COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
1 Luglio 2014

Esercizio 1. [11 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + 100s^2}{s(1-s)^2}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuandone asintoti ed intersezioni con gli assi;

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ ($k \neq 0$), e nel caso in cui il sistema non sia BIBO stabile se ne determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. [7 punti] Dato il modello ingresso/uscita a tempo continuo di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1+s}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)^3},$$

i) si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$ che garantisca errore a regime al gradino pari a circa 0.001, pulsazione di attraversamento pari a circa 10^4 rad/s e margine di fase pari a circa 90°;

ii) si progetti un compensatore stabilizzante di tipo PID $C_2(s)$ che garantisca errore a regime alla rampa lineare pari a circa 0.01, pulsazione di attraversamento pari a circa 10^4 rad/s e margine di fase pari a circa 90°.

Esercizio 3. [8 punti] Si consideri la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita a tempo continuo

$$G(s) = \frac{s}{(s+a)^3},$$

dove a è un parametro reale positivo.

i) Si determini a sapendo che $s = 1$ è punto doppio del luogo delle radici (positivo o negativo);

ii) si traccino i luoghi delle radici positivo e negativo, determinandone eventuali asintoti e punti doppi;

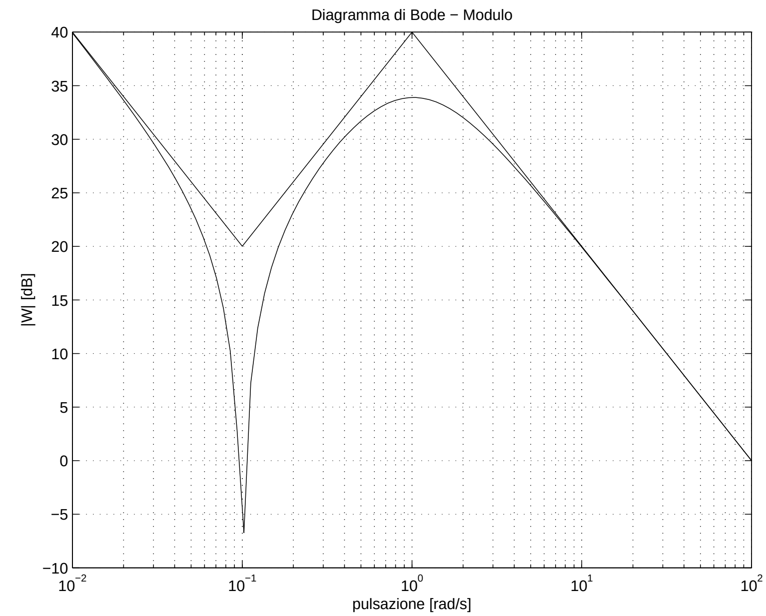
iii) si studi, ricorrendo al luogo delle radici (positivo e negativo), la stabilità BIBO del sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinando le intersezioni del luogo con l'asse immaginario;

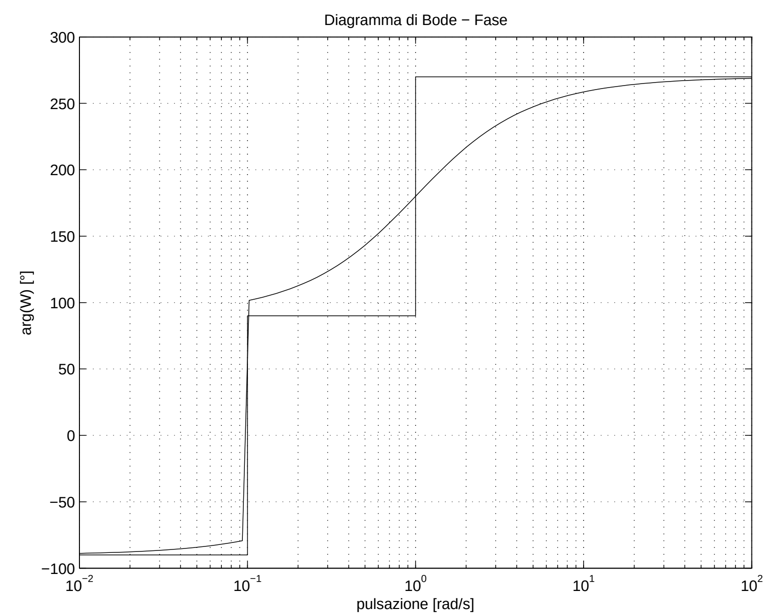
iv) si studi la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ mediante il criterio di Routh.

