Esercizi di Fondamenti di Analisi 2 e Probabilità

Simone Bortolin

2021

Introduzione

Integrali definiti:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} r^2$$

$$\int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \pi r^2$$

Primitive:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$$

$$\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^2 x}{2} = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}x + \sin^{-1}(x)\right)$$

$$\int \sqrt[2]{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right) r^2}{2}$$

È da ricordare che alcune funzioni, come le seguenti non hanno una primitiva esprimibile attraverso le funzioni elementari:

$$\int e^{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \quad \int \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x \quad \int \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$

Indice

Parte I

Fondamenti di Analisi 2

Capitolo 1

Lunghezze di curve e integrali curvilinei di prima specie

Una curva (parametrica) è una coppia di funzioni continue $(f,g) : I \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (f(t), g(t))$ definite su un intervallo non degenere I di $\mathbb{R}$. Diremo che $t \mapsto (f(t), g(t))$ è una funzione vettoriale continua a valori in $\mathbb{R}^2$. L'insieme dei punti $(x, y) = (f(t), g(t))$, al variare di $t \in I$, si chiama sostegno della curva parametrica, di cui (f, g) è una parametrizzazione.

Si dice sostegno di una curva la traccia percorsa da una curva. Curve diverse possono avere lo stesso sostegno. Per esempio: $f(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$ e $g(t) = (\cos 4t, \sin 4t), t \in [0, 2\pi]$ hanno lo stesso sostegno eppure sono due curve diverse.

Derivata di una curva. Sia $r(t)$ una funzione che descrive una curva in due o più dimensioni. La funzione $v(t)$ o $r'(t)$ è la derivata componente per componente della curva $r(t)$

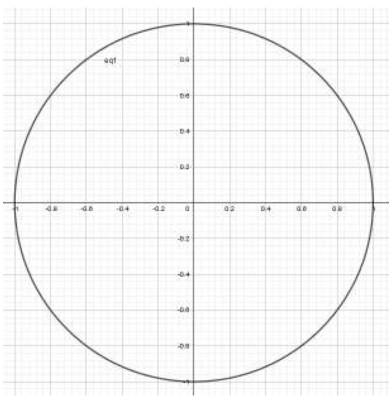
1.1 Lunghezza di una curva

Sia $r(t)$ una funzione che descrive una curva in due o più dimensioni. La Lunghezza della suddetta curva è data dall'integrale:

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\|r'(t)\right\| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \mathrm{d}t$$

Esercizio 1

Calcolare la lunghezza della curva $f(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$



Soluzione dell'esercizio 1

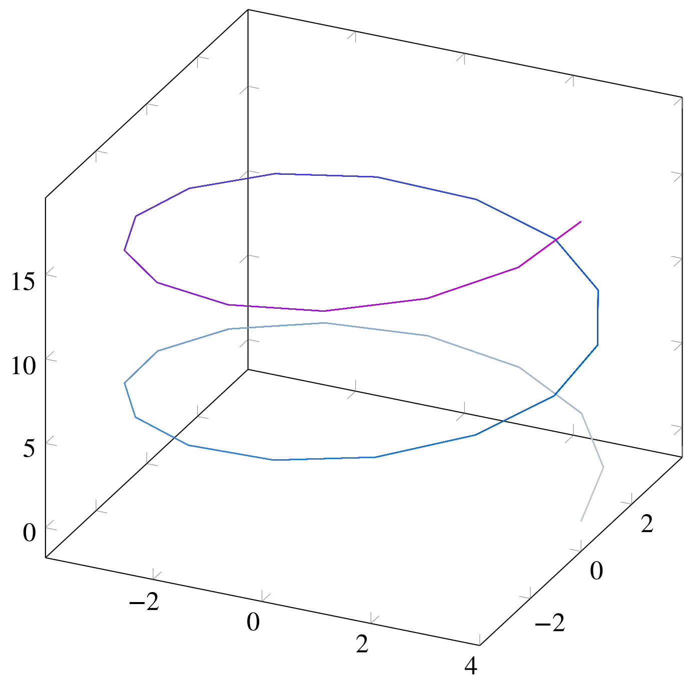
$$v(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\|v(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

$$\int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi$$

Esercizio 2

Calcolare la Lunghezza della curva: $r(t) = (4\cos t)i + (4\sin t)j + (\sqrt{2}t)k, \quad 0 \le t \le 4\pi$



Soluzione dell'esercizio 2

Calcoliamo le derivate:

$\frac{d}{\mathrm{d}t}(4\cos t) = -4\sin t$

$\frac{d}{\mathrm{d}t}(4\sin t) = 4\cos t \; \frac{d}{\mathrm{d}t}(\sqrt{2}t) = \sqrt{2}$

Calcoliamo il modulo del vettore $r'(t)$:

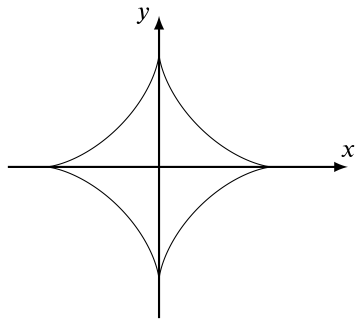
$$\|r'(t)\| = \|v(t)\| = \sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 2} = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Integriamo:

$$L = \int_0^{4\pi} 3\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \left[3\sqrt{2}t\right]_{t=0}^{t=4*\pi} = 12\sqrt{2}\pi$$

Esercizio 3

Calcolare la Lunghezza della curva: $r(t) = (4\cos^3 t)i + (4\sin^3 t)j, \quad 0 \le t \le \pi/2$



Soluzione dell'esercizio 3

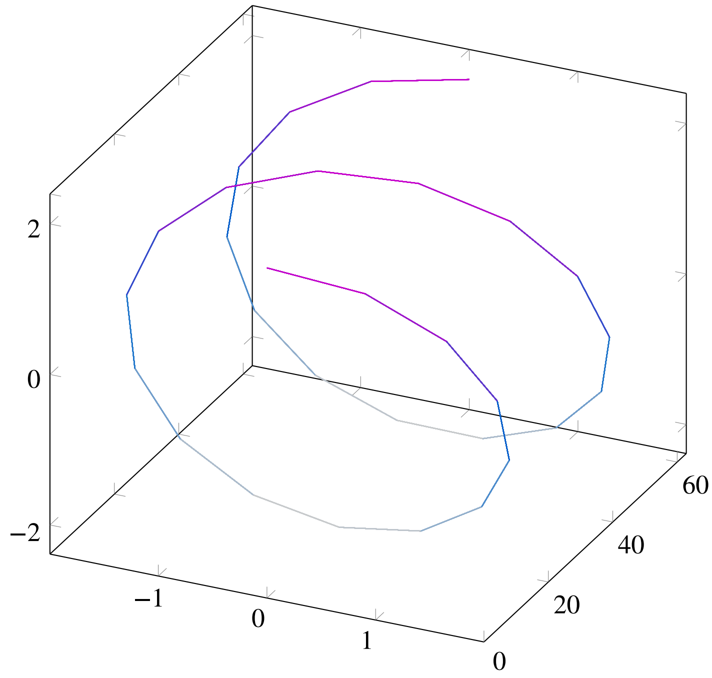
Sia $v(t) = (-3 \cdot 4(\cos t)^2 \sin t, 3 \cdot 4(\sin t)^2 \cos t)$

Da cui:

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{144\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 144\sin^4 t \cdot \cos^2 t \, \mathrm{d}t} = 12 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t \cdot \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)} \, \mathrm{d}t$$
$$= 12 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \, \mathrm{d}t = 6 \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \, \mathrm{d}t = 6$$

Esercizio 4

Trovare la lunghezza della curva $r(t) = (2\sin t, 5t, 2\cos t), -10 \le t \le 10$



Soluzione dell'esercizio 4

$$\left\|r'(t)\right\|^2 = (2\cos t)^2 + (5)^2 + (-2\sin t)^2 = 4\cos^2 t + 25 + 4\sin^2 t = 25 + 4 = 29$$

$$\int_{-10}^{10} \sqrt{29} \, \mathrm{d}t = \left.\sqrt{29}t\right|_{-10}^{10} = 10\sqrt{29} - (-10)\sqrt{29} = 20\sqrt{29}$$

Esercizio 5

Si consideri la funzione $h : [0,4] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $h(t) = \sqrt{t^3}$ Calcolare la lunghezza del suo grafico.

Soluzione dell'esercizio 5

$r(t) = \left(t, \sqrt{t^3}\right)$ (curva cartesiana) $v(t) = \left(1, \frac{3}{2}\sqrt{t}\right)$

$$L(t) = \int_0^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2 + (1)^2 \, \mathrm{d}t} = \int_0^4 \sqrt{\frac{9}{4}t + 1 \, \mathrm{d}t} = \int_0^4 \sqrt{\frac{9}{4}t + 1} \, \mathrm{d}t = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{9}{4}t + 1\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{t=0}^{t=4} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left((9+1)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right) = 9.073$$

Determinare le lunghezze delle curve:

Es. 6 — $r(t) = (6\cos t)i + (6\sin t)j + (\sqrt{3}t)k, \quad 0 \le t \le \pi$

Es. 7 — $r(t) = \left(6\cos^3 t\right) i + \left(6\sin^3 t\right) j, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

Soluzione (Es. 7) — $\frac{27}{4}$

Es. 8 — $r(t) = \left(2\cos^3 t\right) i + \left(2\sin^3 t\right) j, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{6}$

Soluzione (Es. 8) — $\frac{3}{4}$

Es. 9 — $f(t) = (80\cos t, 80\sin t, 30t), \quad 0 \le t \le 10$

Soluzione (Es. 9) — $100\sqrt{73}$

Es. 10 — $r(t) = (2\sin t, 2\cos t, 5t), \quad -10 \le t \le 10$

Soluzione (Es. 10) — $20\sqrt{29}$

Es. 11 — Un'aquila sale su un percorso elicoidale parametrizzato (t in minuto, componenti in metri) da

$$f(t) = (80\cos t, 80\sin t, 30t)$$

Qual è la lunghezza della curva descritta dall'aquila in 10 minuti?

Soluzione (Es. 11) — $20\sqrt{73}$

1.2 Lunghezza di una curva in coordinate polari

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta$$

Esercizio 12

Calcolare la lunghezza della spirale $v(t) = (3t\cos t, 3t\sin t), t \in [0, 2\pi]$

Soluzione dell'esercizio 12

Determiniamo $\rho(t)$ e $\rho'(t)$:

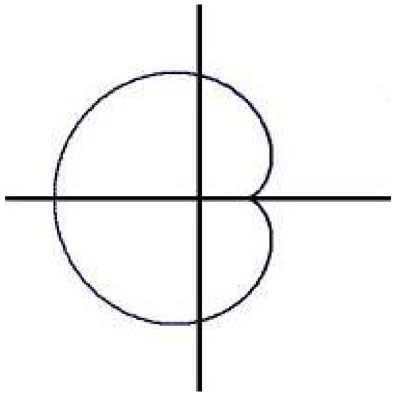
$\rho(t) = \sqrt{3t\cos t^2 + 3t\sin t^2} = 3t \ \rho'(t) = 3$

Integriamo:

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{4\pi} \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} \sqrt{(3t)^2 + 3^2}\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} \sqrt{9\mathrm{t}^2 + 9}\mathrm{d}t = 3\int_0^{4\pi} \sqrt{\mathrm{t}^2 + 1}\mathrm{d}t \\ &= 3\left[\frac{\ln(\sqrt{t^2+1}+t)}{2} + \frac{t\sqrt{t^2+1}}{2}\right]_{t=0}^{t=4\pi} = \frac{3\ln(\sqrt{16\pi^2+1}+4\pi)}{2} + 6\pi\sqrt{16\pi^2+1}\end{aligned}$$

Esercizio 13

Calcolare la lunghezza della cardioide $\rho(t) = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi]$



Soluzione dell'esercizio 13

$$\rho^2(t) + \rho'^2(t) = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t)$$

Da cui:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, \mathrm{d}t$$

Usiamo questo trucco algebrico $\cos t = \cos\left(2\frac{t}{2}\right)$:

$$\cos\left(2\frac{t}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Da cui: $1 - \cos t = 2\ \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ ed: $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$

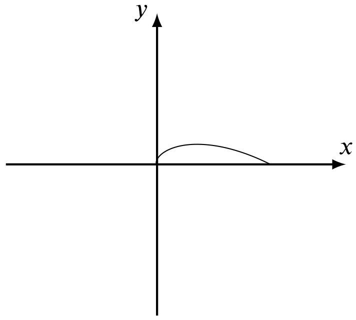
Integriamo:

$$L = 2\int_0^{2\pi} \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \mathrm{d}t = \left[4\left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 8$$

Esercizio 14

Sia $L(x)$ la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 3e^{-2t}$, al variare di $t \in [0, x]$

Calcolare $\lim_{x\to+\infty} L(x)$.



Soluzione dell'esercizio 14

$$\rho'^2(t) = -6e^{-2t}$$

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{\rho'^2(t)+\rho^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{\left(6e^{-2t}\right)^2+\left(3e^{-2t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sqrt{45}e^{-2t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{\sqrt{45}}{2}e^{-2t}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{\sqrt{45}}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2}e^{-2x}$$

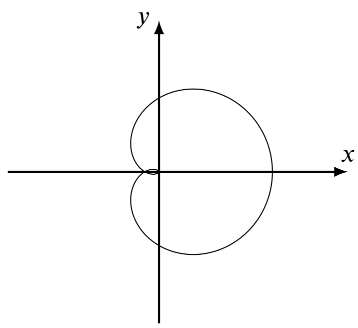
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{45}}{2}e^{-2x} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} L(x) = \frac{\sqrt{45}}{2} = 3.354$$

Esercizio 15

Dopo averne abbozzato un disegno calcolare la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 5\cos t$ con $t \in [0, 3\pi/4]$, cioè la curva

$$\alpha(t) = 5\cos t(\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 3\pi/4]$$

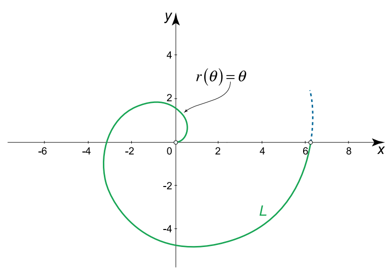


Soluzione dell'esercizio 15

$$L = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{(5\cos\theta)^2+(5\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{25}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 5\,\mathrm{d}\theta = 5\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{15\pi}{4}$$

Esercizio 16

Trovare la lunghezza della spirale $r(\theta) = \theta$ con $0 \le \theta \le 2\pi$



Soluzione dell'esercizio 16

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1^2}\,\mathrm{d}\theta$$

Effettuiamo la sostituzione $\theta = \sinh t \Leftrightarrow \mathrm{d}\theta = \cosh t\,\mathrm{d}t$

$$\theta = 0 = \sinh 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \theta = 2\pi = \sinh^{-1} 2\pi \Leftrightarrow t = 0$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1^2}\, d\theta = \int^{\sinh^{-1} 2\pi} \sqrt{\sinh^2 t + 1} \cosh t\, dt = \int^{\sinh^{-1} 2\pi} \cosh^2 t\, dt = \int^{\sinh^{-1} 2\pi} \frac{1}{2} \cosh(2t) + 1\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}(t + \sinh t) \cosh t\right]_0^{\sinh^{-1} 2\pi} = 21.256$$

Es. 17 — $\rho(t) = e^{-3t}, \quad t \in [0, \infty]$

Soluzione (Es. 17) — $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

Es. 18 — Trovare la lunghezza della curva $r(\theta) = 5 \cos t$ con $t \in [0, 3\pi/4]$

Soluzione (Es. 18) — $15/4\ \pi$

Es. 19 — Trovare la lunghezza della spirale $r(\theta) = \theta^2$ con $0 \leq \theta \leq \sqrt{5}$

Soluzione (Es. 19) — 19/3

Es. 20 — Sia $r = \dfrac{e^\theta}{\sqrt{2}}, 0 \leq \theta \leq \pi$ una spirale, calcolare al sua lunghezza.

Soluzione (Es. 20) — $e^\pi - 1$

Es. 21 — La spirale $r = e^\theta/\sqrt{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Es. 22 — La curva $r = a \sin^2(\theta/2), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad a > 0$

Es. 23 — Il segmento di parabola $r = 6/(1 + \cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

Es. 24 — Il segmento di parabola $r = 2/(1 - \cos\theta), \quad \pi/2 \leq \theta \leq \pi$

Es. 25 — La curva $r = \cos^3(\theta/3), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/4$

Es. 26 — $r = \sqrt{1 + \sin 2\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\sqrt{2}$

1.3 Integrali sulla curva - Massa di un filo

Oltre a calcolare la relativa lunghezza, si rende necessario calcolare un integrale, per esempio data funzione densità determinare la massa del filo.

$$\int_a^b \mu(f(t))\, ds = \int_a^b \mu(f(t)) \left|f'(t)\right| dt$$

Data una funzione densità $\delta(x, y, z)$

$$\mathrm{M} = \int_\gamma \delta(x, y, z) ds$$

Esercizio 27

Calcolare la massa della curva $f(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 2\pi]$, con densità la funzione densità: $\mu(x, y, z) = z^2$

Soluzione dell'esercizio 27

$\left|f'(t)\right|^2 = \left(\sin^2 t + \cos^2 t + 1\right) = 2$

$\left|f'(t)\right| = \sqrt{2}$

$$\int_C \mu(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{2}\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\sqrt{2}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}\sqrt{2}$$

Es. 28 — Find the line integral of $f(x,y) = ye^{x^2}$ along the curve $r(t) = 4ti - 3tj, -2 \le t \le 1$

Soluzione (Es. 28) — $\dfrac{15\left(e^{64}-e^{16}\right)}{32}$

Es. 29 — Evaluate $\displaystyle\int_C \frac{x^2}{y^{4/3}}\,\mathrm{d}s$, where C is the curve $x = t^2, y = t^3$, for $1 \le t \le 3$

Soluzione (Es. 29) — $\dfrac{85\sqrt{85}-13\sqrt{13}}{27}$

1.4 Baricentro di curve

$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma x\delta(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_V \delta(x,y,z)\mathrm{d}s}\ \bar{y} = \frac{\int_\gamma y\delta(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_V \delta(x,y,z)\mathrm{d}s}\ \bar{z} = \frac{\int_\gamma z\delta(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\gamma \delta(x,y,z)\mathrm{d}s}$$

Esercizio 30

Un cavo di densità costante 1 giace sulla curva $f(t) = \left(t\cos t, \tan t, \dfrac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\right), t \in [0,1]$. Determinare:

(a) Lunghezza

(b) Baricentro

Soluzione dell'esercizio 30

(a)

$$f'(t) = \left(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, \sqrt{2}t^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left|f'(t)\right|^2 = (\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 2t = 1 + t^2 + 2t = (1+t)^2$$

$$\left|f'(t)\right| = |1+t| = 1+t$$

Da cui:

$$L = \int_0^1 \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t = \int_0^1 (t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$

(b)

$$B = \frac{1}{L}\left(\int x\,\mathrm{d}s, \int y\,\mathrm{d}s, \int z\,\mathrm{d}s\right)$$

$$\int x\,\mathrm{d}s = \int_0^1 t\cos t(1+t)\,\mathrm{d}t = 3\cos 1 - 1$$

$$\int y\,\mathrm{d}s = \int_0^1 t\sin t(1+t)\,\mathrm{d}t = 3\sin 1 - 2$$

$$\int z\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}(1+t)\,\mathrm{d}t = \frac{16\sqrt{2}}{35}$$

Esercizio 31

Un filo γ, di densità lineare di massa costante, è dislocato lungo la cicloide di parametrizzazione

$$r(t) = (t - \sin t)i + (1-\cos t)j, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare le coordinate del baricentro di γ

Soluzione dell'esercizio 31

Dato che la densità di massa è costante abbiamo

$$\bar{x} = \frac{\int_\gamma x \mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s}, \quad , \bar{y} = \frac{\int_\gamma y \mathrm{d}s}{\int_\gamma \mathrm{d}s}$$

Abbiamo $r'(t) = (1 - \cos t)i + \sin t j$, perciò

$$\|r'(t)\| = \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = 2\sqrt{\frac{1-\cos t}{2}} = 2\sin\frac{t}{2}$$

Otteniamo subito

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8$$

Calcoliamo ora gli integrali a numeratore. Abbiamo

$$\int_\gamma x\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (t - \sin t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t, \quad \int_\gamma y\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} 2t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t &= \left[2t\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -4\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\ &= 8\pi + 8\left[\sin\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8\pi\end{aligned}$$

D'altra parte, utilizzando le formule di Werner,

$$\int_0^{2\pi} -2\sin t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\cos\frac{3t}{2} - \cos\frac{t}{2}\right]\mathrm{d}t = 0$$
$$\int_0^{2\pi} -2\cos t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[-\sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right]\mathrm{d}t = \frac{8}{3}$$

E tenendo conto che

$$\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8$$

Mettendo assieme le informazioni trovate otteniamo:

$$\bar{x} = \frac{8\pi + 0}{8\pi} = \pi, \quad \bar{y} = \frac{8 + 8/3}{8} = \frac{4}{3}$$

Capitolo 2

Limiti di funzioni in più variabili

A differenza dei limiti ad una variabile, nel caso dei limiti a due variabili l'interesse principale è provare la non esistenza del limite, in quanto le teniche dell'Analisi offrono solamente metodi per trovare un candidato e non per verificare certamente che il candidato è corretto, a meno di utilizzare, software di CAS.

2.1 Metodo dei cammino per ricondurci ad un limite a una sola variabile

Uno dei due metodi è quello di individuare cammino alternativi per ridurre le due variabili (x, y) in una sola. La base teorica dietro a questo metodo è la seguente: per qualsiasi tipo di avvicinamento al punto x_0, y_0 il limite deve essere lo stesso.

Esercizio 32

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 32

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$$

Esercizio 33

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Soluzione dell'esercizio 33

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = 0$$

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,x^2) = 1$$

Esercizio 34

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 34

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2} \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Esercizio 35

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 35

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0 \qquad \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^4+x^2} = 0 \qquad \lim_{(x,x^2)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 36

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2-5y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 36

$$\lim_{(x,3)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{(x,3)\to(4,3)} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4} \qquad \lim_{(4,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{4}-\sqrt{y+1}}{4-y-1} = \lim_{(4,y)\to(4,3)} \frac{2-\sqrt{y+1}}{3-y} \overset{H}{=} \lim_{y\to3} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{y+1}}}{-1} = \frac{1}{4}$$

Potremmo provare altri ∞ cammini, ma noteremmo sempre che il limite vale $\frac{1}{4}$. Potremmo assumere che il risulato sia vero.

Esercizio 37

$$\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$$

Soluzione dell'esercizio 37

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\sin(0)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{\sin(0)}{-5y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\sin\left(3x^2\right)}{-4x^2} \simeq \frac{3x^2}{-4x^2} = -\frac{3}{4}$$

Il limite non esiste

Es. 38 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$

Soluzione (Es. 38) — Non esiste

Es. 39 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

Soluzione (Es. 39) — Non esiste

Es. 40 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

Soluzione (Es. 40) — 0

Es. 41 — $\frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2}$

Soluzione (Es. 41) — 0

Es. 42 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-3y^2}{x^4+y^2}$

Soluzione (Es. 42) — Non esiste

Es. 43 — $\lim_{(x,y)\to(-3,-5)} \frac{2x^2+4y^2+5}{x^2+y^2-1}$

Soluzione (Es. 43) — $\frac{41}{11}$

Es. 44 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^8 y}{x^6+y^6}$

Soluzione (Es. 44) — 0

Es. 45 — $\lim_{(x,y)\to(-1,-3)} \sqrt{2x^2+2y^2-10}$

Soluzione (Es. 45) — $\sqrt{10}$

Es. 46 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-5y^2}{x^2+10y^2}$

Soluzione (Es. 46) — Non esiste

Es. 47 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2+4xy+y^2}{4x^2-y^2}$

Soluzione (Es. 47) — Non esiste

Es. 48 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}$

Soluzione (Es. 48) — 0

Es. 49 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4+y^2}$

Soluzione (Es. 49) — 0

Es. 50 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$

Soluzione (Es. 50) — $+\infty$

Es. 51 — $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x}\sin y}{|x|+|y|}$

Soluzione (Es. 51) — Non esiste

2.2 Metodo delle coordinte polari

Un'altro metodo è quello delle coordinate polare, sia $\rho = \sqrt{x^2+y^2}, x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$. Otteniamo un limite in una variabile sola, ρ, dobbiamo verificare che questo limite non venga influenzato da $\theta \in [0, 2\pi]$, cioè è necessario che $f(\theta)$ sia limitata in $[-1, 1]$ e che sia presente ρ:

Esercizio 52

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 52

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\left(\rho^2\cos^2\theta\right)(\rho\sin\theta)}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \rho \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta} = \star$$

Ora dobbiamo verificare che la parte a destra di ρ sia limitata, cosi si ha infinitesima $\cdot$ limitata = infinitesima.

Ricordando che $|\cos|, |\sin|$ sono sempre < 1

$$\star \leq \lim_{\rho\to 0} \rho \frac{1}{\rho^2+1} = 0$$

Notiamo che la parte destra non è limitata! Il limite allora non esiste.

Esercizio 53

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 53

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho} \frac{\cos\theta\cdot\sin\theta}{1}$$

Dato che in questo è sparito ρ, concludiamo che il limite non esiste

Esercizio 54

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{x^2+y^2-4y+2x+5}$$

Soluzione dell'esercizio 54

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{x^2+y^2-4y+2x+5} &= \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{x^2+y^2-4y+2x+4+1} = \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{\left(x^2+2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)(y-2)^2}{(x+1)^2+(y-2)^2} \\
&\overset{(x,y)=(\rho\cos\theta-1,\rho\sin\theta+2)}{=} \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta-1+1)(\rho\sin\theta+2-2)^2}{(\rho\cos\theta-1+1)^2+(\rho\sin\theta+2-2)^2} \\
&= \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)^2}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta\sin^2\theta = 0
\end{aligned}$$

2.3 Altri metodi per risolvere i limiti

Vediamo altri metodi per risolvere i limiti:

Esercizio 55

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

Soluzione dell'esercizio 55

Posto $xy = t$ il limite diventa il classico limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

Si conclude che:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$

Esercizio 56

$$\lim_{(x,y)\to(1/2,0)} \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 56

Si tratta di una funzione continua sul suo dominio (composta di $\sqrt{\cdot}$ con il polinomio $1-x^2-y^2$), pertanto

$$\lim_{(x,y)\to(1/2,0)} \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(1/2)^2-0^2} = \sqrt{3}/2$$

Esercizio 57

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^5y^3}$$

Soluzione dell'esercizio 57

Usando Taylor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^3y\right)}{x^5y^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^5y^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2y^2} = +\infty$$

Esercizio 58

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 58

Sapendo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|xy| \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ si ha che:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}|x| \to 0 \text{per} (x,y) \to (0,0)$$

per la disequazione si conclude che il limite cercato vale 0.

Esercizio 59

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Soluzione dell'esercizio 59

Usando una retta del tipo $y = mx$

Capitolo 3

Calcolo differenziale e approssimazioni

Derivata parziale

- $\partial_x f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$: derivata parziale rispetto a x, mantenendo costante le altre variabili
- $\partial_y f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$: derivata parziale rispetto a y, mantenendo costante le altre variabili
- $\partial_z f = \dfrac{\partial f}{\partial z}$: derivata parziale rispetto a z, mantenendo costante le altre variabili

Gradiente $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$

Gradiente della norma: $\nabla|x| = \dfrac{x}{|x|}$

Esercizio 60

For the function $f(x, y) = 8x^5 - 9y^7 - 10$, find $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Soluzione dell'esercizio 60

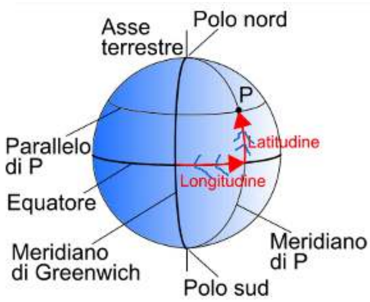
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(8x^5 - 9y^7 - 10\right) = 40x^4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(8x^5 - 9y^7 - 10\right) = -63y^6$$

Esercizio 61

La temperatura $f(x, y, t)$ in una località dell'emisfero Nord dipende dalla longitudine x, dalla latitudine y e dal tempo t. Venezia è situata a 12 gradi di longitudine est 45 gradi di latitudine Nord. Alle 11 del mattino di un dato giorno sta soffiando aria calda da sud-est: l'aria è quindi più calda a nord-ovest e più fredda a sud-est.

1. $\partial_y f(12, 45, 11) < 0$
2. $\partial_x f(12, 45, 11) > 0$
3. $\partial_x f(12, 45, 11) < 0$
4. $\partial_y f(12, 45, 11) > 0$



Soluzione dell'esercizio 61

Allora si ha che la derivata della longitudine è negativa (in quanto la freccia blu va nel senso opposto della rossa) e quella della latitudine è positiva (in quanto i segni sono concordi) Per cui $\partial_x f(12,45,11) < 0$, $\partial_y f(12,45,11) > 0$

Esercizio 62

Calcolare il gradente della funzione radiale $|\boldsymbol{x}|^2$ (una funzione radiale è una funzione il cui valore è influenzato solamente dalla distanza del punto dall'origine) dove $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, Nel nostro caso ha due dimensioni.

Soluzione dell'esercizio 62

Si può procedere in due modi (considerando $\boldsymbol{x}$ come scalare)

$$\nabla|\boldsymbol{x}|^2 = 2|\boldsymbol{x}|\nabla|\boldsymbol{x}| = 2|\boldsymbol{x}|\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = 2\boldsymbol{x} = (2x_1, 2x_2)$$

Oppure

$$\nabla|\boldsymbol{x}|^2 = \nabla|(x_1,x_2)|^2 = \nabla\left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right|^2 = \nabla(x_1^2+x_2^2) = (2x_1, 2x_2)$$

Nei prosismi esercizi trovare $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$.

Es. 63 — $f(x,y) = (2xy-3)^2$

Soluzione (Es. 63) — $4y(2xy-3)$, $4x(2xy-3)$

Es. 64 — $f(x,y) = \sqrt{5x^2+3y^2}$

Soluzione (Es. 64) — $\dfrac{5x}{\sqrt{5x^2+3y^2}}, \dfrac{3y}{\sqrt{5x^2+3y^2}}$
Nei prosismi esercizi trovare $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$.

