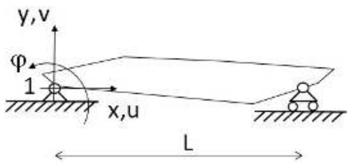
**BIOMECCANICA A.A. 2024-25**
**ANALISI CINEMATICA E STATICA DI STRUTTURE NELLO SPAZIO BIDIMENSIONALE**
**STRUTTURE MONOCORPO**

## 1. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA FISSA

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$




Preliminarmente, si osserva che la struttura ha 3 gradi di libertà (g.d.l.) e 3 condizioni semplici di vincolo (c.d.v.) applicate. Il numero dei vincoli è quindi strettamente necessario a bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano.
Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento $(u_1, v_1, \varphi)$ (si ricorda che la rotazione è comune a tutti i punti del medesimo corpo rigido).
Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1 e 2 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Si esprime la componente di spostamento $v_2$ in funzione delle incognite cinematiche assunte. Per fare ciò, si considera la formula generale di relazione tra le componenti di spostamento di due punti generici P e Q di un corpo rigido vincolato ad un piano:

$$u_Q = u_P - \varphi\left(y_Q - y_P\right)$$
$$v_Q = v_P + \varphi\left(x_Q - x_P\right)$$

Considerando la seconda equazione e particolarizzandola al caso in esame, si ottiene:

$$v_2 = v_1 + \varphi\left(L - 0\right) = v_1 + \varphi L$$

Il sistema di partenza viene pertanto riscritto come:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ v_1 + L\varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

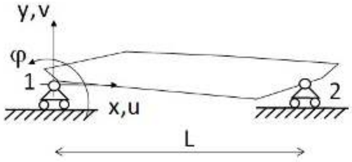
Il sistema ammette la sola soluzione nulla. In base alle relazioni precedenti ciò significa che ogni punto della struttura avrà componenti di spostamento nulle. La struttura è fissa.

## 2. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$




La struttura ha 3 g.d.l. e 2 c.d.v. applicate. Si può quindi affermare che la struttura ha almeno 1 grado di labilità.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento $(u_1, v_1, \varphi)$. Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1 e 2 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Si esprime la componente di spostamento $v_2$ in funzione delle incognite cinematiche assunte, ottenendo:

$$v_2 = v_1 + \varphi(L - 0) = v_1 + \varphi L$$

ricavando, di conseguenza:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 + L\varphi = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \bar{u} \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

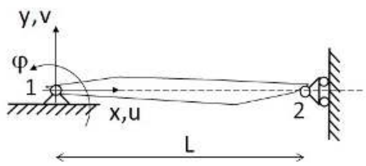
Si deduce che sono nulle le componenti di traslazione verticale del punto 1 e di rotazione, così come di ogni altro punto della struttura. Rimane arbitrario lo spostamento in direzione orizzontale del punto 1 e, di conseguenza, del corpo rigido. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità.

### 3. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$




La struttura ha 3 g.d.l. e 3 c.d.v. applicate. Il numero dei vincoli è quindi strettamente necessario a bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano. Non si può tuttavia affermare a priori che la struttura è fissa, senza una analisi cinematica.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento $(u_1, v_1, \varphi)$. Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1 e 2 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

Si esprime la componente di spostamento $u_2$ in funzione delle incognite cinematiche assunte, ricavando

$$u_2 = u_1 - \varphi(0 - 0) = u_1$$

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = \bar{\varphi} \end{cases}$$

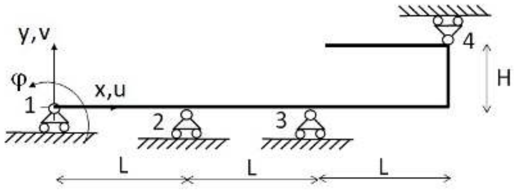
La soluzione trovata suggerisce che esistono $\infty^1$ in dipendenza del valore infinitesimo dell'angolo di rotazione attorno al punto 1. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità, nonostante siano uguali g.d.l. e c.d.v. del corpo.