Teoria. [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.
[Chiarimento: con versione più restrittiva si intende quella che ipotizza due condizioni sul diagramma di Nyquist che consentono di definire sempre il numero N di giri che il diagramma compie attorno al punto critico]

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [4 punti] I diagrammi di Bode sono i seguenti. Si noti che il diagramma di Bode delle ampiezze presenta un picco di antirisonanza infinito.

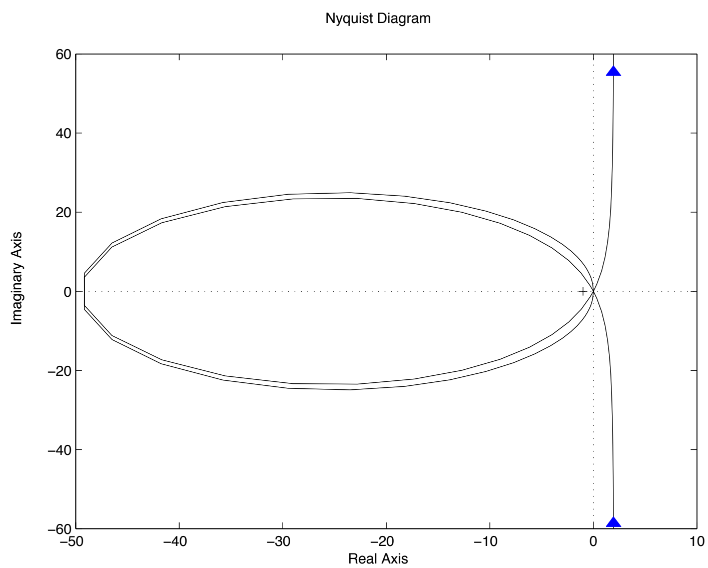




ii) [4 punti] Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ può essere tracciato in modo approssimativo a partire dai precedenti diagrammi di Bode. Tuttavia per valutare asintoti e punti di intersezione con gli assi è necessario ricorrere all'espressione analitica della $G(j\omega)$. Si trova, dopo alcuni passaggi,

$$G(j\omega) = 2\frac{1-100\omega^2}{(1+\omega^2)^2} + j\frac{(\omega^2-1)(1-100\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^2},$$

da cui si desume che l'asintoto verticale (per $\omega \to 0$) ha ascissa $s = 2$. Considerando la sola porzione di diagramma per pulsazioni positive, si nota quindi che il diagramma di Nyquist parte dal punto improprio (con fase $-90°$ e parallelo all'asintoto verticale), attraversa l'origine per $\omega = 0.1$ rad/s (dove si annullano sia parte reale che immaginaria della $G(j\omega)$), poi fa un cappio e ritorna nell'origine dopo aver attraversato l'asse reale nel punto di ascissa $-\frac{99}{2}$ per $\omega = 1$ rad/s. La porzione relativa a pulsazioni negative viene ottenuta per simmetria.



iii) [3 punti] Se ora vogliamo studiare la stabilità BIBO della funzione di trasferimento $W(s)$ al variare di k, per prima cosa riportiamo il diagramma al finito attraverso un semicerchio descritto in verso orario. Sfruttando il precedente diagramma e osservando la posizione del punto $-\frac{1}{k}$ rispetto a Nyquist ($n_{G_+} = 2$ e $n_{W_+} = n_{G_+} - N$) troviamo

