

SEGNALI E SISTEMI

signals in the time - domain

T.ERSEGHE

Introduction

1.1. An introduction to signals

Signal

Definition www.merriam-webster.com

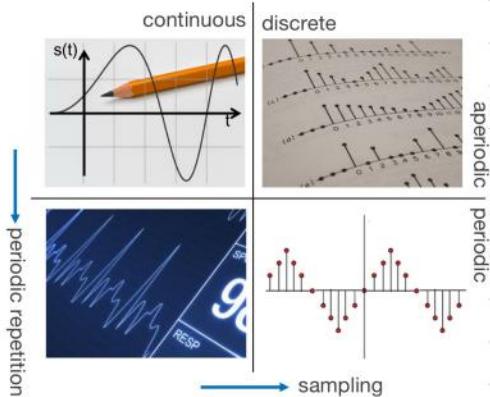
[...]

4

a : an object used to **transmit** or **convey information** beyond the range of human voice

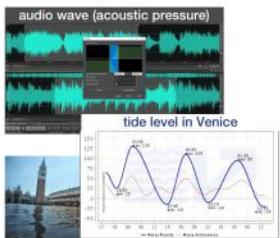
b : the **sound or image** conveyed in telegraphy, telephony, radio, radar, or television

c : a detectable **physical quantity** or **impulse** (as a voltage, current, or magnetic field strength) by which messages or **information** can be transmitted

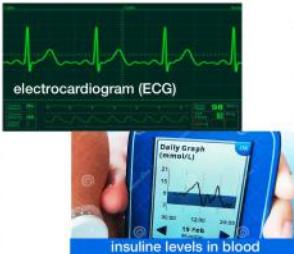


Some examples

From physics



From medicine



From economy



In generale, esistono 4 tipi di segnale che suddividiamo in:

- periodici o aperiodici
- continui o discreti

Complex values

$$* x = a_x + j b_x = |x| e^{j \varphi_x} = |x| \cos(\varphi_x) + j |x| \sin(\varphi_x) \quad \text{con} \quad |x| = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} \quad \text{e} \quad \varphi_x = \arctan\left(\frac{b_x}{a_x}\right) + \begin{cases} \pi & a_x \geq 0 \\ 0 & a_x < 0 \end{cases}$$

$$* x^* = a_x - j b_x = |x| e^{-j \varphi_x} \quad \text{è detto complesso coniugato}$$

$$* \text{Regole del prodotto: } x \cdot y = |x| |y| e^{j(\varphi_x + \varphi_y)} \quad \text{e} \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$* \text{Identità di Eulero: } \cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

* Un esponentiale complesso può avere una componente reale all'esponente: $x = e^{x+j\beta} = e^x \cdot e^{j\beta}$ con $|x| = e^x$ e $\varphi_x = \beta$

Es.1 Scrivere in forma Cartesiana i seguenti numeri complessi:

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} \rightarrow x_1 = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 + j(-1) = -j$$

$$j e^{j3\pi} \rightarrow x_2 = j[\cos(3\pi) + j\sin(3\pi)] = j[-1+j0] = -j \rightarrow \text{dato } e^{j3\pi} = (e^{j(3\pi-2\pi)}) = e^{j\pi} = -1 \text{ (periodicità della fase)}$$

$$\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \rightarrow x_3 = \sqrt{2}[\cos(\pi/4) + j\sin(\pi/4)] = \sqrt{2}(1/\sqrt{2} + j1/\sqrt{2}) = 1+j$$

Es.2 Scrivi i seguenti numeri in forma polare:

$$1+j \rightarrow |x_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ e } \varphi_1 = \arctan(1) = \pi/4 \rightarrow x_1 = \sqrt{2} e^{j\pi/4}$$

$$-3j \rightarrow |x_2| = \sqrt{0+9} = 3 \text{ e } \varphi_2 = \arctan(-\frac{3}{0}) = \arctan(-\infty) = -\pi/2 \rightarrow x_2 = 3 e^{-j\pi/2}$$

$$-2 \rightarrow |x_3| = \sqrt{4+0} = 2 \text{ e } \varphi_1 = \arctan(0/-1) + \pi = \arctan(0) + \pi = \pi \rightarrow x_3 = 2 e^{j\pi} \rightarrow e^{j\pi} = -1$$

Es.3 Scrivi $1/(3-2j)$ in forma Cartesiana

Possiamo riscrivere x come $x = \frac{1}{y}$. A questo punto possiamo razionalizzare moltiplicando num. e denom. per il coniugato: $x = \frac{1}{y} \cdot \frac{y^*}{y^*} = \frac{3+2j}{3^2 - (2)^2 (-1)} = \frac{3+2j}{9+4} = \frac{3}{13} + j \frac{2}{13}$

Es.4 Dato $x = [e^{j\pi/3} - \cos(\frac{\pi}{3})] e^{-(2-j\pi/3)}$ trovare il complesso coniugato x^* in forma Cartesiana e polare.

Nella trasformazione del numero complesso nel suo coniugato, j diventa $-j$

$$x^* = [e^{-j\pi/3} - \cos(\frac{\pi}{3})] e^{-(2+j\pi/3)}$$

$$= [\cos(-\frac{\pi}{3}) + j\sin(-\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{3})] e^{-(2-j\pi/3)} = \text{dato } \cos(\alpha) = -\cos(-\alpha)$$

$$= j\sin(-\frac{\pi}{3}) \cdot e^{-(2-j\pi/3)} =$$

$$= -j\sin(\frac{\pi}{3}) \cdot [e^{-2} e^{j\pi/3}] =$$

$$= -je^{-2} \sin(\frac{\pi}{3}) e^{j\pi/3}$$

In forma Cartesiana: $x^* = -je^{-2} \sin(\frac{\pi}{3}) [\cos(\frac{\pi}{3}) + j\sin(\frac{\pi}{3})] = \sin^2(\frac{\pi}{3}) e^{-2} - j\cos(\frac{\pi}{3}) \sin(\frac{\pi}{3}) e^{-2}$

In forma polare: $-j - e^{j\pi/2} \rightarrow x^* = e^{-2} \sin(\frac{\pi}{3}) e^{j\pi/3} e^{-j\pi/2} = e^{-2} \sin(\frac{\pi}{3}) e^{j(\pi/3-\pi/2)} = e^{-2} \sin(\frac{\pi}{3}) e^{-j\pi/6}$

In questo modo $|x^*| = |x| = e^{-2} \sin(\frac{\pi}{3})$ e $\varphi(x^*) = -\varphi(x) = -\pi/6$

1.2. An introduction to systems

Transformation (systems)

Definition www.merriam-webster.com

[...]

3

a (1) : the **operation of changing** (as by rotation or mapping) one **configuration** or expression into another **in accordance with a mathematical rule**; [...]



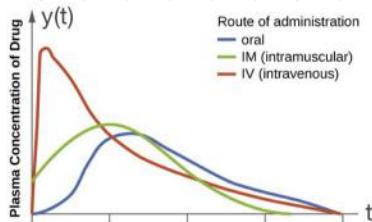
a (2) : the **formula** that effects a transformation

b : a **mathematical correspondence** that assigns exactly one element of one set to each element of the same or another set

Nella notazione standard, individuiamo tipicamente il segnale originale come l'input $x(t)$ ed il segnale d'uscita come l'output $y(t)$. Ci sono molti tipi di sistemi, ma quelli più rilevanti sono i **sistemi lineari e tempo invarianti (LTI)**, che rispettano sia il **principio di linearità** e il **principio di tempo-invarianza**.

Una caratteristica tipica dei sistemi LTI è che possono essere descritti da un integrale o da una serie se sono rispettivamente continui o discreti.

La relazione tra input ed output è detta **convoluzione**. Questa dipende anche da un segnale aggiuntivo detto **impulso rispondente (h)**.



Example on drug absorption:

→ la concentrazione di farmaco nel sangue, a partì di quantità di medicinale somministrato, dipende dal modo in cui essa viene assorbita dal corpo. Nel grafico sono ad esempio rappresentate la via orale, intramuscolare ed intravenosa.

Tuttavia, molto spesso la convoluzione è un'operazione complicata da valutare pertanto, si ricorre alle **trasformate di Fourier** e alle **trasformate di Laplace**, basate su esponenziali complessi. Uno degli aspetti più interessanti delle trasformate è che, l'operazione di convoluzione nel dominio del tempo, diventa un semplice prodotto nel dominio delle trasformate, facile da interpretare.

Integrals and Series

* Equivalenze della serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & , |\alpha| < 1 \\ \text{indeterminato, altrimenti} \end{cases}$$

* Equivalenza dell'esponenziale complesso:

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t_0}}{\alpha}$$

E.s. 1 Valuta $x(w) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{jw t} dt$ con $w \in \mathbb{R}$ e scrivi il risultato in forma Cartesiana

$$x(w) = \frac{e^{jw t}}{jw} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{jw/2} - e^{-jw/2}}{jw} = \frac{2j \sin(w/2)}{jw} = \frac{2 \sin(w/2)}{w} \in \mathbb{R}$$

E.s. 2 Valuta $x(\beta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\beta-j\theta)n}$ con $\beta, \theta \in \mathbb{R}$ e scrivi il risultato in forma Cartesiana.

serie geometrica con $\alpha = e^{(\beta-j\theta)}$ $x(\beta, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-e^{(\beta-j\theta)}} & |e^{(\beta-j\theta)}| < 1 \\ \text{indeterminato, altrimenti} \end{cases}$

$$|\alpha| = |e^{\beta} e^{-j\theta}| = |e^{\beta}| \cdot |e^{-j\theta}| = e^{\beta}, 1 = e^{\beta}$$

$$|e^{j\theta}| = 1$$

Per $\beta < 0$ la serie converge, mentre per $\beta \geq 0$ la serie diverge.

$$\text{Quindi } x(\beta, \theta) = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-e^{\beta}e^{-j\theta}} = \frac{1}{1-e^{\beta}\cos(\theta)+e^{\beta}j\sin(\theta)}$$

Per identificare la parte reale ed immaginaria, moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso

coniugato, quindi $x(\beta, \theta) = \bar{y} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y^*}{y^*} = \frac{y^*}{|y|^2}$

$$y \cdot y^* = |y|^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-\cos(\theta)e^{\beta}-j\sin(\theta)e^{\beta}}{(1-\cos(\theta)e^{\beta})^2+(-\sin(\theta)e^{\beta})^2} = \frac{1-\cos(\theta)e^{\beta}-j\sin(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta}+e^{2\beta}} = \frac{1-\cos(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta}+e^{2\beta}} - \frac{j\sin(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta}+e^{2\beta}} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1-2\cos(\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta}+e^{2\beta}} + \frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)e^{\beta}}{1-2\cos(\theta)e^{\beta}+e^{2\beta}} \end{aligned}$$

Es.3 Valuta le due serie complesse $x_1(\theta) = \sum_{n=0}^3 e^{j\theta n}$ e $x_2(\theta) = \sum_{n=-3}^0 e^{j\theta n}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

$$x_1(\theta) = \frac{1 - (e^{j\theta})^4}{1 - e^{-j\theta}} = \frac{1 - e^{-j4\theta}}{1 - e^{-j\theta}}$$

$x_2(\theta)$ è dato che la sommatoria ha range negativo, possiamo renderla positiva sostituendo la variabile n con $m = -n$, quindi $x_2(\theta) = \sum_{m=0}^3 e^{j\theta m} = \sum_{m=0}^3 e^{j\theta m} = \frac{1 - e^{j10\theta}}{1 - e^{j\theta}}$

Es.4 Valuta la serie complessa $x(\theta) = \sum_{n=-9}^9 e^{-j\theta n}$ con $\theta \in \mathbb{R}$ e scrivi il risultato in forma cartesiana.

$$x(\theta) = \sum_{n=-9}^0 e^{-j\theta n} + \sum_{n=0}^9 e^{-j\theta n} - 1 = \frac{1 - e^{-j10\theta}}{1 - e^{-j\theta}} + \frac{1 - e^{j10\theta}}{1 - e^{j\theta}} - 1$$

Con il denominatore comune otteniamo

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{(1 - e^{-j10\theta})(1 - e^{j\theta}) + (1 - e^{j10\theta})(1 - e^{-j\theta}) - (1 - e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta})}{(1 - e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta})} = \frac{(1 - e^{j\theta})(1 - e^{-j10\theta}) - (1 - e^{-j\theta})(1 - e^{j10\theta})}{(1 - e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta})} \\ &= \frac{-e^{-j10\theta} + e^{-j\theta} - e^{j10\theta} + e^{j\theta}}{(1 - e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta})} = \frac{\cos(9\theta) - \cos(10\theta)}{1 - \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Per la formula $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ otteniamo il risultato compatto che segue:

$$= -2\sin\left(\frac{19}{2}\theta\right)\sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{19}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$-2\sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{19}{2}\theta\right)}{\sin\left(\theta/2\right)}$$

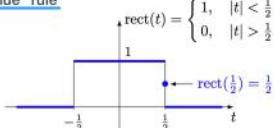
In alternativa, si può riscrivere la serie come la serie con $n = m - 9$ con $m \in [0, 18]$ e quindi:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \sum_{m=0}^{18} e^{j\theta(m-9)} = e^{j9\theta} \sum_{m=0}^{18} e^{j\theta m} = e^{j9\theta} \frac{1 - e^{j18\theta}}{1 - e^{-j\theta}} = \frac{e^{j9\theta} - e^{-j18\theta}}{1 - e^{-j\theta}} \\ &= \frac{e^{j9\theta} - e^{-j18\theta}}{1 - e^{-j\theta}} \cdot \frac{e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2}} = \frac{e^{j19\theta/2} - e^{-j17\theta/2}}{e^{j\theta/2} - e^{-j\theta/2}} = \frac{2j\sin(19/2\theta)}{2j\sin(\theta/2)} = \frac{\sin(19/2\theta)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

Aperiodic signals

1.4. Continuous-time aperiodic signals

The "semi-value" rule.



If $s(t)$ has a discontinuity at $t = t_i$, we assign to $s(t)$ the average value of the limits approached from right and left, respectively,

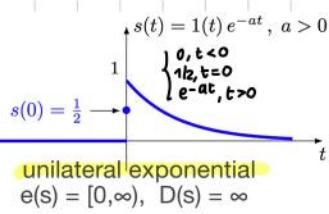
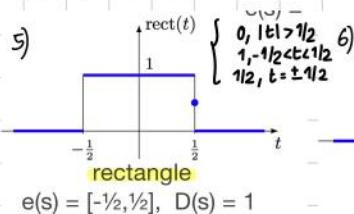
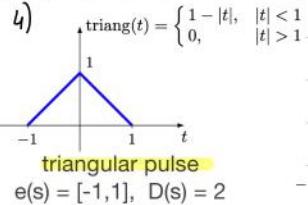
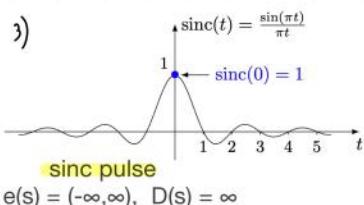
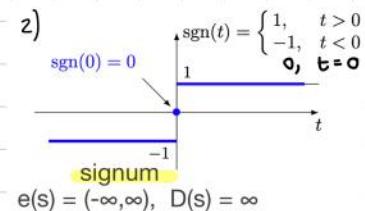
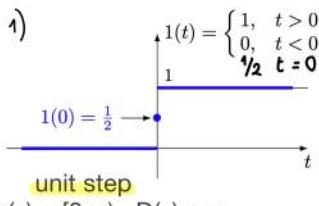
$$s(t_i) \triangleq \frac{1}{2}(s(t_i+) + s(t_i-))$$

Il segnale $\text{rect}(t)$ è discontinuo. Per assegnare un valore al segnale nella discontinuità, seguiamo la regola dell'intervallo, secondo la quale assegniamo il valore medio tra quello del limite destro e sinistro.

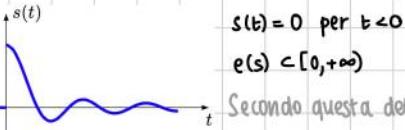
In realtà, il valore di un singolo punto (in questo caso preso 2), non altererebbe il valore dell'integrale.

Un altro concetto molto utile è quello dell'estensione, intesa come il più piccolo intervallo $[t_s, t_s]$, al di fuori del quale il segnale vale zero. Il segnale si dice attivo all'interno dell'estensione ecs , inattivo altrettanto. La differenza $T_s - t_s$ identifica la durata del segnale stesso, ovvero la misura dell'intervallo di estensione Dcs . L'estensione può essere finita o infinita.

Alcuni segnali di uso frequente (e relative proprietà sono):



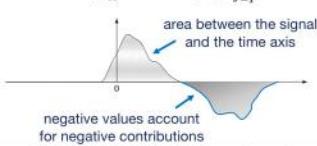
Un segnale è detto **causale** se è attivo solo nell'asse temporale positivo ovvero



Secondo questa definizione, $1(t)$ è causale, mentre $\text{rect}(t)$ no.

Per i segnali a tempo continuo possono essere introdotte le seguenti misure:

$$\text{area}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T s(t) dt$$

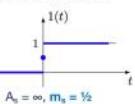
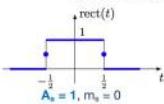


L'**area** è il bilanciamento tra i valori negativi e positivi di un segnale. Per segnali a valori complessi, assume valori complessi
Un'area nulla implica un bilanciamento perfetto.
In generale, per calcolarla si risolve un integrale

Area
 $\text{area}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) dt$

Mean (average value)
 $m_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt$

They capture a similar information for different classes of signals (only one at a time is meaningful)



La **media** è il valore medio assunto dal segnale lungo l'asse temporale.

Questa misura ha un significato analogo all'area. Tuttavia l'**area** risulta significativa per valori limitati, come $\text{rect}(t)$, mentre il **valore medio** per segnali infiniti come $1(t)$

Sia area che valore medio sono lineari. ovvero, ogni equazione lineare di un segnale può diventare un'equazione lineare di area o valore medio. $s(t) = Bx(t) + (y(t)) \rightarrow A_s = BA_x + (Ay)$ e $m_s = Bm_x + (my)$

- Area finita \rightarrow media nulla
- Valore medio finito ($\neq 0$) \rightarrow area infinita

the limit is A_s

$$m_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) dt$$

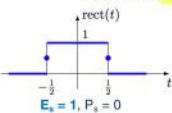
 ↓
 the limit is ∞

Energy and power

Energy

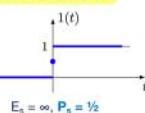
$$E_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt$$

They correspond to the area and the mean value of $|s(t)|^2$ hence take **only real positive values**



Power

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt$$



Energia e **Potenza** sono le controparti di area e valor medio calcolate per il quadrato del segnale assoluto $|s(t)|^2$.

Le proprietà sono le medesime che per area e media, tuttavia E_s e P_s riguardano l'attività del segnale rispettivamente per segnali limitati ed illimitati.

Continuous-time aperiodic signals

È utile ricordare che, indipendentemente dal fatto che il segnale sia reale o complesso, per $s(t) = e^{at}$, $F[s(t)] = \frac{e^{at}}{a}$

Es.1 Calcolare area, valore medio, energia e potenza per:

* unit step $s(t) = 1(t)$

$$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = \int_0^{\infty} 1(t) dt = \left[t \right]_0^{\infty} = \infty \rightarrow 1(t) \text{ ha estensione } [0, \infty) \text{ e vale 1 in tale intervallo.}$$

Secondo la generalizzazione dei concetti di lunghezza, area e volume in uno spazio euclideo di Lebesgue, un singolo punto ha misura di Lebesgue nulla.

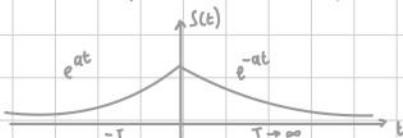
$$m_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 1(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$$

Per calcolare Energia e potenza valutiamo $|s(t)|^2$

$$|s(t)|^2 = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/4, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{secondo la regola di Lebesgue, dato che il segnale differisce solo in un singolo punto, possiamo dire che } |s(t)|^2 \simeq |1(t)|$$

Di conseguenza, otteniamo (senza fare ulteriori calcoli), $E_s = \infty$ e $P_s = 1/2$

* bilateral exponential $s(t) = e^{-|at|}$ per $a > 0$



togliendo il modulo perché i tempi sono sicuramente positivi

$$A_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T e^{-|at|} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \int_0^T e^{-at} dt = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^T = 2(e^{-aT} - 1) = 2(-1) = \frac{2}{a} \rightarrow m_s = 0$$

Per energia e potenza:

$$|s(t)|^2 = \begin{cases} e^{2at}, & t < 0 \\ e^{-2at}, & t > 0 \end{cases} \rightarrow \text{il modulo al quadrato ha la stessa struttura del segnale originale}$$

Sostituendo a con b=2a, energia e potenza valgono rispettivamente

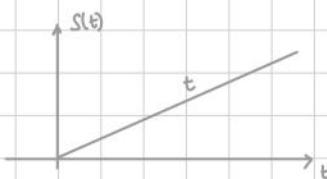
$$E_s = \frac{2}{b} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a} \rightarrow P_s = 0$$

* rectangle $s(t) = \text{rect}(t)$

$$A_s = \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt = t \Big|_{-1/2}^{1/2} = 1 \rightarrow m_s = 0$$

Inoltre, dato $|\text{rect}(t)|^2 \simeq \text{rect}(t)$, a meno del valore in $t = \pm 1/2$ (con misura di Lebesgue nulla e quindi trascurabile), otteniamo $E_s = 1 \rightarrow P_s = 0$

* ramp $s(t) = t \cdot \text{rect}(t)$



$$A_s = \int_0^\infty \text{ramp}(t) dt = \int_0^\infty t \cdot 1(t) dt = \int_0^\infty t dt = \infty$$

$$m_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^2 - 0}{4T} = \infty$$

Alcuni segnali hanno sia area che valore medio infinito. In questi casi non si può dedurre nulla.

Inoltre, dato $|s(t)|^2 = t^2 \cdot 1(t)$ otteniamo anche $E_s = P_s = \infty$

* triangle $s(t) = \text{triang}(t)$

$$\text{Per simmetria, } A_s = 2 \int_0^1 (1-t) dt = 2t - t^2 \Big|_0^1 = 1 \rightarrow m_s = 0$$

$$\text{Dall' equivalenza } |s(t)|^2 = \begin{cases} (1-t)^2, & 0 < t < 1 \\ (1+t)^2, & -1 < t < 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \text{ otteniamo } E_s = 2 \int_0^1 (1-t)^2 dt = 2t - 2t^2 + \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow P_s = 0$$

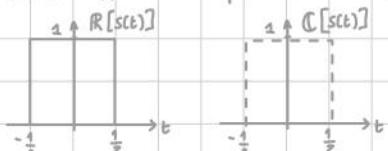
* unilateral exponential $s(t) = 1(t) \cdot e^{-at}$ per $a > 0$

Il risultato è simile a quello dell'esponenziale bilatero, moltiplicato per un fattore $\frac{1}{2}$

$$\text{quindi } A_s = \frac{1}{a} \rightarrow m_s = 0 \text{ e } E_s = \frac{1}{2a} \rightarrow P_s = 0$$

* complex signal $s(t) = (1+j) \text{rect}(t)$

Possiamo rappresentare la parte reale e immaginaria separatamente



Possiamo riscrivere il $\text{rect}(t)$ come

$s(t) = B \text{rect}(t)$ con $B = 1+j$. Per linearità otteniamo che:

$$A_s = B A_{\text{rect}} = B = 1+j \rightarrow m_s = 0, \text{ risulta quindi } A_s \in \mathbb{C}$$

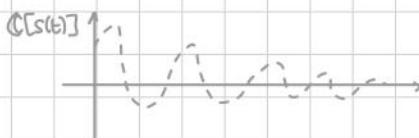
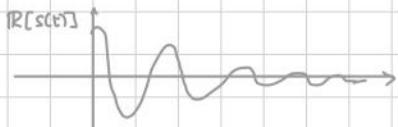
Inoltre, osservando che $|B|^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow [s(t)]^2 = |B|^2 \text{rect}^2(t)$

ovvero $2 \text{rect}^2(t) \simeq 2 \text{rect}(t)$. Quindi, per linearità, $E_s = 2 A_{\text{rect}} = 2 \rightarrow P_s = 0$

* damped complex exponential $s(t) = e^{p_0 t} 1(t)$ con $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ e $\sigma_0 < 0$

Possiamo riscrivere la sinusode smorzata come $s(t) = e^{\sigma_0 t} \underbrace{\cos(2\pi f_0 t)}_{R[s(t)]} 1(t) + j e^{\sigma_0 t} \underbrace{\sin(2\pi f_0 t)}_{C[s(t)]} 1(t)$

Rappresentata graficamente come:



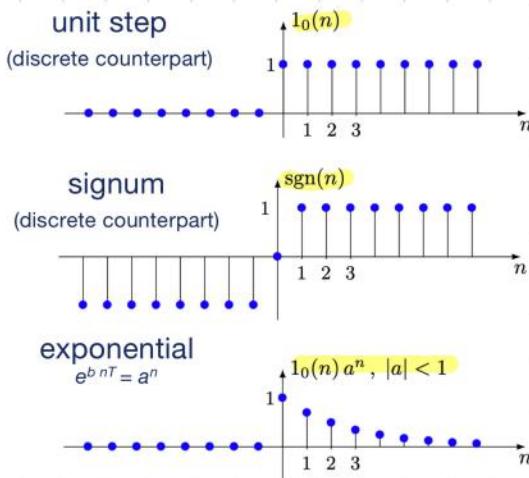
L'area, in realtà, è facilmente calcolabile dall'espressione complessa. Infatti:

$$A_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{p_0 t} 1(t) dt = \int_0^{\infty} e^{p_0 t} dt = \frac{e^{p_0 t}}{p_0} \Big|_0^{\infty} = \frac{0 - 1}{p_0} = -\frac{1}{p_0} \rightarrow m_s = 0$$

Per energia e potenza individuiamo $|s(t)|^2 = |e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} 1(t)|^2 = |e^{\sigma_0 t}|^2 |e^{j\omega_0 t}|^2 |1(t)| \approx e^{2\sigma_0 t} \cdot 1 \cdot 1(t) = e^{2\sigma_0 t} 1(t)$

Troviamo quindi la formula di un esponenziale complesso per lui $E_s = \frac{1}{-2\sigma_0} = \frac{1}{2|\sigma_0|} > 0 \rightarrow p_s = 0$

1.5. Discrete-time aperiodic signals



Le proprietà fondamentali sono mantenute: area e valor medio sono lineari. Inoltre, area e media (o energia e potenza) sono misure alternative rispettivamente per segnali limitati ed illimitati.

I segnali aperiodici a tempi discreti sono essenzialmente uguali a quelli a tempi continui, ma con qualche aggiustamento. L'estensione di un segnale discreto è, in questo caso, il più piccolo intervallo discreto $[n_s, N_s]$ al di fuori del quale il segnale vale 0. Un segnale discreto è detto causale se vale zero a tempi negativi. Per quanto riguarda le misure di area, media, estensione e potenza, queste devono essere mappate a tempo discreto e calcolate tramite sommatoria.

Area and mean value

$$A_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)$$

$$m_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^N s(n)$$

the number of samples is $1+2N$

Energy and power

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2$$

$$P_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^N |s(n)|^2$$

Discrete-time aperiodic signals

1. Calcola area, valor medio, energia e potenza dei seguenti segnali:

* Signum $s(n) = \text{sgn}(n)$

$$\uparrow s(n)$$



$$A_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \text{sgn}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} N - N = 0 \rightarrow m_S = 0$$

$$1, n \neq 0$$

$$0, n = 0$$

Per energia e potenza individuiamo $|s(n)|^2 = \begin{cases} 1, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$
quindi $E_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |s(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} 2N = \infty$

$$\text{Invece, } P_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{n=-N}^N |s(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{1+2N} = 1$$

* exponential $s(n) = a^n \mathbf{1}_0(n)$ per $|a| < 1$, $a \in \mathbb{R}$

$$A_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a^n = \frac{1}{1-a}, \text{ che è il risultato della serie geometrica.} \rightarrow m_S = 0$$

$$\text{Per energia e potenza, } |s(n)|^2 = |a|^2 \mathbf{1}_0(n) = b^n \mathbf{1}_0(n), b = |a|^2 \text{ quindi } E_S = \frac{1}{1-b} = \frac{1}{1-|a|^2} \rightarrow P_S = 0$$

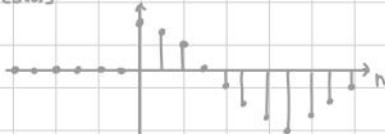
* Unit Step $s(n) = \mathbf{1}_0(n)$

$$A_S = \sum_0^{\infty} \mathbf{1}_0(n) = \infty \quad \text{e} \quad m_S = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1+2N} \sum_{-N}^N \mathbf{1}_0(n) = \frac{1+N}{1+2N} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Per energia e potenza, } |s(n)|^2 = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \mathbf{1}_0(n) \text{ quindi } P_S = \frac{1}{2} \rightarrow E_S = \infty$$

* Sampled complex exponential $s(n) = e^{j2\pi f_0 n T} \mathbf{1}_0(n)$

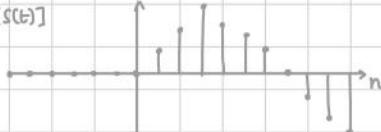
$$\mathbb{R}[s(n)]$$



Possiamo riscrivere il segnale come:

$$s(n) = b^n \mathbf{1}_0(n) \text{ con } b = e^{j2\pi f_0 T}$$

$$\mathbb{C}[s(n)]$$



$$A_S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n \mathbf{1}_0(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} b^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-b^N}{1-b} = ?$$

Il limite è indefinito, quindi l'area non è determinabile.

$$m_S = \frac{1}{1+2N} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} b^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-b^N}{(1-b)(1+2N)} = 0$$

Il denominatore rispetta la diseguaglianza triangolare $|1-b^N| < 1+b^N$ e quindi $|1-b^N| < 1+1 = 2$
dato che $|b| = |e^{j2\pi f_0 T}| = 1$; il denominatore tende, invece ad infinito.

$$\text{Per potenza ed energia, } |s(n)|^2 = |b|^2 \mathbf{1}_0(n) = 1 \cdot \mathbf{1}_0(n) = \mathbf{1}_0(n)$$

Pertanto, energia e potenza sono quelle del gradino unitario, ovvero $P_S = \frac{1}{2} \rightarrow E_S = \infty$

Es.2 Calcola la potenza dell'esponenziale complesso campionato $s(n) = e^{j4n}$

$$\text{Dato } |s(n)|^2 = 1 \rightarrow P_S = 1$$

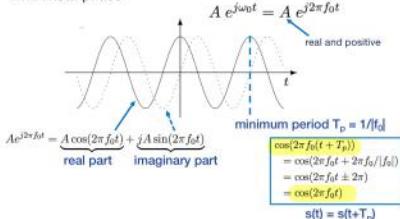
periodic signals

1.6. Continuous-time periodic signals

Nel caso di segnali periodici nel tempo, l'intervallo di tempo d'interesse è quello del periodo T_p , che identifica la frequenza con la quale il segnale si ripete. Ricordiamo l'importante equivalenza $s(t) = s(t + T_p), \forall t$.

Complex exponentials

With linear phase



Nell'esempio dell'esponenziale complesso, f_0 è una frequenza reale. Per l'equivalenza di Eulero è possibile scrivere il segnale come un coseno per la parte reale ed un seno per quella complessa.

In generale, 2π è il periodo minimo di una sinusoida.

Secondo la regola della periodicità se un segnale è periodico di periodo T_1 , per qualsiasi scelta di numero intero m , il segnale è periodico anche di mT_1 .

Se vogliamo sommare due segnali con periodicità diversa, è sufficiente trovare una periodicità comune risolvendo $mT_1 = kT_2$ per i più piccoli valori di m e k . Ovvero, scegliamo un periodo $\frac{m}{k} T_2$.

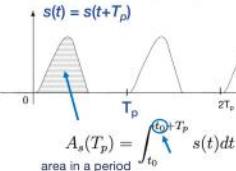
Tuttavia, la somma di segnali periodici è periodica se e solo se la relazione $\frac{T_1}{T_2}$ è razionale.

Ad esempio, $\cos(t) + \sin(\pi t)$ NON è periodico perché $\pi t/t = \pi$ che è irrazionale.

Quando si ha a che fare con sinusoidi, si ha un collegamento diretto tra periodo T_p e frequenza f_0 , equivalente a $1/T_p$ e la pulsazione, denominata ω_0 , è equivalente a $2\pi f_0$, ovvero $\omega_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_p} \rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Quindi, nel caso di sinusoidi, la relazione deve essere compresa tra periodi, frequenze o pulsazioni.

Segnali sinusoidali hanno area infinita, mentre la media consiste nell'area di un periodo T_p .



$$M_3 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT_p} \int_{-NT_p}^{NT_p} s(t) dt$$

$$\cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2NA_s(T_p)}{2NT_p} = \frac{A_s(T_p)}{T_p}$$

NB: Il valore assoluto dimezza il periodo per $|\cos(2t)|$, $T_{p1} = \pi$ per $|\cos(2t)|$, $T_{p2} = \frac{1}{2} T_{p1} = \pi/2$

Le stesse considerazioni valgono anche per energia e potenza. In generale, valore medio e potenza sono validi anche se T_p NON è il periodo minimo. Le relazioni utili per i segnali sinusoidali sono quindi:

Area (in a period) and mean value

$$A_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0 + T_p} s(t) dt$$

$$m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} s(t) dt$$

Energy (in a period) and power

$$E_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0 + T_p} |s(t)|^2 dt$$

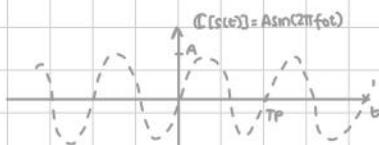
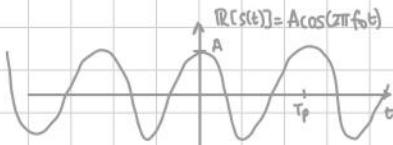
$$P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} |s(t)|^2 dt$$

Continuous-time periodic signals

Esempio 1 Calcola valore medio e potenza per i seguenti segnali:

* Esponenziale complesso $s(t) = Ae^{j\omega_0 t}$, $\omega_0 \neq 0$, $A > 0$ ($\in \mathbb{R}$)

Possiamo rappresentare il segnale nella sua componente reale e complessa.



Il periodo è $T_p = 1/f_0$ ed è comune sia alla parte reale che complessa. Quindi ottieniamo:

$$A_S(T_p) = \int_0^{T_p} Ae^{j\omega_0 t} dt = \frac{A}{j2\pi f_0} e^{j\omega_0 t} \Big|_0^{T_p} = \frac{A}{j2\pi f_0} \frac{e^{j2\pi f_0 T_p} - e^{j2\pi f_0 0}}{j2\pi f_0} = \frac{A}{j2\pi f_0} \frac{1 - 1}{j2\pi f_0} = 0$$

$$e^{j0} = e^{j2\pi} = e^{j2\pi f_0 T_p} = 1$$

Di conseguenza si ottiene $m_S = A_S(T_p) = 0$

Per il valore della potenza dobbiamo identificare il valore di $|s(t)|^2$, che in questo caso diventa:

$$|s(t)|^2 = |A|^2 \cdot |e^{j\omega_0 t}|^2 = A^2 \cdot 1^2 = A^2 \text{ e quindi:}$$

$$E_S(T_p) = \int_0^{T_p} A^2 dt = A^2 T_p \rightarrow P_S = E_S(T_p) = A^2$$

* Composizione di esponenziali complessi $s(t) = A_1 e^{j(2\pi f_1 t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(2\pi f_2 t + \varphi_2)}$ con $f_1 \neq f_2$; $f_1, f_2 \neq 0$; $A_1, A_2 > 0$

Posto $B_i = A_i e^{j\varphi_i}$ otteniamo $s(t) = B_1 e^{j2\pi f_1 t} + B_2 e^{j2\pi f_2 t}$

$s(t)$ è periodico solo se f_1 e f_2 stanno in rapporto razionale tra loro.

Tuttavia, per linearità del valore medio sappiamo che $m_S = B_1 m_1 + B_2 m_2$, dove m_1 e m_2 sono i valori medi di $s_1(t) = e^{j2\pi f_1 t}$ e $s_2(t) = e^{j2\pi f_2 t}$. Dato $f_1, f_2 \neq 0$, sappiamo che $m_1 = m_2 = 0$, quindi $m_S = 0$.

Per la potenza calcoliamo $|s(t)|^2 = (B_1 s_1(t) + B_2 s_2(t)) (B_1 s_1(t) + B_2 s_2(t))^*$ $= |B_1|^2 |s_1(t)|^2 + |B_2|^2 |s_2(t)|^2 + B_1 B_2^* s_2(t) s_1(t) + B_2 B_1^* s_1(t) s_2(t)$ ovvero $|B_1|^2 + |B_2|^2 + B_1 B_2^* e^{j2\pi(f_1-f_2)t} + B_1^* B_2 e^{-j2\pi(f_1-f_2)t}$ ($\pm (f_1 - f_2) \neq 0$)

Dato che il valore medio di una costante è la costante stessa ottieniamo:

$$P_S = |B_1|^2 + |B_2|^2 = A_1^2 + A_2^2$$

* Composizione di esponenziali complessi $s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^K A_k e^{j2\pi f_k t}$ per $f_k \neq 0$, $f_k \neq f_j$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{C}$

Procedendo alla risoluzione con linearità, possiamo stabilire che $m_S = A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \operatorname{mean}(e^{j2\pi f_k t}) = A_0$

Ricordiamo infatti che l'esponenziale complesso $e^{j2\pi f_k t}$ ha valore medio nullo per $f_k \neq 0$

Per la potenza, invece, identifichiamo $|s(t)|^2$ come:

$$|s(t)|^2 = \left(\sum_{k=0}^K A_k e^{j2\pi f_k t} \right) \left(\sum_{k=0}^K A_k^* e^{j2\pi f_k t} \right)^* = \sum_{k=0}^K A_k A_k^* e^{j2\pi(f_k - f_k)t} = \sum_{k=0}^K |A_k|^2 + \sum_{\substack{k \neq l \\ k, l \geq 0}} A_k A_l^* e^{j2\pi(f_k - f_l)t}$$

Assumendo $f_0 = 0$, otteniamo $f_k - f_0 \neq 0 \rightarrow$ il valore medio della sommatoria con il coniugato vale zero. Ci implica che $P_S = \sum_{k=0}^K |A_k|^2$

Nella composizione di sinusoidi complesse, la potenza è la somma delle potenze dei singoli componenti

Esercizio 2 Identifica periodicità, valore medio e potenza per i seguenti segnali. Ricordo: $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

* Sinusoida $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, $f_0 \neq 0$, e $A > 0$ ($\epsilon \in \mathbb{R}$)

Il periodo è $T_p = 1/f_0$, quindi otteniamo:

$$\sin(\theta_0 \pm 2\pi) = \sin(\theta_0)$$

$$A_S(T_p) = \int_0^{T_p} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt = \frac{-A}{2\pi f_0} [\sin(2\pi f_0 T_p + \varphi_0)]_0^{T_p} = \frac{-A}{2\pi f_0} [\sin(\theta_0) - \sin(\theta_0 \pm 2\pi)] = 0$$

$$Di conseguenza otteniamo m_S = \frac{A_S(T_p)}{T_p} = 0$$

$$Per la potenza, identifichiamo |s(t)|^2 ricordando \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t)$$

$$|s(t)|^2 = S(t)^2 = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 t + 2\varphi_0)$$

$$Sfruttando il risultato sopra ottenuto scriviamo E_S(T_p) = \int_0^{T_p} \frac{1}{2} A^2 dt + \int_0^{T_p} \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 t + 2\varphi_0) dt = \frac{1}{2} A^2 T_p + 0 \quad questo contributo$$

dipende dal fatto che $2f_0 = \frac{1}{T_p}$ ed il suo integrale nell'intervallo $[0, T_p]$ è zero.

$$Quindi P_S = \frac{E_S(T_p)}{T_p} = \frac{1}{2} A^2$$

Attenzione: si sarebbe potuto sfruttare il fatto che $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} + \frac{1}{2} A e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}$ e

quindi risolvere l'esercizio come l'esempio precedente

* Composizione di sinusoidi $s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$ per $f_k > 0$, $f_k \neq f_j$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{R}$

$$Utilizzando la formula di Eulero possiamo riscrivere il segnale come s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t}$$

con $f_k \neq -f_k$. Secondo la soluzione degli esercizi precedenti possiamo stabilire che $m_S = A_0$ e per la potenza:

$$P_S = A_0^2 + \sum_{k=1}^K \left| \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \right|^2 + \sum_{k=1}^K \left| \frac{1}{2} A_k e^{-j\varphi_k} \right|^2 = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A_k^2$$

* $s(t) = A \cos(2\pi t + \pi/2) + B \sin(8\pi t + \pi)$

In questo caso $w_1 = 2\pi = 2\pi f_1$ con $f_1 = 1$ e $T_1 = 1/|f_1| = 1$ e $w_2 = \pi = 2\pi f_2$ con $f_2 = 1/2$ e $T_2 = 1/|f_2| = 1/4$. A questo punto

$$risolviamo T_p = kT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{con } k=1, T_p = 1$$

$$A questo punto m_S = 0 e P_S = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2$$

* $s(t) = e^{j20\pi t}$. $w_0 = 20\pi = 2\pi f_0$ con $f_0 = 10$ e $T_p = 1/|f_0| = 1/10$. (con $f_0 \neq 0 \rightarrow m_S = 0$. Inoltre, $P_S = 1$)

* $s(t) = e^{j20t}$. $w_0 = 20 = 2\pi f_0 \rightarrow f_0 = 10/\pi \rightarrow T_p = 1/|f_0| = \pi/10$. Quindi $m_S = 0$ e $P_S = 1$

* $s(t) = e^{-j2\pi t} \cdot 1(t)$. Dato la presenza del gradino $1(t)$, in questo caso il segnale è aperiodico. Per il valore

$$medio calcoliamo m_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^{2T} e^{-j2\pi t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{e^{-j2\pi T} - 1}{-j2\pi} = 0 \rightarrow \text{dato che il denominatore } 2T \text{ diverge}$$

mentre il numeratore è limitato per la diseguaglianza triangolare $|e^{-j2\pi T} - 1| < |e^{-j2\pi T}| + 1 = 2$

$$Per la potenza, invece, identifichiamo |s(t)|^2 = |e^{-j2\pi t}|^2 \cdot 1(t)^2 = 1(t) \simeq 1(t) \rightarrow P_S = \frac{1}{2}$$

* $s(t) = (\cos(10\pi t)) + \sin(\frac{8}{3}\pi t)$. In questo caso $w_1 = 10\pi = 2\pi f_1$ con $f_1 = 5$ e $T_1 = 1/5$; $w_2 = 8/3\pi = 2\pi f_2$ con $f_2 = 4/3$ e

$$T_2 = 3/4. Risolviamo T_p = kT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{15}{4}$$

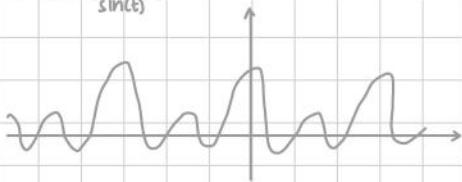
Dato $k=15 \rightarrow T_p = 3$. A questo punto $m_S = 0$, $P_S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$* s(t) = A \sin^2(10\pi t + \pi/4)$$

Possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A \cos(20\pi t + \pi/2)$. In questo modo la periodicità corrisponde a quella del coseno, dove $\omega_0 = 20\pi = 2\pi f_0$ con $f_0 = 10$ e $T_p = 1/10$. Questo è consistente con il fatto che \sin^2 è periodico di periodo π .

$$\text{A questo punto ottieniamo } m_s = \frac{1}{2}A \text{ e } P_s = (\frac{1}{2}A)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}A)^2 = \frac{3}{8}A^2$$

$$* s(t) = \frac{\sin(s_0t)}{\sin(e)}$$



$$\text{In questo caso } \omega_1 = 5 = 2\pi f_1 \text{ con } f_1 = 5/2\pi \text{ e } T_1 = 2/\pi$$

$$\text{e } \omega_2 = 1 = 2\pi f_2 \text{ con } f_2 = 1/2\pi \text{ quindi } T_2 = 2\pi$$

$$T_p = kT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{5}{2}$$

$$\text{(con } k=5 \rightarrow T_p = 2\pi)$$

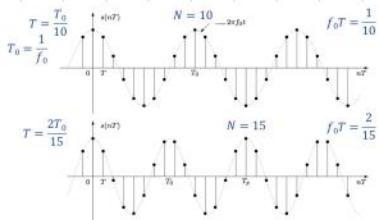
Tuttavia, dal grafico è possibile osservare che la periodicità minima è in realtà π .

Valore medio e potenza sono, in questo caso, difficili da calcolare. È impossibile risolvere l'integrale, dato che non conosciamo la primitiva.

Questo valore sarà più facilmente calcolabile con la trasformata di Fourier.

