

Università degli Studi di Padova
 Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
 Corso di Biomeccanica (INP7078879) – CANALE 2
 Prova scritta del 20/06/2024, A.A. 2023-2024
TESTO 1

Tutti i calcoli ordinati, la descrizione delle formule utilizzate con opportuni commenti e i diagrammi vanno riportati sul foglio protocollo A PENNA

Nome:

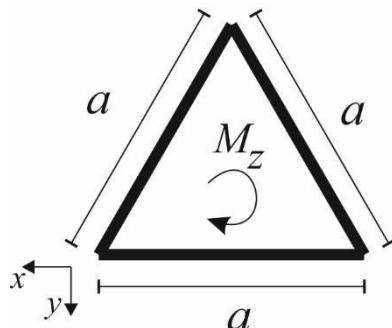
Cognome:

Matricola:

ESERCIZIO 1

Una sezione triangolare **sottile cava** è soggetta ad un momento torcente M_z come riportato in figura pari a 10 kNmm, (asse z ortogonale al piano visualizzato). Le dimensioni della sezione sono $a = 20$ mm e $b = 0.5$ mm.

Sezione a spessore sottile costante b

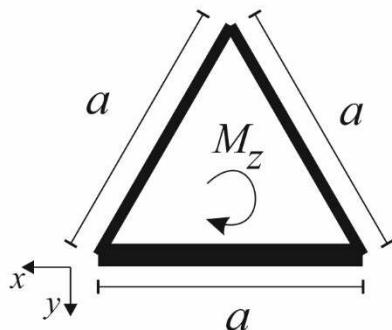


Si calcoli **lo stato di tensione (valori, andamento e verso)** agente sulla sezione, con le opportune rappresentazioni.

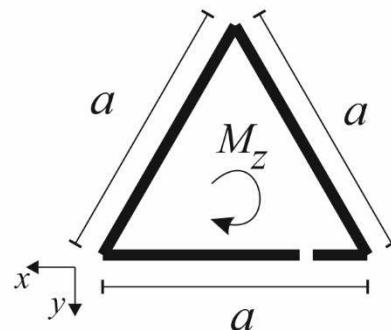
Si considerino quindi due varianti:

- 1) In uno dei 3 tratti di lunghezza a lo spessore risulta pari al doppio ($2b$);
- 2) La sezione risulta sottile ma aperta.

Variante 1: spessore del tratto orizzontale pari a $2b$:



Variante 2: sezione sottile aperta:



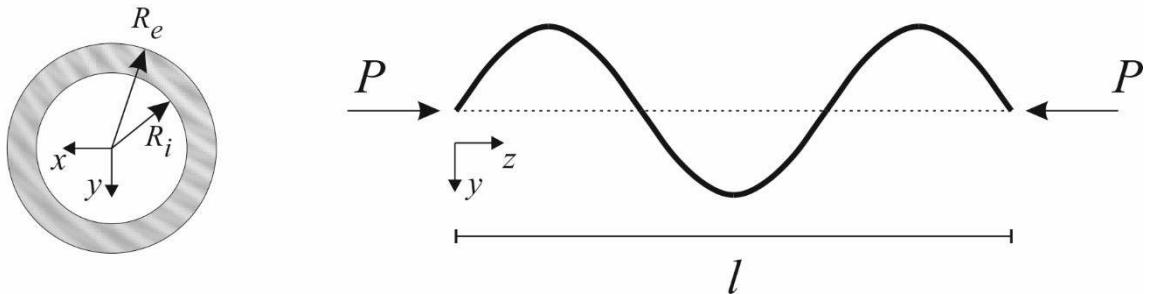
Si commenti in che modo ciascuna di queste varianti influenzi la tensione agente (valori, andamento e/o verso), riportando le modifiche con gli opportuni calcoli.

ESERCIZIO 2

Si consideri la configurazione deformata di una trave snella riportata in figura, a seguito dell'applicazione di un carico di punta P . Nota la sezione circolare cava, costante lungo tutto il tratto della trave, e il modulo elastico E pari a 10 GPa, **si calcoli il valore del carico critico determinabile dalla deformata flessionale della struttura** (si considerino piccoli spostamenti).

