Esercizi Tutorato Algebra

chiara.malerba@studenti.unipd.it

a.a. 2022/2023

Esercitazione del 23 Marzo 2023

- Si considerino le seguenti funzioni:

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$g: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3 + x_1 \\ 3x_2 + 4x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_3^2 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}$$

  - Verificare se sono lineari o meno.
  - Determinare una base per il nucleo delle funzioni che risultino essere lineari e stabilire se esse sono iniettive

- Siano V e W due spazi vettoriali, siano $v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\ , w_1\ w_2\ , w_3$ le rispettive basi e indichiamo con $f:\ V \to W$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(v_1) = w_1 - w_3$$

$$f(v_2) = w_1 + w_2$$

$$f(v_3) = 2w_2 + w_3$$

$$f(v_4) = 4w_1 + 2w_2 - 2w_3$$

  Con le seguenti indicazioni,

  1. Si scriva la matrice di f rispetto alle basi date.
  2. Si determini una base di $Ker(f)$ e una base di $Im(f)$.
  3. Si determini $f^{-1}(w_1 + w_3)$.
  4. Si dica se f e' suriettiva e/o iniettiva

- Sia:

$$f: \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -x + z \\ -y + t \\ x - y \\ x - t \end{pmatrix}$$

  - Si scriva la matrice di f rispetto alla base canonica
  - Si determini $Ker(f)$ e $Im(f)$

- Sia $V = \mathbb{R}^3$ e W lo spazio dei polinomi di $\mathbb{R}$ con grado minore o uguale a 4. Considerare:

$$f: \qquad V \to W$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + cx + (a+b)x^2 + (a+2b)x^3 + (a+3b-4c)x^4$$

  Calcolare la matrice associata nelle basi canoniche.

- Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da:

$$f(1,1,0,0) = (3,1,2), \quad f(1,0,1,0) = (2,0,2)$$

$$f(0,0,1,0) = (-1,-2,1), \quad f(1,0,1,1) = (1,-1,2)$$

  – Si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
  – Si determini una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.
  – Si determini una base di $Ker(f) \cap U$ ove U e' il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito dall'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$.