ESERCIZI SCHEDA 4

ESERCIZIO 1

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+ax^2+x}{x^2-ax+1}-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+ax^2+x-x^3+ax^2-x-2x^2+2ax-2}{x^2-ax+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2a-2)x^2+2ax-2}{x^2-ax+1}$$

Questo limite è pari a 0 se il grado del denominatore è maggiore rispetto a quello del numeratore.

$$\Rightarrow 2a-2=0 \Leftrightarrow a=1$$

Infatti: $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+x^2+x}{x^2-x+1}-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^3}+\cancel{x^2}-\cancel{x}-2x^2+2x-2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x^2-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\overbrace{(2-2x^{-1})}^{\to 2}}{\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(1-x^{-1}+x^{-2})}_{\to 1}}=0$$

ESERCIZIO 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x^2+5}{x^2-\sqrt{x}}}=\text{(uso la forma exp\{log\})}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\log\left(\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}\right)^{\frac{x^2+5}{x^2-\sqrt{x}}}\right)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\frac{x^2+5}{x^2-\sqrt{x}}\log\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}\right)\right\}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{\underbrace{\frac{x^2(1+5x^{-2})}{x^2(1-x^{-3/2})}}_{\to 1}\log\underbrace{\left(\frac{x(1+x^{-\frac{1}{2}})}{x(2-x^{-\frac{1}{2}})}\right)}_{\to\frac{1}{2}}\right\}=\exp\left\{1\cdot\log\frac{1}{2}\right\}=e^{\log\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 3

ⓐ $f(x)=2x,\quad g(x)=x$

ⓑ $f(x)=x,\quad g(x)=x^2$

ⓒ $f(x)=x+x\sin x,\quad g(x)=x$

ESERCIZIO 4

0 per gerarchia

ⓐ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+x^3+1}{3^{2x}+5^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+x^3+1}{9^x+5^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\overbrace{\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}^{\to 5}}{9^x\underbrace{\left(1+\left(\frac{5}{9}\right)^x\right)}_{\to 1}}=0$$

ⓑ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4+x^3+1}{3^{2x}+5^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{x^4}^{\to+\infty}\overbrace{\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}\right)}^{\to 5}}{\underbrace{9^x+5^x}_{\to 0^+}}=+\infty$$

ⓒ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^5)+\sqrt{x}+2x}{x+\log(e^x+2)+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^5)+\sqrt{x}+2x}{x+\log\left[e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)\right]+\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{5\log x}{x}+x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{x+x+\log\left(1+\frac{2}{e^x}\right)+\sin x}=$$

ger. 0 0

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{5\log x}{x}+x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{x\left(2+\frac{\log\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{x}+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

ⓓ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+3\sin x - x\sin(2x)}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\underbrace{x}_{\to+\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}+3\,\overset{\to 0}{\frac{\sin x}{x}}-\overset{\in[-1,1]}{\sin(2x)}\right)}{\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(1-x^{-2})}_{\to 1}} = 0$$

Esercizio 5

ⓐ $$\lim_{x\to0^+} x^{x\log x} = \lim_{x\to0^+} \exp\{\log(x^{x\log x})\} = \lim_{x\to0^+} \exp\{x\log x\cdot\log x\} = \lim_{x\to0^+}\exp\{x\log^2 x\} =$$

cambio di variabile: $t=\frac{1}{x}$ $\quad \lim_{x\to0^+} t = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow t\to+\infty$

$$= \lim_{t\to+\infty}\exp\left\{\frac{1}{t}\log\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \lim_{t\to+\infty}\exp\left\{\frac{\log(t^{-1})}{t}\right\} = \lim_{t\to+\infty}\exp\left\{-\underbrace{\frac{\log t}{t}}_{0 \text{ per gerarchia}}\right\} = e^0 = 1$$

