Quiz 5

Question **1**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

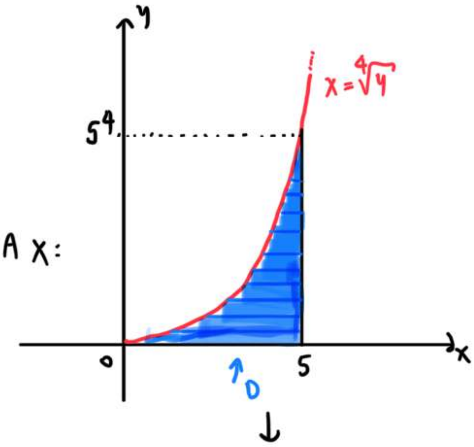
Calcolare l'integrale iterato

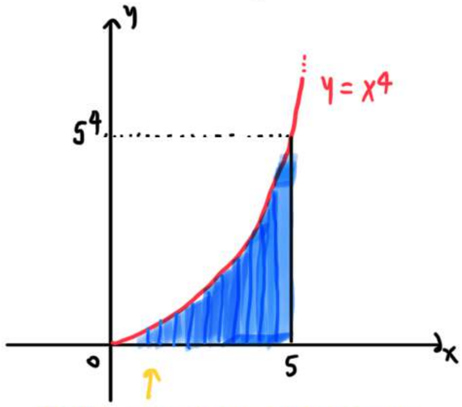
$$\int_0^{5^4} \int_{\sqrt[4]{y}}^{5} \sqrt{x^5+1}\, dx\, dy$$

Answer:

Check

$$\int_0^{5^4}\int_{\sqrt[4]{y}}^{5} \sqrt{x^5+1}\, dx\, dy$$





OCCHIO ALLA NUOVA DIREZIONE DI INTEGRAZIONE, PER FILI VERTICALI ANZICHÉ ORIZZONTALI

SOL. IL DOMINIO È SEMPLICE RISPETTO A Y, LO RISCRIVO RISPETTO A X:

IL DOMINIO COSÌ COME È SCRITTO È: $\begin{cases} 0 \le y \le 5^4 \\ \sqrt[4]{y} \le x \le 5 \end{cases}$

GUARDANDO IL GRAFICO, DEVO RISCRIVERMELO IN MODO SEMPLICE:

$x = \sqrt[4]{y} \rightarrow y = x^4 \quad \rightarrow D: \begin{cases} 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le x^4 \end{cases}$

ORA IL DOMINIO È SEMPLICE ANCHE RISPETTO A X, USO LA FORMULA DI RIDUZIONE E INTEGRO:

$$\boxed{\int_D F(x,y)\, dx\, dy = \int_D F(x,y)\, dy\, dx}$$

SOSTITUISCO E OTTENGO:

$$\int_0^5\int_0^{x^4} \sqrt{x^5+1}\, dy\, dx = \int_0^5 x^4\sqrt{x^5+1}\, dx$$

ORA "GIOCO" UN PO' CON LE DERIVATE: RICORDO CHE $\frac{d}{dx}x^n = n x^{n-1}$

LA "CANDIDATA" DERIVATA È $(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{d}{dx}(x^5+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(x^5+1)^{\frac{3}{2}-1}\cdot 5x^4 = \frac{3}{2}(x^5+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 5x^4$$

$$\rightarrow \int_0^5 x^4(x^5+1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\int_0^5 \frac{3}{2}(x^5+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 5x^4 = \frac{2}{15}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^5$$

$$= \frac{2}{15}\left[(5^5+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 23\,303.4226$$

✓

Question **2**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare l'integrale sul disco di centro l'origine e raggio 6 della funzione

$$(x, y) \mapsto 6\,x\cos(xy)$$

Answer:

