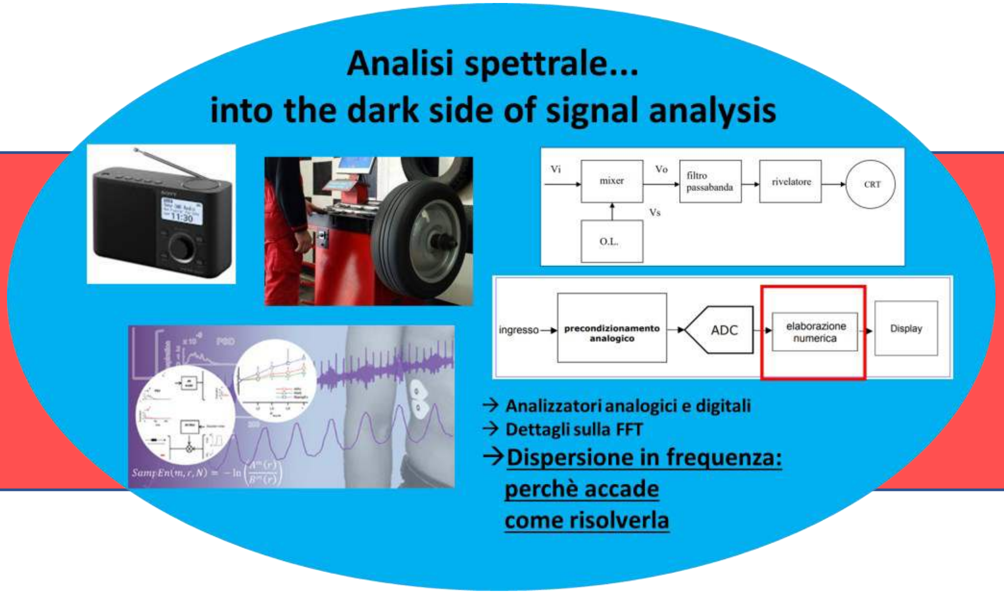


LEZIONE 6:

Analisi spettrale di segnali campionati e dispersione spettrale

Misure e Acquisizione di Dati Biomedici

Sarah Tonello, PhD
Dip. Ingegneria dell'Informazione
Università di Padova

Outline

- Analisi spettrale: generalità
- Trasformata di Fourier Finita (DFT)
- Specifiche e parametri caratteristici
- Dispersione spettrale
- Finestre per analisi spettrale

QUIZ

Analisi spettrale: generalità

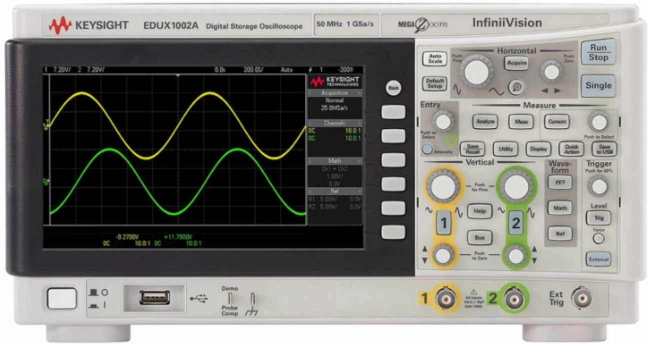
→ gli **analizzatori di spettro** sono strumenti di misura **dedicati** ***esclusivamente all'analisi in frequenza dei segnali.***

→ in grado di presentare in **forma grafica l'andamento dello spettro** di potenza o di ampiezza del segnale analizzato, in **funzione della frequenza**.

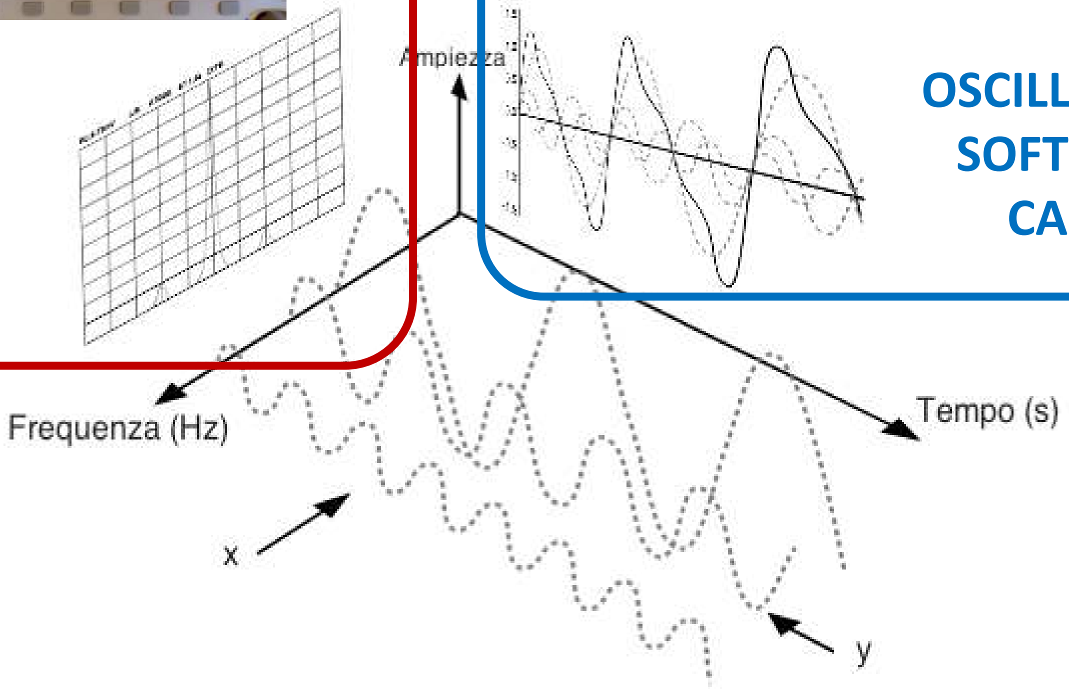
DOMINIO DELLA FREQUENZA

ANALIZZATORI DI SPETTRO/DSO/ SOFTWARE DI CALCOLO

DOMINIO DEL TEMPO



OSCILLOSCOPIO/ SOFTWARE DI CALCOLO

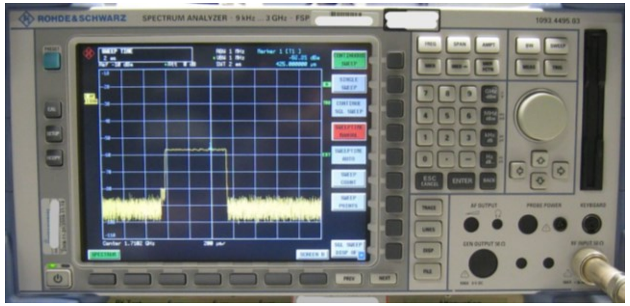


Strumentazione per analisi spettrale

termine **"analizzatore di spettro"** usato spesso in senso esteso per indicare, genericamente, ***uno strumento in grado di eseguire l'analisi spettrale seppur in modo non esclusivo,*** poichè qualunque dispositivo dotato di una **sufficiente capacità di calcolo è in grado di implementare algoritmi numerici di analisi spettrale**.

Si potrà quindi distinguere tra

1) ANALIZZATORI DI SPETTRO ANALOGICI

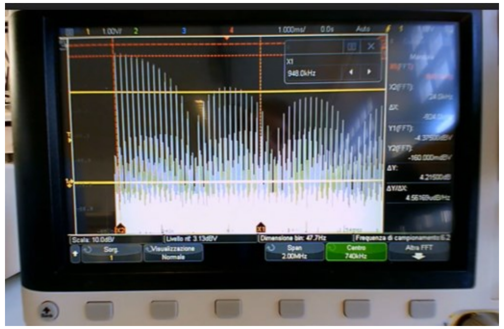


- **Strumenti dedicati**, analisi direttamente sul segnale nella sua forma analogica
- **Ampiezza di banda, sensibilità, range dinamici, livello di rumore, linearità** di alcuni ordini di grandezza migliori rispetto all'analisi post conversione A/D

Insostituibile per le misure su segnali ad altissima frequenza (ORDINE DELLE DECINE DI GHZ) come sono quelli ricorrenti nelle applicazioni radio cellulari e satellitari.

vs

2) STRUMENTI DIGITALI/SOFTWARE

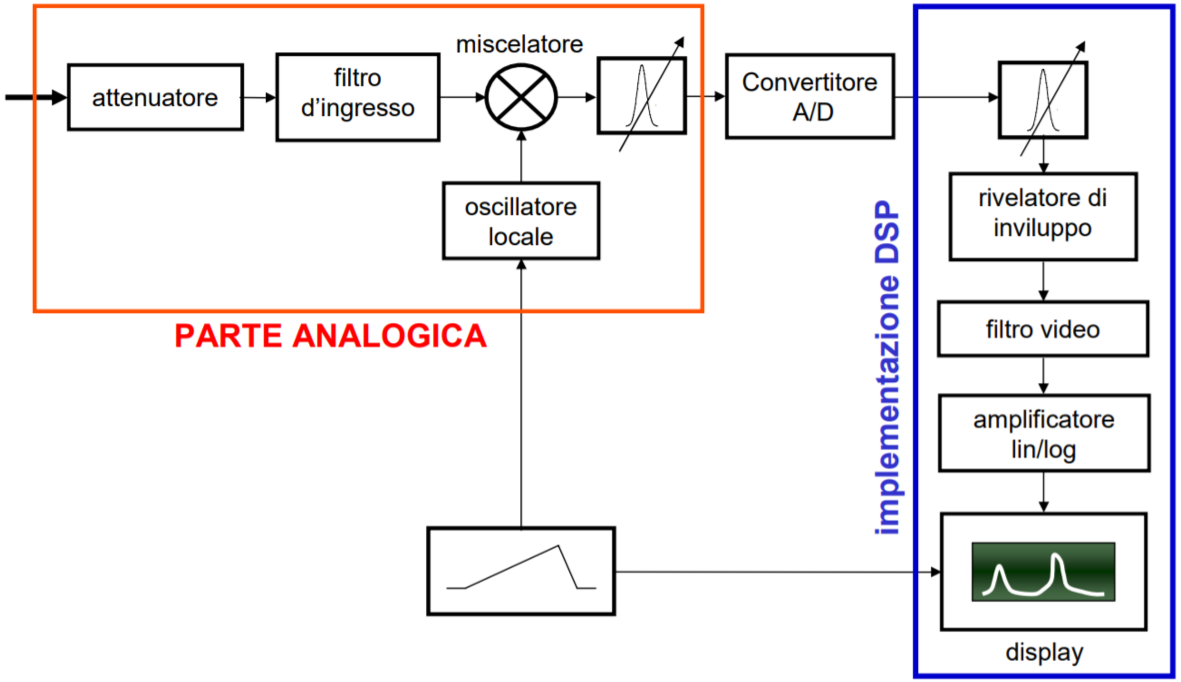


MATLAB

- Oscilloscopi digitali, con capacità di elaborazione spesso più che adeguate **fino a frequenze dell'ordine di qualche centinaio di MHz.**
- Software di calcolo che lavorano su segnali memorizzati in digitale

Strumenti molto diffusi ma nell'utilizzarli si deve tuttavia sempre **tenere presente le limitazioni potenzialmente introdotte dal sistema di acquisizione** nell'analisi di spettro.

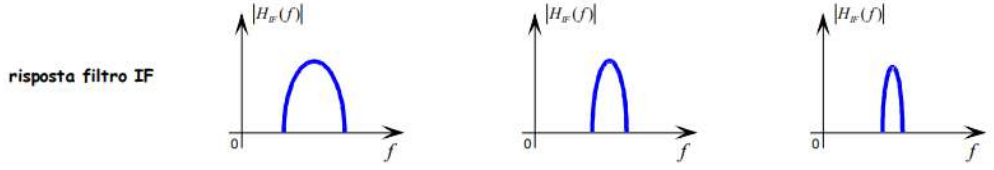
Tipologie di analizzatori di spettro: via analogica vs digitale

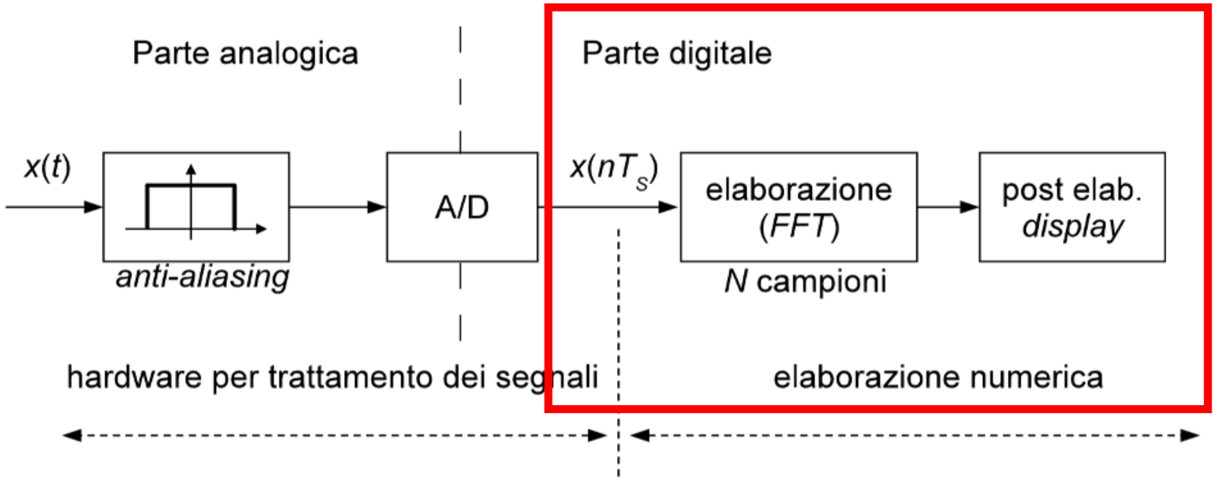


Analisi di spettro "per via analogica"

attraverso uso di uno o più filtri analogici selettivi:
passa banda simmetrico con frequenza centrale f_{IF} detta **frequenza intermedia**, nota con precisione, e con data **selettività**.

crescente selettività





Analisi di spettro "per via digitale"

attraverso uso di algoritmo numerico:

N.B. **Filtro anti-aliasing:** non presente in tutte le configurazioni, assicura l'eliminazione di componenti spettrali con $f > f_{Nyquist}$ evitando che queste siano riportate in banda base ed erroneamente misurate dall'analizzatore di spettro digitale.

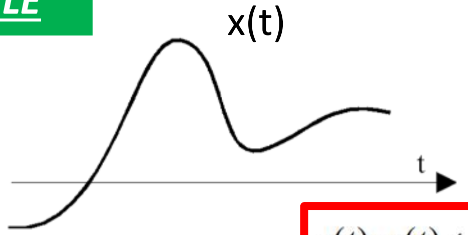
Outline

- Analisi spettrale: generalità
- Trasformata di Fourier Finita (DFT)
- Specifiche e parametri caratteristici
- Dispersione spettrale
- Finestre per analisi spettrale

QUIZ

Analisi spettrali per segnali campionati

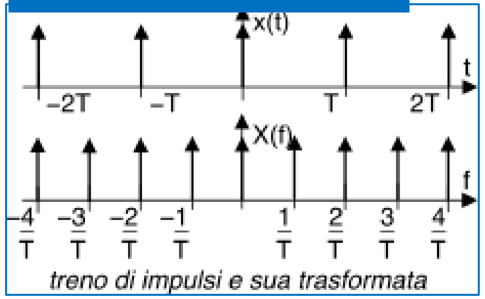
1) SORGENTE DI SEGNALE



1) Trasformata di Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; e^{-j2\pi f t} dt$$

2) ACQUISIZIONE DEL SEGNALE



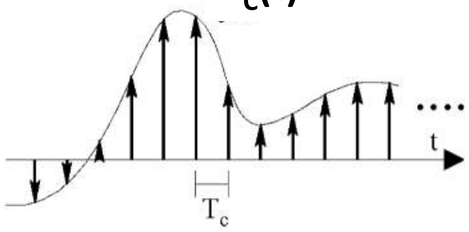
$$\boxed{s(t)\cdot c(t) \Leftrightarrow S(f) * C(f)}$$

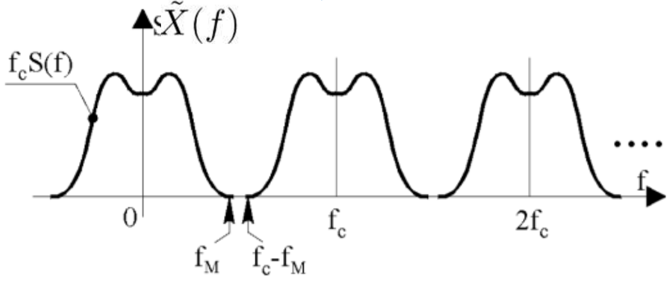
PRODOTTO TRA SEGNALE E TRENO DI IMPULSI

CONVOLUZIONE TRA TRASFORMATA SEGNALE E TRASFORMATA TRENO DI IMPULSI

2) Trasformata di Fourier Tempo discreta

$$\tilde{X}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_S \cdot x(nT_S) e^{-j2\pi f n T_S}$$





Partendo dalla definizione di convoluzione:

$$\tilde{X}(f) = X(f) * f_c \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_c)$$

Ottengo la relazione tra $X(f)$ **e** $\tilde{X}(f)$

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - k\frac{1}{T_S}\right)$$

Con $1/T_S = f_C$

- L'equazione mette in evidenza il fatto che lo spettro del segnale campionato è la **ripetizione periodica**, con periodo $1/T_S$ di quello del segnale continuo
  - Se le condizioni relative al campionamento sono state soddisfatte, vale l'uguaglianza

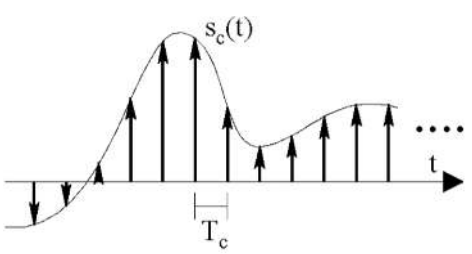
$$T_S \cdot \tilde{X}(f) = X(f) \text{ per } -\frac{1}{2T_S} < f < +\frac{1}{2T_S}$$

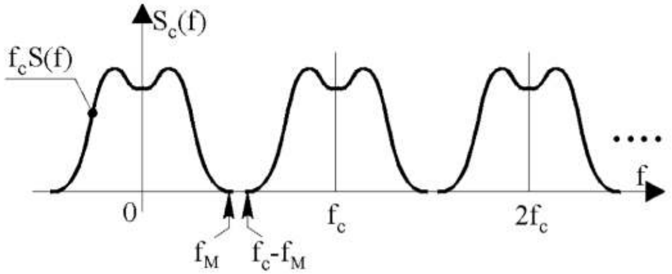
Analisi spettrali per segnali campionati

Il calcolo definito nell'equazione :

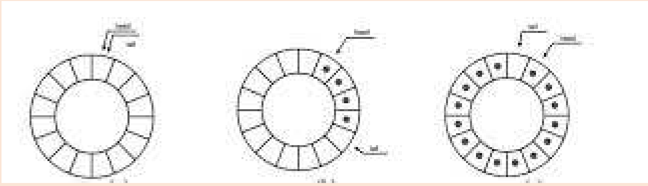
$$\tilde{X}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_S \cdot x(nT_S)e^{-j2\pi f n T_S}$$

fa riferimento alla somma di un **numero infinito di componenti**





CONSIDERATA LA PROFONDITA' DI MEMORIA FINITA DI QUALSIASI STRUMENTO DI MISURA



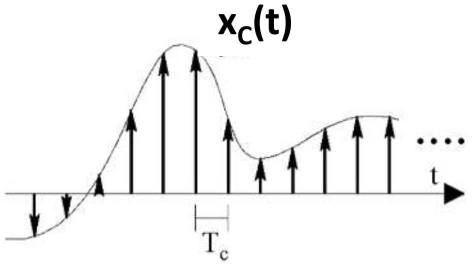
Come rappresentiamo quindi lo spettro di un segnale campionato con un numero di campioni finiti?

