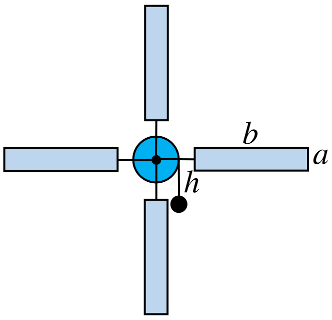
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica (Canale 1)
Numerosità Canale 3 (Prof. G. Naletto)
Seconda Prova in Itinere di Fisica Generale 1 - Padova, 21 giugno 2019

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Problema 1



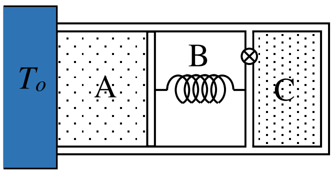
Un sistema tipo “pale di mulino” è costituito da un disco centrale e da 4 pale rettangolari identiche (vedi figura). Le pale sono omogenee complanari ciascuna di massa $m_P = 125$ kg, lati $a = 0.8$ m e $b = 5$ m e poste in direzione radiale a 90° l’una dall’altra; esse sono fissate tramite delle sbarre di massa trascurabile ad un asse di rotazione z orizzontale, perpendicolare al piano contenente le pale; la distanza tra l’asse z ed il lato corto delle pale più vicino è pari ad h. Il disco, omogeneo di massa $m_D = 40$ kg e raggio $R = 0.6$ m, è coassiale all’asse di rotazione e ad esso vincolato; sulla sua circonferenza è avvolto un filo inestensibile e di massa trascurabile alla cui estremità libera è fissato un corpo di dimensioni trascurabili e massa $m_C = 200$ kg. Inizialmente il sistema è fermo, con il corpo appeso al filo posto ad una distanza h più in basso rispetto all’asse di rotazione (quindi alla stessa distanza del lato corto più vicino delle pale); poi si lascia scendere il corpo e il sistema si mette in movimento. Sapendo che il momento di inerzia del sistema pale+disco rispetto all’asse z è $I_z = 7000$ kgm^2, e che sull’asse z c’è un momento di attrito di modulo pari a $M_a = 50$ Nm, determinare:

a) la distanza h;
b) il modulo α dell’accelerazione angolare del sistema pale+disco.

Il corpo in caduta viene urtato da una pala quando il sistema pale+disco ha un’energia cinetica pari a $E_k = 1500$ J. Determinare:

c) la lunghezza ℓ di cui si è allungato il filo dall’istante iniziale del moto all’istante dell’urto;
d) il lavoro W_a fatto dalle forze di attrito nello stesso intervallo di tempo;
e) il modulo ω' della velocità angolare istantanea del sistema subito dopo l’urto, sapendo che il corpo in caduta subito dopo l’urto ha una componente di velocità orizzontale istantanea di modulo $v_x = 1.5$ m/s.

Problema 2



Un cilindro con asse orizzontale di sezione $S = 0.2$ m^2 ha una base diatermica in contatto termico con un serbatoio di calore alla temperatura $T_o = 300$ K e tutte le altre pareti adiabatiche; esso è diviso in tre sezioni da due setti adiabatici paralleli alle basi (vedi figura). La sezione A, in contatto termico con il serbatoio, di volume iniziale $V_{oA} = 0.06$ m^3, contiene $n_A = 2.3$ moli di gas ideale in equilibrio. La sezione B, di volume iniziale $V_{oB} = V_{oA}$, non contiene gas; qui, una molla ideale in linea con l’asse del cilindro è vincolata ai due setti e si trova inizialmente alla sua lunghezza di riposo. Il setto che divide le sezioni A e B si può muovere senza attriti, ed è inizialmente bloccato da un meccanismo esterno. La sezione C contiene $n_C = 5$ moli di gas ideale biatomico in equilibrio alla pressione $p_{oC} = 3\cdot10^5$ Pa. Le sezioni B e C, che sono divise da un setto fisso, sono collegate da una valvola adiabatica, inizialmente chiusa. Ad un certo istante si sblocca il setto tra A e B ed il sistema raggiunge una nuova condizione di equilibrio in cui la molla ha dimezzato la sua lunghezza iniziale. Determinare:

a) la pressione finale p_A del gas in A;
b) la costante elastica k della molla;
c) il calore Q_A scambiato dal gas in A con il serbatoio;
d) la variazione ΔS_U di entropia dell’universo durante questa trasformazione.

Poi si apre la valvola tra B e C; si trova che nel nuovo stato di equilibrio il gas in A è tornato ad occupare lo stesso volume iniziale V_{oA} e che la temperatura del gas nelle sezioni B e C è $T_{BC} = 240$ K. Determinare:

e) la temperatura T_{oC} che aveva inizialmente il gas nella sezione C;
f) la variazione $\Delta S'_U$ di entropia dell’universo durante questa seconda trasformazione.