Check

$(x,y) \longmapsto 6x\cos(x,y)$

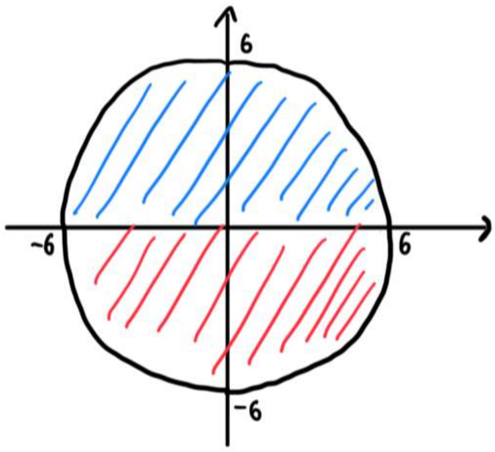
SOL. $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 6\}$

IL DOMINIO È SIMMETRICO RISPETTO A X E Y

$\Downarrow$

$$\int_{-6}^{6}\int_{-6}^{6} 6x\cos(xy)\,dx\,dy = //// + //// = 0$$

V



Question **3**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Determinare l'area della regione definita in coordinate polari da $\rho \leq \sqrt{\sin(7t)}$, $t \in [0, \pi/7]$.

Answer:

Check

AREA DI $\rho \le \sqrt{\sin(7t)}$, $t \in [0, \frac{\pi}{7}]$

SOL. USO LA FORMULA DELL'AREA: $\boxed{\text{Area}(D) = \int_D 1 \, dx\, dy}$

USO LA FORMULA DI RIDUZIONE IN COORDINATE POLARI:

$$\boxed{\int_D 1 \, dx\, dy = \int_D \rho \, d\rho \, dt}$$

SOSTITUISCO E OTTENGO:

$$\int_0^{\frac{\pi}{7}} \int_0^{\sqrt{\sin(7t)}} \rho \, d\rho \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{7}} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\sin(7t)}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{7}} \sin(7t)\, dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\int_0^{\frac{\pi}{7}} 7\sin(7t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{14}\left[\cos(7t)\right]_0^{\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{14}\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right] = -\frac{1}{14}(-1-1) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = 0.1428$$

Question 4

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Siano $\varphi(u, v) := (7u + 5v, 1u + 9v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e E regione del piano di area 9. Quanto vale l'area di $\varphi(E)$?

Answer:

Check

$\varphi(u,v) = (7u+5v,\ u+9v)$, $u,v \in \mathbb{R}^2$.

E REGIONE DEL PIANO t.c. $\text{Area}(E) = 9$

$\to$ AREA DI $\varphi(E)$?

SOL. L'AREA DI E È:

$$\boxed{\text{Area}(E) = \int_E 1\, du\, dv} \implies \text{Area}(E) = \int_E 1\, du\, dv = 9$$

USO LA FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILE:

$$\text{Area}[\varphi(E)] = \int_E 1\, |\varphi'(u,v)|\, du\, dv$$

$$\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \to \det[\varphi(u,v)] = 7\cdot 9 - 5\cdot 1 = 58$$

$$\to \text{Area}[\varphi(E)] = \int_E 58\, du\, dv = 58 \underbrace{\int_E du\, dv}_{=9} = 58\cdot 9 = 522$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 4 (PER OTTENERE SOLO IL RISULTATO):

SIANO:

- $\varphi(u,v) = (au+bv,\ cu+dv)$
- $\text{Area}(E) = m$

$$\text{Area}(\varphi(E)) = (ad-bc)\cdot m$$

Question 5

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare, se esiste finito,

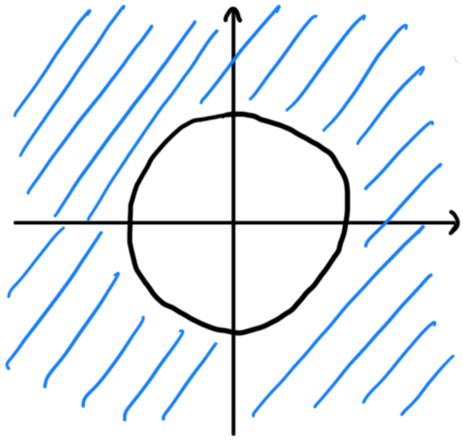
$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),1/4]} (x^2+y^2)^5 e^{-(x^2+y^2)^6}\, dx\, dy.$$

