

ESERCIZI DI RIEPILOGO
FONDAMENTI DI AUTOMATICA - A.A. 2020/21
Ingegneria dell'Informazione

Esercizio 4 - Tema del 27 Giugno 2017. Data il sistema BIBO stabile di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K}{s+1},$$

si determini per quale valore di $K \in \mathbb{R}, K \neq 0$, il sistema risponde all'ingresso sinusoidale causale $u(t) = \sin t \delta_{-1}(t)$, in condizioni di sola evoluzione forzata, con uscita transitoria pari a

$$y_{tr}(t) = 3e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Esercizio 1 - Tema del 2 Luglio 2019. Data

$$G(s) = \frac{s(1-10s)}{(1+10s)(1+s^2)}$$

- i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;
- ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, calcolando eventuali intersezioni con gli assi (non è richiesto il calcolo degli eventuali asintoti), e si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$.

Esercizio 1 - Tema del 13 Febbraio 2017. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10^{-2} \frac{(s^2+1)(s-100)^2}{s^2(s^2-0.2s+1)}.$$

- i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;
- ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (non è richiesto il calcolo delle intersezioni con gli assi);
- iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$, al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Teoria - Tema del'8 Febbraio 2019. Sia $G(s) \in \mathbb{R}(s)$ una funzione razionale propria con guadagno di Evans $K_E = 1$, ovvero

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

con $n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s]$ monici e $\deg d(s) \geq \deg n(s)$. Si enunci e dimostri la regola che determina quali punti dell'asse reale appartengono al luogo positivo e al luogo negativo di $G(s)$.

Si dimostri che se tutti gli zeri di $G(s)$ hanno parte reale negativa e il grado relativo (differenza tra numero di poli e di zeri) di $G(s)$ è 2 (ovvero la differenza tra grado del denominatore e grado del numeratore in una rappresentazione di $G(s)$ è pari a 2), allora è possibile rendere il sistema retroazionato $W(s)$ BIBO stabile attraverso il ricorso ad un controllore PID $C(s)$.

[Suggerimento: si determinino condizioni che garantiscono che tutti i rami di uno dei due luoghi associati a $C(s)G(s)$ prima o poi siano dentro al semipiano reale negativo]

SOLUZIONI

Esercizio 4 - Tema del 27 Giugno 2017. Operando nel dominio delle trasformate, si trova che il sistema (BIBO stabile) in condizioni di evoluzione forzata risponde all'ingresso sinusoidale causale $u(t) = \sin t \delta_{-1}(t)$, nel seguente modo:

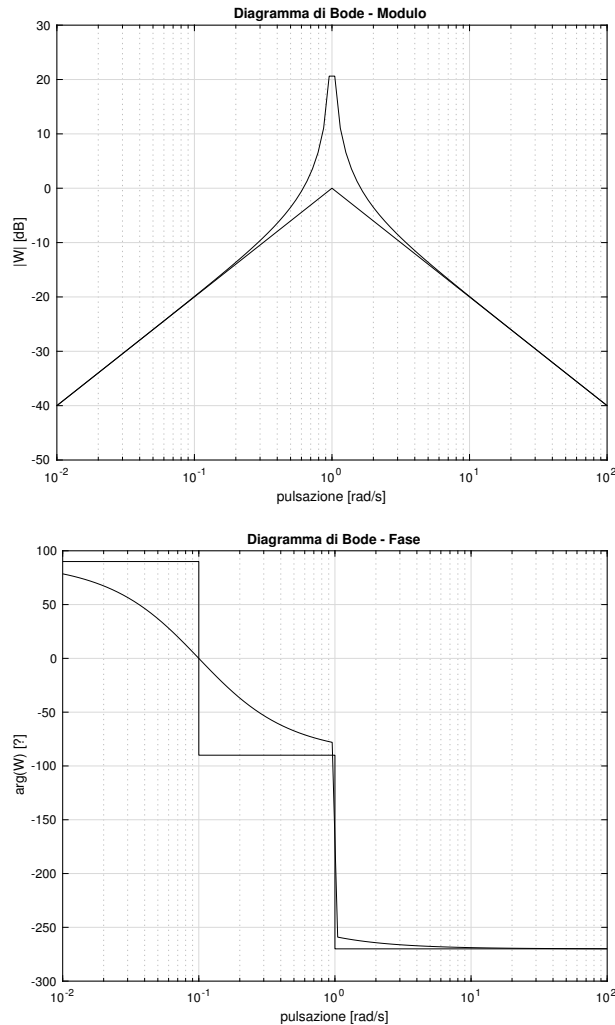
$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{s+1} \frac{1}{s^2+1} = \frac{K/2}{s+1} + \frac{-K/2s + K/2}{s^2+1},$$

e quindi nel dominio del tempo con

$$y_f(t) = \left[\frac{K}{2} e^{-t} - \frac{K}{2} \cos t + \frac{K}{2} \sin t \right] \delta_{-1}(t).$$

