

FORMULARIO

CARATTERIZZAZIONE IMMAGINI

$$\text{contrasto: } C = \frac{\Delta I}{I} = \frac{\bar{I}_a - \bar{I}_s}{\bar{I}_s}$$

\bar{I}_a = media di $I(x,y)$ nell'area di interesse

\bar{I}_s = media di $I(x,y)$ nello sfondo

$$\text{legge di Weber - Fechner: } dP = K \frac{dS}{S} \Rightarrow P = K \ln \frac{S}{S_0}$$

P = percezione

S = intensità stimolo

S_0 = soglia stimolo con percezione nulla

$$\text{risoluzione spaziale: } \frac{\text{coppie di linee}}{\text{unità distanza}} \quad [\text{cl/m}] \quad h_{\min} = \frac{1}{2f_{\max}}$$

h_{\min} = minima larghezza di bande e spazi

$$\text{rapporto segnale - rumore per ampiezze: } \text{SNR} = \frac{\bar{I}}{\sigma_s}$$

σ_s = deviazione standard del rumore

ULTRASUONI

$$\text{equazione delle onde: } \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0 \quad c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

U = spostamento della particella dalla posizione di equilibrio

P = pressione della particella

K = modulo di comprimibilità del materiale

ρ = densità del materiale

$$\text{soluzione dell'equazione d'onda (segnale armonico): } P(t,x) = P_0 \sin(\omega_0(t - \frac{x}{c})) \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{c}$$

ω_0 = pulsazione

c = velocità d'onda (1540 m/s)

K = numero d'onda

$$\text{velocità della particella: } v(t) = \frac{\partial U(t)}{\partial t}$$

$$\text{impedenza acustica caratteristica: } Z = \rho \cdot c \quad \left[\text{rayl} = \frac{\text{Kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}} \right]$$

$$\text{legge di Ohm acustica: } P(t) = Z \cdot v(t)$$

$$\text{onda piana: } P(x,y,z,t) = P_0 \sin(\omega_0(t - \frac{z}{c}))$$

$$\text{onda sferica: } P(x,y,z,t) = \frac{P_0}{r} \sin(\omega_0(t - \frac{r}{c}))$$

$$\text{intensità istantanea (densità di potenza): } I_i(t) = P(t) v(t) = \frac{P(t)^2}{Z} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

$$\text{intensità media: } \bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) v(t) dt \Rightarrow \bar{I} = \frac{P_0}{2Z}$$

$$\text{intensità picco spaziale picco temporale: } I_{\text{sptp}} = \max_{r,t} I_i(t)$$

$$\text{intensità picco spaziale media sull'impulso: } I_{\text{sppa}} = \max_r \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} I_i(t) dt \Rightarrow I_{\text{sppa}} = \max_r \frac{1}{T_p} \int_0^{T_{\text{on}}} I_i(t) dt$$

T_p = intervallo di ripetizione dell'impulso

T_{on} = intervallo di attivazione dell'impulso

pressione: 10⁵ Pa = 1 atm

$$\text{propagazione in materiali diversi: } f_1 = f_2 \Rightarrow \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2}$$

continuità:

$$P_I(t) = P_E(t) \Rightarrow P_I(t) + P_R(t) = P_T(t)$$

$$v_I(t) = v_E(t) \Rightarrow v_I(t) + v_R(t) = v_T(t)$$

$$I_I(t) = I_E(t) \Rightarrow T_I + R_I = 1$$

$$\text{incidenza: } P_I(t) = P_0 \sin(\omega_0 t - K_1 x) = Z_1 v_I(t)$$

$$\text{riflessione: } P_R(t) = R_p P_0 \sin(\omega_0 t + K_1 x) = -Z_1 v_R(t)$$

$$\text{trasmissione: } P_T(t) = T_p P_0 \sin(\omega_0 t - K_2 x) = Z_2 v_T(t)$$

$$\text{legge di Snell: } \theta_I = \theta_R \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{\sin(\theta_I)}{\sin(\theta_R)}$$

$$\text{coefficiente di riflessione (pressione): } R_p = \frac{Z_2 \cos(\theta_I) - Z_1 \cos(\theta_T)}{Z_2 \cos(\theta_I) + Z_1 \cos(\theta_T)} = \frac{P_R}{P_I}$$

$$\text{coefficiente di trasmissione (pressione): } T_p = \frac{2 Z_2 \cos(\theta_I)}{Z_2 \cos(\theta_I) + Z_1 \cos(\theta_T)} = \frac{P_T}{P_I}$$

$$\text{coefficiente di riflessione (intensità): } R_I = R_p^2$$

$$\text{coefficiente di trasmissione (intensità): } T_I = \frac{4 Z_1 Z_2 \cos^2(\theta_I)}{(Z_2 \cos(\theta_I) + Z_1 \cos(\theta_T))^2}$$

$$\text{massimo della trasmissione: } Z_2 = \sqrt{Z_1 Z_3} \quad T_{\text{tot}} = T_I + T_{I2}$$

