A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 22 aprile 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (0, 2, -1, 1)$, $u_3 = (3, -4, -1, 4)$, $u_4 = (2, -6, 1, t)$.

(a) Per quale valore di t si ha $\dim U = 2$?

(b) Ora si ponga $t = 0$, per tutto il resto dell'esercizio. Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Trovare una base di W e una base di $U \cap W$.

(d) Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$? Se una tale f esiste è possibile che sia iniettiva?

Soluzione. (a) Scrivendo i vettori u_1, u_2, u_3, u_4 in riga si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & t \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il rango è 2 se $t = 1$, altrimenti il rango è 3. Ciò significa che $\dim U = 2$ se $t = 1$, mentre se $t \neq 1$ si ha $\dim U = 3$.

(b) Ponendo $t = 0$ si ha $\dim U = 3$. Il vettore u_3 è combinazione lineare di u_1 e u_2 ($u_3 = 3u_1 - 2u_2$), quindi come base di U si possono prendere i vettori u_1, u_2, u_4.

(c) W ha dimensione 2 e una sua base è data dai vettori $w_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 0, 1)$. Per trovare una base di $U \cap W$ possiamo considerare un generico vettore di U

$$u = au_1 + bu_2 + cu_4 = (a + 2c, 2b - 6c, -a - b + c, 2a + b)$$

e richiedere che questo vettore appartenga a W, cioè che si abbia $a + 2c = 0$ e $2b - 6c = 0$. Risolvendo queste equazioni si ottiene $a = -2c$, $b = 3c$ mentre c è indeterminata, quindi $\dim(U \cap W) = 1$. Per trovare una base di $U \cap W$ poniamo $c = 1$, da cui si ricava $a = -2$ e $b = 3$, quindi un vettore di base è

$$u = -2u_1 + 3u_2 + u_4 = (0, 0, 0, -1).$$

(d) Una tale funzione f esiste. Ad esempio, basta definire f ponendo $f(u_1) = w_1$, $f(u_2) = w_2$, $f(u_4) = 0$ e $f(\bar{v}) = 0$, ove $\bar{v}$ è un vettore tale che $\{u_1, u_2, u_4, \bar{v}\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$. Una tale f non può essere iniettiva perché $\dim U = 3$ mentre $\dim W = 2$ (se f fosse iniettiva trasformerebbe una base di U in una base di $f(U)$, quindi $f(U)$ avrebbe dimensione 3).

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x - 2y - z, -x + 2z, 2x - 6y - z).$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Ridurre A in forma a scala e trovare una matrice invertibile R tale che la matrice $A' = RA$ sia una forma a scala di A.

(c) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(d) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usiamo questa base sia nel dominio che nel codominio di f).

Soluzione. (a) La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Per trovare la matrice R affianchiamo ad A la matrice identica

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando operazioni elementari sulle righe per ridurre A in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice scritta dalla parte destra è la matrice R cercata:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Per trovare i vettori del nucleo di f bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + 2z = 0 \\ 2x - 6y - z = 0 \end{cases}$$

Si trova

$$\begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}$$

da cui si deduce che $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$ e una base del nucleo di f è data dal vettore $(4, 1, 2)$. L'immagine di f ha quindi dimensione 2 e una sua base è formata da due colonne della matrice A.

(d) Si ha:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (0, 1, 1) = 0\, v_1 + 1\, v_2 + 2\, v_3 \\ f(v_2) &= (-1, -2, -5) = -1\, v_1 - 2\, v_2 - 6\, v_3 \\ f(v_3) &= (-1, 2, -1) = -1\, v_1 + 2\, v_2 + 2\, v_3 \end{aligned}$$

quindi la matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ridurre A in forma a scala e determinare il suo rango al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Consideriamo il vettore colonna $B_1 = (3, -1, 4, 2)$. Esiste un valore di t per il quale il sistema $AX = B_1$ ha soluzione?

(c) Poniamo ora $t = 2$. Determinare l'insieme S delle soluzioni del sistema $AX = B_2$, ove $B_2 = (2, -3, 0, -2)$. L'insieme S così trovato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

Soluzione. (a) Con operazioni elementari sulle righe si trasforma A nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto, per arrivare ad una forma a scala basta scambiare tra loro la terza e quarta riga. Si deduce che rango$(A) = 2$ se $t = 2$ mentre rango$(A) = 3$ se $t \neq 2$.

(b) Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & t & 2 & 2 \end{array}\right)$$

si arriva alla forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Si noti che la terza riga corrisponde all'equazione $0 = -3$, da cui si deduce che il sistema $AX = B_1$ non ha soluzioni, per nessun valore di t.

(c) Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

si arriva alla forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema corrispondente a questa matrice è

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 2 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Ricavando x_1 e x_2 in funzione di x_3 e x_4, le soluzioni si scrivono come segue:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}\,x_3 - \dfrac{3}{2}\,x_4 + \dfrac{1}{2} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}\,x_3 + \dfrac{1}{2}\,x_4 - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

L'insieme S formato da tutte queste soluzioni non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perché non contiene il vettore nullo.