(1) SEGNALI NEL DOMINIO DEL TEMPO

FORMULE DI EULERO: $\boxed{\cos t = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}}$ $\boxed{\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}}$

SEGNALE CAUSALE: SEGNALE ATTIVO SOLO A TEMPI POSITIVI $(s(t) = 0 \text{ per } t < 0)$

SEGNALI NOTEVOLI

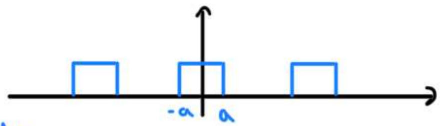
RETTANGOLO: $s(t) = A \, \mathrm{rect}\left(\frac{t-T}{D}\right)$

- ALTO A
- CENTRATO IN T
- DI ESTENSIONE D

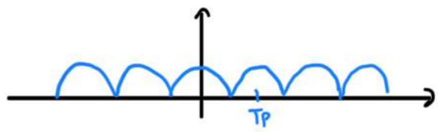
[ESPRESSIONE ALTERNATIVA: $\mathrm{rect}(t) = 1(t + \frac{1}{2}) - 1(t - \frac{1}{2})$]

SINC: $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

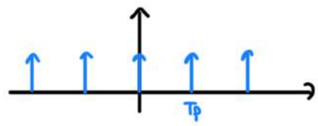
ONDA QUADRA: $s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\underbrace{2a}_{\text{ampiezza di una singola onda}}}\right)$



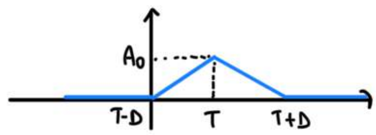
COSENO RETTIFICATO: $s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} \cos(\omega_0 t) \, \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right)$



COMB: $\mathrm{comb}_{T_p}(t) = \mathrm{rep}_{T_p} \delta(t)$



TRIANGOLO: $s(t) = A_0 \, \mathrm{triang}\left(\frac{t-T}{D}\right)$



PARAMETRI DEI SEGNALI

SEGNALI CONTINUI

AREA: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,dt}$

VALORE MEDIO: $\boxed{m_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t)\,dt}$

ENERGIA: $\boxed{E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt}$

POTENZA: $\boxed{P_s = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |s(t)|^2\,dt}$

SEGNALI DISCRETI

$\boxed{A_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)}$

$\boxed{m_s = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{1+2N}\sum_{n=-N}^{N} s(n)}$

$\boxed{E_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)|^2}$

$\boxed{P_s = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{1+2N}\sum_{n=-N}^{N} |s(n)|^2}$

PROPRIETÁ:

AREA FINITA $\longrightarrow$ VALORE MEDIO NULLO

VALORE MEDIO FINITO $\neq 0$ $\longrightarrow$ AREA INFINITA

ENERGIA FINITA $\longrightarrow$ POTENZA NULLA

POTENZA FINITA $\neq 0$ $\longrightarrow$ ENERGIA INFINITA

(NB: IL VICEVERSA IN GENERALE E' FALSO)

SEGNALI PERIODICI

TUTTI I PARAMETRI DEFINITI SOPRA VANNO CALCOLATI IN UN PERIODO, ALTRIMENTI DIVERGEREBBERO

AREA: $\boxed{A_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)\,dt}$

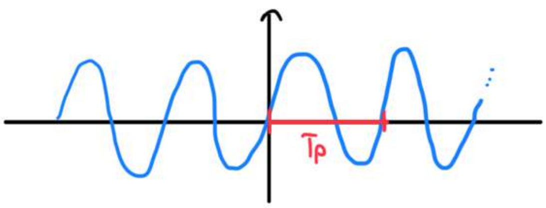
VALORE MEDIO: $\boxed{m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} s(t)\,dt}$

ENERGIA: $\boxed{E_s(T_p) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2\,dt}$

POTENZA: $\boxed{P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} |s(t)|^2\,dt}$

ESPONENZIALI COMPLESSI A FASE LINEARE: $\boxed{A e^{j\omega_0 t} = A e^{j2\pi f_0 t}}$

PERIODO MINIMO: $\boxed{T_p = \frac{1}{|f_0|}}$



$$\boxed{\begin{aligned} A_s(T_p) &= 0 \\ m_s &= 0 \\ E_s(T_p) &= A^2 T_p \\ P_s &= A^2 \end{aligned}}$$

COME TROVO IL PERIODO MINIMO DELLA COMPOSIZIONE DI SEGNALI ?

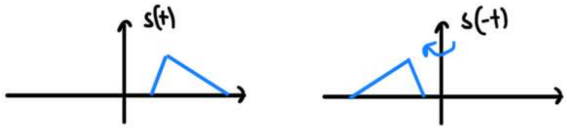
→ CERCO UN MINIMO COMUNE MULTIPLO TRA I PERIODI :

$$\boxed{T_P = m T_1 = K T_2} \longrightarrow \boxed{\frac{m}{K} = \frac{T_2}{T_1}}$$

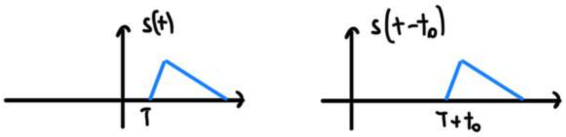
QUINDI, PRIMA TROVO $\frac{m}{K}$, E POI MOLTIPLICO IL NUM. PER T_1 O IL DEN. PER T_2 PER TROVARE IL PERIODO MINIMO.