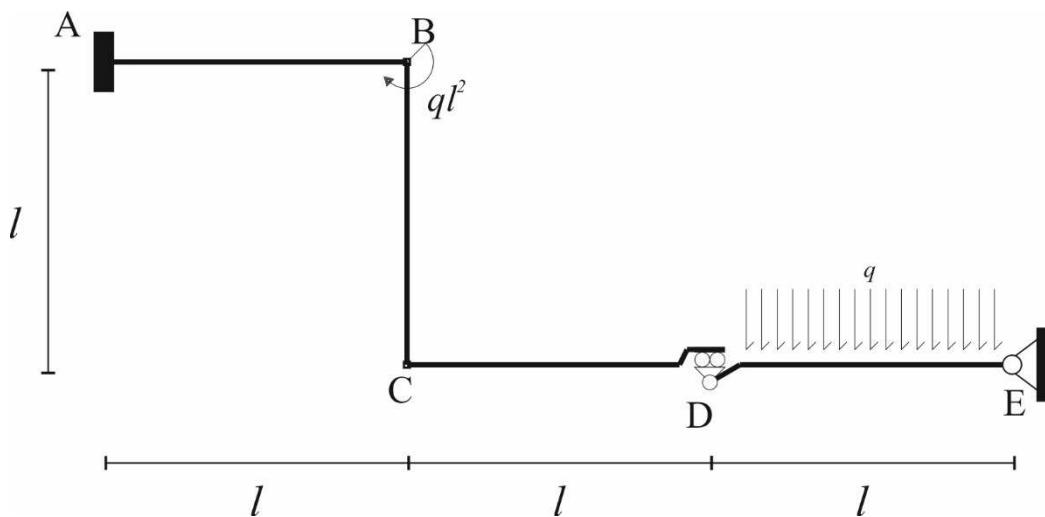
La trave ha lunghezza l pari a 24 mm, raggio interno R_i pari a 0.5 mm e raggio esterno R_e pari a 0.7 mm.

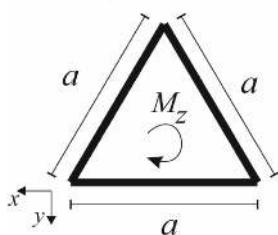
Sezione costante:



ESERCIZIO 3

Si consideri la struttura in esame, vincolata in A ed E a terra. La struttura è caricata con un carico distribuito q , applicato su tutta la lunghezza del corpo DE e un momento concentrato ql^2 applicato in B. **Si calcolino le reazioni vincolari interne ed esterne, e si rappresentino i diagrammi quotati delle azioni interne (M, N, T).**



Sezione a spessore sottile costante b 

Dati del problema:

$$M_z = 10 \text{ kNm} = 10 \cdot 10^3 \text{ Nmm}$$

$$\begin{aligned} a &= 20 \text{ mm} \quad \text{lato} \\ b &= 0.5 \text{ mm} \quad \text{spessore} \end{aligned} \quad \left\{ \frac{a}{b} = 40 > 20 \quad \text{b trascurabile} \right.$$

sezione SOTTILE CHIUSA

Per calcolare le tensioni in una sezione sottile chiusa sotto posta a momento torcente M_z utilizzo la formula di Bredt:

$$\tau_z = \frac{M_z}{2 \Omega b}$$

 τ_z = tensioni tangenziali Ω = area netta delle linee medie della sezione

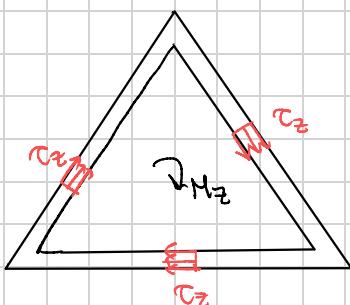
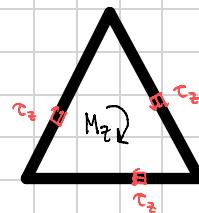
AREA del TRIANGOLO : $\Omega = \frac{a \cdot h}{2}$ $h = \text{altezza del triangolo} = a \sin \frac{\pi}{3} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Omega = \frac{a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = (20)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 173,2 \text{ mm}^2$$

$$\tau_z = \frac{\frac{10 \cdot 10^3}{3}}{2 \cdot 173,2 \cdot 0,5} = 57,7 \text{ MPa} \quad \text{modulo delle tensioni}$$

