

IL METODO FDTD

Corso di Bioelettromagnetismo

A.A. 2022/2023

V 1.0

Principio di funzionamento

Il metodo FDTD (Finite Difference in The time Domain) è uno dei metodi numerici più utilizzati per la soluzione numerica delle equazioni di Maxwell; è stato proposto nel 1966 dal matematico Kane S. Yee.

In linea di principio, il metodo sfrutta la conoscenza spaziale del campo EM per calcolarne l'evoluzione temporale. Infatti, se per semplicità si trascura la dispersione, dalle equazioni di Maxwell è immediato scrivere

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{e}$$
$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} (\nabla \times \mathbf{h} - \sigma \mathbf{e} - \mathbf{j}_i)$$

dove \mathbf{j}_i sono come di consueto le correnti impresse, ovvero **quantità note** in tutto lo spazio ed in ogni istante.

Il rotore è un operatore differenziale sulle coordinate spaziali e può essere approssimato con espressioni concettualmente analoghe al rapporto incrementale:

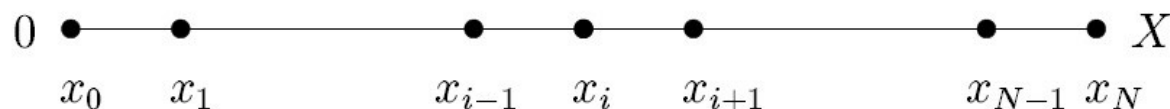
$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \delta x/2) - f(x - \delta x/2)}{\delta x}$$

Finite difference method

Principle: derivatives in the partial differential equation are approximated by linear combinations of function values at the grid points

$$\text{1D:} \quad \Omega = (0, X), \quad u_i \approx u(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$\text{grid points} \quad x_i = i\Delta x \quad \text{mesh size} \quad \Delta x = \frac{X}{N}$$

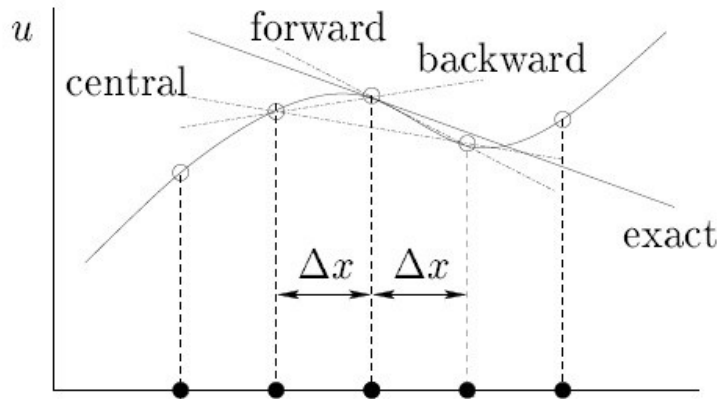


First-order derivatives

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\bar{x} + \Delta x) - u(\bar{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\bar{x} + \Delta x) - u(\bar{x} - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (\text{by definition}) \end{aligned}$$

Approximation of first-order derivatives

Geometric interpretation



$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad \text{forward difference}$$

