Quiz 7

Question 1

Not complete

Flag question

Calcolare l’integrale della funzione $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$(x, y, z) \mapsto \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sulla superficie ottenuta ruotando attorno all’asse delle z la curva $x = 7z^2$, con $1 \leq z \leq 6$.

Answer:

Check

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y,z) \longmapsto \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

SULLA SUPERFICIE OTTENUTA RUOTANDO ATTORNO ALL'ASSE z:

$x = 7z^2, \quad 1 \le z \le 6$

SOL. LA CURVA È: $r(z) = (7z^2, z)$

1) OTTENGO LA SUPERFICIE PARAMETRICA DI ROTAZIONE CON:

$$\boxed{P(t,\theta) = (r_1(t)\cos\theta,\ r_1(t)\sin\theta,\ r_2)}$$

SOSTITUISCO I VALORI:

→ SUP. PARAMETRICA: $P(z,\theta) = (7z^2\cos\theta, 7z^2\sin\theta, z)$

$(z,\theta) \in [1,6] \times [0,2\pi]$

2) USO LA FORMULA DELL'INTEGRALE SUPERFICIALE:

$$\boxed{\int_P N(x,y,z)\, d\sigma_P = \int_D N(P(u,v))\, |P_u(u,v) \times P_v(u,v)|\, du\, dv}$$

2.1) CALCOLO L'ELEMENTO D'AREA DELLA SUPERFICIE

$P_z(z,\theta) = (14z\cos\theta,\ 14z\sin\theta,\ 1)$

$P_\theta(z,\theta) = (-7z^2\sin\theta,\ 7z^2\cos\theta,\ 0)$

$$\rightarrow |P_z(z,\theta) \times P_\theta(z,\theta) = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 14z\cos\theta & 14z\sin\theta & 1 \\ -7z^2\sin\theta & 7z^2\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$= e_1(-7z^2\cos\theta) + e_2(-7z^2\sin\theta) + e_3(14z\cos\theta \cdot 7z^2\cos\theta + 14z\sin\theta\, 7z^2\sin\theta)$$

$$= (-7z^2\cos\theta,\ -7z^2\sin\theta,\ 98z^3\cos^2\theta + 98z^3\sin^2\theta)$$

$$= (-7z^2\cos\theta,\ -7z^2\sin\theta,\ 98z^3)$$

$$\rightarrow |P_z(z,\theta) \times P_\theta(z,\theta)| = \sqrt{49z^4\cos^2\theta + 49z^4\sin^2\theta + 9604z^6} = \sqrt{49z^4 + 9604z^6}$$

2.2) INTEGRO:

$$N(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \longrightarrow N(P(z,\theta)) = \frac{z}{\sqrt{49z^4}} = \frac{z}{7z^2} = \frac{1}{7z}$$

ORA SOSTITUISCO:

$$\int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{1}{z}\sqrt{98z^4+9604z^6}\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^6 \frac{1}{z}\sqrt{z^4(98+9604z^2)}\,dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^6 z\sqrt{98+9604z^2}\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{19208}\int_1^6 \frac{3}{2}19208z\sqrt{98+9604z^2}\,dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3\cdot 19208}\left[(98+9604z^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^6 d\theta = \ldots = 6305.2510$$

√

Question 2

Not complete

Flag question

Calcolare l'area del trapezoide della funzione $f(x,y) = 7x$ sulla curva $y = 7x^2$ con $x \in [0,9]$.

Answer:

Check

Area del trapezoide $F(x,y) = 7x$, $y = 7x^2$, $x \in [0,9]$

SOL. USO LA FORMULA DELL'AREA DEL TRAPEZOIDE

$$\boxed{\text{Area}(\text{Trap}(h)) = \int_r h\,ds}$$

CURVA: $r(x) = (x, 7x^2)$

FUNZIONE: $h(x) = 7x$

USO LA RELAZIONE: $ds = |r'(x)|\,dx$ -

$\rightarrow ds = |r'(x)|\,dx = \sqrt{1+(14x)^2}\,dx$

ORA CALCOLO L'INTEGRALE:

$$\int_0^9 7x\sqrt{1+196x^2}\,dx = 23\,816.2381$$

√

Question 3

Not complete

Flag question

Determinare l'area della superficie cilindrica

$$x^2 + y^2 = 2y$$

compresa tra i piani $z = y$ e $z = 0$.