TRASFORMAZIONI FONDAMENTALI

RIBALTAMENTO: $y(t) = s(-t) = s_-(t)$

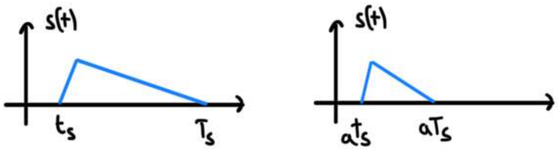


TRASLAZIONE: $y(t) = s(t-t_0)$



$t_0 < 0$: AVANTI
$t_0 > 0$: INDIETRO

CAMBIO SCALA: $y(t) = s\left(\frac{t}{a}\right)$



COMPRESSIONE: $a < 1$
ESPANSIONE: $a > 1$

NB: NELLE TRASFORMAZIONI ELEMENTARI CONTA L'ORDINE. E' PREFERIBILE APPLICARE
1) CAMBIO SCALA
2) TRASLAZIONE

SIMMETRIE

- PARI: $s(t) = s(-t)$
- DISPARI: $s(-t) = -s(t)$

PROPRIETÀ: I SEGNALI DISPARI HANNO AREA NULLA

OGNI SEGNALE PUÒ ESSERE ESPRESSO COME SOMMA DI UNA PARTE PARI E UNA DISPARI:

PARTE PARI: $\boxed{s_e(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s(-t)}$

PARTE DISPARI: $\boxed{s_o(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s(-t)}$

SEGNALI REALI: $s(t) = s^*(t)$

SEGNALI IMMAGINARI: $s(t) = -s^*(t)$

PARTE REALE: $Re(s(t)) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s^*(t)$

PARTE IMMAGINARIA: $Im(s(t)) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s^*(t)$

SEGNALI HERMITIANI: $s(t) = s^*(-t)$

SEGNALI ANTIHERMITIANI: $s(t) = -s^*(-t)$

PARTE HERMITIANA: $S_h(t) = \frac{1}{2}s(t) + \frac{1}{2}s^*(-t)$

PARTE ANTIHERMITIANA: $S_a(t) = \frac{1}{2}s(t) - \frac{1}{2}s^*(-t)$

RIPETIZIONE PERIODICA: $\boxed{s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v(t - nT_p) = rep_{T_p}\, v(t)}$

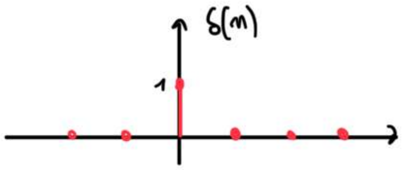
PERIODICITÀ NEL DISCRETO

AFFINCHÉ UNA SINUSOIDE CAMPIONATA SIA PERIODICA DI PERIODO N, DEVE VALERE: $\boxed{F_0 T = \frac{K}{N}}$

SE F_0T NON È RAZIONALE, LA SINUSOIDE CAMPIONATA NON È PERIODICA

IMPULSI IDEALI

DELTA DI KRONECHER:



AREA = 1

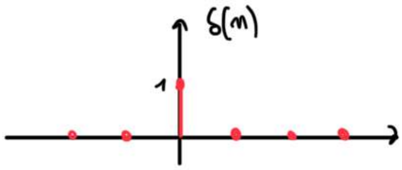
PARITÀ: $\delta(n) = \delta(-n)$

RELAZIONE CON IL GRADINO: $1_0(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$

PROPRIETÀ RIVELATRICE DEL DELTA: IL PRODOTTO CON UN DELTA RIVELA IL VALORE DEL SEGNALE

ESPRESSIONE ALTERNATIVA DI UN SEGNALE: $\boxed{s(n) = \sum_{n_0=-\infty}^{+\infty} s(n_0)\,\delta(n-n_0)}$ $\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau}$

DELTA DI DIRAC:



AREA = 1

PARITÀ: $\delta(t) = \delta(-t)$

RELAZIONE CON IL GRADINO: $1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(u)\,du$

SI PUÒ INTERPRETARE LA DELTA COME LA DERIVATA DEL GRADINO: $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$

PROPRIETÀ DELLA DELTA

PARITÀ: $\boxed{\delta(-t) = \delta(t)}$

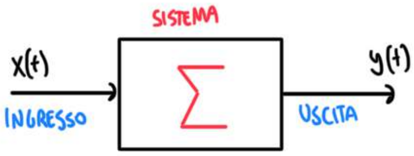
CAMBIO SCALA: $\boxed{\delta(at) = \frac{1}{|a|}}$