Ma allora $\frac{K}{2} e^{-t} = y_{tr}(t) = 3e^{-t}$ se e solo se $K = 6$.

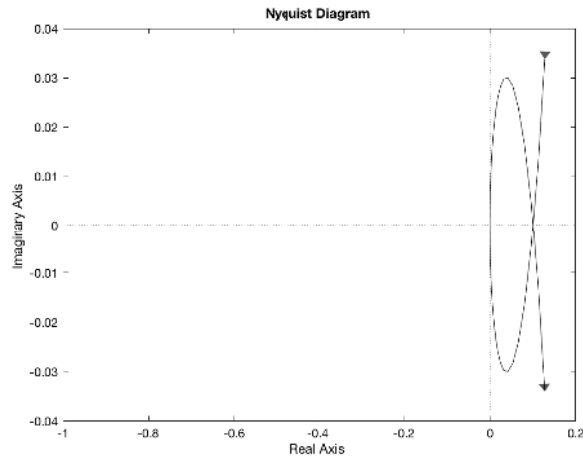
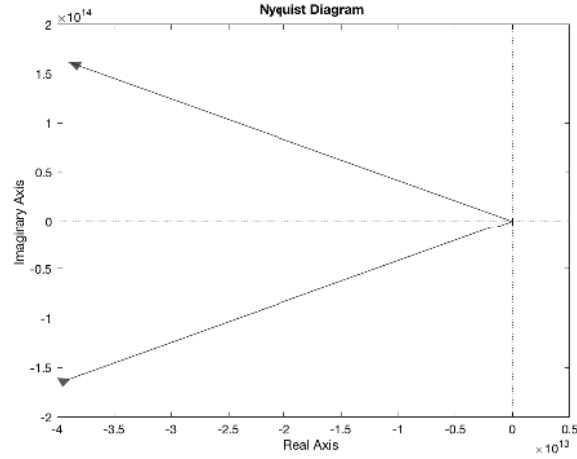
Esercizio 1 - Tema del 2 Luglio 2019. i) I diagrammi di Bode sono in figura

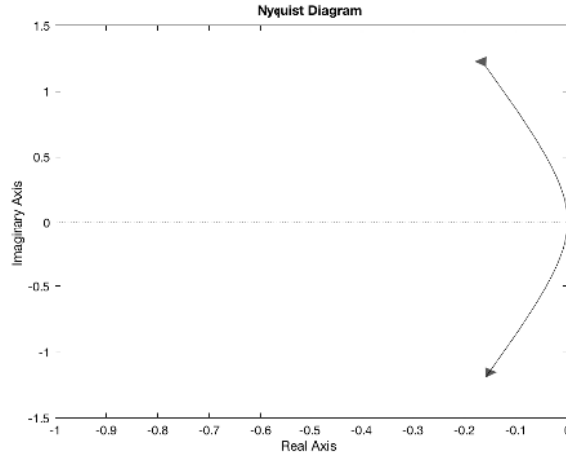


Il modulo (asintotico) arriva da $-\infty$ con pendenza di $+20$ dB/decade, poi nell'origine ($\omega = 1$ rad/s) vale 1 (0 dB) e cambia pendenza, tornando a $-\infty$ con pendenza di -20

dB/decade, mentre il modulo reale esibisce un picco di risonanza infinito per $\omega = 1$ rad/s. La fase scende da $+90^\circ$ verso i -90° , passando per zero gradi in $\omega = \frac{1}{10}$ rad/s, poi in $\omega = 1$ rad/s esibisce una discontinuità di 180° che la porta lievemente sopra i -270° , per poi tendere asintoticamente a questo valore.

ii) Il diagramma di Nyquist è in figura assieme a suoi dettagli intorno all'origine (per valori molto piccoli e molto grandi di $|\omega|$)



