COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
2 Luglio 2020

Esercizio 1. [11 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 - 0.1s + s^2}{s(1+s)}$$

è richiesto di

- tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$;
- tracciare il diagramma di Nyquist di $G(s)$, individuando asintoti ed intersezioni con gli assi (se presenti);
- studiare la stabilità BIBO del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare del parametro reale K, ricorrendo al Criterio di Nyquist;
- qualora non ci sia stabilità, discutere il numero di poli a parte reale positiva e/o nulla, al variare di K reale.

Esercizio 2. [11 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s}{(s+4)(s-1)^2}$$

se ne traccino i luoghi positivo e negativo, evidenziandone punti doppi, asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, e studiando quindi la BIBO stabilità di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale.

Esercizio 3. [8 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10^4}{(s+1)^2}$$

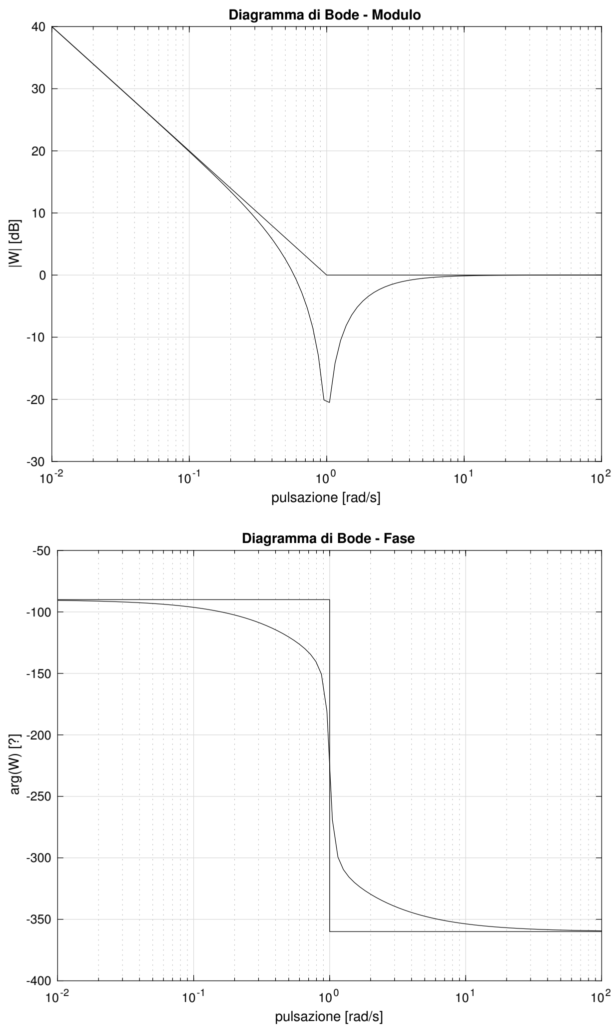
i) si determini l'espressione dell'ingresso sinusoidale causale $u(t)$ a cui corrisponde l'uscita di regine permanente

$$y_{rp}(t) = 100 \sin t;$$

ii) si progetti un controllore proprio e stabilizzante $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ tipo 0 e relativo errore a regime (al gradino) $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-4}$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 10$ rad/s, $m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. Il diagramma di Bode per è illustrato in figura

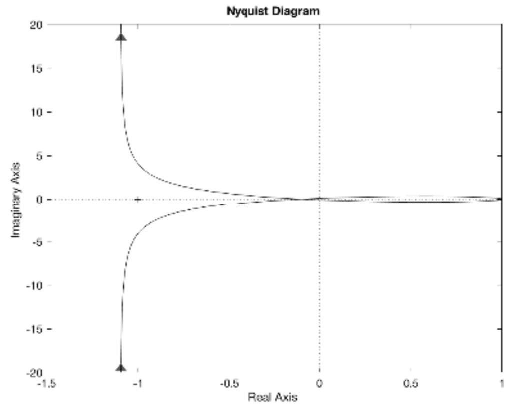


Il diagramma di Bode asintotico del modulo parte con pendenza -20 dB/dec prima di $\omega = 1$ rad/s e passa a 0 dB/dec dopo, mentre il diagramma reale ha un picco di antirisonanza in $\omega = 1$ rad/s. La fase parte da $-90°$ e scende per $\omega = 1$ rad/s al valore $-360°$ in modo ripido. Calcolando $G(j\omega)$ si ottiene

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2 - \frac{11}{10}}{1+\omega^2} + j\frac{\frac{11}{10}\omega^2 - 1}{\omega(1+\omega^2)}.$$

Considerando solo $\omega \geq 0$, la parte reale si annulla solo per $\omega = \sqrt{11/10}$, mentre la parte immaginaria si annulla solo per $\omega = \sqrt{10/11}$. Per $\omega \to 0^+$ la parte reale va a $-11/10$ mentre la parte immaginaria a $-\infty$, mentre per $\omega \to +\infty$ la parte reale tende a 1 e quella immaginaria a 0.