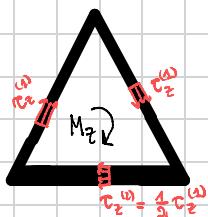
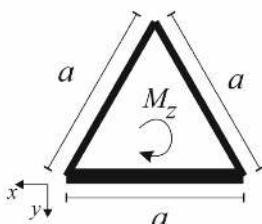
andamento:

COSTANTE sullo SPESSORE

verso: concorde a M_z 

VARIANTE 1:

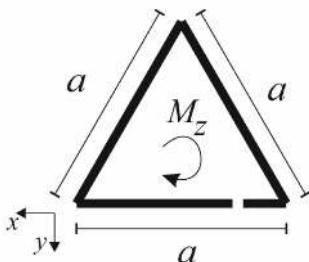
Variante 1: spessore del tratto orizzontale pari a $2b$:



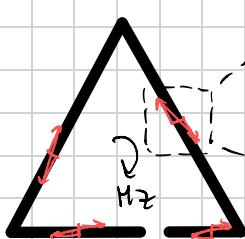
\Rightarrow la tensione nel tratto orizzontale risulta essere la metà rispetto agli altri tratti. (23,86 MPa)

VARIANTE 2:

Variante 2: sezione sottile aperta:



$$\tau_z = \frac{10 \cdot 10^3}{2,5} \cdot 0,5 = 2000 \text{ MPa}$$



lo spessore doppio è pari a 1 mm
⇒ siamo ormai nell'hp di spessore

rettile -

$$\tau_z^{(1)} = \frac{M_z}{2 \cdot I_t \cdot b} \text{ per i tratti aventi spessore } b = 0,5 \text{ mm.}$$

$$\tau_z^{(2)} = \frac{M_z}{2 \cdot I_t \cdot 2b} \text{ per il tratto con spessore } 2b \text{ doppio}$$

Se la sezione è sottile aperta
NON POSSO usare le formule
di Bredt

Dovrò utilizzare le formule per tensione in
sezioni sottili aperte:

$$C_z = \frac{M_z}{I_t} \cdot b \quad \text{con } I_t = \text{fattore di rigidezza torsionale}$$

$$I_t = \sum_{i=1}^3 I_t^{(i)} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} ab^3\right) = 20 \cdot 0,5^3 = 2,5 \text{ mm}^4$$

andamento: a ferro, massimo sui bordi

Verso: concorda a M_z , in
ogni tratto di sezione

A parità di M_z nascono
tensioni maggiori, pertanto la
seziona aperta raggiunge la tensione ammissibile per
valori di momento torcente inferiori.

ES 2

Dati del problema:

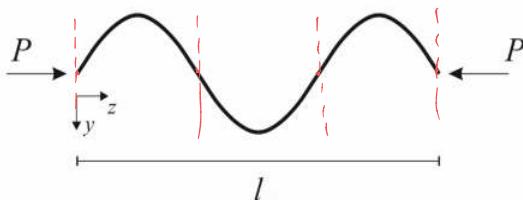
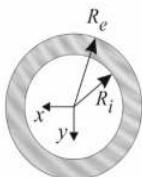
$$E = 10 \text{ GPa}$$

$$l = 24 \text{ mm}$$

$$R_e = 0.7 \text{ mm}$$

$$R_i = 0.5 \text{ mm}$$

Sezione costante:



Poiché è fornito un modulo elastico della struttura, si tratta di un corpo deformabile ad elasticità diffusa suella (trave alla Euler-Bernoulli).