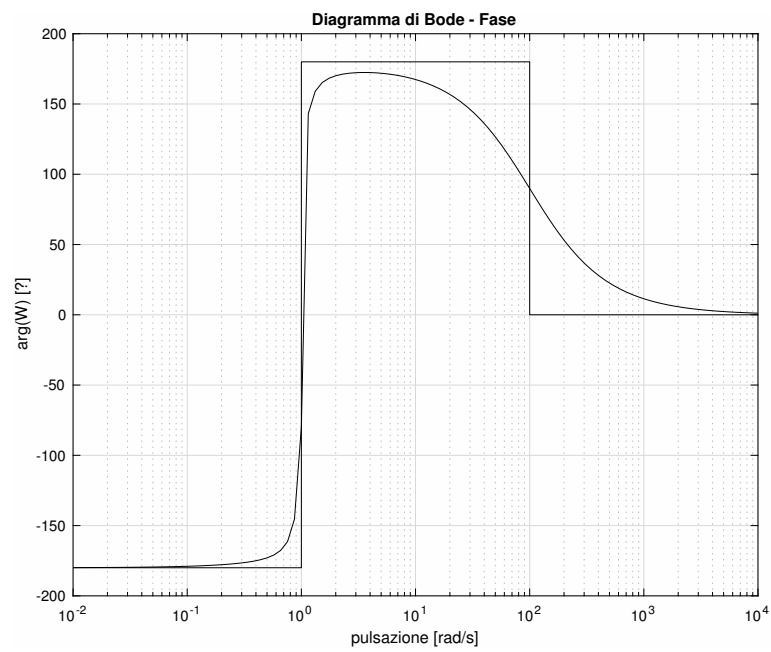
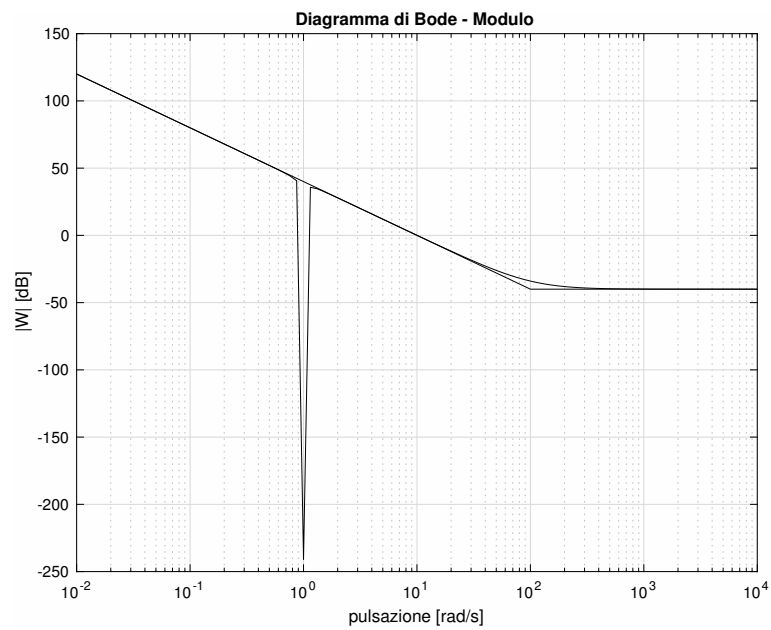


Esso parte da $s = 0$ con tangente verticale e si muove nel I quadrante, attraversa l'asse reale e si porta nel IV quadrante, dove tende all'infinito lungo un asintoto obliquo. Risputa poi dall'infinito (lungo lo stesso asintoto) nel II quadrante, e tende a zero con tangente verticale. Calcolando $G(i\omega)$ si ha facilmente

