Domande di Teoria di TDC con soluzione

Tommaso Boscardin

June 5, 2024

Contents

1 Domande dei compiti/compitini passati

1.1 Corrente elettrica

- Definizione di corrente elettrica.

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt}$$

$$i(t) = \int_S \vec{J}(P,t) \cdot \vec{n}(P) dS$$

- Densità di corrente elettrica: espressione nel caso di cariche di segno opposto.

$$\vec{J}(P,t) = \rho^+ \vec{v^+} + \rho^- \vec{v^-}$$

- Relazione fra corrente elettrica e densità di corrente elettrica nel caso dei conduttori filiformi.

$$i(t) = \int_S \vec{J}(P,t) \cdot \vec{n}(P) dS = \vec{J}(P,t) \cdot \vec{S}$$

- Legge di continuità: scrivere cosa afferma (ipotesi e relazioni).

Ipotesi: conservazione della carica

$$i_{usc} = \frac{dq_{usc}(t)}{dt} = -\frac{dq_{int}(t)}{dt}$$

La legge di continuità afferma che la totale corrente $i_{usc}(t)$ uscente da una superficie chiusa S_c è opposta alla derivata temporale della carica $q_{int}(t)$ contenuta all'interno di S_c.

- Scrivere cosa si intende per "campo di corrente solenoidale".

Un campo di corrente si dice solenoidale quando $i_{usc}(t) = 0$. Per tanto $\vec{J}$ forma linee di flusso chiuse (circuiti).

1.2 Corrente elettrica

- Definizione di corrente elettrica.

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq(t)}{dt}$$

- Scrivere cosa afferma la legge di continuità nel caso generale di grandezze che variano nel tempo.

$$i_{usc} = \frac{dq_{usc}(t)}{dt} = -\frac{dq_{int}(t)}{dt}$$

- Scrivere cosa afferma la legge di continuità nel caso di grandezze costanti nel tempo.

Per grandezze constanti nel tempo si ha che è nulla la corrente uscente da una superficie chiusa $I_{usc} = 0$ (campo di corrente solenoidale).

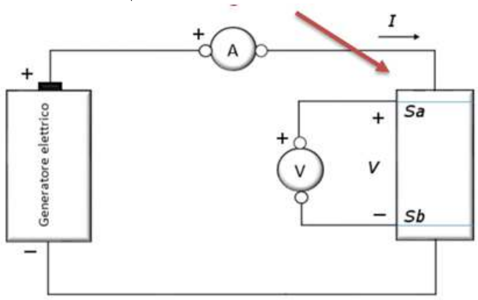
- Conduttore in quiete percorso da corrente nel caso di grandezze costanti nel tempo: presentare il modello e le relazioni che portano ad affermare che il conduttore costituisce

un tubo di flusso per il vettore densità di corrente.

Un tubo di flusso è un conduttore in quiete rivestito di materiale isolante. Se si prendono due sezioni che tagliano l'intero conduttore possiamo determinare la superficie S_c composta dalle due sezioni (S_A e S_B) e la superficie laterale S_l. Siccome il campo di corrente è solenoidale $I_{usc} = 0$ abbiamo $I(S_A) = I(S_B)$. Si deduce che per ogni sezione del conduttore la corrente che l'attraversa è costante. Pertanto ci si riferirà alla corrente del conduttore, senza specificare la sezione. In questo senso si dice che il conduttore costituisce un tubo di flusso per il vettore densità di corrente, cioè è una regione di spazio dove il moto delle cariche è canalizzato.

1.3 Leggi di Ohm e di Joule e resistività

- Legge di Ohm (circuito di misura, resistenza elettrica).



$$U = R \cdot I$$

- Effetto Joule e bilancio energetico per un tratto di cilindro: relazioni.

Effetto Joule: $P = R \cdot I^2$.

Bilancio energetico: la potenza dissipata è uguale alla potenza assorbita $P_d = P_a$.

- Scrivere la relazione fra resistenza e resistività per un tratto di conduttore cilindrico.

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

- Scrivere la relazione che esprime come varia la resistività in funzione della temperatura.

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha(\theta - \theta_0)\right]$$

1.4 Equazioni topologiche indipendenti

- Sistemi di equazioni LKT indipendenti per un grafo connesso: scrivere come si procede per individuare sistemi di equazioni LKT indipendenti tra loro e quante equazioni indipendenti si scrivono.

Per avere un sistema di equazioni indipendenti è sufficiente che per ogni maglia vi sia un lato peculiare proprio di quella maglia. Il numero di eq. indipendenti LKT è l-n+1.

- Sistemi di equazioni LKC indipendenti per un grafo connesso: scrivere come si procede per individuare sistemi di equazioni LKC indipendenti tra loro e quante equazioni indipendenti si scrivono.

Per avere un sistema di equazioni indipendenti è sufficiente che per ogni taglio vi sia un lato peculiare proprio di quel taglio. Il numero di eq. indipendenti LKC è n-1.

- Grafo non connesso costituito da p parti: scrivere quante equazioni indipendenti si ottengono dalle LKT.

$l_k - n_k + 1$ con $k = 1 \dots p$. Quindi servono $\sum_1^p l_k - n_k + 1$ LKT indipendenti.

- Grafo non connesso costituito da p parti: scrivere quante equazioni indipendenti si ottengono dalle LKC.

$n_k - 1$ con $k = 1 \dots p$. Quindi servono $\sum_1^p n_k - 1$ LKC indipendenti.

1.5 Potenza elettrica scambiata dai componenti elettrici

- Relazione della potenza elettrica istantanea scambiata ad una porta.

$$P = U \cdot I$$

- Potenza elettrica scambiata da un m-bipolo.

É la somma delle M potenze di porta $p(t) = p_1(t) + \cdots + p_M(t)$.

- Potenza elettrica scambiata da un n-polo.

La potenza di un n-polo è uguale a quella di un (n-1)-bipolo scegliendo un morsetto come nodo di riferimento $p(t) = p_1(t) + \cdots + p_{n-1}(t)$.

- Lavoro elettrico scambiato ad una porta elettrica.

$$\mathcal{L}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} u(t) \cdot i(t)dt$$

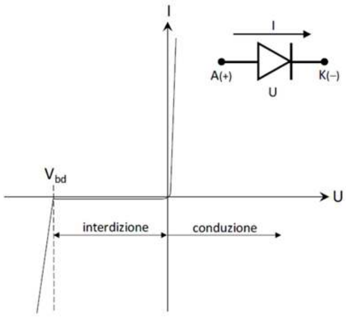
- Definizione di bipolo passivo.

Un bipolo si dice passivo se per ogni condizione di funzionamento ammissibile risulta che, ad ogni istante t_0, il lavoro elettrico uscente da t_0 in poi è minore o uguale all'energia immagazzinata fino a t_0. $\mathcal{L}_{usc}(t_0, t) \leq w(t_0)$

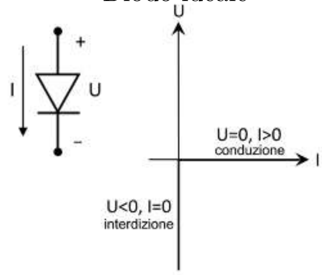
1.6 Componenti elettrici

- Diodo a semiconduttore: simbolo (con riferimenti) e caratteristica statica esterna (associata ai riferimenti indicati). Caratteristica statica esterna nel caso del diodo ideale.

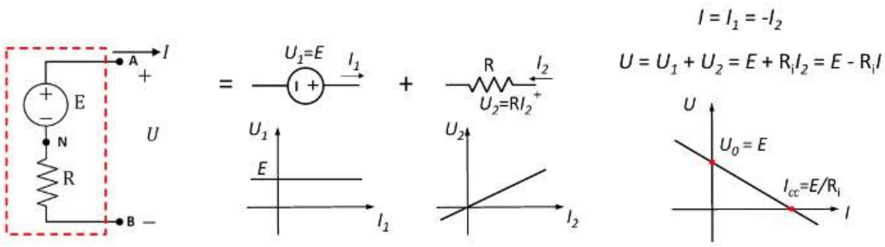
Diodo reale



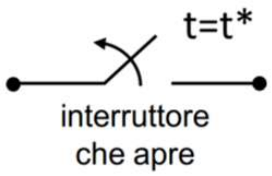
Diodo ideale

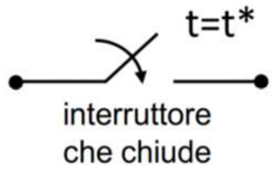


- Generatore lineare di tensione a regime stazionario (con E ed R costanti, entrambi maggiori di zero): schema circuitale (con riferimenti), espressione della relazione tensione-corrente (associata ai riferimenti indicati) e corrispondente caratteristica statica esterna.



- Deviatore: simbolo e descrizione del suo funzionamento.





