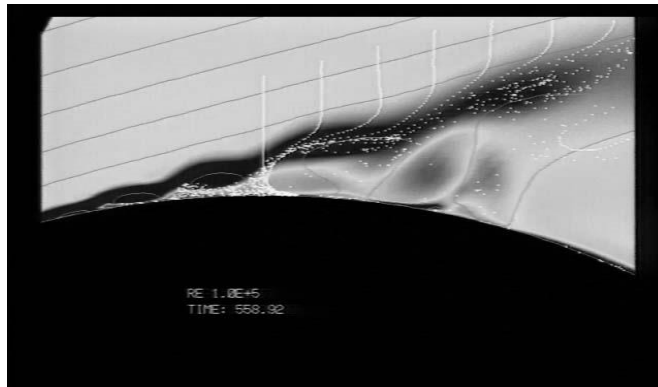


*Figura 5.1. La parete di un condotto presenta, in generale, una successione apparentemente casuale di protuberanze e avvallamenti (a). La scabrezza equivalente assoluta è pari al diametro di grani di sabbia (b) che, disposti uniformemente sulla parete, producono i medesimi effetti di resistenza al moto prodotti dalla scabrezza naturale.*

L'andamento di  $f$  in funzione di  $\text{Re}$  è rappresentato, in doppia scala

logaritmica, nel Diagramma di Moody (Figura 5.5). In regime laminare, il grafico mostra l'andamento della curva (che in scala doppio logaritmica risulta una retta) di equazione (5.6). In regime turbolento, il grafico riporta l'andamento delle curve di equazione (5.7), ciascuna valutata per un prefissato valore della scabrezza relativa.

### 5.3.2 Dissipazioni localizzate.

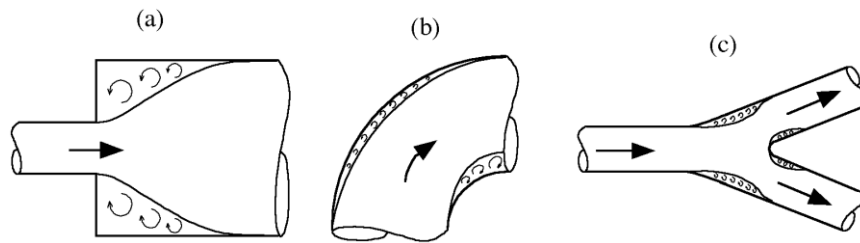


*Figura 5.2. Distacco della corrente da un contorno curvo fisso e zona di scia a valle.*

In generale, quando una corrente incontra una variazione locale nella geometria dei contorni che la guidano, in corrispondenza della singolarità tendono a manifestarsi fenomeni di distacco della corrente stessa dalle pareti. In adiacenza ai contorni si stabiliscono zone di fluido che, pur essendo mediamente fermo, risulta animato da strutture vorticose che provocano dissipazioni di energia.

Situazioni di questo genere si realizzano, ad esempio, subito a valle di

allargamenti o di restringimenti di un condotto, in corrispondenza di gomiti o curve, in presenza di valvole e dispositivi di controllo, a seguito di diramazioni o confluenze.



*Figura 5.3. Esempi schematici di separazione della corrente e zone di ricircolazione in corrispondenza di un brusco allargamento (a), di una curva (b) e di una diramazione (c).*

Usualmente, una dissipazione di energia localizzata viene calcolata mediante l'espressione

$$\Delta E_{\text{loc.}} = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (5.10)$$

nella quale  $V$  è la velocità media assunta come caratteristica (spesso è la velocità media della corrente indisturbata che si approssima alla singolarità geometrica) e  $\xi$  è un opportuno coefficiente che, almeno concettualmente, racchiude in sé tutti gli effetti delle grandezze che concorrono a determinare l'entità della perdita di energia, tra le quali senz'altro compaiono le caratteristiche geometriche della singolarità 'sede' della dissipazione, il numero di Reynolds della corrente indisturbata, la scabrezza della parete.

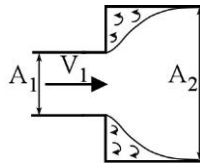
In effetti, nel maggior numero di casi il valore di  $\xi$  è noto per via sperimentale: numerosi testi riportano per le diverse situazioni l'andamento



di tale coefficiente in funzione dei parametri che principalmente lo influenzano.

Si espongono di seguito le espressioni del coefficiente  $\xi$  in alcuni casi particolarmente significativi, seguendo l'impostazione fornita da Idelchik<sup>3</sup>.

- Brusco allargamento di sezione.



$$\Delta E = \xi \frac{V_1^2}{2g}$$

Per  $Re_1 \geq 4 \cdot 10^3$  si ha  $\xi = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$ .

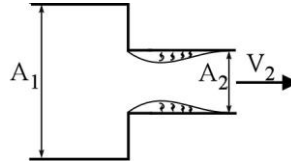
La formula precedente, che esprime il coefficiente della *perdita di Borda*, può essere ricavata analiticamente in modo piuttosto semplice. Si osservi che il coefficiente  $\xi$  è funzione solo della geometria, attraverso il rapporto delle aree  $A_1/A_2$ .

Per  $10 \leq Re_1 \leq 4 \cdot 10^3$   $\xi$  è funzione non solo del rapporto  $A_1/A_2$  ma anche del numero di Reynolds  $Re_1$ , secondo quanto riportato nella tabella a pag. 160 del testo citato.

---

<sup>3</sup> *Handbook of Hydraulic Resistance*, I. E. Idelchik, Ed. Springer and Verlag, NY.

- Brusco restringimento di sezione.



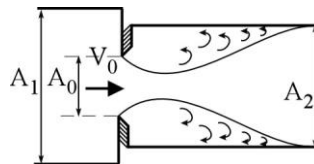
$$\Delta E = \xi \frac{V_2^2}{2g}$$

Per  $Re_2 \geq 10^4$  si ha  $\xi = 0,5 \cdot \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^{3/4}$ .

Si osservi che il coefficiente  $\xi$  è funzione solo della geometria, attraverso il rapporto delle aree  $A_2/A_1$ .

Per  $10 \leq Re_2 \leq 10^4$   $\xi$  è funzione non solo del rapporto  $A_2/A_1$  ma anche del numero di Reynolds  $Re_2$ , secondo quanto riportato nella tabella a pag. 168 del testo citato.

- Variazione di sezione in presenza di un orifizio sottile 'a spigolo vivo'.



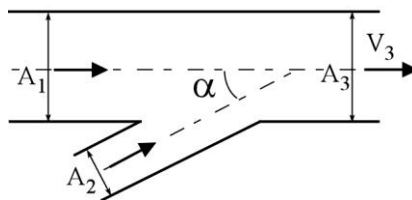
$$\Delta E = \xi \frac{V_0^2}{2g}$$

Per  $Re_0 \geq 10^5$  si ha  $\xi = \left( 1 + 0,707 \sqrt{1 - \frac{A_0}{A_1} - \frac{A_0}{A_2}} \right)^2$ .

Si osservi anche ora che il coefficiente  $\xi$  è funzione solo della geometria, attraverso entrambi i rapporti significativi ( $A_0/A_1$  e  $A_0/A_2$ ).

Per  $30 \leq Re_0 \leq 10^4 \div 10^5$  si adotta l'espressione  $\xi = \xi_1 + \varepsilon \cdot \xi_2$  dove si ha:  $\xi_1 = \xi_1(Re_0, A_0/A_1)$  secondo quanto riportato in apposita tabella a pag. 175 del testo citato.  $\varepsilon = \varepsilon(Re_0)$  secondo quanto riportato in apposita tabella a pag. 175 del testo citato.  $\xi_2 = \xi^*$ , dove  $\xi^*$  è il valore del coefficiente che in uguali condizioni geometriche si calcolerebbe per numeri di Reynolds maggiori di  $10^5$ .

- Confluenza di due condotti.



Si sviluppano dissipazioni localizzate sia nella corrente fluente dalla sezione 1 alla sezione 3 che nella corrente fluente dalla sezione 2 alla sezione 3. Vale:

$$\bullet \quad \Delta E_{1 \rightarrow 3} = \xi_{1 \rightarrow 3} \frac{V_3^2}{2g}$$

nella quale il coefficiente  $\xi_{1 \rightarrow 3}$  è valutato mediante l'espressione

$$\xi_{1 \rightarrow 3} = 1 - \left(1 - \frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 - \beta \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 \left(\frac{A_3}{A_2}\right)$$

Nella relazione precedente  $\beta$  dipende, nel caso in cui  $A_1 = A_3$ , dal valore dell'angolo  $\alpha$  caratteristico della confluenza. In particolare, Idelchick fornisce i valori:

$\alpha$	$\beta$
30°	1,74
45°	1,41
60°	1
90°	$1,55 \frac{Q_2}{Q_3} - \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2$

$$\bullet \quad \Delta E_{2 \rightarrow 3} = \xi_{2 \rightarrow 3} \frac{V_3^2}{2g}$$

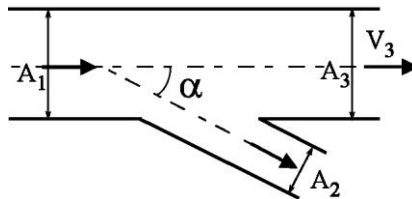
nella quale il coefficiente  $\xi_{2 \rightarrow 3}$  dipende, nel caso in cui  $A_1 = A_3$ , dall'angolo  $\alpha$ , dal rapporto tra le portate  $\frac{Q_2}{Q_3}$  e dal rapporto tra le aree  $\frac{A_2}{A_3}$ . Si riportano, a titolo di esempio, i valori di detto

coefficiente proposti nel testo citato per diversi valori di  $\frac{A_2}{A_3}$

e di  $\alpha$ , e per  $\frac{Q_2}{Q_3} = 0,5$ .

	$\frac{A_2}{A_3}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\xi_{2 \rightarrow 3}$	$\alpha=30^\circ$	4,58	0,97	0,44	0,35	0,27
	$\alpha=45^\circ$	5,00	1,18	0,60	0,45	0,40
	$\alpha=60^\circ$	5,50	1,44	0,78	0,58	0,50
	$\alpha=90^\circ$	6,75	2,06	1,20	0,89	0,77

- Diramazione in due condotti.



Si sviluppano dissipazioni localizzate sia nella corrente fluente dalla sezione 1 alla sezione 3 che nella corrente fluente dalla sezione 1 alla sezione 2. Le espressioni di dette dissipazioni risultano essere piuttosto complicate. Per esse si rimanda al testo citato ed alle relative tabelle.

### 5.4 Esempi applicativi.

#### *Esempio 1*

Determinare il numero di resistenza  $f$  e la dissipazione di energia specifica per unità di lunghezza  $j$  che caratterizzano il moto di un fluido incomprimibile con viscosità cinematica  $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  entro un condotto di diametro  $d = 2 \text{ cm}$  e scabrezza assoluta equivalente  $e = 0,02 \text{ mm}$  per i due seguenti valori di portata:  $Q_1 = 0,07 \text{ l/s}$  e  $Q_2 = 0,7 \text{ l/s}$ . Quanto vale nei due casi la dissipazione continua di energia specifica  $\Delta E$  in un tratto di condotto lungo  $l = 25 \text{ cm}$ ?