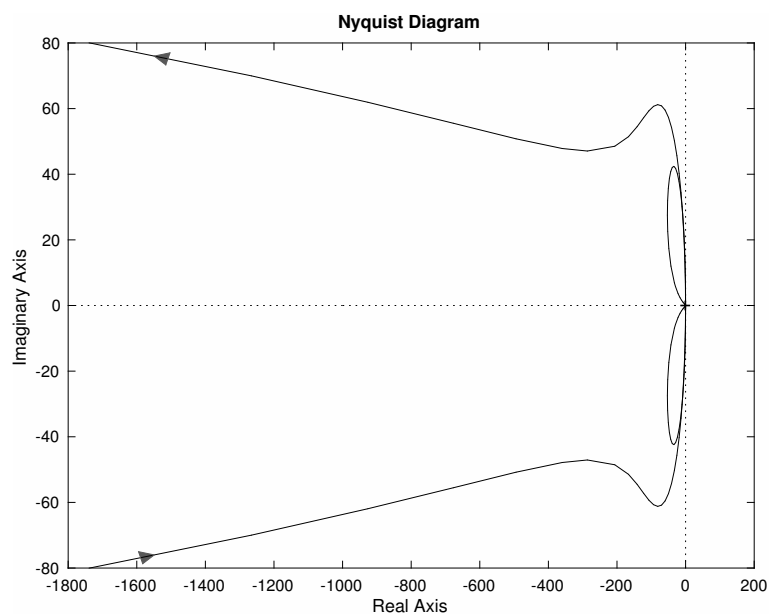
$$G(i\omega) = \frac{20\omega^2}{(1-\omega^2)(1+100\omega^2)} + i \frac{\omega(1-100\omega^2)}{(1-\omega^2)(1+100\omega^2)}$$

e si vede facilmente che $G(0) = G(\infty) = 0$, $G(i) = \infty$, $G\left(\frac{i}{10}\right) = \frac{10}{99}$, confermando quanto appena detto ed individuando l'attraversamento dell'asse reale per $\omega = \frac{1}{10}$ nel punto $s = \frac{10}{99}$ (dove si annulla solo la parte immaginaria). Chiudendo Nyquist con un semicerchio orario all'infinito, si scopre che per $k > 0$ oppure per $k < -\frac{99}{10}$, esso compie $N = -2$ giri attorno al punto critico $s = -\frac{1}{k}$, da cui $n_{W+} = 2$, essendo $n_{G+} = 0$ (quindi 1 polo negativo e due a parte reale positiva), mentre se $-\frac{99}{10} < k < 0$ si ha $N = 0$, quindi $n_{W+} = 0$ e BIBO stabilità di $W(s)$. Infine, per $k = -\frac{99}{10}$ il diagramma passa per il punto critico per $\omega = \frac{1}{10}$, e si hanno quindi due poli immaginari puri ($s = \pm \frac{i}{10}$) ed 1 polo negativo in $s = -10$ (si vede fattorizzando $d(s) - \frac{99}{10}n(s) = 10(s^2 + \frac{1}{100})(s+10)$). Riassumendo, si ha BIBO stabilità se e solo se $-\frac{99}{10} < k < 0$.

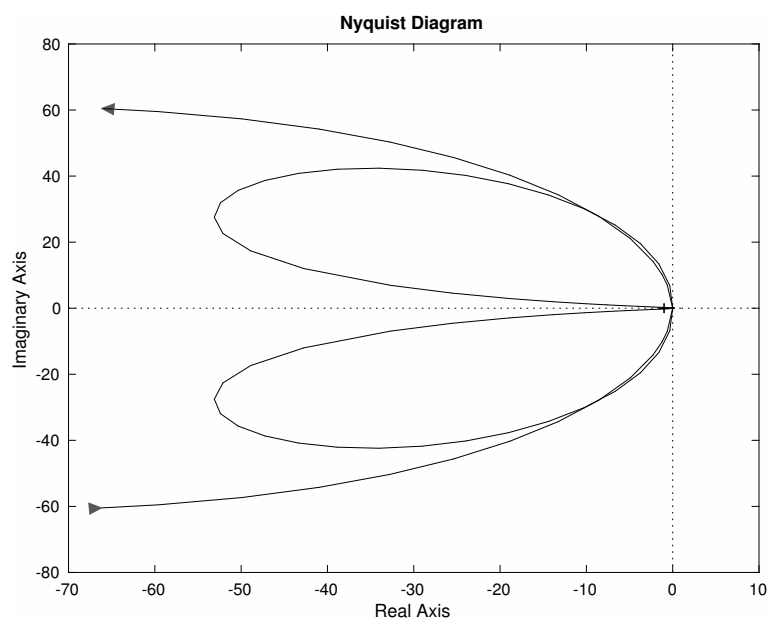
Esercizio 1 - Tema del 13 Febbraio 2017. i) Il diagramma di Bode è il seguente:

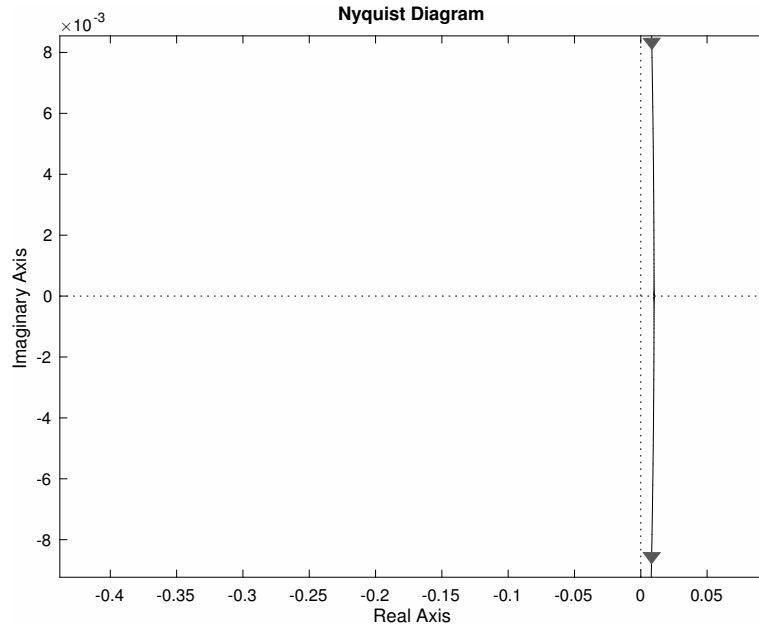


ii) Il diagramma di Nyquist è il seguente:



Due suoi dettagli sono riportati qui di seguito: il primo corrisponde a pulsazioni con $|\omega| \in [0.7, +\infty)$, il secondo corrisponde a pulsazioni con $|\omega| \in [100, +\infty)$:





Se consideriamo la sola porzione del diagramma per $\omega \geq 0$, il diagramma parte nel terzo quadrante dal punto improprio, con tangente parallela al semiasse reale negativo, e poi passa per l'origine con tangente parallela al semiasse immaginario negativo, esce dall'origine con tangente parallela al semiasse immaginario positivo, poi compie una rotazione in verso antiorario che lo avvicina al semiasse reale negativo per poi cambiare verso e finire (per $\omega = +\infty$) sul semiasse reale positivo nel punto $s = 0.01$. La chiusura del diagramma al finito avviene con un arco di 360° in verso orario che collega il punto corrisponde a $\omega = -\varepsilon$, nel secondo quadrante, con il punto corrisponde a $\omega = \varepsilon$, nel terzo quadrante.

iii) Osserviamo, preliminarmente, che $n_{G+} = 2$. Si distinguono i seguenti casi:

- per $K > 0$, $N = 0$ e quindi $n_{W+} = 2$;
- per $K < -100$, $N = -2$ e quindi $n_{W+} = 4$;
- per $0 > K > -100$, $N = -1$ e quindi $n_{W+} = 3$.

Si noti che per $K = -100$, $W(s)$ non è propria. Pertanto $W(s)$ non è mai BIBO stabile.

Teoria - Tema del'8 Febbraio 2019. Per la regola su quali punti dell'asse reale appartengano al luogo si veda il libro di testo, Capitolo 8, pagine 228-229.

Nel caso in cui $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ abbia $\deg d(s) = \deg n(s) + 2$, il ricorso ad un controllore PID in cui tutti i tre parametri siano non nulli

$$C(s) = \frac{K_i}{s}(1 + sT_1)(1 + sT_2)$$

porta ad un incremento del numero degli zeri pari a 2 e introduce un polo in 0. Ciò significa che

$$C(s)G(s) = K_i \frac{n(s)(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s \cdot d(s)}$$

ha ora denominatore il cui grado eccede di 1 il grado del numeratore. Se scegliamo T_1 e T_2 positivi, la funzione di trasferimento in catena aperta avrà tutti gli zeri a parte reale negativa e quindi nel luogo positivo associato a tale funzione avremo un ramo che va a $-\infty$ e gli altri che vanno agli zeri. Se tali zeri sono stabili a partire da un certo valore in poi tutti i rami sono nel semipiano reale negativo, il che assicura la BIBO stabilità del sistema retroazionato. Quindi basta scegliere $K_i > 0$ e di modulo molto grande per essere sicuri che

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

risulti BIBO stabile.