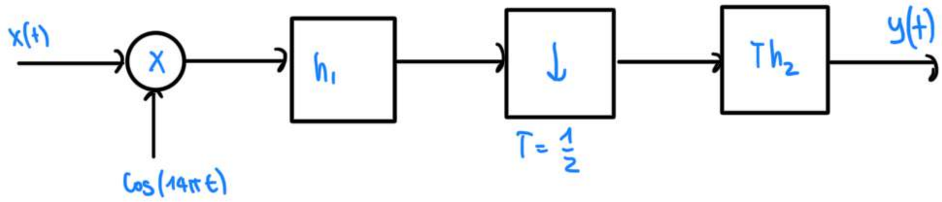
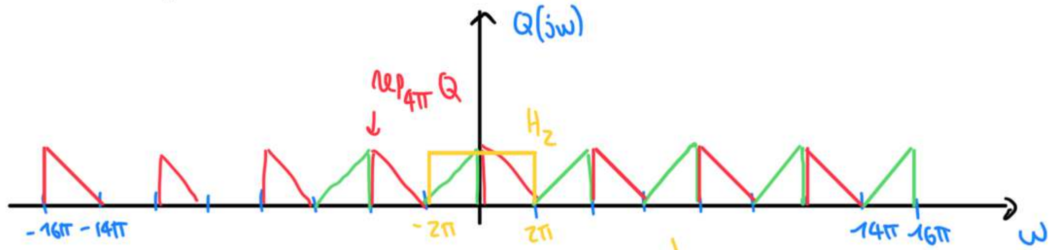
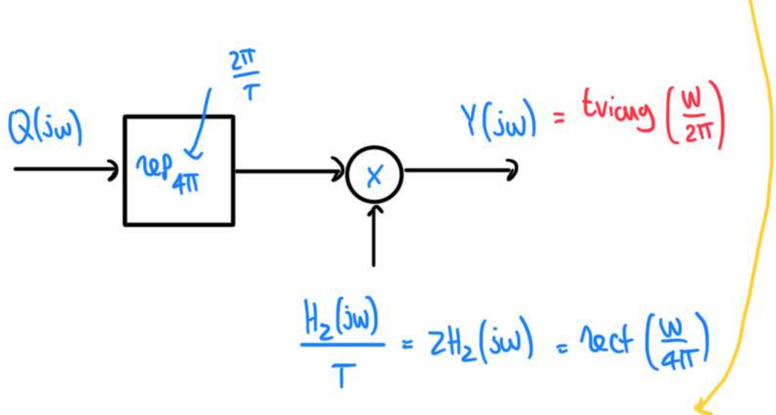
Lezione 25 - 17/05/2024

Riprendiamo quello che stavamo facendo ieri, ovvero l'esercizio 3 slide 120 (finiamo l'esercizio)



$$H_2(j\omega) = \frac{1}{2}\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$$





È UNA RIPETIZIONE PERIODICA DI UN TRIANGOLO

$$\text{rep}_{4\pi}\, Q(j\omega) = \text{rep}_{4\pi}\, \text{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

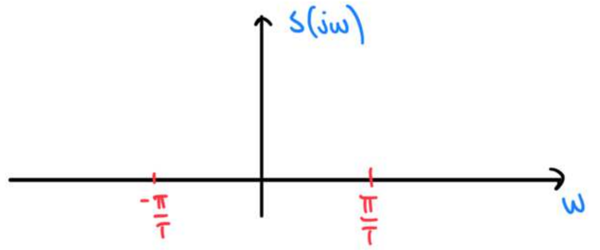
$$Y(j\omega) = \text{triang}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = \text{sinc}^2(t)$$

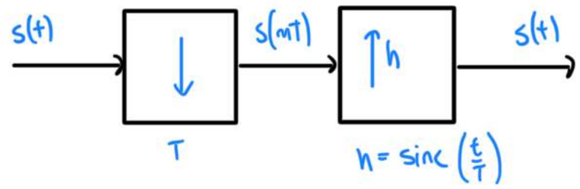
Es 2

Proporre uno schema di ricostruzione di $s(t) = \text{sinc}^2(t)\, e^{j19\pi t/2}$ dai campioni che utilizzi il maggior passo possible di campionamento

$$s(t) = \text{sinc}^2(t)\, e^{j\frac{19}{2}\pi t}$$ (è un sinc^2 modulato)