$$\text{legge di Lambert-Beer: } I_x = I_0 e^{-\mu_a x} \Rightarrow P_x = P_0 e^{-\mu_a x}$$

$$\text{attenuazione: } A = \frac{I_x}{I_0} = \left(\frac{P_x}{P_0} \right)^2 \Rightarrow A [\text{dB}] = 10 \log \frac{I_x}{I_0} = 20 \log \frac{P_x}{P_0} = 8,7 \text{ A [Np]} \quad A [\text{dB}] = -\alpha z$$

$$\text{coefficiente di attenuazione: } \mu_a = \frac{\alpha}{8,7} = \frac{a \cdot f}{8,7} \quad \left[\frac{\text{Np}}{\text{cm}^2} \right]$$

P = ampiezza del segnale

$$\text{pulse repetition frequency: } PRF_{\text{max}} = \frac{c}{2Z_{\text{max}}}$$

$$\text{profondità di penetrazione: } Z_{\text{max}} = \frac{-A_{\text{max}} [\text{dB}]}{2\alpha f}$$

$$\text{tempo di acquisizione di un frame: } T_{\text{frame}} = N T_{\text{PR}}$$

T_{PR} = pulse repetition time

$$\text{time gain compensation (onda piana): } TGC = \frac{1}{A_p} = e^{\mu_a \cdot c \cdot t}$$

$$\text{time gain compensation (onda sferica): } TGC = \frac{1}{A} = \frac{1}{4} (ct)^2 e^{\mu_a \cdot c \cdot t}$$

$$\text{regione di Fresnel: } \frac{D^2}{\lambda}$$

$$\text{regione di Fraunhofer: } W = \frac{\lambda z}{D}$$

D = diametro

$$\text{distanza caratteristica (near field): } Z_m = \frac{r^2}{\lambda}$$

r = raggio

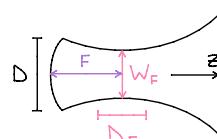
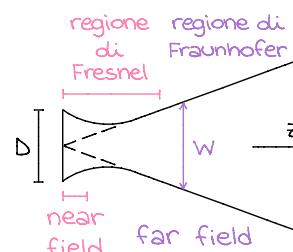
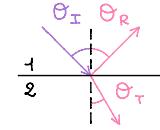
$$\text{grado di focalizzazione: } g = \frac{Z_m}{F}$$

F = raggio di curvatura

$$\text{larghezza regione focale: } W_F = \text{cost} \frac{\lambda F}{D}$$

$$\text{profondità regione focale: } D_F = \text{cost} \cdot \lambda \left(\frac{F}{D} \right)^2$$

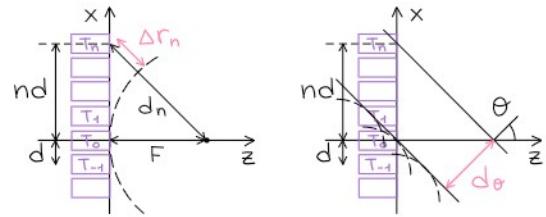
sensore circolare: cost = 1



distanza dal fuoco del trasduttore T_n : $d_n = \sqrt{(nd)^2 + F^2}$

focalizzazione elettronica: $\tau_n = \frac{-\Delta r_n}{c} + t_0$ $\Delta r_n = d_n - F$

steering di onde piane: $\tau_n = \frac{d\theta}{c} + t_0$ $d_\theta = nd \sin\theta$



RADIOGRAFIA

legge di Richardson - Dushman (effetto termoionico catodo): $J = \lambda_R A_0 T^2 e^{-\frac{W}{kT}}$

J = densità di corrente

λ_R = fattore dipendente dal materiale

A_0 = costante universale

T = temperatura assoluta

W = lavoro di estrazione degli elettroni

K = costante di Boltzman

rendimento (anodo): $\eta = \frac{E_{rad}}{E_{kin}} = n_0 V K$

$n_0 = 10^{-9}$

V = tensione catodo - anodo

Z = numero atomico (protoni) del materiale dell'anodo

legge di Duane - Hunt (emissione raggi X): $\lambda_{min} = \frac{12.4}{V}$ $\lambda_{max} = 1.5 \lambda_{min}$

legge di Lambert - Beer (raggio monoenergetico): $N_d = N_0 e^{-\mu d}$

N = numero di fotoni dopo l'attenuazione del materiale

N_0 = numero di fotoni iniziale

attenuazione: $\mu = \mu_{Ray} + \mu_{Photo} + \mu_{Comp}$

attenuazione Rayleigh: $\mu_{Ray} = \rho Z^2 E^{-1}$

attenuazione Compton: $\mu_{Comp} = \rho Z E^{-1}$

attenuazione Photoelettrica: $\mu_{Photo} = \rho Z^3 E^{-3}$

intensità (raggio monoenergetico): $I = \frac{E}{\Delta t \Delta A} = \frac{h\nu N}{\Delta t \Delta A}$