## 4. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA SOVRAVINCOLATA E LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_3 = 2L \\ y_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 3L \\ y_4 = H \end{cases}$$




La struttura ha 3 g.d.l. e 4 c.d.v. applicate. Il numero dei vincoli è sovrabbondante rispetto alla necessità di bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano. Anche in questo caso non si può però affermare a priori che la struttura è fissa, senza una analisi cinematica.
Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento $(u_1, v_1, \varphi)$. Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli applicati nei punti 1, 2, 3 e 4 si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ v_4 = 0 \end{cases}$$

Si esprimono le componenti di spostamento verticali in funzione delle incognite cinematiche assunte:

$$v_2 = v_1 + \varphi(L - 0) = v_1 + \varphi L$$
$$v_3 = v_1 + \varphi(2L - 0) = v_1 + 2\varphi L$$
$$v_4 = v_1 + \varphi(3L - 0) = v_1 + 3\varphi L$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 + \varphi L = 0 \\ v_1 + 2\varphi L = 0 \\ v_1 + 3\varphi L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \bar{u} \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

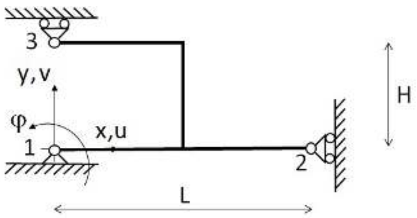
La soluzione trovata mostra che esistono $\infty^1$ in dipendenza del valore di traslazione in direzione orizzontale. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità, nonostante vi sia una sovrabbondanza di c.d.v. rispetto ai g.d.l. del corpo.

## 5. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi cinematica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = H \end{cases}$$




La struttura ha 3 g.d.l. e 4 c.d.v. applicate. Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento $(u_1, v_1, \varphi)$. Il sistema delle equazioni di vincolo è:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

Si esprimono le componenti di spostamento $u_2$ e $v_3$ in funzione delle incognite cinematiche assunte, ricavando

$$u_2 = u_1 - \varphi(0-0) = u_1$$
$$v_3 = v_1 + \varphi(0-0) = v_1$$

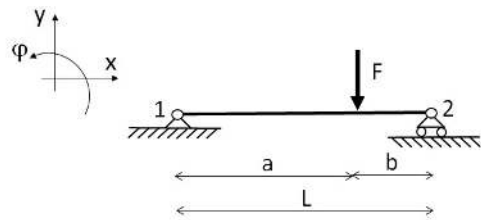
Si può quindi riscrivere il sistema precedente come segue:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = \overline{\varphi} \end{cases}$$

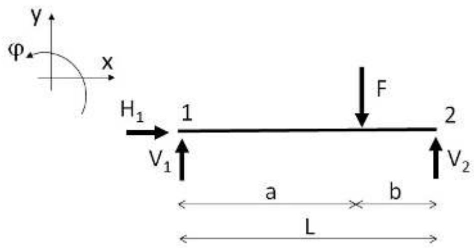
La soluzione trovata suggerisce che esistono $\infty^1$ in dipendenza del valore infinitesimo dell'angolo di rotazione attorno al punto 1. La struttura ha pertanto 1 grado di labilità, nonostante vi sia una sovrabbondanza di c.d.v. rispetto ai g.d.l. del corpo.

## 6. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura.




Si osservi che la struttura corrisponde nella disposizione dei vincoli a quella studiata dal punto di vista cinematico nell'esercizio 1.
Nell'analisi statica si assumono come incognite che le componenti delle reazioni vincolari $(H_1, V_1, V_2)$. A partire dalla struttura effettiva si ricava il sistema di corpo libero, eliminando idealmente le componenti cinematiche dei vincoli e sostituendole con le corrispondenti componenti statiche.




Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno ad un punto arbitrario.

$$
\begin{cases}
\sum_i F_{xi} = 0 \\
\sum_i F_{yi} = 0 \\
\sum_i M_{i,P} = 0
\end{cases}
$$

Scegliendo il punto 1 per l'equilibrio alla rotazione si ottiene:

$$
\begin{cases}
H_1 = 0 \\
V_1 + V_2 - F = 0 \\
-Fa + V_2 L = 0
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
H_1 = 0 \\
V_1 = Fb/L \\
V_2 = Fa/L
\end{cases}
$$

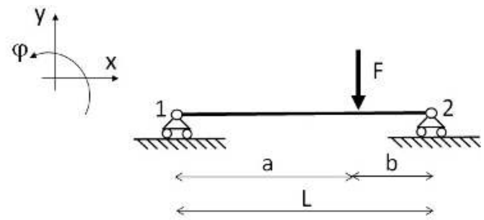
I valori precedenti rappresentano la soluzione (unica) delle componenti di reazione vincolare che garantiscono l'equilibrio della struttura soggetta alla forza verticale indicata.
Si può notare che:

1) La discussione algebrica del sistema permette di dire che esiste una soluzione (unica) per ogni sistema di forze si consideri. In altri termini, la struttura è in equilibrio per qualsiasi sistema di forze;
2) Le componenti di reazione vincolare sono ottenute facendo ricorso a sole equazioni di equilibrio; tale condizione si riassume dicendo che la struttura è staticamente determinata.