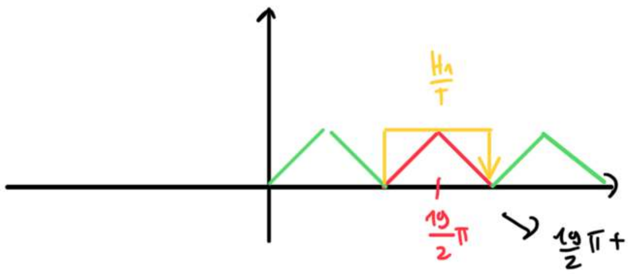
<u>SOL.</u> PER IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO, DISEGNAMO LA TF DEL SEGNALE E IDENTIFICHIAMO UN PUNTO $\frac{\pi}{T}$





$$s(t) = \sum_n s(nT)\,\text{sinc}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$$

$$s(t) = \text{sinc}^2(t)\, \underbrace{e^{j\frac{19}{2}\pi t}}_{\text{MODULAZIONE}} \xrightarrow{\mathcal{F}} S(jw) = \text{triang}\left(\frac{\overbrace{w - \frac{19}{2}\pi}^{\text{TRASLAZIONE}}}{2\pi}\right)$$



$$\rightarrow \frac{19}{2}\pi + 2\pi = \frac{23}{2}\pi < \frac{\pi}{T}$$

$$\rightarrow T < \frac{\pi}{\frac{23}{2}\pi} = \frac{2}{23} \Rightarrow \text{PER } \boxed{T = \frac{2}{23}} \text{ NON PERDIAMO INFORMAZIONE}$$

<u>DOMANDA:</u> $\exists\, T > \frac{2}{23}$ PER CUI NON PERDO INFORMAZIONE?

$$\frac{2\pi}{T} = 4\pi \rightarrow T = \frac{1}{2}$$

$$\frac{H_1(jw)}{T} = \text{rect}\left(\frac{w - \frac{19}{2}\pi}{4\pi}\right)$$

<u>RISPOSTA:</u> SI, SE LIMITO T ALL'ESTENSIONE DELLA BANDA DEL SEGNALE, IN QUESTO CASO 4π.

COME È FATTA H_1 NEL TEMPO

sono riuscito a campionare più lentamente di $T = \frac{2}{23}$, ma non ho perso informazione

$$H_1(j\omega) = T\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega - \frac{19}{2}\pi}{4\pi}\right) \qquad T = \frac{1}{2}$$

$$= T\,\mathrm{rect}\left(\frac{T}{2\pi}\left(\omega - \frac{19}{2}\pi\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{t}{T}\right) e^{j\frac{19}{2}\pi t} = h_1(t)$$

$$\boxed{h(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) e^{j\omega_0 t} \qquad T = \frac{1}{2}}$$

$$s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(mT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT}{T}\right) e^{j\frac{19}{2}\pi(t-mT)}$$

$$= e^{j\frac{19}{2}\pi} \cdot \sum_{m=-\infty}^{+\infty} s(mT)\, e^{-j\frac{19}{2}\pi mT} \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-mT}{T}\right)$$

ATTENZIONE: IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO È UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE, NON NECESSARIA

CON IL TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO ABBIAMO FINITO LE TRASFORMATE DI FOURIER

Proviamo a calcolare qualche trasformata di Laplace

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) **l'esponenziale complesso** $s(t) = e^{s_0 t}\, 1(t)$

