CONSORZIO NETTUNO

POLITECNICO DI TORINO

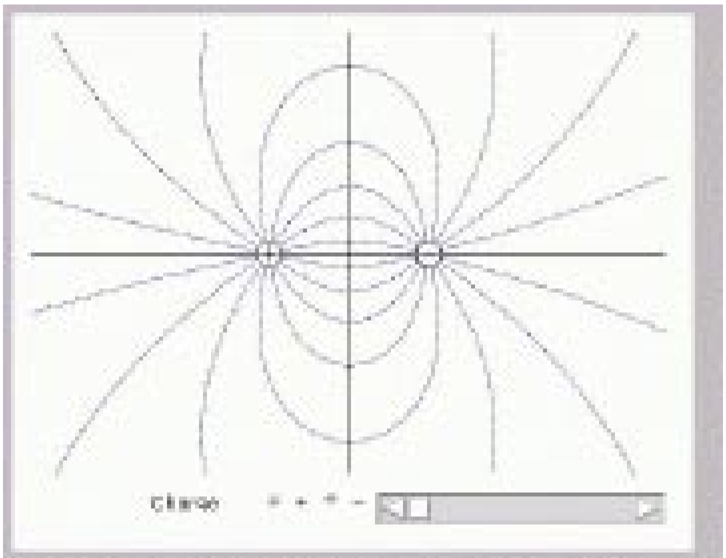
DIPLOMI UNIVERSITARI TELEDIDATTICI

POLO DI TORINO

DISPENSE DI FISICA II

Versione 1.2

Anno Accademico 1999-2000



The sign of right electric charge can be changed by the radio button.

Le dispense si articolano in 14 esercitazioni che corrispondono ai 14 gruppi di due ore che vengono svolte in aula dal tutor. Ciascuna esercitazione contiene dapprima una parte di teoria in cui sono omesse le dimostrazioni (eventualmente reperibili su libri di testo), ma vengono piuttosto messe in rilievo le formule e i concetti necessari per lo svolgimento degli esercizi, proposti nella seconda parte di ogni esercitazione. La parte di esercizi è strutturata in modo tale da accompagnare lo studente nelle 3 fasi del processo di apprendimento e preparazione all'esame: una prima fase di esercizi svolti, una seconda di esercizi proposti ed infine un momento di autoverifica mediante quiz.

Le dispense sono frutto di una riorganizzazione delle precedenti versioni opera di GianLuca Ghigo, Fabrizio Giorgis, Alessandro Pelizzola e Mauro Rajteri a cui vanno i ringraziamenti degli autori: Sergio Ferrero, Marco Pretti, Enrica Ruffino e Giovanni Alberto Ummarino.

La parola elettricità deriva dal greco *electron* (ambra) perché già i greci nel 600 a.C. sapevano che una barretta d'ambra strofinata con un panno attrae piccoli frammenti di foglie secche. Quando un corpo manifesta questa proprietà si dice che possiede una carica elettrica. Esistono due tipi diversi di cariche, che convenzionalmente vengono chiamate positive e negative. Nel sistema internazionale (SI) l'unità di misura della carica è il *coulomb* (C). La carica elettrica è una grandezza *quantizzata*, ciò significa che può assumere solo valori discreti, multipli della carica elementare che ha il valore di $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ *C.* Sperimentalmente si osserva che *cariche dello stesso tipo si respingono e cariche di tipo opposto si attraggono. L'elettrostatica* si occupa dello studio delle cariche elettriche a riposo e si basa su tre leggi fondamentali: la legge di Coulomb, il principio di conservazione della carica ed il principio di sovrapposizione degli effetti.

Legge di Coulomb

Il fisico Charles Coulomb nel 1785 determinò in termini quantitativi l'interazione tra cariche elettriche. Mediante esperimenti con una bilancia di torsione, Coulomb dedusse che la forza esercitata da una carica puntiforme $q1$ su di un'altra carica puntiforme q_2 posta ad una distanza r_{21} dalla prima è del tipo

$$F_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}u_r$$

dove k è una costante di proporzionalità e u_r è un versore diretto verso $q2$ lungo la congiungente delle due cariche. Nel sistema internazionale la costante k si esprime nella forma

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.988 \cdot 10^9\, Nm^2C^{-2} \cong 9 \cdot 10^9\, Nm^2C^{-2}$$

dove ε_0 si chiama **costante dielettrica (o permittività) del vuoto** e vale $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2\ N^{-1}\ m^{-2}$

Principio di conservazione della carica

Questo principio afferma che *la quantità totale di carica elettrica che si produce in qualsiasi processo è nulla.* Tutti gli esperimenti, fino ad ora, hanno confermato la validità di questa legge, che deve essere considerata una delle leggi fondamentali della fisica.

Principio di sovrapposizione degli effetti

In presenza di più di due cariche elettriche questo principio consente di considerare la forza agente su di una carica come la somma di tutte le forze tra ciascuna coppia di cariche come se tutte le altre non esistessero.

Campo elettrico

Una carica esercita su altre cariche una forza elettrica svolgendo un'*azione a distanza*. Per meglio descrivere questo fenomeno è utile introdurre il concetto di **campo** come mediatore tra le cariche. Si può considerare che ogni carica genera un campo elettrico in tutto lo spazio e ogni altra carica interagisce con tale campo dando luogo alla forza elettrica. L'**intensità di campo elettrico** che esiste in un punto dello spazio è definita come il rapporto tra la forza che agisce su una carica di prova *q* ed il valore di tale carica

$$E = \frac{F}{q}$$

Dimensionalmente il campo è una forza per unità di carica quindi si misura in [N C^{-1}].

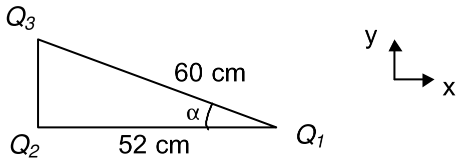
Per visualizzare il campo elettrico, che è un *campo vettoriale*, si possono tracciare delle linee che indicano la direzione del campo in tutti i punti dello spazio (**linee di forza**). Tali linee, per definizione, escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative; la loro densità è proporzionale all'intensità del campo.

Nei materiali in cui sono presenti cariche libere di muoversi (*conduttori*), in condizioni statiche il campo elettrico deve essere nullo, perché altrimenti ci sarebbe una forza che farebbe muovere le cariche; per lo stesso motivo le linee di forza del campo devono essere perpendicolari alla superficie esterna del materiale.

Esercizi svolti

Esercizio 1.1

Calcolare la forza che agisce sulla carica Q_1 = 100 μC, dovuta alle cariche Q_2 = -30 μC e Q_3 = 70 μC disposte come riportato in figura



Soluzione: La forza che agisce sulla carica Q_1 è data dalla composizione vettoriale delle forze dovute alle due cariche Q_3 e Q_3

$$\left|F_{12}\right| = \left|k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\right| = 99.9\,N$$

$$\left|F_{13}\right| = \left|k\frac{Q_1 Q_3}{r_{13}^2}\right| = 175\,N$$

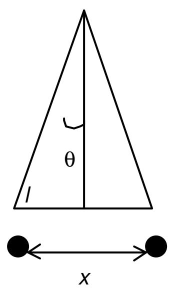
$$\left|F_{13x}\right| = \left|F_{13}\right|\cos\alpha - \left|F_{12}\right| = 51.7\,N$$

$$\left|F_{13y}\right| = -\left|F_{13}\right|\operatorname{sen}\alpha = -87.5\,N$$

$$F_{13} = F_{13}\mathrm{i} + F_{13}\mathrm{j} = (51.7\mathrm{i} - 87.5\mathrm{j})\,N$$

Esercizio 1.2

Due palline, con uguale massa *m* e carica *q*, sono appese come mostrato in figura. Calcolare la distanza tra le due palline sapendo che $q = 2.4 \cdot 10^{-6}$ C, l =120 cm e m = 10 g.



Soluzione: Sulle palline agiscono la forza peso e la forza di Coulomb

$$F_e = k\frac{q^2}{x^2} \qquad F_p = mg$$

All'equilibrio la forza risultante che agisce sulle palline deve avere la stessa direzione del filo che le sostiene, quindi deve essere:

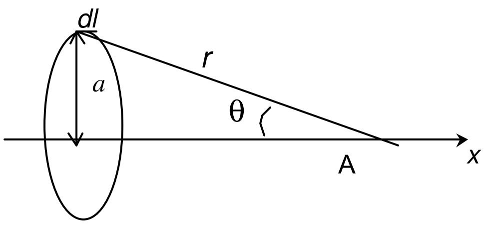
$$\tan\theta = \frac{F_e}{F_p}$$

Facendo l'ipotesi che l'angolo θ sia piccolo $(\tan\theta \approx \mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{2l})$ si ottiene

$$x^3 = \frac{lq^2}{2\pi\varepsilon_0 mg}; \qquad x = 10.8\ cm$$

Esercizio 1.3

Un sottile anello di raggio *a* possiede una carica totale *Q* distribuita uniformemente su di esso. Calcolare il valore del campo elettrico per un generico punto A sull'asse dell'anello.



Soluzione: La carica presente su un segmentino d*l* dell'anello è

$$dQ = \frac{Q}{2\pi a} dl$$

e produce un campo elettrico

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi a r^3} dl$$

Il campo totale è dato dall'integrazione su tutta la circonferenza, ma per ragioni di simmetria il campo risultante è diretto lungo *x*, quindi

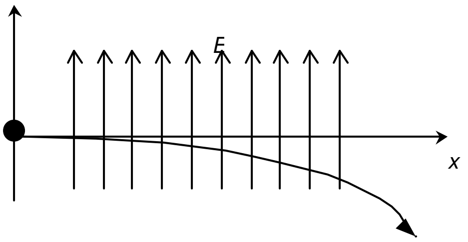
$$E = \int dE_x = \int \cos\theta \, dE$$

$$r = \sqrt{x^2 + a^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{2\pi a (x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi a} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Esercizio 1.4

Un elettrone che si muove lungo la direzione *x* con velocità $v_0 = 10^7$ m/s è sottoposto, per un tratto lungo d = 4 cm, ad un campo elettrico uniforme E = 10^4 N/C ortogonale alla sua velocità. Calcolare in quale direzione si muove l'elettrone dopo aver attraversato la regione in cui è presente il campo elettrico.



Soluzione: Il campo elettrico imprime all'elettrone un'accelerazione

$$a_y = \frac{F}{m} = -\frac{qE}{m}$$

che lo fa spostare nella direzione *y* secondo la legge

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

mentre lungo l'asse *x* si muove con moto uniforme

$$x = v_0 t$$

Eliminando la variabile *t* dalle equazioni si ottiene

$$y = -\frac{qE}{2mv_0^2} x^2$$

Le componenti della velocità dell'elettrone all'uscita del campo sono

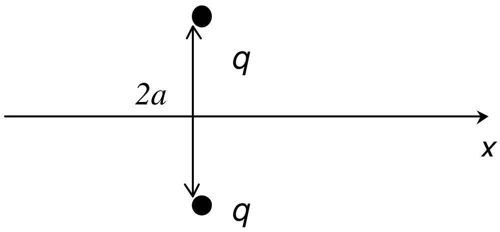
$$v_y = \sqrt{2a_y y} = \frac{qEd}{mv_0} \qquad v_x = v_0$$

da cui è possibile ricavare l'angolo che la direzione dell'elettrone forma con l'asse *x*

$$\tan\theta = \frac{-v_y}{v_x} = \frac{qEx}{mv_0^2} = -0.7 \qquad \theta = -35°$$

Esercizio 1.5

Su un piano orizzontale sono poste due cariche *q* ad una distanza 2*a* l'una dall'altra. Determinare il punto appartenente all'asse *x* (perpendicolare alla congiungente delle due cariche e passante per il suo punto medio) in cui il campo elettrico raggiunge il valore massimo.



Soluzione:

$$E = k\frac{q}{a^2 + x^2} \qquad E_x = E_1 \cos\theta \qquad E_y = E_1 \,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$E_x = k\frac{q}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = kq\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE_x}{dx} = kq\frac{(a^2 + x^2)^{3/2} - 3x^2\sqrt{a^2 + x^2}}{(a^2 + x^2)^3} = kq\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{(a^2 + x^2)^3}(a^2 + x^2 - 3x^2)$$

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \Rightarrow a^2 - 2x^2 = 0 \qquad x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Esercizi proposti

Esercizio 1.6

Un dipolo elettrico di momento **p** è posto a distanza a= 1 m da una carica puntiforme $Q=+10^{-10}$ coulomb parallelamente al campo elettrico generato da quest'ultima.
Se sul dipolo agisce una forza di intensità F= 1 newton, quanto vale il momento di dipolo?
Come deve essere orientato il dipolo affinché la forza sia attrattiva?
Risultato: p=0.55 coulomb m

Esercizio 1.7

Secondo il modello di Bohr nell'atomo di idrogeno non eccitato l'elettrone (carica –e=-1.6 10^{-19} coulomb, massa m_e=9.1 10^{-31} kg) descrive attorno al nucleo (carica +e=1.6 10^{-19} coulomb, massa m_e=1.67 10^{-27} kg) un orbita circolare di raggio r=5.3 10^{-11} m.
Nell'ipotesi che la massa sia indipendente dalla velocità determinare:

1) La forza di attrazione F che si esercita tra il nucleo e l'elettrone.
2) La velocità v dell'elettrone.
3) La frequenza í di rivoluzione dell'elettrone.
4) L'energia totale U dell'elettrone.

Risultato: F=3.6 10^{-47} newton , v= 2.2 10^{6} m/sec, í=6.5 10^{15} giri/sec, U= -13.7 eV

Esercizio 1.8

Un dipolo elettrico è costituito da due cariche opposte di modulo Q= 10^{-6} coulomb poste fra loro a distanza d=2 cm. Esso è immerso in un campo elettrico uniforme di intensità 10^{5} newton/coulomb. Determinare:

1) Il valore massimo del momento meccanico M che si esercita sul dipolo.
2) Il lavoro U che bisogna compiere per ruotare il dipolo di 180 º attorno al suo baricentro partendo dalla posizione di equilibrio.

Risultato: M=2.3 newton metro, U= 4 10^{-3} joule

Esercizio 1.9

Si abbiano due sferette conduttrici uguali, l'una A fissa e l'altra B mobile, di massa m=2.3 grammi, sospese nel vuoto mediante fili di lunghezza l=12 cm a un punto O. Inizialmente le due sferette si toccano. Se si porta su ciascuna sferetta la carica q, la sferetta B si allontana da A e nella nuova posizione di equilibrio il filo di sospensione di b forma un angolo á= 60 º con quello di A.
Calcolare il valore della carica q.

Risultato: q=1.8 10^{-8} coulomb

Esercizio 1.10

Un pendolo è costituito da un filo sottile di massa trascurabile di lunghezza l=0.9 metri al cui estremo libero è attaccata una sferetta di materiale conduttore di massa m=5 10^{-4} Kg. Si immagini di caricare la sferetta con una carica positiva q=10^{-7} coulomb e di fare oscillare il pendolo, nel vuoto, in un campo elettrico uniforme E diretto secondo la verticale; in un primo tempo il verso del campo elettrico sia dall'alto verso il basso ed in un secondo momento dal basso verso l'alto. Nel primo caso la durata di 50 piccole oscillazioni complete è di 86 secondi, mentre nel secondo caso è di 107 secondi. Calcolare l'equazione differenziale che descrive il moto del pendolo e integrarla. Calcolare l'intensità del campo elettrico E.

Risultato: $E=1.06\ 10^{4}$ volt/m

1 Quesiti di autoverifica

1) Una carica elettrica si sposta da un punto A ad un punto B esclusivamente sotto l'effetto di un campo elettrico statico presente nello spazio:
a) l'energia potenziale della carica aumenta.
b) l'energia cinetica della carica aumenta.
c) per il principio di conservazione dell'energia, l'energia cinetica diminuisce mentre l'energia potenziale aumenta.
d) l'energia cinetica della carica rimane costante.

2) Le linee di forza del campo elettrostatico:
a) sono sempre rette in accordo con la legge di Coulomb.
b) possono avere forma qualsiasi.
c) non possono essere linee chiuse.
d) sono sempre linee chiuse.

3) Quanto lontani devono essere due protoni ($q_p = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ $C^2/N \cdot m^2$) perché la loro forza di interazione sia uguale al peso di un protone sulla superficie terrestre ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, g = 9.81 m/s^2)
a) ≈ 1 metro.
b) ≈ 10 metri.
c) ≈ 1 centimetro.
d) ≈ 10 centimetri.

4) Perché due linee del campo elettrostatico non possono mai intersecarsi?
a) perché il campo elettrostatico è conservativo.
b)perché il potenziale elettrostatico è una funzione scalare.
c) perché il campo $\vec{E}$ ha in ogni punto un modulo, una direzione ed un verso.
d) perché per il campo elettrostatico vale la legge di Gauss.

5) Un elettrone è collocato in una zona dello spazio in cui è stato fatto il vuoto e dove è presente un campo elettrico uniforme: se si trascura la forza gravitazionale, quale delle seguenti proprietà caratterizza il moto successivo dell'elettrone?
a) velocità costante nella direzione del campo e nel verso opposto.
b) accelerazione costante nella direzione del campo e nel verso opposto.
c) velocità costante nella direzione e nel verso del campo.
d) accelerazione costante nella direzione e nel verso del campo.

Autore: Giovanni Alberto Ummarino

Flusso vettore

Si consideri una superficie S in una regione dello spazio in cui è presente un campo vettoriale A. In ogni punto della superficie è possibile definire un versore perpendicolare ad S. Si definisce *flusso* del vettore A attraverso la superficie S

$$\Phi_A = \int_S A \cdot u \, ds$$

Nel caso in cui la superficie sia chiusa si assume convenzionalmente che il versore **u** sia orientato verso l'esterno della superficie e si usa la notazione

$$\Phi_A = \oint_S A \cdot u \, ds$$

Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è proporzionale alla carica contenuta al suo interno e precisamente

$$\Phi_A = \oint_S E \cdot u \, ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad [1]$$

Questo teorema, derivato dalle leggi fondamentali dell'elettrostatica, risulta molto utile nella soluzione dei problemi di elettrostatica in cui sia possibile, in base a considerazioni di simmetria, determinare la direzione del campo elettrico e quindi scegliere una superficie di integrazione che facilita il calcolo del flusso.
Applicando il teorema della divergenza alla [1] si ottiene una espressione del teorema di Gauss che vale puntualmente e coinvolge grandezze microscopiche

$$div\ E = \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

dove ρ è la densità volumica di carica in un punto dello spazio e l'operatore divergenza è così definito

$$\nabla \cdot E = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial Ey}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Potenziale elettrico

Il lavoro compiuto da forze *conservative* è indipendente dal cammino percorso e quindi per esse è possibile definire un'energia potenziale. Siccome le forze centrali sono conservative , anche per la forza di Coulomb, che ha un andamento del tipo $1/r^2$, è possibile definire un'energia potenziale *U* (che è una grandezza *scalare*). La variazione di energia potenziale di una carica *q* che viene spostata in un campo elettrico da un punto *a* ad un punto *b* è uguale al lavoro compiuto dalla forza elettrica cambiata di segno

$$U_b - U_a = -L_{ab} = -\int_a^b F \cdot ds = -q \int_a^b E \cdot ds$$

E' utile definire il **potenziale elettrico**, o più semplicemente **potenziale**, come *l'energia potenziale per unità di carica*

$$V = \frac{U}{q}$$

L'energia potenziale è definita a meno di una costante, quindi è conveniente determinare la *differenza di potenziale elettrico* (o *tensione*) come

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

L'unità di misura della tensione è il volt [V]=[J C^{-1}]. Le relazioni che legano il campo elettrico al potenziale sono

$$V_{ab} = -\int_a^b E \cdot ds$$

$$E = -\nabla V = -\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} i + \frac{\partial V}{\partial y} j + \frac{\partial V}{\partial z} k \right)$$

In un campo elettrico uniforme la differenza di potenziale tra due punti è

$$V_a - V_b = -\int_a^b E \cdot ds = Ed$$

dove *d* indica la proiezione, nella direzione del campo, della distanza tra i due punti.
Per poter definire il potenziale in un punto è necessario scegliere un punto di riferimento in cui il potenziale è nullo; se si suppone che tale punto sia all'infinito, allora per una carica *q* posta nell'origine, il potenziale è dato dalla formula

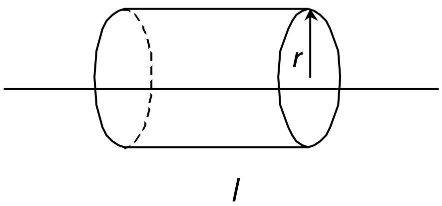
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

Le superfici che hanno lo stesso potenziale si dicono *equipotenziali* e sono perpendicolari alle linee di campo perché spostandosi su di esse il campo E non deve compiere lavoro.

Esercizi svolti

Esercizio 2.1

Su di un filo di lunghezza infinita è distribuita una carica uniforme per unità di lunghezza λ = 25 nC/m. Calcolare il campo elettrico in un punto che dista 15 cm dal filo.



Soluzione: La direzione del campo elettrico, grazie alla simmetria del problema, è radiale rispetto al filo, quindi applicando il teorema di Gauss alla superficie riportata in figura si ottiene un contributo al flusso solo dalla superficie laterale del cilindro

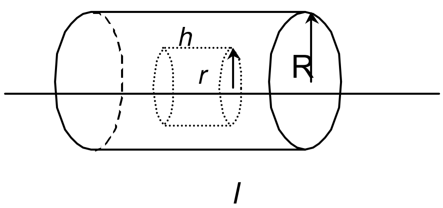
$$\Phi_e = \int E \cdot ds = E(r) 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

da questa relazione si può ricavare il valore del campo elettrico in funzione *r*

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = 3 \cdot 10^3 \ \ \mathrm{N/C}$$

Esercizio 2.2

Si consideri un cilindro di raggio R e lunghezza indefinita entro il quale vi siano delle cariche distribuite con densità di volume uniforme ρ. Determinare il campo elettrostatico in un generico punto P all'interno del cilindro e la differenza di potenziale tra l'asse del cilindro e le superfici laterali.



Soluzione: Consideriamo il cilindro, coassiale a quello dato, passante per il generico punto P distante *r* dall'asse. Il campo elettrico è radiale rispetto all'asse del cilindro, per cui contribuisce al calcolo del flusso solo la superficie laterale

$$\Phi_e = \int E \cdot ds = E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0}$$

da cui si ricava il campo

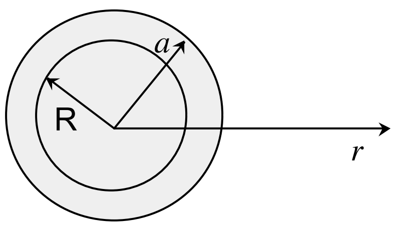
$$E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

La differenza di potenziale è

$$V_0 - V_R = \int_0^R E \cdot dr = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int_0^R r\, dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}R^2$$

Esercizio 2.3

Una sfera di raggio *a* possiede una densità di carica $\rho = k / r^2$, dove *r* indica la distanza dal centro della sfera e k è una costante. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale all'interno della sfera considerando che all'esterno della sfera sia $\rho = 0$.



Soluzione: La simmetria sferica implica che il campo è radiale, quindi si può applicare il teorema di Gauss ad una sfera di raggio *R* concentrica a quella data. La carica contenuta all'interno di tale sfera è

$$q = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi k R$$

Il campo su tale sfera vale

$$E(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{k}{\varepsilon_0 R}$$

Calcoliamo ora il potenziale della sfera di raggio *R*, supponendo di porre $V_\infty = V(r = \infty) = 0$,

$$V_R = \int_R^\infty E dr = \int_R^a E dr + \int_a^\infty E dr$$

il secondo integrale indica il potenziale sulla superficie della sfera di raggio *a* che contiene la carica totale *q* = $4\pi k a$ e quindi vale

$$V_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{k}{\varepsilon_0}$$

si ottiene, infine,

$$V_R = \int_R^a E dr + V_a = \int_R^a \frac{k}{\varepsilon_0 r} dr + V_a = \frac{k}{\varepsilon_0}\left(\log\frac{a}{R} + 1\right)$$

Esercizio 2.4

Nel tubo catodico di un televisore gli elettroni vengono accelerati, partendo dalla condizione di riposo, da una tensione di 4000 V. Calcolare la velocità finale dell'elettrone.

Soluzione: La variazione di energia potenziale subita dall'elettrone in seguito all'effetto del potenziale è

$$\Delta U = qV = .6.4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

La diminuzione di energia potenziale si trasforma in energia cinetica e ricordando che l'elettrone parte da fermo si ottiene

Esercizio 2.5

Con la stessa geometria dell'esercizio 1.3 calcolare il potenziale lungo l'asse e quindi ricavare il campo elettrico.

Soluzione: Ogni elemento dell'anello, che possiede una carica *dQ*, crea un potenziale che vale

$$E(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r}$$

Il potenziale totale si ottiene integrando tutti i contributi *dV*

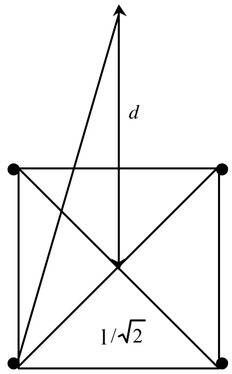
$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Il campo elettrico si ricava derivando il potenziale rispetto alla variabile *x*

$$E_0 = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

Esercizio 2.6

Sui vertici di un quadrato di lato $l = 5 \cdot 10^{-9}$ m vi sono quattro protoni. Calcolare quale velocità deve avere un protone che si muove lungo la perpendicolare al quadrato passante per il suo centro ed inizialmente ad una distanza $d = 5 \cdot 10^{-9}$ m, affinché riesca a raggiungere il centro del quadrato.



Soluzione:

$$V = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$r_d = \sqrt{d^2 + \frac{l^2}{2}}$$

$$r_0 = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\Delta U = \frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_d} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{2}}}\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2q^2}{m\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{l\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + \frac{l^2}{2}}}\right)} = 1.15 \cdot 10^4 \ \text{ m/s}$$

Esercizi proposti

Esercizio 2.7
Un filo rettilineo indefinito è carico con densità lineare ë=8.85 10^{-8} coulomb/metro. Trovare il campo elettrico E a 10 metri di distanza dal filo.
Risultato: E=1.6 10^{2} newton/metro

Esercizio 2.8
Calcolare il lavoro L necessario per caricare una sfera conduttrice di raggio R= 10 cm e con una carica q=1 ìcoulomb.
Risultato: L=4.5 10^{-2} joule

Esercizio 2.9
Due armature metalliche piane e parallele si trovano alla distanza d=1 cm. Ciascuna delle armature ha un' area S=10 cm^{2}. Esse vengono caricate con cariche uguali e di segno contrario q=10^{-10} coulomb. Calcolare la differenza di potenziale fra le armature.
Risultato: ÄV=113 volt

Esercizio 2.10
Una carica positiva q è distribuita su tutto il volume di una sfera di raggio R. La densità di carica varia con il raggio secondo la legge: ñ=á r. Determinare á e il campo elettrico E all'interno della sfera.
Risultato: á=q/(ðR^{4}), E=q r^{2}/(4 ð å$_{0}$ R^{4})

Esercizio 2.11
Un cilindro circolare retto di altezza indefinita e raggio R è carico di segno negativo su tutto il volume con densità di carica ñ. Trovare il campo elettrico E all'interno del cilindro e successivamente la differenza di potenziale fra l'asse e le generatrici.
Risultato: E= ñ r/(2 å$_{0}$), ÄV=ñ R^{2}/(4 å$_{0}$)

1) Se il flusso del campo $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa è nullo, si deduce che:
a) all'interno della superficie non ci sono cariche elettriche.
b) nessuna linea di forza attraversa la superficie.
c) all'interno della superficie la somma algebrica delle cariche è nulla.
d) all'interno della superficie ci sono solo cariche elettriche negative.

2) Nella formula della legge di Gauss $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \sum_i q_i / e_0$, $\vec{E}$ è il campo dovuto esclusivamente alle cariche q_i interne alla superficie chiusa S.
a) Vero.
b) Falso. E' il campo elettrico esistente nella regione di spazio qualunque sia la sua origine.
c) Vero, ma soltanto se le cariche q_i sono puntiformi.
d) Falso. E' il campo elettrico esistente nella regione di spazio qualunque sia la sua origine, purché non siano presenti anche fenomeni di induzione elettromagnetica.

3) Una prima superficie di Gauss è una sfera di raggio R e una seconda superficie di Gauss è una sfera concentrica alla prima di raggio r < R Se il flusso del campo elettrico attraverso la prima superficie è Q/ε_0 ed il flusso attraverso la seconda superficie è nullo, che cosa si può concludere?
a) una carica Q puntiforme è presente nel centro delle due sfere.
b) una carica Q è distribuita uniformemente nella zona all'interno della sfera più piccola.
c) una carica Q è posta nell'intercapedine tra le due sfere.
d) una carica Q è posta subito all'esterno della sfera maggiore.