L'espressione con cui valutare il coefficiente di resistenza  $f$  dipende dal regime del moto (se laminare o turbolento). Si deve quindi innanzi tutto stabilire l'entità del numero di Reynolds. Nelle due diverse condizioni di portata si ha rispettivamente

$$V_1 = \frac{Q_1}{A} = \frac{4Q_1}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,07 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 0,2223 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_1 = \frac{V_1 d}{\nu} = \frac{0,2223 \cdot 0,02}{4 \cdot 10^{-6}} = 1114,65$$

e

$$V_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{4Q_2}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,7 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 2,223 \text{ m/s}$$

$$\text{Re}_2 = \frac{V_2 d}{\nu} = \frac{2,223 \cdot 0,02}{4 \cdot 10^{-6}} = 11146,50$$

da cui si vede che per la portata  $Q_1$  il moto si svolge in regime laminare, per la portata  $Q_2$  il moto si svolge in regime turbolento.

Si ha perciò, per la portata  $Q_1$

$$f_1 = \frac{64}{Re_1} = 0,05742$$

$$j_1 = \frac{f_1}{d} \frac{V_1^2}{2g} = \frac{0,05742}{0,02} \frac{0,2223^2}{19,62} = 7,272 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta E_1 = j_1 L = 7,272 \cdot 10^{-3} \cdot 0,25 = 1,819 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Per la portata  $Q_2$ , che fluisce in condizioni di moto turbolento, si deve applicare l'equazione (5.7). Quest'ultima va risolta per tentativi, poiché implicita in  $f$ . Si noti che il valore assunto per  $f$  al 'primo giro' dell'iterazione è quello corrispondente a condizioni di parete idraulicamente scabra, per l'assegnata scabrezza relativa. Nel caso in esame si ha

$$\frac{e}{d} = \frac{0,02 \cdot 10^{-3}}{0,02} = 0,001$$

e dunque, dall'equazione (5.9),

$$f_2^{I \text{ tent}} = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{e/d}{3,71} \right) \right]^{-2} = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{0,001}{3,71} \right) \right]^{-2} = 0,01962$$

Il procedimento iterativo per la determinazione di  $f_2$  porge quindi

$f_2$ tent	$f_2$ calc
0,01962	0,03366
0,03366	0,03136
0,03136	0,03164
0,03164	0,03161
<b>0,03161</b>	<b>0,03161</b>

da cui si ottiene, come evidenziato in tabella data l'uguaglianza tra valore di tentativo e valore calcolato

$$f_2 = 0,03161.$$

Per la dissipazione unitaria e la dissipazione in un tratto di condotto lungo 25 cm, si ha dunque

$$j_2 = \frac{f_2}{d} \frac{V_2^2}{2g} = \frac{0,03161}{0,02} \frac{2,223^2}{19,62} = 4,004 \cdot 10^{-1}$$

$$\Delta E_2 = j_2 L = 4,004 \cdot 10^{-1} \cdot 0,25 = 1,001 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

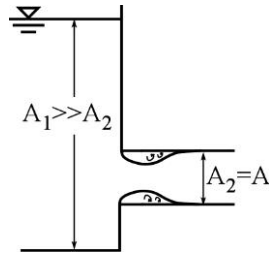
---

### Esempio 2

Un condotto di sezione circolare imbocca 'bruscamente' da un serbatoio. Determinare la dissipazione localizzata di energia  $\Delta E_{imb}$  che si verifica subito a valle dell'imbocco, nei seguenti due casi:

- |                         |                                             |                       |
|-------------------------|---------------------------------------------|-----------------------|
| a) $d = 2 \text{ cm}$   | $v = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  | $Q = 0,1 \text{ l/s}$ |
| b) $d' = 20 \text{ cm}$ | $v' = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ | $Q' = 10 \text{ l/s}$ |





L'imbocco brusco di una corrente da un serbatoio può essere assimilato al caso di un brusco restringimento in cui l'area della sezione di monte risulta molto maggiore dell'area della sezione di valle, cosicché  $A_2/A_1 \rightarrow 0$ .

Si ha perciò, detta  $V$  la velocità media della corrente nel condotto

$$\Delta E = \xi \frac{V^2}{2g} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

Nei due casi proposti, in particolare, si ha

**Caso a)**

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 0,318 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,318 \cdot 0,02}{4 \cdot 10^{-6}} = 1592,357$$

Poiché  $Re$  risulta minore di  $10^4$ , dalla tabella di Idelchik si desume, per  $A_2/A_1 \rightarrow 0$ ,  $\xi \cong 0,69$  e dunque per la dissipazione

$$\Delta E_{imb} = 0,69 \frac{0,318^2}{19,62} = 3,556 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

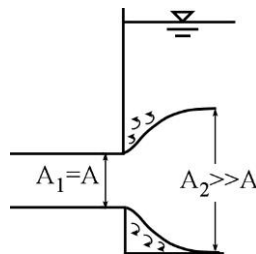
**Caso b)**

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,318 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,318 \cdot 0,2}{4 \cdot 10^{-6}} = 15923,57$$

Poiché  $Re$  risulta maggiore di  $10^4$ , dalla relazione proposta nel paragrafo 5.3.2 si desume, per  $A_2/A_1 \rightarrow 0$ ,  $\xi = 0,5$  e dunque per la dissipazione

$$\Delta E_{imb} = 0,5 \frac{0,318^2}{19,62} = 2,577 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

**Esempio 3**

Un condotto di sezione circolare sbocca 'bruscamente' in un serbatoio. Determinare la dissipazione localizzata di energia  $\Delta E_{sb}$  che si verifica subito a valle dello sbocco, nei seguenti due casi:

a)  $d=2 \text{ cm}$        $\nu=4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$        $Q=0,1 \text{ l/s}$

b)  $d'=20 \text{ cm}$        $\nu'=4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$        $Q'=10 \text{ l/s}$

Lo sbocco brusco di una corrente in un serbatoio può essere assimilato al caso di un brusco allargamento in cui l'area della sezione di valle risulta molto maggiore dell'area della sezione di monte, cosicché  $A_1/A_2 \rightarrow 0$ .

Si ha perciò

$$\Delta E = \xi \frac{V_1^2}{2g} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

essendo  $V$  la velocità media della corrente nel condotto.

Nei due casi proposti, in particolare, si ha

**Caso a)**

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 0,318 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,318 \cdot 0,02}{4 \cdot 10^{-6}} = 1592,357$$

Poiché  $Re$  risulta minore di 4000, dalla tabella di Idelchik si desume, per  $A_1/A_2 \rightarrow 0$ ,  $\xi \cong 2,2$  e dunque per la dissipazione

$$\Delta E_{sb} = 2,2 \frac{0,318^2}{19,62} = 0,0113 \text{ m}$$

**Caso b)**

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,318 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,318 \cdot 0,2}{4 \cdot 10^{-6}} = 15923,57$$

Poiché  $Re$  risulta maggiore di 4000, dalla relazione proposta nel paragrafo 5.3.2 si desume, per  $A_1/A_2 \rightarrow 0$ ,  $\xi = 1$  e dunque per la dissipazione

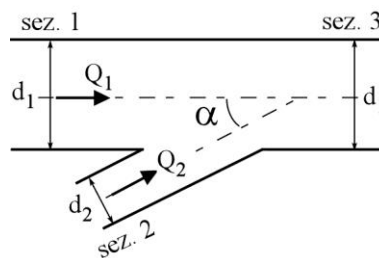
$$\Delta E_{sb} = 1 \frac{0,318^2}{19,62} = 5,154 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

#### Esempio 4

In un condotto di diametro  $d_1=2$  cm si innesta un condotto di diametro  $d_2=1$  cm. Sapendo che la portata  $Q_1$  è pari a 0,5 l/s, che la portata  $Q_2$  vale 0,1 l/s e che il fluido è acqua, determinare la dissipazione di energia che si manifesta nel condotto principale tra la sezione 1 e la sezione 3 nei due casi

a)  $\alpha=30^\circ$

b)  $\alpha=90^\circ$



Nel caso proposto la dissipazione ricercata si determina mediante l'espressione (si veda il paragrafo 5.3.2)

$$\Delta E_{1 \rightarrow 3} = \xi_{1 \rightarrow 3} \frac{V_3^2}{2g}$$

La velocità  $V_3$  si calcola una volta che sia nota la portata a valle della confluenza.

Dall'equazione di continuità per il nodo (cioè in corrispondenza della confluenza) si ha

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 0,5 + 0,1 = 0,6 \text{ l/s}$$

e dunque

$$V_3 = \frac{4Q_3}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 1,911 \text{ m/s}$$

Per il coefficiente  $\xi_{1 \rightarrow 3}$  si adotta la relazione

$$\xi_{1 \rightarrow 3} = 1 - \left(1 - \frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 - \beta \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 \left(\frac{A_3}{A_2}\right)$$

$$\text{dove } \frac{Q_2}{Q_3} = \frac{0,1}{0,6} = 0,167 \text{ e } \frac{A_3}{A_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4.$$

Il valore di  $\beta$  risulta essere pari, nei due casi proposti, rispettivamente a:

**caso a)**  $\beta=1,74$

$$\text{caso b)} \beta = 1,55 \frac{Q_2}{Q_3} - \left(\frac{Q_2}{Q_3}\right)^2 = 0,231$$

Si ha dunque, per  $\xi_{1 \rightarrow 3}$

$$\text{caso a)} \xi_{1 \rightarrow 3} = 1 - (1 - 0,167)^2 - 1,74 \cdot 0,167^2 \cdot 4 = 0,112$$

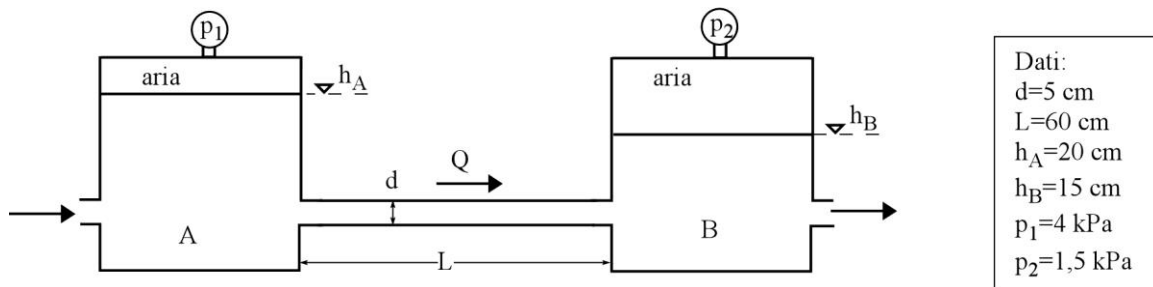
$$\text{caso b)} \xi_{1 \rightarrow 3} = 1 - (1 - 0,167)^2 - 0,231 \cdot 0,167^2 \cdot 4 = 0,280$$

e per la dissipazione di energia localizzata

**caso a)**  $\Delta E_{1 \rightarrow 3} = 0,112 \frac{1,911^2}{19,62} = 0,021 \text{ m}$

**caso b)**  $\Delta E_{1 \rightarrow 3} = 0,280 \frac{1,911^2}{19,62} = 0,052 \text{ m}$

### Esempio 5



Nel sistema di figura scorre, in condizioni laminari permanenti, un fluido incompressibile di densità  $\rho=1030 \text{ kg/m}^3$  e viscosità dinamica  $\mu=0,15 \text{ kg/ms}$ . Determinare la portata  $Q$  fluente dal recipiente A al recipiente B nei seguenti due casi:

- trascurando le dissipazioni di energia localizzate;
- tenendo conto delle dissipazioni di energia localizzate, assumendo per la dissipazione di imbocco  $\xi_{imb}=0,7$  e per quella di sbocco  $\xi_{sb}=2$ .

