Quiz 10

Question **1**
Not complete
Flag question

Si consideri l'esperimento aleatorio che consiste nel lanciare una moneta non truccata due volte. Si descriva lo spazio campionario Ω e si considerino:

- A_1 l'evento di avere testa al primo lancio;
- A_2 l'evento di avere testa al secondo lancio;
- A_3 l'evento di avere testa una ed una sola volta.

Allora gli eventi A_1, A_2, A_3:

Select one:

a. altro

b. sono a due a due indipendenti ma non indipendenti

c. alcune coppie di eventi non sono indipendenti fra loro

d. sono indipendenti

Check

A_1 = "testa al 1° lancio"
A_2 = "testa al 2° lancio"
A_3 = "testa una e una sola volta"

GLI EVENTI SONO A DUE A DUE INDIPENDENTI MA NON SONO INDIPENDENTI FRA LORO

Question **2**
Not complete
Flag question

Agli studenti vengono proposti 6 quiz con 4 risposte a scelta ciascuno. Il docente distrattamente ha messo online i quiz di un insegnamento più avanzato, sicché gli studenti rispondono a caso.

Qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente ad almeno 4 quiz (compreso solo a 4)?

Rispondere nella forma 0.abcd troncando ai primi quattro decimali dopo la virgola.

Answer:

Check

6 quiz, 4 RISPOSTE

P(ALMENO 4 GIUSTE) = ?

SOL. SIAMO IN PRESENZA DI UNA VARIABILE BINOMIALE $X \sim B(6, \frac{1}{4})$

$$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$
$$= \sum_{K=4}^{6} \binom{6}{K} \left(\frac{1}{4}\right)^{K} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{6-K} = \frac{77}{2048} = 0{,}0375$$

Question 3

Not complete

Flag question

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.963. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio supponendo l'indipendenza dei diametri delle arance.

Answer:

Check

X = numero di arance adatte

Successo = arancia adatta

"PROBABILITÀ CHE IN n TENTATIVI AVVENGANO ALMENO K SUCCESSI" $\Rightarrow$ V.A. BINOMIALE

$P(\text{successo}) = 0{,}963$

$$X \sim B(n = 100, \; P = 0{,}963)$$

$$P(n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

LA PROBABILITÀ CHE VI SIANO ALMENO 98 SUCCESSI È LA PROBABILITÀ CHE VI SIANO 100 SUCCESSI + PROBABILITÀ CHE VI SIANO 99 SUCCESSI + PROBABILITÀ CHE VI SIANO 98 SUCCESSI

$$P(X \geq 98) = P(X = 100) + P(X = 99) + P(X = 98)$$

$$= \binom{100}{100}(0{,}963)^{100}(1-0{,}963)^{100-100} + \binom{100}{99}(0{,}963)^{99}(1-0{,}963)^{100-99} +$$

$$+ \binom{100}{98}(0{,}963)^{98}(1-0{,}963)^{100-98}$$

$$= 1 \cdot (0{,}963)^{100} + 100\,(0{,}963)^{99}(1-0{,}963) + \binom{100}{98}(0{,}963)^{98}(1-0{,}963)^2$$

$$= 0.2800$$ V

Question **4**

Not complete

Flag question

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.932. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio, utilizzando una opportuna variabile aleatoria di **Poisson**, supponendo che i diametri delle arance siano indipendenti.

Scrivere il risultato troncando a **5** decimali dopo la virgola.