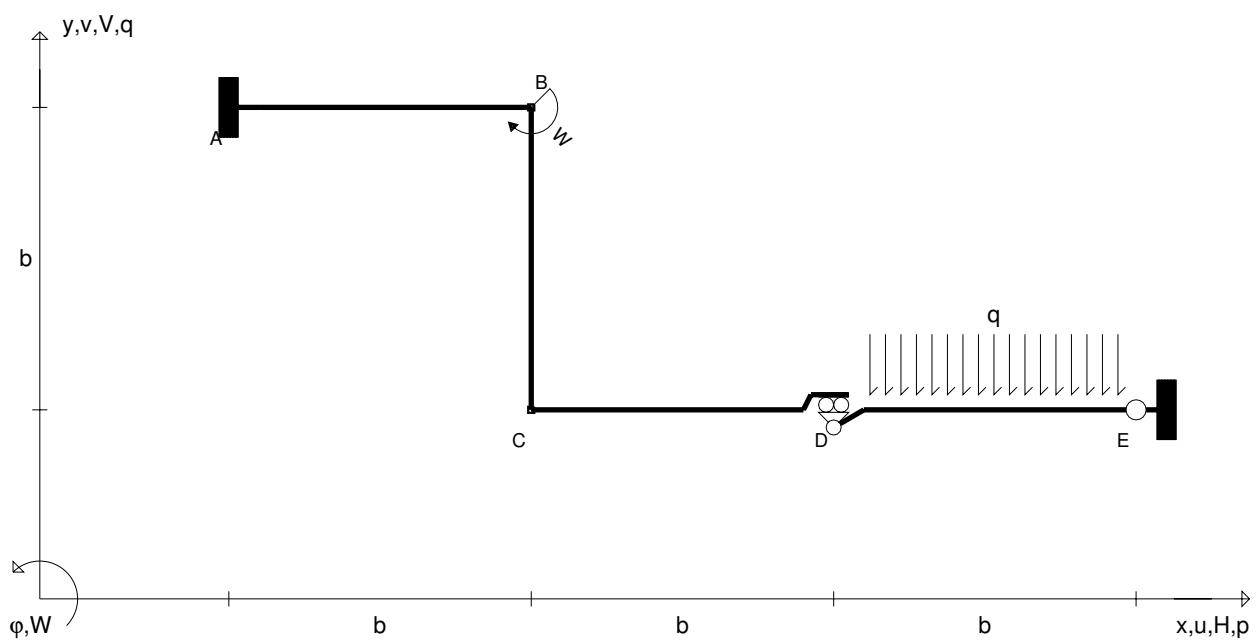
Poiché posso considerare piccoli spostamenti, la lunghezza iniziale (indeformata) e quella deformata posso considerarle uguali.

Considerando la deformata qualitativa fornita, posso calcolare ℓ_0 LUNGHEZZA DI LIBERA INFLESSIONE come DISTANZA tra due punti di flesso: $\ell_0 = \frac{1}{3} l = \frac{1}{3} 24 = 8 \text{ mm}$

La formula generale per il calcolo del carico critico è: $P_{cr} = \frac{\pi^2}{\ell_0^2} EI$
con I il momento di INERZIA in direzione x (uscente del piano).

$$I_x = \frac{\pi R_e^4}{4} - \frac{\pi R_i^4}{4} = \frac{\pi}{4} (R_e^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{4} (0.7^4 - 0.5^4) = 0.139 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{\ell_0^2} EI = \frac{\pi^2}{8^2} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0.139 = 215.1 \text{ N}$$



$$W_B = -W = -Fb$$

$$q_{DE} = -q = -F/b$$

$$EJ_{AB} = EJ$$

$$EJ_{BC} = EJ$$

$$EJ_{CD} = EJ$$

$$EJ_{DE} = EJ$$

Verso effettivo dei carichi riportato nel disegno.

Calcolare reazioni vincolari della struttura e delle aste.

Tracciare i diagrammi delle azioni interne nelle aste.

Esprimere le funzioni delle azioni interne nelle aste.

Calcolare spostamento e rotazione di tutti i nodi.

$u_A \nu_A \varphi_A$ spostamento assoluto del nodo A.