Nel sistema di figura, il bilancio di energia 'risolutivo' è quello scritto tra i due serbatoi

$$E_A = E_B + \Delta E_{A \rightarrow B}$$

dove  $E_A$  ed  $E_B$  rappresentano l'energia specifica del fluido contenuto rispettivamente nel recipiente A e nel recipiente B.

Per l'esplicitazione di questi termini, si noti innanzi tutto che per definizione un 'serbatoio' rappresenta una parte di un sistema idraulico nella quale, date le 'grandi' dimensioni del serbatoio stesso, la velocità del fluido è decisamente più piccola della velocità in condotta, tanto da poter essere trascurata. Si ha perciò

$$E_{\text{serb.}} = \left( \frac{p}{\gamma} + h \right)_{\text{serb.}}$$

cioè l'energia specifica del fluido entro il serbatoio coincide con la quota piezometrica. Quest'ultima grandezza è certamente costante in ogni punto entro il recipiente, data la condizione di quiete. Pertanto, può essere espressa ponendosi in un qualsiasi punto dentro il serbatoio.

Nel caso in esame, in particolare, si ha

$$E_A = \frac{p_1}{\gamma} + h_A = \frac{4000}{1030 \cdot 9,81} + 0,20 = 0,596 \text{ m}$$

$$E_B = \frac{p_2}{\gamma} + h_B = \frac{1500}{1030 \cdot 9,81} + 0,15 = 0,298 \text{ m}$$

Le dissipazioni di energia che la corrente subisce passando dal recipiente A al recipiente B sono diverse nei due casi proposti. In particolare:

**caso a)**

si devono considerare le sole dissipazioni continue. Pertanto

$$\Delta E_{A \rightarrow B} = jL$$

dove, da Darcy - Weisbach,  $j = \frac{f}{d} \frac{V^2}{2g}$ .

Essendo il moto, per ipotesi, in regime laminare, si ha per il coefficiente di resistenza

$$f = \frac{64}{Re}$$

Il coefficiente  $f$ , cioè, dipende a sua volta dalla velocità media in condotta (ossia dalla portata, incognita). Sostituendo nell'espressione di  $f$  la definizione di  $Re$  si arriva però facilmente ad ottenere, per l'equazione di Darcy-Weisbach

$$j = \frac{64\nu}{d^2} \frac{V}{2g} = \frac{64 \cdot (0,150/1030)}{0,05^2} \frac{V}{19,62} = 0,19V$$

Sostituendo nell'equazione di bilancio di energia si ha pertanto

$$0,596 = 0,298 + 0,19V \cdot L = 0,298 + 0,19V \cdot 0,60$$

da cui subito si calcola la velocità

$$V = \frac{0,596 - 0,298}{0,19 \cdot 0,60} = 2,614 \text{ m/s}$$

La portata vale perciò, nel caso esaminato

$$Q = VA = 2,614 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 0,00513 \text{ m}^3/\text{s} = 5,13 \text{ l/s}$$



Il numero di Reynolds vale pertanto

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{2,614 \cdot 0,05}{(0,15/1030)} = 897,66 \text{ cioè nel regime laminare, come ipotizzato.}$$

**caso b)**

si devono considerare sia le dissipazioni continue che le dissipazioni localizzate. Quest'ultime, in particolare, data la geometria del sistema, risultano essere dovute unicamente alle dissipazioni di imbocco ed a quelle di sbocco. Si ha pertanto, per il bilancio dell'energia tra A e B

$$E_A = E_B + jL + \xi_{imb} \frac{V^2}{2g} + \xi_{sb} \frac{V^2}{2g}$$

dove  $V$  è la velocità media nel condotto. Si noti che la velocità, e dunque anche la dissipazione unitaria  $j$ , saranno diverse, in termini numerici, da quanto ricavato nel caso a). La relazione che esprime il legame tra  $j$  e  $V$  è invece ancora data da  $j = 0,19V$ .

In sintesi, il bilancio di energia tra i due recipienti si scrive dunque

$$0,596 = 0,298 + 0,19V \cdot L + \frac{2,7}{19,62} V^2 = 0,298 + 0,19V \cdot 0,60 + 0,138V^2$$

da cui subito l'equazione di 2° grado in  $V$

$$0,138V^2 + 0,114V - 0,298 = 0$$

e dunque, per la velocità

$$V_{1,2} = \frac{-0,114 \pm \sqrt{0,114^2 + 4 \cdot 0,138 \cdot 0,298}}{2 \cdot 0,138}$$

Delle due soluzioni, risulta fisicamente significativa solo

$$V = 1,113 \text{ m/s}$$

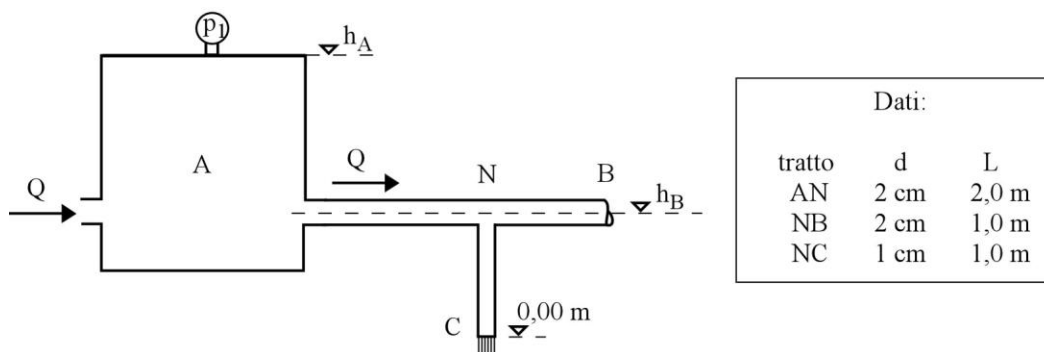
da cui la portata

$$Q = VA = 1,113 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 0,00218 \text{ m}^3/\text{s} = 2,18 \text{ l/s}$$

Il numero di Reynolds vale pertanto

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1,113 \cdot 0,05}{(0,15/1030)} = 382,21$$

### Esempio 6



Nel sistema di figura scorre, in condizioni laminari permanenti, un fluido incompressibile di densità  $\rho=850 \text{ kg/m}^3$  e viscosità dinamica  $\mu=0,015 \text{ kg/ms}$ . La portata che fluisce dal recipiente a tenuta A al nodo N è pari a  $Q=0,3 \text{ l/s}$ .

Sapendo che un manometro posto sul tetto del recipiente misura la pressione  $p_1/\gamma=0,5$  m e che il tetto del recipiente è posto a quota  $h_A=1,1$  m determinare:

1. l'energia  $E_N$  nel nodo N;
2. la portata  $Q_{NC}$  che fluisce lungo il ramo NC (dove C è sezione di sbocco libero in atmosfera) e la portata che fluisce lungo il ramo NB;
3. la quota piezometrica  $h_B^*$  e la pressione  $p_B/\gamma$  nella sezione B, sapendo che  $h_B=0,6$  m.

N.B.: si trascurino le dissipazioni localizzate in corrispondenza del nodo N e, in corrispondenza dell'imbocco dal recipiente A, si assuma  $\xi_{imb}=0,5$ .

**Domanda 1).**

L'energia nel nodo N può essere calcolata scrivendo l'equazione di bilancio dell'energia tra il recipiente A e il nodo stesso

$$E_A = E_N + \Delta E_{A \rightarrow N}$$

essendo

$$\Delta E_{A \rightarrow N} = j_{AN} L_{AN} + \xi_{imb} \frac{V_{AN}^2}{2g}$$

Preliminarmente, conviene determinare la velocità media  $V_{AN}$  e il numero di Reynolds  $Re_{AN}$

$$V_{AN} = \frac{Q}{A_{AN}} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 0,955 \text{ m/s}$$

$$Re_{AN} = \frac{V_{AN} \cdot d_{AN}}{\nu} = \frac{0,955 \cdot 0,02}{(0,015/850)} = 1082,33$$

Dissipazioni continue:

$$j_{AN} L_{AN} = \frac{f_{AN}}{d_{AN}} \frac{V_{AN}^2}{2g} L_{AN}$$

Poiché il regime di moto è laminare, si ha

$$f_{AN} = \frac{64}{Re_{AN}} = \frac{64}{1082,33} = 0,0591$$

e dunque

$$j_{AN} L_{AN} = \frac{0,0591}{0,02} \frac{0,955^2}{19,62} \cdot 2 = 0,275 \text{ m}$$

Dissipazioni localizzate:

la corrente considerata risente della sola perdita di imbocco

$$\xi_{imb} \frac{V_{AN}^2}{19,62} = 0,5 \cdot \frac{0,955^2}{19,62} = 0,023 \text{ m}$$

Si noti come l'entità di tale dissipazione sia, nell'esercizio proposto, molto piccola rispetto alla dissipazione continua.