Answer:

Check

COME STUDIATO NELLA TEORIA, SI PUÒ APPROSSIMARE UNA V.A. BINOMIALE CON UNA

V.A. DI POISSON:

$$X \sim B(n,p) \longrightarrow P(X=k) \approx P(Y=k) \quad \text{con} \quad Y \sim P(\lambda = n \cdot p)$$

$$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

PROBLEMINO: SE SVOLGO IL CALCOLO COSÌ DIRETTAMENTE, DOVREI CALCOLARE 98!, 99!, 100!
CON GLI ALGORITMI USATI DAI CALCOLATORI, IL FATTORIALE $n!$ PER $n > 30$ RICHIEDE TEMPI LUNGHISSIMI

CURIOSITÀ: IL PYTHON CALCOLA IL FATTORIALE IN MODO MOLTO EFFICIENTE PERCHÉ HA DEGLI ALGORITMI INTEGRATI CHE TRATTANO CIASCUN NUMERO COME UN ARRAY. QUINDI IL CALCOLO DEL FATTORIALE È VELOCE ANCHE PER n MOLTO GRANDI

QUINDI, CALCOLO LA PROBABILITÀ DEL COMPLEMENTARE, CIOÈ CHE VI SIANO $n \leq 2$ ARANCE DIFETTOSE

$$P(\text{successo}) = P(\text{arancia difettosa}) = 1 - P(\text{arancia non difettosa}) = 1 - 0{,}932 = 0{,}068$$

⇒ ORA POSSO USARE L'APPROSSIMAZIONE CON POISSON:

$$Y \sim P(\lambda = 100 \cdot 0{,}068) = P(\lambda = 6{,}8)$$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= e^{-6,8} \cdot \frac{(6{,}8)^0}{0!} + e^{-6,8} \cdot \frac{(6{,}8)^1}{1!} + e^{-6,8} \cdot \frac{(6{,}8)^2}{2!}$$

$$= e^{-6,8} + (6{,}8)e^{-6,8} + e^{-6,8} \frac{(6{,}8)^2}{2} =$$

$$= e^{-6,8}\left(1 + 6{,}8 + \frac{6{,}8^2}{2}\right) = 0{,}03443 \checkmark$$

FORMULA GENERALE ESERCIZIO 5: (98 SUCCESSI IN 100 CASI)

$$e^{-[(1-p)\cdot 100]} \left\{1 + [100 \cdot (1-p)] + \frac{[100 \cdot (1-p)]^2}{2}\right\}$$

DOVE: p = probabilità di avere un'arancia diametro accettabile

Question 5

Not complete

Flag question

Una fabbrica produce motori elettrici. Un motore può essere, indipendentemente da un altro, difettoso con probabilità 0.01.

Qual è la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi? Choose...

Approssimare la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi usando una opportuna variabile di Poisson. Choose...

Check

SUCCESSO = motore difettoso

n = n. successi = n. motori difettosi

$P(\text{successo}) = 0,01$

"PROBABILITÀ DI AVERE n SUCCESSI IN k PROVE" $\Rightarrow$ V.A. BINOMIALE

$$X \sim B(n = 300,\ p = 0,01)$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=5) = \binom{300}{5} (0,01)^5 (1-0,01)^{300-5}$$

$= 0,1009852$, APPROSSIMANDO $0,10099$ ✓

2) UTILIZZANDO UNA VARIABILE ALEATORIA DI POISSON:

$$X \sim B(n,p) \longrightarrow P(X=k) \approx P(Y=k) \text{ , CON } Y \sim P(\lambda = np)$$

$$Y \sim P(\lambda = 300 \cdot 0,01) = P(\lambda = 3)$$

$$\boxed{P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

$P(X=5) = e^{-3} \cdot \frac{3^5}{5!} = 0,1008188134$, APPROSSIMANDO $0,10082$ ✓

Question 6

Not complete

Flag question

Un'urna contiene i numeri da 1 a 36. Pesco a caso un numero e lo reinserisco nell'urna; ne pesco un'altro e lo reinserisco nell'urna, e così via. Calcolare la probabilità che il numero 10 esca per la prima volta al dodicesimo tentativo.