Interruttore che apre in $t = t^*$: $t < t^*$ cortocircuito, $t > t^*$ circuito aperto.
Interruttore che chiude in $t = t^*$: $t < t^*$ circuito aperto, $t > t^*$ cortocircuito.

1.7 Tensione elettrica e differenza di potenziale

- Definizione di tensione elettrica.

$$u(t) = \int_{\ell} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t}(P) d\ell$$

- Riferimenti per la tensione: scrivere che significato hanno i "pedici ordinati" e i segni "+" e "-".

I pedici ordinati e i segni + e - permettono d'identificare un riferimento di tensione. Ad esempio $u_{AB}(t)$ indica che la linea è orientata da A verso B o in alternativa si può identificare il punto d'inizio con il "+" e il punto di fine con il "-".

- Ricavare, partendo dalla definizione, la relazione che esprime che la tensione elettrica è il lavoro elettrico specifico svolto dal campo elettrico.

$$u(t) = \int_{\ell} \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t}(P) d\ell = \int_{\ell} \frac{\vec{F}_e(P,t)}{q} \cdot \vec{t}(P) d\ell = \frac{1}{q} \int_{\ell} \vec{F}_e(P,t) \cdot \vec{t}(P) d\ell = \frac{\mathcal{L}_e}{q}$$

- Scrivere la relazione fra la differenza di potenziale ed il campo elettrostatico, indicando anche la proprietà del campo elettrostatico che viene utilizzata per tale relazione.

$$u(t) = \int_{A,\ell}^{B} \vec{E}_c(P,t) \cdot \vec{t}(P) d\ell = V(A) - V(B)$$

Il campo E_c è conservativo.

1.8 Con riferimento ad una rete di bipoli il cui corrispondente grafo è connesso, si indichi con ℓ il numero dei lati e con n il numero dei nodi. Scrivere per tale situazione:

- la definizione del concetto di maglia.

Una maglia $\mathcal{M}$ è un insieme di lati del grafo tale da costituire nel grafo un percorso chiuso, che tocca ciascun nodo una sola volta.

- la definizione del concetto di insieme di taglio.

Un insieme di taglio è un insieme di lati che sono tagliati da una superficie chiusa che è il bordo di un volume, che contiene uno o più nodi del grafo.

- la definizione del concetto di albero e scrivere il numero di lati di ogni suo albero.

Un albero è un insieme di lati del grafo che collegano tutti i nodi del grafo senza formare alcuna maglia. Un albero ha $\ell_a = n - 1$ lati.

- la definizione del concetto di coalbero e scrivere il numero di lati di ogni suo coalbero.

Dato un albero di un grafo, il coalbero è l'insieme di lati ad esso complementari. Un coalbero ha $\ell_c = \ell - n + 1$ lati.

1.9 Scrivere la definizione dei seguenti concetti di topologia delle reti elettriche:

- grafo;

Un grafo associato a un circuito elettrico è un insieme di nodi e lati; i nodi rappresentano i punti d'interconnessione e i lati i bipoli/porte.

- maglia;

Una maglia $\mathcal{M}$ è un insieme di lati del grafo tale da costituire nel grafo un percorso chiuso, che tocca ciascun nodo una sola volta.

- anello;

Dato un grafo piano, si definisce anello una maglia che orla una superficie (che sta sul piano) non contenente elementi del grafo.

- insieme di taglio;

Un insieme di taglio è un insieme di lati che sono tagliati da una superficie chiusa che è il bordo di un volume, che contiene uno o più nodi del grafo.

- albero;

Un albero è un insieme di lati del grafo che collegano tutti i nodi del grafo senza formare alcuna maglia. Un albero ha $\ell_a = n - 1$ lati.

- coalbero.

Dato un albero di un grafo, il coalbero è l'insieme di lati ad esso complementari. Un coalbero ha $\ell_c = \ell - n + 1$ lati.

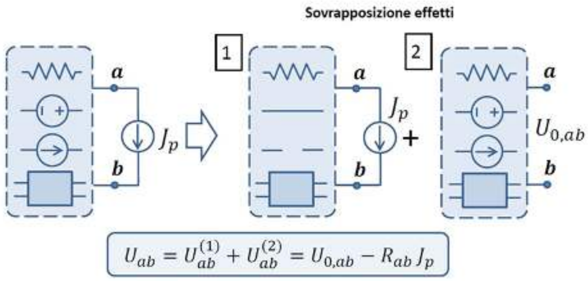
1.10 Rete costituita da generatori ideali di tensione, generatori ideali di corrente, resistori ideali e doppi bipoli ideali inerti di ordine zero in regime stazionario

- Enunciato dei teoremi dei generatori equivalenti (Thevenin/Norton) per tale rete (in cui sono presenti anche doppi bipoli ideali inerti di ordine zero).

Per circuiti lineari DC con doppi bipoli, entrambi i teoremi non cambiano rispetto al caso con bipoli: i doppi bipoli vanno considerati nel calcolo delle reti a vuoto, in cortocircuito ed inerte.

- Dimostrazione dei teoremi dei generatori equivalenti (Thevenin/Norton) per tale rete (in cui sono presenti anche doppi bipoli ideali inerti di ordine zero): giustificare i passaggi, scrivere le relazioni e disegnare gli schemi delle reti che si ottengono procedendo nella dimostrazione.
Nota: non è richiesto di presentare le due modalità per calcolare la resistenza equivalente.

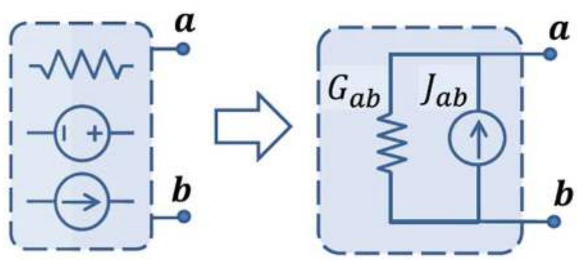
Si può procedere usando un approccio simile a quello visto per il caso di rete lineare DC con bipoli: si collega un GIC di prova alla porta a-b; si applica la sovrapposizione degli effetti al circuito:



In modo analogo si dimostra Norton; unica differenza si collega un GIT alla porta a-b.

1.11 Enunciato del Teorema di Norton per una rete di bipoli lineari a regime stazionario

- Disegnare la rete e lo schema equivalente, riportando l'indicazione dei riferimenti adottati.

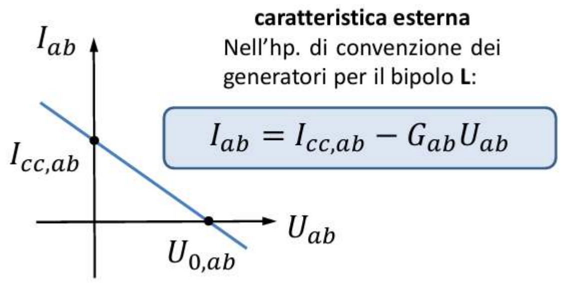


- Specificare il significato dei parametri dello schema equivalente (si precisa che per la conduttanza equivalente ci sono due modalità per determinarla).

J_{ab} è uguale alla corrente di cortocircuito tra i punti a e b della rete originale $J_{ab} = I_{cc,ab}$.

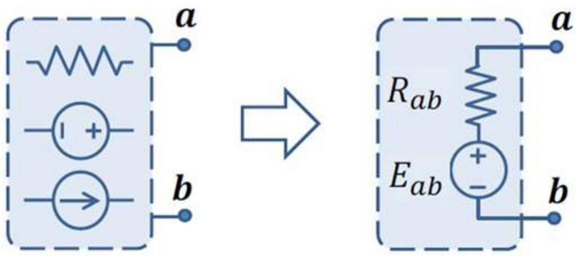
G_{ab} è la conduttanza equivalente che è uguale alla conduttanza del circuito inerte alla porta ab e che è uguale alla corrente di cortocircuito fratto la differenza di potenziale a vuoto. $G_{ab} = G_i = \frac{I_{cc,ab}}{U_{0,ab}}$

- Con riferimento allo schema equivalente, scrivere l'espressione della relazione tensione corrente (associata ai riferimenti indicati) e disegnare la corrispondente caratteristica statica esterna.