E = energia dei raggi X

Δt = tempo di osservazione del flusso di energia

A = area del fascio

intensità (raggio multienergetico): $I_d = \sum_{E=0}^{E_{max}} I_0(E) e^{-\int_0^d \mu(s, E) ds} \Rightarrow I_d = I_0(E_{eff}) e^{-\int_0^d \mu(s, E_{eff}) ds}$

E_{eff} = energia effettiva (energia di sorgente monoenergetica che produce la stessa intensità)

attenuazione: $att_d = -\ln\left(\frac{I_d}{I_0}\right) = \int_0^d \mu(s, E_{eff}) ds$

numero di fotoni nell'immagine maschera: $N_H = N_0 e^{-\mu x}$

numero di fotoni nell'immagine mezzo di contrasto: $N_C = e^{-[\mu(x-h) + \mu_{ch} h]}$

angiografia a sottrazione digitale: $D = N_H - N_C = N_0 e^{-\mu x} [1 - e^{-h(\mu_C - \mu)}]$

μ = attenuazione struttura

μ_C = attenuazione mezzo di contrasto

x = spessore struttura

h = spessore vaso (mezzo di contrasto)

dose equivalente: $H = D \times WR$

raggi \times, γ, β : $WR = 1$

protoni: $WR = 10$

particelle α : $WR = 20$

D = dose assorbita

dose efficace (danno biologico in relazione all'organo): $DE = D \times WR \times WT$

corpo intero: $WT = 1$

scala di Hounsfield: $HU = 1000 \left(\frac{\mu_t - \mu_w}{\mu_w} \right)$ $HU_{aria} = -1000$ $HU_{acqua} = 0$ $HU_{osso} = 1000$ (4000)

μ_t = coefficiente di attenuazione del tessuto

μ_w = coefficiente di attenuazione dell'acqua

passo di avanzamento: $pitch = \frac{d}{s}$

velocità del lettino: $v = \frac{d}{t_{rot}} = \frac{pitch \times s}{t_{rot}}$

d = avanzamento del lettino dopo una rotazione

s = larghezza della sezione

t_{rot} = tempo per completare una rotazione

legge di Brooks - DiChiro: $\sigma' = f_A \sqrt{\frac{I_0/I}{\epsilon \cdot D \cdot S}}$

σ' = rumore (deviazione standard)

D = dose

f_A = fattore algoritmo di ricostruzione

ϵ = fattore efficienza del sistema

RISONANZA MAGNETICA

momento di dipolo magnetico nucleare: $\vec{\mu} = \gamma \vec{I}$ $|\vec{\mu}| = \gamma \frac{h}{2\pi} \sqrt{I(I+1)}$

numero quantico di spin (momento angolare intrinseco di spin): $I = 0, 1/2, 1, \dots$

idrogeno: $\frac{\gamma}{2\pi} = 42,58 \frac{\text{MHz}}{\text{T}}$ $I = \frac{1}{2}$

γ = rapporto giromagnetico

h = costante di Planck

nucleo immerso in un campo magnetico esterno: $\mu_z = \gamma \frac{h}{2\pi} m_I$

numero quantico magnetico: $m_I = -I, -I+1, \dots, I$

legge di Larmor (moto di precessione di $\vec{\mu}$ attorno a B_0): $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\mu} \times \gamma B_0$ $\omega_0 = \gamma B_0$

$\mu_x(t) = \mu_{xy} \cos(-\omega_0 t + \varphi)$

$\mu_y(t) = \mu_{xy} \sin(-\omega_0 t + \varphi)$

$\mu_z(t) = \mu_z(0)$

B_0 = campo magnetico esterno

ω_0 = pulsazione di Larmor (velocità angolare)

effetto Zeeman (livelli energetici delle orientazioni): $E = -\mu_z B_0 = \gamma \frac{h}{2\pi} m_I B_0$ $\Delta E = E_\downarrow - E_\uparrow = \gamma \frac{h}{2\pi} B_0$

E_\uparrow = bassa energia (spin-up)

E_\downarrow = alta energia (spin-down)

statistica di Boltzmann (distribuzione dei nuclei): $\frac{N_\uparrow}{N_\downarrow} = e^{\frac{\Delta E}{kT}} = 1 + \frac{\Delta E}{kT}$

costante di Boltzman: $K = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

T = temperatura assoluta

magnetizzazione macroscopica: $\vec{M} = \sum_i \vec{\mu}_i$ [$T = 10^4 \text{ G}$]

effetto di risonanza: $\omega_{rf} = \omega_0$ $N_{up} = N_{down}$

ω_{rf} = pulsazione di B_1

B_1 = campo magnetico rotante

equazioni del moto (sistema di riferimento rotante): $\frac{dM}{dt} = M \times \gamma B_1$ $\omega_1 = \gamma B_1$