1.3. Discrete-time periodic signals

Per i segnali a tempo discreto la proprietà della periodicità è espressa da $s(n) = s(n+N)$, dove N è il periodo. Nel tempo discreto, il segnale è completamente identificato da un numero limitato di N campioni in un periodo. Se N è il periodo minimo, allora il segnale è anche periodico di $2N, 3N, 4N$.



Nel caso delle sinusoidi, il campionamento risulta essere molto delicato.

Nella raffigurazione mostra come, in base al campionamento, si ottengono comportamenti periodici diversi. In questo caso specifico, il primo campionamento corrisponde a quello a tempi continui, mentre il secondo no.

In questo caso, per identificare se la sinusode campionata è periodica o meno, il valore $f_0 T = \frac{k}{N}$ deve essere un numero razionale, che corrisponde ad una traslazione temporale multipla di 2π . Il denominatore N identifica la periodicità.

Area e valore medio hanno le stesse limitazioni che nel tempo continuo.

Area (in a period) and mean value

$$m_s = \frac{A_s(N)}{N}$$

$$A_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} s(n)$$

Energy (in a period) and power

$$P_s = \frac{E_s(N)}{N}$$

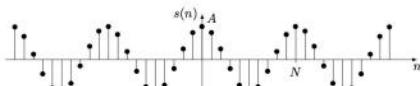
$$E_s(N) = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} |s(n)|^2$$

Discrete-time periodic signals

È importante ricordare che esponenziali complessi hanno: $m_s=0$ e $P_s=|A|^2$ e sinusoidi hanno: $m_s=0$ e $P_s=\frac{1}{2}A^2$

Esempio 1 Calcolare energia e potenza per i seguenti segnali:

- * Sinusoidi campionata $s(n) = \cos(2\pi f_0 n T)$ periodica di periodo N , con $f_0 N T$ valore razionale.



Per il valore medio identifichiamo l'area in un periodo.

Per la formula di Eulero otteniamo:

$$A_s(N) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f_0 n T) = \frac{1}{2} A \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j2\pi f_0 n T})^n + \frac{1}{2} A \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j2\pi f_0 n T})^n$$

$$\text{Ovvero } \frac{1}{2} A \frac{1-e^{j2\pi f_0 n T}}{1-e^{j2\pi f_0 T}} + \frac{1}{2} A \frac{1-e^{-j2\pi f_0 n T}}{1-e^{-j2\pi f_0 T}} = \frac{1}{2} A \frac{1-1}{1-e^{j2\pi f_0 T}} + \frac{1}{2} A \frac{1-1}{1-e^{-j2\pi f_0 T}} = 0$$

Avendo assunto $f_0 T$ numero intero, $e^{j2\pi f_0 n T} = e^{-j2\pi f_0 n T} = 1$. Quindi il valore medio $m_s = 0$.

Per la potenza consideriamo $|s(n)|^2 = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 n T)$. Il secondo contributo ha media nulla, quindi non lo consideriamo. $P_s = \frac{1}{2} A^2$, risultato che corrisponde al caso continuo.

- * esponenziale complesso campionato $s(n) = e^{j2\pi f_0 n T}$ con generico $f_0 \neq 0$

In quanto non sappiamo se questo esponenziale sia periodico o meno, ricorriamo alla regola generale delle medie.

$$m_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a^n \text{ con } a = e^{j2\pi f_0 T} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} a^N \sum_{l=0}^{N-1} a^l = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} a^N \frac{1-a^{N+1}}{1-a} = 0$$

Inoltre, dato $|s(n)|^2 = 1$, $P_s = 1$

- * composizione dell'esponenziale complesso $s(n) = a e^{j2\pi f_1 n T} + b e^{j2\pi f_2 n T}$, con $f_1 \neq f_2 + k/T$ e $f_1, f_2 \neq k/T$ (non-zero Frequency)

Il valore medio segue per linearità, ovvero $m_s = m_{s,a} \cdot a + m_{s,b} \cdot b = 0 \cdot a + 0 \cdot b = 0$

Per la potenza, $|s(n)|^2 = s(n) s^*(n) = |a|^2 + |b|^2 + ab^* e^{j2\pi(f_1-f_2)nT} + a^* b e^{-j2\pi(f_1-f_2)nT}$
con $\pm(f_1-f_2) \neq k/T$. Di conseguenza $P_s = |a|^2 + |b|^2$, equivalente al caso continuo.

Esempio 2. Identifica periodicità, valore medio e potenza di:

$$s(n) = A_0 + \sum_{k=1}^K A_k e^{j2\pi f_k n T} \text{ per } f_k \neq 0/T, f_k \neq f_j + k/T \text{ per } k \neq j \text{ e } A_k \in \mathbb{C}$$

Per la media sfruttiamo il fatto che gli esponenziali complessi hanno media nulla quindi per il segnale $m_s = A_0$.

$$\text{Per la potenza } |s(n)|^2 = \left(\sum_{k=0}^K A_k e^{j2\pi f_k n T} \right) \left(\sum_{l=0}^K A_l e^{-j2\pi f_l n T} \right)^* = \sum_{k,l=0}^K A_k A_l^* e^{j2\pi(f_k-f_l)nT}$$

$$= \sum_{k=0}^K |A_k|^2 + \sum_{\substack{k,l=0 \\ k \neq l}}^K A_k A_l^* e^{j2\pi(f_k-f_l)nT} \quad \begin{matrix} \text{tutte queste frequenze} \\ \text{hanno valore medio nullo} \end{matrix} \rightarrow P_s = \sum_{k=0}^K |A_k|^2$$

- * composizione di sinusoidi $s(n) = A_0 + \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k n T + \phi_k)$ per $f_k > 0$, $f_k \neq 0/T$, $f_k \neq f_j + k/T$ per $k \neq j$ e $A_k \in \mathbb{R}$

Come prima cosa sfruttiamo l'identità di Eulero $s(n) = A_0 + \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi f_k n T} + \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} A_k e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi f_k n T}$

Nelle sommazioni sono tutti esponenziali a fase non nulla, quindi a media nulla $\rightarrow m_s = A_0$.

$$\text{Per la potenza } P_s = A_0^2 + 2 \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} (A_k)^2 = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A_k^2$$

$$* s(n) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) \quad \omega_0 T = 2\pi f_0 T$$

$$\omega_0 T = 2\pi f_0 T = \frac{4}{3}\pi \rightarrow f_0 T = \frac{2}{3} \rightarrow N = 3, k = 2$$

$$s(n) = \frac{e^{j\frac{4}{3}\pi n} + e^{-j\frac{4}{3}\pi n}}{2} = \frac{1}{2} e^{j\frac{4}{3}\pi n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{4}{3}\pi n}$$

→ gli esponenziali hanno media nulla quindi $M_S = 0$

$$\text{Per la potenza sfruttiamo la proprietà degli esponenziali: } P_S = \left| \frac{1}{2} \right|^2 + \left| \frac{1}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$* s(n) = \cos(2\pi n/\sqrt{3})$$

$$\omega_0 T = 2\pi f_0 T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \rightarrow f_0 T = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow N = \sqrt{3} \text{ NON È razionale quindi il segnale NON È periodico.}$$

Come l'esercizio sopra $M_S = 0, P_S = \frac{1}{2}$

$$* s(n) = \cos(2n) - e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

Per il coseno $\omega_0 T = 2\pi f_0 T = 2 \rightarrow f_0 T = \frac{1}{\pi} \rightarrow$ segnale NON periodico → $M_S = 0, P_S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Potenza dell'esponenziale.

$$* s(n) = e^{j\frac{3}{2}\pi n}$$

$$\text{esprimiamo il segnale come } e^{j\frac{3}{2}\pi n} \cdot \frac{1}{2}(e^{j\frac{3}{2}\pi n} + e^{-j\frac{3}{2}\pi n}) + j\sin(\pi n) = \frac{1}{2} e^{j\frac{3}{2}\pi n} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{3}{2}\pi n} + j\sin(\pi n)$$

Il segnale È periodico di periodo $N=2$ quindi $s(n) = \frac{1}{2} e^{j\pi n} + \frac{1}{2} e^{-j\pi n} + j\sin(2\pi n)$

$$= \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1)^n + j(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n} \rightarrow M_S = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P_S = \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{2}$$

$$* s(n) = e^{jn} \sin(n)$$

$$s(n) = e^{jn} \left(\frac{1}{2j} e^{jn} - \frac{1}{2j} e^{-jn} \right) = \frac{1}{2j} e^{jn} - \frac{1}{2j} e^{j0} = \frac{1}{2j} e^{jn} - \frac{1}{2j} \quad M_S = -\frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{j} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}j \quad \text{e} \quad P_S = \left| \frac{1}{2j} \right|^2 + \left| \frac{1}{2j} \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Il secondo contributo È una costante, quindi periodico di periodo qualsiasi. Per il primo contributo

$$\omega_0 T = 2\pi f_0 T = 2 \rightarrow f_0 T = \frac{1}{\pi} \rightarrow$$
 il segnale Non È periodico

$$* s(n) = e^{j\pi n} \sin(\pi n)$$

$s(n) = \sin(\pi n)$ È periodico di periodo $N=1$

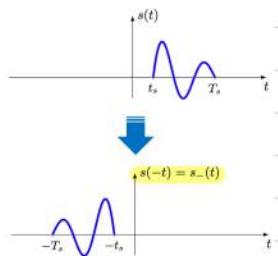
Notiamo che $\sin(\pi n) = 0$ e quindi $s(n) = 0$. Il segnale È periodico di qualsiasi periodo. $M_S = P_S = 0$.

Basic transformation and symmetries

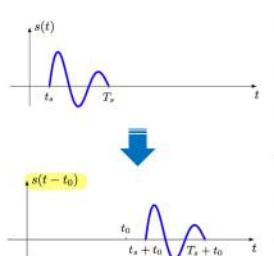
4.8. Basic transformations

Le trasformazioni non sono vere e proprie sistemi, ma aiutano a scrivere i segnali in forma compatta ed efficace.

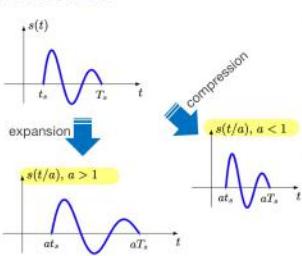
Time reversal



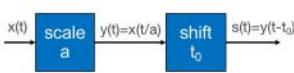
Time shift



Time scale



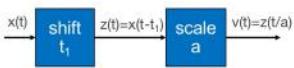
A differenza di time reversal e time shift, time scale modifica la durata del segnale. Nello specifico, la durata è moltiplicata per il fattore di scala a .



$$\text{Scale + shift}$$

$$s(t) = x\left(\frac{t - t_0}{a}\right)$$

The preferred one, where t_0 is the true shift.



$$\text{Shift + scale}$$

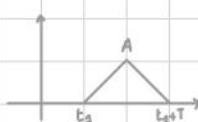
$$v(t) = x\left(\frac{t}{a} - t_1\right) = x\left(\frac{t - at_1}{a}\right)$$

They correspond when $at_1 = t_0$

Le notazioni rappresentate si riportano alle stesse trasformazioni. Tuttavia, la prima risulta più intuitiva. Pertanto, è preferibile trasformare un segnale scalandolo e solo poi traslando.

Basic transformations

Es.1. Esprimi il segnale in figura come una funzione di $\text{triang}(t)$.



È un triangolo di altezza A centrato a $t_1 = t_1 + \frac{T}{2}$ con base T

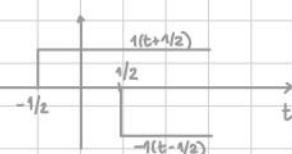
Osserva che l'estensione di $\text{triang}(t)$ è 2 ovvero $[-1, 1]$. Scaliamo il triangolo affinché

$[-a, a]$ dia $2a = T$ ovvero $a = T/2$.

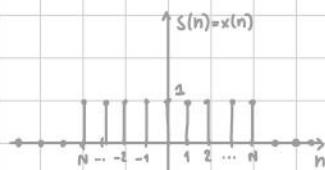
A questo punto $s(t) = A \text{triang}\left(\frac{t - t_1}{a}\right) = A \text{triang}\left(\frac{t - t_1 - T/2}{T/2}\right) = A \text{triang}\left(\frac{2(t - t_1) - 1}{T}\right)$

Es.2. Esprimi $\text{rect}(t)$ come una funzione del gradino $\text{sgn}(t)$, combinando i segnali

$$\text{rect}(t) = 1(t + 1/2) - 1(t - 1/2) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & t < -1/2 \\ 1 - 0 = 1, & -1/2 < t < 1/2 \\ 1 - 1 = 0, & t > 1/2 \end{cases}$$

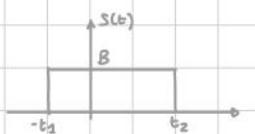


Esempio 3. Disegna il segnale discreto $s(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{1+2N}\right)$



Possiamo considerare il segnale come $s(n) = x(n)$ di $x(t) = \text{rect}(t/T)$, $T = 1+2N$ di estensione $[-T/2, T/2]$ con $T/2 = N + 1/2$. Oteniamo $s(n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esempio 4. Esprimi il segnale in funzione di $\text{rect}(t)$



Il rect è centrato in $t_0 = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ con
- altezza B
- base $T = t_2 - t_1$

Sfruttando la regola dell'estensione sappiamo che $E_S = [-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$ con $a = T$, ovvero $a = t_2 - t_1$

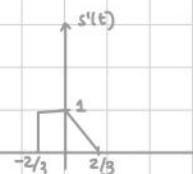
Sfruttando $s(t) = x((t-t_0)/a)$

$$s(t) = B \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = B \text{rect}\left(\frac{t + 1/2(t_2 - t_1) - 1/2at_0}{t_2 - t_1}\right)$$

Esempio 5. Disegna $s(t) = x\left(\frac{2}{3}t + 1\right)$ per $x(t)$ in Figura



$$x\left(\frac{2}{3}t + 1\right)$$



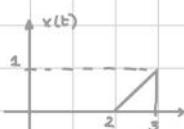
Interpretiamo come

$$s(t) = x\left(\frac{t-t_0}{a}\right) = x\left(\frac{t - (-2/3)}{2/3}\right)$$

segnale scalato di $a = 2/3$ e

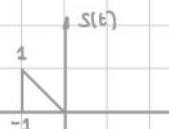
traslato di $t_0 = -2/3$

Esempio 6. Disegna $s(t) = x(-t+2)$



$$s(t) = x(-t+2) = x(-(t-2))$$

Segnale ribaltato
traslato di $t = 2$



Esempio 7. Esprimi $\text{sgn}(t)$ come una funzione di $1(t)$ sfruttando combinazioni lineari e trasformazioni.

$$\text{sgn}(t) = 1(t) - 1(-t) = \begin{cases} 0-1 = -1, & t < 0 \\ 1-0 = 1, & t > 0 \end{cases}$$

Esempio 8. Disegna $s(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ ed esprimilo come una combinazione lineare di $1(t)$ e $\text{ramp}(t) = t \cdot 1(t)$.



$$s(t) = \text{ramp}(t-1) - 2 \cdot 1(t-3) - \text{ramp}(t-3)$$

Es.9. Considera il segnale $s(t) = x(-2t+1)$ con $x(t)$ di periodo $T_x = 2$. $s(t)$ è periodico? Se sì, di che periodo?

Osserviamo che $s(t) = x(-(2t-1)) = x_{-}(2t-1) = x_{-}\left(\frac{t-1/2}{1/2}\right)$. Il segnale è $x(-t)$:

- traslato di $t_0 = 1/2$;
- scalato di $a = 1/2$.

Se un segnale è periodico di periodo T_p lo è anche la sua controparte ribaltata (per simmetria) e quindi anche la sua controparte traslata

Osserviamo:

$$x_{-}(t+T_p) = x_{-}(-t-T_p) = x_{-}(-t) = x_{-}(t)$$

$$x_{t_0}(t+T_p) = x_{-}(-t-t_0+T_p) = x_{-}(t-t_0) = x_{t_0}(t)$$

Posto $x_{t_0} = x(t-t_0)$.

L'unica trasformazione che cambia la periodicità è scalare per un fattore a . Quindi $T_s = a T_x = 1$.

Es.10. Considera $s(t) = x(t/a)$. Versione scalata di $x(t)$. Che connessione c'è tra Area, media, energia e potenza?

$$A_{s(t)} = a A_{x(t)} \rightarrow E_{s(t)} = a E_{x(t)}$$

$$M_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t/a) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{2T} \int_{-T/a}^{T/a} x(u) du = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T/a} \int_{-T/a}^{T/a} x(u) du = M_x \quad T/a = T'$$

quindi $M_s = M_x$ e, analogamente $P_s = P_x$

Es.11. Considera $s(n) = x(n-n_0)$ versione traslata di $x(n)$. Qual è la connessione tra area, valor medio, energia e potenza?

$$A_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-n_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = A_x \text{ ed } E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n-n_0)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)|^2 = E_x$$

Per valor medio e potenza:

$$M_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+2n_0} \sum_{n=-N}^{N+2n_0} x(n-n_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+2n_0} \sum_{m=-N-n_0}^{N+n_0} x(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+2n_0} \left(\sum_{m=-N}^{-N-1} x(m) + \sum_{m=-N-n_0}^{-N-1} x(m) - \sum_{m=N-n_0+1}^{N+1} x(m) \right) = m_x \rightarrow P_s = P_x$$

La seconda e la terza sommatoria sono somme di n_0 valori, divisi per $N+2n_0$ con $N \rightarrow \infty$, quindi il loro contributo vale zero.

Es.12. Disegna il segnale discreto $s(n) = \text{rect}\left(\frac{n-1/2}{2N}\right)$ e calcola area, valor medio, energia e potenza.

Il segnale può essere interpretato come una versione campionata $s(n) = x(n)$ di $x(t) = -\text{rect}(t-1/2)u(t)$, $T=2N$ che è un rect di estensione $[-N, N]$ traslato di $1/2$, e quindi l'estensione è $[-N+1/2, N+1/2]$.

Graficamente

$$s(n) = x(n)$$

$$\text{Ottieniamo } s(n) = \begin{cases} -1, & -N < n \leq N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Il segnale ha $2N$ valori attivi associati al valore -1 . Quindi:

$$A_s = -2N, E_s = 2N, M_s = P_s = 0$$

4.9. Symmetries in signals

La simmetria fa riferimento al fatto che un segnale abbia una forma simmetrica. Un segnale è detto a:

- **simmetrico pari** se è invariante al time reversal, $s(t) = s(-t)$ o $s(n) = s(-n)$. Triang, rect, sinc e cos sono esempi;
- **simmetrico dispari** se è invariante al time reversal + additive inversion, $s(t) = -s(-t)$ o $s(n) = -s(-n)$. Sin e sgn sono segnali dispari. È interessante notare che i segnali a simmetria dispari hanno valore 0 per $t=0$, dato che $s(0) = -s(0)$. Inoltre, hanno $A_s = 0$ e $m_s = 0$.

Ogni segnale può essere ricostruito come la somma di una componente pari e di una componente dispari.

$$s(t) = s_e(t) + s_o(t) \quad [e = \text{even (pari)} \quad o = \text{odd (dispari)}] \quad \text{con} \quad s_e(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t) = s_e(-t) \quad \text{e} \quad s_o(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s(-t) = -s_o(-t)$$

Ad esempio, $\alpha(t)$ può essere espresso come $\alpha(t) = 1/2 (\text{even part}) + 1/2 \text{sgn}(t) (\text{odd part})$.

Real/imaginary

$$\begin{aligned} \text{real } s(t) &= s^*(t) \\ \text{imaginary } s(t) &= -s^*(-t) \end{aligned}$$

components

$$\begin{aligned} s_{re}(t) &= \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s^*(-t) \\ s_{im}(t) &= \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s^*(-t) \end{aligned}$$

Hermitian/anti-Hermitian

$$\begin{aligned} \text{Hermitian } s(t) &= s^*(-t) \\ \text{anti-Hermitian } s(t) &= -s^*(-t) \end{aligned}$$

components

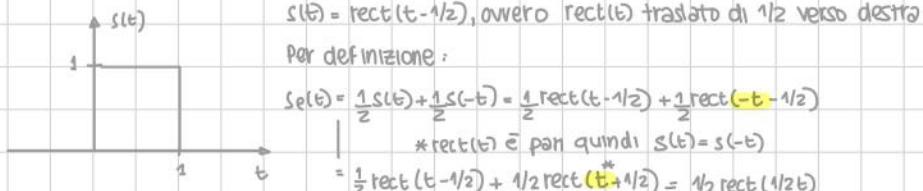
$$\begin{aligned} s_h(t) &= \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s^*(-t) \\ s_a(t) &= \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s^*(-t) \end{aligned}$$

→ un segnale Hermitiano ha parte reale pari e componente immaginaria dispari.
ovvero $a(t) + jb(t) = a(-t) - jb(-t)$
per un segnale anti-Hermitiano vale il contrario.

Un segnale pari ed Hermitiano è necessariamente reale.

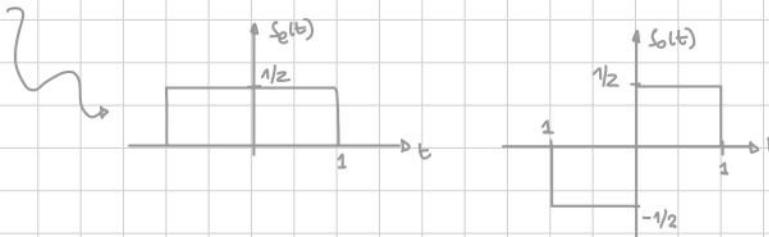
Symmetries in signals

Esempio 1 Identifica e disegna la parte pari e dispari del segnale in figura.



Per la parte dispari:

$$s_o(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s(-t) = \frac{1}{2}\text{rect}(t - 1/2) - \frac{1}{2}\text{rect}(t + 1/2) = \frac{1}{2}\text{rect}(1/2t)\text{sgn}(t)$$



Esempio 2 Identifica la parte pari e dispari di $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Secondo la regola standard delle sinusoidi

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(\varphi_0) \quad \left. \begin{array}{l} s(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(\varphi_0) - \sin(2\pi f_0 t) \sin(\varphi_0) \\ S_{\text{par}}(t) = -\sin(\varphi_0) \sin(2\pi f_0 t) \end{array} \right\}$$

Esempio 3 Identifica parte pari e dispari di $s(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

Utilizzando l'identità di Euleo esplicitiamo la formula come $s(t) = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)$

$$\text{ovvero } s_{\text{re}}(t) = S_{\text{re}}(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

$$S_{\text{im}}(t) = S_{\text{im}}(t) = j \sin(2\pi f_0 t)$$

per un numero complesso, la componente reale è pari mentre quella immaginaria è dispari

Esempio 4 Prora che ogni segnale pari ed Hermitiano è necessariamente reale

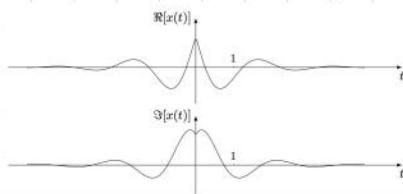
Un segnale pari ed Hermitiano soddisfa $s(t) = s(-t)$ e $s(t) = s^*(t)$. Sfruttando la prima uguaglianza otteniamo che $s(t) = [s(-t)]^* = [s(t)]^* = s^*(t)$ il che dimostra l'assunzione.

Dato che un segnale Hermitiano ha sia parte reale che dispari, in quanto il segnale è pari, la sua parte dispari è nulla.

Questa proprietà è valida sia in tempo continuo che discreto

Esempio 5 Identifica il grafico della parte reale ed immaginaria di $s(t) = (1+j)e^{-|t|+j\pi t+1}$. Il segnale è reale e/o Hermitiano?

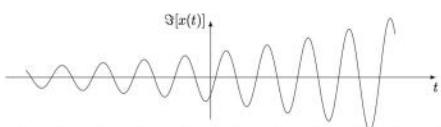
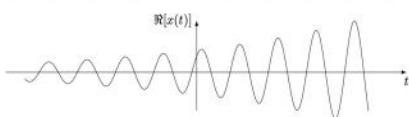
$$s(t) = \sqrt{2} e^{j\pi t/4} e^{j\pi|t|} e^{-|t|} = \sqrt{2} e^{-|t|} \cos(\pi|t| + \frac{\pi}{4}) + j \sqrt{2} e^{-|t|} \sin(\pi|t| + \frac{\pi}{4})$$



Come si può osservare dal grafico, data la presenza di $|t|$, il segnale è pari. In quanto sia parte reale che immaginaria sono attive e pari, il segnale non è Hermitiano

Esempio 6 Identifica e rappresenta le parti reali ed immaginarie di $s(t) = (1-j)e^{(0+j\omega)t}$

$$1-j = e^{-j\pi/4} \quad \text{quindi} \quad s(t) = \sqrt{2} e^{-j\pi/4} e^{j\omega t} e = \sqrt{2} e^{j\omega t} \cos(\omega t - \pi/4) + j \sqrt{2} e^{j\omega t} \sin(\omega t - \pi/4) \quad \text{evidenzia la presenza di parte reale e immaginaria. Per } \omega > 0 \text{ otteniamo}$$



Esempio 7 Identifica parte pari e dispari di $s(n) = 1_o(n)$

$$\text{Data } 1_o(-n) = \begin{cases} 1, & n \leq 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$S_{\text{re}}(n) = 1/2 1_o(n) + 1/2 1_o(-n) = \begin{cases} 1/2, & n > 0 \\ 1, & n=0 \\ 1/2, & n < 0 \end{cases}$$

$$S_{\text{im}}(n) = 1/2 1_o(n) - 1/2 1_o(-n) = \begin{cases} 1/2, & n > 0 \\ 0, & n=0 \\ -1/2, & n < 0 \end{cases} = 1/2 \text{sgn}(n)$$

Es.8 Qual è la simmetria del prodotto tra:

* due segnali pari?

Per $a(t) = a(-t)$ e $b(t) = b(-t)$ il prodotto $s(t) = a(t)b(t)$ soddisfa $s(-t) = a(-t)b(-t) = a(t)b(t) = s(t)$ \rightarrow prodotto pari

* due segnali dispari?

Per $a(t) = -a(-t)$ e $b(t) = -b(-t)$, $s(-t) = a(-t)b(-t) = [-a(t)][-b(t)] = a(t)b(t) = s(t)$ \rightarrow prodotto pari

* un segnale pari ed uno dispari?

Per $a(t) = a(-t)$ e $b(t) = -b(-t)$, $s(-t) = a(-t)b(-t) = a(-t)[-b(t)] = -a(t)b(t) = -s(t)$ \rightarrow prodotto dispari

Es.9 Quali sono le simmetrie dei seguenti segnali:

* $s(n) = n^2 + jn$

$\text{Re}[s(n)] = n^2$ (pari) e $\text{Im}[s(n)] = n$ dispari \rightarrow il segnale è Hermitiano.

* $s(n) = je^{jn}$

$j(\cos(n) - \sin(n)) \rightarrow \text{Re}[s(n)] = -\sin(n)$ \rightarrow dispari e $\text{Im}[s(n)] = \cos(n) \rightarrow$ pari \rightarrow il segnale è anti-Hermitiano

* $s(n) = e^{jn} \cos(n)$

$(\cos(n) + j\sin(n))(\cos(n)) = \cos^2(n) + j\cos(n)\sin(n)$. $\text{Re}[s(n)] = \cos^2(n) \rightarrow$ pari, $\text{Im}[s(n)] = \cos(n)\sin(n) \rightarrow$ dispari \rightarrow Hermitiano

* $s(t) = e^{jt} \sin(t)$

$(\cos(t) + j\sin(t))(\sin(t)) = \overbrace{\sin(t)}^{\text{Re}[s(t)]} \overbrace{\cos(t)}^{\text{Im}[s(t)]} + j\sin^2(t) \rightarrow \text{Re}[s(t)] = \text{dispari}, \text{Im}[s(t)] = \text{pari} \rightarrow$ segnale anti-Hermitiano

Es.10 Identifica un segnale che è reale, dispari e Hermitiano

Un segnale Hermitiano ha parte reale pari e parte immaginaria dispari. Nessun segnale al di fuori di $s(t) = 0$ può essere pari, dispari ed Hermitiano. $s(t) = 0$ soddisfa qualsiasi simmetria

Basic repetition and ideal impulses

1.10. Periodic repetition

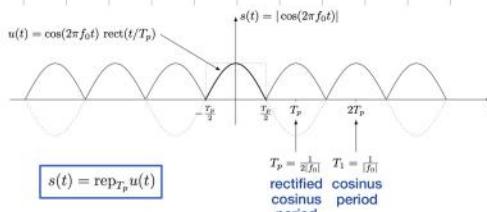
In tempo continuo, possiamo costruire un segnale continuo ripetendo un segnale "base" $u(t)$ a distanze uguali di periodo T_p . In pratica, aggiungiamo al segnale continuo la sua versione shiftata di kT_p , $k \in (-\infty, +\infty)$.

Definiamo la ripetizione periodica come $s(t) = \text{rep}_{T_p} u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t - kT_p)$

Possiamo provare che il segnale è periodico valutando $s(t+T_p)$

In generale, la ripetizione periodica è utile per esprimere un segnale in forma compatta. Ad esempio, un'onda quadra è la ripetizione periodica di un rettangolo. Definiamo duty cycle la frazione del periodo T_p nel quale il segnale è attivo.

La ripetizione è utile anche per semplificare dei segnali affinché possano essere analizzati dagli strumenti di segnali e sistemi.



La sinusode rettificata $s(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$ può essere espressa come la ripetizione periodica di un arco di seno $u(t) = \cos(2\pi f_0 t) \operatorname{rect}(t/T_p)$. La moltiplicazione per il $\operatorname{rect}(t)$ rende il segnale attivo solo lungo l'origine.

In alcuni casi le ripetizioni periodiche si sovrappongono. Questo fenomeno è detto aliasing.

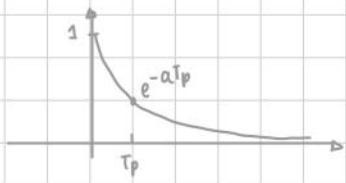
In fine, la ripetizione periodica ha alcune proprietà:

- * linearità $\text{rep}_{T_p} [a(t) + b(t)] = \text{rep}_{T_p} a(t) + \text{rep}_{T_p} b(t)$;
- * time-reversal $\text{rep}_{T_p} u(-t) = s(-t) \rightarrow s(t) = \text{rep}_{T_p} u(t)$;
- * time-shift $\text{rep}_{T_p} u(t-t_0) = s(t-t_0)$;
- * time-scale $\text{rep}_{T_p} u(t/a) = s(t/a)$.

Nel caso discreto il concetto di ripetizione periodica è equivalente. In questo caso però il periodo N è un numero intero.

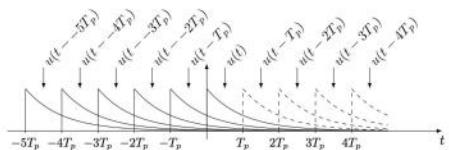
Periodic repetition

Esempio 1. Calcola la ripetizione periodica di periodo T_p per $u(t) = e^{-at}$ con $a > 0$



Rappresentando il segnale $u(t)$ si osserva che la sua estensione è infinita, pertanto ci sarà della sovrapposizione.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(t - nT_p)$$

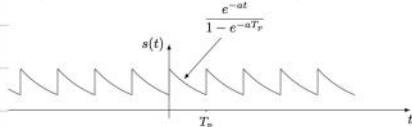


In questo caso è necessario identificare un periodo specifico. In questo caso consideriamo $(0, T_p)$.

Dato la presenza di $1(t)$ possiamo osservare che sono le ripetizioni $u(t - nT_p)$ con $n \leq 0$, contribuiscono al segnale $s(t)$ (linee piene nel disegno). Per $n > 0$, invece, valgono tutti i contributi rappresentati con linee tratteggiate. Nello specifico otteniamo: $s(t) = \sum_{n=-\infty}^0 u(t - nT_p) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-at} (t - nT_p)^m$, $t \in (0, T_p)$. Questo identifica una serie geometrica facilmente calcolabile.

$$\text{Quindi, } s(t) = e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} e^{natT_p} = e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-matT_p} = e^{-at} \sum_{m=0}^{\infty} (e^{-aT_p})^m = \frac{e^{-at}}{1 - e^{-aT_p}}, t \in (0, T_p)$$

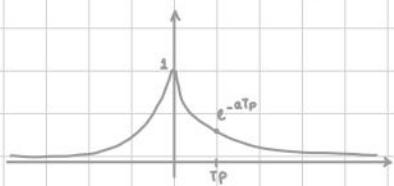
Osserviamo anche che $e^{-aT_p} < 1$ e



$$s(t) = \begin{cases} u(t) = Be^{-at}, & t \in (0, T_p) \\ u(t-T_p) = Be^{-a(t-T_p)}, & t \in (T_p, 2T_p) \\ u(t+T_p) = Be^{-a(t+T_p)}, & t \in (-T_p, 0) \\ \vdots \end{cases}, B = \frac{1}{1 - e^{-aT_p}}$$

In generale otteniamo $s(t) = u(t - nT_p) = Be^{-a(t-nT_p)}$, $t \in (nT_p, (n+1)T_p)$

Esercizio 2. Valuta la ripetizione periodica di periodo T_p per $u(t) = e^{-|at|}$ con $a > 0$



(come prima cosa osserviamo che $u(t) = e^{-|at|} = \begin{cases} e^{at}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$)

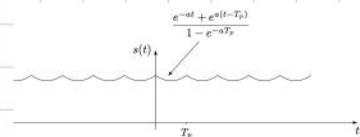
Il segnale può essere scritto come:

$$u(t) = u_+(t) + u_-(t) \quad \text{con } u_+(t) = e^{-at} \quad u_-(t) = e^{at}$$

Secondo le proprietà di linearità e time-reversal otteniamo

$$s(t) = \text{rep}_{T_p} u(t) = s_1(t) + s_1(-t) \quad (\text{con } s_1(t) = \text{rep}_{T_p} u_+(t))$$

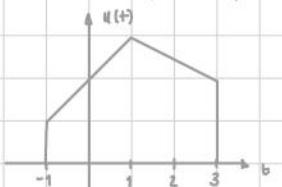
Dall'esercizio precedente sappiamo che $s_1(t) = Be^{-at}$ con $B = \frac{1}{1 - e^{-aT_p}}$, $t \in (0, T_p)$



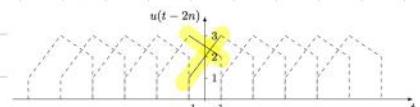
Per $-t$, $s(-t) = Be^{at}$, $t \in (-T_p, 0)$ $\rightarrow s_1(-t) = Be^{-a(t-T_p)}$, $t \in (0, T_p)$

e quindi $s(t) = B(e^{-at} + Be^{a(t-T_p)})$, $t \in (0, T_p)$

Esercizio 3. Individua la ripetizione periodica di periodo $T_p=2$ per il segnale



Le controparti shiftate di $u(t-2n)$ hanno la forma:

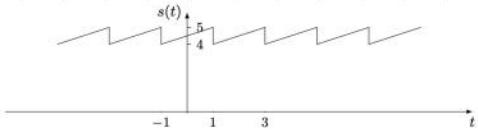


$$u(t) = \begin{cases} 2+t, & t \in (-1, 1) \\ 2/2 - 1/2t, & t \in (1, 3) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

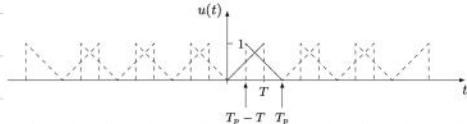
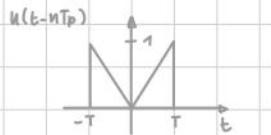
I due contributi evidenziati sono quelli attivi in un periodo $(-1, 1)$

$$\text{Per traslazione: } s(t) = u(t) + u(t+2) =$$

$$= 2+t + 2+t+2 = \begin{cases} 4+1/2(t+1) & t \in (-1, 1) \end{cases}$$



ES.4 Calcola la rappresentazione periodica di periodo T_p di $u(t) = \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$ considerando $T_p \in (T, 2T)$

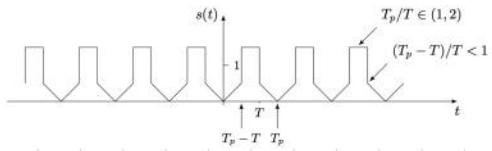


$$u(t) = \begin{cases} \frac{t/T}{2}, & t \in (0, T) \\ -\frac{t/T}{2}, & t \in (-T, 0) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$u(t - T_p) = \begin{cases} (t - T_p)/T, & t \in (T_p, T_p + T) \\ -(t - T_p)/T, & t \in (T_p - T, T_p) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dato che $T_p - T < t < T_p$ nel periodo $(0, T_p)$ otteniamo:

$$s(t) = u(t) + u(t - T_p) = \begin{cases} t/T + 0, & t \in (0, T_p - T) \\ t/T - (t - T_p)/T = T_p/T, & t \in (T_p - T, T) \\ -(t - T_p)/T, & t \in (T, T_p) \end{cases}$$



1.11. Ideal impulses (delta function)

A tempo discreto l'impulso ideale coincide con il delta di Kronecker, ovvero

un segnale con un singolo valore attivo, ovvero per $t=0$, $\delta(0)=1$

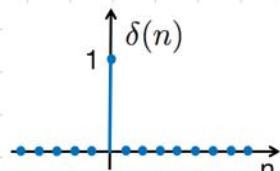
Per questo segnale vale:

* estensione nulla: $e(\delta)=\{0\}$

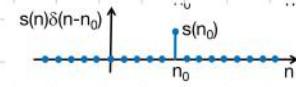
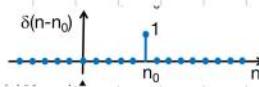
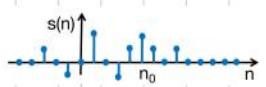
* $A_{\delta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) = 1$

* simmetria pari: $\delta(n)=\delta(-n)$

* connessione con $\delta_0(n) = \sum_{m=-\infty}^n \delta(m)$

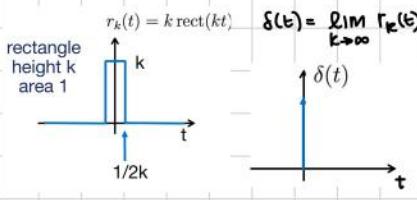


Una delle proprietà più importanti del δ è quella di rivelare specifici valori. Questa proprietà è detta proprietà rivelatrice del delta. In particolare, $s(n)\delta(n-n_0) = s(n_0)\delta(n-n_0)$. Il δ rivelà il valore del segnale laddove è centrato.



Nella somma, il δ rivelà il valore del segnale dove è centrato, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\delta(n-n_0) = s(n_0)$

Nel tempo continuo si parla di delta di Dirac. Questo δ è considerato come il limite ad infinito di un rettangolo di base sempre più piccola ed altezza sempre più grande.



* estensione $e(\delta)=\{0\}$

* $A_{\delta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_k(t) dt = 1$

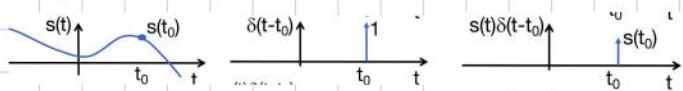
* $\delta(t) = \delta(-t)$

* $\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta(u) du = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t r_k(u) du \rightarrow \delta(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

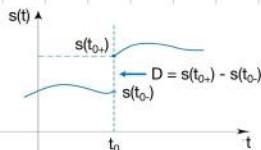
Anche per il caso continuo il δ ha alcune proprietà rivelatrici:

Nell'integrale il δ rivelà il valore del segnale laddove è centrato $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0) dt = s(t_0)$.

Inoltre, $s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$



Ricordando che $\delta(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$, definiamo il concetto di derivate generalizzata utile per calcolare i valori di un segnale nei punti di discontinuità.



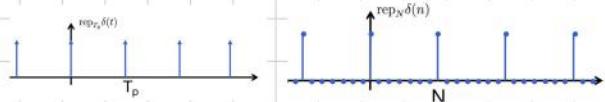
Considerato D come il limite destro meno quello sinistro, ovvero $D > 0$ se

$s(t)$ cresce e $D < 0$ se $s(t)$ decresce; possiamo considerare la discontinuità come la presenza di $\delta(t)$ di altezza D ovvero, la derivate sarà

$$s'(t) = [s(t_0^+) - s(t_0^-)] \delta(t-t_0) \quad (\text{con } D = s(t_0^+) - s(t_0^-))$$

Per i segnali periodici in tempo continuo e

discreto otteniamo i cosiddetti **segnali comb**
 $\text{rep}_{T_p}(\delta(t))$ e $\text{rep}_N(\delta(n))$



Ideal impulses

Esempio 1 Applica la proprietà rivelazione alle seguenti espressioni:

$$* S_1(t) = \cos(\omega t)\delta(t) + \sin(\omega t)\delta(t-\pi) = \cos(\omega t)\delta(t) + \sin(\omega t)\delta(t-\pi) = 1\delta(t) + 0\delta(t-\pi) = \delta(t)$$

$$* a_1 = \int_0^{40} \delta(t+3) - \delta(t-3) + 2\delta(t-10) dt = \int_0^{40} \delta(t+3) - 2\delta(t-10) dt = -1+2=1 \rightarrow \text{n.b. } \delta(t+3) \in [0, 40]$$

$$* S_2(n) = \sin(n\pi)\delta(n+1) + e^{-n}\delta(n-3) = \sin(0)\delta(n+1) + e^{-3}\delta(n-3) = e^{-3}\delta(n-3)$$

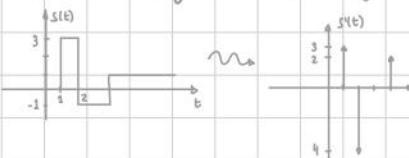
$$* a_2 = \sum_{n=-5}^5 \delta(n+3) - \delta(n-3) + 2\delta(n-10) = \sum_{n=-5}^5 \delta(n+3) - \delta(n-3) = 1-1=0 \rightarrow \text{n.b. } \delta(n-10) \text{ è centrato in 10, } \delta(-5, 5)$$

Esempio 2 Valuta la derivata generalizzata di

$$* \frac{d(\text{rect}(t))}{dt} = \delta(t+1/2) - \delta(t-1/2)$$



* Valuta la derivata generalizzata per il segnale in figura



$$s'(t) = 3\delta(t-1) - 4\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$

Il segnale è costante a tratti, pertanto la sua derivata vale zero, tranne che nei punti di discontinuità.

* Calcola la derivata generalizzata per $s(t) = \cos(\omega t)\text{rect}(t)$

$$s'(t) = (\cos(\omega t)\text{rect}(t) + \cos(\omega t)\text{rect}'(t)) = -\sin(\omega t)\text{rect}(t) + \cos(\omega t)\delta(t) = -\sin(\omega t)\text{rect}(t) + \cos(\omega t)\delta(t) = -\sin(\omega t)\text{rect}(t) + \delta(t)$$

Esempio 3 Calcola la derivata generalizzata dei seguenti segnali:

$$* s(t) = \text{sgn}(t)e^{(2+j)t}$$

$$s'(t) = \text{sgn}(t)e^{(2+j)t} + \text{sgn}(t)(2+j)e^{(2+j)t} = 2e^{(2+j)t}\delta(t) + (2+j)\text{sgn}(t)e^{(2+j)t} = 2s(t) + (2+j)s(t)e^{(2+j)t}$$

$$* s(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t) - 1(t) + t^2\delta(t)$$

$$s'(t) = \frac{1}{2}2\delta(t) - \delta(t) + 2t\text{rect}(t) + 0\cdot\delta(t) = \delta(t) - \delta(t) + 2t\cdot\text{rect}(t) = 2t\cdot\text{rect}(t)$$

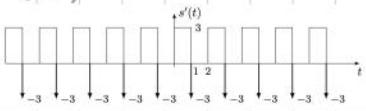
$$* s(t) \text{ periodico di periodo } T_p = 2, \quad s(t) = \begin{cases} 3t & t \in (0, 1) \\ 0 & t \in (1, 2) \end{cases}$$

Possiamo esprimere $s(t)$ come $s(t) = \text{rep}_{T_p}u(t)$ (con $u(t) = 3t\text{rect}(\frac{t}{2})$)

A questo punto:

$$s'(t) = 3\text{rect}(t-1/2) + 3t\delta(t-1/2+1/2) - 3t\delta(t-1/2-1/2) =$$

$$\stackrel{!}{=} 3\text{rect}(t-1/2) + 3t\delta(t) - 3t\delta(t-1) = 3\text{rect}(t-1/2) - 3\delta(t-1)$$



SYSTEMS IN THE TIME - DOMAIN

Systems properties

2.1. Systems properties (part 1)

Un sistema è una trasformazione di un segnale in base ad una regola matematica. Il sistema signa mappa un output a partire da un input. Un sistema può essere continuo, discreto, oppure ibrido.

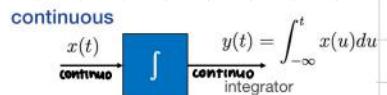
Alcuni sistemi sono dotati dell'interessante proprietà dell'invertibilità.

Questa proprietà sussiste se esiste un sistema inverso Z^{-1} tale per cui è possibile ottenere l'input originario a partire dall'output.