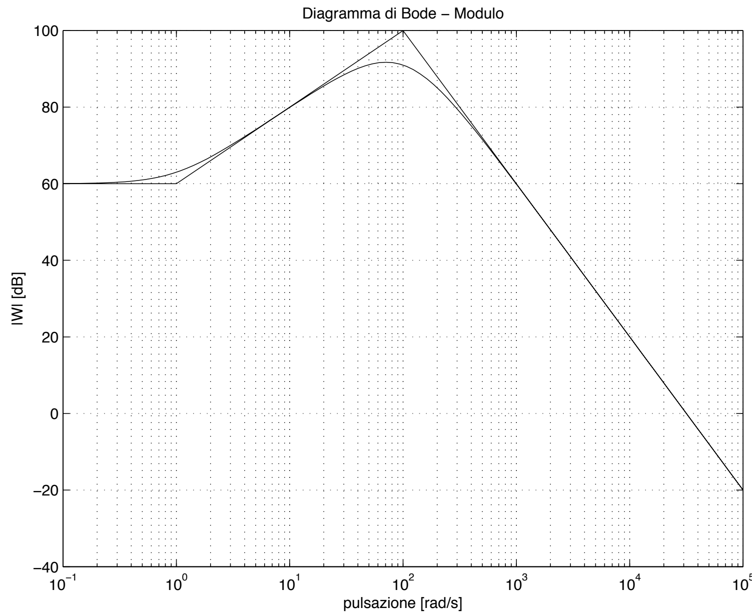
$$\begin{array}{lcccc} k < 0 & \Rightarrow & N_G = -1 & \Rightarrow & n_{W_+} = 3 \\ \frac{2}{99} > k > 0 & \Rightarrow & N_G = 0 & \Rightarrow & n_{W_+} = 2 \\ k > \frac{2}{99} & \Rightarrow & N_G = +2 & \Rightarrow & n_{W_+} = 0 \end{array}$$

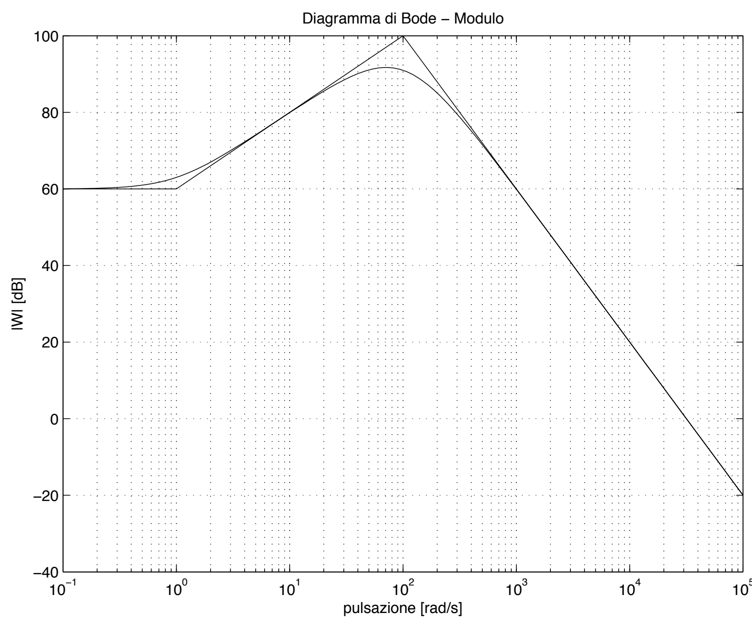
da cui si ha stabilità BIBO solo per $k > \frac{2}{99}$. Nel caso limite $k = \frac{2}{99}$ il diagramma passa per il punto critico e si hanno due poli immaginari puri in $\pm j$ (mentre il rimanente polo si trova facilmente fattorizzando

$$s(1-s)^2 + \frac{2}{99}(1+100s^2) = (s^2+1)\left(s+\frac{2}{99}\right) \;\Rightarrow\; s = -\frac{2}{99}$$

da cui due poli immaginari puri ed uno reale negativo, ma questo conto non veniva richiesto).

Esercizio 2. [4 punti] i) Il guadagno $K_B \simeq 10^3$ sistema l'errore a regime e il tipo. Dai diagrammi di Bode di $10^3 G(s)$





si vede che, essendo $10^4 = \omega_a^{DES} < \omega_a = 10^{4.5}$ e $90° = m_\phi^{DES} > m_\phi(\omega_a^{DES}) \simeq 0°$, è necessaria una rete a sella

