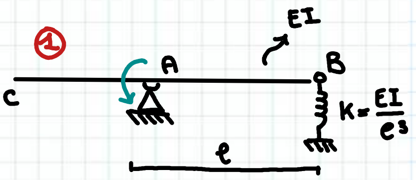
ESAME FEBBRAIO 2024

SOLUZIONI TESTO 1

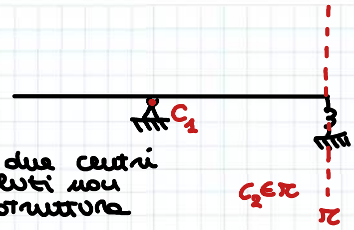
①



3 gdv } condiz. NECESSARIA ma NON SUFFICIENTE
3 gdl } per definire una struttura ISOSTATICA

TRATTO AC : SCARICO

↳ corpo unico con due centri di rotazione assoluti non coincidenti → la struttura e' FISSA.



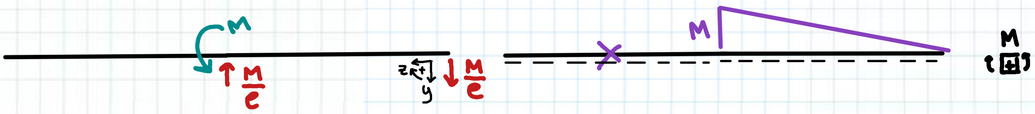
la molla su una struttura isostatica NON dà contributo alle reazioni vincolari, ma modifica la cinematica del corpo.

Posso risolvere l'esercizio in due modi:

1.a - Applicazione della linea elastica

1.b - Sovrapposizione degli effetti

In ogni caso le reazioni vincolari le ricavo con le eq^{ni} cardinali della statica:



$\eta = \frac{F}{K} = \frac{M}{\ell} \cdot \frac{\ell^3}{EI}$ $\eta \uparrow$ ↑$\frac{M}{\ell}$ → LA MOLLA SI ALLUNGA : spostamento verso l'alto

1.a Applicazione LINEA ELASTICA

Eq. linea elastica:

$$y'' = -\frac{M(z)}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{M}{\ell}z\right)$$

$$y' = \frac{1}{EI}\frac{M}{\ell}\frac{z^2}{2} + C_1$$

$$y = \frac{1}{EI}\frac{M}{\ell}\frac{z^3}{6} + C_1 z + C_2$$

Cond. a contorno:

$$\begin{cases} y(z=0) = -\underline{\frac{M\ell^2}{EI}} \\ y(z=\ell) = 0 \end{cases}$$

la molla modifica le condizioni a contorno (senza molla $y(z=0)=0$)

$$y(z=0) = C_2 = -\frac{M\ell^2}{EI}$$

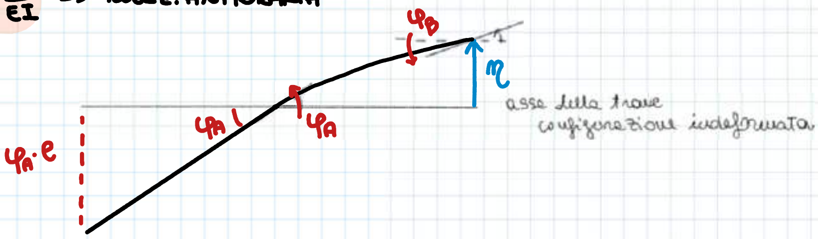
$$y(z=\ell) = \frac{1}{EI}\frac{M\ell^2}{6} + C_1\ell - \frac{M\ell^2}{EI} = 0 \qquad C_1 = \frac{5}{6}\frac{M\ell}{EI}$$

In B lo spostamento verticale sarà pari a $\eta = \frac{V_c}{K}$

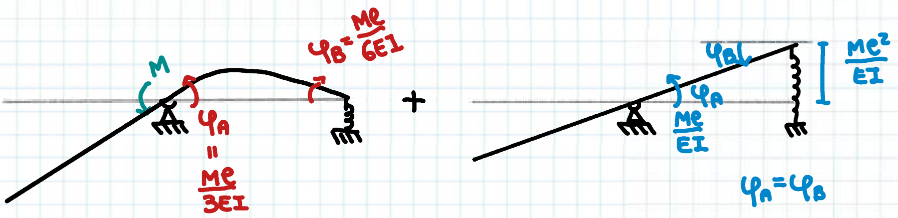
⇒ la rotazione nel nodo B risulta: $\varphi(B) = -y'(z=0) = -\frac{5}{6}\frac{M\ell}{EI}$ convenzione ⊕↻ → rotaz. ANTIORARIA

rotaz in A: $-\frac{1}{2}\frac{M\ell}{EI} - \frac{5}{6}\frac{M\ell}{EI} = -\frac{4}{3}\frac{M\ell}{EI}$ → rotaz. ANTIORARIA