4) Il potenziale di una configurazione di cariche puntiformi è nullo solo in determinati punti. Questo significa che la forza su una carica puntiforme è nulla in tali punti?
a) si.
b) no.
c) si, ma solo se le cariche che generano il campo sono di segno opposto alla carica di prova.
d) no, ma solo se il potenziale ha una simmetria sferica.

5) Il potenziale elettrostatico in un dato punto dello spazio ha valore nullo. Il campo elettrico nello stesso punto è:
a) nullo.
b) infinito.
c) indeterminabile.
d) massimo.

Dipolo elettrico

Un dipolo elettrico è la combinazione di due cariche *q* uguali in modulo, ma di segno opposto, separate da una distanza *d*. Si definisce come *momento di dipolo elettrico* il vettore

$$p = qd\,\underline{\mathrm{k}}$$

dove *k* è un versore diretto dalla carica negativa verso quella positiva. Il potenziale prodotto da un dipolo a grande distanza (*r* >> *d*) è

$$v(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\vartheta}{r^2}$$

Condensatore

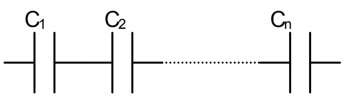
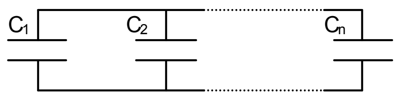
I condensatori sono dei dispositivi che servono ad immagazzinare delle cariche elettriche e sono costituiti da due *armature* di materiale conduttore isolate tra loro. Quando si applica al condensatore una differenza di potenziale costante, sulle sue armature si accumulano cariche di segno opposto, ma uguali in modulo. La costante di proporzionalità che lega la carica presente sul condensatore alla sua differenza di potenziale si chiama *capacità*

$$C = \frac{Q}{V}$$

e la sua unità di misura è il *farad* [F = C / V].
La capacità dipende dalla geometria del campione; nel caso di un condensatore ad armature piane parallele il suo valore è

$$C = \varepsilon_0\frac{A}{d}$$

dove *A* è la superficie delle armature e *d* la loro distanza.
Nel caso di più condensatori collegati in serie o in parallelo le formule per il calcolo della capacità totale sono riportate in tabella

Collegamento in serie	Collegamento in parallelo
	
$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$	$C = C_1 + C_2 + ...C_n$

Energia del campo elettrico

Un corpo elettricamente carico quando si scarica libera dell'energia che può essere attribuita a tutto il campo elettrico che viene prodotto dal corpo nello spazio circostante. La *densità di energia*, cioè l'energia per unità di volume, che si attribuisce al campo elettrico Vale

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Nel caso del condensatore l'energia che esso immagazzina vale

$$W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Esercizi svolti

Esercizio 3.1

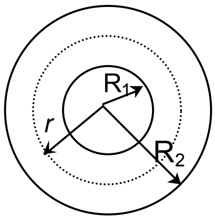
Calcolare le componenti cartesiane del campo elettrico generato da un dipolo *p* orientato lungo l'asse *x* in un punto lontano rispetto alle dimensioni del dipolo.

Soluzione:

$$E_x = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \qquad E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

Esercizio 3.2

Calcolare la capacità di un condensatore formato da due superfici sferiche concentriche di raggio R_1 ed R_2 e caricate con una carica *Q*.



Soluzione: Si applica il teorema di Gauss ad una sfera concentrica con quelle del condensatore ed avente raggio $R_1 < r < R_2$. Le linee di forza hanno un andamento radiale e quindi

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La differenza di potenziale tra le due sfere è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E\cdot dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_2R_1}$$

ricordando che $C = Q/\Delta V$ si ricava

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}$$

Si noti che

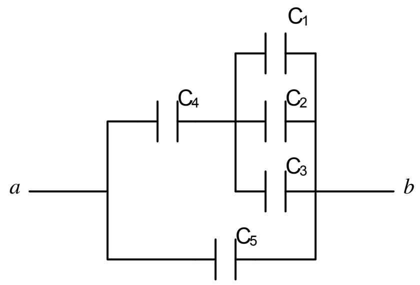
a) se $R_2 >> R_1$ allora $C=4\pi\varepsilon_0 R_1$
b) se $R_2 \approx R_1 \approx R$, con $d = R_2 - R_1$,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

che è il valore di un condensatore piano.

Esercizio 3.3

Determinare la capacità e l'energia totale del circuito in figura quando $C_1 = 1$pF, $C_2 = 2$ pF, $C_3 = 3$ pF, $C_4 = 4$ pF, $C_5 = 5$ pF e $V_{ab} = 100$ V. Calcolare, inoltre, la carica e la tensione di ciascun condensatore.



Soluzione: Applicando le regole sui condensatori in parallelo ed in serie si ottiene

$$C_{123} = C_1 + C_2 + C_3 = 6 \quad \text{pF}$$
$$C_{1234} = \frac{C_{123} C_4}{C_{123} + C_4} = 2.4 \quad \text{pF}$$
$$C_{tot} = C_{1234} + C_5 = 7.4 \quad \text{pF}$$

L'energia del sistema è

$$W_{tot} = \frac{1}{2} C_{tot} V_{ab}^2 = 3.7 \cdot 10^{-5} \quad \text{J}$$

Le cariche ed i potenziali di ogni condensatore sono rispettivamente

$V_5 = V_{ab} = 100$ V $\quad q_5 = C_5 V_5 = 0.5$ nC $\quad q_4 = C_{1234} V_{ab} = 0.24$ nC $\quad V_5 = \frac{q_4}{C_4} = 60$ V

$V_{123} = V_{ab} - V_4 = 40$ V $\quad q_1 = C_1 V_{123} = 40$ pC $\quad q_2 = C_2 V_{123} = 80$ pC $\quad q_3 = C_3 V_{123} = 120$ pC

Esercizio 3.4

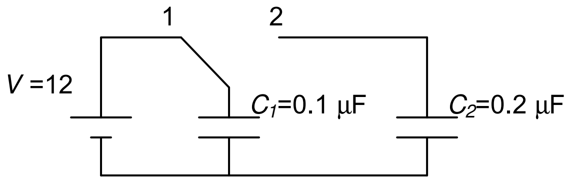
Sia dato un condensatore piano con armature di area *A* e distanti *d* (supporre *d* trascurabile rispetto alle dimensioni delle armature). Calcolare la forza che un'armatura esercita sull'altra quando il condensatore possiede una carica Q.

Soluzione: $E = \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 A}$ $\quad F = QE \quad$ $F = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 A}$

Esercizio 3.5

Nel circuito di figura il deviatore è inizialmente nella posizione 1, quindi viene commutato sulla posizione 2. Calcolare:

a) l'energia fornita dal generatore quando siamo nella posizione 1;
b) la quantità di carica posseduta dai due condensatori nella posizione 2;
c) l'energia incamerata nei due condensatori nella posizione 2.



Soluzione: L'energia fornita dal generatore coincide con l'energia posseduta dal condensatore C_1 nella posizione 1

$$W = \frac{1}{2} C_1 V^2 = 7.2\ \mu\text{J}$$

La carica posseduta C_1 in questa condizione è

$$Q = C_1 V = 1.2\ \mu\text{C}$$

Quando si passa alla posizione 2 la carica che era posseduta solo da C_1 si distribuisce anche su C_2 in modo che la differenza di potenziale sui due condensatori sia uguale; possiamo, dunque, scrivere le due equazioni

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad ; \quad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

da cui si ricava:

$$Q_2 = \frac{Q}{\frac{C_1}{C_2}+1} = 0.8\ \mu\text{C}$$
$$Q_1 = Q - Q_2 = 0.4\ \mu\text{C}$$

L'energia posseduta dai due condensatori nella posizione 2 è

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = 0.8\ \mu\text{J}$$
$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{Q_{21}^2}{C_2} = 1.6\ \mu\text{J}$$

Si osserva che l'energia totale del sistema nella posizione 2 è minore di quella di partenza. Il motivo è da attribuire alle perdite che avvengono nel transitorio tra le due configurazioni.

Esercizi proposti

Esercizio 3.6

Un sottile conduttore rettilineo collega due sfere metalliche scariche, la cui lunghezza è grande rispetto ai raggi delle due sfere (R_1=10 cm, R_2=20 cm). La sfera di raggio minore è cava. Se a 4 cm dal suo centro viene posta una carica positiva q e il suo potenziale risulta in tal modo di 10 volt, quanto vale la carica q?
Risultato: q=3.32 10^{-10} coulomb

Esercizio 3.7

Una sfera metallica isolata di raggio R=30 cm porta una carica elettrica Q=23,5 coulomb. Si determini il raggio R' della sfera entro cui è contenuto il 90% dell'energia elettrostatica del sistema.
Risultato: R'=3 m

Esercizio 3.8

Un condensatore da 2 microfarad è carico a 10000 volt. Esso viene connesso in parallelo con un condensatore da 8 microfarad. Qual' è il potenziale V risultante? Qual è l'energia immagazzinata U e U' nei condensatori prima e dopo averli collegati?
Risultato: V=2 10^3 volt, U=100 joule, U'=10 joule

Esercizio 3.9

Una carica elettrica Q=2 coulomb può essere ripartita tra due conduttori sferici di raggi R_1=10 cm e R_2=20 cm rispettivamente. I due conduttori sono posti a distanza grande rispetto ad R_1 e R_2, cosicché i fenomeni di induzione elettrostatica possono essere trascurati.
Determinare:
Come deve essere ripartita la carica q tra i due conduttori affinché l'energia potenziale del sistema risulti minima?
Quale relazione sussiste tra i potenziali V_1 e V_2 delle due sfere quando si realizza la condizione di cui al punto 1).
Risultato: Q_1=1 coulomb , Q_2=2 coulomb, V_1=V_2

Esercizio 3.10

Una d.d.p. V=100 volt è applicata ha un condensatore piano. Lo spazio fra le armature è riempito con acqua a 20 ºC (å$_r$ =80.3). Successivamente il sistema viene portato alla temperatura di 60 ºC e si constata che la d.d.p. fra le armature è salita al valore V'=121 volt. Quanto vale la costante dielettrica dell'acqua å'$_r$ a 60 ºC? In quale percentuale varia l'energia elettrostatica U del sistema?
Risultato: å'$_r$=66.3, U/U=21/100

Quiz a risposta multipla

1) Un condensatore a facce piane e parallele viene riempito per metà del suo volume interno da un dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r = 2. Se C_0 era la capacità del condensatore quando tra le armature c'era solo l'aria, la sua nuova capacità è:
a) minore della capacità C_0.
b) esattamente uguale alla capacità C_0.
c) maggiore della capacità C_0.
d) maggiore o minore della capacità C_0 a seconda che la superficie di separazione tra dielettrico e aria sia parallela o perpendicolare alle armature.

2) In quale rapporto sta il raggio terrestre ($R \approx 6 \cdot 10^6$ m) con il raggio r di una sfera conduttrice avente la capacità di un Farad?
a) $R/r \approx 10^{-2}$.
b) $R/r \approx 10^2$.
c) $R/r \approx 10^4$.
d) $R/r \approx 1$.

3) Devo realizzare una capacità di 8 ± 1 nF ma dispongo solo di 3 condensatori di capacità C_1=C_2= 10 nF e C_3= 50 nF. Posso ottenere la capacità richiesta collegando:
a) tutti e tre i condensatori in serie.
b) C_1 e C_2 in parallelo tra loro e C_3 in serie al parallelo dei due.
c) non posso ottenere in nessun modo la capacità richiesta.
d) C_1 e C_3 in parallelo tra loro e C_2 in serie al parallelo dei due.

4) Un condensatore piano carico e isolato viene connesso in parallelo ad un condensatore identico ma scarico. Se W è l'energia immagazzinata nel primo condensatore, l'energia finale del sistema è:
a) W_1=W.
b) W_1=2W.
c) W_1=W/4.
d) W_1=W/2.

5) Se le armature di un condensatore piano, connesso con un generatore di f.e.m. costante, sono lasciate libere di muoversi, esse tendono ad avvicinarsi perché portatrici di cariche di segno opposto e:
a) L'energia elettrostatica diminuisce, trasformandosi in energia cinetica delle armature.
b) L'energia elettrostatica aumenta.
c) L'energia elettrostatica rimane invariata.

d) La carica elettrica sulle armature diminuisce fino ad annullarsi quando le due armature giungono a contatto.

1) Un condensatore a facce piane e parallele viene riempito per metà del suo volume interno da un dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r = 2. Se C_0 era la capacità del condensatore quando tra le armature c'era solo l'aria, la sua nuova capacità è:
a) minore della capacità C_0.
b) esattamente uguale alla capacità C_0.
c) maggiore della capacità C_0.
d) maggiore o minore della capacità C_0 a seconda che la superficie di separazione tra dielettrico e aria sia parallela o perpendicolare alle armature.

2) In quale rapporto sta il raggio terrestre ($R \approx 6 \cdot 10^6$ m) con il raggio r di una sfera conduttrice avente la capacità di un Farad?
a) $R/r \approx 10^{-2}$.
b) $R/r \approx 10^2$.
c) $R/r \approx 10^4$.
d) $R/r \approx 1$.

3) Devo realizzare una capacità di 8 ± 1 nF ma dispongo solo di 3 condensatori di capacità C_1=C_2= 10 nF e C_3= 50 nF. Posso ottenere la capacità richiesta collegando:
a) tutti e tre i condensatori in serie.
b) C_1 e C_2 in parallelo tra loro e C_3 in serie al parallelo dei due.
c) non posso ottenere in nessun modo la capacità richiesta.
d) C_1 e C_3 in parallelo tra loro e C_2 in serie al parallelo dei due.

4) Un condensatore piano carico e isolato viene connesso in parallelo ad un condensatore identico ma scarico. Se W è l’energia immagazzinata nel primo condensatore, l’energia finale del sistema è:
a) W_1=W.
b) W_1=2W.
c) W_1=W/4.
d) W_1=W/2.

5) Se le armature di un condensatore piano, connesso con un generatore di f.e.m. costante, sono lasciate libere di muoversi, esse tendono ad avvicinarsi perché portatrici di cariche di segno opposto e:
a) L’energia elettrostatica diminuisce, trasformandosi in energia cinetica delle armature.
b) L’energia elettrostatica aumenta.
c) L’energia elettrostatica rimane invariata.
d) La carica elettrica sulle armature diminuisce fino ad annullarsi quando le due armature giungono a contatto.

Corrente elettrica

Lo studio delle cariche elettriche in moto può ancora essere affrontato con le leggi dell'elettrostatica perché non vengono sviluppati campi dipendenti dal tempo.
In un filo di materiale conduttore vi sono degli elettroni che sono in grado di muoversi liberamente e di creare un flusso di cariche attraverso la sezione del filo. La quantità netta di carica che attraversa la sezione del filo nell'unità di tempo prende il nome di corrente elettrica. La *corrente media* è quindi definita come

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

dove ΔQ è la carica che attraversa la sezione del conduttore nel tempo Δt. La *corrente istantanea* viene definita facendo tendere a zero il tempo Δt

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

L'unità di misura della corrente nel SI è l'ampere [A]=[C s^{-1}].
E' possibile collegare la corrente a grandezze microscopiche tramite la *densità di corrente*, cioè la corrente per unità di superficie, che è esprimibile come

$$\mathrm{j} = -ne\mathrm{v}_d$$

dove n è il numero di elettroni di conduzione per unità di volume, e è la carica dell'elettrone e v_d è la velocità di deriva degli elettroni.

Legge di Ohm

Affinché circoli della corrente in un filo è necessario che sia presente una differenza di potenziale ai suoi capi. La relazione che lega la tensione alla corrente è la legge di Ohm

$$V = RI$$

in cui R indica la *resistenza elettrica* del materiale. L'unità di misura della resistenza è l'ohm [Ω]=[V A^{-1}]. Nel caso di fili conduttori la resistenza dipende dalla forma geometrica secondo la relazione

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove l è la lunghezza del filo, S è l'area della sezione trasversale del filo e ρ è una costante di proporzionalità che dipende dal materiale e si chiama *resistività* (unità di misura [Ω m]). L'inverso della resistività si chiama *conducibilità* e si indica con il simbolo σ.
La legge di Ohm può essere scritta in funzione di grandezze microscopiche nel seguente modo

$$\mathrm{j} = \sigma \mathrm{E}$$

Potenza elettrica

La potenza che deve essere spesa dal campo elettrico per mantenere una corrente I in presenza di una differenza di potenziale V vale

$$P = VI$$

Applicando la legge di Ohm si può anche scrivere

$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Tale potenza viene completamente trasformata in calore in seguito all'attrito che gli elettroni incontrano nel materiale (effetto Joule).

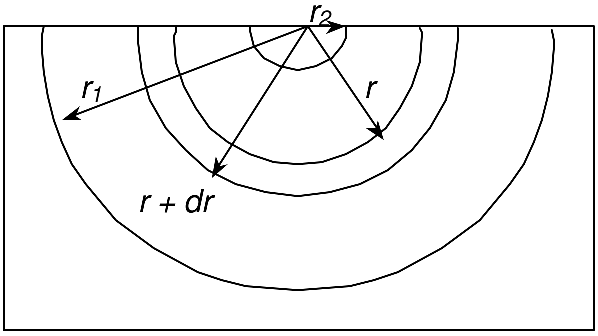
Resistenza elettrica

Per un filo di materiale conduttore di lunghezza L e sezione S la resistenza si può esprimere come: R=ñ(T)• L/A dove la quantità ñ(T) è detta resistività, si misura in ohm-metro, e dipende dalla temperatura. Nei migliori conduttori (argento rame e oro), a 293 K, vale 1.59-2.44 10^{-8} •m ed ha un andamento lineare con la temperatura (ñ(T)=áT+â). In alcuni materiali, detti superconduttori, invece la resistività, al di sotto di una temperatura caratteristica del materiale (temperatura critica), si annulla bruscamente: per il piombo ad esempio T_c=7.18 K, il mercurio T_c=4.15 mentre per il composto ceramico non stechiometrico di ittrio, bario, rame e ossigeno (YBCO) T_c=91 K. La più alta temperatura critica conosciuta si ha in un composto di mercurio, bario, calcio, rame e ossigeno (HBCCO) ed è 135 K.

Esercizi svolti

Esercizio 4.1

In un materiale isolante si ricava una semisfera di raggio r_1 = 1 m, sulla cui superficie si deposita uno strato conduttore, che viene riempita di un liquido con $\rho = 5 \cdot 10^{10}\ \Omega$m. Nel liquido si immerge un elettrodo emisferico di raggio r_2 = 0.5 m e concentrico con l'altra emisfera. Determinare la corrente che circola nel liquido quando è applicata una tensione tra i due elettrodi V = 50 V.



Soluzione: Per motivi di simmetria le linee equipotenziali sono delle semisfere. Consideriamo la resistenza posseduta dal guscio delimitato dalle due semisfere di raggio *r* e *r + dr*

$$dR = \rho\frac{dr}{S} = \rho\frac{dr}{2\pi r^2}$$

La resistenza totale si ottiene integrando su *r*

$$R = \frac{\rho}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{2\pi}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = 80\,\mathrm{G\Omega}$$

La corrente che circola si ricava dalla legge di Ohm

$$I = \frac{V}{R} = 6.3\,\mathrm{pA}$$

Esercizio 4.2

Un'automobile elettrica ha dieci batterie da 12 V e 70 Ah. Calcolare la potenza richiesta per l'avanzamento e quanta strada riesce a percorrere il veicolo se viaggia ad una velocità media di 30 km/h e la forza di attrito con l'asfalto è di 180 N.

Soluzione: La potenza richiesta è data dal prodotto della forza che si deve opporre all'attrito per la velocità desiderata

$$P = Fv = 1500\ \mathrm{W}$$

L'energia potenziale accumulata nelle batterie (in cui si suppone che il potenziale sia costante ed indipendente dal valore della carica posseduta) è

$$dU = Vdq \qquad U = \int Vdq = V\int dq = QV$$

Le batterie riusciranno a fornire la potenza richiesta per un tempo

$$t = \frac{U}{P} = \frac{QV}{P} = 20160\ \mathrm{s}$$

In tale tempo l'auto percorre uno spazio

$$s = vt = 168\ \mathrm{km}$$

Esercizio 4.3

Calcolare il diametro di un filo di rame (ρ =168 · 10^{-8} Ωm) in cui circola una corrente di 40 A, affinché dissipi una potenza di 1.6 W per ogni metro di lunghezza.

Soluzione:

$$V = RI$$

$$P = IV = I^2 R = I^2 \frac{\rho l}{s} = I^2 \frac{\rho l}{\pi r^2}$$

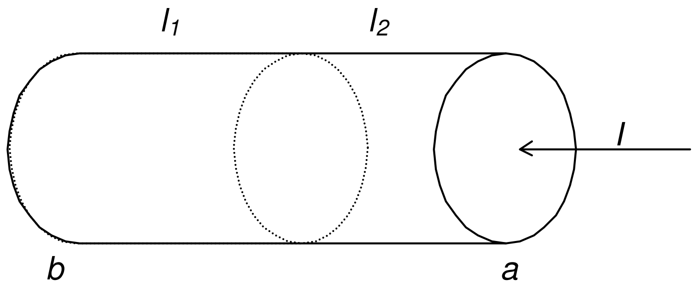
$$\frac{P}{l} = \frac{I^2 \rho}{\pi r^2}$$

$$d = 2r = 2I\sqrt{\frac{\rho l}{\pi P}} = 4.6\ \mathrm{mm}$$

Esercizio 4.4

Una resistenza filiforme di sezione S = 1 mm^2 è costituita dall'unione di un filo di lunghezza l_1 =10 mm e resistività ρ_1 = 5 · 10^{-5} Ωm con un filo di lunghezza l_2 =5 mm e resistività ρ_2 = 3ρ_1. Quando la resistenza è attraversata da una corrente uniforme I = 5 A calcolare:

a) i campi elettrici nei due materiali
b) la differenza di potenziale ai capi della resistenza
c) la carica presente sulla superficie di separazione dei due materiali.



Soluzione:

$$E_1 = \rho_1 J = \rho_1 \frac{I}{S} = 250 \text{ V/m}$$

$$E_2 = \rho_2 J = \rho_2 \frac{I}{S} = 3E_1 = 750 \text{ V/m}$$

$$V_1 = IR_1 = I\frac{\rho_1 l_1}{S}$$

$$V_2 = I\frac{\rho_2 l_2}{S}$$

$$\Delta V = V_2 + V_1 = \frac{I}{S}\left[\rho_2 l_2 + \rho_1 l_1\right] = 6.25 \text{ V}$$

$$\Phi = (\mathrm{E}_2 - E_1)S = \frac{q_m}{\varepsilon_0} \qquad q_m = \varepsilon_0 (E_2 - E_1)S = 4.43 \cdot 10^{-15} \text{ C}$$

Esercizio 4.5

Un motore è collegato alla batteria di alimentazione tramite un cavo di rame (ρ = 1.69·10^{-8} Ωm e *n* =8.49·10^{28} elettroni/m^3) di diametro *d* = 5 mm e lunghezza *l* = 1 m. Calcolare il tempo impiegato da un elettrone per andare dalla batteria al motore quando circola una corrente *I* = 100 A.

Soluzione: La densità di corrente che circola nel filo vale

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4I}{\pi d^2} = 5.1 \text{ A/mm}^2$$

La velocità con cui si spostano gli elettroni nel filo è

$$v_d = \frac{j}{ne} = 0.38 \text{ mm/s}$$

Infine, si può ottenere il tempo impiegato per percorrere la distanza *l* come

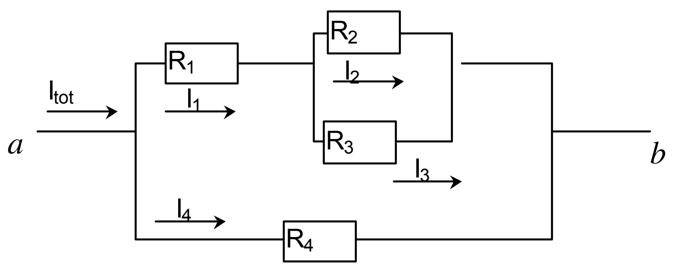
$$t = \frac{l}{v_d} = 44'\,23''$$

Occorre notare che nonostante questo tempo sia grande gli effetti delle variazioni di grandezze elettriche si trasmettono alla velocità della luce!.

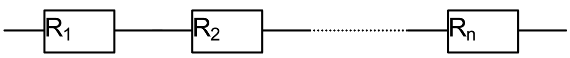
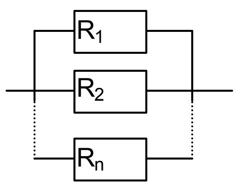
Esercizio 4.6

Determinare la resistenza totale del circuito di figura, la corrente e la tensione in ciascuna resistenza.

NOTA: in tabella sono riportate le principali regole di calcolo di resistenze equivalenti delle reti resistive.



V_{ab} = 10 V
R_1 = 5 kΩ
R_2 = 10 kΩ
R_3 = 10 kΩ
R_4 = 10 kΩ

Serie	Parallelo
 $R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots R_n$	 $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$

Soluzione:

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5\ \mathrm{k\Omega}$$

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 10\ \mathrm{k\Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{R_{123} R_4}{R_{123} + R_4} = 5\ \mathrm{k\Omega}$$

$$V_{R4} = V_{ab} \qquad I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4} = 1\ \mathrm{mA}$$

$$I_{R1} = I_{tot} - I_{R4} = 1\ \mathrm{mA} \qquad V_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 1\ \mathrm{mA} \cdot 5\ \mathrm{k\Omega} = 5\mathrm{V}$$

$$I_{tot} = \frac{V_{ab}}{R_{eq}} = \frac{10\mathrm{V}}{5\ \mathrm{k\Omega}} = 2\ \mathrm{mA}$$

$$V_{R2} = V_{R3} = V_{ab} - V_{ac} = V_{ab} - V_{R1} = 10\ \mathrm{V} - 5\ \mathrm{V} = 5\ \mathrm{V}$$

$$\mathrm{I}_{R2} = \frac{V_{R2}}{R2} = \frac{5\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{k\Omega}} = 0.5\ \mathrm{mA}$$

$$\mathrm{I}_{R3} = \frac{V_{R3}}{R3} = \frac{5\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{k\Omega}} = 0.5\ \mathrm{mA}$$

Esercizi proposti

Esercizio 4.7

Qual è la lunghezza l del filo incandescente di tungsteno di una lampadina se essa assorbe la potenza W=40 watt a V=220 volt e il diametro del filo è d=25 micron? La resistenza specifica del tungsteno è approssimativamente proporzionale alla temperatura assoluta e a t_0= 18 ºC, essa vale $ñ_0$=5.6 10 ohm metro. La temperatura del filo incandescente è T_0=2500 ºK.
Risultato: l=1.2 m

Esercizio 4.8

Uno scaldabagno elettrico contenente 50 litri d'acqua, consuma 10^3 watt con una tensione di 110 volt.
Come deve essere modificata la sua resistenza R per poterlo utilizzare con una tensione di 220 volt, a parità di potenza? (Si trascuri l'effetto della temperatura sulla resistenza).
Se il rendimento dello scaldabagno è ç=80%, in quanto tempo t la temperatura dell'acqua passa da 20 a 60 gradi centigradi?
Risultato: R=48 ohm, t=2.85 ore

Esercizio 4.9

Una pila ha forza elettromotrice f=1.534 volt. Se si misura la differenza di potenziale ai capi della pila con un voltmetro avente resistenza interna R'=1000 ohm si trova V=1.498 volt.
Determinare la resistenza interna r della pila. Quando è massima la potenza dissipata su una resistenza di carico R.
Risultato: r=24.2 ohm, R=r

Esercizio 4.10

Un fornello da 500 watt e 220 volt viene usato per portare all'ebollizione 10 litri d'acqua, inizialmente alla temperatura di 20 ºC.
1) Se il rendimento del sistema di riscaldamento è del 70%, dopo quanto tempo t l'acqua incomincia a bollire a pressione ordinaria
2)Quanto vale la resistenza R del fornello?
Risultato: t=9.55 10^3 sec, R=96.8 ohm

Esercizio 4.11

Un condensatore è costituito da due armature A_1 e A_2 piane e parallele nel vuoto: l'armatura A_1 è fissa, mentre l'armatura A_2 si muove nel proprio piano con velocità costante in modo tale che l'area della porzione di A_2 che è affacciata ad A_1 aumenta di 2 m^2 al secondo. La distanza fra le armature è h=1 mm. A_1 e A_2 sono connesse ai poli di una batteria di f.e.m. f= 2 volt mediante due fili conduttori di resistenza totale R=10^7 ohm. Il circuito è percorso da una corrente elettrica di intensità i costante.
Determinare:
1) Qual è la d.d.p. V tra le armature del condensatore?
Qual è il valore dell'intensità di corrente i?
(Si immagini che i due fili conduttori rimangano fissi durante il movimento di A_2).
Risultato: V=1.7 volt, i=3 10^{-8} ampere

4 Quesiti di autoverifica

1) Quanta energia può fornire un generatore di forza elettromotrice?

a) dipende dalle dimensioni del generatore.
b) dipende dalla resistenza interna del generatore.
c) tanta quanta ne è stata immagazzinata nel generatore sotto forma chimica, meccanica, nucleare, etc.
d) dipende dal modo in cui l'energia viene utilizzata.