PRODOTTO SEGNALE x IMPULSO: $\boxed{f(t)\delta(t) = f(0)\,\delta(t)}$

INTEGRALE: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)}$

(2) SISTEMI NEL DOMINIO DEL TEMPO

UN **SISTEMA** E' UNA **MAPPA**: CHE TRASFORMA UN SEGNALE IN UN ALTRO SEGNALE



CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI

- SISTEMA **CONTINUO**
- SISTEMA **DISCRETO**
- SISTEMA **IBRIDO**

  DISCRETO ⟶ CONTINUO (interpolazione)

  CONTINUO ⟶ DISCRETO (campionamento)

- SISTEMA **INVERTIBILE**: UN SISTEMA SI DICE INVERTIBILE SE $S(S^{-1}(x(t)) = x(t) \quad \forall\, x(t)$

- SISTEMA **ISTANTANEO / STATICO**: UN SISTEMA E' ISTANTANEO SE L'USCITA DIPENDE SOLAMENTE DAL VALORE DI X ALL'ISTANTE t, E NON DA VALORI PASSATI O FUTURI. UN SISTEMA ISTANTANEO E' SIA CAUSALE SIA ANTICAUSALE.
- SISTEMA **CAUSALE**: UN SISTEMA SI DICE CAUSALE SE L'USCITA DIPENDE DA ALMENO UN VALORE $x(\tau)$ PER $\tau < t$ E NON DIPENDE DA $x(\tau)$ PER $\tau > t$
- SISTEMA **ANTICAUSALE**: UN SISTEMA SI DICE ANTICAUSALE SE L'USCITA DIPENDE DA ALMENO UN VALORE $x(\tau)$ PER $\tau > t$ E NON DIPENDE DA $x(\tau)$ PER $\tau < t$.

- SISTEMA **BIBO - STABILE**: SE AD OGNI INGRESSO LIMITATO NELLE AMPIEZZE $|x(t)| < L_x$ CORRISPONDE UN'USCITA LIMITATA NELLE AMPIEZZE $|y(t)| < L_y$, IL SISTEMA E' BIBO - STABILE

DIM. CHE UN SISTEMA E' BIBO - STABILE:

$$|y(t)| = \left| \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} x(v)\, dv \right| \leq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} |x(v)|\, dv \leq \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} L_x\, du = L_x$$

SE DEVO DIMOSTRARE CHE **NON** E' BIBO - STABILE, PORTO UN CONTROESEMPIO

- SISTEMA **LINEARE**: UN SISTEMA E' LINEARE SE VALE: $\boxed{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Longrightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}$

- SISTEMA **TEMPO - INVARIANTE**: $\boxed{x(t-t_0) \Longrightarrow y(t-t_0)}$

COME VERIFICO SE UN SISTEMA È TEMPO INVARIANTE:

1) VALUTO L'USCITA CON $t - t_0$ AL POSTO DI t
2) VALUTO L'USCITA CON $x(t-t_0)$ AL POSTO DI $x(t)$

$\Longrightarrow$ VERIFICO SE I RISULTATI SONO UGUALI (può essere utile fare un cambio di variabile)

AUTOFUNZIONE: È UN SEGNALE TALE CHE L'USCITA $y(t)$ CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $x(t)$ VALE $y(t) = \lambda x(t)$

λ È DETTO AUTOVALORE

RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$: È L'USCITA CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $x(t) = \delta(t)$

AUTOFUNZIONE: UN SEGNALE $x(t)$ È DETTO AUTOFUNZIONE SE L'USCITA $y(t)$ CORRISPONDENTE VALE $\lambda x(t)$.

λ È DETTO AUTOVALORE

RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$: È L'USCITA CORRISPONDENTE ALL'INGRESSO $x(t) = \delta(t)$

CONVOLUZIONE

TEMPO CONTINUO:
$$\boxed{z(t) = x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, du}$$

TEMPO DISCRETO:
$$\boxed{z(n) = x * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, y(n-k)}$$

INTERPRETAZIONE GRAFICA DELLA CONVOLUZIONE:

- SI TIENE FISSO $x(u)$
- SI RIBALTA y (risp. all'asse y) E LO SI TRASLA DI T

LA CONVOLUZIONE È L'AREA IN COMUNE TRA I 2 SEGNALI AL VARIARE DELLA POSIZIONE DI y RISPETTO A x.

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE

- ESTENSIONE: SE x È NON NULLO PER $x \in [t_x, T_x]$
  SE y È NON NULLO PER $y \in [t_y, T_y]$

ALLORA LA CONVOLUZIONE TRA x E y È NON NULLA PER $[t_x + t_y, T_x + T_y]$

- LINEARITÀ: $(Ax + By) * z(t) = Ax * z(t) + By * z(t)$

- ASSOCIATIVITÀ: $x*(y*z) = (x*y)*z = x*y*z$

- COMMUTATIVITÀ: $x * y(t) = y * x(t)$

- TRASLAZIONI: LE TRASLAZIONI SI SOMMANO. QUINDI POSSO ELIMINARE LE TRASLAZIONI E AGGIUNGERLE ALLA FINE.