Nyquist arriva dall'infinito (da sinistra in basso) e attraversa il semiasse reale negativo per $\omega = \sqrt{10/11}$ in corrispondenza a -0.1, poi attraversa il semiasse immaginario positivo per $\omega = \sqrt{11/10}$ in corrispondenza a $j/\sqrt{110}$ e infine arriva per $\omega = +\infty$ in 1. In figura il diagramma di Nyquist:



Valutando il numero di giri attorno a $-\frac{1}{K}$, dopo aver aggiunto il semicerchio orario all'infinito dovuto al polo in $s = 0$, si trova, essendo $n_{G_+} = 0$

$$\begin{array}{lcl} K < -1 & \Rightarrow & N = -2, n_{W_+} = 2 \\ -1 < K < 0 & \Rightarrow & N = -1, n_{W_+} = 1 \\ 0 < K < 10 & \Rightarrow & N = 0, n_{W_+} = 0 \\ K > 10 & \Rightarrow & N = -2, n_{W_+} = 2. \end{array}$$

Nel caso critico $K = -1$, l'arrivo asintotico nel punto critico rende $W(s)$ impropria (con due poli a parte reale nulla, per motivi di continuità - si pensi al Luogo delle Radici). Nel caso critico $K = 10$ $W(s)$ ha due poli immaginari coniugati. Pertanto c'è stabilità BIBO solo per $0 < K < 10$.

Esercizio 2. Si noti, preliminarmente che $n = 3$ e $m = 1$, quindi sia luogo positivo che negativo avranno due rami che vanno al punto improprio, nel luogo positivo con direzioni $\pi/2$ e $3\pi/2$, nel luogo negativo con direzioni 0 e π. Il centro degli asintoti in entrambi i casi ha coordinata reale:

$$x_C = \frac{(1 + 1 - 4) - 0}{3 - 1} = -1.$$

L'equazione dei punti doppi porge, dopo alcuni calcoli

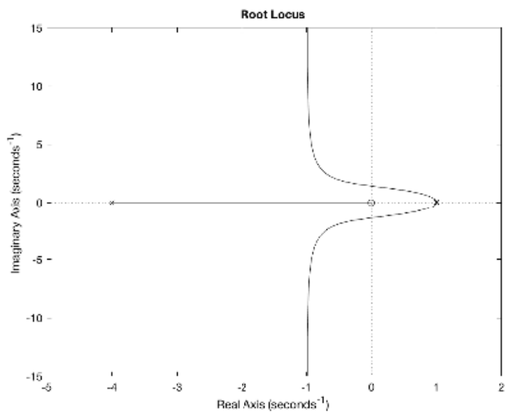
$$(s - 1)(s^2 + 2s + 2) = 0$$

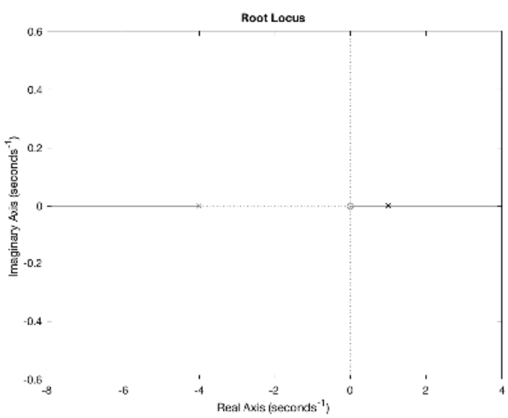
e ciò permette di determinare il punto doppio banale ($s = -1, K = 0$), mentre le altre due radici della precedente equazione sono $-1 \pm j$ che non corrispondono a punti doppi dal momento che il grado di $d(s) = (s + 4)(s - 1)^2$ è minore di 4. Studiando le intersezioni con l'asse immaginario si trova

$$j\omega(K - \omega^2 - 7) + (4 - 2\omega^2) = 0.$$

La parte reale si annulla per $\omega = \pm\sqrt{2}$ e per tale valore di ω la parte immaginaria si annulla se e solo se $K = 9$. Quindi ci sono due sole interseioni con l'asse immaginario in $\pm j\sqrt{2}$ per $K = 9$ (ovvero nel luogo positivo).

Mettendo assieme le informazioni finora trovate e applicando la regola per determinare quali punti dell'asse reale appartengano ai due luoghi, si trova che il luogo negativo ha un ramo che da $s = 1$ va verso $+\infty$ ed un altro verso 0, ed un terzo ramo che da $s = 4$ va verso ∞ (tutti sull'asse reale), quindi la $W(s)$ ha sempre 2 poli positivi e mai stabilità BIBO, mentre il luogo positivo ha un ramo che da 4 va verso 0 (sull'asse reale) ed altri due rami (complessi) che partono da 1, attraversano l'asse immaginario per $K = 9$ (in $\pm j\sqrt{2}$), per terminare sugli asintoti verticali centrati in -1, quindi c'è stabilit'a BIBO per $W(s)$ se e solo se $K > 9$.
I luoghi positivo e negativo sono riportati qui di seguito.