2) Devo realizzare una resistenza di 77.5 ohm e ho 3 resistenze di valore: R1 = 100 ohm, R2 = 40 ohm ed R3 = 60 ohm. Come devo montarle per avere la resistenza richiesta?

a) R1 in parallelo ad R2 ed in parallelo ad R3.
b) R1 in serie al parallelo di R2 ed R3.
c) R3 in serie al parallelo di R1 ed R2.
d) R2 in serie al parallelo di R1 ed R3.

3) Come varia il modulo del campo elettrico nell'interno di un generatore di f.m.e. costante, quando si collega quest'ultimo a una resistenza esterna?

a)Non esiste campo elettrico nell'interno di un generatore, ma solo potenziale elettrico.
b) Aumenta.
c) Rimane costante.
d) Diminuisce.

4) Come sono le superfici equipotenziali in un conduttore omogeneo rettilineo di sezione circolare percorso da corrente?

a) Coincidono con le sezioni circolari del conduttore.
b) La superficie esterna è equipotenziale.
c) Sono equipotenziali le superfici corrispondenti alle sezioni del conduttore fra le quali viene misurata la d.d.p.
d) Sono equipotenziali le superfici cilindriche concentriche con il conduttore.

5) Si ha un circuito costituito da una resistenza R e da un generatore avente forza elettromotrice f e resistenza interna r. Che valore deve avere R, affinché la potenza in essa dissipata sia massima?

a) R=0.
b) R= .
c) R=r.
d) R=r/2.

Autore: Giovanni Alberto Ummarino

Forza di Lorentz, definizione di campo magnetico

Una particella di carica *q*, in moto con velocità $\vec{v}$ in presenza di un campo magnetico, è soggetto ad una forza, detta forza di Lorentz, data da:

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B},$$

dove $\vec{B}$ è un vettore che prende il nome di campo di induzione magnetica o semplicemente di campo magnetico. Se siamo interessati solo al modulo della forza possiamo anche scrivere

$$F = qvB \sin\phi,$$

dove ϕ è l'angolo formato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$.
L'equazione che esprime la forza di Lorentz può essere considerata come la definizione (operativa) del campo magnetico, in perfetta analogia con la $\vec{F} = q\vec{E}$ che definisce il campo elettrico. L'unità di misura del campo magnetico, detta *tesla* (simbolo T), risulta quindi essere

$$1T = 1N/(C \cdot m/\sec) = 1N/(A \cdot m).$$

Si osservi che la forza di Lorentz risulta essere ortogonale sia al campo, sia alla velocità, e quindi non compie lavoro, essendo

$$d\vec{L} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt = 0.$$

Ciò significa che un campo magnetico induce solo una variazione della direzione del moto della particella, senza alterare il modulo della velocità.
Un caso particolare piuttosto interessante è quello di una particella avente carica *q* e massa *m* che si muove con velocità iniziale $\vec{v}$ in una regione in cui è presente un campo uniforme $\vec{B}$, ortogonale a $\vec{v}$. Il suo moto risulta essere un moto circolare uniforme la cui accelerazione centripeta è data da

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m},$$

da cui utilizzando la cinematica del moto circolare uniforme, è possibile ricavare il raggio della traiettoria R= $\frac{mv}{qB}$ e la velocità angolare $w = qB/m$, detta anche pulsazione di ciclotrone.
Quando invece la velocità iniziale $\vec{v}$ non è ortogonale al campo (uniforme) $\vec{B}$, il moto della particella avviene lungo un'elica, cioè il moto è la composizione di un moto circolare nel piano ortogonale a $\vec{B}$ con un moto rettilineo uniforme lungo la direzione parallela a $\vec{B}$.

Forza magnetica su una corrente

Si consideri un tratto infinitesimo *dl* di un conduttore percorso da corrente di intensità *i*, in presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Ciascun portatore di carica avrà la carica elementare q_0 e la velocità $\vec{v}_d = \dfrac{j}{nq_0}$, dove *n* è il numero di portatori per unità di volume e $\vec{j} = \dfrac{i}{A}\vec{u}_t$ è la densità di corrente, essendo *A* l'area della sezione del conduttore $\vec{u}_t$ il versore tangente al conduttore stesso, Su ogni portatore agirà quindi la forza elementare di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v}_d \wedge \vec{B} = \frac{1}{n}\vec{j} \wedge \vec{B},$$

e su tutto il tratto di filo, di volume *dV=Adl*, agirà la forza di Lorentz

$$d\vec{F} = n\vec{F}_0 dV = i \cdot dl \cdot \vec{u}_t \wedge \vec{B} = i \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

dove si è posto $d\vec{l} = dl \cdot \vec{u}_t$.

Per un filo rettilineo di lunghezza *l* avremo quindi, posto $\vec{l} = l\vec{u}_t$

$$\vec{F} = i\vec{l} \wedge \vec{B}.$$

Spire e dipoli magnetici

Ad una spira (che per semplicità supponiamo giacente in un piano) percorsa da una corrente di intensità *i* si associa un momento di dipolo magnetico $\vec{\mu} = iA\vec{n}$, dove *A* è l'area della superficie delimitata dalla spira ed $\vec{n}$ la normale al piano. È facile verificare (cfr. Esercizio 5.3) che, in presenza di un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, la spira è soggetta ad un momento meccanico

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

al quale corrisponde un'energia potenziale

$$U = -\vec{\mu} \bullet \vec{B},$$

in perfetta analogia con la teoria dei dipoli elettrici.

Esercizi svolti

Esercizio 5.1

Una particella α, di carica $q = 2|e|$ (e=-1.6 10^{-19} C è la carica dell'elettrone) e massa *m*=6.68 10^{-27} Kg, è in moto in un campo magnetico di intensità *B*=1 T con velocità pari a 1/15 della velocità della luce, ortogonale al campo. Calcolare il raggio della sua traiettoria e il periodo di rotazione.

Soluzione:

$$R = \frac{mv}{qB} \cong 42cm$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \cong 1.3 \cdot 10^{-7}\sec$$

Esercizio 5.2

Un elettrone è accelerato da una differenza di potenziale pari a 5000 V ed è diretto verso una regione in cui vi sono due elettrodi piani paralleli, distanti tra loro 5 cm, ai quali è applicata una differenza di potenziale pari a 1000 V. L'elettrone entra perpendicolarmente al campo $\vec{E}$ presente tra i due elettrodi. Determinare il campo $\vec{B}$ che deve essere presente tra gli elettrodi affinchè l'elettrone non venga deviato.

Soluzione: Inizialmente l'elettrone viene portato ad una velocità v_0 che si ottiene uguagliando la sua energia cinetica (supponiamo trascurabile la sua velocità iniziale) al lavoro compiuto dalla prima differenza di potenziale:

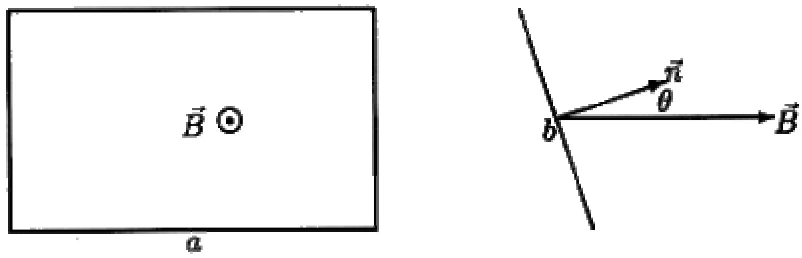
$$|e|V_1 = \frac{1}{2}m_e v_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2|e|V_1}{m_e}} \cong 4.2 \cdot 10^7 m/\sec .$$

Quando si trova tra i due elettrodi è soggetto ad una forza di natura elettrostatica, diretta dall'elettrodo negativo verso quello positivo, di modulo $F_e = |e|E = |e|V^2/d$, dove *d* è la distanza tra i due elettrodi, e, se il campo $\vec{B}$ è ortogonale alla velocità e parallelo agli elettrodi, ad una forza di Lorentz di modulo $F_m = |e|v_0 B$. Ugualiando le due forze si ricava:

$$B = \frac{V_2}{v_0 d} \cong 4.8 \cdot 10^{-4} T.$$

Esercizio 5.3

Una spira rettangolare di lati *a* e *b*, percorsa da una corrente di intensità *i*, è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ che forma un angolo θ con la normale al piano della spira (vedi figura). Determinare la forza e il momento meccanico risultanti sulla spira e la sua energia potenziale.



Soluzione: I due lati di lunghezza *a* sono soggetti a due forze di ugual modulo $F_a = iaB$, ugual direzione (ortogonale sia al campo, sia ai lati) e verso opposto. Lo stesso avviene per i lati di lunghezza *b*, sui quali agiscono forze di modulo $F_b = ibB\cos\theta$. La risultante delle forze agenti sulla spira è quindi nulla.
Per calcolare il momento meccanico si osservi che la coppia di forze agenti sui lati di lunghezza *b* ha braccio nullo, mentre quella delle forze agenti sui lati dilunghezza *a* ha braccio $b\sin\theta$, e quindi il momento meccanico risultante ha modulo $\tau = iabB\sin\theta$ e tende ad allontanare i lati di lunghezza *b* dalla direzione del campo: Introducendo il vettore momento di dipolo magnetico

$$\vec{\mu} = iA\vec{n},$$

dove A=*ab* è l'area della spira ed $\vec{n}$ il versore ad essa normale, si può scrivere la relazione vettoriale

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}.$$

L'energia potenziale della spira può essere calcolata come il lavoro necessario per portare la spira da una posizione di riferimento (scegliamo $\theta_0 = \pi/2$) alla generica posizione caratterizzata dall'angolo θ formato dai vettori $\vec{B}$ ed $\vec{n}$ .Si ha quindi:

$$U(\theta) = \int_{\pi/2}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\pi/2}^{\theta} \mu B \sin\theta d\theta = -\mu B\cos\theta = -\vec{\mu} \bullet \vec{B},$$

espressione analoga a quella già nota per un dipolo elettrico in campo uniforme (oppure per un pendolo semplice in campo gravitazionale, per cui la spira avrà la stessa dinamica e in particolare lo stesso periodo).

Esercizio 5.4

La bobina di un galvanometro è costituita da N spire piane di area A; essa ha un momento d'inerzia I ed è sospesa mediante un filo di torsione di costante elastica k in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$; in condizioni di riposo la normale alle spire è perpendicolare a $\vec{B}$.

A partire dall'istante t=0 nella bobina viene iniettata una corrente $i = i_0 sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ per un intervallo di tempo pari a T/2.

a) Supponendo che nell'intervallo di tempo in cui fluisce la corrente l'angolo di cui ruota la bobina sia molto piccolo, così che il momento torcente del filo sia trascurabile, calcolare la velocità angolare che la bobina possiede all'istante t= T/2.

b) Mostrare che l'ampiezza delle oscillazioni libere che la bobina compie una volta cessato il flusso di corrente è proporzionale alla carica elettrica totale fluita nella bobina. Si trascurino gli attriti ed il coefficiente di autoinduzione e si considerino le oscillazioni di piccola ampiezza.

Soluzione:

a) La corrente iniettata dall'istante t=0 determina un movimento della spira stessa soggetta ad un momento

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

dove

$$\vec{\mu} = NAi\vec{n}$$

Essendo $\vec{n} \perp \vec{B}$ si ha

$$|\tau| = NAiB$$

Per cui si trova

$$I\alpha = NAiB$$

Dove $\alpha = \ddot{\theta}$ rappresenta l'accelerazione angolare. Integrandola tra 0 e T/2 si trova la velocità richiesta:

$$\dot{\theta} = \int_0^{T/2} \frac{NABi_0}{I} sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) dt = ... = \frac{NABi_0 T}{I\pi}$$

b) Cessato il flusso di corrente la bobina è soggetta al momento torcente del filo, per cui si ha:

$$I\ddot{\Theta} = -k\Theta$$

la cui soluzione, dello stesso tipo di quella vista per una molla e per il pendolo, è

$$\Theta = \Theta_0 sin(\omega t)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$. Per cui $\dot{\Theta} = \Theta_0 \sqrt{\frac{k}{I}} \cos(\omega t)$.
A t=0 (cioè quando si spegne la corrente) si sa, dal punto a), che

$$\dot{\Theta} = \frac{NABi_0T}{I\pi}.$$

Abbinando le due espressioni scritte per $\dot{\Theta}$ si trova che l'ampiezza dell'oscillazione è:

$$\Theta_0 = \frac{NABi_0T}{\pi\sqrt{kI}}$$

Essendo inoltre

$$Q = \int_0^{T/2} i dt = \dots = \frac{i_0T}{\pi}$$

si ottiene infine la proporzionalità tra Θ_0 e Q

$$\frac{\Theta_0}{Q} = \frac{NAB}{\sqrt{kI}}$$

Esercizio 5.5

Un protone di massa **m** e carica **+e** ed una particella di massa **4m** e carica **+2e** si muovono in un campo magnetico uniforme descrivendo circonferenze di uguale raggio, con velocità non relativistica.

a) Calcolare il rapporto tra le velocità lineari, le velocità angolari e le energie cinetiche.
b) Qualora le particelle descrivessero eliche identiche, calcolare i rapporti tra le componenti parallela e perpendicolare all'asse dell'elica della velocità lineare.

Soluzione:

a) Il raggio R della circonferenza descritto da una particella di massa m e carica q che si muove in un campo magnetico B con velocità lineare v è dato da

$$R = \frac{mv}{qB}$$

Nel presente problema le due particelle sono immerse nello stesso campo magnetico e descrivono circonferenza uguali, per cui imponendo $R_p = R_\alpha$ si trova il rapporto tra le velocità lineari

$$\frac{v_p}{v_\alpha} = \frac{q_p m_\alpha}{q_\alpha m_p} = \frac{4}{2} = 2$$

Essendo $v = \omega R$ si ha che il rapporto tra le velocità angolari è

$$\frac{\omega_p}{\omega_\alpha} = 2$$

Infine essendo l'energia cinetica $E = \frac{mv^2}{2}$

$$\frac{E_p}{E_\alpha} = 4$$

b) La componente perpendicolare all'asse dell'elica si ottiene considerando la componente del moto lungo la circonferenza, per cui:

$$\frac{v_{p\perp}}{v_{\alpha\perp}} = \frac{q_p m_\alpha}{q_\alpha m_p} = 2$$

La componente parallela all'asse dell'elica è tale da fare percorrere alla particella un tratto L (passo dell'elica) in un tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, pari cioè al periodo impiegato per percorrere la circonferenza.
Descrivendo eliche identiche, i due passi saranno uguali, per cui:

$$L_\alpha = v_{\alpha //} \frac{2\pi}{\omega_\alpha} = L_{p //} \frac{2\pi}{\omega_p}$$

cioè:

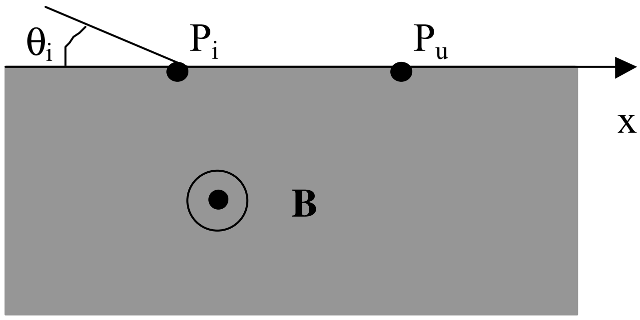
$$\frac{v_{p //}}{v_{\alpha //}} = 2$$

Esercizi proposti

Esercizio 5.6

Un protone di carica $+q = 1.6 \cdot 10^{-19} C$ e massa $m = 1.6 \cdot 10^{-27} kg$ con energia cinetica $E = 5 \ \ MeV$ entra in direzione formante un angolo $\theta_i = 30°$ con l'asse x in una regione dove esiste un campo magnetico di induzione $B = 1 \ \ T$, perpendicolare al piano ed entrante. Calcolare:

a) l'angolo θ_u tra la direzione lungo la quale il protone esce dal campo e l'asse x;
b) la distanza 2d tra il punto di uscita P_u ed il punto di ingresso P_i sull'asse x, illustrando in figura la traiettoria del protone;
c) dire se è variata l'energia del protone e spiegare il perché.



Risultato:

a) $\theta_u = 30°$; b) $2d = 0.3m$; c) *No…*

Esercizio 5.7

Un piccolo magnete con momento di dipolo $\vec{\mu}$ orientato lungo l'asse x è sospeso ad un filo con costante elastica torsionale k. Il momento d'inerzia del magnete rispetto all'asse del filo (asse z) sia J. Qual è il periodo T delle piccole oscillazioni torsionali del dipolo allorchè esso sia inserito in una regione di campo magnetico $\vec{B}$ diretto lungo l'asse y?

Risultato:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu B + k}}$$

Esercizio 5.8

Un filo metallico di massa m scivola senza attrito su due rotaie poste a distanza d. Il binario è posto in un campo di induzione magnetica B diretto perpendicolarmente al piano del binario.
Una corrente costante *i* circola dal generatore G lungo una rotaia, attraversa il filo e torna al generatore attraverso l'altra rotaia. Trovare la velocità (modulo, direzione e verso) del filo in funzione del tempo nell'ipotesi che esso sia fermo per t=0.

Risultato:

$$v = \frac{idBt}{m}$$

Esercizio 5.9

Una spira rettangolare di filo percorsa da una corrente di 2 A è sospesa verticalmente e attaccata al piatto destro di una bilancia. Quando il sistema è bilanciato, viene introdotto in un campo magnetico esterno. Il campo agisce solamente nella parte inferiore della spira in direzione perpendicolare al lato della spira. Sapendo che la spira è larga 20 cm ed è necessario aggiungere una massa di 13.5 g sul piatto sinistro della bilancia per equilibrare il sistema, determinare B.

Risultato:

B=0.33 T

Esercizio 5.10

Un filo rettilineo conduttore di sezione circolare costituito da un materiale di densità pari a 2.5 g/cm^3 è posto in un campo magnetico uniforme in modo che l'asse del filo sia perpendicolare alla direzione del campo. Nel filo si stabilisce una densità di corrente di 2.4x10^6 A/m^2 e si fa aumentare il campo magnetico fino a quando la forza magnetica agente sul filo bilancia esattamente quella gravitazionale. Calcolare il valore di B al raggiungimento di questa condizione.

Risultato:

B=1.1 x 10^{-4} T

1. Un elettrone si muove nel verso positivo dell'asse x, in una zona dove è presente un campo magnetico diretto nel verso negativo dell'asse z. quale di queste affermazioni è corretta?
   i) La forza magnetica è diretta lungo l'asse y con verso negativo.
   ii) L'elettrone continuerà a muoversi nel verso positivo dell'asse x.
   iii) L'elettrone descrive una circonferenza di raggio $R=mv^2/qB$ nel piano xy.
   iv) L'elettrone si muove su un elica il cui asse è x.

2. Due cariche vengono immesse in un campo magnetico perpendicolare rispetto alle loro velocità (concordi). Se le cariche sono deflesse in versi opposti, cosa si può dire di loro?
   i) Le due cariche hanno segno opposto.
   ii) Le due cariche hanno velocità diverse, in particolare una è nulla.
   iii) Le due cariche sono soggette a forze elettriche opposte.
   iv) Le due cariche hanno stesso segno ma una è doppia rispetto all'altra.

3. Se una carica positiva si muove rettilineamente lungo l'asse x in una certa regione di spazio si può dire che:

   i) in quella regione il campo magnetico è nullo.
   ii) in quella regione il campo magnetico è diretto lungo l'asse z positivo e il campo elettrico è nullo.
   iii) in quella regione il campo magnetico è diretto lungo l0asse z positivo e il campo elettrico lungo l'asse z negativo.
   iv) in quella regione il campo magnetico è diretto lungo l'asse x e il campo elettrico lungo z.

4. Una particella descrive un'elica se:

   i) è carica e la sua velocità iniziale forma un angolo diverso da 90° con il campo magnetico in cui è immersa.
   ii) è carica e viene immersa in una regione in cui il campo magnetico ha un profilo elicoidale.
   iii) è immersa in un campo magnetico ortogonale alla sua velocità iniziale.
   iv) è carica e in moto.

Legge di Biot e Savart

Un tratto $d\vec{l}$ di conduttore percorso da una corrente di intensità *i* genera, in un punto P, il campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} ,$$

dove $\vec{r}$ è il vettore che va dal conduttore al punto P, $\vec{u}_r = \vec{r} / r$ è il versore corrispondente, e μ_0 è una costante detta *permeabilità magnetica del vuoto*, il cui valore in unità SI è:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{N}{A^2}$$

Applicando la legge di Biot e Savart ad un conduttore rettilineo indefinito percorso da una corrente di intensità *i* si dimostra che il modulo del campo magnetico dipende dalla distanza *r* dal filo secondo la legge

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} .$$

Le linee di campo risultano essere delle circonferenze centrate nel conduttore e giacenti in piani ad esso perpendicolari. Utilizzando i risultati precedenti si verifica facilmente che i due conduttori rettilinei indefiniti tra loro paralleli, percorsi da correnti di intensità i_1 e i_2 e distanti *d* l'uno dall'altro, si attraggono (per correnti concordi) o si respingono (per correnti discordi) con una forza per unità di lunghezza data, in modulo, da:

$$F/l = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} .$$

La legge di Ampére

A partire dalla legge di Biot e Savart è possibile dimostrare una relazione concettualmente analoga al teorema di Gauss per l'elettrostatica, detta legge di Ampére:

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_0 i ,$$

dove *i* è la somma (algebrica) di tutte le correnti <u>concatenate</u> con il cammino di integrazione (cioè di tutte le correnti che tagliano una qualunque superficie connessa avente come bordo il cammino di integrazione).
La legge di Ampére, come già il teorema di Gauss nell'elettrostatica, è di grande utilità in tutte le situazioni ad elevata simmetria, come il conduttore rettilineo indefinito o il solenoide ideale.

Applicando la legge di Ampére ad un solenoide ideale (lunghezza infinita, avvolgimento compatto) avente *n* spire per unità di lunghezza e percorso da una corrente di intensità *i* si dimostra che, all'interno del solenoide, il campo magnetico ha modulo $B = \mu_0 n i$.

Esercizi svolti

Esercizio 6.1

Una spira circolare di raggio *a* è percorsa da una corrente di intensità *i*. Determinare il campo $\vec{B}$ prodotto dalla spira in un punto P sul suo asse, a distanza *x* dal centro della spira.

Soluzione: un elemento infinitesimo di corrente di lunghezza *dl* produrrà un campo di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}, \qquad r^2 = x^2 + a^2$$

la cui direzione forma un angolo ϕ con l'asse della spira, tale che $\cos\phi = a/r$.
Considerando l'elemento di corrente *dl'*, simmetrico di *dl* rispetto al centro della spira, si vede che la somma vettoriale dei campi $d\vec{B}$ e $d\vec{B}'$ dovuti ai due elementi simmetrici è un vettore parallelo all'asse della spira, poiché le componenti ortogonali all'asse si eliminano. Poiché la componente di $d\vec{B}$ parallela all'asse è:

$$dB_{//} = dB\cos\phi = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{a}{r^3}dl\,,$$

il campo totale in P (diretto lungo l'asse della spira) avrà modulo

$$B = \oint dB_{//} = \frac{\mu_0 ia}{4\pi r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 ia^2}{2r^3}\,,$$

ovvero

$$B = \frac{\mu_0 ia^2}{2\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}}\,.$$

Utilizzando l'espressione precedente è facile ottenere il campo al centro della spira (x=0)

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a}\,,$$

e l'andamento del campo a grande distanza dalla spira (*x*>>*a*)

$$B \cong \frac{\mu_0 i a^2}{2x^3},$$

risultato analogo a quello già visto per il dipolo elettrico.

Esercizio 6.2

Determinare il campo $\vec{B}$ nel centro della semicirconferenza (vedi figura) supponendo che il conduttore ABDE sia percorso da una corrente di intensità *i*.

Soluzione:

Per i due tratti rettilinei $d\vec{l}$ è sempre parallelo ad $\vec{r}$ nella legge di Biot e Savart, quindi il loro contributo è nullo. Per il tratto semicircolare si osservi che il suo contributo è esattamente metà di quello di una spira circolare nel suo centro, e quindi (cfr. l'esercizio precedente)

$$B = \frac{\mu_0 i}{4R}$$

Esercizio 6.3

Una lamina conduttrice infinitamente estesa è percorsa da una corrente di densità lineare λ. Determinare il campo $\vec{B}$ da essa generato.

Soluzione:

Per ragioni di simmetria, il campo deve essere parallelo alla lamina e ortogonale alla direzione della corrente, e può dipendere solo dalla distanza dalla lamina. Inoltre avrà versi opposti dai due lati della lamina. Il modo più semplice per calcolarne il modulo è usare la legge di Ampère, scegliendo come cammino di integrazione un rettangolo, giacente su un piano ortogonale alla direzione della corrente, e simmetrico rispetto alla lamina. Poiché i due lati ortogonali alla lamina non contribuiscono alla circuitazione, si avrà, scegliendo opportunamente il verso di percorrenza,

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = 2lB(x),$$

dove *l* è la lunghezza dei lati paralleli alla lamina e *x* la loro distanza dalla lamina stessa. La corrente concatenata con questo cammino ha intensità $i = \lambda l$ e quindi il modulo del campo risulta essere

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda,$$

indipendente da x.

Esercizio 6.4

Un cavo coassiale è costituito da un conduttore interno (cilindro pieno di raggio c) e uno esterno (regione compresa tra due superfici cilindriche di raggi b e $a>b$). I due conduttori sono percorsi da correnti di uguale intensità i dirette in verso opposto, con densità di corrente uniforme. Determinare il campo magnetico in funzione della distanza dall'asse.

Soluzione:

Poiché la distribuzione di correnti ha simmetria cilindrica, le linee del campo $\vec{B}$ devono essere della circonferenze aventi centro sull'asse, orientate in verso antiorario, e il modulo di $\vec{B}$ può dipendere solo dalla distanza dall'asse, $B = B(r)$.

Per determinare $B(r)$ calcoliamo la circuitazione che compare al primo membro della

legge di Ampère pungo una linea di campo, ottenendo

$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = 2\pi r B(r).$$

- Per $r<c$ la corrente concatenata con il cammino di integrazione vale

$$i_c = i\frac{r^2}{c^2},$$

e quindi il modulo del campo è

$$B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi c^2}.$$

- Per $c<r<b$ si ha $i_c = i$ e quindi

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

- Per $b<r<a$ si ha

$$i_c = i - i\frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} = i\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2},$$

da cui

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2}.$$

- Infine per $r>a$ si ha $i_c = 0$ e quindi $B(r) \equiv 0$.

Esercizio 6.5

Un avvolgimento di corrente di forma toroidale e sezione rettangolare è costituito da n=100 spire percorse da una corrente i = 5 A. I raggi interno ed esterno sono rispettivamente r_1 = 5 cm ed r_2 = 6 cm, e la larghezza del toroide è a = 1 cm. Determinare il campo $\vec{B}$ all'interno del toroide e i suoi valori massimo e minimo.

Soluzione:

Si applica la legge di Ampère scegliendo come cammino di integrazione una circonferenza di raggio r, coassiale con il toroide e ad esso interna, ottenendo

$$2\pi r B(r) = \mu_0 n I \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r}.$$

Direzione e verso di $\vec{B}$ sono determinati dalle condizioni di simmetria.
Per i valori minimo e massimo si ottiene:

$$B_{min} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_2} \cong 1.67 \cdot 10^{-3} \quad T$$

$$B_{max} = \frac{\mu_0 n I}{2\pi r_1} \cong 2.00 \cdot 10^{-3} \quad T.$$

Esercizi proposti

Esercizio 6.6

Un protone di massa $m = 1.6 \cdot 10^{-7} \quad kg$, di energia cinetica $E = 1.6 \cdot 10^{-17} \quad J$ e velocità diretta radialmente si trova sull'asse di un solenoide rettilineo indefinito di raggio R = 10 cm e costituito da n = 100 *spire/cm.* Quale valore deve avere la corrente elettrica per impedire al protone di uscire dal solenoide?

Risultato: $i \geq 1.15 \quad A$

Esercizio 6.7

Due fili rettilinei indefiniti sono posti verticalmente in posizione fissa e parallelamente a distanza d l'uno dall'altro; in essi fluiscono le correnti i_1 e i_2. Nel piano che li contiene e fra di essi è posto un terzo filo parallelo ai primi due, nel quale fluisce la corrente i_3; esso è libero di spostarsi lateralmente, mantenendosi parallelo a sé stesso, nel piano dei primi due. Determinare la posizione di equilibrio stabile o instabile.