Ad esempio, sono sistemi invertibili la somma corrente $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ e

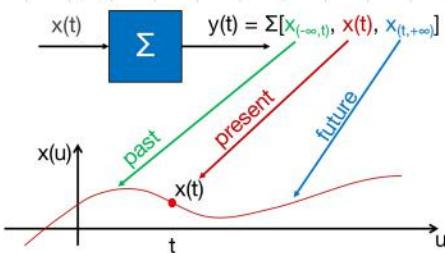
l'incrementale $x(n) = y(n) - y(n-1)$, mentre è un segnale NON invertibile il valore assoluto $y(t) = |x(t)|$, a meno che x sia a segnali reali e positivi. L'invertibilità dipende anche dalla scelta dei segnali in input.

Un sistema è detto sistema reale se $\forall \text{input } u \in \mathbb{R}$ anche ogni output $y \in \mathbb{R}$.



Ad esempio, se si prende il valore assoluto di un numero complesso, si perde l'informazione sulla fase del segnale.
In generale l'invertibilità riguarda la classe dei segnali in ingresso

Ulteriori proprietà dei sistemi possono essere individuate a partire dalla memoria.



Un sistema è detto:

- * **sistema statico o istantaneo** se utilizza solo il presente ovvero $y(t) = [x(t)]$. Ad esempio, $y(t) = |x(t)|$ → detto anche "sistema senza memoria"
- * **sistema dinamico** se utilizzano anche informazioni del passato e/o presente.

I sistemi dinamici si distinguono in:

- * **sistemi causali** se usa passato e presente. $y(t) = \sum_{-\infty}^t [x(-\infty, t), x(t)]$. Ad esempio, somma corrente $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$, incrementale, $x(n) = y(n) - y(n-1)$ e integratore $y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$
- * **sistemi anti-causali** se usa presente e futuro. $y(t) = \sum [x(t), x(t, +\infty)]$
- * **sistemi a memoria finita** se i valori del segnale sono limitati ad una certa finestra di valori. $y(t) = \sum [x[t_1, t_2]]$. Ad esempio, la media corrente $y(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(u) du$

i sistemi della fisica sono tutti causali, quelli anticausali riguardano applicazioni per lo più matematiche

Un concetto chiave dei sistemi è la BIBO stabilità (Bounded input-Bounded output). Un sistema è detto BIBO stabile se per ogni input, $|x(t)| < L_x$ anche l'output è limitato, $|y(t)| < L_y$. Equivalentemente, $|x(n)| < L_x \rightarrow |y(n)| < L_y$

Per provare che un sistema NON è bibostabile è sufficiente dimostrare un controesempio, ovvero identificare un input limitato che fornisce un output non limitato. Ad esempio, l'integrazione non è bibostabile $\int_{-\infty}^t 1(u) du = t \cdot 1(t) \neq \text{BIBO stabile}$

Per provare, invece, che un sistema è bibostabile, il trucco consiste nell'impostare un limite al valore assoluto dell'output y sfruttando la diseguaglianza triangolare.

Systems properties (part. 1)

Esempio 1 Definire se i sistemi che seguono sono reali, BIBO stabili e la loro memoria:

$$* y(n) = \sum_{k=-5}^{10} e^{ikn} |x(n-k)|^2$$

Il sistema è REALE in quanto indipendentemente dal valore $x(n)$, l'output è una combinazione lineare di valori reali e positivi dato il valore assoluto.

Il sistema ha MEMORIA-FINTA, in quanto l'output al tempo n deriva da input appartenenti al range $[n-5, n+5]$

Il sistema è BIBO stabile per $|x(n)| < L_x \rightarrow |y(n)| = \left| \sum_{k=-5}^{10} e^{ikn} |x(n-k)|^2 \right| = \sum_{k=-5}^{10} e^{ikn} |x(n-k)|^2 \leq \sum_{k=-5}^{10} e^{ikn} L_x = L_y < \infty$

$$* y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-t}^{t-2} x(u) du & , t > 2 \end{cases}$$

Il sistema è REALE in quanto coinvolge moltiplicazioni di segnali reali.

Il sistema è CAUSALE in quanto per $t > 2$ l'output considera input nel range $[t-1, t-2]$.

Il sistema NON è BIBO stabile. Infatti, scegliendo $x(t) = 1(t)$ otteniamo $y(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-t}^{t-2} 1(u) du = (t-2) \cos(t+2) & , t > 2 \end{cases}$

Il segnale in output diventa sempre più grande.

$$* y(n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(1/x(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases}$$

Il sistema è statico della forma $y(n) = f(x(n))$ con $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ ed è un sistema REALE per costruzione.

Il sistema è BIBO stabile dato che $|y(n)| = |\operatorname{sgn}(x(n))| \leq 1$ per le proprietà specifiche di $\operatorname{sgn}(n)$.

$$* y(n) = \min(|x(n)|, 1)$$

Il sistema è REALE data la presenza del valore assoluto.

Il sistema è STATICO. La sua funzione, tuttavia, è aggiornata ad ogni step n , ovvero $y(n) = f_n(x(n))$.

Il sistema è BIBO STABILE dato $|x(n)| < L_x \rightarrow |y(n)| = \min(|x(n)|, 1) < \min(L_x, 1) \leq L_x$

Esempio 2. Stabilisci se i seguenti segnali sono reali. Definisci la memoria e la BIBO stabilità:

$$* y(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u|x(u) du$$

Sistema reale a memoria finita $[t-1, t+1]$. Per la BIBO stabilità consideriamo $|x(n)| < L_x$

Ovvero: $|y(n)| = \left| \int_{t-1}^{t+1} |t-u|x(u) du \right| \leq \int_{t-1}^{t+1} |t-u| L_x du = \int_{t-1}^{t+1} |t-u| L_x du = L_x \int_{-1}^1 |u| du = L_x < \infty \rightarrow$ è BIBO stabile

$$* y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-k)$$

Sistema reale. Il sistema è causale in quanto per l'output vengono utilizzati gli input $(-\infty, n-1]$. Infine, il sistema NON è BIBO stabile perché, ponendo $x(n) = 4$, otteniamo $y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \infty$, la serie non converge

$$* y(t) = \int_{t-4}^t e^{t-u} x(u) du$$

Il sistema è reale e a memoria finita $[t-4, t]$. Dato $y(t) = \int_{t-4}^t e^{t-u} du = e^t \int_{t-4}^t e^u du = e^t (e^u - e^{t-4})$ per $t \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow \infty$

$$* y(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)$$

Il sistema è reale e a memoria finita $[n-10, n+10]$. È BIBO stabile perché la serie converge

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k) \right| \leq \sum_{k=n-10}^{n+10} |x(k)| < \sum_{k=n-10}^{n+10} L_x = 21L_x < \infty$$

$$* y(t) = x(t-2)$$

Il sistema è reale e causale e dato che raccoglie gli input nel range $[t-2]$ è anche a memoria finita. Il sistema è BIBO stabile. Assumendo $|x(n)| < L_x$ otteniamo $|y(t)| = |x(t-2)| < L_x$

$$* y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k x(k)$$

Il sistema è reale e causale. Posto $x(k) = 1$ otteniamo $\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k$ e posto $m = n-1-k \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} 3^{n-m-1} = 3 \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} \cdot 3^n$ quindi il sistema è BIBO stabile.

$$* y(t) = \cos(t-2)x(t)$$

Il sistema è reale e istantaneo, in quanto l'output al tempo t raccoglie input dal range $[t]$. Il sistema è BIBO stabile in quanto $|x(n)| < L_x$ per il quale otteniamo $|y(t)| = |\cos(t-2)| \cdot |x(t)| < 1 \cdot L_x$

$$* y(t) = x(t+5)x(t-2)$$

Il sistema è reale e a memoria finita $[t-2, t+5]$. Il sistema è BIBO stabile. Assumendo $|x(n)| < L_x$ otteniamo $|y(t)| = |x(t+5)| \cdot |x(t-2)| < L_x^2 < \infty$

$$* y(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|^3 x(u) du$$

Il sistema è reale e dinamico $[-\infty, 2t]$. Il sistema non è BIBO stabile. Per $x(n) = 1(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 1(u) du = 1(t) \int_0^{2t} (t-u)^2 du$
ovvero $1(t) \int_{-t}^t u^2 du = 1(t) \frac{2}{3} t^3$

Il valore assoluto dell'integrale è maggiorato dall'integrale del valore assoluto. Dato un generico $y(t)$, possiamo provare la sua BIBO stabilità con $|y(t)| = \left| \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(u) du \right| \leq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} |x(u)| du \leq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} L_x du = L_x \rightarrow y \text{ è limitato in funzione di } L_x \text{ finito}$

2.2. Systems properties (part 2)

Un sistema può anche essere definito:

* **lineare:** se rispetta il principio di sovrapposizione, ovvero se $a x_1(t) + b x_2(t) \rightarrow z \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$. La linearità può essere definita anche come la somma di additività ($x_1(t) + x_2(t) \xrightarrow{*} y_1(t) + y_2(t)$) ed omogeneità ($a x(t) \xrightarrow{*} ay(t)$).

Ad esempio, il modulo non è un sistema lineare, mentre il time-shift $x(t-t_0)$ sì.

o si mette come una costante generica anche l'omogeneità

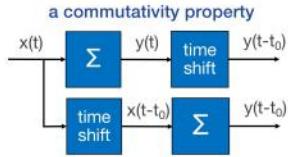
* **tempo-invariante:** se il sistema possiede commutatività con l'operazione di traslazione temporale. L'output corrisponde ad una versione traslata della stessa quantità di cui è traslato l'input. Ad esempio, la media mobile è tempo-invariante. Infatti:

$$x(t) \xrightarrow{*} y(t) \xrightarrow{\text{delay}} \frac{1}{T} \int_{t-T}^{t} x(u) du \quad \text{comme} \quad x(t) \xrightarrow{\text{delay}} x(t-t_0) \xrightarrow{*} \frac{1}{T} \int_{t-t_0}^{t} x(u-t_0) du$$

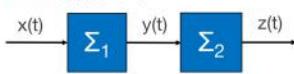
In seguito ad un opportuno cambio di variabile

La **risposta impulsiva** è un'uscita corrispondente ad una sollecitazione tramite impulso ideale ($\delta(t) \circ \delta(n) \xrightarrow{*} g(t) \circ g(n)$)

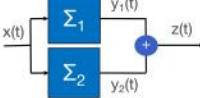
Diciamo che un segnale x è **autofunzione (Eigenfunction)** di un sistema se l'output equivale all'input moltiplicato per una costante, ovvero $y(t) = \lambda(x(t))$ o $y(n) = \lambda(n(t))$



series (o cascata)



parallel



Definiamo la **serie** di due segnali come Σ_2

applicato all'output di un sistema Σ_1 , mentre il **parallelo** come la somma degli output di due sistemi Σ_1 e Σ_2 applicati allo stesso input

Systems properties (part 2)

Esempio 1. Per ogni sistema valuta se è lineare e/o tempo-invariante, valuta la risposta impulsiva $h(t)$ e $h_{-1}(t)$ al gradino:

$$* y(n) = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} x(n-k)^2$$

Il sistema NON è lineare. Infatti, **il valore assoluto non è lineare**. Per quanto riguarda la tempo invarianza, comparemo

$$y(n-n_0) = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} |x(n-n_0-k)|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{k=-5}^5 |x(n-n_0-k)|^2 = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} |x(n-n_0-k)|^2. \quad \text{Sono uguali quindi il sistema è tempo-invariante}$$

$$\text{La risposta impulsiva } h(n) = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} |x(n-k)|^2 = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} \delta(n-k) \quad (\text{dato che il } \delta \text{ è pari}) = e^{jnk\pi} \sum_{k=-5}^5 \delta(k-n) = \begin{cases} e^{jn\pi}, & n \in [-5, 5] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{La risposta al gradino, invece, diventa } h_{-1}(n) = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} |1_o(n-k)|^2 = \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi} 1_o(n-k) \quad \text{con } 1_o(n-k) \text{ attivo per } n-k \geq 0$$

$$\text{ovvero per } k \leq n \text{ otteniamo } h_{-1}(n) = \begin{cases} 0, & n < -5 \\ \sum_{k=-5}^n e^{jk\pi}, & n \in [-5, 5] \\ \sum_{k=-5}^5 e^{jk\pi}, & n > 5 \end{cases}$$

$$* y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-4}^{t-2} x(u) du, & t \geq 2 \end{cases}$$

Il sistema è LINEARE perché è composto da una forma d'onda e un integrale lineari.

$$\text{Per la tempo-invarianza valutiamo } y(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t-t_0 \leq 2 \\ \cos((t-t_0)+2) \int_{-4}^{t-t_0-2} x(u) du, & t-t_0 > 2 \end{cases}$$

$$\sum [x(t-t_0)] = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} x(u-t_0) du & , t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1-t_0}^{t-t_0} x(v) dv & , t > 2 \end{cases}$$

I due sistemi sono evidentemente diversi, quindi il sistema NON è tempo-invariante.

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} f(u) du & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \delta(t-2) & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \cos(t+2) \delta(t-2)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-1}^{t-2} 1(u) du & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & , t \leq 2 \\ \cos(t+2) & , t > 2 \end{cases} \rightarrow \cos(t+2) \delta(t-2)$$

$$* y(n) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(1/x(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases}$$

Il sistema NON è lineare in quanto $\operatorname{sgn}(x)$ non è lineare.

Il sistema è tempo-invariante, infatti $y(n-n_0) = f(x(n-n_0))$ e $\sum [x(n-n_0)] = f(x(n-n_0))$ coincidono.

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(1/x(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases} \rightarrow h(t) = \begin{cases} 1, n \geq 0 & \rightarrow \delta(n) \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(1/x(n)) & , x(n) \neq 0 \\ 0 & , x(n) = 0 \end{cases} \rightarrow h(t) = \begin{cases} 1, n \geq 0 = \delta_0(n) \\ 0, n < 0 \end{cases}$$

$$* y(n) = \min(|x(n)|, |n|)$$

Il sistema è evidentemente NON lineare.

Il sistema NON è tempo-invariante $y(n-n_0) = \min(|x(n-n_0)|, |n-n_0|) \neq \sum [x(n-n_0)] = \min(|x(n-n_0)|, |n|)$

$$h(t) = \min(1, |n|) = \begin{cases} \min(1, 0) = 0 & , n = 0 \\ \min(0, |n|) = 0 & , n \neq 0 \end{cases} = 0$$

$$h_{-1}(n) = \min(1, \delta_0(n), |n|) = \begin{cases} \min(1, 1) = 1 & , n > 0 = \delta_0(n) - \delta(n) \\ \min(1, 0) = 0 & , n = 0 \\ \min(0, 1) = 0 & , n < 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Stabilisci se il sistema è lineare e/o tempo-invariante e valuta la risposta impulsiva $h(t) = h_{-1}(t)$ del segnale:

$$* y(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u| x(u) du$$

Il sistema è lineare perché è ottenuto dalla moltiplicazione di forme d'onda lineari. Per verificare la tempo-invarianza consideriamo $y(t-t_0) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0+1} |t-t_0-u| x(u) du$

$$\sum [x(t-t_0)] = \int_{t-1}^{t+1} |t-u| x(u-t_0) du = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0+1} |t-(v+t_0)| x(v) dv \quad (\text{con } v=u-t_0 \rightarrow \text{il sistema è tempo-invariante})$$

$$h(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u| \delta(u) du = |t| \int_{t-1}^{t+1} |t-u| \delta(u) du = |t| \int_{t-1}^{t+1} \delta(u) du = \begin{cases} 0 & , t \leq -1 \\ |t| & , t \in (-1, 1) \\ 0 & , t \geq 1 \end{cases} = |t| \operatorname{rect}(t/2)$$

$$h_{-1}(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-u| h(u) du = |t| \int_{t-1}^{t+1} h(u) du = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_0^1 |t-u| du = \int_0^1 |v| dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t^2, & t \in (-1, 0) \\ \int_0^1 |t-u| du = \int_{-t}^1 |v| dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} t^2, & t \in (0, 1) \\ \int_{t-1}^1 |t-u| du = \int_{-1}^1 |v| dv = 1, & t > 1 \end{cases}$$

* $y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-k)$

Il sistema è lineare in quanto coinvolge il prodotto di operazione lineari.

$$y(n-n_0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-n_0-k) \quad e \quad \mathcal{Z}[x(n-n_0)] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x(n-k-n_0) \quad \text{sono uguali, quindi il sistema è tempo-invariante.}$$

$$h(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \delta(n-k) = 2^n \sum_{k=1}^{\infty} \delta(k-n) = 2^n \delta_0(n-1)$$

$$h_{-1}(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \delta_0(n-k) = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ \frac{n}{2} 2^{\frac{n-1}{2}} - 1, & n > 0 \\ = 2(2^{n-1}) \delta_0(n-1) \end{cases}$$

* $y(t) = \int_{t-1}^t e^{t-u} x(u) du$

Il sistema è lineare.

$$y(t-t_0) = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} e^{t-t_0-u} x(u) du \quad e \quad \mathcal{Z}[x(t-t_0)] = \int_{t-1}^t e^{t-u} x(u-t_0) du \quad \text{posto } v=u-t_0, \quad u=v+t_0, \quad \int_{t-1}^t e^{t-v-t_0} x(v) dv$$

Le due espressioni differiscono all'esponente quindi il sistema non è tempo-invariante.

$$h(t) = \int_{t-1}^t e^{t-u} \delta(u) du = e^t \int_{t-1}^t \delta(u) du = e^t \text{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right) = \begin{cases} e^t, & t \in (0, 1) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$h_{-1}(t) = \int_{t-1}^t e^{t-u} \delta(u) du = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^t \int_0^t e^{-u} du = e^t (e^{-t} - 1), & t \in (0, 1) \\ e^t \int_{t-1}^t e^{-u} du = e^{2t} (1 - e^{-t}), & t > 1 \end{cases}$$

* $y(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)$ $k-n_0=m \Rightarrow k=m+n_0$

Il sistema è lineare. $\sum_{k=n-n_0-10}^{n-n_0+10} x(k-n_0) = \mathcal{Z}[\sum_{k=n-n_0-10}^{n+10} x(k-n_0)] = \mathcal{Z}[\sum_{m=n-n_0-10}^{n+10} x(m)]$ quindi il sistema è tempo-invariante

$$h(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} \delta(k) = \begin{cases} 1, & n \in [-10, 10] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} = \text{rect}(n/20) = \text{rect}(n/2)$$

$$h_{-1}(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} \delta_0(k) = \begin{cases} 0, & n < -10 \\ \sum_{k=0}^{n+10} 1 = n+11, & n \in [-10, 10] \\ \sum_{k=n-10}^{n+10} 1 = 21, & n > 10 \end{cases}$$

* $y(t) = x(t-2)$

Il sistema è lineare. Inoltre, $y(t-t_0) = x(t-t_0-2)$ e $\mathcal{Z}[y(t-t_0)] = x(t-2-t_0)$ sono equivalenti e quindi è tempo-invariante

$$h(t) = \delta(t-2) \quad e \quad h_{-1}(t) = \delta_0(t-2)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k x(k)$$

Il sistema è lineare. $y(n-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0-1} 3^k x(k) \in \mathcal{Z}[y(n-n_0)] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0-1} 3^k (k-n_0) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} 3^k x(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} 3^k x(m)$. Il sistema è tempo-invariante.

$$h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k \delta(k) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \delta(k) = 1_o(n-1) \quad \text{e} \quad h_{-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k 1_o(k) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{1-3^n}{1-3} & n > 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \cos(t-2)x(t)$$

Sistema lineare.

$\cos(t-t_0-2)x(t-t_0) \in \mathcal{Z}[y(t-t_0)] = \cos(t-2)x(t-t_0)$ differiscono quindi il sistema non è tempo-invariante

$$h(t) = \cos(t-2)\delta(t) = \cos(2)\delta(t) \quad \text{e} \quad h_{-1}(t) = \cos(t-2)1(t)$$

$$y(t) = x(t+5)x(t-7)$$

Il sistema non è lineare perché coinvolge il prodotto del segnale per se stesso (funzione quadratica).

$$y(t-t_0) = x(t-t_0+5)x(t-t_0-7) \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}[y(t-t_0)] = x(t+5-t_0)x(t-7-t_0) \quad \text{quindi il sistema è tempo-invariante}$$

$$h(t) = \delta(t+5)\delta(t-7) = 0 \quad \text{e} \quad h_{-1}(t) = 1(t+5)1(t-7) = 1(t-7)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 x(u) du$$

Il sistema è lineare.

$y(t-t_0) = \int_{-t_0}^{2(t-t_0)} |t-t_0-u|^2 x(u) du \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}[y(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{2t} |t-u|^2 x(u-t_0) du = \int_{-\infty}^{2t-t_0} |t-v-t_0|^2 x(v) dv$ differiscono negli estremi di integrazione quindi il sistema non è tempo-invariante.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-u| \delta(u) du = |t| \int_{-\infty}^{2t} \delta(u) du = |t| 1(t) = t \cdot 1(t)$$

$$h_{-1}(t) = \int_{-t}^{2t} |t-u|^2 \delta(u) du = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_{-t}^t |t-u|^2 du = \int_{-t}^t |v|^2 dv = \frac{2}{3} t^3 & t > 0 \end{cases} = \frac{2}{3} t^3 \cdot 1(t)$$

$$\text{es.3. Sia dato un sistema descritto dalla trasformazione } y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ \cos(t+2) \cdot \int_{-4}^{t-2} x(\tau) d\tau & t > 2 \end{cases}$$

3.1. Stabilire se il sistema è causale, lineare, stabile

3.2. Trovare la risposta impulsiva $h(t)$

3.3. Trovare la risposta al gradino unitario $h_{-1}(t)$

$$3.2. \quad h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ (\cos(t+2)) \int_{-1}^{t-2} \delta(\tau) d\tau & t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ (\cos(t+2)) \cdot 1(t-2) & t > 2 \end{cases} = \cos(t+2)1(t-2)$$

$$3.3. \quad h_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ \cos(t+2) \int_{-4}^{t-2} 1(\tau) d\tau & t > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ \cos(t+2)(t-2) & t > 2 \end{cases} = \cos(t+2)(t-2)$$

3.4. A questo punto risulta più stabile definire che:

- il sistema NON è bilanciabile perché $h_{-1}(t)$ non è assolutamente integrabile;
→ considero gli estremi di integrazione $[-4, t-2]$
- il sistema è causale (usa solo info del passato) ed è lineare.

Il sistema è lineare se:
 $\mathcal{Z}[\alpha x(t)] = \alpha \mathcal{Z}[x(t)]$
 $\mathcal{Z}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{Z}[x_1(t)] + \mathcal{Z}[x_2(t)]$

2.3. LTI systems (convolution)

Identifichiamo il ruolo della risposta impulsiva nel caso discreto esprimendo il segnale $x(n)$ come $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$

Per la proprietà di linearità, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\sum[\delta(n-k)]$ è equivalente all'espressione sopra. Da questa equivalenza si può vedere che il delta agisce separatamente su ogni delta shiftato.

Definiamo la **convoluzione a tempo discreto** come la relazione

tra input e output in un sistema LTI attraverso la risposta

impulsiva g . La **convoluzione in tempo continuo**, invece, è

identificata da un integrale.

La relazione tra input e output è identificata univocamente

dalla risposta impulsiva (se conosciamo la risposta impulsiva

di un segnale, possiamo dire di conoscere completamente la sua azione).

$$x(n) \xrightarrow{g(n)} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(n-k)$$

LTI system/filter

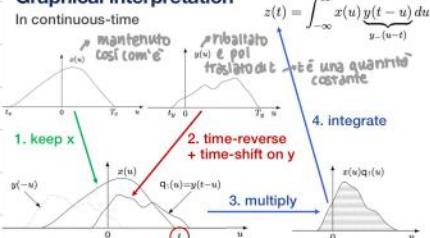
$$x(t) \xrightarrow{g(t)} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)g(t-u) du$$

LTI system/filter

La convoluzione è il riferimento per tutti i sistemi lineari e tempo-invarianti

In generale, la convoluzione agisce su due segnali $x(t)$ e $y(t)$, producendo un terzo segnale z . $x * y = z$

Graphical interpretation



Rappresentare la convoluzione consiste in:

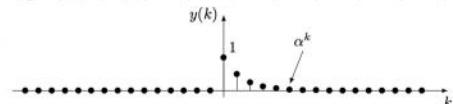
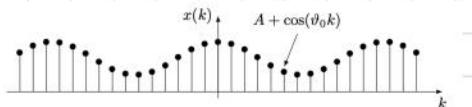
- graficare $y(t)$;
 - ribaltare e traslare il segnale $y'(t)$;
 - moltiplicare il segnale $x(t)$ con la versione ribaltata e traslata $y'(t)$;
 - integrare il prodotto ottenuto
- l'integrale del prodotto identifica solo un valore di t

l'operazione di convoluzione è ben definita per:

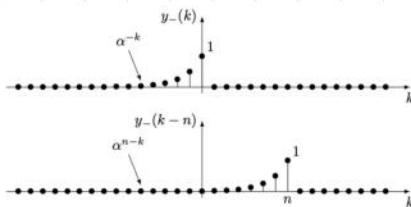
- segnali ad energia finita
- segnali causali o loro traslazioni

LTI systems (convolution)

ES. 1 calcola la convoluzione $z(n) = x * y(n)$ per $x(n) = A + \cos(\theta_0 n)$ e $y(n) = a_0(n)a^n$, $-1 < \alpha < 1$.



Visualizziamo la versione ribaltata e traslata di y



Possiamo notare che $y_-(k-n) = y(n-k)$ ha estensione $(-\infty, n]$. Possiamo quindi facilmente interpretare la convoluzione z come

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y_-(k-n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)y_-(k-n) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^n [A + \cos(\vartheta_0 k)] \alpha^{n-k} \end{aligned}$$

Risolviamo la sommatoria esprimendo il coseno secondo la formula di Eulero: $z(n) = \sum_{k=-\infty}^n [A + \frac{1}{2}e^{j\vartheta_0 k} + \frac{1}{2}e^{-j\vartheta_0 k}] \alpha^{n-k}$

$$\text{ovvero } \sum_{m=0}^{\infty} [A + \frac{1}{2} e^{j\varphi_0(n-m)} + \frac{1}{2} e^{j\varphi_0(m-n)}] \alpha^m = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-j\varphi_0 n}]^m + \frac{1}{2} e^{j\varphi_0 n} \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha e^{j\varphi_0}]^m$$

$$= \frac{A}{1-\alpha} + \frac{1}{2} \frac{e^{j\varphi_0 n}}{1-\alpha e^{-j\varphi_0}} + \frac{1}{2} \frac{e^{j\varphi_0 n}}{1-\alpha e^{j\varphi_0}}$$

$$= \frac{A}{1-\alpha} + \text{R} \left[\frac{e^{j\varphi_0 n}}{1-\alpha e^{-j\varphi_0}} \right]$$

Sfruttando l'equivalenza $\text{R}[x] = x + x^*$ e $|ae^{j\varphi_0}| = |\alpha| < 1$

Possiamo notare, ponendo $\beta = 1 - \alpha e^{-j\varphi_0} - j\beta_0 e^{j\varphi_0} \rightarrow z(n) = \frac{A}{1-\alpha} + \cos(\varphi_0 n - \varphi_0)$. I contributi originali sono in qualche modo conservate.

$$\text{Es. 2. } z(t) = x * y(t) \text{ per } x(t) = A + \cos(\omega_0 t) \text{ e } y(t) = A(t)e^{-\alpha t}, \alpha > 0$$

Questo esercizio è la controparte continua dell'esercizio precedente. Osservato che $y_-(u-t) = y(t-u)$ ha estensione $e = (-\infty, t]$, possiamo interpretare l'operazione di convoluzione nella forma: $z(t) = \int_{-\infty}^t x(u)y_-(u-t)du = \int_{-\infty}^t x(u)y_-(t-u)du$ ovvero $\int_{-\infty}^t [A + \cos(\omega_0 u)]e^{\alpha(u-t)}du$.

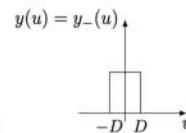
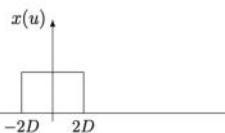
Attraverso l'identità di Eulero risolviamo l'espressione e tramite il cambio di variabile $v = t - u$ calcoliamo l'integrale.

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^t [A + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 u} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 u}] e^{\alpha(u-t)} du = \int_0^{\infty} [A + \frac{1}{2} e^{j\omega_0(t-v)} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0(t-v)}] e^{-\alpha v} dv \\ &= A \int_0^{\infty} e^{-\alpha v} dv + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \int_0^{\infty} e^{j\omega_0(v-\alpha t)} dv + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \int_0^{\infty} e^{-j\omega_0(v-\alpha t)} dv \\ &= \frac{A}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{e^{j\omega_0 t}}{\alpha + j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{e^{-j\omega_0 t}}{\alpha - j\omega_0} = \frac{A}{\alpha} + \text{R} \left[\frac{e^{j\omega_0 t}}{\alpha + j\omega_0} \right] \end{aligned}$$

Definito $\beta = \alpha + j\omega_0 = |\beta| e^{j\varphi_\beta}$, otteniamo $z(n) = \frac{A}{\alpha} + \frac{\cos(\omega_0 t - \varphi_\beta)}{|\beta|} \rightarrow$ Il contributo originale della costante A a $x(t)$ è stato scalato. Anche il contributo di $\cos(\omega_0 t)$ risulta scalato e, inoltre, presenta anche un cambio nella fase.

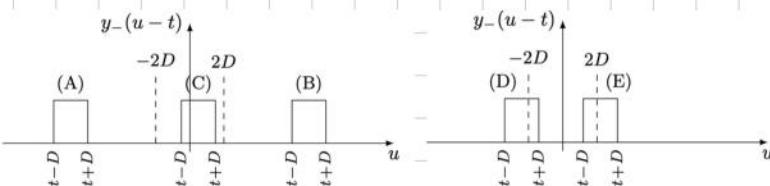
Anche in questo caso, si dimostra che i contributi originali sono in qualche modo mantenuti nella convoluzione

$$\text{Es. 3. } z(t) = x * y(t) \text{ per } x(t) = \text{rect}(t/4D) \text{ e } y(t) = \text{rect}(t/2D)$$



$y(u) = y_-(u)$ dato che il rettangolo è un segnale pari

Per risolvere l'esercizio senza applicare direttamente la formula, consideriamo i casi A-E:



A) $z(t) = 0$. $t+D < -2D \rightarrow t < -3D$. $y(t-u)$ è alla sinistra di $x(u)$

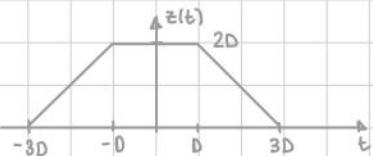
B) $z(t) = 0$. $t-D > 2D \rightarrow t > 3D$. $y(t-u)$ è alla destra di $x(u)$

C) $y(t-u)$ è dentro $x(u) \rightarrow x(u)y(t-u) = y(t-u)$ e dato che l'area vale $2D$, $z(t) = 2D$ per $-D < t < D$

D) $z(t) = \int_{-2D}^{2D} x(u)y(t-u)du = \int_{-2D}^{t+D} 1 du = t+D - (-2D) = t+3D$ per $-3D < t < -D$

E) $z(t) = \int_{t-D}^{2D} 1 du = 2D - (t-D) = 3D - t$ per $0 < t < 3D$

Riassumendo otteniamo $z(t) = \begin{cases} 30+t, & t \in (-3D, -D) \\ 2D, & t \in (-D, D) \\ 30-t, & t \in (D, 3D) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ ovvero



La convoluzione di due rettangoli è un trapezoidale

Esercizio: Esprimi i seguenti segnali come convoluzione $z = x * y$

L'esercizio richiede di esprimere gli integrali nella forma

$$* z_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|} \sin(t-u) du \rightarrow x(u) = e^{-|u|} e^{-j\omega u} = \sin(t-u)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du \circ z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

$$* z_2(t) = \int_0^{\infty} e^{t-u} \sin(u+2) du \rightarrow \text{estendiamo l'integrale a } -\infty \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-u} \sin(u+2) \mathbf{1}(u) du \quad \text{quindi } x(u) = \mathbf{1}(u) \sin(u+2) \text{ e}$$

$$y(t-u) = e^{t-u}$$

$$* z_3(n) = \sum_{k=0}^n e^k \sin(n-k+2) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} e^k \sin(n-k+2) \mathbf{1}_-(n-k) \quad \text{quindi } x(k) = e^k \text{ e } y(n-k) = \sin(n-k+2) \mathbf{1}_-(n-k)$$

$$* z_4(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t e^{t-u} \sin(u+2) du, & t \geq 0 \end{cases} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-u} \sin(u+2) \mathbf{1}(u) \cdot \mathbf{1}(t-u) du \quad \text{quindi } y(t-u) = e^{t-u} \mathbf{1}(t-u) \text{ e} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \text{ per } u < 0 \quad 0 \text{ per } t \leq u \end{math>$$

$$x(u) = \sin(u+2) \mathbf{1}(u)$$

questo termine annulla tutti i valori per $u < 0$

moltiplica per 1 tutti i termini per $k < n$

Esercizio: Dimostra che $z(t) = x * y(t)$ tra un segnale aperiodico $x(t)$ e uno periodico $y(t+T_p)$, è periodico di periodo T_p , ovvero $z(t+T_p) = z(t)$

$$x * y(t+T_p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t+T_p-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du = x * y(t), \quad y(t+T_p-u) = y(t-u) \text{ per periodicità.}$$

Esercizio: Dimostra che:

$$* \text{rect} * \text{rect}(t) = \text{triang}(t)$$

$$\text{Dato } y_+(t) = \text{rect}(t) = y(t), \quad z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(u) - \text{rect}(u-t) du = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_{-1/2}^{1/2} 1 du = 1+t, & -1 < t < 0 \\ \int_{1/2}^{1/2} 1 du = 1-t, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases} \equiv \text{triang}(t)$$

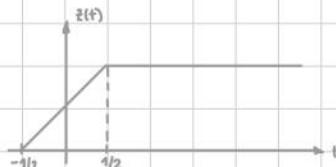
$$* 1 * 1(t) = t \cdot 1(t)$$

$$\text{Dato } y(t) = 1(t) \text{ e } y_-(t) = 1(-t), \quad z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(u) \mathbf{1}_-(u-t) du = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t 1 du = t, & t > 0 \end{cases} = \text{ramp } z(t) = t \cdot 1(t)$$

Esercizio: Calcola la convoluzione tra i seguenti segnali:

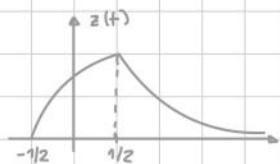
$$* x(t) = 1(t) \text{ e } y(t) = \text{rect}(t)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \text{rect}(u-t) du = \begin{cases} 0, & t < -1/2 \\ \int_{t+1/2}^{t+1/2} 1 du = 1 = t + 1, & -1/2 < t < 1/2 \\ \int_{t-1/2}^{t+1/2} 1 du = 1, & t > 1/2 \end{cases}$$



$$* x(t) = e^{-at} 1(t) \text{ e } y(t) = \text{rect}(t)$$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \text{rect}(t-u) du = \begin{cases} 0, & t < -1/2 \\ \int_{t+1/2}^{t+1/2} e^{-au} du = \frac{1-e^{-a(t+1/2)}}{a}, & -1/2 < t < 1/2 \\ \int_{t-1/2}^{t+1/2} e^{-au} du = \frac{e^{-a(1/2)} - e^{-at}}{a}, & t > 1/2 \end{cases}$$



$$* \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t) \text{ e } y(t) = \operatorname{rect}(t/2D)$$

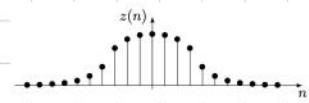
$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(\omega_0 u) \operatorname{rect}\left(\frac{u-t}{2D}\right) du = \int_{t-D}^{t+D} A \cos(\omega_0 u) du = \frac{A \sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \Big|_{t-D}^{t+D} = A \frac{\sin(\omega_0 t + \omega_0 D) - \sin(\omega_0 t - \omega_0 D)}{\omega_0} = \frac{2A \sin(\omega_0 D) \cos(\omega_0 t)}{\omega_0}$$

$$* \quad x(n) = a^{-|n|} \text{ e } y(n) = \operatorname{rect}\left(\frac{n}{4+2N}\right)$$

$$y_{-}(n) = y(n) \text{ e } y_{-}(k-n) = \begin{cases} 1, & n-N \leq k \leq n+N \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{Possiamo distinguere tre casi:}$$

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y_{-}(k-n)$$

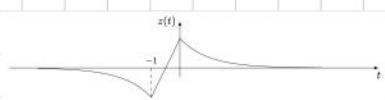
$$\begin{cases} \sum_{k=n-N}^{n+N} a^k, & n+N \leq 0 \\ \sum_{k=-N}^n a^k, & -N \leq n \leq N \\ \sum_{k=n-N}^n a^k, & n \geq N \end{cases}$$



$$* \quad x(t) = \operatorname{rect}(t+1/2) \text{ e } y(t) = \operatorname{sgn}(t) e^{-|t|}$$

$$y_{-}(t) = -y(t) = -\operatorname{sgn}(t) e^{-|t|} \text{ con punto di discontinuità in zero. } z(t) = -\int_{-1}^0 \operatorname{sgn}(u-t) e^{-|u-t|} du$$

$$z(t) = \begin{cases} -\int_{-1}^0 e^{-(u-t)} du, & t < -1 \\ \int_{-1}^t e^{-(u-t)} du - \int_t^0 e^{-(u-t)} du, & -1 \leq t < 0 \\ \int_{-1}^0 e^{-(u-t)} du, & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -(e^{-t}-1), & t < -1 \\ e^{-t} - e^{-2}, & -1 \leq t < 0 \\ (1-e^{-t})e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$



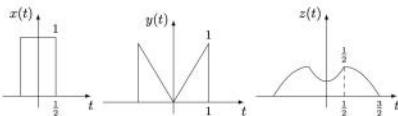
$$* \quad x(t) = \operatorname{rect}(t) \text{ e } y(t) = \operatorname{tri}(\operatorname{rect}(1/2t))$$

$$y_{-}(t) = y(t), \text{ quindi } z(t) = \int_{-1/2}^{1/2} |u+t| \operatorname{rect}\left(\frac{1}{2}(u-t)\right) du =$$

$$\int_{-1/2}^{t+1/2} (u-t) du = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2, \quad t \in (-1/2, 1/2)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} t(u-t) du - \int_{-1/2}^t (u-t) du = \frac{1}{4} + t^2, \quad t \in (-1/2, 1/2)$$

$$- \int_{t-1}^{1/2} (u-t) du = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2, \quad t \in (1/2, 3/2)$$



Es.8 La convoluzione tra $x(t) = \delta(t)$ e $y(t) = \cos(t)$ vale.

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \cos(t-u) = \cos(t) \rightarrow \text{risulta il segnale per } u=0 \text{ (dove è centrato } \delta(u))$$

Es.9 $z(t) = x * y(t)$ con $x(t) = \delta(t-2)$ e $y(t) = \sin(t)$

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) \sin(t-u) du = \sin(t-2), \text{ ovvero l'integrale di } \sin(t-u) \text{ a } u=2$$

Es.10 Dato $z(t) = x * y(t)$ con $x(t/2)$ e $y(t/2)$ la convoluzione vale $2z(t/2)$

$$\text{Infatti } \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{u}{2}\right) y\left(\frac{t-u}{2}\right) du = z \int_{-\infty}^{\infty} x(v) y\left(\frac{t-v}{2}\right) dv = 2z\left(\frac{t}{2}\right)$$

Es.11 Dato $z(n) = x * y(n)$, la convoluzione tra $x(n-2)$ e $y(n+2)$ vale $z(n)$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-2) y(n-k+2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(n-(m+2)+2) = z(n)$$

Nella convoluzione tra rettangoli si ottiene un

trapezio ($b_1 > b_2$) con:

$$\text{- base } M = b_1 + b_2$$

$$\text{- base } m = b_1 - b_2$$

$$\text{- altezza } = \min(b_1, b_2)$$

2.4. Properties of convolution \rightarrow utilizzate soprattutto come metodi per verificare i calcoli

commutativity $x * y = y * x$

$$\text{associativity } x * y * z = (y * x) * z \\ = x * (y * z)$$

$$x * y * z = x * x * y \\ = y * z * x$$

linearity $(x+y) * z = x * z + y * z$

$$x * (y+z) = x * y + x * z$$

identity $x * \delta = x$

area $A_{x,y} = A_x A_y$

Grazie alla proprietà commutativa, possiamo decidere quale segnale vogliamo traslare e ribaltare per ottimizzare il calcolo.

La proprietà dell'area è particolarmente utile come prova. Controllare che l'area della convoluzione è uguale al prodotto delle aree dei segnali, ci permette di controllare se abbiamo effettuato i calcoli giusti.

Queste proprietà sono valide sia a tempi discreti che continui.

Un'altra interessante proprietà riguarda l'estensione.

A tempi continui $e(x * y) = [t_x+t_y, T_x+T_y]$, mentre a tempo

discreto $e(x * y) = [n_x+n_y, N_x+N_y]$

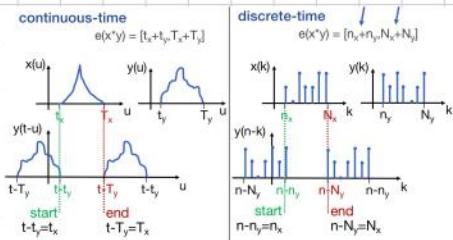
Inoltre, per quanto riguarda segnali trascinati nel tempo, osserviamo che possono essere espressi come il prodotto

tra il segnale stesso ed un δ trasciato di una certa quantità

$$s(t-t_0) = s * \delta_{t_0}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(u-t_0) s(t-u) du \text{ a tempi continui e } s(n-n_0) = s * \delta_{n_0}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k-n_0) s(n-k) \text{ a tempi discreti.}$$

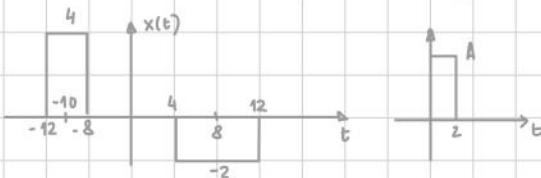
Nella composizione di traslazioni, invece, osserviamo che $x_{t_0} * y_{t_1}(t) = x * \delta_{t_0} * y * \delta_{t_1}(t) = x * y * \delta_{t_0+t_1}(t)$

ovvero $x_{t_0} * y_{t_1}(t) = x * y(t - (t_0 + t_1))$.