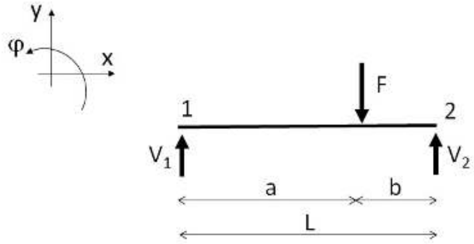
Una struttura che risponde alle condizioni 1 (in equilibrio rispetto a qualsiasi sistema di forze) e 2 (staticamente determinata) si dice isostatica.
Richiamando i risultati dell'analisi cinematica svolta nell'esercizio 1, si noti che la condizione di isostaticità corrisponde al fatto che la struttura è fissa, con un numero di c.d.v. pari ai g.d.l. del sistema.

## 7. ANALISI STATICA: STRUTTURA LABILE

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura.




La struttura corrisponde nella disposizione dei vincoli a quella studiata dal punto di vista cinematico nell'esercizio 2.
Nell'analisi statica si assumono come incognite le componenti di reazione vincolare $(V_1, V_2)$. Procedendo come nell'esercizio 6, a partire dalla struttura effettiva si ricava il sistema di corpo libero, eliminando idealmente le componenti cinematiche dei vincoli e sostituendole con le corrispondenti componenti statiche.



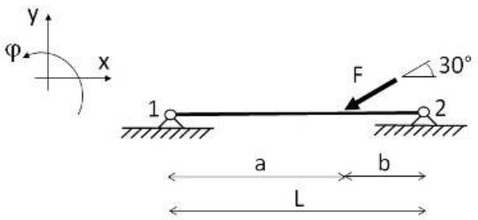

Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno ad un punto arbitrario, scelto nuovamente nel punto 1:

$$\begin{cases} V_1 + V_2 - F = 0 \\ -Fa + V_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = Fb/L \\ V_2 = Fa/L \end{cases}$$

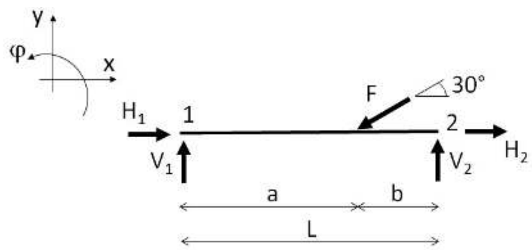
Si è trovata una soluzione di equilibrio, facendo ricorso a sole condizioni di equilibrio. La struttura è quindi staticamente determinata. L'equilibrio, però, non è garantito per qualsiasi sistema di forze. Infatti, l'equilibrio statico non sarebbe garantito applicando una forza esterna in direzione x. Ciò dipende dal fatto che il numero di c.d.v. è inferiore ai g.d.l. della struttura. La struttura è detta ipostatica.
La condizione di ipostaticità si può legare ai risultati della discussione cinematica fatta nell'esercizio 2, dove si è determinato che la struttura è labile.

## 8. ANALISI STATICA: STRUTTURA IPERSTATICA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura.




Preliminarmente, si osserva che la struttura ha 4 c.d.v., maggiori dei g.d.l. del sistema, che sono 3. Ciò basta a dire che la struttura non è, in generale, staticamente determinata.
Nell'analisi statica si assumono come incognite le componenti delle reazioni vincolari $(H_1, V_1, H_2, V_2)$. Il sistema di corpo libero è rappresentato nella figura sottostante:



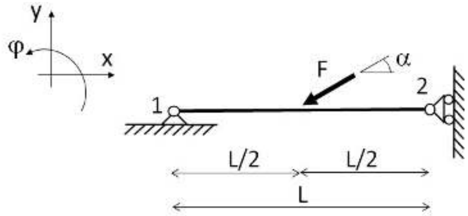

Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno al punto 1:

$$\begin{cases} H_1 + H_2 - F\sqrt{3}/2 = 0 \\ V_1 + V_2 - F/2 = 0 \\ -aF/2 + V_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 + H_2 = F\sqrt{3}/2 \\ V_1 = Fb/2L \\ V_2 = Fa/2L \end{cases}$$