ω_1 = velocità angolare di M attorno a B_1

tempo di applicazione del campo magnetico rotante: $\Delta t = \frac{\alpha}{\omega_1} = \frac{\alpha}{\gamma B_1}$

rilassamento longitudinale (spin-reticolo): $M_z(t) = M_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + M_z(0) e^{-\frac{t}{T_1}}$

M_0 = magnetizzazione all'equilibrio termodinamico

$M_z(0)$ = Condizione iniziale (flip angle raggiunto con l'impulso RF)

rilassamento trasversale (spin-spin): $M_{xy}(t) = M_{xy}(0) e^{-\frac{t}{T_2}}$

suscettibilità magnetica: $\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1}$

free induction decay (FID): $S(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $A(t) \sim M_{xy}(t) = \rho e^{-\frac{t}{T_2}}$

ρ = densità protonica

inversion recovery (flip angle di 180°): $M_z(t) = M_0 (1 - 2e^{-\frac{t}{T_1}})$ $M_{xy}(t) = 0$

sequenza spin echo: $A(T_E) = \rho \left(1 - 2e^{-\frac{(T_R - T_E/2)}{T_1}} + e^{-\frac{T_E}{T_2}} \right) e^{-\frac{T_E}{T_2}}$

applicazioni cliniche: $T_E/2 \ll T_R \Rightarrow A(T_E) = \rho (1 - e^{-\frac{T_R}{T_1}}) e^{-\frac{T_E}{T_2}}$

immagini T_2 -pesate: $T_R \gg T_1 \Rightarrow A(T_E) = \rho e^{-\frac{T_E}{T_2}}$

immagini T_1 -pesate: $T_E \ll T_2 \Rightarrow A(T_E) = \rho (1 - e^{-\frac{T_R}{T_1}})$

immagini ρ -pesate: $T_E \ll T_2 \quad T_R \gg T_1 \Rightarrow A(T_E) = \rho$

slide selection (si eccitano solo gli spin nell'isocentro): $\omega_0 = \gamma B_0 + \gamma G_z z$

isocentro: $\omega_0 = \gamma B_0 \Rightarrow \omega_{rf} = \omega_0$

spessore della sezione selezionata: $\Delta z = \frac{2\pi \Delta v}{\gamma G_z}$

G_z = gradiente di selezione (applicato simultaneamente alla stimolazione RF)

Δv = intervallo di frequenze degli impulsi in RF generati

K-space delle frequenze: $K_x = \gamma G_x t \quad K_y = \gamma G_y T$

MEDICINA NUCLEARE

legge del decadimento radioattivo: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

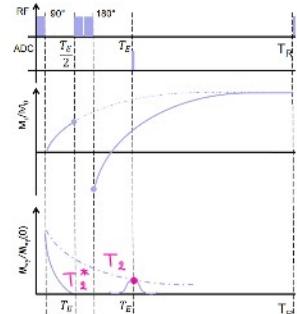
N = numero di radionuclidi

λ = costante di decadimento

tempo di dimezzamento (emivita): $t_{dim} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

attività: $A(t) = \lambda N(t)$ [Bq]

algoritmo del baricentro: $Z = \sum_{k=1}^N a_k$



Z = proporzionale all'energia del fotone incidente

a_k = intensità massima del segnale del fotomoltiplicatore k -esimo

coordinate dell'evento di scintillazione: $X = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^N a_k x_k$ $Y = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^N a_k y_k$

(x_k, y_k) = coordinate del fotomoltiplicatore k -esimo

ESERCIZI

ULTRASUONI (2.2)

Pressione che si propaga:

$$P(x, t) = P_0 \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$P_0 = 100 \text{ kPa} \quad \omega_0 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

Valori tipici di un mezzo biologico:

$$c = 1500 \text{ m/s} \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$Z = 1.5 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

$$v_o = \frac{P_0}{Z} = 0,06 \text{ m/s}$$

$$U(t) = \int v(t) dt = \int \frac{P(t)}{Z} dt = \int v_o \sin(\omega_o(t - \frac{x}{c})) dt = -\frac{v_o}{\omega_o} \cos(\omega_o(t - \frac{x}{c})) \Rightarrow U_o = \frac{v_o}{\omega_o} = 2,1 \text{ nm}$$

ULTRASUONI (2.2)

Onda piana in acqua con una intensità $I_{sppa} = 730 \text{ mW/cm}^2$.