Energia nel recipiente:

coincide con la quota piezometrica nel recipiente, pertanto

$$E_A = \frac{p_1}{\gamma} + h_A = 0,5 + 1,1 = 1,6 \text{ m}$$

Dal bilancio dell'energia precedentemente scritto si ha subito

$$E_N = E_A - \Delta E_{A \rightarrow N} = 1,6 - 0,275 - 0,023 = 1,302 \text{ m}$$

**Domanda 2).**

Relativamente alla portata fluente nel ramo NC, si può certamente affermare che essa scorre da N a C: C, infatti, è sezione di sbocco in atmosfera! Il bilancio di energia per la corrente che fluisce nel ramo in questione si scrive dunque da N a C

$$E_N = E_C + \Delta E_{N \rightarrow C}$$

Si osservi a questo punto che le dissipazioni che la corrente subisce da N a C sono le sole dissipazioni continue: in corrispondenza di uno sbocco in atmosfera, infatti, non si verifica alcuna dissipazione di energia. Pertanto

$$\Delta E_{N \rightarrow C} = j_{NC} \cdot L_{NC} = \frac{64\nu}{d^2} \frac{V_{NC}}{2g} \cdot L_{NC} = \frac{64 \cdot (0,015/850)}{0,01^2} \frac{V_{NC}}{19,62} \cdot 1 = 0,576 V_{NC}$$

Energia nella sezione C:

la sezione C è di sbocco in atmosfera: il fluido, pertanto, presenta pressione relativa nulla. Inoltre, dai dati del problema si ha  $h_C=0$ . L'energia è pari perciò al solo termine cinetico

$$E_C = 2 \frac{V_{NC}^2}{2g} = 0,102 V_{NC}^2$$

Il bilancio di energia da N a C pertanto porge

$$0,102 V_{NC}^2 + 0,576 V_{NC} - 1,302 = 0$$

da cui per la velocità

$$V_{NC} = \frac{-0,576 \pm \sqrt{0,576^2 + 4 \cdot 0,102 \cdot 1,302}}{2 \cdot 0,102}$$

la cui soluzione fisicamente significativa è

$$V_{NC} = 1,730 \text{ m/s}$$

La portata è quindi pari a

$$Q_{NC} = V_{NC} A_{NC} = 1,730 \cdot \frac{\pi \cdot 0,01^2}{4} = 0,000136 \text{ m}^3/\text{s} = 0,136 \text{ l/s}$$

e il numero di Reynolds

$$Re_{NC} = \frac{V_{NC} d_{NC}}{\nu} = \frac{1,730 \cdot 0,01}{(0,015/850)} = 980,33$$

La portata lungo il ramo NB si determina imponendo l'equazione di continuità nel nodo N. Supponendo che detta portata sia uscente dal nodo si ha

$$Q_{AN} = Q_{NC} + Q_{NB}$$

da cui

$$Q_{NB} = Q_{AN} - Q_{NC} = 0,3 - 0,136 = 0,164 \text{ l/s}$$

Il segno positivo del risultato mostra che l'ipotesi fatta circa il verso di  $Q_{NB}$  è corretta.

### Domanda 3).

Conoscere il verso della portata nel ramo NB permette di scrivere in modo corretto l'equazione di bilancio dell'energia lungo il ramo stesso

$$E_N = E_B + \Delta E_{N \rightarrow B}$$

Nell'equazione precedente, l'unico termine incognito è l'energia  $E_B$ , che pertanto può essere immediatamente calcolata.

Preliminarmente, conviene determinare la velocità media  $V_{NB}$  e il numero di Reynolds  $Re_{NB}$

$$V_{NB} = \frac{Q}{A_{NB}} = \frac{4 \cdot 0,164 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,02^2} = 0,522 \text{ m/s}$$

$$Re_{NB} = \frac{V_{NB} \cdot d_{NB}}{\nu} = \frac{0,522 \cdot 0,02}{(0,015/850)} = 591,93$$

Poiché il regime di moto è laminare, si ha

$$f_{NB} = \frac{64}{Re_{NB}} = \frac{64}{591,93} = 0,108$$

Le dissipazioni di energia da N a B, che sono le sole dissipazioni continue, sono perciò pari a

$$j_{NB}L_{NB} = \frac{0,108}{0,02} \frac{0,522^2}{19,62} \cdot 1 = 0,075 \text{ m}$$

e dunque l'energia in B

$$E_B = E_N - j_{NB}L_{NB} = 1,302 - 0,075 = 1,227 \text{ m}$$

La quota piezometrica è a questo punto immediatamente nota

$$h^*_B = E_B - 2 \frac{V_{NB}^2}{2g} = 1,227 - 2 \frac{0,522^2}{19,62} = 1,199 \text{ m}$$

e così pure la pressione

$$\frac{p_B}{\gamma} = h^*_B - h_B = 1,199 - 0,6 = 0,599 \text{ m}$$



### 5.5 Equazione di bilancio dell'energia in presenza di una pompa.

Dal punto di vista strettamente fluidodinamico, una pompa può essere definita come un *dispositivo atto ad incrementare l'energia di una corrente*. Nell'equazione di bilancio dell'energia scritta tra due sezioni di una corrente che lungo il percorso incontra una pompa, l'energia trasferita dalla pompa al fluido va pertanto 'aggiunta' all'energia della corrente nella sezione di monte, come si chiarirà meglio negli esempi proposti nel prossimo paragrafo.

In generale, una pompa viene inserita in un sistema idraulico per permettere il flusso di una portata maggiore di quella che competerebbe al sistema in assenza della pompa (come 'caso limite' si consideri un sistema a circuito chiuso, nel quale il moto avviene solo grazie alla presenza di una pompa: si pensi, in tal senso, al sistema cardiovascolare) ovvero per permettere il flusso nel verso opposto a quello che la differenza di energia caratteristica del sistema prevederebbe.

Una trattazione completa del funzionamento e delle tipologie di pompe esula dagli scopi di queste dispense. Nel seguito vengono pertanto esposte le definizioni fondamentali di interesse per l'applicazione a problemi di fluidodinamica, rimandando a testi inerenti al funzionamento delle macchine idrauliche il lettore interessato ad approfondire l'argomento.

- **Prevalenza:** è l'energia che la pompa trasferisce all'unità di peso fluido. Viene indicata con il simbolo  $H_P$ , ed ha l'unità di misura di una lunghezza.

- *Potenza utile:* è la potenza che la pompa trasferisce al fluido. Viene indicata con il simbolo  $P_u$ , ed ha l'unità di misura di una potenza meccanica (nel SI, il Watt (W)). Indicando con  $Q$  la portata fluida pompata, e con  $\gamma$  il peso specifico del fluido, la prevalenza e la potenza utile sono tra loro legate dalla relazione

$$P_u = \gamma Q H_p \quad (5.11)$$

- *Potenza assorbita:* è la potenza che la pompa ha bisogno di assorbire da un generatore di corrente per poter trasferire al fluido la data potenza utile. Viene indicata con il simbolo  $P_{ass}$ , ed ha l'unità di misura di una potenza meccanica.
- *Rendimento:* è definito come il rapporto  $P_u/P_{ass}$  tra la potenza utile e la potenza assorbita e, pertanto, è un numero puro inferiore all'unità. Viene indicato con il simbolo  $\eta$ . Per pompe nuove e di adeguata costruzione  $\eta$  si aggira intorno a 0,8-0,9. Può scendere, in caso di macchine vecchie, sino a 0,5 e oltre.

Ogni pompa è dotata dalla propria *curva caratteristica*, rappresentativa del legame tra la prevalenza fornita e la portata fluida pompata (Figura 5.4). La curva caratteristica dipende dalle modalità costruttive della pompa: le *pompe centrifughe* (in cui una o più giranti dotate di palette opportunamente sagomate mettono in movimento il fluido dal centro verso la periferia) hanno in genere una curva caratteristica di tipo A, la cui pendenza può variare in funzione del numero delle giranti o dell'inclinazione delle palette. Una curva caratteristica di tipo B è invece tipica delle *pompe volumetriche*, che vengono

così chiamate proprio perché trattano portate volumetriche di fluido praticamente indipendenti dalla prevalenza trasferita al fluido stesso.

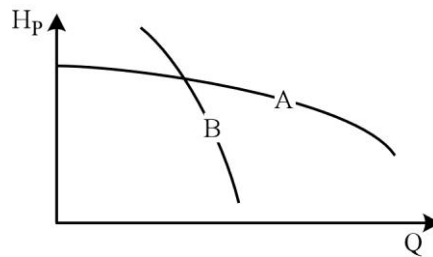
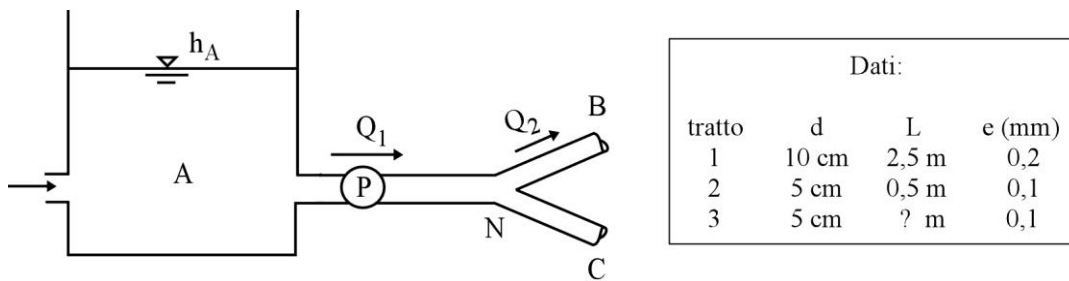


Figura 5.4. Esempi di curve caratteristiche di una pompa.

## 5.6 Esempi applicativi.

### Esempio 1



Nel sistema di figura, in cui scorre acqua, la superficie libera nel recipiente A è posta alla quota  $h_A=0,6$  m. La portata  $Q_1=15$  l/s viene pompata lungo il tratto 1 sino al nodo N, nel quale l'energia vale  $E_N=2,4$  m. In N, la corrente si dirama. In particolare, nel tratto 2, dal nodo alla sezione B, fluisce  $Q_2$  pari a  $Q_1/2$ . Determinare:

1. la prevalenza  $H_p$  e la potenza  $P_u$  della pompa P;

2. l'energia  $E_B$  e la pressione  $p_B/\gamma$  della corrente nella sezione B, la cui quota geodetica è  $h_B=0,3$  m;
3. la portata  $Q_3$  fluente lungo il tratto 3 (da N a C);
4. la lunghezza  $L_3$  del tratto 3, sapendo che l'energia della corrente nella sezione C vale  $E_C=0,80$  m.

N.B. si trascurino le dissipazioni di energia localizzate in corrispondenza del nodo N.

**Domanda 1).**

E' possibile innanzi tutto caratterizzare cinematicamente la corrente che dal recipiente viene pompata sino al nodo. Vale infatti

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{4 \cdot 0,015}{\pi \cdot 0,10^2} = 1,911 \text{ m/s}$$

Il numero di Reynolds è pertanto pari a

$$Re_1 = \frac{V_1 d_1}{\nu} = \frac{1,911 \cdot 0,10}{1 \cdot 10^{-6}} = 191082,50$$

La corrente 1 fluisce, cioè, in condizioni di moto turbolento.