Es. 65 — $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+2z^2}$

Soluzione (Es. 65) — $1, -\dfrac{y}{\sqrt{y^2+2z^2}}, -\dfrac{2z}{\sqrt{y^2+2z^2}}$

Es. 66 — Find the gradient of the function $\mathrm{g(x,y)} = \dfrac{2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+2}$ at the point $(-1,3)$

Soluzione (Es. 66) — $(4/3, 2/3)$

Es. 67 — Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

Calcolare il gradiente di f in $x = (1,2)$

Soluzione (Es. 67) — $(0.15, 0.3)$

3.1 Derivata direzionale

$\boldsymbol{u}$: versore direzione, $D_{\boldsymbol{u}} f(p) = \partial_{\boldsymbol{u}} f(p) := \lim_{t\to 0} \frac{f(p+t\boldsymbol{u}) - f(p)}{t}$

Oppure se $f \in \mathcal{C}^1$: $D_u = \nabla f \cdot \boldsymbol{u}$ (formula del gradiente)

Cioè $D_{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{u}_z$

Al variare di $\boldsymbol{u}$ di norma unitaria si ha che:

- $D_{\boldsymbol{u}} f(p)$ assume il massimo valore, uguale a $|\nabla f(p)|$, per $\boldsymbol{u}_{\text{max}} = \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$

$$D_{\boldsymbol{u}_{\text{max}}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|} = |\nabla f(p)|$$

- $D_{\boldsymbol{u}} f(p)$ assume il minimo valore, uguale a $-|\nabla f(p)|$, per $\boldsymbol{u}_{\text{min}} = -\frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$

$$D_{\boldsymbol{u}_{\text{min}}} f(p) = -\nabla f(p) \cdot \frac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|} = -|\nabla f(p)|$$

Esercizio 68

Calcolare, se esiste, la derivata direzionale di

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

in $(0,0)$ rispetto al vettore $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Soluzione dell'esercizio 68

$$\boldsymbol{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D_{\boldsymbol{u}} = f'\left((0,0) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = f'\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}, t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\frac{t^3\sqrt{2}}{4}}{t^2}\right) = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 69

La superficie di una montagna è modellata dal grafico della funzione $f(x,y) = 25 - 2x^2 - 4y^2$. Un ciclista si trova nel punto $(1,1,19)$, e per la pioggia in arrivi decide di scendere lungo la direzione di massima discesa. In quale direzione del piano xy deve andare? Esprimere il risultato con un vettore unitario (di norma 1)

Soluzione dell'esercizio 69

$$25 - 2x^2 - 4y^2 - z = 0 \Leftrightarrow z + 2x^2 + 4y^2 = 25$$

$$\partial_x = 4x, \partial_y = 8y, \partial_z = 1, \nabla(4x, 8y, 1)$$

$$\partial_{\boldsymbol{u}_{\text{max}}}\Big|_{(x,y,z)=(1,1,19)} = |(4x,8y,1)|_{(x,y,z)=(1,1,19)} = |(4,8,1)| = 9$$

$$\boldsymbol{u}_{\text{max}}\Big|_{(x,y,z)=(1,1,19)} = \frac{(4x,8y,1)}{9}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,1,19)} = \frac{(4,8,1)}{9} = \left(\frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

Esercizio 70

Calcolare se esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ secondo la direzione $u=(1,-1)$ della funzione definita ponendo $f(x,y)=\dfrac{2x^5}{x^4-3y^4}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(0,0)=0$

Soluzione dell'esercizio 70

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{p})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)-f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2(t1)^5}{(t1)^4-3(-t1)^4}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2(t)^5}{-2t^4}}{t}=-1$$

Esercizio 71

Calcolare, se esiste, la derivata direzionale di

$$f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}\quad (x,y)\neq(0,0),\quad f(0,0)=0 \text{ in } (0,0)$$

rispetto al vettore $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Soluzione dell'esercizio 71

$$\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$g(t)=f\left((0,0)+t\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=f\left(t\frac{\sqrt{2}}{2},t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{t^3\sqrt{2}}{t^2}=\frac{t\sqrt{2}}{4}$$

$$g'(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{4}=0.35$$

Esercizio 72

Si supponga che la temperatura in un punto (x,y,z) dello spazio sia data in gradi Celsius da

$$T(x,y,z)=\frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$$

dove x,y,z sono misurati in metri. Nel punto $(1,1,-2)$:

- Calcolare le derivate parziali
- Qual è la massima velocità di variazione in C/m ? (si tratta della derivata direzionale che ha il valore massimo)
- In quale direzione la temperatura cresce più rapidamente (esprimere il risultato come vettore di norma unitaria)
- Seleziona tra i seguenti un vettore che indica la massima crescita: $(1,-2,6),(1,2,-6),(-1,2,6),(-1,-2,6),(1,2,6)$

Soluzione dell'esercizio 72

$$\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{160x}{\left(1+x^2+2y^2+3z^2\right)^2}\Rightarrow-\frac{5}{8}\quad\frac{\partial}{\partial y}=-\frac{320y}{\left(1+x^2+2y^2+3z^2\right)^2}\Rightarrow-\frac{5}{4}\quad\frac{\partial}{\partial z}=-\frac{480z}{\left(1+x^2+2y^2+3z^2\right)^2}\Rightarrow\frac{15}{4}$$

$$\nabla=\left(-\frac{5}{8},-\frac{5}{4},\frac{15}{4}\right)\quad|\nabla|=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{41}}{8}=4.001$$

$$\nabla = \left(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right)$$

Il valore assunto dalla derivata direzionale con valore massimo è data da $\partial_{\boldsymbol{u}_{\max}} = |\nabla| = 4.001$, mentre la direzione è data da $\boldsymbol{u}_{\max} = \dfrac{\nabla}{|\nabla|} = \dfrac{8}{5\sqrt{41}}\left(-\dfrac{5}{8}, -\dfrac{5}{4}, \dfrac{15}{4}\right)$ Un vettore multiplo di $\boldsymbol{u}_{\max}$ è dato da (eliminiamo il fattore $\dfrac{8}{5\sqrt{41}}$ che ci da solo fastidio in questo caso):

$$\boldsymbol{v} = \frac{8}{5}\left(-\frac{5}{8}, -\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right) = (-1, -2, 6)$$

Esercizio 73

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Calcolare $\partial_x f(0,0)$ e $\partial_y f(0,0)$ sapendo che

$$\partial_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(0,0) = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \partial_{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} f(0,0) = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Soluzione dell'esercizio 73

Applicando la "Formula del Gradiente":

$$\partial_{\boldsymbol{u}} f(p) = \nabla f(p) \cdot \boldsymbol{u}$$

Da cui:

$$\partial_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \left(\partial_x, \partial_y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_y = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\partial_{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)} = \left(\partial_x, \partial_y\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\partial_y = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Mettendolo a sistema:

$$\begin{cases} \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_y \\ \frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\partial_x + \frac{1}{\sqrt{5}}\partial_y \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_x = 5 - \partial_y \\ 3 = -2\left(5 - \partial_y\right) + \partial_y \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_y = \frac{13}{3} \\ \partial_x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Da cui otteniamo che:

$$\partial_x f(0,0) = \frac{2}{3} \quad \partial_y f(0,0) = \frac{13}{3}$$

Esercizio 74

Sia $f(x,y) = xe^y$. Nel punto $(1,1)$ qual è il minimo valore che può assumere la derivata direzionale, al variare delle direzioni unitarie?

Soluzione dell'esercizio 74

Sapendo che $D_u f(p)$ assume il minimo valore, uguale a $-\|\nabla f(p)\|$, per $u = -\dfrac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$:

$$\nabla f(x,y) = (e^y, xe^y) \quad \nabla f(1,1) = (e,e) \quad D_{u\min} f(1,1) = -|\nabla f(1,1)| = -\sqrt{e^2+e^2} = -\sqrt{2}e = -3.84$$

Es. 75 — Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) f è continua in (0,0)?
ii) Sia $u = \left(u_1, u_2\right) \in \mathbb{R}^2, u \neq (0,0)$. Calcolare la derivata $D_u f(0,0)$ di f rispetto a u in $(0,0)$.

Es. 76 — Si definisce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ponendo $f(0,0) = 1$, mentre per $(x,y) \neq (0,0)$ si pone

$$f(x,y) = e^{x^2/\left(x^2+y^2\right)}$$

Dire se f è continua, calcolare $D_{(u,v)} f(0,0)$ per gli $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ per cui esiste, e dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Es. 77 — Sia $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) Studiare la continuità di f in $(0,0)$.
ii) Dire se f ammette le derivate parziali $\partial_x f(0,0)$ e $\partial_y f(0,0)$ in (0,0) ; calcolarle in caso affermativo.
iii) Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Es. 78 — Sia $f(x,y) = xe^y$. Provare che f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$; determinarne il gradiente ed il differenziale.

Es. 79 — Sia $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = \dfrac{(y+\sin x)\sin^2(x)}{x^2+y^2}$. Dimostrare che f si prolunga ad una funzione continua in $(0,0)$. Studiare le derivate direzionali del prolungamento, e dire se il prolungamento è differenziabile.

Es. 80 — Un'escursionista si trova su una montagna vicino ad un ruscello, ed ha in mano una carta della zona. La superficie della montagna ha equazione cartesiana

$$z = f(x,y) = \frac{20}{3+x^2+2y^2}$$

(le coordinate sono in chilometri). L'escursionista è nel punto di coordinate $(3,2)$. Sulla carta, in quale direzione scende il ruscello ? (si assume che esso segua sempre la linea di massima pendenza)

Es. 81 — Sia $f(x,y) = xe^y$. Nel punto $(-3,1)$ qual è il minimo valore che può assumere la derivata direzionale, al variare delle direzioni unitarie?

Es. 82 — Si supponga che una collina abbia la forma del grafico della funzione $z = 1000 - 0.1x^2 - 0.02y^2$ Ci troviamo nel punto $(60,100,440)$. Partendo lungo quale vettore si sale inizialmente di più?

3.2 Regola della catena

Se $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile e $r : [a,b] \to R$ è derivabile allora

$$\frac{d}{dt}(f \circ r)(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$$

Esercizio 83

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$\partial_x f(1,2) = -5, \quad \partial_y f(1,2) = 4$$

Determinare $\dfrac{d}{dt} f\left(2\log(1+t)+1, 2(t-1)^2\right)_{t=0}$

Soluzione dell'esercizio 83

$$\frac{d}{dt} f\left(2\log(1+t)+1, 2(t-1)^2\right)_{t=0} = (-5,4) \cdot \left(\frac{2}{t+1}, 4t-4\right)_{t=0} = -\frac{10}{t+1} + 16t - 16 = -26$$

Es. 84 — Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C' tale che

$$\partial_y f(1,2) = 5, \quad \partial_j f(1,2) = -3$$

Determinare $\dfrac{d}{dt} f(1+t, 2e^t)_{t=0}$

Soluzione (Es. 84) — -1

Es. 85 — Siano $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ e $g(s,t) = \left(e^s, \cos t, st\right)$. Determinare $\partial_s(f \circ g)$ in due modi diversi: direttamente ed applicando la regola della catena.

Es. 86 — Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\partial_x f(5,0) = -3, \partial_y f(5,0) = 1$. Allora la derivata di $t \mapsto f\left(2t+5, t^2+t\right)$ in $t = 0$ è:

3.3 Approssimazioni e piani tangenti

Piano Tangente (Retta Tangente se assente la componente z **)** $\partial_x f\left(P_0\right)\left(x-x_0\right)+\partial_y f\left(P_0\right)\left(y-y_0\right)+\partial_z f\left(P_0\right)\left(z-z_0\right)=0$

Approssimazione differenziale della funzione $f(x,y)=f\left(x_0,y_0\right)+\partial_x f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+\partial_y f\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)$

Vettore normale alla superficie P_0**:** $\nabla f(P_0)$

Stima dell'errore nell'approssimazione della retta tangente

$$\left|f(x,y)-\left(f\left(x_0,y_0\right)+\partial_x f\left(x_0,y_0\right)\left(x-x_0\right)+\partial_y f\left(x_0,y_0\right)\left(y-y_0\right)\right)\right|\le\frac{M}{2}\left|(x,y)-\left(x_0,y_0\right)\right|^2$$

- $x=x_0+f_x\left(P_0\right)t$
- $y=y_0+f_y\left(P_0\right)t$
- $z=z_0+f_z\left(P_0\right)t$

Esercizio 87

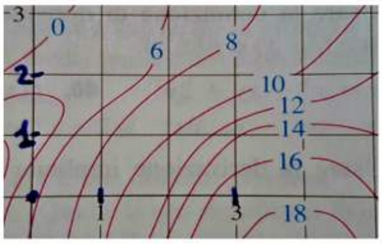
Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenziabile, con $f(0,1)=0,\partial_x f(0,1)=2,\partial_y f(0,1)=-5$ Usando la nozione di differenziale stimare il valore di $f(0.1,0.9)$.

Soluzione dell'esercizio 87

$$f(x,y)=f(0,1)+\partial_x(0,1)x+\partial_y f(0,1)(y-1)=2x-5(y-1)=2x-5y+5=0.7$$

Esercizio 88

Alcuni insiemi di livello di una funzione f che ha derivate parziali in $(2,1)$ sono indicate in figura.



Stimare $\partial_y f(2,1)$ (utilizzare un adeguato rapporto incrementale di ampiezza 1)

Soluzione dell'esercizio 88

Dal grafico si ha che: $f(2,2)=8$, $f(2,1)=10$, $f(2,0)=12$

Da cui: $g(t)=f((2,1)+t(0,1))=f(2,1+t)\sim 10-2t\ g'(t)=-2$

Esercizio 89

Sia $f(x,y)=x^2+6xy-5y^2$. Determinare $a\in\mathbb{R}$ affinché il punto $(1,2,a)$ appartenga al piano tangente al grafico di f in in $(0,1,f(0,1))$.

Soluzione dell'esercizio 89

$$f(0,1)=0+0-5=-5$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+6y\quad\frac{\partial f}{\partial y}=6x-10y\quad\frac{\partial f}{\partial z}=-1$$
$$\partial f_x\left(P_0\right)=6\quad\partial f_y\left(P_0\right)=-10\quad\partial f_z\left(P_0\right)=-1$$
$$f_x\left(P_0\right)\left(x-x_0\right)+f_y\left(P_0\right)\left(y-y_0\right)+f_z\left(P_0\right)\left(z-z_0\right)=0$$
$$6x-10(y-1)-1(z+5)=0\Leftrightarrow 6x-10y-z+5=0\Leftrightarrow 6(1)-10(2)-z+5=0\Leftrightarrow a=z=-9$$

Esercizio 90

Determinare $a \in \mathbb{R}$ affinché il vettore $(6, a)$ sia ortogonale alla retta tangente all'insieme di livello della funzione $f(x, y) = x^2 - 2y^3 1$ nel punto $(1, 1)$

Soluzione dell'esercizio 90

Un vettore è ortogonale alla retta tangente all'insieme di livello della funzione solo e solo se esso è multiplo del gradiente:

$$\nabla(x^2 - 2y^3)\big|_{(x,y)=(1,1)} = (2x, -6y^2)\big|_{(x,y)=(1,1)} = (2, -6)$$

Per cui $a = -18$

Esercizio 91

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $(2, 0)$, con $f(2, 0) = 1$. Si supponga che le derivate parziali di f siano

$$\partial_x f(2, 0) = 2, \partial_y f(2, 0) = -5$$

Usare la nozione di differenziale per approssimare il valore di $f(1.9, 0.1)$.

Soluzione dell'esercizio 91

$$f(x, y) = f\left(x_0, y_0\right) + \partial_x f\left(x_0, y_0\right)\left(x - x_0\right) + \partial_y f\left(x_0, y_0\right)\left(y - y_0\right)$$
$$f(x, y) = 1 + 2(x - 2) - 5(y - 0) = 1 + 2(1.9 - 2) - 5(0.1 - 0) = 1 - 0.2 - 0.5 = 0.3$$

Esercizio 92

Sia f di classe C^1 attorno a $(1, 2)$ con $f(1, 2) = 0, \partial_x f(1, 2) = 3$ e $\partial_y f(1, 2) = -2$.

(a) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2)$;

(b) Approssimare il valore di $f(1.1, 1.9)$

(c) Calcolare la derivata della funzione $f\left(1 + t^2, 2e^t\right)$ in $t = 0$

Soluzione dell'esercizio 92

a) $\pi : 3(x - 1) - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0$

b)

$$f(x, y) \simeq 3x - 2y + 1$$

$$f(1, 1, 1, 9) \simeq 3(1, 1) - 2(1, 9) + 1 = 0, 5$$

c) $f\left(1 + t^2, 2e^t\right) \simeq 3\left(1 + t^2\right) - 4e^t + 1 = 3t^2 - 4e^t + 4$

$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(f\left(1 + t^2, 2e^t\right)\right) = 6t - 4e^t = -4$

Esercizio 93

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^{3/2}}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Mostrare che f ammette entrambe le derivate parziali in $(0, 0)$;

(b) Sia $a \in \mathbb{R}$: determinare la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ rispetto al vettore $(\cos a, \sin a)$

(c) f è continua in $(0, 0)$?

(d) Dire se esiste, e calcolarlo in caso affermativo, il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - \left[f(0, 0) + \partial_x f(0, 0)x + \partial_y f(0, 0)y\right]}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Soluzione dell'esercizio 93

a)

$$\partial_x = \frac{d}{\mathrm{d}t} f((0,0)+t\boldsymbol{i}) = \frac{d}{\mathrm{d}t} \frac{|t\cdot 0|^{\frac{3}{2}}}{t^2+0^2} = 0 \quad \partial_y = \frac{d}{\mathrm{d}t} f((0,0)+t\boldsymbol{j}) = \frac{d}{\mathrm{d}t} \frac{|0\cdot t|^{\frac{3}{2}}}{0^2+t^2} = 0$$

b)

$$\partial_{\hat{\alpha}} = \frac{d}{\mathrm{d}t} f((0,0)+t(\cos\alpha,\sin\alpha)) = \frac{d}{\mathrm{d}t} \frac{\left|t^2\cos\alpha\sin\alpha\right|^{\frac{3}{2}}}{t^2} = \frac{d}{\mathrm{d}t} \frac{|t|^3|\cos\alpha\sin\alpha|^{\frac{3}{2}}}{t^2}$$
$$= \frac{d}{\mathrm{d}t} |t|\cos\alpha\sin\alpha\Big|^{\frac{2}{2}} = \operatorname{sgn} t \cdot |\cos\alpha\sin\alpha|^{\frac{2}{2}}$$

c) Affinché una derivata direzionale esista è necessario che il risultato della derivata sia numerico e senza t cioè accade se e solo se $0\cos\alpha = 0$ o $\sin\alpha = 0$, cioè $\alpha \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

Affinché sia continua in $f(0,0)$ è necessario che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 0$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^3}{2x^2} = 0 \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0 \qquad \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0$$

Possiamo continuare a cercare i camini, ma tutti forniranno sempre 0. Il limite esiste e vale 0.

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \left[f(0,0) + \partial_x f(0,0)x + \partial_y f(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{|xy|^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} - (0+0x+0y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{|xx|^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{|x0|^{\frac{3}{2}}}{\left(x^2+0\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Il limite non esiste

Esercizio 94

Sia $f : [0,5] \to \mathbb{R}^2$ derivabile. Sappiamo che $f(3) = (1,2)$ e $f'(3) = (-3,4)$. Usando la definizione di derivata, determinare un valore per $f(3.1)$

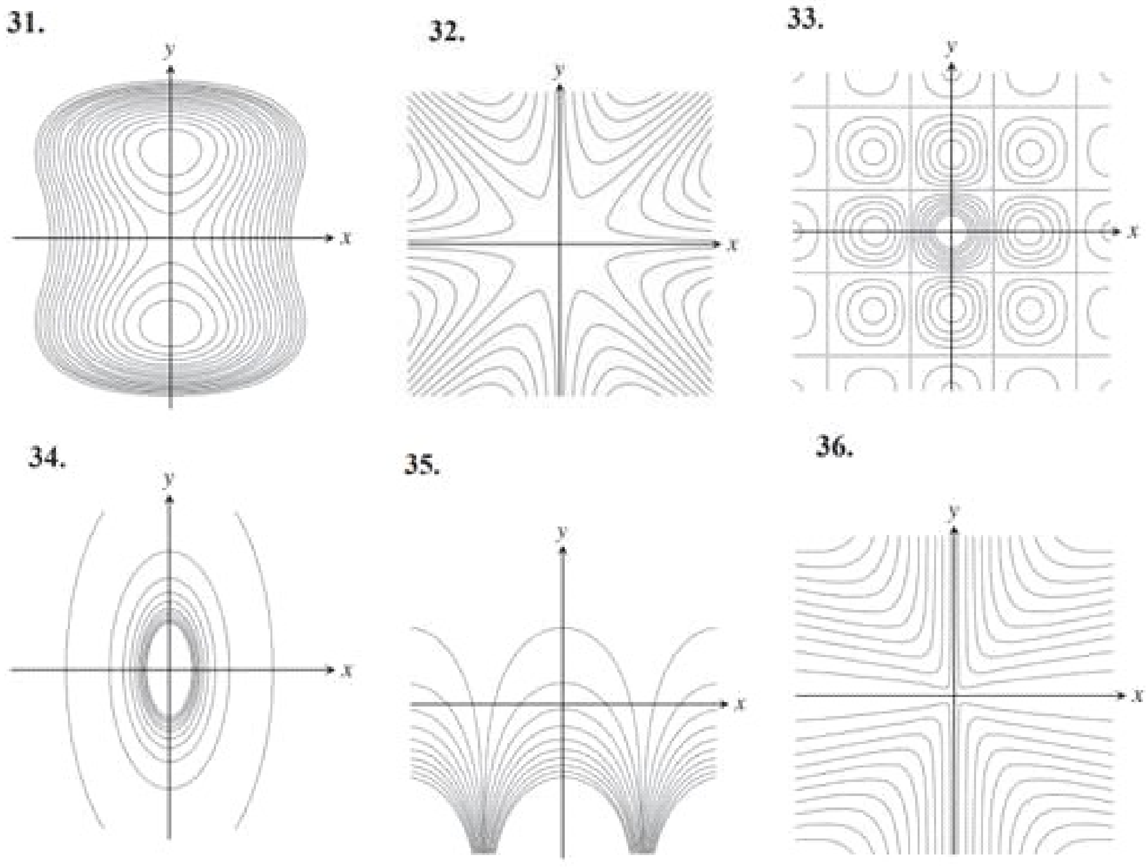
Soluzione dell'esercizio 94

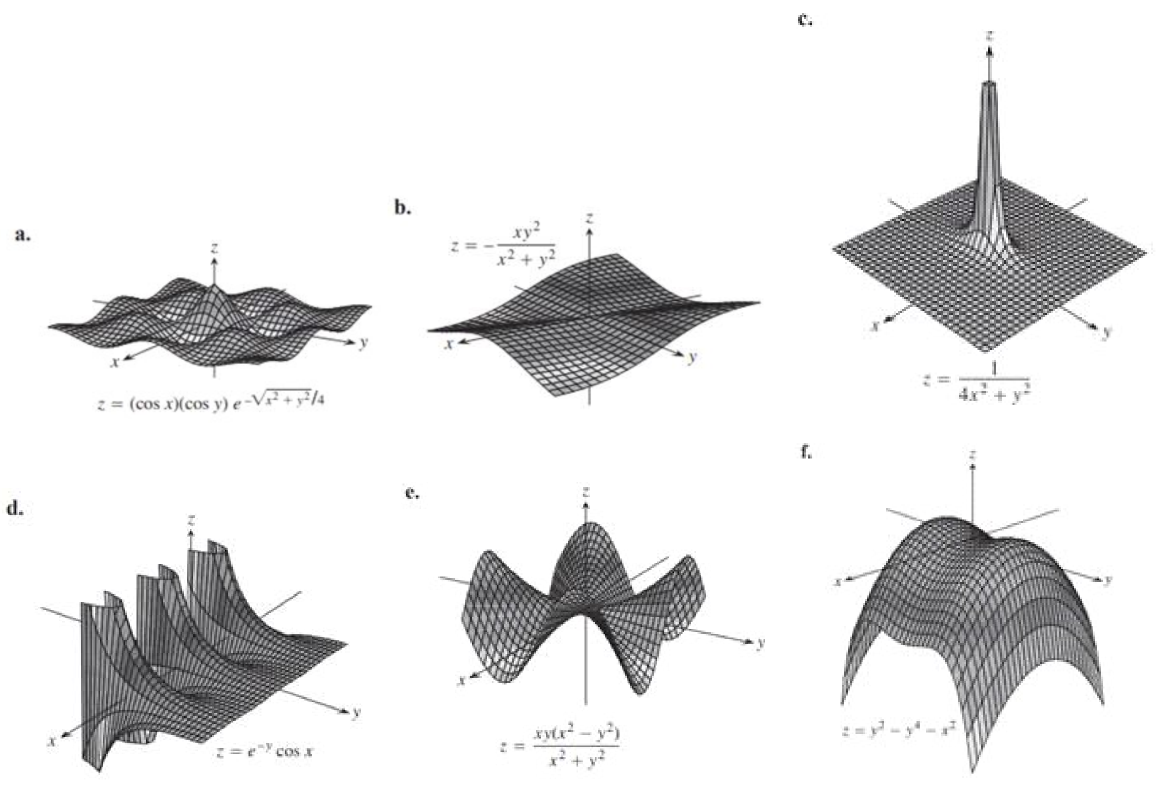
$$f(x) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}(x-3) = \begin{pmatrix} 1-3(x-3) \\ 2+4(x-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-3x \\ 4x-10 \end{pmatrix}$$

$$f(3.1) \sim \begin{pmatrix} 0.7 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 95

Associa le varie curve di livello ai grafici:





Soluzione dell'esercizio 95

31 f, 32 e, 33 a, 34 c, 35 d, 36 b

Capitolo 4

Studio di funzioni a più variabili: Massimi e minimi

Ricordiamo alcuni risultati visti nei corsi precedenti sulle funzioni di una variabile. In- dichiamo con (a, b) un intervallo di estremi a, b senza precisare se a, b sono o non sono inclusi. Se g è continua e l'intervallo di definizione $[a, b]$ è chiuso e limitato, allora esistono sia il punto di massimo che il punto di minimo di g in $[a, b]$.

Se $g \in C^1([a, b])$ e t_0 è punto di minimo (o di massimo) locale di g, interno, cioè, $t_0 \in \left] a, b \right[$, allora $g'\left(t_0\right) = 0$ Se $g \in C^2$ e t_0 è un punto interno di $[a, b]$ con $g'\left(t_0\right) = 0$, allora

- $g^{(2)}\left(t_0\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è minimo locale stretto
- $g^{(2)}\left(t_0\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è massimo locale stretto
- $g^{(2)}\left(t_0\right) = 0$ allora
  - $g^{(3)}\left(t_0\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è flesso ascendente
  - $g^{(3)}\left(t_0\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è flesso discendente
  - $g^{(3)}\left(t_0\right) = 0$ allora
    * $g^{(4)}\left(t_0\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è minimo locale stretto
    * $g^{(4)}\left(t_0\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è massimo locale stretto
    * $g^{(4}\left(t_0\right) = 0$ allora
      · $g^{(5)}\left(t_0\right) > 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è flesso ascendente
      · $g^{(5)}\left(t_0\right) < 0 \quad \Longrightarrow \quad t_0$ è flesso discendente
      · $g^{(5)}\left(t_0\right) = 0$ ...

Attenzione per flesso intendiamo qui flesso orizzontale

In maniera simile si ha anche nelle funzioni a due variabili ciò che succedeva con le funzioni a variabile singola.

Derivate parziali seconde

- $\partial^2_{xx} f = \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial x} f$
- $\partial^2_{yy} f = \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\partial}{\partial y} f$
- $\partial^2_{xy} f = \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial y} f$
- $\partial^2_{yx} f = \dfrac{\partial}{\partial y} \dfrac{\partial}{\partial x} f$

Se $\partial^2_{xy} f \in \mathcal{C}$ e $\partial^2_{yx} f \in \mathcal{C}$ allora $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$. Cioè che: $f \in \mathcal{C}^2$

Punti critici

Tutti i punti p ove $\nabla f(p) = 0$ vengono detti punti critici.

Matrice Hessiana Le derivate seconde ci possono aiutare per capire se un punto critico è di massimo locale, di minimo locale, o di sella. $H = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1x_1} f & \cdots & \partial^2_{x_1x_n} f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_nx_1} f & \cdots & \partial^2_{x_nx_n} f \end{pmatrix}$

Nel caso a due incognite: $H = \begin{pmatrix} \partial^2_{xx} f & \partial^2_{xy} f \\ \partial^2_{yx} f & \partial^2_{yy} f \end{pmatrix}$

Siano D aperto di $\mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e p interno a D critico per f. Allora:

1. Sia det[Hess $f(p)$] > 0:
   (a) se $f_{xx}(p) > 0$, allora f ha in p un minimo locale stretto;
   (b) se $f_{xx}(p) < 0$, allora f ha in p un massimo locale stretto.
2. Sia det[Hess $f(p)$] < 0, allora p è un punto di sella per f.

O in altre parole:

1. Se l'Hessiana è definita positiva (i segni degli autovalori sono tutti positivi), allora (x_i, y_i) è un punto di minimo;
2. Se l'Hessiana è definita negativa (i segni degli autovalori sono tutti negativi), allora (x_i, y_i) è un punto di massimo;
3. Se l'Hessiana è indefinita (i segni degli autovalori sono sia positivi che negativi), allora (x_i, y_i) è un punto di sella;
4. nel caso in cui l'Hessiana sia semidefinita (ci sono autovalori nulli), non possiamo dire nulla riguardo alla natura di (x_i, y_i).

In generale, se det$[Hf(p)] = 0$ il criterio dell'Hessiana non fornisce informazioni ed occorre utilizzare altri metodi per studiare la natura del punto critico p, come il segno di $f(x) - f(p)$ in un intorno di p.

Il metodo del segno afferma che:

- Se tutti i segni sono positivi significa che è punto di minimo
- Se tutti i segni sono negativi significa che è punto di massimo
- Se ci sono sia segni negativi che positivi allora è sella

Come effettuare l'analisi dei punti di Minimo e massimo su un funzione a 2 dimensioni

1. Individuare tutti i punti ove $\nabla f(p) = 0$, escludere i punti fuori dal dominio D
2. Determinare attraverso il criterio dell'Hessiana se sono punti di minimo, massimo o sella.
3. Indivudare tutti i punti di confine ($p \in \partial D$) ove $f'(p) = 0$
4. Determinare attraverso i criteri di Analisi 1 se sono punti di minimo, massimo o flesso.
5. Se il perimetro ∂D ottenuto da D è delimitato da un insieme di funzioni è necessario analizzare singolarmente ogni singolo punto di intersezione, chiamato $\partial^2 D$

Esercizio 96

Sia $f(x, y) = 2x^3 + x^2 y + y^2$ Determinare l'altro punto critico (a, b) di f con $a = 0$ e determinarne la natura.

Soluzione dell'esercizio 96

$$\partial_x = 6x^2 + 2xy \quad \partial_y = 2y + x^2$$

$$\nabla f(x, y) = (6x^2 + 2xy, 2y + x^2) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 2xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0, -\frac{y}{3} \\ y = 0, 0, -18 \end{cases} = (0,0); (6, -18);$$

Ci interessa la natura del punto con $a = 0$, cioè il punto $(0, 0)$

$$\partial_{xx} = 12x + 2y \quad \partial_{yy} = 2 \quad \partial_{xy} = \partial_{yx} = 2x$$

Notiamo subito che in $(0, 0)$ il determinante dell'Hessiana sarà nullo. Passiamo al metodo dei segni:

$$\operatorname{sgn}(g(x,y)) = \operatorname{sgn}(f(x,y) - f(0,0)) = \operatorname{sgn}\left(2x^3 + x^2y + y^2\right) = \begin{cases} +1 & x = 0 \\ \operatorname{sgn}(x) & y = 0 \\ \operatorname{sgn}(x) & y = x \\ \dots & \end{cases} \Rightarrow \text{Sella}$$

Esercizio 97

Determinare il valore del minimo assoluto di $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ sull'insieme $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, 1 \leq y \leq 2\right\}$

Soluzione dell'esercizio 97

Per trovare i punti critici bisogna analizzare: - L'interso insieme A - Il perimetro di A

Determiniamo se esiste un punto critico all'interno dell'insieme A:

$$\partial_x = 2x + y$$

$$\partial_y = 2y + x$$

$$\nabla = (2x + y, 2y + x) = \mathbb{0} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{y}{2} \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Notiamo che l'unico punto critico $\notin A$. Passiamo al perimetro, essendo un rettangolo sostituiamo $x = \pm 2, y = 1, y = 2$:

$$f(2,y) = 2^2 + 2y + y^2 = y^2 + 2y + 4 \Rightarrow \partial_y f(2,y) = 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \notin A$$

$$f(-2,y) = 2^2 - 2y + y^2 = y^2 - 2y + 4 \Rightarrow \partial_y f(2,y) = 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \in A$$

$$f(x,1) = x^2 + x1 + 1^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow \partial_x f(x,1) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in A$$

$$f(x,2) = x^2 + x2 + 2^2 = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow \partial_x f(x,2) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in A$$

Abbiamo 3 candicati:

$$f(2,1) = 7, f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{3}{4}, f(-1,2) = 1$$

Analizziamo, ora i punti dove cambia l'equazione del confine:

$$f(2,1), f(-2,1), f(2,2), f(-2,2)$$

$$f(2,1) = 7$$

$$f(-2,1) = 3$$

$$f(2,2) = 12$$

$$f(-2,2) = 4$$

Il punto di minimo è

$$f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Esercizio 98

La funzione $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 4xy - 2x$ ha solo...

a) 1 sella

b) 1 min. loc.

c) 1 max. loc.

d) 1 min. loc. e 1 max. loc.

e) 1 min. loc. e 1 sella

Soluzione dell'esercizio 98

$$\partial_x = 6x+4y-2$$
$$\partial_y = 4x+2y$$
$$\nabla = (6x+4y-2, 4x+2y) = \mathbb{0} \begin{cases} 6x+4y-2=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \begin{cases} 6\left(-\frac{y}{2}\right)+4y-2=0 \\ x=-\frac{y}{2} \end{cases} \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$$
$$\partial_{xx} = 6$$
$$\partial_{xy} = 4$$
$$\partial_{yy} = 2$$
$$H = 12-16 = -4 \Rightarrow$$

sella

Esercizio 99

Dire se $f(x,y) = x^2 - y^2$ ha massimo e minimo assoluti su un insieme chiuso e limitato C. Determinare, se esistono, i massimi e minimi assoluti di f nei seguenti casi.

(a) $C = [0,1]\times[0,1]$

(b) $C = B(0,1]$

Soluzione dell'esercizio 99

Analizziamo con il criterio dell'Hessiano i punti all'interno del dominio:

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$
$$\partial x = 2x$$
$$\partial_y = -2y$$
$$\nabla = 2(x,-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \partial_{xx}=2 \\ \partial_{yy}=-2 \\ \partial_{xy}=0 \end{cases}$$

$f(0,0) = 0 \Rightarrow$ sella

a)

Analizziamo i cammini lungo il perimetro del dominio:

$f(x,0) = x^2$: nessun punto stazionario oltre a $(0,0)$

$$f(x,1) = x^2 - 1$$
$$f'(x,1) = 2x$$
$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f(1,1) = 0 \Rightarrow$ sella

$f(0,y) = -y^2$: nessun punto stazionario oltre a $(0,0)$

$f(1,y) = 1-y^2$: nessun punto stazionario oltre a $(1,0)$

Analizziamo i punti perimetrali:

$f(1,1) = 0 \Rightarrow$ sella

$f(0,1) = -1 \Rightarrow$ minimo

b)

Determiniamo il camino che gira attorno a tutto il bordo:

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

Lo analizziamo come se fosse una funzione di Analisi 1:

$$\partial_t = -2\sin t$$
$$-2\sin t = k\frac{\pi}{2} \Rightarrow (1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$$

$f(1,0) = 1 \Rightarrow$ massimo

$f(0,1) = -1 \Rightarrow$ minimo

$f(-1,0) = 1 \Rightarrow$ massimo

$f(0,-1) = -1 \Rightarrow$ minimo

Esercizio 100

Studiare la natura dei come punti critici di $f(x,y) = x^3 + x^4 - y^4$

Soluzione dell'esercizio 100

$$\partial_x = 4x^3 + 3x^2$$
$$\partial_y = -4y^3$$
$$\nabla = \left(4x^3 + 3x^3, -4y^3\right) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0, -\frac{3}{4} \\ y = 0 \end{cases}$$
$$\partial_{xx} = 12x^2 + 6x \Rightarrow 0, \frac{9}{4}$$
$$\partial_{yy} = -12y^2 = 0, 0$$
$$H_{(0,0)} = 0$$
$$\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(0,0)) = \left(x^3 + x^4 - y^4\right) = \begin{cases} + \text{ se } y = 0 \\ - \text{ se } x = 0 \\ \quad \ldots \end{cases} \Rightarrow \text{ sella}$$
$$H_{\left(-\frac{3}{4},0\right)} = 0$$
$$\operatorname{sgn}\left(f(x,y) - f\left(-\frac{3}{4},0\right)\right) = \left(x^3 + x^4 - y^4 + \frac{27}{256}\right) = \begin{cases} -, x = 0, y < \sqrt{\frac{27}{256}} \\ +, x = 0, y > \sqrt{\frac{27}{256}} \\ \quad \ldots \end{cases} \Rightarrow \text{ sella}$$

Esercizio 101

Studiare la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 3$

Soluzione dell'esercizio 101

$$\partial_x = 4x^3 + 4xy^2$$
$$\partial_y = 4y^3 + 4x^2y$$
$$\nabla = \left(4x^3 + 4xy^2, 4y^3 + 4y^2x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 4xy^2 = 0 \\ 4y^3 + 4y^2x = 0 \end{cases} \{ \begin{matrix} x^3 = -xy^2 \\ y^3 = -x^2y \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y^2 \\ y^2 = -x^2 \end{cases} \begin{cases} x = \pm\sqrt{-y^2} \\ -y^2 = -x^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}, x = 0 \\ y = |x|, x = 0 \end{cases}$$

$$\partial_{xx}\partial_{yy} - \partial_{xy}\partial_{xy} = \left(12x^2 + 4x^2\right)\left(4x^2 + 12x^2\right) - 8x|x| = 256x^4 - 8x|x| \Rightarrow \text{ minimo locale}$$

$$\partial_{xx}\partial_{yy} - \partial_{xy}\partial_{xy} = 0$$

$$\operatorname{sgn}(f(x,y) - f(0,0)) = \operatorname{sgn}\left(x^4 + 2x^2y^2 + y^4\right) = +\forall (x,y) \Rightarrow \text{minimo assoluto}$$

Esercizio 102

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - x^2y^2$$

Determinare la natura del punto critico $(0,0)$. Sia $\boldsymbol{C}$ il disco chiuso di raggio 1, cioè $\boldsymbol{C}[0,1] = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$. Si ammetta che all'interno di $\boldsymbol{D}$ non vi siano altri punti critici oltre a $(0,0)$. Determinare, se esiste, il valore del massimo assoluto di f su $\boldsymbol{C}$.