$$C_{sella}(s) = \frac{1 + s/z_1}{1 + s/p_1} \frac{1 + s/z_2}{1 + s/p_2},$$

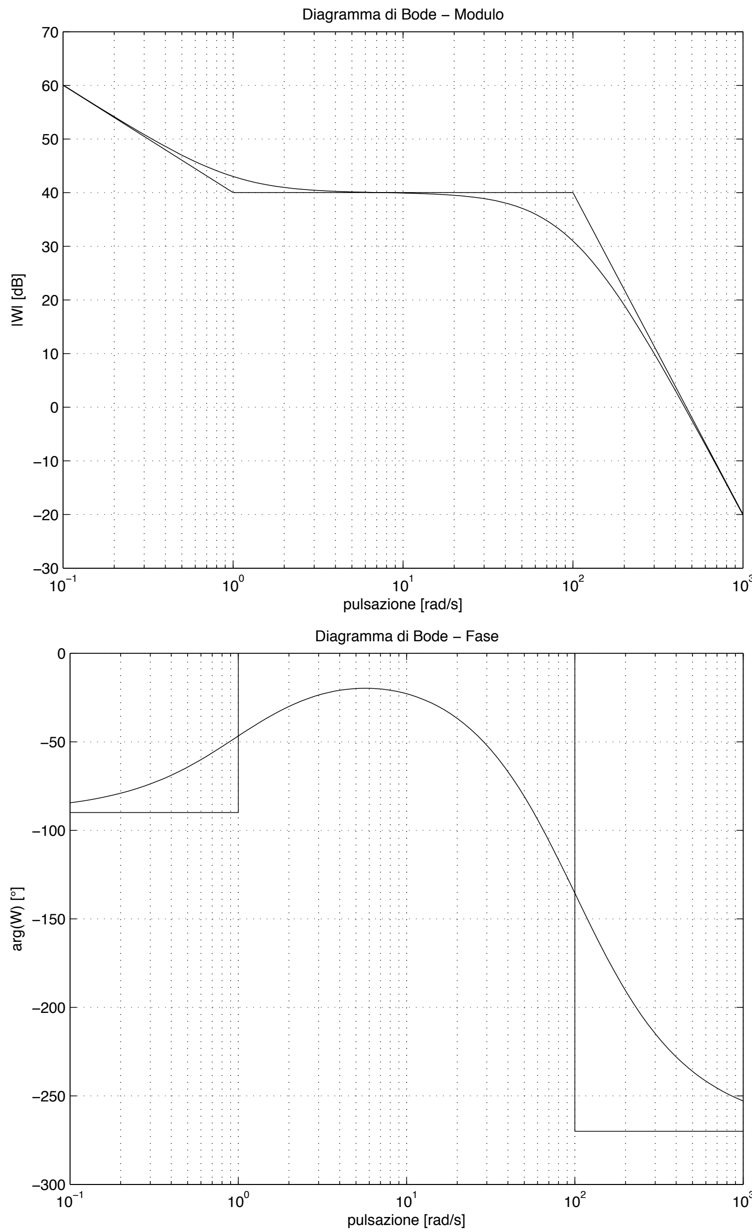
in quanto in ω_a^{DES} il guadagno va abbassato di 20 dB, e la fase aumentata di quasi 90°. Scegliamo, ad esempio, di posizionare la prima coppia polo-zero distante 2 decadi (discesa di 40 dB), ed il secondo zero una decade prima di ω_a^{DES} (salita di 20 dB), ed il secondo polo in alta frequenza. Ad esempio la scelta $p_1 = -10, \ z_1 = z_2 = -10^3, \ p_2 = -10^6$ va bene e conduce a

$$C_1(s) = K_B C_{sella}(s) = 10^3 \frac{\left(1+\frac{s}{10^3}\right)^2}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{10^6}\right)}$$

e i diagrammi di Bode di $C_1(s)G(s)$ dimostrano il soddisfacimento di tutti i requisiti (stabilità BIBO inclusa, per il Criterio di Bode):

(* MANCANO DIAGRAMMI DI BODE *)