Answer:

Check

CALCOLARE $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),\frac{1}{4}]} (x^2+y^2)^5 e^{-(x^2+y^2)^6} \, dx\,dy$

SOL. FACCIO IL CAMBIO DI VARIABILI IN COORDINATE POLARI



$$\boxed{\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(\rho\cos t, \rho\sin t)\,\rho\,d\rho\,dt}$$

$$(x^2+y^2)^5 e^{-(x^2+y^2)^6} \Rightarrow (\rho^2)^5 e^{-(\rho^2)^6} = \rho^{10} e^{-\rho^{12}}$$

$$E = \{t \in [0,2\pi],\ \rho \in [\tfrac{1}{4}, +\infty[\ \}$$

SOSTITUISCO E OTTENGO:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \rho^{10} e^{-\rho^{12}} \rho\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \rho^{11} e^{-\rho^{12}}\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{12} e^{-\rho^{12}}\right]_{\frac{1}{4}}^{+\infty}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{12} e^{-\infty} + \frac{1}{12} e^{-\left(\frac{1}{4}\right)^{12}}\right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{4^{12}}}\,dt = \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{4^{12}}} \int_0^{2\pi} dt$$

$$= -\frac{1}{12} e^{-\frac{1}{4^{12}}} [t]_0^{2\pi} = \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{4^{12}}} \cdot 2\pi = 0.5235$$

V

Question **6**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Per $a > 0$ sia $f_a(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Tale funzione è illimitata attorno all'origine. Selezionare, se ve ne sono, TUTTI i valori di a per i quali l'integrale $\displaystyle\int_{B((0,0),1]} f_a(x,y)\,dx\,dy$ esiste finito.

NB: si perde 1/10 di punto alle risposte errate.

Select one or more:

- [ ] 0.8
- [ ] 0.9
- [ ] 1
- [ ] 1.1
- [ ] 1.2
- [ ] 1.8
- [ ] 1.9
- [ ] 2
- [ ] 2.1
- [ ] 2.2

Check

$$a>0: \quad F_a(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} & \text{SE } F_a(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DETERMINARE a: $\int_{B((0,0),1)} F_a(x,y)\,dx\,dy \;\exists < +\infty$

SOL. IL DOMINIO È: $D = \{x^2+y^2 \leq 1\} \Rightarrow \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dx\,dy$

POICHÉ LA FUNZIONE È RADIALE, CONVIENE TRASFORMARE IN COORDINATE POLARI

$E = \{0 \leq \rho \leq 1,\ t \in [0,2\pi]\}$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a}}\rho\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-1}}\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^{-2a+1}\,d\rho\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2a+2}\left[\rho^{-2a+2}\right]_0^1 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2a+2}\,1\,dt = \frac{1}{-2a+2}\int_0^{2\pi} 1\,dt = \frac{1}{-2a+2}\left[t\right]_0^{2\pi}$$

SE $-2a+1 \neq -1$

$$= \frac{2\pi}{-2a+2} = \frac{\pi}{-a+1}$$

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE ESISTE FINITO $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{DENOMINATORE} \neq 0 \\ \text{RISULTATO} > 0 \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} 1-a \neq 0 \\ \frac{\pi}{1-a} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a < 1 \end{cases}$$

ESAMINIAMO ORA IL CASO $a = 1$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho}\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\left[\ln(\rho)\right]_0^1 = \int_0^{2\pi}\left[\ln(1) - \ln(0)\right] dt$$

MA, $\log(0)\ \nexists$, QUINDI L'INTEGRALE NON È FINITO

IN CONCLUSIONE, L'INTEGRALE $\exists$ FINITO $\Leftrightarrow a < 1$ $\longrightarrow$ RISPOSTE: -0.8, -0.9 ✓

Question 7

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare l'integrale $\int_{B((0,0),7]} \sqrt{1+5(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$