ⓑ $$\lim_{x\to0^+}|\log x|^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\exp\{\log(|\log x|^{\frac{1}{x}})\} = \lim_{x\to0^+}\exp\left\{\frac{1}{x}\log|\log x|\right\} = \exp\{+\infty\cdot\log|\log(0^+)|\} =$$

$$= \exp\{+\infty\cdot\log|-\infty|\} = \exp\{+\infty\cdot\log(+\infty)\} = \exp\{+\infty\cdot(+\infty)\} = e^{+\infty} = +\infty$$

Esercizio 6

ⓐ $$\lim_{x\to0}\frac{\log(1+\sin x)}{x} = \lim_{x\to0}\overset{\to1}{\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}}\cdot\overset{\to1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

Se si conta solo per questo limite un cambio di variabile $t=\sin x$, si ottiene un limite notevole $\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1$.

ⓑ $$\lim_{x\to0^+}4x^4\log(x^5+x^2) = \lim_{x\to0^+}4x^4\log[x^2(x^3+1)] = \lim_{x\to0^+}4x^4(\log(x^2)+\log(x^3+1)) = \lim_{x\to0^+}4x^4\log(x^2) + \lim_{x\to0^+}4x^2\log(x^3+1)$$

I) $\lim_{x\to0^+}4x^4\log(x^2) =$ cambio di variabile $t=x^{-2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to0^+} t = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{t^2}\log(t^{-1})$

$= \lim_{x\to+\infty}4\frac{-\log(t)}{t^2} = 0$ per gerarchia

II) $\lim_{x\to0^+}4x^4\log(x^3+1) = \lim_{x\to0^+}\underbrace{4x^7}_{\to0}\underbrace{\frac{\log(1+x^3)}{x^3}}_{\to1} = 0$

$0+0=0$

ⓒ $$\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\cos x}-e^{\sin x}}{\log(1+3x)} = \lim_{x\to0}\frac{3x}{\log(1+3x)}\cdot\frac{e^{1-\cos x}-e^{\sin x}}{3x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+3x)}{3x}\right)^{-1}\cdot\frac{e^{1-\cos x}-1+1-e^{\sin x}}{3x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\log(1+3x)}{3x}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{e^{1-\cos x}-1}{3x}-\frac{e^{\sin x}-1}{3x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\underbrace{\left(\frac{\log(1+3x)}{3x}\right)^{-1}}_{\to1}\left(\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{e^{1-\cos x}-1}{1-\cos x}}_{\to1}\cdot\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{\to0}-\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}}_{\to1}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to1}\right) = -\frac{1}{3}$$

(d) $\lim_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x})\sin\left(\frac{5}{x}\right)$ cambio di variabile: $t=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{t^2}$ $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+ \Rightarrow t\to 0^+$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{t\to0^+}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\right)\sin(5t^2) = \lim_{t\to0^+}\left[\frac{\sin(5t^2)}{t^2}+\frac{\sin(5t^2)}{t}\right] =$$

$$= \lim_{t\to0^+}\frac{\sin(5t^2)}{t^2} + \lim_{t\to0^+}\frac{\sin(5t^2)}{t} = 5\lim_{t\to0^+}\underbrace{\frac{\sin(5t^2)}{5t^2}}_{\to1} + 5\lim_{t\to0^+}\underbrace{t}_{\to0}\cdot\underbrace{\frac{\sin(5t^2)}{5t^2}}_{\to1} = 5$$

(e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)}{1+\log x}$ cambio di variabile $t=\log x$ $\lim_{x\to+\infty} t = \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty \Rightarrow t\to+\infty$ per $x\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{1+t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to+\infty}\underbrace{\frac{\log t}{t}}_{\to0 \text{ per gerarchia}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{t}}}_{\to1} = 0$$

(f) $\lim_{x\to2}\frac{\sin(\tan(x-2))}{\sin(x-2)}$ cambio di variabile: $t=x-2$ $\lim_{x\to2} t = 0 \Rightarrow t\to0$ per $x\to2$

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin(\tan t)}{\sin t} = \lim_{t\to0}\frac{\sin(\tan t)}{\tan t\cdot\cos t} = \lim_{t\to0}\underbrace{\frac{\sin(\tan t)}{\tan t}}_{\to1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos t}}_{\to1} = 1$$

Sottinteso un cambio di variabile con $z=\tan t$ e con $z\to0$ per $t\to0$.