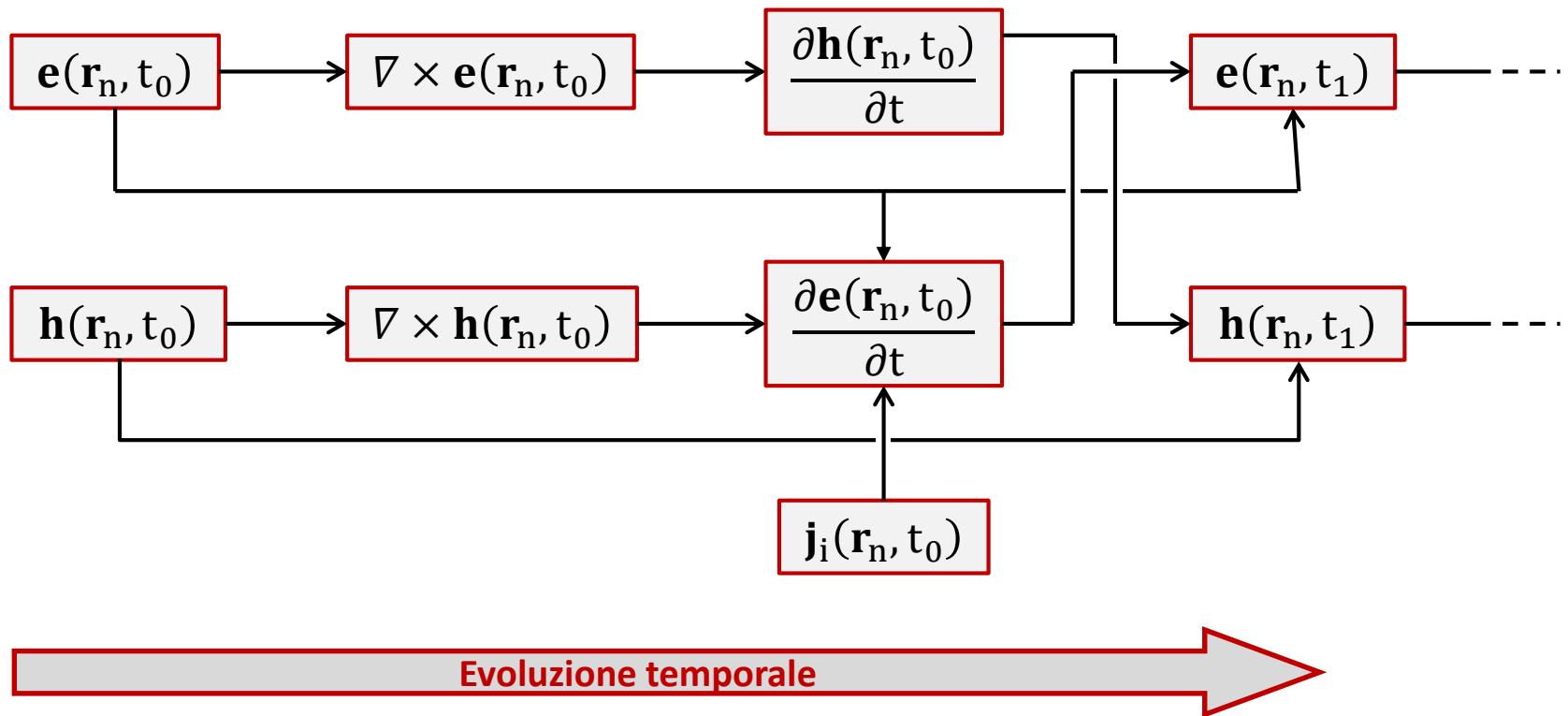
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad \text{backward difference}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{central difference}$$

- Si dimostra che gli schemi alle differenze finite «in avanti» e «indietro» sono approssimati al prim'ordine, mentre quello «centrato» lo è al secondo ordine

Principio di funzionamento

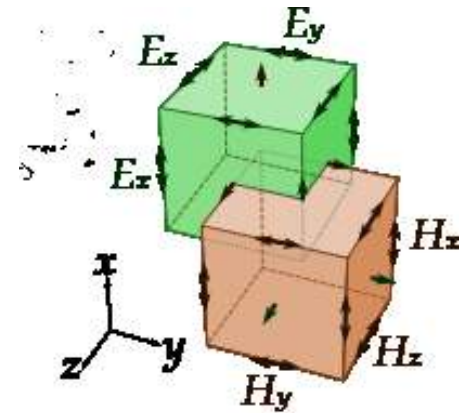
Si assuma che lo spazio sia discretizzato nei punti \mathbf{r}_n ed il tempo negli istanti t_n , e che il campo EM sia noto in tutto lo spazio all'istante iniziale t_0 . La soluzione delle equazioni di Maxwell procede come schematizzato:



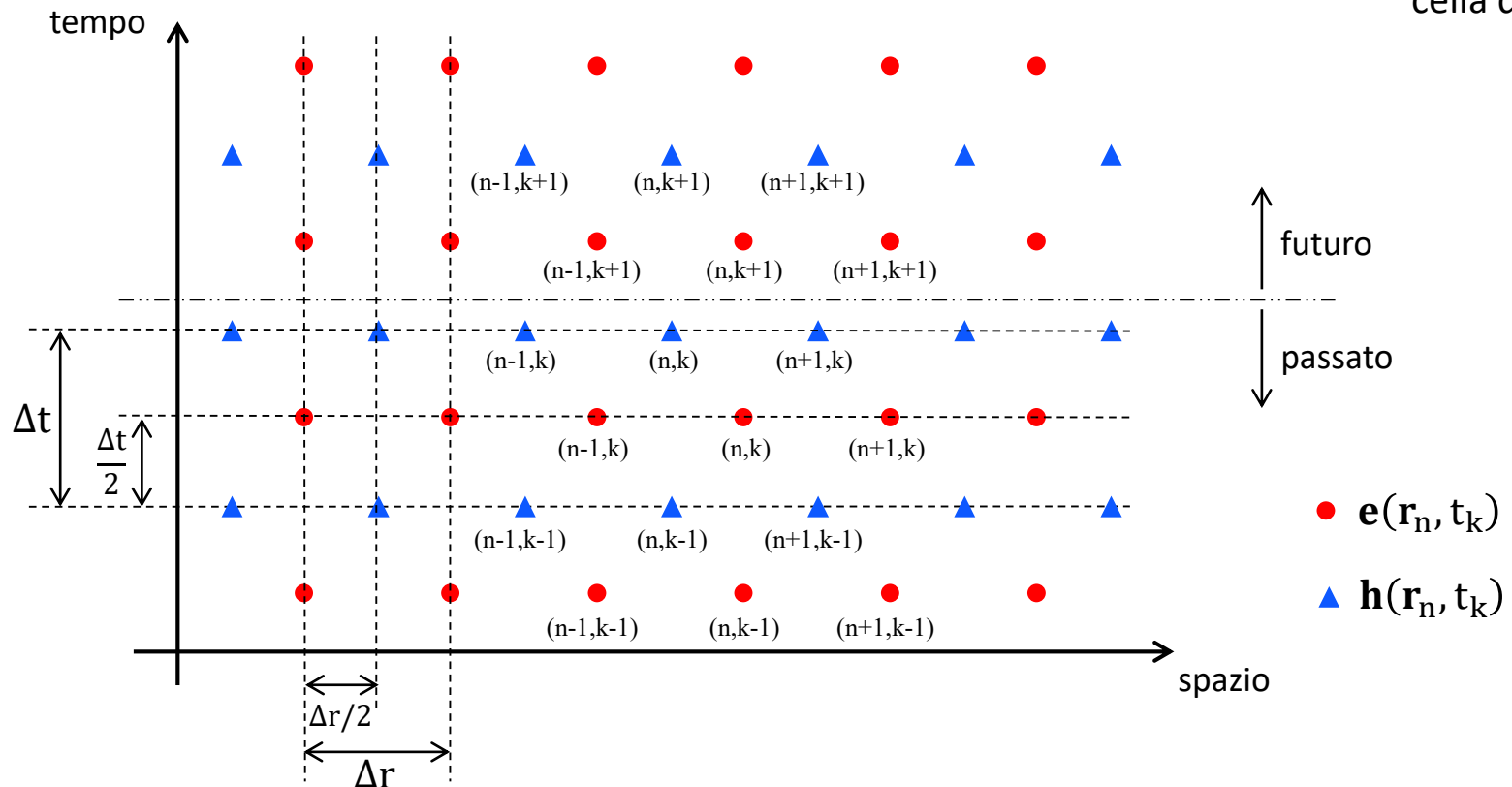
Griglia di integrazione

Per migliorare l'accuratezza e la stabilità (ovvero la convergenza verso la soluzione esatta) dell'algoritmo, i punti spazio-temporali in cui vengono campionati \mathbf{e} ed \mathbf{h} sono "interlacciati".