Answer:

Check

$$\int_{B((0,0),7]} \sqrt{1+5(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

SOL. FACCIO UN CAMBIO VARIABILI IN COORDINATE POLARI

$$\boxed{\int_D F(x,y)\, dx\, dy = \int_E F(\rho\cos t, \rho\sin t)\, \rho\, d\rho\, dt}$$

MA, SE CAMBIO IN COORDINATE POLARI DEVO CAMBIARE ANCHE IL DOMINIO:

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 49\}$$

$$\to \rho^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t \leq 49$$

$$\to \rho^2 \leq 49$$

$$\to \rho \leq 7 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 7,\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow E = \{0 \leq \rho \leq 7,\ t \in [0,2\pi]\}$$

ANCHE QUI PER TROVARE UNA PRIMITIVA GIOCO CON LE DERIVATE

$$\to \int_0^{2\pi}\int_0^7 \rho\sqrt{1+5\rho^2}\, d\rho\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{3}\int_0^7 \frac{3}{2}\cdot 10\rho\sqrt{1+5\rho^2}\, d\rho\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{15}\left[(1+5\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^7 dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{15}\left[(1+5\cdot 49)^{\frac{3}{2}}-1\right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{15}\left(246^{\frac{3}{2}}-1\right) dt$$

$$= 2\pi\cdot\left[\frac{1}{15}(246)^{\frac{3}{2}}-1\right] = 1615.7668$$

V

Question 8

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare l'integrale iterato $\int_0^3 \int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^0 e^{(x^2+y^2)/100}\,dy\,dx$.

Answer:

Check

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{3^2-x^2}}^0 e^{\frac{x^2+y^2}{100}}\,dy\,dx$$

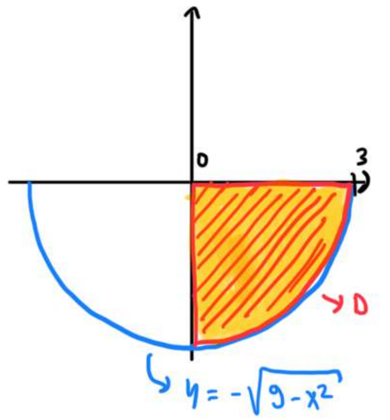
SOL. PROVIAMO A VEDERE IL DOMINIO:

$$D = \{ x \in [0,3],\ -\sqrt{3^2-x^2} \le y \le 0 \}$$

$$y \le -\sqrt{9-x^2}$$

SEMICIRCONFERENZA INFERIORE, $C(0,0)$, $r=3$

$x^2+y^2 \le 9$



POICHÉ IL DOMINIO È RADIALE, MI CONVIENE UN CAMBIO VARIABILI IN COORDINATE POLARI:

$$\boxed{\int_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_E F(\rho\cos t, \rho\sin t)\,\rho\,d\rho\,dt}$$

$$= e^{\frac{\rho^2}{100}}\,\frac{2\rho}{100} = \frac{1}{50}\,\rho$$

$$E = \{ (\rho,t) : 0 \le \rho \le 3,\ \tfrac{3}{2}\pi \le t \le 2\pi \}$$

$$\to \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\int_0^3 e^{\frac{\rho^2}{100}}\,\rho\,d\rho\,dt = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 50 \cdot \int_0^3 \frac{1}{50}\,\rho\, e^{\frac{\rho^2}{100}}\,d\rho\,dt = \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 50\left[e^{\frac{\rho^2}{100}}\right]_0^3 dt$$

$$= \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} 50\left[e^{\frac{9}{100}} - 1\right] dt = \left[50\left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right)t\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} = 2\pi \cdot 50\left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right) - \frac{3}{2}\pi\, 50\left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right)$$

$$= \left(2\pi - \frac{3}{2}\pi\right)\left[50\left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right)\right] = \frac{\pi}{2} \cdot 50\left(e^{\frac{9}{100}} - 1\right) = 7.3964$$

V

Question 9

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare il volume del trapezoide di $f(x,y) = 2 + \cos(x^2)$ sopra il triangolo di vertici $(0,0), (24,0), (24,8)$.