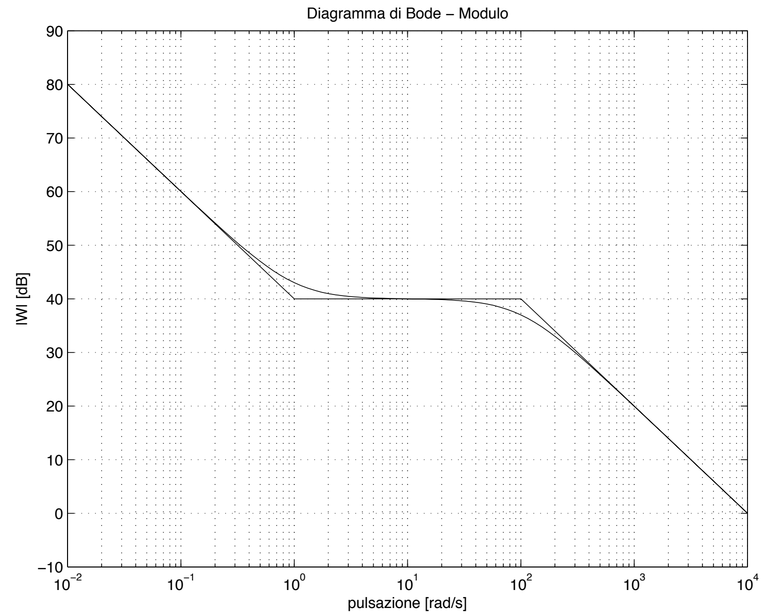
[3 punti] Il precompensatore $C_2'(s) = \frac{100}{s}$ è necessario per sistemare l'errore a regime, dopodiché i diagrammi di Bode di $C_2'(s)G(s)$

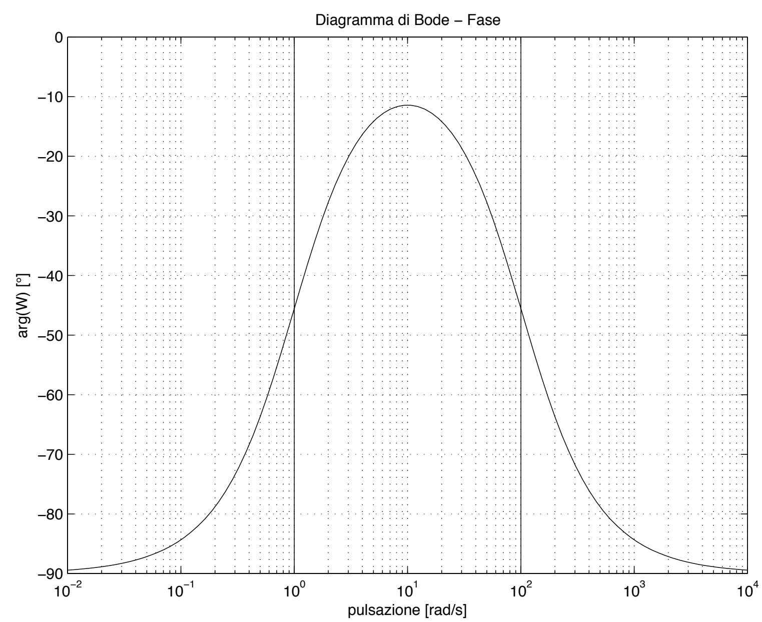


evidenziano una pulsazione di attraversamento ω_a inferiore a 10^3 rad/s, con margine di fase addirittura negativo. Tuttavia, posizionando ad esempio i due zeri del PID in -100

(in modo da indurre una doppia cancellazione zero-polo ammissibile) si ottiene quanto desiderato (stabilità BIBO inclusa, per il Criterio di Bode). Quindi il controllore PID cercato è:

$$C_2(s) = \frac{100}{s}\left(1 + \frac{s}{100}\right)^2 = \frac{100}{s} + 2 + \frac{s}{100}$$





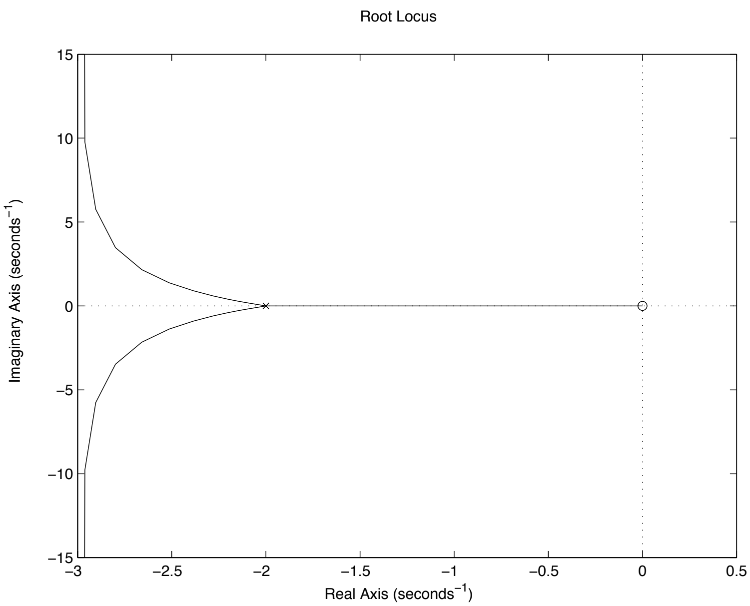
Esercizio 3. i) [1 punto] L'equazione dei punti doppi porge

