Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 4

28/03/2024

Esercizio 1

Siano $V = \mathbb{R}^3$ e W lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 4.
Considerare la seguente funzione lineare $f\colon V \longrightarrow W$ tale che:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto a + cx + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + (a+3b-4c)x^4.$$

Calcolare la matrice associata nelle rispettive basi canoniche.

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (x - 2y - z, -x + 2z, 2x - 6y - z)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Trovare delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Scrivere la matrice B che esprime la funzione f rispetto alla base formata dai vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usare questa base sia per il dominio sia per il codominio).

Esercizio 3

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice associata (rispetto alle basi canoniche) pari a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dato il vettore $u = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$, si determini la controimmagine $f^{-1}(u)$ del vettore u.
La funzione f è invertibile?

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo lineare tale che $Im(f) \subseteq Ker(f)$. Mostrare che $f \circ f$ è la funzione identicamente nulla.