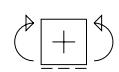
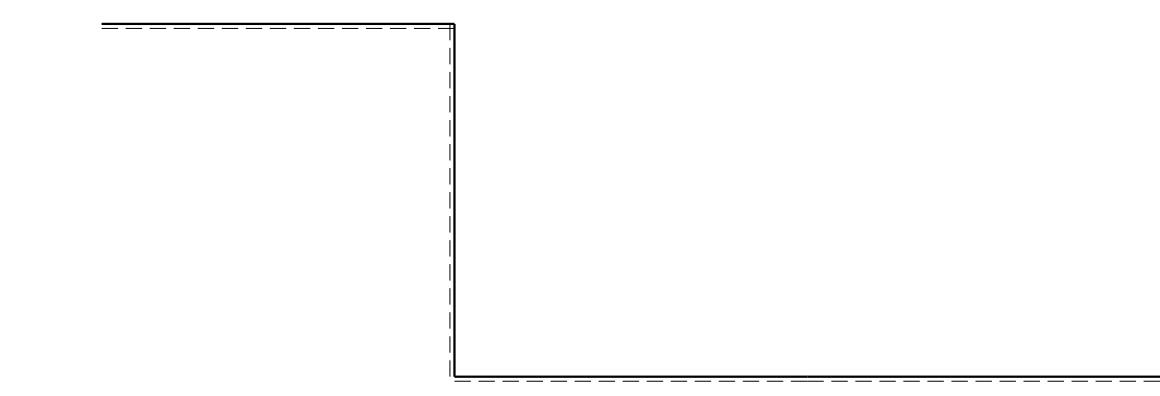
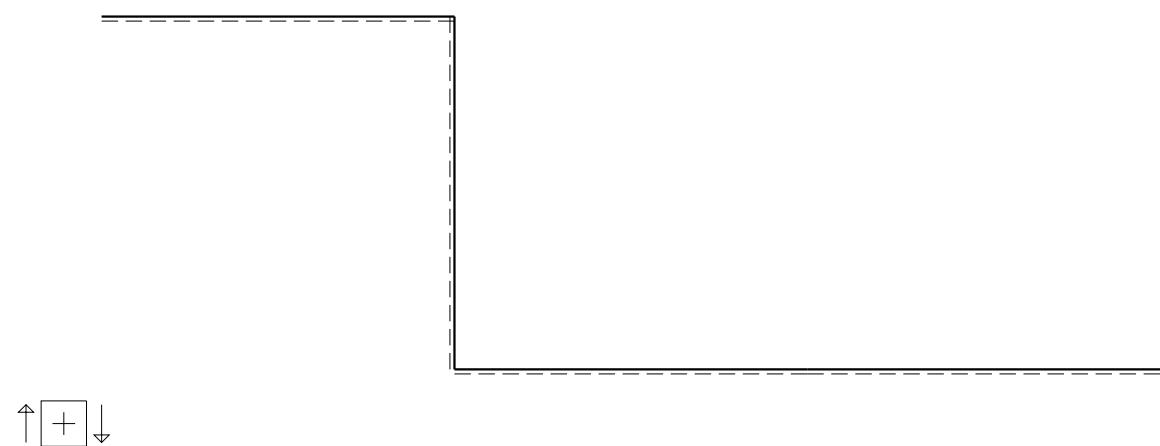
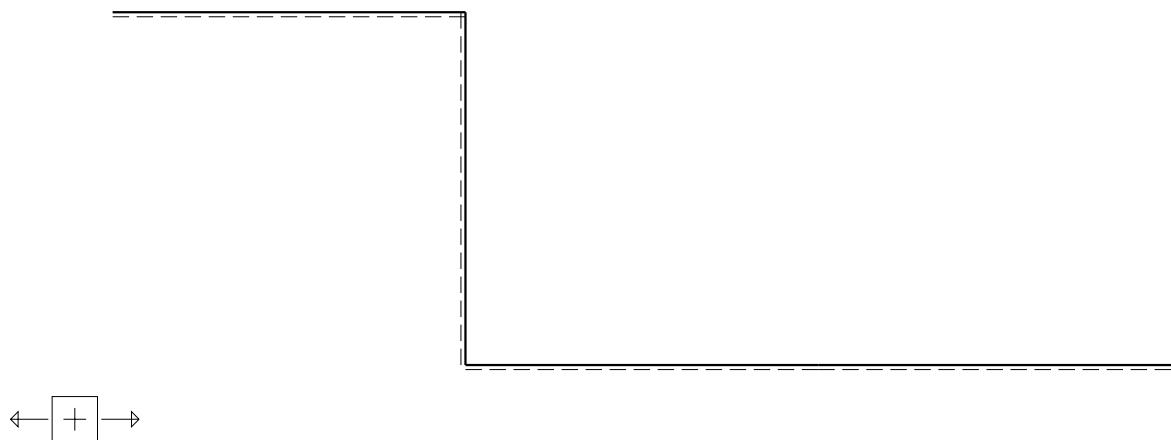
$J_{AB} x_{AB} \vartheta_{AB}$ riferimento locale asta AB con origine in A.