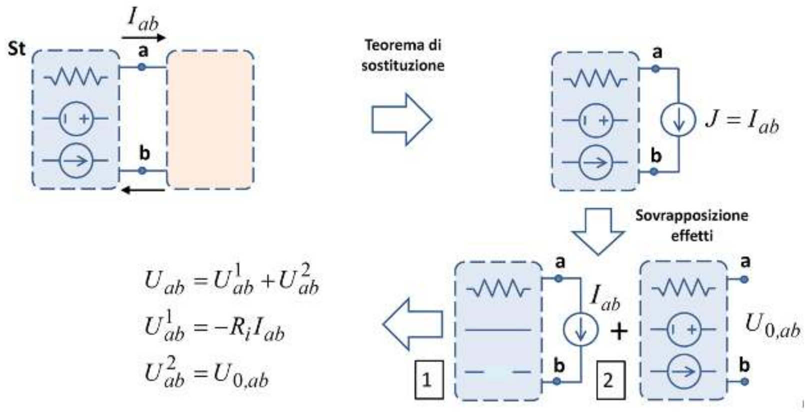
1.12 Teorema di Thevenin per una rete di bipoli lineari a regime stazionario

- Enunciato del teorema: disegnare la rete e lo schema equivalente, riportando l'indicazione dei riferimenti adottati; specificare il significato dei parametri dello schema equivalente (si precisa che per la resistenza equivalente ci sono due modalità per descriverla).
Nota: con riferimento allo schema equivalente, non è richiesto di disegnare la corrispondente caratteristica statica esterna.



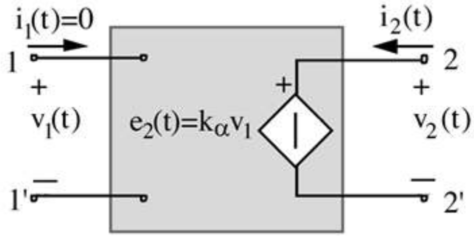
E_{ab} è uguale alla tensione a vuoto tra i punti a e b della rete originale $E_{ab} = U_{0,ab}$.
R_{ab} è la resistenza equivalente che è uguale alla resistenza del circuito inerte alla porta ab e che è uguale alla differenza di potenziale a vuoto fratto la corrente di cortocircuito.
$R_{ab} = R_i = \frac{U_{0,ab}}{I_{cc,ab}}$

- Dimostrazione del teorema: giustificare i passaggi, scrivere le relazioni e disegnare gli schemi delle reti che si ottengono procedendo nella dimostrazione.



1.13 Generatore di Tensione Pilotato in Tensione (GTPT)

- Disegnare il simbolo circuitale (con i riferimenti) del GTPT.



- Scrivere le due relazioni costitutive che caratterizzano il GTPT.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = e_2 = k_a v_1 \end{cases}$$

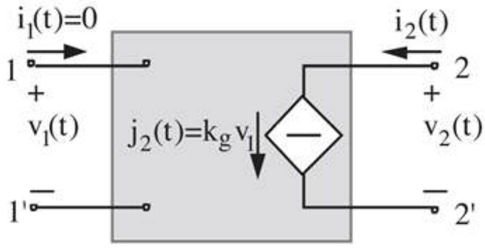
- Scrivere quale rappresentazione fra le sei possibili rappresentazioni di un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero viene utilizzata nelle due relazioni costitutive precedenti. Calcolare inoltre i valori dei quattro parametri di tale rappresentazione nel caso specifico del GTPT.

Utilizza la seconda rappresentazione ibrida.

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_a & 0 \end{bmatrix}$$

1.14 Generatore di Corrente Pilotato in Tensione (GCPT)

- Disegnare il simbolo circuitale (con i riferimenti) del GCPT.



- Scrivere le due relazioni costitutive che caratterizzano il GCPT.

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = j_2 = k_g v_1 \end{cases}$$

- Scrivere le relazioni in forma generale con i simboli dei quattro parametri della rappresentazione (fra le sei possibili rappresentazioni di un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero) che viene utilizzata nelle due relazioni costitutive del GCPT.

Utilizza la rappresentazione controllata in tensione.

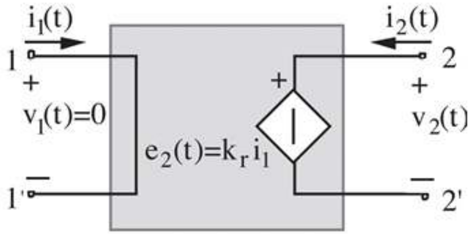
$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

- *Calcolare i valori dei quattro parametri di tale rappresentazione nel caso specifico del GCPT.*

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_g & 0 \end{bmatrix}$$

1.15 Generatore di Tensione Pilotato in Corrente (GTPC)

- *Disegnare il simbolo circuitale (con i riferimenti) del GTPC.*



- *Scrivere le due relazioni costitutive che caratterizzano il GTPC.*

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = e_2 = k_r i_1 \end{cases}$$

- *Scrivere quale rappresentazione fra le sei possibili rappresentazioni di un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero viene utilizzata nelle due relazioni costitutive precedenti. Calcolare inoltre i valori dei quattro parametri di tale rappresentazione nel caso specifico del GTPC.*

Utilizza la rappresentazione controllata in corrente.

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_r & 0 \end{bmatrix}$$

1.16 Generatori pilotati

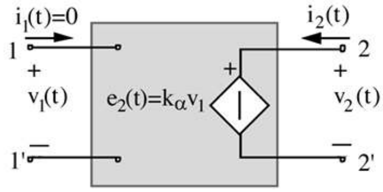
- *Scrivere cos'è un generatore pilotato (in generale).*

Generatori pilotati: sono generatori ideali di tensione o corrente la cui grandezza impressa dipende da una tensione o da una corrente presente in un'altra porta della rete.

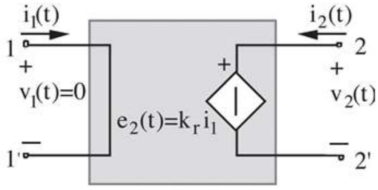
- *Per ciascuno dei quattro casi di generatori pilotati lineari (GTPT, GTPC, GCPT, GCPC) si chiede di disegnare il simbolo circuitale (con i riferimenti) e di scrivere le relazioni costitutive che caratterizzano ciascun generatore pilotato (è equivalente la scrittura in forma di sistema o in forma matriciale) con i simboli specifici. Non è richiesto di specificare altro, oltre alle due relazioni.*

GTPT

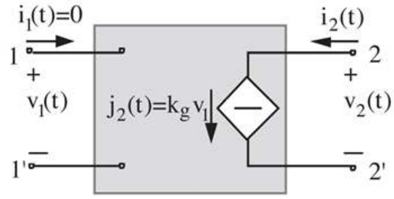
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = e_2 = k_a v_1 \end{cases}$$



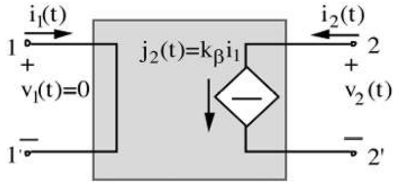
GTPC $\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = e_2 = k_r i_1 \end{cases}$



GCPT $\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = j_2 = k_g v_1 \end{cases}$



GCPC $\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = j_2 = k_b i_1 \end{cases}$



1.17 Generatori elettrici

- *Definizione di forza elettrica specifica generatrice.*

$$\vec{E_g}(P,t) = \frac{\vec{F_g}(P,t)}{q_0}$$

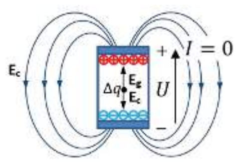
- *Definizione di forza elettromotrice.*

$$f.e.m.indotta = \oint_\ell \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} d\ell$$

$$f.e.m.mozionale = \oint_\ell \vec{v_\ell}(P,t) \times \vec{B}(P,t) \cdot \vec{t} d\ell$$

- *Comportamento a vuoto: scrivere la relazione che esprime la condizione di equilibrio punto per punto nel generatore elettrochimico e da essa ricavare la relazione per il bipolo generatore fra tensione a vuoto e forza elettromotrice.*

La forza elettrica generatrice specifica ($\vec{E_g}$) è in equilibrio con il campo elettrostatico generato dalle cariche accumulate nei poli ($\vec{E_c}$). $\vec{E_g} + \vec{E_c} = 0$.



$$e_{AB}(t) = \int_{B,L}^{A} \vec{E_g}(P,t) \cdot \vec{t}(P) dL = \int_{B,L}^{A} -\vec{E_c}(P,t) \cdot \vec{t}(P) dL = \int_{A,L}^{B} \vec{E_c}(P,t) \cdot \vec{t}(P) dL = u_{0,AB}(t)$$

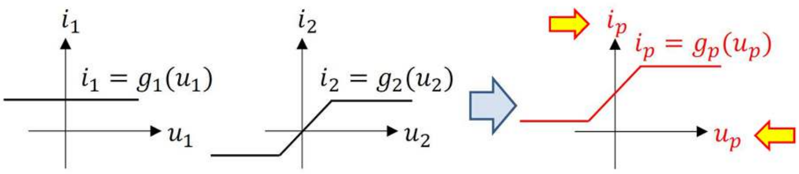
- *Comportamento a carico: scrivere la relazione tra tensione e corrente (in cui è presente la resistenza interna del generatore).*

$$U = E_{AB} - R_i I$$

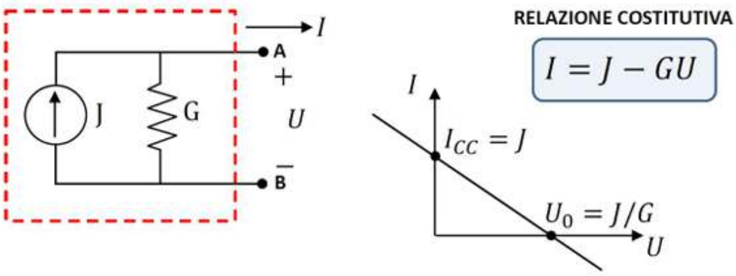
1.18 A regime stazionario, bipoli in parallelo e generatore lineare di corrente

- Parallelo di due bipoli generici a regime stazionario: scrivere quando due bipoli generici sono considerati in parallelo e derivare per via grafica la caratteristica statica esterna del bipolo equivalente parallelo a partire dalle caratteristiche statiche esterne di due bipoli generici connessi in parallelo.