Answer:

Check

AREA DELLA SUP. CILINDRICA: $x^2+y^2 = 2y$, COMPRESA TRA PIANI $z=4$, $z=0$

SOL. USO LA FORMULA DELL'AREA DI UNA SUPERFICIE PARAMETRICA:

$$\boxed{Area(P) = \int_D |P_t(t,\theta) \times P_v(t,\theta)|\, dt\, d\theta}$$

"SUPERFICIE CILINDRICA" = "SOSTEGNO DELLA SUP. PARAMETRICA"

$x^2+y^2-2y=0 \rightarrow x^2+(y-1)^2=1$ E' UNA SFERA, $C(0,1)$, $r=1$

LA SUPERFICIE PARAMETRICA E':

DATO IL CILINDRO:

$x^2+y^2=R^2$, $0 \le z \le h$ | h = altezza, R = raggio

QUESTO E' IL SOSTEGNO DELLA SUP. PARAMETRICA:

$D = \{[0,2\pi] \times [0,h]\}$, $P(t,z) = (R\cos t, R\sin t, z)$

$P(t,z) = (\cos t, \sin t + 1, z)$

$D = \{t \in [0,2\pi], z \in [0,4] \rightarrow z \in [0, \sin t + 1]$

$P_t(t,z) = (-\sin t, \cos t, 0)$

$P_z(t,z) = (0,0,1)$

$|P_t(t,z) \times P_z(t,z)| = \sqrt{0+\cos^2(t)+\sin^2(t)} = 1$

ORA SOSTITUISCO E CALCOLO L'INTEGRALE:

$$Area(P) = \int_0^{2\pi}\int_0^4 dz\,dt = \int_0^{2\pi} y\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin(t)+1)\, dt = \cancel{\int_0^{2\pi} \sin t}^{\,0} + \int_0^{2\pi} 1\, dt$$

$$= 0 + \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi = 6.2831$$

Question **4**

Not complete

Flag question

La temperatura su una sfera di raggio 3 è data dalla funzione $T(x,y,z) = 5 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare la media di T sulla sfera data da

$$\frac{\displaystyle\int_{\partial B(0,3)} T(x,y,z)\,d\sigma}{\text{Area}\,\partial B(0,3)}.$$

(al numeratore c'è l'integrale superficiale di T sulla sfera di raggio 3).

Answer:

Check

$T(x,y,z) = 5 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$, CALCOLARE $$\frac{\int_{\partial B(0,3)} T(x,y,z)\, d\sigma}{\text{Area } \partial B(0,3)}$$

SOL. INNANZITUTTO DEVO CALCOLARE L'INTEGRALE SUPERFICIALE (AL NUMERATORE):

$$\boxed{\int_P N(x,y,z)\, d\sigma_P = \int_D N(P(u,v))\, |P_u(u,v) \times P_v(u,v)|\, du\, dv}$$

1. USO L'ELEMENTO D'AREA DELLA SFERA (già calcolato): $\boxed{|P_\phi \times P_\theta(\phi,\theta)| = R^2 \sin\phi}$

USO LE COORDINATE POLARI SFERICHE, MA IN QUESTO CASO IL RAGGIO ρ E' FISSO (ho una sfera cava, non infinite sferette di raggi variabili tra 0 e ρ per fare il volume

$\forall \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi],\ \phi \in [0,\pi]$

$$\boxed{\varphi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi),\quad \rho = R \text{ FISSO}}$$

2. SOSTITUISCO

$$P(\phi,\theta) = R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi),\quad D = \{\phi \in [0,\pi], \theta \in [0,2\pi]\}$$

3. SOSTITUISCO IN $T(x,y,z) \longmapsto N(R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi))$

$$\to T(x,y,z) = 5 + \frac{2}{3}\sqrt{R^2\sin^2\phi\cos^2\theta + R^2\sin^2\phi\sin^2\theta} = 5 + \frac{2}{3}R\sin\phi \overset{R=3}{=} 5 + 2\sin\phi$$

$$\Rightarrow \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(5+2\sin\phi)\, 9\sin\phi\, d\phi\, d\theta}{4\pi 3^2} = \frac{18(10+\pi)}{36\pi} = 5 + \frac{\pi}{2} = 6.5702$$

✓

Question 5

Not complete

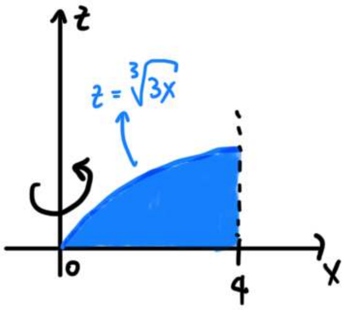
Flag question

Si fa ruotare di 2π attorno all'asse z la curva cartesiana del semipiano xz, $x \geq 0$ definita da $z = \sqrt[3]{3x}$, $x \in [0, 4]$. Determinarne l'area.