Nel percorso dal recipiente A al nodo N la corrente incontra la pompa P, che trasferisce al fluido la prevalenza  $H_p$ . Nel bilancio di energia lungo il tratto 1, la prevalenza va conteggiata 'dalla parte dell'energia' a disposizione della corrente. Si ha cioè

$$E_A + H_P = E_N + \Delta E_1$$

essendo

$$\Delta E_1 = j_1 L_1 + \xi_{imb} \frac{V_1^2}{2g}$$

Dissipazioni continue:

$$j_1 L_1 = \frac{f_1}{d_1} \frac{V_1^2}{2g} L_1$$

Poiché il regime di moto è turbolento,  $f_1$  va calcolata per mezzo dell'equazione di Colebrook-White, essendo  $Re_1=191082,50$  e  $(e/d)_1=(0,0002/0,1)=0,002$ . Procedendo con il metodo iterativo visto in uno degli esempi precedenti, si ottiene

$f_1$ tent	$f_1$ calc
0,02340	0,02435
0,02435	0,02434
<b>0,02434</b>	<b>0,02434</b>

e dunque

$$j_1 L_1 = \frac{0,02434}{0,10} \frac{1,911^2}{19,62} \cdot 2,5 = 0,113 \text{ m}$$

Dissipazioni localizzate:

la corrente considerata risente della sola perdita di imbocco il cui

coefficiente, essendo il moto turbolento, è pari a 0,5

$$\xi_{\text{imb}} \frac{V_1^2}{19,62} = 0,5 \cdot \frac{1,911^2}{19,62} = 0,093 \text{ m}$$

### Energia nel recipiente:

coincide con la quota piezometrica nel recipiente, pertanto

$$E_A = h_A = 0,6 \text{ m}$$

Dal bilancio dell'energia precedentemente scritto si ha quindi subito la prevalenza

$$H_P = E_N + \Delta E_1 - E_A = 2,4 + 0,113 + 0,093 - 0,6 = 2,006 \text{ m}$$

La potenza utile discende immediatamente dall'equazione (5.11)

$$P_u = \gamma Q H_P = 9810 \cdot 0,015 \cdot 2,006 = 295,183 \text{ W}$$

### **Domanda 2).**

E' possibile caratterizzare cinematicamente da subito anche la corrente lungo il tratto 2, poiché si sa che  $Q_2 = Q_1/2 = 7,5 \text{ l/s}$ . Vale pertanto

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{4 \cdot 0,0075}{\pi \cdot 0,05^2} = 3,822 \text{ m/s}$$

$$Re_2 = \frac{V_2 d_2}{\nu} = \frac{3,822 \cdot 0,05}{1 \cdot 10^{-6}} = 191082,50 = Re_1$$

Anche la corrente 2 si sviluppa, dunque, in regime turbolento.

Il bilancio di energia lungo il tratto 2 si scrive

$$E_N = E_B + \Delta E_2$$

essendo

$$\Delta E_2 = j_2 L_2$$

Dissipazioni continue:

$$j_2 L_2 = \frac{f_2}{d_2} \frac{V_2^2}{2g} L_2$$

Poiché il regime di moto è turbolento,  $f_2$  va calcolata per mezzo dell'equazione di Colebrook-White, essendo  $Re_2=191082,50$  e  $(e/d)_2=(0,0001/0,05)=0,002$ . Poiché però i predetti parametri risultano avere i medesimi valori che caratterizzano il moto nel tratto 1, si può subito affermare che  $f_2=f_1=0,02434$ . Pertanto

$$j_2 L_2 = \frac{0,02434}{0,05} \frac{3,822^2}{19,62} \cdot 0,5 = 0,181 \text{ m}$$

Nella sezione B l'energia vale perciò

$$E_B = E_N - j_2 L_2 = 2,4 - 0,181 = 2,219 \text{ m}$$

e la pressione

$$\frac{p_B}{\gamma} = E_B - h_B - \frac{V_2^2}{2g} = 2,219 - 0,3 - \frac{3,822^2}{19,62} = 1,174 \text{ m}$$

**Domanda 3).**

La portata nel tratto 3 discende subito dall'equazione di continuità nel nodo. Dai dati del problema, si può affermare che  $Q_3=Q_2=Q_1/2=7,5 \text{ l/s}$ , con verso dal nodo alla sezione C.

**Domanda 4).**

I dati del problema e la risposta della domanda precedente mostrano che lungo il tratto 3 la corrente presenta le stesse caratteristiche cinematiche, di scabrezza relativa e pertanto anche di resistenza al moto già individuati per il tratto 2. In particolare, la dissipazione unitaria vale

$$j_3 = \frac{0,02434}{0,05} \frac{3,822^2}{19,62} = 0,362$$

Dal bilancio di energia tra N e C si ha pertanto

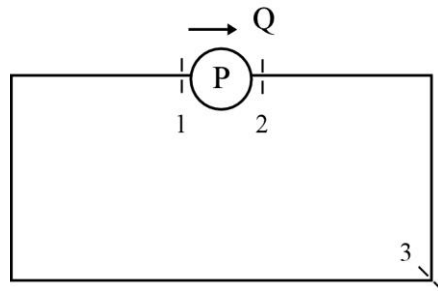
$$L_3 = \frac{E_N - E_C}{j_3} = \frac{2,4 - 0,8}{0,362} = 4,420 \text{ m}$$


---



*Esempio 2*

Il sistema a circuito chiuso di figura, nel quale scorre un fluido incompressibile di peso specifico  $\gamma = 1,5\gamma_{H_2O}$  e viscosità cinematica  $\nu = 10\nu_{H_2O}$ , è costituito da un condotto di diametro  $d = 1$  cm e lunghezza complessiva  $L = 5$  m e dalla pompa P la cui potenza assorbita è  $P_{ass} = 1$  W. Sapendo che il rendimento della pompa è pari a  $\eta = 0,8$  e che il moto si svolge in condizioni laminari, determinare la portata fluente  $Q$  e la prevalenza della pompa  $H_p$ . Sapendo inoltre che nella sezione 1, subito a monte della pompa, la pressione è pari a  $p_1/\gamma = 2$  m, determinare la pressione nella sezione 2, posta subito a valle della pompa, e nella sezione 3, posta ad una distanza dalla sezione 1 pari a  $L/3$ . Si trascurino in ogni caso le dissipazioni localizzate di energia e le differenze di quota geodetica.



In un sistema a circuito chiuso, qualsiasi sezione del circuito può essere evidentemente considerata tanto sezione 'di monte' quanto sezione 'di valle' dell'intero percorso, sicché l'equazione di bilancio dell'energia scritta partendo dalla generica sezione ed arrivando alla sezione stessa seguendo l'intera lunghezza  $L$  semplicemente porge

$$H_P = \Delta E_{\text{tot}}$$

dove  $\Delta E_{\text{tot}}$  rappresenta l'insieme di tutte le dissipazioni di energia di cui la corrente risente lungo l'intero circuito.

Nel circuito di figura, le dissipazioni che interessano sono le sole dissipazioni continue, e dunque

$$H_P = j \cdot L$$

Dai dati del problema si può anzitutto valutare la potenza utile della pompa

$$P_u = \eta P_{\text{ass}} = 0,8 \cdot 1 = 0,8 \text{ W}$$

Nota  $P_u$ , per la prevalenza si può scrivere

$$H_P = \frac{P_u}{\gamma Q} = \frac{0,8}{1,5 \cdot 9810 \cdot Q} = \frac{5,437 \cdot 10^{-5}}{Q}$$

Per le dissipazioni di energia continue, ricordando quanto visto in esempi precedenti in caso di moto laminare

$$j = \frac{64\nu}{d^2} \frac{V}{2g} = \frac{64\nu}{d^2} \frac{4Q}{2g\pi d^2} = \frac{64 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 4}{0,01^4 \cdot 19,62 \cdot \pi} Q = 4155,38Q$$

e dunque

$$jL = 4155,38 \cdot Q \cdot 5 = 20776,9Q$$

Si ottiene perciò

$$\frac{5,437 \cdot 10^{-5}}{Q} = 20776,9Q$$

da cui

$$Q = \sqrt{\frac{5,437 \cdot 10^{-5}}{20776,9}} = 5,116 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 0,05116 \text{ l/s}$$

La velocità e il numero di Reynolds valgono pertanto

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot 5,116 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot 0,01^2} = 0,652 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,652 \cdot 0,01}{1 \cdot 10^{-5}} = 652$$

cioè il regime è laminare, come ipotizzato.

La prevalenza, infine, risulta pari a

$$H_P = \frac{5,437 \cdot 10^{-5}}{Q} = 1,063 \text{ m}$$

La pressione nella sezione 2 si ricava dal bilancio dell'energia tra la sezione 1 e la sezione 2 stessa, nel quale non compare alcuna dissipazione di energia, data la distanza del tutto trascurabile tra le due sezioni

$$E_1 + H_P = E_2$$

da cui subito

$$\frac{p_1}{\gamma} + H_P = \frac{p_2}{\gamma} = 2 + 1,063 = 3,063 \text{ m}$$

tenendo conto del fatto che le due sezioni si trovano alla stessa quota geodetica e presentano la medesima energia cinetica.

Allo stesso modo, la pressione nella sezione 3 si ricava dal bilancio dell'energia tra la sezione 1 e la sezione 3 stessa, tenendo conto delle dissipazioni continue lungo il percorso, proporzionali a  $L/3$ , e trascurando la differenza di quota geodetica tra le due sezioni

$$E_1 + H_P = E_3 + j \frac{L}{3}$$

in cui

$$j = 4155,38 \cdot 5,116 \cdot 10^{-5} = 0,213$$

Vale perciò

$$\frac{p_3}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + H_P - j \frac{L}{3} = 2 + 1,063 - 0,213 \cdot \frac{5}{3} = 2,713 \text{ m}$$

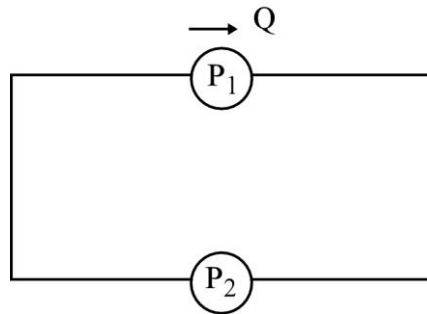
### *Esempio 3*

Nel sistema a circuito chiuso di figura scorre la portata d'acqua  $Q=10 \text{ l/s}$ . Il condotto ha diametro  $d=10 \text{ cm}$ , scabrezza relativa  $e/d=0,00015$  ed è complessivamente lungo  $L=3 \text{ m}$ . Nel sistema sono presenti la pompa  $P_1$  e la pompa  $P_2$ . Si considerino le seguenti due possibilità di funzionamento:

1. entrambe le pompe sono attive, e la potenza utile erogata da  $P_1$  è

- uguale alla potenza utile erogata da  $P_2$ . In queste condizioni, calcolare la prevalenza e la potenza utile di ciascuna pompa.
2. è in funzione una sola pompa. In questo caso, calcolare la portata  $Q'$  che fluisce nel circuito, nell'ipotesi che non sia cambiata rispetto al caso precedente la potenza utile della pompa. Si consideri invariato anche il coefficiente di resistenza  $f$  del moto nel condotto.

*N.B: si trascurino le dissipazioni di energia localizzate.*



**Domanda 1).**

E' possibile innanzi tutto caratterizzare cinematicamente la corrente nel circuito. Vale infatti

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot 0,010}{\pi \cdot 0,10^2} = 1,274 \text{ m/s}$$

Il numero di Reynolds è pertanto pari a

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1,274 \cdot 0,10}{1 \cdot 10^{-6}} = 127400$$

La corrente si sviluppa, cioè, in regime turbolento.