Impulso sinusoidale emesso con queste caratteristiche:

$$f_0 = 5 \text{ MHz}$$

$$M_{ON} = 2 \text{ periodi}$$

$$T_p = 200 \mu\text{s}$$

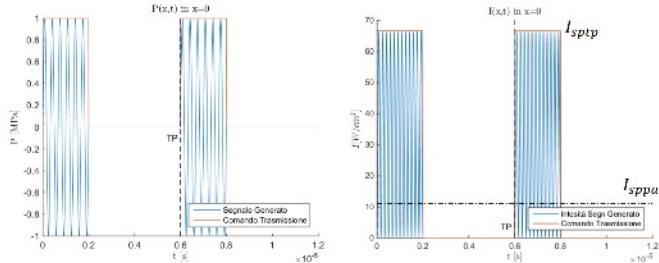
Calcolare P_0 , v_o e U_0

$$I_{sppa} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{T_0} I_i(t) dt = \frac{1}{T_p} \frac{T_{ON}}{2} \frac{P_0^2}{Z}$$

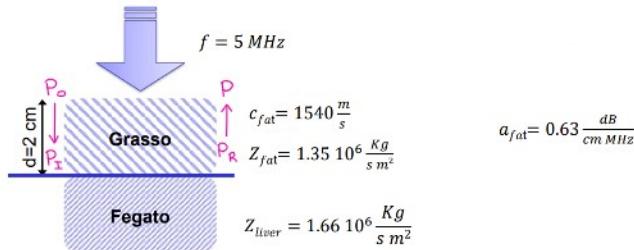
$$T_{ON} = M_{ON} T_0 = \frac{M_{ON}}{f_0} \Rightarrow P_0 = \frac{I_{sppa} 2 Z T_p}{M_{ON} / f_0} = 3,35 \text{ MPa} = 33,5 \text{ atm}$$

$$v_o = \frac{P_0}{Z} = 2,18 \text{ m/s}$$

$$U_0 = \frac{V_o}{\omega_o} = \frac{V_o}{2\pi f_0} = 69 \text{ nm}$$



ULTRASUONI (2.2)



- Dopo che intervallo temporale si riceve l'eco dall'interfaccia grasso/fegato?
- Che attenuazione in dB subisce l'ampiezza dell'onda ricevuta?

$$1) \quad t = \frac{2d}{c} = 24,6 \mu\text{s}$$

$$2) \quad P = P_R e^{-\mu_a \cdot d} = P_I R_P e^{-\mu_a d} = P_0 R_P e^{-2 \mu_a d}$$

$$R_P = \frac{Z_{\text{fat}} - Z_{\text{liver}}}{Z_{\text{fat}} + Z_{\text{liver}}} = 0,103$$

$$\mu_a = \frac{\alpha}{8,7} = \frac{\alpha_{\text{fat}} \cdot f}{8,7} = 0,362 \frac{\text{Np}}{\text{cm}}$$

$$A = 20 \log\left(\frac{P}{P_0}\right) = 20 \log(R_P e^{-2 \mu_a d}) = -32 \text{ dB}$$

ULTRASUONI (2.3)

Gli echi di due riflettori distanti tra loro 2.5 cm vengono ricevuti separati da un intervallo

Scegli un'alternativa:

- a. che dipende dalla frequenza impostata per l' US
- b. di circa 65 millisecondi
- c. di circa 32 microsecondi
- d. di circa 32 millisecondi

$$t = \frac{2d}{c} = 32,5 \text{ } \mu\text{s}$$

ULTRASUONI (2.3)

Un trasduttore ad US deve raggiungere un riflettore posto ad una distanza di 15 cm; qual è il massimo valore (Hz) che può assumere la PRF?

$$\text{PRF}_{\max} = \frac{c}{2Z_{\max}} = 5133 \text{ Hz}$$

ULTRASUONI (2.3)

Un trasduttore ad US è utilizzato con una frequenza di ripetizione F_R di 7000 Hz; qual è la massima distanza (valore intero in mm) a cui può trovarsi un riflettore che non crei artefatti negli echi ricevuti?

$$Z_m = \frac{c}{2F_R} = 110 \text{ mm}$$

ULTRASUONI (2.3)

Si supponga di voler generare una immagine B-mode con $N=256$ linee assumendo $Z_{\max}=30 \text{ cm}$.

Quanto vale il tempo di acquisizione di un frame?

$$T_{\text{frame}} = N T_{\text{PR}} = N \frac{2Z_{\max}}{c} = 99,44 \text{ ms}$$

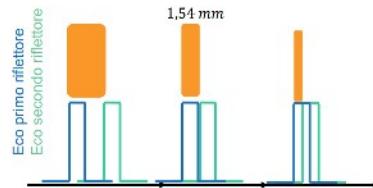
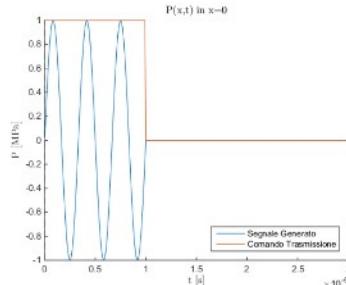
RISOLUZIONE SPAZIALE ASSIALE (2.3)

Si consideri un sistema che produce ultrasuoni a frequenza $f = 3 \text{ MHz}$ e si assuma di poter generare impulsi rettangolari di durata $m = 3$ periodi.