Answer:

Check

$z = \sqrt[3]{3x}$, $x \in [0,4]$. Area(z)?



SOL. USO LA FORMULA DELLA SUPERFICIE PARAMETRICA DI ROTAZIONE:

$$\boxed{P(t,\theta) = (r_1(t)\cos\theta,\ r_1(t)\sin\theta,\ r_2), \quad (t,\theta) \in [a,b] \times [0,2\pi]}$$

CURVA: $r(x) = (x, \sqrt[3]{3x})$

SUP. PARAMETRICA DI ROTAZIONE: $P(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \sqrt[3]{3x})$

$D = \{x \in [0,4],\ \theta \in [0,2\pi]$

USO LA FORMULA DELL'AREA DI UNA SUPERFICIE DI ROTAZIONE (PAPPO - GULDINO)

$$\boxed{\text{Area} = 2\pi \cdot X_r \cdot \text{Lunghezza}(r) = 2\pi \int_r x\, ds}$$

$$ds = |r'(t)|dt = \sqrt{1 + [R'(t)]^2}\, dt$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt[3]{3t} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}}$$

SOSTITUISCO:

$$2\pi \int_0^4 t \sqrt{1 + \left(\frac{1}{3^{2/3} t^{2/3}}\right)^2}\, dt = 52.6856$$

V

Question **6**

Not complete

Flag question

Facciamo ruotare l'ellisse E contenuta nel semipiano xy con $y > 0$

$$E = \left\{ (x, y) : \frac{(x-7)^2}{3^2} + \frac{(y-8)^2}{4^2} = 1 \right\}$$

attorno all'asse x, si ottiene il sostegno S di una superficie parametrica. Determinare $y > 0$ affinché il punto

$\left(7 + \frac{3}{2}, y, 8 + \frac{4}{2}\right)$

appartenga a S.

Answer:

Check

$E \subseteq \{xy, y > 0\}$, $E = \left\{ (x,y) : \frac{(x-7)^2}{3^2} + \frac{(y-8)^2}{4^2} = 1 \right\}$ ATTORNO ALL'ASSE X

SI OTTIENE SOSTEGNO S DI UNA SUPERFICIE PARAMETRICA. DET $y > 0$ AFFINCHÉ $\left(7+\frac{3}{2}, y, 10\right) \in S$

SOL. TROVIAMO L'EQUAZIONE DELLA SUPERFICIE PARAMETRICA E VERIFICHIAMO QUANDO y APPARTIENE AD ESSA

1) LA CURVA DELL'ELLISSE È DATA DA: $\frac{(x-7)^2}{9} + \frac{(y-8)^2}{16} = 1$

USO LA PARAMETRIZZAZIONE DELL'ELLISSE (VEDERE ESEMPIO 1.14 P. 8 PER MAGGIORI INFORMAZIONI):

$$\boxed{\frac{x-a}{A} = \cos(t), \quad \frac{y-b}{B} = \sin(t)}$$

$$\begin{aligned} x-7 &= 3\cos t \\ y-8 &= 4\sin t \end{aligned} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3\cos t + 7 \\ y &= 4\sin t + 8 \end{aligned}\right\} r(t) = (3\cos t + 7, 4\sin t + 8)$$

ORA TROVIAMO LA SUPERFICIE PARAMETRICA:

$$\boxed{P(t,\theta) = (r_1(t), r_2(t)\cos\theta, r_2(t)\sin\theta)}$$

$$P(t,\theta) = (3\cos t + 7, 4\sin(t)\cos\theta + 8\cos\theta, 4\sin(t)\sin\theta + 8\sin\theta)$$

ATTENZIONE: HO USATO LA FORMULA 8.5 p. 169, MA TALE ESPRESSIONE È PER UNA SUPERFICIE PARAM. DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE Z. LA FORMULA DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE X È:
$P(t,\theta) = (r_1(t), r_2(t)\cos\theta, r_2(t)\sin\theta)$