Risultato: La posizione di equilibrio si trova a distanza $di_1/(i_1+i_2)$ dal filo 1; l'equilibrio è instabile se i_3 ha lo stesso verso di i_1 e i_2, stabile se ha verso opposto.

Esercizio 6.8

Sulla superficie di un disco di plastica di raggio a, è distribuita uniformemente una carica q. Se il disco è posto in rotazione uniforme attorno al suo asse, con velocità angolare ω, determinare il campo magnetico al centro del disco e il momento di dipolo del disco.
Suggerimento: scomporre il disco in spire concentriche infinitesime.

Risultato:

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi a}$$

$$\mu = \frac{\omega q a^2}{2}.$$

Esercizio 6.9

Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'elettrone ruota intorno al nucleo ad una frequenza $\nu = 7 \cdot 10^{15} \quad \sec^{-1}$ e genera un campo magnetico B = 14 T al centro dell'orbita. Calcolare il raggio dell'orbita dell'elettrone.

Risultato:

$$a = 5 \cdot 10^{-11} \quad m.$$

Esercizio 6.10

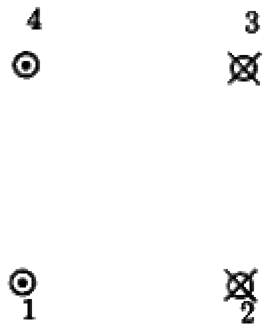
Una spira rettangolare di lati a e b, percorsa da una corrente di intensità i, so trova sullo stesso piano di un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente I, con i lati di lunghezza *a* paralleli al filo. Il più vicino dei due lati di lunghezza *a* dista *d* dal filo stesso e la corrente in esso ha lo stesso verso di quella nel filo. Determinare la forza risultante sulla spira.

Risultato:

$$F = \frac{\mu_0 Iiab}{2\pi d(d+b)}.$$

Esercizio 6.11

Quattro lunghi fili di rame sono fra loro paralleli e disposti ai vertici di un quadrato di lato *a=20 cm.* In ogni filo circola una corrente *i=20* A nel verso mostrato in figura. Determinare $\vec{B}$ al centro del quadrato.



Risultato: Il campo risultante è diretto verso l'alto e vale

$$B = 8 \cdot 10^{-5} \quad T.$$

1. Dati due fili indefiniti distanti d e percorsi dalla stessa corrente concorde I, in qual posizione deve essere posto un terzo filo, concorde ai primi due, per stare in equilibrio?

   i) A metà tra i due fili.
   ii) In qualunque posizione a destra dei due fili.
   iii) In qualunque posizione a sinistra dei due fili.
   iv) In qualunque posizione tra i due fili.

2. Dati due fili indefiniti distanti d e percorsi rispettivamente dalle correnti I e 2I discordi, quale è la posizione di equilibrio di un terzo filo, concorde al primo?

   i) A distanza d dal primo filo, cioè il primo filo sta al centro e, simmetricamente ad esso, a distanza d, stanno il secondo ed il terzo filo.
   ii) A metà tra i due fili.
   iii) In qualunque posizione a destra dei due fili.
   iv) In qualunque posizione a sinistra dei due fili.

3. Dato un filo rettilineo di raggio a e percorso da una corrente I qual è l'andamento del campo magnetico interno?

   i) Cresce con la distanza dall'asse del filo.
   ii) Decresce con la distanza dall'asse del filo.
   iii) E' nullo.
   iv) E' uguale a quello esterno.

Flusso magnetico

Il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso una superficie S è definito come

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \bullet \vec{n} dS ,$$

dove $\vec{n}$ è il versore normale alla superficie. Se il campo magnetico è costante e forma un angolo ϕ con la normale ad una superficie piana di area A si ha

$$\Phi_B = BA\cos\phi$$

L'unità di misura del flusso magnetico è il *weber* (simbolo Wb), e si vede facilmente che

1 Wb = 1T m^2 = 1 V s.

Legge di Faraday

La legge di induzione di Faraday permette di calcolare la forza elettromotrice (differenza di potenziale) E indotta in un circuito, qualora si conosca, in funzione del tempo, il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie delimitata dal circuito. Può essere scritta nella forma

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} .$$

Legge di Lenz

La legge di Lenz serve a determinare il verso della corrente indotta in un circuito, e ha il seguente enunciato:
la corrente indotta ha verso tale da opporsi alla variazione di flusso che l'ha generata.
Questo significa che se, ad esempio, si ha un aumento del flusso (che può essere causato sia dall'aumento di B, che di A o di $\cos\phi$) viene a generarsi per la legge di Faraday una forza elettromotrice, e quindi una corrente che deve essere orientata in modo tale che il campo magnetico che essa stessa genera sia diretto in senso opposto a quello originario.

Esercizi svolti

Esercizio 7.1

Il campo magnetico che agisce perpendicolarmente ad un circuito costituito da 3 spire di 30 cm di diametro, passa da un valore di 0.4T a –.65T in 180 msec. Calcolare la tensione indotta nelle spire, supponendo che la variazione del campo magnetico sia uniforme.

Soluzione:
Il flusso concatenato con il circuito vale

$$\Phi_B = 3B\pi r^2 ,$$

dove r = 15 cm è il raggio delle spire. La forza elettromotrice indotta sarà quindi, secondo la legge di Faraday,

$$\mathcal{E} = -3\pi r^2 \frac{dB}{dt} .$$

Poiché la variazione del campo è uniforme nel tempo possiamo scrivere

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cong -5.38 \quad T/\sec ,$$

e quindi $\mathcal{E} \cong 1.24 \quad V$.

Esercizio 7.2

Cento spire di filo di rame isolato sono avvolte in modo da formare una bobina la cui sezione ha un'area di 10^{-3} m^2 e sono collegate ad una resistenza. La resistenza totale del circuito è di $10 \ \Omega$. Se l'induzione magnetica nello spazio interno alla bobina cambia passando da 1.0 T in un verso a 1.0 T in verso opposto, quanta carica passa attraverso il circuito?

Soluzione:
L'intensità di corrente che attraversa il circuito sarà, usando le leggi di Ohm e di Faraday,

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt} .$$

Integrando nel tempo si ottiene la carica *q* (l'equazione che risulta è nota come legge di Felici)

$$q = \int i dt = -\frac{1}{R}\Delta\Phi_B$$

e quindi, in questo caso,

$$q = -\frac{100 A \Delta B}{R}.$$

Sostituendo i valori numerici si trova, in valore assoluto, q =0.02 C.

Esercizio 7.3

Una spira di forma qualunque giace su un piano orizzontale, in presenza di un campo magnetico diretto verticalmente dal basso verso l'alto. Determinare il verso della corrente indotta nella spira, visto da un osservatore che si trova al di sopra della spira (e che quind vede il campo puntare verso se stesso), nei seguenti casi: (a)la spira viene dilata meccanicamente; (b)il modulo del campo diminuisce nel tempo.

Soluzione: (a) Quando la spira si dilata il flusso ad essa concatenato aumenta. Per la legge di Lenz il verso della corrente indotta deve essere tale da opporsi a questo aumento, e quindi il campo generato dalla corrente indotta deve essere opposto al campo esterno. La regola della mano destra ci dice che il verso della corrente indotta è orario.
(b) In questo caso, per la legge di Lenz, il campo della corrente indotta deve avere lo stesso verso di quello esterno, per contrastare la diminuzione di quest'ultimo. Il verso della corrente indotta è quindi antiorario.

Esercizio 7.4

Nel filo indefinito dell'esercizio 6.10 la corrente I passa da 0 a 90 mA in 15 msec, con variazione uniforme. Supponendo a = 30 cm, b = 10 cm e d = 5 cm determinare la forza elettromotrice indotta nella spira.
Soluzione: Il flusso concatenato con la spira vale

$$\Phi_B = \int \vec{B} \bullet \vec{n} dS = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right),$$

e quindi la forza elettromotrice vale

$$E = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{d}\right)\frac{dI}{dt}.$$

Numericamente e in valore assoluto $E \cong 3.96 \cdot 10^{-7}$ V.

Esercizio 7.5

Due esperienze di natura elettrica vengono compiute nello stesso laboratorio. In una, una corrente variabile nel tempo secondo la legge $I = I_0 sin(\omega t)$ con il massimo valore di I uguale ad 1 A passa in un lungo filo rettilineo. Nell'altra viene impiegata una bobina quadrata piana costituita da 50 spire sovrapposte di area media S = 0.25 m^2.

a) Calcolare a quale distanza d dal filo deve trovarsi il centro della bobina se la frequenza della corrente è di 1000 Hz e se si vuole che nella bobina venga a manifestarsi una f.e.m. minore 10^{-3} V.
b) Quali orientamenti della bobina garantiscono f.e.m.=0 per qualsiasi valore della distanza d?

Soluzione: Poiché la corrente nel filo è variabile, sarà pure variabile nel tempo il campo magnetico $|B|$ generato ad una generica distanza r dal filo. Di conseguenza sarà variabile il flusso del campo magnetico della bobina che sarà soggetta ad una f.e.m. indotta.
Dato che ogni fascia infinitesima, lunga $l = \sqrt{S}$, in cui si può pensare composta la spira quadrata, ha una diversa distanza dal filo, il flusso del campo magnetico è dato da

$$\phi = N\int_{d-l/2}^{d+l/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = ... = \frac{N\mu_0 I_0 l_0 \cos\omega t}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l/2}{d-l/2}\right)$$

Per cui la f.e.m. è

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{N\mu_0 I_0 l\omega sin\omega t}{2\pi} \ln\left(\frac{d+l/2}{d-l/2}\right)$$

e raggiunge il suo massimo quando $sin\omega t = 1$. Affinché non si manifesti una f.e.m. maggiore di 10^{-3} V basta quindi imporre

$$f.e.m. < 10^{-3}$$

da cui, svolgendo i calcoli, si ricava d < 15.71 m.

Esercizi proposti

Esercizio 7.6

Nell'esercizio 6.10, uno dei due lati di lunghezza *b* trasla parallelamente a se stesso con velocità costante v. Determinare la forza elettromotrice indotta nella spira e, detta R la resistenza della spira, confrontare la potenza dissipata per effetto Joule con quella necessaria per mantenere costante la velocità del lato mobile.

Risultato: $\varepsilon = -Bbv$; $P_J = \dfrac{(Bbv)^2}{R}$; $P_e = ibBv$

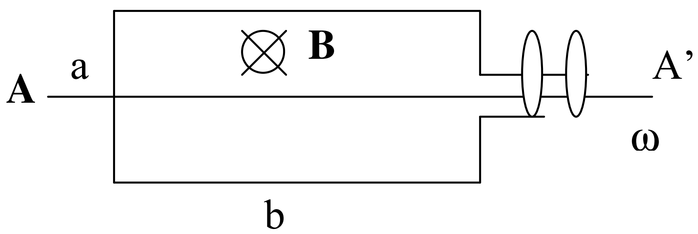
Esercizio 7.7

Un filo di lunghezza *l*, massa *m* e resistenza R scorre senza attrito su rotaie parallele di resistenza trascurabile. Il piano della rotaie forma un angolo θ con il piano orizzontale e all'estremità inferiore il circuito è chiuso da un filo, anch'esso di resistenza trascurabile, in modo da formare una spira rettangolare. In tutta la regione esiste un campo magnetico uniforme diretto verticalmente dal basso verso l'alto. Dimostrare che il filo raggiunge una velocità limite e calcolarla.

Risultato: $v = \dfrac{mgR\sin\theta}{B^2 l^2 \cos^2\theta}$.

Esercizio 7.8

Una bobina rettangolare formata da N = 100 spire sovrapposte di lati *a* = 1 cm e *b* = 5 cm è collegata a dei collettori circolari e ruota intorno all'asse AA' con velocità angolare ω in un campo magnetico B = 0.4 T. Ricavare l'espressione del flusso quando la bobina si trova nella posizione di figura ($\vec{B}$ ortogonale al piano della spira) e della differenza di potenziale massima tra i collettori specificando la posizione della bobina rispetto al campo. Calcolare poi a quale velocità angolare la bobina deve ruotare per ottenere una differenza di potenziale massima pari a 100 V.



Risultato:

$\phi = 0.02 \; Wb$ *con* $\vec{B} // \vec{n}$; $\varepsilon_{max} = NBab\omega$ *con* $\vec{B} \perp \vec{n}$; $\omega = 5000 \; rad/\sec$

Esercizio 7.9

Una spira quadrata di lato L = $\lambda/4$ può traslare lungo l'asse x, parallelamente al piano (x,y). Essa è immersa in una regione in cui il campo magnetico è
$B = B_z = B_0 sin(kx)\cos(\omega t)$.

Calcolare:

a) la forza elettromotrice indotta in funzione del tempo quando la spira si trova con lo spigolo inferiore sinistro coincidente con l'origine O.
b) di quale tratto x si deve traslare la spira dalla posizione di cui al punto a) per avere il massimo valore del flusso del campo magnetico attraverso la spira all'istante t=0.

Risultato:

a) $f.e.m. = \frac{B_0 L \omega}{k}$

b) $x = \lambda/8$

Esercizio 7.10

Una spira rettangolare di lati l_1 = 0.5 m e l_2 = 1 m viene rimossa con velocità costante v = 3 m/sec e parallela al lato maggiore della spia da una regione dove è presente un campo magnetico B =1T perpendicolare alla spira stessa. Sapendo che la resistenza elettrica nella spira è R = 1.5 Ω trovare la corrente che circola nella spira.

Risultato: I = 1A

7 Quesiti di autoverifica

1. Una spira piana è posta in un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse z. Se la normale alla spira è diretta lungo l'asse y cosa si può dire?

   i) Il flusso magnetico è nullo.
   ii) La forza elettromotrice indotta è massima.
   iii) Ruotando la spira con velocità ω, la forza elettromotrice indotta è massima quando la normale alla spira coincide con l'asse z.
   iv) Ruotando la spira con velocità ω, il flusso varia ma è sempre diverso da zero.

2. Dato un campo magnetico lungo l'asse z e volendo indurre in una spira deformabile, posta nel piano xy, una forza elettromotrice quale di queste possibilità devo scartare?

   i) Ruoto la spira rispetto all'asse z.
   ii) Deformo la spira.
   iii) Rendo il campo magnetico variabile lungo l'asse z.
   iv) Ruoto la spira rispetto ad un qualunque asse nel piano xy.

3. Cosa significa la legge di Lenz?

   i) Esprime la tendenza di un sistema fisico a ritornare nel suo stato di equilibrio iniziale.
   ii) Permette di determinare il modulo della forza elettromotrice indotta.
   iii) Permette di determinare la direzione della corrente totale in un circuito.
   iv) Permette di determinare il calore dissipato in un circuito.

4. Quale di questi dispositivi non funzione sulla base del principio di induzione magnetica?

   i) Televisione
   ii) Dinamo
   iii) Motore elettrico
   iv) Sistema di frenatura di metropolitane.

5. Quale di queste leggi rende conto del fatto che non esiste il monopolo magnetico?

   i) La legge di Gauss del magnetismo
   ii) La legge di Ampère
   iii) La legge di Biot-Savart
   iv) La legge di Faraday

Autoinduzione

Si consideri il flusso magnetico Φ_B attraverso una superficie delimitata da un conduttore percorso da una corrente di intensità *I*. Poiché, per la legge di Biot-Savart, il campo magnetico è proporzionale ad *I*, lo stesso varrà per il suo flusso: $\Phi_B \propto I$. La costante di proporzionalità

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

viene chiamata induttanza e si misura in *henry* (simbolo H). Si verifica facilmente che

$$1\mathrm{H} = 1\Omega{\cdot}\mathrm{s}\ .$$

Nel caso di un solenoide ideale di area *A*, lunghezza *l* ed avente *n* spire per unità di lunghezza si ottiene

$$L = \mu_0 n^2 l A\ .$$

Se la corrente *I* nel circuito varia, anche Φ_B varia e, per la legge di Faraday-Henry, nel circuito si ha una forza elettromotrice indotta. Questo fenomeno viene chiamato autoinduzione ed è descritto quantitativamente dalla relazione

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}\ ,$$

che può essere dedotta dalla legge di Faraday-Henry usando la definizione di induttanza.

Energia del campo magnetico

Come per il campo elettrico, anche al campo magnetico è associata un'energia, la cui densità si scrive nella forma

$$w = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\ .$$

Nel caso di un circuito di induttanza *L*, percorso da una corrente di intensità *I*, integrando la densità di energia del campo magnetico su tutto lo spazio, si ottiene l'energia totale

$$W = \frac{1}{2}LI^2\ .$$

Mutua induzione

Si consideri un circuito (che chiameremo circuito 1) percorso da una corrente I_1, posto in prossimità di un altro circuito (che chiameremo circuito 2). Al variare di I_1 varierà il flusso magnetico concatenato con il circuito 2, nel quale pertanto si avrà una forza elettromotrice indotta, in accordo alla legge di Faraday-Henry

$$\mathcal{E}_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

dove M_{21} è una costante che ha le dimensioni di un'induttanza.
Scambiando il ruolo dei due circuiti potremo scrivere

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} ,$$

dove I_2 è la corrente che scorre nel circuito 2.
Si può dimostrare, per mezzo di considerazioni energetiche, che le due costanti sono uguali, e definire quindi il coefficiente di mutua induzione

$$M = M_{12} = M_{21} .$$

Esercizi svolti

Esercizio 8.1

Un avvolgimento di forma toroidale e sezione rettangolare è costituito da $N = 100$ spire; i raggi interno ed esterno sono rispettivamente $r_1 = 5\text{cm}$ e $r_2 = 6\text{cm}$ e la larghezza del toroide è $a = 1\text{cm}$.
Calcolare l'induttanza del toroide e l'energia magnetica in esso immagazzinata nell'ipotesi che nel circuito scorra una corrente $I = 5\text{A}$.

Soluzione:
Il campo magnetico all'interno dell'avvolgimento forma delle linee di forza circolari e il suo modulo, che per ragioni di simmetria dipende solo dalla distanza r dall'asse del toroide, si può calcolare tramite il teorema di Ampère e risulta essere

$$B(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

Conseguentemente il flusso magnetico attraverso la sezione del toroide vale

$$\Phi_B = \int_{\text{sezione}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = a\int_{r_1}^{r_2} B(r)dr = a\frac{\mu_0 NI}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 NIa}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Essendo il flusso Φ_B concatenato a N spire, l'induttanza è dunque

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \approx 3.65\mu\text{H} ,$$

mentre l'energia magnetica è

$$W = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} \approx 4.56\times 10^{-5}\text{ J}.$$

Si può verificare che l'energia magnetica avrebbe potuto essere calcolata anche integrando la densità di energia all'interno del toroide, ottenendo il medesimo risultato

$$W = \int_{\text{volume}} w\, dV = \int_{\text{volume}} \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_{r_1}^{r_2} B^2(r) a 2\pi r dr = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 a}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Esercizio 8.2

Si consideri un cavo coassiale costituito da due superfici cilindriche di raggi r_1 e $r_2 > r_1$, percorse da correnti (uniformemente distribuite) di intensità *I*. Determinare l'energia magnetica immagazzinata (per unità di lunghezza) e l'induttanza (per unità di lunghezza) di tale cavo.

Soluzione:

Per ragioni di simmetria il campo magnetico forma linee di forza circolari centrate sull'asse del cavo e il suo modulo dipende solo dalla distanza da tale asse. Utilizzando il teorema di Ampère si dimostra che il campo magnetico è presente solo nella regione compresa tra i due conduttori e ha modulo

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

dove *r* indica appunto la distanza dall'asse.

La densità di energia magnetica è quindi anch'essa funzione della distanza dall'asse e vale

$$w(r) = \frac{1}{2}\frac{B^2(r)}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Per l'energia immagazzinata in un tratto di lunghezza *l* avremo pertanto

$$W = \int_{\text{volume}} w dV = \int_{r_1}^{r_2} w(r) l 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

L'induttanza può poi essere calcolata facilmente osservando che

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Si vede facilmente che entrambe le grandezze calcolate su un generico tratto di cavo dipendono (linearmente) solo dalla lunghezza l del tratto e non dalla posizione assoluta di questo. Ha quindi senso definire le densità di energia magnetica e induttanza per unità di lunghezza nel seguente modo naturale

$$\text{W} = \frac{W}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\text{L} = \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Esercizio 8.3

Una bobina di N spire è avvolta attorno ad un lungo solenoide di sezione circolare di raggio R, avente n spire per unità di lunghezza.
Calcolare il coefficiente di mutua induzione tra bobina e solenoide.

Soluzione:

Detta I la corrente nel solenoide, il campo al suo interno ha modulo $B = \mu_0 nI$. Il flusso concatenato con la bobina è quindi

$$\Phi_B = NB\pi R^2 = N\mu_0 nI\pi R^2,$$

per cui il coefficiente di mutua induzione risulta essere

$$M = \frac{\Phi_B}{I} = N\mu_0 n\pi R^2 .$$

Esercizi proposti

Esercizio 8.4

Calcolare l'induttanza per unità di lunghezza di una linea di trasmissione a piattina, costituita da due conduttori cilindrici di raggio $a = 0.25\text{mm}$ e posti a distanza (interasse) $d = 5\text{mm}$. Un filo viene usato come conduttore di andata e l'altro come conduttore di ritorno. Si ipotizzi che la corrente scorra interamente sulla superficie dei due conduttori. Che cosa succede se questa ipotesi viene rimossa e ad esempio la corrente risulta distribuita uniformemente nei conduttori?

Risultato:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \approx 1.18\mu\text{H/m}$$

Se la corrente è distribuita l'induttanza aumenta leggermente in conseguenza del flusso autoconcatenato a ciascun filo.

Esercizio 8.5

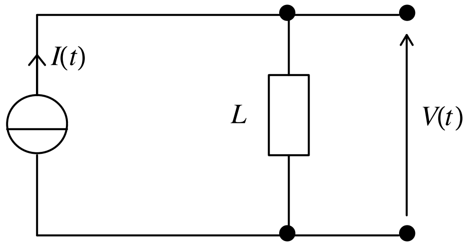
Nel centro di una spira di raggio R si trova una seconda spira molto piccola di area $A << R^2$; i piani delle due spire formano un angolo θ. Si calcoli la mutua induttanza M del sistema.

Risultato:

$$M \approx \frac{\mu_0 A \cos\theta}{2R}$$

Esercizio 8.6

Un generatore di corrente sinusoidale a frequenza f impone una corrente $I(t)$ di ampiezza I_0 in un avvolgimento di induttanza L. La tensione $V(t)$ ai capi dell'avvolgimento viene misurata da un oscilloscopio con la convenzione di segno mostrata in figura (convenzione degli utilizzatori). Mostrare che $V(t)$ è ancora sinusoidale con la stessa frequenza ma sfasata in anticipo di un quarto di periodo e determinarne l'ampiezza V_0.



Risultato:

$$I(t) = I_0 \operatorname{sen}(2\pi f t)$$
$$V(t) = V_0 \cos(2\pi f t)$$
$$V_0 = 2\pi f L I_0$$

1) Che cos'è l'induttanza o coefficiente di autoinduzione?

a) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a un circuito e la corrente che scorre nello stesso circuito
b) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a un circuito e generato dalla corrente che vi scorre e l'intensità della corrente stessa
c) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a un circuito e la corrente che scorre in un altro circuito
d) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a un circuito e generato dalla corrente che vi scorre e l'intensità della corrente che scorre in un altro circuito

2) Che cos'è la mutua induttanza o coefficiente di mutua induzione fra due circuiti?

a) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a uno dei circuiti e la corrente che scorre nel circuito stesso
b) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a uno dei due circuiti e generato dalla corrente che vi scorre e l'intensità della corrente stessa
c) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a uno dei due circuiti e la corrente che scorre nell'altro circuito
d) Il rapporto tra il flusso magnetico concatenato a uno dei due circuiti e generato dalla corrente che scorre nell'altro circuito e l'intensità della corrente stessa

3) Siano dati due circuiti di induttanze L_1 e L_2 in cui scorrono rispettivamente le correnti I_1 e I_2. La mutua induttanza tra i due circuiti vale M. Come si calcolano i flussi magnetici Φ_1 e Φ_2 concatenati ai due circuiti?

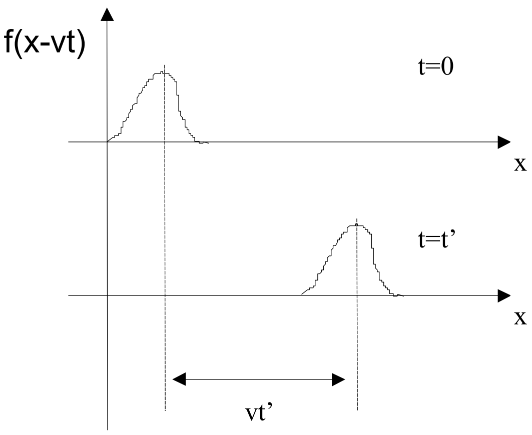
a) $\Phi_1 = L_1 I_1$, $\Phi_2 = L_2 I_2$
b) $\Phi_1 = L_1 I_1$, $\Phi_2 = M I_1$
c) $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$, $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$
d) Non si possono determinare con i parametri dati

Rappresentazione di onde

La generica espressione di un'onda che si propaga lungo un asse x può essere espressa come

$$f(x,t) = f(x \pm vt) \qquad (1)$$

dove v è la velocità di propagazione, ed il segno davanti ad essa indica la direzione di propagazione



nell'intervallo di tempo t' l'onda si sposta nello spazio rigidamente di una distanza pari a vt'

Qualunque funzione del tipo (1) soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \text{equazione delle onde}$$

Vengono definite armoniche onde del tipo

$$f(x \pm vt) = A\sin[k(x \pm vt)] = A\sin[kx \pm \omega t] \qquad \text{con } \omega = v \cdot k$$

Tale onda è caratterizzata da una periodicità spaziale di periodo $\lambda=2\pi/k$, dove λ è la lunghezza d'onda, e da una periodicità temporale di periodo $T=2\pi/\omega$.
La frequenza di oscillazione è $\nu=1/T=\omega/2\pi$ e vale la relazione $\nu\cdot\lambda=v$.
La velocità di fase è la velocità di propagazione di una singola onda armonica $v=\omega/k$. Un qualunque segnale, sia esso periodico non armonico o in generale aperiodico, può essere rappresentato come una somma di funzioni armoniche (analisi di Fourier). Nel caso in cui le funzioni armoniche si propaghino in un mezzo in cui le rispettive velocità di fase v dipendono dalla lunghezza d'onda, la velocità con cui si propaga l'energia trasportata dal segnale è la cosiddetta velocità di gruppo v_g

$$v_g = v + \frac{dv}{dk}\cdot k$$

Equazioni di Maxwell e onde elettromagnetiche

Le equazioni di Maxwell consistono in quattro relazioni che legano il campo elettrico e magnetico, che sono state descritte nelle schede precedenti. Esse possono essere espresse in forma integrale o differenziale:

$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Legge di Gauss per l'elettricità
$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	Legge di Gauss per il magnetismo
$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_t dl = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{u}_n dS$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Legge dell'induzione di Faraday
$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_T dS = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E} \cdot \vec{u}_n dS$	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Legge di Ampère

Supponiamo non vi siano cariche libere statiche né correnti di conduzione, se ci poniamo in un sistema di riferimento cartesiano e supponiamo che i campi elettrico (E) e magnetico (B) siano costantemente orientati rispettivamente lungo gli assi x e y, si dimostra, manipolando opportunamente le equazioni di Maxwell, che i due campi soddisfano l'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

per cui le soluzioni delle suddette equazioni non sono altro che onde trasversali tra loro ortogonali (come si suol dire polarizzate linearmente) che si propagano lungo l'asse z (E $\perp$ B) con una velocità $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ che è la velocità della luce nel vuoto ($3 10^8$ m/s).

Se sono imposte le soluzioni armoniche per E e B, si ricava che in ogni istante E = c·B.

Le densità volumica di energia elettrica e magnetica sono rispettivamente

$$w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad \text{per cui} \qquad w_{tot} = w_{el} + w_{mag} = \varepsilon_0 E^2$$

Un'onda elettromagnetica trasporta nello spazio energia, il flusso di tale energia per unità di tempo per unità di superficie è dato dal vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ che ha la direzione di propagazione dell'onda.

Una carica elettrica, che si muove di moto accelerato, irradia onde elettromagnetiche; in particolare, una carica che compie oscillazioni armoniche irradia onde armoniche con la stessa frequenza di oscillazione.

Le equazioni di Maxwell possono essere risolte anche nel caso in cui le onde si propaghino in un mezzo materiale diverso dal vuoto; in questo caso la velocità di fase è diversa da c ed è data da $v=c/n$, dove n è il cosiddetto indice di rifrazione del mezzo.

Esercizi con soluzione

Esercizio 9.1

Tre diverse onde sonore hanno frequenza ν rispettivamente 10 Hz, 1000 Hz e 50 Mhz. Determinare le lunghezze d'onda corrispondenti ed i periodi di oscillazione, sapendo che la velocità del suono nell'aria è v=330 m/s.