Due bipoli b_1,b_2 sono connessi in parallelo se hanno entrambi i morsetti A e B in comune. La caratteristica esterna di un parallelo di bipoli è uguale alla somma delle correnti delle caratteristiche di b_1 e b_2.

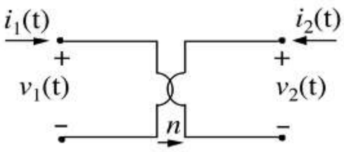


- Generatore lineare di corrente a regime stazionario (con J ed R costanti, entrambi maggiori di zero): disegno dello schema circuitale (con riferimenti), scrittura dell'espressione della relazione tensione-corrente (associata ai riferimenti indicati) e disegno della corrispondente caratteristica statica esterna.



1.19 Trasformatore ideale

- simbolo e relazioni.



$$\begin{cases} v_1(t) = nv_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{1}{n}i_2(t) \end{cases}$$

- matrici di rappresentazione: rappresentazioni possibili; tipologia di rappresentazione suggerita dalle relazioni e sua scrittura sia con i simboli generali che con i valori specifici del caso in esame.

Le relazioni sopra riportate non consentono una scelta delle correnti alle due porte come variabili indipendenti, né delle tensioni. Non è quindi possibile una rappresentazione controllata in corrente o in tensione e non ci sono quindi le matrici di resistenza e di conduttanza. Sono possibili le altre quattro rappresentazioni (di trasmissione e ibride).

Prima rappresentazione di trasmissione:

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

- proprietà del trasformatore ideale.

Proprietà:

1. È trasparente alla potenza (o conserva la potenza). In ogni istante la totale potenza entrante è nulla. Si ha cioè che la potenza che entra da una porta è pari a quella che esce dall'altra porta.

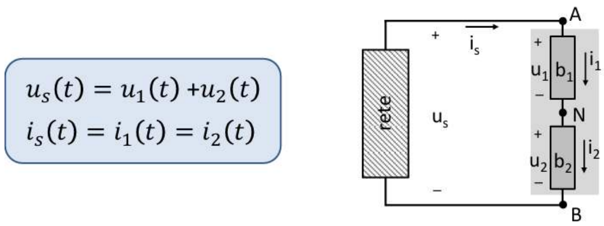
$$p_1(t) = v_1(t)i_1(t) = v_2(t)n\left(-\frac{1}{n}i_2(t)\right) = -v_2(t)i_2(t) = -p_2(t)$$

2. È passivo. Dato che è trasparente alla potenza, è passivo.

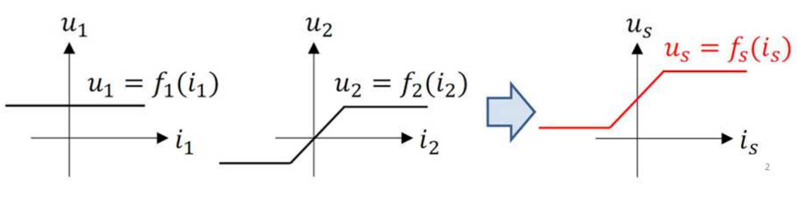
3. Amplifica tensioni o correnti, tranne che nel caso $|n| = 1$. Infatti, tranne che nel caso $|n| = 1$, il trasformatore amplifica la tensione o la corrente passando da una porta all'altra, conservando la potenza.

1.20 Bipoli in serie

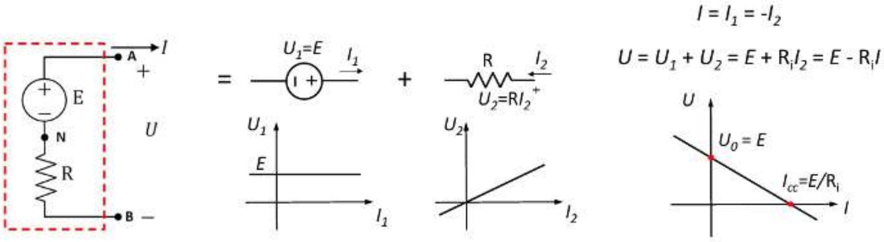
- Serie di due bipoli generici: disegno della serie dei due bipoli, riferimenti, relazioni, derivazione per via grafica della caratteristica statica esterna del bipolo equivalente serie a partire dalle caratteristiche statiche esterne dei due bipoli generici connessi in serie.



La caratteristica esterna di una serie di bipoli è uguale alla somma delle differenze di potenziale delle caratteristiche di b_1 e b_2.

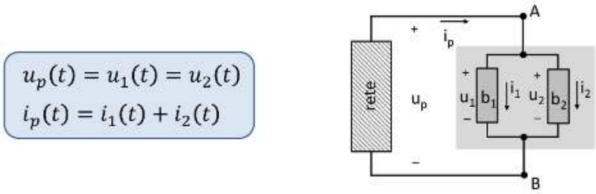


- Serie di un generatore ideale di tensione e di un resistore ideale: disegno della serie dei due bipoli, riferimenti, relazioni, derivazione per via grafica della caratteristica statica esterna del bipolo equivalente serie a partire dalle caratteristiche statiche esterne del generatore ideale di tensione e del resistore ideale connessi in serie.

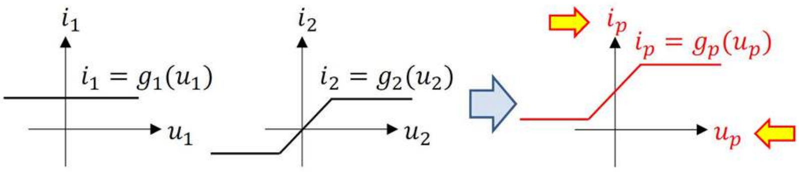


1.21 Bipoli in parallelo

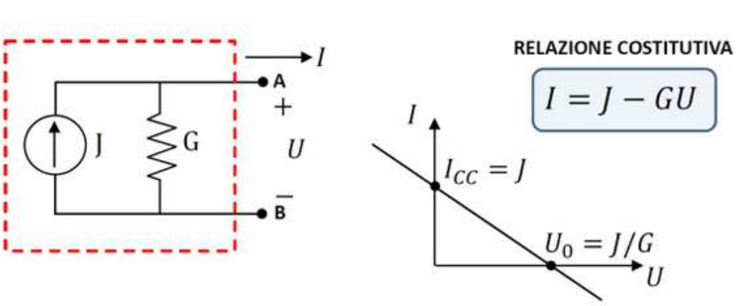
- Parallelo di due bipoli generici: disegno del parallelo dei due bipoli, riferimenti, relazioni, derivazione per via grafica della caratteristica statica esterna del bipolo equivalente parallelo a partire dalle caratteristiche statiche esterne dei due bipoli generici connessi in parallelo.



La caratteristica esterna di un parallelo di bipoli è uguale alla somma delle correnti delle caratteristiche di b_1 e b_2.



- Parallelo di un generatore ideale di corrente e di un resistore ideale: disegno del parallelo dei due bipoli, riferimenti, relazioni, derivazione per via grafica della caratteristica statica esterna del bipolo equivalente parallelo a partire dalle caratteristiche statiche esterne del generatore ideale di corrente e del resistore ideale connessi in parallelo.



1.22 Doppio bipolo ideale inerte di ordine zero

Per ciascuna delle sei rappresentazioni di un doppio bipolo ideale inerte di ordine zero (rappresentazione controllata in corrente, rappresentazione controllata in tensione, prima rappresentazione ibrida, seconda rappresentazione ibrida, prima rappresentazione di trasmissione, seconda rappresentazione di trasmissione) scrivere le relazioni costitutive che caratterizzano ciascuna rappresentazione (è equivalente la scrittura in forma di sistema o in forma matriciale), con i relativi simboli specifici per i quattro parametri presenti in ciascuna delle sei rappresentazioni.