Esercizio 7

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sinh^2 x-3\cosh^2 x}{3\cosh(2x)+\sinh(2x)}$ $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2-3\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}{3\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\,\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}-3\,\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}}{4\left(3\,\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+2e^{-2x}-4-3e^{2x}-3e^{-2x}-6}{6e^{2x}+6e^{-2x}+2e^{2x}-2e^{-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{2x}-e^{-2x}-10}{8e^{2x}+4e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\overbrace{(-1-e^{-4x}-10e^{-2x})}^{\to-1}}{e^{2x}\underbrace{(8+4e^{-4x})}_{\to8}} = -\frac{1}{8}$$

(b) Caso $a=1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{9+3+1}{2-10+4} = -\frac{13}{4}$

Caso $a\in(0,1)$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{9a^{2x}+3a^x+1}{2a^{2x}-10a^x+4} = \frac{1}{4}$

Caso $a>1$: $\lim_{x\to+\infty}\frac{9a^{2x}+3a^x+1}{2a^{2x}-10a^x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{2x}\overbrace{\left(9+\frac{3}{a^x}+\frac{1}{a^{2x}}\right)}^{\to9}}{a^{2x}\underbrace{\left(2-\frac{10}{a^x}+\frac{4}{a^{2x}}\right)}_{\to2}} = \frac{9}{2}$

Esercizio 8

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+4^x}{7^x+2^x\sin(e^x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x+4^x}{7^x\left(1+\left(\frac{2}{7}\right)^x\sin(e^x)\right)}$$

Caso $a \in (0,7)$: per gerarchia il denominatore prevale sul numeratore per gerarchia degli infiniti $\Rightarrow$ la funzione $\to 0$

Caso $a > 7$: per gerarchia il numeratore prevale sul denominatore per gerarchia degli infiniti $\Rightarrow$ la funzione $\to +\infty$

Caso $a = 7$: $\lim_{x\to+\infty} \frac{7^x + 4^x}{7^x\left(1+\left(\frac{2}{7}\right)^x \sin(e^x)\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7^x\left(1+\left(\frac{4}{7}\right)^x\right)}{7^x\left(1+\left(\frac{2}{7}\right)^x \sin(e^x)\right)} = 1$

Esercizio 9

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+3^{-1/x}}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left\{\log\left(\left(\frac{x+1}{2x+3^{-1/x}}\right)^{\sqrt{x^2+1}-x}\right)\right\} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left\{(\sqrt{x^2+1}-x)\log\left(\frac{x+1}{2x+3^{-1/x}}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \exp\left\{(\sqrt{x^2+1}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\log\left(\frac{x+1}{2x+3^{-1/x}}\right)\right\} = \lim_{x\to+\infty} \exp\left\{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\log\left(\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{3^{-1/x}}{x}\right)}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \exp\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}}_{\to 0}\cdot\log\left(\frac{\overbrace{1+\frac{1}{x}}^{\to 1}}{\underbrace{2+\frac{3^{-1/x}}{x}}_{\to 2}}\right)\right\} = e^{0\cdot\log\frac{1}{2}} = e^0 = 1$$