Soluzione dell'esercizio 102

Calcoliamo le derivate prime e seconde:

$$\partial_x = y + 2x - 2xy^2 \quad \partial_y = x + 2y - 2yx^2$$

$$\partial_{xx} = 2 - 2y^2 \quad \partial_{yy} = 2 - 2x^2 \quad \partial_{xy} = \partial_{yx} = 1 - 4xy$$

Possiamo provare a verificare i suddetti punti critici attraverso il classico sistema:

$$\nabla\left(y + 2x - 2xy^2, x^2 + 2y - 2yx^2\right) = \mathbb{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2x - 2xy^2 = 0 \\ x + 2y - 2yx^2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{y}{2y^2-2} \\ \frac{y}{2y^2-2} + 2y - 2y(\frac{y}{2y^2-2})^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2y^2-2} \\ y(\frac{1}{2y^2-2} + 2 - 2(\frac{y}{2y^2-2})^2) = 0 \end{cases}$$

Di cui una soluzione è $y = x = 0$, ed altre soluzioni risolvendo una equazione di quarto grado, assumiamo che sia vero ciò che dice il testo.

Il punto in (0,0) è quindi: $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3, \partial_{\mathrm{xx}} > 0 :$ minimo, valore $f(0,0) = 0$

Vediamo la natura dei punti su ∂C: Il bordo è un cerchio di raggio unitario, si ha che: Sia $\partial C = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$f(\partial C) = \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta = \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$

$$d_\theta f(\partial C) = \cos 2\theta + \sin 2\theta\cos 2\theta = \cos 2\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta = 0$$

Essendo una sinusoide a frequenza doppia dell'altra si ha che ci sono ∞ punti di intersezione Per risolvere questa equazione dobbiamo trovare un angolo tale che $\cos 2\theta = \frac{1}{2}\sin 4\theta$ Si ha che $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi k}{4}$, verificata per $k = 1$, cioè l'angolo $-\frac{\pi}{4}$, per simmetria si ha anche l'angolo $\frac{\pi}{4}$ Rispetto ai suddetti. Da cui gli eventuali punti di minimo e massimo sono: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Analizziamo i seguenti punti attraverso la derivata seconda e derivata terza e quarta:

$$d^2_\theta f(\partial C) = -2\sin 2\theta - 2\cos 4\theta$$

$$d^3_\theta f(\partial C) = -4\cos 2\theta + 8\sin 4\theta$$

$$d^4_\theta f(\partial C) = 8\sin 2\theta + 32\cos 4\theta$$

Studiando il segno della derivata seconda:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} : d^2_\theta = 0, d^3_\theta = 0, d^4_\theta = -24 : \text{ massimo, valore } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} : d^2_\theta = 4 : \text{ minimo, valore } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow\theta=\frac{7}{4}\pi\,:\,d_\theta^2=4\,:\text{ minimo, valore } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow\theta=-\frac{7}{4}\pi\,:\,d_\theta^2=0,d_\theta^3=0,d_\theta^4=-24\,:\text{ massino, valore } f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

Esercizio 103

Sia $f(x,y)=x^3+x-4xy-2y^2$. Determinare il punto critico (a,b) di f con $b<1$ e determinarne la natura.

Soluzione dell'esercizio 103

Si ha che: $\partial_x=3x^2-4y+1$, $\partial_y=-4x-4y$

$$\nabla=\left(3x^2-4y+1,-4x-4y\right)=\mathbb{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-4y+1=0\\-4x-4y=0\end{cases}\begin{cases}3y^2-4y+1=0\\x=-y\end{cases}\begin{cases}y=1,\frac{1}{3}\\x=-1,-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Concentriamoci sul punto $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

Si ha che: $\partial_{xx}=6x\Rightarrow-2$, $\partial_{xy}=-4$, $\partial_{yy}=-4$

$H=24x-16\Rightarrow-24\Rightarrow$ sella

Es. 104 — Determinare il valore del minimo assoluto di $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ sull'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,\|x\|\le1,\|y\|\le1\right\}$

Es. 105 — Determinare il valore del minimo assoluto di $f(x,y)=x^2y+xy^2-xy$ sull'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x\ge0,y\ge0,x+y\le1\right\}$

Es. 106 — Determinare il valore del massimo assotuto di $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ sull'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,\|x\|\le1,\|y\|\le1\right\}$

Es. 107 — Determinare il massimo valore assunto da $f(x,y)=x^3-3xy^2$ su $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\le1\right\}$

Es. 108 — Si consideri la funzione $f(x,y)=x^2\left(1-y^2\right)$ definita su $D=\left\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\le1\right\}$. Determinare i punti di massimo assoluto.

Soluzione (Es. 108) — $(1,0);(-1,0)$

Es. 109 — Determinare i punti critici della funzione $f(x,y)=3x^3+y^2+4xy-x$ Stabilire se si tratta di punti di max locale, min locale, o sella.

Soluzione (Es. 109) — punto di sella

Es. 110 — Si considerino l'insieme $C=\{(x,y)\,:\,-3\le y-2x\le3,-1\le y\le1\}$ e la funzione $f(x,y)=x^2+y^2-xy+3$.
(a) Dire se C è chiuso e/o limitato;
(b) Studiare i punti critici di f su $\mathbb{R}^2$ e determinarne la natura;
(c) Trovare, se esistono (dirlo!), i minimi e massimi assoluti di f su C.

Soluzione (Es. 110) — C è chiuso, punti critici su $D=\{(0,0)\}$, $\partial D=\{(-3/2,0),(3/2,0),(-1/2,0),(1/2,0)\}$,
$\partial\partial D=\{(-1,1),(-2,-1),(2,1),(1,-1)\}$. Abbiamo i seguenti punti di massimo assoluto: $f(-1,1),f(-2,-1),f(2,1),f(1,-1)$ ed il seguente punto di minimo assoluto: $f(0,0)=3$

Es. 111 — Sia f una funzione di classe C^2 definita su $\mathbb{R}^2$. Si supponga che il punto $(1,1)$ sia critico per f, e che le derivate doppie di f in $(1,1)$ siano date da $\partial^2_{x,x}f(1,1)=-1,\partial^2_{x,y}f(1,1)=2,\partial^2_{y,y}f(1,1)=1$. Determinare la natura del punto critico.

Soluzione (Es. 111) — Sella

Es. 112 — Sia f una funzione di classe C^2 definita su $\mathbb{R}^2$. Si supponga che il punto $(1,1)$ sia critico per f, e che le derivate doppie di f in $(1,1)$ siano date da $\partial^2_{x,x}f(1,1)=-1,\partial^2_{x,y}f(1,1)=2,\partial^2_{y,y}f(1,1)=-5$. Determinare la natura del punto critico.

Soluzione (Es. 112) — Massimo

Capitolo 5

Campi vettoriali

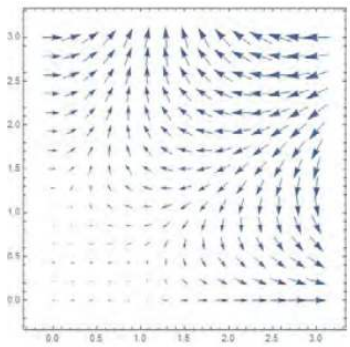
Si dice campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$ un'applicazione continua

$$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

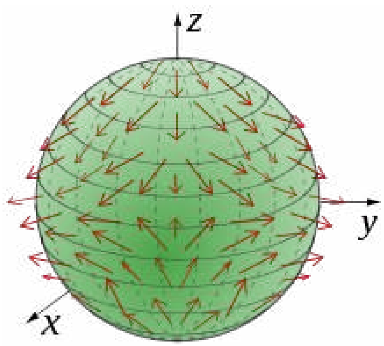
Nel caso in cui $n = 3$:

$$F(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_x(x, y, z))$$

Con $(x, y, z) \in \Omega$ e con $F_x, F_y, F_z \to \mathbb{R}$ funzioni continue.



Il grafico di un campo su $\mathbb{R}^n$ è un oggetto dello spazio di dimensione $2n$, si preferisce non utilizzarlo. Generalmente si rappresenta il campo con dei vettori disegnati in corrispondenza di ogni punto del dominio.



Il motivo del nome campo vettoriale è il seguente: La funzione $F(x, y, z)$ associa ad ogni punto P$(x, y, z) \in \Omega$ il punto $P' = F(x, y, z)$. Poiché il punto P' determina il vettore $\overline{OP'}$ applicato nell'origine, possiamo dire che la funzione $F(x, y, z)$ associa ad ogni punto P il vettore $\overline{OP'}$. Se poi consideriamo il vettore $\boldsymbol{v}$ applicato nel punto P ed equivalente al vettore $\overline{OP'}$, possiamo dire che la funzione $F(x, y, z)$ associa a ogni punto P di Ω uno ed un solo vettore $\boldsymbol{v}$ applicato in P

Campo gradiente

Sia $U(x, y, z)$ una funzione a più variabili. E sia ∇U il vettore delle derivate parziali $(\partial_x(U), \partial_y(U), \partial_z(U))$ di U. Il campo vettoriale $\mathbf{F} = \nabla U = (\partial_x(U), \partial_y(U), \partial_z(U))$ è chiamato campo gradiente.

Campo irrotazionale $\left(\mathcal{C}^2\right)$ Un campo è irrotazionale se e solo se $\forall i, j \partial_{x_i} F_{y_j} = \partial_{x_j} F_{y_i}$. Cioè che $f \in \mathcal{C}^2$

Test per campo che ammette una primitiva Un campo ammette una primitiva se e solo se $\forall i, j \partial_{x_i} F_{y_j} = \partial_{y_j} F_{x_i}$:

Cioè:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Questo deriva dal fatto che affinché F abbia una primitiva U è necessario che le sue derivate seconde miste siano uguali (Teorema di Schwarz).

Test per campo irrotazionale e conservativo Siano $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1.

5.1 Primitive di forme differenziali

Un campo gradiente (o conservativo) è un campo tale che $F = \nabla U$. In questa parte ci occupiamo di trovare U a partire da F, e più in generale integrare forme differenziali del tipo:

$$\int A(x, y)\,\mathrm{d}x + B(x, y)\,\mathrm{d}y$$

Tali che $\partial_y A = \partial_x B$

N.B. la condizione $\partial_y A = \partial_x B$ è una condizione sufficente affinché esista una primitiva (**Forma differenziale chiusa**), ma non sufficente a trovare la relativa primitiva, se la primitiva esiste è una **forma differenziale esatta**.

Cerchiamo una primitiva U tale che $\nabla U = \mathbf{F}$. Impostiamo il sistema: $\begin{cases} F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \\ F_x = \frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$.

Scegliamo una delle tre equazioni e la integriamo: $U^\star(x, y, z) = \int F_x\,\mathrm{d}x$. Abbiamo trovato un pezzo della primitiva $U(x, y, z) = U^\star(x, y, z) + G(y, z) + H(z)$ dove $G(y, z)$ è una funzione che dipende solo da $y, z)$ e non da x ed $H(z)$ una funzione che dipende solo da z. Abbiamo due strade per trovare $G(y, z)$:

$G(y, z) = \int F_y - \partial_y \left(U^\star(x, y, z)\right) \mathrm{d}y$ $\partial_y \left(U^\star(x, y, z) + G(y, z)\right) = F_y$ Una volta trovata $G(y, z)$ ci manca da determinare $H(z)$. In maniera simile a prima:

$H(z) = \int F_z - \partial_z \left(U^\star + G(y, z)\right) \mathrm{d}z$ $\partial_z \left(U^\star + G(y, z) + H(z)\right) = F_z$

La nostra primitiva $U(x, y, z) = U^\star(x, y, z) + G(y, z) + H(z)$ è stata determinata.

1. (Test sulle componenti) Se $\boldsymbol{F}$ è conservativo allora $\boldsymbol{F}$ è irrotazionale.
2. Se $\boldsymbol{F}$ è irrotazionale e $\boldsymbol{D}$ è semplicemente connesso allora $\boldsymbol{F}$ è conservativo.

Esercizio 113

Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito come: $F(x, y) = \left(x^2 + y, x - e^y\right)$

Determinare la primitiva del campo.

Soluzione dell'esercizio 113

Vediamo se ci sono i presupposti affinché la primitiva esiste:

$$\partial_y(x^2 + y) = 1 \quad \partial_x(x - e^y) = 1$$

Visto che le derivate miste sono uguali, integriamo rispetto alla prima coordinata:

$$U_x = \int x^2 + y\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + yx$$

Deriviamo rispetto a dy F_x e lo sottraiamo dalla componente F_y:

$$U_y = \int x - e^y - x\,\mathrm{d}y = -e^y$$

Da cui $U = \dfrac{x^3}{3} + yx - e^y$

Esercizio 114

Calcolare la primitiva di $F(x, y) = (yz\cos(xyz), xz\cos(xyz) + z, xy\cos(xyz) + y + 2)$

Soluzione dell'esercizio 114

Si nota come le derivate miste sono uguali (passaggi omessi)

Integriamo prima F_x :

$$U^\star = \int yz\cos(xyz)\,\mathrm{d}x = \sin(xyz)$$

$$G(y,z) = \int xz\cos(xyz) + z - \partial_y(\sin(xyz))\,\mathrm{d}y = \int z\,\mathrm{d}y = yz$$

$$H(z) = \int xz\cos(xyz) + y + 2 - \partial_z(\sin(xyz) + yz)\,\mathrm{d}z = \int 2\,\mathrm{d}z = 2z$$

$$U(x,y,z) = \sin(xyz) + yz + 2z$$

Oppure possiamo integrale prima F_z :, che in questo caso è più conveniente

$$U(x,y,z) = U^* = \int xy\cos(xyz) + y + 2\,\mathrm{d}z = \sin(xyz) + yz + 2z$$

In quanto:

$$G(x,y) = \int yz\cos(xyz) - \partial_x(\sin(xyz) + yz + 2z)\,\mathrm{d}x = \int 0\,\mathrm{d}x$$

$$H(y) = \int yz\cos(xyz) - \partial_y(\sin(xyz) + yz + 2z)\,\mathrm{d}y = \int 0\,\mathrm{d}y$$

Esercizio 115

Si consideri l'integrale $\int y^2\,\mathrm{d}x + 2xy + 1\,\mathrm{d}y$

Determinare la primitiva del campo.

Soluzione dell'esercizio 115

Vediamo se ci sono i presupposti affinché la primitiva esiste:

$$\partial_y(y^2) = 2y \quad \partial_x(2xy + 1) = 2y$$

Visto che le derivate miste sono uguali, integriamo rispetto alla seconda coordinata:

$$U_y = \int 2xy + 1\,\mathrm{d}y = xy^2 + y$$

Deriviamo rispetto a $\mathrm{d}x$ U_y e lo sottraiamo dalla componente F_x:

$$U_x = \int y^2 - y^2 = 0$$

Da cui $U = \int 2xy + 1\,\mathrm{d}y = xy^2 + y$

Esercizio 116

Determinare, se esiste, una primitiva di $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z}\right)$. Individuare quella primitiva U del campo che vale 2 nell'origine. Determinare $U(1,1,0)$

Soluzione dell'esercizio 116

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e^{3z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z}$$

$$f(x,y,z) = \int y^2 \,\mathrm{d}x = xy^2 + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + \frac{\partial g}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 2xy + e^{3z} - 2xy$$

$$g(y,z) = \int e^{3z} \,\mathrm{d}y = ye^{3z} + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z} + \frac{\partial h}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} - 3ye^{3z} = 3ye^{3z} - 3ye^{3z} = 0$$

$$h(z) = 0$$

$$U(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + C$$

$$U(0,0,0) = 2 \Leftrightarrow C = 2$$

$$U(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + 2$$

$$U(1,1,0) = xy^2 + ye^{3z} + 2 = 4$$

Esercizio 117

Sia $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(2ye^{xy} + 2xe^{x^2-y^2}, 2xe^{xy} - 2ye^{x^2-y^2}\right)$ Determinare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ lungo la curva il cui sostegno è indicato in figura.

Soluzione dell'esercizio 117

Facendo il test delle derivate si ottiene che: $\frac{d}{\mathrm{d}x}\left(2xe^{xy} - 2ye^{x^2-y^2}\right) = 2xye^{xy} - 4xye^{x^2-y^2} + 2e^{xy}$ $\frac{d}{\mathrm{d}y}\left(2ye^{xy} + 2xe^{x^2-y^2}\right) = 2xye^{xy} - 4xye^{x^2-y^2} + 2e^{xy}$

Dato che le derivate miste sono uguali, ed il campo è definito in $\mathbb{R}^2$ determiniamo una primitiva:

$$U = \int 2xe^{xy} - 2ye^{x^2-y^2} \,\mathrm{d}y = 2e^{xy} + e^{x^2-y^2}$$

Si nota che la derivata rispetto a dx di questa primitiva U da esattamente F_x.

Applicando la F.F.C.I. tra $(0,1)$ e $(5,0)$:

$$U(5,0) - U(0,1) = 2e^{5\cdot 0} + e^{5^2-0^2} - (2e^{0\cdot 1} + e^{0^2-1^2}) = e^{25} - e^{-1}$$

Calcolare, se esiste, la primitiva di:

Es. 118 — $(x-y, x-2)$

Soluzione (Es. 118) — No, non esiste

Es. 119 — $\int x^2 \,\mathrm{d}x - xy \mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 119) — No, non esiste

Es. 120 — $\mathbf{F}(x,y) = \left(x, y^2\right)$

Soluzione (Es. 120) — $U = \frac{x^2}{2} + y^2$

Es. 121 — $\mathbf{F}(x,y) = \left(y, y^2\right)$

Soluzione (Es. 121) — No, non esiste

Es. 122 — $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2, -2y)$

Soluzione (Es. 122) — $U = x^3 - y^2$

Es. 123 — $\mathbf{F}(x,y) = \left(2x\sin\left(x^2+y^2\right)+1, 2y\sin\left(x^2+y^2\right)\right)$

Soluzione (Es. 123) — $U = -\cos(x^2+y^2)$

Es. 124 — $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\frac{2xy}{\left(1+x^2\right)^2}, -\frac{1}{1+x^2}\right)$

Soluzione (Es. 124) — $U = -\frac{y}{1+x^2}$

Es. 125 — $\mathbf{F}(x,y,z) = (2y+1, 2x-1, 2z)$

Soluzione (Es. 125) — $U = (2y+1)x - y + z^2$

Es. 126 — $\frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 126) — $U = \log(1+x^2y^2)$

Es. 127 — $F = 8yzi + 8xzj + 8xyk$

Soluzione (Es. 127) — $U = 8xyz$

Es. 128 — $F = 14y\mathrm{i} + 14(x+z)j - 14yk$

Soluzione (Es. 128) — No, non esiste

Es. 129 — $F = 8xi + 7yj + 6zk$

Soluzione (Es. 129) — $U = 4x^2 + \frac{7}{2}y^2 + 3z^2$

Es. 130 — Sia $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^4 \frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ Dire se $\boldsymbol{F}$ è conservativo; determinarne una primitiva in caso affermativo.

Es. 131 — Studiare la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$, ed indicare il valore della funzione nel punto di massimo locale.

Soluzione (Es. 131) — 4 punti critici: $(0,0)$: sella, $(0,2)$: minimo locale, $(-2,0)$: massimo locale, $(-2,2)$: sella, Il massimo locale vale 4

5.2 Campo radiale

Ogni campo radiale continuo $F(x) = g(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ è un campo gradiente, e una primitiva di F è data da $G(|\boldsymbol{x}|)$, con $G' = g$.

Attraverso la regola della catena si dimostra la seguente affermazione:

$$\nabla G(|\boldsymbol{x}|) = G'(|\boldsymbol{x}|)\nabla|\boldsymbol{x}| = g(|\boldsymbol{x}|)\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} = F(\boldsymbol{x})$$

Esercizio 132

Si consideri il campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, F(x) = |x|x.F$ è un campo gradiente? Se si ritiene di si, determinare la primitiva che vale 0 nell'origine e calcolarla in $(1,-1,1)$ troncando a tre cifre dopo la virgola. Se invece si ritiene di no, inserire la risposta - 1000 (attenzione al segno meno davanti al mille).

Soluzione dell'esercizio 132

Sapendo che $\nabla(\varphi(|x|)) = \varphi'(|x|)\dfrac{x}{|x|}$

$$F(x) = |x|x = |x|^2\frac{x}{|x|}$$

$$\varphi'(|x|) = |x|^2, \varphi'(t) = t^2, \varphi = \frac{t^3}{3}$$

$$F(x) = \nabla\left(\frac{|x|^3}{3}\right)$$

$$U = \frac{|x|^3}{3}$$

$$U(1,-1,1) = \frac{|\sqrt{3}|^3}{3} = \sqrt{3} = 1.73$$

Esercizio 133

Determinare la primitiva $U(x)$ di $\boldsymbol{F}(x) = \dfrac{\cos|x|}{|x|}x$ in $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ che vale 2 in $(\pi,0,0)$

Soluzione dell'esercizio 133

Essendo un campo gradiente si ha che $\nabla U(x) = \left(\dfrac{\cos|x|}{|x|}x\right)$

Sapendo che $\nabla(\varphi(|x|)) = \varphi'(|x|)\dfrac{x}{|x|}$

Abbiamo quindi che $\varphi'(|x|) = \cos|x|$ e che $\varphi'(y) = \cos y$

Integrandolo: $\varphi(y) = \sin y$ cioè $U(\boldsymbol{x}) = \sin|x|$

La primitiva che vale due in $\pi,0,0$ è: $U(\boldsymbol{x}) = \sin|x| + \pi$.

Es. 134 — Determinare la primitiva $U(x)$ di $\boldsymbol{F}(x) = \dfrac{\sin|x|}{|x|}x$ in $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ che vale 2 in $(\pi,0,0)$

Soluzione (Es. 134) — $U = -\cos|x| + 2$

Es. 135 — Determinare la primitiva $U(x)$ di $\boldsymbol{F}(x) = |x|^3x$ che vale 3 nell'origine.

Soluzione (Es. 135) — $U = \dfrac{|x|^5}{5} + 3$

5.3 Integrali di forme differenziali

Nel caso di campi gradiente (o conservativo) hanno alcune caratteristiche importanti:

- L'integrale su un cammino chiuso è nullo

$$\oint \nabla U(x,y)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = 0$$

- È possibile utilizzare la formula fondamentale del calcolo integrale applicata alla primitiva U:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} \nabla U(x,y)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = U(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)}^{(x,y)=(x_1,y_1)} = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0)$$

Esercizio 136

Sia $F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Sia r cammino contenuto nel semipiano $x > 0$ di punto iniziale $(1, -1)$ e punto finale $(1, 1)$. calcolare l'integrale

$$\int_r \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}s$$

Soluzione dell'esercizio 136

Calcoliamo le derivate miste:

$$\partial_y \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-\left(x^2+y^2\right)+2y\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\partial_x \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Essendo un dominio semplice il campo è conservativo.

Essendo quindi anche una forma esatta determiniamo la primitiva $\boldsymbol{U}$

$$U_x = \int \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y = \arctan\frac{y}{x}$$

Notiamo che derivando rispetto a y $\boldsymbol{U}_x$ otteniamo $-\frac{y}{x^2+y^2}$. Abbiamo quindi trovato la forma esatta.

Applicando la F.F.C.I. Abbiamo che:

$$\int_r F \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{d}s = \boldsymbol{U}(1,1) - \boldsymbol{U}(1,-1) = \arctan\frac{1}{1} - \arctan\frac{1}{-1} = \frac{\pi}{2} = 1.57$$

Esercizio 137

Sia $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}, -\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\right)$ su $(x, y) : x > 0, y > 0$. Calcolare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ sulla curva $\alpha(t) = \left(e^{t^2}, 1+t^4\right), t \in [0, 1]$

Soluzione dell'esercizio 137

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$\boldsymbol{U} = \int \left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \boldsymbol{G}(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{\partial G}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\boldsymbol{G} = \int \left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0$$

$$\boldsymbol{U} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$$

Applicando la F.F.C.I. Abbiamo che con $t = 0 : (x, y) = (1, 1), t = 1 : (x, y) = (e, 2)$

$$\boldsymbol{U}(e,2) - \boldsymbol{U}(1,1) = \frac{e^{t^2}}{1+t^4} - \frac{1+t^4}{e^{t^2}} = \frac{e}{2} - \frac{2}{e} - 1 + 1 = \frac{e}{2} - \frac{2}{e}$$

Esercizio 138

Si consideri il campo definito su $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ da $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)$

a) Provare che il campo $\boldsymbol{F}$ è irrotazionale;

b) Senza provare a calcolarlo, dire se esiste una primitiva U di $\boldsymbol{F}$ sul semipiano $y>0$;

c) Senza provare a calcolarlo, dire se esiste una primitiva U di $\boldsymbol{F}$ su $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$: perché? e) Sia α il cammino $\alpha(t)=\left(\sin t+2,\cos^2 t\right),t\in[0,\pi/2]$. Calcolare l'integrale $\iiint_\Omega F(x)\cdot d\alpha$

Soluzione dell'esercizio 138

a) $\boldsymbol{F}$ è irrotazionale se $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y y}{\partial x}$

$$\begin{aligned}\frac{F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}\Leftrightarrow &\frac{-2y\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)4y\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{2y\left(x^2+y^2\right)^2-2xy4x\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\\ &\Leftrightarrow -2y\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)4y\left(x^2+y^2\right)=2y\left(x^2+y^2\right)^2-8x^2y\left(x^2+y^2\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(-\left(x^2+y^2\right)-\left(x^2-y^2\right)2\right)=\left(x^2+y^2\right)\left(\left(x^2+y^2\right)-4x^2\right)\\ &\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(y^2-3x^2\right)=\left(x^2+y^2\right)\left(y^2-3x^2\right)\end{aligned}$$

b) Sì

c) Sì, in quanto è il dominio ove è definita la derivata seconda

$$U=\int\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}y+H(x)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\partial_x\left(-\frac{x}{x^2+y^2}+H(x)\right)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+H'(x)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Leftrightarrow H=c$$

e) N.B: non è integrabile facilmente facendo $\int_0^{\frac{\pi}{2}}F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\mathrm{d}t$. Allora dato che abbiamo ricavato la primitiva, sostituiamo alla primitiva il camino:

$$U(\alpha)=\int_\alpha \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{\alpha}=\left[-\frac{\sin t+2}{(\sin t+2)^2+\cos^4 t}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{15}$$

Oppure usando la F.F.C.I, dopo aver ricavato gli estremi, dato il risultato non è influenzato dal camino:

$$A=\left(\sin 0+2,\cos^2 0\right)=(2,1)$$

$$B=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2,\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=(3,0)$$

$$U(\alpha)=\int_\alpha \boldsymbol{F}\,d\boldsymbol{\alpha}=\left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{(x,y)=(2,1)}^{(x,y)=(3,0)}=-\frac{3}{3^2}+\frac{2}{2^2+1^2}=\frac{1}{15}$$

Esercizio 139

Dire se $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(2xe^{y\sin z},(\sin z)x^2e^{y\sin z},x^2y\cos zy\sin z+2\right)$ è conservativo, determinarne una primitiva in caso affermativo. Calcolare poi l'integrale di $\bar{F}$ su

$$\alpha(t)=\left(t,t^2,\cos t\right),t\in[0,\pi]$$

Soluzione dell'esercizio 139

Vediamo se le derivate miste sono uguali (è quindi è irrotazione, integrabile e conservativo):

$\partial_y\left(F_x\right)=\partial_x\left(F_y\right) \Leftrightarrow 2x\sin z e^{y\sin z}=2x\sin z e^{y\sin z}$

$\partial_z\left(F_x\right)=\partial_x\left(F_z\right) \Leftrightarrow 2xy\cos z e^{y\sin z}=2xy\cos z e^{y\sin z}$

$\partial_z\left(F_y\right)=\partial_y\left(F_z\right) \Leftrightarrow yx^2\sin z\cos z e^{y\sin z}+x^2\cos z e^{y\sin z}=yx^2\sin z\cos z e^{y\sin z}+x^2\cos z e^{y\sin z}$

Essendo uguali possiamo calcolare una primitiva:

$$U(x,y,z)=\int x^2 y\cos z e^{y\sin z}+2\,\mathrm{d}z+V(x,y)=x^2 e^{y\sin z}+2z+V(x,y)$$

$$V(x,y)=\int 2xe^{y\sin z}-\partial_x(U)\,\mathrm{d}x+W(y)=W(y)$$

$$W(y)=\int (\sin z)x^2 e^{y\sin z}-\partial_y(U)\,\mathrm{d}x+C=C$$

$$[U(x,y,z)]\begin{matrix}(x,y,z)=\left(\pi,\pi^2,-1\right)\\(x,y,z)=(0,0,1)\end{matrix}=\pi^2 e^{\pi^2\sin(-1)}-2-2=\pi^2 e^{\pi^2\sin(-1)}-4$$

Esercizio 140

Siano $\boldsymbol{F}(x,y)=(y\cos(xy),x\cos(xy)+2)$, e γ un cammino che congiunge 0 a $\left(\pi,\frac{1}{2}\right)$. Calcolare $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\gamma$

Soluzione dell'esercizio 140

Dato che il camino non è specificato, dobbiamo verificare se si può calcolare una primitiva. Per verificare ciò possiamo calcolare le seguenti derivate: $\partial_x\left(F_y\right)$ e $\partial_y\left(F_x\right)$. Dato che $\partial_x\left(F_y\right)=\partial_{yx}U$ e $\partial_y\left(F_x\right)=\partial_{xy}U$, cioè che sono le derivate miste di una stessa funzione esse, per il teorema di Schwarz devono coincidere (altrimenti viene meno l'integrabilità del campo).

$$\partial_x\left(F_y\right)=-xy\sin(xy)+\cos(xy)$$

$$\partial_y\left(F_x\right)=-xy\sin(xy)+\cos(xy)$$

Possiamo calcolare una primitiva:

$$U(x,y)=\int x\cos(xy)+2\,\mathrm{d}y+H(x)=\sin(xy)+2y+H(x)$$

$$H(x)=\int y\cos(xy)-\partial_x(\sin(xy)+2y)\,\mathrm{d}x\Big)=\int y\cos(xy)-y\sin(xy)\,\mathrm{d}x=C$$

Applicando la F.F.C.I.:

$$\int_\lambda \boldsymbol{F}\cdot d\gamma=[\sin(xy)+2y]_{(0,0)}^{\left(\pi,\frac{1}{2}\right)}=\sin\frac{\pi}{2}+1=2$$

Es. 141 — Sia $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y},-\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)\right)$ su $(x,y):x>0,y>0$. Calcolare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ sulla curva $\alpha(t)=\left(e^{t^2},1+t^4\right),t\in[0,1]$

Soluzione (Es. 141) — $2e-\frac{1}{2e}$

Es. 142 — Sia $\boldsymbol{F}(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y},\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)$ su $\{(x,y):x>0,y>0\}$. Provare che $\boldsymbol{F}$ è conservativo e determinarne un potenziale U; calcolare poi l'integrale di $\boldsymbol{F}$ sulla curva $\alpha(t)=\left(e^{t^4},1+t^2\right),t\in[0,1]$

Es. 143 — Sia $\boldsymbol{F}(x, y) = \nabla(x^2 - e^{xy})$ e $\alpha(t) = (t^2, \cos(\pi t/2))$, $t \in [0, 1]$. Determinare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ sul cammino α: $\displaystyle\int_\alpha \boldsymbol{F} \cdot d\alpha$

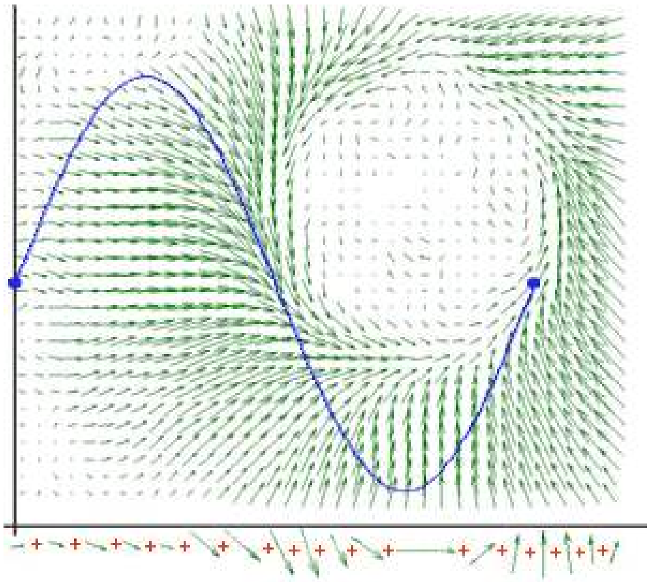
Soluzione (Es. 143) — 1

5.4 Integrali curvilinei di seconda specie

Per un campo vettoriale $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, l'integrale di linea lungo una curva C, parametrizzata da $\boldsymbol{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, è definito da:

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_C F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y$$

È importante sottolineare che parlare di Integrali di forme differenziali o di campi vettoriali è come riferirsi a due modalità diverse di dire la medesima cosa, nel caso in cui il campo è conservativo. È più conveniente, quindi, trovare la primitiva che fare un integrale curvilineo di seconda specie



Esercizio 144

Calcolare l'integrale

$$\int_r 3x^2 - 2y\,\mathrm{d}s$$

dove r è il segmento da $(3, 6)$ a $(1, -1)$

Soluzione dell'esercizio 144

$$r(t) = (3 + t(1-3), 6 + t(-1-6)) = (3 - 2t, 6 - 7t)$$

$$v(t) = (-2, -7)$$

$$\int_r 3x^2 - 2y\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \left(3(3-2t)^2(-2) - 2(6-7t)(-7)\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(30 - 26t - 24t^2\right)\mathrm{d}t = 9$$

Esercizio 145

Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y$$

dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

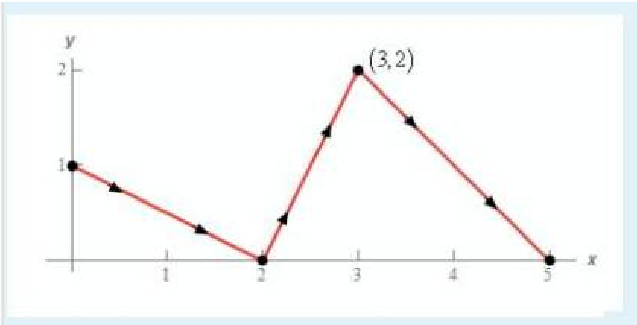
Soluzione dell'esercizio 145

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$\int_\gamma x^2\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(-\sin t) - \cos t \sin t \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos^2 t \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} = -0.66$$

Esercizio 146

Sia $\boldsymbol{F}(x, y) = (3xy, 2x)$. Determinare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ lungo la curva il cui sostegno è indicato in figura:



Soluzione dell'esercizio 146

Tratto da $(0,1)$ a $(2,0)$: $r(t) = (0 - t(0-2), 1 - t(1-0)) = (2t, 1-t)$ $v(t) = (2, -1)$

$$\int_0^1 3(2t)(1-t)\cdot 2 + 2(2t)\cdot(-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 12t(1-t) - 4t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 12t - 12t^2 - 4t\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 8t - 12t^2\,\mathrm{d}t = \left[4t^2 - 4t^3\right]_0^1 = 0$$

Tratto da $(2,0)$ a $(3,2)$: $r(t) = (2 - t(2-3), 0 - t(0-2)) = (2-t, 2t)$, $v(t) = (-1, 2)$

$$\int_0^1 (3(2-t)(2t)\cdot(-1) + 2(2-t)\cdot 2)\,\mathrm{d}t = \cdots = 2$$

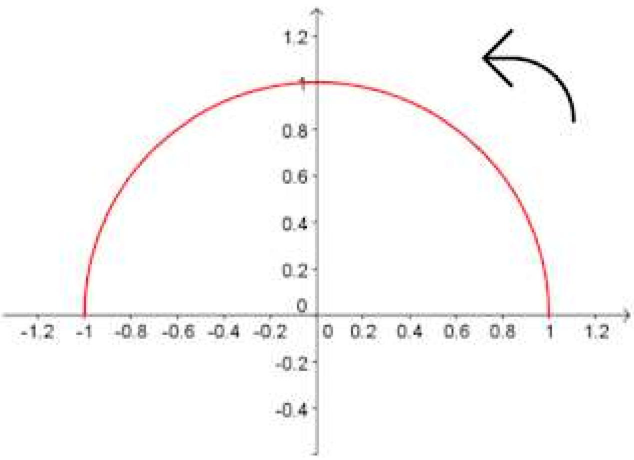
Tratto da $(3,2)$ a $(5,0)$: $r(t) = (3 - t(3-5), 2 - t(2-0)) = (2t+3, 2-2t)$, $v(t) = (2, -2)$

$$\int_0^1 3(2t+3)(2-2t)\cdot 2 + 2(2t+3)\cdot(-2)\,\mathrm{d}t = \cdots = 6$$

In totale l'integrale vale 8.