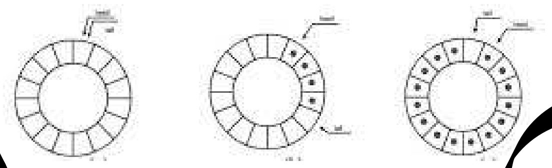
La DTFT **non può essere implementata come algoritmo**

Trasformata di Fourier finita (DFT, discrete Fourier transform)

PROCESSO DI CAMPIONAMENTO REALE

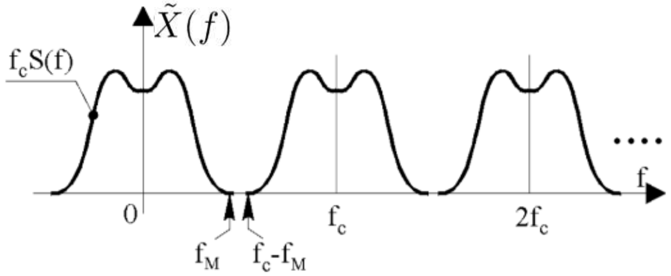
<u>DOMINIO DEL TEMPO</u>



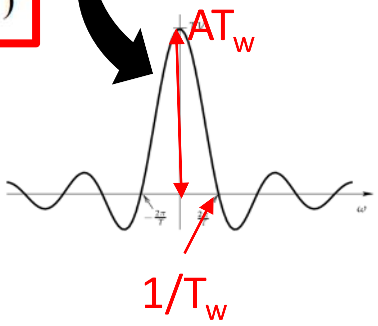


$$\boxed{s(t)\cdot c(t) \Leftrightarrow S(f) * C(f)}$$

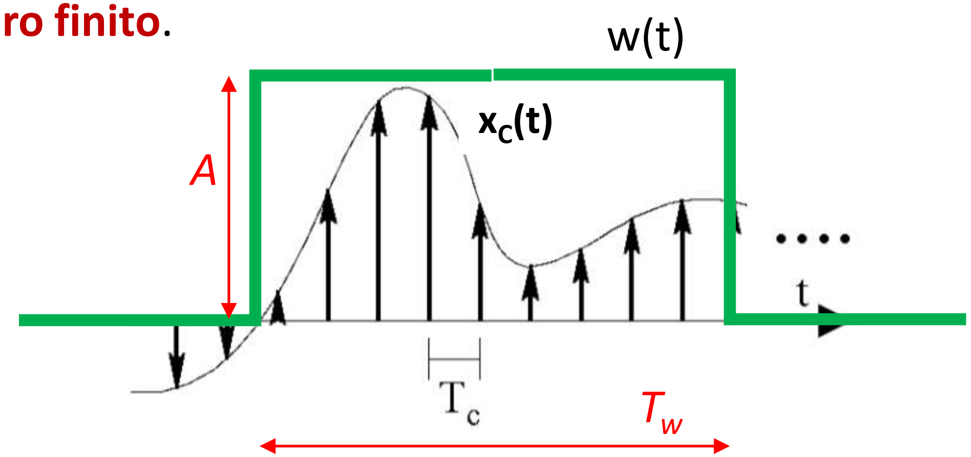
<u>DOMINIO DELLA FREQUENZA</u>



la sequenza dei campioni avrà necessariamente un inizio e una fine, e pertanto il **numero dei campioni a disposizione sarà in numero finito**.



Lo spettro del segnale campionato e troncato (quindi caratterizzato da N numeri) si ottiene dalla convoluzione tra DTFT e trasformata della finestra

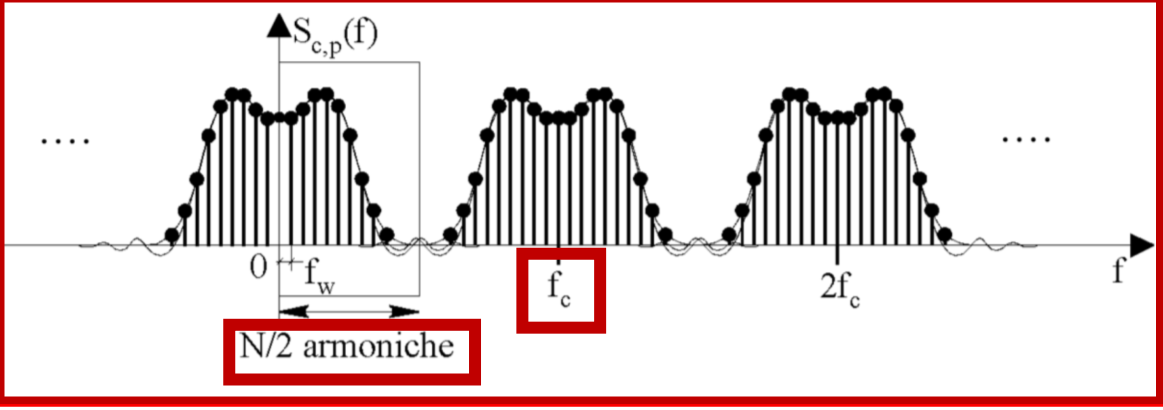


segnale di durata limitata

=

porzione del segnale generico s(t), prelevata attraverso una opportuna finestra temporale w(t), detta anche finestra di **troncamento** o di **osservazione**.

<u>Otteniamo cosi la trasformata discreta di Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT), periodica di periodo fc,</u> strumento che consente di valutare il contenuto armonico in tale intervallo **mediante <u>un numero N/2 di componenti discrete.</u>**

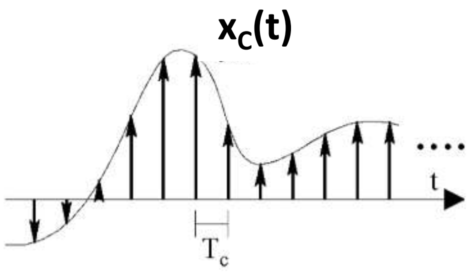


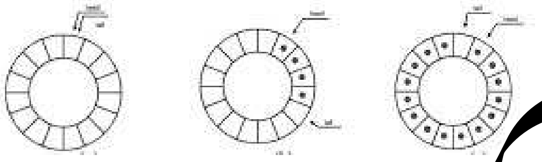
Trasformata di Fourier finita (DFT, discrete Fourier transform)

DOMINIO DEL TEMPO

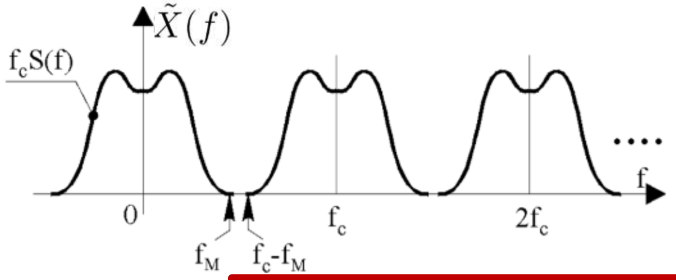
PROCESSO DI CAMPIONAMENTO REALE

DOMINIO DELLA FREQUENZA

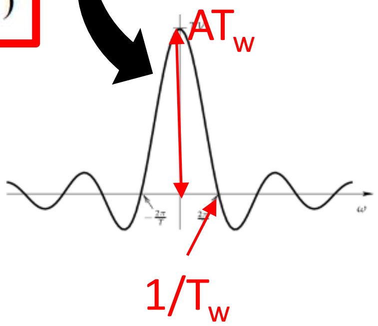




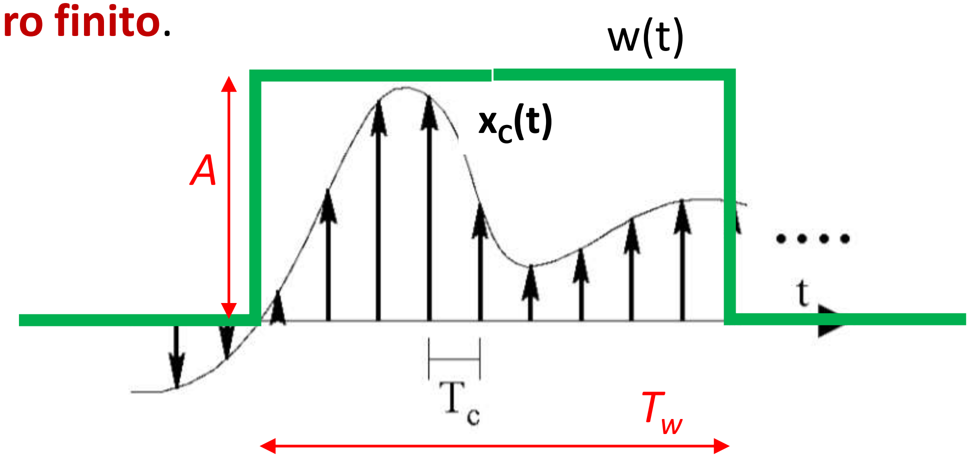
$$s(t)\cdot c(t) \Leftrightarrow S(f) * C(f)$$



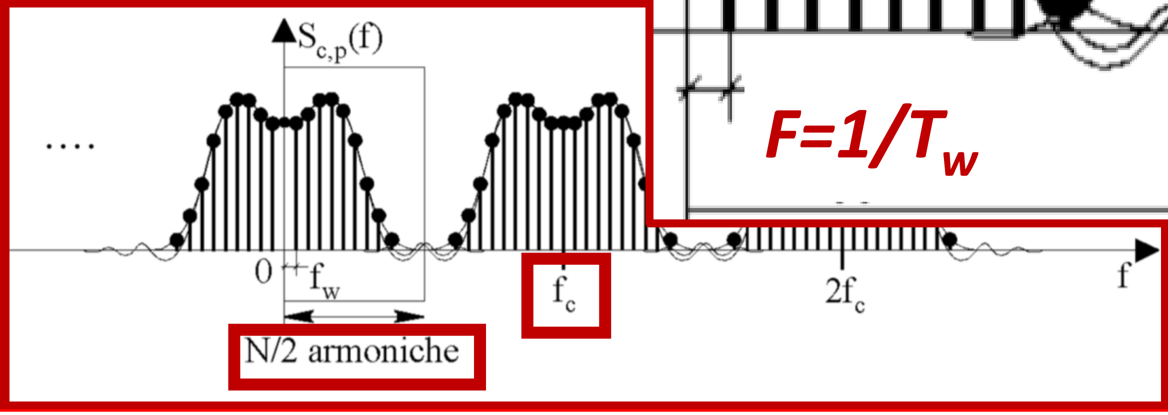
la sequenza dei campioni avrà necessariamente un inizio e una fine, e pertanto il **numero dei campioni a disposizione sarà in numero finito**.

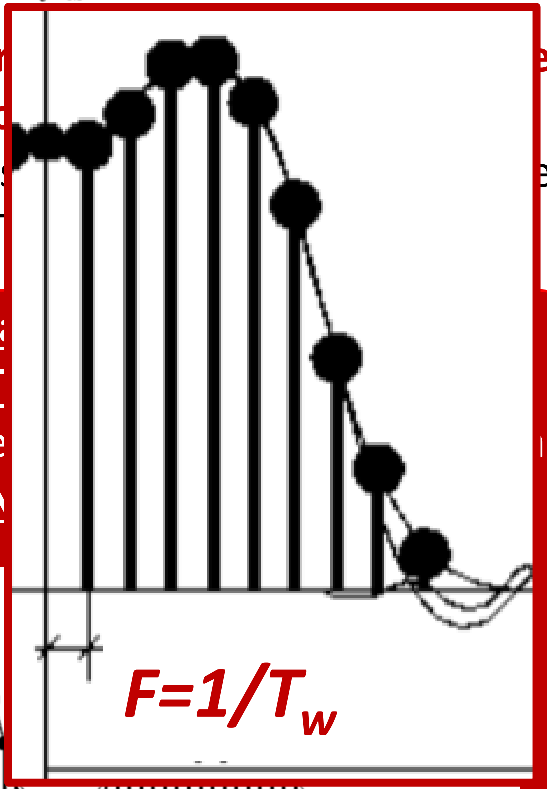


Lo spettr
troncato
numeri)
tra DTFT



Otteniamo cosi la trasforma
(Discrete Fourier Transform, DF
strumento che consente di valutare … le
intervallo **mediante un numero N**





segnale di durata limitata

=

porzione del segnale generico s(t), prelevata attraverso una opportuna finestra temporale w(t), detta anche finestra di **troncamento** o di **osservazione window**.

Trasformata di Fourier finita (DFT, discrete Fourier transform)

DFT

$$X_{DFT}(kF) = \frac{1}{N} \sum_{\boxed{n=n_0}}^{\boxed{n_0+N-1}} x(nT_S) e^{-j2\pi \frac{kn}{N}}$$

dove $F = 1/NT_S$.

$$X_{DFT}(\boxed{kF}) = \frac{1}{NT_S} \boxed{\tilde{X}_W(f)}\Big|_{f=kF} = \frac{1}{NT_S} \sum_{-\infty}^{+\infty} T_S \cdot x_W(nT_S) e^{-j2\pi kFnT_S}$$

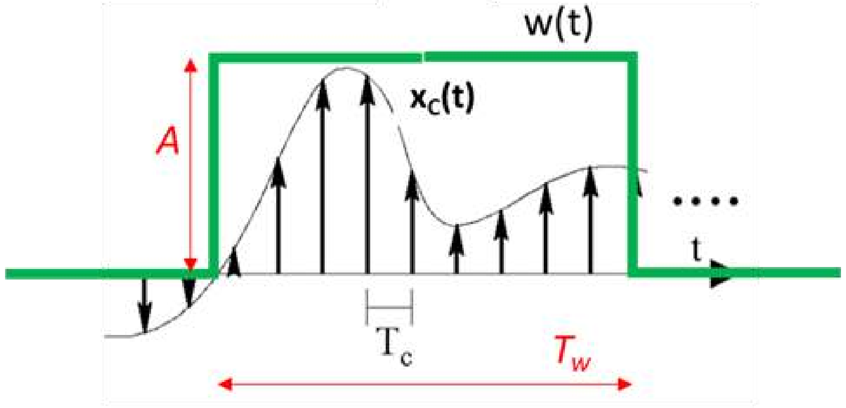
con:

$$x_W(nT_S) = \begin{cases} x(nT_S) & \text{per } n_0 \le n \le n_0 + N - 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

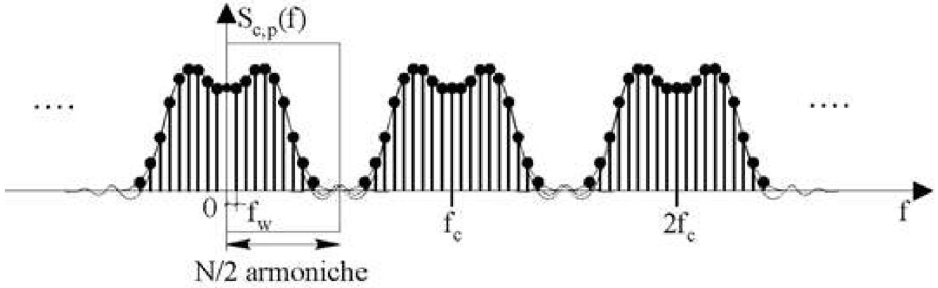
DTFT

$$\tilde{X}(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_S \cdot x(nT_S) e^{-j2\pi fnT_S}$$

Caratteristiche della DFT:



- ✓ ***Implementabile tramite algoritmi di calcolo (spesso nella versione semplificata FFT)***
- ✓ **E' una funzione complessa** della variabile intera **k**.
- ✓ E' periodica di periodo **fc** (N armoniche)
- ✓ ***solo le prime N/2 sono significative e portano informazione*** *(le successive N/2 risultano speculari rispetto alla frequenza di folding $f_c/2$ e coniugate)*



- ✓ *L'asse delle frequenze è quantizzato con un passo di quantizzazione (o granularità in frequenza) pari a F=1/NTs=1/Tw* **→ *N.B. Granularità inversamente proporzionale alla finestra di osservazione***

DFT e tempo di osservazione del segnale

La scelta del tempo di osservazione Tw influenza **la 'densità' dello spettro e la granularità in frequenza**.

<u>Un intervallo di osservazione troppo breve distanzia le varie armoniche, rendendo meno significativi i singoli valori.</u>

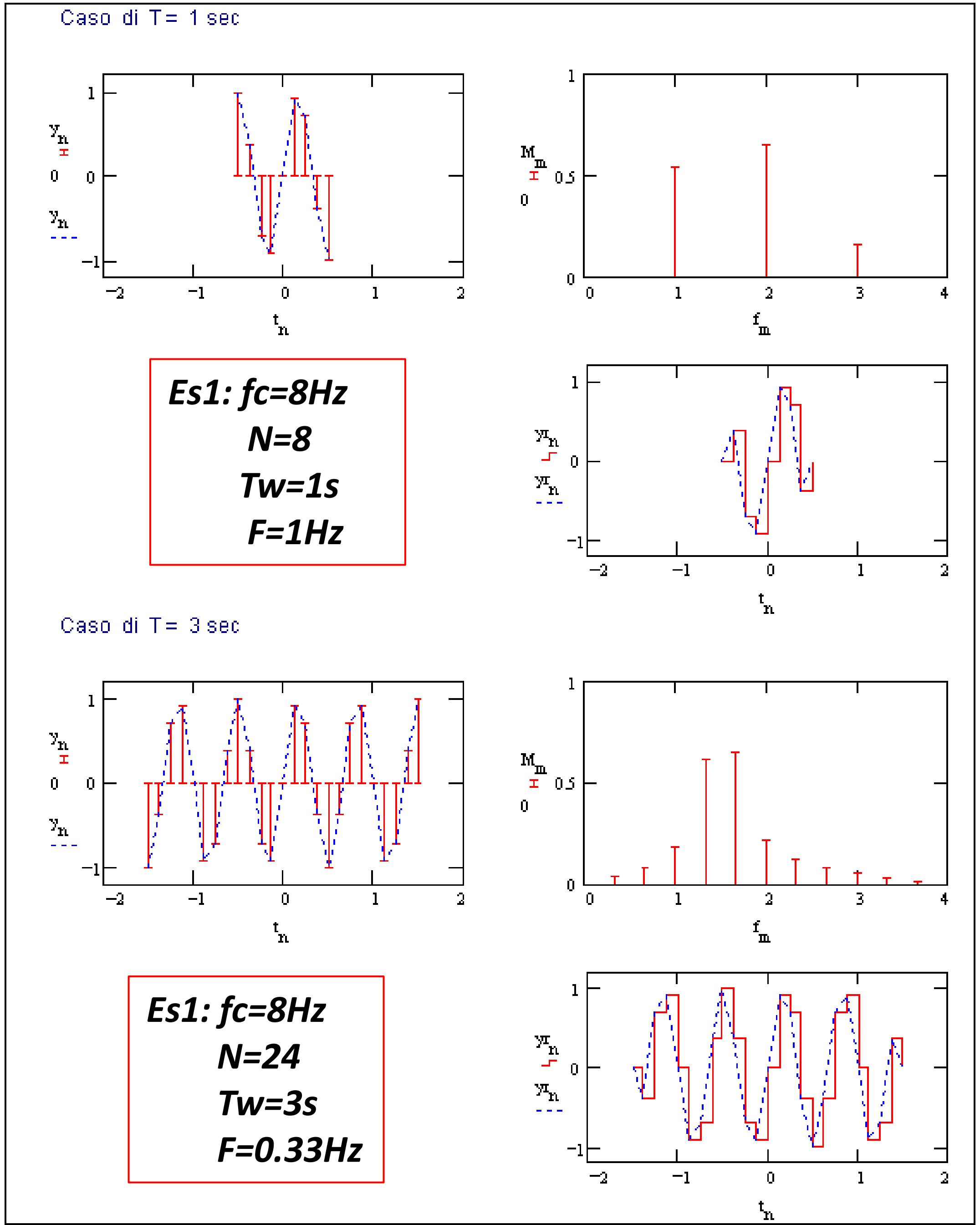
Da progetto:
fc: frequenza di campionamento (SHA,ADC)
Parametro variabile (compatibilmente con memoria):
Tw: finestra di osservazione

➡ $T_W = N/f_c$

N=numero di campioni

1. **fc** determina la **distanza dei campioni nel tempo** e il **passo di ripetizione dello spettro**, con pericoli di sovrapposizione (cioè di aliasing) dello spettro base con quelli replicati. ➡ ***'densità' nel tempo.***

2. La scelta di **Tw** (dato un fc fisso) influenza il numero di armoniche in banda base e essendo appunto fc fisso a numero maggiore di armoniche corrisponderà una minore distanza tra le stesse ***<u>(F=1/Tw, granularità)</u>*** ➡ **'densità' in frequenza**