Answer:

Check

I_{36}

SOL. "PROBABILITÀ CHE DOPO K TENTATIVI VI SIA IL PRIMO SUCCESSO" $\Rightarrow$ V.A. GEOMETRICA

$$X \sim Ge(p) \longrightarrow P(X=K) = p \cdot (1-p)^{K-1}$$

$$P(\text{successo}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X=12) = \left(\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)^{12-1} = 0{,}0203$$

✓

Question 7

Not complete

Flag question

Si distribuiscono a caso 1119 caramelle uguali a 100 bambini, indipendentemente una dall'altra. Calcolare la probabilità che Mario riceva esattamente 11 caramelle.

Troncare il risultato a 5 decimali

Answer:

Check

X = n. di caramelle ricevute da Mario

SUCCESSO: MARIO RICEVE UNA CARAMELLA

INSUCCESSO: MARIO NON RICEVE UNA CARAMELLA

"PROBABILITÀ CHE IN n TENTATIVI AVVENGANO K SUCCESSI" $\Rightarrow$ V.A. BINOMIALE

$$\boxed{X \sim B\left(n = 1119,\ p = \frac{1}{100} = 0{,}01\right) \qquad P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}}$$

$$P(X=11) = \binom{1119}{11} \cdot (0{,}01)^{11} (1-0{,}01)^{1119-11} = 0{,}11977$$

✓

Question **8**

Not complete

Flag question

Si considerano due mazzi di carte Rosse e Nere . Il mazzo A è normale (26 Rosse, 26 Nere), mentre il mazzo B ha 20 carte rosse e 27 carte nere.

Una procedura permette di scegliere uno dei due mazzi, il mazzo A viene scelto con probabilità 0.55.

Una volta scelto il mazzo, si estrae una prima carta dal mazzo, la si rimette poi nel mazzo e si mescola. Si estrae poi una seconda carta a caso da quel mazzo.

Qual è la probabilità che la seconda carta sia rossa, sapendo che la prima è rossa, ma non sapendo quale dei due mazzi e' stato scelto?

Answer:

Check

$A \begin{cases} 26\,R \\ 26\,N \end{cases}$ TOT. 52 CARTE

$B \begin{cases} 20\,R \\ 27\,N \end{cases}$ TOT. 47 CARTE

$P(A) = 0{,}55$

$P(B) = 0{,}45$

$P(2^a R \mid 1^a R) = ?$

SOL. 1. CALCOLO LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE 2 CARTE ROSSE CONSECUTIVAMENTE

$$P(2^a R \cdot 1^a R) = P(2^a R) \cdot P(1^a R) \cdot P(A) + P(2^a R) \cdot P(1^a R) \cdot P(B)$$
$$= \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{52} \cdot 0{,}55 + \frac{20}{47} \cdot \frac{20}{47} \cdot 0{,}45$$
$$= 0{,}218984834$$

2. CALCOLO LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UNA ROSSA AL 1° TENTATIVO

$$P(1^a R) = P(1^a R) \cdot P(A) + P(1^a R) \cdot P(B) = 0{,}466489361$$

3. CALCOLO LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UNA CARTA ROSSA AL SECONDO TENTATIVO SAPENDO CHE LA PRIMA ESTRATTA ERA ROSSA

$$P(2^a R \mid 1^a R) = \frac{P(2^a R \cdot 1^a R)}{P(1^a R)} = \frac{0{,}218984834}{0{,}466489361} = 0{,}4694$$

V

Question **9**

Not complete

Flag question

Si mettono a caso 222694 oggetti in 24339 cassetti, indipendentemente uno dall'altro. Approssimare, usando una opportuna variabile di **Poisson**, la probabilità che il primo cassetto contenga esattamente 7 oggetti.