Controllata in corrente

$$\begin{cases} v_1 = i_1 R_{11} + i_2 R_{12} \\ v_2 = i_1 R_{21} + i_2 R_{22} \end{cases}$$

Controllata in tensione

$$\begin{cases} i_1 = v_1 G_{11} + v_2 G_{12} \\ i_2 = v_1 G_{21} + v_2 G_{22} \end{cases}$$

Prima rappresentazione ibrida

$$\begin{cases} v_1 = i_1 h_{11} + v_2 h_{12} \\ i_2 = i_1 h_{21} + v_2 h_{22} \end{cases}$$

Seconda rappresentazione ibrida

$$\begin{cases} i_1 = v_1 g_{11} + i_2 g_{12} \\ v_2 = v_1 g_{21} + i_2 g_{22} \end{cases}$$

Prima rappresentazione di trasmissione

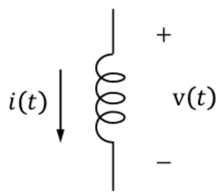
$$\begin{cases} v_1 = A v_2 - B i_2 \\ i_1 = C v_2 - D i_2 \end{cases}$$

Seconda rappresentazione di trasmissione

$$\begin{cases} v_2 = A' v_1 + B' i_1 \\ -i_2 = C' v_1 + D' i_1 \end{cases}$$

1.23 Bipolo induttore ideale

- Scrivere il simbolo (con i riferimenti) e la relazione costitutiva sia in forma differenziale che in forma integrale.



$$\boxed{u(t) = L\frac{di(t)}{dt}}$$

$$\boxed{i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^t u(\tau)\, d\tau}$$

- Scrivere la relazione dell'energia immagazzinata; ricavare tale relazione a partire dalla formula del lavoro elettrico entrante, considerando le situazioni che portano al risultato.

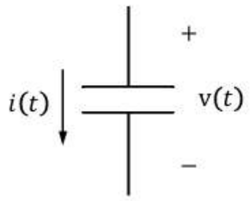
$$\mathcal{L}_e(0,t) = \int_0^t p_e(\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)i(\tau)d\tau = \int_0^t L\frac{di(\tau)}{d\tau}i(\tau)d\tau = \int_0^t Li(\tau)di(\tau) = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

- Scrivere quale grandezza è detta variabile di stato dell'induttore e indicare perché è detta variabile di stato dell'induttore.

$i(t)$ è variabile di stato per un induttore poiché è sufficiente per determinare lo stato energetico del sistema.

1.24 Bipolo condensatore ideale

- Disegnare il simbolo (con i riferimenti) e l'equazione costitutiva sia in forma differenziale che in forma integrale.



$$\boxed{i(t) = C\frac{du(t)}{dt}}$$

$$\boxed{u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau}$$

- Definire l'energia immagazzinata; ricavare la relazione che lega lavoro elettrico entrante ed energia immagazzinata in fase di carica.

$$\mathcal{L}_e(0,t) = \int_0^t p_e(\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)i(\tau)d\tau = \int_0^t C\frac{du(\tau)}{d\tau}u(\tau)d\tau = \int_0^t Cu(\tau)du(\tau) = \frac{1}{2}Cu^2(t)$$

- Dire quale grandezza elettrica è variabile di stato per il condensatore, indicandone la motivazione.

$u(t)$ è variabile di stato per un condensatore poiché è sufficiente per determinare lo stato energetico del sistema.

1.25 Resistore ideale passivo ($R > 0$) in regime sinusoidale convenzionato da utilizzatore

- Scrivere la relazione fra il valore efficace della tensione e il valore efficace della corrente.

$$u(t) = RI_M \sin(\omega t + \beta) = U_M \sin(\omega t + \alpha)$$

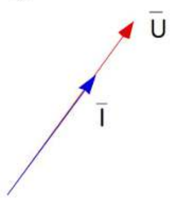
Quindi troviamo $U = IR$

- Scrivere quanto vale $\varphi = \alpha - \beta$ (cioè quanto vale la differenza fra la fase iniziale della tensione e la fase iniziale della corrente).

$$\alpha = \beta \Rightarrow \varphi = \alpha - \beta = 0$$

- Disegnare il diagramma fasoriale.

c)



- Scrivere quanto vale il fattore di potenza.

$$\cos\varphi = \cos(0) = 1$$

- Con riferimento al lavoro elettrico entrante in un resistore ideale passivo ($R > 0$) in un intervallo di tempo $\Delta t >> T$, illustrare il significato del termine "valore efficace" di

una corrente (o di una tensione).

$$\int_{t^0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t^0}^{t_1} P_{cost} + p_f(t)dt \simeq P_{cost}\Delta t = I^2 R \Delta T$$

Il valore efficace è quel valore di corrente DC (regime stazionario) che produce una quantità di calore uguale a quella della corrente AC (regime sinusoidale) in un tempo pari al periodo.

1.26 Condensatore ideale in regime sinusoidale convenzionato da utilizzatore

- Scrivere la relazione fra il valore efficace della tensione e il valore efficace della corrente.

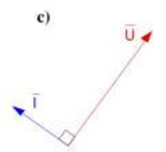
$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = C\frac{dU_M \sin(\omega t + \alpha)}{dt} = CU_M\omega\cos(\omega t + \alpha) = \omega CU_M \sin(\omega t + \alpha + \pi/2) = \\ = I_M \sin(\omega t + \beta)$$

Quindi troviamo $I = \omega CU$

- Scrivere quanto vale $\varphi = \alpha – \beta$ (cioè quanto vale la differenza fra la fase iniziale della tensione e la fase iniziale della corrente).

$$\alpha + \pi/2 = \beta \Rightarrow \varphi = \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2}$$

- Disegnare il diagramma fasoriale.



- Scrivere quanto vale il fattore di potenza.

$$\cos\varphi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Scrivere l'espressione della reattanza capacitiva e l'espressione della suscettanza capacitiva.

1. $X_C = -\frac{1}{\omega C}$
2. $B_C = \omega C$

- Ricavare la relazione fra il modulo della potenza reattiva entrante e il valore massimo dell'energia capacitiva.

$$|Q| = |UI\sin\varphi| = \frac{U_M I_M}{2}|\sin(-\pi/2)| = \frac{U_M I_M}{2} = \frac{1}{2}U_M\omega CU_M = \omega W_{CM}$$

1.27 Induttore ideale in regime sinusoidale convenzionato da utilizzatore

- Scrivere la relazione fra il valore efficace della tensione e il valore efficace della corrente.

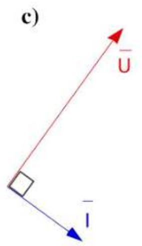
$$u(t) = L\frac{dI(t)}{dt} = L\frac{dI_M \sin(\omega t + \beta)}{dt} = LI_M\omega\cos(\omega t + \beta) = \omega LI_M \sin(\omega t + \beta + \pi/2) =$$
$$= U_M \sin(\omega t + \alpha)$$

Quindi troviamo $U = \omega LI$

- Scrivere quanto vale $\varphi = \alpha – \beta$ (cioè quanto vale la differenza fra la fase iniziale della tensione e la fase iniziale della corrente).

$$\beta + \pi/2 = \alpha \Rightarrow \varphi = \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

- Disegnare il diagramma fasoriale.



- Scrivere quanto vale il fattore di potenza.

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

- Scrivere l'espressione della reattanza induttiva e l'espressione della suscettanza induttiva.

1. $X_L = \omega L$
2. $B_L = -\frac{1}{\omega L}$

- Ricavare la relazione fra la potenza reattiva entrante e il valore massimo dell'energia induttiva.

$$Q = UI\sin\varphi = \frac{U_M I_M}{2}\sin(\pi/2) = \frac{1}{2}\omega LI_M I_M = \omega W_{LM}$$

1.28 Impedenza e ammettenza; reattanza e suscettanza

- Scrivere la condizione di passività per un bipolo in regime sinusoidale.

$$P = UI\cos\varphi \geq 0$$

- Scrivere la definizione di impedenza e, dalla definizione, ricavare l'espressione in forma polare.

$$\dot{Z} = \frac{S\left[u(t)\right]}{S\left[i(t)\right]} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = \frac{Ue^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{U}{I}e^{j\varphi}$$

- Scrivere la definizione di ammettenza e, dalla definizione, ricavare l'espressione in forma polare.

$$\dot{Y} = \frac{S\left[i(t)\right]}{S\left[u(t)\right]} = \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = \frac{Ie^{j\beta}}{Ue^{j\alpha}} = \frac{I}{U}e^{-j\varphi}$$

- Scrivere, per un bipolo induttore ideale, l'espressione della reattanza induttiva e della suscettanza induttiva.

1. $X_L = \omega L$
2. $B_L = -\frac{1}{\omega L}$

- Scrivere, per un bipolo condensatore ideale, l'espressione della reattanza capacitiva e della suscettanza capacitiva.