Sintesi considerazioni granularità DFT con T_w definito e periodicità

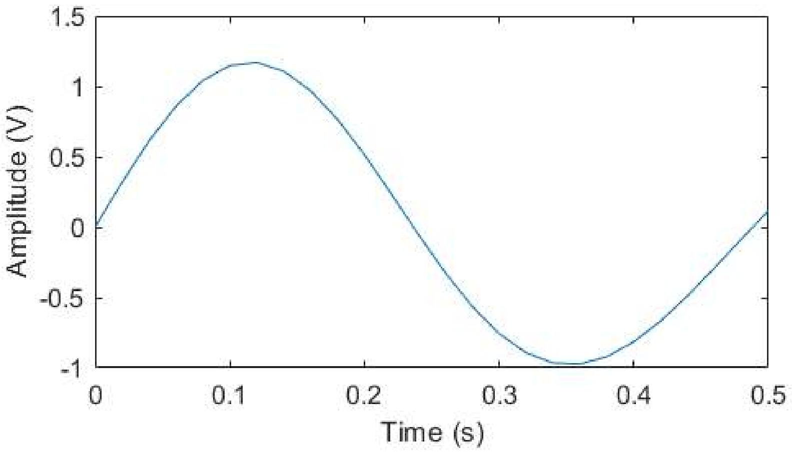
Segnale composto

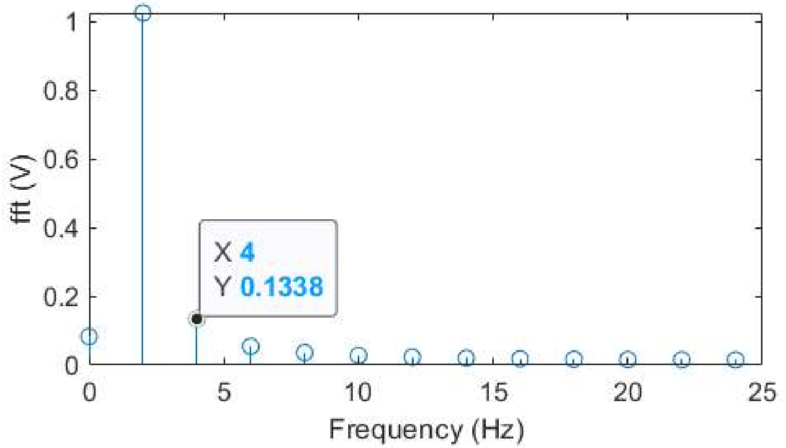
f1=2 Hz
A1=1 V

f2=2.8 Hz
A2=0.2 V

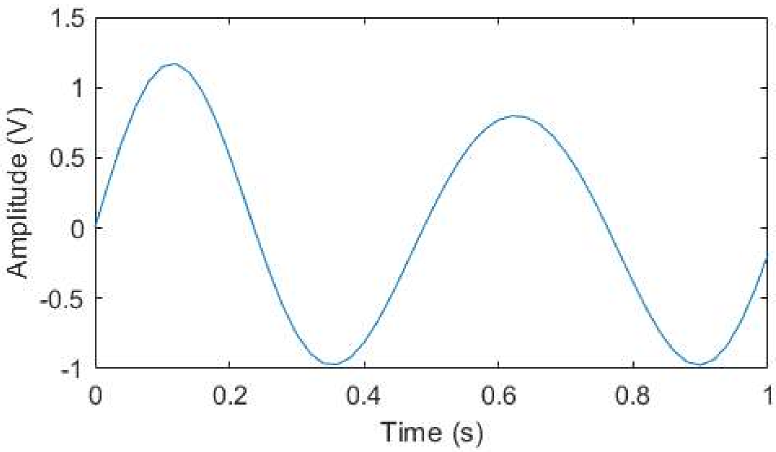
```
x1=A1*sin(2*pi*f1*t)+A2*sin(2*pi*f2*t);
fs=50; %Frequenza di campionamento
```

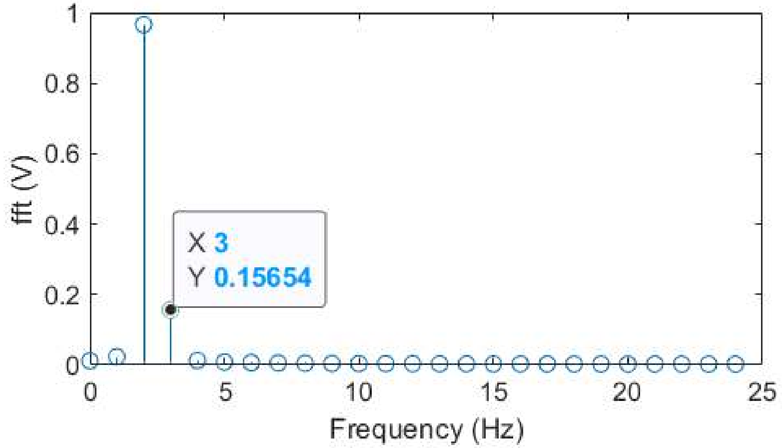
1 periodo per f1
1.4 periodi per f2 **F=2Hz**



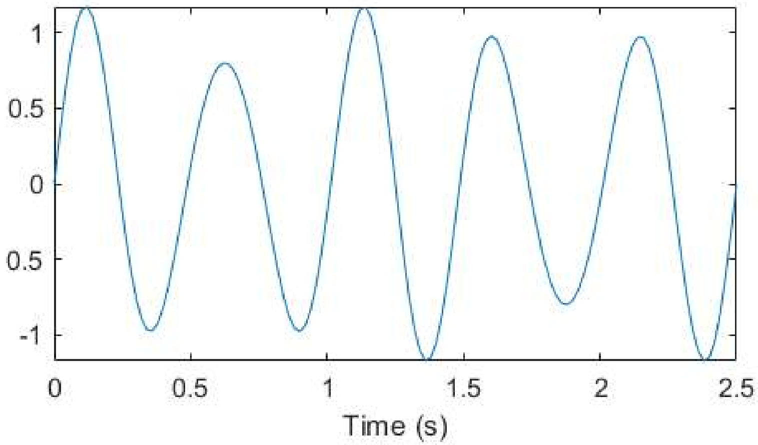


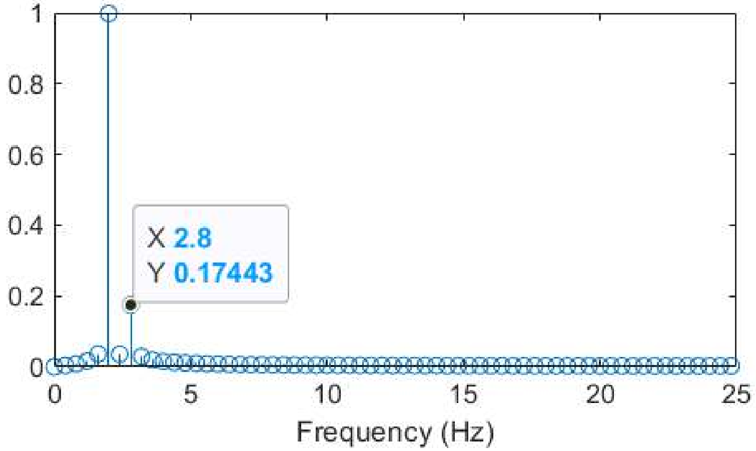
2 periodi per f1
2.8 periodi per f2 **F=1Hz**





5 periodi per f1
7.1 periodi per f2 **F=0.4Hz**





Outline

- Analisi spettrale: generalità
- Trasformata di Fourier Finita (DFT)
- Specifiche e parametri caratteristici
- Dispersione spettrale
- Finestre per analisi spettrale

QUIZ

Specifiche e parametri caratteristici

La definizione delle **SPECIFICHE DI UN ANALIZZATORE DI SPETTRO** fa riferimento ai gruppi di requisiti richiesti e introduce una varietà di ***parametri***, che possono avere ***diversa rilevanza a seconda dell'applicazione*** in cui si impiega l'analisi spettrale.

Specifiche in FREQUENZA

RANGE DI FREQUENZA UTILE.
Specifica che definisce il **range di frequenze** che possono essere correttamente analizzate dallo strumento. Fondamentale per capire se lo strumento è adeguato all'applicazione pensata. Dipende dalla struttura dei circuiti e dai parametri di campionamento.

RISOLUZIONE DI FREQUENZA (RBW)
Specifica che quantifica la capacità dello strumento di **individuare le componenti** sinusoidali di un segnale.

Specifiche in AMPIEZZA

RANGE DINAMICO DI INGRESSO
Rapporto, espresso in dB, tra la massima e la minima ampiezza rilevabili contemporaneamente dallo strumento.

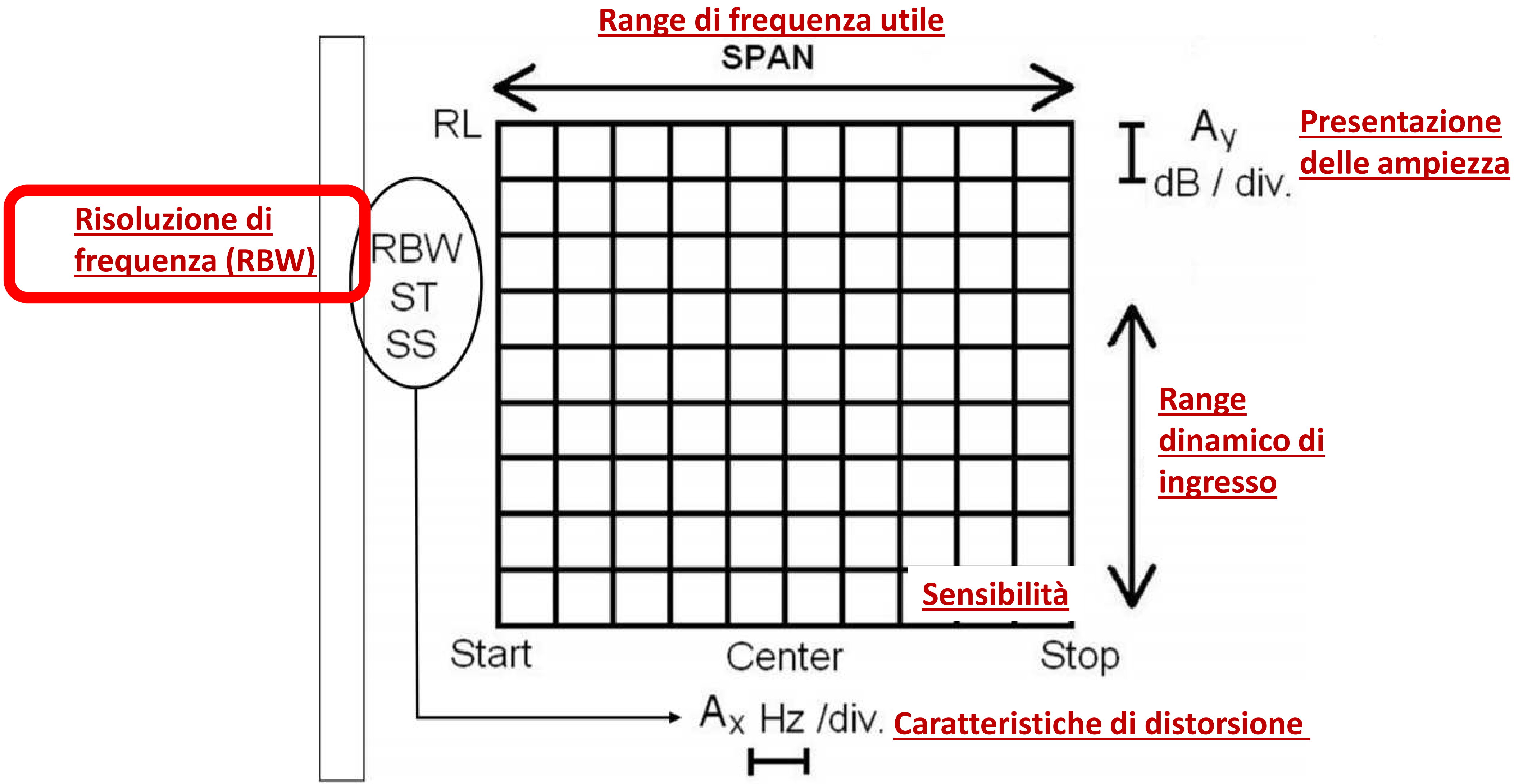
SENSIBILITÀ
E' una misura della capacità dello strumento di rilevare **piccoli segnali**, in massima parte limitata dal rumore generato dalla circuiteria interna dell'analizzatore.

PRESENTAZIONE DELLE AMPIEZZA
Possibile su **scale logaritmiche** (10 dB/div, 3 dB/div, 1 dB/div) e **lineari**

Specifiche di LINEARITA'

PARAMETRI DI DISTORSIONE (spurious-free dynamic range, total harmonic distortion e SINAD)
Sono indici dell'**alterazione introdotta dallo strumento** sullo spettro del segnale sotto esame a causa delle non linearità dei circuiti che il segnale attraversa. (La risposta in frequenza deve essere possibilmente "piatta", indipendente dalla frequenza. Stabilità di frequenza deve essere ottenuta con oscillatori locali di buona qualità o sintetizzatori).

Specifiche e parametri caratteristici



10 DIV orizzontali
10 DIV verticali

ascisse: FREQUENZA [Hz]
ordinate: POTENZA [dBm]

Risoluzione in frequenza

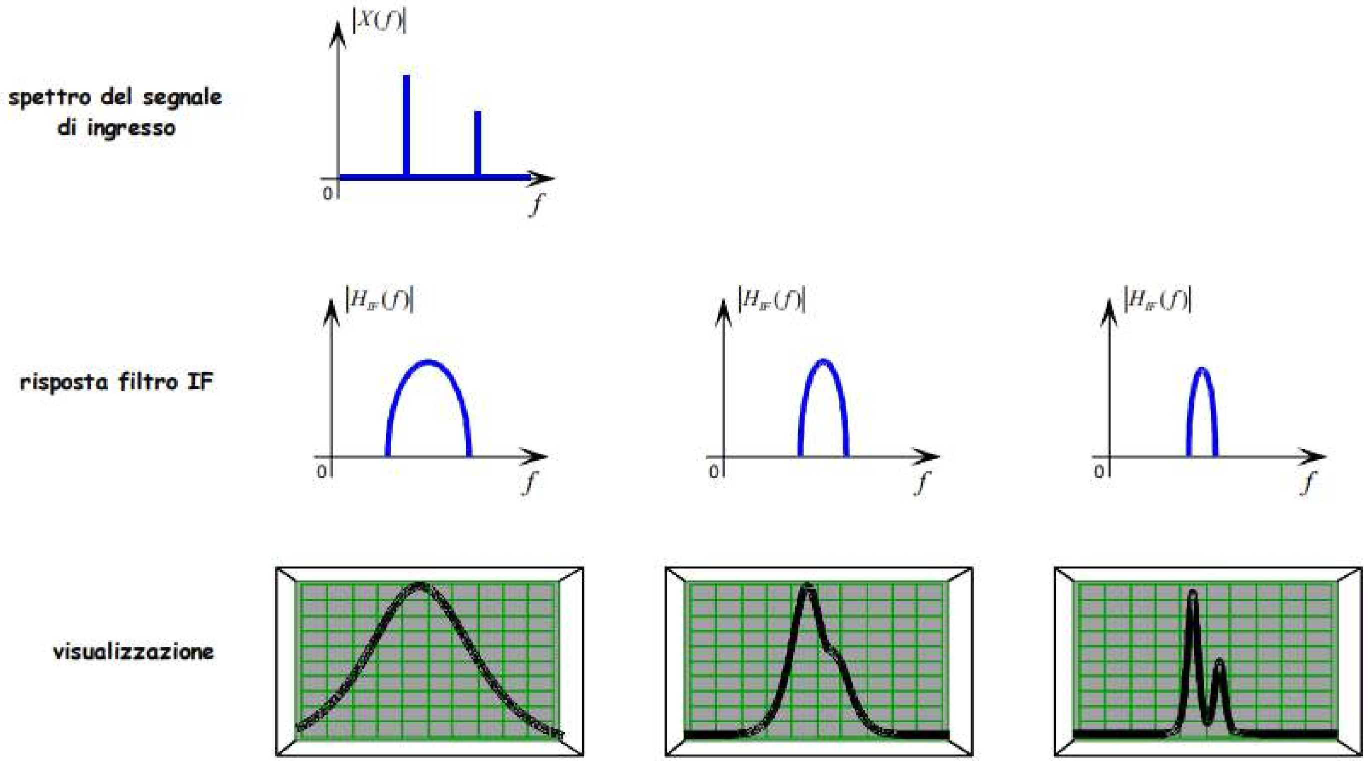
In generale la <u>risoluzione di uno strumento di misura</u>:

«la minima variazione della quantità misurata che lo strumento stesso è in grado di rilevare»

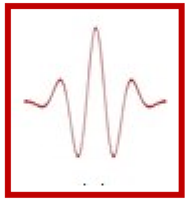
nel campo dell'analisi spettrale il termine ***<u>risoluzione in frequenza</u>*** ha un significato *sottilmente differente*. definita come:

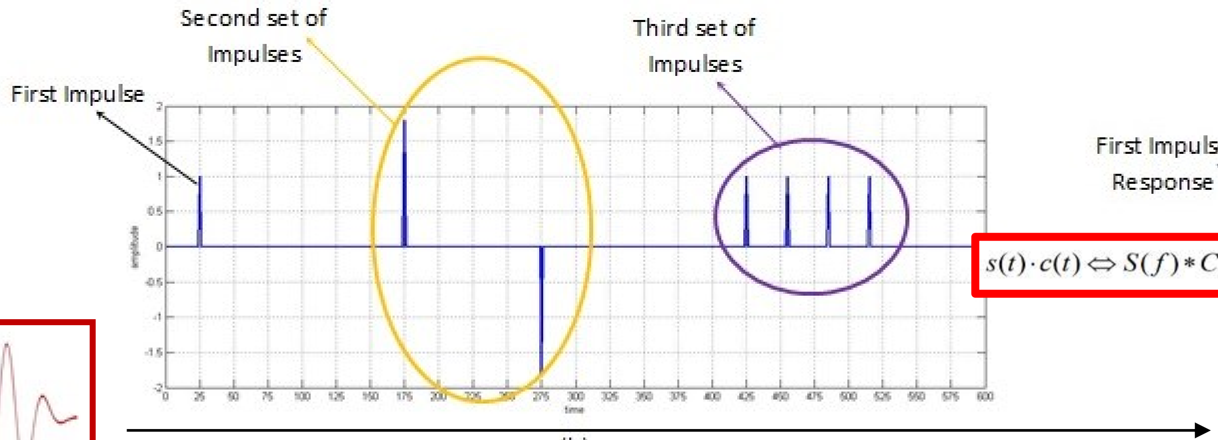
> *minima separazione in frequenza alla quale sono distinguibili due componenti spettrali della stessa ampiezza.*

Si tratta quindi di una specifica che **quantifica la capacità <u>dello strumento</u> di individuare le componenti sinusoidali di un segnale**.



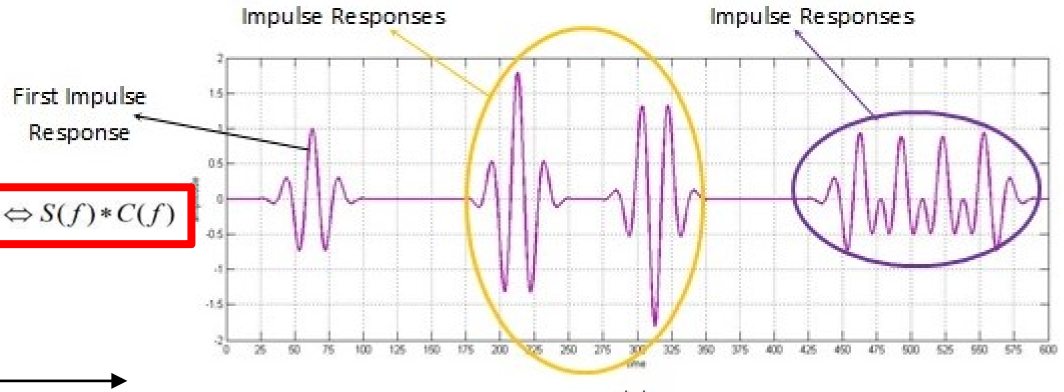
La funzione di risoluzione





(b)

$s(t)\cdot c(t) \Leftrightarrow S(f) * C(f)$



(c)

<u>Funzione di risoluzione W(f)</u>

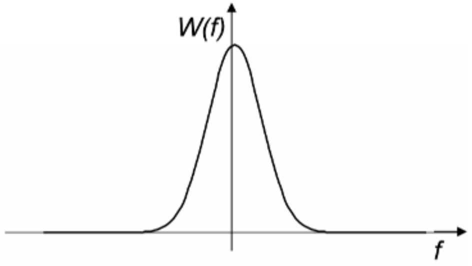
Una funzione con cui si può caratterizzare qualsiasi analizzatore di spettro e che ne determina completamente le ***<u>prestazioni</u>*** per quanto riguarda la risoluzione in frequenza.

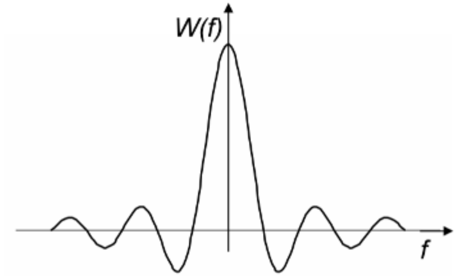
Spettro di un segnale finito sarà la convoluzione **G(f)**, nel dominio della frequenza, tra la **trasformata del segnale X(v)** e la **funzione di risoluzione** dello strumento, **W(f)**:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \cdot W(f-\nu) d\nu$$

$$G(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{A_k} \cdot W(f - \boxed{f_k})$$

Con A_k ed f_k ampiezze e frequenze delle componenti del segnale.