Esercizio 3. i) Osserviamo che $G(s)$ è BIBO stabile e quindi a un segnale del tipo

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$$

esso risponde con risposta a regime permanente

$$y_{rp}(t) = |G(j\omega)|A\sin(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega))).$$

Se imponiamo allora che

$$y_{rp}(t) = |G(j\omega)|A\sin(\omega t + \phi + \arg(G(j\omega))) = 100\sin t$$

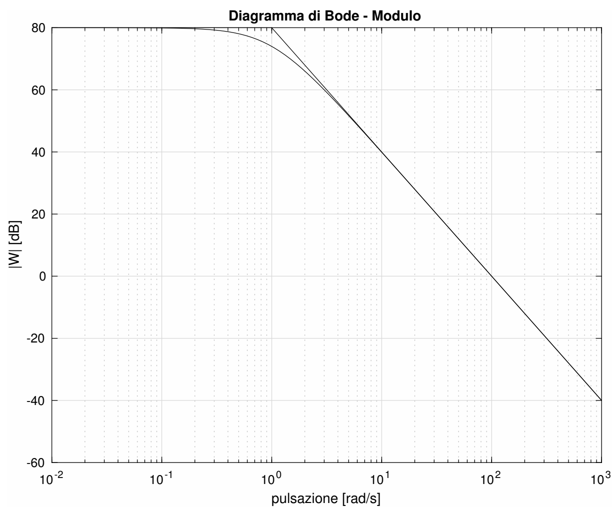
ne consegue che $\omega = 1$, $|G(j)|A = 100$ e $\phi + \arg(G(j) = 0$. Essendo

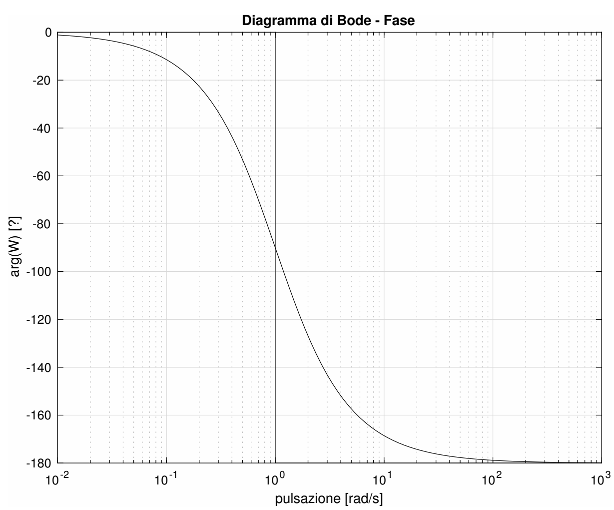
$$G(j) = \frac{10^4}{(1+j)^2}$$

con $|G(j)| = 10^4/2$ e $\arg G(j) = -\pi/2$, ne consegue che

$$u(t) = 0.02 \sin(\omega t + \pi/2)\delta_{-1}(t).$$

ii) Tipo ed errore a regime sono già a posto, quindi non serve alcun pre-compensatore, ovvero $C'(s) = 1$. Se ora tracciamo il diagramma di Bode di $C'(s)G(s) = G(s)$:





osserviamo che $\omega_A = 100$ rad/s e quindi la pulsazione di attraversamento ω_A è maggiore di quella desiderata. Infatti per $\omega = \omega_A^*$ il modulo vale 40 dB. D'altra parte per $\omega = \omega_A^*$ la fase vale circa $-180°$ e quindi tale fase va aumentata di circa $90°$. Una rete a sella che per $\omega = \omega_A^*$ abbassi il modulo di 40dB ed alzi la fase (e quindi $m_\psi(\omega_A^*)$) di circa $90°$ è sufficiente. Possiamo ad esempio scendere di 60dB con la prima coppia polo-zero (rete attenuatrice), per poi risalire di 20dB (con la rete anticipatrice). Un modo per riuscirci (che semplifica i calcoli in quanto introduce una doppia cancellazione zero-polo ammissibile) è piazzare il polo 4 decadi prima di $\omega_A^* = 10$ rad/s, i due zeri 1 decade prima, e l'ultimo polo in alta frequenza (rispetto ad ω_A, ad esempio 2 decadi dopo), al solo scopo di rendere proprio il compensatore. Il compensatore

$$C(s) = \frac{(1+s)^2}{(1+10^3 s)\left(1+\frac{s}{10^3}\right)}$$

permette il soddisfacimento di tutti i requisiti (compresa la stabilità BIBO del sistema retroazionato, grazie al Criterio di Bode applicato a $C(s)G(s)$), ed è uno degli infiniti $C(s)$ che vanno bene.