Calcolare la risoluzione assiale del sistema nella drastica semplificazione di poter trascurare le distorsioni in frequenza legate all'interazione con il mezzo

$$T_{\text{impulso}} = mT = m/f = 1 \text{ } \mu\text{s}$$

$$\Delta Z_{\min} = cT_{\text{impulso}} = 1,54 \text{ mm}$$



ULTRASUONI (2.4)

Un trasduttore ad US ha un diametro di 7 mm e funziona alla frequenza di 10 MHz; con $c=1540 \text{ m/s}$, a quale distanza è posizionato l'ultimo massimo (valore intero in cm)?

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0,154 \text{ mm} \Rightarrow Z_{\max} = \frac{\Delta^2}{4\lambda} = 8 \text{ cm}$$

ULTRASUONI (2.4)

In un trasduttore ad US del diametro di 12 mm l'ultimo massimo di intensità nella zona di Fresnel si osserva a $Z_m=6 \text{ cm}$ dal trasduttore. A quale frequenza (MHz) sta funzionando il trasduttore? (3 cifre significative, usare la virgola come separatore decimale)

$$Z_m = \frac{\Delta^2}{4\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta^2}{4Z_m} = 0,0006 \text{ m}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{1540}{0,0006} \text{ Hz} = 2,564 \text{ MHz}$$

FOCALIZZAZIONE (2.5)

Un trasduttore ad US con grado di focalizzazione $g=Zm/F=2$ e raggio di curvatura $F=100$ mm funziona a 3,5 MHz; quanto vale la larghezza della zona di focalizzazione (in mm)? (3 cifre significative, usare la virgola come separatore decimale)

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0,44 \text{ mm}$$

$$Z_m = gF = \frac{D^2}{4\lambda} \Rightarrow D = \sqrt{4\lambda g F}$$

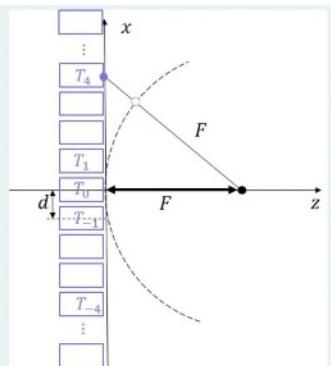
$$W_F = \frac{\lambda F}{D} = \frac{\lambda F}{\sqrt{4\lambda g F}} = 2,345 \text{ mm}$$

CALCOLO DEL DELAY (2.5)

Si consideri il problema di focalizzazione elettronica del fascio di ultrasuoni generato con un array lineare di sensori.

Si supponga che i trasduttori piezoelettrici siano spaziati come indicato in figura, dove $d=2$ mm. Sia assunta infine di comandare il trasduttore T_4 al tempo 0. Dopo quanti nanosecondi Δt bisogna comandare il traduttore T_0 per ottenere una focalizzazione elettronica in trasmissione con fuoco sull'asse z a profondità $F=100$ mm (vedi figura)?

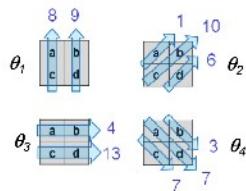
Assumere la velocità dell'onda ultrasonora pari a $c=1540$ m/s, riportare il risultato in nanosecondi con 2 cifre dopo la virgola.



$$\Delta r_4 = \sqrt{(4 \cdot 0,002)^2 + 0,1^2} - F = 0,319 \text{ mm}$$

$$\tau_4 = -\frac{\Delta r_4}{c} + t_0 \Rightarrow t_0 = \tau_4 + \frac{\Delta r_4}{c} = \frac{\Delta r_4}{c} = 204,46 \text{ ns}$$

RETROPROIEZIONE (3.2)



$$\theta_1 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 4,5 \\ \hline 4 & 4,5 \\ \hline \end{array} \quad \theta_2 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 9,5 \\ \hline 9 & 10,5 \\ \hline \end{array} \quad \theta_3 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 11,5 \\ \hline 15,5 & 14 \\ \hline \end{array} \quad \theta_4 \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 10,5 & 14,5 \\ \hline 22,5 & 20,5 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{normalizzazione sul numero di proiezioni} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 2,62 & 3,62 \\ \hline 5,62 & 5,12 \\ \hline \end{array}$$

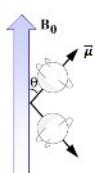
MOMENTO DI DIPOL MAGNETICO NUCLEARE (4.2b)

Calcolare θ per il nucleo di idrogeno ${}^1H^+$

- $I = \frac{1}{2}$, $2I+1=2$, $m_I=-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

- Due orientazioni:

- spin-up ($m_I=\frac{1}{2}$)
- spin-down ($m_I=-\frac{1}{2}$)



$$\cos\theta = \frac{\mu_x}{|\vec{\mu}|} = \frac{m_I}{\sqrt{I(I+1)}} \Rightarrow \theta = \pm 55^\circ \text{ (non dipende dal campo magnetico esterno } B_0 \text{)}$$

MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO NUCLEARE (4.2b)