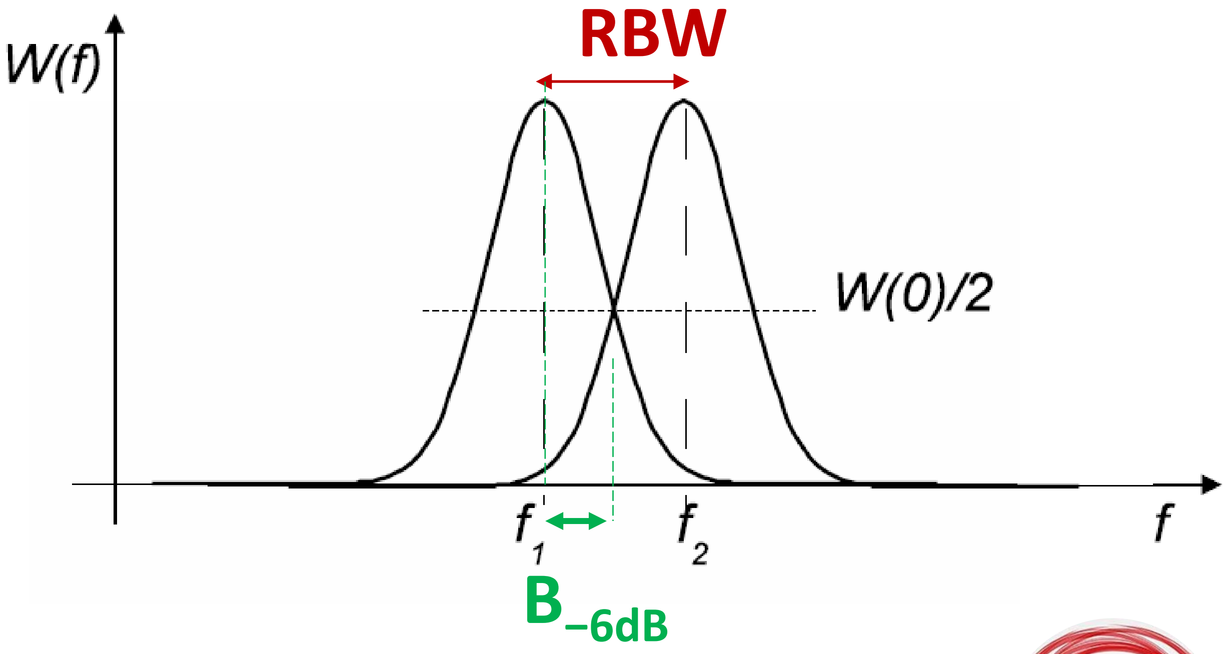


L'andamento di W(f)

- è di solito **simmetrico rispetto al punto f = 0**
- simile a uno tra quelli rappresentati nei grafici accanto a seconda della forma della finestra per cui si moltiplica il segnale nel tempo

Banda di risoluzione (RBW)

Il parametro che esprime un'indicazione quantitativa della risoluzione prende il nome di **Banda di risoluzione (RBW),** ed è data dall'intervallo di **frequenze Δf pari alla minima separazione rilevabile**.



Indicata con

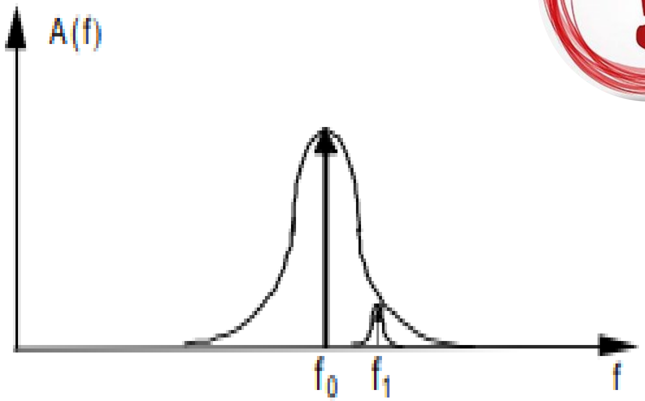
B_{-6dB} la banda a -6 dB della funzione di risoluzione

cioè quel valore di frequenza alla quale |W(f)| è pari a |W(0)|/2 (ossia, l'attenuazione introdotta è pari a 6 dB)

avremo quindi **$RBW = 2 \cdot B_{-6dB}$**

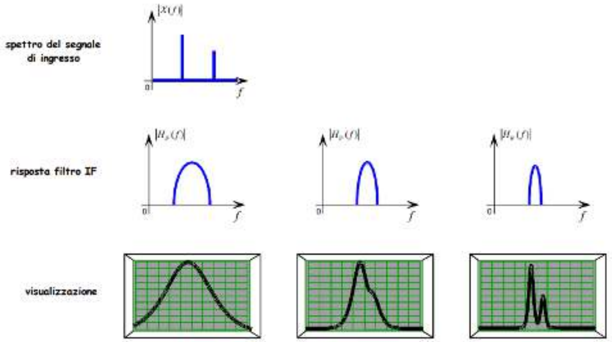
che definisce quel Δf che deve esistere tra due componenti spettrali del segnale per consentire di distinguerle.

Una distanza pari a RBW è ok solo se le componenti hanno **ampiezza simile....**
Ma se le componenti fossero di ampiezze ordini di grandezza diverse??



Risoluzione in frequenza e selettività

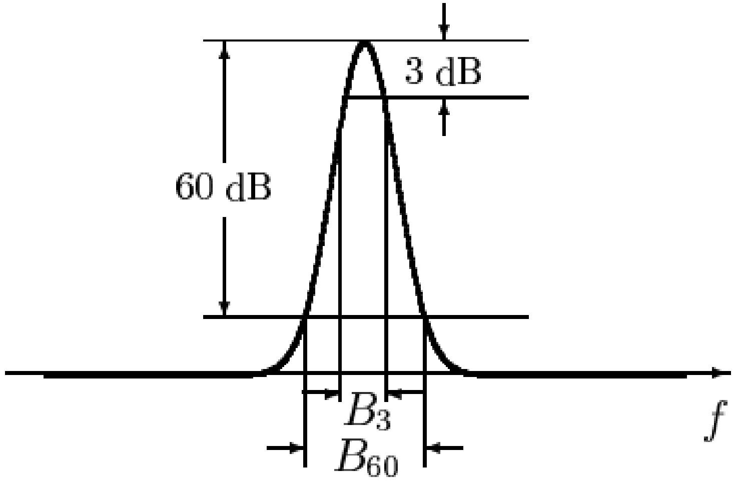
Una **valutazione della separazione necessaria** per misurare correttamente anche **segnali con ampiezze molto diverse tra loro** si può fare introducendo **accanto alla RBW** un altro parametro: la **SELETTIVITA'**



Definite le seguenti bande:

1) B_{-60dB}, **Banda a -60 dB** della funzione di risoluzione che indica la distanza a cui **<u>l'interferenza causata da una componente del segnale è pari allo 0.1% della sua ampiezza.</u>**

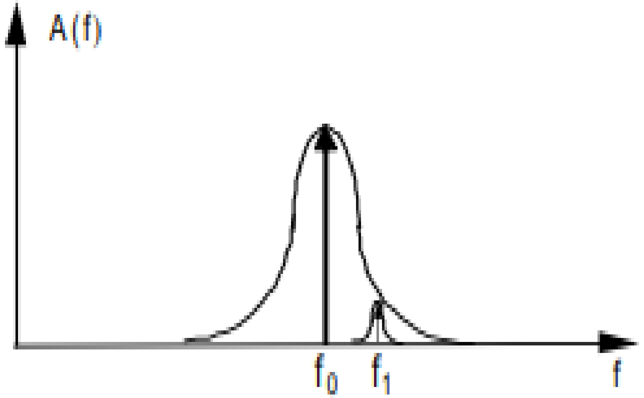
2) B_{-3dB} , **Banda a -3 dB** della funzione di risoluzione che indica la distanza a cui **<u>l'interferenza causata da una componente del segnale è pari al 70% della sua ampiezza</u>**.



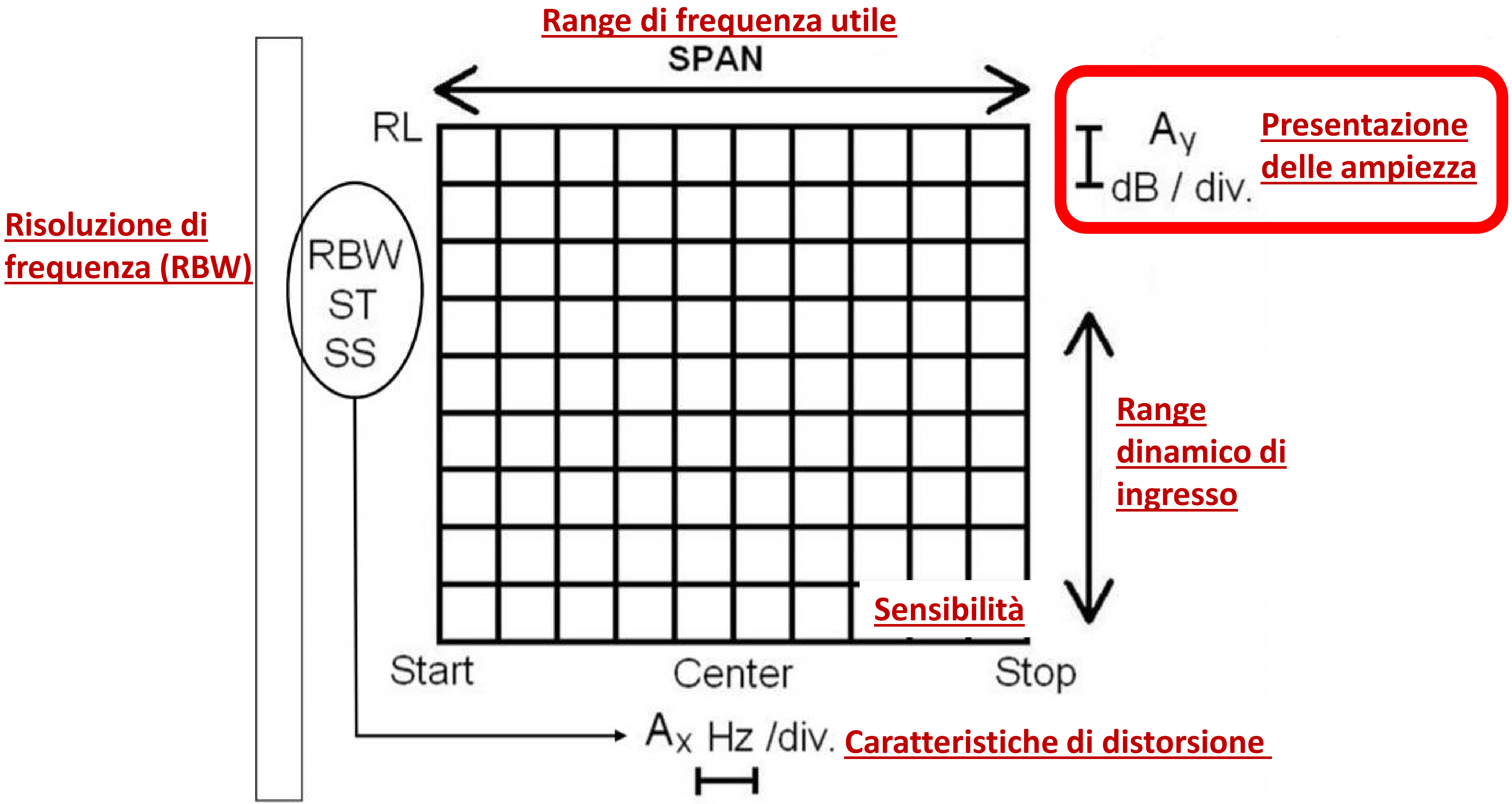
SELETTIVITA' :

$$S = \frac{B_{-60dB}}{B_{-3dB}}$$

- dipende esclusivamente dalle **caratteristiche delle funzione di risoluzione W(F)** e dalla ***stabilità in frequenza degli oscillatori locali utilizzati***.
- influenza la **capacità di risolvere e misurare** correttamente componenti di ampiezze diverse



Specifiche e parametri caratteristici



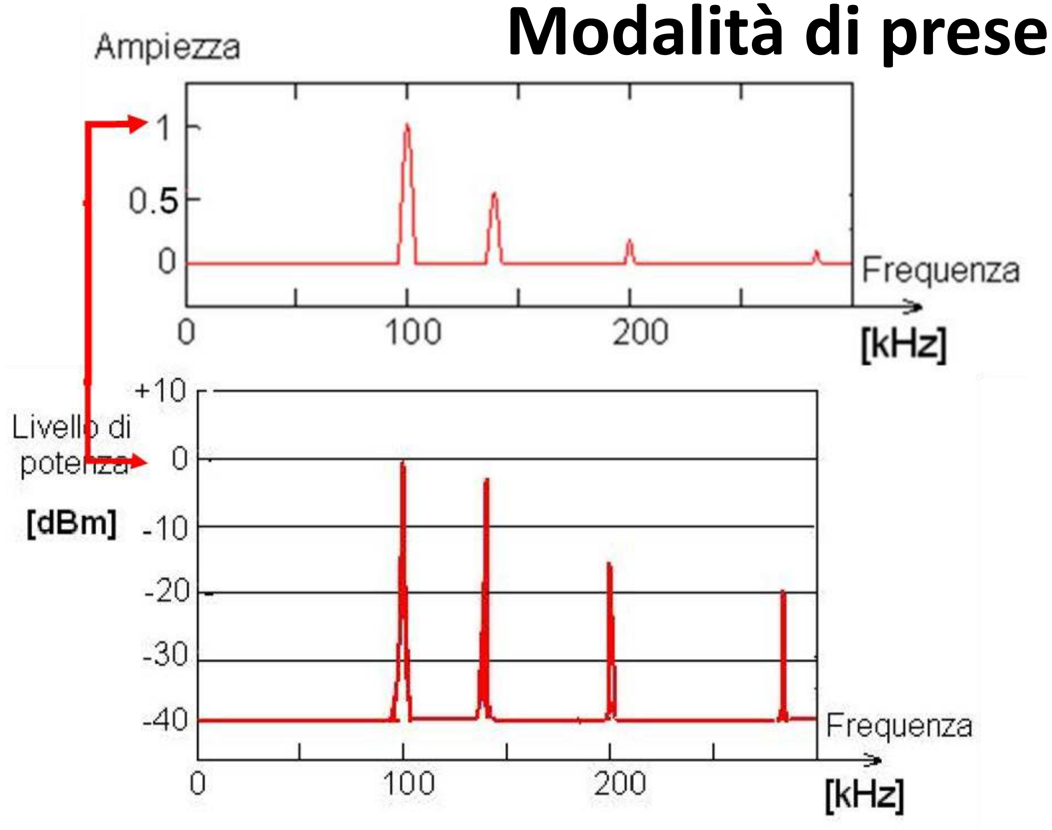
10 DIV orizzontali

10 DIV verticali

ascisse: FREQUENZA [Hz]

ordinate: POTENZA [dBm]

Modalità di presentazione delle ampiezze



- **<u>Scala lineare:</u>**

– valore **0** come **estremo inferiore**.

– Fattore di scala in **V/div** oppure **mV/div**

– Espressa come tensioni o potenze o come **valori efficaci**

$$|X(0)|, \quad 2 \cdot \frac{|X(f_1)|}{\sqrt{2}}, \quad \ldots, \quad 2 \cdot \frac{|X(f_k)|}{\sqrt{2}}, \ldots,$$

- **<u>Scala logaritmica:</u>**

– log(0)= -∞!!!

– Si definisce il valore massimo, denominato **reference level**

– Fattore di scala verticale in **dB/div.**

- I valori in dB sono definiti attraverso un **rapporto di due quantità**

- Per esprimere correttamente un'unità di misura in una scala logaritmica è **necessario definirla anch'essa in rapporto ad una quantità di riferimento.**

- Per la **misura delle ampiezze** si usano i **dBV**:

  *dove V_X è il valore efficace di tensione misurato ed il valore di riferimento è quello di una tensione sinusoidale di **1 V efficace***

$$20\log_{10}\frac{V_x}{1\,[V_{RMS}]}$$

- Per la **misura delle potenze** si usano i **dBm**:

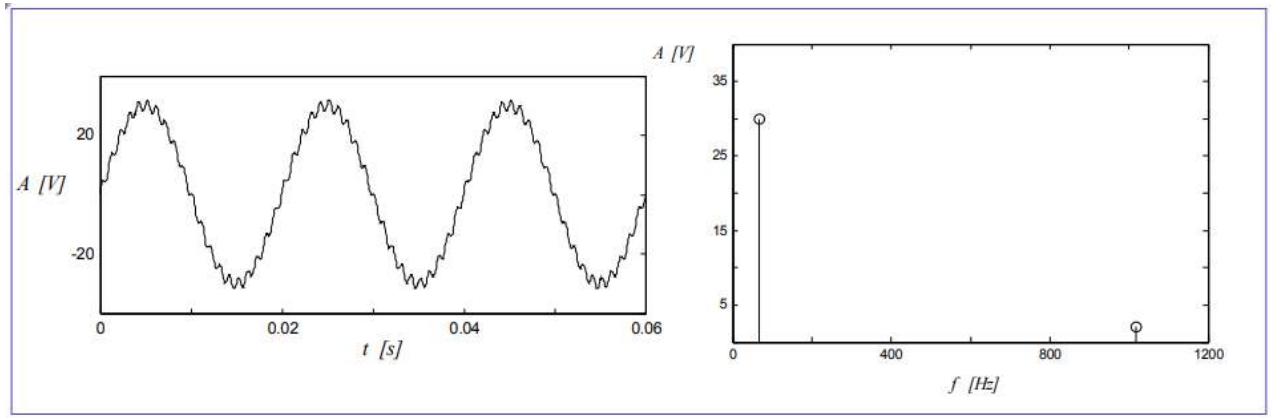
  *dove P_X è la potenza misurata ed il valore di riferimento è una potenza di **1 mW**.*

$$10\log_{10}\frac{P_x}{1\,[\mathrm{mW}]}$$

Modalità di presentazione in scala logaritmica

PERCHE' E' UTILE LA SCALA LOGARITMICA?

Spesso ci si trova ad ***analizzare componenti con elevata differenza di ampiezza***



- L'utilizzo della **scala logaritmica** aiuta a ottimizzare la visualizzazione di spettro con **elevato range dinamico**

- L'elevata dinamica rende **poco conveniente** utilizzare nella visualizzazione una scala delle ampiezze **lineare**.

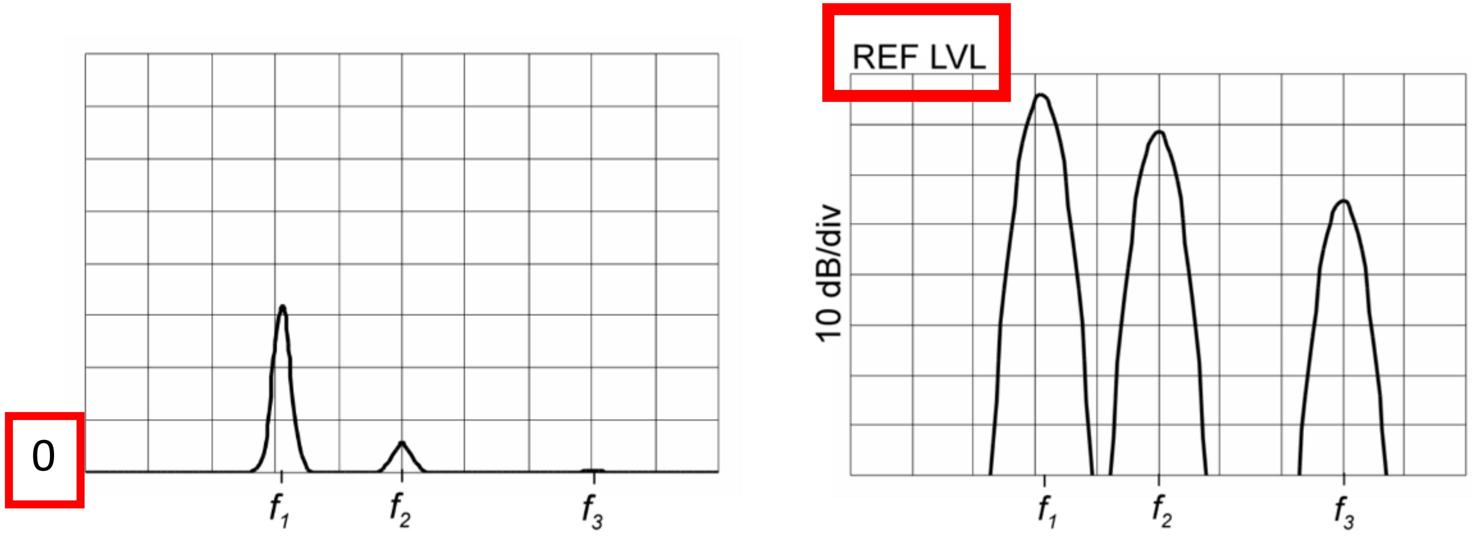
Esempio:

Tipico valore di dinamica: **80 dB**

Rapporto tra le ampiezze della più grande e della più piccola componente visualizzata è di $\mathbf{10^4}$

Rapporto tra le potenze della più grande e della più piccola componente visualizzata è $\mathbf{10^8}$

impossibile da visualizzare utilizzando una scala lineare!!!