Soluzioni

Problema 1

a) $I_z = \frac{1}{2} m_D R^2 + 4\left[\frac{1}{12} m_P\left(a^2 + b^2\right) + m_P\left(h + \frac{b}{2}\right)^2\right] \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{1}{4m_P}\left(I_z - \frac{1}{2} m_D R^2\right) - \frac{1}{12}\left(a^2 + b^2\right)} - \frac{b}{2} = 0.94 \text{ m}$

b) $\begin{cases} m_C g - T = m_C a = m_C \alpha R \\ RT - M_a = I_z \alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad m_C gR - M_a = \left(I_z + m_C R^2\right)\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{m_C gR - M_a}{I_z + m_C R^2} = 0.16 \text{ rad/s}^2$

c) $E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{I_z}} = 0.65 \text{ rad/s}; \quad \omega^2 = 2\alpha\Delta\theta; \quad \Rightarrow \quad \ell = R\Delta\theta = R\frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{RE_k}{I_z \alpha} = 0.81 \text{ m}$

d) $W_a = -\int M_a d\theta = -M_a \Delta\theta = -M_a \frac{\ell}{R} = -67.2 \text{ J}$ oppure $W_a = \Delta E_m = \frac{1}{2} I_z \omega^2 + \frac{1}{2} m_C (\omega R)^2 - m_C g\ell$

e) La componente verticale della quantità di moto del corpo non cambia nell'urto:

$I_z \vec{\omega} + \vec{r} \times m_C \vec{v}_y = I_z \vec{\omega}' + \vec{r} \times m_C \left(\vec{v}_x + \vec{v}_y\right) \Rightarrow I_z \omega = I_z \omega' + (h + \ell) m_C v_x \quad \Rightarrow \quad \omega' = \omega - \frac{h + \ell}{I_z} m_C v_x = 0.58 \text{ rad/s}$

Problema 2

a) $p_{oA} V_{oA} = n_A R T_o \quad \Rightarrow \quad p_{oA} = \frac{n_A R T_o}{V_{oA}} = 9.56 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

$V_A + V_B = 2V_{oA} \quad \Rightarrow \quad V_A = 2V_{oA} - V_B = 2V_{oA} - \frac{V_{oA}}{2} = \frac{3}{2} V_{oA}; \quad p_A = \frac{n_A R T_o}{V_A} = \frac{2}{3} p_{oA} = 6.37 \cdot 10^4 \text{ Pa};$

b) $\ell_o = \frac{V_{oA}}{S} = 0.3 \text{ m} \quad p_A S = k|\Delta\ell| = k\left|\frac{\ell_o}{2} - \ell_o\right| = k\frac{\ell_o}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2p_A S}{\ell_o} = \frac{2p_A S^2}{V_{oA}} = 8.5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$

c) Isoterma irreversibile: $Q_A = W_A = -W_B = -W_{molla} = -\left(-\Delta E_{p,el}\right) = \frac{1}{2} k\Delta\ell^2 - 0 = \frac{1}{2} k\left(\frac{\ell_o}{2}\right)^2 = 956 \text{ J}$

d) $\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = n_A R \ln\frac{V_A}{V_{oA}} + \frac{-Q_A}{T_o} = 4.57 \text{ J/K}$

e) NB Non si tratta di una espansione libera del gas, perché il lavoro fatto dal gas non è nullo (il setto si muove):

$p_{BC} V_{BC} = n_C R T_{BC} \quad \Rightarrow \quad p_{oA}\left(V_{oB} + V_{oC}\right) = n_C R T_{BC} \quad \Rightarrow \quad p_{oA}\left(V_{oB} + \frac{n_C R T_{oC}}{p_{oC}}\right) = n_C R T_{BC} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad T_{oC} = \frac{p_{oC}}{p_{oA}} T_{BC} - \frac{p_{oC} V_{oB}}{n_C R} = 320 \text{ K}$

f) $Q'_A = W'_A = -W'_{BC} = -\left(W'_{molla} + W'_{gas}\right) = -W'_{molla} + \Delta U'_{BC} = -\frac{1}{2} k\left(\frac{\ell_o}{2}\right)^2 + n_C c_V \left(T_{BC} - T_{oC}\right) = -9275 \text{ J}$

$\Delta S'_U = \Delta S'_{gas,A} + \Delta S'_{gas,BC} + \Delta S'_{amb} = n_A R \ln\frac{V_{oA}}{V_A} + \left(n_C c_P \ln\frac{T_{BC}}{T_{oC}} - n_C R \ln\frac{p_{BC}}{p_{oC}}\right) + \frac{-Q'_A}{T_o} = 28.8 \text{ J/K}$