Limitandosi per semplicità ad una sola dimensione spaziale, la disposizione dei punti di campionamento è concettualmente la seguente:



cella di Yee



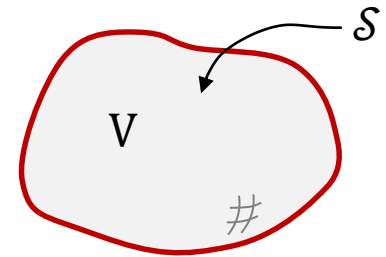
Griglia di integrazione

- Il **passo della griglia spaziale** può non essere uniforme. I punti spaziali, anche detti *nod*i, sono infittiti dove i dettagli geometrici sono più piccoli (considerando anche le proprietà elettromagnetiche dei materiali che possono essere non omogenee nello spazio). Esistono algoritmi che, data la descrizione geometrica ed elettromagnetica del dominio da simulare, ottimizzano automaticamente la distribuzione dei punti (*mesh*).
- Il **passo temporale** è invece vincolato da due condizioni:
 1. Stabilità numerica. Si dimostra che l'algoritmo è stabile solo se il passo temporale non è maggiore del tempo che il campo EM impiega a propagarsi da un nodo al più vicino. Ovvero deve essere (c è la velocità della luce nel vuoto):
$$\Delta t \leq \Delta r / c$$
 2. Banda simulata. Il passo temporale deve essere sufficientemente piccolo da campionare correttamente (teorema di Shannon-Nyquist) il campo EM, la cui banda è data da quella, B , delle sorgenti. Allora deve essere:
$$\Delta t \leq 1 / (2B)$$

Condizioni iniziali e condizioni al contorno

Come per qualunque altra equazione alle derivate parziali, per risolvere le equazioni di Maxwell è necessario **specificare** le condizioni iniziali e quelle al contorno.

Sia V il volume nel quale si vuole calcolare il campo EM ed \mathcal{S} la superficie che lo racchiude:



- Le **condizioni iniziali** specificano il campo EM in tutto V all'istante t_0 . Una scelta molto comune (e ragionevole) è che il campo sia nullo ovunque all'istante iniziale.
- Le **condizioni al contorno** specificano il campo EM sulla superficie \mathcal{S} (più correttamente, alcune sue componenti tangenti e/o normali alla superficie) in **ogni** istante $t \in [t_0, t_1]$ (ovvero nell'intervallo temporale di interesse). Le condizioni al contorno sono legate alla fisica del problema. Ad esempio:
 - se il volume V è racchiuso da una scatola di conduttore ideale, la componente di \mathbf{e} tangente ad \mathcal{S} dovrà essere nulla in ogni istante temporale.
 - se si vuole simulare il campo EM nello spazio libero, si impone su \mathcal{S} il cosiddetto PML (*perfectly matched layer*), una particolare condizione al contorno che «lascia libero» il campo EM di uscire dal volume computazionale sopprimendo di fatto ogni futura riflessione dalla superficie.

Sorgenti

La **sorgente** del campo EM è una condizione *nota* in grado di generare campo EM all'interno del volume di interesse e può essere:

- una **densità volumetrica di corrente** posta all'interno di V ; è il caso, per esempio, di un'antenna;
- una **densità superficiale di corrente** posta sulla superficie S ; definendo delle opportune sorgenti superficiali equivalenti è possibile, ad esempio, simulare il caso in cui il volume V sia illuminato da un'onda piana uniforme proveniente dall'esterno.

In entrambi i casi, la sorgente del campo EM:

- deve essere nota in ogni istante temporale; spesso l'andamento temporale è descritto con un impulso gaussiano; minore è la durata dell'impulso, maggiore sarà la banda esplorata dalla simulazione;
- agisce direttamente sui nodi della griglia corrispondenti alla sua posizione.