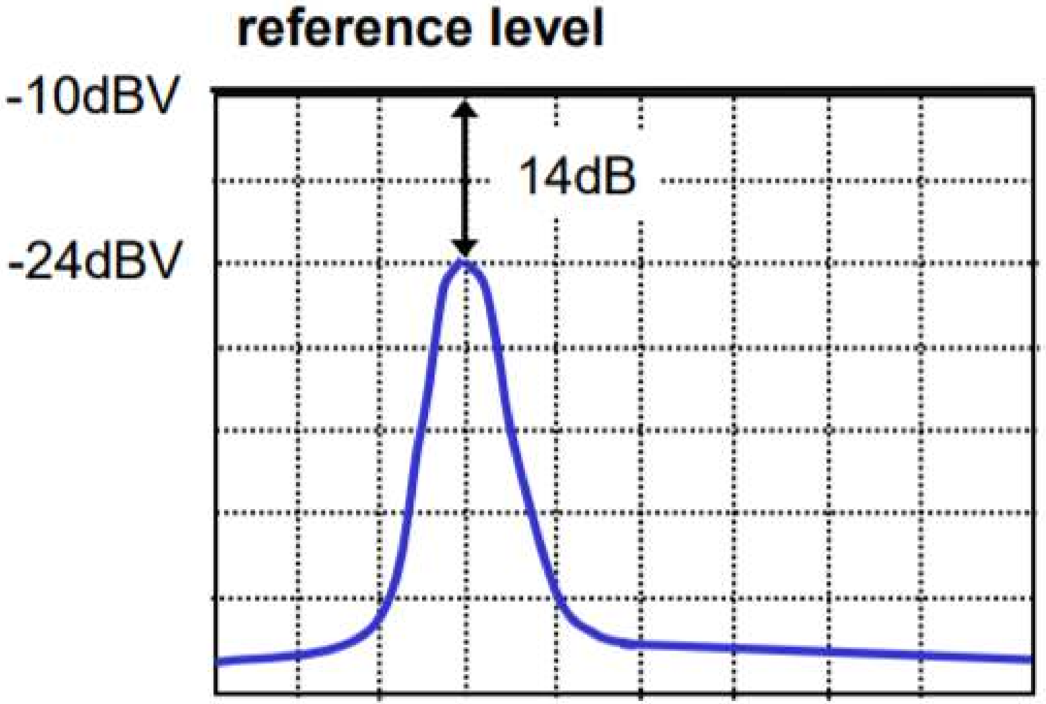
(a) Scala lineare

(b) Scala logaritmica

dB, dBV, dBm: esempio

- Livello di riferimento a -10dBV.
- La componente spettrale dà luogo ad un picco di 14dB inferiore.
- L'ampiezza della componente è pari quindi a -24dBV.
- Pari quindi a 63mV.

$$\boxed{\begin{array}{l} dBV = 20 * \log10(V/1V) \\ V = 10^{(dBV/20)} \end{array}}$$



RL = 316 mV
Vcomp = 63 mV
(RL-Vcomp) = 253 mV

Outline

- Analisi spettrale: generalità
- Trasformata di Fourier Finita (DFT)
- Specifiche e parametri caratteristici
- Dispersione spettrale
- Finestre per analisi spettrale

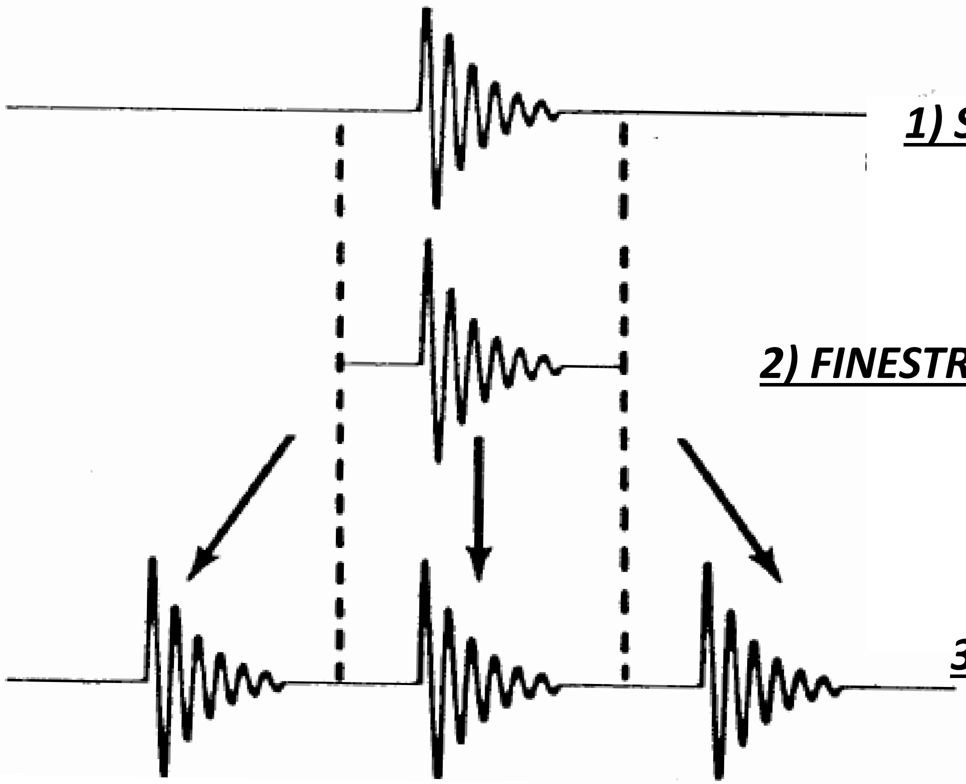
QUIZ

Acquisizione segnali reali: considerazioni su T_w e periodicità

N.B. Ricordare che l'algoritmo DFT opera su una porzione limitata del segnale di ingresso ed è basato sull'assunto che tale porzione sia ripetuta nel tempo, cioè non opera sul segnale originario.

Per SEGNALI TRANSITORI

nessun problema **se la finestra di analisi lo riesce a considerare per intero, senza che venga troncato agli estremi.**

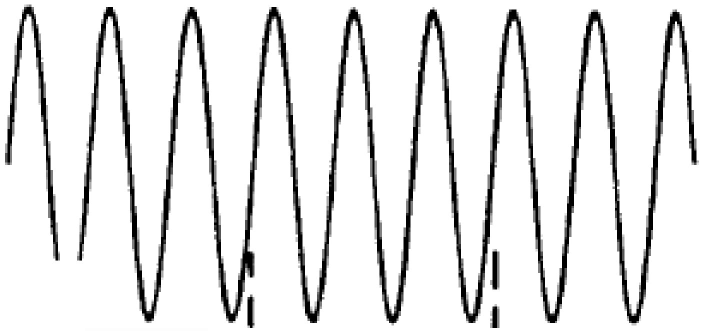


1) SEGNALE EFFETTIVO

2) FINESTRA DI OSSERVAZIONE

3) SEGNALE SU CUI OPERA LA DFT

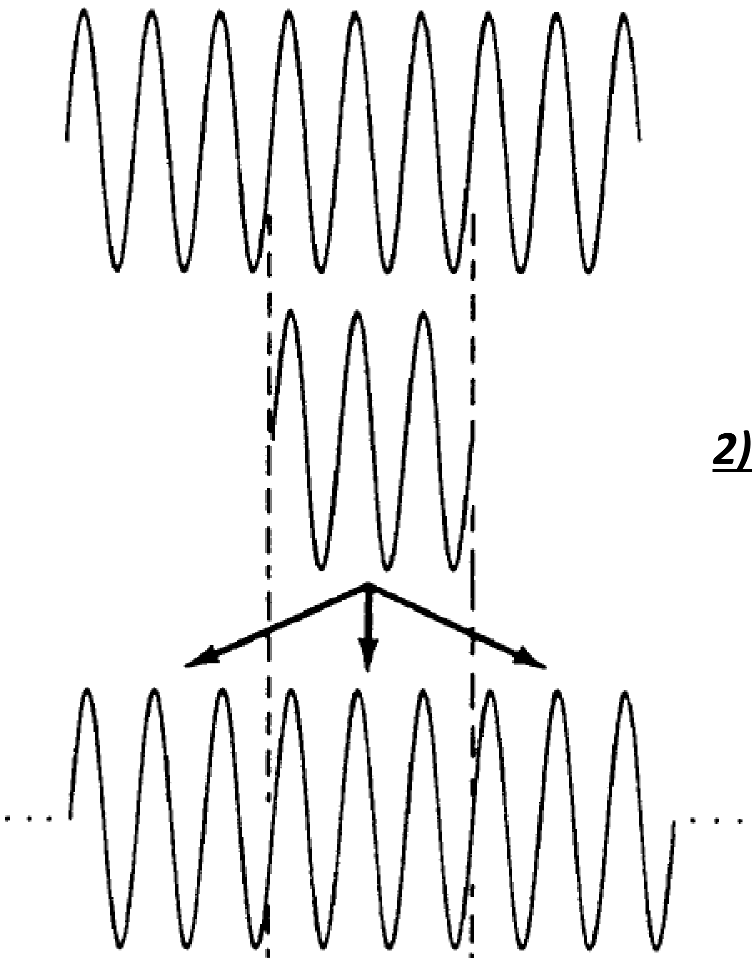
Per SEGNALI PERIODICI



Cosa cambia invece?

Acquisizione segnali reali: considerazioni su T_w e periodicità

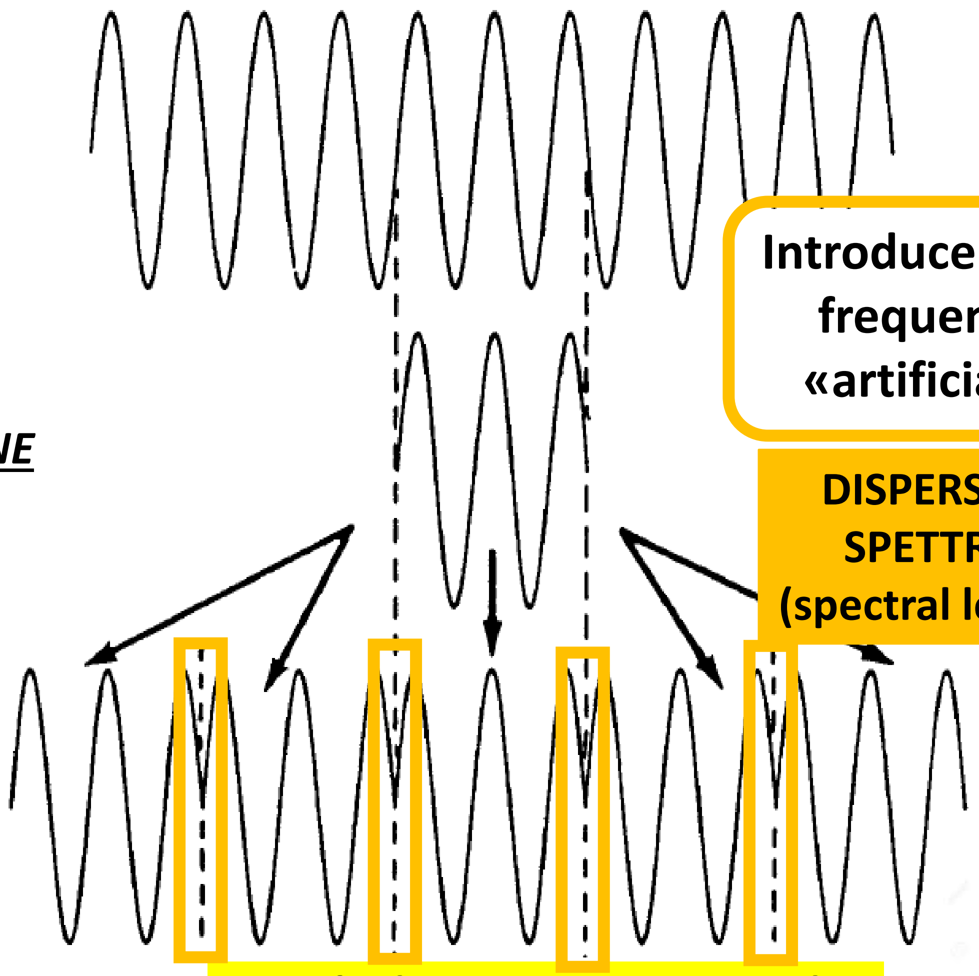
N.B. Ricordare che **l'algoritmo DFT opera su una porzione limitata del segnale di ingresso ed è basato sull'assunto che tale porzione sia ripetuta nel tempo**, cioè non opera sul segnale originario.



1) SEGNALE EFFETTIVO

2) FINESTRA DI OSSERVAZIONE

3) SEGNALE SU CUI OPERA LA DFT



Introduce delle frequenze «artificiali»

DISPERSIONE SPETTRALE (spectral leakage)

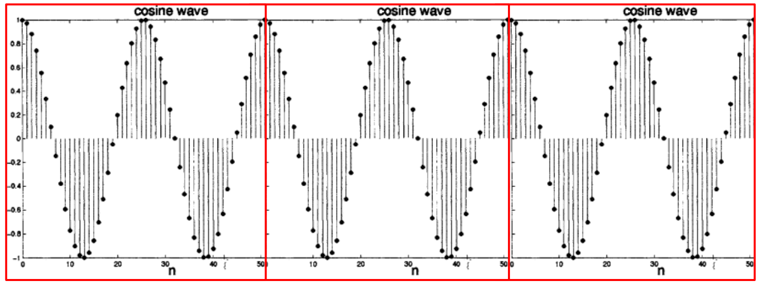
*Segnale di ingresso **periodico** nella finestra di osservazione*

*Segnale di ingresso **non periodico** nella finestra di osservazione*

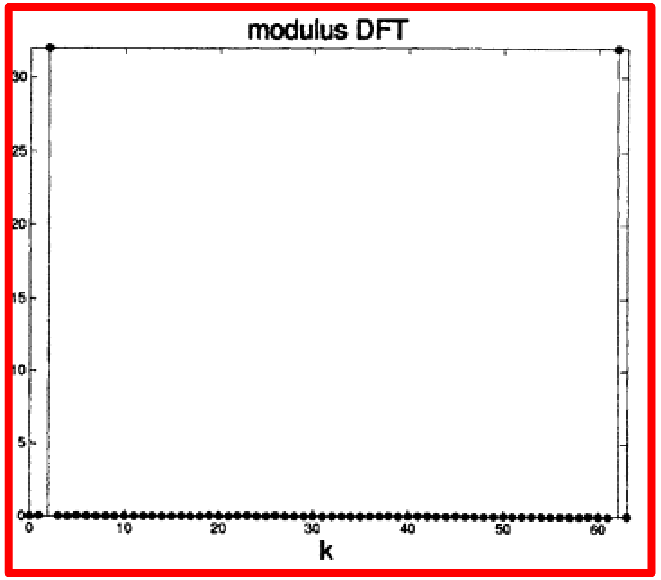
Acquisizione segnali finiti: dispersione spettrale

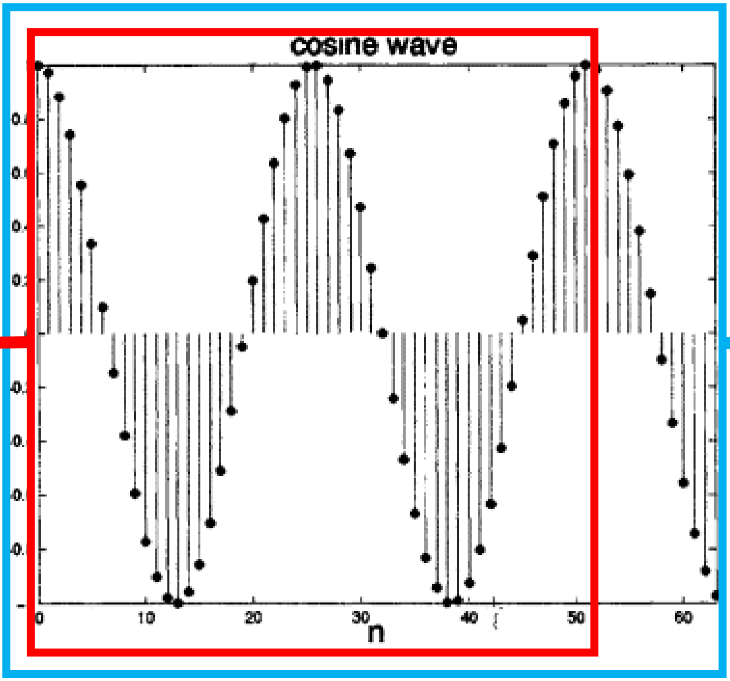
Caso 1: numero intero di periodi (k=2)

Segnale su cui calcolo la DFT...



Se vale l'uguaglianza $NT_S = kT$, con k intero, ricostruzione attendibile

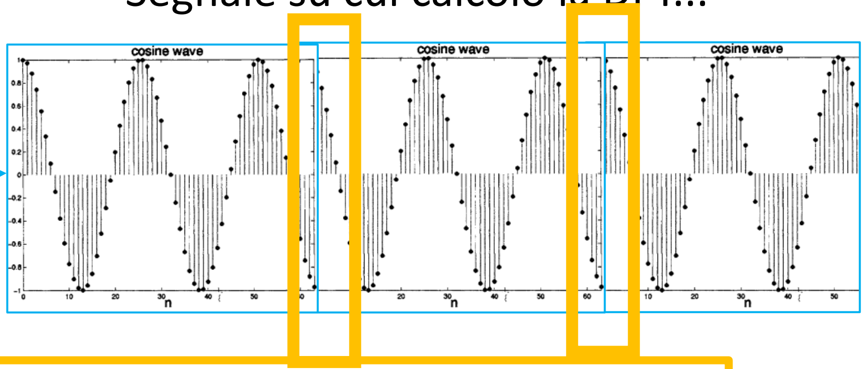




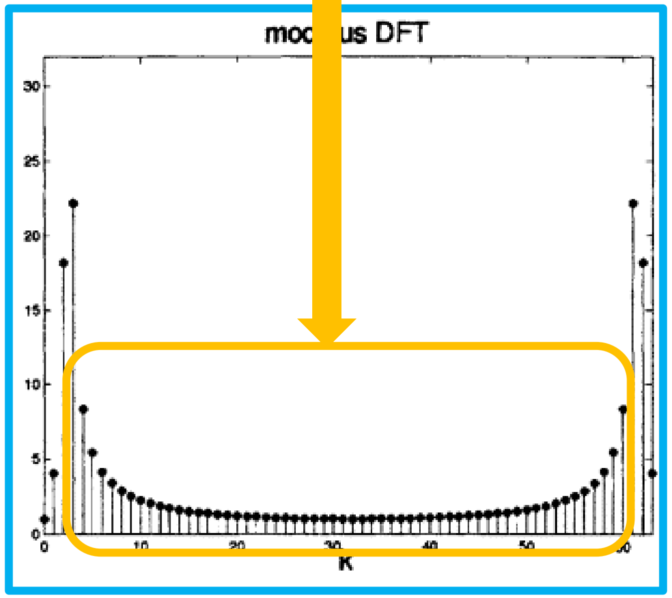
DISPERSIONE SPETTRALE: conseguenza (negativa) introdotta dalla **finestratura di qualsiasi segnale**, ossia dalla sua osservazione in un intervallo di tempo finito con numero non intero di periodi.

Caso 2: numero non intero di periodi (k=2.5)

Segnale su cui calcolo la DFT...