- ELEMENTO NEUTRO: IL DELTA δ È L'ELEMENTO NEUTRO DELLA CONVOLUZIONE: $x * \delta(t) = x(t)$

- REGOLA DELL'AREA: $\boxed{A_{x*y} = A_x A_y}$ (regola di controllo)

CONVOLUZIONE PERIODICA

- CASO 1: LA CONVOLUZIONE TRA UN SEGNALE PERIODICO E UNO APERIODICO È PERIODICA DELLO STESSO PERIODO DEL SEGNALE PERIODICO

- CASO 2: ENTRAMBI I SEGNALI SONO PERIODICI DELLO STESSO PERIODO, BISOGNA UTILIZZARE UNA DEFINIZIONE DIVERSA DI CONVOLUZIONE

$$\boxed{x * y(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} \underbrace{x(u)}_{\text{periodico } T_p}\, \underbrace{y(t-u)}_{\text{periodico } T_p}\, du}$$

$$\boxed{x * y(n) = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x(k)\, y(n-k)}$$

STESSE PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE APERIODICA, A PARTE PER IL FATTO CHE L'ELEMENTO NEUTRO È IL comb

---

FILTRI

PER DEFINIZIONE UN FILTRO È UN (PARTICOLARE) SISTEMA LTI

$$x(t) \longrightarrow \overset{\text{LTI}}{\boxed{h(\cdot)}} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, h(t-u)\, du$$

RISPOSTA IMPULSIVA APERIODICA

SE IN INGRESSO ABBIAMO:

- $x(t)$ APERIODICO $\longrightarrow$ $y(t)$ APERIODICO
- $x(t)$ PERIODICO T_p $\longrightarrow$ $y(t)$ PERIODICO T_p

PROPRIETÀ DEI FILTRI:

- LINEARITÀ
- TEMPO INVARIANZA

$\Big\}$ PER DEFINIZIONE

- REALTÀ: IL FILTRO È REALE $\iff$ $h(t)$ È REALE
- CAUSALITÀ: IL FILTRO È CAUSALE $\iff$ $h(t)$ È CAUSALE
- BIBO-STABILITÀ: IL FILTRO È BIBO-STABILE $\iff$ $h(t)$ È ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE (assolutamente sommabile nel discreto)

SERIE DI FILTRI: $h(t) = h_1(t) \cdot h_2(t)$

PARALLELO DI FILTRI: $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

RISPOSTA IN FREQUENZA

DATA LA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$, SI DEFINISCE RISPOSTA IN FREQUENZA:

$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega_0 t}\, dt}$$

CIOÈ, LA TRASFORMATA DI FOURIER DELLA RISPOSTA IMPULSIVA.

$$\boxed{H(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{-j\omega_0 k}}$$

PROPRIETÀ: NEI FILTRI, SE IL SEGNALE DI INGRESSO È UN ESPONENZIALE COMPLESSO A FASE LINEARE, DEL TIPO $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, L'USCITA SI CALCOLA COME:

$$\boxed{y(t) = H(j\omega)\, x(t)}$$

OVVERO, GLI ESPONENZIALI COMPLESSI A FASE LINEARE SONO AUTOFUNZIONI PER I FILTRI

(3) SERIE E TRASFORMATA DI FOURIER

SERIE DI FOURIER: SE UN SEGNALE E' PERIODICO DI PERIODO T_P, I COEFFICIENTI DELLA SDF VALGONO:

$$\boxed{S_K = \frac{1}{T_P}\int_{t_0}^{t_0+T_P} s(t)\, e^{-jKW_0 t}\, dt} \qquad \boxed{W_0 = \frac{2\pi}{T_P}}$$

RICOSTRUZIONE DEL SEGNALE: $\boxed{s(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} S_K\, e^{jKW_0 t}}$

PROPRIETÀ DELLA SERIE DI FOURIER

- SEGNALE REALE $\Longrightarrow$ COEFFICIENTI CON SIMMETRIA HERMITIANA

$$\boxed{s(t) = s^*(t) \Longrightarrow S_{-K} = S_K^*}$$

- LINEARITÀ: $\boxed{z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Longrightarrow Z_K = \alpha X_K + \beta Y_K}$

- RIBALTAMENTO: SE RIBALTIAMO IL SEGNALE NEL DOMINIO DEL TEMPO, OTTENIAMO UN RIBALTAMENTO DEI COEFFICIENTI DI FOURIER

$$\boxed{y(t) = x(-t) \Longrightarrow Y_K = X_{-K}}$$

- CONIUGIO: CONIUGATO NEL TEMPO $\Longrightarrow$ COEFFICIENTI CONIUGATI E RIBALTATI

$$\boxed{y(t) = x^*(t) \Longrightarrow Y_K = X^*_{-K}}$$

- SIMMETRIE:

	DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DELLA FREQUENZA	
$s(t) = (-t)$	PARI	PARI	$S_K = S_{-K}$
$s(t) = -s(-t)$	DISPARI	DISPARI	$S_K = -S_{-K}$
$s(t) = s^*(t)$	REALE	HERMITIANA	$S_K = S^*_{-K}$
$\begin{cases} s(t) = s^*(t) \\ s(t) = s(-t) \end{cases}$	REALE E PARI	REALE E PARI	$S_K = S^*_{-K}$, $S_K = S_{-K}$ $\Rightarrow S_K = S_K^*$
	IMMAGINARIA	ANTIHERMITIANA	
	IMMAGINARIA E DISPARI	REALE E DISPARI	
	REALE E DISPARI	IMMAGINARIO DISPARI	

- VALORE MEDIO: IL VALORE MEDIO DEL SEGNALE COINCIDE CON IL COEFFICIENTE DELLA SDF IN 0: $\boxed{m_x = X(0)}$

- POTENZA: TEOREMA DI PARSEVAL: $\boxed{P_x = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} |X_\ell|^2}$

- TRASLAZIONE NEL TEMPO $\Longrightarrow$ MODULAZIONE IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = x(t-t_1) \Longrightarrow Y_k = X_k e^{-jk\omega_0 t_1}}$$

- MODULAZIONE NEL TEMPO $\Longrightarrow$ TRASLAZIONE IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = x(t) e^{jm\omega_0 t} \Longrightarrow Y_k = X_{k-m}}$$

- DERIVATA NEL TEMPO $\Longrightarrow$ PRODOTTO IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow Y_k = X_k \cdot jk\omega_0}$$

- CONVOLUZIONE PERIODICA $\Longrightarrow$ PRODOTTO IN FREQUENZA

$$\boxed{z(t) = \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t-u)y(u)\,du \Longrightarrow Z_k = T_p X_k Y_k}$$

- PRODOTTO NEL TEMPO $\Longrightarrow$ CONVOLUZIONE IN FREQUENZA

$$\boxed{z(t) = x(t)y(t) \Longrightarrow Z_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_m Y_{k-m}}$$

EQUIVALENZA NOTEVOLE: APPLICARE PRIMA UNA REPLICA PERIODICA E POI UNA CONVOLUZIONE PERIODICA È EQUIVALENTE AD APPLICARE PRIMA UNA CONVOLUZIONE APERIODICA E POI UNA REPLICA PERIODICA.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$\boxed{S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t}\,dt}$$

ANTITRASFORMATA: $\boxed{s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega) e^{j\omega t}\,d\omega}$

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

- LINEARITÀ: $\boxed{z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \Longrightarrow Z(j\omega) = \alpha X(j\omega) + \beta Y(j\omega)}$

- RIBALTAMENTO: SE RIBALTIAMO IL SEGNALE NEL DOMINIO DEL TEMPO, OTTENIAMO UN RIBALTAMENTO IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = x(-t) \Longrightarrow Y(j\omega) = X(-j\omega)}$$

- CONIUGIO: CONIUGATO NEL TEMPO $\Longrightarrow$ RIBALTAMENTO E CONIUGIO IN PULSAZIONE

$$\boxed{y(t) = x^*(t) \Longrightarrow Y(j\omega) = X^*(-j\omega)}$$

- SIMMETRIE:

DOMINIO DEL TEMPO		DOMINIO DELLA FREQUENZA	
$s(t) = (-t)$	PARI	PARI	$S(j\omega) = S(-j\omega)$
$s(t) = -s(-t)$	DISPARI	DISPARI	$S(j\omega) = -S(-j\omega)$
$s(t) = s^*(t)$	REALE	HERMITIANA	$S(j\omega) = S^*(-j\omega)$
$\begin{cases} s(t) = s^*(t) \\ s(t) = s(-t) \end{cases}$	REALE E PARI	REALE E PARI	$\begin{matrix} S(j\omega) = S^*(-j\omega) \\ S(j\omega) = S(-j\omega) \end{matrix} \Longrightarrow S(j\omega) = S^*(j\omega)$
	IMMAGINARIA	ANTIHERMITIANA	
	IMMAGINARIA E DISPARI	REALE E DISPARI	
	REALE E DISPARI	IMMAGINARIO DISPARI	

- TRASLAZIONE NEL TEMPO $\Longrightarrow$ MODULAZIONE IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = x(t-t_0) \Longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

- MODULAZIONE NEL TEMPO $\Longrightarrow$ TRASLAZIONE IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = x(t)e^{j\omega_0 t} \Longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega - j\omega_0)}$$

- CAMBIO SCALA:

$$\boxed{y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \Longrightarrow Y(j\omega) = a\,X(ja\omega)}$$