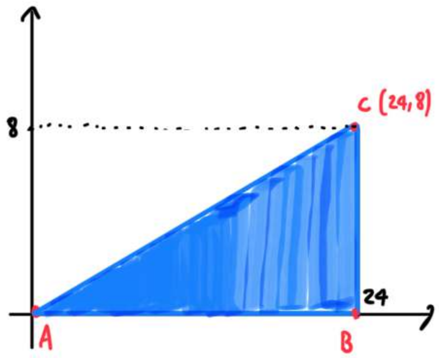
Answer:

Check

$F(x,y) = 2 + \cos(x^2)$ VOLUME SUL TRIANGOLO DI VERTICI: $A = (0,0)$

$B = (24,0)$

$C = (24,8)$



SOL. INDIVIDUO IL DOMINIO:

$0 \leq x \leq 24$

TROVO LA RETTA PASSANTE PER A, C: $y = \frac{8}{24}x = \frac{1}{3}x$

$\Rightarrow D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 24, \ 0 \leq y \leq \frac{1}{3}x\}$

IL DOMINIO È SEMPLICE RISPETTO A X: USO LA FORMULA DI RIDUZIONE:

$$\boxed{\int_D F(x,y)\, dy\, dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^{24} \int_0^{\frac{1}{3}x} 2 + \cos(x^2)\, dy\, dx = \int_0^{24} \left[(2 + \cos(x^2))\, y \right]_0^{\frac{1}{3}x} dx$$

$$= \int_0^{24} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\cos(x^2)\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{24} x\, dx + \frac{1}{3}\int_0^{24} x\cos(x^2)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{24} + \frac{1}{6}\int_0^{24} 2x\cos(x^2)\, dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{24^2}{2} + \frac{1}{6}\left[\sin(x^2)\right]_0^{24} = 192 + \frac{1}{6}\sin(24^2)$$

$$= 191.8523$$

Question **10**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $D = \{(x, y) : 4 \leq xy \leq 8,\ 3 \leq y \leq 6\}$. Effettuando il calcolo dell'integrale

$$\int_D x\, y^9 \, dx \, dy$$

con il cambio di variabile $u = xy, v = y$, ci si riconduce ad un integrale del tipo

$$\int_4^8 \int_3^6 \ldots . \, du \, dv = \int_4^8 K u \, du$$

per una qualche costante K. Determinare K.

Answer:

Check

$D = \{(x,y) : 4 \le xy \le 8, \; 3 \le y \le 6\}$

$$\int_D xy^9 \underset{\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases}}{=} \int_4^8 \int_3^6 \dots \, dv\,du = \int_4^8 K u \, du \qquad \text{TROVARE } K$$

SOL. PONENDO $\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases}$, IL NUOVO DOMINIO È: (1) $\begin{matrix} 4 \le u \le 8 \\ 3 \le v \le 6 \end{matrix}$

$\Rightarrow E = \{(u,v) : u \in [4,8], \; v \in [3,6]\}$

DEVO TROVARE $x(u,v)$, $y(u,v)$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = x \cdot v \\ // \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = v \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x,y) = \varphi(u,v) = \left(\frac{u}{v}, v\right)$

$$\varphi'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{1}{u^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow |\varphi'(u,v)| = \frac{1}{v}$$

$\Rightarrow xy^9 = \frac{u}{v} \cdot v^9 = uv^8$

$$\Rightarrow \int_4^8 \int_3^6 \frac{u}{v} \cdot v^8 \cdot \frac{1}{v} \, dv\,du = \int_4^8 \int_3^6 u \cdot v^7 \, dv\,du = \int_4^8 u \left[\frac{v^8}{8}\right]_3^6 du$$

QUESTA È K

$$K = \left[\frac{v^8}{8}\right]_3^6 = \frac{6^8}{8} - \frac{3^8}{8} = 209131.875$$

V