Lezione 20 - 3/05/2024

IERI ABBIAMO TROVATO QUESTA PROPRIETÀ FONDAMENTALE: (che c'è anche nel compito)

FILTRO

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{h(\cdot)} \longrightarrow y(t) = \underbrace{|H(j\omega_0)|}_{\text{VALORE ASSOLUTO}} \cos(\omega_0 t + \underbrace{\angle H(j\omega_0)}_{\text{FASE}})$$

REALE

MOLT. PER COSTANTE

TRASLAZIONE

$\Longrightarrow$ UN FILTRO REALE NON DISTORCE LE SINUSOIDI

LA STESSA COSA VALE PER GLI ESPONENZIALI COMPLESSI:

FILTRO

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(\cdot)} \longrightarrow y(t) = H(j\omega_0)\, e^{j\omega_0 t} = |H(j\omega_0)|\, e^{j(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))}$$

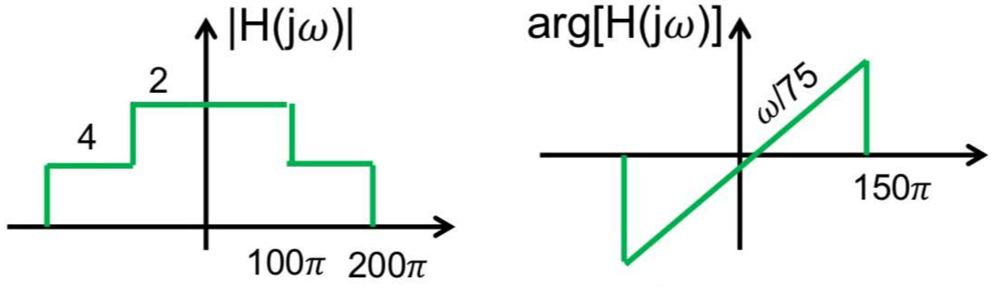
REALE

$\Longrightarrow$ UN FILTRO REALE NON DISTORCE GLI ESPONENZIALI COMPLESSI A FASE LINEARE

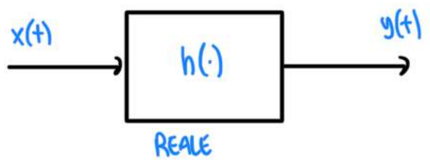
Facciamo un esercizio sfruttando questa proprietà:

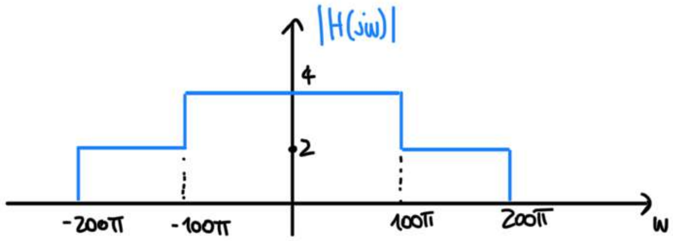
Es 2

Dato l'ingresso $x(t) = \cos(50\pi t) + 5\cos(120\,\pi t)$ calcolare la risposta al filtro h(t). Il filtro distorce il segnale?

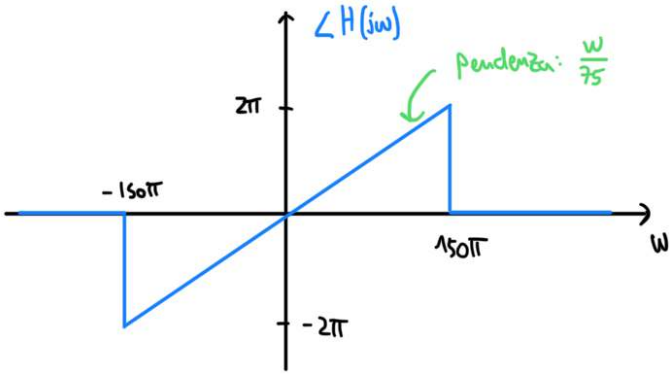


ESERCIZIO 2:





$x(t) = \cos(50\pi t) + 5\cos(120\pi t)$



RICHIESTE:
- $y(t) = ?$
- IL FILTRO DISTORCE IL SEGNALE?

Sol. MI CALCOLO MODULO E FASE ALLE PULSAZIONI DI $x(t)$, CIOÈ 50π E 120π

$|H(j50\pi)| = 4$

$|H(j120\pi)| = 2$

$\angle H(j50\pi) = \frac{50}{75}\pi$

$\angle H(j120\pi) = \frac{120}{75}\pi$

$$y(t) = 4\cos\left(50\pi t + \frac{50\pi}{75}\right) + 2\cdot 5\cos\left(120\pi t + \frac{120}{75}\pi\right)$$

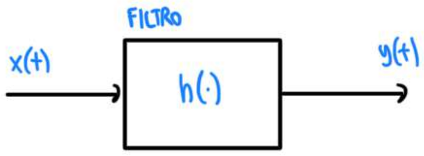
$$= 4\cos\left(50\pi\underbrace{\left(t+\frac{1}{75}\right)}_{\text{traslaz}}\right) + 2\cdot 5\cos\left(120\pi\underbrace{\left(t+\frac{1}{75}\right)}_{\text{traslaz}}\right)$$

