ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 09.09.2024

TEMA 1 (svolgimento)

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

[*Suggerimento:* si può sfruttare il fatto che $-\frac{\pi}{2} < -1 < \frac{x}{x^2+1} < 1 < \frac{\pi}{2}$.]

Svolgimento.
(a). Il dominio è: $\text{dom} f = \mathbb{R}$. La funzione è dispari in quanto

$$f(-x) = \sin\left(\frac{-x}{x^2+1}\right) = -\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -f(x).$$

Segno: Osservo che $f(0) = 0$. Per $x > 0$, siccome $0 < \frac{x}{x^2+1} < 1 < \frac{\pi}{2}$ e ricordando che $\sin(\theta) > 0$ per ogni $\theta \in (0, \pi/2)$, concludo che $f(x) > 0$ $\forall x > 0$. Per simmetria di f, deduco che $f(x) < 0$ $\forall x < 0$.

(b). Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio. Utilizzo il cambio di variabile $y = \frac{x}{x^2+1} \to 0$, as $x \to \pm\infty$, così da avere

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \lim_{y\to 0} \sin y = 0.$$

L'asse $y = 0$ è quindi un asintoto orizzontale per f in $\pm\infty$.
(c). La funzione è derivabile su $\mathbb{R}$ per il teorema sulla derivabilità della funzione composta. Usando anche il teorema sull'algebra delle derivate si ha, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Ne deduciamo: $f'(x) \geq 0 \iff 1-x^2 \geq 0 \iff |x| \leq 1$. Dunque f è strettamente decrescente su $(-\infty, -1)$ e su $(1, +\infty)$, è strettamente crescente su $(-1, 1)$, presenta un punto di minimo assoluto in $x = -1$, e uno di massimo assoluto in $x = 1$. Il minimo di f è $f(-1) = -\sin(1/2)$, il massimo di f è $f(1) = \sin(1/2)$. (d). Segue grafico.

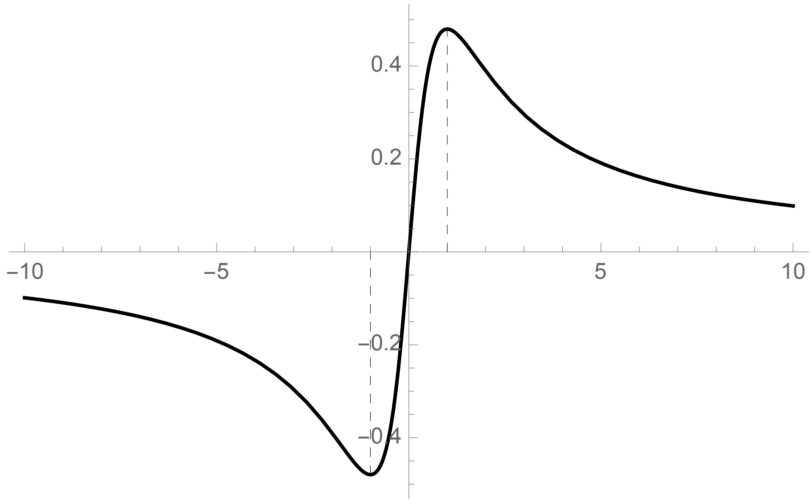

Figure 1: abbozzo del grafico della funzione dell'esercizio 1.

Esercizio 2 (punti 8) Si consideri nel piano complesso l'equazione:

$$z - i|z|^2 = 5 - 4\bar{z}$$

Determinarne le soluzioni esprimendole in forma algebrica e rappresentarle nel piano di Gauss.

Svolgimento. Poniamo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. L'equazione assegnata è allora equivalente a:

$$\begin{aligned} x + iy - i(x^2+y^2) = 5 - 4(x - iy) \quad &\Longleftrightarrow \quad 5x - 5 + i(y - x^2 - y^2 - 4y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 5x = 5 \\ -3y - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le soluzioni di $y^2 + 3y + 1 = 0$ sono date da $y_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{2}$, dunque le soluzioni sono

$$z_1 = 1 - i\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \qquad z_2 = 1 + i\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\cosh n)}{(n^4 + 2n - 1)^\alpha}.$$