1. $X_C = -\frac{1}{\omega C}$
2. $B_C = \omega C$

1.29 A regime sinusoidale, si consideri la generica funzione sinusoidale $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$

- Definire il valore efficace A (è equivalente scriverlo in parole o mediante formula matematica) e scrivere la relazione fra A ed A_M.

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a^2(t)dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

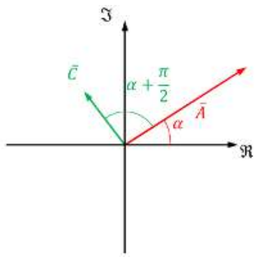
- Scrivere l'espressione in forma polare del fasore di $a(t)$.

$$S\left[a(t)\right] = \frac{A_M}{\sqrt{2}}e^{j\alpha} = Ae^{j\alpha}$$

- Esprimere a quale operazione sui fasori corrisponde l'operazione di derivata temporale di una funzione sinusoidale. Fare inoltre la rappresentazione grafica di tale operazione sui fasori.

La derivata temporale delle sinusoidi corrisponde al prodotto di un fasore per l'immaginario $j\omega$.

$$\overline{C} = j\omega\overline{A} = \omega A e^{j\alpha}e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega A e^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$



1.30 A regime sinusoidale, si consideri la generica funzione sinusoidale $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$

- Definire il valore efficace A.

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a^2(t)dt}$$

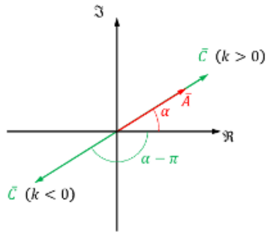
- *Scrivere la relazione fra valore efficace A ed ampiezza A_M.*

$$A = \frac{A_M}{\sqrt{2}}$$

- *Esprimere a quale operazione sui fasori corrisponde l'operazione di moltiplicazione di una generica funzione sinusoidale $a(t)$ per una costante reale $k > 0$. Fare inoltre la rappresentazione grafica di tale operazione sui fasori.*

Corrisponde al prodotto di un fasore per uno scalare:

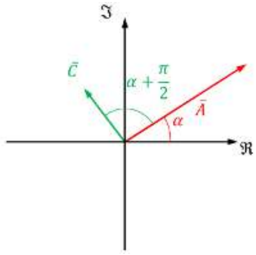
$$\overline{C} = k\overline{A} = kAe^{j\alpha}$$



- *Esprimere a quale operazione sui fasori corrisponde l'operazione di derivata temporale di una generica funzione sinusoidale $a(t)$. Fare inoltre la rappresentazione grafica di tale operazione sui fasori.*

La derivata temporale delle sinusoidi corrisponde al prodotto di un fasore per l'immaginario $j\omega$.

$$\overline{C} = j\omega\overline{A} = \omega Ae^{j\alpha}e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega Ae^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$



1.31 Potenze in regime sinusoidale

- *Calcolare l'espressione della potenza istantanea scambiata ad una porta in regime sinusoidale (relazione iniziale; passaggi; espressione finale).*

$$p(t) = i(t)u(t) = U_M I_M \sin(\omega t + \alpha)\sin(\omega t + \beta) = 2UI\sin(\omega t + \alpha)\sin(\omega t + \beta) =$$

$$= UI\left[\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) + \sin(\omega t + \alpha)\sin(\omega t + \beta) - \cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta) + \sin(\omega t + \alpha)\sin(\omega t + \beta)\right] =$$

$$= UI\left[\cos(\omega t + \alpha - \omega t - \beta) - \cos(\omega t + \alpha + \omega t + \beta)\right] = UI\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(2\omega t + \alpha + \beta)\right] =$$

$$UI\cos(\varphi) - UI\cos(2\omega t + \alpha + \beta) = P_{cost} + p_f(t)$$

- *Definizione della potenza attiva (scrivendo la relazione che corrisponde alla definizione e riportare l'espressione risultante della potenza attiva).*

$$P = \frac{1}{T}\int_T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_T P_{cost} + p_f(t)dt = \frac{1}{T}P_{cost}T = P_{cost} = UI\cos(\varphi)$$

- *Espressione del lavoro elettrico entrante ad una porta in un intervallo di tempo Δt nei due casi presentati: i) $\Delta t = nT$ (multiplo del periodo T); ii) $\Delta t >> T$.*

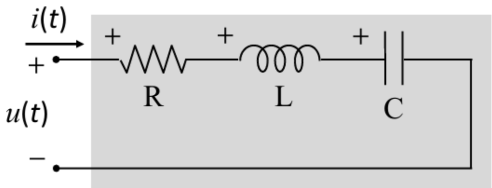
1. $\mathcal{L}(0, nT) = \int_0^{nT} P_{cost} + p_f(t)dt = P_{cost}nT + \left[-\frac{UI}{2\omega}\sin(2\omega t + \alpha + \beta)\right]_0^{nT} = P_{cost}nT$
2. $\mathcal{L}(0, t >> T) = \int_0^{t>>T} P_{cost} + p_f(t)dt \simeq P_{cost}\Delta t$

- *Definizione della potenza apparente, della potenza reattiva e del fattore di potenza.*

1. $S = UI$
2. $Q = UI \sin\varphi$
3. $\cos\varphi = \frac{P}{S}$

1.32 Serie RLC in regime sinusoidale

- *Disegnare lo schema circuitale, calcolare l'impedenza equivalente serie e derivare l'espressione di modulo e argomento.*

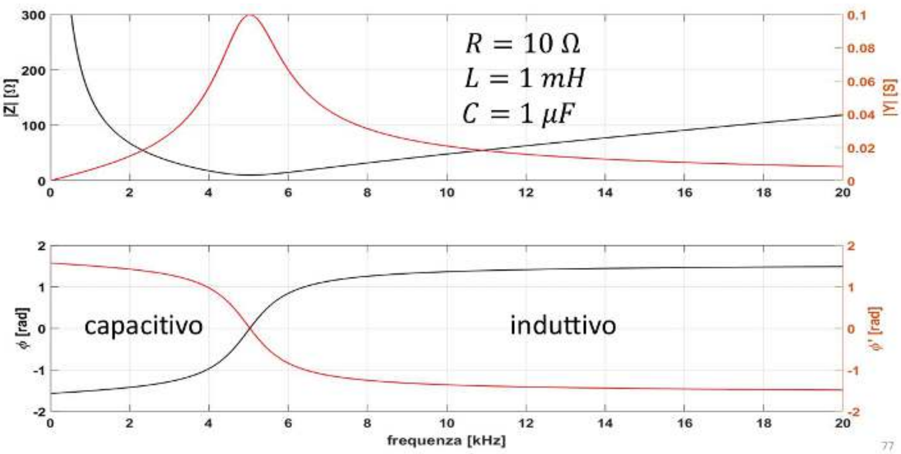


$$\dot{Z}_s = R + j(X_L + X_C) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$Z_s(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varphi_s(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR}\right)$$

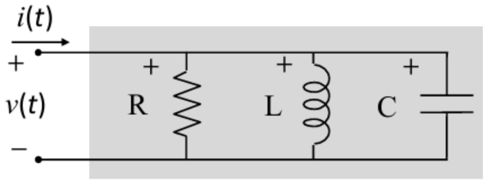
- *Tracciare i grafici di modulo e argomento dell'impedenza e discuterli al variare della pulsazione ω.*



L'impedenza del condensatore diminuisce con l'aumentare della pulsazione, mentre l'impedenza dell'induttore aumenta. Questo comporta che con $\omega < \omega_0$ (comportamento ohmico-capacitivo) l'impedenza del circuito diminuisce fino a raggiungere il suo valore minimo ($= R$) che è in corrispondenza alla frequenza ω_0 (di risonanza). L'argomanto dell'impedenza invece aumenta all'aumentare di ω ed in corrispondenza di ω_0 vale 0.
Quando invece $\omega > \omega_0$ allora il circuito ha un comportamento ohmico-induttivo poiché l'effetto del condensatore tende a svanire e quello dell'induttore ad aumentare.

1.33 Parallelo RLC in regime sinusoidale

- Disegnare il circuito, calcolare l'impedenza equivalente parallelo e derivare l'espressione di modulo e argomento.