Esercizio 147

Consideriamo la curva avente parametrizzazione $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\quad t \in [0, \pi]$ sul campo $\boldsymbol{F}(x, y) = (y, -xy)$. Calcolare l'integrale del campo sulla curva $\boldsymbol{\gamma}$



Soluzione dell'esercizio 147

Ricaviamo la derivata della curva: $\boldsymbol{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot \mathbf{ds} = \int_\pi^0 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(t))\cdot\boldsymbol{\gamma}'(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi (\sin t, -\sin t\cos t)\cdot(-\sin t, \cos t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(-\sin^2 t - \cos^2 t \sin t\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^\pi \left(\sin^2 t + \cos^2 t\sin t\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$$

Es. 148 — Calcola l'integrale di $F = \left(6x^2 - 7x\right) i + 7zj + k$ lungo $r(t) = ti + tj + tk, \quad 0 \le t \le 1$

Soluzione (Es. 148) — 3

Es. 149 — Calcola l'integrale di $F = \left(6x^2 - 7x\right) i + 7zj + k$ lungo $r(t) = ti + t^2 j + t^4 k, \quad 0 \le t \le 1$

Soluzione (Es. 149) — 11/6

Es. 150 — Calcola l'integrale di $F = \left(6x^2 - 7x\right) i + 7zj + k$ lungo il percorso che collega $(0,0,0)$ e $(1,1,0)$ e poi tra $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$

Soluzione (Es. 150) — -1/2

Es. 151 — Evaluate $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ along the curve $y = x^2$ from $(-2,4)$ to $(1,1)$

Es. 152 — Evaluate $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ along the curve $y = 4x^2$ from $(-2,16)$ to $(-1,4)$

Soluzione (Es. 152) — -21/4

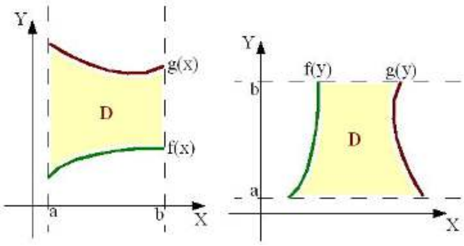
Es. 153 — Sia α il circuito costituito dal bordo del quadrato $[0,1]\times[0,1]$ orientato positivamente e $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(-y^2, xy\right)$
Calcolare l'integrale $\int_\alpha \boldsymbol{F}(x,y)\cdot d\alpha$

Es. 154 — Sia $\gamma(t) = \left(t^2+1, t+3\right), t \in [0,1]$. Calcolare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ lungo γ

Capitolo 6

Aree e integrali doppi

Un integrale doppio risponde alla richiesta di calcolare l'area o la massa all'interno di una determinato dominio D semplice.



Come dominio semplice intendiamo un dominio che non ha al suo interno buchi o altro ed è delimitato da 2 funzioni (che dipendono solamente dall'altra variabile di integrazione e possono essere anche numeri) e due numeri.

Per risolvere un integrale doppio, bisogna, quindi fare due integrazioni, rispetto alle due variabili.

Nel caso in cui è possibile determinare due funzioni $g(x)$ che dipende solo da x e non da y e $h(y)$ che dipende solo da y e non da x e negli estremi di integrazione non dipendono dall'altra variabile di integrazione.

$$\int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

N.B. un integrale del genere non è risolvibile e non ha senso di esistere:

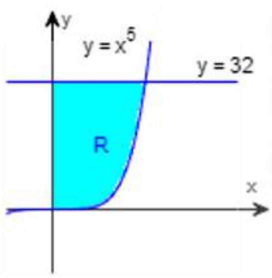
$$\int_{\beta(y)}^{\alpha(y)} \int_b^a 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Spesso si effettuano uno scambio delle variabili di integrazione, per esempio tra dx e dy.

Sia D un dominio semplice esprimibile attraverso x, esso è possibile esprimerlo attraverso y attraverso uno studio dell'area del dominio e la ricerca delle apposite funzioni inverse.

Esercizio 155

Calcolare l'area evidenziata in azzurro:



Soluzione dell'esercizio 155

Essenedo un dominio semplice sia rispetto all'asse x che y possiamo calcolarlo come:

$$\int_0^2 \int_{x^5}^{32} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 32 - x^5\,\mathrm{d}x = \frac{160}{3} \qquad \int_0^{32} \int_0^{y^{\frac{1}{5}}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{32} \sqrt[5]{y}\,\mathrm{d}y = \frac{160}{3}$$

Esercizio 156

Interpretare il seguente integrale iterato come l'integrale di una funzione su una opportuna regione del piano e calcolarlo:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 \sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Soluzione dell'esercizio 156

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 3y^3 \sin(xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 \sin(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[-3y^2\cos(xy)\right]_{x=0}^{x=y^2} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 3y^2\left(1-\cos y^3\right)\mathrm{d}y = \left[y^3 - \sin\left(y^3\right)\right]_{y=0}^{y=1} = 1 - \sin 1$$

Esercizio 157

Considerare la seguente somma di integrali ridotti come l'integrale di una funzione su un opportuno dominio e calcolarlo:

$$\int_0^{4/5} \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2x} \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{4/5}^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Soluzione dell'esercizio 157

Invertiamo gli estremi di integrazione:

$x \in \left[0, \frac{4}{5}\right] \wedge \left[\frac{4}{5}, 1\right] \Rightarrow [0,1], x^2 + (y-1)^2 \leq 1, y \leq 2x, x \geq \frac{y}{2}, \sqrt{-(y-1)^2+1} \leq x \leq \sqrt{-(y-1)^2+1}$

Da cui $x \in \left[\frac{y}{2}, \sqrt{-(y-1)^2+1}\right], y \in [0,2]$

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{-(y-1)^2+1}} \frac{x\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^2\sin y}{2y}\right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{-(y-1)^2+1}} = \int_0^2 -\frac{5y\sin y}{8} + \sin y\,\mathrm{d}y$$

$$= \left[\frac{5y\cos y - 5\sin y}{8} - \cos y\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{\cos 2}{4} - \frac{5\sin 2}{8} + 1$$

Esercizio 158

Interpretare il seguente integrale iterato

$$\int_0^8 \int_{y^{1/3}}^2 \frac{1}{1+x^4}\,dxdy$$

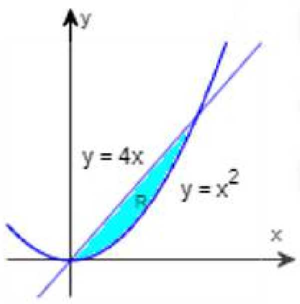
come l'integrale doppio di una funzione su un dominio $\boldsymbol{D}$ e calcolarlo.

Soluzione dell'esercizio 158

$$\int_0^8 \int_{y^{\frac{1}{3}}}^2 \frac{1}{1+x^4}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{1}{1+x^4}\,dydx = \int_0^2 \left[\frac{y}{1+x^4}\right]_{y=0}^{y=x^3} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \left[\frac{\ln\left(1+x^4\right)}{4}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{4}\ln 17$$

Es. 159 — Calcolare l'area della sezione evidenziata



Soluzione (Es. 159) — $\frac{32}{3}$

Es. 160 — Write an iterated integral for $\iint_R \mathrm{d}A$ over the region R bounded by $y = \sqrt[4]{x}, y = 0$, and $x = 16$

Soluzione (Es. 160) — $\frac{128}{5}$

Es. 161 — Evaluate $\iint_D 42y^2 - 12x \,\mathrm{d}A$ where $D = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4, (x-2)^2 \le y \le 6\right\}$

Es. 162 — Evaluate $\iint_D 2yx^2 + 9y^3 \,\mathrm{d}A$ where D is the region bounded by $y = \frac{2}{3}x$ and $y = 2\sqrt{x}$.

Es. 163 — Evaluate $\iint_D 10x^2y^3 - 6 \,\mathrm{d}A$ where D is the region bounded by $x = -2y^2$ and $x = y^3$.

Es. 164 — Evaluate $\iint_D x(y-1) \,\mathrm{d}A$ where D is the region bounded by $y = 1 - x^2$ and $y = x^2 - 3$.

Es. 165 — Evaluate $\iint_D 5x^3 \cos\left(y^3\right) \mathrm{d}A$ where D is the region bounded by $y = 2, y = \frac{1}{4}x^2$ and the y -axis.

Es. 166 — Evaluate $\iint_D \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}\left(x^3+1\right)} \mathrm{d}A$ where D is the region bounded by $x = -y^{\frac{1}{3}}, x = 3$ and the x -axis.

Es. 167 — Use a double integral to determine the area of the region bounded by $y = 1 - x^2$ and $y = x^2 - 3$.

Es. 168 — Use a double integral to determine the volume of the region that is between the xy -plane and $f(x,y) = 2 + \cos\left(x^2\right)$ and is above the triangle with vertices $(0,0), (6,0)$ and $(6,2)$.

Es. 169 — Use a double integral to determine the volume of the region bounded by $z = 6 - 5x^2$ and the planes $y = 2x, y = 2, x = 0$ and the xy -plane.

Es. 170 — Use a double integral to determine the volume of the region formed by the intersection of the two cylinders $x^2 + y^2 = 4$ and $x^2 + z^2 = 4$.
Interpretare i seguenti integrali iterati come gli integrali di funzioni su una opportuna regione D del piano e invertire gli ordini di integrazione per calcolarli:

Es. 171 — $\int_0^2 \int_{x^2}^4 x \cos\left(y^2\right) dy dx$

Soluzione (Es. 171) — $\frac{\sin(16)}{4}$

Es. 172 — $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 x^3 \cos(xy) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 172) — $\frac{1-\cos 1}{3}$

Es. 173 — $\int_0^1 \int_1^{\sqrt{y}} x^3 \cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 173) — $\frac{4\cos(1)}{3} + 2\sin(1) - \frac{7}{3}$

Es. 174 — $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 3x^3 \cos(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 174) — $1 - \cos 1$

Es. 175 — $\int_3^6 \int_{\frac{x-3}{3}}^1 e^{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Soluzione (Es. 175) — $\frac{3}{2}(e-1)$

Es. 176 — $\int_2^4 \int_{\frac{y-2}{2}}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 176) — $e-1$

Es. 177 — $\int_0^8 \int_{y^{1/3}}^2 \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 177) — $\frac{1}{4}\ln 17$

Es. 178 — $\int_0^8 \int_{x^{1/3}}^2 \frac{4}{1+y^4}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Soluzione (Es. 178) — $\ln 17$

Es. 179 — $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Es. 180 — $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Es. 181 — $\int_0^3 \int_{2x}^6 \sqrt{y^2+2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Soluzione (Es. 181) — $\frac{1}{6}\left(38^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right)$

Es. 182 — $\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{y^2} 6x - y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 182) — $-31/20$

Es. 183 — $\int_0^8 \int_{x^{1/3}}^2 \frac{1}{1+y^4} dy dx$

Soluzione (Es. 183) — $\frac{1}{4}\ln 17$

Es. 184 — Dato $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\pi], \sqrt{x} \le y \le \sqrt{\pi}\right\}$ calcolare $\iint_D \frac{\sin y^2}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Es. 185 — Integrare $\left(x^2-y^2\right)^2$ sul quadrato di vertici $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$

Es. 186 — Integrare xy su $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0, y > 0, x \leq y \leq 3x, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{3}{x}\right\}$.

Es. 187 — Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione continua. Interpretare la somma dei due integrali iterati

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

come l'integrale doppio di f su una regione D del piano. Mostrare che D è semplice rispetto ad y e scrivere la relativa formula di riduzione. (suggerimento l'assenza della funzione da integrale è voluta)

Es. 188 — Calcolare l'integrale $\int_D xydxdy$ con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq y-1, y \geq x^2-1\right\}$

Soluzione (Es. 188) — 27/8

6.1 Cambio di Variabili

Se un integrale non è risolvibile o è troppo difficili da risolvere anche con lo scambio di variabili, possiamo effettuare dei veri e proprio cambi di variabili,

In Analisi 1 quando applica un cambio di variabile all'interno di un integrale il differenziale dx viene modificato dall'effetto scala della nuova variabile, cioè con $t = x^2$ e differenziando membro a membro ricaviamo d$t = 2x\,\mathrm{d}x$.

Nel caso di integrali doppi, tripli, ... si utilizza il valore assoluto del determinante della matrice Jacobiana:

$$J(u,v) := \begin{pmatrix} \partial_u x(u,v) & \partial_v x(u,v) \\ \partial_u y(u,v) & \partial_v y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla x(u,v) \\ \nabla y(u,v) \end{pmatrix}$$

Nel seguito $|J(u,v)| := |\det[J(u,v)]|$

Esercizio 189

Sia R la regione del piano delimitata dalle curve $y = x^2, y = x^2/4, xy = 2, xy = 5$. Determinare l'area di R. (suggerimento fare il cambiamento di variabile $u = y/x^2, v = xy$)

Soluzione dell'esercizio 189

Determinoo $y(u,v)$ e le relative derivate:

$$u = \frac{y}{x^2} \Leftrightarrow y = ux^2 \Leftrightarrow y = u\left(\frac{v}{y}\right)^2 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{uv^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\sqrt[3]{v^2}}{3\sqrt[3]{u^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2uv}{3\left(\sqrt[3]{uv^2}\right)^2} = \frac{2\sqrt[3]{u}}{3\sqrt[3]{v}}$$

Determinoo $x(u,v)$ e le relative derivate:

$$v = xy \Leftrightarrow x = \frac{v}{y} \Leftrightarrow x = \frac{v}{ux^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{v}{u}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\sqrt[3]{v}}{3u^{\frac{4}{3}}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2}}$$

Determino gli estremi

$$y = x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = 1 \Leftrightarrow u = 1 \quad y = \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow u = \frac{1}{4}$$

$$xy = 2 \Leftrightarrow v = 2 \quad xy = 5 \Leftrightarrow v = 5$$

Cioè: $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $y \in [2,5]$, determino la Jacobiana:

$$J(u,v) = -\frac{\sqrt[3]{v}}{3u^{\frac{4}{3}}}\frac{2\sqrt[3]{u}}{3\sqrt[3]{v}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v^2}}\frac{\sqrt[3]{v^2}}{3\sqrt[3]{u^2}} = -\frac{2}{9u} - \frac{1}{9u} = -\frac{1}{3u}$$

$$|J(u,v)| = \frac{1}{3u}$$

Integro:

$$\iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^5 \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{3u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_2^5 \left[\frac{\ln u}{3}\right]_{u=\frac{1}{4}}^{u=1} \mathrm{d}v = \int_2^5 \frac{\ln 0 - \ln \frac{1}{4}}{3}\,\mathrm{d}v = \int_2^5 \frac{\ln 4}{3}\,\mathrm{d}v = \ln 4$$

Esercizio 190

Sia $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x+y \le 4, 0 \le x-y \le 1\right\}$. Calcolare $\iint_D (x+y)\sqrt{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione dell'esercizio 190

Determino $y(u,v)$ e $x(u,v)$

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \begin{cases} x = u-y \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \begin{cases} x = u - \frac{u-v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

Determino il valore assoluto della Jacobiana:

$$|J(u,v)| = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}$$

Integro:

$$\int_0^4 \int_0^1 u\sqrt{v}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \quad = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \sqrt{v}\,\mathrm{d}v\right)\left(\int_0^4 u\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{8}{3} = 2.66$$

Esercizio 191

Calcolare l'integrale

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 3x, 1 \le xy \le 3\right\}$$

suggerimento porre $u = y/x, v = xy$

Soluzione dell'esercizio 191

Ricordiamo la formula della Jacobiana $J(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases} \begin{cases} x = \frac{y}{u} \\ x = \frac{v}{y} \end{cases} \begin{cases} y = \sqrt{uv} \\ x = \frac{v}{\sqrt{uv}} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \end{cases}$$

$$J(u,v) = -\frac{v^2}{2(uv)^{\frac{3}{2}}}\frac{u}{2\sqrt{uv}} - \frac{v}{2\sqrt{uv}}\frac{1}{2\sqrt{uv}} = -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} = -\frac{1}{2u}$$

Ricordiamo di prendere la Jacobiana senza segno.

$$0 \le x \le y \le 3x \Leftrightarrow 0 \le \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \le \sqrt{uv} \le 3\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \\ \sqrt{v} \le \sqrt{uv}\sqrt{u} \le 3\sqrt{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, v \ge 0 \\ \sqrt{v} \le \sqrt{vu} \le 3\sqrt{v} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u > 0, v \ge 0 \\ 1 \le u \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow u \in [1,3]$$

$$1 \le xy \le 3 \Leftrightarrow 1 \le v \le 3 \Leftrightarrow v \in [1,3]$$

Integriamo:

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \int_1^3 \frac{v}{2u} \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_1^3 \frac{2}{u} \,\mathrm{d}u = 2\ln 3$$

Esercizio 192

Sia R la regione del piano costituita dal triangolo contenuto nel primo quadrante $x \ge 0, y \ge 0$ e delimitata dalla retta $x + y = 1$. Calcolare l'integrale

$$\int_R \sqrt{x+y}(x-3y)^2 dxdy$$

(Suggerimento: usando il cambio di variabile $u = x + y, v = x - 3y$)

Soluzione dell'esercizio 192

Inanzitutto risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3u+v}{4} \\ y = \frac{u-v}{4} \end{cases}$$

Calcoliamo la Jacobiana:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{d}{du}(\frac{3u+v}{4}) & \frac{d}{dv}(\frac{3u+v}{4}) \\ \frac{d}{du}(\frac{u-v}{4}) & \frac{d}{dv}(\frac{u-v}{4}) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}$$

Ricordiamo di prendere la Jacobiana senza segno.

Determiniamo gli estremi:

$$x + y = u < 1, \quad x = \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}v > 0 \Leftrightarrow v > -3u, \quad y = \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v > 0 \Leftrightarrow v < u$$

Integriamo:

$$\int_0^1 \int_{-3u}^{u} \frac{1}{4}\sqrt{u}v^2 dvdu = \int_0^1 \frac{7u^{\frac{7}{2}}}{3} du = \frac{14}{27}$$

Es. 193 — Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \le y \le 1-x\right\}$ ponendo $u = x + y, v = y - 2x$.

Es. 194 — Calcolare

$$\iint_D \sqrt{\frac{x}{y}} e^{\sqrt{xy}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,2], \frac{1}{x} \le y \le x\right\}$ Suggerimento: porre $u = \sqrt{xy}, v = \sqrt{x/y}$

6.2 Coordinate Polari

Un cambio di variabili importante è la trasformazione in coordinate polari è la seguente:

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta \quad (\rho, t) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[$$

La matrice Jacobiana è $\quad (\rho, t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\rho\sin t \\ \sin t & \rho\cos t \end{bmatrix}$ quindi $|J(\rho,t)| = \rho\cos^2 t + \rho\sin^2 t = \rho$

Esercizio 195

Calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x, 1 \le x^2 + y^2 \le 9\right\}$

Soluzione dell'esercizio 195

Usando il cambiamento di variabili in coordinate polari con $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$:

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin^2\theta$$

$$y \geq x \Leftrightarrow r\sin\theta \geq r\cos\theta \Leftrightarrow \sin\theta \geq \cos\theta \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$1 \leq (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq r^2 \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq r \leq 3$$

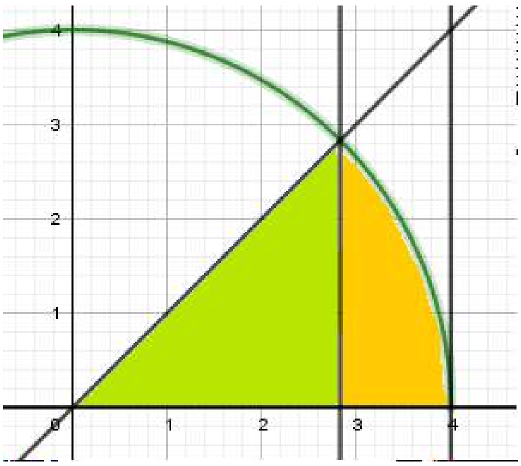
Ora effettuiamo il cambio di variabile ricordando di aggiungere la Jacobiana r:

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_1^3 r\cos\theta\sin^2\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\sin^2\theta\right]_{r=1}^{r=3} \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{26}{3}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{26}{9}\left[\sin^3\theta\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} = -\frac{26}{9}\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{13\sqrt{2}}{9}$$

Esercizio 196

Interpretare la seguente somma di due integrali iterati come l'integrale di una funzione su una opportuna regione del piano e poi calcolarlo:

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{2\sqrt{2}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



Soluzione dell'esercizio 196

Usiamo le coordinate polari $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$:

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{2\sqrt{2}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{r^2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^4 1\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [r]_{r=0}^{r=4}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\,\mathrm{d}\theta = [4\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} = \pi$$

Esercizio 197

Calcolare l'area dell'ellisse $(y-x)^2 + x^2 = 1$. Suggerimento: porre $y - x = u$.

Soluzione dell'esercizio 197

Usando il cambiamento consigliato: $u = y - x, y = x + u, x = x$

Calcoliamo la Jacobiana: $J(u,x) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$

$u^2 + x^2 \leq 1$

Usiamo le coordinate polari: $x = \rho\cos\theta, u = \rho\sin\theta, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$

$$\rho^2 \leq 1 \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

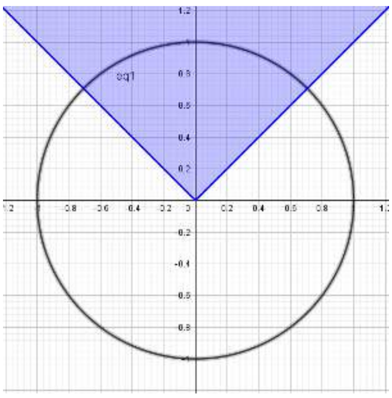
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

Esercizio 198

Calcolare l'integrale $\iint_E \sqrt{x^2+y^2+3}\,dx\,dy$ con $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1, y \geq |x|\right\}$

Soluzione dell'esercizio 198

Il dominio rappresenta un cerchio tagliato:



$$\begin{cases} y = x \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow y^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 1 = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow 2y^2 = 1 \Leftrightarrow x = -y = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Passiamo alle cordinate polari: $x = r\cos t, y = r\sin t$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow r \in [0,1]$$

Mentre per l'angolo otteniamo che: $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$

$$\begin{aligned}
\int_E \sqrt{x^2+y^2+3}\,dx\,dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 r\sqrt{(r\cos t)^2+(r\sin t)^2+3}\,dr\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^1 r\sqrt{r^2+3}\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{\left(r^2+3\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{8}{3} - \sqrt{3}\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8}{3} - \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}(8 - 3\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Es. 199 — Interpretare la seguente somma di due integrali iterati come l'integrale di una funzione su una opportuna regione del piano e poi calcolarlo:

$$\int_0^2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Soluzione (Es. 199) — $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

Es. 200 — Calcolare l'integrale $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x,y) \in R^2 \,:\, y \geq x, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}$

Soluzione (Es. 200) — $-\frac{7\sqrt{2}}{18}$

Es. 201 — Calcolare l'integrale $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y > x, 1 < x^2+y^2 \leq 16\right\}$

Soluzione (Es. 201) — $-\frac{7}{\sqrt{2}}$

Es. 202 — Calcolare I'integrale $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq x, 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\right\}$

Soluzione (Es. 202) — $-\frac{19}{9\sqrt{2}}$

Es. 203 — Calcolare l'integrale $\iint_E \sqrt{x^2+y^2+3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ con $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \leq 1, y \geq |x|\right\}$

Soluzione (Es. 203) — $\frac{\pi}{6}(8-3\sqrt{3})$

Es. 204 — Calcolare $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ con $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\right\}$

Soluzione (Es. 204) — $\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-4}\right)$

Es. 205 — Interpretare il seguente integrale iterato come l'integrale doppio di una funzione su un dominio opportuno calcolarlo: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Soluzione (Es. 205) — $\pi + \frac{\pi^2}{4}$

Es. 206 — Interpretare il seguente integrale iterato come un opportuno integrale doppio e calcolarlo: $\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Es. 207 — Evaluate $\iint_D y^2+3x\,\mathrm{d}A$ where D is the region in the 3rd quadrant between $x^2+y^2=1$ and $x^2+y^2=9$.

Es. 208 — Evaluate $\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}A$ where D is the bottom half of $x^2+y^2=16$.

Es. 209 — Evaluate $\iint_D 4xy-7\,\mathrm{d}A$ where D is the portion of $x^2+y^2=2$ in the 1st quadrant.

6.3 Area di una Disequazione Polare

Sia una disequazione polare del tipo $r \leq f(\theta)$.

L'area della suddetta disequazione è:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{f(\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Esercizio 210

Calcolare l'area della regione racchiusa dalla curva espressa in coordinate polari ρ, t dall'equazione

$$\rho = 5t \quad t \in [0, 2\pi]$$

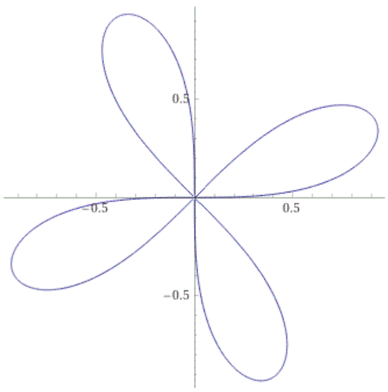
e dal segmento che congiunge l'origine con il punto di coordinate $(2\pi \cdot 5, 0)$.

Soluzione dell'esercizio 210

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (5t)^2\,\mathrm{d}t = 1033.54$$

Esercizio 211

Determinare l'area della regione racchiusa dalla curva definita in coordinate polari dal raggio $\rho(t) = \sqrt{\sin 4t}, t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$



Soluzione dell'esercizio 211

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 4t}{4} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

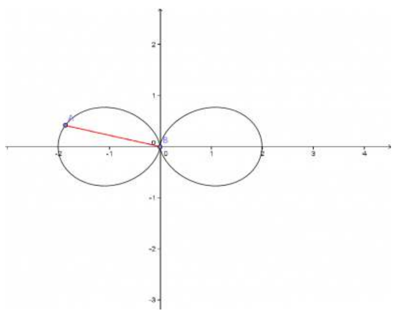
Es. 212 — Calcolare l'area della regione delimitata dalla curva $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin t), t \in [0, \pi]$

Es. 213 — Calcolare l'area sottesa alla disequazione polare $\rho(t) \leq 1 + \cos(2\theta)$

Es. 214 — Area delimitata dalla circonferenza $r = \theta$ per $0 \leq \theta \leq \pi$

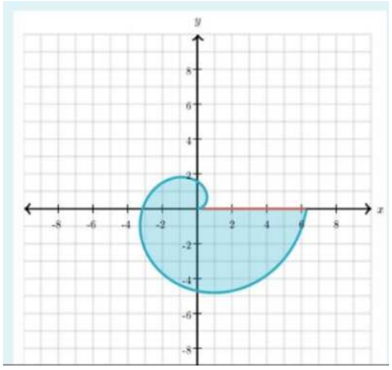
Es. 215 — Area delimitata dalla circonferenza $r = 2\sin\theta$ per $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$

Es. 216 — Area racchiusa da un lobo della rosa a tre lobi $r = \cos 3\theta$



Es. 217 — Calcolare l'area della regione delimitata dalla curva $\left(\cos t, \sin^3 t\right)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$

Es. 218 — Una regione del piano D è delimitata dal bordo orientato positivamente costituito dalla curva in coordinate polari $(3t\cos t, 3t\sin t), t \in [0, 2\pi]$ giustapposta al segmento che congiunge $(6\pi, 0)$ a $(0, 0)$. Calcolare l'area di D.

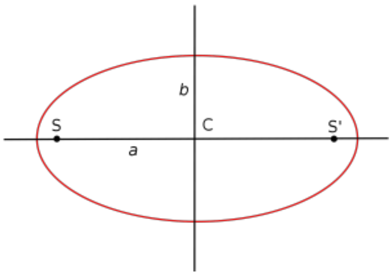


Soluzione (Es. 218) — $12\pi^3$

6.4 Coordinate ellittiche

Ricordando che l'ellisse ha equazione: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Introduciamo una variante delle coordinate polari, le coordinate ellittiche: $x = a\rho\cos\theta, \quad y = b\rho\sin\theta$ La Jacobiana associata alla trasformazione è $J = ab\rho$ da cui: $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$



Esercizio 219

Calcolare l'area della figura limitata dalla curva $\left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}$.

Soluzione dell'esercizio 219

Passiamo in coordinate ellittiche $x = 2\rho\cos\theta, y = 3\rho\sin\theta, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\cdot 3\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$:

Determiniamo gli estremi di integrazione:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 \le \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} &\Leftrightarrow \rho^4 \le (\rho\cos\theta)^2 - (\rho\sin\theta)^2 \\
&\Leftrightarrow \rho^4 \le (\rho\cos\theta)^2 - (\rho\sin\theta)^2 = \rho^2\left(1 - 2(\sin\theta)^2\right) \\
&\Leftrightarrow \rho^4 \le \rho^2(\cos(2\theta)) \Leftrightarrow \rho \le \sqrt{\cos(2\theta)}
\end{aligned}$$

$$\rho \in [0, \sqrt{\cos(2\theta)}] \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\cdot 2\cdot 3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 24\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta = 24\cdot\frac{1}{4} = 6$$

Es. 220 — Calcolare l'integrale doppio $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dove l'insieme di integrazione è definito come

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + 2y^2 < 1, x > 0, y > 0\right\}$$

6.5 Baricentro di aree

Un integrale "singolo" permette di calcolare l'area sottesa tra se stessa e l'asse della variabile di integrazione, ma non permette di calcolare la massa.