Properties of convolution

Esempio 1. Calcola la convoluzione tra i rettangoli rappresentati in figura



Utilizzando la notazione \$\text{rect}_{\tau}(t) = \text{rect}(t/\tau)

$$x(t) = 4 \text{rect}_4(t+10) - 2 \text{rect}_8(t-8)$$

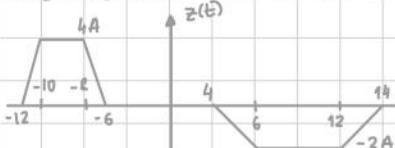
$$y(t) = 1 \text{rect}_2(t-2)$$

Applicando le proprietà di linearità e convoluzione otteniamo:

$$\begin{aligned} z(t) &= x * y(t) = [4 \text{rect}_4(t+10) - 2 \text{rect}_8(t-8)] * [1 \text{rect}_2(t-2)] = 4 \text{rect}_4(t+10) * \text{rect}_2(t-2) - 2 \text{rect}_8(t-8) * \text{rect}_2(t-2) \\ &= 4 \text{rect}_4 * \text{rect}_2(t+10-2) - 2 \text{rect}_8 * \text{rect}_2(t-8-2) = 4 \text{rect}_4 * \text{rect}_2(t+8) - 2 \text{rect}_8 * \text{rect}_2(t-6) \end{aligned}$$

\$\text{rect}_4 * \text{rect}_2\$ è un trapezoidale di base \$M_4 \cdot 2 = 6\$, base \$m_4 \cdot 2 = 2\$ e altezza 2

\$\text{rect}_8 * \text{rect}_2\$ ha base \$M_8 \cdot 2 = 10\$, base \$m_8 \cdot 2 = 6\$ e altezza 2. Otteniamo:



Grazie alla proprietà dell'area possiamo verificare

$$A_z = 4 \cdot 4 - 8 \cdot 2 = 0 = A_x A_y = (4 \cdot 8 - 2 \cdot 6) 2$$

Inoltre, per la proprietà dell'estensione:

$$[-12, 12] + [0, 2] \rightarrow [-12, 14]$$

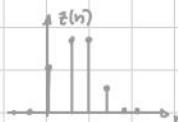
Es.2 Calcola la convoluzione tra $x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$ e $y(n) = \text{rect}((n-1)/3)$

Come prima cosa osserviamo che $y(n) = \text{rect}((n-1)/3) = \begin{cases} 1, & n=0,1,2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$



Per le proprietà della convoluzione otteniamo $z(n) = x * y(n) = [\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)] * y(n)$ quindi:

$$y(n) + \frac{1}{2}y(n-1) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 3/2, & n=1,2 \\ 1/2, & n=3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\text{Verifichiamo inoltre che } A_z = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = AxAy = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Inoltre, la convoluzione tra $x(n-3)$ e $y(n+2)$ risulta:

$$x * y(n) = x * y(n-3+2) = z(n-1) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 3/2, & n=2,3 \\ 1/2, & n=4 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \text{ ovvero tutto traslato di 1 verso destra}$$

Es.3. Calcola l'output della serie di due sistemi LTI con risposta impulsiva $h_1(n) = \sin(8n)$ e $h_2(n) = a^n u_o(n)$, rispettivamente, considerando un input della forma $x(n) = \delta(n) - a\delta(n-1)$

Nella serie il primo output è $z(n) = x * h_1(n)$, mentre l'output finale è $y(n) = z * h_2(n) = x * h_1 * h_2(n)$

Per la proprietà associativa e commutativa otteniamo:

$$x * h_2(n) = [\delta(n) - a\delta(n-1)] * h_2(n) = h_2(n) - a h_2(n-1) = a^n u_o(n) - a \cdot a^{n-1} u_o(n-1) = a^n [u_o(n) - u_o(n-1)] = a^n \delta(n) = \delta(n)$$

$$\text{Quindi, } y(n) = \delta * h_1(n) = h_1(n) = \sin(8n)$$

La convoluzione $z(n) = x * y(n)$ tra segnali dispari ha simmetria par

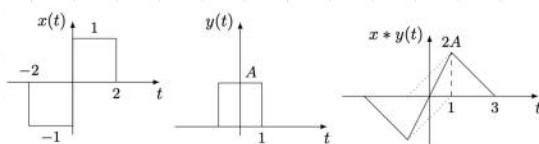
Es.4 Calcola la convoluzione tra $x(t) = \text{sgn}(t) \text{rect}(\frac{1}{4}t)$ e $y(t) = A \text{rect}(\frac{1}{2}t)$

$$x(t) = u(t-1) - u(t+1), \quad y(t) = Au(t), \quad u(t) = \text{rect}(\frac{1}{2}t)$$

Per linearità e proprietà di traslazione otteniamo:

$$x * y(t) = [u(t-1) - u(t+1)] * [Au(t)] = Au * u(t-1) - Au * u(t+1)$$

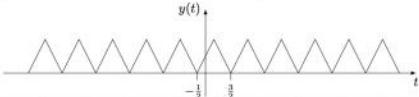
con $u * u(t) = 2\text{hang}(\frac{1}{2}t)$. Segue che $x * y(t) = 2A\text{hang}(\frac{1}{2}(t-1)) - 2A\text{hang}(\frac{1}{2}(t+1))$



Es.5 Valuta l'output del sistema LTI con risposta impulsiva $g(t) = \text{rect}(t)$ con input $x(t) = \text{rep}_2 \text{rect}(t-1/2)$

$$x(t) = \text{rep}_2 \text{rect}(t-1/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}(t-2k-1/2). \quad \text{L'output del sistema LTI diventa:}$$

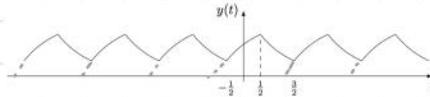
$$y(t) = x * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect} * \text{rect}(t-2k-1/2) = \text{rep}_2 \text{triang}(t-1/2)$$



Es.6 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n) = e^{-at} u(n)$ con $a > 0$, con l'input un'onda quadra $x(t) = \text{rect}_a(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_a(t - 2k). \text{ La risposta } y(t) = x * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_a(t - 2k) * g(t - 2k) = \text{rect}_a(t) \text{ rect}_a(t - 2a)$$

Quindi: $\text{rect}_a(t) * g(t) = \begin{cases} 0, & t < -1/2 \\ \frac{1-a}{a}, & -1/2 \leq t < 1/2 \\ \frac{a}{a-e^{2a}} e^{-at}, & t > 1/2 \end{cases}$



La ripetizione periodica dei segmenti attivi nel periodo $[-1/2, 1/2]$ è mostrato in figura ↗

Nel periodo di riferimento $[-1/2, 1/2]$ la ripetizione periodica restituisce:

$$y(t) * \text{rect}_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1-a}{a} e^{-a/2} e^{-a(t-2k)} + \sum_{k=0}^{1/2} \frac{1-a}{a} e^{-a/2} e^{-at} e^{-a(t-2k)} = \text{rect}_a(t) + \frac{e^{-a/2}}{1-e^{-2a}} e^{-at} \text{ rect}_a(t - 2a), \quad t \in [-1/2, 1/2] \rightarrow \begin{cases} \frac{1-a}{a} e^{-at}, & -1/2 \leq t < 1/2 \\ k_a e^{-a(t-2n)}, & 1/2 \leq t < 3/2 \end{cases}, \quad k_a = \frac{e^{-a/2}}{a(e^{2a}-e^{-a})}$$

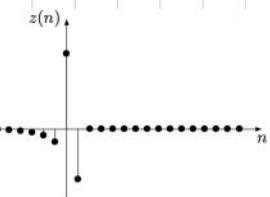
Es.7 Calcola la convoluzione tra $x(n) = \delta(n) - 1/2 \delta(n-1) - 1/2 \delta(n+1)$ e $y(n) = a^n u(-n)$, $|a| < 1$

Per linearità e traslazione $\rightarrow z(n) = x * y(n) = [\delta(n) - 1/2 \delta(n-1) - 1/2 \delta(n+1)] * y(n)$

$$= y(n) - \frac{1}{2} y(n-1) - \frac{1}{2} y(n+1) = a^{-n} u(-n) - \frac{1}{2} a^{-n-1} u(-n-1) - \frac{1}{2} a^{-n+1} u(-n+1)$$

quindi $\int a^{-n} \frac{-1}{2} a^{-n-1} \frac{-1}{2} a^{-n+1} = -\frac{(1-a)^2}{2a} a^{-n}, \quad n < 0$

$$\begin{cases} 1 - 1/2 \cdot 1 + 0 = 1 - 1/2 \cdot a, & n = 0 \\ 0 - 1/2 \cdot 0 = -1/2, & n = 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

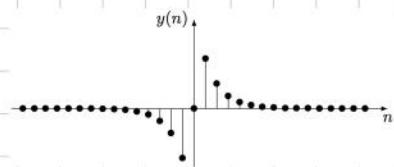


Es.8 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1)$, $a > 0$ quando l'input è $x(n) = a^{|n|}$, $|a| < 1$

Per linearità e proprietà di traslazione otteniamo

$$y(n) = x * g(n) = x * [\delta(n-1) - \delta(n+1)] = x(n-1) - x(n+1) = a^{|n-1|} - a^{|n+1|}$$

quindi $y(n) = \begin{cases} a^{-n+1} - a^{-n-1} = -(a^{-1} - a)^{-n}, & n < 0 \\ a - a = 0, & n = 0 \\ a^{-n-1} - a^{n+1} = (a^{-1} - a)a^n, & n > 0 \end{cases}$



Es.9 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n) = \text{sgn}(n)$ quando l'input è $x(n) = \ln(1_0(n-3))_0(3-n)$

Possiamo notare che $x(n) = \ln(1_0(n-3))_0(3-n) = x(n) = \ln(\delta(n-3) + 3\delta(n-3))$

$$y(n) = x * g(n) = x * \text{sgn}(n) \rightarrow y(n) = 3\delta * g(n) = 3\text{sgn}(n)$$

Es.10 Valuta l'output di un sistema LTI con risposta impulsiva $g(n) = 1_0(n)$, quando l'input è $x(n) = \text{rect}(n-1)/3$

Il segnale può essere scritto come $x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$

Quindi $y(n) = x * g(n) = [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)] * g(n) = g(n) + g(n-1) + g(n-2) = 1_0(n) + 1_0(n-1) + 1_0(n-2) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n > 1 \end{cases}$

Es.11 Valuta la convoluzione tra $x(n) = 2\delta(n) - \delta(n-1) - \delta(n+1)$ e $y(n) = 1_0(n-3) - 1_0(n-5)$

Possiamo scrivere il segnale come $y(n) = \begin{cases} 1, & n \in [1, 4] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} = \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)$

$$z(n) = x * y(n) = [2\delta(n) - \delta(n-1) - \delta(n+1)] * y(n) = 2y(n) - y(n-1) - y(n+1) =$$

$$= 2\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + 2\delta(n-3) + 2\delta(n-4) - \delta(n-2) - \delta(n-3) - \delta(n-4) - \delta(n-5) - \delta(n) - \delta(n-1) - \delta(n-2) - \delta(n-3) =$$

$$= -\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-4) - \delta(n-5)$$

2.5. Circular Convolution

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du$$

periodic T_p aperiodic periodic T_p
($t = t+T_p$)

$$x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

periodic N aperiodic periodic N
($n = n+N$)

Nella convoluzione tra un segnale periodico ed uno aperiodico, otteniamo un segnale periodico di stesso periodo T_p (o N in caso discreto).

~~$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u) du$$~~

periodic T_p
periodic T_p , periodic T_p

~~$$x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$~~

periodic N periodic N

These diverge!

Per quanto riguarda la convoluzione tra due segnali periodici, invece, il loro prodotto sarà periodico di periodo T_p . Tuttavia, calcolando l'area di un segnale periodico, sia a tempo discreto che continuo, il risultato diverge.

A tal proposito, quando si tratta convoluzione tra segnali periodici, è necessario avere una definizione specifica di essa stessa. Si parla di **convoluzione circolare**.

La convoluzione circolare consiste nel limitare l'integrale (o somma) ad un periodo. Per questo tipo di convoluzione valgono le seguenti proprietà:

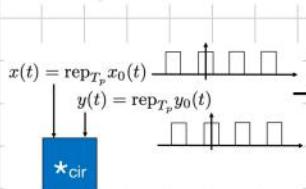
- commutativa $x * y = y * x$
- associativa $x * y * z = z * x * y = y * z * x$
- linearità $(x+y)*z = x*z + y*z = x*(y+z) = x*y + x*z$
- area $A_x * y = A_x \cdot A_y$. In questo caso dobbiamo considerare l'area in un periodo
- identità $x * \text{comb}_t = x$. L'elemento d'identità diventa il δ periodico
- traslazione $x * \text{comb}_{t_0/n_0} = x_{t_0/n_0}$

$$x *_{\text{cir}} y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(u)y(t-u) du$$

periodic T_p

$$x *_{\text{cir}} y(n) = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x(k)y(n-k)$$

periodic N



$$\begin{aligned} z(t) &= x *_{\text{cir}} y(t) = \text{rep}_{T_p} x_0 * y_0(t) \\ &= x * y_0(t) \\ &= y * x_0(t) \end{aligned}$$

Se i segnali convoluti x e y sono ripetizioni periodiche di forma d'onda x_0 e y_0 , allora la convoluzione circolare può essere interpretata come la ripetizione periodica di $x_0 * y_0$.

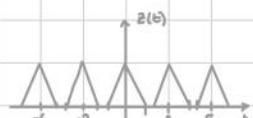
Ad esempio, la convoluzione tra x_0 e y_0 con $x_0 = y_0 = \text{rep}_3 \text{rect}(t)$, ovvero tra due

rect periodici di stesso periodo, sarà la ripetizione periodica di un triangolo.

Circular convolution

Es. 1. Calcola la convoluzione tra $x(t) = \text{rep}_3 \text{rect}(t-1/2)$ e $y(t) = \text{rep}_3 \text{rect}(t-5/3)$

$$x * y(t) = \text{rep}_3 \text{triang}(t) \rightarrow \text{rep}_3 x_0 * y_0(t) = \text{rep}_3 \text{triang}(t-1/2-5/3) = \text{rep}_3 \text{triang}(t-3) = \text{rep}_3 \text{triang}(t)$$



Es. 2. Calcola la convoluzione circolare tra $x(t) = 4A \cos(2\pi t) + A$ e $y(t) = \sin(\pi t)$

Osserviamo che $x(t)$ ha periodo $T_p=1$ e per $y(t)$ vale $T_p=2$. La periodicità comune diventa $T_p=2$. Applichiamo direttamente la definizione di convoluzione con $t_0=0 \rightarrow z(t) = x *_{\text{cir}} y(t) = \int_0^2 x(u)y(t-u) du = \int_0^2 [4A \cos(2\pi u) + A] \sin(\pi(t-u)) du$

A questo punto otteniamo:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{A}{2j} \int_0^2 [2e^{j\pi u} + 2e^{-j\pi u} + 1] [e^{j\pi(t-u)} - e^{-j\pi(t-u)}] du \text{ esprimiamo tramite l'identità di Eulero} \\ &= \frac{A}{2j} \int_0^2 2e^{j\pi(t+u)} + 2e^{j\pi(t-3u)} + e^{j\pi(t-u)} - 2e^{-j\pi(t+u)} - 2e^{-j\pi(t-3u)} - e^{-j\pi(t-u)} du \\ &= A \int_0^2 [2\sin(\pi(t+u)) + 2\sin(\pi(t-3u)) + \sin(\pi(t-u))] du = 0 \end{aligned}$$

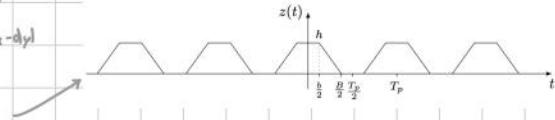
Es.3 Calcolare la convoluzione circolare tra due onde quadre di duty cycle d_x e d_y , rispettivamente con $d_x+d_y < 1$ e periodo T_p .

Possiamo scrivere le due onde quadre come $x(t) = \text{rep}_{T_p} x_0(t)$ e $y(t) = \text{rep}_{T_p} y_0(t)$ con $x_0(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{d_x T_p}\right)$ e $y_0(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{d_y T_p}\right)$

$$z(t) = x * y(t) = \text{rep}_{T_p} x_0 * y_0(t)$$

trapezio con basi $B = T_p(d_x + d_y)$ e $b = T_p(d_x - d_y)$

$$\text{e altezza } h = T_p \min(d_x, d_y)$$



Otteniamo il segnale periodico $z(t)$ in figura

Es.4 Valuta la convoluzione circolare tra $x(t) = 4\cos(2\pi t/T_p) + A$ e un segnale periodico $y(t)$, definito in $[-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p]$ come

$$y(t) = 2\cos(\pi t/T_p)$$

$y(t) = 2\cos(\pi t/T_p) \text{ rect}(t/T_p)$. La convoluzione circolare può essere scritta nella forma $z(t) = x *_{\text{circular}} y(t) = x * y_0(t)$

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(u) x(t-u) du = \int_{-\infty}^{1/2T_p} 2\cos(\pi u/T_p) [4\cos(2\pi(t-u)/T_p) + A] du \\ &= \int_{-1/2T_p}^{1/2T_p} [e^{j\pi u/T_p} + e^{-j\pi u/T_p}] [2e^{j\pi(2t-u)/T_p} + 2e^{-j\pi(2t-u)/T_p} + 1] du \\ &= \int_{-1/2T_p}^{1/2T_p} [2e^{j\pi(2t-u)/T_p} + 2e^{j\pi(3u-2t)/T_p} + e^{j\pi u/T_p}] du \\ &= \int_{-1/2T_p}^{1/2T_p} [2e^{j\pi(2t-u)/T_p} + 2e^{j\pi(3u-2t)/T_p} + e^{j\pi u/T_p} + 2e^{j\pi(2t-3u)/T_p} + 2e^{-j\pi(2t-u)/T_p} + e^{-j\pi u/T_p}] du \\ &= A \int_{-1/2T_p}^{1/2T_p} [4\cos(\pi \frac{u-2t}{T_p}) + 4\cos(\pi \frac{3u-2t}{T_p}) + 2\cos(\pi \frac{u}{T_p})] du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Risolvendo l'integrale otteniamo } z(t) &= x *_{\text{circular}} y(t) = \frac{AT_p}{\pi} \left[4 \sin\left(\pi \frac{u-2t}{T_p}\right) + \frac{4}{3} \sin\left(\pi \frac{3u-2t}{T_p}\right) + 2 \sin\left(\pi \frac{u}{T_p}\right) \right] \frac{1}{2} T_p \\ &= \frac{AT_p}{\pi} \left[4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T_p}\right) + \frac{4}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T_p}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &\quad - 4 \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T_p}\right) - \frac{4}{3} \sin\left(-\frac{3\pi}{2} - \frac{2\pi t}{T_p}\right) - 2 \sin(-\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{AT_p}{\pi} \left[8 \cos\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) - \frac{8}{3} \cos\left(\frac{6\pi t}{T_p}\right) + 4 \right] \\ &= \frac{4AT_p}{\pi} \left[\frac{8}{3} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_p}\right) + 1 \right] \end{aligned}$$

Es.5 Valuta la convoluzione circolare tra un segnale $x(n)$ periodico di periodo N e definito nel periodo $[0, N]$ come

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N/2 - 1 \\ 0, & N/2 \leq n < N \end{cases} \text{ e se stesso (self-convolution)}$$

Ricorda $x(n)$ come $x(n) = \text{rep}_N x_0(n)$ con $x_0(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0, K_x] \\ 0, & \text{altri} \end{cases}$ e $K_x = \begin{cases} N/2 - 1, & N \text{ pari} \\ N/2 - 3/2, & N \text{ dispari} \end{cases}$

quindi $z(n) = x *_{\text{circular}} x(n) = \text{rep}_N y_0 * x_0(n)$ con $y_0 * x_0(n) = \begin{cases} 1+n, & n \in [0, K_x] \\ 1+2K_x - n, & n \in (K_x, 2K_x] \\ 0, & \text{altri} \end{cases}$ con $2K_x = \begin{cases} N-2, & N \text{ pari} \\ N-3, & N \text{ dispari} \end{cases}$

Es.6 Idenfifica un segnale periodico $x(t)$ la quale self-circular convolution fornisce $z(t) = x * x(t) = \text{rep}_{T_p} \text{triang}(\frac{t}{T_p} - 1)$

(scriviamo $x(n) = \text{rep}_N u(n)$ tale che $u * u(t) = \text{triang}\left(\frac{t-1/2T_p}{1/2T_p}\right) \rightarrow \text{triangolo isoscele con base } T_p$.

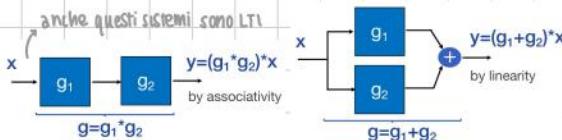
Scegliamo $u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}T_p} \text{rect}\left(\frac{t-T_p/4}{T_p/2}\right) \rightarrow \text{onda quadra } x(t) \text{ di duty cycle } 1/2$.

Notiamo che $\text{rect}\left(\frac{t}{T_p/2}\right) * \text{rect}\left(\frac{t}{1/2T_p}\right) = \frac{1}{2} T_p \text{triang}\left(\frac{t}{1/2T_p}\right)$

2.6. Filters in the time-domain

Abbiamo appreso che un sistema lineare tempo-invarianti è definito univocamente dalla sua risposta impulsiva, che connette l'input e l'output con una convoluzione. Ricordiamo che $x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^t x(u)h(t-u)du \rightarrow$ se $h(t) = \delta(t)$ allora $y(t) = x(t)$ e la trasformazione è un'identità.

A questo punto possiamo chiederci se e quali relazioni ci sono tra i sistemi LTI e le proprietà dei sistemi lineari?



Una serie di segnali LTI è un sistema la quale risposta impulsiva è la convoluzione tra le risposte dei segnali che lo compongono, per la proprietà associativa. ($g = g_1 * g_2$)

Per il parallelo, invece, secondo la linearità, la risposta impulsiva è la somma delle risposte dei segnali del sistema ($g = g_1 + g_2$)

Ogni sistema LTI è lineare e tempo-invarianti per definizione. Inoltre:

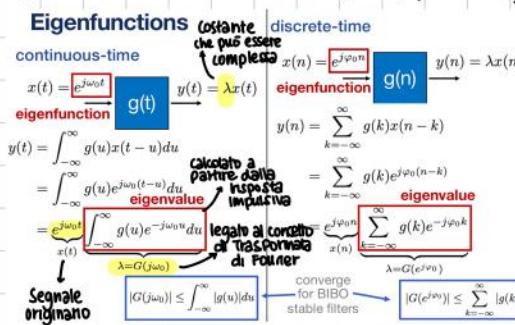
- è reale, ogni qualvolta la risposta impulsiva è reale;
- è causale, se la risposta impulsiva è zero, ovvero è nulla a tempi negativi;
- è bibostabile, quando la risposta impulsiva è assolutamente integrabile a tempi continui o assolutamente sommabile a tempi discreti.

controllo più semplice
rispetto alla classica
prova di BIBO stabilità

$$L_g < \infty \quad L_g = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Possiamo individuare un ulteriore aspetto importante degli esponenziali complessi come autofunzioni dei sistemi LTI



In caso continuo λ è definito come un integrale dipendente dal valore di ω_0 . Il valore $G(\omega_0)$ è complesso.

In caso discreto, almeno per quanto riguarda gli esponenziali complessi; la proprietà rivela che l'azione di un sistema LTI è un semplice prodotto.

il concetto di auto funzione a tempi continui e discreti è lo stesso, cambiano i tempi

Filters in the time-domain

E.s.1. Dimostra che una condizione necessaria e sufficiente per un filtro a tempo discreto per essere bibostabile è che la risposta impulsiva sia assolutamente sommabile

Prima di tutto dimostriamo che una $g(n)$ assolutamente sommabile identifica un sistema BIBO stabile:

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|g(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| \cdot |g(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_x \cdot |g(n-k)| = L_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| = L_x \cdot L_g$$

A questo punto vogliamo dimostrare che un filtro BIBO stabile implica l'assoluta sommabilità di $g(n)$.

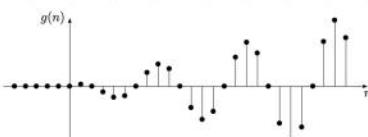
Assumendo per assurdo $L_g = \infty$, costruiremo un segnale limitato $x(n) = e^{-jθ(-n)}$ dove $g(n) = |g(n)|e^{jθ(n)}$, segnale che soddisfa la condizione $|x(n)| = 1$.

Tuttavia, il segnale limitato produce un output che non è limitato per $n=0$. Infatti $y(0) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)g(0-k)$

$$\text{ovvero } y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk} x(-k) \cdot g(-k) e^{j0(-k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(-k)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| = L_g.$$

Abbiamo dimostrato la tesi per assurdo.

Esempio 2. Stabilire se il sistema con risposta impulsiva $g(n) = n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) u_1(n)$ è BIBO stabile.



Dal disegno possiamo osservare che la risposta impulsiva non "svanisce" nel tempo e quindi il valore di $g(n)$ tende ad aumentare all'incremento di n . Concludiamo che il segnale NON è assolutamente integrabile e quindi NON è BIBO stabile.

Esempio 3. Stabilire se il sistema con la risposta impulsiva $g(t) = e^{-t} (\cos(t) u_1(t))$ è BIBO stabile.

$$\text{In questo caso, } L_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-t} |\cos(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-t} dt = a. \text{ Il sistema è BIBO stabile}$$

In realtà non è necessario conoscere il vero valore di L_g , basta sapere che sia limitato.

Esempio 4. Per i sistemi che seguono stabilisce se sono LTI (Filtri). Se sì, identifica la risposta impulsiva e sfruttala per constatare la loro memoria e se sono BIBO stabili.

$$* y(t) = 2 \int_{t-2}^{t+2} x(u) e^{4-u} du - x(t+2)$$

Possiamo sostituire gli estremi di integrazione con una funzione rettangolare per ottenerne:

$$y(t) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot e^{-|t-u|} du - x(t+2)$$

Questo sistema ha la risposta impulsiva $g(t) = e^{-|t|} \text{rect}(|t|/4) + \delta(t+2)$ con estensione $e(g) = [-2, 2]$, quindi è un filtro dinamico (ma non causale) che è anche BIBO stabile dato che $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_{-2}^2 e^{-|t|} dt + 1 = e^2 - e^{-2} + 1 < \infty$

Il filtro è reale dato $g(t)$ reale (e positivo)

$$* y(t) = x(t-2) \int_{-1}^{t-2} x(u) \cos(t-u) du + 3x(t-1)$$

Sostituiamo gli estremi di integrazione con due gradini unitari

$$y(t) = x(t-2) \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot 1(u+1) \cdot \cos(t-u) \cdot 1(t-u-2) du + 3x(t-1)$$

Tuttavia, l'integrale non può prendere la forma di una convoluzione, quindi il sistema Non è un filtro.

$$* \text{ Somma di due filtri con risposta impulsiva } g_1(n) = \sin(\theta n) \text{ e } g_2(n) = a^n u_0(n), -1 < a < 1$$

Individuiamo la risposta impulsiva per convoluzione in tempo-discreto $\rightarrow g(n) = g_2 * g_1(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k g_1(k) \cdot \frac{1}{2j} [e^{j\theta(n-k)} - e^{-j\theta(n-k)}]$

$$\text{quindi } g(n) = \frac{e^{j\theta n}}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{j\theta})^k - \frac{e^{-j\theta n}}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{-j\theta})^k = \frac{1}{2j} \frac{e^{j\theta n}}{1-ae^{-j\theta}} - \frac{1}{2j} \frac{e^{-j\theta n}}{1-ae^{j\theta}} = R \left[\frac{e^{j\theta n}}{1-ae^{j\theta}} \right]$$

Definendo $b = 1 - ae^{j\theta} = 1 - le^{j\varphi_\theta}$ otteniamo $g(n) = \frac{1}{b} \sin(\theta n - \varphi_\theta)$ con estensione $e(g) = (-\infty, \infty) \rightarrow$ il filtro NON è BIBO stabile, ma è reale

in quanto $g(n) \in \mathbb{R}$.

$$y(t) = \int_{t-1}^{2t-1} x(u) e^{t-u} du - x(t-2)$$

Sostituiamo gli estremi di integrazione con due gradini unitari

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{t-u} 1(u-t+1) 1(2t-u-1) du - x(t-2)$$

Il contributo $1(2t-u-1)$ non può essere espresso come una funzione di $t-u$, quindi il sistema NON è LTI.

$$y(n) = \begin{cases} \sum_{k=-10}^{n-3} x(k) e^{-(n-k)} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta_0(k+10) e^{-(n-k)} \delta_0(n-k-9), n \geq 0$$

Il sistema NON è tempo-invariante, quindi NON è LTI.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-2} e^{5(t-\tau)} x(\tau+2) d\tau + 3x(t-2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u+2) e^{5(t-u-4)} 1(t-u-2) du + 3x * \delta_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) e^{5(t-v+2)} 1(t-v) dv + 3x * \delta_2(t)$$

è un sistema LTI con risposta impulsiva $g(t) = e^{5(t+2)} + 3\delta(t-2)$ con $e(g) = [0, \infty)$ quindi è causale.

La risposta impulsiva è reale quindi anche il filtro è reale. Tuttavia, il filtro non è BIBOstable dato che $g(t)$ diverge per $t \rightarrow \infty$.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ (\cos(t+2)) \int_{-1}^{t-2} x(\tau) d\tau & t \geq 2 \end{cases}$$

$$y(t) = \cos(t+2) \cdot \begin{cases} 0 & t < 2 \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(u) 1(u+2) 1(t-u-2) du & t \geq 2 \end{cases}$$

Il sistema NON è LTI a causa del prodotto per $\cos(t+2)$ che è lineare.

Ma non tempo-invariante (anche $1(u+2) \cdot x(u)$ NON è tempo-invariante).

$$y(t) = x * g(t), g(t) = \text{sinc}(8t)$$

Il sistema è evidentemente LTI con risposta impulsiva $g(t) = \text{sinc}(8t)$ è anche dinamico e reale.

Tuttavia, il filtro NON è BIBOstable in quanto il sinc non è assolutamente integrabile.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-3} x(k) e^{-n+k}, n \geq 0$$

$$0 & n < 0$$

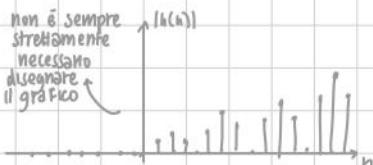
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-n+k}, n \geq 0$$

$$\rightarrow \text{Rivela una convoluzione con } g(n) = e^{-n} \cdot 1(n-3) \text{ (causale e BIBOstable)}$$

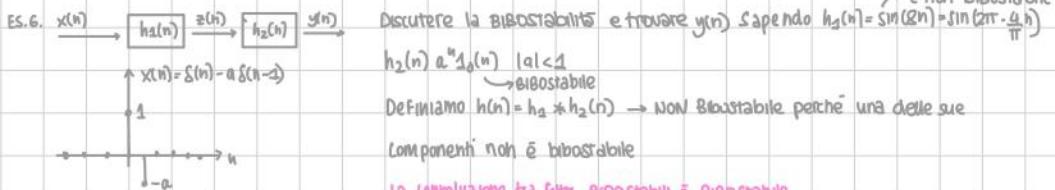
Ottieniamo $y(n) = \delta_0(n) \cdot x * g(n)$ dove la moltiplicazione per il gradino unitario rende il sistema Non LTI.

E.S. Si definisce un filtro discreto con risposta impulsiva $h(n) = n \cos(n\pi/4) \delta_0(n)$. È BIBOstable?

non è sempre
strettamente
necessario
disegnare
il grafico



$L_h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$ Non è BIBOstable perché non è assolutamente sommabile. Un controesempio sarebbe $x(n) = e^{-jn\pi/4}$ se $h(n) = h(n)e^{jn\pi/4}$



A questo punto $y(n) = x * h_1 * h_2(n)$

\downarrow

$$y(n) = (x * h_2) * h_1(n)$$

quindi $y(n) = \delta * h_2(n) = h_2(n) = \sin(2n)$

$x * h_2(n) = h_2(n) - a h_2(n-1) = \delta(n)$

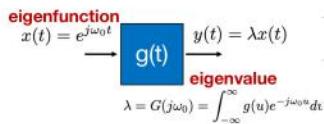
non-periodico
e non BIBOSTABILE

FOURIER TRANSFORM

Fourier series

3.1. Fourier series (part 1) - segnali continui e periodici

La trasformata di Fourier è la trasformata per segnali periodici a tempo continuo.



— By linearity we have

$$x(t) = \sum_k A_k \cdot e^{j\omega_k t}$$

We focus on **periodic signals** and linear complex exponentials that are periodic T_p
 $\omega_k = k \frac{2\pi}{T_p}$

$$y(t) = \sum_k [A_k G(j\omega_k)] \cdot e^{j\omega_k t}$$

(esponentiali in relazione armonica)

Abbiamo imparato in precedenza che un esponenziale complesso ($e^{j\omega_0 t}$)

Viene mappato in un filtro in $\lambda x(t)$ dove λ è una costante complessa che dipende dal valore di ω_0 .

A questo punto, se un segnale può essere espresso come la composizione di un esponenziale complesso con pulsazione ω_k , allora l'azione del filtro è semplice: moltiplica ogni esponenziale complesso per un valore dipendente da ω_k , definito come $G(j\omega_k)$.

Vogliendo concentrarsi solo su segnali periodici di periodo T_p , il valore degli esponenziali complessi che ci interessano è nella forma $\omega_k = k \frac{2\pi}{T_p}$. Nella loro parte reale ed immaginaria sono **sinusoidi di periodo $T_p/|k|$** , tutti con stesso periodo T_p .

periodic T_p

$$x(t) = \sum_k X_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

signal components

I vari componenti di un segnale possono essere estratti usando regole standard sui vettori, correttamente rielaborate per lo spazio periodico del segnale

La **decomposizione in base ortogonale** è illustrata dalla tabella rappresentata. Per proiettare una base ortogonale dobbiamo semplicemente aggiungere i contributi delle proiezioni lungo ogni vettore della base. La chiave sta nell'identificare un prodotto interno corretto, che può essere definito come l'integrale su un periodo di $x(t) \cdot y^*(t)$. Il punto fondamentale è quello di identificare una base ortogonale per segnali periodici a tempo continuo, che è identificata dall'esponenziale complesso $b_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{k2\pi}{T_p}$.

Complex vectors	Periodic signals	generalizzazione del prodotto interno tra vettori
- Inner product $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i \underline{y_i}$ complesso coniugato	$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)y^*(t)dt$	
- Projection along y $x_y = \frac{y}{\ y\ } \left\langle x, \frac{y}{\ y\ } \right\rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\ y\ ^2}$	$x_y(t) = y(t) \frac{\langle x(t), y(t) \rangle}{\ y(t)\ ^2}$	componente di x alla grida lungo y
- Decomposition wrt. an orthogonal basis $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ $x = \sum_i \frac{\langle x, b_i \rangle}{\ b_i\ ^2} b_i$	$\langle b_i(t), b_j(t) \rangle = 0$ $x(t) = \sum_k b_k(t) \frac{\langle x(t), b_k(t) \rangle}{\ b_k(t)\ ^2}$	signal components

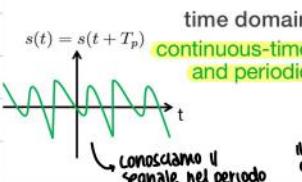
Il segnale è in un certo senso un vettore di lunghezza infinita

The Fourier series

Fourier series

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$$

signal reconstruction



projection onto an orthogonal basis

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

From S_k we can reconstruct the signal

Fourier domain
discrete-pulsation and aperiodic

utile per comprendere il funzionamento di un filtro

an alternative (and equivalent) signal representation

gli S_k sono le ampiezze associate a ciascun esponenziale complesso

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

Fourier series coefficients

signal components

they represent the value of the projection along the k^{th} element of the basis.

$$S_k$$

ω_0

first harmonic

è possibile rappresentare gli S_k come un segnale discreto

È possibile estrarre i coefficienti da $s(t)$ in tempo continuo e periodico.

Da S_k , invece, è possibile ricostruire il segnale se sussistono determinate condizioni.

$S(t)$ e S_k sono alternative equivalenti per la rappresentazione di un segnale.

Quando è possibile ricostruire perfettamente un segnale a partire dai suoi coefficienti di Fourier s_k ($\cos(k)$)? Definiamo a tal proposito alcune condizioni di invertibilità:

- qualsiasi segnale con energia finita in un periodo (condizione di Riesz-Fisher)
- qualsiasi segnale assolutamente integrabile (con discontinuità finite + numero finito di max e min) (condizione di Dirichlet)
- qualsiasi segnale con numero finito di delta in un periodo (condizione di Dirac)

In generale, in matematica, per ricostruzione perfetta di un segnale si intende che converge praticamente ovunque.

Nei punti di discontinuità è infatti osservabile il fenomeno di Gibbs.

La convergenza della serie di Fourier non è di tipo puntuale. La serie converge in media quadratica

Useful pairs

	time domain	Fourier domain
constant	1	$\delta(k)$ delta
delta dual pair	$\text{rep}_{T_p} \delta(t)$	$\frac{1}{T_p}$ constant
rect	$\text{rep}_{T_p} \text{rect}(\frac{t}{T_p})$	$d \text{sinc}(kd)$ sinc
sinc dual pair	$N \text{sinc}_N(\frac{Nt}{T_p})$ $N = 1 + 2M$	$\text{rect}(\frac{k}{N})$ rect
exponential	$e^{jmw_0 t}$	$\delta(k - m)$ delta
delta dual pair	$\text{rep}_{T_p} \delta(t - t_1)$	$\frac{1}{T_p} e^{-jkw_0 t_1}$ exponential
sinusoid	$\cos(nw_0 t + \varphi_0)$	$\frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \delta(k - n) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \delta(k + n)$

Fourier series (part 1)

E.s. Dimostra che le seguenti coppie della serie di Fourier sono corrette:

$$* S(b) = \text{comb}_T(t_p) = \text{rep}_{T_p} \delta(t) \quad \text{e } S_k = \frac{1}{T_p}$$

n.b.: scegliamo l'intervallo

d'integrazione $[-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p]$ in

modo tale da includere solo un

delta del comb.

Calcoliamo i coefficienti di Fourier applicando la relazione con il comb, ovvero

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} \text{rep}_{T_p} \delta(t) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} \text{rep}_{T_p} \delta(t) e^{-jkw_0 t} dt = \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} \delta(t) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{T_p} e^{-jkw_0 0} = \frac{1}{T_p}$$

$$* S(b) = 1 \quad \text{e } S_{ik} = \delta(ik)$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(ik) e^{jkw_0 b} = e^{j0w_0 b} = 1$$

$$* S(b) = \text{rep}_{T_p} \text{rect}(\frac{t}{T_p}) \quad \text{e } S_{ik} = d \text{sinc}(kd), \text{ per } 0 < d < 1$$

$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} \text{rep}_{T_p} \text{rect}(\frac{t}{T_p}) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} \text{rep}_{T_p} \text{rect}(\frac{t}{T_p}) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} \text{rect}(\frac{t}{T_p}) e^{-jkw_0 t} dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} e^{-jkw_0 t} dt$$

Risolvendo l'integrale otteniamo:

$$S_k = \begin{cases} \frac{d}{Tp} & , k=0 \\ \frac{1}{Tp} \left[\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} - \frac{e^{jk\omega_0 t}}{jk\omega_0} \right] \Big|_{-d/2Tp}^{d/2Tp} & , k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} d & , k=0 \\ \frac{e^{jk\omega_0 d/2Tp} - e^{-jk\omega_0 d/2Tp}}{jk\omega_0 Tp} & , k \neq 0 \end{cases} = \frac{e^{jk\omega_0 T} - e^{-jk\omega_0 T}}{2j\pi k} = \frac{\sin(k\omega_0 T)}{k\pi} , k \neq 0$$

$$\omega_0 T = 2\pi$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\sin(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Il risultato può essere scritto in forma compatta come $S_k = d \operatorname{sinc}(kd)$

$$* S(t) = M \operatorname{sinc}_M(Mt/T_p) = \frac{\sin(\pi M t/T_p)}{\sin(\pi t/T_p)}, M = 1 + 2N \in \mathbb{Z}, S_p = \operatorname{rect}(k/M)$$

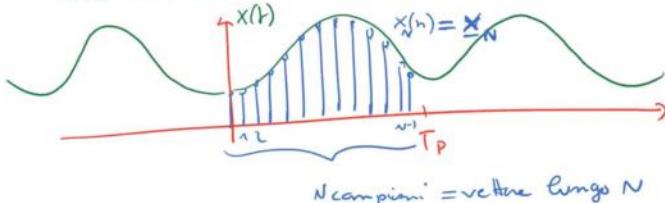
$$S_k = \operatorname{rect}\left(\frac{k}{2+2N}\right) = \begin{cases} 1, & k \in [-N, N] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{quindi } S(t) = \sum_{k=-N}^N e^{jk\omega_0 t} = \sum_{m=0}^{2N} e^{j(m-N)\omega_0 t} = e^{-jN\omega_0 t} \sum_{m=0}^{2N} (e^{j\omega_0 t})^m = e^{-jN\omega_0 t} \cdot \frac{1-e^{j(4+N)\omega_0 t}}{1-e^{j\omega_0 t}}$$

$$\text{quindi } \frac{e^{-jN\omega_0 t} - e^{-j(4+N)\omega_0 t}}{1-e^{j\omega_0 t}} \cdot \frac{e^{-jN\omega_0 t}}{e^{-jN\omega_0 t}} = \frac{e^{-j(\frac{1}{2}+N)\omega_0 t} - e^{-j(\frac{1}{2}+N)\omega_0 t}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega_0 t} - e^{-j\frac{1}{2}\omega_0 t}} = \frac{\sin((\frac{1}{2}+N)\omega_0 t)}{\sin(\frac{1}{2}\omega_0 t)} = \frac{\sin(\frac{1}{2}M\omega_0 t)}{\sin(\frac{1}{2}\omega_0 t)} = M \operatorname{sinc}_M\left(\frac{Mt}{T_p}\right)$$

$$* S(t) = \cos(n\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{e } S_p = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \delta(k-n) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \delta(k+n)$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \delta(k-n) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \delta(k+n) \right] e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-jn\omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{jn\omega_0 t + \varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-jn\omega_0 t + \varphi_0} = \cos(n\omega_0 t + \varphi_0)$$

DAI VETTORI AI SEGNAI PERIODICI

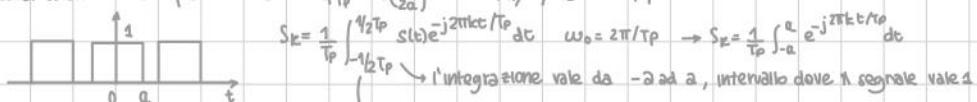


$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle x_N, y_N \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^* = \sum_{m=0}^{N-1} x(nT) y^*(nT) \quad T = \frac{T_p}{N}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{T \sum_{m=0}^{N-1} x(nT) y^*(nT)}_{\text{la moltiplicazione per la costante } T \text{ serve in modo tale che il limite sia uguale all'integrale}} = \int_0^{T_p} x(t) y^*(t) dt$$

la moltiplicazione per la costante T serve in modo tale che il limite sia uguale all'integrale

Esempio 2 Consideriamo l'onda quadra $s(t) = \operatorname{rect}_{Tp} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2a}\right)$ con duty cycle $d = 2a/T_p$



Scelgo questo intervallo di integrazione in modo da considerare solo il rettangolo centrato in zero

Quindi:

$$S_k = \frac{1}{T_p} \frac{e^{-j2\pi k T_p/2} - e^{j2\pi k T_p/2}}{j2\pi k} \Big|_{-a}^a = \frac{e^{j2\pi k a/T_p} - e^{-j2\pi k a/T_p}}{j2\pi k} = \frac{\sin(2\pi k a/T_p)}{\pi k} = \frac{\sin(\pi k d)}{\pi k} = \operatorname{sinc}(kd) \quad \text{d=duty cycle}$$

valido anche per $k=0$, caso da trattare a se stante

impulso fondamentale

3.2. Fourier Series (part 2 - properties)

time domain	Fourier domain
time-reversal $x(-t)$	X_{-k}
conjugation $x^*(t)$	X_{-k}^*
symmetries	
even $x(t) = X(-t)$	even $X_k = X_{-k}$
odd $x(t) = -X(-t)$	odd $X_k = -X_{-k}$
real $x(t) = X^*(t)$	Hermitian $X_k = X_{-k}^*$
real + even $x(t) = X^*(t) = X(-t)$	real + even $X_k = X_{-k}^* = X_{-k}$
real + odd $x(t) = X^*(t) = -X(-t)$	imaginary + odd $X_k = X_{-k}^* = -X_{-k}$

In gen erale, se il segnale è reale, le serie troncate e le serie danno dei contributi reali

In molti casi risulta più semplice ottenere i coefficienti di Fourier tramite relazioni note

- l'inversione temporale corrisponde ad una inversione equivalente nel dominio di Fourier;
- la conjugazione nel dominio del tempo equivale a conjugazione + ribaltamento nel dominio di Fourier.

Queste relazioni influiscono sulle simmetrie

$$S_{-k} = S_k^* \rightarrow \text{parte reale pari, parte immaginaria dispari}$$

↳ proprietà utile per la serie trigonometrica *

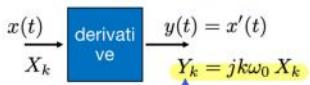
$$S(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k e^{j k \omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} S_k^* e^{-j k \omega_0 t} = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 R[S_k] e^{j(k \omega_0 t + \theta_k)}$$

esprimibile come
un caso meno
complesso

Oltre all'ovvia proprietà di linearità, in quanto l'integrale è un'operazione lineare:

- la traslazione di tempo t_0 corrisponde alla modulazione, ovvero la moltiplicazione per l'esponentiale complesso $e^{-j k \omega_0 t_0}$. Quando viene applicata la modulazione si cambia segno all'esponente
- la convolution circolare diventa T_p volte il prodotto, mentre il prodotto di due segnali diventa una convolution a pulsazione discreta. Queste due operazioni sono duali
- la derivata nel tempo corrisponde ad un prodotto per $j k \omega_0$
- il coniugio induce coniugio + ribaltamento

Secondo la regola dell'inversione è possibile risalire al segnale, a partire dalla derivata.



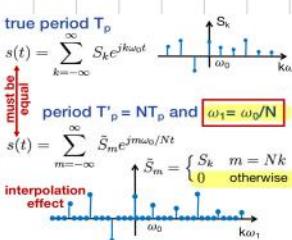
the value at $k=0$ is lost since $Y_0=0$, the others are multiplied by a known factor

Moltiplicare X_k per $j k \omega_0$ implica che è possibile ricavare i coefficienti originali dividendo per $j k \omega_0$. Questa regola è vera per tutti i coefficienti tranne quelli con $k=0$. Questo valore viene, infatti, perso perché è moltiplicato per zero.

Possiamo ricostruire il segnale solo se conosciamo il suo valore medio.

Inoltre, il valore medio m_x corrisponde a X_0 , coefficiente di Fourier per $k=0$

$$X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{j k \omega_0}, & k \neq 0 \\ m_x, & k = 0 \end{cases}$$



Se consideriamo un periodo errato?

Se consideriamo due serie di Fourier, una per il periodo minimo T_p e l'altra per $N T_p$, devono raffigurare lo stesso segnale. Ciò significa che i coefficienti alle stesse pulsazioni devono coincidere, $K \omega_0 = m \omega_1$.

Da questa relazione concludiamo che i coeff. per la serie a periodo non minimo valgono zero, tranne quando $m = kN$.