b) l'esponenziale **anticausale** $s(t) = -e^{s_0 t}\, 1(-t)$

c) la **combinazione** lineare $s(t) = e^{s_1 t}\, 1(t) + e^{s_2 t}\, 1(-t)$

$\boxed{1a}$

$x(t) = e^{s_0 t} \, 1(t)$ $\qquad s_0 \in \mathbb{C}$

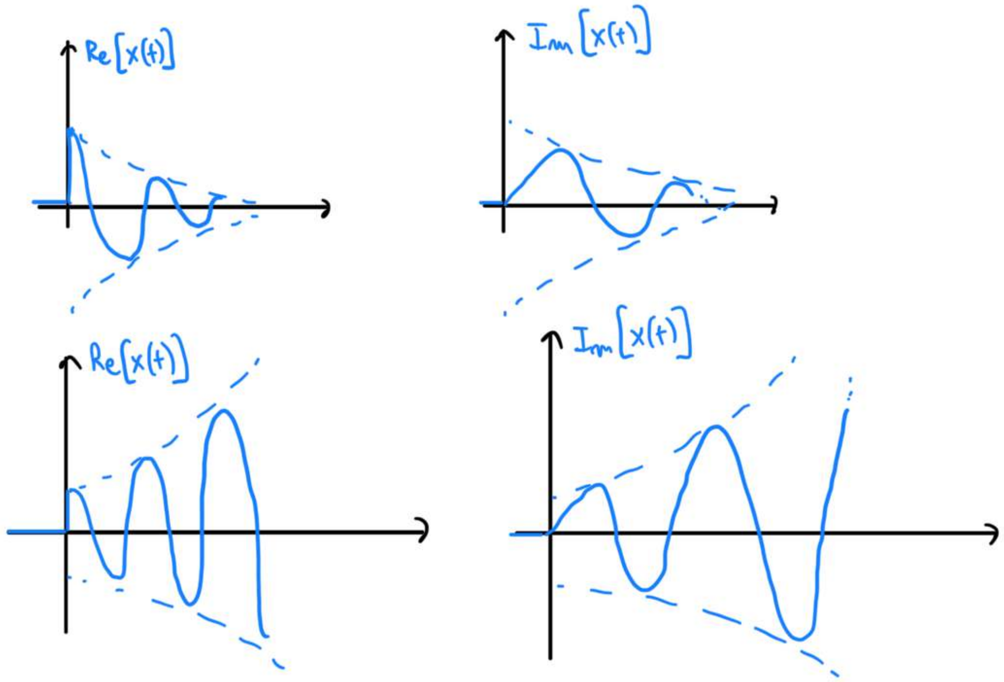
$X(s) = ?$ $\qquad s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$

Sol. $x(t) = e^{\sigma_0 t} e^{j\omega_0 t} \, 1(t)$

$= e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) 1(t) + j e^{\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t) 1(t)$

supponiamo $\sigma_0 < 0$

$\sigma_0 > 0$



$x(t) = e^{s_0 t} \cdot 1(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{(s_0 - s)t} dt$$

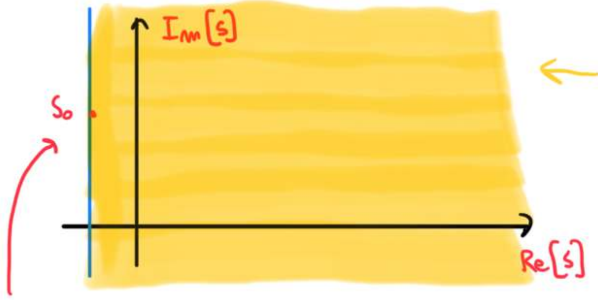
$$= \left[\frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0 - s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s_0 - s} \left(\underbrace{\lim_{t \to +\infty} e^{(s_0-s)t}} - 1 \right)$$

$$\lim_{t \to +\infty} e^{Re[s_0 - s]t} e^{j Im[s_0 - s]t}$$

QUESTO LIMITE ESISTE ED E' UGUALE A 0 $\iff Re[s_0 - s] < 0$

$$X(s) = \frac{-1}{s_0 - s} = \frac{1}{s - s_0} \quad \text{PER} \quad \underbrace{Re[s_0 - s] < 0}_{\text{REGIONE DI CONVERGENZA}}$$

$Re[s_0] < Re[s]$



$\Gamma_x = \{ s \mid Re[s] < Re[s_0] \}$

POLO: PUNTO IN CUI L'ESPRESSIONE ANALITICA DIVERGE

NB: non è un caso che la regione di convergenza finisca dove c'è un polo

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) **l'esponenziale complesso** $s(t) = e^{s_0 t}\, 1(t)$

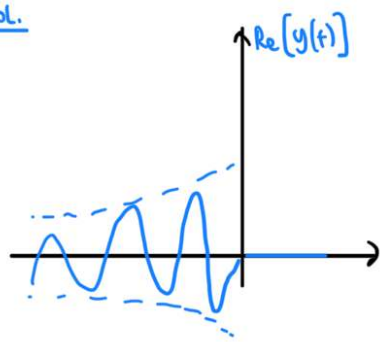
b) l'esponenziale **anticausale** $s(t) = -e^{s_0 t}\, 1(-t)$

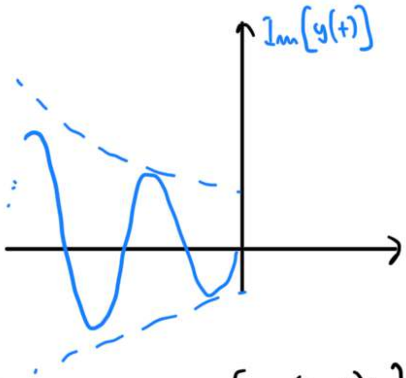
c) la **combinazione** lineare $s(t) = e^{s_1 t}\, 1(t) + e^{s_2 t}\, 1(-t)$

$\boxed{1b}$

$$y(t) = -e^{s_0 t}\,1(-t) \qquad s_0 = \sigma + j\omega_0$$

Sol.