Si osservi ora che se la potenza utile delle due pompe è la stessa (la si indichi con  $P_u$ ), è la stessa anche la prevalenza che ciascuna pompa fornisce alla corrente, poiché è la medesima la portata pompata da  $P_1$  e quella pompata da  $P_2$ . Detta  $H_P$  la prevalenza di ciascuna pompa, il bilancio di energia lungo l'intero circuito porge pertanto

$$2H_P = jL$$

La valutazione della dissipazione unitaria di energia richiede la valutazione del coefficiente di resistenza  $f$  per mezzo dell'equazione di Colebrook-White, in corrispondenza dei parametri  $Re=127400$  e  $e/d=0,00015$ . La procedura iterativa porge

<b>f tent</b>	<b>f calc</b>
0,01295	0,01857
0,01857	0,01796
0,01796	0,01801
<b>0,01801</b>	<b>0,01801</b>

Si ha perciò

$$j = \frac{0,01801}{0,1} \frac{1,274^2}{19,62} = 0,0149$$

da cui subito la prevalenza di ciascuna delle due pompe

$$H_P = \frac{jL}{2} = \frac{0,0149 \cdot 3}{2} = 0,0223 \text{ m}$$

e la potenza utile, ancora di ciascuna pompa

$$P_u = \gamma Q H_P = 9810 \cdot 0,01 \cdot 0,0223 = 2,188 \text{ W}$$

**Domanda 2).**

Con una sola pompa in funzione, il bilancio di energia lungo il circuito si scrive

$$H'_P = j' L$$

Per la prevalenza si può scrivere

$$H'_P = \frac{P_u}{\gamma Q'} = \frac{2,188}{9810 Q'} = \frac{2,23 \cdot 10^{-4}}{Q'}$$

e per le dissipazioni

$$j' L = \frac{0,01801}{0,1} \frac{V'^2}{19,62} \cdot 3 = \frac{0,01801}{0,1} \frac{Q'^2}{19,62} \left( \frac{4}{\pi \cdot 0,1^2} \right)^2 \cdot 3 = 446,886 Q'^2$$

Si ha perciò

$$\frac{2,23 \cdot 10^{-4}}{Q'} = 446,886 Q'^2$$

da cui

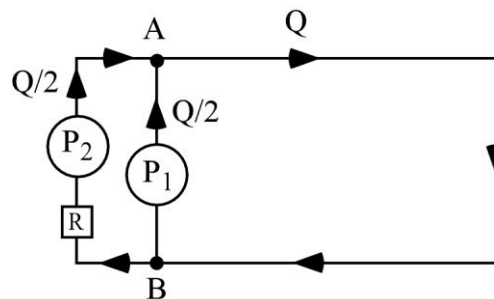
$$Q' = \left( \frac{2,23 \cdot 10^{-4}}{446,886} \right)^{1/3} = 7,932 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$


---

*Esempio 4*

1. Nei diversi rami del sistema di figura fluiscono, con il rubinetto R completamente aperto, la portata d'acqua  $Q$  e la portata d'acqua  $Q/2$  secondo quanto indicato. Entrambe le pompe  $P_1$  e  $P_2$  sono in funzione, e ciascuna eroga la medesima potenza utile  $P_u=20$  W. Il numero di resistenza è costante in tutto il sistema, e pari a  $f=0,02$ . Inoltre, la lunghezza del ramo AB percorso da  $Q$  è pari a  $L=2,5$  m e la lunghezza del ramo BA in cui è posta  $P_1$  è pari a  $l=0,5$  m. Tutti i diversi tratti hanno diametro  $d=5$  cm. Nelle condizioni sopra descritte, determinare la portata  $Q$  e la prevalenza di ciascuna delle due pompe.
3. Nel medesimo sistema, ma con il rubinetto R completamente chiuso, si calcolino la prevalenza e la potenza utile da assegnare alla pompa  $P_1$  affinché  $Q$  rimanga invariata rispetto al caso precedente. Si assuma ancora ovunque  $f=0,02$ .

*N.B: si trascurino in ogni caso le dissipazioni di energia localizzate.*



**Domanda 1).**

Si osservi innanzi tutto che essendo uguale la potenza utile  $P_u$  erogata sia da



$P_1$  che da  $P_2$ , e poiché la portata pompata da  $P_1$  è pari alla portata pompata da  $P_2$  (ciascuna pari a  $Q/2$ ) la prevalenza di  $P_1$  è uguale alla prevalenza di  $P_2$ . Vale cioè per la prevalenza

$$H_{P_1} = H_{P_2} = H_P = \frac{P_u}{\gamma Q/2} = \frac{2P_u}{\gamma Q} = \frac{2 \cdot 20}{9810 \cdot Q} = \frac{4,077 \cdot 10^{-3}}{Q}$$

Si osservi ora che il sistema considerato non può dirsi, nonostante sia 'geometricamente' chiuso, un circuito idraulico chiuso. In realtà, infatti, è costituito da tre correnti distinte: la corrente da  $A$  a  $B$  lungo il ramo principale e le due correnti da  $B$  ad  $A$ , ciascuna lungo uno dei due rami dotati di pompa. E' quindi opportuno descrivere idraulicamente il sistema scrivendo le equazioni di bilancio dell'energia per ciascuna corrente. Peraltro, tenendo conto delle affermazioni esposte circa la prevalenza delle pompe, si può facilmente vedere che il bilancio di energia lungo il ramo con  $P_1$  e il bilancio di energia lungo il ramo con  $P_2$  sono assolutamente identici.

Pertanto, le equazioni che interessano (visti anche i dati a disposizione) sono da  $A$  a  $B$  lungo il ramo 'principale', entro il quale fluisce  $Q$

$$E_A = E_B + \Delta E_{A \rightarrow B}$$

da  $B$  ad  $A$  lungo il ramo in cui è posta  $P_1$ , entro il quale fluisce  $Q/2$

$$E_B + H_P = E_A + \Delta E_{(B \rightarrow A)_1}$$

Dalle due equazioni si ricava quindi immediatamente

$$H_P = \Delta E_{A \rightarrow B} + \Delta E_{(B \rightarrow A)_1} \quad \text{Eq.ne (a)}$$

### Dissipazioni da A a B:

sono le sole dissipazioni continue, poiché per ipotesi le dissipazioni localizzate non devono essere considerate. Possono essere espresse in funzione della portata secondo la relazione

$$\Delta E_{A \rightarrow B} = j_{AB} L = \frac{f}{d} \frac{V_{AB}^2}{2g} L = \frac{f}{d} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} L = \frac{8f}{\pi^2 d^5} \frac{Q^2}{g} L = \frac{8 \cdot 0,02}{\pi^2 0,05^5} \frac{Q^2}{9,81} 2,5 = 13233,71 Q^2$$

### Dissipazioni da B ad A lungo il percorso 1:

sono anch'esse le sole dissipazioni continue, che possono essere espresse in funzione della portata secondo la relazione

$$\Delta E_{(B \rightarrow A)_1} = j_{BA} l = \frac{f}{d} \frac{V_{BA}^2}{2g} l = \frac{f}{d} \frac{16(Q/2)^2}{2g\pi^2 d^4} l = \frac{2f}{\pi^2 d^5} \frac{Q^2}{g} l = \frac{2 \cdot 0,02}{\pi^2 0,05^5} \frac{Q^2}{9,81} 0,5 = 661,68 Q^2$$

L'equazione (a) perciò diventa, tenuto conto anche della relazione precedentemente scritta tra la prevalenza  $H_P$  e la portata  $Q$

$$\frac{4,077 \cdot 10^{-3}}{Q} = 13233,71 Q^2 + 661,68 Q^2 = 13895,39 Q^2$$

da cui la portata

$$Q = \sqrt[3]{\frac{4,077 \cdot 10^{-3}}{13895,39}} = 6,645 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 6,645 \text{ l/s}$$

La prevalenza fornita all'acqua da ciascuna pompa è pertanto pari a

$$H_P = \frac{4,077 \cdot 10^{-3}}{6,645 \cdot 10^{-3}} = 0,613 \text{ m}$$

**Domanda 2).**

Quando il rubinetto R è completamente chiuso, il sistema si riduce, dal punto di vista fluidodinamico, al circuito chiuso ABA composto dal ramo principale da A a B e dal ramo da B ad A dove è posta  $P_1$ . In tale circuito circola, per ipotesi, la medesima portata  $Q$  ricavata alla domanda precedente.

Il bilancio di energia lungo il circuito chiuso pertanto porge

$$H'_P = j'(L+1)$$

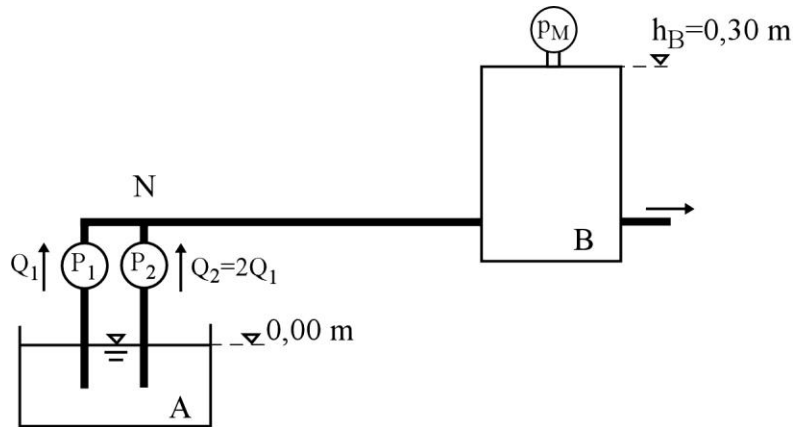
dove  $j'$  coincide con la dissipazione unitaria  $j_{AB}$  espressa alla domanda precedente (si verifichi l'affermazione). La nuova prevalenza di  $P_1$  vale perciò

$$H'_P = \frac{8 \cdot f}{\pi^2 d^5} \frac{Q^2}{g} (L+1) = \frac{8 \cdot 0,02}{\pi^2 0,05^5} \frac{(6,645 \cdot 10^{-3})^2}{9,81} (2,5 + 0,5) = 0,701 \text{ m}$$

e la potenza utile

$$P'_u = \gamma Q H'_P = 9810 \cdot 6,645 \cdot 10^{-3} \cdot 0,701 = 45,71 \text{ W}$$

## Esempio 5



Nel sistema di figura, un fluido incompressibile di peso specifico  $\gamma=10800$  N/m<sup>3</sup> e viscosità cinematica  $\nu=2\cdot 10^{-5}$  kg/ms viene trasferito dal recipiente a superficie libera A al recipiente a tenuta B, grazie alle pompe  $P_1$  e  $P_2$ . Sapendo che la portata sollevata da  $P_1$  vale  $Q_1=0,035$  l/s, che i condotti hanno diametro  $d=1$  cm e che il tratto dal nodo N al recipiente B è lungo  $L=2$  m, determinare

1. la portata  $Q$  complessivamente trasferita al recipiente B;
2. la prevalenza e la potenza utile da assegnare a ciascuna delle due pompe affinché la pressione relativa  $p_M$  agente sul tetto del recipiente B sia positiva.

