A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

4^o appello — 5 febbraio 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata (non nulla) tale che $A^n = 0$, per qualche intero $n > 0$. Dimostrare che tutti gli autovalori di A sono nulli.

Esercizio 2. È vero o falso che una matrice triangolare superiore è sempre una matrice a scala? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Dati i vettori $w_1 = (1, 0, 2, -1)$, $w_2 = (1, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio vettoriale generato da w_1 e w_2.

(a) Determinare per quale valore di α il vettore $(1, 3, \alpha, 2)$ appartiene a W.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia W come insieme delle soluzioni.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_3 + 3x_4 = 0$. Completare la base $\{w_1, w_2\}$ di W a una base di U.

Esercizio 4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che U ha equazione $2x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra U e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 - x_3 - 2x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (1, 1, -3, 9)$ si determini il vettore $u \in U$ che rende minima la norma di $v - u$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (-2, -1, 3)$ e $Q = (2, 3, 1)$, appartenenti al piano π di equazione $2x - y + 2z - 3 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $A = (1, -2, 2)$ e parallela alla retta per P e Q.

(b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(c) Sul piano σ si determinino due punti R e S tali che il quadrilatero $PRQS$ sia un quadrato (si intende che il segmento PQ è una delle due diagonali di tale quadrato).

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

4$^{\mathrm{o}}$ appello — 5 febbraio 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata (non nulla) tale che $A^n = 0$, per qualche intero $n > 0$. Dimostrare che tutti gli autovalori di A sono nulli.

Esercizio 2. È vero o falso che una matrice triangolare superiore è sempre una matrice a scala? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Dati i vettori $w_1 = (0, 2, -1, 3)$, $w_2 = (1, -1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio vettoriale generato da w_1 e w_2.

(a) Determinare per quale valore di α il vettore $(3, 1, -2, \alpha)$ appartiene a W.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia W come insieme delle soluzioni.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Completare la base $\{w_1, w_2\}$ di W a una base di U.

Esercizio 4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che U ha equazione $x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra U e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (0, 2, 8, -2)$ si determini il vettore $u \in U$ che rende minima la norma di $v - u$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (-3, 2, 3)$ e $Q = (1, 0, -1)$, appartenenti al piano π di equazione $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $A = (-1, 3, 1)$ e parallela alla retta per P e Q.

(b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(c) Sul piano σ si determinino due punti R e S tali che il quadrilatero $PRQS$ sia un quadrato (si intende che il segmento PQ è una delle due diagonali di tale quadrato).

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

4º appello — 5 febbraio 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata (non nulla) tale che $A^n = 0$, per qualche intero $n > 0$. Dimostrare che tutti gli autovalori di A sono nulli.

Esercizio 2. È vero o falso che una matrice triangolare superiore è sempre una matrice a scala? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Dati i vettori $w_1 = (2, -1, 0, -3)$, $w_2 = (1, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio vettoriale generato da w_1 e w_2.

(a) Determinare per quale valore di α il vettore $(7, \alpha, 3, -3)$ appartiene a W.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia W come insieme delle soluzioni.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + 5x_2 - x_4 = 0$. Completare la base $\{w_1, w_2\}$ di W a una base di U.

Esercizio 4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che U ha equazione $3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra U e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $x_1 - x_2 + 3x_4 = 0$.

(c) Dato $v = (9, -3, -1, -1)$ si determini il vettore $u \in U$ che rende minima la norma di $v - u$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (0, -4, -1)$ e $Q = (2, 0, 3)$, appartenenti al piano π di equazione $2x + y - 2z + 2 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $A = (3, -1, -2)$ e parallela alla retta per P e Q.

(b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(c) Sul piano σ si determinino due punti R e S tali che il quadrilatero $PRQS$ sia un quadrato (si intende che il segmento PQ è una delle due diagonali di tale quadrato).

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

4^o appello — 5 febbraio 2019

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata (non nulla) tale che $A^n = 0$, per qualche intero $n > 0$. Dimostrare che tutti gli autovalori di A sono nulli.

Esercizio 2. È vero o falso che una matrice triangolare superiore è sempre una matrice a scala? (la risposta deve essere adeguatamente motivata).

Esercizio 3. Dati i vettori $w_1 = (3, -2, 1, 0)$, $w_2 = (1, -1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$, sia W il sottospazio vettoriale generato da w_1 e w_2.

(a) Determinare per quale valore di α il vettore $(\alpha, -1, 2, 3)$ appartiene a W.

(b) Scrivere un sistema di equazioni lineari che abbia W come insieme delle soluzioni.

(c) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Completare la base $\{w_1, w_2\}$ di W a una base di U.

Esercizio 4. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 5. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ un sottospazio vettoriale e $U^\perp$ il suo ortogonale. Sapendo che U ha equazione $2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$,

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini una base ortogonale dell'intersezione tra U e il sottospazio $V \subset \mathbb{R}^4$ di equazione $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

(c) Dato $v = (-2, 8, -4, 0)$ si determini il vettore $u \in U$ che rende minima la norma di $v - u$.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sono dati i punti $P = (-3, -3, -2)$ e $Q = (1, -1, 2)$, appartenenti al piano π di equazione $2x - 2y - z - 2 = 0$.

(a) Si scrivano le equazioni parametriche della retta r passante per il punto $A = (-1, 3, 2)$ e parallela alla retta per P e Q.

(b) Si scriva l'equazione cartesiana del piano σ, contenente i punti P e Q, che forma un angolo retto con il piano π.

(c) Sul piano σ si determinino due punti R e S tali che il quadrilatero $PRQS$ sia un quadrato (si intende che il segmento PQ è una delle due diagonali di tale quadrato).