Si consideri dei nuclei di idrogeno ^1H

Calcolare $\frac{N_\uparrow}{N_\downarrow}$ quando $B_0 = 1\text{T}$ e $T = 300^\circ\text{K}$

$$\frac{N_\uparrow}{N_\downarrow} = 1 + \frac{\Delta E}{kT} = 1 + \gamma \frac{\hbar}{2\pi} \frac{B_0}{kT} = 1 + 6,77 \cdot 10^{-6}$$

MRI (4.2b)

Calcolare ω_{rf} per avere risonanza nel caso di ^1H e $B_0 = 2\text{T}$

$$f_{rf} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} = 42,58 \cdot 2 = 85,16 \text{ MHz}$$

MRI (4.2b)

Per un protone ^1H quanto deve valere il tempo di applicazione Δt del campo magnetico rotante $B_1 = 0.6\text{ G}$ per avere $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\Delta t = \frac{\alpha}{\gamma B_1} = \frac{\pi/2}{2\pi \cdot 42,58 \cdot 10^6 \cdot 0,6 \cdot 10^{-4}} = 0,1 \text{ ms}$$

MRI (4.2b)

Data una MRI con $B_0 = 3\text{T}$, si supponga di applicare un $B_1(t)$ per un tempo tale da ottenere un flip angle di $\alpha = \pi/4$.

Considerando $|M_0| = 1\text{A} \cdot \text{m}^2$ e $T_2 = 50\text{ms}$, che valore si ottiene per $M_{xy}(t)$ quando $t = 5\text{ms}$?

(Usare 2 cifre dopo la virgola e riportare la risposta in $\text{A} \cdot \text{m}^2$)

$$M_{xy}(t) = M_{xy}(0) e^{-\frac{t}{T_2}} = |M_0| \sin \alpha e^{-\frac{t}{T_2}} = 1 \text{ A} \cdot \text{m}^2 \cdot \sin(45^\circ) \cdot e^{-\frac{1}{5}} = 0,64 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

MRI (4.2b)

Si supponga di aver applicato ad un sistema di MRI un campo a radiofrequenza B_1 che abbia portato $|M_z| = 0$ e $|M_{x,y}| = 1$ (impulso a $\pi/2$). Dopo aver spento l'impulso a radiofrequenza a $t = 0$ si osserva il rilassamento T_2 e T_1 . Ipotizzando $T_2 = 45\text{ms}$ e $T_1 = 240\text{ms}$, che angolo α avrà la magnetizzazione M con l'asse z al tempo $t=80\text{ ms}$? [riportare l'angolo in gradi come numero intero]

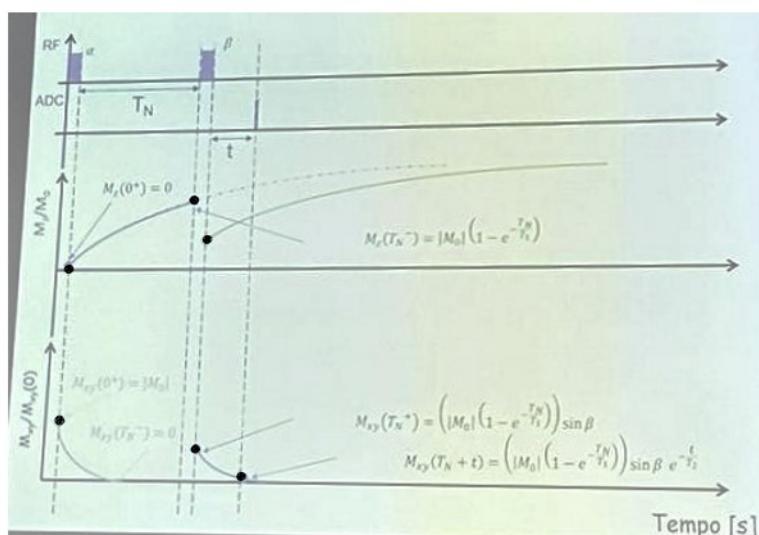
$$|M| = \sqrt{M_x^2 + M_z^2} = 1$$

$$M_{xy}(t) = M_{xy}(0) e^{-\frac{t}{T_2}} = 1 e^{-\frac{80}{45}} = 0,169$$

$$M_z(t) = M_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) + M_z(0) e^{-\frac{t}{T_2}} = 1 \left(1 - e^{-\frac{80}{240}} \right) + 0 \cdot e^{-\frac{80}{45}} = 0,283$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{M_{xy}}{M_z} \right) = 31^\circ$$

MRI (4.3)



$$\alpha = 90^\circ$$

$$|M(\tau_N)| = M_z(\tau_N^-) = M_o \left(1 - e^{-\frac{\tau_N}{T_1}}\right) + M_z(0^+) = M_o \left(1 - e^{-\frac{\tau_N}{T_1}}\right)$$

$$M_{xy}(\tau_N^+) = |M(\tau_N)| \sin \beta = M_o \left(1 - e^{-\frac{\tau_N}{T_1}}\right) \sin \beta$$

$$M_{xy}(\tau_N + t) = M_{xy}(\tau_N^+) e^{-\frac{t}{T_2}} = M_o \left(1 - e^{-\frac{\tau_N}{T_1}}\right) \sin \beta e^{-\frac{t}{T_2}}$$

MEDICINA NUCLEARE (5a)

Si consideri un esame con un fantoccio PET (Volume: 1500mL) che utilizzi un tracciante marcato F-18 (tempo di dimezzamento: 110 minuti).