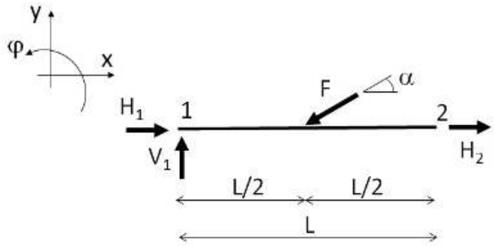
Si nota che esiste sempre una condizione di equilibrio e che, anzi, ve ne sono $\infty^1$: si può infatti assegnare un valore arbitrario ad una delle componenti $H_1$ e $H_2$. Ciò dipende dalla sovrabbondanza dei vincoli. La struttura non è staticamente determinata perché il valore delle componenti di reazione vincolare non si può calcolare facendo uso delle sole equazioni di equilibrio. La struttura è detta iperstatica.
Il fatto che esista sempre una condizione di equilibrio corrisponde al risultato dell'analisi cinematica della struttura, che dimostrerebbe che la struttura è fissa.
Se non vi fossero componenti di forza in direzione x non sussisterebbe l'indeterminazione delle componenti orizzontali delle reazioni vincolari. Ciò sarebbe comunque legato ad una condizione specifica delle forze esterne applicate.

## 9. ANALISI STATICA: STRUTTURA LABILE E STATICAMENTE INDETERMINATA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura per valori dell'angolo $\alpha$ pari a 0 e $\pi/2$, rispettivamente.




Si assumono come incognite le componenti delle reazioni vincolari $(H_1, V_1, H_2)$. Il sistema di corpo libero è rappresentato nella figura sottostante:




Si scrive il sistema delle equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x, y e di equilibrio alla rotazione attorno al punto 1:

$$\begin{cases} H_1 + H_2 - F\cos\varphi = 0 \\ V_1 - F\text{sen}\varphi = 0 \\ -F\text{sen}\varphi \cdot L/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 + H_2 = F\cos\varphi \\ V_1 = F\text{sen}\varphi \\ F\text{sen}\varphi \cdot L/2 = 0 \end{cases}$$

Posto che sia $F \neq 0$, l'equilibrio della struttura può sussistere solo per $\varphi = 0$. Si nota, inoltre, come la struttura sia staticamente indeterminata, poiché non è determinabile con le sole equazioni di equilibrio il valore delle componenti $H_1$ e $H_2$. Il risultato può legarsi all'analisi cinematica fatta nell'esercizio 3. Pur essendo verificata la condizione di uguaglianza tra g.d.l. e c.d.v., la particolare configurazione dei vincoli determina, contemporaneamente, l'introduzione di 1 grado di labilità e di condizione di indeterminazione statica. Si confronti il risultato ottenuto con quello riportato negli esercizi 6 e 1.

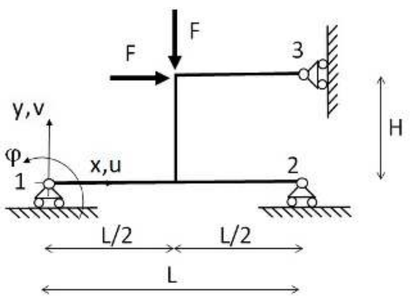
## 10. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Sviluppare l'analisi cinematica e statica della seguente struttura.

Coordinate dei vincoli:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = L \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = L \\ y_3 = H \end{cases}$$




La struttura ha 3 g.d.l. e 3 c.d.v. applicate. Il numero dei vincoli è quindi strettamente necessario a bloccare ogni moto rigido della struttura nel piano.

Si assumono come incognite del problema cinematico le componenti di spostamento $(u_1, v_1, \varphi)$. Sulla base delle prestazioni cinematiche dei vincoli si scrive il sistema dato dalle equazioni di vincolo:

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

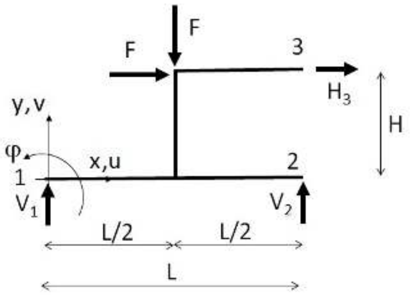
Si esprimono le componenti di spostamento $v_2$ e $u_3$ in funzione delle incognite cinematiche assunte:

$$v_2 = v_1 + \varphi(L - 0) = v_1 + \varphi L$$
$$u_3 = u_1 - \varphi(H - 0) = u_1 - \varphi H$$