Un integrale doppio permette di calcolare l'area e/o la massa all'interno di un dominio semplice.

Definiamo quindi una funzione densità $\rho(x,y)$ essa può rappresentare anche l'altezza e quindi l'integrale doppio avrà la funzione di calcolare il volume.

Se la funzione ρ è integrabile su D, le somme di Riemann convergono, al tendere a zero dell'ampiezza della partizione, verso l'integrale doppio di f su D, che è quindi la massa della lamina:

$$\text{massa}(D) = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Se vogliamo calcolare semplicemente l'area $\rho = 1$.

Come nel caso degli Integrali Curvilinei definiamo:

$\bar{x} = \dfrac{\iint_D \rho(x,y) \cdot x \cdot dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$	$\bar{y} = \dfrac{\iint_D \rho(x,y) \cdot y \cdot dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$

In particolare, se la densità è costante, allora si elide dalla frazione e si ottengono le coordinate del baricentro geometrico o centroide di D:

$\bar{x} = \dfrac{\iint_D x \cdot dxdy}{\iint_D dxdy}$	$\bar{y} = \dfrac{\iint_D y \cdot dxdy}{\iint_D dxdy}$

Esercizio 221

Consideriamo una lamina omogenea di densità $\delta(x,y) = 4 - x$ che occupa la regione del piano $D = \left\{(x,y) \,:\, 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\right\}$. Calcolare la massa ed il baricentro.

Soluzione dell'esercizio 221

$y \in \left[2x^2, x^2+1\right]$

Per determinare gli estremi x troviamo i punti ove le due funzioni si toccano:

$2x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$x \in [-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{x+1} (4-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^3 - 4x^2 - x + 4\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{2x^2+1}^{x^2+1} x(4-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{15}$$

$$\int_{0}^{1} \int_{2x^2+1}^{x^2+1} y(4-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{3x^5}{2} - 6x^4 - x^3 + 4x^2 - \frac{x}{2} + 2 = \frac{64}{15}$$

$$B = \left(-\frac{4}{15}\frac{3}{16}, \frac{64}{15}\frac{3}{16}\right) = \left(-\frac{1}{20}, \frac{4}{5}\right)$$

Esercizio 222

Trovare l'ascissa del baricentro di $D = \left\{(x,y) : 6x^2 \leq y \leq 2x\right\}$

Soluzione dell'esercizio 222

Imponendo $6x^2 = 2x$ si trova $x = \frac{1}{3}, 0$ gli estremi dell'integrale in dx

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{1}{3}} \int_{6x^2}^{2x} x\,dy\,dx}{\int_0^{\frac{1}{3}} \int_{6x^2}^{2x} dy\,dx} = \frac{\int_0^{\frac{1}{3}} \left(2x^2 - 6x^3\right) dx}{\int_0^{\frac{1}{3}} \left(2x - 6x^2\right) dx} = \frac{1/162}{1/27} = \frac{1}{6}$$

Es. 223 — Trovare il baricentro della regione $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq x\right\}$

Es. 224 — Trovare il baricentro della regione $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\right\}$

Soluzione (Es. 224) — $G = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

Es. 225 — Trovare il baricentro della regione $D = \left\{(x,y) : 1x^2 \leq y \leq 8x\right\}$

Soluzione (Es. 225) — $\overline{x} = 4$

Capitolo 7

Volumi e integrali tripli

Per il calcolo concreto dell'integrale in tre variabili, abbiamo diversi modi di ordinare le variabili: a ciascuna di esse corrisponde una formula di riduzione a tre integrazioni semplici successive. Inoltre possiamo interpretare tali formule di riduzione pensando di eseguire dapprima una integrazione doppia e successivamente una semplice (o viceversa).

Il principio di Cavalieri (o assioma dell'equiestensione) afferma che se due figure solide si possono disporre, rispetto ad un piano d'appoggio, in modo che, intersecandole con un qualunque altro piano parallelo a quello d'appoggio, si ottengono sezioni aventi la stessa area, allora i due solidi sono equiestesi, ovvero hanno lo stesso volume.

Integrazione per fili

$$\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_r^s f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Il significato del primo integrale iterato è facile da comprendere: si esegue prima l'integrazione più interna, rispetto alla variabile *z*, tenendo fissate *x* e *y*. Il risultato è una funzione delle due variabili *x* e *y*,

$$L(x,y) = \int_r^s f(x,y,z)dz$$

che verrà poi integrata in un secondo tempo.
Poiché la prima integrazione avviene lungo il segmento in cui *x* e *y* sono fissati e *z* varia fra *r* e *s* tale metodo di calcolo prende il nome di *integrazione per fili*.

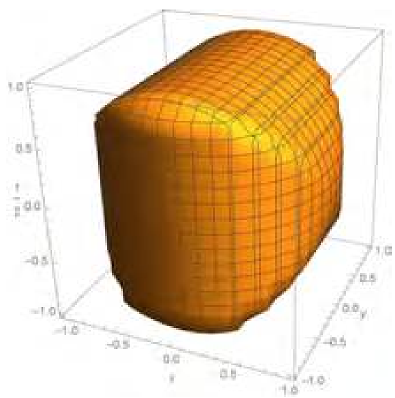
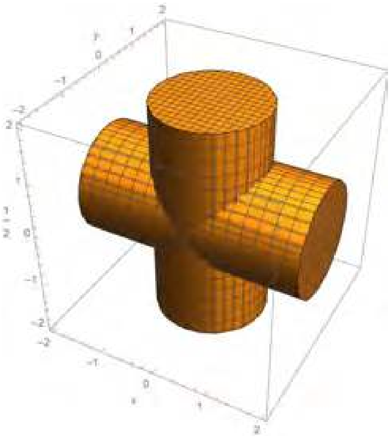
Integrazione per strati

$$\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\iint_{[c,d]\times[r,s]} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x$$

Nell'*integrazione per strati* invece, si esegue prima un integrale doppio sul rettangolo del piano in cui *x* è fissata, $\{x\} \times [c, d] \times [r, s]$, ottenendo così una funzione della sola variabile *x*, che viene successivamente integrata sull'intervallo $[a, b]$.

Esercizio 226

Calcolare il volume del solido $D = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, x^2+z^2 \leq 1\right\}$

Soluzione dell'esercizio 226

Determiniamo gli estremi: $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ $\quad z \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ $\quad x \in [-1,1]$ Integriamo:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x =| \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 4\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \left[4\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{16}{3}$$

O in alternativa sfruttando le simmetrie:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 8\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 8\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$
$$= 8\int_{0}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = 8\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{16}{3}$$

Esercizio 227

Calcolare il volume del solido $D = \left\{(x,y,z) : x \in [0,4], y \in [-4,4], 0 \leq z \leq 5y^2\right\}$

Soluzione dell'esercizio 227

Determiniamo gli estremi: $x \in [0,4]$ $\quad y \in [-4,4]$ $\quad z \in \left[0, 5y^2\right]$

Integriamo:

$$\int_{0}^{4}\int_{-4}^{4}\int_{0}^{5y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \left(\int_{-4}^{4}\int_{0}^{5y^2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\right)\left(\int_{0}^{4}\mathrm{d}x\right) = \left(\int_{-4}^{4} 5y^2\mathrm{d}y\right)4$$
$$= 4\cdot\frac{640}{3} = \frac{2560}{3}$$

Notiamo che dato che è possibile separare gli integrali in quanto è possibile individuare una $f(x)$ che non dipende da y e z:

Esercizio 228

Calcolare l'integrale $\iiint_D xze^{zy^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, dove $D = \left\{(x,y,z) : x,z \in [0,1], x^2 \leq y \leq 1\right\}$

Soluzione dell'esercizio 228

Determiniamo gli estremi: $x \in [0,1] \Rightarrow [0,\sqrt{y}]$ $\quad z \in [0,1]$ $\quad y \in \left[x^2 \leq y \leq 1\right] \Rightarrow [0,1]$

Integriamo:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} xze^{zy^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{zx^2e^{zy^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \frac{yze^{zy^2}}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{e^{zy^2}}{4}\right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{e^z-1}{4}\,\mathrm{d}z = \left[\frac{e^z-z}{4}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{e-2}{4}$$

Esercizio 229

Calcolare il volume del solido delimitato da $\left\{(x,y,z) : y = x^2\right\}$ e dai piani $x=0, y=0, z=0, x+z=1$

Soluzione dell'esercizio 229

Determiniamo gli estremi: $y \in \left[0, x^2\right] \quad z \in [0, 1-x] \quad x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2[z]_{z=0}^{z=1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}$$

Esercizio 230

Calcolare l'integrale $\iiint_D 6xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dove D è la regione dello spazio che sta sotto il piano $z = 1+x+y$ e sopra la regione del piano xy delimitata dalle curve $y = \sqrt{x}, y = 0$ e $x = 1$

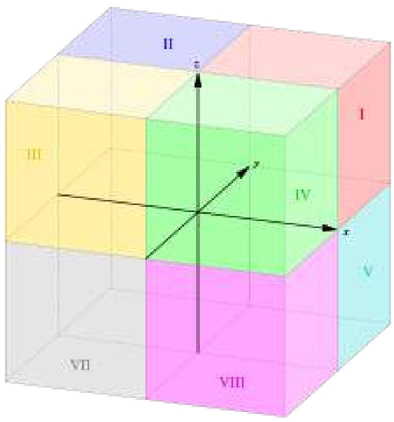
Soluzione dell'esercizio 230

Determiniamo gli estremi: $y \in [0, \sqrt{x}] \quad z \in [0, 1+x+y] \quad x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1+x+y} 6xy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 6xy(x+y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3x^3 + 2x^{\frac{5}{2}} + 3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{65}{28}$$

Esercizio 231

Calcola il volume del tetraedro nel primo ottante limitato dalle coordinate del piano che passano per $(5,0,0), (0,4,0)$, e $(0,0,4)$.



Soluzione dell'esercizio 231

Ricordando che come primo ottante si intende l'ottante verde della figura sopra.

Possiamo determinnare il piano attraverso la risoluzione della seguente equazione:

$$\det\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{bmatrix} = 0$$

Cioè:

$$\det\begin{bmatrix} x-5 & y & z \\ -5 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 16x+20y+20z-80=0 \Leftrightarrow 4x+5y+5z-20=0$$

Da cui determino gli estremi: $z \in \left[0, -\frac{4x}{5} - y + 4\right]$ $y \in \left[0, -\frac{4x}{5} + 4\right]$ $x \in [0,5]$

$$\int_0^5 \int_0^{-\frac{4x}{5}+4} \int_0^{-\frac{4x}{5}-y+4} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \int_0^{5-z} \left(-\frac{4x}{5} - y + 4\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^5 \left(\frac{8x^2}{25} - \frac{16x}{5} + 8\right) \mathrm{d}x = \frac{40}{3}$$

Es. 232 — Calcolare l'integrale

$$\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad \Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x, 0 \le z \le x\right\}$$

Es. 233 — Evaluate the integral $\int_0^9 \int_0^3 \int_{2y}^6 \frac{6\cos\left(x^2\right)}{5\sqrt{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ by changing the order of integration in an appropriate way.

Soluzione (Es. 233) — $\frac{9\sin 36}{5}$

Es. 234 — Evaluate the integral by changing the order of integration in an appropriate way.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \frac{\pi e^{2x} \sin\left(\pi y^2\right)}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Soluzione (Es. 234) — 4

Es. 235 — Find the volume of the region between the planes $x+y+z=2$ and $3x+3y+z=6$ in the first octant.

Soluzione (Es. 235) — 8/3

Es. 236 — Calcolare $\iiint_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ dove E è il solido delimitato dai piani$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

Soluzione (Es. 236) — 1/24

Es. 237 — Calcolare il volume del solido delimitato da $\left\{(x,y,z) \,:\, y=x^2\right\}$ e dai piani $x=0, y=0, z=0, x+z=1$

Soluzione (Es. 237) — 1/12

Es. 238 — Il tetraedro appartenente al primo ottante delimitato dai piani delle coordinate e dal piano passante per $(1,0,0), (0,2,0)$ e $(0,0,3)$

7.1 Cambio di variabili - coordinate cilindriche

Anche le considerazioni relative al cambiamento di variabili negli integrali doppi si possono estendere agli integrali tripli (e a integrali di ordine più elevato). Consideriamo una trasformazione $\boldsymbol{T}$ di classe C^1 dallo spazio R^3 in sé, descritta dalle relazioni

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = T\left(\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{bmatrix}$$

Definiamo lo jacobiano di T come il determinante della matrice jacobiana

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = detJ_T = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

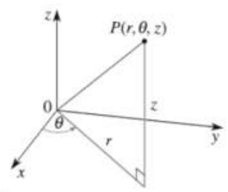
Per le trasformazioni del piano, lo jacobiano rappresenta il fattore (puntuale) di trasformazione delle aree secondo $\boldsymbol{T}$; analogamente, in dimensione tre lo jacobiano rappresenta il fattore infinitesimale di trasformazione dei volumi.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_S f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,dw$$

Coordinate cilindriche

In R^3 le *coordinate cilindriche* (r, θ, z) sono legate alle coordinate cartesiane dalle relazioni

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = z \end{cases}$$



dove $r \geq 0, \theta \in [0,2\pi], z \in R$

Lo Jacobiano associato alla trasformazione è:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = det\begin{bmatrix} cos\theta & -rsin\theta & 0 \\ sin\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

L'uso delle coordinate cilindriche è particolarmente utile per trattare domini dello spazio con simmetria assiale rispetto all'asse z.

$$\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,\mathrm{d}r\,\theta\,\mathrm{d}z$$

Esercizio 239

Calcolare l'integrale $\iiint_D \sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, dove D è la regione delimitata dal paraboloide $y = x^2+z^2$ e dal piano $y = 4$

Soluzione dell'esercizio 239

Usiamo le coordinate cilindriche con y e z scambiate $x = \rho\cos\theta, z = \rho\sin\theta, y = y, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta$:

Determiniamo gli estremi:

$$y \in [0,4] \quad \rho \in [0,\sqrt{y}] \quad \theta \in [0,2\pi]$$

$$\iiint_D \sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}y\right) = 2\pi\left(\int_0^4 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}\,\mathrm{d}y\right) = \frac{128}{15}\pi$$

Esercizio 240

Un solido E giace all'interno del cilindro $x^2+y^2=4$, sotto il piano $z=2$ e sopra il cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. La densità in ogni punto vale $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$. Calcolare la massa di E data da

$$\iiint_E \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Soluzione dell'esercizio 240

Usiamo le coordinate cilindriche $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z, x^2+y^2=\rho^2$, con range massimi $\theta\in[0,2\pi], \rho\geq 0$, determino gli estremi:

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 2 \Leftrightarrow \rho\leq z\leq 2$$

$$x^2+y^2\leq 4 \Leftrightarrow \rho^2\leq 4^2 \Leftrightarrow \rho\leq 2$$

$$z\in[\rho,2]\quad \rho\in[0,2]\quad \theta\in[0,2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^\rho \rho^2\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^2\int_\rho^2\rho^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\right)=2\pi\left(\int_0^2\left(2\rho^3-\rho^4\right)\mathrm{d}\rho\right)=\frac{16\pi}{5}$$

Esercizio 241

Calcolare il volume di

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x^2+3y^2+z^2\leq 1, 2x^2+3y^2\leq\frac{1}{2}\right\}$$

Soluzione dell'esercizio 241

Usiamo le coordinate polari ellittiche: $x=\rho\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, y=\rho\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta, z=z$, con range massimi $\theta\in[0,2\pi], \rho\geq 0$, determino gli estremi:

$$2x^2+3y^2\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2+3\left(\rho\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2=\rho^2\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\rho\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$2x^2+3y^2+z^2\leq 1\Leftrightarrow 2\left(\rho\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)^2+3\left(\rho\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)^2+z^2\leq 1$$
$$\Leftrightarrow\rho^2+z^2\leq 1\Leftrightarrow z\in\left[-\sqrt{1-\rho^2},\sqrt{1-\rho^2}\right]$$

Ricordando che $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$ possiamo integrare:

$$\int_A\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\sqrt{6}}{6}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_{-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}}\frac{\sqrt{6}}{6}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\right)$$
$$=2\pi\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)=2\pi\frac{\sqrt{6}}{6}\left[-\frac{2\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$=2\pi\frac{\sqrt{6}}{6}\left(-\frac{2\sqrt{6}}{12}+\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{3}}$$

Esercizio 242

Calcolare

$$\iiint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\quad T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 1, 0\leq y\leq 1-x-z\right\}$$

Soluzione dell'esercizio 242

Si tratta di un cilindro "tagliato" da due piani: $y = 0, y = 1 - x - z$.

Per calcolare l'integrale dobbiamo dividerlo in 2 integrali: $\iiint_T x \, dx \, dy \, dz = \iiint_{T_1} x \, dx \, dy \, dz + \iiint_{T_2} x \, dx \, dy \, dz$

Con T_1 l'area con $x > 0, y > 0$, mentre T_2 il resto della superficie.

a) $\int_{T_1} x \, dx \, dy \, dz = \int_{\substack{x^2+z^2 \leq 1 \\ \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y < 2}} \int_0^{1-x-z} x \, dy \, dx \, dz$ che lo risolviamo passando in coordinate polari: $x = \rho \cos\theta, z = \rho \sin\theta, \rho \in [0,1]$

Determino gli estremi $t \in [0, 1 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta]$

$$
\begin{aligned}
\iiint_{T_i} dx \, dy \, dz &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta} \rho^2 \cos\theta \, dy \, d\rho \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \cos\theta (1 - \rho\cos\theta - \rho\sin\theta) \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \cos\theta - \rho^3 \cos^2\theta - \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3} - \frac{\cos^2\theta}{4} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{4} \, d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3} - \frac{\cos^2\theta}{4} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{4} \, d\theta = \left[\frac{\sin\theta}{3} - \frac{\theta + \sin\theta\cos\theta}{8} - \frac{\cos^2\theta}{8} \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=2\pi} \\
&= -\frac{3\pi}{16} - \frac{5}{24} = -\frac{9\pi + 10}{48}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\int_{T_2} x \, dx \, dy \, dz &= \int_{\substack{z \leqslant 1-x \\ \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y = 2}} \int_0^{1-x-z} x \, dy \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-z} x \, dy \, dz \, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1 - x - z) \, dz \, dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{24} = \frac{2}{48}
\end{aligned}
$$

Esercizio 243

Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x \geq 0, x + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$ (a) Spiegare brevemente di che insieme si tratta o abbozzarne un disegno;

(b) Calcolare

$$\iiint_E z^2 \, dx \, dy \, dz$$

Soluzione dell'esercizio 243

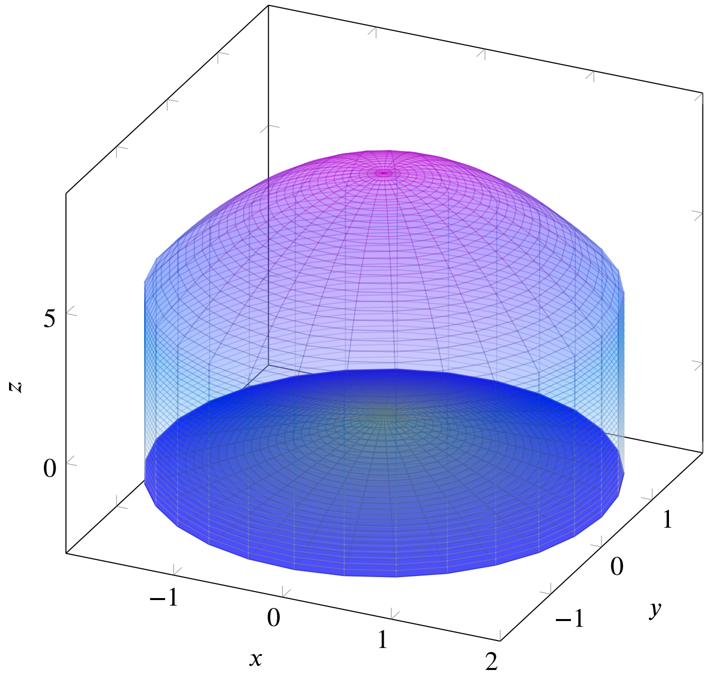
Usiamo le coordinate polari con $y = \rho\cos\theta$ e $z = \rho\sin\theta$

Determiniamo gli estremi: $x + \rho^2 \leq 1, x \in \left[0, 1 - \rho^2\right], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
\iiint_E z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho^2} \rho^3 \sin^2\theta \, dx \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho^3 \sin^2\theta\right) \left(1 - \rho^2\right) d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4 \sin^2\theta}{4} - \frac{\rho^6 \sin^2\theta}{6} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{4} - \frac{\sin^2\theta}{4} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{12} \, d\theta = \frac{1}{12} \left[-\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

Esercizio 244

Calcolare il volume del solido che sta sopra il cono $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ (attenzione c'è il segno meno davanti!), sotto il paraboloide $z = 8-\left(x^2+y^2\right)$ e dentro i cilindro $x^2+y^2=4$.



Soluzione dell'esercizio 244

Per integrale dividiamo in 3 integrali il volume V: Ci che rappresenta il cilindro, Co che rappresenta il conto e P che rappresenta il paraboloide.

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_P \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_{Ci} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \iiint_{Co} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

L'intersezione tra il cono ed il cilindro si ha quando $x^2+y^2=4$ ed tra il clindro ed il paraboloide. Sostituendo quindi si ottiene $z=-\sqrt{x^2+y^2}=-\sqrt{4}=-2$ per il cono e $z=8-4=4$ per il paraboloide.

In coordinte polari abbiamo che il cono assume equazione $z=-\rho$, il cilindro $\rho^2=4$, il paraboloide $z=8-\rho^2$.

Con i seguenti estremi: $\boldsymbol{Ci}=[0,2\pi]\times[0,2]\times[-2,4]$, $\boldsymbol{Co}=[0,2\pi]\times[0,2]\times[-2,-\rho]$, $\boldsymbol{P}=[0,2\pi]\times[0,2]\times[4,8-\rho^2]$.

Cioè:

$$\iiint_{Ci} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-2}^4 \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 24\pi$$

$$\iiint_{Co} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-2}^{-\rho} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\pi$$

$$\iiint_{P} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{4}^{8-\rho^2} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 8\pi$$

Infine sommiamo:

$$\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{88}{3}\pi$$

O in alternativa tramite un unico integrale:

$$\iiint_C \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-\rho}^{8-\rho^2} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{88}{3}\pi$$

Es. 245 — Un solido E giace all'interno del cilindro $x^2+y^2=1$, sotto il piano $z=4$ e sopra il paraboloide $z=1-x^2$. La densità in ogni punto vale $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare la massa di E data da

$$\iiint_E \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Soluzione (Es. 245) — $\frac{12\pi}{5}$

Es. 246 — Calcolare il volume di

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2\le 4^2, y\ge 0, 0\le z\le y+2y^2\right\}$$

Soluzione (Es. 246) — $64\pi+\frac{128}{3}$

Es. 247 — Calcolare

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Es. 248 — Calcolare l'integrale

$$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove Ω è la regione limitata delimitata da $x=1-y^2-z^2$ e da $x=0$.

Es. 249 — Calcolare il volume della regione limitata interna al cilindro $x^2+y^2=1$, compresa tra il paraboloide $z=x^2+y^2-2$ e il piano $x+y+z=4$.

Es. 250 — Sia Ω la regione di $\mathbb{R}^3$ contenuta nel semispazio $z\ge 0$ tra la superficie $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ e la sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{20}$. Calcolare

$$\iiint_E z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Es. 251 — Calcolare l'integrale di $f(x,y,z)=yz$ sulla regione Ω che sta sopra il piano $z=0$, sotto il piano $z=y$ e dentro il cilindro $x^2+y^2=4$

Es. 252 — Find the volume of the region cut from the solid elliptical cylinder $16x^2+y^2\le 16$ by the xy -plane and the plane $z=x+4$.

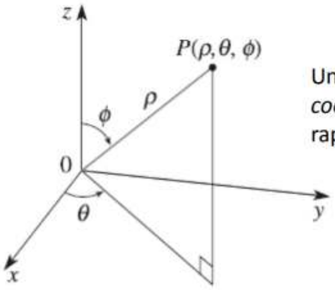
Soluzione (Es. 252) — 16π

Es. 253 — Evaluate $\iiint_E 4xy\,\mathrm{d}v$ where E is the region bounded by $z=2x^2+2y^2-7$ and $z=1$

Es. 254 — Evaluate $\iiint_E z\,\mathrm{d}v$ where E is the region between the two planes $x+y+z=2$ and $x=0$ and inside the cylinder $y^2+z^2=1$

Es. 255 — Evaluate $\iiint_E e^{-x^2-z^2}\,\mathrm{d}v$ where E is the region between the two cylinders $x^2+z^2=4$ and $x^2+z^2=9$ with $1\le y\le 5$ and $z\le 0$

7.2 Coordinate sferiche



Un altro sistema di coordinate in R^3 è quello delle *coordinate sferiche*, a in cui ogni punto P è rappresentato dalla terna (r, ϕ, ϑ):

$$\begin{cases} x = r sin\phi cos\theta \\ y = r sin\phi sin\theta \\ z = r cos\phi \end{cases}$$

Il valore di r è la distanza dall'origine di P, ϕ (la colatitudine) è l'angolo che la retta passante per O e P forma col semiasse positivo delle z; infine ϑ (la longitudine) è la coordinata angolare della proiezione del segmento OP sul piano $z = 0$. ϑ ha quindi lo stesso significato che nelle coordinate cilindriche. Si ha $r \geq 0$, $\phi \in [0, \pi]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$.

Nelle coordinate sferiche si ha che $x^2+y^2+z^2 = (r\sin\phi\cos\theta)^2+(r\sin\phi\sin\theta)^2+(r\cos\phi)^2 = (r\sin\phi)^2+(r\cos\phi)^2 = r^2$

La matrice Jacobiana associata alla trasformazione è:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| = \det\begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) & \rho\cos(\theta)\cos(\phi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix} = \rho^2\sin\phi$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_S f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r^2\sin\phi\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Esercizio 256

Usare il cambiamento in coordinate sferiche per calcolare l'integrale

$$\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove B è la palla di centro l'origine e raggio 1.

Soluzione dell'esercizio 256

Il cambiamento in coordinate sferiche è: $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$

Determiniamo gli estremi: $\rho \in [0,1], \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$

$$e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = e^{\left(\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}} = e^{\rho^3}$$

$$\begin{aligned}\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\right) \\ &= 2\pi\left(\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right) = 4\pi\left[\frac{e^{\rho^3}}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = 4\pi\left(\frac{e-1}{3}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 257

Usare il cambiamento in coordinate sferiche centrate nell'origine per calcolare il volume del solido che sta sopra il cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e sotto la sfera di centro $(0,0,1/2)$ e raggio $1/2$ la cui equazione è $x^2+y^2+z^2 = z$

Soluzione dell'esercizio 257

$z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2 = z$

Il cambiamento in coordinate sferiche è: $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$

Ricordando che coordinate sferiche hanno questo range massimo: $\phi \in [0,\pi], \theta \in [0,2\pi], \rho \geq 0$ determino gli estremi:

$$\begin{aligned} z \geq \sqrt{x^2+y^2} &\Leftrightarrow \rho\cos\phi \geq \sqrt{(\rho\sin\phi\cos\theta)^2+(\rho\sin\phi\sin\theta)^2} \Leftrightarrow \rho\cos\phi \geq \rho\sin\phi \Leftrightarrow \phi \leq \frac{\pi}{4} \\ x^2+y^2+z^2 \leq z &\Leftrightarrow (\rho\sin\phi\cos\theta)^2+(\rho\sin\phi\sin\theta)^2+(\rho\cos\phi)^2 \leq \rho\cos\phi \Leftrightarrow (\rho\sin\phi)^2+(\rho\cos\phi)^2 \leq \rho\cos\phi \\ &\Leftrightarrow \rho^2 \leq \rho\cos\phi \Leftrightarrow \rho \leq \cos\phi \end{aligned}$$

$$\rho \in [0,\cos\phi], \phi \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \theta \in [0,2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\phi} \rho^2\sin\phi\, \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos\phi} \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) = \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\rho^3\sin t}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi}\mathrm{d}\phi\right)2\pi \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^3\phi\sin\phi}{3}\mathrm{d}\phi\right)2\pi = 2\pi\left[-\frac{\cos^4\phi}{12}\right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Esercizio 258

Calcolare l'integrale

$$\iiint_{B(0,1]} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Soluzione dell'esercizio 258

Passiamo alle coordinate sferiche: $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi, \rho \in [0,1], \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$

Determiniamo gli estremi: $\phi \in [0,\pi], \theta \in [0,2\pi]$

Facciamo il cambio di variabile:

$$\begin{aligned} \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \left((\rho\sin\phi\cos\theta)^2+(\rho\sin\phi\sin\theta)^2+(\rho\cos\phi)^2\right)^{\frac{3}{2}}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left((\rho\sin\phi)^2+(\rho\cos\phi)^2\right)^{\frac{2}{2}}\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\rho^2\right)^{\frac{2}{2}}\bar{\rho}^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \rho^5\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Integriamo:

$$\begin{aligned} \iiint_{B(0,1]}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho^5\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1\rho^5\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Es. 259 — Calcolare l'integrale

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove Ω è la regione limitata contenente il punto $(0,0,1)$ delimitata da $x^2+y^2+z^2 = 2z$ e da $z^2 = x^2+y^2$

Es. 260 — Calcolare l'integrale

$$\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove Ω è la regione limitata racchiusa nella palla $x^2+y^2+z^2 \leq 3$ e che si trova sopra il cono $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$

Es. 261 — Usare il cambiamento in coordinate sferiche per calcolare l'integrale

$$\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Soluzione (Es. 261) — $4\pi\left(\frac{e-1}{3}\right)$

Es. 262 — Evaluate $\iiint_E 10xz+3\,\mathrm{d}v$ where E is the region portion of $x^2+y^2+z^2=16$ with $z\geq 0$.

Es. 263 — Evaluate $\iiint_E x^2+y^2\,\mathrm{d}v$ where E is the region portion of $x^2+y^2+z^2=4$ with $y\geq 0$.

Es. 264 — Evaluate $\iiint_E 3z\,\mathrm{d}v$ where E is the region below $x^2+y^2+z^2=1$ and inside $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Es. 265 — Evaluate $\iiint x^2\,\mathrm{d}v$ where E is the region above $x^2+y^2+z^2=36$ and inside $z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$.