Svolgimento. Osservo che il termine $a_n = \frac{\log(\cosh n)}{(n^4+2n-1)^\alpha}$ è definitivamente strettamente positivo in quanto $\cosh(n) > 1$, $\forall n > 2$; posso pertanto applicare tutti i criteri per le serie a segno positivo. Per poter applicare il criterio del confronto asintotico, consideriamo

$$\log(\cosh n) = \log\left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right) = \log\left(\frac{e^n}{2}\left\{1 + e^{-2n}\right\}\right) = \log(e^n) - \log(2) + \log(1 + e^{-2n}) \sim n,\ n \to \infty,$$

dove abbiamo usato che $\log(e^n) = n$ e $\log(2) + \log(1 + e^{-2n}) = o(n)$, per $n \to \infty$. Inoltre,

$$(n^4 + 2n - 1)^\alpha = n^{4\alpha}(1 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4})^\alpha \sim n^{4\alpha}, \ n \to \infty$$

dove abbiamo usato che $(1 + \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4})^\alpha \sim 1 + \alpha(\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}) \sim 1$ per $n \to +\infty$.

Ne deduciamo:

$$a_n \sim \frac{n}{n^{4\alpha}} = \frac{1}{n^{4\alpha - 1}}, \ n \to +\infty.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie è dunque convergente se e solo se $4\alpha - 1 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$.

Esercizio 4 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = (\arcsin x)^\alpha (1 - x^2)^{\alpha - 2}$$

(a) Calcolare $\int_0^1 f_2(x)\, dx$.

(b) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. (*a*) Scriviamo $f_2(x) = \arcsin^2(x)$. Usando la sostituzione $t = \arcsin x$, $dx = \cos t\, dt$, otteniamo:

$$\int_0^1 \arcsin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\, dt.$$

Usiamo la formula di integrazione per parti nell'ultimo integrale con: $f(t) = t^2$, $g'(t) = \cos t$, da cui otteniamo $f'(t) = 2t$, $g(t) = \sin t$:

$$\int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\, dt = \left[t^2 \sin t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2t \sin t\, dt.$$

Usiamo un'altra volta la formula di integrazione per parti nell'ultimo integrale con $f(t) = 2t$, $g'(t) = -\sin t$, da cui otteniamo $f'(t) = 2$, $g(t) = \cos(t)$:

$$\int_0^{\pi/2} 2t(-\sin t)\, dt = [2t \cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2 \cos t\, dt = [2t \cos t - 2 \sin t]_0^{\pi/2}.$$

Riassumendo i calcoli, otteniamo:

$$\int_0^1 \arcsin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t\, dt = \left[t^2 \sin t + 2t \cos t - 2 \sin t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

(*b*) Studiamo l'insieme $\mathrm{dom} f_\alpha \cap [0, 1]$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha:

- Se $\alpha \geq 2$: $\mathrm{dom} f_\alpha = \mathbb{R}$, dunque l'integrale è definito, ovvero converge;
- Se $0 \leq \alpha < 2$: $[0, 1] \cap \mathrm{dom} f_\alpha = [0, 1)$, ovvero abbiamo un estremo di integrazione impropria per $x \to 1^-$;
- Se $\alpha < 0$: $[0, 1] \cap \mathrm{dom} f_\alpha = (0, 1)$, ovvero abbiamo due estremi di integrazione impropria per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$.

Studiamo i comportamenti asintotici di f_α per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$:

- Per $x \to 0^+$ si ha:
$$f_\alpha(x) = (x + o(x))^\alpha (1 + o(1))^{\alpha-2} \sim x^\alpha.$$
Per il criterio del confronto asintotico, in 0^+ l'integrale converge se e solo se $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$.

- Per $x \to 1^-$ si ha:
$$f_\alpha(x) = (\pi/2)^\alpha (1 + x)^{\alpha-2}(1 - x)^{\alpha-2} \sim (\pi/2)^\alpha 2^{\alpha-2}(1 - x)^{\alpha-2}.$$
Per il criterio del confronto asintotico, in 1^- l'integrale converge se e solo se $2 - \alpha < 1 \iff \alpha > 1$.

Riassumendo:

- Se $\alpha \geq 2$: l'integrale converge;
- Se $0 \leq \alpha < 2$: (estremo di integrazione impropria per $x \to 1^-$) l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$;
- Se $\alpha < 0$: (due estremi di integrazione impropria per $x \to 0^+$ e $x \to 1^-$) l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$ e $\alpha > -1$. Ovvero in questo intervallo di α l'integrale diverge in quanto $\alpha < 0$ è incompatibile con $\alpha > 1$.

In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.