SOLUZIONE Ricordando le relazioni $\lambda=v/\nu$ e $T=1/\nu$, , ottengo $l_1=33$ m $T_1=.1$ s, $l_2=.33$m $T_2=1$ ms, $l_3=6.6\ 10^{-6}$ m $T_3=20$ ns.

Esercizio 9.2

Un'onda elettromagnetica piana sinusoidale, di frequenza $\nu=100$ Khz, polarizzata linearmente, si propaga nel vuoto nel verso positivo dell'asse x.
a) Se il campo elettrico ha ampiezza $E_0=10$ V/m quanto vale l'ampiezza del campo magnetico?
b) Si determinino le espressioni in funzione del tempo del campo elettrico e di quello magnetico se all'istante $t_1= 7.5\ \mu$s nel punto dell'asse x di ascissa $x_1=57$ m il campo elettrico ha componente $E_1=E_0=10$ V/m secondo l'asse y.

SOLUZIONE

a) $B_0= E_0 / c = 33.3$ nT.
b) Deve essere

$$E_0 \sin [k(x_1 - x_0) - \omega \cdot t_1] = E_0$$

quindi

$$k(x_1 - x_0) - \omega \cdot t = (2n\pi + \pi/2) \text{ rad}$$

con n intero positivo o negativo: si ottiene

$$x_0 = x_1 - ct_1 - (n + 1/4)\cdot\lambda = -2943 \text{ m} - n\cdot\lambda \qquad \text{essendo } \lambda= c/\nu= 3000 \text{ m}$$

a questo punto, il campo magnetico e quello elettrico si ottengono dalle equazioni armoniche

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \sin[k (x-x_0) - \omega\cdot t] \qquad \mathbf{B} = c\mathbf{E_0} \sin[k (x-x_0) - \omega\cdot t]$$

Esercizio 9.3

Il campo elettrico del segnale raccolto da un ricevitore radio ha un'ampiezza massima E_0 = 0.1 V/m; approssimando ad un'onda piana l'onda ricevuta, si calcoli:
a) l'intensità media dell'onda;

b) la potenza della stazione se questa irradia isotropicamente ed è posta a distanza d = 500 m dall'apparecchio ricevitore.

SOLUZIONE

a) l'intensità media è rappresentata dal valor medio del vettore di Poynting

$$I = \left|\vec{P}(t)\right| = \frac{1}{\mu_0}\left|\vec{E}(t)\right|\left|\vec{B}(t)\right| = \frac{1}{c\mu_0}E_0^2 sin^2\omega t$$

b) $\bar{I}$ rappresenta l'energia che in media, nell'unità di tempo, attraversa l'unità di superficie; poiché la stazione irradia isotropicamente, la potenza media che attraversa la superficie sferica con centro nella stazione e raggio r risulta $4\pi r^2\bar{I}$ e coincide con la potenza media irradiata dalla stazione, quindi $W_{media\ staz.}$= $4\pi r^2\bar{I}$ = 41.7 Watt.

Esercizio 9.4

Un'onda elettromagnetica piana, di frequenza ν=250 Khz, si propaga nel vuoto e si riflette sopra una superficie piana perfettamente conduttrice, disposta perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione. A quale distanze dalla superficie si formano il primo massimo e minimo del campo elettrico?

SOLUZIONE

Si consideri un asse x perpendicolare alla superficie piana conduttrice, con l'origine O su questa. L'onda elettromagnetica piana con il campo elettrico costantemente polarizzato lungo l'asse y, può in generale scriversi come sovrapposizione di un'onda progressiva ed una regressiva, cioè

$$E(x,t)=E_0\sin(kx-\omega\cdot t) + E_1\sin(kx + \omega\cdot t + \phi)$$

la superficie è perfettamente conduttrice, quindi in tutti i suoi punti, quindi nel piano x=0 E=0 in qualunque istante t; da ciò segue che $E_0=E_1$ e ϕ =0 , per cui applicando la formula di prostaferesi

$$\sin a + \sin b = 2 \sin [(a + b)/2]\cos[(a + b)/2]$$

ottengo:

$$E(x,t)=E_0\sin(kx-\omega\cdot t) + E_0\sin(kx + \omega\cdot t)=2E_0\sin(kx)\cos(\omega\cdot t)$$

che è l'equazione di un'onda stazionaria, caratterizzata dall'avere una velocità di propagazione nulla. Nei punti di ascisse x=(2n + 1)π/(2k) = (2n + 1) λ/4 l'ampiezza elettrica è massima (ventri), i punti di ascisse x=n$\cdot\lambda$/2 sono invece i minimi (nodi). Nel nostro caso $\lambda=c/\nu$, per cui si ha il primo ventre per I_{max}=300 m ed il primo nodo per x=0.

Esercizio 9.5

Il vettore di Poynting di un'onda elettromagnetica piana nel vuoto è dato da:

$$\vec{S}(x,t) = S_0 \cos^2(kx - \omega\, t)\overrightarrow{u_x}$$

ed è orientato quindi lungo il semiasse positivo delle ascisse in un sistema di riferimento cartesiano (x,y,z). Il valore dell'ampiezza S_0 è 40 W/m^3, il numero d'onda k vale 20 m^{-1} e la pulsazione angolare ω vale 3x10^9 s^{-1}.
Viene richiesto di calcolare la lunghezza d'onda λ*,* la frequenza ν dell'onda e il valore dei moduli del campo elettrico **E** e del campo magnetico **B.**

SOLUZIONE

Ricordando le relazioni k=2π/λ e ω=2πν posso scrivere:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{6.28}{20} = 0.314 \text{ m} \\ \\ \nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{10^9}{6.28} = 1.592 \cdot 10^8 \text{ Hz} \end{cases}$$

per ciò che riguarda invece il valore assunto dai moduli dei campi elettrico e magnetico ricordiamo che $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$ ed inoltre che B=E/c. Di conseguenza avremo che :

$$\left|\vec{S}\right| = \frac{1}{\mu_0}\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| = \frac{1}{\mathrm{c}\,\mu_0}\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{E}\right| \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \left|\vec{E}\right| = 122.8 \text{ V/m} \\ \\ \left|\vec{B}\right| = 0.409 \cdot 10^{-6} \text{ T} \end{cases}$$

Esercizi con soluzione

Esercizio 9.6

Un'onda radio si propaga in un mezzo nel quale è $\varepsilon_r = 1.5$ e $\mu_r = 1.05$ con una frequenza uguale a 100 KHz. Si calcoli la lunghezza d'onda.

SOLUZIONE $\lambda = 2390$ m.

Esercizio 9.7

Un'onda elettromagnetica si propaga in un mezzo con velocità $1.5 \cdot 10^8$ m/s. Sapendo che la costante dielettrica relativa del mezzo è 3, si calcoli la permeabilità magnetica del mezzo.

SOLUZIONE $\mu_r = 1.33$.

Esercizio 9.8

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza $f = 7.5 \cdot 10^{14}$ Hz si propaga lungo l'asse x. Essa è polarizzata rettilinearmente con il campo elettrico **E** che forma l'angolo $\theta = 30°$ con il piano x,y ed ha ampiezza $E_0 = 10^3$ V/m. Scrivere l'equazione di quest'onda e calcolare l'ampiezza del campo magnetico.

SOLUZIONE $E_y = 0.866$ $\mu_r = 1.33$.

Esercizio 9.9

Le onde luminose nel vuoto hanno una lunghezza d'onda che varia da un massimo di circa 0.8 μm per il rosso ad un minimo di circa 0.4 μm per il violetto. Si determino i valori minimo e massimo della frequenza di vibrazione del loro campo elettromagnetico.

SOLUZIONE $3.75 \cdot 10^{14}$ Hz ; $7.5 \cdot 10^{14}$ Hz.

Esercizio 9.10

Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana ha un'ampiezza di 10^{-2} N/C. Si trovi la grandezza del campoi magnetico e l'energia per unità di volume.

SOLUZIONE $B = 3.33 \cdot 10^{11}$ T; $E = 8.85 \cdot 10^{16}$ J/m^3.

Domande a Test.

Domanda 9.1

Un'onda elettromagnetica piana polarizzata si propaga nel vuoto con frequenza ν = 250 kHz. La sua lunghezza d'onda λ e la sua velocità di propagazione *v* valgono:

1) λ = 1200 km ; v = 3 10^6 m/s
2) λ = 1200 m ; v = 3 10^8 m/s
3) λ = 1200 cm ; v = 3 10^8 m/s
4) λ = 1200 km ; v = 3 10^8 m/s

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 9.2

Si sovrappongono due onde piane monocromatiche descritte dalle equazioni $\xi_1 = 4\,\mathrm{sen}(3x - 2t)$ e $\xi_2 = 4\,\mathrm{sen}(3x + 2t)$. Se le lunghezze sono espresse in metri e i tempi in secondi, la velocità di gruppo della risultante vale:

1) 0,667 m/s
2) 0
3) 1,333 m/s
4) Non si può dire se non si specificano le proprietà del mezzo entro il quale avviene la propagazione.

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 9.3

La legge di Gauss nel vuoto si può esprimere mediante la formula

1) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
2) $\oint \vec{E} \cdot \hat{u}_l dl = 0$
3) $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$

RISPOSTA CORRETTA : 4

Domanda 9.4

Un'onda elettromagnetica di frequenza f=5·GHz si propaga in un mezzo con indice di rifrazione n=2.5. La sua velocità di fase vale:

1) v=3·10^8 m/s
2) v=5·10^9 m/s

3) $v=1.2\cdot10^{8}$ m/s
4) $v=2\cdot10^{-10}$ m/s

RISPOSTA CORRETTA : 3

Domanda 9.5

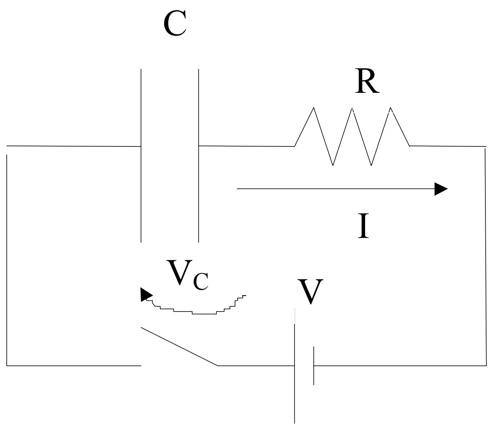
Un'onda elettromagnetica polarizzata linearmente si propaga nel vuoto. Il modulo del campo magnetico vale $B=5\cdot10^{-8}$ T. La densità volumica di energia vale:

1) $w=1.99\cdot10^{-9}$ J/m^3
2) $w=3.5\cdot10^{-9}$ J/m^3
3) $w=5\cdot10^{3}$ J/m^3
4) $w=1.99\cdot10^{9}$ J/m^3

RISPOSTA CORRETTA : 1

Circuiti elettrici RC

Si consideri un circuito costituito da una resistenza R, un condensatore di capacità C ed un generatore di forza elettromotrice continua V connesso con un interruttore



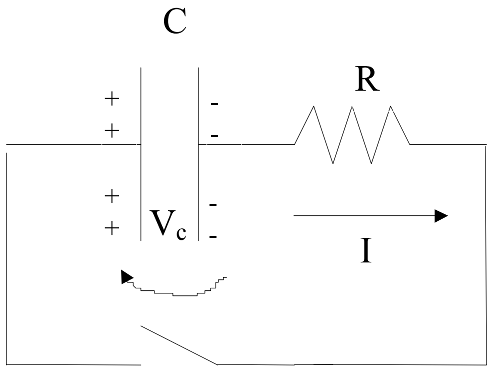
nel momento in cui chiudo l'interruttore, le cariche vengono spostate da una faccia all'altra del condensatore (il condensatore si carica).

$V = RI + V_C$ da cui si ricava l'equazione:

$V = RC\frac{dV_C}{dt} + V_C$ che ammette soluzione $V_c(t) = V\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$

l'andamento della corrente è invece $I(t) = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV_C}{dt} = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

Supponiamo ora di rimuovere il generatore dopo che il condensatore ha raggiunto la tensione di saturazione ai suoi capi V_c=V.



Alla chiusura dell'interruttore V_c -RI=0, per cui

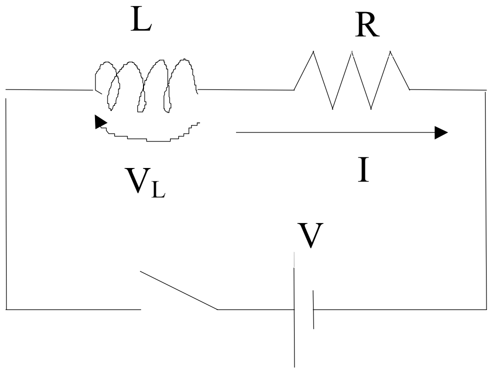
$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$ che ammette soluzione

$V_C(t) = V\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ e di conseguenza

$I(t) = -\frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$

Circuiti elettrici RL

Si consideri un circuito costituito da una resistenza R, una bobina di induttanza L ed un generatore di forza elettromotrice continua V connesso con un interruttore

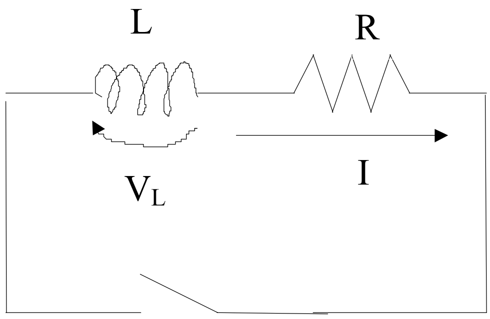


Alla chiusura dell'interruttore,il generatore tende a far circolare corrente in R ed in L $V = V_L + RI$ ed essendo $V_L = L\frac{dI}{dt}$ si ricava $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I - \frac{V}{L} = 0$ che ammette soluzione

$I(t) = \frac{V}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)\right)$ e di conseguenza, la tensione ai capi dell'induttore risulta

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} = V\exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)$$

Supponiamo ora di rimuovere il generatore dopo che la corrente nel circuito ha raggiunto il valore di saturazione I=V/R

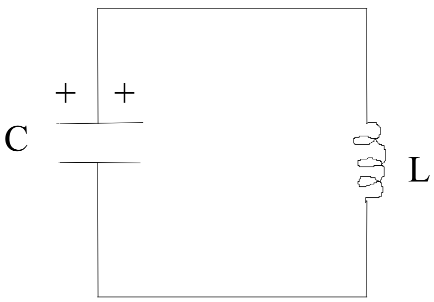


Alla chiusura dell'interruttore $V_L + RI = 0$ per cui $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$ che ammette soluzione $I(t) = \frac{V}{R}\exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)$ e di conseguenza

$$V_L(t) = -V\exp\left(-\frac{t}{L/R}\right)$$

Circuiti elettrici LC

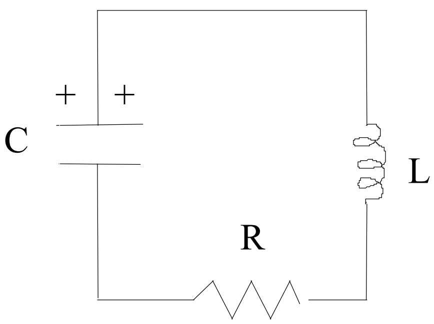
Supponiamo di connettere in serie un condensatore carico con un induttore



Il condensatore tende a scaricarsi attraverso l'induttore, supponendo non vi sia dissipazione, vi è un trasferimento di energia dal condensatore (energ. campo elettrico) alla bobina (energ. campo magnetico); quando il condensatore è completamente scarico la bobina continua a trasportare carica al condensatore che si ricarica in verso opposto, nuovamente si trasferisce energia dall'induttore al condensatore; quando il condensatore è completamente carico, nuovamente tende a scaricarsi facendo fluire carica in senso opposto e così via. Quantitativamente ciò può essere descritto imponendo la conservazione dell'energia totale del circuito $E_{tot}=E_{magnetica}+E_{elettrica}=(1/2)LI^2 + (1/2)q^2/C$

$\frac{dE_{tot}}{dt} = LI\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0$ da cui $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ la cui soluzione è $q(t) = q_M \cos(\omega t + \phi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ in definitiva si ha un'osciilazione armonica della carica.

Circuiti elettrici RLC



In questo caso $\frac{dE_{tot}}{dt} = -IR^2$ (dissipazione per effetto joule), da cui segue l'equazione $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$ che ammette soluzione

$q(t) = q_m \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos(\omega t)$ che rappresenta un'oscillazione smorzata.

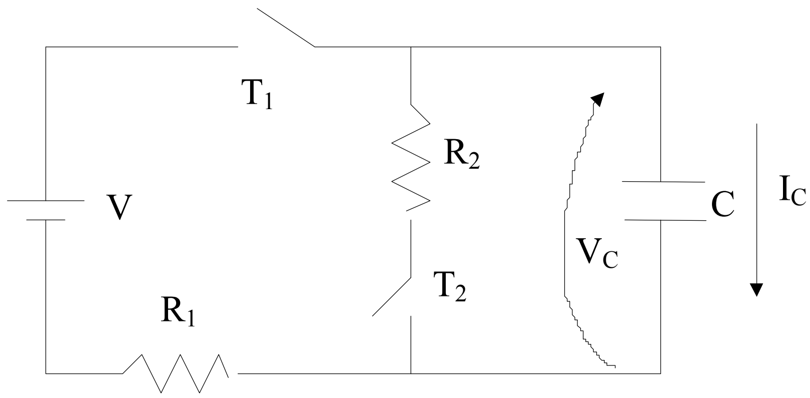
Nel caso si colleghi al circuito RLC un generatore di tensione alternata V=V_0sin(t), si ottiene $L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=Vsin(\omega i)$ da cui si ricava una corrente

$I(t)=I_0(\omega)sin[\omega t+\phi(\omega)]$ con $I_0(\omega)=\frac{V_0}{\left[R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$ e $\phi(\omega)=arc\tan\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$. Si

noti che per $\omega=\frac{1}{(LC)^{\frac{1}{2}}}=\omega_0$ [frequenza di risonanza del circuito], la corrente è la massima possibile.

Esercizi con soluzione svolta

Esercizio 10.1
Si consideri il circuito

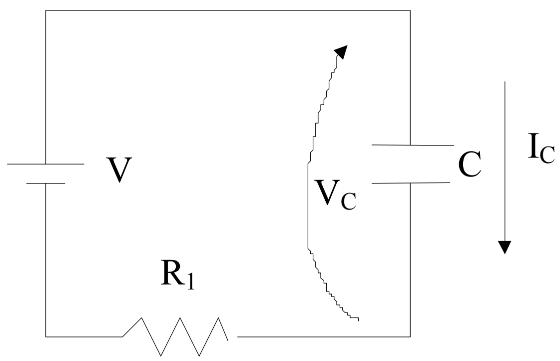


V = 10 Volts
R_1 = 5 Ω
R_2 = 10 Ω
C = 2 μF

sapendo che per t = 0 T_1 on T_2 off
t = 15 μs T_1 off T_2 on
determinare l'andamento di $I_C(t)$ e $V_C(t)$.

SOLUZIONE

per 0 < t < 15 μs il circuito risulta essere



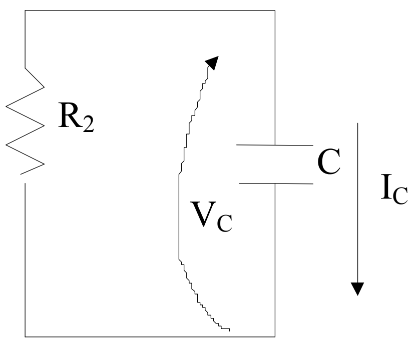
supponendo il condensatore inizialmente scarico

$$I_C(t) = \frac{V}{R_1}\exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$$

$$V_C(t) = V\left[1-\exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)\right]$$ (il condensatore si carica)

V_C(15 μs)=7.8 V I_C(15 μs)=0.45 A

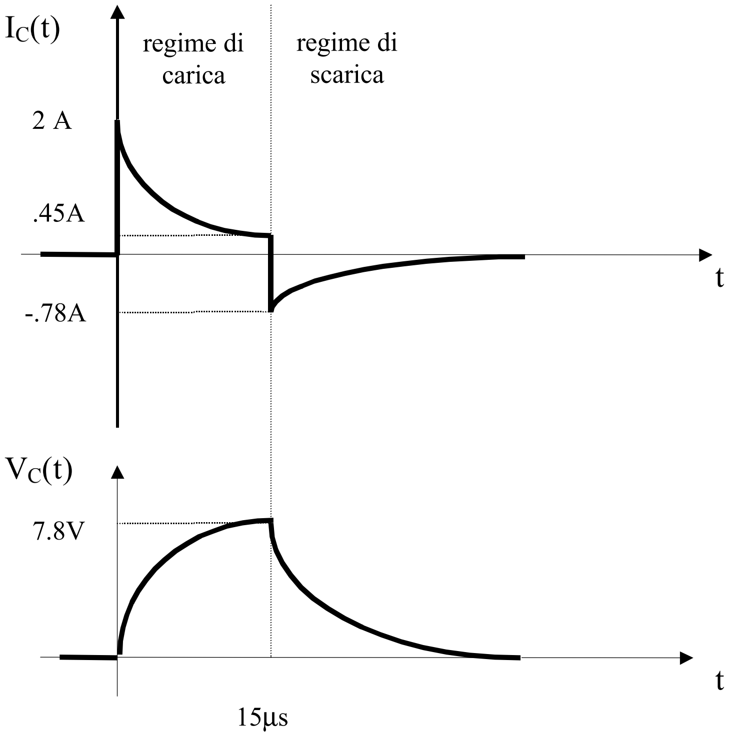
per t > 15 μs il circuito si modifica come



$$I_C(t) = -\frac{V_C(15\mu s)}{R_2}\exp\left(-\frac{t}{R\,C}\right)$$

$$V_C(t) = -I_C(t)\cdot R_2 = V_C(15\mu s)\exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right)$$

(il condensatore si scarica)



Esercizio 10.2

Un induttore (L=4 10^{-4} H) ed una resistenza (R=5 ohm) sono posti in serie ad un generatore di tensione continua (V=200 Volts)

a) quanto tempo occorre affinchè la corrente che fluisce nella resistenza raggiunga il 60% della corrente finale?

b) quanta energia è accumulata nel campo magnetico dopo che la corrente ha raggiunto il suo valore massimo?

c) calcolare che valore raggiunge la corrente dopo un tempo pari a 3 costanti di tempo τ=L/R del circuito.

SOLUZIONE

a) $I(t) = \frac{V}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{(L/R)}\right)\right]$ $\qquad$ $I_{MAX} = V/R$

quindi si impone $0.6 \cdot \frac{V}{R} = \frac{V}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{t}{(L/R)}\right)\right]$ da cui $t = -\frac{L}{R}\ln(1-0.6) = 7.2 \cdot 10^{-6} s$

b) $E = \frac{1}{2}LI_{MAX}^2 = \frac{1}{2}L\left(\frac{V}{R}\right)^2 = 0.32J$

c) $I\left(3\frac{L}{R}\right) = \frac{V}{R}\left[1-\exp(-3)\right] = 38A$

Esercizio 10.3

La corrente in un corto circuito RL passa da 1.16 A a 10.2 mA nei 1.5 s che seguono la rimozione della batteria del circuito. Supponendo che L valga 9.44 H, determinare la resistenza R del circuito.

SOLUZIONE

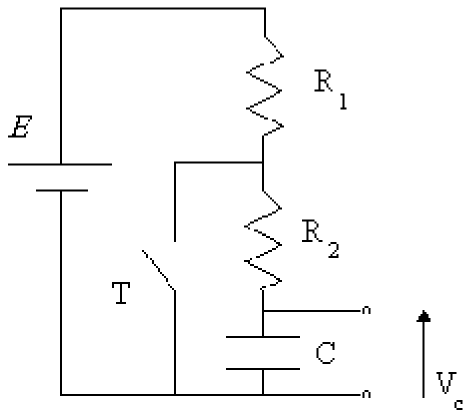
$$I(t) = I_{MAX}\exp\left(-\frac{t}{\left(L/R\right)}\right) \qquad I_{MAX} = 1.16A$$

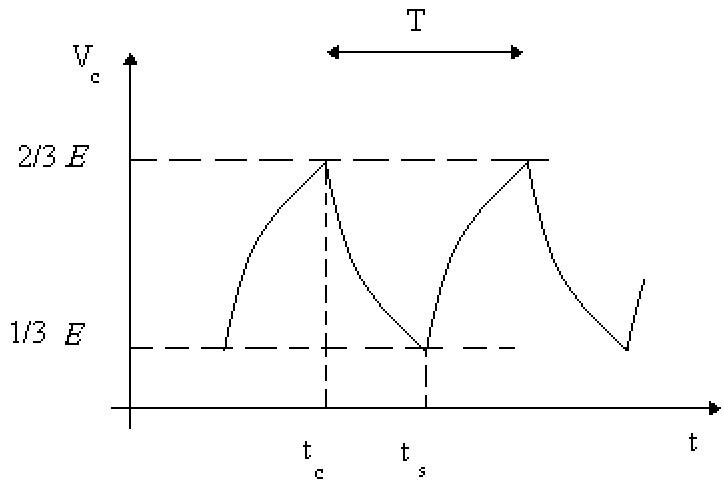
$$I(1.5s) = 10.2mA = I_{MAX}\exp\left(-\frac{1.5ms}{\left(9.44H/R\right)}\right)$$

da cui si ricava $R = \frac{L}{(1.5s)}\ln\left(\frac{1.16A}{10.2 \cdot 10^{-3}A}\right) = 29.8\Omega$

Esercizio 10.4

L'interrutore t del circuito in figura si chiude quando V_c=2/3 *E* e si apre quando V_c=1/3 *E.* Il risultato è che V_c ha l'andamento mostrato in figura.
Se R_1=40Ω, R_2=10Ω, C=2·10^{-6} F, calcolare quanto valgono il tempo di carica t_c, il tempo di scarica t_s e il periodo dell'oscillazione.





SOLUZIONE

Durante la fase di carica l'interruttore è aperto, di conseguenza la carica avviene attraverso le resistenze R_1 e R_2 che sono in serie. Si ha quindi che in un generico istante t_1 la tensione sulla capacità vale 1/3 *E*, mentre ad un generico istante t_1 la tensione sulla capacità vale 2/3 *E*.

Analiticamente la situazione è descritta dalle seguenti equazioni:

$$\mathrm{V_c} = E \cdot \left(1 - e^{-t/\mathrm{RC}}\right) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{E}{3} = E \cdot \left(1 - e^{-t_1/\mathrm{RC}}\right) \\ \dfrac{2}{3} E = E \cdot \left(1 - e^{-t_2/\mathrm{RC}}\right) \end{cases} \qquad \text{con } \mathrm{R} = \mathrm{R_1} + \mathrm{R_2}$$

$$\begin{cases} e^{-t_1/\mathrm{RC}} = \dfrac{2}{3} \\ e^{-t_2/\mathrm{RC}} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{t_1}}{RC} = -\ln\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{\mathrm{t_2}}{RC} = -\ln\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = \tau \ln 2 \quad \text{con } \tau_c = 100\mu\, s$$

dove il tempo di carica t_c vale t_2-t_1 ossia t_c=69.3 μs.

Durante la fase di scarica l'interruttore è chiuso, quindi il generatore di tensione e la resistenza R_1 sono esclusi dal circuito. Di conseguenza si avrà:

$$V_c = \frac{2}{3}E \cdot e^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{3}E = E \cdot e^{-t_1/RC} \\ \frac{1}{3}E = E \cdot e^{-t_2/RC} \end{cases} \quad \text{con } R = R_2$$

$$\begin{cases} e^{-t_1/RC} = \frac{2}{3} \\ e^{-t_2/RC} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{t_1}{RC} = -\ln\frac{2}{3} \\ \frac{t_2}{RC} = -\ln\frac{1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \tau \ln 2 \quad \text{con } \tau_c = 20\mu\, s$$

dove il tempo di scarica t_s vale t_2-t_1 ossia t_s=13.9 μs.
Il periodo con cui si ripete la forma d'onda è dato da

$$T = t_c + t_s = 69.3\mu s + 13.9\mu s = 83.2\mu s.$$

Esercizio 10.5

Si determini il tempo necessario affinché in un circuito RLC, la massima energia presente sul condensatore durante un'oscillazione si riduca a metà del suo valore iniziale. Si assuma $q=q_{MAX}$ a t=0.

