COGNOME:	NOME:	MATR.:

Università degli Studi di Padova – Ingegneria Biomedica

Appello n.1 di **FAMP**, 4 febbraio 2015

ISTRUZIONI: 1) Inserire qui e sul foglio intestato le proprie generalità. 2) Riportare sul foglio intestato il nome del tema (A, B, C,...) alla voce "N. Tema". COSA CONSEGNARE: questo foglio con le crocette al posto giusto nel riquadro in basso e il foglio intestato con gli SVOLGIMENTI degli esercizi. REGOLE: NON INSERIRE FOGLI DI BRUTTA COPIA - Risposte non giustificate sul foglio protocollo o non coerenti con quanto scritto nell'elaborato non saranno prese in considerazione - TEMPO Appello (Analisi + Probabilità): 2 ore e 30 minuti

Analisi - Tema **Analisi - A**

1. Risolvere (sul foglio protocollo) l'equazione $x^2y' = 1 - xy$ con la condizione iniziale $y(1) = 1$ (riportare qui sotto la soluzione) e calcolare $y(e)$.

   Risposta 1: $a)5e$ $b)2e$ $c)2/e$ $d)e/5$ $e)3e+1$

2. Calcolare il flusso di $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 2(1-z))$ attraverso la superficie cartesiana (orientata verso l'alto) $z = 1-x^2-y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Risposta 2: $a)-\pi$ $b)3\pi$ $c)\pi^2$ $d)\frac{\pi}{3}$ $e)2\pi$

3. Sia R la regione del piano delimitata dalle curve $y = x^2, y = x^2/5, xy = 2, xy = 4$. Determinare l'area di R.

   Risposta 3: $a)\frac{1}{5}\log 3$ $b)\frac{2}{3}\log 5$ $c)\frac{5}{4}\log 3$ $d)\frac{1}{4}$ $e)e^{2/5}$

4. Sia $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$.

   (a) Determinare i punti critici di f e la loro natura

   Risposta 4 a): (,) è punto di

   (,) è punto di

   spazio per eventuali altri punti

   (b) f ha massimi o minimi globali? Precisarne in breve la ragione

   Risposta 4 b): ☐ SI ☐ NO

   Precisarne il motivo:

Risposte della parte di Analisi: barrare con una X in corrispondenza delle risposte corrette

	$a)$	$b)$	$c)$	$d)$	$e)$	$ALTRO$
1						
2						
3						

Probabilità - Tema **ProbApp A**

1. Disponiamo di due mazzi di carte: il mazzo A ha 30 carte rosse e 22 carte nere, mentre il mazzo B ha 20 carte rosse e 32 carte nere. Si sceglie uno dei due mazzi: il mazzo A viene scelto con probabilità $2/3$, il mazzo B con probabilità $1/3$. Poi viene estratta una carta dal mazzo. N.B. **Esprimere i risultati come frazioni ridotte ai minimi termini semplificando il più possibile:**

   (a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia rossa? *Risposta*

   (b) La carta estratta è rossa. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dal mazzo B?

   Risposta

   (c) La carta viene rimessa nel mazzo, e si procede ad una nuova estrazione dallo stesso mazzo. Si suppone che, una volta *scelto* il mazzo, le estrazioni siano indipendenti. Siano R_1 e R_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima estratta è rossa" e "la seconda estratta è rossa".

   i. Si realizza R_1. Qual è la probabilità che si realizzi R_2? *Risposta*

   ii. Gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti? *Risposta*

2. Un cromosoma legato alla cecità muta in media in un caso su 15 000. Si considera una popolazione di 30 000 persone.

   (a) Utilizzando una opportuna variabile binomiale X scrivere qual è la probabilità che il cromosoma sia mutato su al massimo tre persone, cioè su nessuno o su 1, su 2 o su 3 persone (**esprimere il risultato con una formula, senza semplificare**); *Risposta*

   (b) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile di Poisson Y? In tal caso dire di quale parametro ed (**esprimere il valore di tale approssimazione attraverso una espressione del tipo ae^b, con a e b da determinare esplicitamente**; *Risposta*

   (c) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile normale W? In tal caso dire di quali parametri. *Risposta*

3. Si consideri la variabile congiunta (X, Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x^2 + xy) & \text{se } x, y \in [0,1], \\ 0 \text{ altrimenti,} \end{cases}$$

   dove c è un numero reale positivo.

   (a) Determinare c; *Risposta*

   (b) Calcolare $P(X > Y)$; *Risposta*

   (c) Determinare le densità marginali f_X e f_Y di X e di Y, dire se X e Y sono indipendenti.