- SIMMETRIA: SE APPLICO LA TRASFORMATA DI FOURIER 2 VOLTE:

$$s(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} S(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$S(jt) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, s(-\omega)$$

segnale originario calcolato in $-\omega$

- CONVOLUZIONE PERIODICA $\Longrightarrow$ PRODOTTO IN FREQUENZA

$$\boxed{z(t) = x * y(t) \Longrightarrow Z(j\omega) = X(j\omega)Y(j\omega)}$$

- PRODOTTO NEL TEMPO $\Longrightarrow$ CONVOLUZIONE IN FREQUENZA

$$\boxed{z(t) = x(t)\,y(t) \Longrightarrow \frac{1}{2\pi} X * Y(j\omega)}$$

- AREA: COINCIDE CON LA TRASFOMATA/ANTITRASFORMATA IN 0: $\boxed{S(j0) = A_s}$

$$\boxed{s(0) = \frac{1}{2\pi} A_S}$$

- ENERGIA: TEOREMA DI PARSEVAL: $\boxed{E_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega}$

- DERIVATA NEL TEMPO $\Longrightarrow$ PRODOTTO IN FREQUENZA

$$\boxed{y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow Y(j\omega) = j\omega \cdot X(j\omega)}$$

- PRODOTTO NEL TEMPO $\Longrightarrow$ DERIVATA IN PULSAZIONE

$$\boxed{y(t) = t\,x(t) \Longrightarrow Y(j\omega) = jX'(j\omega)}$$

- INTEGRAZIONE

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(v)\,dv \Longrightarrow Y(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\,\delta(\omega)}$$

TRASFORMATE DI FOURIER NOTEVOLI

$$1(t)\, e^{-at} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega}$$

$$rect(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \qquad \text{(segnale costante)}$$

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}$$

$$e^{j\omega_1 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_1)$$

$$sinc(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$triang(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} sinc^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$sinc^2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} triang\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$sign(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$$

$$1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(j\omega)$$

FILTRAGGIO VISTO IN FREQUENZA

LTI

$$X(j\omega) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

SERIE DI FILTRI: $Y(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)X(j\omega)$

PARALLELO DI FILTRI: $Y(j\omega) = \left[H_1(j\omega) + H_2(j\omega)\right]X(j\omega)$

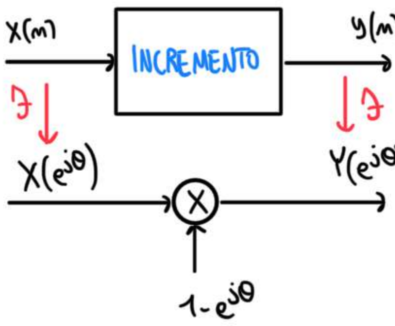
FILTRI DISTORCENTI/NON DISTORCENTI: UN FILTRO NON DISTORCE IL SEGNALE SE L'INGRESSO È UN ESPONENZIALE COMPLESSO A FASE LINEARE

TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER (TFTD)

$$\boxed{S(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n)\, e^{-j\theta n}} \qquad \boxed{\theta = \omega T} \qquad \boxed{s(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{j\theta})\, e^{j\theta n}\, d\theta}$$

VALGONO LE STESSE PROPRIETÀ VISTE PER LA TF A TEMPO CONTINUO

INCREMENTO/DERIVATA DISCRETA:

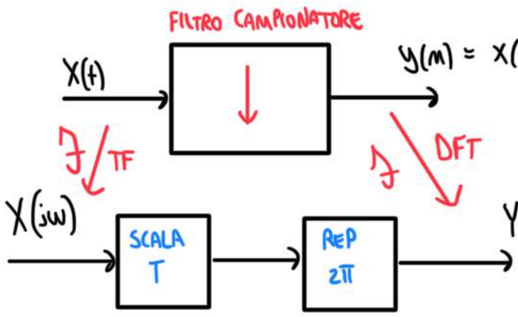


$y(n) = x(n) - x(n-1)$ quanto varia il segnale rispetto all'istante precedente

$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta})\,(1-e^{-j\theta})$ questa è una modulazione (perché ho una traslazione nel tempo)

MOLTIPLICAZIONE PER IL TEMPO: $\boxed{y(n) = n\,x(n) \Longrightarrow Y(e^{j\theta}) = j X'(e^{j\theta})}$

CAMPIONAMENTO: LEGAME TRA TEMPO CONTINUO E TEMPO DISCRETO



$y(n) = x(nT)$

$Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{T}\, rep_{2\pi} X\left(\frac{j\theta}{T}\right)$

DFT

RAPPRESENTAZIONE IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI DISCRETI PERIODICI

$$\boxed{s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_k\, e^{jkn\theta_0}} \qquad \boxed{S_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(n)\, e^{-jkn\theta_0}} \qquad \boxed{\theta_0 = \frac{2\pi}{N}}$$

DFT DI UNA RIPETIZIONE PERIODICA: $\boxed{y(n) = rep_N\, x(n) \Longrightarrow Y_k = \frac{1}{N} X(e^{j\theta k}) \quad , \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{N}}$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