SOLUZIONE

$$q(t) = q_{MAX} \exp\left(-R/2L\right)\cos(\omega t) \quad , \quad \phi = 0$$

$E_{condensatore} = \frac{[q(t)]^2}{2C}$ affinché $E=E_{MAX}/2$ $\quad q = \frac{q_{MAX}}{\sqrt{2}}$

quindi si impone $\exp\left(-\frac{R}{2L}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

da cui $t = \frac{L}{R}\ln 2$

Esercizi con soluzione

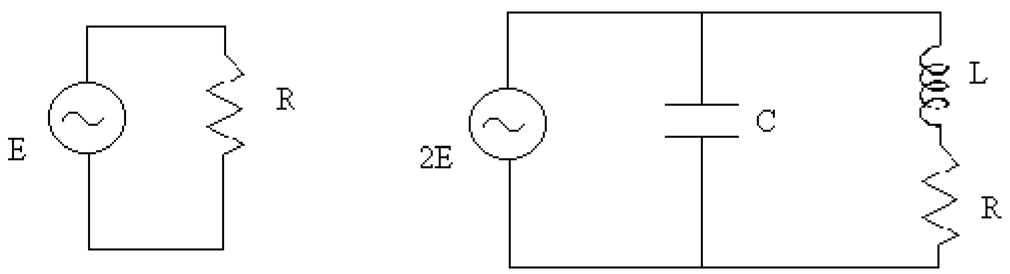
Esercizio 10.6

In un circuito oscillante LC, si determini qual è il valore della carica su un condensatore (espresso in funzione della carica massima) quando l'energia totale del circuito è suddivisa in parti uguali fra il campo magnetico ed il campo elettrico. Quanto tempo deve passare affinché si realizzi questa condizione, nel caso si assuma al tempo t=0 la carica $q=q_{MAX}$? (Si esprima tale valore in frazione di periodo e si utilizzino i valori di L=4 mH e C=6 nF)

RISULTATO [$q = \frac{q_{MAX}}{\sqrt{2}}$, t=T/8= 0.397 10^{-7} s]

Esercizio 10.7

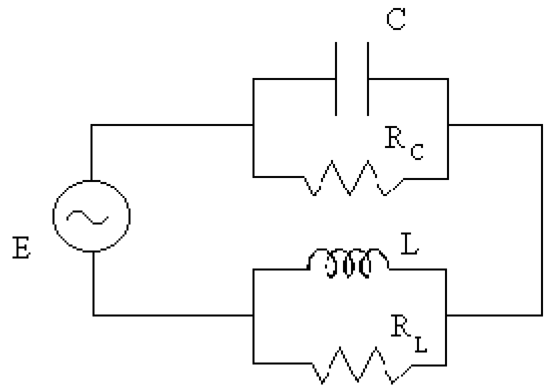
Un resistore con R=100Ω è connesso ad un generatore di forza elettromotrice alternata $E=E_0\cos\omega t$, con ω=314 rad/sec. Successivamente esso è connesso ad un generatore con $2E=E_0\cos\omega t$ secondo lo schema della figura. Si vuole che anche in questo secondo caso la corrente erogata dal generatore sia in fase con le f.e.m. e che la differenza di potenziale ai capi di R valga E. Calcolare i valori di L e C.



RISULTATO [L=0.55 H C=13.8μF]

Esercizio 10.8

Determinare per il circuito in figura l'espressione della pulsazione di risonanza e calcolarla in particolare per $R_L=R_C=1\Omega$, $L=10^{-3}$ H, $C=10^{-9}$ F. Se R_L e R_C pur restando uguali, assumono un qualunque valore diverso da 1 il risultato cambia?



RISULTATO [$\omega=10^6$ rad/s]

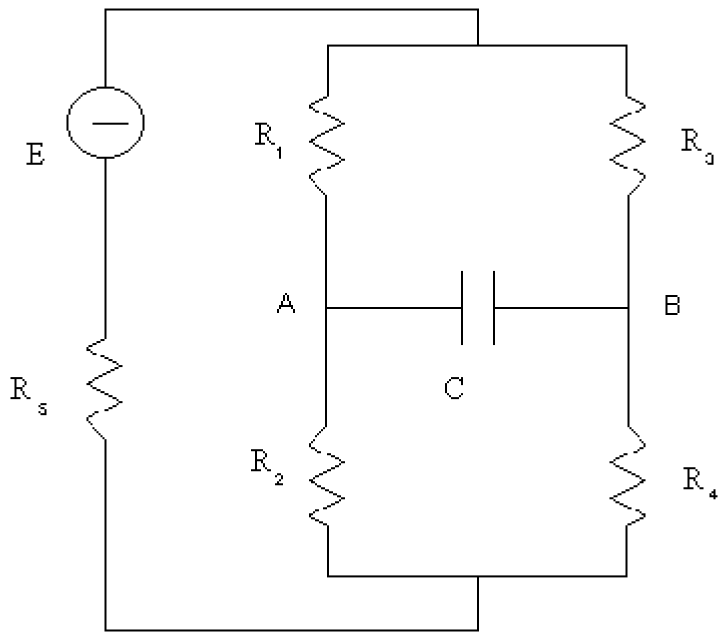
Esercizio 10.9

Con un consumo di energia uguale a 0.5 J, un condensatore viene caricato per mezzo di un generatore di forza elettromotrice costante di valore 1000 V. Raggiunto l'equilibrio il condensatore viene staccato dal generatore e collegato con un'induttanza uguale a 2 H. Si determini la frequenza delle oscillazioni nel circuito oscillante LC.

RISULTATO [f=113 Hz]

Esercizio 10.10

Nel circuito rappresentato in figura si ha che E=25 V, R_1=1Ω, R_2=4Ω, R_3=8Ω, R_4=2Ω, R_5=5Ω, C=3μF. Calcolare la differenza di potenziale V_B-V_A in condizioni stazionarie e, se si sconnette il generatore, in quanto tempo la carica del condensatore si riduce a un decimo di quella iniziale.



RISULTATO [V_B-V_A =-6 V ; t=24.9μs]

Domande a Test.

Domanda 10.1
Un condensatore di capacità *C* viene scaricato su un cavo coassiale di resistenza elettrica R e coefficiente di autoinduzione L_0.
Le energie immagazzinate nel condensatore e nel cavo coassiale:
1) tendono a zero per tempi tendenti ad infinito;
2) variano nel tempo con legge sinusoidale;
3) hanno somma costante nel tempo.
4) crescono al crescere del tempo

RISPOSTA CORRETTA : 1

Domanda 10.2
Un condensatore, a facce circolari piane e parallele di raggio a e distanti h<<a, è caricato ad una differenza di potenziale V_0 ed in seguito viene fatto scaricare su una resistenza R. La corrente nel circuito vale:
1) $i(t)=(V_0/R)\cdot \exp[(-ht)/\varepsilon_0 RS)]$
2) $i(t)=(V_0/R)$
3) $i(t)=(V_0/R)\cdot \exp[(-ht)]$
4) $i(t)=(V_0/R)\cdot t$

RISPOSTA CORRETTA: 1

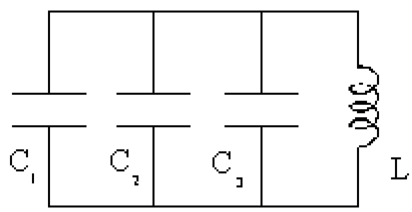
Domanda 10.3
Dato il circuito in figura la frequenza di risonanza del circuito vale:

1) $$\omega=\sqrt{\frac{1}{L(C_1+C_2+C_3)}}$$

2) $$\omega=\sqrt{\frac{L}{(C_1+C_2+C_3)}}$$

3) $$\omega=\sqrt{\frac{C_1C_2+C_2C_3+C_1C_2}{L(C_1\cdot C_2\cdot C_3)}}$$

4) $$\omega=\sqrt{\frac{(C_1+C_2+C_3)}{L}}$$



RISPOSTA CORRETTA: 1

Domanda 10.4
Nel circuito di utilizzazione di una corrente alternata la tensione V ai capi del circuito e l'intensità della corrente che lo percorre sono sfasati:
1) se il circuito è puramente ohmico
2) se il circuito ha un sensibile coefficiente di autoinduzione L
3) se nel circuito sono inserite delle capacità
4) sempre

RISPOSTA CORRETTA: 2 - 3

Domanda 10.5
Nel circuito di utilizzazione di una forza elettromotrice alternata l'intensità della corrente:
1) è sempre in fase con la f.e.m.
2) non è mai in fase con le f.e.m,
3) è in fase con la f.e.m. solo se il circuito è puramente ohmico
4) è in fase con le f.e.m. solo se

$$i = \frac{E \cdot \sin(\omega t)}{R} = I\sin(\omega t)$$

dove R è la resistenza totale del circuito di utilizzazione.

RISPOSTA CORRETTA: 3 - 4

Conduttori e dielettrici

In un conduttore ideale, le cariche possono muoversi liberamente in esso, ne consegue che se lo immergiamo in un campo elettrostatico, all'interno del conduttore il campo elettrico risulterà nullo, se ciò non fosse, avremmo un moto di cariche e non saremmo più in condizioni statiche.
In un materiale non conduttore, tutte le cariche sono fortemente vincolate ed un campo elettrostatico può facilmente penetrare al suo interno.
Si consideri un condensatore a facce piane parallele distanti d e di superficie S. Nel caso in cui tra le piastre non sia interposto alcun materiale, la capacità risulta essere $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ ed il campo elettrico tra le piastre $E = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0}$ dove ρ_{lib} è la densità superficiale di cariche libere presenti sulle piastre stesse. Qualora si inserisca un materiale non conduttore (dielettrico), la capacità aumenta di un fattore ε_r che è la cosiddetta costante dielettrica relativa, caratteristica intrinseca di ogni dielettrico ($C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$). Ciò è dovuto al fatto che a parità di cariche libere sulla piastra, il campo elettrico all'interno delle piastre è minore rispetto a quello applicato dalle suddette cariche. Si ha infatti che $E_{tot}=E_{appl.}-E_{pol}$, dove E_{pol} è il campo elettrico opposto in verso rispetto a quello applicato, prodotto dai dipoli elettrici che si sono formati nel dielettrico.

Polarizzazione e spostamento elettrico

Si definisce vettore polarizzazione **P** di un materiale, il suo momento di dipolo elettrico per unità di volume, mentre il vettore spostamento elettrico, detto anche induzione elettrica $\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_{tot}$.
Si dimostra che $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}_{tot} + \mathbf{P}$. In prima approssimazione, il vettore polarizzazione è direttamente proporzionale al campo elettrico presente in un materiale $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}_{tot}$ dove χ_e è la suscettibilità elettrica del materiale, per cui $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}_{tot} + \varepsilon_0\chi_e\mathbf{E}_{tot} = \varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}_{tot}$ ossia $\varepsilon_r=1+\chi_e$.
In un dielettrico, il teorema di Gauss risulta cosí modificato

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_N dS = \frac{\left(q_{lib} + q_{pol}\right)}{\varepsilon_0}$$

dove q_{pol} sono le cariche di polarizzazione dovuti ai dipoli elettrici, mentre per il vettore spostamento **D**

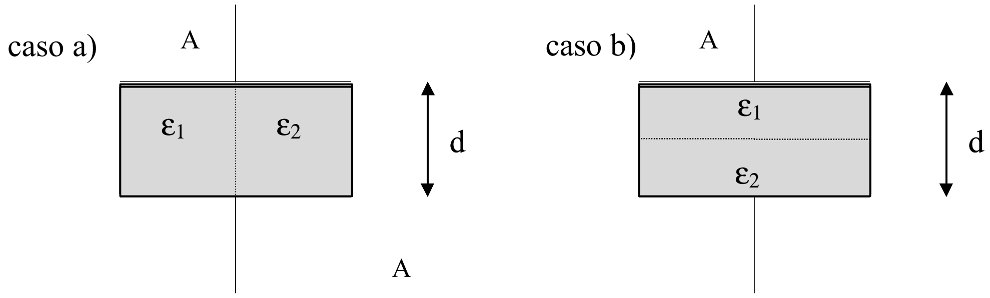
$$\oint \vec{D} \cdot \vec{u}_N dS = q_{lib}$$

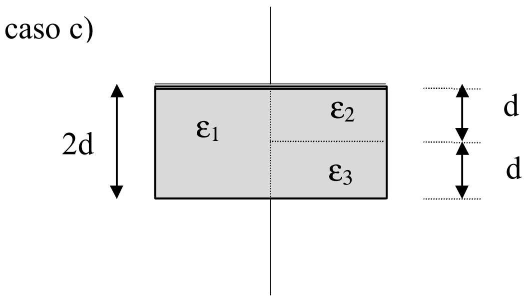
Alla superficie di separazione tra due diversi dielettrici, le linee di flusso dei campi **D** ed **E** subiscono una deflessione, tuttavia le componenti normali di **D** e parallele di **E** (rispetto all'interfaccia di separazione) si mantengono costanti.

Esercizi con soluzione svolti

Esercizio 11.1

Si calcoli la capacità dei condensatori a piatti paralleli riempiti da diversi dielettrici come in figura





SOLUZIONE

a) Il condensatore è equivalente alla serie di due condensatori con le rispettive costanti dielettriche relative ε_1 ed ε_2 , superfici delle armature dimezzate rispetto a quelle del condensatore complessivo (A) e distanze tra le armature d. Ne consegue che

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

b) Il condensatore è equivalente al parallelo di due condensatori con le rispettive ε_1 ed ε_2 , stesse superfici A e distanze tra le armature d/2. Ne segue che $C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)$.

c) Il condensatore è equivalente al parallelo di C_1 con la serie $C_2 + C_3$, in cui le superfici e le distanze tra le armature sono rispettivamente per C_1 :A/2 e 2d, per C_2 e C_3 :A/2 e d. Quindi

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}\right)$$

Esercizio 11.2

Si consideri un condensatore a facce piane parallele con piatti di area A distanti d l'uno dall'altro. Una differenza di potenziale V_0 viene applicata sui piatti. La batteria viene, poi, staccata e una piastra dielettrica di spessore b e costante dielettrica ε_r viene inserita tra i piatti. Si assuma che A=115 cm^2, d=1.24 cm, b=0.78cm, ε_r=2.61, V_0=85.5 V.

a) Qual è la capacità C_0 prima che la piastra venga inserita?
b) Quale carica libera appare sui piatti?
c) Qual è il campo elettrico E_0 nelle zone vuote tra i piatti e la piastra dielettrica?
d) Si calcoli il campo elettrico E nella piastra dielettrica.
e) Qual è la differenza di potenziale tra i piatti, dopo che la piastra dielettrica è stata introdotta?
f) Qual è la capacità quando la piastra è posizionata?

SOLUZIONE

a) $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 8.21 pF$

b) La carica libera presente sulle armature è $q = C_0 V_0 = 7.02 \cdot 10^{-10} C$ poiché la batteria viene staccata prima che la piastra venga inserita, la carica libera rimane invariata quando la piastra viene posizionata all'interno del condensatore.

c) Si applica la legge di Gauss considerando una superficie S che racchiude solo l'armatura su cui si accumulano cariche libere positive. Si ha che

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{u}_N dS = \varepsilon_0 E_0 A = q \quad , \quad E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = 6900 \ {}^{V}\!/_{m}$$

Si noti che il valore E_0 resta invariato quando la piastra è introdotta. Esso dipende solo dalla carica libera sui piatti.

d) Si applica nuovamente la legge di Gauss, questa volta su una superficie $S^{|}$ che racchiude l'armatura su cui si accumulano cariche libere positive e penetra (parzialmente in profondità) nella piastra dielettrica. Si trova che

$$\oint_{S^{|}} \vec{D} \cdot \vec{u}_N dS = -\varepsilon_0 \varepsilon_r E A = -q \quad , \quad E = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = 2640 \ {}^{V}\!/_{m}$$

Il segno meno compare quando si calcola il prodotto interno **E**·$\mathbf{u_N}$ poichè **E** ed $\mathbf{u_N}$ (versore normale uscente dalla superficie $S^{|}$) hanno versi opposti.

e) La differenza di potenziale risulta $\int E dl = E_0 (d-b) + Eb = 52.3\ V$.

f) La capacità con piastra posizionata è $C = \frac{q}{V} = 13.4 pF$.

Esercizio 11.3

Un condensatore piano, le cui armature hanno area S=200 cm^2 e distano d=4 mm, è immerso in un olio di costante dielettrica relativa ε_r=4; le armature sono collegate ai poli di un generatore e la loro differenza di potenziale è V=300 Volt.

a) Qual è l'intensità della forza F agente sopra un'armatura?

b) Le armature vengono portate ad una distanza d_1=2 mm (la loro differenza di potenziale viene mantenuta costante): qual è l'energia erogata dal generatore?

SOLUZIONE

a) Le armature si attraggono l'una verso l'altra. Per calcolare il modulo di F si può immaginare di staccare il condensatore dal generatore e di variare di dx la distanza x tra le armature: il lavoro eseguito risulta dL=Fdx ed equivale alla variazione dU dell'energia U immagazzinata dal condensatore

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon S}, \qquad dU = \frac{Q^2 dx}{2\varepsilon S} \qquad F = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q^2}{2\varepsilon S} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S V^2}{x^2} \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

cosicché per x=d risulta F=2 10^{-3} N.

Va osservato che nel processo precedente il condensatore è stato staccato dal generatore per evitare che quest'ultimo contribuisse a variarne l'energia elettrostatica.

b) Quando la distanza tra le armature viene variata dal valore d a d_1, la carica del condensatore collegato al generatore subisce la variazione

$$Q_1 - Q = (C_1 - C)V = \varepsilon S\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d}\right)V = 53nC$$

l'energia erogata nel processo dal generatore è

$E=(Q_1 - Q)\,V = (C_1 - C)\,V^2 = 16\ 10^{-6}$ J.

Si può osservare che la variazione di energia elettrostatica del condensatore è $\Delta U=(1/2)(C_1 - C)\,V^2$, mentre il lavoro delle forze esterne, con F ricavata precedentemente, risulta $L = \int_d^{d_1} F dx = \frac{1}{2}(C - C_1)V^2$ per cui è rispettato il principio di conservazione dell'energia $E + L = \Delta U$.

Esercizio 11.4

Una sfera metallica di raggio R_1 si trova all'interno di un guscio sferico conduttore di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3, concentrico alla sfera metallica. Lo spazio compreso tra i due conduttori è riempito da un dielettrico omogeneo ed isotropo. Se il guscio è a potenziale V_0 mentre il potenziale della sfera interna è nullo, si calcoli il potenziale elettrostatico a distanza r ($0 \le r < \infty$) dal centro della sfera.

SOLUZIONE

Siano Q_1 , Q_2 , Q_3 le cariche distribuite sopra le tre superfici metalliche: nel guscio metallico il campo è nullo, quindi $Q_2= - Q_1$. Per $r \le R_1$ risulta V=0; per $R_1 \le r < R_2$ è $D=Q_1 / (4\pi r^2)$, $E= Q_1 / (4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2)$, quindi $V= - [Q_1 / (4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r)] (1/R_1 - 1/r)$; ma per $r=R_2$ deve essere $V=V_0$, quindi $Q_1=-4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r V_0R_1R_2 / (R_2 - R_1)$. Per $r > R_3$ è $V = V_0 + [Q_3 / (4\pi\varepsilon_0)] (1/r - 1/R_3)$.

Esercizio 11.5

Dopo aver caricato due condensatori di capacità C_1=5 μF e C_2=4 μF alle differenza di potenziali di V_1=300V e V_2=250V, si collegano fra loro le armature negative e viene posto in parallelo ai primi due un terzo condensatore, scarico, di capacità C=1 μF. Determinare la carica presente alla fine su ciascun condensatore e la variazione di energia elettrostatica nel processo.

SOLUZIONE

Sui due condensatori avremo le seguenti carica

$$q_1 = V_1 \cdot C_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}\,C \qquad e \qquad q_2 = V_2 \cdot C_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}\,C$$

Perciò la carica totale è data da $q=q_1+ q_1=2.5\cdot10^{-3}$ C. L'energia iniziale vale perciò $U=q^2/2C=0.350$ J.

Alla fine si ha:

$$V_{in}=q/(C_1+ C_2+ C_3)=250\ V$$

Di conseguenza le cariche accumulate sui condensatori saranno:

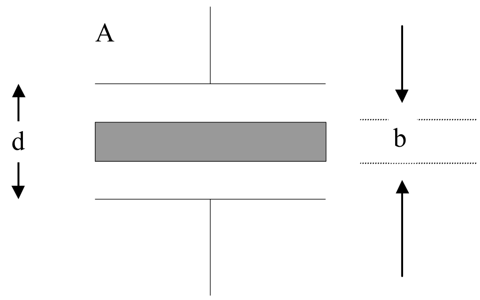
$$q_1^{'} = V_1 \cdot C_1 = 1.25 \cdot 10^{-3}\,C \qquad q_2^{'} = V_2 \cdot C_2 = 1.0 \cdot 10^{-3}\,C \qquad q_3^{'} = V_3 \cdot C_3 = 0.25 \cdot 10^{-3}\,C$$

L'energia elettrostatica finale del processo sarà data da $U=q^2/2C=0.313$ J con una conseguente variazione di –0.037 J.

Esercizi con soluzione

Esercizio 11.6

Una piastra di rame di spessore b viene inserita in un condensatore a piatti paralleli



a) Quale sarà la capacità dopo che la lastra è stata introdotta?

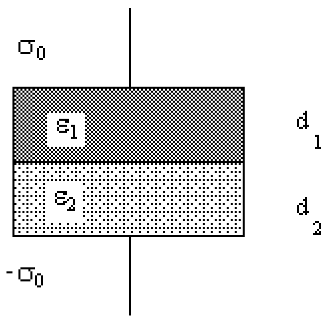
b) Se una carica q viene mantenuta sui piatti, si trovi il rapporto tra l'energia immagazzinata prima e quella immagazzinata dopo che la piastra viene inserita.

c) Quale lavoro viene compiuto sulla lastra, mentre viene inserita?

RISULTATO [a) $\frac{\varepsilon_0 A}{(d-b)}$, b) $\frac{d}{(d-b)}$, c) $\frac{q^2 b}{2A\varepsilon_0}$]

Esercizio 11.7

Un condensatore piano con armature di area S distanti h è riempito da due lastre di dielettrico, una di spessore d_1 e costante dielettrica relativa ε_1, l'altra di spessore d_2 e costante dielettrica relativa ε_2. Ai capi del condensatore è applicata una differenza di potenziale V.
Calcolare i valori E_1 e E_2 del campo elettrico nei due dielettrici e la densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie di separazione tra i due dielettrici.



RISULTATO [

$E_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_1}$; $E_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_2}$; $\sigma_p = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 d_2}$]

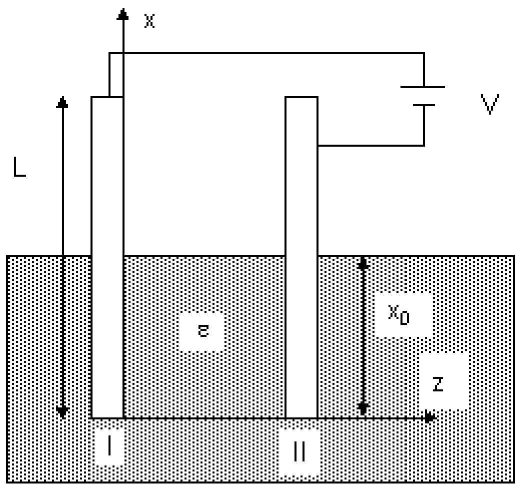
Esercizio 11.8

Due condensatori di capacità C_1=200 pF e C_2=1000 pF sono connessi in parallelo e caricati a un differenza di potenziale di 400V. Successivamente lo spazio tra le armature di C_1 viene completamente riempito di acqua distillata (con ε_r=80). Calcolare la variazione della differenza ΔV di potenziale ai capi di C_2, la carica di polarizzazione q_p sulle facce del dielettrico, la variazione di energia elettrostatica del sistema ΔU.

RISULTATO [ΔV = -371.8V ; q_p=44.46$\cdot 10^{-8}$ C ; ΔU=-8.92$\cdot 10^{-5}$ J]

Esercizio 11.9

Un condensatore piano è costituito da due piastre piane e parallele di forma quadrata di lato L mantenute a distanza d (con d molto più piccolo di L). il condensatore è parzialmente immerso in un liquido dielettrico isotropo, lineare ed omogeneo di costante dielettrica ε e densità di massa ρ. Le due piastre sono inizialmente scariche e la parte sommersa delle piastre ha altezza x_0 come mostrato nella figura. Ad un certo istante t=0 le due piastre sono collegate ad un generatore di forza elettromotrice V. In queste condizioni si osserva che il liquido contenuto fra le piastre si solleva finché raggiunge una altezza x dall'estremità inferiore delle piastre. All'istante t=0 immediatamente successivo all'applicazione della forza elettromotrice, cioè quando x=x_0 , si calcoli la carica elettrica presente sulle armature I e II e la forza agente sull'armatura II in direzione, modulo e verso.



RISULTATO

Q_I=[ε (Lx_0/d)+ε_0 (L^2 –Lx_0)/d] ; Q_{II}=-[ε (Lx_0/d)+ε_0 (L^2 –Lx_0)/d]

La forza agente sulla piastra II è attrattiva, ossia è diretta in verso opposto all'asse z e vale in modulo:

$$F_{II} = \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \frac{V^2}{d^2} Lx_0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{V^2}{d^2} (L^2 - Lx_0) \right\}$$

Esercizio 11.10

In una sfera di raggio di raggio R uniformemente carica con densità ρ viene praticata una cavità sferica tale da avere la superficie tangente alla superficie esterna della sfera di raggio R e al centro della sfera stessa. Dentro la cavità c'è il vuoto.
Determinare l'espressione della forza F esercitata su di una carica puntiforme q posta in un punto P esterno alla sfera ad una distanza l e su di una carica q posta nel centro della cavità.

RISULTATO

$$E_1 = \frac{\rho \cdot R^3}{3\varepsilon_0 l^2} \qquad E_2 = \frac{\rho \cdot R}{6\varepsilon_0}$$

Domande a Test.

Domanda 11.1

Nel caso di molecole non polari, la polarizzazione causata da un campo elettrico esterno è dovuta essenzialmente

1. Alla deformazione della molecola indotta dall'interazione tra campo esterno e cariche della molecola stessa
2. Al fatto di non essere nel vuoto
3. Al momento meccanico applicato dal campo sulla molecola
4. All'interazione con le molecole circostanti

RISPOSTA CORRETTA : 1

Domanda 11.2

Per "polarizzazione" elettrica di un materiale si intende

1. Il momento di dipolo elettrico in esso indotto da un campo esterno
2. Il momento di dipolo presente in ogni singola molecola
3. Il momento di dipolo indotto per unità di volume
4. La densità di carica superficiale sul dielettrico

RISPOSTA CORRETTA : 3

Domanda 11.3

Il vettore spostamento elettrico a parità di distribuzione di cariche

1. Ha un valore che dipende dal materiale in cui ci si trova
2. Ha lo stesso valore qualunque sia il materiale in cui ci si trova
3. Ha un valore che dipende dalla densità di carica di polarizzazione presente nel materiale
4. Ha un valore che di pende dal materiale e dalla forma del dielettrico

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 11.4

In un dielettrico anisotropo la polarizzazione è in generale

1. Parallela al campo elettrico totale
2. Parallela al campo elettrico che ci sarebbe nel vuoto
3. Sghemba tanto rispetto al campo elettrico nel vuoto che a quello totale
4. Indefinibile

RISPOSTA CORRETTA : 3

Domanda 11.5

Nel caso di due piastre piane conduttrici cariche affaciate con densità superficiale di carica σ e poste nel vuoto, i campi elettrici interno ed esterno alle due piastre valgono:

1. $E_{int}=0$ $E_{ext}=\sigma/\varepsilon_0$
2. $E_{int}=2\sigma/\varepsilon_0$ $E_{ext}=0$
3. $E_{int}=\sigma/2\varepsilon_0$ $E_{ext}=0$
4. $E_{int}=\sigma/\varepsilon_0$ $E_{ext}=0$

RISPOSTA CORRETTA : 4

Campo magnetico nella materia: i vettori magnetici

Partendo dal modello atomico classico, gli elettroni possono essere pensati come cariche rotanti intorno ai nuclei, quindi come spire ideali percorse da correnti, in altri termini dei dipoli magnetici elementari. Tali correnti microscopiche, generano un campo proprio e tendono ad orientarsi, in presenza di un campo magnetico generato da correnti esterne, come conseguenza si genera nel corpo un campo magnetico aggiuntivo. Il già noto vettore **B** caratterizza il campo magnetico risultante, mentre per caratterizzare il campo magnetico generato dalle correnti esterne macroscopiche, indipendentemente dalle proprietà del mezzo circostante, si introduce il vettore **H**. Se si considera un solenoide, H è la corrente che circola in esso per unità di lunghezza. Si definisce il vettore magnetizzazione **M** di un materiale, come il momento di dipolo per unità di volume, esso risulta essere in modulo uguale alle correnti di magnetizzazione superficiale per unità di lunghezza (dovute ai dipoli magnetici). In generale i tre vettori magnetici sono legati dalla relazione $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. Per la quasi totalità dei materiali il vettore polarizzazione è direttamente proporzionale al campo **H** conseguente ad una corrente applicata al circuito magnetizzante $\mathbf{M}=\chi_{mag}\,\mathbf{H}$ dove χ_{mag} è la suscettività magnetica del materiale , quindi $\mathbf{B} = \mu_0\,(\mathbf{H} + \chi_{mag}\,\mathbf{H}) = \mu_0\,\mu_r\,\mathbf{H}$ con $\mu_r = 1+\chi_{mag}$ detta permeabilità magnetica relativa.
In un materiale la legge di Ampère per i campi **B** ed **H** risulta

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{u}_N dl = \mu_0\left(i_{cond} + i_{magn}\right) \qquad \oint \vec{B}\cdot\vec{u}_N dl = \mu_0\mu_r i_{cond} \qquad \oint \vec{H}\cdot\vec{u}_N dl = i_{cond}$$

dove i_{cond} è la corrente di conduzione (macroscopica esterna) e i_{magn} è la corrente di magnetizzazione (microscopica interna).
La legge di Laplace e quella di Biot-Savart risultano così modificate

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi} i_{cond} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \qquad \mathrm{B(r)} = \frac{\mu_0\mu_r i_{cond}}{2\pi r}$$

mentre per il campo magnetico in un solenoide e la relativa densità volumica di energia magnetica (valida in generale per una qualunque distribuzione di **B**)

$$B = \mu_0\mu_r n i_{cond} \qquad \mathrm{w} = \frac{\mathrm{B}^2}{2\mu_0\mu_r}$$

Si dimostra infine che, alla superficie di separazione di due materiali, la componente normale del campo **B** risulta invariata, lo stesso dicasi per la componente di **H** parallela all'interfaccia.