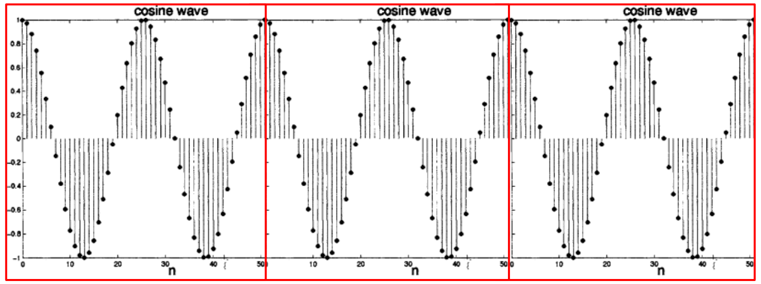
Se k non intero introdotte componenti spettrali aggiuntive, che rendono non attendibile poi la ricostruzione



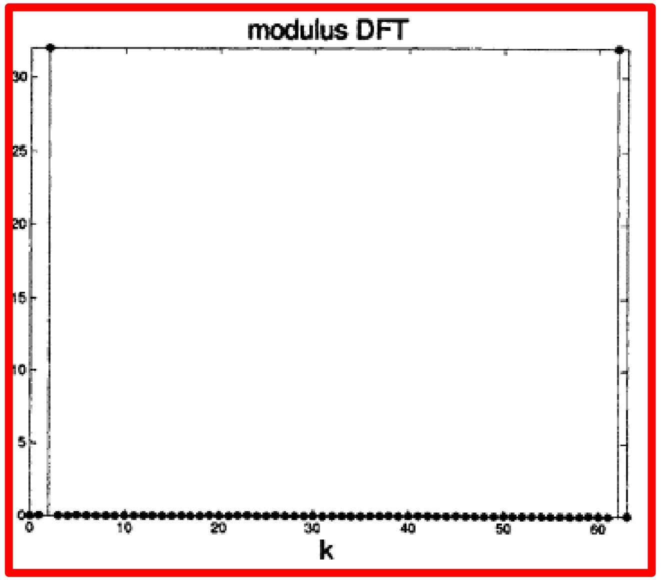
Acquisizione segnali finiti: dispersione spettrale

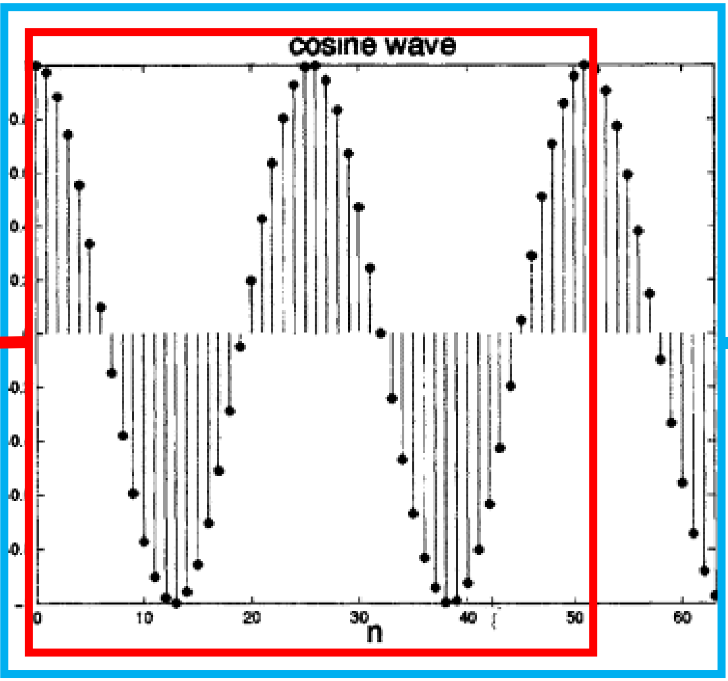
Caso 1: numero intero di periodi (k=2)

Segnale su cui calcolo la DFT...



Se vale l'uguaglianza $NT_S = kT$, con k intero, ricostruzione attendibile

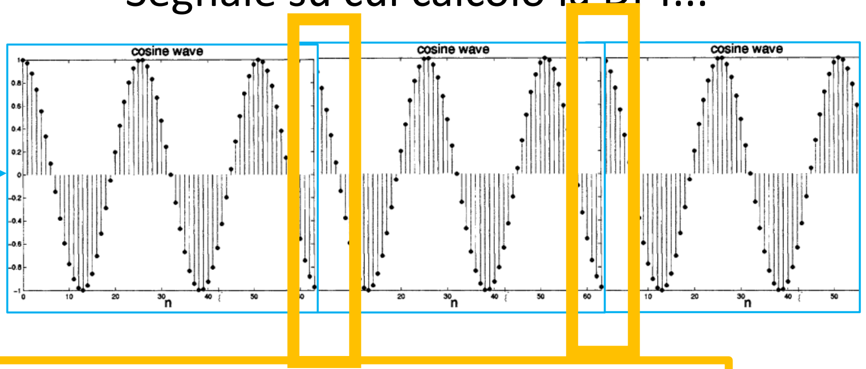




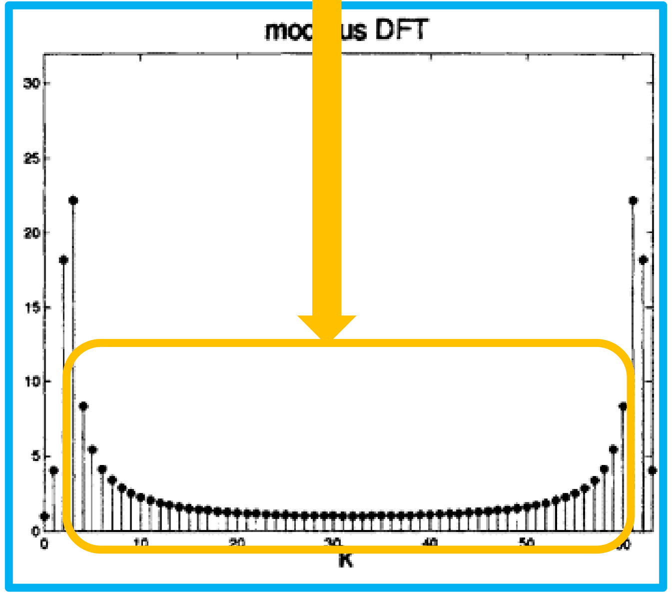
DISPERSIONE SPETTRALE:
conseguenza (negativa) introdotta dalla **finestratura di qualsiasi segnale**, ossia dalla sua osservazione in un intervallo di tempo finito con numero non intero di periodi.

Caso 2: numero non intero di periodi (k=2.5)

Segnale su cui calcolo la DFT...



Se k non intero introdotte componenti spettrali aggiuntive, che rendono non attendibile poi la ricostruzione



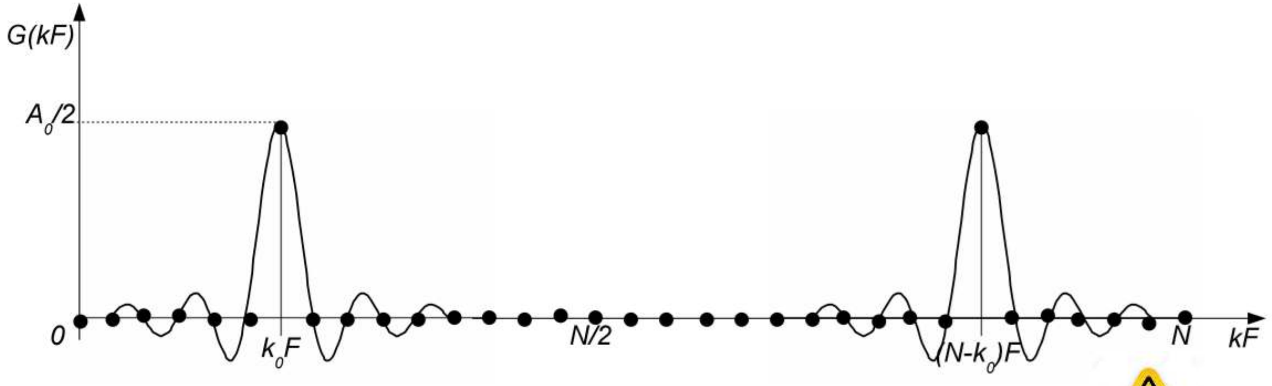
Dispersione spettrale: esempio con una sinusoide

$$X_{DFT}(kF) = \frac{A_0}{2j} e^{j\phi_0} \cdot \frac{\sin \pi \left(\frac{kF-f_0}{F}\right)}{\sin \frac{\pi}{N} \left(\frac{kF-f_0}{F}\right)} e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{kF-f_0}{F}\left(n_0+\frac{N-1}{2}\right)} - \frac{A_0}{2j} e^{-j\phi_0} \cdot \frac{\sin \pi \left(\frac{kF+f_0}{F}\right)}{\sin \frac{\pi}{N} \left(\frac{kF+f_0}{F}\right)} e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{kF+f_0}{F}\left(n_0+\frac{N-1}{2}\right)}$$

Soltanto **se l'intervallo di osservazione NT_S coincide esattamente con un numero intero di periodi della sinusoide, la sequenza nel tempo sarà periodica nell'intervallo di osservazione NT_S:**

$$F = 1/NT_S$$

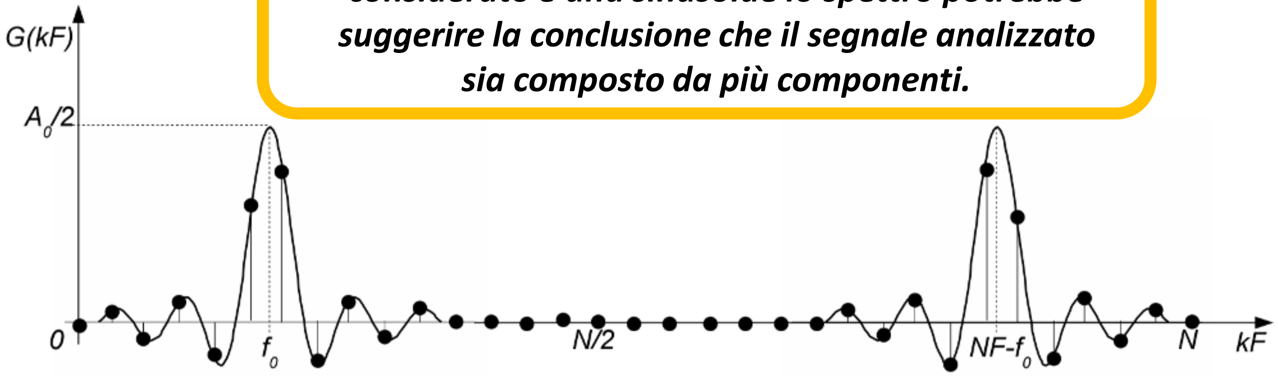
$$NT_S = k \cdot \frac{1}{f_0} \quad \text{ossia:} \quad \frac{f_0}{f_S} = \frac{k}{N}$$



CASO 1: ***Segnale di ingresso periodico nella finestra di osservazione***

<u>$f_0/f_S = k/N$</u>, ed **esiste *un valore d*i k per cui $f_0 = kF$.**
In questo caso **la DFT fornisce una stima spettrale corretta**: solo **<u>due dei valori calcolati sono diversi da zero e la loro ampiezza corrisponde esattamente a quella dei coefficienti di Fourier del segnale sinusoidale</u>**.

Se non fosse noto a priori che il segnale considerato è una sinusoide lo spettro potrebbe suggerire la conclusione che il segnale analizzato sia composto da più componenti.

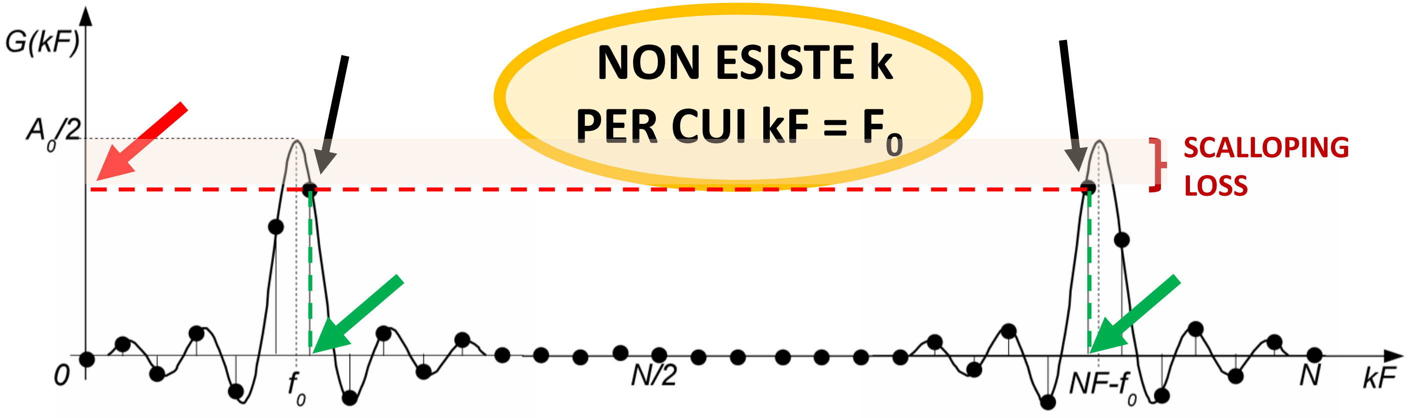


CASO 2: ***Segnale di ingresso non periodico nella finestra di osservazione***

<u>f_0 non è esprimibile come multiplo intero del passo di quantizzazione in frequenza F</u>,
non esiste alcun valore dell'indice k per cui risulti $f_0 = kF$, quindi i valori calcolati non forniscono una stima diretta dell'ampiezza $A_0/2$.

Dispersione spettrale: scostamento di frequenza e scalloping loss

CASO 2: ***Segnale di ingresso non periodico nella finestra di osservazione***



- L'ampiezza stimata risulta **inferiore a quella effettiva.**
- La **stima** che meglio approssima il **valore effettivo del coefficiente di Fourier** della sinusoide si ottiene considerando **l'indice $k = k_0$** per cui il **valore di $|X_{DFT}(kF)|$ è massimo**

<u>L'ampiezza stimata sarà:</u>

$$\hat{A}_0 = 2 \cdot \frac{|X_W(k_0F)|}{\boxed{|W(0)|}}$$

W è la funzione di risoluzione

<u>L'attenuazione assoluta o normalizzata sarà:</u>

$$\hat{A}_0 - A_0 = A_0 \left[\frac{|\tilde{W}(-\delta F)|}{|\tilde{W}(0)|} - 1 \right] \quad \text{oppure} \quad \frac{\hat{A}_0 - A_0}{A_0} = \left[\frac{|\tilde{W}(-\delta F)|}{|\tilde{W}(0)|} - 1 \right]$$

- A tale picco corrisponde la **frequenza k_0F più prossima a quella corretta, caratterizzata da uno scostamento che potrà essere espresso come normalizzato:**

$$\delta = \frac{f_0 - k_0F}{F}, \qquad \text{con:} \quad |\delta| \le \frac{1}{2}$$

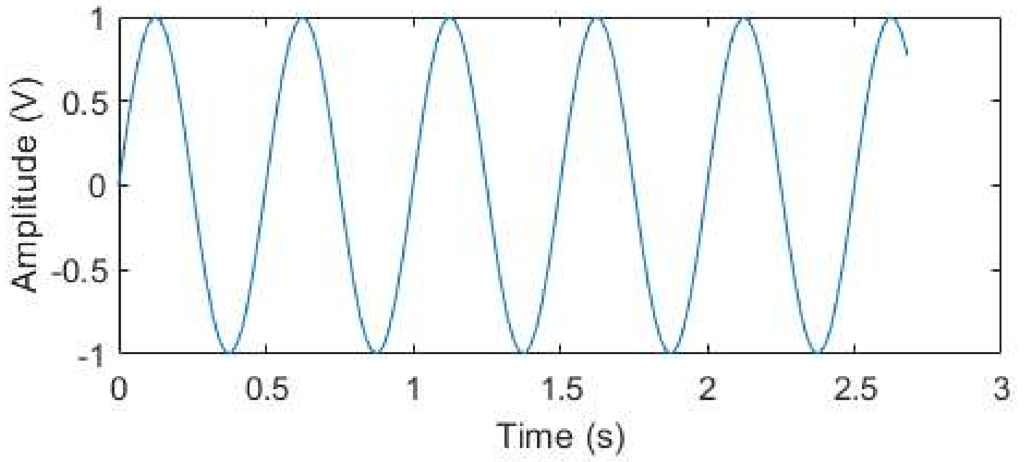
Nel peggiore dei casi risulta pari a metà del passo di quantizzazione, e cioè $\hat{f}_0 = k_0F \pm \frac{F}{2}$

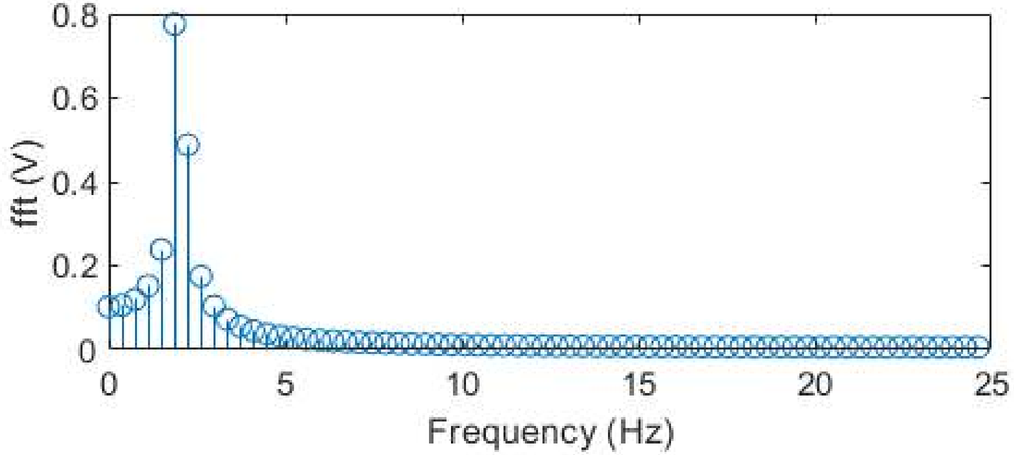
L' **<u>ATTENUAZIONE DI AMPIEZZA, o SCALLOPING LOSS</u>**, è il parametro caratteristico che esprime la differenza in termini di **ampiezza** tra $|X(k_0F)|$ e $|X(f_0)|$.
Tale differenza è **dipendente dallo scostamento della frequenza** k_0F rispetto a f_0.