Answer:

Check

222694 OGGETTI

24339 CASSETTI

X = numero di oggetti contenuti nel 1° cassetto

successo = oggetto contenuto nel 1° cassetto

$$\lambda = 222694 \cdot \frac{1}{24339} =$$

$$P(\lambda = 7) = e^{-\frac{222694}{24339}} \cdot \frac{\left(\frac{22694}{24339}\right)^7}{7!} = 0,1131$$

✓

Question **10**

Not complete

Flag question

In un laboratorio c'è una sequenza (infinita!) di computer numerati 1, 2, 3, 4,.... Ognuno di questi può essere infettato da un virus, indipendentemente dall'altro, con probabilità 0.01. Qual è la probabilità che testandoli uno ad uno, occorra testare almeno i primi 23 per individuare la presenza di un virus (cioè che i primi 22 non siano infettati)?

Answer:

Check

"PROBABILITÁ CHE DOPO ALMENO K TENTATIVI VI SIA UN SUCCESSO" $\Rightarrow$ V.A. GEOMETRICA

$$\boxed{X \sim Ge(p) \qquad P(X \geq K) = (1-p)^K}$$

$P(\text{successo}) = 0.01$

$P(X \geq 22) = (1 - 0{,}01)^{22} = 0.8016$ ✓

Question 11

Not complete

Flag question

In alcuni telefilm polizieschi, si sente dire "il criminale ha questa inusuale caratteristica... trovare questa persona e avrete il vostro uomo". Supponiamo che ogni dato individuo abbia questa inusuale caratteristica con probabilità 0.8×10^{-6}, indipendentemente dagli altri individui, e che la città in questione abbia 4 milioni di abitanti. Supponendo che l'ispettore trovi una tale persona, approssimare con una opportuna variabile discreta la probabilità che ce ne sia almeno un'altra.

Answer:

Check

X = n. di persone con questa caratteristica
successo = ha la caratteristica
P(successo) = 0,0000008

"PROBABILITÀ DI AVERE K SUCCESSI IN n PROVE" $\Rightarrow$ V.A. BINOMIALE

$$\boxed{\begin{gathered} X \sim B(n = 4000000,\ p = 0{,}0000008) \\ P(X \leq K) = \sum_{i=0}^{K} P(X=i) \\ P(X=K) = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K} \end{gathered}}$$

$$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = \frac{P(X \geq 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X < 2)}{1 - P(X < 1)}$$

$$= \frac{1 - [P(X=1) + P(X=0)]}{1 - P(X=0)} =$$

COME MAI $X \geq 1$ E NON $X = 1$? SE IO DOVESSI CALCOLARE $P(X \geq 2 \cap X = 1)$, STAREI CALCOLANDO LA PROBABILITÀ DI AVERE CONTEMPORANEAMENTE $X \geq 2$ E $X = 1$.
MA, SE $X = 1$, VUOL DIRE AVERE UNO E UN SOLO INDIVIDUO CON QUELLE CARATTERISTICHE, E NON CE NE SONO ALTRE. QUINDI SE FACESSI COSÌ, LA PROBABILITÀ DELL'INTERSEZIONE SAREBBE NULLA.

CALCOLARE $P(X=1)$ E $P(X=0)$ USANDO LA DEFINIZIONE DI BINOMIALE È LABORIOSO.
APPROSSIMO USANDO LA V.A. DI POISSON

$$\boxed{\begin{array}{l} X \sim B(n,p) \longrightarrow P(X=K) \approx P(Y=K) \text{ , CON } Y \sim P(\lambda = n \cdot p) \\ P(X=K) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^K}{K!} \end{array}}$$

$\lambda = 4\,000\,000 \cdot 0{,}000\,0008 = 3.2$

$$P(X=0) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-3.2} \cdot \frac{(3.2)^0}{0!} = e^{-3.2}$$

$$P(X=1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-3.2} \cdot \frac{(3.2)^1}{1} = (3.2)e^{-3.2}$$

USIAMO LE APPROSSIMAZIONI DI $P(X=0)$ E $P(X=1)$ PER CALCOLARE LA PROBABILITÀ:

$$= \frac{1-\left(e^{-3.2}(3.2)+e^{-3.2}\right)}{1-e^{-3.2}} = 0{,}8640$$

V