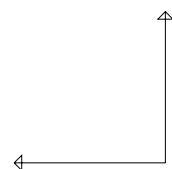
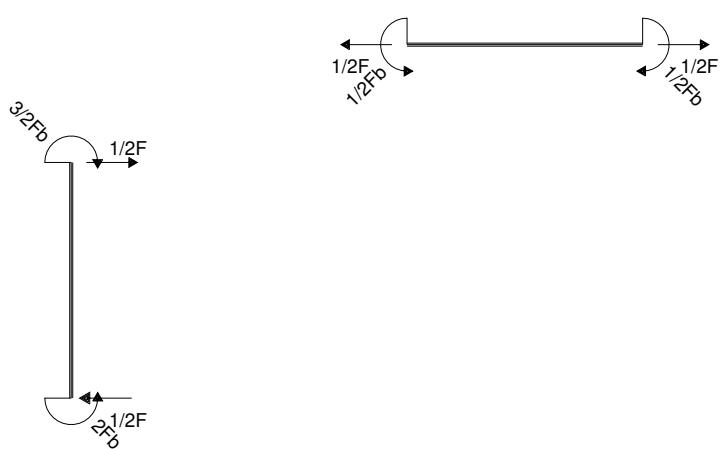
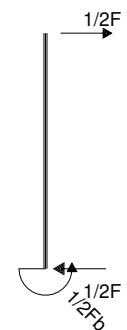
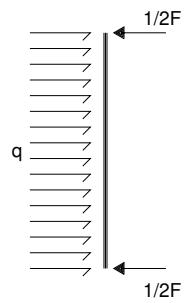
<> ESAME 15/01/2019 - APPELLO 01 - IPERSTATICA

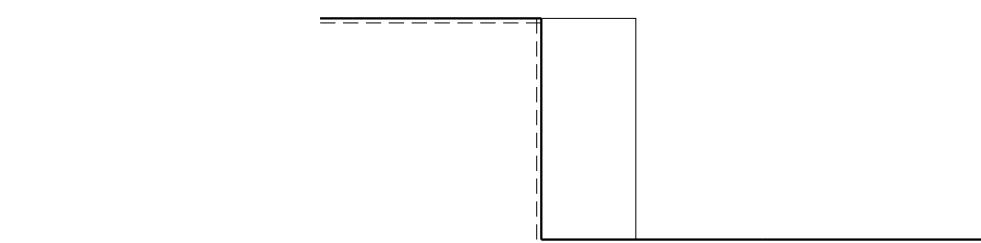
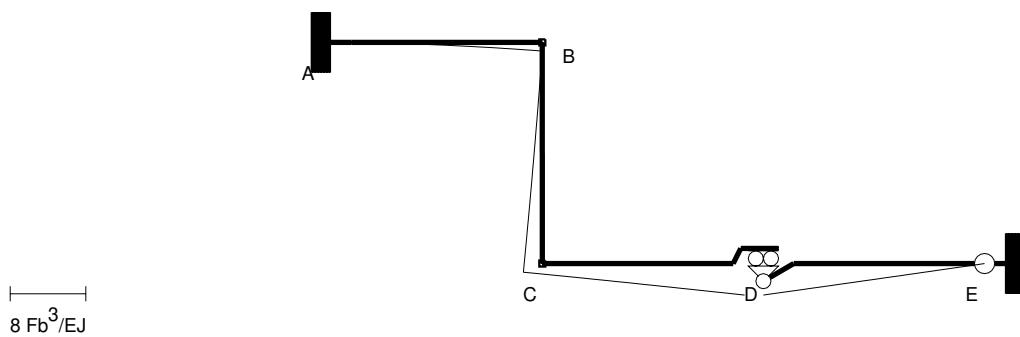
<>