Esempi dispersione spettrale

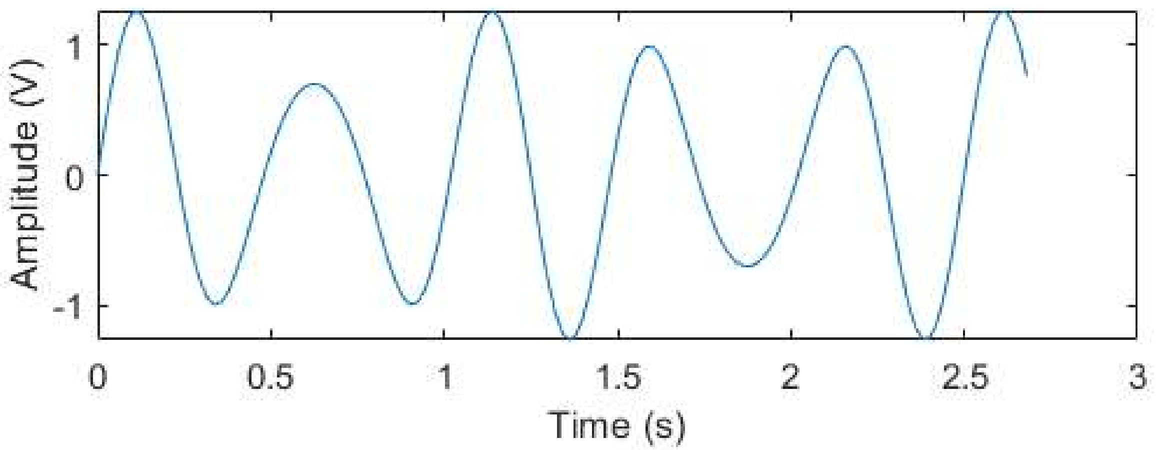
Numero non intero di periodi

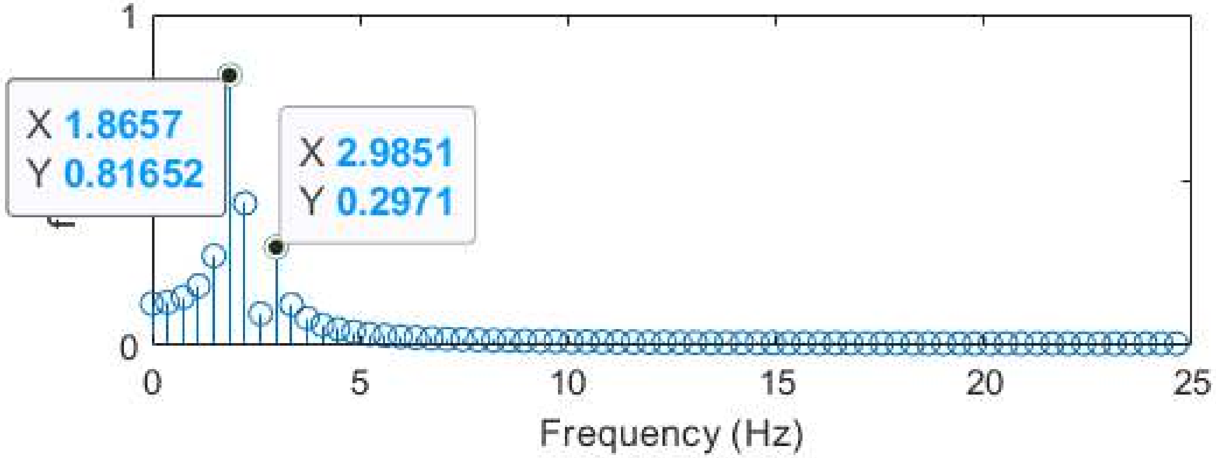
5,4 periodi per f1=2 Hz
Con A=1V **F=0.37Hz**





5,4 periodi per f1=2 Hz Con A1=1V
7,8 periodi per f1=2.8Hz Con A2=0.3 **F=0.37Hz**



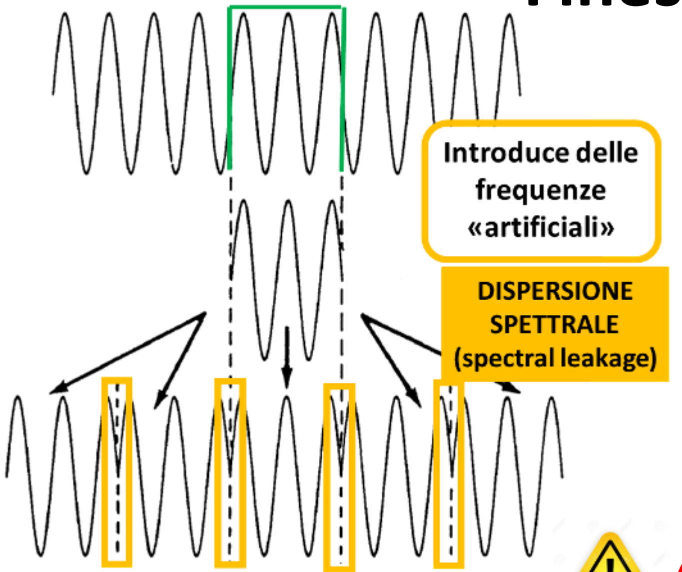


Outline

- Analisi spettrale: generalità
- Trasformata di Fourier Finita (DFT)
- Specifiche e parametri caratteristici
- Dispersione spettrale
- Finestre per analisi spettrale

QUIZ

Finestre per analisi spettrale: finestra rettangolare



Segnale di ingresso <u>non periodico</u> <u>nella finestra di osservazione</u>

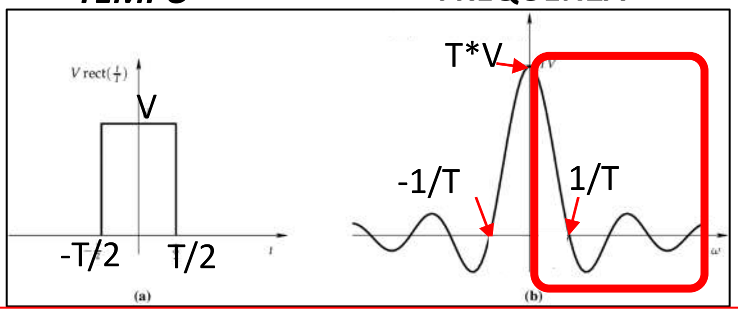
acquisizione finita equivalente a finestrare il segnale con una **<u>FINESTRA RETTANGOLARE O UNIFORME</u>**

$$w_R(nT_S) = \begin{cases} 1 & \text{per } n_0 \le n \le n_0 + N - 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

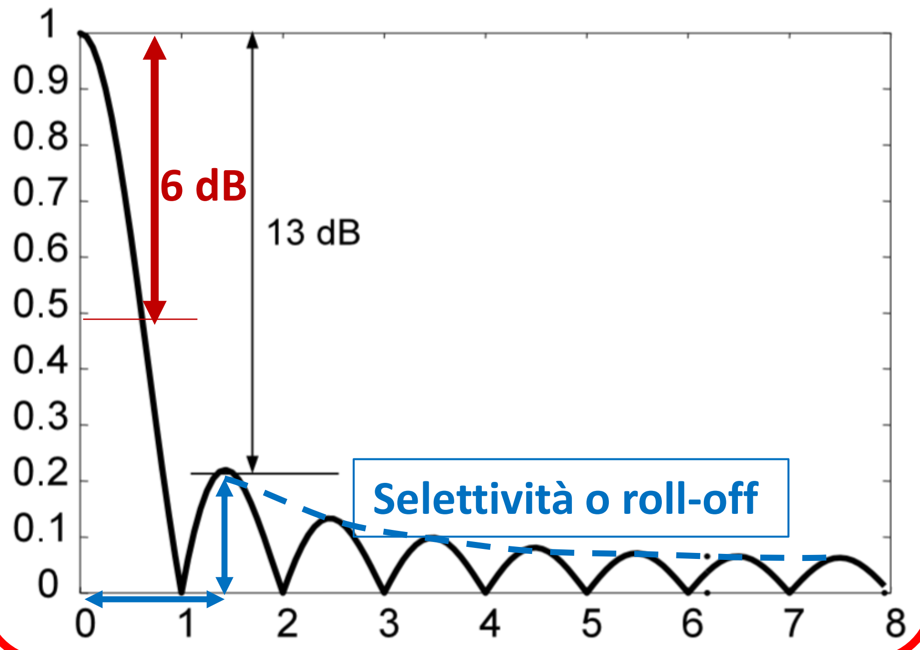
La cui DTFT è:

$$\tilde{W}_R(f) = T_S \frac{\sin \pi \left(\frac{f}{F}\right)}{\sin \frac{\pi}{N}\left(\frac{f}{F}\right)} e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{f}{F}\left(n_0 + \frac{N-1}{2}\right)}.$$

TEMPO *FREQUENZA*



POICHÈ L'INFORMAZIONE UTILE È CONTENUTA NELLE PRIME N/2 COMPONENTI POSSIAMO CONSIDERARE SOLO QUELLE



<u>PARAMETRI caratteristici in frequenza</u>:

- un ***lobo principale***, la cui **larghezza (ΔL) è <u>inversamente proporzionale alla durata della finestra nel tempo</u>**.
- più ***lobi laterali***, di ampiezza decrescente, la cui **larghezza è pari alla metà del lobo principale**.
- la ***banda di risoluzione,*** in questo caso riferita alla banda a **-6 dB** e spesso è espressa in forma normalizzata rispetto al **passo di quantizzazione in frequenza**:

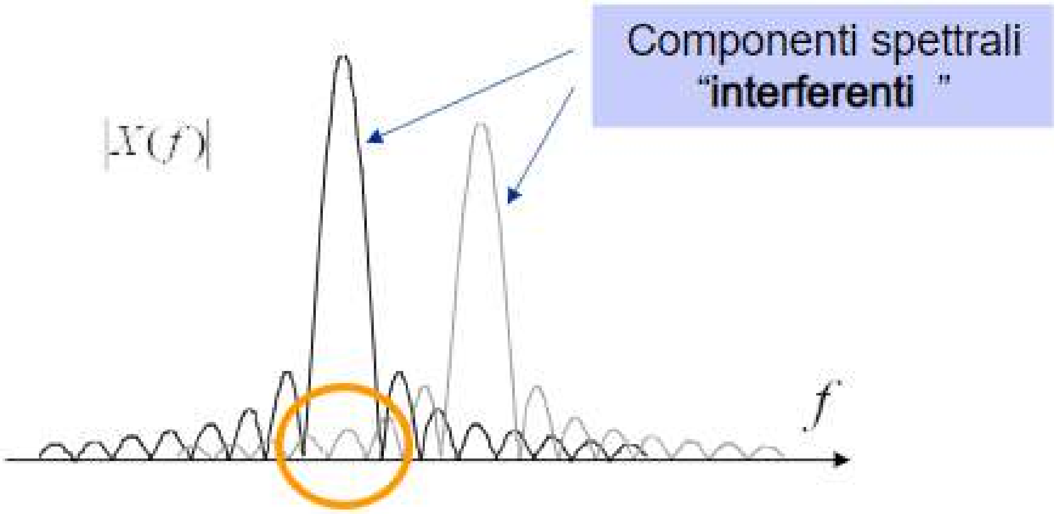
$$\boxed{\frac{2 \cdot B_{-6dB}}{F} = 2 \cdot B_{-6dB} \cdot NT_S}$$

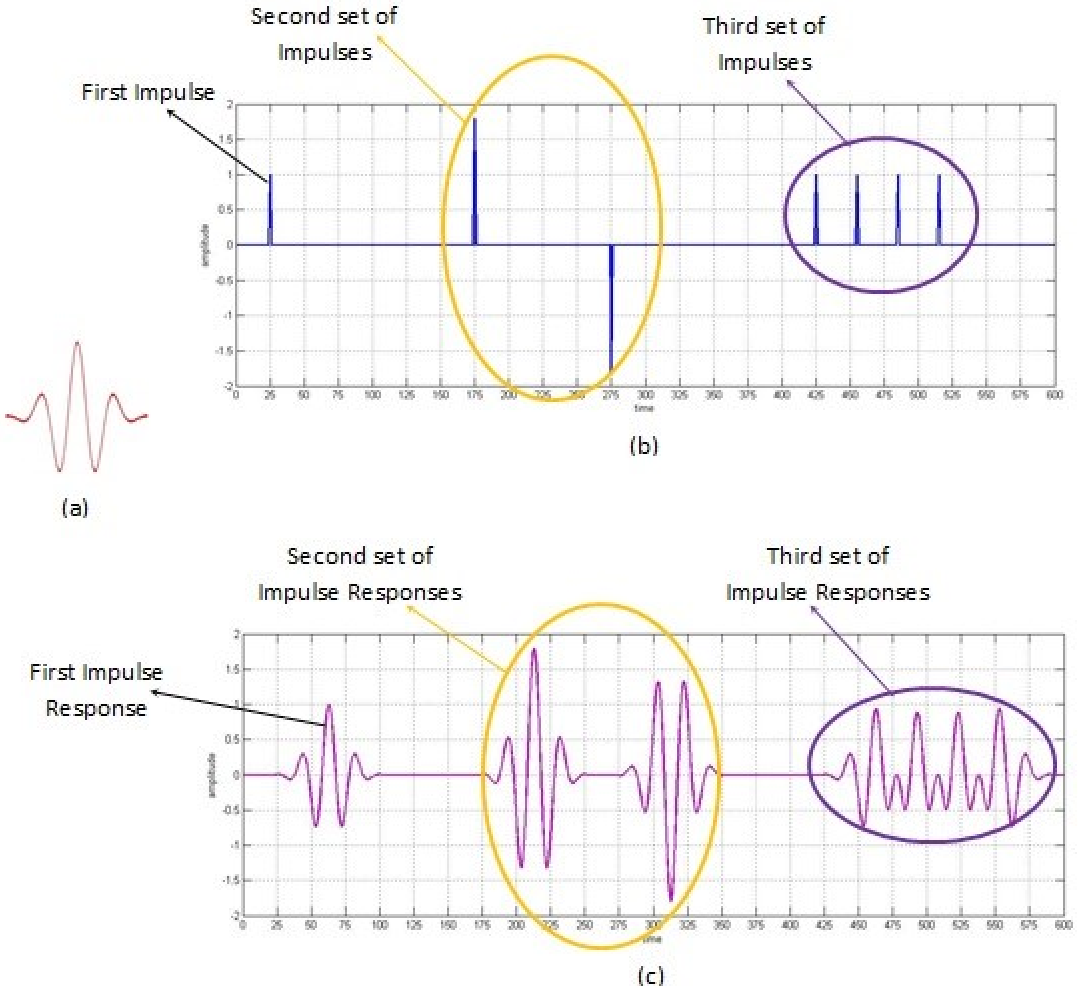
- la **selettività o roll-off**, espressa considerando la relazione che lega **l'ampiezza dei lobi laterali** alla loro **distanza dal lobo principale**, di **<u>-20 dB/decade</u>**.

Finestre per analisi spettrale: finestra rettangolare

Quali sono le principali problematiche della finestra rettangolare?

- La presenza di **lobi laterali con ampiezze che rimangono elevate** può causare **fenomeni di interferenza spettrale** qualora vi siano componenti **molto vicine tra loro**.
- I **contributi di più componenti distinte si combinano** e si sovrappongono in **modo non prevedibile**.
- Si possono quindi determinare **valori di ampiezza inaccurati**, o che le componenti di minore ampiezza vengano mascherate dalle componenti maggiori, rendendole di fatto non rilevabili.

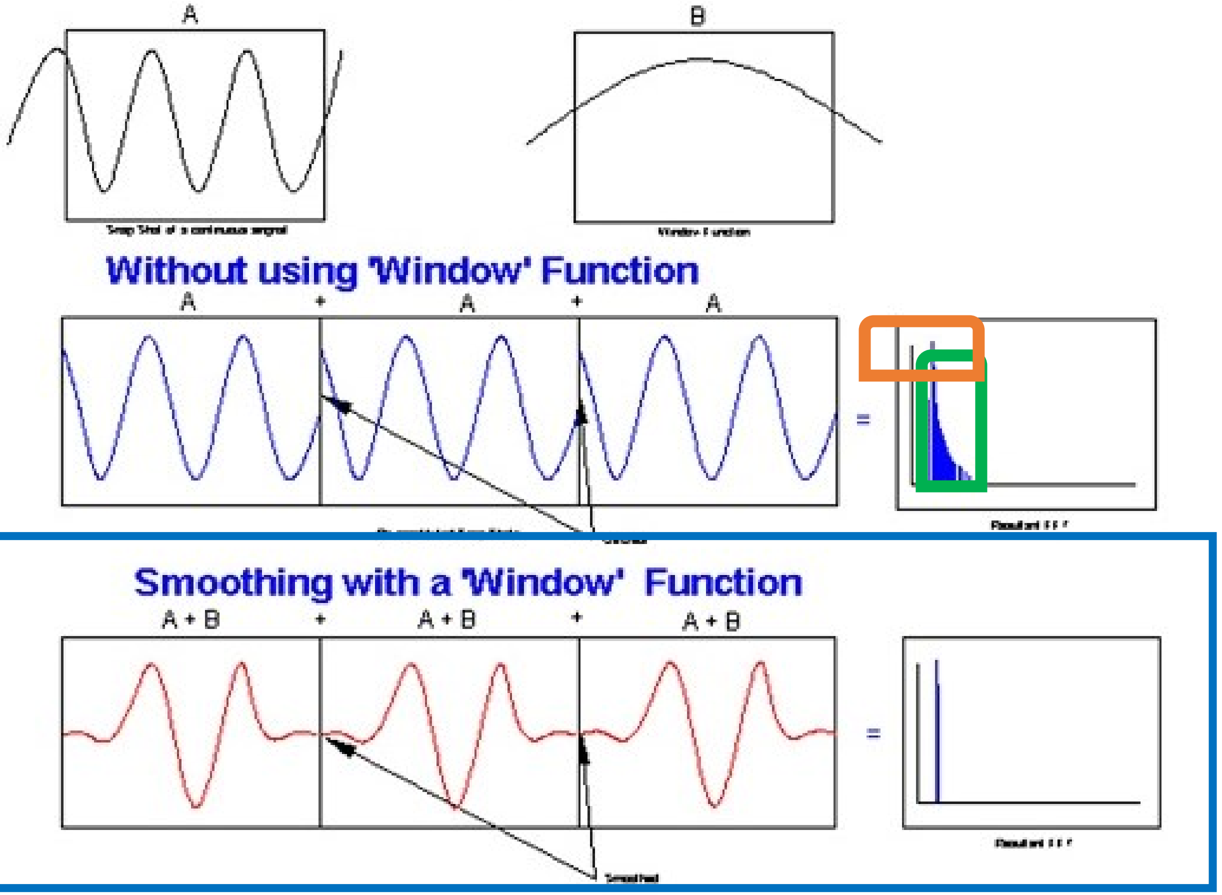




https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/dsp-applications-of-convolution-part-2/

Tipologie di finestre per analisi spettrale

Esistono perciò diversi tipi di finestra, *__diverso da quella uniforme__*, progettate allo scopo di ridurre sia l'interferenza spettrale, sia lo scalloping loss, ottimizzati per rispondere ad esigenze differenti.



Utilizzare una finestra diversa da quella uniforme comporta un ulteriore passo di elaborazione: L'impiego di una finestra diversa comporta che **ciascun campione del segnale venga effettivamente moltiplicato ("pesato") per il corrispondente campione della finestra**.

__RICHIESTE__

1) l'**ampiezza dei lobi laterali** __diminuisca quanto più rapidamente possibile all'aumentare della frequenza__

→ **Per limitare la presenza di componenti spettrali aggiuntive**

2) il **lobo principale sia il più possibile piatto**, ossia sia minima la variazione del guadagno della trasformata nell'intorno di f = 0.

→ **Per rendere più accurata la misura dello spettro**

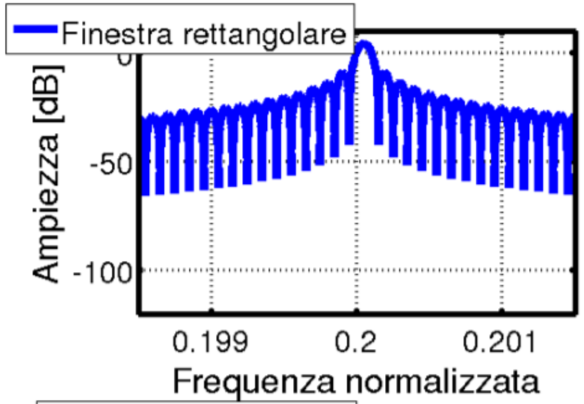
PRINCIPALI TIPI DI FINESTRE:

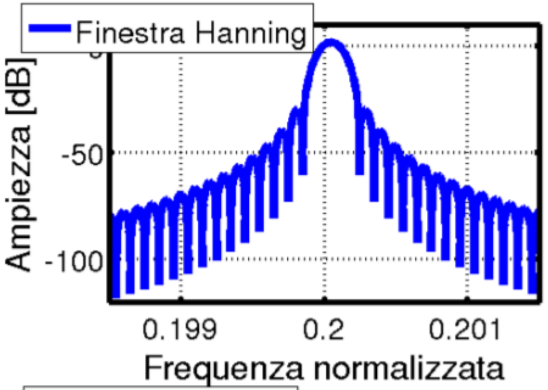
1) **Triangolare**
2) **A coseno rialzato**
3) **Blackmann**
4) **Flat top**

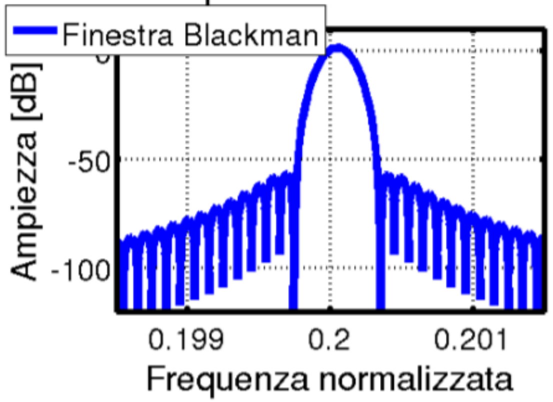
Tipologie di finestre

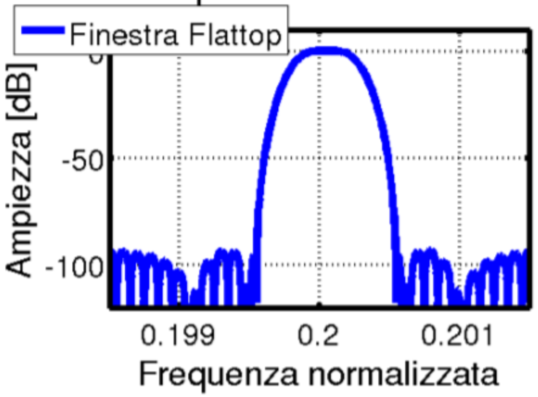
Le finestre **non rettangolari** presentano nel dominio della frequenza:

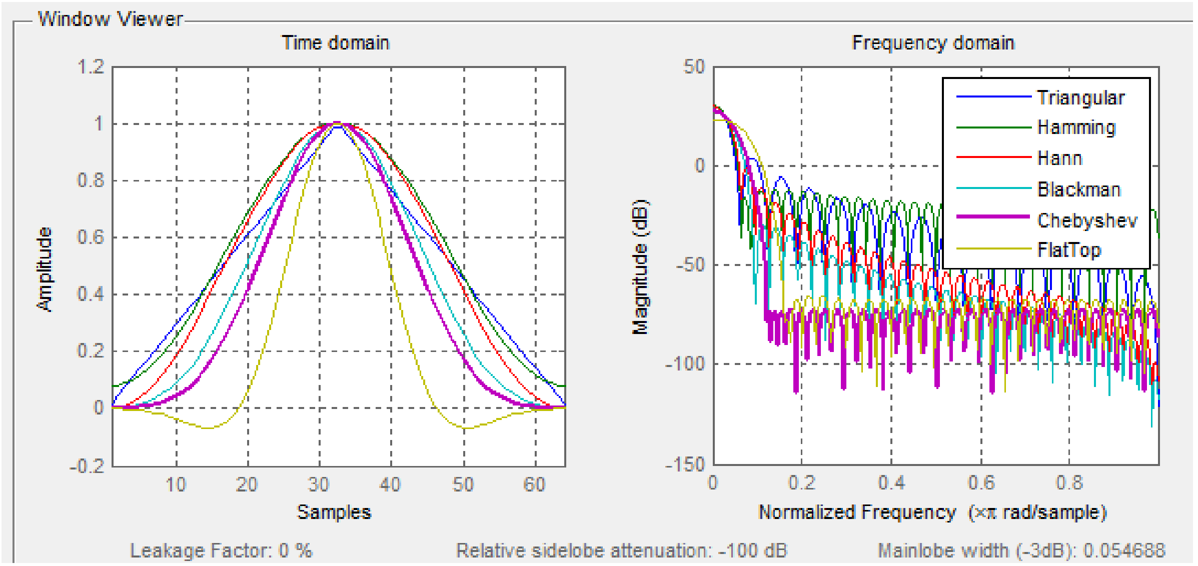
- **un lobo principale più largo**
- **lobi secondari più bassi**











HANNING → $w(n) = 0.5 - 0.5\cos(\frac{2\pi \cdot n}{N})$

BLACKMAN → $w(n) = 0.42 - 0.5\cos(\frac{2\pi \cdot n}{N}) + 0.08\cos(\frac{4\pi \cdot n}{N})$

FLAT TOP → $w(n) = 0.2395 - 0.4481 \cdot \cos(\frac{2\pi \cdot n}{N}) + 0.2585 \cdot \cos(\frac{4\pi \cdot n}{N}) + 0.0439 \cdot \cos(\frac{6\pi \cdot n}{N})$

Quindi...

