Soluzioni del III homework.

1. La funzione di traferimento di un controllore che garantisce quanto richiesto è:

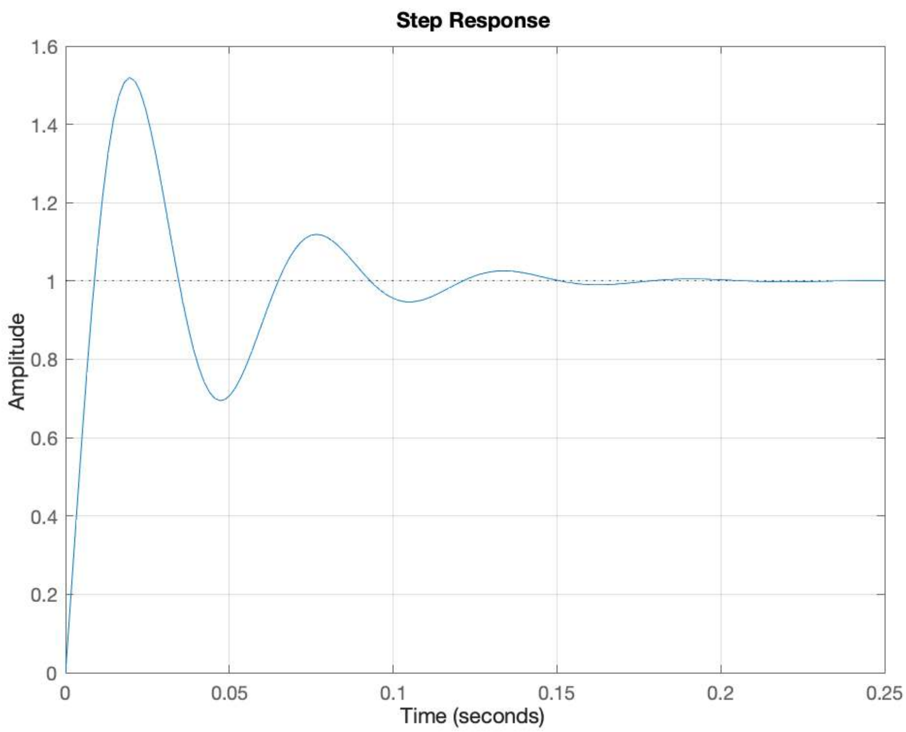
$$C(s) = \frac{117(s+50)^3}{s(s^2+1)}$$

2. La funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa è:

$$W(s) = \frac{117s^3 + 17550s^2 + 877500s + 14620000}{s^4 + 120s^3 + 17551s^2 + 877503s + 14620000}$$

I suoi poli dominanti sono in $-28.30 \pm 109.64j$

3. Il grafico della risposta indiciale del sistema a catena chiusa è:



Ragionamenti e i passaggi per ottenere la soluzione

Il controllore deve avere la forma

$$C(s) = \frac{N_c(s)}{s(s^2+1)D_c(s)}$$

affinché il sistema a catena chiusa insegua segnali di riferimento a gradino con errore asintotico nullo e garantisca reiezione asintotica perfetta di disturbi sinusoidali di pulsazione pari a 1 radiante al secondo. Per non dover ricorrere a un controllore di ordine più elevato del necessario, scegliamo $D_c(s) = 1$ e proviamo a vedere come scegliere $N_c(s)$, ossia gli zeri del controllore, in modo da attirare i poli del sistema a catena chiusa nella parte di $\mathbb{C}$ ottenuta intersecando il sempiano a sinistra di una retta verticale di ascissa pari a $-\sigma^*$, con $\sigma^* := 4.6/t_s^* \simeq 31$ e la regione che si trova all'esterno di una semicirconferenza di raggio pari a $\omega_n^* := 1.8/t_r^* \simeq 36$.

Utilizzando il luogo delle radici e la sua interpretazione come linee di un campo elettrico piano risulta intuitivo che un modo di ottenere quanto voluto è scegliere tre zeri reali a sinistra di -36. Scegliamo dunque $N_c(s) = (s+z)^3$ con $z > 36$. Per esempio prendiamo $z = 50$ (in modo che che lo zero in $-z$ sia sufficientemente a sinistra di -36 da non dover richiedere valori enormi del guadagno per garantire che tutti i poli del sistema a catena chiusa siano nella regione disiderata).

Con i seguenti comandi disegno il luogo delle radici e i contorni della regione ammissibile.

```
clear all
close all

Ng=[1]   %Fisso il numeratore di G
Dg=[1 3] %Fisso il denominatore di G

G=tf(Ng,Dg)  %Fisso G

Dc=conv([1  0], [1 0 1])   %Fisso il denominatore di C
z=-50  %fisso lo zero triplo di C (potevo anche fissare 3 zeri distinti)
Nc=conv([1 -z],conv([1 -z],[1 -z]))  %Fisso il numeratore di C

N=conv(Nc,Ng)  %Fisso il numeratore di H
D=conv(Dc,Dg)  %Fisso il denominatore di H

rlocus(N,D)
axis('equal')
grid

% I seguenti comandi disegnano i contorni della regione ammissibile.
hold on
```

```
ts=0.15
tr=0.05

Wn=1.8/tr
sigma=4.6/ts

w=pi/2:0.01:3*pi/2;
y=Wn*sin(w);
x=Wn*cos(w);

plot(x,y,'m','LineWidth',1)
v=axis;
plot([-sigma,-sigma],[v(3),v(4)],'m','LineWidth',1)
```

Naturalmente se vedessimo che il valore di z non ci dà un luogo soddisfacente lo potremmo cambiare. Vediamo invece che il luogo sembra essere adeguato. Con il comando

```
rlocfind(N,D)
```

possiamo determinare il valore del guadagno K per il quale si ha intersezione del luogo con la circonferenza di raggio ω_n^*. Troviamo $K = 260$.

A questo punto con il comando

```
stepinfo(W,'SettlingTimeThreshold',0.01)
```

otteniamo i seguenti valori di t_r e t_s: $t_r \simeq 0.0043$, $t_s \simeq 0.0573$. Entrambi i valori sono sensibilmente più piccoli di quanto richiesto e quindi possiamo permetterci di spostare a destra i poli dominanti della funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa. Vista la forma del luogo delle radici, ciò corrisponde a diminuire il valore del guadagno K. Diminuendo progressivamente K e utilizzando di nuovo il comando `stepinfo`, troviamo che per $K = 117$, si ha $t_r \simeq 0.007$, $t_s \simeq 0.146$. Pertanto questo valore è adeguato alle richieste e quindi un controllore di funzione di trasferimento

$$C(s) = \frac{117(s+50)^3}{s(s^2+1)}$$

risolve il problema proposto. Il grafico della risposta indiciale del sistema a catena chiusa si ottiene con i comandi:

```
K=117
H=tf(K*N,D)
W=feedback(H,1)
figure
step(W)
grid
```