2) ORA DOBBIAMO EGUAGLIARE LE VARIE COMPONENTI DI $P(t,\theta)$ AL PUNTO DATO:

$\boxed{x}$: $3\cos t + 7 = 7 + \frac{3}{2} \rightarrow 3\cos t = \frac{3}{2} \rightarrow \cos t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

$\boxed{z}$: $4\sin\theta(\sin t + 2) = 10 \rightarrow \sin\theta = \frac{10}{4(\sin t + 2)} = \frac{10}{4(\sin(\frac{\pi}{3}) + 2)} = \frac{10}{4(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)}$

$\rightarrow \sin\theta = \frac{5}{\sqrt{3}+4} \rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{3}+4}\right)$

3) INFINE, ORA CHE HO t, θ POSSO TROVARMI LA y:

$\boxed{y}$: $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\theta + 8\cos\theta = 5.6058$ √

Question 7

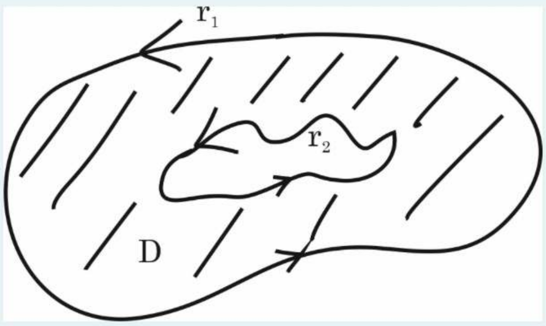
Not complete

Flag question

Si consideri un campo $F = (F_1, F_2)$ di classe C^1 sulla chiusura del dominio Stokiano D in figura. L'area di D è uguale ad 7;
$\nabla F_1(x,y) = (3x^2\log(12x^2+6)+6y^2, 12xy+15), \nabla F_2(x,y) = (12xy+6, \arctan(12y)$ -

Si sa che $\displaystyle\int_{r_1} F\cdot T\,ds = 6$; quanto vale l'integrale di F su r_2 con l'orientamento indicato?

Troncare ali primi due decimali dopo la virgola.



Answer:

Check

$$\int_{\gamma_1} F\cdot T\,ds = 6 \quad (\text{FLUSSO DI } \gamma_1)$$
$$\int_{\gamma_2} F\cdot T\,ds = ? \quad (\text{FLUSSO DI } \gamma_2)$$

SOL. 1) USO LA FORMULA DELL'INTEGRALE SU UN BORDO POSITIVAMENTE ORIENTATO

$$\boxed{\int_{\partial^+ D} F\cdot T\,ds = \int_{\gamma_1} F\cdot T\,ds + \int_{\gamma_2} F\cdot T\,ds}$$

QUINDI: FLUSSO (D) = FLUSSO (γ_1) - FLUSSO (γ_2)

$\Rightarrow$ FLUSSO (γ_2) = FLUSSO (γ_1) - FLUSSO (D)

2) USO LA FORMULA DI GREEN:

$$\boxed{\int_{\partial^+ D} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \int_{\partial^+ D} F\cdot T\,ds = \int_D \partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\partial_x F_2(x,y) = 12xy + 6$$
$$\partial_y F_1(x,y) = 12xy + 15$$

SOSTITUISCO:

$$\text{FLUSSO (D)} = \int_D 12xy + 6 - 12xy - 15\,dx\,dy = -9 \underbrace{\int_D dx\,dy}$$

MA, $\int_D dx\,dy$ È L'AREA DI D, QUINDI FLUSSO (D) $= -9\cdot 7 = -63$

$\Rightarrow$ FLUSSO (γ_2) = FLUSSO (γ_1) - FLUSSO (D) $= 6 - (-63) = 6 + 63 = 69$ ✓

Question **8**

Not complete

Flag question

Calcolare il flusso del campo

$$F(x,y) = (3x + \log(y^2+1), y^2 - x^3)$$

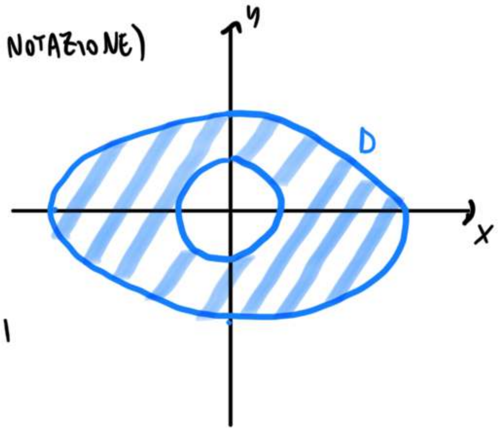
uscente dalla regione D compresa tra il cerchio $x^2+y^2=1$ e l'ellisse $x^2+9^2y^2=162$
.

