

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

**3° appello — 3 settembre 2019**

**Esercizio 1.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di  $A$  è  $(x+1)^2(x-2)$ , è possibile stabilire se la matrice  $A$  è invertibile?

**Esercizio 2.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore  $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dimostrare che  $\alpha$  è un autovalore di  $A$ . (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice  $A - \alpha I$ ? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore  $\alpha$ .)

**Esercizio 3.** In  $\mathbb{R}^4$  consideriamo i vettori  $u_1 = (1, 2, -2, 1)$ ,  $u_2 = (2, 4, -2, 0)$ ,  $u_3 = (1, 2, 1, -2)$  e il sottospazio  $W$  di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- Verificare che i vettori  $u_1, u_2, u_3$  sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.
- Determinare la dimensione di  $W$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ , dove  $U$  è il sottospazio generato dai vettori  $u_1, u_2, u_3$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori  $v_1 = (0, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1)$ ,  $v_3 = (1, 1, 0)$  e alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .
- Scrivere la matrice  $P$  di cambiamento di base, tale che  $B = AP$  e calcolare  $P^{-1}$ .
- Determinare il nucleo di  $f$ , prima usando la matrice  $A$  e poi usando la matrice  $B$ . Usando le matrici  $A$  e  $B$  si è trovato lo stesso sottospazio  $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ ? (*spiegare*).

**Esercizio 5.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare i cui autovalori sono  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 0$ . L'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 3$  ha equazione  $x + y - z = 0$ , mentre l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_2 = 0$  è la retta di equazioni  $x + z = 0$ ,  $x - y = 0$ .

- Verificare che esiste una base **ortogonale** di  $\mathbb{R}^3$  (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di  $f$ , e trovare una tale base.
- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 6.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + z = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2y - z = 10 \end{cases}$$

- Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe.
- Determinare i punti  $R \in r$  e  $S \in s$  tali che la retta passante per  $R$  e  $S$  sia parallela al vettore  $v = (1, 1, -3)$ .
- Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da  $r$  e  $s$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

**3° appello — 3 settembre 2019**

**Esercizio 1.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di  $A$  è  $(x+5)^2(x-1)$ , è possibile stabilire se la matrice  $A$  è invertibile?

**Esercizio 2.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore  $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dimostrare che  $\alpha$  è un autovalore di  $A$ . (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice  $A - \alpha I$ ? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore  $\alpha$ .)

**Esercizio 3.** In  $\mathbb{R}^4$  consideriamo i vettori  $u_1 = (1, 2, 0, -1)$ ,  $u_2 = (1, -1, 3, 2)$ ,  $u_3 = (1, -3, 5, 4)$  e il sottospazio  $W$  di equazioni

$$W : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

- Verificare che i vettori  $u_1, u_2, u_3$  sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.
- Determinare la dimensione di  $W$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ , dove  $U$  è il sottospazio generato dai vettori  $u_1, u_2, u_3$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori  $v_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, -1, 1)$ ,  $v_3 = (1, 0, 1)$  e alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .
- Scrivere la matrice  $P$  di cambiamento di base, tale che  $B = AP$  e calcolare  $P^{-1}$ .
- Determinare il nucleo di  $f$ , prima usando la matrice  $A$  e poi usando la matrice  $B$ . Usando le matrici  $A$  e  $B$  si è trovato lo stesso sottospazio  $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ ? (*spiegare*).

**Esercizio 5.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare i cui autovalori sono  $\lambda_1 = 6$  e  $\lambda_2 = 0$ . L'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 6$  ha equazione  $x - 2y - z = 0$ , mentre l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_2 = 0$  è la retta di equazioni  $2x + y = 0$ ,  $x + z = 0$ .

- Verificare che esiste una base **ortogonale** di  $\mathbb{R}^3$  (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di  $f$ , e trovare una tale base.
- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 6.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - z = 3 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - 3z = 1 \\ 2z - y = 5 \end{cases}$$

- Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe.
- Determinare i punti  $R \in r$  e  $S \in s$  tali che la retta passante per  $R$  e  $S$  sia parallela al vettore  $v = (3, 5, 1)$ .
- Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da  $r$  e  $s$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

**3° appello — 3 settembre 2019**

**Esercizio 1.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di  $A$  è  $(x+3)^2(x-4)$ , è possibile stabilire se la matrice  $A$  è invertibile?

**Esercizio 2.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore  $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dimostrare che  $\alpha$  è un autovalore di  $A$ . (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice  $A - \alpha I$ ? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore  $\alpha$ .)