Fourier series (part 2 - properties)

ES.1. Prova che ogni segnale periodico reale a tempo continuo può essere espresso con la serie trigonometrica:

$$s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2S_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \quad S_k = |S_k| e^{j\varphi_k} \text{ con } \omega_0 = 2\pi/T_p.$$

Dato che il segnale è reale, possiamo sfruttare la simmetria Hermitiana secondo cui $S_k = S_{-k}^*$ quindi $S_{-k} = S_k^* e^{-j\varphi_k}$. In questo modo dimostriamo che S_0 (valore medio) $\in \mathbb{R}$. Detto questo, possiamo scrivere $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} + S_0 + \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t} = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [S_k e^{jk\omega_0 t} + S_{-k} e^{-jk\omega_0 t}]$ quindi $s(t) = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |S_k| [e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}] = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |S_k| [e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)}] = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

ES.2. Calcola i coefficienti di Fourier per $s(t) = e^{j\omega_0 t}$ sfruttando la coppia di Fourier $x(t) = 1, X_k = \delta(k)$

Dato $s(t) = e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \cdot 1 = e^{j\omega_0 t} \cdot x(t)$, sfruttando la regola di modulazione otteniamo $S_k = X_{k-m} = \delta(k-m)$

ES.3. Calcola i coefficienti di Fourier per $s(t) = \text{rep}_{T_p} \text{triang}(2t/T_p)$

Il segnale è la ripetizione periodica di un triangolo. Sapendo che il triangolo è il prodotto della convoluzione tra

due rettangoli, possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = U * \text{circ}_d(t)$ tra due onde

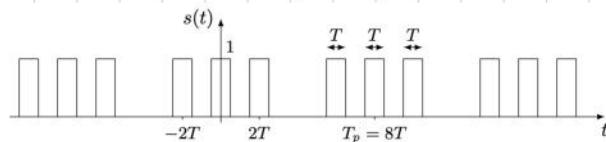
quadre con duty cycle $d = 1/2$

$$U(t) = \text{rep}_{T_p} \frac{1}{\sqrt{\pi T_p}} \text{rect}\left(\frac{t}{dT_p}\right), \quad d = 1/2 \text{ in modo tale che il triangolo abbia altezza 1}$$

A questo punto i coefficienti di Fourier risultano essere omni. $U_k = \frac{1}{\sqrt{dT_p}} \text{sinc}(kd)$

Inoltre, dalla proprietà della convoluzione circolare otteniamo $S_k = T_p X_k Y_k = T_p \text{sinc}^2(kd) = \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$

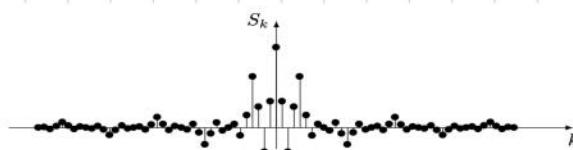
ES.4. Calcola i coefficienti di Fourier del segnale raffigurato



Il segnale raffigurato può essere interpretato come la composizione di tre onde quadre di duty cycle 1/8. Nello specifico

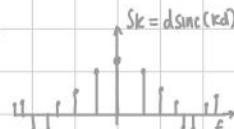
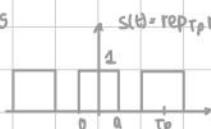
$$U(t) = \text{rep}_{T_p} \text{rect}\left(\frac{t}{8T_p}\right) \text{ con } U_k = \text{sinc}(kd), \quad d = 1/8$$

$$T_p = 8T. \text{ Possiamo scrivere } s(t) = U(t) + U(t-2T) + U(t+2T). \text{ Per la proprietà di traslazione otteniamo } S_k = U_k + U_{k-2} e^{-j\omega_0 2T} + U_{k+2} e^{j\omega_0 2T} \text{ quindi } S_k = U_k [1 + 2\cos(k\omega_0 2T)] = U_k [1 + 2\cos(k\pi/2)] = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{8}\right) [1 + 2\cos(k\pi/2)], \text{ per } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} \text{ otteniamo } \omega_0 = \frac{\pi}{4T}$$



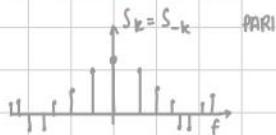
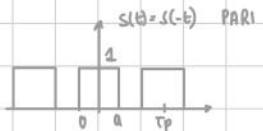
$s(t)$ è un segnale pari e reale, quindi anche S_k lo è

ES.5



$$\begin{aligned} s(t) &= S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|S_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \\ &= d + \sum_{k=1}^{\infty} 2d \text{sinc}(kd) \cos(k\omega_0 t) \end{aligned}$$

ES.6 Un ribaltamento nel dominio del tempo induce un ribaltamento in frequenza



→ i coefficienti presentano simmetria pari (vale per segnali reali e complessi)

ES.7 $s(t) = \text{comb}_{T_p}(t)$



$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0 + T_p} s(t) e^{-j k \omega_0 t} dt \quad \omega_0 = 2\pi/T_p$$

Nell'integrazione consideriamo l'intervallo $[-T_p/2, T_p/2]$ per considerare solo il delta centrato in zero

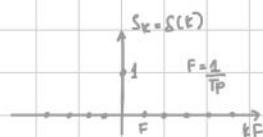
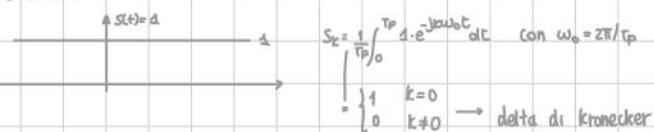
$$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} s(t) e^{-j k \omega_0 t} dt \rightarrow S_k = \frac{1}{T_p} = M_S = S_k(0)$$

$$\text{comb}_{T_p}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - n T_p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p} e^{-j k \omega_0 t}$$

Inoltre $\rho_c = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} \delta(t) \cdot \delta(t) dt = \delta(0) = \infty$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_p^2} = \infty$$

ES.8 $s(t) = 1$



È possibile verificare i calcoli con:

$$M_S = 1 \text{ ok.}$$

$$P_S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 = |S_0|^2 = 1 \equiv |s(\omega)|^2 = 1 \text{ ok.}$$

il segnale costante è il duale di un impulso ideale

$$s(t) = 1 \xrightarrow{3} S_k = \delta(k) \text{ Kronecker}$$

$$s(t) = \text{comb}_{T_p}(t) \text{ Diac} \xrightarrow{3} S_k = \frac{1}{T_p}$$

ES.9 $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ con $\omega_0 = 2\pi/T_p$



Rappresentiamo il coseno con Eulero

$$s(t) = \frac{A e^{j \varphi_0}}{2} e^{j \omega_0 t} + \frac{A e^{-j \varphi_0}}{2} e^{-j \omega_0 t}$$

$$= \underbrace{\frac{A}{2} e^{j \varphi_0}}_{B} e^{j \omega_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j \varphi_0}}_{B^*} e^{-j \omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_k e^{j k \omega_0 t}$$

In questo caso basta osservare la formula:

$$S_k = \begin{cases} B & k=d \\ B^* & k=-d \\ 0 & |k| \neq d \end{cases}$$



sfruttando la legge di modulazione $x(t)e^{j m \omega t} \rightarrow X_{k-m}$

$$s(t) = \frac{A}{2} e^{j \varphi_0} e^{j \omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j \varphi_0} e^{-j \omega_0 t}$$

possiamo interpretarlo come combinazione lineare

$$I \text{ coefficienti della serie di Fourier diventano } S_k = \frac{A}{2} e^{j \varphi_0} S(k-d) + \frac{A}{2} e^{-j \varphi_0} S(k+d)$$

$$e^{j m \omega t} \xrightarrow{3} S(k-m)$$

stesso valore assoluto, ma sono numeri diversi

ES.10 $s(t) = x(t) \cos(10\omega_0 t)$ periodico T_p ($\omega_0 = 2\pi/T_p$)

$$S(t) = \frac{1}{2} x(t) e^{j 10\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j 10\omega_0 t}$$

Sono entrambi segnali periodici T_p + possiamo utilizzare la modulazione

$$S_k = \frac{1}{2} x_{k-10} + \frac{1}{2} x_{k+10}$$

Ovvero: ritroviamo la forma d'onda del segnale intorno a +10 e -10

La media del segnale vale $m_s = S_k(0) = 0$



ES.11 $s(t)$ è reale e dispanso, periodico di periodo T_p , $S_k = 0$ per $|k| > 1$ e $P_S = 4$, $s(t) = ?$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

$$\text{Da } P_S = 4 \rightarrow \sum_k |S_k|^2 = |S_0|^2 + |S_1|^2 + |S_{-1}|^2 = 4$$

$$S_k = \begin{cases} S_0 & k=0 \\ S_1 & k=1 \\ S_{-1} & k=-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Reale e dispanso $\rightarrow s(t) = s^*(t)$ ovvero $s(t) = -s(-t) \rightarrow S_k = -S_{-k}$ segnale immaginario ed dispanso

da qui deduiamo che $S(0) = -S(0) \rightarrow 0$ e $S_{kA} = -S_{kA}$

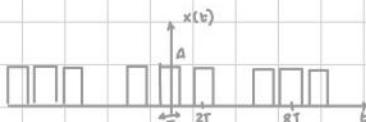
Ovvero $S_k = \begin{cases} jA & k=1 \\ -jA & k=-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{j \omega_0 k t} = jA e^{j \omega_0 t} - jA e^{-j \omega_0 t} = -2A \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Da } P_S = 4 \rightarrow |S_0|^2 + |S_{\pm 1}|^2 = 1 = A^2 + A^2 \rightarrow A^2 = \frac{1}{2} \rightarrow A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

quindi $s(t) = \pm \sqrt{2} \sin(\omega_0 t) = \pm \sqrt{2} \sin(2\pi t/\tau) = \pm \sqrt{2} \sin(\pi t)$

ES.12



$$T_p = 8T$$

$$x(t) = \operatorname{rep}_{T_p}(A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + A \operatorname{rect}\left(\frac{t-2T}{T}\right) + A \operatorname{rect}\left(\frac{t+2T}{T}\right))$$

Si può interpretare il sistema come una collezione di onde quadre

$$u(t) = \operatorname{rep}_{T_p} A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad d = \frac{1}{8} \text{ e } T_p = 8T \rightarrow U_k = A \operatorname{dinc}(kd)$$

$$x(t) = u(t) + u(t-2T) + u(t+2T)$$

$$X_k = U_k + U_{k-2} e^{-j \omega_0 k 2T} + U_{k+2} e^{-j \omega_0 k (-2T)}$$

$$\rightarrow X_k = U_k (1 + e^{-j \omega_0 k 2T} + e^{-j \omega_0 k (-2T)})$$

$$U_k (1 + 2 \cos\left(\frac{2\pi k 2T}{8T}\right))$$

$$= A \operatorname{dinc}(kd) [1 + 2 \cos(\pi/2)] \text{ con } d = 1/8$$

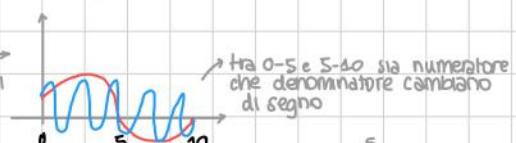
\rightarrow Coefficienti reali e pari a partire da un segnale reale e pari

ES.13 Calcolare la potenza di $s(t) = \frac{3 \sin(\pi t)}{5 \sin(\frac{\pi t}{5})}$ $P_S = ?$

Calcolare P_S nel dominio del tempo è troppo difficile \rightarrow ci spostiamo nel dominio di Fourier

$$x(t) = \frac{3 \sin(2\pi t/2)}{5 \sin(2\pi t/10)} \xrightarrow{T_p=2} \quad \left. \begin{array}{l} T_p=2 \\ T_p=10/5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Identificabile}} \text{osservando il grafico}$$

Si ottiene un sinc periodico



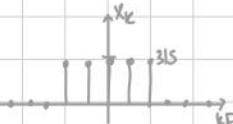
$$X(t) = \frac{3}{5} \frac{e^{j \pi t} - e^{-j \pi t}}{e^{j \pi t/5} - e^{-j \pi t/5}} = \frac{3}{5} \frac{e^{j \pi t} (1 - e^{-j 2\pi t/5})}{e^{j \pi t/5} (1 - e^{-j 2\pi t/5})}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{e^{j \pi t}}{e^{j \pi t/5}} \sum_{k=0}^4 e^{-j 2\pi k t/5}$$

Il tutto può essere inserito nella sommatoria:

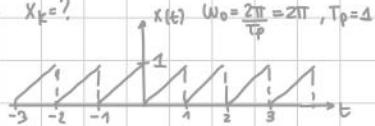
$$x(t) = \frac{3}{5} \sum_{k=-2}^2 e^{-j\pi(k-2)t/5} = \frac{3}{5} \sum_{m=-2}^2 e^{-j\pi m t/5} \quad \text{con } \omega_0 = 2\pi/5$$

ovvero $x(t) = \sum_{k=-2}^2 e^{-j\omega_0 k t}$ per $k = -m$, $x(t) = \frac{3}{5} \sum_{k=-2}^2 e^{j\omega_0 k t}$



$$P_x = \sum_k |X_k|^2 = 5 \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{5} \quad (\text{m}_k = X_0 = 3/5)$$

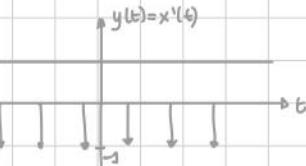
Es.14 $X_k = ?$



$$Y_k = X_k j k \omega_0 = j 2\pi k X_k$$

$$Y_k = \delta(k) - \frac{1}{T_p} = \delta(k) - 1 = \begin{cases} 0 & k=0 \\ -1 & k \neq 0 \end{cases}, \quad m_0 = 0$$

coeff. della serie di Fourier di un δ

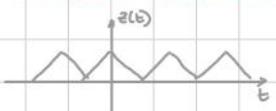


$$y(t) = x'(t)$$

$$y(t) = 1 - \text{rep}_{T_p} \delta(t)$$

La parte reale è PARI e quella immaginaria è DISPARI \rightarrow simmetria HERMITIANA (a partire da un segnale reale)

Es.15 Prodotto E convoluzione sono due operazioni duali

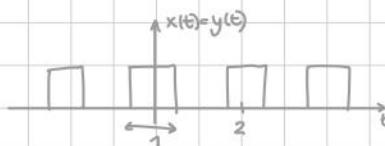


$$z(t) = \text{rep}_{T_p} \text{triang}(t) \quad \text{triang}(t) = \underbrace{\text{rect}}_{X_0(t)} * \underbrace{\text{rect}}_{Y_0(t)}(t) \rightarrow z(t) = \text{rep}_{T_p} \underbrace{y_0 * x_0(t)}_{Z_0}$$

$$y(t) = \text{rep}_{T_p} y_0(t)$$

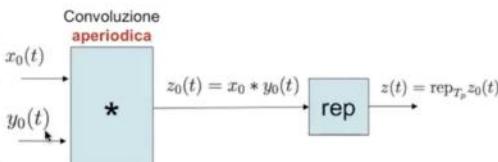
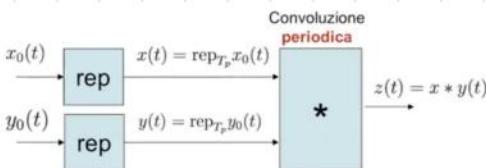
$$x(t) = \text{rep}_{T_p} x_0(t) = y(t)$$

$$X_k = T_p X_0, Y_k = T_p \left(\frac{1}{2} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)^2$$



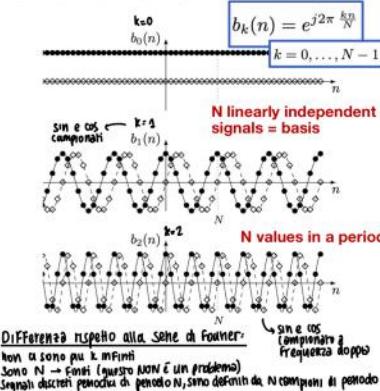
$$\tilde{z}(t) = x * y(t)$$

onda quadra d=1/2

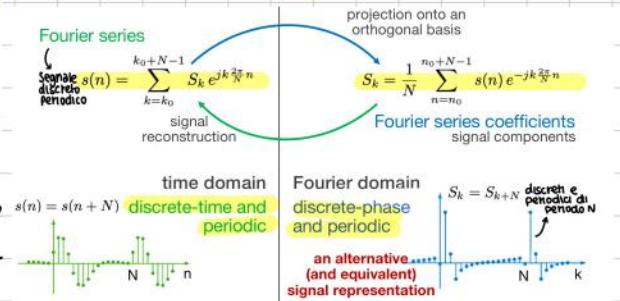


Discrete Fourier Transform

3.3. Discrete Fourier transform (part 1)

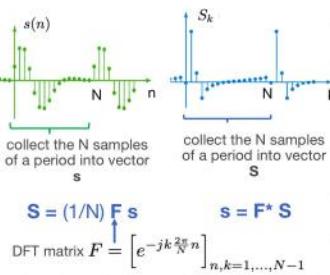


Dato che gli esponenziali complessi a tempo discreto sono autofunzioni di filtri a tempo discreto, l'azione dei filtri è meglio compresa se il segnale viene espresso come la somma di esponentiali complessi a tempo discreto: selezioniamo quelli periodici di periodo N , ovvero quelli con fase $\varphi_k = \frac{k\pi}{N}$



A partire da un segnale discreto e periodico $s(n)$, possiamo estrarre le proiezioni lungo la base per ottenere i coefficienti DFT S_k . La somma può essere presa su ogni periodo, a partire da n_0 a $n_0 + N - 1$. Se vogliamo ricostruire il segnale originale dobbiamo sommare alla funzione della base. La sommatoria può coprire ogni periodo a partire da k_0 a $k_0 + N - 1$.

La DFT è l'unica forma della trasformata di Fourier implementabile in Matlab. Infatti, richiede un semplice prodotto tra matrici:



- raccolgiamo i campionamenti del segnale su un periodo in un vettore s ;
- raccolgiamo i campionamenti DFT su un periodo in un vettore S ;
- s e S sono in relazione grazie ad una matrice N -quadrata, definita F . Tale matrice raccolge i valori $e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$.

$$\text{Quindi, } S = (1/N) F s$$

La trasformazione inversa si ottiene moltiplicando S per la matrice coniugata F^* : $s = F^* S$

Ad oggi, il prodotto matriciale ha una complessità quadratica in N , può quindi risultare molto difficile per valori di N molto elevati. Tuttavia, c'è un algoritmo definito **Fast Fourier Transform (FFT)** che sfrutta le simmetrie tra le matrici e valuta il prodotto con una complessità computazionale di $N \log 2N$.

constant	1	$\text{rep}_N \delta(k)$	delta
delta	$\text{rep}_N \delta(n)$	$\frac{1}{N}$	constant
rect	$\text{rep}_N \text{rect}(\frac{n}{M})$	$\frac{M}{N} \text{sinc}_M(\frac{M}{N}k)$	delta
sinc	$M \text{sinc}_M(\frac{M}{N}n)$	$\text{rep}_N \text{rect}(\frac{n}{M})$	constant
dual pair	$M = 1 + 2K$		
exponential	$e^{jn\frac{2\pi}{N}}$	$\text{rep}_N \delta(k-m)$	delta
delta	$\text{rep}_N \delta(n-m)$	$\frac{1}{N} e^{-jk\frac{2\pi}{N}m}$	exponential
dual pair			
sinusoid	$\cos(m\frac{2\pi}{N}n + \varphi_0)$	$\frac{1}{2} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} \text{comb}_N(k-m) + \frac{1}{2} e^{-jm\frac{2\pi}{N}n} \text{comb}_N(k+m)$	

Applicando la definizione di DFT su segnali ed impulsi semplici, troviamo le coppie riportate nella tabella. Esse presentano significative somiglianze con quelle delle serie di Fourier.

In generale, è possibile notare una forte corrispondenza tra le coppie, spiegabile tramite la **regola della simmetria**.

$$\begin{array}{ccc} s(n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \\ x(n) = S_n & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n e^{j(-k)\frac{2\pi}{N}n} \\ & & = \frac{1}{N} S(-k) \end{array}$$

Secondo questa relazione, se esiste una coppia DFT $s(n)$ e S_k , allora possiamo invertire il dominio per ottenere un'altra coppia valida, dove i campioni DFT sono interpretati come segnali nel dominio del tempo. Ad esempio:

$$s(n) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(n) = S_n = \text{rep}_N \delta(n)$$

$$S_k = \text{rep}_N \delta(k) \quad \Rightarrow \quad X_k = \frac{1}{N} s(-k) = \frac{1}{N}$$

Discrete Fourier Transform (part 1)

Esempio 1. Prova che le seguenti coppie di trasformate discrete di Fourier siano corrette:

* $s(n) = 1$ e $S_k = \text{rep}_N \delta(k)$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \text{rep}_N \delta(k) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{j0 \cdot \frac{2\pi}{N}n} = 1 \quad (\text{il } \delta \text{ è centrato in } k=0)$$

* $s(n) = \text{rep}_N \delta(n)$ e $S_k = 1/N$

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \text{rep}_N \delta(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} e^{-jk\frac{2\pi}{N}0} = \frac{1}{N}$$

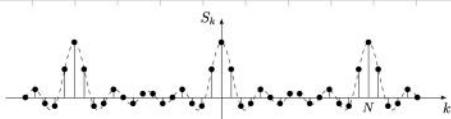
* $s(n) = \text{rep}_M \text{rect}\left(\frac{n}{M}\right)$, $N > M = 1+2k$ e $S_k = \frac{M}{N} \text{sinc}_M\left(\frac{Mk}{N}\right)$

Osserviamo che $\text{rect}\left(\frac{n}{M}\right) = \begin{cases} 1 & , n \in [-K, K] \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$

Dato $N > M = 1+2k$ non c'è aliasing nella ripetizione periodica \rightarrow possiamo scegliere come periodo di riferimento $[-K, N-1-K]$ in modo da considerare solo il rettangolo centrato in 0. Otteniamo:

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-K}^{N-1-K} \text{rep}_M \text{rect}\left(\frac{n}{M}\right) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-K}^K e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2K} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-k)} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2K} e^{-jk\frac{2\pi}{N}(m-k)} = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}k}}{N} \sum_{m=0}^{2K} (e^{-jk\frac{2\pi}{N}m})$$

$$= \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}k}}{N} \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2K+k)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{1}{N} \frac{\text{sinc}\left(k\frac{2\pi}{N}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)}{\text{sinc}\left(k\frac{2\pi}{N}\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{N} \frac{\text{sinc}\left(\frac{Mk\pi}{N}\right)}{\text{sinc}\left(\frac{M\pi}{N}\right)}$$



Il segnale che risulta è un sinc campionato periodico

$$S_k = \frac{M}{N} \text{sinc}_M\left(\frac{M}{N}k\right) \text{ con } \text{sinc}_M(x) = \frac{\sin(M\pi x)}{M\sin(\pi x)}$$

* $s(n) = M \text{sinc}_M\left(\frac{M}{N}n\right)$ e $S_k = \text{rep}_N \text{rect}\left(\frac{k}{M}\right)$, per $N > M = 1+2k$

Utilizzando la regola di simmetria dal risultato del punto precedente, scriviamo $x(n) = N \text{rep}_N \text{rect}\left(\frac{n}{M}\right)$ e quindi

$$X_k = M \text{sinc}_M\left(\frac{M}{N}k\right) \rightarrow \text{otteniamo } s(n) = x_n = M \text{sinc}_M\left(\frac{M}{N}n\right) \text{ e } S_k = \frac{1}{N} x(-k) = \text{rep}_N \text{rect}\left(\frac{k}{M}\right)$$

* $s(n) = \cos(m\frac{2\pi}{N}n + \phi)$ e $S_k = \frac{1}{2} e^{j\phi} \text{comb}_N(k-m) + \frac{1}{2} e^{-j\phi} \text{comb}_N(k+m)$

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} e^{j\phi} \text{rep}_N \delta(k-m) + \frac{1}{2} e^{-j\phi} \text{rep}_N \delta(k+m) \right] e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{j\phi} \delta(k-m) e^{jk\frac{2\pi}{N}n} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{-j\phi} \delta(k+m) e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\phi} e^{jm\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2} e^{-j\phi} e^{jn\frac{2\pi}{N}n} = \cos(m\frac{2\pi}{N}n + \phi) \rightarrow s$$

Proviamo due valori diversi di n_0 , ovvero $n_0 = \pm m$, per le due funzioni comb.

2.4. Discrete Fourier transform (part 2 - properties)

time domain	Fourier domain
time-reversal	$x(-n)$
conjugation	$x^*(n)$
symmetries	
even	even
$x(n) = x(-n)$	$X_k = X_{-k}$
odd	odd
$x(n) = -x(-n)$	$X_k = -X_{-k}$
real	Hermitian
$x(n) = x^*(n)$	$X_k = X^*_{-k}$
real + even	real + even
$x(n) = x^*(n) = x(-n)$	$X_k = X^*_{-k} = X_{-k}$
real + odd	imaginary + odd
$x(n) = x^*(n) = -x(-n)$	$X_k = X^*_{-k} = -X_{-k}$

time domain	Fourier domain
linearity	$\alpha x(n) + \beta y(n)$
time-shift	$x(n - n_1)$
modulation	$x(n)e^{j\pi \frac{2\pi}{N} n}$
dual pair	
convolution	$x *_{\text{cir}} y(n)$
product	$x(n)y(n)$
dual pair	
increment	$x(n) - x(n - 1)$
mean value	$m_x = X_0$
power	$P_x = E_X(N)$
Parseval's theorem	

Anche in questo caso, time-reversal e coniugazione corrispondono ad un time reversal o ad una combinazione tra quest'ultimo e la coniugazione. Questo implica che tutto ciò che abbiamo visto per le simmetrie è ancora valido.

Dato che il tempo è discreto, non abbiamo una regola di derivazione in questo caso. Tuttavia, questa regola è sostituita dalla regola dell'incremento

$$x(n) \xrightarrow{\text{increm-}} y(n) = x(n) - x(n - 1) \xrightarrow{\text{Inversion rule}} Y_k = X_k \cdot (1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}})$$

the value at $k=0$ (mod N) is lost since $Y_0=0$, the others are multiplied by a known factor

$$X_k = \begin{cases} \frac{Y_k}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} *, & k \neq 0 \pmod{N} \\ m_x, & k = 0 \pmod{N} \end{cases}$$

Tutti i valori sono ottenuti dividendo per il fattore *.

Il valore per $k=0$ è multipli, invece, è ricavato sfruttando il valore medio, come nell'inversione della derivazione.

Nel caso in cui si valuti un periodo errato: se prendiamo K volte il periodo minimo, allora i coefficienti sono interpolati aggiungendo $K-1$ zeri dopo ogni vero coefficiente

Discrete Fourier Transform (part 2 - properties)

Esempio 1. Calcola i coefficienti DFT di $s(n) = e^{jn\frac{2\pi}{N}}$ utilizzando la coppia di Fourier $x(n) = \delta_n$, $X_k = \text{rep}_N \delta(k)$

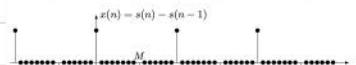
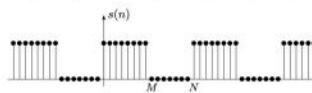
Dato $e^{j\frac{2\pi}{N} n} = e^{j\frac{2\pi}{N} M} \cdot 1 = e^{j\frac{2\pi}{N} M} x(n)$, possiamo sfruttare la proprietà di modulazione per provare che:

$$S_K = X_{k-M} = \text{rep}_N \delta(k-M)$$

Esempio 2. Dimostra sfruttando la proprietà dell'incremento che i coefficienti DFT dell'onda quadra campionata $s(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0, M) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Per $N > M$. Può essere espresso come $S_K = \frac{M}{N} \text{sinc}_M \left(\frac{M}{N} k \right) e^{-j\frac{2\pi}{N} k n}$.

Sfruttando la regola dell'incremento $x(n) = s(n) - s(n-1)$ ottieniamo



$$\text{ovvero } x(n) = \text{rep}_N \delta(n) - \text{rep}_N \delta(n-M)$$

A questo punto risulta semplice calcolare i coefficienti DFT: $X_k = \frac{1}{N} (1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} M})$ e per inversione della regola dell'incremento: $S_K = \frac{X_k}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} M}} = \frac{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} M}}{N(1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N} M})}, k \neq 0$

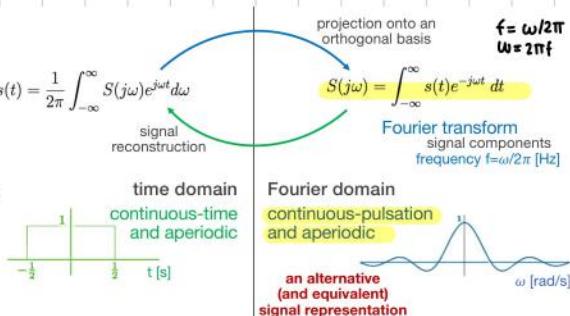
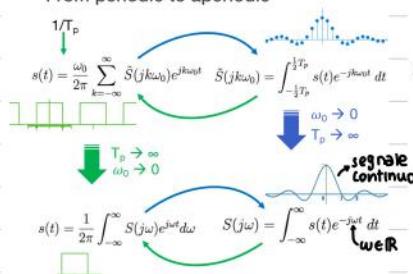
$$\text{per } k=0: S_0 = \frac{M}{N}$$

$$\text{multiplicando numeratore e denominatore per } e^{-j\frac{2\pi}{N} k M} \text{ ottieniamo } S_K \text{ (per } k \neq 0\text{)} = \frac{\sin \left(\frac{M}{N} k \pi \right) e^{j\frac{2\pi}{N} k M}}{N \sin \left(\frac{M}{N} k \pi \right) e^{j\frac{2\pi}{N} k M}} = \frac{M}{N} \text{sinc}_M \left(\frac{M}{N} k \right) e^{-j\frac{2\pi}{N} k M}$$

Fourier transform per segnali continui aperiodici

3.5. Fourier Transform (part 1)

From periodic to aperiodic



H. b: $S(j\omega)$ è, in realtà, una funzione solamente di ω , ma scriviamo ω per convenzione

absolutely integrable +
finite number of finite
discontinuities + finite
number of max and min

Dirichlet

finite energy

Riesz-Fisher

finite number of delta
functions

Dirac

Le condizioni di invertibilità sono le stesse che per la serie di Fourier ma, in questo caso, le proprietà si riferiscono all'intero asse temporale, invece che ad un solo periodo. La convergenza nella trasformazione inversa vale nel senso debole, cioè la $s(t)$ recuperata è uguale a quella originale quasi ovunque tranne che per alcuni punti specifici, come le discontinuità.

constant	1	$2\pi \delta(\omega)$	delta
delta	$\delta(t)$	constant	
dual pair			
rect	$\text{rect}(t)$	$\text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$	triangle
sinc	$\text{sinc}(t)$	sinc	squared sinc
dual pair		$\text{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$	dual pair
exponential	$e^{j\omega_1 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_1)$	sign
delta	$\delta(t - t_1)$	$e^{-j\omega_1 t_1}$	hyperbola
dual pair		delta	dual pair
sinusoid	$\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$	$\pi e^{j\varphi_1} \delta(\omega - \omega_1) + \pi e^{-j\varphi_1} \delta(\omega + \omega_1)$	exponential

triangular	$\text{triang}(t)$	$\text{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$	squared sinc
squared sinc	$\text{sinc}^2(t)$	$\text{triang}(\frac{\omega}{2\pi})$	triangle
dual pair			
sign	$\text{sgn}(t)$	$-2j$	hyperbola
hyperbola	$\frac{j}{\pi t}$	ω	sign
dual pair			
unit step	$1(t)$	$\frac{-j}{\omega} + \pi \delta(\omega)$	unit step
	$\frac{j}{2\pi t} + \frac{1}{2}\delta(t)$	$1(\omega)$	
dual pair			

Tutte queste coppie derivano dalla regola di simmetria, equivalente per la DFT.

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = S(jt) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(jt)e^{-j\omega t} dt = 2\pi s(-\omega)$$

I domini coincidono ed entrambi i tempi sono continui ed aperiodici.

Ad esempio:

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{rect}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(t) = S(jt) = \text{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \\ S(j\omega) &= \text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi}) \quad X(j\omega) = 2\pi \text{sinc}(-\omega) \\ &= 2\pi \text{rect}(\omega) \end{aligned}$$

Le coppie sopra definite possono essere trovate anche sfruttando la regola di scala secondo la quale la trasformata di Fourier di x scalato di un fattore a , equivale ad a volte la trasformata di X scalata di un fattore $1/a$.

Quindi $x(t) \xrightarrow{\text{scala}} x(t/a)$ e $X(j\omega) \xrightarrow{\text{scala}} aX(j\omega)$. Ad esempio:

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{sinc}(\frac{t}{2\pi}) \quad a = \frac{1}{2\pi} \quad y(t) = x(t/a) = \text{sinc}(t) \\ X(j\omega) &= 2\pi \text{rect}(\omega) \quad Y(j\omega) = aX(j\omega) \\ &= \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \end{aligned}$$

Fourier transform (part 1)

Es. 1. Prova che le seguenti coppie di trasformate di Fourier siano vere:

$$* S(t) = \delta(t) \quad e \quad S(j\omega) = 1$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

$$* S(t) = 1 \text{ e } S(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega e^{-j\omega_0 t} = 1 \rightarrow \text{Sfruttiamo la proprietà relativa del delta}$$

Oppure, sapendo che $S(t) = X(jt) = 1$, $S(j\omega) = 2\pi X(-\omega) = 2\pi \delta(\omega)$

$$* S(t) = \text{rect}(t) \text{ e } S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} 1, & \omega=0 \\ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{2\sin(1/2\omega)}{\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases} \rightarrow S(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$* S(t) = \text{sinc}(t) \text{ e } S(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(u) e^{j2\pi u t} du = \int_{-1/2}^{1/2} e^{j2\pi u t} du = \begin{cases} 1, & t=0 \\ \frac{e^{j2\pi u t}}{j2\pi t} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0 \end{cases} \rightarrow S(t) = \text{sinc}(t)$$

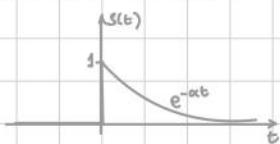
$$* S(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ e } S(j\omega) = \pi e^{j\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0)$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{-j\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0)] e^{j\omega_0 t} d\omega = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + \frac{1}{2} e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} = \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$* S(t) = e^{-at} \text{1}(t), a > 0 \text{ e } S(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} \text{1}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = e^{-\frac{(a+j\omega)t}{a+j\omega}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$\text{ES. 2 } S(t) = e^{-at} \text{1}(t) \quad a > 0$$



$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{0-1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} \quad \text{per razionalizzare}$$

modulazione standard per disegnare la segnale

$$\text{ES. 3 } S(t) = \text{rect}(t)$$



$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2}}{-j\omega} = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega} = \text{sinc}(\omega/2)$$

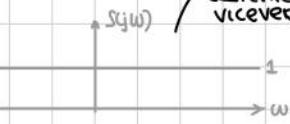
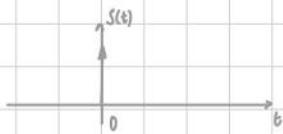
si ottiene un sinc scalato \rightarrow si annulla nei multipli di 2π



La trasformata di un f è una costante e viceversa

$$\text{ES. 4 } S(t) = \delta(t)$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



3.6. Fourier transform (part 2 - properties)

time domain	Fourier domain	time domain	Fourier domain	Anche in questo caso sussiste una forte relazione con le altre trasformate. Quello che cambia è unicamente la notazione.
time-reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$	$\alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)$	
conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$	$X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$	
symmetries			$X(j\omega) - X(-j\omega)$	
even	$x(t) = x(-t)$	even	$x * y(t)$	
odd	$x(t) = -x(-t)$	odd	$x(t)y(t)$	
real	$x(t) = x^*(t)$	Hermitian	$\frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$	
real + even	$x(t) = x^*(t) = x(-t)$	real + even	$X(j\omega)Y(j\omega)$	
real + odd	$x(t) = x^*(t) = -x(-t)$	imaginary + odd	$jw \cdot X(j\omega)$	
	$X(j\omega) = X^*(-j\omega) = X(-j\omega)$		$jX'(j\omega)$	
	$X(j\omega) = X^*(-j\omega) = -X(-j\omega)$		$\int_{-\infty}^t x(u) du$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi A_x \delta(\omega)$
				$A_x = S(j0)$
				$E_x = \frac{1}{2\pi} E_X$
				$A_x = 2\pi S(0)$

Anche in questo caso vale la regola dell'inversione, con più o meno le medesime considerazioni per i valori a $\omega=0$ e multipli.

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{derivative}} & y(t) = x'(t) \\ X(j\omega) & & Y(j\omega) = j\omega \cdot X(j\omega) \end{array}$$

the value at $\omega=0$ is lost since $Y(j0)=0$, the others are multiplied by a known factor

$$X(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{j\omega} + \boxed{m_x} 2\pi \delta(\omega)$$

questo termine permette di recuperare anche l'informazione sul valore medio
se la funzione è continua calcoliamo il valore in 0 con l'intervallo fra due zeri e si possono ricavare per tutti i punti fuorilegge in zero

Un aspetto interessante dei segnali aperiodici a tempo continuo è che possiamo definire l'integrazione, che sappiamo essere equivalente alla convoluzione con il gradino.

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{integration}} & y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du \\ & & = x * 1(t) \end{array}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(j\omega) \delta(\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi \boxed{X(0)} \delta(\omega)$$

L'effetto dell'integrazione corrisponde alla moltiplicazione di X per la trasformata di Fourier del gradino unitario, secondo la regola di convoluzione. Si ottiene un'equazione strettamente relazionata a quella della regola di inversione della derivata. La differenza è che $X(\omega)$ con $\omega=0$ sostituisce $2m_x$.

Fourier transform (part 2 - properties)

ES. 1. Calcola la trasformata di Fourier dei seguenti segnali:

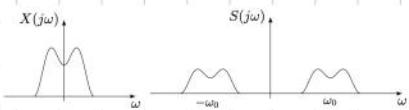
$$* s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_1}{T}\right)$$

Possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = y(t-t_1)$, $y(t) = x(t/T)$, $x(t) = \text{rect}(t)$

L'espressione consiste quindi di un'operazione di scala seguita da una traslazione. $Y(j\omega) = T \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi T}\right) e^{-j\omega t_1}$

* $s(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$ in funzione di $X(j\omega)$

Possiamo risolvere il segnale attraverso l'identità di Eulero $\rightarrow s(t) = \frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}$. Applicando la regola di modulazione otteniamo $S(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}X(j\omega + \omega_0)$. Oteniamo così il risultato in Figura \longrightarrow

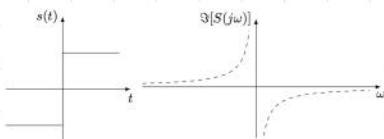


* $s(t) = \text{sgn}(t)$

Per risolvere questo esercizio sfruttiamo la regola di derivazione $x(t) = s'(t) = 2\delta(t)$, quindi $X(j\omega) = 2$.

Sfruttando la **regola di inversione** $s(t) = \frac{X(j\omega)}{\omega} + m_3 2\pi\delta(\omega)$ otteniamo $S(j\omega) = \frac{2}{j\omega} = -\frac{2j}{\omega}$ dato che il segno ha $m_3 = 0$

Oteniamo:



* $s(t) = \frac{j}{\pi t}$

Applichiamo la simmetria ottenuta dall'esercizio precedente $x(t) = \text{sgn}(t) \rightarrow X(j\omega) = \frac{-2j}{\omega}$ ed ottieniamo $y(t) = X(jt) = \frac{-2j}{t}$ quindi $Y(j\omega) = 2\pi t X(-\omega) = -2\text{sgn}(\omega)$

Definendo $s(t) = \frac{1}{2\pi} Y(t)$ ottieniamo $s(t) = -\frac{1}{2\pi} y(t) = \frac{j}{\pi t} \rightarrow S(j\omega) = -\frac{1}{2\pi} Y(j\omega) = \text{sgn}(\omega)$

* $s(t) = 1(t)$

Espriammo $s(t) = 1(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}(t) + \frac{1}{2}$. A questo punto $S(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2j}{\omega} + \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega) = \frac{-j}{\omega} + \pi\delta(\omega)$

In alternativa, dato che il gradino unitario ha media $m_3 = \frac{1}{2}$ e $X(t) = S'(t) = \delta(t)$ e $X(j\omega) = 1 \rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega) = \frac{-j}{\omega} + \pi\delta(\omega)$

* $s(t) = \text{triang}(t)$ sapendo la coppia $\text{rect}(t) \rightarrow \text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$

Possiamo sfruttare la proprietà di convoluzione ovvero $s(t) = x * x(t)$ con $x(t) = \text{rect}(t)$ e quindi sapendo che

$X(j\omega) = \text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$ possiamo dire che $S(j\omega) = X(j\omega) X(j\omega) = X^2(j\omega) = \text{sinc}^2(\frac{\omega}{2\pi})$

* $s(t) = \text{sinc}^2(t)$

Sfruttando $X(t) = \text{sinc}(t)$ e $X(j\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$ abbiamo $s(t) = x(t)x(t)$ e quindi $\frac{1}{2\pi} X * X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [2\pi \text{triang}(\frac{\omega}{2\pi}) * \text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})]$

Il triangolo ottenuto dalla convoluzione dei due rettangoli $X(j\omega)$ ha altezza 2π dato che è l'estensione di ogni rettangolo.

ES. 2. Calcola la convoluzione $\text{sinc} * \text{sinc}(t)$

In questo caso risulta più semplice calcolare la convoluzione nel dominio di Fourier e poi ottenere il risultato nel dominio del tempo invertendo la trasformata.