7.3 Coordinate ellissoidi

Ricordando che un ellissoide ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

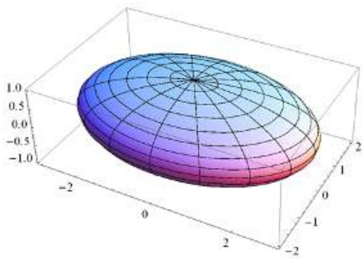
Introduciamo la seguente trasformazione, le coordinate ellissoidi:

$$x=a\rho\sin\phi\cos\theta \quad y=b\rho\sin\phi\sin\theta$$

$$z=c\rho\cos\phi$$

La Jacobiana associata alla trasformazione è $J=abc\rho^2\sin\phi$ da cui:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=abc\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$



Esercizio 266

Determinare il volume del solido delimitato dalla curva:

$$9x^2+4y^2+25z^2=1$$

Soluzione dell'esercizio 266

Il cambiamento in coordinate ellissoidi è: $x=\frac{\rho\sin\phi\cos\theta}{3}, y=\frac{\rho\sin\phi\sin\theta}{2}, z=\frac{\rho\cos\phi}{5}, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\rho^2\sin\phi\frac{1}{3\cdot 2\cdot 5}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

$$\iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3\cdot 2\cdot 5}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{30}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\phi}{3}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{30}\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{30}\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{45}\pi$$

7.4 Baricentro di volumi

Come abbiamo visto per l'integrale doppio si ha che:

$$\text{Volume}(\Omega)=\iiint_\Omega 1d\Omega$$

$$\text{Massa}(\Omega) = \iiint_\Omega \rho(x,y,z) d\Omega$$

Baricentro

$$\overline{x} = \frac{\iiint_\Omega \rho(x,y,z) x \, d\Omega}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z) \, d\Omega} \qquad \overline{y} = \frac{\iiint_\Omega \rho(x,y,z) y \, d\Omega}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z) \, d\Omega} \qquad \overline{z} = \frac{\iiint_\Omega \rho(x,y,z) y \, d\Omega}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z) \, d\Omega}$$

Baricentro geometrico:

$$\overline{x} = \frac{\iiint_\Omega x \, d\Omega}{\iiint_\Omega 1 \, d\Omega} \qquad \overline{y} = \frac{\iiint_\Omega y \, d\Omega}{\iiint_\Omega 1 \, d\Omega} \qquad \overline{z} = \frac{\iiint_\Omega y \, d\Omega}{\iiint_\Omega 1 \, d\Omega}$$

Esercizio 267

Calcolare il baricentro del seguente solido $S = \left\{(x,y) : 1 \le x^2 + 4y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0, z \in [0,2]\right\}$ dove la densità è $\mu(x,y,z) = ky$

Soluzione dell'esercizio 267

Passiamo in coordinate polari cilindriche: $x = \rho\cos\theta \quad y = \dfrac{\rho\sin\theta}{2} \quad z = z, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$, con $J = 2\rho$

Essendo un quarto di un ellisse concava si ha che in coordinate polari il dominio è: $[1,2] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \times [0,2]$ $ky = k\dfrac{\rho\sin\theta}{2}$

Da cui il Volume è:

$$\iiint_V \mu dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 k\frac{\rho\sin\theta}{2} 2\rho d\rho d\theta dz = k\left(\int_0^2 dz\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^2 d\rho\right) = k \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}k$$

Mentre gli integali per il baricentro:

$$\iiint_V x\mu dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \rho\cos\theta k\frac{\rho\sin\theta}{2} 2d\rho d\theta dz = k\left(\int_0^2 dz\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^3 d\rho\right) = k \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15}{4}k$$

$$\iiint_V y\mu dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{\rho\sin\theta}{2} k\frac{\rho\sin\theta}{2} 2d\rho d\theta dz = \frac{k}{2}\left(\int_0^2 dz\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\sin\theta d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^3 d\rho\right) = \frac{k}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{15\pi}{16}$$

$$\iiint_V z\mu dV = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 zk\frac{\rho\sin\theta}{2} 2d\rho d\theta dz = k\left(\int_0^2 zdz\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^2 d\rho\right) = k \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{3}k$$

Infine:

$$P = \left(\frac{15}{4} \cdot \frac{3}{14}, \frac{15\pi}{16} \cdot \frac{3}{14}, \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{14}\right) = \left(\frac{45}{56}, \frac{45\pi}{224}, 1\right)$$

7.5 Volume di un solido di rotazione rispetto ad un asse: Teorema di Pappo - Guldino

Il volume di un insieme Ω ottenuto ruotando un dominio limitato D del semipiano $xz, z \ge 0$ attorno all'asse z vale

$$\text{Vol}(\Omega) = 2\pi\overline{x}\,\text{Area}(D) = 2\pi \iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

Il volume di un insieme Ω ottenuto ruotando un dominio limitato D del semipiano $yx, x \ge 0$ attorno all'asse x vale

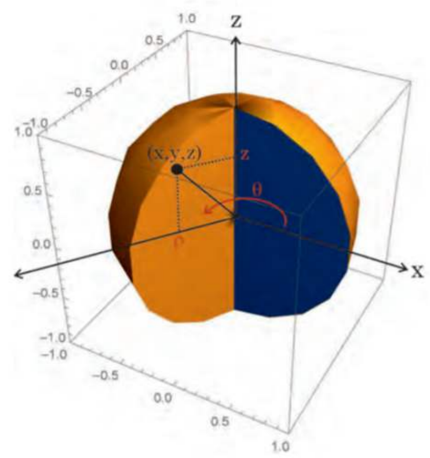
$$\text{Vol}(\Omega) = 2\pi\overline{y}\,\text{Area}(D) = 2\pi \iint_D y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Il volume di un insieme Ω ottenuto ruotando un dominio limitato D del semipiano $zy, y \ge 0$ attorno all'asse y vale

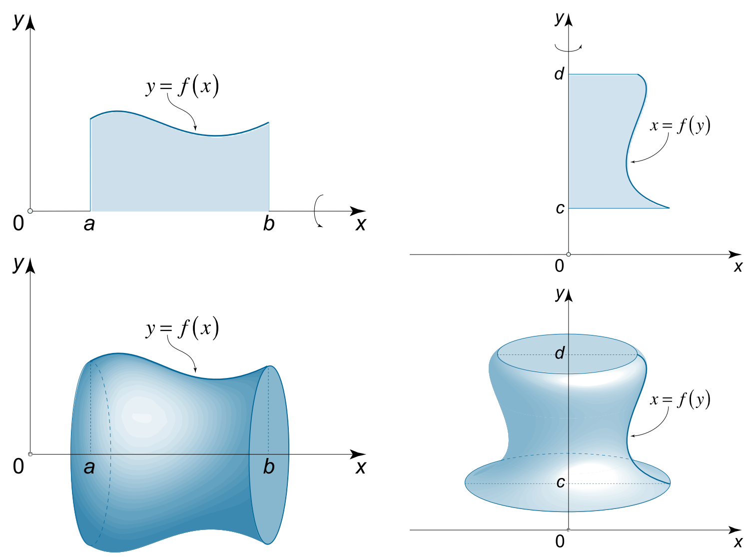
$$\text{Vol}(\Omega) = 2\pi\overline{z}\,\text{Area}(D) = 2\pi \iint_D z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

dove $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ sono le distanza tra il baricentro D asse di rotazione di rotazione.

Nell'immagine in blu Area(D), in arancione Vol(Ω).

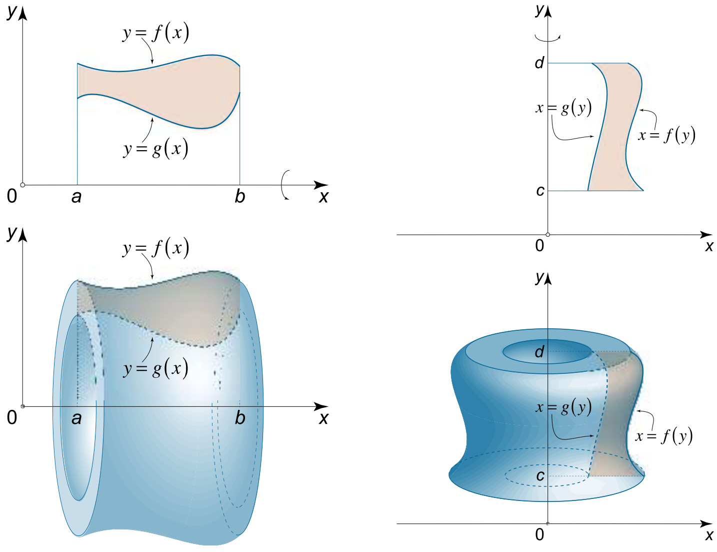


Nel caso il dominio sia limitato superiormente da una funzione $f(x)$ che ruota attorno all'asse x, $f(y)$ che ruota attorno all'asse y o $f(z)$ che ruota attorno all'asse z si può usare il "metodo del disco":



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy \quad V = \pi \int_c^d [f(z)]^2 dz$$

Nel caso il dominio sia limitato superiormente da una funzione $f(\alpha)$ ed inferiormente da $g(\alpha)$ che ruota attorno all'asse α si ha che:



$$V = \pi \int_a^b \left([f(\alpha)]^2 - [g(\alpha)]^2 \right) d\alpha$$

L'uguaglianza dei due metodi può essere verificata in questo modo: $\int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} 2\pi x dx \right) dy = \int_c^d \pi \left(g_2(y)^2 - g_1(y)^2 \right) dy$

Esercizio 268

Determinare il volume dell'insieme ottenuto facendo ruotare l'insieme $\left\{(x,z) : x \in [0,2], x^2 \le z \le 4\right\}$ attorno all'asse z.

Soluzione dell'esercizio 268

$x \in [0,2]$ $z \in \left[x^2, 4\right]$

$$\text{Volume}(D) = 2\pi \bar{x}\,\text{Area}(T) = 2\pi \int_0^2 \int_{x^2}^4 x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 (4x - x^3)\,\mathrm{d}x = 8\pi$$

Esercizio 269

Sia $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \sqrt{8x+7}$. Calcolare il volume del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare il trapezoide di f attorno all'asse delle x. Usando la formula con gli integrali doppi si ha che:

$$V = 2\pi \int_1^3 \int_0^{\sqrt{8x+7}} y dy dx = 2\pi \int_1^3 4x + \frac{7}{2} dx = 2\pi \cdot 23 = 46\pi$$

Usando la formula con l'integrale singolo:

$$V = \pi \int_1^3 (\sqrt{8x+7})^2 dx = \pi \int_1^3 (8x+7) dx = 46\pi$$

Esercizio 270

Si consideri il triangolo T di vertici $(1,4), (5,4), (3,7)$ sul piano xy. Calcolare il volume del solido Ω che si ottiene facendo ruotare tale triangolo attorno all'asse delle x.

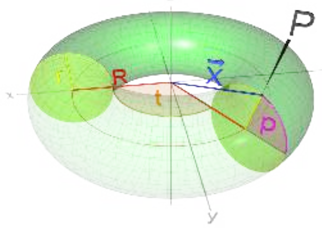
Soluzione dell'esercizio 270

Punto medio $= (3,5)$

Volume $= 2\pi 5 \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 60\pi$

Esercizio 271

Calcolare il volume del toro bucato con il raggio esterno $R + r/2$ e quello interno con $R - r/2$ e raggio dell'anello r



Soluzione dell'esercizio 271

Sapendo che la distanza del baricentro dall'asse di rotazione è R, l'area della circonferenza è πr^2 Si ottiene usando la formula di Pappo-Guldino che:

$$V = 2\pi R(\pi r^2) = 2\pi^2 R r^2$$

Esercizio 272

Si consideri l'insieme $D = \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$

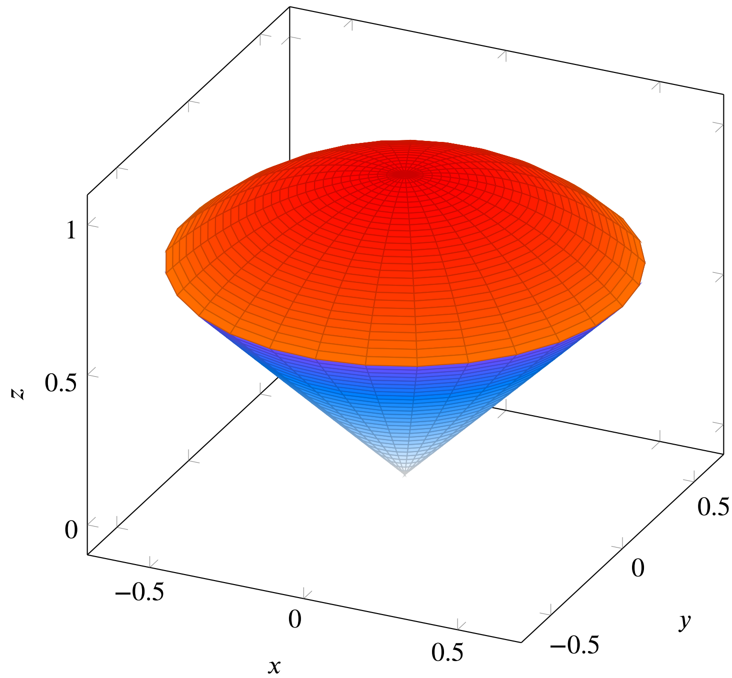
a) Mostrare che D è un solido di rotazione: qual è il sottoinsieme del semipiano $x, z, x \geq 0$ che genera il solido?

b) Usando la formula di Pappo-Guldino, determinare il volume di D.

c) Calcolare lo stesso volume per fette orizzontali

d) Calcolare il volume per fili verticali

e) Calcolare il volume usando le coordinate sferiche



Soluzione dell'esercizio 272

a)

$$T = \{\sqrt{x^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}, x \geq 0\}$$

b)

Determiniamo il dominio: $z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], x \in [x, \sqrt{1-x^2}]$

Sfruttando la formula di Pappo-Guldino: $V(D) = 2\pi\bar{x}$ Area (T) $= 2\pi \int x \, dz \, dz$:

Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} x \, dz \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x\sqrt{1-x^2} - x^2\right) dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{1-x^2} - x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} - x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

$$V(D) = 2\pi\bar{x} \text{ Area (T)} = 2\pi \int x \, dz = 2\pi \frac{2-\sqrt{2}}{6} = \pi \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

c)

A) Calcoliamo l'area tra $z = 0$ e $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

Troviamo gli estremi di integrazione: $x \in [-\sqrt{z^2-y^2}, \sqrt{z^2-y^2}], y \in [-z, z], z \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Ed integriamo:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx \, dy \, dz$$

Assumiamo che l'area del cerchio è pari a $z^2\pi$:

$$\int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx \, dy = z^2\pi$$

E calcoliamo l'integrale in z:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^2\pi \, dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$$

B) Calcoliamo l'area tra $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $z = 1$:

Usiamo le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z, dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz, x^2 + y^2 = \rho^2$

$$1 - x^2 - y^2 = z^2 \Leftrightarrow 1 - \rho^2 = z^2$$

Determiniamo gli estremi: $z \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \rho \in [0, \sqrt{1-z^2}], \theta \in [0, 2\pi]$

Da cui:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1-z^2}{2} dz\right) = 2\pi \left[-\frac{z^3}{6} + \frac{z}{2}\right]_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{z=1}$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{24}\right) = \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right)$$

Notiamo come $\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12}\right)+\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ da esattamente: $\frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$

d)

Troviamo gli estremi: $z \in [\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}], x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], y \in [-1,1]$

Da cui:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Usiamo le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z, x^2+y^2 = \rho^2$

Da cui:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \rho$$
$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\rho^2}$$

Trovando gli estremi: $z \in [\rho, \sqrt{1-\rho^2}], \rho \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \theta \in [0, 2\pi]$

Effettuiamo la sostituzione nell'integrale con le coordinate polari:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{\rho} \rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{\rho} \rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\right)\end{aligned}$$

Ed infine integriamo:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{\rho} \rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\rho\right) &= 2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(\rho^2 - \rho\sqrt{1-\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\left[\frac{\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=\frac{1}{N^2}}^{\rho=\frac{1}{N^2}} \\ &= 2\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}\end{aligned}$$

e)

Passiamo alle coordinate sferiche è: $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$

Ricordando che coordinate sferiche hanno questo range massimo: $\rho \geq 0, \phi \in [0,\pi], \theta \in [0, 2\pi]$ determino gli estremi:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} &\Leftrightarrow \sqrt{\rho^2\sin^2\phi} \leq \rho\cos\phi \leq \sqrt{1-\rho^2\sin^2\phi} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2\sin^2\phi \leq \rho\cos^2\phi \\ \rho^2\cos^2\phi \leq 1-\rho^2\sin^2\phi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\phi \leq \cos\phi \\ \rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\phi \leq \cos\phi \\ 1 \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Usando le identità degli angoli associati e sapendo che stiamo lavorando su un dominio $[0,\pi]$

$$\sin x \leq \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow 2x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{4}$$

Da cui: $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \theta \in [0, 2\pi], \rho \in [0,1]$ (raggio della sfera), $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

Ed integriamo:

$$\iiint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \left(\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \frac{\pi(2-\sqrt{2})}{3}$$

Esercizio 273

Determinare il volume dell'insieme ottenuto facendo ruotare l'insieme $\left\{(x,z) : x \in [0,1], x^2 \le z \le e^x\right\}$ attorno all'asse z.

Soluzione dell'esercizio 273

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{e^x} x\,dz\,dx = \int_0^1 \left(xe^x - x^3\right)dx = \frac{3}{4}$$
$$V = 2\pi\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

Es. 274 — Sia $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \sqrt{5x+8}$. Calcolare il volume del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare il trapezoide di f attorno all'asse delle x.

Soluzione (Es. 274) — 36π

Es. 275 — Sia

$$D = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le z \le x/\left(1+x^2\right)\right\}$$

(i) Disegnare D e calcolarne l'area.
(ii) Trovare l'ordinata z del baricentro di D.
(iii) Trovare il volume del solido Ω ottenuto facendo ruotare D attorno all'asse x.

Es. 276 — Determinare il volume della superficie ottenuta ruotando la curva $y = \sqrt{25-x^2}, x \in [3,4]$ attorno all'asse x di 2π

Soluzione (Es. 276) — $38/3\pi$

Es. 277 — Determinare il volume della superficie ottenuta ruotando la curva $y = \sqrt{36-x^2}, x \in [3,4]$ attorno all'asse x di 2π

Soluzione (Es. 277) — $71/3\pi$

Es. 278 — Determinare il volume della superficie ottenuta ruotando la curva $y = \sqrt{49-x^2}, x \in [3,4]$ attorno all'asse x di 2π

Soluzione (Es. 278) — $110/3\pi$

7.6 Integrale di un solido di rotazione rispetto a un asse

Quando al posto del semplice volume dobbiamo calcolare l'area di un solido di rotazione attorno ad un asse non possiamo più utilizzare il teorema di Pappo - Guildino.

Si dice che $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è insieme di rotazione ottenuto ruotando $D \subset [0,+\infty[x \times \mathbb{R}_z$ attorno all'asse z se

$$(x,y,z) \in \Omega \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}, z\right) \in D$$

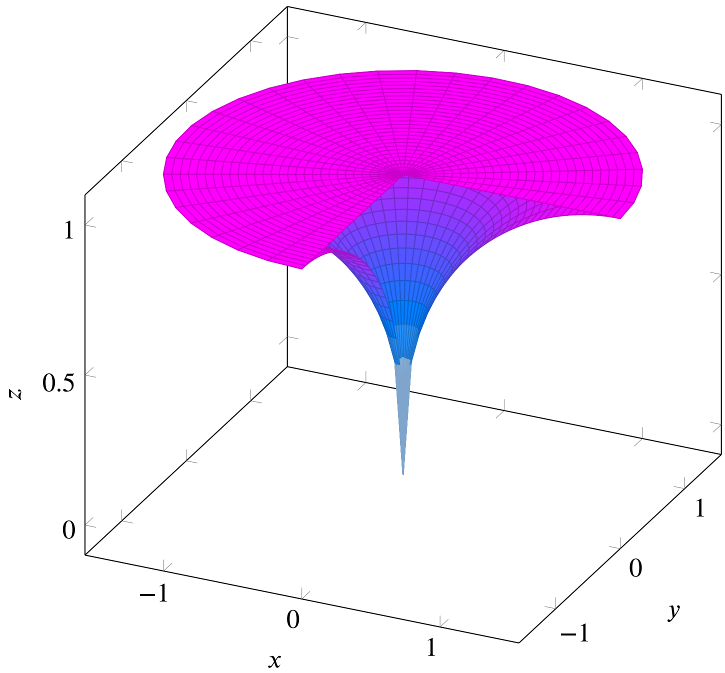
Se, invece, il dominio è espresso in coordinate polari e cilindriche si ha che:

$$(\rho,\theta,z) : (\rho,z) \in D, \theta \in [0,2\pi]$$

Esercizio 279

Si fa ruotare attorno all'asse x il trapezoide della funzione $z = \sin^{1/3} x, x \in [0, \pi/2]$. Indicando con D il solido ottenuto calcolare l'integrale:

$$\iiint_D \sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



Soluzione dell'esercizio 279

Si ha che: $z^2 + y^2 = \rho^2$ Passiamo alle coordinate polari: $\rho = \sqrt[3]{\sin x}, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z, \theta \in [0, 2\pi], x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\iiint_D \sqrt{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt[3]{\sin x}} \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\pi$$

Capitolo 8

Superfici e integrali superficiali

Le superfici sono funzioni continue definite su particolari sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, ossia sulle regioni piane; tali sottoinsiemi svolgono lo stesso ruolo degli intervalli I nella definizione delle curve.

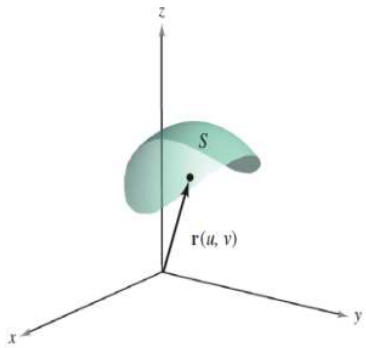
Sia $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Una funzione continua $\sigma : R \to \mathbb{R}^3$ viene definita superficie.

L'immagine $\Sigma = \sigma(R) \subseteq R^3$ è detta sostegno della superficie. Il sostegno di una superficie parametrica se si può descrivere (in modo continuo) tramite due parametri $(u, v) \in R$, dove R è un insieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$.

Come nel caso delle curve, il sostegno di una superficie è il sostegno di altre superficie, ovvero ha altre parametrizzazioni

La rappresentazione cartesiana di una superficie può essere espressa come

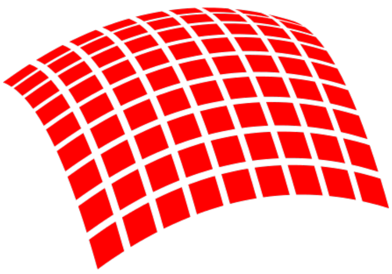
$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$$



Calotta

Una superficie è una calotta se è definita su una regione compatta $\mathbb{R}$. Il concetto di calotta è l'analogo per le superfici del concetto di arco per le curve.

Elemento d'area



Sia $p : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la nostra superficie ed $(u, v) \in D$ si ha che ogni quadratino ha superficie:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= |\partial_u p(u, v) \times \partial_v p(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= |p_u(u, v) \times p_v(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \end{aligned}$$

N.B. $\partial_u p(u,v)$ ed $\partial_v p(u,v)$ sono dei vettori, ed il prodotto cartesiano non è commutativo. Ma noi prendiamo il valore assoluto!

Integrale di superficie

L'area totale quindi si può esprimere come integrale dell'elemento d'area:

$$A = \iint_D \mathrm{d}A(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D |p_u \times p_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Nei paragrafi seguenti vedremmo come calcolare gli elementi d'area in alcuni casi particolari

Esercizio 280

Calcolare l'area della superficie parametrica

$$p(u,v) = (4(u+v), 7v, 4u) \quad u^2+v^2 \le 3^2$$

Soluzione dell'esercizio 280

$p_u(u,v) = (4,0,4)$, $p_v(u,v) = (4,7,0)$, $\left|p_u \times p_v\right| = |(-28,16,28)| = 4\sqrt{114}$

$$\iint_{u^2+v^2\le 3^2} 4\sqrt{114}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 4\sqrt{114}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^3 \rho\,\mathrm{d}\rho\right) = 4\sqrt{114}\cdot 2\pi\cdot\frac{9}{2} = 1207.54$$

Esercizio 281

Sia $R>0$ e $r \in (0,R)$; il toro è la superficie elementare (non cartesiana) di parametrizzazione: $p(u,v) = ((R+r\cos v)\cos u, (R+r\cos v)\sin u, r\sin v)$, $\quad (u,v) \in \bar{D} = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$

Determinare l'elemento d'area.

Soluzione dell'esercizio 281

$p_u(u,v) = (-(R+r\cos v)\sin u, -(R+r\cos v)\cos u, 0)$, $p_v(u,v) = (-r\sin v\cos u, -r\sin v\sin u, r\cos v)$,

$$p_u \times p_v = (-rR\cos v\cos u - r^2\cos^2 v\cos u, rR\cos v\sin u + r^2\cos^2 v\sin u, -r\cos(2u)(R+r\cos v)\sin v))$$

$$\mathrm{d}A = |p_u \times p_V|$$

8.1 Superfici cartesiane

Sia $z = f(x,y)$ una superficie cartesiana. Per ogni x, y si ha che:

$$p_x(x,y) = \left(1, 0, \partial_c f(x,y)\right), \quad p_y(x,y) = \left(0,1,\partial_y f(x,y)\right)$$

da cui:

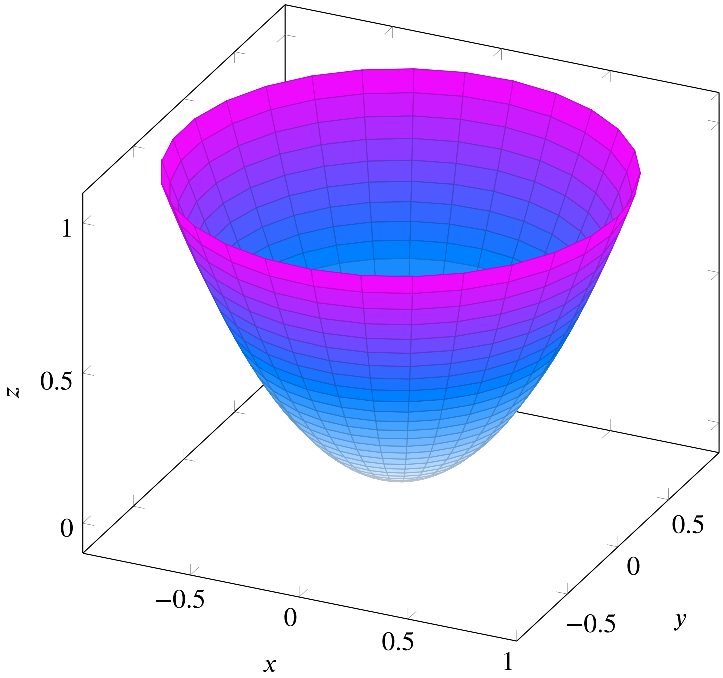
$$p_x \times p_y(x,y) = \left(-\partial_x f(x,y), -\partial_y f(x,y), 1\right)$$

Infine otteniamo:

$$\mathrm{d}A = \left|p_x \times p_y(x,y)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Esercizio 282

Calcolare la superficie del paraboloide $z = x^2+y^2, z \in [0,1]$



Soluzione dell'esercizio 282

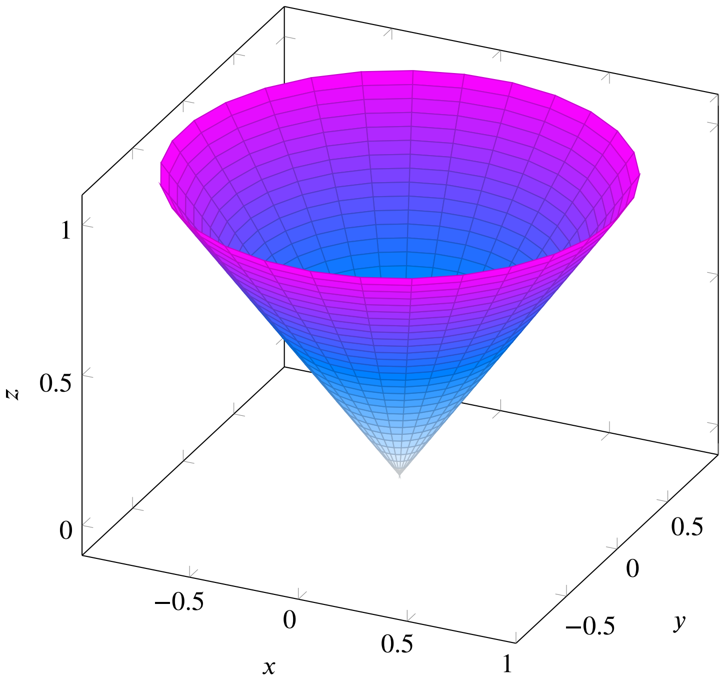
$$\nabla\left(x^2+y^2\right)=(2x,2y)$$

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(R)&=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)=2\pi\left[\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\\&=\pi\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\end{aligned}$$

Esercizio 283

Calcolare la superficie del cono $z^2=x^2+y^2, z\in[0,1]$



Soluzione dell'esercizio 283

$$\nabla\sqrt{x^2+y^2}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\left|\nabla\sqrt{x^2+y^2}\right|^2=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1$$

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\text{Area}(R)=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1\sqrt{2}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)=2\pi\left[\frac{\sqrt{2}\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}=\sqrt{2}\pi$$

Esercizio 284

Sia Σ la superficie cartesiana $z=x^2+y^2$, con $x^2+y^2-4y\le 0, x\le 0$. Calcolare $\displaystyle\int_\Sigma \frac{x}{2\sqrt{4z+1}}\,\mathrm{d}\sigma$

Soluzione dell'esercizio 284

Elemento d'area: $\|T(D)\|=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$

Gli estremi: $x^2+y^2-4y\le 0, x\le 0, x\in[-\sqrt{4y-y^2},0]\land y\in[0,4]$

$$\int_\Sigma\frac{x}{2\sqrt{4z+1}}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D\frac{x}{2\sqrt{4z+1}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\frac{x}{2\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^4\int_{-\sqrt{4y-y^2}}^0\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^4\frac{y^2-4y}{4}\mathrm{d}y=-\frac{8}{3}$$

O in alternativa, tramite le coordinate polari non centrate per l'origine: $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta+2$

$$x^2+(y-2)^2\le 4\Leftrightarrow(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta+2-2)^2\le 4\Leftrightarrow\rho^2\le 4\Leftrightarrow\rho\le 2$$

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{2\sqrt{4z+1}} d\sigma = \iint_{D} \frac{x}{2\sqrt{4z+1}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0}^{2} \frac{\rho\cos\theta}{2\sqrt{4\rho^2+1}} \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{0}^{2} \frac{\rho^2}{2} \cos\theta d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{8}{6} \cos\theta d\theta = -\frac{8}{3}$$

Esercizio 285

Sia Σ la superficie cartesiana $z = x^2 + y^2$, con $x^2 + y^2 - 4y \le 0, x \le 0$. Calcolare

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{4\sqrt{4z+1}} \, \mathrm{d}\sigma$$

Soluzione dell'esercizio 285

$$\mathrm{d}A = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} = \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$x^2 + y^2 - 4y \le 0$$

$$x \le 0$$

$$x \in \left[-\sqrt{4y-y^2}, 0\right] \wedge y \in [0,4]$$

$$\int_{\Sigma} \frac{x}{4\sqrt{4z+1}} \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{D} \frac{x}{4\sqrt{4z+1}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{D} \frac{x}{4\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$
$$= \int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{0} \frac{x}{4} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{0}^{4} \frac{y^2-4y}{8} \mathrm{dy} = -\frac{4}{3}$$

Esercizio 286

Calcolare la superficie della parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ contenuto nella palla $x^2 + y^2 + z^2 - 2y \le 0$

Soluzione dell'esercizio 286

determiniamo la superficie cartesiana: $z = \sqrt{x^2+y^2}, \partial_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \partial_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

L'elemento d'area $\|A(T)\| = \sqrt{1+\partial_x^2+\partial_y^2} = \sqrt{2}$

Calcoliamo gli estremi in coordinate polari $y = \rho\sin t + \dfrac{1}{2}, x = \rho\cos t$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x^2 + y^2 - 2y \le 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - y \le 0$$

$$\iint_{x^2+y^2-y\le 1} \sqrt{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{1/2} \rho\sqrt{2} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{2}} \sqrt{2} \, \mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{8} \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Esercizio 287

Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} z \, \mathrm{d}\sigma$$

dove Σ è la parte di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \in [1,2]$

Soluzione dell'esercizio 287

determiniamo la superficie cartesiana: $z = \sqrt{4-y^2-x^2}, \partial_x = -\frac{x}{\sqrt{4-y^2-x^2}}, \partial_y = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2-x^2}}$

L'elemento d'area $\|A(T)\| = \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-4}}$

Calcoliamo gli estremi in coordinate polari $y = \rho\cos\theta, 1 \leq \sqrt{4-y^2-x^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{4-\rho^2} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 4-\rho^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 4-\rho^2 \leq 4 \Leftrightarrow \rho \in [0,\sqrt{3}]$

$$\begin{aligned}\int_\Sigma z\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-\rho^2}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\rho^2-4}}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-\rho^2}\sqrt{\frac{\rho^2-4-\rho^2}{\rho^2-4}}\rho\,\mathrm{d}\rho\right)\\ &= 2\pi\left(\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4}\rho\,\mathrm{d}\rho\right) = 6\pi\end{aligned}$$

Esercizio 288

La temperatura in un punto di un cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $0 \leq z \leq 2$ è data da $T(x,y,z) = 100-25z$. Determinarne la temperatura media, data dall'integrale della temperatura sul cono diviso l'area della superficie considerata.

Soluzione dell'esercizio 288

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}\leq 2}(100-25\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\int_0^2(100-25\rho)\rho\sqrt{2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\cdot\frac{400\sqrt{2}}{3} = \pi\frac{800\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}\leq 2}\sqrt{2}dxdy = \int_0^2\rho\sqrt{2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\cdot 2\sqrt{2} = 4\pi\sqrt{2}$$

$$T_{avg} = \frac{\pi\frac{800\sqrt{2}}{3}}{4\pi\sqrt{2}} = \frac{200}{3} = 66.66$$

Esercizio 289

Una discoteca ha una forma ellittica: $\frac{x^2}{4}+y^2 \leq 1$. Il soffitto è obliquo ed ha la forma del piano $z = 12-4x-3y$. Trovare l'area del soffitto.

Soluzione dell'esercizio 289

$$\|T(D)\| = \sqrt{1+\nabla f^2(x,y)} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$\int_{\frac{x^2}{4}+y^2\leq 1}\sqrt{26}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Passiamo alle coordinate ellittiche, ricordiamo che: $\int_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f(a\cdot\rho\cos\theta, b\cdot\rho\sin\theta)a\cdot b\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{26}\cdot 2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{26}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\sqrt{26} = 32.0$$

In alternativa, senza usare le coordinate ellittiche:

$$\begin{aligned}\sqrt{26}dxdy &= \int_{-1}^1\int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{\sqrt{4-4y^2}}\sqrt{26}dxdy\\ &= \int_{-1}^1\int_{-2\sqrt{1-1y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}}\sqrt{26}dxdy = \int_{-1}^1\sqrt{26}\cdot 4\cdot\sqrt{1-y^2}dy\\ &= \sqrt{26}\cdot 4\cdot\int_{-1}^1\sqrt{1-y^2}dy = 2\pi\sqrt{26} = 32.0\end{aligned}$$

Es. 290 — Calcolare l'integrale superficiale $\int_p y \, \mathrm{d}\sigma_p$ dove p è la superficie cartesiana $z = x + y^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

Soluzione (Es. 290) — $\dfrac{13\sqrt{2}}{3}$

Es. 291 — Sia p la superficie cartesiana $z = \sqrt{x^2+y^2}$, con $x^2+y^2 \leq 16$ Calcolare l'integrale superficiale

$$\int_p (8-z) d\sigma_p$$

Soluzione (Es. 291) — $\frac{256\pi\sqrt{2}}{3}$

Es. 292 — Sia Σ la superficie cartesiana $z = x^2 + y^2$, con $x^2 + y^2 - y \leq 0, x \geq 0$. Calcolare

$$\int_\Sigma \frac{x}{\sqrt{4z+1}} \mathrm{d}\sigma$$

Soluzione (Es. 292) — 1/12

Es. 293 — Sia Σ la superficie cartesiana $z = x^2 + y^2$, con $x^2 + y^2 - 2y \leq 0, x \geq 0$. Calcolare $\int_\Sigma \dfrac{2x}{\sqrt{4z+1}} \mathrm{d}\sigma$

Soluzione (Es. 293) — 4/3

Es. 294 — Un sottile foglio metallico è descritto dalla equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$, con $0 \leq z \leq 4$, le unità sono espresse in centimetri. La densità del foglio, in grammi, è $\rho(x,y,z) = 8 - zg/cm^2$. Qual è la massa del cono in grammi, data dall'integrale sul cono della densità?