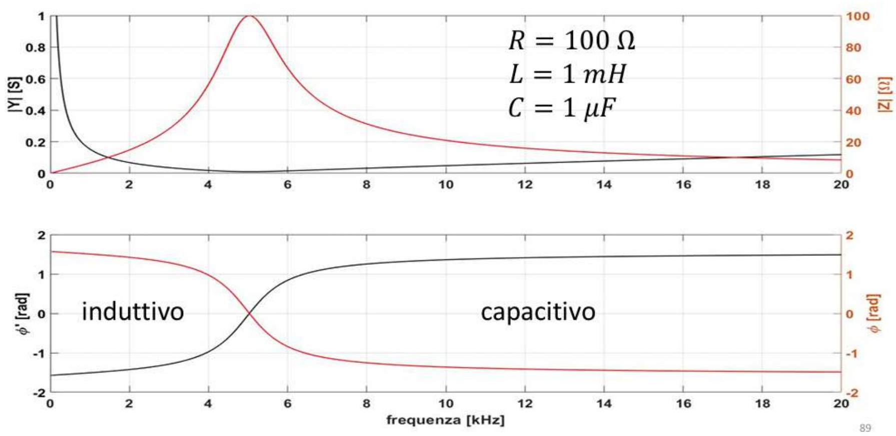


$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{G + j(B_C + B_L)} = \frac{G - j(B_C + B_L)}{[G + j(B_C + B_L)]\,[G - j(B_C + B_L)]} = \frac{G - j(B_C + B_L)}{G^2 + (B_C + B_L)^2}$$

$$Z_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (B_C + B_L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + (\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega L})^2}}$$

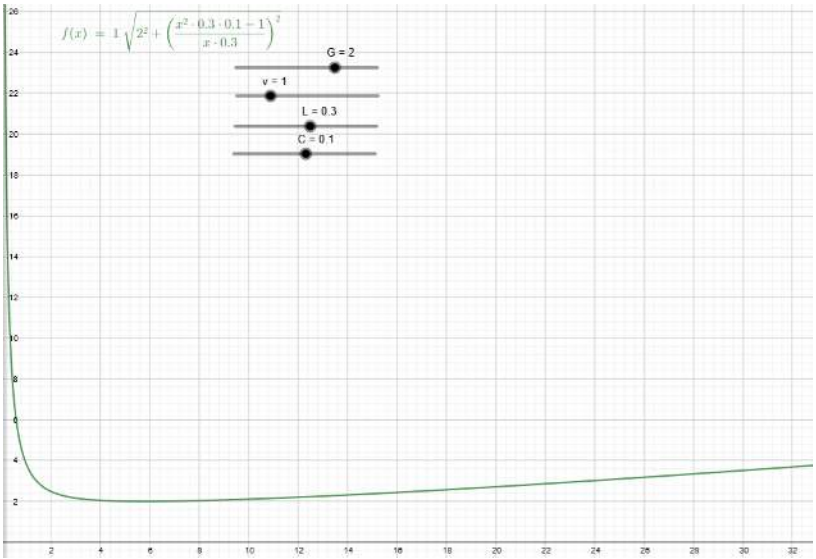
$$\varphi_p(\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{-(B_C + B_L)}{G^2 + (B_C + B_L)^2}}{\frac{G}{G^2 + (B_C + B_L)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-\omega C + \frac{1}{\omega L}}{G}\right) = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega LG}\right)$$

- Tracciare i grafici di modulo e argomento dell'impedenza e discuterli al variare della pulsazione ω.



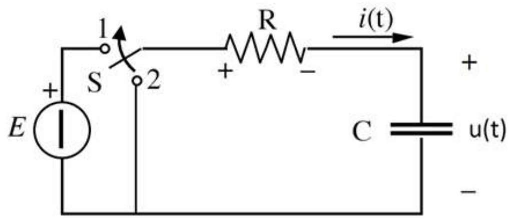
L'impedenza del condensatore diminuisce con l'aumentare della pulsazione, mentre l'impedenza dell'induttore aumenta. Questo comporta che con $\omega < \omega_0$ (comportamento ohmico-induttivo) l'impedenza del circuito aumenta fino a raggiungere il suo valore massimo ($= R$) che è in corrispondenza alla frequenza ω_0 (di risonanza). L'argomanto dell'impedenza invece diminuisce all'aumentare di ω ed in corrispondenza di ω_0 vale 0. Quando invece $\omega > \omega_0$ allora il circuito ha un comportamento ohmico-capacitivo poiché l'induttore tende ad un circuito aperto mentre il condensatore ad un cortocircuito.

- Disegnare il grafico dell'ampiezza della corrente al variare della pulsazione ω, nel caso di tensione (applicata al parallelo RLC) con valore efficace costante (o con ampiezza costante) al variare di ω.



1.34 Transitorio di carica di un circuito R-C.

- Disegnare lo schema circuitale ed indicare i riferimenti adottati.



- Svolgere l'analisi del circuito per t < 0 e all'istante critico t=0.

Per $t < 0$ S è in 2 e il circuito a destra è stazionario: $i(t) = 0$ e $u(t) = 0$. In $t = 0$ S commuta in 1 e $u(0) = 0$ per la continuità delle variabili di stato.

- Svolgere l'analisi per t > 0: ricavare l'equazione differenziale di rete, calcolarne la soluzione e tracciare i grafici degli andamenti temporali di corrente e tensione del condensatore.

Scrivo le equazioni del sistema:

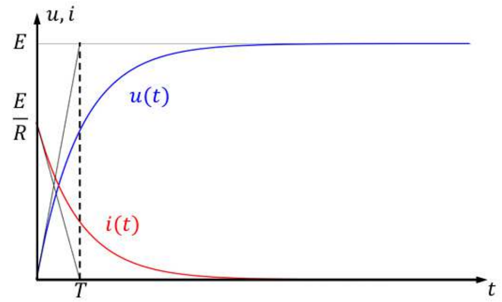
$$\begin{cases} u_R(t) + u(t) = E \\ u_R(t) = i_R(t)R \\ i_R(t) = i(t) \\ i(t) = c\frac{du(t)}{dt} \end{cases} \implies RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$$

Integrale particolare: $u_p(t) = U_p = E$
Integrale dell'omogenea: $RCs + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{RC}$
uso $T = -\frac{1}{s}$
quindi trovo $u_0(t) = U_0 e^{st} = U_0 e^{-\frac{t}{T}}$
Integrale completo: $u(t) = u_0(t) + u_p(t) = U_0 e^{-\frac{t}{T}} + E$

Impongo la condizione iniziale $u(0) = 0$, $0 = u_0(0) + u_p(0) = U_0 + E \Rightarrow U_0 = -E$
infine

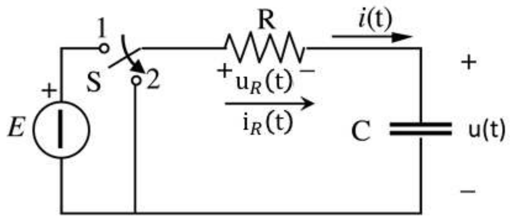
$$u(t) = -Ee^{-\frac{t}{T}} + E = E(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = \frac{C}{T}Ee^{-\frac{t}{T}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}}$$



1.35 Transitorio di scarica di un circuito R-C (attenzione: è richiesto il transitorio di scarica e non quello di carica)

- Disegnare lo schema circuitale ed indicare i riferimenti adottati.



- Svolgere l'analisi del circuito per t < 0 e all'istante critico t=0.

Per $t < 0$ S è in 1 e il circuito è stazionario: $u(t) = E$, $i(t) = 0$ e $u_r(t) = 0$. In $t = 0$ S commuta in 2 e $u(0) = E$ per la continuità delle variabili di stato.

- Svolgere l'analisi per t > 0: ricavare l'equazione differenziale, calcolarne la soluzione e tracciare i grafici degli andamenti temporali di corrente e tensione del condensatore.

Scrivo le equazioni del sistema:

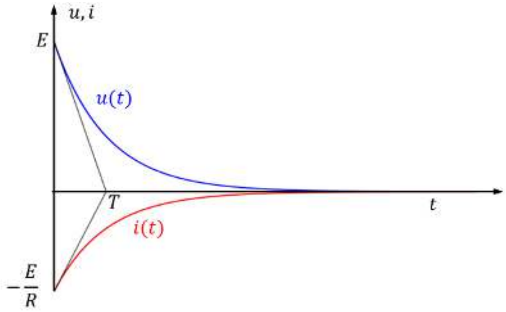
$$\begin{cases} u_R(t) + u(t) = 0 \\ u_R(t) = i_R(t)R \\ i_R(t) = i(t) \\ i(t) = c\frac{du(t)}{dt} \end{cases} \Longrightarrow RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$$

Integrale particolare: $u_p(t) = U_p = 0$
Integrale dell'omogenea: $RCs + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{RC}$
uso $T = -\frac{1}{s}$
quindi trovo $u_0(t) = U_0e^{st} = U_0e^{-\frac{t}{T}}$
Integrale completo: $u(t) = u_0(t) + u_p(t) = U_0e^{-\frac{t}{T}}$

Impongo la condizione iniziale $u(0) = E$, $E = u_0(0) + u_p(0) = U_0 \Rightarrow U_0 = E$
infine

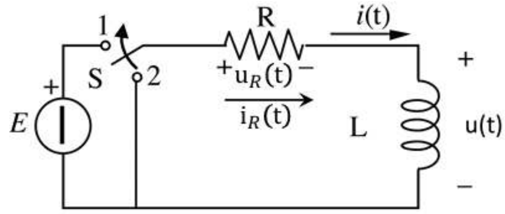
$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{T}}$$

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = -\frac{C}{T}Ee^{-\frac{t}{T}} = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}}$$



1.36 Transitorio di carica di un circuito R-L

- Disegnare lo schema circuitale ed indicare i riferimenti adottati.