Materiali paramagnetici, diamagnetici e ferromagnetici

I materiali paramagnetici sono caratterizzati dall'avere una piccola suscettibilità magnetica positiva costante (χ_{mag} ~ 10^{-4} 10^{-5}); in essi gli atomi possiedono momenti di dipolo magnetico orientati casualmente in assenza di campi esterni; qualora si applichi un campo magnetico esterno i dipoli si orientano concordemente con il campo, cosicchè il campo magnetico risultante è maggiore di quello applicato.
I materiali diamagnetici sono caratterizzati dall'avere una suscettività magnetica negativa costante (χ_{mag} ~ 10^{-5}); in essi gli atomi non hanno un momento di dipolo permanente, ma ne acquisiscono uno indotto dal campo magnetico applicato, tale campo indotto, per quanto si è visto nell'induzione elettromagnetica, è tale da opporsi a quello applicato, per cui il campo magnetico risultante è minore di quello applicato. In realtà il diamagnetismo si ha in tutti i materiali, tuttavia esso è generalmente un effetto molto minore del paramagnetismo.
Infine, i materiali ferromagnetici hanno una suscettività magnetica positiva elevatissima (χ_{mag} fino a 10^{10}) che risulta essere una funzione del campo magnetico applicato; in essi vi è una forte interazione tra i momenti di dipolo magnetici atomici vicini che li mantiene allineati anche quando il campo magnetico esterno viene rimosso.

Data ultima revisione 07/06/00
Autore: Sergio Ferrero

Esercizi con soluzione svolti

Esercizio 12.1

Un filo rettilineo, indefinito, percorso da una corrente di intensità i=4 A, è immerso in un mezzo omogeneo, isotropo, indefinito e di permeabilità magnetica relativa μ_r=1.02. Si calcolino i campi **H** e **B**, e la densità di energia magnetica w in un punto distante d=5 cm dal filo.

SOLUZIONE

Se il filo si trovasse nel vuoto si avrebbe

$$H_0 = \frac{i}{2\pi d} = 12.7\ A/m \quad , \quad \mathrm{B}_0 = \mu_0 H = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = 16 \cdot 10^{-6}\ Wb/m^2$$

poiché il filo è immerso in un mezzo indefinito, omogeneo ed isotropo

$$H = H_0 = 12.7\ \mathrm{A/m} \quad , \quad B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi d} = 16.3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T}$$

$$w = \frac{B^2}{2\,\mu_0 \mu_r} = 1.04 \cdot 10^{-4}\ J/m^3$$

Esercizio 12.2

Un solenoide di lunghezza l=60 cm e raggio r=5 cm, è formato da n=700 spire/metro ed è percorso da una corrente di intensità i=3 A. Un cilindro di ferro, di raggio r=2 cm e della stessa lunghezza del solenoide, è tenuto fermo con il suo asse coincidente con quello del solenoide e si trova per metà della lunghezza all'interno del solenoide stesso. Si calcoli la forza agente sul cilindro di ferro assumendo il valore μ_r=800 per la permeabilità magnetica del ferro.

SOLUZIONE

Un metodo semplice per calcolare la forza in questione può basarsi su considerazioni energetiche. Se la sbarra si sposta di un tratto Δx verso l'interno del solenoide l'energia del sistema subisce una variazione ΔU: va però osservato che la situazione del campo magnetico nelle vicinanze delle estremità del solenoide e di quelle del cilindro non cambia. In punti non troppo vicini alle estremità si ha H=ni. La variazione di energia magnetica del solenoide ΔU_{sol} è quindi:

$$\Delta U_{sol} = \frac{1}{2}\mu_0 \mu_r H^2 S \Delta x - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 S \Delta x = \frac{1}{2}\mu_0 (\mu_r - 1) n^2 i^2 \pi r^2 \Delta x$$

poiché il flusso di campo magnetico nel solenoide cambia se il cilindro penetra in esso, vi sarà una forza elettromotrice autoindotta che provoca una corrente opposta ad i (corrente erogata dal generatore); affinché la corrente totale che percorre il solenoide resti costante, il generatore dovrà fornire una potenza e quindi un'energia maggiori rispettivamente di ΔP_{gen} e ΔE_{gen}

$$\Delta P_{gen} = V \cdot i = \frac{\partial \phi}{\partial t} i = \frac{\partial (Li)}{\partial t} \cdot i = i^2 \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\Delta E_{gen} = \Delta P dt = i^2 \Delta L = i^2 [\mu_0 n^2 (l - \Delta x) S + \mu_0 \mu_r n^2 \Delta x S - \mu_0 n^2 l S] = \mu_0 (\mu_r - 1) n^2 i^2 \pi r^2 \Delta x$$

si noti che la variazione di energia fornita dal generatore è doppia rispetto alla variazione di energia magnetica relativa al solenoide. Ora, essendo $\Delta E_{gen} - F\Delta x = \Delta E_{sol}$ si può ricavare la forza che tende a risucchiare il cilindro di ferro $F = \frac{\Delta E_{gen} - \Delta E_{sol}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu_r - 1) n^2 i^2 \pi r^2 = 2.78\ N$

Esercizio 12.3

Un anello di ferro, di sezione S=5 cm^2, ha un piccolo intraferro di spessore δ=4 mm e la circonferenza media dell'anello (compreso l'intraferro) è $2\pi r_0$=40 cm; intorno all'anello sono avvolte N=500 spire percorse da una corrente di intensità i e nell'anello il campo magnetico è **B**=1 T. Si calcoli i, l'intensità del vettore **H** e la magnetizzazione **M** all'interno del ferro usando il valore χ_m=5400.

SOLUZIONE

Per il teorema di Ampère si ha $\oint \vec{H} \cdot \vec{u}_T dS = (2\pi r_0 - \delta) H_{Fe} + \delta H_a = Ni$. La componente di **B** perpendicolare alla superficie di separazione tra due materiali diversi è continua nel passaggio da un materiale all'altro, quindi **B** ha lo stesso valore nel ferro e nell'aria dell'intraferro, di conseguenza è $\mu_{Fe} H_{Fe} = \mu_0 H_a$. Si ricava

$$i = \left[\frac{(2\pi r_0 - \delta)}{(\chi_m + 1)} + \delta \right] \cdot \frac{B}{N\mu_0} = 6.5 \text{ A}$$

$$H_{Fe} = \frac{B}{\mu_{Fe}} = 147 \text{ A/m}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = 7.96 \cdot 10^5 \text{ A/m}$$

Esercizio 12.4

Una sbarra di volume V=500 cm^3 è magnetizzata uniformemente, possiede un momento magnetico μ =200 Am^2 ed il campo **B** al suo interno vale 0.1 T. Si calcoli:
a) l'intensità del campo magnetico **H** all'interno della sbarra;
b) il valore massimo M_{max} del momento delle forze risentite dalla sbarra se posta in un campo magnetico esterno uniforme $\mathbf{B}_e$= 1 T.

SOLUZIONE

a) Il vettore **M** è il momento magnetico per unità di volume, di conseguenza il suo modulo risulta $M=\mu / V= 4\ 10^5$ A/m. I vettori magnetici **B**, **H** ed **M** sono legati dalla relazione **B**=μ_0(**H** + **M**), poichè **H** ed **M** sono paralleli, si ricava: $H = \left|\frac{B}{\mu_0} - M\right| = 3.2 \cdot 10^5 \text{ A/m}.$

b) Sotto l'azione del campo magnetico esterno la sbarra magnetizzata risente delle forze di momento risultante $\mathbf{M} = \mu \wedge \mathbf{B_e}$: il valore massimo del modulo del momento meccanico è $M_{max}=\mu B_e$=200 Nm.

Esercizio 12.5

Due anelli toroidali eguali sono formati dallo stesso materiale ferromagnetico magnetizzato uniformemente; la lunghezza media è d=20 cm. Il primo anello C è continuo, il secondo anello D ha un interferro di spessore h=5mm. Il campo magnetico nel primo anello è B_C=0.314 T. Calcolare il campo H_C nel primo anello e quanto valgono nel secondo anello il campo magnetico B_D, il campo H_D nell'interferro e il campo H_D nel ferro.

SOLUZIONE

Per ciò che riguarda il primo anello si ha che $B_C=\mu_0 M$.
e quindi il vettore magnetizzazione M assume il seguente valore : $M=2.5\cdot10^5$ A/m.
Mentre il vettore H_C è nullo.
Per ciò che riguarda il secondo anello si avrà che

$$B_D d=\mu_0\, i_m=\mu_0 M\,(d-h) \quad \text{e quindi} \quad B_D=\mu_0 M\,(1-h/d)=0.306 \text{ T}$$

A questo punto il vettore H nell'intraferro dell'anello D varrà $H_0=B_D/\mu_0=2.44\cdot10^5$ A/m, mentre all'interno del ferro
$H_D=-H_0 h/(d-h)=-6.26\cdot10^3$ A/m.

Esercizi con soluzione

Esercizio 12.6

Calcolare l'intensità di corrente che percorre un filo rettilineo molto lungo affinche in un punto a distanza pari a 20 cm dal filo l'intensità magnetica sia H=7.96 A spira / m.

SOLUZIONE [i=10A]

Esercizio 12.7

Un solenoide molto lungo piegato a forma di toroidale viene riempito con un nucleo di ferro. Sapendo che la corrente che percorre l'avvolgimento è i=2A, che il numero delle spire per unità di lunghezza è 10 spire/cm e che il valore di B è pari a 1W/m^2, calcolare:

1. l'intensità magnetica H_1 in presenza del nucleo di ferro;
2. l'intensità magnetica H_2 in assenza del nucleo di ferro;
3. l'intensità M_1 di magnetizzazione in presenza del nucleo di ferro;
4. l'intensità M_2 di magnetizzazione in assenza del nucleo di ferro.

SOLUZIONE [$H_1 = 2\cdot10^3$ A/m ; $H_2 = 2\cdot10^3$ A/m ; $M_1 = 7.9\cdot10^5$ A/m ; $H_1 = 0$]

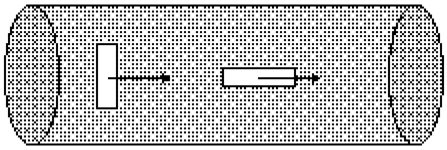
Esercizio 12.8

Un solenoide toroidale è riempito con un materiale avente permeabilità magnetica relativa μ_m. Calcolare i campi H e B al suo interno.

SOLUZIONE [$H = \dfrac{N\,\mathrm{i}}{2\pi\ r}$ $B = \dfrac{\mu_0\mu_m N\,\mathrm{i}}{2\pi\ r}$]

Esercizio 12.9

In una materiale ferromagnetico contenuto all'interno di un solenoide molto lungo sono praticate due piccole cavità cilindriche, entrambi coassiali al solenoide. Nella prima larga è piatta, si misura B_2=7.54$\cdot10^{-2}$ T, nella seconda, sottile e allungata, si misura B_1=1.26$\cdot10^{-3}$ T. Calcolare la suscettività magnetica del materiale e la sua magnetizzazione.



SOLUZIONE [χ_m=58.8 $M=5.9\cdot10^4$ A/m]

Esercizio 12.10

Due guaine cilindriche conduttrici, indefinite, coassiali, di spessore trascurabile, sono percorse entrambe e nello stesso verso da una corrente i. I raggi delle due guaine sono a=2cm e B=4cm. L'intercapedine tra di esse, inizialmente vuota, viene completamente riempita con un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_m e l'energia magnetica aumenta di $\Delta U=1.73\cdot10^{-3}$ J/m. Sapendo che la circuitazione di B lungo una circonferenza di raggio r>b, concentrica al sistema, vale $2\pi\cdot10^{-5}$ Tm, calcolare i valori della corrente i e della permeabilitàμ_m.

SOLUZIONE [i=25A μ_m=40.9]

Autore: Sergio Ferrero

Domande a Test

Domanda 12.1

Il potenziale vettore è
1. Parallelo al campo magnetico
2. Perpendicolare al campo magnetico
3. In generale non è né parallelo né perpendicolare al campo magnetico
4. Dipende dalla presenza o meno di un campo elettrico

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 12.2

L'intensità magnetica H può essere misurata in :
1. Ampere/m
2. Volt/m
3. Ohm/m
4. Weber/m

RISPOSTA CORRETTA : 1

Domanda 12.3

La permeabilità delle sostanza paramagnetiche :
1. è sempre minore dell'unità
2. rappresenta un parametro dipendente dal campo magnetico esterno
3. è una grandezza strettamente legata alla geometria del corpo immerso nel campo magnetico
4. nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

RISPOSTA CORRETTA : 4

Domanda 12.4

Possiamo affermare che la permeabilità relativa delle sostanze ferromagnetiche:
1. è una costante che caratterizza la sostanza considerata
2. varia al variare dello stato di magnetizzazione della materia

3. è indipendente dalla temperatura
4. aumenta linearmente con l'aumentare del campo magnetico esterno

RISPOSTA CORRETTA : 2

Domanda 12.5

Un materiale ferromagnetico è caratterizzato :
1. dall'esistenza di tanti piccoli elementi di volume aventi ognuno un momento magnetico proprio
2. dal fatto che si magnetizza in modo che l'induzione B è direttamente proporzionale all'intensità del campo H
3. dalla proprietà di attrarre sempre, anche allo stato naturale, la limatura di ferro
4. dal fatto di non poter essere più smagnetizzato una volta magnetizzato

RISPOSTA CORRETTA : 1

Natura della luce

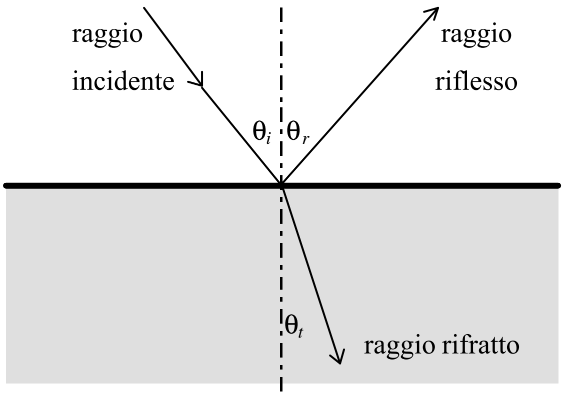
Prima del XIX secolo si pensava che la luce fosse costituita da un flusso di particelle che venivano emesse da una sorgente e che stimolavano il senso della vista entrando nell'occhio. Il più illustre sostenitore di questa *teoria corpuscolare* fu Isaac Newton. Già nel 1678 il danese Christian Huygens propose una *teoria ondulatoria* che era in grado di spegare i fenomeni di riflessione e rifrazione della luce altrettanto bene della teoria di Newton. La natura ondulatoria della luce non fu però generalmente accettata fino al 1801, anno in cui Thomas Young studiò il fenomeno dell'interferenza.
Il più importante sviluppo riguardante la teoria della luce si ebbe nel 1873, quando Maxwell predisse che la luce era una forma di *onda elettromagnetica* ad alta frequenza. La teoria cosiddetta "classica" dell'elettromagnetismo, spiega infatti la maggior parte delle proprietà della luce.
Tuttavia alcuni fenomeni, come l'effetto fotoelettrico, non trovarono adeguata spiegazione fino al 1905, anno in cui Einstein ne propose la soluzione utilizzando il concetto di *quantizzazione* sviluppato da Max Planck nel 1900. Il modello della quantizzazione assume che l'energia di un'onda luminosa sia distribuita in "pacchetti" di energia chiamati *fotoni*, per cui l'energia è quantizzata. Questi fotoni si comportano, in determinati casi, come particelle. In questi particolari casi si recupera, in un certo senso, la teoria corpuscolare che era stata alla base delle prime interpretazioni dei fenomeni luminosi. Tuttavia l'energia dei fotoni è determinata dalla frequenza dell'onda elettromagnetica.
Ma allora la luce è un'onda o una particella? La domanda è mal posta: si può attribuire alla luce una *doppia natura*, corpuscolare ed ondulatoria. A seconda del tipo di esperimento si mette in rilievo un aspetto anzichè l'altro.

Ottica geometrica

Trascurando la teoria quantistica, la trattazione dei fenomeni luminosi andrebbe fatta nell'ambito dell'elettromagnetismo e quindi in termini ondulatori (*ottica ondulatoria*).
Tuttavia è possibile affrontare molti problemi di ottica senza ricorrere ad una trattazione ondulatoria. In particolare, quando la luce incontra, durante il suo cammino, ostacoli le cui dimensioni sono sempre molto maggiori della sua lunghezza d'anda, è possibile ricorrere ad una descrizione che utilizza il solo concetto di *raggio* di luce, definito come la normale al fronte d'onda.
In questa scheda utilizzeremo tale approssimazione, che è detta *ottica geometrica*. L'unico riferimento alla natura ondulatoria della luce sarà contenuto nell'indice di rifrazione del mezzo, definito già nella scheda 9 come $n = c / v$ (rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo).

Riflessione e rifrazione della luce

Un raggio di luce che incide su una superficie speculare piana formando un angolo θ_i con la normale al piano, viene riflesso secondo un angolo $\theta_r = \theta_i$, misurato dalla parte opposta al raggio incidente rispetto alla normale. Raggio incidente, raggio riflesso e normale giacciono sullo stesso piano.



Se il piano, anzichè essere una superficie completamente speculare, è la superficie di separazione tra due mezzi con diverso indice di rifrazione, parte della luce viene riflessa secondo la regola appena enunciata, e parte attraversa l'interfaccia tra i due mezzi; è quest'ultimo il fenomeno della rifrazione.
Se il raggio proveniente dal primo mezzo, dotato di indice di rifrazione n_1, incide sull'interfaccia secondo un angolo θ_i, e viene rifratto nel secondo mezzo, con indice di rifrazione n_2, secondo un angolo θ_t, si dimostra che vale la relazione (legge di Snell):

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t$$

Riflessione totale

Quando la luce cerca di propagarsi da un mezzo di dato indice di rifrazione (n_2) ad un mezzo con indice di rifrazione minore (n_1), si definisce un angolo di incidenza critico (o angolo limite) θ_c tale che

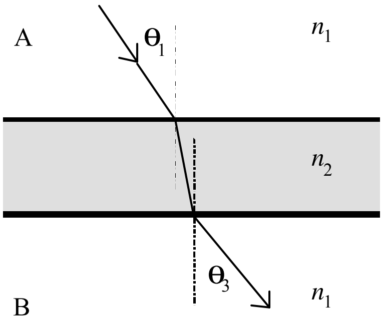
$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Per angoli di incidenza maggiori di θ_c il fascio luminoso è totalmente riflesso al confine e non vi è raggio rifratto.

Esercizi svolti

Esercizio 13.1

Un fascio di luce passa dalla regione A alla regione B di un mezzo con indice di rifrazione n_1 attraverso una spessa lastra di materiale il cui indice di rifrazione è n_2. Di quale angolo viene deviato il fascio emergente rispetto al fascio incidente?



Soluzione:
Utilizzando la legge di Snell per l'interfaccia superiore si ha

$$\operatorname{sen}\Theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\Theta_1 ,$$

mentre per l'interfaccia inferiore si ha

$$\operatorname{sen}\Theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\operatorname{sen}\Theta_2 .$$

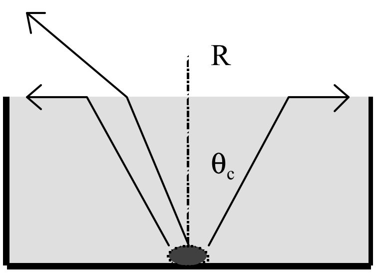
Sostituendo la prima espressione nella seconda, si ottiene dunque

$$\operatorname{sen}\Theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\Theta_1\right) = \operatorname{sen}\Theta_1 ,$$

cioè $\theta_3 = \theta_1$ e lo strato non altera la direzione del fascio.

Esercizio 13.2

Un piccolo corpo luminoso posto sul fondo di un largo recipiente colmo d'acqua ($n_{acqua} \approx 4/3$) e profondo 100cm emette raggi di luce verso l'alto in tutte le direzioni (vedi figura). Sulla supeficie dell'acqua si forma un cerchio di luce causato dai raggi che vengono rifratti passando nell'aria ($n_{aria} \approx 1$). All'esterno del cerchio i raggi vengono totalmente riflessi e rimangono nell'acqua. Determinare il raggio R di questo cerchio.



Soluzione:
La riflessione totale ha luogo quando l'angolo di incidenza è maggiore dell'angolo critico θ_c, che si può ricavare facilmente dalla legge di Snell, imponendo che l'angolo formato dal raggio con la normale in aria sia retto:

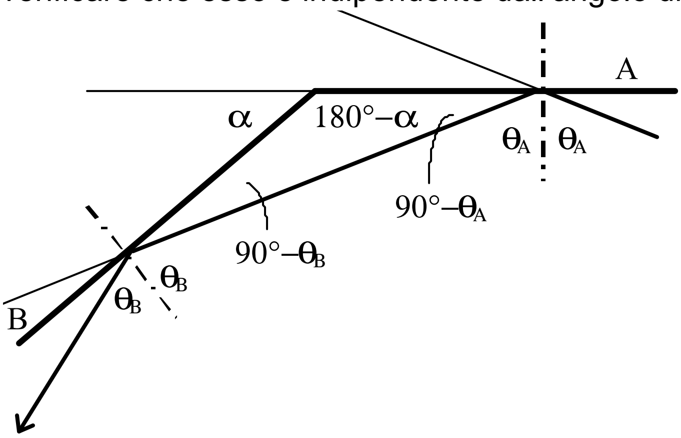
$$n_{\text{acqua}}\,\text{sen}\theta_c = n_{\text{aria}}\,\text{sen}\,90^{\circ} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\theta_c = \frac{n_{\text{aria}}}{n_{\text{acqua}}} \approx 0.75\,.$$

Si ricava quindi facilmente $\theta_c \approx 48.6°$. Per ragioni geometriche il valore *R* del raggio del cerchio è infine dato da

$$R = 100\,\text{cm} \times \tan\theta_c \approx 100\,\text{cm} \times 1.13 = 113\,\text{cm}\,.$$

Esercizio 13.3
Due specchi (A e B) formano un angolo α. Un raggio di luce viene riflesso da A e successivamente da B. Determinare l'angolo γ di deflessione del raggio in funzione di α e verificare che esso è indipendente dall'angolo di incidenza del raggio su A. Determinare poi l'angolo α in modo che il raggio incidente venga deflesso, dal sistema formato dai due specchi, di $\gamma = 180°$.



Soluzione:
Supponiamo che il raggio incidente giunga sul primo specchio A secondo un angolo di incidenza θ_A. La direzione del raggio riflesso sarà ruotata, rispetto alla direzione del raggio incidente, di un angolo $\gamma_A = 180°-2\theta_A$ (il che è evidente dalla figura considerando il prolungamento del raggio oltre lo specchio). Analogamente la seconda riflessione apporterà una ulteriore rotazione antioraria di un angolo $\gamma_B = 180°-2\theta_B$, dove θ_B è l'angolo di incidenza sullo specchio B. L'angolo di rotazione totale si può scrivere dunque come

$$\gamma = \gamma_A + \gamma_B = 360°-2(\theta_A + \theta_B).$$

L'angolo θ_B può poi essere determinato con considerazioni geometriche sul triangolo formato dai due specchi e dal raggio intermedio. Imponendo infatti che la somma degli angoli interni di tale triangolo valga $180°$ si ottiene facilmente

$$\theta_A + \theta_B = 180° - \alpha,$$

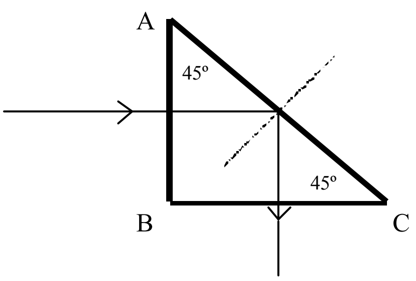
da cui

$$\gamma = 2\alpha.$$

Si osserva cioè che la deviazione totale è sempre doppia dell'angolo α ed è indipendente dall'angolo di incidenza θ_A. A questo punto, se si vuole una deflessione totale $\gamma = 180°$ basta porre $\alpha = 90°$. Osserviamo che in questo modo si costruisce un sistema che riflette i raggi luminosi in direzione uguale a quella di partenza indipendentemente da quale sia questa direzione e su un principio simile si basano i catarifrangenti delle autovetture.

Esercizio 13.4

Qual è il minimo valore dell'indice di rifrazione di un prisma di 45° impiegato per deviare un fascio di luce ad angolo retto mediante riflessione totale?



Soluzione:

Il raggio entra nel prisma perpendicolarmente alla faccia AB e quindi non subisce deviazioni. Forma poi un angolo di incidenza di $45°$ con la normale alla faccia AC. Perchè il fascio venga riflesso totalmente da AC occorre che l'angolo critico sia $\theta_c < 90°$. Dopo questa riflessione totale il fascio luminoso attraversa la faccia BC senza ulteriori deformazioni ed emerge dal prisma deviato ad angolo retto rispetto al raggio incidente. Pertanto il valore minimo dell'indice di rifrazione è dato dalla condizione di riflessione totale sulla faccia AC

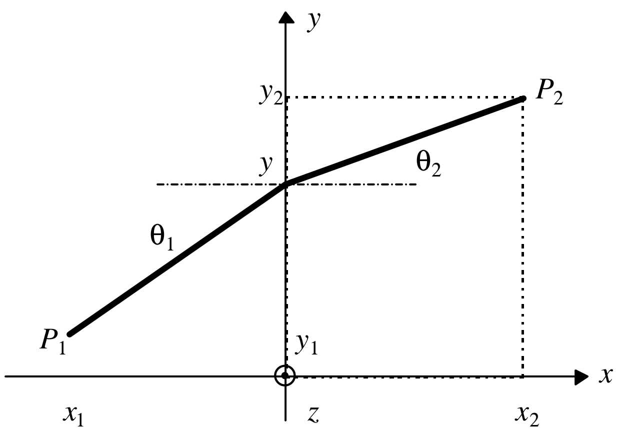
$$n_{\text{prisma}} \operatorname{sen} 45° = n_{\text{aria}} \operatorname{sen} 90°.$$

Tenendo conto che $n_{\text{aria}} \approx 1$ abbiamo dunque

$$n_{\text{prisma}} \approx \frac{1}{\operatorname{sen} 45°} \approx 1.414.$$

Esercizio 13.5

Si definisce cammino ottico di un raggio luminoso il prodotto della lunghezza del cammino geometrico l percorso dal raggio per l'indice di rifrazione n del mezzo (è un oggetto proporzionale al tempo che la luce impiega a fare il percorso). Si dimostra che le leggi dell'ottica geometrica si possono ricavare imponendo che il cammino ottico di un raggio per andare da un punto P_1 a un punto P_2 fissati sia stazionario, ovvero minimo o massimo (principio di Fermat). Da questo principio deriva in particolare il fatto che in un mezzo con indice di rifrazione uniforme il percorso dei raggi luminosi sia rettilineo (minimo).
Derivare la legge della rifrazione di Snell a partire dal principio di Fermat, ipotizzando che il punto P_1 si trovi in un mezzo con indice di rifrazione n_1 e che il punto P_2 si trovi in un mezzo con indice di rifrazione n_2.