Esercizio 11

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos(\alpha x)-\cos(\beta x)}{\sin(x^2+x^7)} = \lim_{x\to0}\frac{x^2+x^7}{\sin(x^2+x^7)}\cdot\frac{x^2}{x^2+x^7}\cdot\frac{\cos(\alpha x)-1+1-\cos(\beta x)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x^2+x^7}{\sin(x^2+x^7)}\cdot\frac{x^2}{x^2+x^7}\cdot\left(\frac{1-\cos(\beta x)}{x^2}-\frac{1-\cos(\alpha x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to0}\underbrace{\frac{x^2+x^7}{\sin(x^2+x^7)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{x^2+x^7}}_{\to 1}\left(\beta^2\underbrace{\frac{1-\cos(\beta x)}{(\beta x)^2}}_{\to \frac{1}{2}}-\alpha^2\underbrace{\frac{1-\cos(\alpha x)}{(\alpha x)^2}}_{\to\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$$

Esercizio 12

$$f(x) = \frac{|x|^\alpha + 3x^9 + 4x - 1}{3x^3 - |x|^{3-\alpha} - 4}$$

Ragiono sul parametro α:

- se $\alpha \geq 9$, $|x|^\alpha$ è il termine di grado maggiore al numeratore, mentre al denominatore lo è $3x^3$; al denominatore, invece $|x|^{3-\alpha}$ è il termine di grado minore;
- se $\alpha \in (3,9)$, al numeratore il termine di grado maggiore diventa $3x^9$, mentre per il resto tutto resta uguale;
- se $\alpha \in [0,3]$, al denominatore il termine di grado minore diventa -4;
- se $\alpha = 0$, al numeratore il termine di grado minore è $4x$ e al denominatore il termine di grado maggiore è $3x^3 - |x|^{3-\alpha}$;
- se $\alpha \in (-6,0)$, $|x|^\alpha$ è di grado minore al numeratore, mentre $-|x|^{3-\alpha}$ è di grado maggiore al denominatore.

- se $\alpha \leq -6$ il grado del denominatore supera quello del numeratore.

Caso con $\alpha > 9$:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}+3x^{9}+4x-1}{3x^{3}-x^{3-\alpha}-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}\overbrace{\left(1+3x^{9-\alpha}+4x^{1-\alpha}-x^{-\alpha}\right)}^{\to 1}}{x^{3}\underbrace{\left(3-x^{-\alpha}-4x^{-3}\right)}_{\to 3}} = +\infty \qquad \left(x^{\alpha-3} \to +\infty\right)$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{|x|^{\alpha}+3x^{9}+4x-1}^{\to -1}}{\underbrace{3x^{3}-|x|^{3-\alpha}-4}_{\to \pm\infty \text{ se } x\to 0}} = 0$$

- per problemi di dominio e di esponente è difficoltoso calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Analogo il caso di $\alpha = 9$

Caso con $\alpha \in (3,9)$: porta gli stessi risultati

Caso con $\alpha = 3$:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3}+3x^{9}+4x-1}{3x^{3}-5} = +\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{3}+3x^{9}+4x-1}{3x^{3}-5} = \frac{1}{5}$$

Caso con $\alpha \in (0,3)$:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}+3x^{9}+4x-1}{3x^{3}-x^{3-\alpha}-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{9}\overbrace{\left(3+x^{\alpha-9}+4x^{-8}-x^{-9}\right)}^{\to 3}}{x^{3}\underbrace{\left(3-x^{-\alpha}-4x^{-3}\right)}_{\to 3}} = +\infty \qquad \left(x^{6} \to +\infty\right)$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}$$

- per problemi di dominio non calcolo $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Caso con $\alpha = 0$:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^{9}+4x}{2x^{3}-4} = +\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^{9}+4x}{3x^{3}-|x|^{3-\alpha}-4} = 0$$

Caso con $\alpha \in (-6,0)$:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overset{x^{9}}{x^{\alpha}+3x^{9}+4x-1}}{3x^{3}-x^{3-\alpha}-4} = +\infty$$

- $\lim_{x\to 0} f(x) \nexists$

- per problemi di dominio e di esponente è difficoltoso calcolare $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Caso con $\alpha = -6$:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -3$$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$
- $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$

Caso con $\alpha < -6$:

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$