UN SEGNALE CONTINUO $s(t)$ LIMITATO IN PULSAZIONE NELLA BANDA $[-2\pi B, 2\pi B]$ SI PUÒ RICOSTRUIRE DAI PROPRI CAMPIONI $s(nT)$ SE IL PASSO DI CAMPIONAMENTO SODDISFA $\boxed{T < \frac{1}{2B}}$

(4) TRASFORMATA DI LAPLACE E ZETA

ABBIAMO VISTO LE TRASFORMATE DI FOURIER. TUTTAVIA, VI SONO DELLE CRITICITÀ:

1) VI SONO DEI SEGNALI DI CUI NON È FACILE CALCOLARE LA TRASFORMATA DI FOURIER, OPPURE PER CUI L'INTEGRALE DI FOURIER NON CONVERGE OVUNQUE O NON CONVERGE AFFATTO

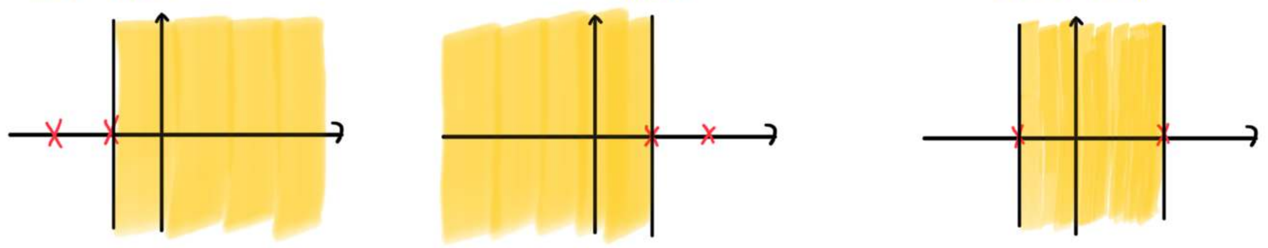
2) CI SERVE UNO STRUMENTO PIÙ PRATICO PER RISOLVERE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE MEDIANTE TRASFORMATE, CON UNA REGOLA DI DERIVAZIONE PIÙ AGEVOLE

PER QUESTI MOTIVI DEFINIAMO LA TRASFORMATA DI LAPLACE:

TRASFORMATA DI LAPLACE: $\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt}$ $\qquad \boxed{s = \sigma + j\omega}$

ROC: REGIONE DI CONVERGENZA. (SI INDICA CON IL SIMBOLO Γ)

SEGNALI CAUSALI — SEGNALI ANTICAUSALI — SEGNALI MISTI



PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

- LINEARITÀ: $\boxed{z(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \implies Z(s) = \alpha X(s) + \beta Y(s)}$ $\qquad \boxed{\Gamma_x \cap \Gamma_y \subset \Gamma_z}$

- RIBALTAMENTO: $\boxed{y(t) = x(-t) \implies Y(s) = X(-s)}$ $\qquad \boxed{\Gamma_y = -\Gamma_x}$

- CONIUGIO: $\boxed{y(t) = x^*(t) \implies Y(s) = X^*(s^*)}$ $\qquad \boxed{\Gamma_y = \Gamma_x}$

- SCALA: $\boxed{y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right) \implies a X(as)}$ $\qquad \boxed{\Gamma_y = \frac{\Gamma_x}{a}}$

- TRASLAZIONE E MODULAZIONE:

$$y(t) = x(t - t_0) \implies Y(s) = X(s)\, e^{-st_0} \qquad \Gamma_y = \Gamma_x$$

$$y(t) = x(t)\, e^{s_0 t} \implies Y(s) = X(s - s_0) \qquad \Gamma_y = \Gamma_x + s_0$$

- DERIVAZIONE IN S: $\boxed{y(t) = t\, x(t) \implies Y(s) = -X'(s) \qquad \Gamma_y = \Gamma_x}$

- DERIVAZIONE IN t: $\boxed{y(t) = x'(t) \implies Y(s) = sX(s) \quad \Gamma_y \supset \Gamma_x}$

- CONVOLUZIONE: $\boxed{z(t) = x * y(t) \implies X(s)Y(s) \quad \Gamma_x \cap \Gamma_y \subset \Gamma_z}$

- INTEGRALE: $\boxed{y(t) = \int x(t)\, dt \implies Y(s) = \frac{X(s)}{s}}$

TRASFORMATE DI LAPLACE NOTEVOLI

$$e^{s_0 t} 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s-s_0} \qquad \text{ROC: } Re[s_0 - s] < 0$$

$$-e^{s_0 t} 1(-t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s_0-s} \qquad \text{ROC: } Re[s_0 - s] > 0$$

$$t e^{s_0 t} 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{(s-s_0)^2}$$

$$e^{s_1(t)} 1(t) + e^{s_2(t)} 1(-t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \qquad \text{ROC: } Re[s_1] < Re[s] < Re[s_2]$$

$$1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s} \qquad \text{ROC: } Re[s] > 0$$