Quindi $X(t) = \text{sinc}(t)$ e $X(j\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \rightarrow S(j\omega) = X^2(j\omega) = \text{rect}^2(\frac{\omega}{2\pi}) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$ quindi invertendo la trasformata ottieniamo $s(t) = \text{sinc}(t)$

ES.3. Calcola l'area e l'energia di $\text{sinc}(\frac{w-w_0}{2\pi})$

Area ed energia non cambiano se il segnale è sottoposto a traslazione. Quindi possiamo identificare area ed energia di $x(t) = \text{sinc}(t/T)$. Il calcolo risulta più facile nel dominio di Fourier $X(j\omega) = T \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi/T})$

$$\text{Quindi } A_S = A_X = X(j0) = T \text{ ed } E_S = E_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = T^2 \frac{2\pi}{T} = T$$

Nel calcolo di E_S abbiamo sfruttato $|X(j\omega)|^2 = T^2 \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi/T})$ e il fatto che sia un rettangolo di base $2\pi/T$

ES.4. $S(t) = 1$

$$S(j\omega) = \delta(\omega) 2\pi$$



ES.5. $S(t) = \delta(t-t_0)$

$$\delta(t) \xrightarrow{FT} 1$$

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &\xrightarrow{FT} X(j\omega) e^{-j\omega t_0} \\ &\xrightarrow{FT} \delta(t-t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S(j\omega) &= -j e^{-j\omega t_0} = e^{-j\omega t_0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

dal delta traslato
otteniamo un
esponenziale
complesso a
fase lineare

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &\xrightarrow{FT} X(j\omega) e^{-j\omega t_0} \\ x(t)e^{j\omega t_0} &\xrightarrow{FT} X(j\omega-j\omega_0) \end{aligned}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{FT} 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \xrightarrow{FT} \delta(\omega)$$

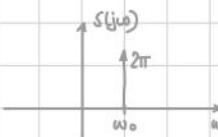
$$\text{rect}(t) \xrightarrow{FT} \sin(\frac{\omega}{2\pi})$$

ES.6. $S(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$x(t) = 1 \rightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

$$S(t) = x(t) e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} X(j\omega-j\omega_0)$$

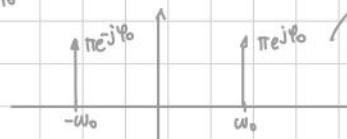
$$\rightarrow S(j\omega) = 2\pi \delta(\omega-\omega_0)$$



dualità della esponenziale: $e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} 2\pi \delta(\omega-\omega_0)$ e $\delta(t-t_0) \xrightarrow{FT} e^{-j\omega_0 t}$

ES.7. $S(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi_0} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\varphi_0}$

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} \pi i \delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} \pi i \delta(\omega+\omega_0) \\ &= \frac{1}{2} \pi e^{j\varphi_0} \delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} \pi e^{-j\varphi_0} \delta(\omega+\omega_0) \end{aligned}$$



i due pattern sono
l'uno il complesso
conjugato dell'altro
(essendo a pulsazioni
l'una l'inverso dell'altra)

ω il segnale ha
simmetria Hermitiana
(e lo aspetteremo
dato che il coseno
è un segnale reale)

$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{FT} \pi \delta(\omega-\omega_0) + \pi \delta(\omega+\omega_0)$

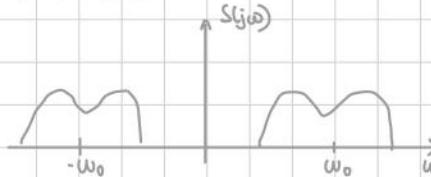
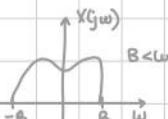
ES.8. $S(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$

Ipotizzeremo di conoscere $X(j\omega)$

$$S(t) = x(t) \left[\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \right]$$

$$= \frac{1}{2} x(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x(t) e^{-j\omega_0 t}$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2} X(j\omega-j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega+j\omega_0)$$

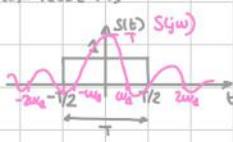


ES.9. Regola della scala

$$y(t) = x(t/a) \text{ e } Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t/a) e^{-j\omega t} dt$$

quindi $Y(j\omega) = a \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j\omega au} du = a X(j\omega)$

$$S(t) = \text{rect}(t/t_0)$$



$$S(j\omega) = T \text{sinc}(\frac{T\omega}{2\pi})$$

$$= T \text{sinc}(\frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{T}) = T \text{sinc}(\frac{\omega}{T})$$

$$ES.10 \quad S(t) = \sin(t) \quad S(j\omega) = ?$$

$$\text{Dato } S(t) = X(t/a) \xrightarrow{?} aX(j\omega)$$

$$= \sin(t/2\pi a) \quad \text{Vogliamo } a = \frac{1}{2\pi}$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\frac{\omega}{2\pi}) = \frac{1}{2\pi} 2\pi \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) = \operatorname{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$$

$$x(t) = \sin(t/2\pi) \xrightarrow{?} 2\pi \operatorname{rect}(\omega) = X(j\omega)$$

$$x(t) = \operatorname{rect}(t) \xrightarrow{?} X(j\omega) = \sin(j\omega)$$

$$ES.11 \quad S(t) = \sin(t/\pi)$$



per la regola di scala:

$$\sin(t/\pi) \xrightarrow{?} T \sin\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$ES.12 \quad S(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

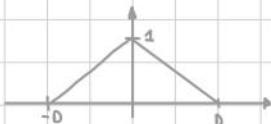
$$y(t) = \cos(\omega_0 t) \rightarrow Y(j\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \rightarrow \text{REGOLA DEL PRODOTTO} \\ &= \frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_0) + \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_0) \end{aligned}$$

$$ES.13 \quad S(t) = \operatorname{triangle}(t/D) = \operatorname{rect}(t) * \operatorname{rect}(t) \quad (\operatorname{rect}(t) \xrightarrow{?} \sin(\omega/2\pi))$$

$$S(j\omega) = \sin^2(\omega/2\pi)$$

$$ES.14 \quad S(t) = \operatorname{triangle}(t/D) \quad S(j\omega) = ?$$



$$x * y(t) \xrightarrow{?} X(j\omega)Y(j\omega)$$

$$x(t)y(t) \xrightarrow{?} \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$$

$$x(t/a) \xrightarrow{?} aX(j\omega) \rightarrow \text{Regola di scala}$$

$$\{x(t), X(j\omega)\} \rightarrow \{X(j\omega), \operatorname{rect}(-\omega)\} \rightarrow \text{Regola di simmetria}$$

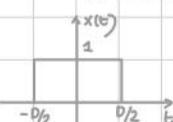
$$u(t) = \operatorname{triangle}(t) = \operatorname{rect}(t) * \operatorname{rect}(t) \xrightarrow{?} U(j\omega) = \sin^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \rightarrow \text{a partire dal triangolo di riferimento lo scaliamo tramite la regola}$$

$$S(t) = u(t/D) \xrightarrow{?} S(j\omega) = D U(j\omega D) = D \sin^2\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right) *$$

$$\dots \text{oppure } S(t) = x * x(t), \quad x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$$

$$\text{con } X(j\omega) = D \sin\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right)$$

$$S(j\omega) = X(j\omega)^2 = D^2 \sin^2\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right) *$$



se scalo nel tempo di D, le

ampiezze vengono amplificate della stessa costante, perché l'integrale viene esteso

* i risultati sono simili... ma nel secondo c'è un errore... infatti il calcolo corretto deve essere normalizzato

$$\text{ovvero } S(t) = \frac{1}{D} x * x(t) \quad \text{ovvero } S(j\omega) = \frac{1}{D} X^2(j\omega) = D \sin^2\left(\frac{\omega D}{2\pi}\right)$$

$$\text{ES.15 } S(t) = \sin^2(t)$$

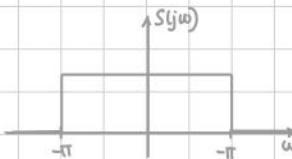
$\{ \text{triang}(t) = \sin^2(\omega t) \} \text{ e } \{ \sin^2(\omega t), \pi \text{ triang}(-\omega) \}$ con $\text{triang}(-\omega) = \text{triang}(\omega) \rightarrow$ funzione pari
quindi $x(t) = \sin^2(t)$ → $X(j\omega) = \pi \text{ triang}(\omega)$

$$s(t) = x(t/a) \rightarrow S(j\omega) = a X(j\omega a) = 2\pi a \text{ triang}(\omega a)$$

Vogliamo $S(t) = \sin^2(t/2\pi \cdot a)$, vogliamo $2\pi \cdot a = T$ quindi $a = T/2\pi$
quindi $\sin^2(t) \xrightarrow{\exists} T \text{ triang}(\frac{j\omega}{2\pi})$

$$\text{ES.16 } S(t) = \sin(t) * \sin(t) . S(j\omega) = ?$$

$$S(j\omega) = \left[\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \right]^2 = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



$$\sin(t) * \sin(t) = \sin(2t)$$

è un segnale a due livelli (0,1)
come il rect(t)

$0^2=0$ e $1^2=1 \rightarrow$ il segnale non cambia

* cambierebbe nei punti di discontinuità, ma
essendo solamente punti hanno lunghezza nulla

$$\text{ES.17 } A(t) = \sin(t) . A_0 = ? E_A = ?$$

$$A_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ut)}{u} du \rightarrow \text{impossibile identificare la primitiva}$$

$$A(t) = \sin(t) \xrightarrow{\exists} S(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$A_A = (S(j0)) = 1$$

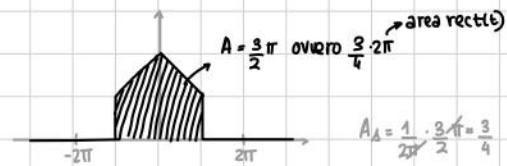
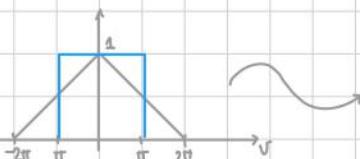
$$E_A = \frac{1}{2\pi} E_S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \right|^2 d\omega = 1$$

$$\text{ES.18 } A(t) = \sin^2(t) . A_0 = ?$$

$$A(t) = \sin(t) * \sin^2(t) \text{ (con } X(j\omega) = \text{triang}(\frac{\omega}{2\pi}), Y(j\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}))$$

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jv) Y(j\omega - jv) dv$$

$$A_0 = S(j0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jv) Y(-jv) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{triang}(\frac{v}{2\pi}) \text{rect}(-\frac{v}{2\pi}) dv \quad (\text{con } \text{rect}(-\frac{v}{2\pi}) = \text{rect}(\frac{v}{2\pi}) \rightarrow \text{PARI})$$



$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{ES.19 } A(t) = \text{Sign}(t)$$

$$A S(t)$$

$$U(t) = S'(t) = 2\delta(t)$$

$$x'(t) \xrightarrow{\exists} j\omega \cdot X(j\omega)$$

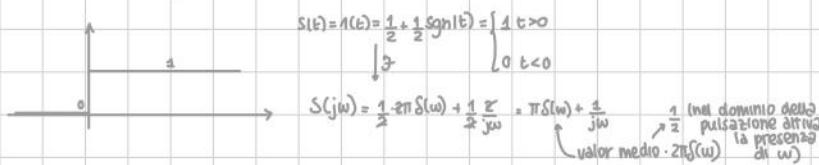
$$t x(t) \xrightarrow{\exists} jX'(j\omega)$$

$$U(j\omega) = j\omega S(j\omega) \quad \xrightarrow{\delta(t) \xrightarrow{\exists} 1} \quad S(j\omega) j\omega = \frac{2}{j\omega} \quad \begin{cases} -2 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \omega \neq 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

$$\text{In } \omega = 0 \text{, } S(j\omega) \text{ vale } A_0 = 0 \quad \text{quindi} \quad S(j\omega) = \begin{cases} \frac{2}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ 0 & \omega = 0 \end{cases}$$

Risultato notevole:
 $\text{Sign}(t) \xrightarrow{\exists} \frac{2}{j\omega}$

Esempio 20 $s(t) = \delta(t)$. $S(j\omega) = ?$



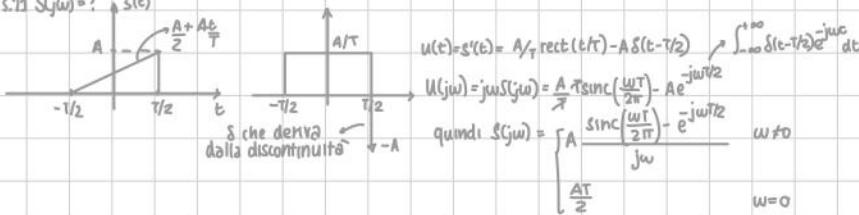
... soluzione alternativa:

$$u(t) = s'(t) = \delta(t)$$

Nel dominio della pulsazione $U(j\omega) = 1 = \omega S(j\omega)$ per $\omega \neq 0$

ovvero $S(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j\omega} & \omega \neq 0 \\ A_\delta & \omega = 0 \end{cases}$ quando $A_\delta = 0$, $S(0) = m_A \cdot 2\pi\delta(\omega)$

Esempio 21 $S(j\omega) = ?$



Relations among the transforms and filters → relazione periodico/aperiottico

3.7. Relations among Fourier transforms

$$s(t) = s(t + T_p) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{j k \omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

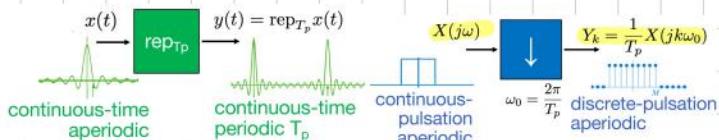
The Fourier transform of a periodic signal

$$\tilde{S}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi S_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Che cosa succede se utilizziamo la trasformata di Fourier, invece che la serie di Fourier di un segnale periodico?

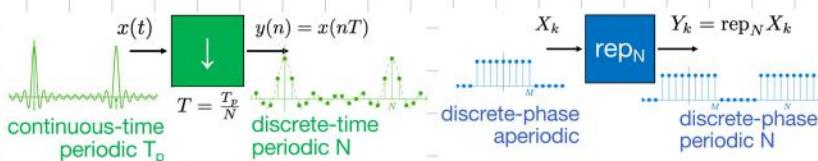
Dato che un segnale periodico può essere espresso attraverso la Serie di Fourier, se consideriamo la sua trasformata, ogni esponenziale complesso è mappato in una sua versione shiftata del delta nel dominio di Fourier. La trasformata di Fourier diventa la raccolta di delta shiftati di $k\omega_0$ e moltiplicati per $2\pi S_k$.

Cambiando la prospettiva, che cosa succede se consideriamo i coefficienti di Fourier di una ripetizione periodica?



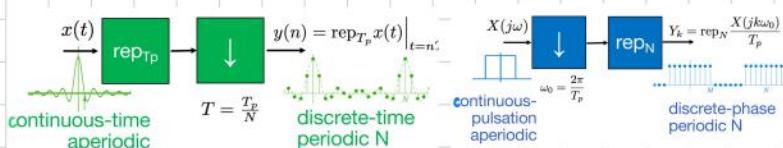
Il campionamento nel tempo è il procedimento duale della ripetizione periodica nel dominio di Fourier.

Che cosa succede se campioniamo un segnale periodico?



Il campionamento nel tempo corrisponde a ripetizione periodica nel dominio di Fourier.

Che cosa succede se combiniamo periodicamente un segnale aperiodico a tempo continuo $x(t)$ e poi lo campioniamo?



A partire da un segnale a tempo continuo ed aperiodico otteniamo un segnale discreto periodico di fase N.

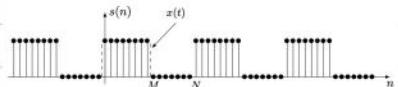
Relations among the Fourier transforms

Esempio 1. Calcola i coefficienti di Fourier dell'onda quadrata $s(t) = \text{rep}_{T_p} \text{rect}\left(\frac{t}{dT_p}\right)$, $0 < d < 1$

Dalle coppie di Fourier sappiamo che $X(j\omega) = dT_p \text{sinc}\left(dT_p \frac{\omega}{2\pi}\right) = dT_p \text{sinc}\left(\frac{d\omega}{\omega_0}\right)$ con $\omega_0 = 2\pi/T_p$

Inoltre, $S_k = \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) = \frac{1}{T_p} dT_p \text{sinc}(kd) = d \text{sinc}(kd)$

Es. 2. Calcola i coefficienti DFT dell'onda quadra $s(n) = \begin{cases} 1, & n \in [0, M] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$ per $N > M$.

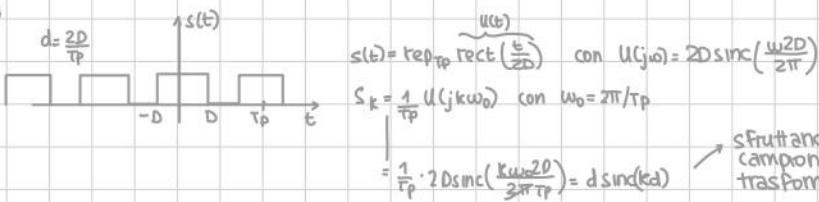


$$S(k) = \text{rep}_N x(t)|_{t=n}, \quad x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}(M-1)}{T_p}\right) \quad \text{con } T_p = \frac{1}{\omega_0} \quad \text{per le proprietà di Fourier}$$

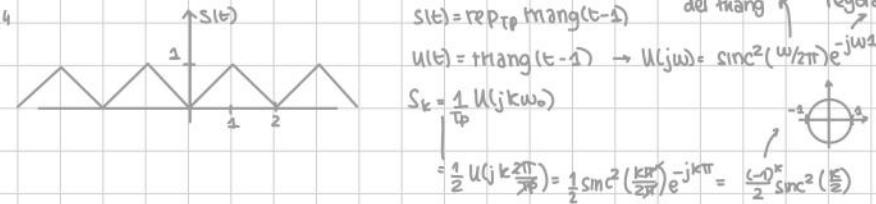
$$X(j\omega) = M \text{sinc}\left(M \frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-j\frac{\omega}{2}(M-1)}$$

$$\text{quindi } S_k = \text{rep}_N \frac{1}{T_p} X(jk\omega_0) = \text{rep}_N \frac{M}{T_p} \text{sinc}\left(\frac{M}{N} k\right) e^{-jk\frac{M-1}{N}}$$

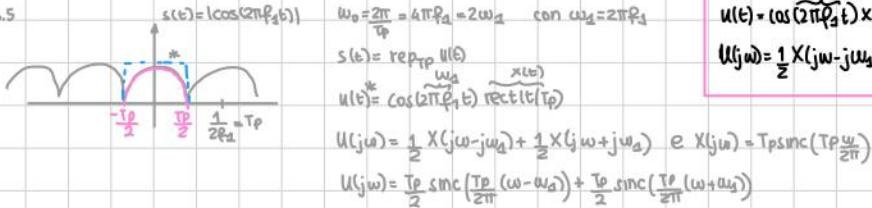
Es. 3



Es. 4



Es. 5



$$\text{quindi } S_k = \frac{1}{T_p} U(jk\omega_0) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{T_p}{2\pi}(k\omega_0 - \omega_4)\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{T_p}{2\pi}(k\omega_0 + \omega_4)\right) \quad \omega_4 = \frac{\omega_0}{2} \quad \text{e } \omega_0 = 2\pi/f_1$$

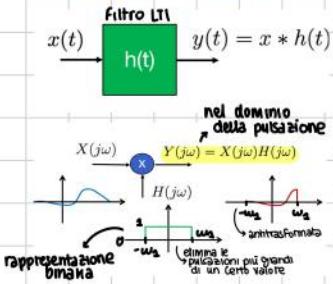
$$= \frac{1}{2} \text{sinc}\left(k - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

regola di moltiplicazione per il caso:

$$U(t) = (\cos(\frac{\omega_2}{2}t))^2$$

$$U(j\omega) = \frac{1}{2} X(j\omega - j\omega_2) + \frac{1}{2} X(j\omega + j\omega_2)$$

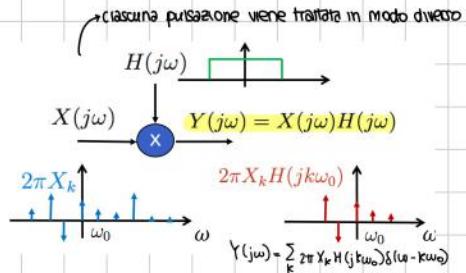
3.8. Filters in the Fourier domain



L'introduzione della rappresentazione di un segnale nel dominio di Fourier è la chiave per la comprensione della connessione tra la trasformata di Fourier e i filtri a tempo continuo. Ricordiamo che nella pratica, $h(t)$ è sempre aperiodico. L'effetto del filtraggio è più facilmente comprensibile nel dominio di Fourier dove, dalla regola della convoluzione, sappiamo che l'output Y della trasformata è semplicemente l'input X moltiplicato per la trasformata H della risposta impulsiva.

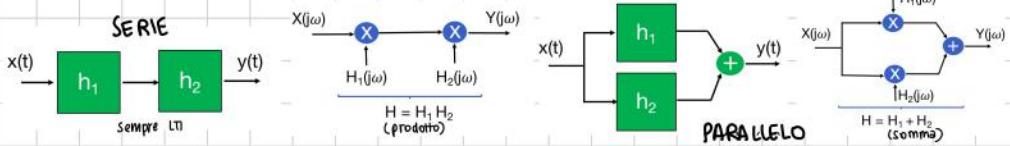
La trasformata di un segnale periodico è la collezione di delta equispaziati di ω_0 . Per la proprietà di rivalutazione, ogni δ contiene un valore diverso di H .

$$x(t) = x(t + T_p) \xrightarrow{h(t)} y(t) = x * h(t)$$



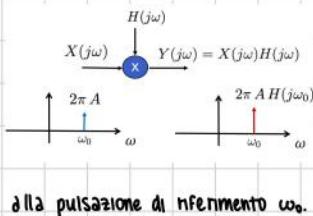
Nel caso in cui il segnale sia periodico di periodo T_p , la trasformata di Fourier diventa una collezione di delta. In seguito alla moltiplicazione per H , data la proprietà rivalutatrice, ogni delta avrà un diverso valore di H . Nello specifico, il delta centrato in $k\omega_0$ è moltiplicato per $H = jk\omega_0$, come mostrato nel disegno sopra.

L'azione del filtro consiste nel moltiplicare il k -esimo coefficiente di Fourier X_k per la trasformata di Fourier H , campionata a $k\omega_0$.



Nella serie di due filtri il prodotto nel dominio di Fourier è applicato due volte, ovvero moltiplichiamo per H_1 e H_2 .

La serie è quindi un sistema lineare tempo-invariante. Il parallelo, invece, funziona come una somma della moltiplicazione per H_1 e H_2 . Per la serie $Y(j\omega) = X(j\omega)H_1 H_2$, per il parallelo $Y(j\omega) = X(j\omega)H_1 + X(j\omega)H_2$.

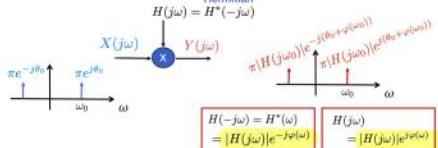


Gli esponenziali complessi sono eigenfunction di un filtro. Infatti la trasformata di Fourier di un esponenziale complesso è un delta che, in seguito ad una moltiplicazione per $H(j\omega)$ conserva solo la trasformata H di $j\omega_0$, l'ampiamento della pulsazione di riferimento ω_0 .

Il fattore moltiplicativo per un esponenziale complesso è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva ad ω_0 .

Il filtro NON distorce il segnale se $y(t) = Ax(t - t_0)$ ovvero $Y(j\omega) = Ax(j\omega)\exp(-j\omega t_0)$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_0) \rightarrow h(t) \text{ real} \rightarrow y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \varphi(\omega_0))$$



Un filtro reale ha trasformata a simmetria Hermitiana.

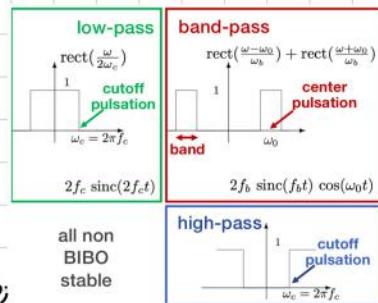
Dato che la trasformata di Fourier di una sinusode con pulsazione ω_0 è composta da due delta, centrati a $\pm \omega_0$, l'azione del filtro moltiplica i δ per due valori differenti che, tuttavia, in questo contesto, sono l'uno il coniugato dell'altro.

L'output del filtro è semplicemente il segnale d'ingresso stesso

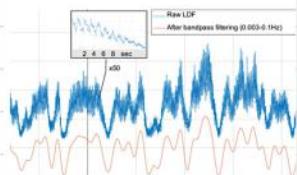
scalato (di $|H(j\omega_0)|$) e traslato (di $H(j\omega_0)$). In questo caso si dice che il filtro non distorce il segnale. $y(t) = Ax(t-t_0)$

Esistono alcune classi di filtri detti **filtri "reali"** che hanno delle caratteristiche molto semplici. In particolare, considerano una sola parte dello spettro, ovvero del dominio di Fourier. Sono:

- * **Filtri passa-basso:** selezionano solo parti di segnale fino ad una pulsione ω cut-off di riferimento. Nel dominio di Fourier hanno forma rettangolare;
- * **Filtri passa-alta:** eliminano parti di segnale fino ad una certa ω_0 ;
- * **Filtri passa-banda:** sono una combinazione dei filtri nominati sopra.



With a band-pass filter



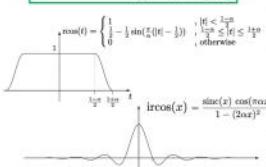
Mantengono il segnale attorno ad una certa pulsazione ω_0 , sopra una banda di estensione ω_b . Tutto questo appunto il filtro risulti simmetrico.

Questo tipo di filtro viene utilizzato, ad esempio, per rimuovere rumori ed altri tipi di disturbo dagli elettrocardiogrammi (ECG). In particolare, rimuove sinusoidi troppo lente o, al contrario, troppo veloci.

Nessuno di questi tipi di filtri è BIBO stabile. Inoltre, la loro risposta impulsiva ha una durata ampia nel dominio del tempo, quindi sono difficili da implementare.

With BIBO stability properties

low-pass $H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$
 $h(t) = 2f_c \text{irrcos}(2f_ct)$

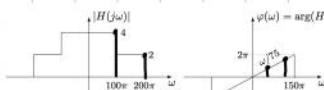


Nella pratica vengono implementati filtri che "smussano" la forma rettangolare in modo da ottenere altri tipi di forme che evitano le discontinuità. Ad esempio, la forma raffigurata è quella di un coseno malzato, dove il passaggio dal livello 1 al livello 0 assume la forma di un arco sinusoidale.

Questa forma con intervallo compatto corrisponde ai filtri BIBO stabili.

Filters in the Fourier domain

Esempio 1. Il segnale con la funzione di trasferimento raffigurata in Figura distorce il segnale $x(t) = \cos(3\omega_0 t) + 5\cos(4\omega_0 t)$?



Osserviamo che il filtro è reale data la simmetria Hermitiana nel dominio di Fourier che assicura un valore assoluto pari ed una fase dispari. L'output può essere calcolato semplicemente applicando la proprietà per una

Sinusoidi attraverso un filtro. Nello specifico, $y(t) = 1H(j50\pi)\cos(50\pi t + \phi(50\pi)) + 5H(j120\pi)\cos(120\pi t + \phi(120\pi))$

$$\text{Ottieniamo i valori osservando il grafico, quindi } y(t) = 4\cos(50\pi t + \frac{\pi}{2}) + 5\cdot 2\cos(120\pi t + \frac{7\pi}{4})$$

In quanto le sinusoidi sono moltiplicate tramite parametri diversi, il segnale risulta essere DISTORTO

Es. 2. Il segnale $x(t) = \text{Acos}^n(\omega_0 t)$, con $\omega_0 > 0$ viene inviato ad un filtro passa-basso ideale con pulsazione di cut-off $\omega_c > 0$.

Ovvero $H(j\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi\omega_c})$. Identifica la dipendenza del valore di n , il range di ω_0 garantisce $y(t) = x(t)$.

Data la natura del filtro passa-basso, è sufficiente che l'estensione del segnale nel dominio di Fourier soddischi $e(X) \subseteq [-\omega_c, \omega_c]$.

Inoltre, dato che il segnale è la potenza n -esima di un segnale di infinito periodo $s(t) = \cos(\omega_0 t)$ con estensione di Fourier $e(s) = [-\omega_0, \omega_0]$,

Allora, dato che $X(j\omega)$ è la convoluzione ripetuta di $S(j\omega)$, per la regola dell'estensione ottieniamo $e(X) = [-n\omega_0, n\omega_0]$, quindi è sufficiente che $n\omega_0 < \omega_c$.

Es. 3. Un filtro ha funzione di trasferimento $H(j\omega) = 1+j\omega T$. È reale? Calcola l'output corrispondente all'input $x(t) = \text{rect}(t/\tau)$.

Il filtro è Hermittiano nel dominio di Fourier perché ha parte reale pari e parte immaginaria dispari. Inoltre, la sua risposta impulsiva risulta essere reale \rightarrow anche il filtro è reale.

L'output vale $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = T\text{sinc}(\frac{\omega\tau}{2\pi\tau}) \cdot [1+j\omega T] = X(j\omega) + j\omega X(j\omega)$

$$S(t/\tau) = T\delta(t)$$

Inoltre, sfruttando la proprietà di derivazione della trasformata di Fourier, il segnale viene mappato nel dominio del tempo come $y(t) = x(t) + Tx'(t) = \text{rect}(\frac{t}{\tau}) + \text{rect}'(\frac{t}{\tau}) = \text{rect}(\frac{t}{\tau}) + \delta(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{2}) - \delta(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}) = \text{rect}(\frac{t}{\tau}) + T\delta(t + \frac{\tau}{2}) - T\delta(t - \frac{\tau}{2})$.

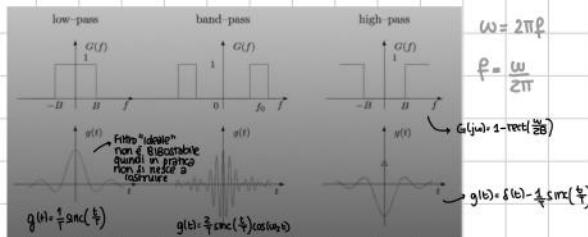
Es. 4. I segnali di input e output di un filtro sono $x(t) = t\text{mang}(\frac{t}{\tau})$ e $y(t) = t\text{mang}(\frac{t+2}{\tau}) + 2t\text{mang}(\frac{t}{\tau}) + 4t\text{mang}(\frac{t-1}{\tau})$. Calcola $H(j\omega)$, la risposta impulsiva $h(t)$ e la risposta a $x(t) = 1(t)$. Il filtro è BIBO stabile?

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3\text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{2\pi})}{\text{sinc}^2(\frac{\omega\tau}{2\pi})} [e^{j\omega\tau} + 2 + e^{-j\omega\tau}] = e^{j\omega\tau} + 2 + 4e^{-j\omega\tau}. \text{ La trasformata inversa è } h(t) = g(t+2) + 2g(t) + 4g(t-1).$$

Il filtro è BIBO stabile, dato $|h(t)| = h(t) = 1+2+4=7$ (finito).

La risposta al gradino diventa $y(t) = h * 1(t) = [g(t+2) + 2g(t) + 4g(t-1)] * 1(t) = 1(t+2) + 2 \cdot 1(t) + 4 \cdot 1(t-1)$.

Es. 5



$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$G(j\omega) = 1 - \text{rect}(\frac{\omega}{2B})$$

Es. 6 Un filtro reale generico $h(t)$ distorce il segnale $x(t) = \cos(\omega_0 t)$?

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$y(t) = ? \quad \text{Acos}(\omega_0(t-t_0))$$

Passiamo al dominio di Fourier *

$$* X(j\omega) = \pi g(\omega - \omega_0)$$



$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad \text{della centrale in } \omega_0$$

$$= \pi H(j\omega) \delta(\omega - \omega_0)$$

$$+ \pi H(j\omega) \delta(\omega + \omega_0)$$

con ratio $\frac{1}{2\pi}$

Sfruttando la simmetria Hermittiana ottieniamo:

$$Y(j\omega) = H^*(j\omega_0) \text{ con } H(j\omega_0) = Ae^{j\theta_0}$$

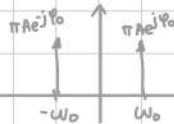
$$\text{ovvero } Y(j\omega) = \pi A e^{j\varphi_0} f(\omega - \omega_0) + \pi A e^{-j\varphi_0} f(\omega + \omega_0)$$

A questo punto calcoliamo l'antitrasformata per trovare $y(t)$

$$y(t) = \pi A e^{j\varphi_0} \frac{e^{j\omega_0 t}}{2\pi} + \pi A e^{-j\varphi_0} \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2\pi}$$

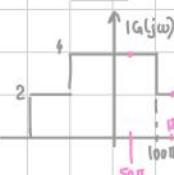
$$= A \left(e^{j\omega_0 t + j\varphi_0} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)} \right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Il filtro è reale e non distortivo



$$\begin{aligned} A &= |H(j\omega_0)| & \xrightarrow{\cos(\omega_0 t)} h(\cdot) & \xrightarrow{\text{resto}} \frac{A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)}{t_0 - \frac{\varphi_0}{\omega_0}} \\ \varphi_0 &= \angle H(j\omega_0) \end{aligned}$$

$$\text{ES.7 } x(t) \xrightarrow{g(\cdot)} y(t) \quad x(t) = \cos(50\pi t) + 5 \cos(120\pi t)$$



$$G(-j\omega) = A e^{j\varphi} = |G(j\omega)| e^{-j\arg(G(j\omega))}$$



* simmetria hermitiana: $\begin{cases} \text{Parte reale pari} + \text{immaginaria dispari} \\ \text{modulo pari} + \text{fase dispari} \end{cases}$

Identificando una simmetria hermitiana deduciamo che il filtro reale

$$x(t) = \cos(50\pi t) + 5 \cos(120\pi t)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 4 \cos(50\pi t + \frac{2}{5}\pi) + 10 \cos(120\pi t + \frac{3}{5}\pi) \\ &= 4 \cos(50\pi(t+1) + \frac{2}{5}\pi) + 10 \cos(120\pi(t+1) + \frac{3}{5}\pi) \end{aligned}$$

i due coseni sono stati amplificati di costanti diverse, quindi il segnale è sicuramente distorto $y(t) \neq A_x(t-t_0)$

N.B.: "catturare la linearità della fase": perché ci sia la stessa traslazione in tutte le componenti la fase deve essere lineare

$$\text{ES.8 } x(t) \xrightarrow{h(\cdot)} y(t) \quad x(t) = \operatorname{triang}(t/3)$$

$$y(t) = \operatorname{triang}(\frac{t+2}{3}) + 2 \operatorname{triang}(\frac{t}{3}) + 4 \operatorname{triang}(\frac{t-1}{3})$$

$h(t)$? $H(j\omega)$? BIBO stabile?

$$x * \delta(t) = ?$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \rightarrow \text{azione del filtro con } H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$y(t) = x(t+2) + 2x(t) + 4x(t-1) \rightarrow \text{da qui deduciamo che } h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t) + 4\delta(t-1)$$

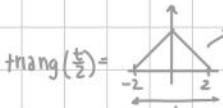
$$H(j\omega) = \frac{X(j\omega) \cdot e^{j2\omega}}{X(j\omega)} + 2X(j\omega) + 4X(j\omega)e^{-j\omega} = e^{j2\omega} + 2 + 4e^{-j\omega}$$

collezione di 3 f di area $A_0 = 1 + A_2 = 2 + A_2 = 3$

In quanto $|h(t)| = h(t)$ con $A_h = 7$, il filtro è assolutamente integrabile e quindi BIBO stabile

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 7 < +\infty$$

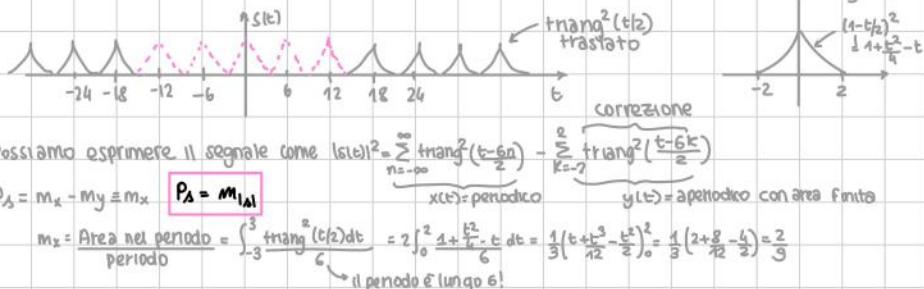
$$\text{ES.9. } s(t) = \sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{triang}(\frac{t-6n}{2}) - \operatorname{triang}(\frac{t+6n}{2}) \quad m_3 = ? \quad p_3 = ?$$



dato che la ripetizione di campionamento è di passo 6, deduciamo che non c'è aliasing

$m_3 = 0$ perché il segnale è dispari e s'integrale si bilancia

Per calcolare la potenza, invece, consideriamo $|s(t)|^2$



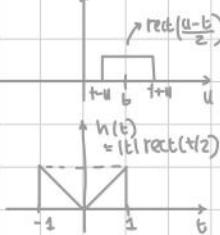
Dato $s(t) = x(t) + y(t)$ $\rightarrow s^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + 2x(t)y(t)$

$x(t)$ periodico $y(t)$ aperiodico con area finita \rightarrow xy area finita

A partire che $z(t)$ abbia area finita, $m_z^2 = m_x$ $P_s = P_x$

Esempio 10 $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} (t-u)x(u) du$ causale? lineare? tempo-invariante? BIBO stabile?

Cerchiamo di ricondurla ad una convoluzione...



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) x(u) du$$

\hookrightarrow il rect limita l'intervallo di integrazione $(-\infty, \infty)$ a $(t-u, t+u)$

$$\text{con } h(t-u) \text{ rect}\left(\frac{t-u}{2}\right) \equiv h(t-u)$$

Il sistema NON è causale perché $h(t)$ non è causale. Inoltre, nell'integrale si tiene conto anche dei contributi $(t+u)$. Il sistema è LTI perché è una convoluzione.

Infine, in quanto $h(t)$ è limitato nell'ampiezza e nel tempo è BIBO stabile

Esempio 11 $y(n) = \min(|x(n)|, 1/n)$

Il sistema è causale perché è sufficiente conoscere x al tempo stesso. È una trasformazione isontananza.

$$y(n) = \min(|x(n)|, 1/n) \leq \min(L_x, 1/n) \leq L_x \quad (\text{se fosse stato con max allora Non sarebbe stato BIBO stabile})$$

Il sistema NON è lineare perché $y(n)$ non lo è

Per valutare la tempo invarianza consideriamo:

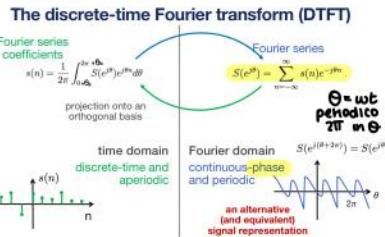
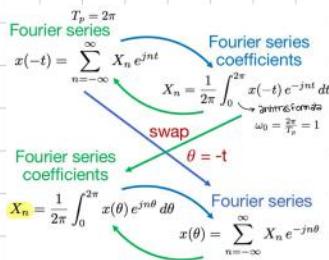
$$y(n-n_0) = \min(|x(n-n_0)|, 1/(n-n_0)) \text{ e lo paragoniamo a } \min(|x_{n_0}(n)|, 1/n) = \min(|x(n-n_0)|, 1/n)$$

Le due espressioni NON coincidono quindi il segnale NON è tempo-invariante.

DISCRETE-TIME FOURIER TRANSFORM AND SAMPLING THEOREM

Discrete-time Fourier transform - segnali discreti

4.1. Discrete-time Fourier transform



Ci sono vari modi per ottenere questa trasformata. Uno di questi è scambiare i domini: costituiamo una serie di Fourier per segnali di periodo 2π , i quali (coefficienti di Fourier operano ad una $\omega_0 = 1$ di riferimento).

Reinterpretando X_n come un segnale a tempi discreti e $x(\theta)$ come la trasformata di Fourier, otteniamo la cosiddetta **trasformata di Fourier a tempi discreti**.

La DTFT funziona per segnali aperiodici $s(n)$, che vengono trasformati in una DTFT $S(e^{jθ})$ secondo una regola praticamente equivalente a quella della controparte discreta di una trasformata standard. La trasformata risultante è periodica di periodo 2π . Un segnale aperiodico a tempi discreti mappa in una DTFT a fase periodica continua.

			time domain	Fourier domain
constant	1	$2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta)$	time-reversal	$X(e^{-jθ})$
delta dual pair	$\delta(n)$	$\frac{1}{1}$	conjugation	$X^*(e^{-jθ})$
rect	$\text{rect}\left(\frac{n}{N}\right)$	$N \text{sinc}_N\left(\frac{\theta N}{2\pi}\right)$	symmetries	even
sinc dual pair	$d \text{sinc}(nd)$	$\text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi d}\right)$		$X(e^{jθ}) = X(-\theta)$
exponential	$e^{jθ_0 n}$	$2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0)$		odd
delta dual pair	$\delta(n-m)$	$e^{-jθ(m-n)}$		$X(e^{jθ}) = -X(-\theta)$
sinusoid	$\cos(n\theta_0 + \vartheta_0)$	$\pi e^{j\theta_0} \text{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \pi e^{-j\theta_0} \text{comb}_{2\pi}(\theta + \theta_0)$		real
				$X(e^{jθ}) = X^*(e^{-jθ}) = X(e^{-jθ})$
				real + even
				$X(e^{jθ}) = X^*(e^{jθ}) = X(e^{jθ})$
				imaginary + odd
				$X(e^{jθ}) = X^*(e^{jθ}) = -X(e^{-jθ})$

	time domain	Fourier domain
linearity	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(jω) + \beta Y(jω)$
time-shift modulation dual pair	$x(n - n_0)$	$X(e^{jθ}) e^{-jn_0\theta}$
	$x(n) e^{jθ_0 n}$	$X(e^{j(\theta-\theta_0)})$
convolution product dual pair	$x * y(n)$	$X(e^{jθ}) Y(e^{jθ})$
	$x(n) y(n)$	$\frac{1}{2\pi} X *_{\text{cir}} Y(e^{jθ})$
increment product by n dual pair	$x(n) - x(n-1)$	$X(e^{jθ}) (1 - e^{-jθ})$
	$n x(n)$	$j X'(e^{jθ})$
current sum	$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$\frac{X(e^{jθ})}{1 - e^{-jθ}} + \pi A_x \text{comb}_{2\pi}(\theta)$
area energy Parseval's theorem	$A_s = S(e^{jθ})$	
	$E_s = P_S$	

Anche in questo caso vale l'equivalente della regola di derivazione (nel continuo), ovvero la **regola dell'incremento (nel discreto)**.

$$x(n) \xrightarrow{X(e^{jθ})} \text{increment} \xrightarrow{Y(e^{jθ})} y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Il valore a $\theta_0 = 0$ si perde in quanto $Y(e^{j0}) = 0$. Tutti gli altri sono moltiplicati per un fattore nero. In fine, anche in questo caso, per una corretta inversione del segnale si considera m_x per $θ = 0$.

$$X(e^{jθ}) = \frac{Y(e^{jθ})}{1 - e^{-jθ}} + 2\pi m_x \text{comb}_{2\pi}(\theta)$$

No need to correct for a finite value at $θ = 0 \pmod{2\pi}$

$$x(n) \xrightarrow{\text{Current sum}} y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) = x * \delta_0(n)$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\theta}) &= X(e^{j\theta}) \left[\frac{1}{1 - e^{-j\theta}} + \pi \text{comb}_{2\pi}(\theta) \right] \\ &= \frac{X(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + \pi X(e^{j\theta}) \text{comb}_{2\pi}(\theta) \\ &= \frac{X(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + \boxed{\pi X(e^{j\theta})} \text{comb}_{2\pi}(\theta) \end{aligned}$$

area

Come la convoluzione con il gradino unitario a tempi discreti. Per la regola di convoluzione nel dominio DTFT si ha una moltiplicazione con il gradino.

Discrete-time Fourier transform

Esempio 1. Prova la validità delle seguenti trasformate:

* $s(n) = \delta(n)$ e $S(e^{j\theta}) = 1$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-jn\theta} = 1 \quad \text{sfruttando la proprietà rivoltante del delta.}$$

* $s(n) = 1$ e $S(e^{j\theta}) = 2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta)$

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \text{rep}_{2\pi} s(\theta) e^{jn\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) e^{jn\theta} d\theta = 1 \quad \text{Usiamo l'intervallo } (-\pi, \pi) \text{ in modo da includere solo uno dei delta ripetuti che costituiscono il comb.}$$

* $s(n) = \text{dsinc}(nd), 0 < d < \pi$ e $S(e^{j\theta}) = \text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi d}\right)$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi d}\right) e^{jn\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{jn\theta} - e^{-jn\theta}}{j2\pi n} d\theta = \frac{e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}}{j2\pi n} = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \quad \begin{cases} n=0 & \rightarrow S(0)=\text{dsinc}(0) \\ n \neq 0 & \end{cases}$$

Esempio 2. Calcola la trasformata di Fourier a tempo discreto dei seguenti segnali:

* $s(n) = e^{j\theta_0 n}$

per la risoluzione sfruttiamo $x(n) = 1$ con $X(e^{j\theta}) = 2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta)$.

La trasformata può essere individuata sfruttando la proprietà di modulazione. Dato $s(n) = e^{j\theta_0 n} = x(n) e^{j\theta_0 n}$, la trasformata risultante vale $S(e^{j\theta}) = X(e^{j(\theta-\theta_0)}) = 2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta-\theta_0)$

* $s(n) = \text{sgn}(n)$

Sfruttiamo la proprietà dell'incremento ed ottieniamo $y(n) = s(n) - s(n-1) = \delta(n) + \delta(n-1) \rightarrow Y(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta}$

$$\text{Invertendo l'incremento ottieniamo } S(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + 2\pi m_3 \text{comb}_{2\pi}(\theta) = \frac{1 + e^{-j\theta}}{1 - e^{-j\theta}} \quad (s(n) = \text{sgn}(n) \text{ ha } m_3 = 0)$$

Ottieniamo $S(e^{j\theta}) = -j \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

* $s(n) = \delta_0(n)$

$$y(n) = s(n) - s(n-1) = \delta(n) \rightarrow Y(e^{j\theta}) = 1$$

$$\text{Invertendo l'incremento e ricordando che } m_3 = \frac{1}{2} \text{ ottieniamo } S(e^{j\theta}) = \frac{Y(e^{j\theta})}{1 - e^{-j\theta}} + 2\pi m_3 \text{comb}_{2\pi}(\theta) = \frac{1}{1 - e^{-j\theta}} \pi \text{comb}_{2\pi}(\theta)$$

* $s(n) = n \delta_0(n), |n| < 1$. Per quali valori di ω il valore assoluto di $|S(e^{j\theta})|$ è una funzione pari?