Deformata qualitativa:



1 b Sovrapposizione degli effetti



Scegliendo come rotazioni ⊕↺

$$\varphi_B = \frac{M\ell}{EI} - \frac{M\ell}{6EI} = \frac{5}{6}\frac{M\ell}{EI} \qquad \text{ANTIORARIA}$$

$$\varphi_A = \frac{M\ell}{EI} + \frac{M\ell}{3EI} = \frac{4}{3}\frac{M\ell}{EI} \qquad \text{ANTIORARIA}$$

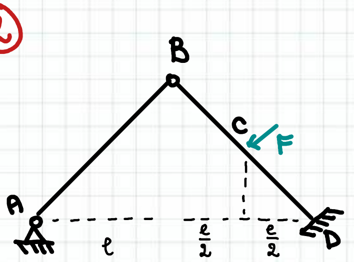
Nel caso di corpo infinitamente rigido $EI \to \infty$

rotazione in B = rotazione rigida dell'intera struttura : $\varphi = \frac{\eta}{\ell} = \frac{M\ell}{EI}$ ANTIORARIA

ERRORI COMUNI RISCONTRATI :

- Non indicare o non riportare il SISTEMA di RIFERIMENTO adottato sulla trave : senza sistema di rif. un + o un − non hanno significato.
- Le condizioni a contorno : devono essere specifiche per il tipo di problema in esame
- Trattare la struttura come un'iperstatica (la reazione vincolare della molla si può calcolare con gli equilibri).
- Considerare che, nel caso di trave infinitamente rigida, anche la k della molla tende ad infinito: la rigidezza della trave NON è legata alla rigidezza della molla. Se la trave è rigida, questo non influisce sulla molla, ma solo sulla deformata della trave stessa.
- Non commentare le scelte e i passaggi. Bisogna motivare i passaggi e le ipotesi di partenza adottate
- Definire una struttura ISOSTATICA ⇔ gdv = gdl : non è sufficiente.

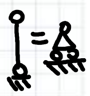
2

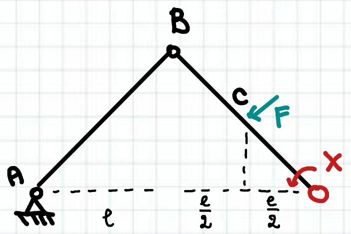


La struttura non presenta gradi di labilità, risulta invece avere 6 gdl e 7 gdv → iperstatica. La struttura è a nodi fissi, AB biella

Svincolo in D. L'eq^ne di congruenza associata è $\varphi_D = 0$. I nodi sono fissi.

Valuto tutti i contributi per la rotazione in D: quindi posso usare gli schemi noti in quanto





$$\circlearrowleft\oplus \quad \frac{X\ell\sqrt{2}}{3EI} + \frac{F(\sqrt{2}\ell)^2}{16EI} = 0 \qquad \frac{\sqrt{2}X}{3} = -\frac{2F\ell}{16} \qquad X = -\frac{3}{8\sqrt{2}}F\ell$$

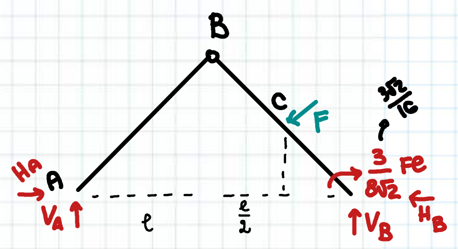
Applico le eq^ni cardinali della statica per ricavare le altre reazioni vincolari:

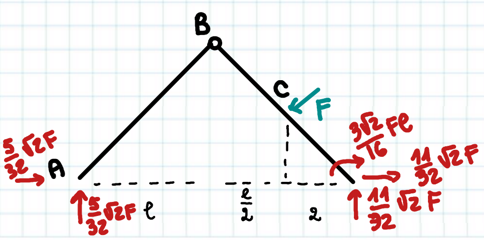
$$H_A - F\frac{\sqrt{2}}{2} - H_B = 0 \qquad H_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}F + \frac{5\sqrt{2}}{32}F = -\frac{11}{32}\sqrt{2}F$$