Il sistema di partenza viene pertanto riscritto come:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 + \varphi L = 0 \\ u_1 - \varphi H = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

Il sistema ammette la sola soluzione nulla, conseguentemente la struttura è fissa. Considerando che il numero di c.d.v. è uguale al numero dei g.d.l., si può dire che la struttura sarà anche isostatica. Ci si deve quindi aspettare di trovare la soluzione (unica) di equilibrio statico utilizzando le sole equazioni di equilibrio. Il sistema di corpo libero è rappresentato nella seguente figura:



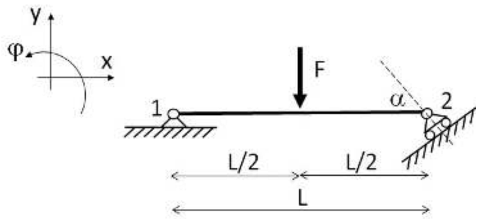

dove le componenti delle reazioni vincolari $(V_1, V_2, H_3)$ costituiscono le incognite del problema statico. Si considerano le equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione x e y e l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto di applicazione delle forze esterne attive:

$$\begin{cases} H_3 + F = 0 \\ V_1 + V_2 - F = 0 \\ -V_1 \cdot L/2 + V_2 \cdot L/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_3 = -F \\ V_1 = F/2 \\ V_2 = F/2 \end{cases}$$

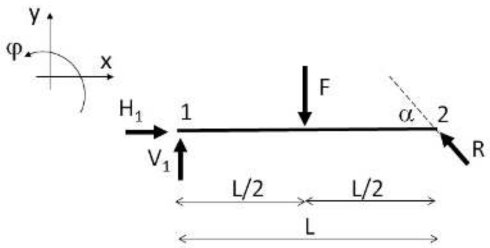
La soluzione precedente rappresenta l'unica soluzione di equilibrio corrispondente alla specifica configurazione di forze esterne attive applicate alla struttura.

## 11. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Sviluppare l'analisi statica della seguente struttura per valori dell'angolo $0 < \alpha \le \pi/2$.



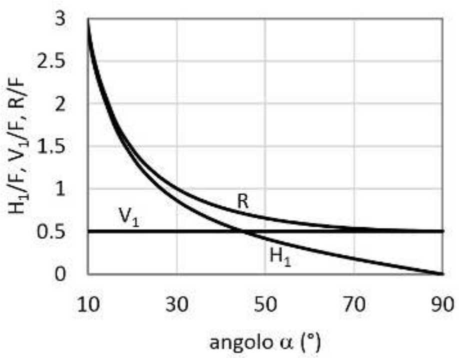

Si assumono come incognite le componenti delle reazioni vincolari $(H_1, V_1, R)$ e si considera $\varphi$ come parametro variabile. Il sistema di corpo libero è rappresentato nella figura sottostante:




Le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale e alla rotazione attorno al punto 1, forniscono:

$$\begin{cases} H_1 - R\cos\varphi = 0 \\ V_1 + R\mathrm{sen}\varphi - F = 0 \\ -FL/2 + R\mathrm{sen}\varphi \cdot L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = R\cos\varphi \\ V_1 = F - R\mathrm{sen}\varphi \\ R = F/(2\mathrm{sen}\varphi) \end{cases}$$

Gli andamenti delle componenti della reazione vincolare sono rappresentati, con valori normalizzati rispetto alla forza esterna attiva F, nel grafico sottostante. Per facilità di lettura il grafico è limitato all'intervallo 10°-90°:




Si osservi che:

- Per $\varphi = \pi/2$ si ottiene la soluzione già trovata nell'esercizio 6.
- Per angoli diversi da $\pi/2$ la componente $H_1$ (componente orizzontale) è diversa da 0, anche in presenza della sola forza esterna attiva verticale.
- Per $\varphi \rightarrow 0$ le componenti $H_1, R$ tendono ad un valore $\infty$.
- La componente verticale $V_1$ e la componente verticale di R sono sempre pari a F/2.
- Per un angolo $\alpha$ pari a 0 (valore escluso nei dati iniziali del problema) la struttura non può essere equilibrata, per le condizioni di carico esterno attivo indicate. In questo caso la struttura sarebbe anche staticamente indeterminata.