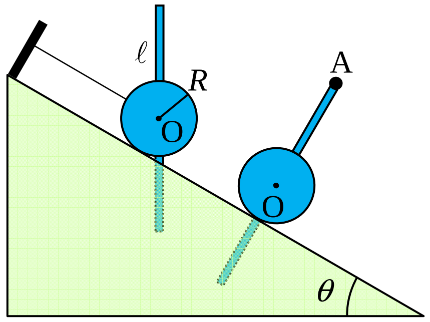
Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, dell'Informazione, Elettronica e Informatica
Canale 3 (Prof. G. Naletto)
Seconda Prova in Itinere di Fisica Generale 1 - Padova, 12 Giugno 2014

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Problema 1



Un corpo rigido è costituito da un cilindro omogeneo di raggio R e da due sbarrette sottili omogenee identiche, ciascuna di lunghezza $\ell = 2R$ e massa $m_S = 2$ kg orientate perpendicolarmente alla superficie laterale del cilindro, diametralmente opposte e aventi un estremo attaccato alla stessa superficie; il momento d'inerzia del corpo rigido rispetto all'asse O del cilindro è $I_O = 0.72$ kgm^2. Il cilindro, di massa $m_C = 2m_S/3$, è appoggiato con l'asse orizzontale su un piano inclinato; il piano è scabro, realizzato con un incavo che consente il movimento delle sbarrette durante il rotolamento del corpo ed è inclinato di un angolo $\theta = \pi/6$ rad rispetto all'orizzontale. Il corpo è mantenuto inizialmente fermo sul piano con le sbarrette verticali grazie ad un filo ideale teso parallelo al piano ad una distanza R dal piano stesso e fissato alla superficie laterale del cilindro (vedi figura: prima posizione del corpo). Determinare:

a) il modulo f_{as} della forza di attrito statico;
b) il raggio R del cilindro.

[Suggerimento: si consiglia di esprimere le formule in funzione di m_S ed R, esplicitando m_C ed ℓ come sopra indicato.]
Ad un certo istante si taglia il filo ed il corpo inizia a scendere lungo il piano inclinato con un moto di puro rotolamento. Dopo aver rotolato di un angolo $\phi = \pi + \theta$ dalla posizione iniziale (quindi con le sbarrette perpendicolari al piano inclinato; vedi in figura la seconda posizione del corpo), l'estremo superiore A di una delle due sbarrette si aggancia ad un perno ed il corpo inizia a ruotare attorno ad un asse orizzontale fisso passante per A parallelo all'asse del cilindro. Determinare (nel sistema di riferimento fisso):

c) il modulo v_{CM} della velocità del centro di massa del corpo un istante prima dell'urto;
d) il modulo v_A della velocità dell'estremo A della sbarretta nello stesso istante;
e) il modulo ω' della velocità angolare del corpo rigido un istante dopo l'urto.

Problema 2

Tre moli di un gas ideale monoatomico sono soggetti al ciclo frigorifero ABCDA. Il gas, che si trova inizialmente allo stato A all'interno di un contenitore adiabatico ideale, viene portato allo stato B tramite un'espansione libera in cui l'entropia dell'universo varia di $\Delta S_{U,AB} = 27.4$ J/K. Mantenendo costante il volume e togliendo l'isolamento del contenitore, il gas viene portato in modo molto lento e graduale senza attriti allo stato C, alla temperatura $T_C = 150$ K; durante questa trasformazione, il gas cede all'ambiente un calore $Q_{BC} = -7500$ J. Per mezzo di una trasformazione adiabatica reversibile, il gas viene poi portato allo stato D in cui il volume del gas ritorna ad essere quello dello stato iniziale A. Infine, a volume bloccato, il gas viene messo in contatto termico con un serbatoio a temperatura T_A finché ritorna allo stato iniziale. Dopo aver disegnato il ciclo nel diagramma pV, determinare:

a) la temperatura T_D del gas in D;
b) il lavoro W fatto dal gas nel ciclo;
c) l'efficienza ξ del ciclo;
d) la variazione di entropia $\Delta S_{U,ciclo}$ dell'universo nel ciclo.

Nell'ipotesi che il lavoro necessario per realizzare il ciclo venga prodotto da una macchina termica reversibile operante tra una miscela di acqua e ghiaccio alla temperatura $T_2 = 273.15$ K ed un serbatoio alla temperatura $T_1 = 200$ K, determinare:

e) la massa m di acqua solidificata nella macchina termica (calore latente di solidificazione dell'acqua: $\lambda_g = 3.3 \cdot 10^5$ J/kg).

Soluzioni

Problema 1

a) Per avere equilibrio statico, la somma dei momenti rispetto al polo O deve essere uguale a zero. Siccome tensione, forza peso e reazione normale hanno momento nullo, si ha che:

$$\vec{R}\times\vec{f}_{as}=0 \quad\Rightarrow\quad f_{as}=0$$

oppure, prendendo come polo dei momenti il punto di contatto C, e visto che il centro di massa sta in O:

$$\vec{R}\times\vec{T}+\vec{R}\times m_{TOT}\vec{g}=0 \quad\Rightarrow\quad RT-Rm_{TOT}g\sin\theta=0 \quad\Rightarrow\quad T=m_{TOT}g\sin\theta=0;$$

$$f_{as}+T-m_{TOT}g\sin\theta=0 \quad\Rightarrow\quad f_{as}=m_{TOT}g\sin\theta-T=0$$

b) $$I_O=\frac{1}{2}m_C R^2+2\left[\frac{1}{12}m_S\ell^2+m_S\left(\frac{\ell}{2}+R\right)^2\right]=\frac{1}{3}m_S R^2+2\left(\frac{1}{3}m_S R^2+4m_S R^2\right)=9m_S R^2 \quad\Rightarrow\quad R=\sqrt{\frac{I_O}{9m_S}}=0.2\text{ m}$$