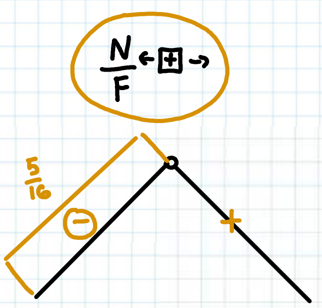
$$V_A + V_B - F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad V_A = \frac{\sqrt{2}}{2}F - \frac{11}{32}\sqrt{2}F = \frac{5\sqrt{2}}{32}F = H_A$$

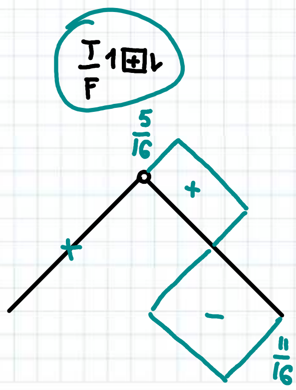
$$\circlearrowleft M(A) = -F\frac{\sqrt{2}}{2}\ell - \frac{3\sqrt{2}}{16}F\ell + V_B \cdot 2\ell = 0 \qquad V_B = \frac{11}{32}\sqrt{2}F$$

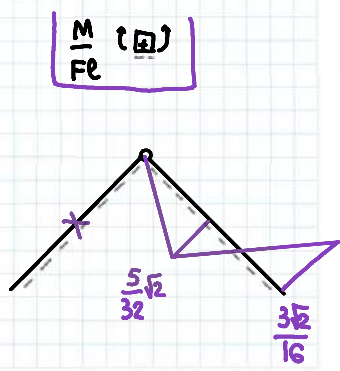
Per condizione di BIELLA → $V_A = H_A$ in modulo





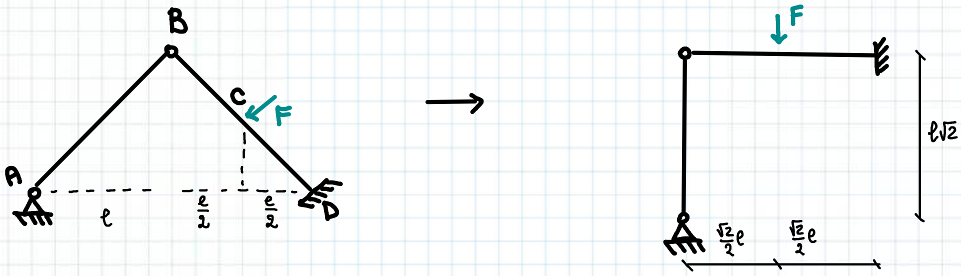






OSSERVAZIONE:

Potevo ruotare il sistema di riferimento della struttura:

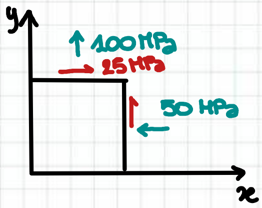


ERRORI COMUNI RISCONTRATI:

- Definire il tratto AB una "biella scarica": AB è una BIELLA (=> solo azioni assiali) ma NON è scarica.
- Svincolare scorrettamente: es. mettere incognita iperstatica X come coppia in B. In B c'è già una cerniera, quindi il momento è NULLO.
- Considerare la lunghezza della trave sbagliata: è $\ell\sqrt{2}$, non ℓ (da utilizzare anche nei coefficienti elastici).
- Scrivere in maniera scorretta l'eq^{ne} di congruenza. Questa deve essere coerente con la struttura originaria.
- Considerare la struttura come un'isostatica

③

Stato di tensione PIANO $\rightarrow \sigma_z = 0$



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -50 & 25 & 0 \\ 25 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Per ricavare le tensioni principali posso procedere con 2 metodi.

1- Problema autovalori

2- cerchi di Mohr (graficamente)

Soluzioni:

$\sigma_1 = 104$ MPa

$\sigma_2 = 0$ MPa

$\sigma_3 = -54$ MPa

$$\{n_1\} = \begin{Bmatrix} 4/25 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{n_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{n_3\} = \begin{Bmatrix} -25/4 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Posso normalizzarle per avere il versore di modulo unitario