Soluzione (Es. 294) — 379.1

Es. 295 — Determinare l'area della superficie cartesiana $z = 12 - 4x - 3y$ con $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

Es. 296 — Calcolare la superficie della parte di paraboloide $z = x^2 + y^2$ che giace sotto il piano $z = 9$

Es. 297 — Si consideri la superficie cartesiana $z = \sqrt{x^2+y^2}$, nella regione delimitata dai piani $z = 1$ e $z = 2$. Calcolare l'integrale di $\dfrac{1}{z^2}$ su tale superficie.

Es. 298 — Calcolare l'integrale superficiale $\int_\Sigma z \, \mathrm{d}\sigma$ dove σ è la parte di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \in [1,2]$

Soluzione (Es. 298) — 6π

8.2 Superifice cilindrica

Sia $z = p(t,z) := (R\cos t, R\sin t, z)$ una superficie cilindrica, con R fisso, $D := [0,2\pi] \times [0,h] \to \mathbb{R}^3$. Per ogni $(t,z) \in D$ si ha

$$p_t(t,z) = (-R\sin t, R\cos t, 0), \quad p_z(t,z) = (0,0,1)$$

da cui:

$$p_t \times p_z(t,z) = (R\cos t, R\sin t, 0)$$

Infine otteniamo:

$$\mathrm{d}A = \left| p_t \times p_z(t,z) \right| \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z = R \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z$$

Esercizio 299

Area del "cilindro laterale" con raggio R e altezza h

Soluzione dell'esercizio 299

La parametrizzazione del cilindro laterale di raggio R e altezza h,

$$p(t,z) = (R\cos t, R\sin t, z), \quad (t,z) \in D = [0,2\pi]\times[0,h]$$

ed è $\left|p_t \times p_z(t,z)\right| = R$. Si ritrova la ben nota area del cilindro uguale a

$$\text{Area}(p) = \int_S \mathrm{d}A = R\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^h \mathrm{d}z\right) = 2\pi Rh$$

Esercizio 300

La temperatura sul cappello a forma cilindrica del mago è espressa da $T(x,y,z) = x^2+y^2-z$. Calcolare la temperatura media del cappello di raggio $R=2$ ed altezza $h=1$, considerando che esso sia bucato sia sotto che sopra.

Soluzione dell'esercizio 300

$$p(t,z) = (2\cos t, 2\sin t, z), \quad (t,z) \in D = [0,2\pi]\times[0,1]$$

$$\mathrm{d}A = 4\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 ((2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 - z)4\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 (4-z)4\,\mathrm{d}z\right) = 28\pi$$

Sapendo che la superficie del cilindoro è $2\pi Rh = 2\pi\cdot 2\cdot 1 = 4\pi$ Da cui:

$$T_{avg} = 7$$

Esercizio 301

Determinare l'area della superficie cilindrica

$$x^2+y^2 = 7y$$

compresa tra i piani $z=y$ e $z=0$.

Esercizio 302

Si tratta di un cilindro non centrato nell'origine, in particolare il centro del cilindro è il punto $P_0 = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$. Con raggio $r^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$. Che trasformato nelle equaziozione per parametrizzare è:

$$x^2+y^2 = 7y \Leftrightarrow x^2 - 7y + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

La parametrizzazione è quindi: $\rho(t,z) = (R\cos t, R\sin t + R, z)$

Elemento d'area: $\left|\rho_t(t,z)\times\rho_z(t,z)\right| = R = \frac{7}{2}$, cioè: $dA = \frac{7}{2}dtdz$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \sin t + RRdzdt = \int_0^{2\pi} R^2\sin t + R^2 dt = 2\pi R^2 = \frac{49}{2}\pi$$

8.3 Superficie sferica

Sia $z = p(\phi,\theta) := (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)$ una superficie sferica, con R fisso $D := [0,\pi]\times[0,2\pi]$. Per ogni $(\phi,\theta)\in D$ si ha:

$$p_\phi(\phi,\theta) = R(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi), \quad p_\theta(\phi,\theta) = R(-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0)$$

da cui:

$$p_\phi \times p_\theta(\phi,\theta) = R\sin\phi(R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi) = (R\sin\phi)(x,y,z)$$

Infine otteniamo:

$$\mathrm{d}A = \left|p_\phi\times p_\theta(\phi,\theta)\right|\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = R^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

Esercizio 303

Calcolare l'area della sfera di raggio R

Soluzione dell'esercizio 303

$$p(\phi,\theta)=(R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\quad(\phi,\theta)\in D:=[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

che ha come sostegno una sfera di raggio R. Abbiamo che:

$$\forall(\phi,\theta)\in D\quad \left|p_\phi\times p_\theta(\phi,\theta)\right|=R^2\sin\phi$$

Di conseguenza

$$\left|p_\phi\times p_\theta(\phi,\theta)\right|^2=R^2\sin\phi$$

è l'elemento d'area della sfera in (ϕ,θ). L'area della sfera di raggio R è quindi data da

$$\text{Area }(p)=\iint_D R^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta=R^2\left(\int_0^\pi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)=4\pi R^2\ :$$

si ritrova il risultato ben noto.

Esercizio 304

La temperatura su una sfera di raggio a varia con la latitudine secondo la formula $T(\theta,\phi)=10+\sin\phi$, con $\theta\in[0,2\pi],\phi\in[0,\pi]$. Determinare la temperatura media della sfera, data dal quoziente dell'integrale della temperatura sulla sfera diviso la superficie della sfera.

Soluzione dell'esercizio 304

$$\begin{aligned}T_{avg}&=\frac{\int_{\phi\in[0,\pi]\times[0,2\pi]\ni\theta}T(\theta,\phi)a^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}{\int_{\phi\in[0,\pi]\times[0,2\pi]\ni\theta}a^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_0^{2\pi}\int_0^\pi(10+\sin\phi)a^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta}{4\pi a^2}\\&=\frac{\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}(10+\sin\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)}{4\pi}=\frac{1}{2}\int_0^\pi(10+\sin\phi)\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(10\sin\phi+\sin^2\phi\right)\mathrm{d}\phi\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\phi}{2}-\frac{\sin2\phi}{4}-10\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}=\frac{\pi}{4}+10=10.7\end{aligned}$$

Esercizio 305

La temperatura su una sfera di raggio 3 è data dalla funzione $T(x,y,z)=5+\frac{7}{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare la media di T sulla sfera data da

$$T_{avg}=\frac{\int_{\partial B(0,3)}T(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}{\text{Superficie}\,\partial B(0,3)}$$

Soluzione dell'esercizio 305

$$p(\phi,\theta)=(3\sin\phi\cos\theta,3\sin\phi\sin\theta,3\cos\phi)$$

$$\mathrm{d}A=3^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,3)}T(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma&=\int_0^{2\pi}\int_0^\pi\left(5+\frac{7}{3}\sqrt{(3\sin\phi\cos\theta)^2+(3\sin\phi\sin\theta)^2}\right)3^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^\pi(5+7\sin\phi)3^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta=\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^\pi(5+7\sin\phi)3^2\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\right)\\&=2\pi\int_0^\pi 63\sin^2\phi+45\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=2\pi\int_0^\pi 63\sin^2\phi+45\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\\&=2\pi\int_0^\pi 63\left(\frac{1-\cos2\phi}{2}\right)+45\sin\phi\,\mathrm{d}\phi=2\pi\int_0^\pi-\frac{63}{2}\cos2\phi+\frac{63}{2}+45\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\\&=2\pi\left[-\frac{63}{4}\sin2\pi-45\cos\phi+\frac{63}{2}\phi\right]_0^{\pi^2}=2\pi\cdot\left(\frac{63}{2}\pi+90\right)\end{aligned}$$

$$\int_{\partial B(0,3)} \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$$

$$T_{\text{avg}} = \frac{2\pi \cdot \left(\frac{63}{2}\pi + 90\right)}{36\pi} = 10.49$$

Es. 306 — La temperatura su una sfera di raggio 2 è data dalla funzione $T(x,y,z) = 7 + \frac{9}{2}\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare la media di T sulla sfera data da

$$T_{\text{avg}} = \frac{\int_{\partial B(0,2)} T(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma}{\text{Superficie } \partial B(0,2)}$$

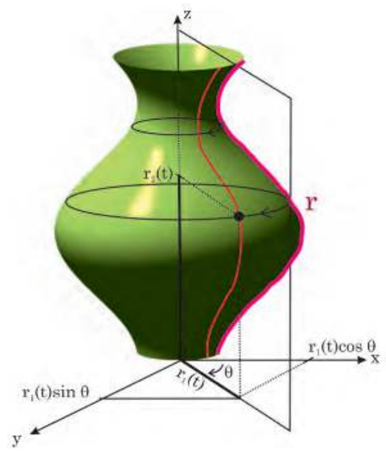
8.4 Superficie di rotazione: Teorema di Pappo - Guldino

L'area della superficie ottenuta ruotando la curva r attorno all'asse z è pari a

$$2\pi \overline{x_r}\,\text{Lunghezza}(r) = 2\pi \int_r x\,\mathrm{d}s$$

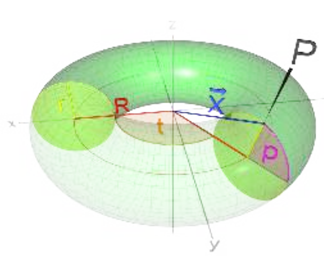
dove $\overline{x_r}$ è l'ascissa del baricentro di r sul piano xz, ovvero la distanza del baricentro di r dall'asse di rotazione.

Nell'immagine a destra: in verde la superficie p, in rosso la curva r



Esercizio 307

Calcolare la superficie del toro bucato con il raggio esterno $R + r/2$ e quello interno con $R - r/2$ e raggio dell'anello r



Soluzione dell'esercizio 307

Per il teorema di Pappo-Guldino si ha che: Superficie $(T) = 2\pi\bar{x}$ Area $(C[0,r]) = 2\pi\bar{x} \cdot 2\pi r$

Il baricentro, è evidente, è $\bar{x} = R$

Da cui: $(T) = 2\pi\bar{x}$ Area $(T) = R \cdot 2\pi r \cdot 2\pi = 4\pi^2 Rr$

Esercizio 308

Soluzione dell'esercizio 308

Essendo l'equazione di un semicerchio usiamo la parametrizzazione di una circonferenza: $r(t) = (6\cos t, 4\sin t), t \in \left[\arcsin\frac{3}{6}, \arcsin\frac{4}{6}\right]$, $v(t) = (-6\sin t, 6\cos t)$, $|v(t)| = 6$ E per il teorema di Pappo-Guldino:

$$2\pi \int_C x ds = 2\pi \int_{\arcsin\frac{3}{6}}^{\arcsin\frac{4}{6}} 6\cos t \cdot 6dt = 2\pi[36\sin t]_{t=\arcsin\frac{3}{6}}^{t=\arcsin\frac{4}{6}} = 2\pi 36 \cdot \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{6}\right) = 12\pi$$

Es. 309 — Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando la semicirconferenza $x^2 + z^2 = 2x, x \le 1$, attorno all'asse z.

Soluzione (Es. 309) — $2\pi(\pi - 2)$.

Es. 310 — Calcolare l'area della porzione di superficie contenuta nel cilindro $x^2 + z^2 = 4$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

Soluzione (Es. 310) — 16

Es. 311 — Find the surface area of the solid obtained by rotating $y = \sqrt{9 - x^2}, -2 \le x \le 2$ about the x -axis.

Es. 312 — Find the surface area of the solid obtained by rotating $y = \sqrt[3]{x}, 1 \le y \le 2$ about the y -axis.

Es. 313 — Find the surface area of the object obtained by rotating $y = \frac{1}{4}\sqrt{6x+2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{5}}{2}$ about the x -axis.

Es. 314 — Find the surface area of the object obtained by rotating $y = 4 - x, 1 \le x \le 6$ about the y -axis.

Es. 315 — Find the surface area of the object obtained by rotating $x = 2y + 5, -1 \le x \le 2$ about the y -axis.

Es. 316 — Find the surface area of the object obtained by rotating $x = 1 - y^2, 0 \le y \le 3$ about the x -axis.

Es. 317 — Find the surface area of the object obtained by rotating $x = e^{2y}, -1 \le y \le 0$ about the y -axis.

Es. 318 — Find for the surface area of the object obtained by rotating $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right), 0 \le x \le \pi$ about the x -axis.

Es. 319 — Determinare l'area della superficie ottenuta ruotando la curva $y = \sqrt{25 - x^2}, x \in [3,4]$ attorno all'asse x di 2π

Soluzione (Es. 319) — 10π

Es. 320 — Determinare l'area della superficie ottenuta ruotando la curva $y = \sqrt{49 - x^2}, x \in [3,4]$ attorno all'asse x di 2π

Soluzione (Es. 320) — 14π

8.5 Superifice di rotazione: Integrale attraverso la Matrice di rotazione

Quando abbiamo a che fare con una curva che routa attorno ad un asse e dobbiamo calcolare un integrale e non una semplice superficie non possiamo usare il teorema di Pappo - Guldino.

Una volta defintia in forma parametrica la nostra curva, per esempio se $x = f(z)$ si ha che: $r(z) = (f(z), 0, z)$, se $y = f(x)$ si ha che: $r(z) = (x, f(x), 0)$

Dopo di che si moltiplica la nostra curva per le matrici di rotazione attorno ad un asse:

$$\rho(\text{asse}, \theta) = \mathcal{R}(\text{asse}, \theta) \cdot r(\text{asse})$$

1. Matrice di rotazione attorno all'asse x:

$$\mathcal{R}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

2. Matrice di rotazione attorno all'asse y:

$$\mathcal{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3. Matrice di rotazione attorno all'asse z:

$$\mathcal{R}(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

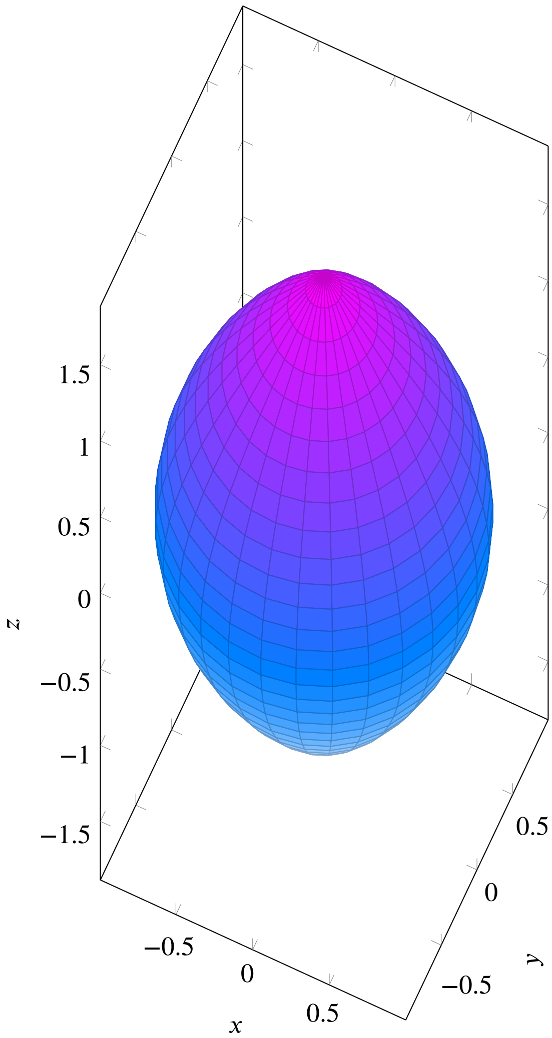
Infine si deriva $\rho(\text{asse},\theta)$ rispetto a θ e asse e si ricava l'elemento d'area.

Esercizio 321

Si fa ruotare la curva $x = \cos z, y = 0, -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ attorno all'asse z

1. Dare una parametrizzazione della superficie p ottenuta.
2. Calcolare

$$\int_p \sqrt{1 - x^2 - y^2} \mathrm{d}\sigma_p$$



Soluzione dell'esercizio 321

1. La nostra curva può essere espressa attraverso la seguente parametrizzazione:

$$r(z) = (\cos z, 0, z) \quad z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

La parametrizzazione della superficie si ottiene moltiplicando la matrice di rotazione del piano xy attorno all'asse z per la rappresentazione parametrica della curva:

$$p(z,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot r(z)=(\cos z\cos\theta,\cos z\sin\theta,z)$$

2. Per calcolare l'integrale superficiale dobbiamo per prima cosa determinare l'elemento d'area per effettuare il cambio degli estremi dell'integrale: $\mathrm{d}\sigma_p=\|T(D)\|\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$: L'elemento d'area è dato da:

$$\|T(D)\|=|p_z\times p_\theta(z,\theta)|$$

Dove $p_z=\partial_z p(z,\theta), p_\theta=\partial_\theta p(z,\theta)$, $\times$ il prodotto vettoriale.

Iniziamo con il determinre le derivate parziali:

$$p_z(z,\theta)=(-\cos\theta\sin z,-\sin\theta\sin z,1)$$

$$p_\theta(z,\theta)=(-\sin\theta\cos z,\cos\theta\cos z,0)$$

Determiniamo il prodotto vettoriale, ricordando che: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\big(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\big)$

$$\begin{aligned}p_z(z,\theta)\times p_\theta(z,\theta)&=\big(-\cos z\cos\theta,-\cos z\sin\theta,\underbrace{-\cos z\sin z\cos^2\theta-\cos z\sin z\sin^2\theta}_{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}\big)\\&=(-\cos z\cos\theta,-\cos z\sin\theta,-\sin z\cos z)\end{aligned}$$

Determiniamo la norma del nostro vettore:

$$\begin{aligned}\|T(D)\|=\big|p_z(z,\theta)\times p_\theta(z,\theta)\big|&=\sqrt{\underbrace{(\cos z\cos\theta)^2+(\cos z\sin\theta)^2}_{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}+(\cos z\sin z)^2}\\&=\sqrt{\cos^2 z+\cos^2 z\sin^2 z}=\cos z\sqrt{1+\sin^2 z}\end{aligned}$$

Ritorniamo al nostro integrale, ed effettuamo la sostituzione

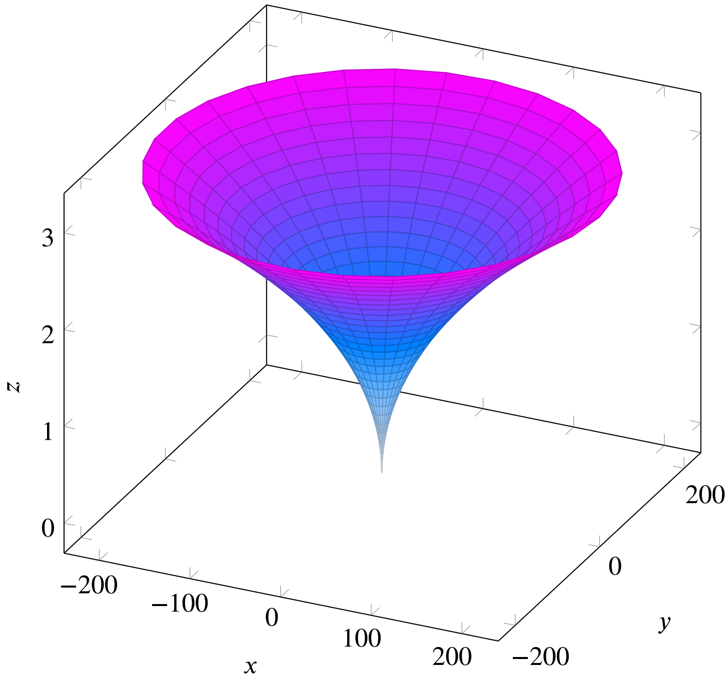
$$\begin{aligned}\int_p\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma_p&=\iint_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]}\sqrt{1-\underbrace{(\cos z\cos\theta)^2-(\cos z\sin\theta)^2}_{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}}\|T(D)\|\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\underbrace{1-\cos^2 z}_{1-\cos^2 z=\sin^2 z}}\cos z\sqrt{1+\sin^2 z}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta=\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin z\cos z\sqrt{1+\sin^2 z}\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta}_{\substack{\text{Dato che è possibile individuare una funzione}\\ g(z)\text{ e una } f(\theta)\text{ e il dominio è semplice}\\ \text{è possibile dividere in due integrali}}}\\&=\underbrace{\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin z\cos z}_{g'(z)}\sqrt{\underbrace{1+\sin^2 z}_{g(z)}}\mathrm{d}z\right)}_{\text{Integriamo applichiamo la regola della catena con } g(z)=1+\sin^2 z, f'(t)=\sqrt{t}}\\&=2\pi\left[\frac{\left(\sin^2 z+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}}=2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=0\end{aligned}$$

Esercizio 322

Calcolare l'integrale della funzione $f:\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$

$$(x,y,z)\mapsto\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sulla superficie ottenuta ruotando attorno all'asse delle z la curva $x=5z^2$, con $0\leq z\leq 3,1$.



Soluzione dell'esercizio 322

$$r(z) = \left(5z^2, 0, z\right), z \in [0, 3.1]$$

Matrice di rotazione del piano xy attorno all'asse z : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p(z,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} r(z) = \left(5z^2\cos\theta, 5z^2\sin\theta, z\right)$$

$$p(z,\theta) = \left(5z^2\cos\theta, 5z^2\sin\theta, z\right)$$

$$p_z(z,\theta) = (10z\cos\theta, 10z\sin\theta, 1)$$

$$\rho_\theta(z,\theta) = \left(-5z^2\sin\theta, 5z^2\cos\theta, 0\right)$$

$$\rho_z(z,\theta)\times\rho_\theta(z,\theta) = \left(-10z^2\cos\theta, -10z^2\sin\theta, 50z^3\right)$$

$$\left|\rho_z(z,\theta)\times\rho_\theta(z,\theta)\right| = \sqrt{\left(5z^2\cos\theta\right)^2 + \left(5z^2\sin\theta\right)^2 + \left(50z^3\right)^2} = \sqrt{\left(5z^2\right)^2 + \left(50z^3\right)^2} = \sqrt{2500z^6 + 25z^4} = 5z^2\sqrt{100z^2+1}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^6 \frac{z}{\sqrt{\left(\left(5z^2\cos\theta\right)^2 + \left(5z^2\sin\theta\right)^2\right)}} 5z^2\sqrt{100z^2+1}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^6 \frac{z}{\sqrt{\left(5z^2\right)^2}} 5z^2\sqrt{100z^2+1}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^6 \frac{z}{5z^2} 5z^2\sqrt{100z^2+1}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^6 z\sqrt{100z^2+1}\,\mathrm{d}z\right) = 4525.75$$

Es. 323 — Si fa ruotare la curva $x = \sin z, y = 0, 0 \le z \le \pi$ attorno all'asse z

1.Dare una parametrizzazione della superficie p ottenuta.

2.Calcolare

$$\int_p \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma_p$$

Soluzione (Es. 323) — $4\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\right)$

Es. 324 — Calcolare l'integrale della funzione $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sulla superficie ottenuta ruotando attorno all'asse delle z la curva $x = 7z^2$, con $0 \leq z \leq 3$.

Soluzione (Es. 324) — 792.34

Capitolo 9

Teoremi della divergenza e di Green - Stokes

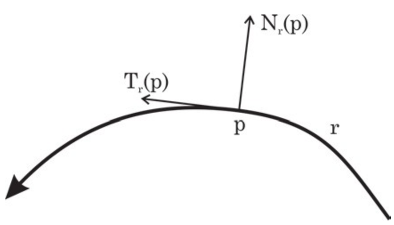
9.1 Flusso di un campo attraverso un curva o una superficie

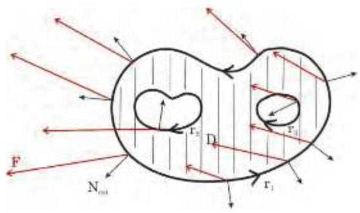
Si definisce flusso di F attraverso r l'integrale:

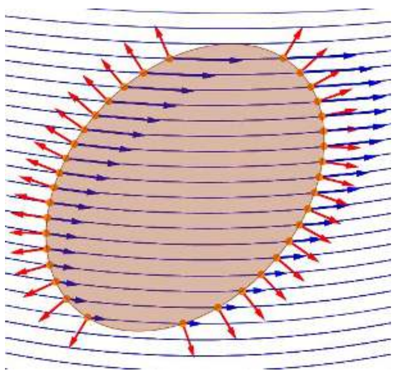
$$\Phi(\boldsymbol{F}) = \int_r \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_r \,\mathrm{d}C_r = \int_b^a \det\left[\boldsymbol{F}(r(t))\ \boldsymbol{r}'(t)\right] \mathrm{d}r = \int_b^a F_1(r(t))r_2'(t) - F_2(r(t))r_1'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\Phi(\boldsymbol{F}) = \iint_p \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_r \,\mathrm{d}\sigma_p = \iint_D \det\left[\boldsymbol{F}(p(u,v))\ \boldsymbol{p}_u(u,v)\ \boldsymbol{p}_v(u,v)\right] \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v) du dv$$

Dove $\boldsymbol{N}_r$ è il vettore normale alla curva (o superficie) che in forma vettoriale viene definito come $\boldsymbol{T}_r(t) = \dfrac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$, il vettore è ruotato di $\dfrac{\pi}{2}$, ottenuto: $\boldsymbol{N}_r(t) := \dfrac{\left(r_2'(t), -r_1'(t)\right)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$







Nel caso di flussi a due dimensioni: Sviluppando il sviluppando il prodotto scalare si ottiene che

$$\Phi(\boldsymbol{F}) = \int_r F_1(x,y)\,\mathrm{d}y - F_2(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F_1(r(t))r_2'(t) - F_2(r(t))r_1'(t)\,\mathrm{d}t$$

. La risoluzione è uguale agli integrali curvilinei di seconda specie.

Nel caso di flussi a tre dimensioni in una sueprficie carteisana si ha che:

$$\iint_D \boldsymbol{F}(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Questo tipo di integrale viene definito "integrale superficiale di seconda specie", per la relativa somiglianza a quelli di prima specie.

Esercizio 326

Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} + \left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{j}$ nel percorso che collega $(1,0)$ a $(-1,0)$ nel piano xy attraverso:

(a) la metà superiore del cerchio $x^2 + y^2 = 1$

(b) il segmento che collega $(1,0)$ a $(-1,0)$

Soluzione dell'esercizio 326

Sia $r(t) = \cos t i + \sin t j$, $v(t) = -\sin t i + \cos t j$, $t \in [0,\pi]$ la parametrizzazione.

$$\begin{aligned}\int_{r_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{r_1} &= \int_0^\pi F_1(r(t))v_2(t) - F_2(r(t))v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left((\cos t + \sin t)(\cos t) - \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)(-\sin t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi (\cos t(\sin t + \cos t) + \sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(2t + \sin 2t - 2\cos^2 t - 4\cos t\right)\Big|_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

Sia $r(t) = -ti, \quad v(t) = -i, \quad t \in [0,2]$

$$\int_0^2 F_1(r(t))v_2(t) - F_2(r(t))v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \left((-t)(0) - \left(t^2 + 1\right)(-t)\right)\mathrm{d}t = 4$$

Esercizio 327

Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y) = (x - y, x)$ uscente dall'anello $D = C(0,1) \setminus C(0,1/4]$,

Soluzione dell'esercizio 327

Il bordo del disco D è costituito dall'unione dei sostegni di $r_1(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0,2\pi]$ e dell'inverso di $r_2(t) = 1/4(\cos t, \sin t), t \in [0,2\pi]$. Ora

$$\begin{aligned}\int_{r_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{r_1} &= \int_0^{2\pi} F_1(r(t))v_2(t) - F_2(r(t))v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t)\cos t - \cos t(-\sin t)\,\mathrm{d}t - \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\int_{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{r_2} = \frac{\pi}{16}$$

Di conseguenza

$$p\int_{\partial D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{ext}\,\mathrm{d}s = \int_{r_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{r_1} - \int_{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{r_2} = \frac{15\pi}{16}$$

Esercizio 328

Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y) = (-y, x)$ uscente dall'ellisse $x^2 + (y/2)^2 \leq 1$

Soluzione dell'esercizio 328

Possiamo parametrizzare il bordo dell'ellisse con $r(t) = (\cos t, 2\sin t), t \in [0,2\pi]$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_r \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_r\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} F_1(r(t))v_2(t) - F_2(r(t))v_1(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} 2\sin t(2\cos t) + \cos t(-\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= -3\int_0^{2\pi} \sin t\cos t\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

Esercizio 329

Calcolare il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (y, -x, 1)$ attraverso il paraboloide $z = x^2 + y^2, z \leq 1$

Soluzione dell'esercizio 329

Posto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ si ha

$$\int_p F \cdot N_p\,\mathrm{d}\sigma_p = \iint_D (y, -x, 1) \cdot (-2x, -2y, 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D -4xy + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi$$

Esercizio 330

Siano $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(2xy^2, 2x^2y, \left(x^2+y^2\right)z^2\right)$ e $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\right\}$

Soluzione dell'esercizio 330

Parametrizzo σ: $r \,:\, D = [0,2\pi]\times[0,2] \to \mathbb{R}^3$

$r(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$

Ricordando che: $N = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$, $d\sigma = \|r_u \times r_v\| du dv$

Si ha

$$\int_\sigma F \cdot N \, d\sigma = \iint_D F(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v) du dv$$

Sostituendo:

$$F(r(u,v)) = (16\cos u \sin^2 u, 16\cos^2 u \sin u, 4v^2)$$

$$r_u \times r_v = (2\cos u, 2\sin u, 0)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\iint_D F(r(u,v)) \cdot \left(r_u \times r_v\right) du dv &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(32\cos^2 u \sin^2 u + 32\cos^2 u \sin^2 u\right) du dv \\
&= 64 \int_0^2 \int_0^{2\pi} (\cos u \sin u)^2 du dv = 64 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2u}{2}\right)^2 du dv \\
&= \frac{64}{4}\frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2u 2du dv = \frac{64}{8} \int_0^2 \left[\frac{2u - \sin 2u \cos 2u}{2}\right]_{u=0}^{u=2\pi} dv \\
&= \frac{64}{8} \int_0^2 \frac{4\pi}{2} dv = \frac{64}{4}\pi[v]_{v=0}^{v=2} = \frac{64}{4} 2\pi = 32\pi
\end{aligned}$$

Il flusso di F uscente dal coperchio $z = 2$, con $\beta(x,y) = 2$

$$\begin{aligned}
&\int_D F(x,y,\beta(x,y)) \cdot \left(-\beta_x(x,y), -\beta_y(x,y), 1\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&\qquad = \int_D F(x,y,2) \cdot (0,0,1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{C(0,2]} 4\left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&\qquad = 4 \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \rho^2 \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}t = 8\pi \int_0^2 \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \\
&= 8\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 32\pi
\end{aligned}$$

Il flusso di F uscente dalla base $z = 0$, con $\beta(x,y) = 0$

$$\begin{aligned}
&\int_D F(x,y,\beta(x,y)) \cdot \left(-\beta_x(x,y), -\beta_y(x,y), 1\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&\qquad = \int_D F(x,y,0) \cdot (0,0,1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{C(0,2]} 0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0
\end{aligned}$$

Pertanto, il flusso di F uscente da Ω vale $0 + 32\pi + 32\pi = 64\pi$.

9.2 Operatore nabla, gradiente, divergenza e Laplacino

Operatore nabla ∇

Alcuni concetti e grandezze della fisica, in particolare in elettrologia, sono legati alle derivate spaziali di campi scalari e vettoriali. Queste operazioni si prestano ad essere rappresentate convenientemente per mezzo dell'operatore vettoriale nabla (detto anche atled nel mondo anglosassone) indicato col simbolo ∇
Esso è definito nel seguente modo:

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

L'operatore nabla può essere applicato a funzioni della posizione (campi) sia scalari che vettoriali e si può dimostrare che nel calcolo dei risultati è lecito considerarlo come un normale vettore e applicare le regole usuali dell'algebra vettoriale.

Gradiente ∇f

Il **gradiente** di una funzione a valori reali (ovvero di un campo scalare) è una funzione vettoriale.
Il gradiente di una funzione è spesso definito come il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione (anche se questo vale solo se si utilizzano coordinate cartesiane *ortonormali)*
In altri termini, Il gradiente della funzione reale f è il vettore normale alla superficie di equazione $f(x,y,z) = 0$ nel punto (x,y,z) definito da

$$\nabla f = \boldsymbol{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial f}{\partial z} = grad\ f$$

dove $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aventi derivate parziali prime in A.

Divergenza $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$

La divergenza è una quantità scalare che determina la tendenza delle linee di flusso di un campo vettoriale a confluire verso una sorgente o diramarsi (divergere) da essa.

Si consideri la funzione vettoriale $\boldsymbol{v} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e si supponga che essa abbia derivate parziali prime in A, allora è possibile definire la divergenza di $\boldsymbol{v}$ come segue: La divergenza della funzione vettoriale $\boldsymbol{v} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è uno scalare dato da

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(v_1 \boldsymbol{i} + v_2 \boldsymbol{j} + v_3 \boldsymbol{k}\right) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Laplacino $\nabla \times \boldsymbol{v}$ Per una funzione $f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si considera spesso la grandezza:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Rotore $\nabla \times \boldsymbol{v}$

Definito solo in $\mathbb{R}^3$ (ed in $\mathbb{R}^2$ considerando la coordinata z nulla)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} &= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Nel caso in cui $\mathbb{R}^2$ il rotore è:

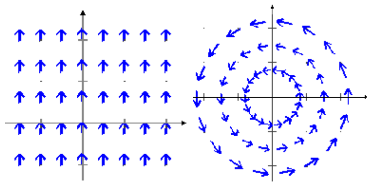
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Che spesso viene scritta nella seguente condizione di irrotazionalità in $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Il rotore esprime la presenza di tendenze rotatorie attorno a certi punti. L'effetto rotatorio, nel caso piano, è determinato da quanto varia una componente del campo allo spostarsi nella direzione dell'altra.