$$t\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{s^2}$$

$$t^k 1(t) \longrightarrow \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$rect(t) \xrightarrow{\alpha} \begin{cases} 1 & s = 0 \\ \dfrac{e^{\frac{s}{2}} - e^{\frac{s}{2}}}{s} & s \neq 0 \end{cases} \qquad \text{ROC: } \mathbb{C}$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\alpha} 1 \qquad \text{ROC: } \mathbb{C}$$

$$\cos(\omega_0 t)\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \qquad \text{ROC: } Re[s] > 0$$

$$\sin(\omega_0 t)\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \qquad \text{ROC: } Re[s] > 0$$

$$e^{s_0 t} \cos(\omega_0 t)\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{s - s_0}{(s-s_0)^2 + \omega_0^2}$$

$$e^{s_0 t} \sin(\omega_0 t)\, 1(t) \xrightarrow{\alpha} \frac{\omega_0}{(s-s_0)^2 + \omega_0^2}$$

BIBO STABILITÀ DELLE FUNZIONI RAZIONALI

UNA TRASFORMATA DI LAPLACE $H(s)$ ESPRESSA DA UNA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA PROPRIA $(m \leq n)$ CORRISPONDE AD UNA RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$ BIBO STABILE $\iff$ TUTTI I POLI SODDISFANO $Re[p_i] < 0$

TRASFORMATA UNILATERA DI LAPLACE

È UNA PICCOLA VARIAZIONE DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE, CHE CI SERVE PER RISOLVERE LE EDO.

$$\boxed{X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st}\, dt} \qquad \boxed{s = \sigma + j\omega}$$

PROPRIETÀ

IDENTICHE ALLA TRASFORMATA DI LAPLACE, CON L'ACCORTEZZA CHE IL SEGNALE È CAUSALE E QUINDI ALCUNE PROPRIETÀ NON HANNO SENSO (es. RIBALTAMENTO). PARTICOLARE RILEVANZA ASSUME LA

REGOLA DI DERIVAZIONE IN t: $\boxed{y(t) = x'(t) \implies Y(s) = sX(s) - x(0^-)}$

QUINDI, LA TL UNILATERA MANTIENE L'INFORMAZIONE DEL VALORE DELLA TL IN $X(0^-)$. CIÒ È UTILE NELLA SOLUZIONE DELLE EDO

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

SIA DATO IL PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}(t) & \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE} \\ y(0^-) = y_0,\ y'(0^-) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0^-) = y_{n-1} & \text{CONDIZIONI INIZIALI} \\ x(t) = 0 \quad \text{PER } t < 0 & \text{INGRESSO CAUSALE} \end{cases}$$

USANDO LE TL IL PROBLEMA SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_e(s) = H(s)X(s) + Y_e(s)$$

DOVE $Y_f(s)$ = RISPOSTA FORZATA

$Y_e(s)$ = EVOLUZIONE LIBERA

LE FUNZIONI $y(t), y_f(t), y_e(t)$ SI TROVANO PER ANTITRASFORMATA DI $Y(s), Y_f(s), Y_e(s)$

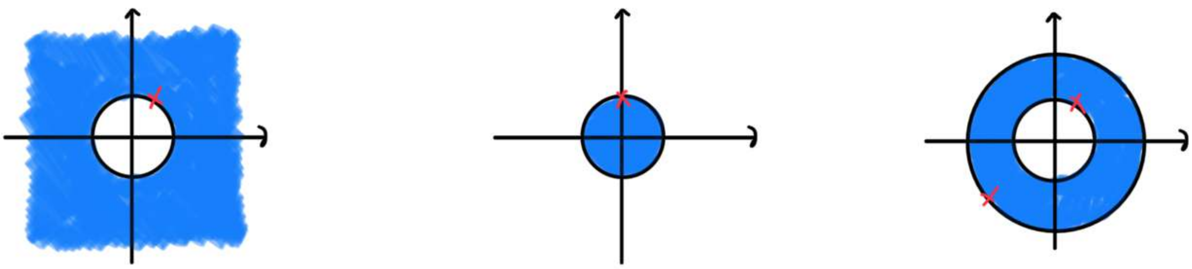
TRASFORMATA Z

È L'ANALOGO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE PER SEGNALI A TEMPO DISCRETO

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}} \qquad \boxed{z = re^{j\theta}}$$

TIPOLOGIE DI ROC: SONO REGIONI CIRCOLARI ANZICHÉ A RETTE VERTICALI

SEGNALI CAUSALI — SEGNALI ANTICAUSALI — SEGNALI MISTI



PROPRIETÀ (le stesse ma nel caso discreto)

- LINEARITÀ: $\alpha x(n) + \beta y(n) \Longrightarrow \alpha X(z) + \beta Y(z)$
- TRASLAZIONE: $x(n - n_0) \Longrightarrow X(z) z^{-n_0}$
- MODULAZIONE: $p_0^{n} x(n) \Longrightarrow X\left(\frac{z}{p_0}\right)$
- DERIVAZIONE IN Z: $n\, x(n) \Longrightarrow -z X'(z)$
- CONVOLUZIONE: $x * y(n) \Longrightarrow X(z) Y(z)$