Possiamo scrivere il segnale in forma $s(n) = n x(n)$ con $x(n) = \delta_0(n)$ e sfruttare la proprietà del prodotto per n

La somma corrente è correlata all'incremento come inverso e può essere scritta

Per la trasformata otterremo $X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-jn\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{j\theta})^n = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}}$

$$\text{Quindi } S(e^{j\theta}) = j \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\theta}} \right) = j \frac{j\alpha e^{-j\theta}}{(1-\alpha e^{-j\theta})^2} = \frac{\alpha e^{-j\theta}}{(1-\alpha e^{-j\theta})^2}$$

Per valutare la parità del valore assoluto consideriamo: $|S(e^{j\theta})| = \frac{|\alpha|}{|1 - \alpha e^{-j\theta}|^2}$

Dato $\alpha = |a|e^{j\varphi_\alpha}$, l'unica possibilità per ottenere una

Funzione pari è che $\varphi_\alpha = 0 \text{ o } \pi$ (per ottenere $\pm \cos(\theta)$)

ovvero un valore di α reale (positivo o negativo).

$$\begin{aligned} |S(e^{j\theta})| &= \frac{|\alpha|}{|1 - \alpha e^{-j\theta}|^2} \\ &= \frac{|\alpha|}{(1 - \alpha e^{-j\theta})(1 - \alpha e^{j\theta})} = \frac{|\alpha|}{(1 - \alpha e^{-j\theta})(1 - \alpha^* e^{j\theta})} \\ &= \frac{|\alpha|}{1 - \alpha e^{-j\theta} - \alpha^* e^{j\theta} + |\alpha|^2} \\ &= \frac{|\alpha|}{1 - |\alpha| e^{-j(\theta - \varphi_\alpha)} - |\alpha| e^{j(\theta - \varphi_\alpha)} + |\alpha|^2} \\ &= \frac{|\alpha|}{1 - 2|\alpha| \cos(\theta - \varphi_\alpha) + |\alpha|^2} \end{aligned}$$

Esempio 3: $s(n) = \delta(n)$ $S(e^{j\theta}) = ?$

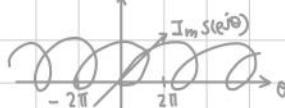


$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-jn\theta} = \underbrace{\delta(n)}_{y(n)} = 1$$



Esempio 4: $s(n) = \delta(n-n_0)$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-n_0) e^{-jn\theta} = e^{-jn_0\theta}$$



$\boxed{! \text{ } s \text{ nel dominio del tempo da un esponenziale complesso nel dominio di Fourier}}$

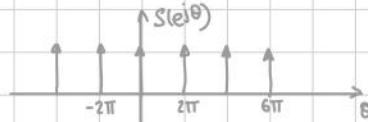
Esempio 5: $s(n) = 1$

$$S(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\theta - 2\pi k) = X(\theta)$$

anttrasformata

$$\dots \text{veniamo a } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \delta(\theta - 2\pi k) e^{j\theta n} d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 1 \cdot 2\pi = 1.$$

aggiunto per controbilanciare l'anttrasformata



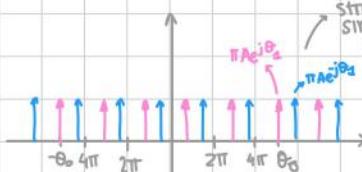
$$S(n) = 1 \xrightarrow{\text{comb}} \text{comb}_{2\pi}(\theta) \cdot 2\pi$$

Esempio 6: $s(n) = A \cos(\theta_0 n + \theta_2)$ $S(e^{j\theta}) = ?$

$$s(n) = \frac{A}{2} e^{j\theta_0 n} \cdot e^{j\theta_2 n} + \frac{A}{2} e^{-j\theta_0 n} \cdot e^{-j\theta_2 n}$$

proprietà di modulazione

$$S(e^{j\theta}) = \frac{A}{2} e^{j\theta_2} \frac{1}{2\pi} \text{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0) + \frac{A}{2} e^{-j\theta_2} \frac{1}{2\pi} \text{comb}_{2\pi}(\theta + \theta_0)$$



Per θ_2 molto piccolo



$$S(e^{j\theta}) = \text{rect}_{2\pi} f \pi A e^{j\theta_2} \delta(\theta - \theta_0)$$

$$+ \pi i A e^{j\theta_2} \delta(\theta + \theta_0)$$

Esempio 7: $s(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{2n_0+1}\right)$ questo rect ha ampiezza $2n_0+1$. Valutiamo il rect attivo con valori 1 dall'istante $-n_0$ a $+n_0$.

$$s(n)$$



Assicuriamo che il valore del nostro segnale è identicamente 1 nell'intervallo $[-n_0, n_0]$ e fuori vale 0. Il valore $1/2$ del rect continuo si troverebbe a $n_0 + 1/2$ (che

però NON è un intero e quindi quell'istante non viene mai valutato nel discreto)

$$s(n) = \begin{cases} 1 & -n_0 \leq n \leq n_0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\rightarrow S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-n_0}^{n_0} s(n) e^{-jn\theta} = \sum_{n=-n_0}^{n_0} e^{-jn\theta}$$

Possiamo riscrivere la sommatoria con $m = n+n_0$

$$\sum_{n=0}^{2n_0} e^{-j\theta(m-n_0)} = e^{j\theta n_0} \sum_{m=0}^{2n_0} e^{-j\theta m} \text{ con } \alpha = e^{-j\theta} = \frac{e^{j\theta n_0}}{1 - e^{-j\theta}} = \frac{e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2}}$$

quindi $S(e^{j\theta}) = \frac{\sin(\theta(n_0+1/2))}{\sin(\theta/2)}$ sinc periodico

Es.8 $s(n) = \text{sgn}(n)$

Si utilizza la regola dell'incremento $y(n) = s(n) - s(n+1)$ con

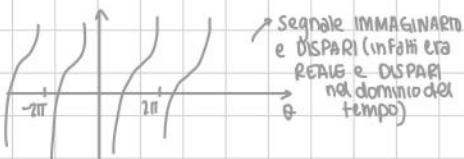
$$\frac{S(e^{j\theta})}{1 - e^{j\theta}} \times \frac{Y(e^{j\theta})}{1 - e^{j\theta}} = Y(e^{j\theta}) = 1 + e^{j\theta}$$

Ricaviamo che $Y(e^{j\theta}) = (1 - e^{j\theta})S(e^{j\theta})$ con
 $S(e^{j\theta}) = \frac{1 + e^{j\theta}}{1 - e^{j\theta}}$ MA la regola è valida solo per
 $\theta \neq 2k\pi$. Nel multiplo di 2π si dividerebbe per 0.

Per $\theta = 2k\pi$ $S(e^{j\theta})$ vale A_A ($\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)$). Unendo i risultati $S(e^{j\theta}) = \begin{cases} \frac{1 + e^{j\theta}}{1 - e^{j\theta}} & \theta \neq 2k\pi \\ 0 & \theta = 2k\pi \end{cases}$

* possiamo riscrivere come:

$$\frac{1 + j\theta}{1 - e^{-j\theta}} \cdot \frac{e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2}} = \frac{j\theta/2 + e^{j\theta/2}}{e^{j\theta/2} e^{j\theta/2}} = \frac{2\cos(\theta/2)}{\sqrt{1 + \sin^2(\theta/2)}} = -j \cot(\theta/2)$$



$$s(n)=1 \rightarrow S(e^{j\theta})=2\pi \text{rep}_{2\pi} S(\theta)$$

$$s(n)=\text{sgn}(n) \rightarrow S(e^{j\theta})=-j \cot(\theta/2)$$

$$s(n) \rightarrow S(e^{j\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{jn\theta}$$

Es.9 $s(n) = 1_o(n)$

$$S(n) = \frac{1}{2} \text{sgn}(n) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(n) \equiv S(n) = 1_o(n)$$

$$S(e^{j\theta}) = \frac{1}{2} - j \cot(\theta/2) + \frac{1}{2} 2\pi \text{rep}_{2\pi} S(\theta) + \frac{1}{2} \cdot 1$$

... con la regola dell'incremento $\rightarrow y(n) = s(n) \rightarrow Y(e^{j\theta}) = 1 \rightarrow S(e^{j\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \theta \neq 2k\pi \\ \frac{1 + e^{j\theta}}{1 - e^{j\theta}} & \theta = 2k\pi \end{cases}$
 dato $A_S = \infty$ (consideriamo $M_S = 1/2$, ovvero $* S(e^{j2k\pi}) = M_S \cdot 2\pi \text{rep}_{2\pi} S(\theta)$)

trasformazione di Fourier del valore medio

DTF: discrete Fourier transform (periodic signals)

proiezione su una base ortogonale

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{jkn\theta_0}$$

discreto periodico

$$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-jk\pi\theta_0}, \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}$$

discreto e periodico

ricostruzione del segnale

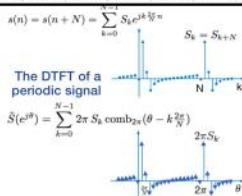
Il dominio di Fourier è discreto, ma anche periodico

Anche in questo contesto vengono utilizzate le proprietà valide anche per le altre trasformate



4.2. Relations among transforms (part 2)

Che cosa succede se consideriamo la DTFT di un segnale discreto periodico invece che la sua DFT?

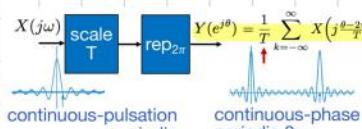
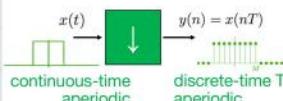


Se esprimiamo un segnale tramite l'inversa DFT, che è una collezione di N esponenziali complessi, allora la DTFT è facilmente ottenibile da coppie di segnali conosciute e corrisponde ad una serie di segnali comb moltiplicati per $2\pi S_k$.

Sostituendo, quindi, la struttura discreta della DFT con i delta scalati del fattore 2π .

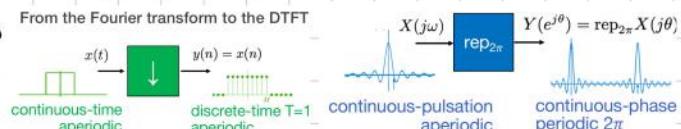
Nel dominio di Fourier, quando campioniamo un segnale, otteniamo la DTFT $Y(e^{j\theta})$, ottenuta a partire da $X(j\omega)$ scalando il dominio di pulsazione per T e ripetendo periodicamente il risultato di 2π dividendo per T

From the Fourier transform to the DTFT



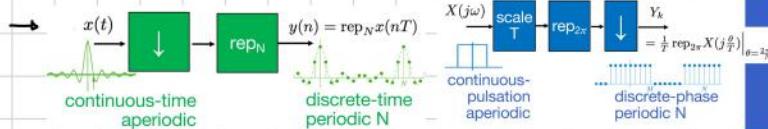
Guesto risultato è particolarmente rilevante quando scegliamo $T=1$

Per $T=1$, se conosciamo la trasformata di x , allora la DTFT di y è ottenuta tramite semplice ripetizione periodica.



Che cosa succede se ripetiamo periodicamente un segnale discreto aperiodico? In questo caso, la relazione tra la DTFT del segnale originale $x(n)$ e la DFT della ripetizione periodica $y(n)$ è una semplice operazione di campionamento. ovvero, a partire da $x(n)$ otteniamo $y(n) = \text{rep}_N x(n)$ che, nel dominio di Fourier diventa un effetto di campionamento da $X(e^{j\theta})$ continuo e periodico di fase 2π a $Y_k = X(e^{j k 2\pi/N})$ segnale discreto periodico a fase N .

È possibile combinare le due operazioni, utile per la rappresentazione su Matlab



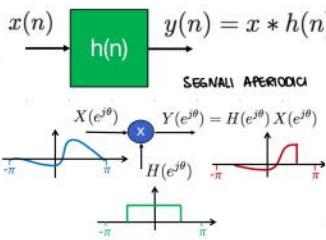
Relations among transforms (part 2)

Esempio 1. Calcola la trasformata di Fourier a tempi discreti di $\text{dsinc}(ndt)$, $0 < d < 1$.

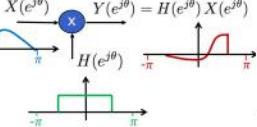
Si fruttiamo la proprietà di campionamento con $T=1$ applicata alla coppia $x(t) = \text{dsinc}(dt)$ e $X(j\omega) = \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi d})$

La trasformata di Fourier è ottenuta tramite semplice applicazione della proprietà di scala: $S(e^{j\theta}) = \text{rep}_{2\pi} X(j\theta) = \text{rep}_{2\pi} \text{rect}(\frac{\theta}{2\pi d})$ che è un'onda quadra.

4.3. Filters in the Fourier domain (part 2)



SEGNALI APERTORICI



L'approccio ai filtri a tempo discreto

è praticamente equivalente a quello dei filtri a tempo continuo.

Per un segnale discreto aperto, l'output DTFT è il prodotto tra l'input DTFT e la trasformata della risposta impulsiva.

Contrariamente a quanto accade a tempo continuo, in questo caso le trasformate sono periodiche di periodo 2π , quindi l'azione del filtro può essere studiato su un periodo, solitamente $[-\pi, \pi]$.

Quando il segnale in input è periodico, la DTFT consiste solo in impulsi, che collezionano valori differenti della trasformata h .

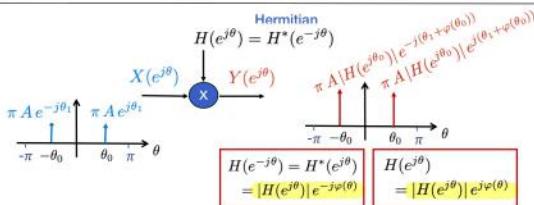
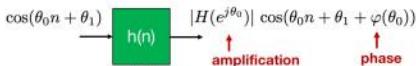
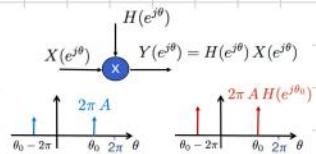
La serie e il parallelo seguono le stesse regole e considerazioni del tempo continuo.

Un esponentiale complesso campionato è un auto funzione

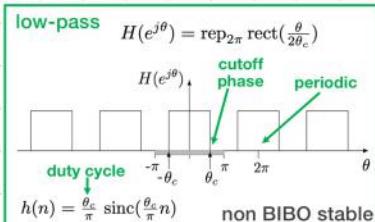
$$x(n) = A e^{jn\theta_0} \xrightarrow{h(n)} y(n) = A H(e^{j\theta_0}) e^{jn\theta_0}$$

complex constant

di un filtro a tempo discreto. La sua DTFT è un segnale comb shiftato del valore della fase dell'esponente θ_0 . L'azione del filtro è il prodotto con la costante $H(e^{j\theta_0})$



Per le sinusoidi vale la stessa regola delle sinusoidi a tempo continuo. L'output è la sinusoida originale con fase θ_0 moltiplicata per il valore assoluto $|H(e^{j\theta_0})|$ e con una fase aggiuntiva uguale alla fase del valore complesso $H(e^{j\theta_0})$. Il risultato può essere verificato tramite la simmetria Hermitiana.



BIBO stable low-pass

$$H(e^{j\theta}) = \text{rep}_{2\pi} \text{rcos}(\frac{\theta}{2\theta_c}) \quad h(n) = \frac{\theta_c}{\pi} \text{ircos}(\frac{\theta_c}{\pi} n)$$

I filtri selettivi hanno lo stesso nome di quelli a tempo continuo.

Tuttavia, in questo caso le forme di riferimento sono relative al periodo di riferimento $[-\pi, \pi]$. Le versioni ideali non sono BIBO stabili. Serve ottenere la controparte campionata basata su coseni malzati, o simili, per la BIBO stabilità.

Filters in the Fourier domain (part 2)

Ese. 1 Identifica la classe di filtri a tempo discreto tali per cui $x(n) = e^{-jn\pi/2}$ e $y(n) = \frac{1}{8} e^{-jn\pi/6}$

In generale, dato che in questo caso $y(n) = H(e^{jn\theta})x(n)$ è sufficiente avere $H(e^{j\pi/6}) = \frac{1}{8}$

Es.2 Il segnale $x(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1)$ è prima filtrato da un filtro passa-basso ideale con fase di cut-off $\theta_c = \frac{\pi}{2}$, poi l'output è moltiplicato per $v(n) = 1 - e^{j\pi n} = 1 - (-1)^n$ per ottenere l'output $y(n)$. Identifica $y(n)$.



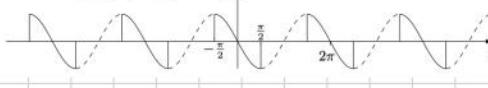
Analizzando il sistema nel dominio di Fourier. Per l'input, trasformando i due delta otteniamo $X(e^{j\theta}) = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = -2jsin(\theta)$

Per assunzione il filtro è $H(e^{j\theta}) = \text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)$ ovvero un'onda quadra con duty-cycle $d = \frac{1}{2}$.

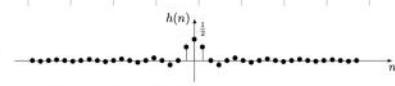
$$\text{Quindi } Z(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})H(e^{j\theta}) = -2jsin(\theta) \cdot \text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right) = \text{rep}_{2\pi} - 2jsin(\theta)\text{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right).$$

La trasformata di Fourier $y(n) = z(n)v(n) = z(n) - z(n)e^{j\pi n}$ fornisce, tramite la regola di modulazione $Y(e^{j\theta}) = Z(e^{j\theta}) \cdot Z(e^{j(\theta-\pi)})$

$$\Im[Z(e^{j\theta}) - Z(e^{j(\theta-\pi)})]$$



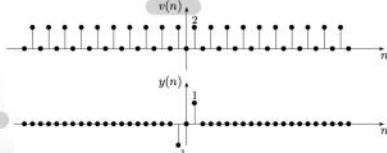
$$\text{Quindi } Y(e^{j\theta}) = -2jsin(\theta) \text{ e quindi } y(n) = x(n)$$



This exercise can also be solved in the time domain, which can be done graphically, by observing that $h(n) = \frac{1}{2} \text{sinc}(\frac{n}{2})$ and therefore $z(n) = x * h(n) = h(n-1) - h(n+1)$, while it is

$$v(n) = 1 - (-1)^n = \begin{cases} 2 & , n \text{ odd} \\ 0 & , n \text{ even} \end{cases}$$

From the figure we see that $h(n)$ is zero for n even, except at $n = 0$, which implies that $z(n)$ is zero for n odd, except at $n = \pm 1$. Since $v(n)$ is zero for n even, the only two values that are maintained in the product $y(n) = z(n)v(n)$ are the ones at $n = \pm 1$, which provides the result $y(n) = x(n)$.



Es.3 Identifica la risposta impulsiva di un filtro passa-alto con cut-off $\theta_c \in (0, \pi)$

L'espressione del filtro nel dominio di Fourier è $H(e^{j\theta}) = 1 - \text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{2\theta_c}\right)$.

La sua trasformata inversa può essere ottenuta invertendo separatamente i due contributi.

Per il contributo costante $1 \rightarrow \delta(n)$, mentre per la ripetizione periodica, la interpretiamo come una operazione di campionamento applicata alla coppia di Fourier $\frac{\theta_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\theta_c}{\pi} n\right) \rightarrow \text{rect}\left(\frac{n}{2\theta_c}\right)$

$$\text{Quindi } h(n) = \delta(n) - \frac{\theta_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\theta_c}{\pi} n\right) \text{ con } d = \frac{\theta_c}{\pi} \text{ duty-cycle dell'onda quadra.}$$

4.4. Wrap Up on Fourier transform

continuous-time	discrete-time	
$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta$	
$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$	$S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-jn\theta}$	
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	Fourier series	DFT
$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k e^{jk\omega_0 t}$	$s(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} S_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$	
$S_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	$S_k = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} s(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$	
$\underline{\text{K}\omega_0}$	$\underline{\text{frequenza periodica}}$	
\rightarrow le varie strutture si assomigliano		

Proprietà di MODULAZIONE

continuous-time	discrete-time	
$x(t - t_0)$	$X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$	$x(n - n_0) X(e^{j\theta}) e^{-j\theta n_0}$
$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X(j\omega - j\omega_0)$	$x(n) e^{j\theta_0 n} X(e^{j(\theta - \theta_0)})$
	\downarrow traslazione	$\theta_0 n$
Fourier transform	DTFT	DTFT
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	Fourier series	DFT
$x(t - t_1)$	$X e^{-jk\omega_0 t_1}$	$x(n - n_1) X e^{-jk \frac{2\pi}{N} n_1}$
$x(t) e^{jm\omega_0 t}$	X_{k-m}	$x(n) e^{jm \frac{2\pi}{N} n} X_{k-m}$
$m\omega_0$	t	$m \frac{2\pi}{N}$
		n

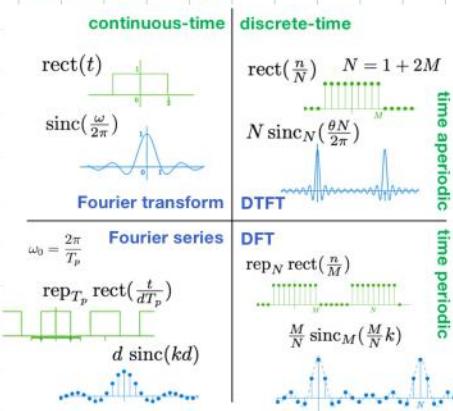
Proprietà di CONVOLZIONE

continuous-time	discrete-time	
$x * y(t)$	$x * y(n)$	
$X(j\omega)Y(j\omega)$	$X(e^{j\theta})Y(e^{j\theta})$	
$x(t)y(t)$	$x(n)y(n)$	
$\frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$	$\frac{1}{2\pi} X *_{\text{cir}} Y(e^{j\theta})$	
Fourier transform	DTFT	DTFT
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	Fourier series	DFT
$x *_{\text{cir}} y(t)$	$x *_{\text{cir}} y(n)$	
$T_p X_k Y_k$	$N X_k Y_k$	
$x(t)y(t)$	$x(n)y(n)$	
$X_k * Y_k$	$X *_{\text{circ}} Y_k$	
\rightarrow prodotto e convoluzione sono operazioni duali		

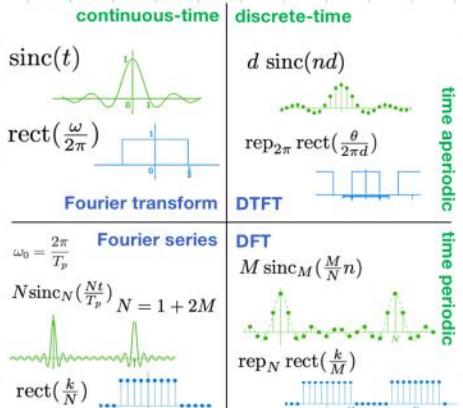
Area ed Energia

continuous-time	discrete-time	
$s(0) = A_s$	$s(0) = m_s$	
$A_x = S(j0)$	$A_s = S(e^{j0})$	
$E_x = \frac{1}{2\pi} E_X$	$E_s = P_S$	\downarrow dominio di Fourier
Fourier transform	DTFT	
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	Fourier series	DFT
$s(0) = A_x$	$s(0) = m_s N$	
$m_x = X_0$	$m_x = X_0$	
$P_x = E_X$	$P_x = E_X(N)$	
\downarrow dominio del tempo		
continuous-time	discrete-time	
$e^{j\omega_1 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_1)$	$e^{j\theta_0 n}$
$\delta(t - t_1)$	$e^{-j\omega t_1}$	$2\pi \text{comb}_{2\pi}(\theta - \theta_0)$
		$\delta(n - m)$
Fourier transform	DTFT	DFT
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$	Fourier series	
$e^{jm\omega_0 t}$	$\delta(k - m)$	$e^{jm \frac{2\pi}{N} n}$
$\text{rep}_{T_p} \delta(t - t_1)$	$\text{rep}_N \delta(k - m)$	$\text{rep}_N \delta(n - m)$
$\frac{1}{T_p} e^{-jk\omega_0 t_1}$		$\frac{1}{N} e^{-jk \frac{2\pi}{N} m}$

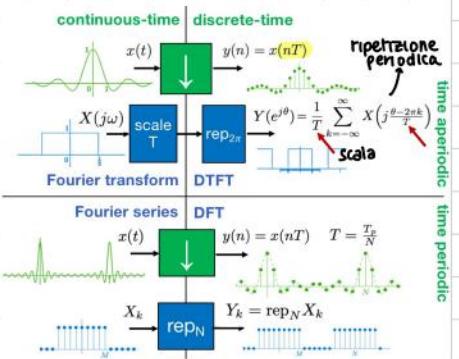
Trasformata del RECT



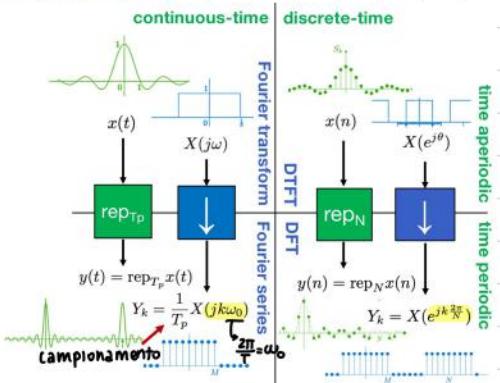
Trasformata del SINC



Sampling



Periodic Repetition



Wrap-up on Fourier transforms

Esempio 1. Il segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}(-1-k)$ è fornito ad un filtro passa-basso con pulsazione di corteccia $\omega_c = \frac{3\pi}{2}$. Calcola l'output $y(t)$.

Il filtro ha periodo $T_p = 2$, può essere riscritto come $x(t) = 2 \text{rep}_{T_p} \text{rect}(t) - 1 \rightarrow$ è la differenza tra un'onda quadra ed una costante.

I suoi coefficienti di Fourier sono: $X_k = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1 = \text{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1$ associati alle pulsazioni $k\omega_0 = k\pi$

In quanto $\omega_c = \frac{3\pi}{2}$ gli unici coefficienti mantenuti sono $k = -1, 0, 1$.

Quindi, i coefficienti dell'output sono $Y_k = \begin{cases} X_k, & k = -1, 0, 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \text{sinc}(1/2) = \frac{2}{\pi}, & k = \pm 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\text{Per la trasformata inversa otteniamo } y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{2}{\pi} e^{j\pi t} + \frac{2}{\pi} e^{-j\pi t} = \frac{4}{\pi} \cos(\pi t)$$

Esempio 2. Calcola la trasformata di Fourier per un segnale reale pari e periodico di periodo T_p , definito da

$$s(t) = t^2 \text{ nell'intervallo } [0, \frac{1}{2} T_p]$$

Possiamo riscrivere il segnale come $s(t) = \text{rep}_{T_p} t^2 \text{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right)$ quindi $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) \rightarrow X(j\omega) = T_p \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi/T_p}\right)$

A questo punto applichiamo la proprietà del prodotto per $t \rightarrow y(t) = t^2 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) \rightarrow Y(j\omega) = j^2 X''(j\omega) = -\frac{T_p^3}{4\pi^2} \operatorname{sinc}''\left(\frac{\omega}{2\pi/T_p}\right)$

$$\text{Per il campionamento a } k\omega_0, \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p} \text{ otteniamo } S_k = \frac{1}{T_p} Y(jk\omega_0) = -\frac{T_p^2}{4\pi^2} \operatorname{sinc}''(k) = \frac{T_p^2}{4\pi^2} \begin{cases} \frac{12}{5}, & k=0 \\ \frac{2(-1)^k}{k^2}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Es. 3. Calcola la trasformata di Fourier per $s(t) = \operatorname{sinc}(t) \cdot \operatorname{sinc}(2(t-1))$

Possiamo interpretare il segnale come un prodotto $s(t) = x(t)y(t)$ dove $x(t) = \operatorname{sinc}(t) \rightarrow X(j\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ e

$$y(t) = \operatorname{sinc}(2(t-1)) \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) e^{-j\omega} \text{ sinc scalato è trattato}$$

Applicando la regola del prodotto $S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)$ otteniamo $S(j\omega) = \frac{1}{4\pi} \cdot$

$$\text{Risolvendo l'integrale ottieniamo: } S(j\omega) = \frac{j}{4\pi} \cdot \begin{cases} -e^{-j\omega} - 1, & \omega \in (-3\pi, -\pi) \\ 1 + e^{-j\omega}, & \omega \in (\pi, 3\pi) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

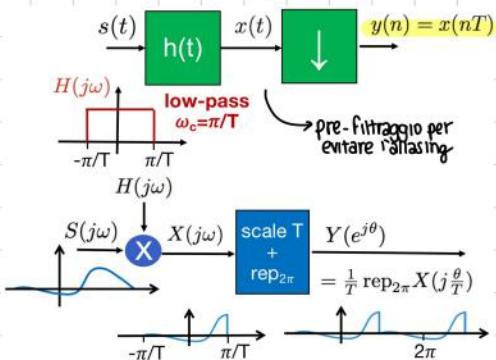
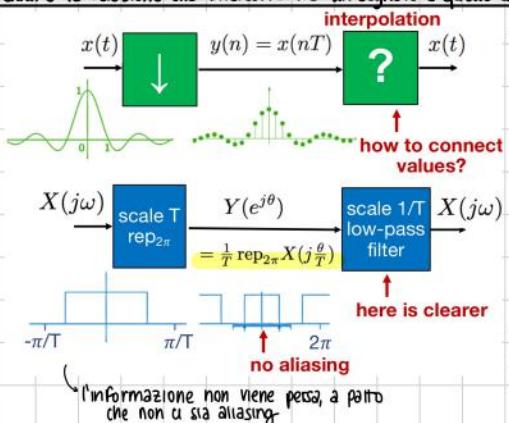
$$\begin{cases} \int_{-\omega+\pi}^{\omega+\pi} e^{-ju} du, & \omega \in (-3\pi, -\pi) \\ \int_{\omega-\pi}^{\omega+\pi} e^{-ju} du, & \omega \in (-\pi, \pi) \\ \int_{\omega-\pi}^{\pi} e^{-ju} du, & \omega \in (\pi, 3\pi) \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Shannon's sampling theorem

4.5. Interpolation in the time-domain

Idea: il campionamento è un'operazione perfettamente reversibile per segnali limitati nel dominio della pulsazione

Quale è la relazione che intercorre tra un segnale e quello campionato?



Come è possibile connettere i campionamenti $x(n)$ in modo da produrre segnali a tempo continuo che mantengono in relazione i campionamenti?

Anche l'operazione di interpolazione ricorda una convoluzione

Ma quanto devono essere vicini i campioni?

È una domanda troppo complicata a cui rispondere nel dominio del tempo.

Nel dominio di Fourier, invece, notiamo che $-\pi/\tau$ e π/τ

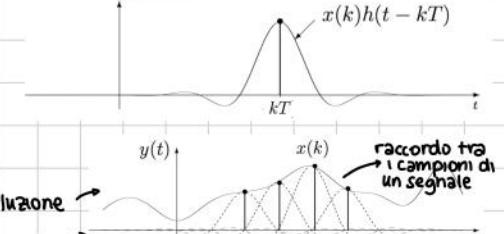
mappano in $-\pi$ e π e, in seguito a ripetizione, si ottiene un segnale periodico (non c'è sovrapposizione).

Questo teorema ci permette di eliminare le ripetizioni periodiche mantenendo solamente l'informazione sul segnale originario $X(j\omega)$.

In realtà, come mostrato a lato, ogni segnale può essere filtrato con un filtro passa-basso, in modo da evitare l'aliasing.

Questo metodo di ricostruzione del segnale è detto **interpolazione**.

$$x(n) \xrightarrow{h(t)} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(t-kT)$$



$$y(t) = x(n) \rightarrow h(nT) = \delta(n) \rightarrow \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi} H(j\theta/T) = 1$$

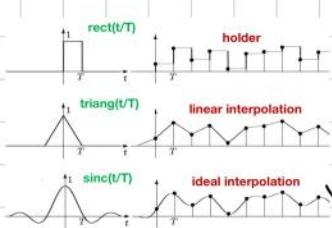
$$y(nT) = \sum_k x(k)h(nT-kT)$$

$$= x(n) * h(nT) = x(n) \rightarrow h(nT) = \delta(n)$$

l'h campionata a passo T ci permette di ottenere un $\delta(n)$ di Kronecker

Questi esempi soddisfano i criteri per un'interpolazione corretta.

Tendenzialmente una buona funzione interpolatrice sarà un sinc, o un segnale analogo.



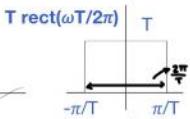
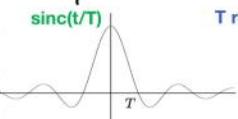
questo tipo di filtro permette di ricostruire il segnale continuo a partire dai suoi campioni (filtro di ricostruzione)

In the Fourier domain *

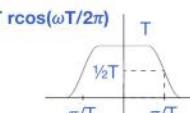
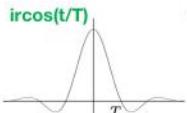
$$\begin{aligned} \delta(n) = h(nT) &\implies 1 = \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi/T} H(j\frac{\theta}{T}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j\frac{\theta - 2\pi k}{T}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j(\frac{\theta}{T} - \frac{2\pi}{T}k)) \\ &= \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi/T} H(j\omega) \Big|_{\omega=\frac{\theta}{T}} \end{aligned}$$

$$\text{rep}_{2\pi/T} H(j\omega) = T$$

NON BIESTABILE

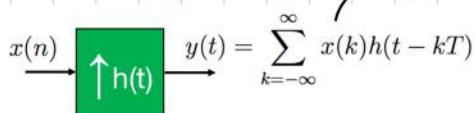


* lavorando con θ o ω è
indifferente (scalare una
costante dà la costante
stessa)



impulso a coseno halizzato

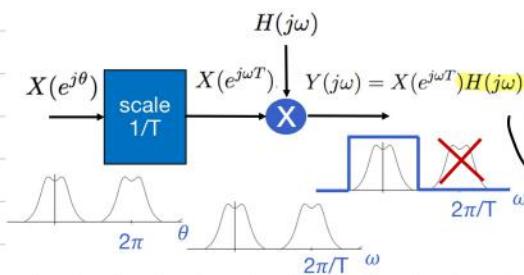
4.6. Shannon's Sampling theorem



interpolazione in frequenza come scala e filtraggio

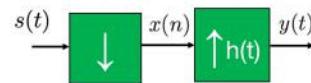
Il filtro di interpolazione scala la DTFT di x per $1/T$, poi moltiplica il risultato per la trasformata di Fourier della risposta impulsiva.

In questo caso la scala corrisponde a cambiare gli assi di Fourier affinché la periodicità di 2π venga mappata in una periodicità di $2\pi/T$.



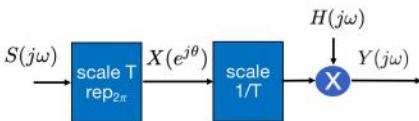
permette di eliminare la
ripetizione periodica

Cosa succede se consideriamo campionamento ed interpolazione uno dopo l'altro in serie?



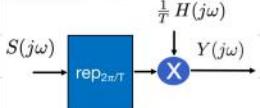
$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi} S(j\frac{\theta}{T})$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(j(\frac{\theta}{T} - \frac{2\pi}{T}k))$$



$$Y(j\omega) = X(e^{j\omega T})H(j\omega)$$

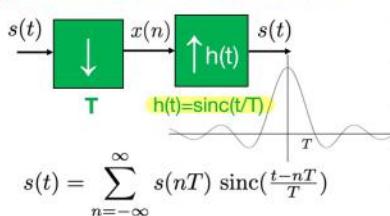
$$= \frac{1}{T} H(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(j(\omega - \frac{2\pi}{T}k))$$



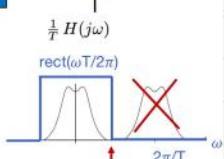
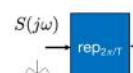
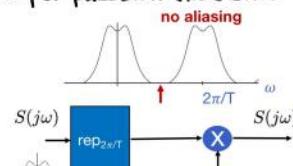
"teorema del campionamento in banda base" significa un filtro per pulsazioni che stanno attorno al valore 0

Shannon's base-band version

A continuous-time signal $s(t)$ can be perfectly recovered from its samples $x(n) = s(nT)$, with sampling spacing T , under the condition that its Fourier transform $S(j\omega)$ has an extension $e(S)$ contained in the interval $[-\pi/T, \pi/T]$



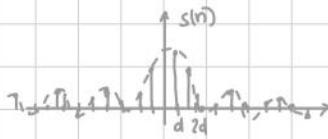
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \text{sinc}(\frac{t-nT}{T})$$



Si dice "banda base"
perché la rappresenta-
zione del segnale si
trova vicino all'origine,
attorno a ω_0

Shannon's sampling theorem

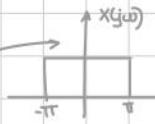
$$\text{Esempio 1: } s(n) = \text{sinc}(n\pi) \quad 0 < n < 1 \quad S(e^{j\theta}) = ?$$



$s(n)$ è un sinc campionato

$$\text{Se } x(t) = \text{sinc}(t) \rightarrow X(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

quindi $s(n) = x(nT)$ con $T = d$



$$\text{Ottieniamo: } S(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi} X(j\frac{\theta}{T}) = \frac{1}{\pi} \text{rep}_{2\pi} \text{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

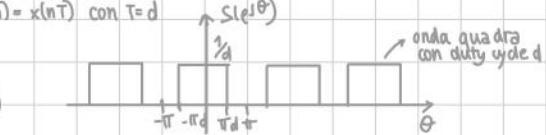
$$\text{Esempio 2: } s(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{2n_0+1}\right) \quad S(e^{j\theta}) = ?$$

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \text{ con } T_0 = 2n_0 + 1 \rightarrow X(j\omega) = T_0 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_0}{2\pi}\right)$$

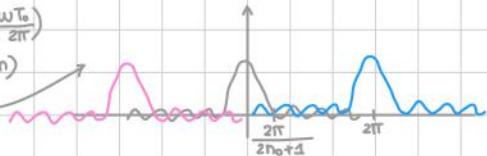
$$S(e^{j\theta}) = x(nT) \text{ con } T = 1 \text{ (rect campionato agli interi n)}$$

$$= \frac{1}{T} \text{rep}_{2\pi} X(j\frac{\theta}{T}) = \text{rep}_{2\pi} T_0 \text{sinc}\left(\frac{\theta}{2\pi/T_0}\right)$$

$X(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{1}{T}$



onda qua dura con duty cycle d



Esempio 3: Proporre uno schema di ricostruzione dei campioni per $s(t) = \text{sinc}^2(t)$



Dobbiamo capire quanto vale B

$$s(t) = \text{sinc}(t) \cdot \text{sinc}^2(t)$$

$$\downarrow \int$$

$$S(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) * \text{triang}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{2\pi}\right)$$

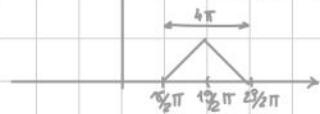


L'estensione diventa e $[S] = [-\pi - 2\pi, \pi + 2\pi] = [-3\pi, 3\pi]$ e quindi $B = \frac{3\pi}{2} = \frac{3}{2}$, ovvero $T < \frac{1}{2B} = \frac{1}{3\pi/2} = 1/3$

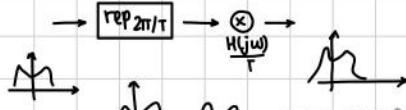
$$\text{Esempio 4: } s(t) = \text{sinc}^2(t) e^{-\frac{19}{2} \pi t}$$

CAMP. + INTERP. con T più grande possibile

$$\uparrow S(j\omega) = \text{triang}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{2\pi}\right)$$

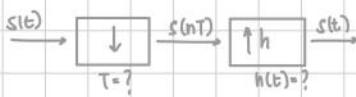


N.B.: cascata campionamento - interpolazione



posso usare altri a caso se $T < 1/2B$ (passo di riferimento)

più piccolo è T , più distanti sono le ripet. periodiche



$2\pi B = 23\pi \rightarrow B = \frac{23}{2}$ ovvero $T < \frac{1}{2B} = \frac{2}{23}$ dal Teorema del campionamento in banda base... ma non è la soluz. migliore

NON deve esserci aliasing quindi $\frac{2\pi}{T} \geq 4\pi$ ovvero $T \leq 1/2$
per $T = 1/2$ $h(t) = \text{sinc}(2t) e^{-19\pi t}$

$$\text{quindi } \frac{H(j\omega)}{Y} = T \text{rect}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{4\pi}\right) \text{ con } h(t) = 2T \text{sinc}(2t) e^{j19/2\pi t}$$

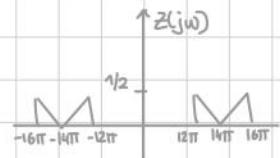
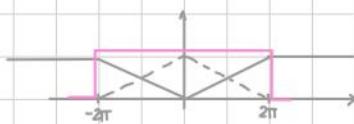
$$2 \cdot \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{2\pi}\right)$$

$$\dots \text{o meglio} \rightarrow \frac{H(j\omega)}{Y} = \text{rect}\left(\frac{\omega - 19/2\pi}{2\pi/T}\right)$$

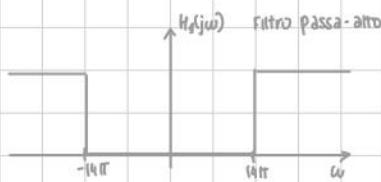
$$\text{con } h(t) = \text{sinc}(t/T) e^{j19/2\pi t} \text{ e } h(nT) = \delta(n)$$



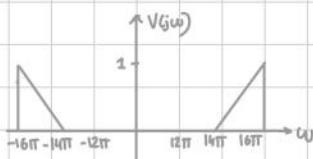
$$X(j\omega) = [1 - \text{inang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)] \text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) \text{ con } \tilde{z}(j\omega) = \frac{1}{2} X(j(\omega - 14\pi)) + \frac{1}{2} X(j(\omega + 14\pi))$$



Nel dominio della pulsazione $H_2(j\omega)$ è rappresentabile come:

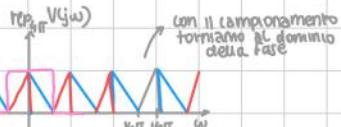


$$Z(j\omega) H_2(j\omega)$$



In seguito, con il campionamento:

$$\frac{V(j\omega)}{\text{rep}} \xrightarrow[\downarrow H_2(j\omega)/T]{} Y(j\omega)$$



$$Y(j\omega) = \text{inang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



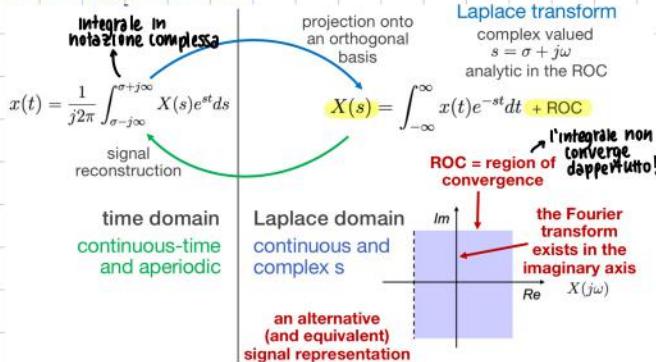
$$\rightarrow y(t) = \text{sinc}^2(t)$$

In generale, i sistemi si studiano meglio nel dominio del tempo o della pulsazione

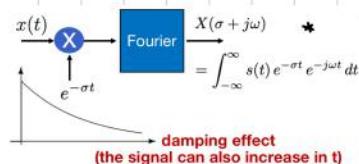
LAPLACE TRANSFORMS

The Laplace transform

5.1. The Laplace transform

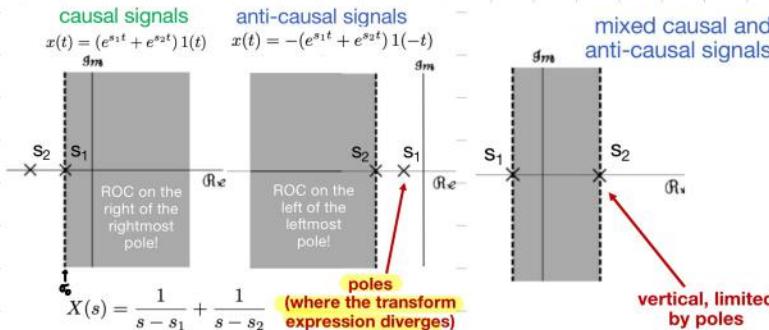


Interpolazione per un segnale causale:



Aluni segnali in Fourier divergono. La trasformata di Laplace permette di smorzare tali segnali e renderli quindi analizzabili.

La regione di convergenza è fondamentale per definire la trasformata:



Le ROC sono regioni verticali delimitate dalla presenza di poli (non contengono poli). Sono dette regioni analitiche.

A volte l'asse immaginario può essere incluso nella ROC (= caso in cui esiste anche la trasformata di Fourier), altre volte può non essere incluso (= la trasformata di Laplace riesce a gestire segnali che altrimenti non sarebbero gestibili con Fourier).