*N.B. Si trascurino tutte le dissipazioni localizzate, nonché le dissipazioni continue da A ad N.*

Si lascia lo svolgimento al lettore. Suggerimento per la seconda domanda: si scriva l'espressione dell'equazione di bilancio dell'energia da A ad N lungo il

tratto con la  $P_1$  e l'espressione dell'equazione di bilancio dell'energia da A ad N lungo il tratto con la  $P_2$  per 'ragionare' sulla prevalenza delle due pompe....

### 5.7 Spinta di una corrente su una superficie di contatto.

Un fluido in movimento esercita sulle superfici con cui è a contatto (tipicamente, i contorni entro i quali si realizza il moto) una spinta  $\vec{S}$  dipendente dallo stato di pressione agente in ogni punto della superficie e dalla geometria della superficie stessa.

La definizione di  $\vec{S}$  è ancora quella introdotta nel capitolo dedicato all'idrostatica (equazione 2.5). Tuttavia, in condizioni dinamiche, la distribuzione delle pressioni agente sulla generica superficie considerata è in generale ben lungi dall'andamento idrostatico ed il calcolo di  $\vec{S}$  non può perciò, nella pratica applicazione, essere svolto a partire dalla sua definizione.

Quando la corrente sia in moto permanente e nell'ipotesi che il fluido sia incomprimibile, si è in grado di valutare una spinta in condizioni dinamiche applicando il *teorema della quantità di moto*, che impone l'equilibrio di tutte le forze (comprese, quindi, quelle legate all'inerzia del fluido) agenti su di un prescelto *volume di controllo*.

L'applicazione di detto teorema al calcolo della spinta su una superficie a contatto con il fluido in movimento richiede di operare oculatamente la scelta del volume fluido da isolare, ed al quale imporre la condizione di

equilibrio. Il volume, innanzi tutto, deve essere racchiuso da una superficie  $A_{\text{tot}}$  che in parte è ideale ma che certamente deve contenere per intero la superficie di contatto  $A$  sulla quale si vuole valutare la spinta. In secondo luogo, la porzione di superficie  $A_i$  attraverso la quale si ha l'ingresso della corrente nel volume di controllo e la porzione di superficie  $A_u$  attraverso la quale si ha l'uscita della corrente dal volume di controllo devono essere piane e le correnti che le attraversano devono potersi dire monodimensionali. In definitiva, quindi, per la superficie totale che racchiude il volume si può scrivere

$$A_{\text{tot}} = A + A_i + A_u + A_r$$

dove  $A_r$  è la porzione di superficie eventualmente presente che non è parte della superficie su cui si vuole calcolare la spinta e non è nemmeno superficie di ingresso o di uscita della corrente.

Il volume fluido racchiuso seguendo i criteri sopradetti è sollecitato da un sistema di forze di volume e di superficie, la cui somma vettoriale deve essere nulla, per garantire l'equilibrio del volume stesso. Nella pratica applicazione, le forze da considerare sono:

- $\vec{G}$ : forza peso del volume fluido isolato. Sarà sempre, per definizione, una forza verticale diretta verso il basso, di modulo pari a  $G = \gamma V$ , essendo  $V$  il volume isolato.
- $\vec{P}_i$ : è la forza che agisce sul volume di controllo attraverso la superficie  $A_i$  in virtù dello stato di pressione agente su detta superficie. Poiché la corrente che attraversa  $A_i$  è

monodimensionale, sulla superficie la pressione è distribuita idrostaticamente. Ricordando che  $A_i$  è piana, si ha dunque per il modulo:  $P_i = p_{G_i} A_i$ , dove  $p_{G_i}$  è la pressione baricentrica.  $\vec{P}_i$  inoltre è diretta normalmente ad  $A_i$ , ed il suo verso dipende dal segno di  $p_{G_i}$ .

- $\vec{P}_u$ : è la forza che agisce sul volume di controllo attraverso la superficie  $A_u$  in virtù dello stato di pressione agente su detta superficie. Per essa valgono le medesime considerazioni espresse al punto precedente (naturalmente cambiando opportunamente il pedice alle grandezze significative).
- $\vec{P}_r$ : è la forza che agisce sul volume di controllo attraverso la superficie  $A_r$  in virtù dello stato di pressione agente su detta superficie. Per la sua valutazione, se necessaria per il calcolo della spinta  $\vec{S}$ , si ragiona 'di volta in volta' nello specifico caso applicativo.
- $\vec{R}$ : è la reazione che la superficie di contatto  $A$  esercita sul volume di controllo, opponendosi allo stato di pressione che il fluido imprime alla superficie  $A$ . Essa è dunque uguale e contraria alla spinta  $\vec{S}$ .
- $\vec{D}_i$ : è la *spinta dinamica* (o inerziale) che la corrente in ingresso esercita sul volume isolato attraverso la superficie  $A_i$ . Essa ha la direzione della velocità della corrente in ingresso, e

verso tale da comprimere il volume di controllo. Il suo modulo è pari a  $D_i = \rho Q V_i$ , dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $Q$  è la portata e  $V_i$  è la velocità media della corrente attraverso  $A_i$ . A rigori, nell'espressione del modulo andrebbe considerato il coefficiente moltiplicativo  $\beta$ , che tiene conto dell'effettivo profilo delle velocità nella sezione. Come già visto, però, di fatto si assume  $\beta=1$ .

- $\bar{D}_u$ : è la spinta dinamica (o inerziale) che la corrente in uscita esercita sul volume isolato attraverso la superficie  $A_u$ . Per essa valgono le medesime considerazioni espresse al punto precedente (naturalmente cambiando opportunamente il pedice alle grandezze significative).

L'equilibrio del volume di controllo, ovvero il teorema della quantità di moto applicato al volume di controllo, risulta pertanto espresso dalla relazione vettoriale

$$\bar{G} + \bar{P}_i + \bar{P}_u + \bar{P}_r + \bar{R} + \bar{D}_i + \bar{D}_u = 0 \quad (5.12)$$

Tenendo conto di quanto sopra affermato riguardo alla reazione  $\bar{R}$ , dall'equazione (5.12) si deduce immediatamente l'espressione (vettoriale!) della spinta che il fluido esercita sulla superficie  $A$

$$\bar{S} = -\bar{R} = \bar{G} + \bar{P}_i + \bar{P}_u + \bar{P}_r + \bar{D}_i + \bar{D}_u \quad (5.13)$$

La valutazione concreta di  $\bar{S}$  deve naturalmente essere svolta

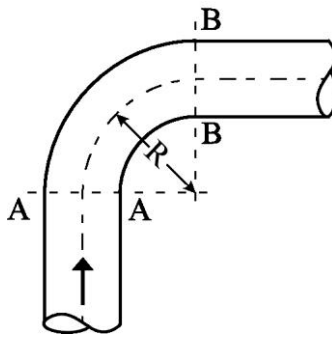


proiettando la (5.13) lungo gli assi del sistema di riferimento. Si osservi che le relazioni scalari che ne derivano esprimono l'equilibrio del volume di controllo nella direzione degli assi stessi.

Per concludere, si osserva per completezza che, avendo normalmente a che fare con un fluido viscoso, sul volume di controllo agisce anche, a rigori, la forza dovuta alla distribuzione di  $\tau$  sulla superficie  $A_{\text{tot}}$ . Normalmente, detta forza viene trascurata poiché di modesta entità rispetto alle altre forze in gioco.

### 5.8 Esempi applicativi.

#### Esempio 1



Il condotto di figura ha diametro  $d=10$  cm ed è percorso, nel verso indicato, dalla portata  $Q=5$  l/s. Il fluido incompressibile che vi scorre ha peso specifico  $\gamma=10300$  N/m<sup>3</sup>. Il gomito AB è a 90° ed il suo raggio di curvatura è pari a  $R=15$  cm. Nella sezione A vige la pressione  $p_A/\gamma=0,35$  m. Nell'ipotesi di poter trascurare tutte le dissipazioni di energia da A a B, determinare la spinta  $\vec{S}$  che il fluido esercita sul gomito.

Il volume di controllo da isolare ed al quale imporre la condizione di equilibrio è il volume fluido contenuto entro il gomito: esso è racchiuso dalla superficie del condotto nel tratto da A a B (che è la superficie di contatto su cui si vuole calcolare la spinta) dalla sezione A (che è la superficie di ingresso della corrente) e dalla sezione B (che è la sezione di uscita della corrente).

Si osservi come tale scelta per il volume di controllo segua tutti i criteri esposti nel paragrafo 5.7 e come, in questo caso, sia  $A_r=0$ .

Dall'equazione (5.13) si ha quindi subito l'espressione vettoriale della spinta cercata

$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{P}_A + \vec{P}_B + \vec{D}_A + \vec{D}_B$$

con ovvio significato dei pedici assegnati alle forze in gioco.

#### Forza peso:

il suo modulo è pari al peso fluido del volume del gomito

$$G = \gamma V = \gamma \frac{\pi d^2}{4} \frac{\pi R}{2} = 10300 \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \frac{\pi \cdot 0,15}{2} = 19,041 \text{ N}$$

ed è diretta secondo la verticale, verso il basso.

#### Spinte dinamiche

La valutazione delle spinte  $D_A$  e  $D_B$  richiede la conoscenza delle velocità medie nelle due sezioni. Dalla definizione di velocità media, e tenuto conto dell'equazione di continuità (la portata è costante lungo tutto il condotto!) si ha

$$V_A = V_B = V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot 0,005}{\pi \cdot 0,1^2} = 0,637 \text{ m/s}$$

Le due spinte dinamiche sono dunque uguali in modulo, pari a

$$D_A = D_B = \rho Q V = (10300/9,81) \cdot 0,005 \cdot 0,637 = 3,344 \text{ N}$$

Infine, in base a quanto esposto nel paragrafo 5.7, si può affermare che la spinta dinamica attraverso la sezione A è diretta lungo la verticale, verso l'alto, mentre la spinta dinamica attraverso la sezione B è diretta lungo l'orizzontale, verso sinistra.

### Spinte di pressione

Per determinare le forze  $P_A$  e  $P_B$  è necessario conoscere la pressione baricentrica sia nella sezione A che nella sezione B. Dai dati del problema, si ha immediatamente per la pressione baricentrica in A

$$p_A = 0,35 \cdot 10300 = 3605 \text{ N/m}^2$$

La pressione baricentrica in B si calcola applicando il bilancio dell'energia tra A e B che, data l'ipotesi di trascurabilità delle dissipazioni lungo il gomito, porge semplicemente

$$E_A = E_B$$

e dunque anche, tenendo conto che nelle due sezioni l'energia cinetica è la stessa,

$$\frac{p_A}{\gamma} + h_A = \frac{p_B}{\gamma} + h_B$$

Vale pertanto

$$p_B = p_A + \gamma(h_A - h_B) = p_A - \gamma R = 3605 - 10300 \cdot 0,15 = 2060 \text{ N/m}^2$$

Le spinte di pressione sono quindi date da

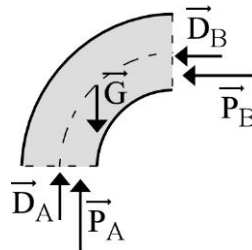
$$P_A = p_A A = 3605 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 28,299 \text{ N}$$

diretta lungo la verticale, verso l'alto data la positività della pressione baricentrica.

$$P_B = p_B A = 2060 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 16,171 \text{ N}$$

diretta lungo l'orizzontale, verso sinistra data la positività della pressione baricentrica.