Ridotto scalloping loss *(grazie al lobo principale largo e più piatto)* ***e ridotte interferenze spettrali*** *(grazie ai lobi secondari bassi)*

Peggiore capacità di discriminare componenti vicine *(a causa del lobo più largo che allarga la banda di risoluzione)*

Misure su segnali a spettro discreto: confronto tra finestre

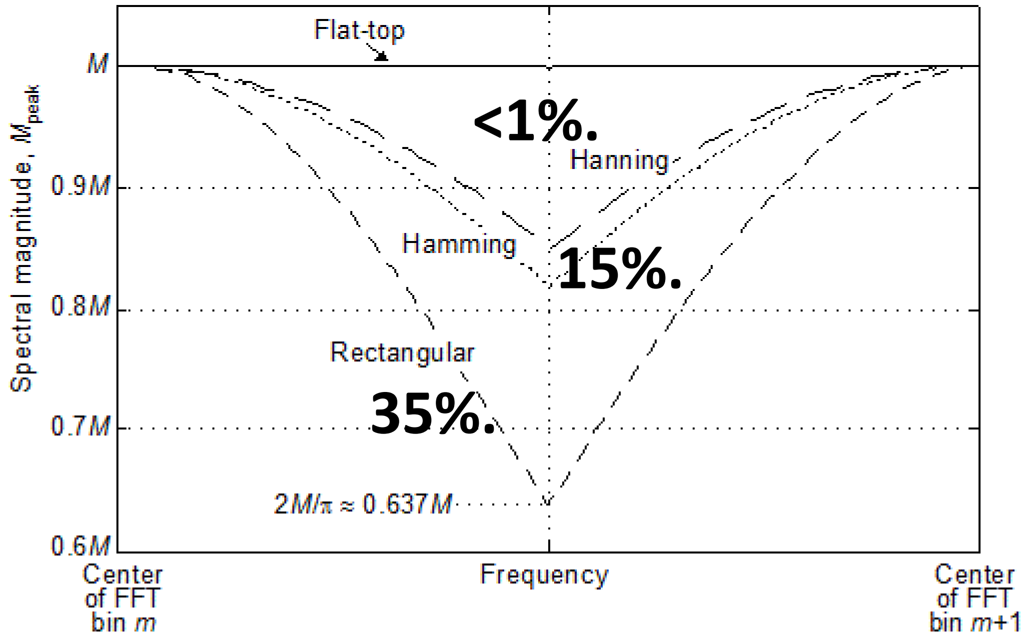
Finestra	WCSL [dB]	attenuazione minima lobi laterali [dB]	larghezza lobo princ. [bin]	banda a -6dB [bin]	ENBW [bin]
uniforme	3.92	13	2	1.21	1
Hann (*Hanning*)	1.42	32	4	2	1.5
Blackman-Harris	1.13	71	6	2.27	1.71
flat-top	< 0.01	93	10	4.58	3.77

- La corrispondenza tra il picco dello spettro e l'ampiezza della sinusoide è più accurata se nell'analisi spettrale lo strumento fa uso di una **finestra con ridotto valore di scalloping loss (WCSL=Worst Case Scalloping Loss)**

Nel caso di una finestra uniforme sostituendo $f=f_0+F/2$ nella

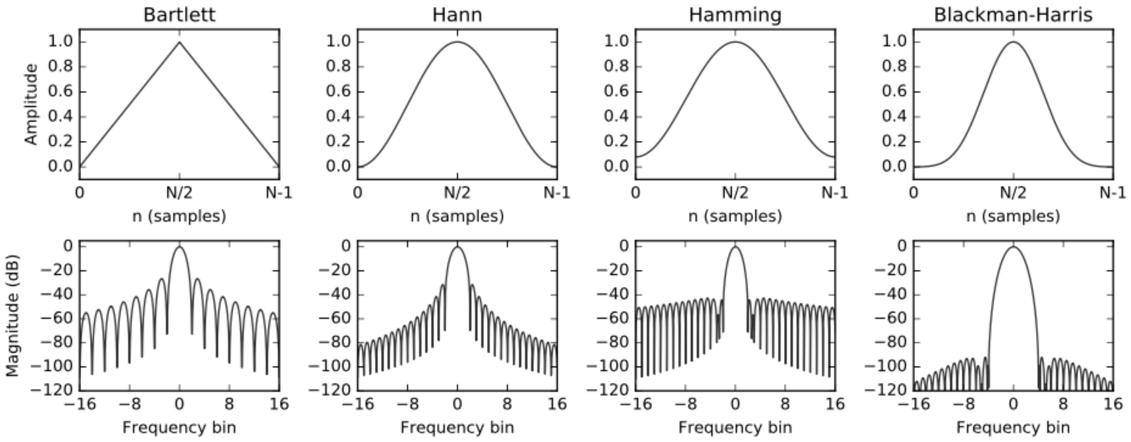
$$\tilde{W}_R(f) = \sum_{n=0}^{N-1} T_S e^{-j2\pi f n T_S} = T_S \frac{\sin \pi \left(\frac{f}{F}\right)}{\sin \frac{\pi}{N}\left(\frac{f}{F}\right)} e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{f}{F}\left(n_0+\frac{N-1}{2}\right)}$$

risulta: $$WCSL \simeq \frac{2}{\pi} \simeq 0.65$$

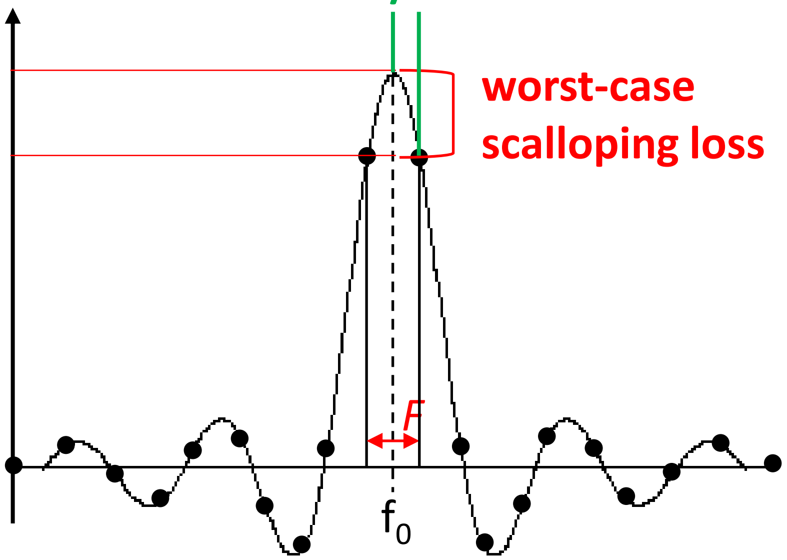


Misure su segnali a spettro discreto: scalloping loss

Premesse:
1) la DTFT di una finestra è **simmetrica**
2) **l'ampiezza del lobo principale diminuisce all'aumentare della frequenza**



Il <u>**caso peggiore**</u> corrisponderà alla situazione in cui:
- La **frequenza effettiva** della componente cada esattamente a ***metà del passo*** di quantizzazione.
- Lo **scostamento** tra la frequenza effettiva e le frequenze più vicine sarà pari a **1/2F**



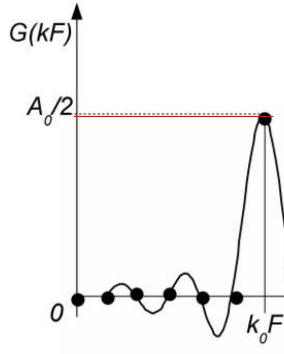
worst-case scalloping loss

In tal caso il rapporto

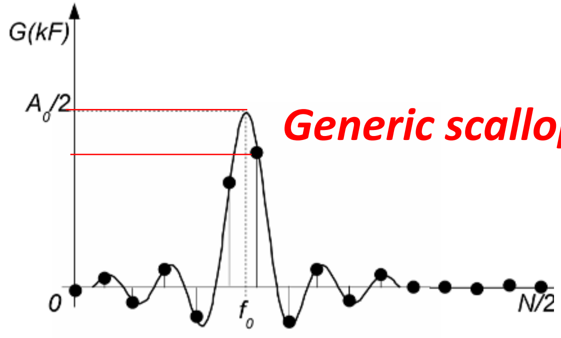
$$|\tilde{W}(-F/2)/|\tilde{W}(0)|$$

prende il nome di **worst-case scalloping loss (WCSL)** e si può quindi scrivere:

$$\frac{\hat{A}_0 - A_0}{A_0} \leq WCSL - 1$$



No scalloping loss

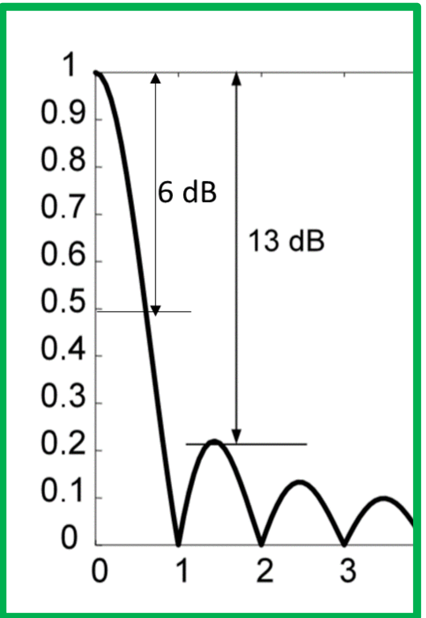


Generic scalloping loss

Misure su segnali a spettro discreto: confronto tra finestre

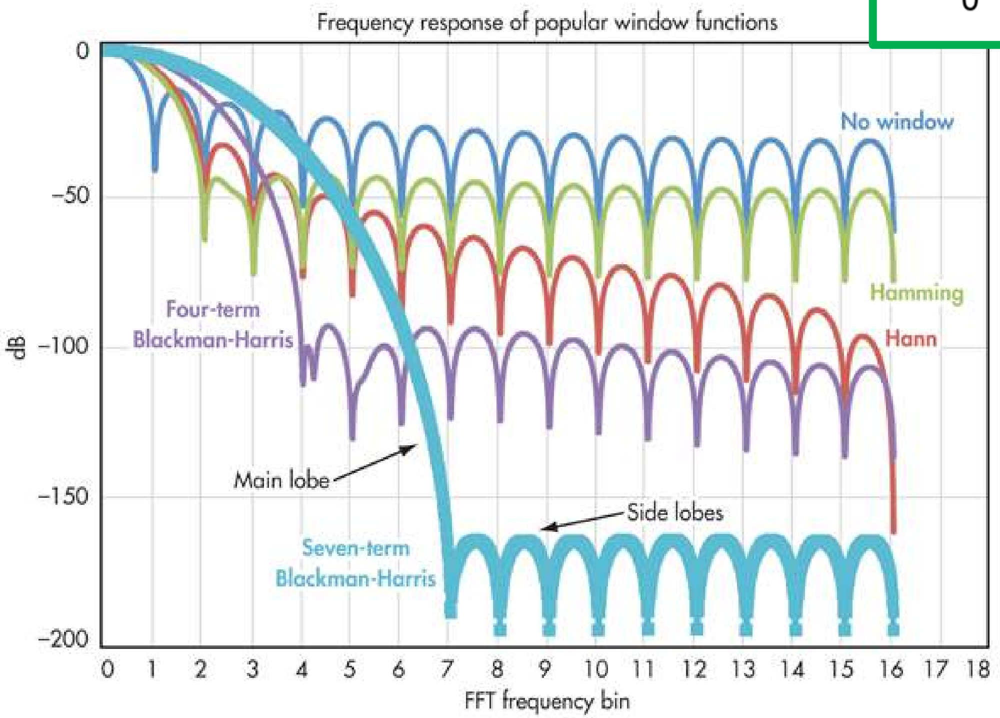
Espressi in [bin] ossia normalizzata rispetto al **passo di quantizzazione in frequenza**

Finestra	WCSL [dB]	attenuazione minima lobi laterali [dB]	larghezza lobo princ. [bin]	banda a -6dB [bin]	ENBW [bin]
uniforme	3.92	13	2	1.21	1
Hann (*Hanning*)	1.42	32	4	2	1.5
Blackman-Harris	1.13	71	6	2.27	1.71
flat-top	< 0.01	93	10	4.58	3.77



- Se **si aumenta il fattore di decadimento dei lobi laterali, aumenta la larghezza del lobo centrale** (e di conseguenza anche la banda a -6dB).

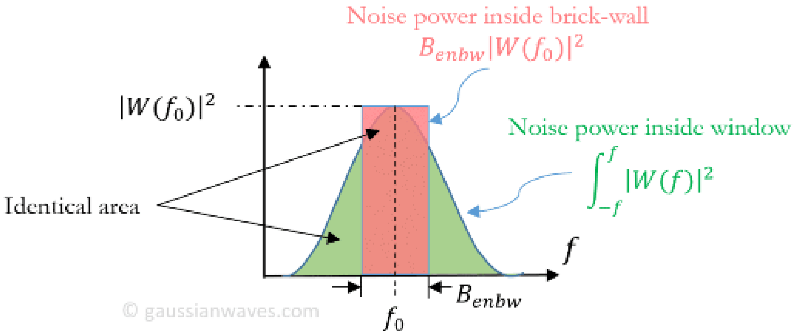
- Va anche ricordato che le finestre con **lobi laterali più alti** provocano maggiore **interferenza spettrale** e possono rendere più **<u>difficile la stima della componente di rumore</u>**.

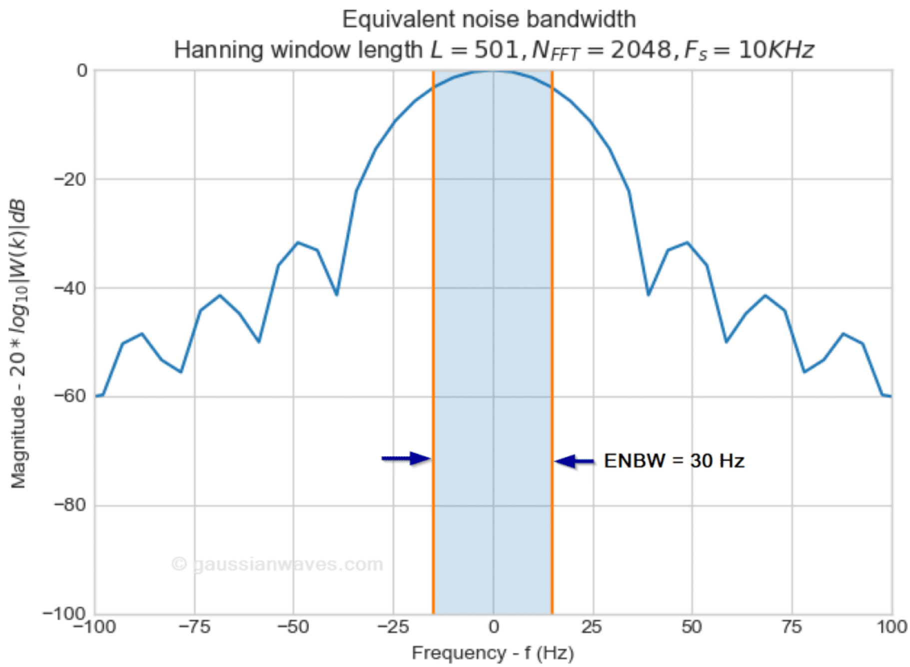


Misure su segnali a spettro discreto: confronto tra finestre

Finestra	WCSL [dB]	attenuazione minima lobi laterali [dB]	larghezza lobo princ. [bin]	banda a -6dB [bin]	ENBW [bin]
uniforme	3.92	13	2	1.21	1
Hann (*Hanning*)	1.42	32	4	2	1.5
Blackman-Harris	1.13	71	6	2.27	1.71
flat-top	< 0.01	93	10	4.58	3.77

- Con il parametro Larghezza di banda di rumore equivalente (Equivalent Noise Bandwith (ENBW)) si cerca di rispondere alla domanda: **quanto rumore si raccoglie con l'operazione di finestratura?**
- Corrisponde all'ampiezza di banda (in bin di frequenza) che avrebbe un ideale brick wall filter con uguale potenza rispetto a quella accumulata dalla risposta in frequenza della finestra scelta





Take home messages

TRASFORMATA DI FOURIER FINITA (DFT)	➢ L'analisi di Fourier resta la base su cui si fonda qualsiasi algoritmo implementato negli analizzatori di spettro numerici. Il campionamento, produce una **periodizzazione dello spettro a frequenza fc** (**DTFT**) (attenzione all'aliasing), la memorizzazione produce un troncamento con una durata Tw e introduce una **granularità in frequenza di passo F=1/Tw** (**DFT**). ➢ La scelta di un **tempo di osservazione non adeguato** può portare a una **risoluzione non sufficiente**, impedendo la distinzione di componenti più vicine.
DISPERSIONE SPETTRALE	➢ L'osservazione di un **numero non intero di periodi** all'interno della finestra di osservazione produce delle discontinuità nel segnale che viene analizzato dalla DFT e questo introduce frequenze aggiuntive «artificiali», fenomeno noto come **dispersione spettrale o spectral leaking**. ➢ Lo **scostamento della stima dell'ampiezza** delle componenti presenti nel segnale viene definita **scalloping loss**, e può essere ridotta o considerando un numero esatto di periodi nella finestra di osservazione, oppure attraverso la scelta di opportune finestre di osservazione diverse dalla rettangolare.
FINESTRE PER L'ANALISI SPETTRALE	➢ A causa della difficoltà di ottenere periodicità nell'intervallo di osservazione nel caso reale, spesso vengono utilizzate **finestre di osservazione** con caratteristiche specifiche a seconda delle caratteristiche del segnale e delle informazioni che devono essere estratte. I principali parametri sono: ampiezza del lobo centrale, influenza la risoluzione e lo scalloping loss, roll off dei lobi laterali, influenza la capacità di attenuare le frequenze non di interesse e quindi la dispersione spettrale. Le principali finestre sono: a coseno rialzato, flat top, blackman harris, triangolare, rettangolare ➢ Nelle misure su segnali a spettro discreto i parametri a cui fare attenzione per ciascuna componente sono: lo **scostamento tra frequenza** della componente reale e sua stima, pari al massimo ad un mezzo della granularità; lo **scostamento del valore di ampiezza** stimato da quello reale, scalloping loss, dipendente dal valore di frequenza, e che raggiunge il massimo valore se il valore stimato cade corrispondenza del punto medio dell'intervallo di granularità.