c) $$m_{TOT}gh=\frac{1}{2}I_O\omega^2+\frac{1}{2}m_{TOT}v_{CM}^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{8}{3}m_S g(\pi+\theta)R\sin\theta=\frac{1}{2}\left(9m_S R^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2}+\frac{1}{2}\frac{8}{3}m_S v_{CM}^2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad v_{CM}=\sqrt{\frac{8}{15}g\pi R\sin\theta}=1.28\text{ m/s}$$

oppure, prendendo come polo il punto di contatto C:

$$Rm_{TOT}g\sin\theta=I_C\alpha=\left(9m_S R^2+m_{TOT}R^2\right)\alpha=\frac{35}{3}m_S R^2\frac{a_{CM}}{R} \quad\Rightarrow\quad a_{CM}=\frac{8}{35}g\sin\theta;\quad v_{CM}=\sqrt{2a_{CM}(\pi+\theta)R}$$

oppure, prendendo come polo il centro O del cilindro:

$$m_{TOT}g\sin\theta-f'_{as}=m_{TOT}a_{CM} \quad\Rightarrow\quad f'_{as}=m_{TOT}g\sin\theta-m_{TOT}a_{CM}=\frac{8}{3}m_s\left(g\sin\theta-a_{CM}\right)$$

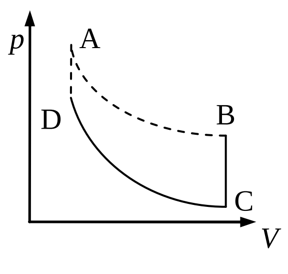
$$Rf_{as}=I_O\alpha \quad\Rightarrow\quad R\frac{8}{3}m_s\left(g\sin\theta-a_{CM}\right)=9m_S R^2\frac{a_{CM}}{R} \quad\Rightarrow\quad a_{CM}=\frac{8}{35}g\sin\theta;\quad v_{CM}=\sqrt{2a_{CM}(\pi+\theta)R}$$

d) $$\vec{v}_A=\vec{v}'_A+\vec{v}_{CM}+\vec{\omega}\times\vec{r}_A \quad\Rightarrow\quad v_A=v_{CM}+\frac{v_{CM}}{R}(\ell+R)=4v_{CM}=5.13\text{ m/s}$$

e) $$\vec{L}_{in,A}=\vec{L}_{fin,A} \quad\Rightarrow\quad I_O\vec{\omega}+\vec{r}\times m_{TOT}\vec{v}_{CM}=I_A\vec{\omega}' \quad\Rightarrow\quad 9m_S R^2\omega-(\ell+R)\frac{8}{3}m_S v_{CM}=\left(I_O+\frac{8}{3}m_S(\ell+R)^2\right)\omega' \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad 9m_S R^2\frac{v_{CM}}{R}-3R\frac{8}{3}m_S v_{CM}=\left(9m_S R^2+\frac{8}{3}m_S 9R^2\right)\omega' \quad\Rightarrow\quad \omega'=\frac{1}{33}\frac{v_{CM}}{R}=0.194\text{ rad/s}$$

Problema 2



E’ da notare che il ciclo è frigorifero pur essendo percorso in senso orario nel diagramma pV. Questo è dovuto al fatto che nell’espansione libera non si compie lavoro, così come nelle due isocore: rimane quindi in gioco il solo lavoro della trasformazione adiabatica reversibile, che ha segno negativo.

a) $$\Delta S_{U,AB}=nR\ln\frac{V_B}{V_A} \quad\Rightarrow\quad \frac{V_B}{V_A}=e^{\frac{\Delta S_{U,AB}}{nR}}=3=\frac{V_C}{V_D}$$

$$T_C V_C^{\gamma-1}=T_D V_D^{\gamma-1} \quad\Rightarrow\quad T_D=T_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}=312\text{ K}$$

b) $$W=W_{CD}=-\Delta U_{CD}=-nc_V\left(T_D-T_C\right)=-6061\text{ J}$$

oppure $W=Q_{TOT}=Q_{BC}+Q_{DA}=nc_V\left(T_C-T_B\right)+nc_V\left(T_A-T_D\right)=nc_V\left(T_C-T_D\right)$

c) $$Q_{BC}=nc_V\left(T_C-T_B\right) \quad\Rightarrow\quad T_B=T_C-\frac{Q_{BC}}{nc_V}=350.5\text{ K}=T_A;\qquad \xi=\frac{Q_{ASS}}{|W|}=\frac{nc_V\left(T_A-T_D\right)}{\left|nc_V\left(T_C-T_D\right)\right|}=\frac{T_A-T_D}{\left|T_C-T_D\right|}=0.237$$

d) $$\Delta S_{U,ciclo}=\Delta S_{U,AB+DA}=\Delta S_{gas,AB}+\Delta S_{gas,DA}+\Delta S_{amb,DA}=\Delta S_{U,AB}+nc_V\ln\frac{T_A}{T_D}+\frac{-nc_V\left(T_A-T_D\right)}{T_A}=27.6\text{ J/K}$$

oppure $\Delta S_{U,ciclo}=\Delta S_{amb,ciclo}=\Delta S_{amb,BC}+\Delta S_{amb,DA}=-\Delta S_{gas,BC}+\Delta S_{amb,DA}=-nc_V\ln\frac{T_C}{T_B}+\frac{-nc_V\left(T_A-T_D\right)}{T_A}$

e) $$W=-W_{macc}=-\eta Q_{ASS}=-\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)m\lambda_g \quad\Rightarrow\quad m=-\frac{W}{\lambda_g}\frac{T_2}{T_2-T_1}=0.0686\text{ kg}$$