Graficamente, le forze che sollecitano il volume di controllo, a meno della reazione R, sono dunque



Spinta sul gomito:

dato il sistema di forze, si deve proiettare la relazione scalare lungo l'orizzontale e lungo la verticale.

Per la componente orizzontale, assunto come positivo il verso  $\leftarrow$ , si ha

$$S_x = P_B + D_B = 16,171 + 3,344 = 19,611 \text{ N}$$

diretta verso sinistra, dato il segno positivo del risultato.

Per la componente verticale, assunto come positivo il verso  $\uparrow$ , si ha

$$S_y = -G + P_A + D_A = -19,041 + 28,299 + 3,344 = 12,602 \text{ N}$$

diretta verso l'alto, dato il segno positivo del risultato.

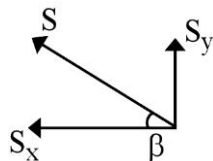
Il modulo della spinta vale pertanto

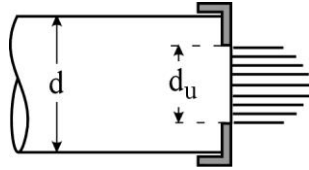
$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{19,611^2 + 12,602^2} = 23,311 \text{ N}$$

la direzione è

$$\beta = \arctan \sqrt{\frac{S_y}{S_x}} = \arctan \sqrt{\frac{12,602}{19,611}} = 32,75^\circ$$

ed il verso deriva dalla composizione grafica



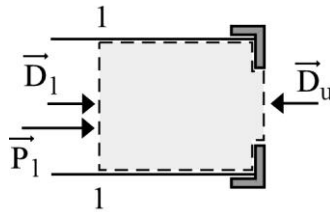
*Esempio 2*

Un condotto ad asse orizzontale di diametro  $d=5$  cm è chiuso parzialmente, in corrispondenza della sezione finale di sbocco in atmosfera, da un tappo. Il tappo presenta un foro centrale di diametro  $d_u=3$  cm. Nel condotto fluisce acqua alla velocità media  $V=2$  m/s. Determinare la spinta che l'acqua esercita sul tappo, nell'ipotesi che siano trascurabili le dissipazioni di energia.

Il volume di controllo a cui riferirsi è il volume fluido contenuto entro il condotto tra una sezione 1, abbastanza a monte dalla sezione di sbocco da poter considerare in essa la corrente monodimensionale, e la sezione di sbocco stessa.

La figura seguente riporta con segno tratteggiato il contorno della superficie  $A_{tot}$  che racchiude il volume di controllo. Si nota che, nel caso proposto, detta superficie è composta non solo dalla superficie di ingresso, dalla superficie di uscita e dalla superficie di contatto su cui si vuole calcolare la spinta, ma anche dalla superficie laterale del tratto di condotto considerato. Detta superficie è quella che nel paragrafo 5.7 è stata indicata con  $A_r$ . La spinta di pressione  $P_r$  che  $A_r$  esercita sul volume isolato può certamente dirsi, indipendentemente dal valore che la caratterizza, diretta lungo la normale alla direzione del moto, data la simmetria assiale del condotto. E', quindi,

diretta lungo la verticale. Si noti inoltre che la superficie del tappo a contatto con il fluido è verticale, e dunque la  $\vec{S}$  ricercata è certamente orizzontale: pertanto, il calcolo di  $\vec{S}$  non richiede il calcolo delle forze verticali agenti sul volume di controllo ed, in particolare, non richiede il calcolo di  $P_r$ .



Le altre forze in gioco sono:

#### Forza peso:

è diretta secondo la verticale, pertanto non è necessario calcolarla per calcolare  $\vec{S}$ . Si osservi che è l'unica altra forza verticale agente sul volume di controllo oltre a  $P_r$ . L'equilibrio del volume isolato mostra allora che  $P_r = G$ .

#### Spinte dinamiche

Entrambe le spinte dinamiche,  $D_1$  e  $D_u$ , risultano dirette secondo l'orizzontale. Per la loro valutazione è richiesta la conoscenza delle velocità medie nelle due sezioni di ingresso e di uscita e della portata fluente  $Q$ . Dai dati del problema, si ha subito

$$V_1 = V = 2 \text{ m/s.}$$

Dall'equazione di continuità lungo il condotto si ha poi

$$V_u = V \frac{A}{A_u} = V \left( \frac{5}{3} \right)^2 = 5,555 \text{ m/s}$$

Inoltre, vale

$$Q = VA = V \frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 3,925 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Il modulo delle due spinte dinamiche è dunque pari a

$$D_1 = \rho QV = 1000 \cdot 0,00395 \cdot 2 = 7,85 \text{ N}$$

$$D_u = \rho QV_u = 1000 \cdot 0,00395 \cdot 5,555 = 21,942 \text{ N}$$

Infine, in base a quanto esposto nel paragrafo 5.7, si può affermare che la spinta dinamica attraverso la sezione 1 è diretta lungo l'orizzontale, verso destra, e che la spinta dinamica attraverso la sezione di uscita è diretta anch'essa lungo l'orizzontale, ma verso sinistra.

### Spinte di pressione

Per determinare le forze  $P_1$  e  $P_u$  è necessario conoscere la pressione baricentrica sia nella sezione 1 che nella sezione di uscita. Poiché la sezione di uscita è di sbocco in atmosfera, si ha immediatamente per la pressione baricentrica all'uscita

$$p_u = 0$$

E' pertanto nulla anche la spinta di pressione  $P_u$ .

La pressione baricentrica in 1 si calcola applicando il bilancio dell'energia tra 1 e l'uscita che, data l'ipotesi di trascurabilità delle dissipazioni lungo il tratto



considerato, porge semplicemente

$$E_1 = E_u$$

cioè anche, tenendo conto che nelle due sezioni la quota geodetica è la stessa e che la pressione all'uscita è nulla,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \frac{V_u^2}{2g}^4$$

Vale pertanto

$$p_1 = \rho \frac{V_u^2 - V^2}{2} = 1000 \frac{5,555^2 - 2^2}{2} = 13429,012 \text{ N/m}^2$$

La spinta di pressione attraverso la sezione 1 è quindi data da

$$P_1 = p_1 A = 13429,012 \cdot \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 26,354 \text{ N}$$

diretta lungo l'orizzontale, verso destra data la positività della pressione baricentrica.

Graficamente, le forze che orizzontali sollecitano il volume di controllo, a meno della reazione R, sono dunque secondo quanto indicato nella figura iniziale.

Spinta sul tappo:

---

<sup>4</sup> Si lascia al lettore la verifica che il moto si svolge in regime turbolento e che dunque il coefficiente correttivo  $\alpha$  è pari ad 1.

per tutto quanto detto, assunto come positivo il verso  $\leftarrow$ , si ha subito

$$S = S_x = -P_1 - D_1 + D_u = -26,354 - 7,85 + 21,942 = -12,262 \text{ N}$$

diretta verso destra, dato il segno negativo del risultato.

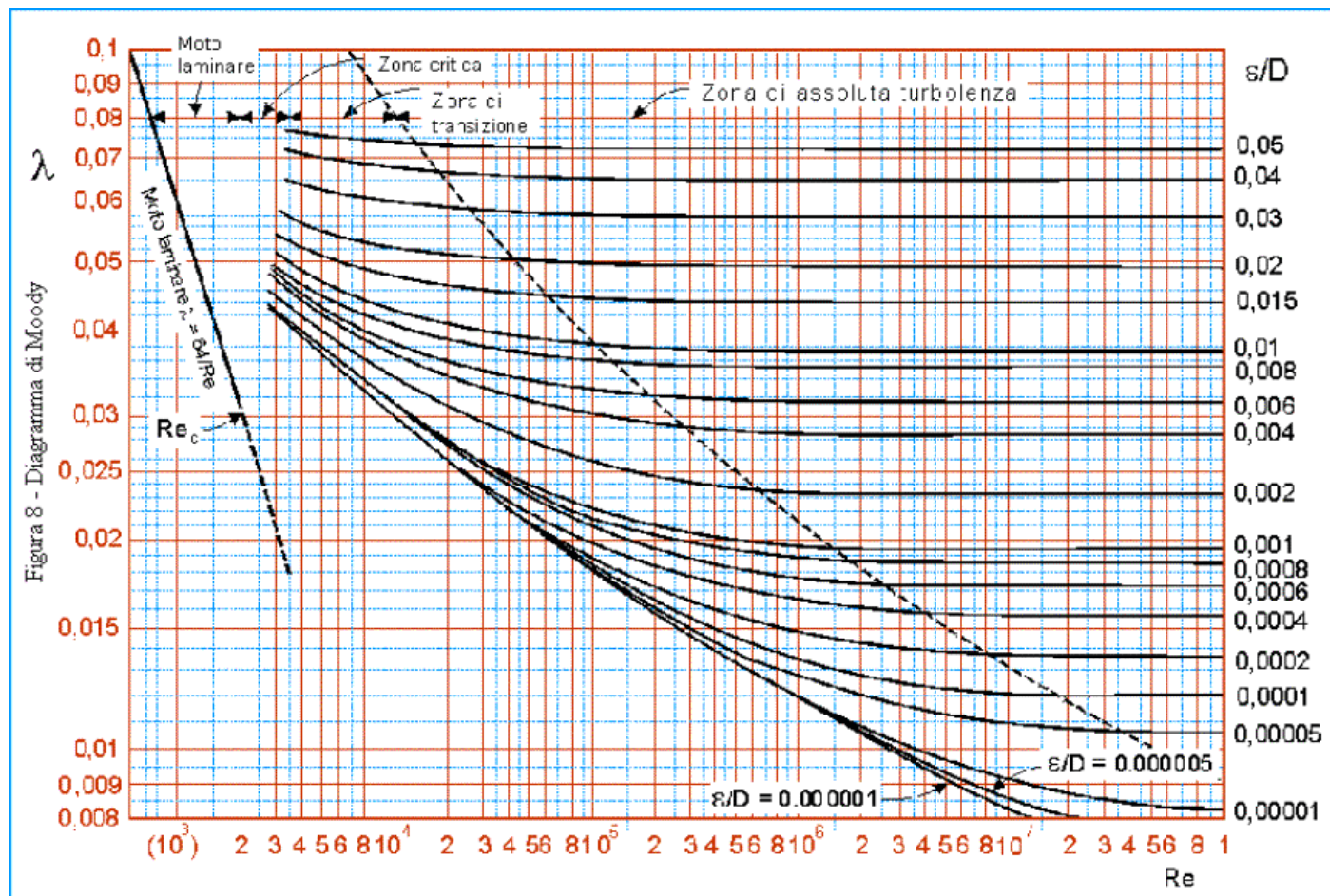


Figura 5.5. Diagramma di Moody.