* Per un dato σ , moltiplico il segnale $x(t)$ per $e^{-\sigma t}$ e applico l'integrale di Fourier \rightarrow si ottiene un effetto smorzamento

I poli sono punti in cui l'espressione analitica della trasformata diverge (stanno al limite o al di fuori della ROC)

Proprietà della trasformata (bilaterale di Laplace)

	time domain	Laplace domain	
linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$	tendenzialmente le ROC si intersecano MA non è sempre detto, va verificato
time-reversal conjugation	$x(-t)$ $x^*(t)$	$X(-s)$ $X^*(s^*)$	$\rightarrow \Gamma_y = -\Gamma_x$ $\Gamma_y = \Gamma_x^* = \Gamma_x$ $\Gamma_y = \Gamma_x / a$
scale	$x(t/a)$	$aX(as)$	
time-shift modulation dual pair	$x(t - t_0)$ $x(t) e^{s_0 t}$	$X(s)e^{-s t_0}$ $X(s - s_0)$	\rightarrow la traslazione nel tempo si gestisce allo stesso modo che con Fourier (l'azione di traslazione non cambia la regione di convergenza, a meno che non ci sia la somma tra due contributi)
convolution	$x * y(t)$	$X(s)Y(s)$	
derivation product by t dual pair	$x'(t)$ $tx(t)$	$sX(s)$ $-X'(s)$	\rightarrow derivando la trasformata di Laplace si ottiene la trasformata di Laplace di $-t$ volte il segnale $x(t)$ la ROC coincide con quella da cui siamo partiti
integration	$x * 1(t)$	$\frac{X(s)}{s}$	integrale nel tempo

Derivando nel dominio del tempo sfruttiamo l'antitrasformata di Laplace: $y(t) = x'(t) \rightarrow Y(s) = sX(s)$

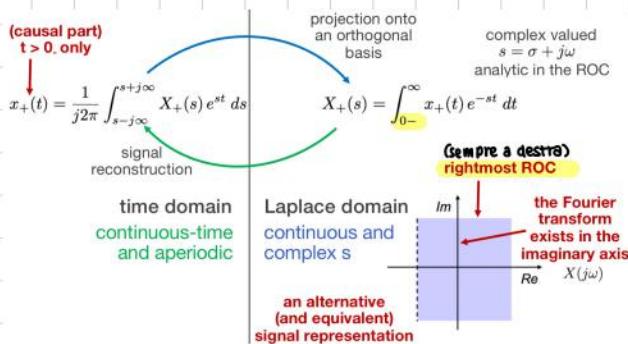
$T_y > T_x \rightarrow$ questa operazione può cambiare la reazione di convergenza

Useful pairs

	time domain	Laplace domain	ROC
constant	1	does not exist!	
unit step	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re[s] > 0$
ramp	$\frac{t^k}{k!} 1(t)$	$\frac{1}{s^k}$	any s
delta	$\delta(t)$	1	
delta derivatives	$\delta^{(k)}(t)$	s^k	
exponential	$e^{j\omega_1 t}$	does not exist!	
one-sided exp	$\frac{t^k}{k!} e^{p_1 t} 1(t)$	$\frac{1}{s - p_1}$	$\Re[s] > \Re[p_1]$
exponential ramp	$\frac{t^k}{k!} e^{p_1 t} 1(t)$	$\frac{1}{(s - p_1)^{k+1}}$	
sinusoids	$\cos(\omega_0 t) 1(t)$ $\sin(\omega_0 t) 1(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$ $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re[s] > 0$

Quando i segnali di interesse sono causali o, più in generale, quando siamo interessati solamente alla parte causale di un segnale, allora la trasformata di Laplace è mappata in una **trasformata unilaterale di Laplace** che limita l'integrale da 0 a infinito. In modo da caratterizzare s in 0, l'integrale è in realtà attivo da 0-

5.2 The unilateral Laplace transform



	time domain	Laplace domain
linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(s) + \beta Y(s)$
conjugation	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$
scale	$x(t/a)$	$aX(as)$
modulation	$x(t) e^{s_0 t}$	$X(s - s_0)$
convolution	$x * y(t)$	$X(s)Y(s)$
derivation product by t	$x'(t)$ $tx(t)$	$sX(s) - x(0_-)$ $-X'(s)$
integration	$x * 1(t)$	$\frac{X(s)}{s}$

Tutti i segnali nel dominio del tempo sono causali

Trasformate di Laplace razionali

Improper version ($m \geq n$)

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

Proper counterpart ($m \geq n$)

$$\begin{aligned} H(s) &= q(s) + \frac{r(s)}{a(s)} \quad \text{remainder} \\ &\text{quotient} \\ &= q_0 + q_1 s + \dots + q_{m-n} s^{m-n} \\ &\text{delta impulses in the time-domain} + \frac{r_0 + r_1 s + r_2 s^2 + \dots + r_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

$m < n$

$$\begin{aligned} &= K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad \text{zeros} \\ &\quad \text{partial fraction} \\ &= \frac{R_1}{(s - p_1)} + \frac{R_2}{(s - p_2)} + \dots + \frac{R_n}{(s - p_n)} \quad \text{residue} \\ &R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} H(s)(s - p_i) \end{aligned}$$

→ polinomio in s di grado m . Fatto un polinomio in s di grado n

Il trucco è mappare il caso improprio (= quando il grado del numeratore è maggiore o uguale al denominatore)

in una **versione propria** (fazione razionale propria).

→ dividendo numeratore per denominatore si ottiene un quoziente (ed un resto). Il nuovo polinomio ha al più esponente $n-1$.

→ nel dominio del tempo sappiamo che i termini del quoziente sono legati alla presenza di un delta.

The general case

$$\begin{aligned} H(s) &= K \frac{\prod_i (s - z_i)^{m_i}}{\prod_j (s - p_j)^{\mu_j}} \quad m < n \quad \text{distinct poles} \\ &= \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} \frac{R_{i,j}}{(s - p_j)^i} \quad \text{pole multiplicity} \\ &\quad \text{pole index} \quad \text{multiplicity index} \quad \xrightarrow{\text{caso di poli multipli}} \end{aligned}$$

$$R_{\mu_j-k,j} = \frac{1}{k!} \lim_{s \rightarrow p_j} \frac{d^k [H(s)(s - p_j)^{\mu_j}]}{ds^k}$$

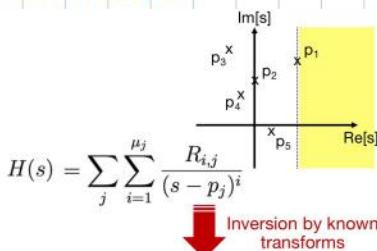
$$R_{\mu_j,j} = \lim_{s \rightarrow p_j} H(s)(s - p_j)^{\mu_j} \quad \text{highest degree case}$$

Per identificare l'antitrasformata di una funzione razionale di questo tipo ($m < n$), il modo più corretto è quello di identificare all'interno del polinomio gli zeri del denominatore (poli) e dei numeratori (zen).

Come otteniamo una forma di espressione trattabile con la trasformata di Laplace?

Con poli semplici (distinti), $H(s)$ si può considerare come combinazione lineare di residui $\frac{R_i}{(s - p_i)}$

Antitrasformata causale



Se abbiamo un'espressione di una trasformata di Laplace che è data da una funzione razionale propria (con grado del polinomio ai numeratori strettamente minore di quello al denominatore) sappiamo calcolare il segnale nel dominio del tempo associato a tale trasformata.
→ Indirettamente cerchiamo la corrispondenza con un segnale causale

$$\text{causal signal} \quad h(t) = \sum_j \sum_{i=1}^{\mu_j} R_{i,j} \frac{t^{i-1} e^{p_j t} \Gamma(i)}{(i-1)!}$$

Laplace transform

Esempio 1: $x(t) = e^{s_0 t} \gamma(t)$ $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

$$= e^{\sigma_0 t} e^{j\omega_0 t} \gamma(t) = e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) \gamma(t) + j e^{\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t) \gamma(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} e^{\sigma_0 t} \gamma(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\sigma_0)t} dt = \frac{e^{-(s-\sigma_0)\infty}}{-(s-\sigma_0)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{e^{-(s-\sigma_0)\infty}}{-(s-\sigma_0)} - \frac{1}{-(s-\sigma_0)} = \begin{cases} \frac{1}{-(s-\sigma_0)}, & \text{Re}[s_0] < \text{Re}[s] \\ \text{non converge, altrimenti} & \end{cases}$$

Esempio 2: $x(t) = -e^{s_0 t} \gamma(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^0 e^{st} -e^{\sigma_0 t} \gamma(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-(s-\sigma_0)t} dt = \frac{-e^{-(s-\sigma_0)t}}{-(s-\sigma_0)} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1-e^{-(s-\sigma_0)\infty}}{s-\sigma_0} = \begin{cases} \frac{1}{s-\sigma_0}, & \text{Re}(s-\sigma_0) < 0 \\ \text{diverge, altrimenti} & \end{cases}$$

quindi:

$$X(s) = \frac{1}{s-s_0}$$

$$\Gamma_x = \{s \mid \text{Re}[s] < \text{Re}[s_0]\}$$



Due segnali possono avere la stessa espressione analitica della trasformata, ma avere ROC diversa

Esempio 3: $x(t) = e^{s_1 t} \gamma(t) + e^{s_2 t} \gamma(-t)$

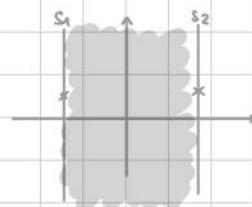
$\downarrow L$ $\downarrow L$

$$X(s) = \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}$$

$$\text{Re}(s) > \text{Re}(s_1) \quad \text{Re}(s) < \text{Re}(s_2)$$

La regione di convergenza complessiva diventa:

$$\Gamma_x = \{s \mid \text{Re}(s_1) < \text{Re}(s) < \text{Re}(s_2)\}$$



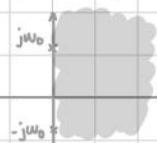
appare quasi sempre siano maggiormente interessati a segnali causali

Esempio 4: $x(t) = (\cos(\omega_0 t)) \gamma(t)$

$$= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \gamma(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \gamma(t) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \gamma(t) = X(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{s+j\omega_0 + s-j\omega_0}{(s-j\omega_0)(s+j\omega_0)} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}(s) > 0$$

$$e^{s_0 t} \gamma(t) \rightarrow \frac{1}{s-s_0} \quad \text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$$

La ROC diventa →



poli ± j\omega_0 (entrambi causali)

Esempio 5: $x(t) + y(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s}$ $\text{Re}(s) > 0$ ovvero $e^{\sigma_0 t}$ per $s_0 = 0$ quindi $\frac{1}{s-s_0} = \frac{1}{s}$

Esempio 6: $x(t) = \text{rect}(t) = \underline{\gamma(t+1/2)} - \underline{\gamma(t-1/2)}$



Sfruttando la regola di traslazione ($y(t-t_0) \xrightarrow{L} Y(s)e^{-st_0}$) :

$$X(s) = \frac{1}{2} e^{-j1/2s} - \frac{1}{2} e^{j1/2s} = \frac{e^{j1/2s} - e^{-j1/2s}}{2} = \frac{j}{2} \sinh \frac{j}{2s}$$

sfruttando la trasformata del gradino e la combina con la proprietà di traslazione tramite esponenziale complesso

$$\text{In alternativa, } X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t) e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{e^{-s/2} - e^{s/2}}{-s} \text{ (stesso risultato di sopra)}$$

Possiamo concludere che $\Gamma_x = \mathbb{C}$, ovvero in questa espressione lo zero non è più un polo.

Per segnali limitati nel tempo la convergenza della trasformata di Laplace c'è su tutto il piano complesso \mathbb{C}

$$\text{Esempio 7: } x(t) = t^k e^{s_0 t} u(t) \quad X(s)? \quad \Gamma_x = ?$$

$$t^k y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-i)^k Y^k(s)$$

Riuardando che $t^k y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -Y'(s)$, Y'_y

$$\begin{aligned} &\text{derivata k-esima} \\ &X(s) = (-i)^k Y^{(k)}(s), \quad \Gamma_x = \Gamma_y \quad (\text{con } Y(s)) \\ &\frac{1}{(-i)^k} \frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}} \quad (-i)^k = k! \quad (-i)^{2k} = k! \\ &\frac{1}{(s-s_0)^{k+1}} \end{aligned}$$

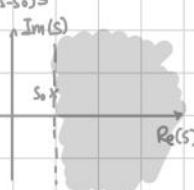
$$\begin{aligned} Y'(s) &= \frac{1}{(s-s_0)^2} \\ Y''(s) &= \frac{2}{(s-s_0)^3} \\ Y'''(s) &= \frac{-2 \cdot 3}{(s-s_0)^4} \\ Y^{(4)}(s) &= \frac{-2 \cdot 3 \cdot (-4)}{(s-s_0)^5} \dots \end{aligned}$$

$$Y^{(k)}(s) = \frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}} \cdot (-i)^k$$

quindi

$$\begin{aligned} t^k e^{s_0 t} u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{k!}{(s-s_0)^{k+1}} \\ &\text{polo in } s_0 \end{aligned}$$

$$\text{Re}(s) > \text{Re}(s_0)$$



$$\text{Esempio 8: } x(t) = \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} = \delta^{(k)}(t) \rightarrow \text{derivata k-esima del delta}$$

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\delta^{(k)}(t)} -x'(t) \quad \text{e} \quad x(t) \xrightarrow{\delta^{(k)}(t)} x''(t) \\ &\text{fatto derivatore} \quad \text{(a meno del segno meno)} \quad \text{derivata seconda} \end{aligned}$$

$$X(s) = ? \quad \Gamma_x = ?$$

$$y'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s \cdot Y(s) = s^2 Y(s)$$

$$y^{(k)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^k Y(s)$$

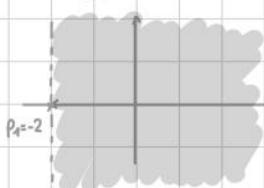
$$\Rightarrow y(t) = \delta(t) \quad \text{quindi } Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

$$\Gamma_y = \mathbb{C}$$

per tutti i valori complessi, moltiplicati per zero danno zero (proprietà matrice del delta)

$$\text{Esempio 9: } H(s) = \frac{s-3}{s+2} \cdot h(t) \text{ che corrisponde ad un segnale causale?}$$

$s \geq 2$



La regione di convergenza alla quale siamo interessati è quella di $\Gamma_1 = \{s | \text{Re}(s) > 2\}$ → utilizziamo il metodo dei residui

$$\text{Dividiamo } \frac{s-3}{s+2} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-3} \quad \text{resto} \quad \rightarrow H(s) = 1 + \frac{-5}{s+2}$$

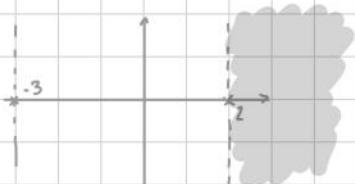
ammettendo singolarmente i due contributi

$$\text{Data } H(s) \text{ trovata sopra, } h(t) = \delta(t) - 5e^{-2t} u(t)$$

$$\text{Esempio 10: } H(s) = \frac{1}{s^3 + s^2 - 6s}, \quad h(t) \text{ causale?}$$

(cerchiamo di esprimere il denominatore come prodotto tra monomi per identificare i poli)

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s(s+2)(s-3)} = \frac{1}{s(s+2)(s-2)} \\ &\text{polo } 1 = -2 \quad \text{polo } 2 = 2 \end{aligned}$$



$$H(s) = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s-2} + \frac{R_2}{s+3} \rightarrow \text{sono tutti poli semplici!}$$

$$R_0 = H(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s-2)(s+3)} \Big|_{s=0} = -\frac{1}{6}$$

$$R_1 = H(s) \cdot (s-2) \Big|_{s=2} = \frac{1}{s(s+3)} \Big|_{s=2} = \frac{1}{10} \rightarrow H(s) = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{s+3}$$

$$R_2 = H(s) \cdot (s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{s(s-2)} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{15}$$

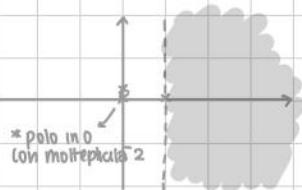
antitrasformate

$$\text{A questo punto } h(t) = -\frac{1}{6}e^{-t} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{1}{15}e^{-3t}$$

ES.11 $H(s) = \frac{4s-1}{2s^3-2s^2}$. $h(t)$ causale?

$$= \frac{2s-1/2}{s^3-s^2} = \frac{2s-1/2}{s^2(s-1)}$$

$$H(s) = \frac{R_0}{s-1} + \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s^2}$$



$$R_0 = H(s) \Big|_{s=1} = \frac{2s-1/2}{s^2} \Big|_{s=1} = \frac{3}{2}$$

$$R_2 = H(s) \Big|_{s=0} = \frac{2s-1/2}{s-1} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$R_1 \text{ ha un calcolo più complicato} \rightarrow \text{è necessario derivare} \quad R_1 = \frac{\partial [H(s)s^2]}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{2}{s-1} + \frac{(2s-1/2)}{(s-1)^2} \Big|_{s=0}$$

$$\text{quindi } R_1 = -2 - \frac{-1/2}{1} = -\frac{3}{2}$$

Importante
ricordarsi l'applicazione
delle derivate

$$H(s) = \frac{3/2}{s-1} - \frac{3/2}{s} + \frac{1/2}{s^2} \rightarrow h(t) = \frac{3}{2} \cdot e^t - \frac{3}{2} \cdot 1(t) + \frac{1}{2} \cdot t \cdot 1(t)$$

Derivations of order k

First derivative $sX(s) - x(0^-)$

Second derivative

$$s(sX(s) - x(0^-)) - x'(0^-)$$

Third derivative

$$s^3X(s) - s^2x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$$

kth derivative

$$s^k X(s) - \sum_{\ell=0}^{k-1} x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}$$

Solving differential equations

5.3. Differential equations

A linear (constant) model



differential equation

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + a_2 y''(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) \\ = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + b_2 x''(t) + \dots + b_m x^{(m)}(t)$$

input signal (known) $x(t), t > 0^-$ in generale $n \neq m$

initial conditions (known)

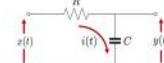
$$y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)$$

Per semplificare possiamo dire di conoscere l'uscita del segnale y in 0.

Inoltre conosciamo l'andamento $x(t)$ a partire dall'istante 0-

Uno degli esempi più semplici è rappresentato dal filtro RC in

eletrotecnica



differential equation

$$x(t) = Ry(t) + y(t)$$

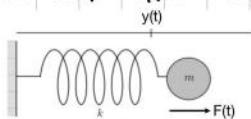
$$y'(t) = \frac{v(t)}{C}$$

derivata
prima del
voltageggio

l'equazione identifica
interdipendenza tra
il voltaggio di entrata
e di uscita nel
filtro RC

$$y(t) + RC y'(t) = x(t)$$

Un altro esempio... applicato alla fisica



differential equation

$$F(t) = x(t) - ky(t)$$

$$F(t) = m y''(t)$$

derivata
seconda della
posizione

$$m y''(t) + ky(t) = x(t)$$

$$Y(s) = \frac{b_m(s)}{a_n(s)} X(s) + \frac{y_{n-1}(s) - x_{m-1}(s)}{a_n(s)}$$

transfer function
 $H(s)$
natural response $Y_n(s)$
(initial conditions only)

espressione razionale
 $\frac{1}{s^m}$

$$\text{espressione razionale che nel dominio del tempo equivale } \frac{x_+(t)}{h(t)} \text{ con } h(t) \text{ causale}$$

LTI causal

inverse unilateral Laplace

Nella trasformata di Laplace unilaterale...

$$\sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t)$$

unilateral
Laplace
transform

$b_m(s)$

$$\sum_{k=0}^m b_k s^k X(s) - \sum_{k=1}^m b_k \sum_{\ell=0}^{k-1} x^{(\ell)}(0^-) s^{k-1-\ell}$$

non serve
ricordare la
formula a
memoria,
sono suff. le
regole semplici
sulle prime
derivate

$x_{m-1}(s)$

$y_{n-1}(s)$

$$a_n(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i Y(s) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} a_i y^{(j)}(0^-) s^{i-1-j}$$

contributi che appaiono
con la regola di derivazione

→ la risposta $y_c(t)$ è forzata perché dipende dall'evoluzione dell'ingresso
 $y_n(t)$ dipende dalle condizioni iniziali

Le equazioni differenziali identificano dei sistemi lineari tempo-invarianti

1. Filter $h(t)$ BIBO stable

- $m \leq n$, otherwise delta derivatives
- $\operatorname{Re}[p_i] < 0$, otherwise $h(t)$ not absolutely integrable

2. Natural response $y_n(t)$ limited

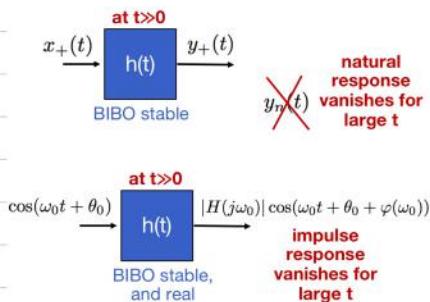
- $m \leq n$, otherwise deltas appear
- $\operatorname{Re}[p_i] < 0$, guarantees a limit

$h(t)$ è assolutamente integrabile? se $m \leq n$, dato $H(s) = \frac{b_m(s)}{a_n(s)}$.

Se otteniamo un coefficiente in s , appare un s^i nel dominio del tempo MA il filtro derivatore non è bibistabile.

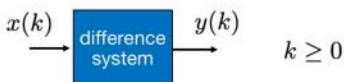
Quindi è necessario che $m \leq n$. Inoltre, la parte reale del polo deve essere < 0 , altrimenti, ad esempio, nel caso $\frac{e^{-pt}}{t}$ e $P_0(t)$ con $\operatorname{Re}[p_0] > 0$ divergerebbe ad infinito.

At steady state $t \gg 0$



Nella controparte discreta ...

Or discrete differential equations



differential equation

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

input signal (known) $x(k), k \geq -m$

initial conditions (known)

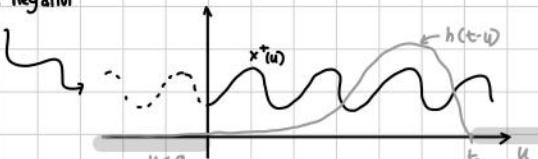
$$y(-n), \dots, y(-2), y(-1)$$

Se il sistema è BIBO stabile, per $t \gg 0$ l'andamento decade esponenzialmente.

Sia $h(t)$ che y_n vanno a zero \rightarrow il sistema si comporta come un semplice filtro

y_n è detta **evoluzione libera**

Maggiore è t più infinitamente piccoli sono i valori di h sull'asse negativo (e quindi smorza un eventuale segnale alto anche a tempi negativi)



Le condizioni iniziali sono i valori dell'ingresso e dell'uscita nel passato: è sufficiente conoscere l'entrata x e l'uscita y dall'istante $-m$

Possiamo estrarre $y(k)$ in funzione di tutto il resto

Se lo conosco l'istante iniziale e il valore di x nel tempo, numericamente posso valutare quanto vale $y(k)$ nel tempo

Differential equations with Laplace unilateral transform

ES. 1 Filtri RC $y(t) + RC y'(t) = x(t)$ con $x(t) = A$, $y(0^-) = V_0$, $y(t) = ?$ $t > 0$

(come prima cosa mappiamo in Laplace i vari contributi)

$$y(t) + RC y'(t) = x(t)$$

$$\begin{aligned} Y(s) + RC(sY(s)) - y(0^-) &= X(s) \\ \text{condizione iniziale} \end{aligned}$$

$$\rightarrow Y(s)(1 + RCs) - RCV_0 = X(s)$$

$$\text{ovvero } Y(s) = \frac{X(s)}{(1 + RCs)} + \frac{RCV_0}{(1 + RCs)}$$

risposta forzata

evoluzione libera

Riscriviamo ed ottieniamo $Y(s) = H(s)X(s) + V_0$

$$\text{con } H(s) = \frac{1}{s + 1/RC} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

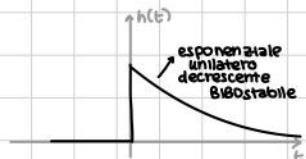
$$Y(s) = \frac{1}{s + 1/RC} X(s) + \frac{1}{RC}$$

$$y_n(t) = V_0 e^{-t/RC} \cdot 1(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC}$$

$$P_A = -\frac{1}{RC}$$

$$\operatorname{Re}[P_A] < 0$$



Volumiamo la risposta forzata:

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{1/RC}{s+1/RC} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A/RC}{s(s+1/RC)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+1/RC}$$

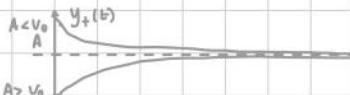
$$R_1 = Y_f(s)|_{s=-1/RC} = \frac{A/RC}{s+1/RC}|_{s=-1/RC} = \frac{A/RC}{-1/RC} = -A$$

$$x_f(t) = A \cdot 1(t)$$

$$R_0 = Y_p(s)|_{s=0} = \frac{A/RC}{s+1/RC}|_{s=0} = A$$

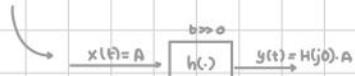
$$= \frac{A}{s} - \frac{A}{s+1/RC} \xrightarrow{\text{L}^{-1}} A \cdot 1(t) - Ae^{-t/RC} 1(t) = y_f(t)$$

$$y_+(t) = y_f(t) + y_n(t) = A \cdot 1(t) - Ae^{-t/RC} 1(t) + V_0 e^{-t/RC 1(t)} = A \cdot 1(t) + (V_0 - A) e^{-t/RC 1(t)}$$



con il tempo, ai capi del condensatore ottengo il
voltage A (vale sia per $V_0 > A$ che per $V_0 < A$)

\rightarrow A regime $y(t) = A$



$$\text{Es. 2 } y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$$

1) $H(s)$?

2) Biostabile?

3) Risposta forzata con $x(t) = 1(t)$?

4) $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$ e condizioni iniziali nulle \rightarrow trovare ω_0 che garantisca un comportamento a regime $y(t) = \frac{1}{3}x(t-\tau_0)$ per $t > 0$

$$H(s) = \frac{1}{1+SRC} \Big|_{s=0} = 4$$

a regime si
aspettiamo
che il valore
corrisponda
con quello
della tensione
in ingresso

1) $H(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$ ovvero dipende dai polinomi che contengono le costanti dell'equazione differenziale

Da $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$ \rightarrow non è necessario (per questo punto) considerare le condizioni iniziali

$$H(s) = \frac{(s-3)}{(s-2)(s+3)}$$

2) Per capire se è Biostabile troviamo le radici del polinomio al denominatore. $R_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{3}{2}$ In questo caso uno non

Ma... se scriviamo $H(s) = \frac{s-5}{(s-2)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$ notiamo che $H(s)$ è BIOSTABILE

→ ha parte reale < 0
-2 quando APPARENTEMENTE
NON È BIOSTABILE...

$H(s) = \frac{1}{s+2}$ BIOSTABILE con equazione differenziale equivalente $x(t) = y'(t) + 2y(t)$

3) La risposta forzata corrisponde al caso in cui le condizioni iniziali sono nulle

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+2} \rightarrow Y_f(t) = \frac{1}{2} 1(t) - \frac{1}{2} e^{-2t} 1(t)$$

$$\text{con } R_0 = Y_f(s)|_{s=0} = \frac{1}{s+2}|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$R_1 = Y_f(s)|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$Y_f(s)$$



4) A regime, quando $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0)$, tutto si comporta come un filtro



$$\rightarrow$$
 ovvero $|H(j\omega)| = \frac{1}{5} = \left| \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \right|$

$$\text{altrimenti } 12 + j\omega_0 = 5 \rightarrow 4 + \omega_0^2 = 25$$

$$\omega_0^2 = 21$$

$$\omega_0 = \pm \sqrt{21}$$

con queste pulsazioni otteniamo un seno con la stessa frequenza di quella di entrata, ma moltiplicato per 1/5

A regime, a patto che il sistema sia BIBO stabile, è possibile applicare quanto visto per Fourier

$$\text{Es. 3 } x(t) = k y(t) + m y''(t)$$

$x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ con condizioni iniziali $y(0) = y_0$ e $y'(0) = v_0$. Quanto vale $y(t) = ?$ $t \geq 0$

(costruiamo una "mappa" nel dominio di Laplace (in questo caso teniamo conto delle condizioni iniziali))

$$x(t) = k y(t) + m y''(t)$$

$$\begin{aligned} & \downarrow L \quad \downarrow L \quad \downarrow L \\ Y(s) &= k Y(s) + m(s^2 Y(s) - s y_0 - v_0) \\ & \downarrow \\ Y(s)(k + m s^2) - m(s y_0 + v_0) &= X(s) \\ & \downarrow \\ Y(s) &= \frac{X(s)}{(k + m s^2)} + \frac{m(s y_0 + v_0)}{(k + m s^2)} \end{aligned}$$

otteniamo

$$Y(s) = \frac{1/m}{s^2 + k/m} \cdot X(s) + \frac{v_0 + s y_0}{s^2 + k/m} \quad H(s)$$

$$\begin{aligned} \cos(\omega_0 t) 1(t) &\xrightarrow{s} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \\ \sin(\omega_0 t) 1(t) &\xrightarrow{s} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{1/m}{s^2 + k/m} \sin(\sqrt{k/m} t) 1(t) = \frac{1}{\sqrt{k/m}} \sin(\sqrt{k/m} t) 1(t) \rightarrow \text{NON È BIBO stabile}$$

$Y_F(s)$ risposta forzata

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1/m}{s^2 + k/m}}_{S^2 + k/m} \cdot X(s) + \underbrace{\frac{v_0 + s y_0}{s^2 + k/m}}_{S^2 + k/m}$$

$$X(s) = \frac{F_0 s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$Y_L(s)$ evoluzione libera

$$\begin{aligned} Y_F(s) &= \frac{v_0}{s^2 + k/m} + \frac{y_0 s}{s^2 + k/m} \xrightarrow{\text{trasformata di un seno}} \\ &= \frac{v_0}{\sqrt{k/m}} \cdot \frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + k/m} + y_0 \frac{s}{s^2 + k/m} = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) 1(t) + y_0 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) 1(t) \end{aligned}$$

la combinazione lineare di seno e coseno è una sinusoidale

$$Y_F(s) = \frac{F_0 / m \cdot s}{(s^2 + k/m)(s^2 + \omega_0^2)} \quad \text{con } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow Z(s^2) = \frac{1}{(s^2 + k/m)(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{R_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{R_1}{s^2 + k/m}$$

$$R_0 = Z(s^2) (s^2 + \omega_0^2) \Big|_{s^2 = -\omega_0^2} = \frac{1}{s^2 + k/m} \Big|_{s^2 = \omega_0^2} = \frac{1}{\frac{k}{m} - \omega_0^2}$$

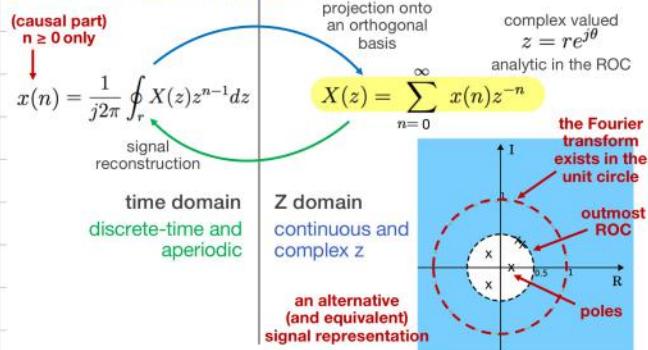
↳ valutata nel polo

$$R_1 = Z(s^2) (s^2 + k/m) \Big|_{s^2 = -\frac{k}{m}} = \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} \Big|_{s^2 = -\frac{k}{m}} = \frac{1}{-\frac{k}{m} + \omega_0^2} = -R_0$$

$$\text{A questo punto esprimiamo } Y_F(s) = F_0 / m \cdot s \cdot R_0 \left(\frac{1}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{s^2 + k/m} \right) = \frac{F_0}{k - \omega_0^2 m} \left(\frac{s}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{s}{s^2 + k/m} \right)$$

$$y_F(t) = \frac{F_0}{k - \omega_0^2 m} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{k/m} t)) 1(t)$$

5.4. The unilateral Z Transform



Generalizzazione per segnali discreti aperiodici
e per rappresentare la parte causale di un
segnale.

La Forma della regione di convergenza ROC
è limitata da una circonferenza (si esclude
un cerchio di raggio r , centrato nell'origine)
È delimitata dal polo che ha valore assoluto
maggiore (come per Laplace)

Useful pairs

	time domain	Z domain	ROC
unit step	$1_0(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
ramp	$\frac{1}{k!}(n+k)\dots(n+2)(n+1)1_0(n)$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^{k+1}}$	
delta	$\delta(n)$	1	
shifted delta	$\delta(n-n_0)$	z^{-n_0}	$ z > 0$
one-sided exp	$p_0^n 1_0(n)$	$\frac{1}{p_0 - z^{-1}}$	$ z > p_0 $
exponential ramp	$\frac{1}{k!}(n+k)\dots(n+2)(n+1)p_0^{n+k+1}1_0(n)$	$\frac{1}{(p_0^{-1} - z^{-1})^{k+1}}$	

$$\sum_{\ell=0}^m b_\ell x(k-\ell) = \sum_{i=0}^n a_i y(k-i)$$

unilateral Z
transform

$$\begin{aligned} b_m(z) \\ \sum_{\ell=0}^m b_\ell z^{-\ell} X(z) + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=-\ell}^{-1} b_\ell x(j) z^{-(j+\ell)} y_{-1}(z) \\ a_n(z) \\ = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i} Y(z) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=-i}^{-1} a_i y(k) z^{-(k+i)} \end{aligned}$$

Of a difference equation

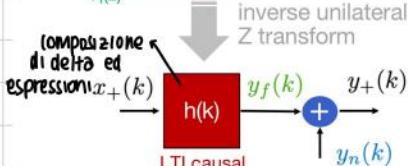
$$Y(z) = \frac{b_m(z)}{a_n(z)} X(z) + \frac{y_{n-1}(z) - x_{m-1}(z)}{a_n(z)}$$

forced response $Y_f(z)$

transfer function $H(z)$

fractional functions in z^{-1}

natural response $Y_n(z)$ (initial conditions only)



time domain	Z domain
linearity	$\alpha x(n) + \beta y(n)$
modulation	$p_0^n x(n)$
convolution	$x * y(n)$
product by n	$nx(n)$
time-shift	$x(n-n_0)$

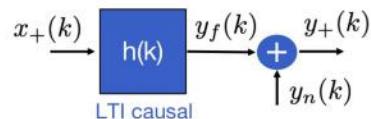
Tutti i segnali
nel dominio del
tempo sono causali

Equazione dei sistemi alle differenze nel discreto

Tramite la trasformata Z è possibile capire la struttura del sistema
(si ottiene una struttura parallela a quella di Laplace)

BIBO stability conditions

Of a difference system



1. Filter $h(k)$ BIBO stable

- $|p_i| < 1$, otherwise $h(k)$ not absolutely integrable
- è necessario considerare la posizione dei poli

2. Natural response $y_n(k)$ limited

- $|p_i| < 1$, guarantees a limit

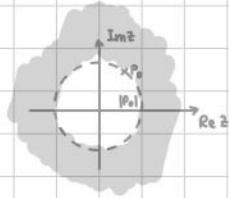
here deltas are not a problem

The unilateral Z transform

Esempio 1) Trovare $X(z)$ per $x(n) = p_0^n \gamma_0(n)$ $p_0 \in \mathbb{C}$

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0^n \gamma_0(n) z^{-n} = \frac{1}{1-p_0 z^{-1}}$$

equivale alla serie geometrica
→ converge per $|p_0 z^{-1}| < 1$ ovvero $|p_0| < |z|$



Esempio 2) $X(z)$ per $x(n) = (\cos(\theta_0 n)) \gamma_0(n)$

$$X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\theta_0 n) \gamma_0(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j\theta_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\theta_0 n} = \frac{1}{2} (e^{j\theta_0})^n + \frac{1}{2} (e^{-j\theta_0})^n$$

$$\begin{aligned} x(n) &= \underbrace{\frac{1}{2} (e^{j\theta_0})^n}_{\downarrow z} \gamma_0(n) + \underbrace{\frac{1}{2} (e^{-j\theta_0})^n}_{\downarrow z} \gamma_0(n) \end{aligned}$$

$$X_+(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{j\theta_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-e^{-j\theta_0} z^{-1}}$$

converge per $|z| > |e^{\pm j\theta_0}| = 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{1-e^{-j\theta_0} z^{-1}}{1-e^{j\theta_0} z^{-1} + 1-e^{-j\theta_0} z^{-1}} = \frac{1-z^{-1} e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}}{z} \\ &= \frac{z}{1-z^{-1}(e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}) + \frac{e^{j\theta_0} - e^{-j\theta_0}}{z}} = \frac{1-\cos\theta_0 z^{-1}}{1-2\cos\theta_0 z^{-1} + z^{-2}} \end{aligned}$$

Esempio 3) $X(z)$ per $x(n) = -p_0^{n+1} \gamma_0(n)$

$$x(n) = -p_0 \cdot p_0^n \gamma_0(n) \xrightarrow{Z} X_+(z) = -p_0 \cdot \frac{1}{1-p_0 z^{-1}}, \quad |z| > |p_0| = \frac{1}{z^{-1} \frac{1}{p_0}}$$

Attenzione!

es. $\frac{1}{z^{-1}-\frac{1}{3}}$ ha un polo in $p_0 = \frac{1}{3}$
 $\downarrow z^{-1}$

$$-(\frac{1}{3})^{n+1} \gamma_0(n)$$

Esempio 4) Trovate $X(z)$ per $x(n) = (n+1) p_0^{n+2} \gamma_0(n)$

$$x(n) = p_0 (n \cdot p_0^{n+1} \gamma_0(n) + p_0^{n+1} \gamma_0(n))$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{Z} \quad \downarrow z \quad \downarrow z \\ X_+(z) &= p_0 \left(\underbrace{-\frac{2}{z-1} \gamma'(z)}_{-\frac{1}{(z-1)^2}} - \frac{1}{z-1-p_0^{-1}} \right) = p_0 \left(\frac{z^{-1}}{(z-1-p_0^{-1})^2} + \frac{z^{-1}+p_0^{-1}}{(z-1-p_0^{-1})^2} \right) \\ &\quad \underbrace{-1 \cdot -1 \cdot -\frac{1}{z-2}}_{(z-1-p_0^{-1})^2} \quad \underbrace{\gamma'(z)}_{\frac{1}{(z-1-p_0^{-1})^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n+1) p_0^{n+2} \gamma_0(n) &\xrightarrow{Z} \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})^2} \\ -p_0^{n+1} \gamma_0(n) &\xrightarrow{Z} \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})} \\ -\frac{(n+1)(n+2)p_0^{n+3} \gamma_0(n)}{2} &\xrightarrow{Z} \frac{1}{(z^{-1}-p_0^{-1})^3} \end{aligned}$$

Esempio 5) $x(n) = y(n-2) + y(n-1) - 6y(n)$

$$x(n) = y$$

1) $y(n) = ?$ BIBO stabile?

$$y(n-1) = k_1, \quad y(n-2) = k_2$$

2) $y(n) = ? \quad n \geq 0$

1) Possiamo non considerare le condizioni iniziali. $y(n)$ dipende solo dai coefficienti delle equazioni alle differenze

$$H(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1}{z^{-2} + z^{-1} - 6z^{-1}} \rightarrow \text{serve identificare i poli per poter invertire la formula}$$

$$\begin{aligned} z^{-2} + z^{-1} - 6z^{-1} &= 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow z = -3, 2 \quad \text{Non sono i poli, ma i punti in cui il polinomio si annulla in } z^{-1} \\ z^{-2} + z^{-1} - 6z^{-1} &= 0 \Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \Rightarrow z = -3, 2 \end{aligned}$$

→ i poli sono l'inverso di queste quantità

$$R_0 = \frac{1}{z^{-2}+3} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{5}$$

È necessario ricordare anche che

$$\frac{1}{z-t} p_0^{-t} \xrightarrow{Z} -p_0^{n+t} \gamma_0(n)$$

$$R_1 = \frac{1}{z^{-2}-2} \Big|_{z^{-1}=-3} = -\frac{1}{5}$$



i poli sono all'interno della circonferenza di raggio unitario, quindi il sistema è bilanciabile

$$h(n) = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{n+4} 1_0(n) - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+4} 1_0(n)$$

$$- \frac{1}{5} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+4} 1_0(n) + \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+4} 1_0(n)$$

2) $x(n) = y(n-2) + y(n-1) - 6y(n)$ teniamo conto anche delle condizioni iniziali:

$$X(z) = z^{-2}Y(z) + z^{-1}Y(z) - 6Y(z)$$

$$+ z^{-2}k_1 + y(-2)k_1$$

$$+ y(-1)k_2$$

$$Y(z) = \frac{1}{(z^{-2}-2)(z^{-1}+3)} X(z) - \frac{z^{-4}k_1 + k_1 + k_2}{(z^{-2}-2)(z^{-1}+3)}$$

→ stiamo prendendo la trasformata di

$$x_r(n) = A \cdot 1_0(n) \quad (\text{dato } x(n) = A)$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{-A}{z^{-2}-1}$$

$$R_0 = \frac{-A}{(z^{-2}+3)(z^{-1}-4)} \Big|_{z^{-2}=2} = -\frac{A}{5}$$

$$Y_F(z) = \frac{-A}{(z^{-2}-2)(z^{-1}+3)(z^{-1}-1)} = \frac{R_0}{z^{-2}-2} + \frac{R_1}{z^{-1}+3} + \frac{R_2}{z^{-1}-1}$$

$$R_1 = \frac{-A}{(z^{-2}-2)(z^{-1}-1)} \Big|_{z^{-1}=-3} = -\frac{A}{20}$$

$$= -\frac{A}{5} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{n+4} 1_0(n) - \frac{A}{20} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+4} 1_0(n) + \frac{A}{4} - (1)^{n+4} 1_0(n)$$

$$R_2 = \frac{-A}{(z^{-2}-2)(z^{-1}+3)} \Big|_{z^{-1}=4} = \frac{A}{4}$$

ES. 6) $h(n) = (1+2n)(-1)^n 1_0(n) + \frac{1}{z} (-\frac{1}{3})^n 1_0(n)$

$$X(z) = \frac{1}{z} \left(-\frac{1}{3}\right)^n 1_0(n) \quad \text{e condizioni iniziali nulle}$$

$$(n+2) p_0^{n+2} 1_0(n) \rightarrow \frac{1}{(z^{-2}-p_0^{-1})^2}$$

$$- p_0^{n+4} 1_0(n) \rightarrow \frac{1}{z^{-2}-p_0^{-2}}$$

1) Bilanciabile? → è sufficiente avere la formula per sapere che non è bilanciabile

2) Equazione alle differenze → serve H(z)

3) Evoluzione libera e risposta forzata

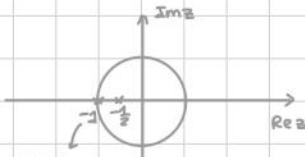
\downarrow 1+2n

$$2) h(n) = \overbrace{2(n+1)-4}^{1+2n} (-1)^n 1_0(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+4} 1_0(n)$$

$$= 2(n+1)(-1)^{n+2} 1_0(n) + (-1)^{n+2} 1_0(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+4} 1_0(n)$$

$$H(z) = \frac{2}{(z^{-2}+4)^2} - \frac{1}{z^{-2}+4} + \frac{1}{z^{-1}+2} = \frac{2(z^{-4}+2) - (z^{-2})(z^{-2}+2) + (z^{-1})^2}{(z^{-4}+4)^2(z^{-2}+2)} = \frac{z^{-4}+3}{(z^{-4}+4)^2(z^{-2}+2)}$$

I poli sono $p_0 = -1$ e $p_4 = -\frac{1}{2}$



NON È BILANCIABILE!

$$\frac{(z^{-2}+2z^{-4}+4)(z^{-4}+2)}{z^{-2}+2z^{-4}+4+2z^{-2}+z^{-4}+2}$$

$$= \frac{z^{-2}+2z^{-4}+4}{5}$$

equazione alle differenze

$$x(n-2) + 3x(n) = y(n-3) + \boxed{4}y(n-2) + \underline{5}y(n-1) + \boxed{2}y(n)$$

3) L'evoluzione libera è nulla perché non ci sono condizioni iniziali.

La risposta forzata, invece, dipende dall'ingresso e da H

$$x(n) = \frac{1}{3} (-\frac{1}{3})^n \delta_0(n) = -(\frac{-1}{3})^{n+2} \delta_0(n) \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{z^{-2} + 3} \xrightarrow{-\frac{1}{p_0}}$$

$$Y_F(z) = H(z)X(z) = \frac{z^{-2} + 3}{(z^{-2} + 1)^2(z^{-2} + 2)} \cdot \frac{1}{z^{-2} + 3} = \frac{R_0}{(z^{-2} - 1)^2} + \frac{R_1}{(z^{-2} - 1)} + \frac{R_2}{z^{-2} + 2}$$

$$\xrightarrow{\quad R_0 = \frac{1}{z^{-2} + 2} \Big|_{z^{-2} = -1} = 1 \quad} R_0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z^{-2} + 1} \right) \Big|_{z=-1}$$

$$\xrightarrow{\quad R_1 = \frac{1}{(z^{-2} + 2)^2} \Big|_{z=-1} = -1 \quad} = \frac{1}{(z^{-2} + 2)^2} \Big|_{z=-1}$$

→ stampo
derivando
in z^{-2}

NOTA:

$$H(z) = \frac{1}{z^{-2} + 1}$$

$$h(n) = (-1)^n \delta_0(n)$$


INSTABILE!

→ Trovare $x(n)$ limitato che dà $y_F(n)$ NON limitata

$$X(z) = \frac{1}{z^{-2} - p_0^{-1}}$$

$$Y_F(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(z^{-2} - 1)(z^{-2} - p_0^{-1})} = \frac{R_0}{z^{-2} + 1} + \frac{R_1}{z^{-2} - p_0^{-1}}$$

$$y_F(n) = R_0 (-1)^n \delta_0(n) + R_1 (p_0)^n \delta_0(n)$$

→ $|p_0| < 1$ affinché sia limitato

CASO $p_0 \neq -1$

(CASO $p_0 = -1$)

$$Y_F(z) = \frac{1}{(z^{-2} + 1)^2} \xrightarrow{Z^{-1}} (n+1)(-1)^{n+2} \delta_0(n) \text{ NON limitata} \quad \square$$

Se un sistema ha dei poli che stanno al limite tra la bilstabilità e la biboinstabilità, nel caso della trasformata Z sul cerchio di raggio unitario, nel caso della trasformata di Laplace sull'asse immaginario; per creare un'uscita che sia illimitata, a partire da un ingresso limitato, basta scegliere un ingresso che sia arrivato in uno dei poli non stabili.