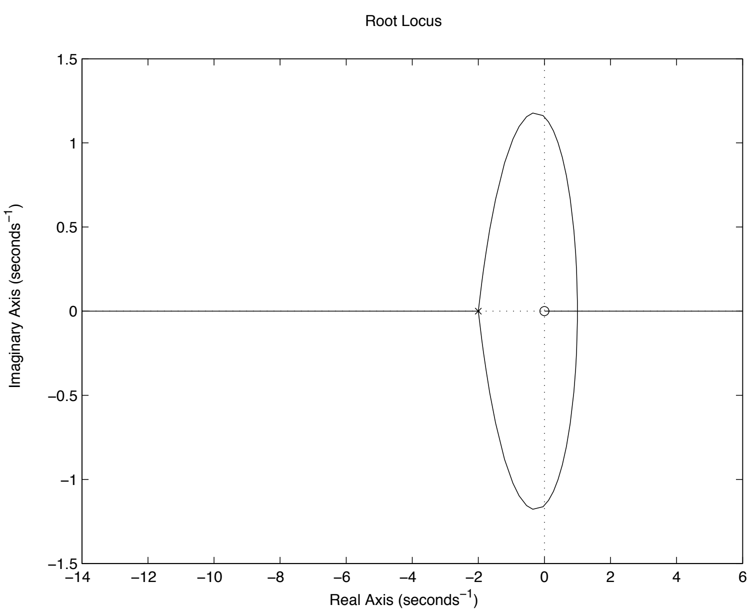
$$(s+a)^2(a-2s) = 0 \;\Rightarrow\; (s=1)\; a=-1 \text{ oppure } a=2$$

delle quali solo $a = 2$ è accettabile ($a > 0$).

ii) [4 punti] I punti doppi sono $s = -2$ ($k = 0$, punto doppio, anzi triplo, iniziale del luogo), e $s = 1$ ($k = -27$, luogo negativo). Il centro asintoti è in -3, e gli asintoti sono verticali (luogo positivo) o sull'asse reale (luogo negativo). Studiando le intersezioni con l'asse immaginario si trova

$$j\omega(k+12-\omega^2)+(8-6\omega^2)=0 \;\Rightarrow\; \omega=\pm\frac{2}{\sqrt{3}},\; k=-\frac{32}{3}$$





iii) [2 punti] Osservando il luogo positivo si deduce la stabilità BIBO della $W(s)$ per ogni $k \geq 0$ (un ramo va da -2 a 0 e gli altri due verso i due asintoti, senza attraversare l'asse immaginario vista l'assenza di soluzioni immaginarie per $k \geq 0$). Per quanto concerne il luogo negativo, invece, si ha stabilità BIBO per $-\frac{32}{3} < k \leq 0$ (un ramo va da -2 verso $-\infty$, gli altri attraversano l'asse immaginario in $\pm j\frac{2}{\sqrt{3}}$ e si dirigono verso il punto doppio 1, dopodiché un ramo va verso 0 e l'altro verso $+\infty$). In definitiva, si ha stabilità BIBO se e solo se $k > -\frac{32}{3}$.

iv) [1 punto] Infine, la tabella di Routh per $(s+2)^3 + ks = s^3 + 6s^2 + (12+k)s + 8$ presenta i valori $1,\ 6,\ k + \frac{32}{3},\ 8$ in prima colonna, da cui si ha stabilità BIBO se e solo se $k > -\frac{32}{3}$, in accordo a quanto trovato ricorrendo all'analisi del luogo delle radici.

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.