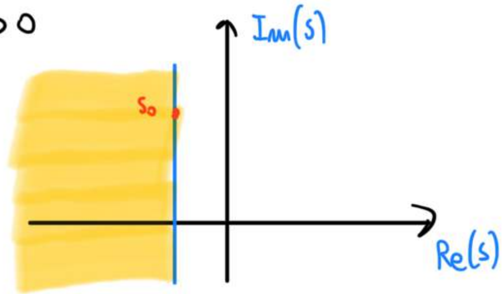




$$Y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{s_0 t}\,1(-t)\,e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{(s_0-s)t}\,dt = \left[\frac{-e^{(s_0-s)t}}{s_0-s}\right]_{-\infty}^{0}$$

QUESTO INTEGRALE CONVERGE $\iff$ $Re[s_0 - s] > 0$

$$= \left[\frac{-e^{(s_0-s)t}}{s_0-s}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{s_0-s} = \frac{1}{s-s_0}$$



NB

LE ROC SONO COMPLEMENTARI

MA LA TRASFORMATA E' LA STESSA!

CIOE' LA TRASFORMATA DI LAPLACE E' UNA MAPPA

$$x(t) \underset{\alpha^{-1}}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \underbrace{X(s),\ \Gamma_X}$$

← ROC

SOLO SE HO TUTTE E 2 QUESTE INFORMAZIONI POSSO TORNARE INDIETRO!

Es 1

Calcolare la trasformata di Laplace per i seguenti segnali

a) **l'esponenziale complesso** $s(t) = e^{s_0 t}\, 1(t)$

b) l'esponenziale **anticausale** $s(t) = -e^{s_0 t}\, 1(-t)$

c) la **combinazione** lineare $s(t) = e^{s_1 t}\, 1(t) + e^{s_2 t}\, 1(-t)$

$x(t) = e^{s_1 t} \cdot 1(t) + e^{s_2 t}\, 1(-t)$

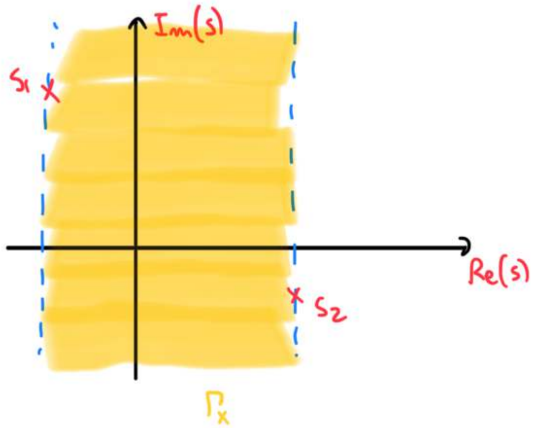
$X(s) = ?$

SOL.

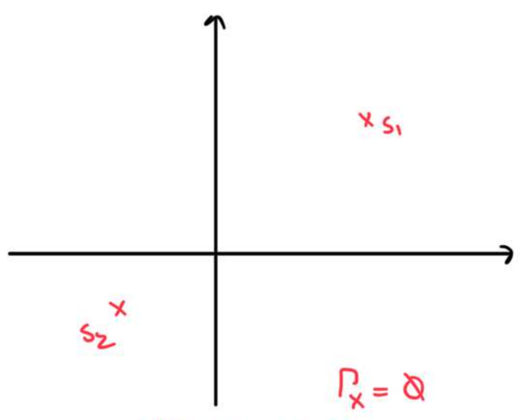
$$X(s) = \frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2}$$

$Re[s] > Re[s_1]$ $\quad$ $Re[s] < Re[s_2]$

$Re[s_1] < Re[s] < Re[s_2]$



NEL CASO IN CUI $s_1 > s_2$:



$\nexists$ TRASF. LAPLACE