   Risposta

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Università degli Studi di Padova – Ingegneria Biomedica

Appello n.1 di **FAMP**, 4 febbraio 2015

ISTRUZIONI: 1) Inserire qui e sul foglio intestato le proprie generalità. 2) Riportare sul foglio intestato il nome del tema (A, B, C,...) alla voce "N. Tema". COSA CONSEGNARE: questo foglio con le crocette al posto giusto nel riquadro in basso e il foglio intestato con gli SVOLGIMENTI degli esercizi. REGOLE: NON INSERIRE FOGLI DI BRUTTA COPIA - Risposte non giustificate sul foglio protocollo o non coerenti con quanto scritto nell'elaborato non saranno prese in considerazione - TEMPO Appello (Analisi + Probabilità): 2 ore e 30 minuti

Analisi - Tema **Analisi - B**

1. Risolvere (sul foglio protocollo) l'equazione $x^2y' = 2 - 3xy$ con la condizione iniziale $y(1) = 1$ (riportare qui sotto la soluzione) e calcolare $y(4)$.

   Risposta 1: $a)5e \quad b)2e \quad c)2 \quad d)1/5 \quad e)1/4$

2. Calcolare il flusso di $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, 2(1 - z))$ attraverso la superficie cartesiana (orientata verso l'alto) $z = 1 - x^2 - y^2$, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Risposta 2: $a) - \pi \quad b)3\pi \quad c)\pi^2 \quad d)\frac{\pi}{3} \quad e)2\pi$

3. Sia R la regione del piano delimitata dalle curve $y = x^2, y = x^2/4, xy = 2, xy = 5$. Determinare l'area di R.

   Risposta 3: $a)\frac{1}{5}\log 3 \quad b)\frac{2}{3}\log 5 \quad c)\frac{5}{4}\log 3 \quad d)\log 4 \quad e)e^{2/5}$

4. Sia $f(x, y) = y^3 - 3y + x^2$.

   (a) Determinare i punti critici di f e la loro natura

   Risposta 4 a): (,) è punto di

   (,) è punto di

   spazio per eventuali altri punti

   (b) f ha massimi o minimi globali? Precisarne in breve la ragione

   Risposta 4 b): ☐ SI ☐ NO

   Precisarne il motivo:

Risposte della parte di Analisi: barrare con una X in corrispondenza delle risposte corrette

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*ALTRO*
1						
2						
3						

Probabilità - Tema **ProbApp B**

1. Disponiamo di due mazzi di carte: il mazzo A ha 20 carte rosse e 32 carte nere, mentre il mazzo B ha 30 carte rosse e 22 carte nere. Si sceglie uno dei due mazzi: il mazzo A viene scelto con probabilità 2/3, il mazzo B con probabilità 1/3. Poi viene estratta una carta dal mazzo. N.B. **Esprimere i risultati come frazioni ridotte ai minimi termini semplificando il più possibile:**

   (a) Qual è la probabilità che la carta estratta sia rossa? *Risposta*

   (b) La carta estratta è rossa. Qual è la probabilità che essa sia stata estratta dal mazzo B?

   Risposta

   (c) La carta viene rimessa nel mazzo, e si procede ad una nuova estrazione dallo stesso mazzo. Si suppone che, una volta *scelto* il mazzo, le estrazioni siano indipendenti. Siano R_1 e R_2 gli eventi, rispettivamente, "la prima estratta è rossa" e "la seconda estratta è rossa".

      i. Si realizza R_1. Qual è la probabilità che si realizzi R_2? *Risposta*

      ii. Gli eventi R_1 e R_2 sono indipendenti? *Risposta*

2. Un cromosoma legato alla cecità muta in media in un caso su 10 000. Si considera una popolazione di 20 000 persone.

   (a) Utilizzando una opportuna variabile binomiale X scrivere qual è la probabilità che il cromosoma sia mutato su al massimo due persone, cioè su nessuno o su 1 o su 2 persone(**esprimere il risultato con una formula, senza semplificare**); *Risposta*

   (b) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile di Poisson Y? In tal caso dire di quale parametro ed (**esprimere il valore di tale approssimazione attraverso una espressione del tipo ae^b, con a e b da determinare esplicitamente**; *Risposta*

   (c) E' ragionevole approssimare la probabilità del punto (a) utilizzando una opportuna variabile normale W? In tal caso dire di quali parametri. *Risposta*

3. Si consideri la variabile congiunta (X, Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2 + xy) & \text{se } x, y \in [0,1], \\ 0 \text{ altrimenti}, \end{cases}$$

   dove c è un numero reale positivo.

   (a) Determinare c; *Risposta*

   (b) Calcolare $P(X > Y)$; *Risposta*

   (c) Determinare le densità marginali f_X e f_Y di X e di Y, dire se X e Y sono indipendenti.

   Risposta