- Svolgere l'analisi del circuito per t < 0 e all'istante t=0.

Per $t < 0$ S è in 2 e il circuito è stazionario: $u(t) = 0$, $i(t) = 0$ e $u_r(t) = 0$. In $t = 0$ S commuta in 1 e $i(0) = 0$ per la continuità delle variabili di stato.

- Svolgere l'analisi per t > 0: ricavare l'equazione differenziale rispetto all'incognita scelta, calcolarne la soluzione e tracciare i grafici in funzione del tempo di corrente e tensione dell'induttore ideale.

Scrivo le equazioni del sistema:

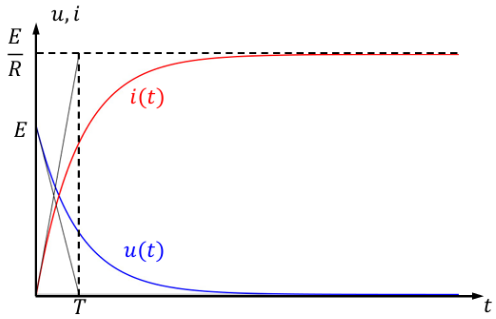
$$\begin{cases} u_R(t) + u(t) = E \\ u_R(t) = i_R(t)R \\ i_R(t) = i(t) \\ u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \end{cases} \Longrightarrow L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$$

Integrale particolare: $i_p(t) = I_p = \frac{E}{R}$
Integrale dell'omogenea: $Ls + R = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$
uso $T = -\frac{1}{s} = \frac{L}{R}$
quindi trovo $i_0(t) = I_0e^{st} = I_0e^{-\frac{t}{T}}$
Integrale completo: $i(t) = i_0(t) + i_p(t) = \frac{E}{R} + I_0e^{-\frac{t}{T}}$

Impongo la condizione iniziale $i(0) = 0$, $0 = i_0(0) + i_p(0) = \frac{E}{R} + I_0 \Rightarrow I_0 = -\frac{E}{R}$
infine

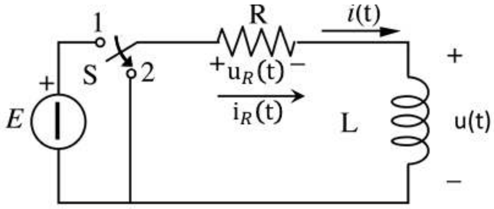
$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L\frac{R}{L}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}} = Ee^{-\frac{t}{T}}$$



1.37 Transitorio di scarica di un circuito R-L (attenzione: è richiesto il transitorio di scarica e non quello di carica)

- Disegnare lo schema circuitale ed indicare i riferimenti adottati.



- Svolgere l'analisi del circuito per $t < 0$ e all'istante t=0.

Per $t < 0$ S è in 1 e il circuito è stazionario: $u(t) = 0$, $i(t) = \frac{E}{R}$ e $u_r(t) = i(t)R$. In $t = 0$ S commuta in 2 e $i(0) = \frac{E}{R}$ per la continuità delle variabili di stato.

- Svolgere l'analisi per $t > 0$: ricavare l'equazione differenziale rispetto all'incognita scelta, calcolarne la soluzione e tracciare i grafici in funzione del tempo di corrente e tensione dell'induttore ideale.

Scrivo le equazioni del sistema:

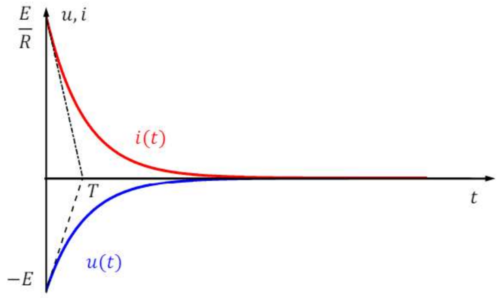
$$\begin{cases} u_R(t) + u(t) = 0 \\ u_R(t) = i_R(t)R \\ i_R(t) = i(t) \\ u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \end{cases} \implies L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

Integrale particolare: $i_p(t) = I_p = 0$
Integrale dell'omogenea: $Ls + R = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$
uso $T = -\frac{1}{s} = \frac{L}{R}$
quindi trovo $i_0(t) = I_0e^{st} = I_0e^{-\frac{t}{T}}$
Integrale completo: $i(t) = i_0(t) + i_p(t) = I_0e^{-\frac{t}{T}}$

Impongo la condizione iniziale $i(0) = \frac{E}{R}$, $\frac{E}{R} = i_0(0) + i_p(0) = I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R}$ infine

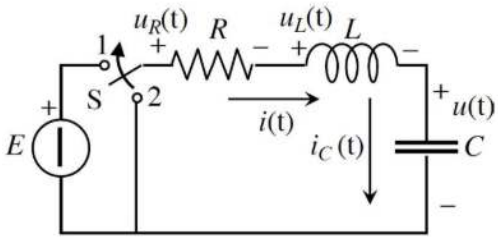
$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}}$$

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -L\frac{R}{L}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}} = -Ee^{-\frac{t}{T}}$$



1.38 Circuito RLC in regime variabile

- Disegnare lo schema circuitale (indicare i riferimenti adottati).



- Svolgere l'analisi del circuito per t < 0 e all'istante critico t=0.

Per $t < 0$ S è in 2 e il circuito è stazionario: $u_L(t) = 0$, $i_C(t) = 0 \Rightarrow i(t) = 0$ e $u_R(t) = 0$. In $t = 0$ S commuta in 1 e $i(0) = 0$ e $u(0) = 0$ per la continuità delle variabili di stato.

- Svolgere l'analisi per t > 0, fino ad arrivare alla scrittura dell'equazione differenziale con i parametri T e ω_0 (la scrittura dell'equazione differenziale con i parametri T e ω_0 è quindi richiesta, mentre non è richiesto di svolgere l'analisi della soluzione).

Scrivo le equazioni del sistema:

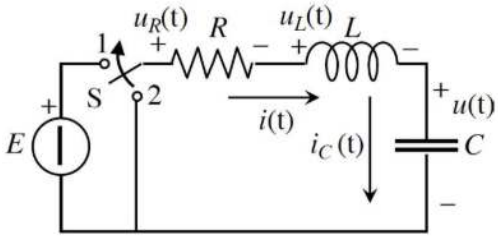
$$\begin{cases} u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = E \\ u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \\ u_R(t) = i(t)R \\ i_C(t) = i(t) \\ i_C(t) = C\frac{du(t)}{dt} \end{cases} \Longrightarrow LC\frac{d^2u(t)}{dt^2} + RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$$

Definisco $T = \frac{2L}{R}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e trovo:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{2}{T}\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 E$$

1.39 Circuito RLC in regime variabile

- Disegnare il circuito ed indicare i riferimenti adottati.



- Svolgere l'analisi del circuito per t < 0 e all'istante t=0.

Per $t < 0$ S è in 2 e il circuito è stazionario: $u_L(t) = 0$, $i_C(t) = 0 \Rightarrow i(t) = 0$ e $u_R(t) = 0$. In $t = 0$ S commuta in 1 e $i(0) = 0$ e $u(0) = 0$ per la continuità delle variabili di stato.

- Svolgere l'analisi per t > 0, fino ad arrivare alla scrittura dell'equazione differenziale.

Scrivo le equazioni del sistema:

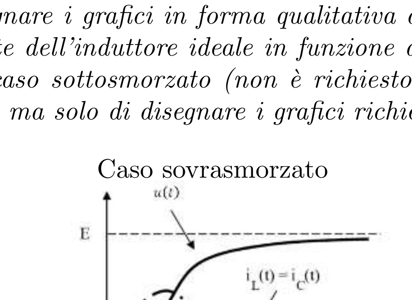
$$\begin{cases} u_R(t) + u_C(t) + u_L(t) = E \\ u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \\ u_R(t) = i(t)R \\ i_C(t) = i(t) \\ i_C(t) = C\frac{du(t)}{dt} \end{cases} \qquad \Longrightarrow LC\frac{d^2u(t)}{dt^2} + RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$$

Definisco $T = \frac{2L}{R}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e trovo:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{2}{T}\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 E$$

- Disegnare i grafici in forma qualitativa della tensione del condensatore ideale e della corrente dell'induttore ideale in funzione del tempo, per t > 0, nel caso sovrasmorzato e nel caso sottosmorzato (non è richiesto alcun commento per il tracciamento di tali grafici, ma solo di disegnare i grafici richiesti per t > 0).

Caso sovrasmorzato



Caso sottosmorzato