**Esercizio 3.** In  $\mathbb{R}^4$  consideriamo i vettori  $u_1 = (2, -4, 2, -2)$ ,  $u_2 = (1, -3, 0, 1)$ ,  $u_3 = (-2, 3, -3, 4)$  e il sottospazio  $W$  di equazioni

$$W : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

- Verificare che i vettori  $u_1, u_2, u_3$  sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.
- Determinare la dimensione di  $W$  e trovare una sua base.
- Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ , dove  $U$  è il sottospazio generato dai vettori  $u_1, u_2, u_3$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori  $v_1 = (0, 1, -1)$ ,  $v_2 = (-1, 1, 0)$ ,  $v_3 = (1, 0, 1)$  e alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .
- Scrivere la matrice  $P$  di cambiamento di base, tale che  $B = AP$  e calcolare  $P^{-1}$ .
- Determinare il nucleo di  $f$ , prima usando la matrice  $A$  e poi usando la matrice  $B$ . Usando le matrici  $A$  e  $B$  si è trovato lo stesso sottospazio  $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ ? (*spiegare*).

**Esercizio 5.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare i cui autovalori sono  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = 0$ . L'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 3$  ha equazione  $x - y - z = 0$ , mentre l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_2 = 0$  è la retta di equazioni  $x + y = 0$ ,  $x + z = 0$ .

- Verificare che esiste una base **ortogonale** di  $\mathbb{R}^3$  (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di  $f$ , e trovare una tale base.
- Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 6.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3y + z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + y = -1 \\ z - x = 2 \end{cases}$$

- Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe.
- Determinare i punti  $R \in r$  e  $S \in s$  tali che la retta passante per  $R$  e  $S$  sia parallela al vettore  $v = (2, 4, -3)$ .
- Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da  $r$  e  $s$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

**3° appello — 3 settembre 2019**

**Esercizio 1.** Sia  $A$  una matrice quadrata di ordine 3 a coefficienti reali. Sapendo che il polinomio caratteristico di  $A$  è  $(x+4)^2(x-5)$ , è possibile stabilire se la matrice  $A$  è invertibile?

**Esercizio 2.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti reali tale che la somma dei suoi vettori colonna è uguale al vettore  $(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)^T$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dimostrare che  $\alpha$  è un autovalore di  $A$ . (*Suggerimento*: a cosa è uguale la somma dei vettori colonna della matrice  $A - \alpha I$ ? Oppure pensa a quale può essere un autovettore associato all'autovalore  $\alpha$ .)

**Esercizio 3.** In  $\mathbb{R}^4$  consideriamo i vettori  $u_1 = (1, 2, 2, 5)$ ,  $u_2 = (2, -2, 1, 1)$ ,  $u_3 = (2, -4, 0, -2)$  e il sottospazio  $W$  di equazioni

$$W : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Verificare che i vettori  $u_1, u_2, u_3$  sono linearmente dipendenti e trovare una relazione di dipendenza lineare tra di essi.
- (b) Determinare la dimensione di  $W$  e trovare una sua base.
- (c) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U + W$ , dove  $U$  è il sottospazio generato dai vettori  $u_1, u_2, u_3$ .

**Esercizio 4.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^3$  formata dai vettori  $v_1 = (1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (0, -1, -1)$ ,  $v_3 = (1, 1, 0)$  e alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Scrivere la matrice  $P$  di cambiamento di base, tale che  $B = AP$  e calcolare  $P^{-1}$ .
- (c) Determinare il nucleo di  $f$ , prima usando la matrice  $A$  e poi usando la matrice  $B$ . Usando le matrici  $A$  e  $B$  si è trovato lo stesso sottospazio  $\text{Ker}(f) \subset \mathbb{R}^3$ ? (*spiegare*).

**Esercizio 5.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare i cui autovalori sono  $\lambda_1 = 6$  e  $\lambda_2 = 0$ . L'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 6$  ha equazione  $x + 2y - z = 0$ , mentre l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_2 = 0$  è la retta di equazioni  $x + z = 0$ ,  $2x - y = 0$ .

- (a) Verificare che esiste una base **ortogonale** di  $\mathbb{R}^3$  (rispetto al prodotto scalare usuale) formata da autovettori di  $f$ , e trovare una tale base.
- (b) Scrivere la matrice  $A$  di  $f$  rispetto alla base trovata nel punto (a) e poi scrivere la matrice  $B$  di  $f$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

**Esercizio 6.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 5y - z = -16 \end{cases} \quad s : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + z = 7 \end{cases}$$

- (a) Verificare che le rette  $r$  e  $s$  sono sghembe.
- (b) Determinare i punti  $R \in r$  e  $S \in s$  tali che la retta passante per  $R$  e  $S$  sia parallela al vettore  $v = (1, -1, 1)$ .
- (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che ha uguale distanza (non nulla) da  $r$  e  $s$ .