Si consideri inoltre uno scanner con un'attività minima misurabile di 1 kBecquerel/mL.

Si vuole generare un segnale rilevabile dopo 180 minuti. Quale è la dose minima di tracciante da utilizzare? [riportare la dose in MBecquerel, come numero intero]

$$A_{min} = 1 \text{ kBecquerel/mL} \cdot 1500 \text{ mL} = 1,5 \text{ MBecquerel}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{dim}} = \frac{\ln 2}{6600} = 1,05 \cdot 10^{-4}$$

$$A_{min} = \lambda N_{min} = \lambda N_{o,min} e^{-\lambda t} \Rightarrow N_{o,min} = \frac{A_{min} \cdot e^{\lambda t}}{\lambda} = 44,4 \cdot 10^9$$

MEDICINA NUCLEARE (5a)

Si consideri un esame PET con tracciante marcato C-11 (tempo di dimezzamento: 20 minuti; dose somministrata: 257 MBecquerel). Dopo 45 minuti dalla somministrazione del radiotracciante si misura un'attività media di 20 KBq/mL nel cervello. Si assuma il volume cerebrale pari a 1 litro. Considerando il decadimento radioattivo, a quale percentuale dell'attività totale del radiotracciante proviene dal cervello? [riportare un numero intero tra 0 e 100]]

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{dim}} = \frac{\ln 2}{1200} = 5,774 \cdot 10^{-4}$$

$$A(t) = \lambda \cdot N(t) = \lambda \cdot N_o e^{-\lambda t} = A_o e^{-\lambda t} = 257 \cdot 10^6 \cdot e^{-2400 \lambda} = 54 \text{ MBecquerel}$$

$$A_{cervello}(t) = 20 \text{ kBecquerel / mL} \cdot 1000 \text{ mL} = 20 \text{ MBecquerel}$$

$$\text{percentuale} = \frac{A_{cervello}(t)}{A(t)} \cdot 100 = \frac{20}{54} \cdot 100 = 37 \%$$

MEDICINA NUCLEARE (5a)

In un laboratorio di medicina nucleare viene sintetizzato una dose di radiotracciante, che esibisce un'attività di 600 MBecquerel. Al momento dell'iniezione del radiotracciante al paziente (dopo 10 minuti dalla sintesi) l'attività del radiotracciante è di 19 MBecquerel. Quale è il tempo di emivita del radioisotopo utilizzato? [riportare la risposta in minuti, come numero intero]

$$A(t) = A_o e^{-\lambda t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{t} \ln\left(\frac{A(t)}{A_o}\right) = 5,754 \cdot 10^{-3}$$

$$t_{dim} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 120 \text{ s} = 2 \text{ min}$$

MEDICINA NUCLEARE (5a)

Si considerino due radionuclidi P e Q.

Supponiamo che l'emivita di P sia il doppio di quella Q.

A t=0, ci sono lo stesso numero di radionuclidi delle due specie $N_p(0)=N_q(0)$.

Quand'è che la radioattività delle due specie sarà uguali?

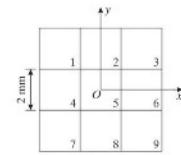
$$t_{dim}^P = 2 t_{dim}^Q \Rightarrow 2 \lambda^P = \lambda^Q$$

$$A^P(t) = A^Q(t) \Rightarrow \lambda^P N_o^P e^{-\lambda^P t} = \lambda^Q N_o^Q e^{-\lambda^Q t} \Rightarrow \lambda^P e^{-\lambda^P t} = 2 \lambda^Q e^{-2 \lambda^Q t} \Rightarrow e^{\lambda^P t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda^P} = t_{dim}^P$$

LOGICA DI POSIZIONE (5a)

Si consideri una Anger camera con 9 fotomoltiplicatori disposti e numerati come in figura.
I fotomoltiplicatori rilevano le seguenti ampiezze

FM1	FM2	FM3	FM4	FM5	FM6	FM7	FM8	FM9
5	10	15	10	40	30	0	5	10



Determinare la posizione dell'impulso.

$$Z = 5 + 10 + 15 + 10 + 40 + 30 + 0 + 5 + 10 = 125$$

$$X = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^N a_k x_k = (-2 \cdot 5 + 0 \cdot 10 + 2 \cdot 15 - 2 \cdot 10 + 0 \cdot 40 + 2 \cdot 30 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 10) / 125 = 0,64 \text{ mm}$$

$$Y = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^N a_k y_k = (2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 30 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 2 \cdot 10) / 125 = 0,24 \text{ mm}$$