<> Struttura 1: Isostatica Testo 1

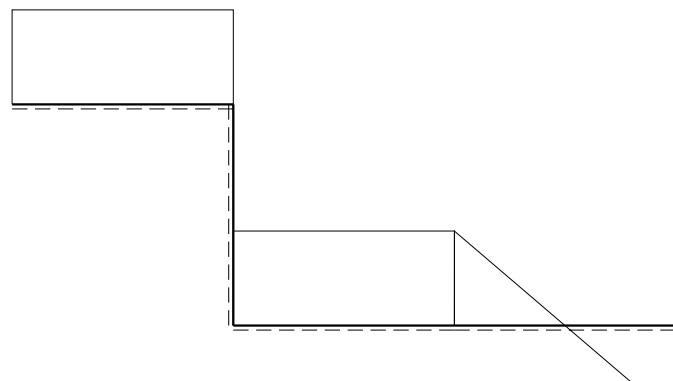
<>



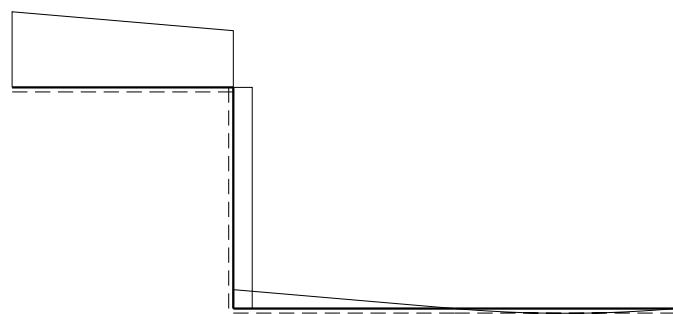




$\leftarrow \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \rightarrow$
|————|
 $0.4 F$



$\uparrow \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \downarrow$
|————|
 $0.4 F$



$\curvearrowright \begin{matrix} + \\ \hline - \end{matrix} \curvearrowleft$
|————|
 $2 Fb$

REAZIONI

$$H_A = 0$$

$$V_A = 1/2qb = 1/2F$$

$$W_A = W + qb^2 = 2Fb$$

$$H_E = 0$$

$$V_E = 1/2qb = 1/2F$$

$$H_{AB} = 0$$

$$V_{AB} = 1/2qb = 1/2F$$

$$W_{AB} = W + qb^2 = 2Fb$$

$$H_{BA} = 0$$

$$V_{BA} = -1/2qb = -1/2F$$

$$W_{BA} = -W - 1/2qb^2 = -3/2Fb$$

$$H_{BC} = 0$$

$$V_{BC} = 1/2qb = 1/2F$$

$$W_{BC} = 1/2qb^2 = 1/2Fb$$

$$H_{CB} = 0$$

$$V_{CB} = -1/2qb = -1/2F$$

$$W_{CB} = -1/2qb^2 = -1/2Fb$$

$$H_{CD} = 0$$

$$V_{CD} = 1/2qb = 1/2F$$

$$W_{CD} = 1/2qb^2 = 1/2Fb$$

$$H_{DC} = 0$$

$$V_{DC} = -1/2qb = -1/2F$$

$$W_{DC} = 0$$

$$H_{DE} = 0$$

$$V_{DE} = 1/2qb = 1/2F$$

$$W_{DE} = 0$$

$$H_{ED} = 0$$

$$V_{ED} = 1/2qb = 1/2F$$

$$W_{ED} = 0$$

SPOSTAMENTI NODALI

$$u_A = 0$$

$$v_A = 0$$

$$\varphi_A = 0$$

$$u_B = 0$$

$$v_B = -1/2(Wb^2/EJ) - 5/12(qb^4/EJ) = -11/12(Fb^3/EJ)$$

$$\varphi_B = -(Wb/EJ) - 3/4(qb^3/EJ) = -7/4(Fb^2/EJ)$$

$$u_C = -(Wb^2/EJ) - (qb^4/EJ) = -2(Fb^3/EJ)$$

$$v_C = -1/2(Wb^2/EJ) - 5/12(qb^4/EJ) = -11/12(Fb^3/EJ)$$

$$\varphi_C = -(Wb/EJ) - 5/4(qb^3/EJ) = -9/4(Fb^2/EJ)$$

$$u_{DDE} = 0$$

$$v_D = -3/2(Wb^2/EJ) - 11/6(qb^4/EJ) = -10/3(Fb^3/EJ)$$

$$\varphi_{DDE} = 3/2(Wb/EJ) + 43/24(qb^3/EJ) = 79/24(Fb^2/EJ)$$

$$u_E = 0$$

$$v_E = 0$$

$$\varphi_{EED} = 3/2(Wb/EJ) + 15/8(qb^3/EJ) = 27/8(Fb^2/EJ)$$

AZIONI INTERNE (coordinate locali)

$$N_{AB} = 0$$

$$T_{AB} = 1/2F$$

$$M_{AB} = -2Fb + 1/2Fx$$

$$N_{BC} = 1/2F$$

$$T_{BC} = 0$$

$$M_{BC} = -1/2Fb$$

$$N_{CD} = 0$$

$$T_{CD} = 1/2F$$

$$M_{CD} = -1/2Fb + 1/2Fx$$

$$N_{DE} = 0$$

$$T_{DE} = 1/2F - qx$$

$$M_{DE} = 1/2Fx - 1/2qx^2$$