

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° Compitino — 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, 0, 2, -2)$ ,  $u_2 = (0, 1, -4, 5)$ .

- (a) Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- (c) Dato  $v = (-1, 4, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (1, 1, -2, 0)$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0, \quad \sigma_\alpha : (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- (b) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- (c) Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- (d) Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 0, -1) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° Compitino — 14 giugno 2022

---

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (2, -1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (5, -2, 2, 0)$ .

- (a) Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- (c) Dato  $v = (3, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (0, 1, 2, -1)$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : x + 2y - z - 2 = 0, \quad \sigma_\alpha : 3x + (\alpha + 3)y - \alpha z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- (b) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- (c) Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- (d) Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 0, -1) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° Compitino — 14 giugno 2022**

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (2, -1, -2, 0)$ ,  $u_2 = (4, 0, -5, 3)$ .

- (a) Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- (c) Dato  $v = (6, 2, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (3, 1, -4, 0)$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : x - y + 2z + 1 = 0, \quad \sigma_\alpha : 2x + \alpha y + (2 - \alpha)z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- (b) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- (c) Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- (d) Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 2, 0) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2° Compitino — 14 giugno 2022

**Esercizio 1.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo di  $A$ .
- (b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- (c) Trovare le basi degli autospazi e dire se  $A$  è diagonalizzabile.
- (d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad  $A$ ? (*la risposta deve essere giustificata*)

**Esercizio 2.** Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$ , dotato del prodotto scalare usuale, sia  $U$  il sottospazio generato dai vettori  $u_1 = (1, -2, 0, -1)$ ,  $u_2 = (0, 5, -2, 2)$ .

- (a) Trovare una base ortogonale di  $U$ .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane di  $U^\perp$  e trovare una sua base.
- (c) Dato  $v = (3, 3, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$  determinare la sua proiezione ortogonale su  $U$ .
- (d) Si dica se esiste un sottospazio  $W \subset \mathbb{R}^4$  tale che la proiezione ortogonale di  $v$  su  $W$  sia il vettore  $w = (1, -1, 2, 1)$ .

**Esercizio 3.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo i piani

$$\pi : x - 2y + z - 2 = 0, \quad \sigma_\alpha : \alpha x + (3 - \alpha)y - 3z + \alpha = 0.$$

- (a) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui i piani  $\sigma_\alpha$  e  $\pi$  sono paralleli. Per tale valore di  $\alpha$  calcolare la distanza tra i piani  $\pi$  e  $\sigma_\alpha$ .
- (b) Determinare il valore di  $\alpha$  per cui le rette ortogonali al piano  $\sigma_\alpha$  sono parallele al piano  $\pi$ .
- (c) Poniamo  $\alpha = 0$ . Determinare un vettore direttore della retta  $r = \pi \cap \sigma_0$ .
- (d) Poniamo  $\alpha = 0$ . Dato il punto  $P = (1, 0, 1) \in \pi$  trovare un punto  $S \in \sigma_0$  tale che la retta passante per  $P$  e  $S$  sia ortogonale a  $\pi$ .