Soluzione:

Dallo schema di figura si vede che il piano y–z (asse z supposto uscente dalla pagina) viene assunto come separatore dei due mezzi omogenei con indici di rifrazione n_1 e n_2 rispettivamente. Fissati il punto di partenza P_1 nel mezzo 1, con coordinate $(x_1,y_1,0)$, e il punto di arrivo P_2 nel mezzo 2, con coordinate $(x_2,y_2,0)$, per quanto detto nel testo, il percorso del raggio nei mezzi omogenei deve essere rettilineo e quindi le uniche due variabili rispetto a cui si può rendere stazionario il cammino ottico sono l'ordinata y e la quota z del raggio alla separazione dei due mezzi. Calcolando le lunghezze l_1 e l_2 del raggio nei due mezzi, il cammino ottico si può scrivere come

$$f(y,z) = n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1\sqrt{x_1^2 + (y-y_1)^2 + z^2} + n_2\sqrt{x_2^2 + (y-y_2)^2 + z^2} .$$

Per cercare il punto stazionario calcoliamo poi le derivate rispetto a y e z e imponiamo che siano uguali a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,z) = n_1 \frac{y-y_1}{\sqrt{x_1^2+(y-y_1)^2+z^2}} + n_2 \frac{y-y_2}{\sqrt{x_2^2+(y-y_2)^2+z^2}} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(y,z) = n_1 \frac{z}{\sqrt{x_1^2+(y-y_1)^2+z^2}} + n_2 \frac{z}{\sqrt{x_2^2+(y-y_2)^2+z^2}} = 0 .$$

La seconda condizione implica che sia $z = 0$, ovvero che il punto di intersezione del raggio con il piano di separazione dei due mezzi sia complanare con P_1 e P_2. Inoltre è facile vedere dalla figura che nella prima equazione le quantità che moltiplicano gli indici di rifrazione corrispondono rispettivamente ai seni degli angoli θ_1 e $-\theta_2$, da cui

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 - n_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0,$$

che è proprio la legge di Snell della rifrazione.

Esercizi proposti

Esercizio 13.6

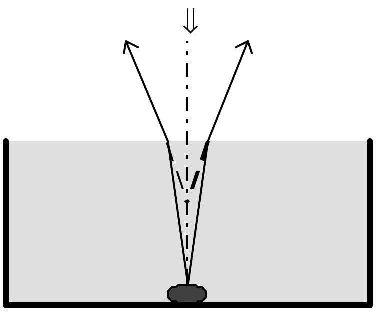
Si consideri il sistema descritto nell'esercizio 13.1. Si è dimostrato che il raggio entrante e il raggio uscente dalla lastra di indice di rifrazione n_2 sono paralleli. Determinarne la distanza d in funzione dello spessore t della lastra e dell'angolo di incidenza θ_1, nell'ipotesi che quest'ultimo sia piccolo.

Risultato:

$$d \approx t\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)\theta_1$$

Esercizio 13.7

Si consideri il sistema descritto nell'esercizio 13.2 e riportato qui a fianco, con un osservatore posto nel punto indicato dal simbolo ⇓. A causa della rifrazione l'osservatore vede il corpo luminoso a una profondità inferiore a quella reale. Determinare tale profondità nelle stesse ipotesi dell'esercizio 13.2 (profondità del recipiente = 100cm, $n_{acqua} \approx 4/3$, $n_{aria} \approx 1$).



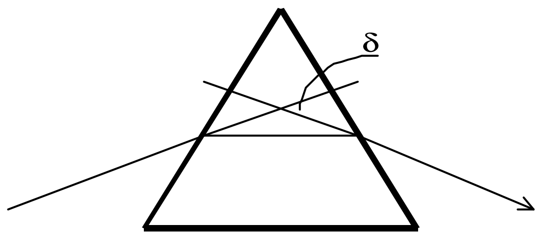
Suggerimento: l'immagine apparente (virtuale) dell'oggetto luminoso si deve trovare nel punto di incontro dei prolungamenti in acqua (tratteggiati in figura) dei due raggi uscenti in aria. Infatti l'osservatore percepisce la profondità di un punto tramite l'angolo formato dai due raggi provenienti dal punto e incidenti sui suoi occhi e tale angolo deve essere piccolo. Verificare che se l'angolo è piccolo la profondità apparente non dipende dall'angolo stesso.

Risultato:

$$h_{\text{apparente}} = h_{\text{reale}} \frac{n_{\text{aria}}}{n_{\text{acqua}}} \approx 100\text{cm} \times 0.75 = 75\text{cm}\,.$$

Esercizio 13.8

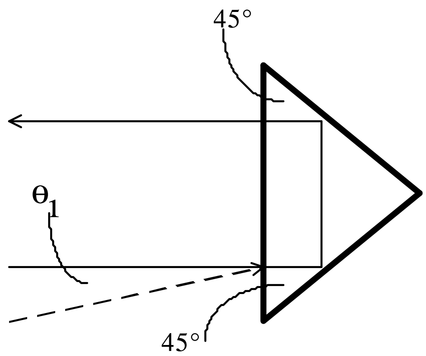
Si consideri un raggio luminoso che attraversa un prisma triangolare equilatero, di indice di rifrazione $n = 1.5$, parallelamente a una faccia, così come indicato nella figura qui a fianco. Determinare l'angolo di deflessione δ tra il raggio entrante e il raggio uscente dal prisma.



Risultato: $\delta \approx 37.18°$

Esercizio 13.9

Si consideri un prisma a $45°$ di indice di rifrazione $n = 1.5$ e utilizzato in riflessione totale, come indicato nello schema qui a fianco. Determinare l'angolo critico θ_c e verificare che la condizione di riflessione totale è verificata per il raggio disegnato in figura come linea intera. Se ora si fa incidere un raggio non perpendicolare ma con un angolo di incidenza θ_1 (linea tratteggiata), determinare l'angolo di incidenza massimo θ_{1max} per cui si ha ancora riflessione totale e verificare che quando questa è soddisfatta il raggio uscente è sempre parallelo a quello entrante.



Risultato:

$$\theta_c = \text{arcsen}\frac{1}{n} \approx 41.81°$$

$$\theta_{1\max} = \text{arcsen}\frac{\text{sen}(45° - \theta_c)}{\text{sen}\theta_c} \approx 4.79°$$

Esercizio 13.10

Utilizzando il principio di Fermat, introdotto nell'esercizio 13.5, derivare la legge della riflessione, ipotizzando che un raggio luminoso parta da un punto P_1 e arrivi a un punto P_1', entrambi nel mezzo con indice di rifrazione n_1, passando per un punto della superficie riflettente di coordinate da determinarsi.

1) Se un raggio luminoso che transita in un mezzo omogeneo con un certo indice di rifrazione attraversa una superficie di separazione e passa in un altro mezzo omogeneo con un indice di rifrazione più elevato

a) il raggio subisce un allontanamento dalla normale alla superficie che separa i due mezzi, in accordo alla legge della rifrazione di Snell
b) il raggio subisce un avvicinamento alla normale alla superficie che separa i due mezzi, in accordo alla legge della rifrazione di Snell
c) il raggio subisce un allontanamento dalla normale ed eventualmente una riflessione totale se l'angolo di incidenza è superiore a un certo angolo critico
d) il raggio subisce un avvicinamento alla normale ed eventualmente una riflessione totale se l'angolo di incidenza è inferiore a un certo angolo critico

2) Se un raggio luminoso che transita in un mezzo omogeneo con un certo indice di rifrazione attraversa una superficie di separazione e passa in un altro mezzo omogeneo con un indice di rifrazione inferiore

a) il raggio non viene deviato, purché l'angolo non sia superiore a un certo angolo critico
b) il raggio subisce un avvicinamento alla normale alla superficie che separa i due mezzi, in accordo alla legge della rifrazione di Snell
c) il raggio subisce un allontanamento dalla normale ed eventualmente una riflessione totale se l'angolo di incidenza è superiore a un certo angolo critico
d) il raggio subisce un avvicinamento alla normale ed eventualmente una riflessione totale se l'angolo di incidenza è inferiore a un certo angolo critico

3) Il fenomeno della riflessione totale si può avere quando

a) un raggio luminoso passa da un mezzo con indice di rifrazione minore a un mezzo con indice di rifrazione maggiore e l'angolo di incidenza è superiore a un certo angolo critico
b) un raggio luminoso passa da un mezzo con indice di rifrazione maggiore a un mezzo con indice di rifrazione minore
c) un raggio luminoso passa da un mezzo con indice di rifrazione maggiore a un mezzo con indice di rifrazione minore e l'angolo di incidenza è superiore a un certo angolo critico
d) un raggio luminoso, attraversando una superficie di separazione tra due mezzi con diverso indice di rifrazione, subisce un allontanamento dalla normale alla superficie

3) Un nuotatore è steso sul fondo di un lago, dove l'acqua ha profondità $h = 3.00$m e guarda verso l'alto. Tenendo conto che l'indice di rifrazione dell'acqua è $n \approx 4/3$ e quello dell'aria è circa 1, a che distanza minima *d* dai suoi occhi deve trovarsi un sasso posato sul fondo affinché egli lo veda per riflessione totale?

a) 6.00m
b) 3.00m
c) 6.80m
d) 4.50m

4)Una lastra di spessore costante è costituita da materiale trasparente con indice di rifrazione che, spostandosi dalla faccia 1 alla faccia 2, aumenta dal valore n_1 fino a $n_2 > n_1$. Un raggio di luce incide sopra la faccia 1 con angolo di incidenza Θ_1. L'angolo Θ_2 formato dal raggio con la normale alla faccia 2

a) è tale che n_1 sen$\Theta_1 = n_2$ senΘ_2
b) è tale che sen$\Theta_1 = n_2$ senΘ_2
c) è tale che n_1 sen$\Theta_1 =$ senΘ_2
d) non si può determinare senza conoscere come varia l'indice di rifrazione

Ottica ondulatoria

Vi sono fenomeni luminosi che non possono essere compresi in termini di ottica geometrica, ma richiedono considerazioni di *ottica ondulatoria*. Tra questi vi sono il fenomeno dell'*interferenza* e quello della *diffrazione*.
In termini di ottica ondulatoria si può dare una ulteriore interpretazione dell'indice di rifrazione di un mezzo. Questo era stato definito come rapporto tra la velocità c della luce nel vuoto e la velocità v della luce nel mezzo. Nel caso della luce monocromatica (ovvero di una onda elettromagnetica con frequenza f fissata) vale la relazione

$$v = \lambda f,$$

dove λ è la lunghezza d'onda. La frequenza dell'onda non dipende dal mezzo, ma solo dalla sorgente, mentre la velocità di propagazione, e quindi la lunghezza d'onda, dipendono dal mezzo. Se la relazione precedente vale in un generico mezzo, nel vuoto avremo

$$c = \lambda_0 f,$$

dove con λ_0 abbiamo indicato la lunghezza d'onda nel vuoto. Applicando queste due relazioni alla definizione di indice di rifrazione ed eliminando la frequenza troviamo facilmente

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$$

Abbiamo quindi mostrato che, nel caso di luce monocromatica, l'indice di rifrazione è uguale al rapporto tra la lunghezza d'onda nel vuoto e la lunghezza d'onda nel mezzo.
E' utile ricordare anche il *principio di Huygens*: ciascun punto di un campo ondulatorio, portato ad oscillare, diviene esso stesso sorgente di onde elementari secondarie. L'onda risultante, che si propaga oltre, si forma dalla sovrapposizione di tutte le onde emesse da queste sorgenti elementari secondarie puntiformi.

Interferenza

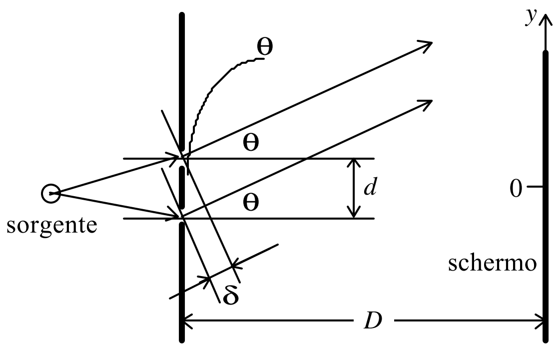
Affinchè le onde luminose emesse da due o più sorgenti interferiscano (costruttivamente o distruttivamente) è necessario che le sorgenti siano *coerenti*, cioè che mantengano una fase costante l'una rispetto all'altra. Non è facile ottenere questa condizione per le sorgenti reali: è necessario ricorrere ad artifici come la *doppia fenditura*, illuminata da una sola sorgente luminosa. Per il principio di Huygens le due fenditure si comportano a tutti gli effetti come due sorgenti coerenti. Se le fenditure sono poste ad una distanza d e si osservano le figure di interferenza su uno schermo posto a distanza $D >> d$, la differenza di cammino ottico δ per le onde luminose emesse in ogni istante dalle due fenditure dipende dall'angolo θ tra la normale al piano delle fenditure e la direzione considerata: $\delta = d \operatorname{sen}\theta$ (vedi figura).

L'interferenza è *costruttiva* (frange chiare sullo schermo) quando la differenza di cammino ottico è pari ad un numero intero di lunghezze d'onda:

$$\delta = d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

ed è invece *distruttiva* (frange scure sullo schermo) quando la differenza di cammino ottico è pari a un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda, ovvero

$$\delta = d \operatorname{sen}\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$



Sullo schermo appaiono frange di interferenza, alternativamente chiare e scure. Nell'approssimazione di *D* molto grande (interferenza all'infinito) e angoli θ piccoli, le posizioni delle frange chiare, misurate a partire da O, si possono scrivere come

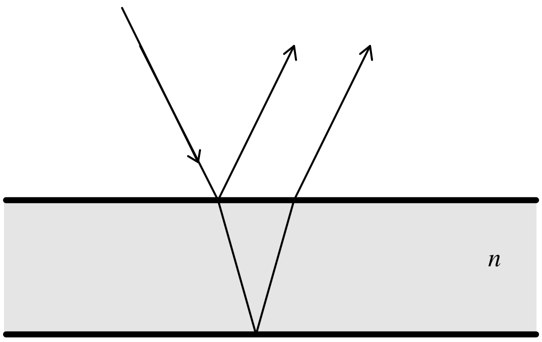
$$y_m = m\lambda \frac{D}{d},$$

mentre le posizioni delle frange scure sono

$$y_m = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \frac{D}{d}.$$

Interferenza nelle lamine sottili

Effetti di interferenza si osservano anche nelle lamine sottili, come ad esempio sottili strati di olio sull'acqua o bolle di sapone. L'interferenza è dovuta, in questo caso, alla doppia riflessione del raggio incidente sulle superfici superiore ed inferiore della lamina. Per



determinare le condizioni di interferenza (costruttiva o distruttiva), occorre tenere conto, oltre che dello sfasamento dovuto alla differenza di cammino ottico, del fatto che un'onda che si propaga in un mezzo con un dato indice di rifrazione e che viene riflessa da un mezzo con indice di rifrazione maggiore subisce un ulteriore sfasamento di π. La condizione di interferenza costruttiva nel caso di luce che incide quasi perpendicolarmente ad una lamina di spessore *s* posta in aria è data da

$$2s = \left(m + \tfrac{1}{2}\right) \lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

dove λ è la lunghezza d'onda della luce nel mezzo di indice di rifrazione *n*. Ricordando che questa è legata alla lunghezza d'onda nel vuoto λ_0 dalla relazione $\lambda = \lambda_0/n$ abbiamo poi

$$2ns = \left(m + \tfrac{1}{2}\right) \lambda_0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Osserviamo che il primo termine a secondo membro tiene conto della differenza di cammino ottico, mentre il secondo termine tiene conto dello sfasamento dovuto alla riflessione sulla superficie superiore. Analogamente la condizione di interferenza distruttiva é

$$2ns = m\lambda_o \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Diffrazione

La natura ondulatoria della luce si manifesta anche in un altro importante fenomeno, quello della diffrazione, che si osserva quando un'onda luminosa incontra ostacoli o fenditure aventi dimensioni confrontabili con la sua lunghezza d'onda. Se ad esempio un'onda luminosa piana di lunghezza d'onda λ incontra uno schermo opaco sul quale è stata aperta una fenditura rettangolare di grande lunghezza e di spessore $b \sim \lambda$, si constata che l'intensità luminosa non si distribuisce uniformemente su un secondo schermo posto dietro la fenditura. Al contrario si osserva un massimo di intensità luminosa molto pronunciato al centro dello schermo e una successione di massimi secondari, via via meno pronunciati, disposti simmetricamente a sinistra e a destra della riga principale. Gli zeri di intensità luminosa si hanno quando tra le sorgenti elementari di cui si può pensare sia costituita la fenditura vale la condizione di interferenza distruttiva

$$b \,\mathrm{sen}\theta = m\lambda \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \dots)\,.$$

Esercizi svolti

Esercizio 14.1

La lunghezza d'onda in aria della luce gialla del sodio è $\lambda_0 = 589$nm. Determinare:
a) la sua frequenza *f*;
b) la sua lunghezza d'onda λ in un vetro il cui indice di rifrazione è $n = 1.52$;
c) la sua velocità *v* in questo vetro.

Soluzione:

a) La frequenza è data dall'espressione

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{5.89 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} \approx 5.09 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}.$$

b) La lunghezza d'onda in un mezzo è legata all'indice di rifrazione del mezzo stesso dalla relazione

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{589\mathrm{nm}}{1.52} = 387.5\mathrm{nm}.$$

c) La velocità nel vetro si ricava infine utilizzando la definizione di indice di rifrazione

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{1.52} \approx 1.97 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}.$$

Osserviamo che sia la lunghezza d'onda che la velocità sono riscalate dello stesso fattore, che è l'indice di rifrazione. I valori di entrambe queste grandezze sono inferiori ai corrispondenti valori nel vuoto.

Esercizio 14.2

Uno schermo dista $D = 1.20$m da una sorgente a doppia fenditura. La distanza tra le due fenditure è di $d = 0.03$mm. La frangia chiara del secondo ordine si trova a $y_2 = 4.5$cm dalla linea centrale. Determinare:
a) la lunghezza d'onda della luce;
b) la distanza tra frange chiare adiacenti.

Soluzione:

a) Poiché la distanza del massimo di ordine *m* dalla linea centrale è data, nell'ipotesi $D >> y_m$ (che risulta verificata), dalla relazione

$$y_m = m\lambda\frac{D}{d},$$

si ottiene, per la lunghezza d'onda, nel caso $m = 2$

$$\lambda = \frac{y_m d}{mD} = \frac{y_2 d}{2D} = \frac{3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\ 4.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 1.2\mathrm{m}} = 562.5\mathrm{nm}.$$

b) Secondo la relazione introdotta al punto (a) le frange risultano equispaziate, per cui è facile vedere che la distanza tra frange adiacenti deve essere

$$\Delta y = \frac{y_m}{m} = \frac{y_2}{2} = 2.25\text{cm} .$$

Esercizio 14.3

Una sorgente emette luce di due lunghezze d'onda nella regione del visibile, date da $\lambda = 430$nm e $\lambda' = 510$nm. La sorgente è usata in un esperimento di interferenza da doppia fenditura in cui le fenditure distano $d = 0.025$mm e lo schermo è posto a $D = 1.50$m. Trovare la separazione tra le frange chiare del terzo ordine corrispondenti alle due lunghezze d'onda.

Soluzione:

I valori delle posizioni delle frange chiare del terzo ordine per le due lunghezze d'onda sono dati da

$$y_3 = 3\lambda \frac{D}{d} = 7.74\text{cm}$$

$$y_3' = 3\lambda' \frac{D}{d} = 9.18\text{cm} .$$

Quindi la separazione tra le frange risulta essere

$$\Delta y = y_3' - y_3 = 3(\lambda' - \lambda)\frac{D}{d} = 1.44\text{cm} .$$

Esercizio 14.4

Calcolare lo spessore minimo della pellicola di una bolla di sapone ($n = 1.46$) tale che si abbia interferenza costruttiva nella luce riflessa quando la pellicola è illuminata con luce di lunghezza d'onda nel vuoto pari a $\lambda_0 = 600$nm.

Soluzione:

La condizione di intereferenza costruttiva è data dalla relazione

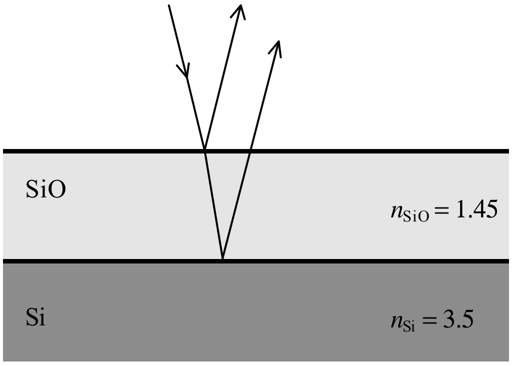
$$2ns = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda_0 ,$$

dove *s* è lo spessore della pellicola e *m* un numero naturale qualsiasi. Lo spessore minimo si ha ovviamente per *m* = 0, quindi

$$s = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{600\text{nm}}{4 \cdot 1.46} \approx 102.7\text{nm} .$$

Esercizio 14.5

Una cella solare di silicio ($n_{Si} = 3.5$) è ricoperta da un sottile strato di monossido di silicio ($n_{SiO} = 1.45$). Determinare lo spessore minimo dello strato in grado di produrre riflessione minima ad una lunghezza d'onda di $\lambda_0 = 550$nm, cioè al centro dello spettro solare.



Soluzione:

La luce riflessa è minima quando i due raggi soddisfano la condizione di interferenza distruttiva. Occorre però notare che la situazione è differente rispetto al caso di una lamina immersa in aria. Infatti entrambi i raggi subiscono uno sfasamento di π, in quanto vengono riflessi da un mezzo con indice di rifrazione maggiore di quello del mezzo in cui si propagano. In questo caso la condizione di interferenza distruttiva è dunque

$$2s = \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\lambda,$$

dove s è lo spessore dello strato, m un generico numero naturale e λ la lunghezza d'onda della luce nell'ossido. Il minimo spessore si ha per $m = 0$, da cui

$$s = \frac{\lambda}{4}$$

(si parla tecnicamente di strati antiriflesso a lambda-quarti). Conoscendo la lunghezza d'onda λ_0 nel vuoto e l'indice di rifrazione dell'ossido possiamo infine scrivere

$$s = \frac{\lambda_0}{4n_{SiO}} = \frac{550\text{nm}}{4 \cdot 1.45} \approx 94.8\text{nm}$$

Esercizio 14.6

Una fenditura di larghezza $b = 0.1$mm viene illuminata da raggi paralleli di lunghezza d'onda $\lambda = 600$nm e si osservano le bande di diffrazione prodotte su uno schermo distante $D = 40$cm dalla fenditura. Quanto dista la terza banda scura dalla banda luminosa centrale?

Soluzione:

Per una fenditura singola la m-esima banda scura viene individuata dalla relazione b senθ = $m\lambda$, per cui

$$\text{sen}\,\theta = \frac{m\lambda}{b} = \frac{3 \cdot 6 \times 10^{-7}\text{m}}{10^{-4}\text{m}} = 0.018\,.$$

Poichè θ è piccolo è possibile approssimare la funzione senθ con tg$\theta = y_m/D$, dove y_m è la distanza tra il la m-esima banda scura ed il centro dello schermo e D è la distanza tra la fenditura e lo schermo. Si ottiene:

$$y_3 = D\,tg\theta \approx 40\text{cm} \cdot 0.018 = 0.72\text{cm}$$

Esercizio 14.7

In una figura di diffrazione la distanza fra il primo minimo di destra e il primo minimo di sinistra è di 5.2mm. Lo schermo sul quale si forma la figura dista $D = 80$cm dalla fenditura e la lunghezza d'onda della luce è $\lambda = 546$nm. Calcolare la larghezza della fenditura.

Soluzione:

La distanza della prima banda scura dal centro dello schermo è

$$y_1 = \frac{5.2\text{mm}}{2} = 2.6\text{mm}$$

(i minimi laterali sono simmetrici).

Poiché $y_1 << D$ si considerano angoli piccoli ed è quindi possibile scrivere

$$\text{sen}\,\theta \approx \tan\theta = \frac{y_1}{D} = \frac{2.6\times10^{-3}\,\text{m}}{80\times10^{-2}\,\text{m}} = 3.25\times10^{-3},$$

dove q è come al solito l'angolo formato dai raggi interferenti con la normale allo schermo. Dalla legge della diffrazione è ora possibile ricavare la larghezza *b* della fenditura nel seguente modo:

$$b = \frac{\lambda}{\text{sen}\,\theta} = \frac{546\times10^{-9}\,\text{m}}{3.25\times10^{-3}} = 0.168\text{mm}\ .$$

Esercizi proposti

Esercizio 14.8

L'esperimento di Young (interferenza da due fenditure) viene compiuto con la luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 514.5$nm fornita da un laser ad argon. Se la distanza tra le due fenditure è $d = 1$mm, determinare la separazione Δy tra due frange successive su uno schermo posto a distanza $D = 3$m dalle fenditure. Questa separazione dipende dal numero d'ordine delle frange?

Risultato:

$\Delta y \approx 1.54$mm

La spaziatura dipende a rigore dal numero d'ordine della frangia, ma è circa costante per le frange più vicine al centro dello schermo.

Esercizio 14.9

Un fascio di luce monocromatica con lunghezza d'onda (nel vuoto) $\lambda_0 = 500$nm incide normalmente sopra una pellicola di spessore $d = 1\mu$m ed indice di rifrazione $n = 1.4$. Una parte della luce che entra nella pellicola viene poi riflessa dalla seconda superficie. Si calcoli:

a) il numero *N* di lunghezze d'onda contenute nel cammino percorso dalla luce nella pellicola, dal punto di incidenza al punto di uscita;

b) lo sfasamento ϕ tra le onde che entrano e quelle che escono.

Risultato:
a) $N = 5.6$
b) $\phi = 1.2\pi$

Esercizio 14.10

La superficie di una lastra di vetro è resa invisibile per la luce gialla del mercurio (lunghezza d'onda nel vuoto $\lambda_0 = 578\text{nm}$) in condizioni di incidenza normale, facendo depositare sulla superficie stessa una sottile pellicola avente indice di rifrazione $n = 1.55$. L'indice di rifrazione del vetro vale circa 1.5. Si calcoli il minimo spessore s che deve avere la pellicola.

Risultato:
$s \approx 0.186\mu\text{m}$

Esercizio 14.11

Si consideri un esperimento di diffrazione da una fenditura investita da luce bianca incidente normalmente. Si determini la lunghezza d'onda λ' della componente il cui terzo minimo di intensità coincide con il secondo minimo della luce rossa di lunghezza d'onda $\lambda = 650\text{nm}$.

Risultato:
$\lambda' \approx 433\text{nm}$

1) Si consideri una luce monocromatica. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) La frequenza della luce è indipendente dal mezzo, mentre la lunghezza d'onda in un mezzo può essere maggiore o minore di quella nel vuoto, a seconda dell'indice di rifrazione
b) La frequenza della luce è indipendente dal mezzo, mentre la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda sono minori in un mezzo e maggiori nel vuoto
c) La frequenza della luce è indipendente dal mezzo; la velocità di propagazione in un mezzo è minore di quella nel vuoto, mentre la lunghezza d'onda è maggiore
d) La velocità della luce è indipendente dal mezzo, mentre la lunghezza d'onda dipende dall'indice di rifrazione

2) Si consideri un esperimento di Young (interferenza da due fenditure) con luce monocromatica. Come si fa ad aumentare la spaziatura tra le frange?

a) Aumentando la frequenza della luce
b) Diminuendo la lunghezza d'onda della luce
c) Diminuendo la distanza dello schermo
d) Diminuendo la distanza tra le fenditure

3) Si consideri un esperimento di Young (interferenza da due fenditure) con luce costituita da più componenti monocromatiche. Che cosa si osserva sullo schermo?

a) Un massimo di intensità per ciascuna componente monocromatica
b) Un massimo di intensità centrale e una serie di massimi laterali equispaziati, in ciascuno dei quali tutte le componenti sono sovrapposte
c) Un massimo centrale in cui le componenti sono sovrapposte, una serie di massimi laterali in cui le componenti sono separate e la separazione che aumenta allontanandosi dal centro
d) Un massimo centrale e una serie di massimi laterali in cui le componenti sono separate e la separazione che diminuisce allontanandosi dal centro

4) Qual è la condizione per cui un film sottile di dato indice di rifrazione, deposto su un materiale di indice di rifrazione maggiore, costituisca uno strato antiriflesso per luce monocromatica di data lunghezza d'onda in condizioni di incidenza normale?

a) Che lo spessore sia un multiplo di mezza lunghezza d'onda
b) Che lo spessore sia un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda
c) Che lo spessore sia un multiplo pari di un quarto lunghezza d'onda

d) Che lo spessore sia un multiplo dispari di un quarto di lunghezza d'onda

5) Si consideri un esperimento di diffrazione di luce monocromatica da una fenditura. Che cosa può provocare un allargamento della figura di diffrazione?

a) Un aumento della lunghezza d'onda della luce
b) Una diminuzione della lunghezza d'onda della luce
c) Un aumento della larghezza della fenditura
d) Un avvicinamento dello schermo