Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 10

23/05/2024

Esercizio 1

Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g definita da:

$$g(v,w) = x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + 4x_3y_3,$$

dove $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$

(a) Scrivere la matrice G associata alla forma g nella base canonica.

(b) G è definita positiva, negativa o indefinita?

(c) Dire se g è degenere o meno.

Esercizio 2

Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica g la cui matrice, rispetto alla base canonica, è:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) La forma g è degenere?

(b) Determinare una base ortogonale di V.

(c) Determinare una matrice diagonale D *congruente* alla matrice G.

Esercizio 3

Si consideri la seguente matrice:

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per quale valore di t la matrice A è simmetrica? Dire di conseguenza se per tale t esiste una base ortonormale rispetto alla quale la matrice associata risulta diagonale.

Esercizio 4

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$ (dotato del prodotto scalare usuale), sia V il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (2, 0, 1, -1), v_2 = (1, -1, 0, 1), v_3 = (1, -2, -1, 0)$. Si scriva la matrice della restrizione del prodotto scalare al sottospazio V rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$. Si determini inoltre una base ortonormale di V.

Esercizio 5

Sia A una matrice quadrata di ordine n e $v \in \mathbb{R}^n$ un autovettore di A. Sia inoltre $w \in \langle v \rangle^\perp$. Dimostrare che anche il vettore $u = A^T w$ è ortogonale a v.