Answer:

Check

Φ $\vec{F}(x,y) = \left(3x + \log(y^2+1) , y^2 - x^3\right)$ USCENTE DA D

$D = \{(x,y) : x^2+y^2-1 \leq 0 \leq x^2+81y^2-162\}$ (CON ABUSO DI NOTAZIONE)



SOL. 1) PARAMETRIZZO IL DOMINIO

CIRCONFERENZA: $r_1 = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

ELLISSE: $x^2 + 81y^2 = 162 \rightarrow \frac{x^2}{162} + \frac{81}{162}y^2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{162} + \frac{1}{2}y^2 = 1$

CENTRO: $(0,0)$

$a = \sqrt{162}$

$b = \sqrt{2}$

$$r_2 = (Ra\cos t, Rb\sin t) = (\sqrt{162}\cos t, \sqrt{2}\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

2) USO LA FORMULA DELLA DIVERGENZA (E LA DEFINIZIONE DI DIVERGENZA)

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot N_{ext} = \int_D \operatorname{div} F \, dx\, dy = \int_D \partial_x F_1(x,y) + \partial_y F_2(x,y) \, dx\, dy}$$

$\partial_x F_1(x,y) = 3$

$\partial_y F_2(x,y) = 2y$

$$\Rightarrow \text{FLUSSO}(D) = \int_D 2y + 3 \, dx\, dy = \cancel{\int_D 2y} + 3\int_D 1 \, dx\, dy$$

UNA FUNZIONE DISPARI IN UN DOMINIO SIMMETRICO HA L'INTEGRALE CHE ASSUME VALORI OPPOSTI A DX E SX

$3\int_D 1 \, dx dy$ È $3 \cdot \text{Area}(D)$

$$\text{Area}(D) = \pi a b - \pi r^2 = \pi\sqrt{162}\sqrt{2} - \pi$$

$$\Rightarrow 3\text{Area}(D) = 3\pi\left(\sqrt{324} - 1\right) = 3\pi \cdot 17 = 51\pi = 160.2212$$

Question 9

Not complete

Flag question

Calcolare il flusso di $F(x,y) = (5x, 7x - 9y)$ attraverso la curva $r(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, \pi/2]$.

Answer:

Check

$\Phi\ F(x,y) = (5x, 7x - 9y)$ ATTRAVERSO $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

SOL. IL FLUSSO USCENTE DA UN DOMINIO STOKIANO E' DATO DA:

$$\boxed{\int_{r} F \cdot N_r \, ds = \int_{r} F_1(x,y)\, dy - F_2(x,y)\, dx}$$

$F_1 = 5x$
$F_2 = 7x - 9y$

$$r(t) = (\cos t, \sin t) \rightarrow \begin{cases} dx = -\sin t \\ dy = \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad \rho \in [0,1]$$

$$F(r(t)) = (5\cos t, 7\cos t - 9\sin t)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t \cdot \cos t - (7\cos t - 9\sin t)(-\sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos^2(t) - (-7\cos t \sin t + 9\sin^2 t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos^2 t + 7\cos t \sin t - 9\sin^2 t \, dt = 0.3584$$

V

Question **10**

Not complete

Flag question

Calcolare il flusso di $F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ uscente da $\partial B(0,9]$.

Answer:

Check

CALCOLARE $\Phi\ F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ USCENTE DA $\partial B(0,9]$

SOL. IL FLUSSO USCENTE DA UNA SUPERFICIE È:

$$\boxed{\int_{\partial D} F \cdot N_{ext}\, ds = \int_{\partial^+ D} F_1(x,y)\,dy - F_2(x,y)\,dx}$$

$r(t) = (9\cos t, 9\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ $\rightarrow$ $\begin{cases} dx = -9\sin t \\ dy = 9\cos t \end{cases}$ $[ds = r'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{9\cos t}{9^2\cos^2(t) + 9^2\sin^2(t)}(9\cos t) - \frac{9\sin(t)}{9^2\cos^2(t) + 9^2\sin^2(t)}(-9\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{81\cos^2(t)}{81} + \frac{81\sin^2(t)}{81}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi = 6.2831$$