IL FILTRO DISTORCE IL SEGNALE? SI, PERCHÉ LE COSTANTI MOLTIPLICATIVE SONO DIVERSE

Facciamo un esercizio sulla cosiddetta deconvoluzione

Es 3

Un filtro $h(t)$ mappa il segnale $x(t) = \text{triang}(t/3)$ nel segnale $y(t) =$
$= \text{triang}((t+2)/3) + 2\,\text{triang}(t/3) + 4\,\text{triang}((t-1)/3)$. Identificare $h(t)$, $H(j\omega)$, e la risposta al gradino $1(t)$. Il filtro è BIBO stabile?



$$x(t) = \text{triangle}\left(\frac{t}{3}\right)$$
$$y(t) = \text{triangle}\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2\,\text{triangle}\left(\frac{t}{3}\right) + 4\,\text{triangle}\left(\frac{t-1}{3}\right)$$

1) $H(j\omega)$?
2) $h(t)$?
3) BIBO - STABILE ?
4) $z(t) = h * 1(t)$

Sol. 1) NEL DOMINIO DELLA PULSAZIONE, $Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega) \longrightarrow H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

QUINDI, CI CALCOLIAMO LE TF $X(j\omega)$ E $Y(j\omega)$

$e^{-j\omega \cdot \text{traslazione}}$, traslazione $= -2$

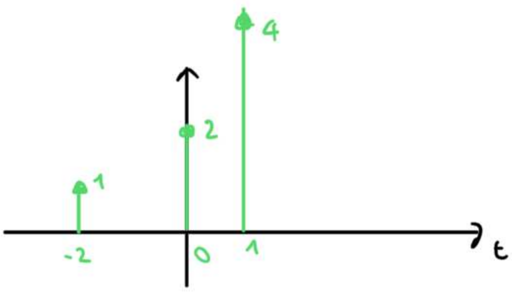
$$H(j\omega) = \frac{\cancel{3\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega 3}{2\pi}\right)} \cdot e^{j2\omega} + 2 \cdot \cancel{3\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi} 3\right)} + 4 \cdot \cancel{3\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega 3}{2\pi}\right)}\, e^{-j\omega}}{\cancel{3\,\text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot 3\right)}}$$

$$= e^{j2\omega} + 2 + 4\,e^{-j\omega}$$

2) $h(t) = \delta(t-2) + 2\delta(t) + 4\,\delta(t-1)$

ABBIAMO IMPARATO CHE:
SE NOI CONOSCIAMO IN UN FILTRO L'INGRESSO E L'USCITA, POSSIAMO RICOSTRUIRE LA RISPOSTA IN FREQUENZA CON LA RELAZIONE

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$



3) IL FILTRO E' BIBO STABILE ? SI, PERCHE' LA RISPOSTA IMPULSIVA E' ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

$$\int |h(t)|\,dt = \int h(t)\,dt = 1 + 2 + 4 = 7 < +\infty \quad \checkmark \text{ E' BS}$$

4) $z(t)$ = X CASA

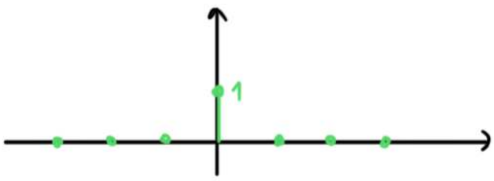
Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

a. l'impulso discreto $\delta(n)$

$s(n) = \delta(n)$

$S(e^{j\theta}) = ?$



Sol.

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)\, e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n}\Big|_{n=0} = 1$$

Es 1

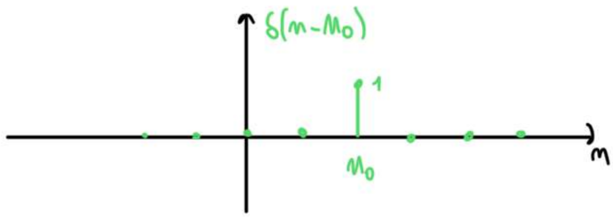
Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

a. l'impulso discreto $\delta(n)$

b. l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$

$s(n) = \delta(n-n_0)$

$S(e^{j\theta}) = ?$



Sol. $$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-n_0)\, e^{-j\theta n} = e^{-j\theta n}\Big|_{n=n_0} = e^{-j\theta n_0}$$

Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

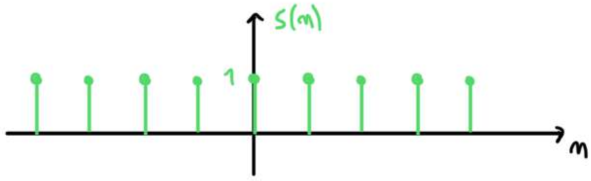
a. **l'impulso** discreto $\delta(n)$

b. l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$

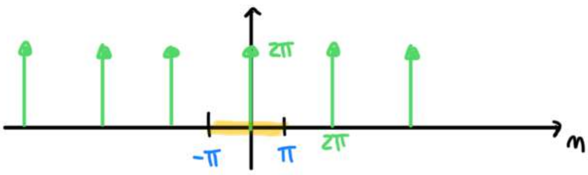
c. il segnale **costante** $s(n) = 1$

$s(n) = 1$

$S(e^{j\theta}) = ?$



Sol. $S(e^{j\theta}) = 2\pi \, \text{comb}_{2\pi}(\theta) = 2\pi \, \text{rep}_{2\pi} \, \delta(\theta)$



$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\cancel{0}\,-\pi}^{\cancel{2\pi}\,\pi} \cancel{S(e^{j\theta})} \, e^{j\theta n} \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) \, e^{j\theta n} \, d\theta = 1$$

$2\pi\,\delta(\theta)$ perché ci siamo messi in un intervallo che prende solo un δ

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$$\delta(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \, \text{rep}_{2\pi} \, \delta(\theta)$$

DELTA E SEGNALE COSTANTE SONO DUALI

$$\delta(n - n_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\theta n_0}$$

REGOLA DI TRASLAZIONE - MODULAZIONE

$$e^{j\theta_0 n} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \, \text{rep}_{2\pi} \, \delta(\theta - \theta_0)$$

ESPONENZIALI COMPLESSI E DELTA TRASLATI SONO DUALI

Es 1

Calcolare la trasformata discreta di Fourier per i seguenti segnali

a. **l'impulso** discreto $\delta(n)$
b. l'impulso traslato $\delta(n-n_0)$
c. il segnale **costante** $s(n) = 1$
d. la **sinusoide** $s(n) = A\cos(n\varphi_0 + \varphi_1)$

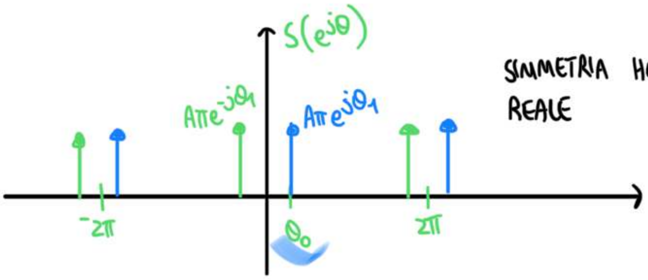
$$s(n) = A\cos(\theta_0 n + \theta_1)$$
$$S(e^{j\theta}) = ?$$

SOL. SCRIVIAMO IL COSENO CON EULERO

$$s(n) = A\cos(\theta_0 n + \theta_1) = \frac{A}{2} e^{j\theta_1} e^{j\theta_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\theta_1} e^{-j\theta_0 n}$$

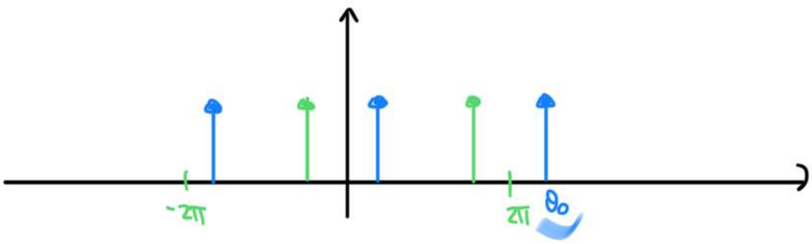
$$\Big\downarrow \mathcal{F} \qquad\qquad \Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{A}{2} e^{j\theta_1}\, 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta - \theta_0) + \frac{A}{2} e^{-j\theta_1}\, 2\pi\, \mathrm{rep}_{2\pi}\, \delta(\theta + \theta_0)$$

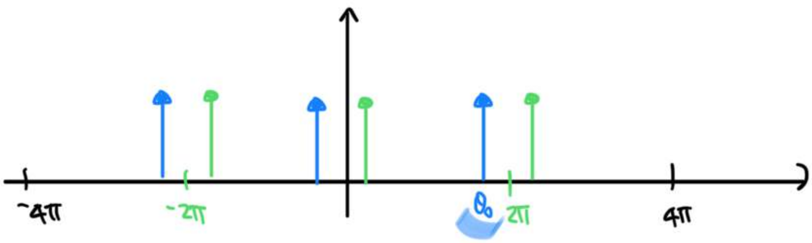


SIMMETRIA HERMITIANA: GIUSTO PERCHE' IL SEGNALE E' REALE

ATTENZIONE: QUI ABBIAMO SUPPOSTO CHE θ_0 FOSSE PICCOLO. SUPPONIAMO CHE SIA GRANDE:



I DUE SEGNALI SONO UGUALI PER EFFETTO DELLA RIPETIZIONE PERIODICA



X CASA (che sicuramente farò...):

$$s(n) = \mathrm{rect}\left(\frac{n}{2n_0+1}\right)$$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{\sin\left(\theta\left(n_0 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\theta/2\right)}$$

PROVO A VERIFICARLO