Se il rotore nullo, il campo è irrotazionale, cioè che non ruota.



9.3 Teorema della divergenza

La divergenza di un campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ è: $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y) := \partial_x F_1(x,y) + \partial_y F_2(x,y)$.

Si ha che il flusso del campo:

$$\Phi(\boldsymbol{F}) = \int_{\partial\Sigma} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_{\Sigma} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} \partial_x F_x(x,y) + \partial_y F_y(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

In tre dimensioni abbiamo che la divergenza di un campo vettoriale $\boldsymbol{F}$ è: $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z) := \partial_x F_x(x,y,z) + \partial_y F_x(x,y,z) + \partial_z F_y(x,y,z)$.

Si ha che il flusso del campo:

$$\Phi(\boldsymbol{F}) = \int_{\partial V} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iiint_{V} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V} \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Esercizio 331

Calcolare, usando il teorema della divergenza, il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y,x)$ uscente da $C(0,1]$

Soluzione dell'esercizio 331

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ C(0,1]} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}_{ext} &= \iint_{C(0,1)} \operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{C(0,1)} \partial_x(x-y) + \partial_y(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{C(0,1)} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi\end{aligned}$$

Esercizio 332

Calcolare, usando il teorema della divergenza, il flusso di $\boldsymbol{F}(x,y) = (-y,x)$ uscente dall'ellisse $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1$

Soluzione dell'esercizio 332

$$\int_{\partial^+ D} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}_{ext}\,\mathrm{d}s = \iint_{\partial^+ D} \operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D} \partial_x(-y) + \partial_y(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D} 0\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Esercizio 333

Calcolare il flusso del campo $\boldsymbol{F}(x,y) = (x,3y)$ uscente da $D = \left\{(x,y) : x^2 \leq y \leq 1\right\}$. Calcolare poi il flusso di $\boldsymbol{F}$ uscente dalle singole porzioni del bordo di D.

Soluzione dell'esercizio 333

a) $y \in [x^2, 1]$

$$\int_{\partial^+ D} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}_{ext}\, \mathrm{d}s = \iint_{\partial^+ D} \operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint_D (1+3)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 4\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 4 - 4x^2\, \mathrm{d}x = \frac{16}{3}$$

b) $r(t) = (t,1)$, $r'(t) = (1,0)$, $(1,1) = (t,1)$, $(-1,1) = (t,1) \Leftrightarrow t = -1$

$$\int_{\lambda_1} F_1\, \mathrm{d}y - F_2\, \mathrm{d}x = \int_1^{-1} (t \cdot 0 - 3 \cdot 1)\mathrm{d}t = \int_1^{-1} -3\, \mathrm{d}t = 6$$

$r(t) = (-t, t^2)$, $r'(t) = (-1, 2t)$, $(1,-1) = (t^2, t)$, $(1,1) = (t^2, t) \Leftrightarrow t = -1$

$$\int_{\lambda_2} F_1\, \mathrm{d}y - F_2\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(-t \cdot t + 3t^2 \cdot 2t\right) \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 6t^3 - t^2\, \mathrm{d}t = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 334

Determinare il flusso del campo $\vec{F}(x,y) = \left(x^2 + 5x + 2y, 3x + 8y\right)$ uscente dal disco di centro 0 e raggio 1.

Soluzione dell'esercizio 334

Calcoliamo il flusso con il teorema della divergenza:

$$\int_{C(0,1]} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (2x + 5 + 8) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\rho \cos\theta + 5 + 8)\rho d\rho d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2\cos\theta}{3} + \frac{13}{2}\right) d\theta = 13\pi$$

O in alternativa usando un integrale curvilineo di seconda specie: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $r'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_{C(0,1)} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{\lambda_1} F_1 dy - F_2 dx = \int_{\lambda} \left(2x^2 + 5x + 2y\right) dy - (3x + 8y) dx$$
$$= \int_{-}^{2\pi} \left((\cos t)^2 + 5(\cos t) + 2(\sin t)\right)(\cos t) + (3(\cos t) + 8(\sin t)(\sin t) dt$$
$$= \cdots = 13\pi$$

Esercizio 335

Calcolare il flusso uscente di $F(x,y,z) = \left(2xy^2, 2x^2y, \left(x^2 + y^2\right) z^2\right)$ da $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\right\}$ utilizzando il Teorema della divergenza.

Soluzione dell'esercizio 335

Si ha $\operatorname{div} F(x,y,z) = 2y^2 + 2x^2 + 2z\left(x^2 + y^2\right) = 2\left(x^2 + y^2\right)(z+1)$. Di conseguenza

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot N_{ext}\, \mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$
$$= \int_{\Omega} 2\left(x^2 + y^2\right)(z+1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^2 2z + 2\, \mathrm{d}x \int_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} x^2 + y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$
$$= \left[z^2 + 2z\right]_{z=0}^{2} \int_{[0,2]\times[0,2\pi]} \rho^2 \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}t$$
$$= 16\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2 = 64\pi$$

Esercizio 336

Siano $\vec{F}(x,y) = \left(2y^3+3, x^2\right)$ e D il semidisco $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\right\}$. Dire quanto vale l'integrale di $\vec{F}(x,y)$ sulla porzione di bordo di D costituita dal semicerchio superiore orientato positivamente. Suggerimento: usare prima la formula di Green per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ sul bordo di D calcolare poi l'integrale di $\vec{F}$ sul segmento orizzontale del bordo e dedurre il risultato.

Soluzione dell'esercizio 336

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \geq 0, x^2+y^2 \ \leq 1\right\}$$

$$\int_D 6y^2 - 2x dx dy = \int_0^\pi \int_0^1 \rho\left(6\left(\rho^2 \sin^2\theta\right) - 2\rho\cos\theta\right) d\rho d\theta = \int_0^\pi \frac{3}{2}\sin^2\theta - \frac{2}{3}\cos\theta d\theta = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\vec{T} = (-2t, 0)$$

$$\vec{T'} = (-2, 0)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{T} = -3\cdot 2$$

$$\int_0^1 -3\cdot 2 dt = -6$$

$$\Gamma = -\frac{3\pi}{4} - (-6)$$

9.4 Teorema del rotore o di Gauss–Green per il calcolo del lavoro su un circuito chiuso

Abbiamo visto che i campi bi-dimensionali conservativi di classe C^1 sono irrotazionali, ovvero hanno rotore nullo. Quando il campo non è conservativo, alcune circuitazioni possono essere non nulle.

Il rotore di un campo non irrotazionale è $\partial_x F_y - \partial_y F_x$. Si ha che:

$$\begin{aligned}\Gamma(\boldsymbol{F}) &= \oint_{\partial^+ D} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint_{\partial^+ D} F_x(x,y)\,\mathrm{d}x + F_y(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \nabla\times F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \partial_x F_y(x,y) - \partial_y F_x(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Esercizio 337

Calcolare la circuitazione di $\boldsymbol{F}(x,y) = (y\cos x, -\sin x)$ sul bordo di $D = \left\{(x,y) \,:\, |x| \leq \frac{\pi}{2}, |y| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ positivamente orientato.

Soluzione dell'esercizio 337

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ D} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \iint_D \partial_x(F_2) - \partial_y(F_1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (-\cos x - \cos x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\cos x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y\right) = -4\pi\end{aligned}$$

Esercizio 338

Calcolare la circultazione di $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(x+y^2, x^2-y\right)$ sul bordo di $D = \left\{(x,y) \,:\, y \geq 0, 3y^2 \leq x \leq 36\right\}$ positivamente orientata.

Soluzione dell'esercizio 338

$$\begin{aligned}\oint_{\partial^+ D} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} &= \iint_D 2x - 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{12}} \int_{3y^2}^{36} (2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{12}} \left(1296 - 72y + 6y^3 - 9y^4\right)\mathrm{d}y \\ &= \left[-\frac{9y^5}{5} + \frac{3y^4}{2} - 36y^2 + 1296y\right]_0^{y=\sqrt{12}} = 3375.58\end{aligned}$$

Esercizio 339

Calcolare la circuitazione di $\boldsymbol{F}(x,y) = \nabla(\sqrt{x^2+y^2})$ sul bordo di $D = \left\{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, y \geq 0\right\}$ orientato positivamente.

Soluzione dell'esercizio 339

Essendo irrotazionale, e visto che è semplicemente connesso in quanto definito solo per $y \geq 0$ e la singolarità in $(0,0)$ coincide con un punto del dominio: $\oint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$

Esercizio 340

Sia γ il circuito ottenuto congiungendo con un segmento $(0,-1)$, con $(1,0)$ e poi tornando al punto $(0,-1)$ sull'arco di cerchio di centro 0 e raggio 1, orientato in senso antiorario. Usando la formula di Green calcolare $\int_\gamma \left(-y^3+x^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}y$

Soluzione dell'esercizio 340

Sia $\boldsymbol{F} = \left(-y^3+x^2, x^3+y^3\right)$

$$\begin{aligned}\int_V \left(-y^3+x^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^3+y^3\right)\mathrm{d}y &= \iint_D \partial_x\left(x^3+y^3\right) - \partial_y\left(-y^3+x^2\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y = \iint_D 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_A 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y + \iint_B 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Calcoliamo nell'arco di circonferenza:

$$\int_A 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^1 3\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{3}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{9\pi}{8}$$

Calcoliamo nel triangolo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{B}} 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_{x-1}^0 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y = \int_0^1 -3(x-1)x^2-(x-1)^3\,\mathrm{d}y \\ &= \left[-\frac{(x-1)^4}{4} - \frac{3x^4}{4} + x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Da cui: $\iint_D 3x^2+3y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y = \frac{9\pi}{8} + \frac{1}{2}$

Esercizio 341

Calcolare, utilizzando la formula di Green, la circuitazione del campo $F(x,y) = \left(y^3, -x^3\right)$ sul cerchio di centro l'origine e raggio 1 positivamente orientato

Soluzione dell'esercizio 341

$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\right\}$

$$\iint_D \partial_x\left(-x^3\right) - \partial_y\left(y^3\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D -3x^2-3y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Usando le coordinate polari: $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -3\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{3}{4}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{3\pi}{2}$$

Esercizio 342

Calcolare, utilizzando la formula di Green, la circuitazione del campo $F(x,y) = \left(xy, 2x^3\right)$ sul circuito formato dal segmento che congiunge $(-2,0)$ a $(2,0)$ giustapposto alla porzione di circonferenza $x^2+y^2=4$ contenuta nel semipiano $y \geq 0$ orientato positivamente.

Soluzione dell'esercizio 342

Dominio: $x \in [-2,2], y \in [0, \sqrt{4-x^2}]$

$$\iint \partial_x \left(2x^3\right) - \partial_y(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(6x^2 - x\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \cdots = 12\pi$$

Esercizio 343

Sia Γ la frontiera della regione del piano compresa tra le parabole $y = x^2$ e $x = y^2$, orientata positivamente. Calcolare, usando la formula di Green, l'integrale

$$\int_\Gamma \left(y + e^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x + \left(2x + \cos y^2\right)\mathrm{d}y$$

Soluzione dell'esercizio 343

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \left(y + e^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x + \left(2x + \cos y^2\right)\mathrm{d}y &= \iint_\Lambda (1-2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{x^2}(1-2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(-x^2 + \sqrt{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 344

Siano $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}, 2x\right)$, e D l'insieme $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \sinh x < y < \sinh 1\right\}$ Determinare l'integrale di $\boldsymbol{F}$ sul bordo di D, orientato in senso antiorario.

Soluzione dell'esercizio 344

$$\begin{aligned}\iint_D \partial_x(2x) - \partial_y\left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1\int_{\sinh x}^{\sinh 1} 2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2\sinh 1 - 2\sinh x\,\mathrm{d}x \\ &= 2[x\sinh 1 - \cosh x]_{x=0}^{x=1} \\ &= 2(\sinh 1 - \cosh 1 + \cosh 0) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 345

Calcoliamo l'integrale $\displaystyle\int_{\partial^+ C(0,4)} (\sin x + y)\,\mathrm{d}x + \left(-3x + e^{y^2}\right)\mathrm{d}y$ dove γ è la circonferenza $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16\right\}$ percorsa in senso antiorario.

Soluzione dell'esercizio 345

$$\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin(4\cos t) + 4\sin t)(-4\sin t) + \left(-3\cdot 4\cos t + e^{(4\sin t)^2}\right)4\cos t\,\mathrm{d}t$$

Non essendo integrabile elementarmente, cerchiamo una alternativa:

Metodo 1 (troviamo una primitiva U):

$\partial_x(-3x+e^{y^2}) = -3 \neq 1 = \partial_y(\sin x + y)$ non è irrotazionale!

Metodo 2 (usiamo il teorema della divergenza):

$$\int_0^{2\pi} (\sin(4\cos t)+4\sin t)(-4\sin t)+\left(-3\cdot 4\cos t+e^{(4\sin t)^2}\right)4\cos t\,\mathrm{d}t = \iint_{C(0,4)} \partial_x(-3x+0)-\partial_y(\sin x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{C(0,4)} -3-1 dxdy$$
$$= -4\,\text{Area}\,C(0,4) = -4\cdot\pi\cdot 4^2$$

Es. 325 — Es. 346 — Sia $\vec{F}$ il campo vettoriale definito su $\mathbb{R}^2$ da $\vec{F}(x,y)=\left(2-6xy,-3x^2+9y^2\right)$ Sia poi $r(t)=\left(e^t\sin t, e^t\cos t\right), t\in [0,\pi]$ Quanto vale l'integrale curvilineo

$$\int_r \vec{F}\cdot dr$$

Soluzione (Es. 346) — $-3-3e^{3\pi}$

Es. 347 — Sia α il circuito costituito dal bordo dell'insieme $\left\{(x,y) : 1\le x\le 2, e^x\le y\le e^{2x}\right\}$ orientato positivamente e $\vec{F}(x,y)=(x\log y,0)$. Attenzione: c'è scritto e^{2x} e NON e^{x^2}.
Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}(x,y)\cdot d\alpha$.

Soluzione (Es. 347) — -7/3

9.5 Formula di Green

Dato un dominio chiuso $D\subset\mathbb{R}^2$ e due funzioni f e g regolari in D: Con il verso di percorrenza sulla frontiera di D in cui il dominio rimane alla sinistra.

$$\iint_D \partial_x f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} f\,\mathrm{d}y \qquad \iint_D \partial_y g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} g\,\mathrm{d}x$$

Consideriamo la funzione $f(x,y)=x$ e $g(x,y)=y$ si ha che:

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} x\,\mathrm{d}y \qquad \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} y\,\mathrm{d}x$$

Cioè che:

$$\text{Area}(D) = \oint_\gamma x\mathrm{d}y = -\oint_\gamma y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\oint_\gamma x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

Nel caso di curve in coordinate polari la formula diventa: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(t)\,\mathrm{d}t$

Esercizio 348

Sia D il cerchio di centro l'origine e raggio 1, calcolare l'ara con la formula di green: $r(t)=(\cos t,\sin t), t\in[0,2\pi]$. Osserviamo che questa parametrizzazione ci fornisce il corretto verso di percorrenza

Soluzione dell'esercizio 348

$$\oint_r x\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}\cos^2(t)dt = \pi$$

Esercizio 349

Si vuole calcolare l'area della regione Ω delimitata dal sostegno della curva $\gamma=(t\cos t, t\sin t), t\in[0,2\pi]$, e dal segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e $(2\pi,0)$:

Soluzione dell'esercizio 349

Usando la prima formula si ha che:

$$\int_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} t\cos t(\sin t + t\cos t)\mathrm{d}t$$

che non è di immediata soluzione, usando invece la terza:

$$= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega^+} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (t\cos t(\sin t + t\cos t) - t\sin t(\cos t - t\sin t))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t^2\mathrm{d}t = \frac{8\pi^3}{6}$$

Esercizio 350

Calcolare l'area della carioide $\rho = 1 + \cos t$

Soluzione dell'esercizio 350

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 + \cos^2 t + 2\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(2\pi + \pi) = \frac{3\pi}{2}$$

Esercizio 351

Determinare, utilizzando la formula di Green, l'area della regione racchiusa dalla curva definita in coordinate polari dal raggio $\rho(t) = \sqrt{\sin 4t}, t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Soluzione dell'esercizio 351

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 4t}{4}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}$$

Esercizio 352

Calcolare l'area della regione delimitata dalla curva $\gamma(t) = (\sin(2t), \sin t), t \in [0, \pi]$

Soluzione dell'esercizio 352

$$A = \frac{1}{2}\int_\lambda x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2t\cos t - 2\sin t\cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2\sin^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Appendice A

Altri argomenti trattati nei Quiz di Fondamenti di Analisi 2

A.1 Lunghezza d'arco

Due curve parametriche (o parametrizzazioni) equivalenti hanno quindi il medesimo sostegno, e questo sostegno viene percorso sempre "avanti" o sempre "indietro" con velocità in generale diverse, dipendenti dalle parametrizzazioni.

Abbiamo visto sopra che parametrizzazioni equivalenti hanno lo stesso sostegno; non vale il viceversa. Ad esempio, le due parametrizzazioni del cerchio $f(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$ e $g(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 4\pi]$ hanno lo stesso sostegno, il cerchio appunto, però non sono equivalenti perché la lunghezza della seconda è il doppio della lunghezza della prima.

Si definisce "Riparametrizzazione con la lunghezza d'arco", dove $s(t)$ è la lunghezza d'arco $s(t) = \int_0^t \left|f'(u)\right| du$ della curva $f(t)$. Sia $L(f)$ la lunghezza d'arco con $t \in [a, b]$, la curva:

$$g(s) = f(t(s)), s \in [0, L(f)]$$

è la riparametrizzazione con la lunghezza d'arco di $f(t)$, $t(s) = s^{-1}(t)$. Tale che $|g'(s)| = 1$, cioè la parametrizzazione che percorre la curva a velocità costante.

Esercizio 353

La riparametrizzazione con la lunghezza d'arco della curva $r(t) = (3\sin t, 4t, 3\cos t)$ con $t \in [0, 1]$ è

Soluzione dell'esercizio 353

$$v(t) = (3\cos t, 4, -3\sin t)$$

$$L(t) = \int_0^1 \sqrt{(3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2} dt = \int_0^1 \sqrt{3^2 + 4^2} dt = \int_0^1 5 dt = 5$$

$$\left(3\sin\frac{s}{L}, \frac{4s}{L}, 3\cos\frac{s}{L}\right), s = \frac{1}{5}t, L = 5, s \in [0, 5]$$

Esercizio 354

La riparametrizzazione con la lunghezza d'arco della curva $r(t) = (3\sin t, 4t, 3\cos t)$ con $t \in [0, 1]$è

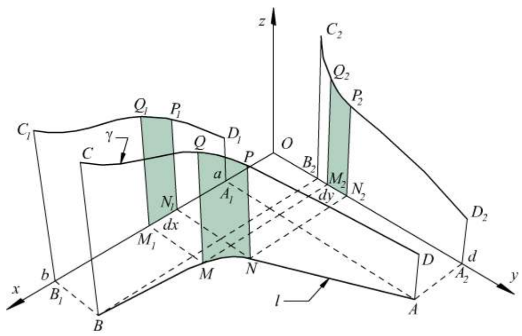
Soluzione dell'esercizio 354

$r'(t) = (3\cos t, 4, 3\sin t)$, $\left|r'(t)\right|^2 = (3\cos t)^2 + 4^2 + (3\sin t)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $\left|r'(t)\right| = 5$

$$L = \int_0^1 5dt = 5t|_0^1 = 5$$

$$\left(3\sin\frac{s}{r}, 4\frac{s}{r}, 3\cos\frac{s}{r}\right), s = \frac{1}{5}t, r = 5$$

A.2 Intepretazione geometrica dell'integrale curvilineo



Un intregrale curvilineo di seconda specie dal punto di vista fisico ha il significato di lavoro svolto lungo una curva. Dal punto di vista geometrico, invece, il significato è esattamente ciò in cui consiste: l'integrale di un campo vettoriale lungo una curva assegnata.

Il trapezoide di una funzione positiva su un intervallo $[a,b]$ è la porzione di piano compresa tra l'asse delle x sopra $[a,b]$ e il grafico della funzione. Definiamo l'oggetto analogo per una funzione positiva sopra una curva nel piano.

Si ha che:

$$\begin{aligned}\text{Area }\left(\text{Trap}_r(h)\right) &= \int_D \left|r'(t)\right| dt\,dz \\ &= \int_a^b \left|r'(t)\right| \int_0^{h(r(t))} dz\,dt = \int_a^b h(r(t))\left|r'(t)\right| dt = \int_r h\,ds\end{aligned}$$

Esercizio 355

Calcolare l'area del trapezoide della funzione $f(x,y)=\frac{y}{x}$ sulla curva $y=8x^2$ con $x\in[0,8]$

Soluzione dell'esercizio 355

Sia $r(t)=\left(8t^2,t\right)$, $v(t)=(16t,1)$,

$|v(t)|=\sqrt{(16t)^2+1}=\sqrt{256t^2+1}$

Integrando:

$$\int_0^8 f(r(t))|v(t)|dt=\int_0^8\left(\frac{8t^2}{t}\right)\sqrt{256t^2+1}dt=\int_0^8(8t)\sqrt{256t^2+1}dt=\left[\frac{(256t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{96}\right]_{x=0}^{x=8}=21847.32$$

Esercizio 356

Calcolare l'area del trapezoide della funzione $f(x,y)=2x+y$ sulla circonferenza $x^2+y^2=25$. Tra i punti $(3,4),(4,3)$

Soluzione dell'esercizio 356

Possiamo trattare la circonferenza $x^2+y^2=25$ con le sue equazioni parametriche $r(t)=(5\cos,5\sin t)$ $v(t)=(-5\sin t,5\cos t)$, $|v(t)|=\sqrt{25\sin^2 t,25\cos^2 t}=5$.

I valori di t nei punti $(3,4),(4,3)$ sono $\arctan(4/3)=0.92$ e $\arctan(3/4)=0.64$.

$$\int_{0.92}^{0.64}(10\cos t+5\sin t)5dt=25\int_{0.92}^{0.64}2\cos t+\sin t dt=25\left[2\sin t-\cos t\right]_{t=0.92}^{t=0.64}=-15$$

A.3 Domande di teoria

Esercizio 357

L'insieme $\left\{\left(3x, e^x\right) : x \in [1,2]\right\}$ è:

- il grafico di $e^x, x \in [1,2]$
- una linea
- Il grafico di $e^{x/3}, x \in [3,6]$
- una curva
- il sostegno di una curva

Soluzione dell'esercizio 357

Falso, falso, vero, falso, vero

Esercizio 358

Sia

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0), 0 \text{ altrimenti}$$

Allora:

- f è continua in $(0,0)$
- f è C^1 attorno a $(0,0)$
- La applicazione $\vec{u} \mapsto \partial_u f(0,0)$ è lineare

Soluzione dell'esercizio 358

Vero, falso, falso

Esercizio 359

Si fa ruotare linsieme $\Sigma = \left\{(x,z) : x \geq 0, x^2 \leq z \leq 1-x\right\}$ attorno all'asse z L'insieme ottenuto nello spazio è:

- $\left\{(\rho, t, z) : \rho \geq 0, t \in [0, 2\pi], \rho^4 \leq z \leq 1-\rho^2\right\}$
- $\left\{(\rho, t, z) : \rho \geq 0, t \in [0, 2\pi], \rho^2 \leq z \leq 1-\rho\right\}$
- $\left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$
- $\left\{(x,y,z) : x \geq 0, x^2 \leq \sqrt{y^2+z^2} \leq 1-x\right\}$
- $\left\{(x,y,z) : \left(x^2+y^2\right)^2 \leq z \leq 1-\left(x^2+y^2\right)\right\}$

Soluzione dell'esercizio 359

$\left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq z \leq 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$

Esercizio 360

Nella dimostrazione relativa alla posizione del gradiente di una funzione rispetto ai suoi insiemi di livello si utilizza:

a. Il fatto che il prodotto vettore di due vettori è ortogonale ad entrambi i vettori

c. la regola della catena per la derivata di una funzione composta

d. II fatto che il gradiente di una funzione punta verso la direzione di massima crescita x

e. La formula della lunghezza di una curva

Soluzione dell'esercizio 360

la regola della catena per la derivata di una funzione composta

Esercizio 361

Esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$?

a. Si e vale 0

b. Si perché $|x||y|$ ha le derivate parziali in $(0,0)$

c. No, perché il modulo non ha neppure le derivate parziali in $(0,0)$?

d. Si, il lmite è diverso da 0 e da 1

e. Si, e vale 1

Soluzione dell'esercizio 361

Si e vale 0

Esercizio 362

La funzione $f(x,y) = |x||y|$ ha derivate parziali in $(0,0)$? Calcolare il gradente di f in $(0,0)$ in caso affermativo.

a. Si, e si si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$

b. Si, e si ha $\nabla f(0,0) = (\pm 1, \pm 1)$

c. No

e. Si, e si ha $\nabla f(0,0) = (1,1)$

f. Si, e si ha $\nabla f(0,0) = (-1,-1)$

Soluzione dell'esercizio 362

Si, e si si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Parte II

Probabilità

Capitolo 10

Contare

10.1 Principio di moltiplicazione

Sia Ω_1 uno spazio campionario con m_1 elementi, Ω_2 uno spazio campionario con m_2 elementi, ..., Ω_n uno spazio campionario con m_n elementi.

Il numero totale di elementi dello spazio campionario $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$ è dato da $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$.

Esercizio 1

Contare il numero di possibili comitati composti da un uomo ed una donna scelti da un insieme U di 8 uomini e D di 10 donne

Soluzione dell'esercizio 1

Sia Y l'insieme di tali comitati; ogni elemento di Y si rappresenta in modo unico come una coppia (u, d) dove u è uno degli uomini e d una delle donne. Essendo Y in corrispondenza biunivoca con $U \times D$, si ha $|Y| = 8 \times 10 = 80$

Esercizio 2

Contare in quanti modi è possibile scegliere un presidente ed un vicepresidente in un'assemblea di 15 persone.

Soluzione dell'esercizio 2

Ogni possibile scelta è ottenibile in due fasi: nella prima si sceglie il presidente, mentre nella seconda si sceglie il vicepresidente. La prima fase ha 15 possibili esiti, la seconda invece ne ha 14.

Per il principio di moltiplicazione ha $15 \times 14 = 210$ elementi

Esercizio 3

Si estraggono a caso ordinatamente 3 palline, senza reimmissione, da un'urna che contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Quante possibili combinazioni ci sono?

Soluzione dell'esercizio 3

Infatti per ognuno dei 10 esiti della prima estrazione, ci sono 9 esiti possibili per la seconda e 8 esiti possibili per la terza. In totale si ha $10 \times 9 \times 8$ elementi

Es. 4 — Un negozio ha 8 marche diverse di pantaloni. Per ogni marca ci sono 10 taglie, 6 lunghezze e 4 colori. Quanti differenti tipi di pantaloni ci sono nel negozio?

Soluzione (Es. 4) — 1920

Es. 5 — Dati 8 libri di inglese diversi tra loro, 7 di francese diversi tra loro e 5 di tedesco diversi tra loro: in quanti modi possono essere scelti tre libri, uno per ciascuna lingua?

Soluzione (Es. 5) — 280

Es. 6 — Vogliamo distribuire 8 libri distinti tra 10 studenti, in modo che nessuno riceva più di un libro. In quanti modi posso fare la distribuzione?

Soluzione (Es. 6) — 3628800

10.2 Principio di moltiplicazione quando l'ordine non conta

È evidente che il principio di moltiplicazione funziona solamente se l'ordine conta. Quando non conta l'ordine è necessario moltiplicare il risultato per il numero di possibili scambi di posizione.

Questo fattore è calcolato come $\binom{n}{k}$ dove n è il numero di posizioni totali, mentre k quelle utilizzate, la formula per calcolarlo verrà presentato in un prossimo paragrafo, intanto ci interessa il funzionamento del fattore.

Esercizio 7

Un comitato di sei persone viene scelto casualmente da un club composto da 18 maschi e 12 femmine. Quante combinazioni ci sono con esattamente tre maschi e tre femmine nel comitato?

Soluzione dell'esercizio 7

$$18 \times 17 \times 16 \times 12 \times 11 \times 10 \times \binom{6}{3}$$

Esercizio 8

Una scatola contiene 100 calcolatrici, delle quali 3 sono difettose. Ne vengono prese 5, contare quante possibili soluzioni ci sono se 4 sono funzionanti ed una difettosa:

Soluzione dell'esercizio 8

$$97 \times 96 \times 95 \times 94 \times 3 \times \binom{5}{4}$$

10.3 Principio di divisione

Siano X ed Y due insiemi finiti. Supponiamo che ogni elemento y di Y corrisponda a m elementi di un insieme X tramite una funzione $f : X \to Y$. Allora $|Y| = |X|/m$.

Esercizio 9

Vogliamo contare il numero di commissioni di tre persone scelte tra 27.

Soluzione dell'esercizio 9

Sia X l'insieme delle terne ordinate di persone ed Y l'insieme delle commissioni cercate. Ogni commissione corrisponde a 6 terne ordinate (cioè, sempre per il principio di moltiplicazione 3 × 2 × 1). Per il principio di moltiplicazione vi sono 27 × 26 × 25 diverse terne ordinate, ora noi dobbiamo eliminare le terne composte dagli stessi docenti, anche se con ordini diversi. Allora per il principio di divisione il numero di commissioni è (27 × 26 × 25)/6.

Esercizio 10

Quante mani di 2 carte si possono formare da un mazzo di 52 carte?

Soluzione dell'esercizio 10

Il numero di carte distinte e 52 × 51, e pertanto per il principio di divisione il numero di mani cercato e (52 × 51)/2 = 1326

Esercizio 11

Dati 8 libri d'inglese diversi tra loro, 6 di francese diversi tra loro e 4 di tedesco diversi tra loro: in quanti modi possono essere distribuiti ad due alunni tre libri a testa, uno per ciascuna lingua?

Soluzione dell'esercizio 11

Dobbiamo selezionare quindi 2 libri di ingelse, 2 di francese e 2 di tedesco $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$. Ogni coppia di libri corrisponde a 2×1 terne, quindi: per il principio $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 1}$

10.4 Sequenze, spartizioni, sottoinsiemi e collezioni

Siano $n, k \in \mathbb{R}$.

sequenza: serie ordinata di cose o fatti che si susseguono. Una sequenza di disgrazie. Serie di inquadrature successive.

spartizione: lo spartire, l'essere spartito. Divisione, distribuzione. La spartizione dell'eredita.

sottoinsieme: è una parte di elementi dell'insieme originale.

collezione: raccolta sistematica di oggetti della stessa specie che abbiano interesse storico, artistico o scientifico. Collezione di monete, di francobolli, di figurine.

Distinguiamo due classi di oggetti:

1. ordinati:
   - Diciamo k -sequenza di I_n una k -upla ordinata $\left(a_1, \ldots, a_k\right)$ di elementi non necessariamente distinti di I_n, ovvero un elemento del prodotto cartesiano $\underbrace{I_n \times \ldots \times I_n}_{k}$

     Esempio: Una 8-sequenza di I_5 è $(5,5,1,1,4,2,4,1)$. Due 5-sequenza distinte di I_4 sono $(1,1,3,2,2)$ e $(1,4,1,2,2)$.
   - Diciamo n -spartizione di I_k una n -sequenza $\left(C_1, \ldots, C_n\right)$ di sottoinsiemi a due a due disgiunti di I_k, eventualmente anche vuoti, la cui unione $C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$ è I_k.

     Esempio: Una 3-spartizione di I_5 è $(\{1,5\}, \varnothing, \{2,3,4\})$. Una 5-spartizione di I_4 è $(\{1,4\}, \varnothing, \{3\}, \{2\}, \varnothing)$.
2. non ordinati:
   - Diciamo k -sottoinsieme di I_n un sottoinsieme formato da k elementi distinti di I_n.

     Esempio: Un 2-sottoinsieme di I_4 è $\{4,2\} = \{2,4\}$, un altro sottoinsieme di I_4 è $\{1,3\}$. Un 3-sottoinsieme di I_5 è $\{3,5,1\} = \{1,3,5\} = \cdots$.
   - Diciamo n -partizione di I_k una famiglia non ordinata di n sottoinsiemi non vuoti disgiunti di I_k la cui unione è I_k stesso.

     Esempio: Una 2-partizione di I_5 è $(\{1,5\}, \{2,3,4\})$. Una 3-partizione di I_4 è $(\{1\}, \{3\}, \{2,4\})$

k-sequenze di I_n senza ripetizioni	$S(n,k) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!} & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
k-sequenze di I_n con ripetizioni o equivalentemente delle n-spartizioni di I_k	$S((n,k)) = n^k$
permutazioni di una k-sequenza di I_n con occorrenza $(1,\ldots,1)$	$P(a_1, a_2, \ldots, a_k) = k!$
permutazioni di una k-sequenza di I_n con occorrenza $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$	$P(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \dfrac{k!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}$
k-sottoinsiemi di I_n senza ripetizioni	$C(n,k) = \dfrac{S(n,k)}{k!} = \dbinom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
k-sottoinsiemi di I_n con ripetizioni	$C((n,k)) = \dbinom{n-1-k}{k} = \dbinom{n-1-k}{n-1}$

Esercizio 12

Determinare il numero di anagrammi della parola ALA.

Soluzione dell'esercizio 12

Si tratta quindi di contare quanti anagrammi di una parola i 3 lettere totali esistono, dove: la A compare 2 volte e la L una volta sola. Sia quindi I_n l'insieme delle lettere A,L Si realizza una k -sequenza di I_n con occorrenza $(2,1)$. Da cui:

$$P(2,1) = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Esercizio 13

In quanti modi si possono disporre 8 persone lungo un tavolo?

Soluzione dell'esercizio 13

Sia Y l'insieme delle disposizioni delle 8 persone da disporre lungo un tavolo. Per il principio di moltiplicazione l'insieme delle 8-sequenze delle otto persone ha $8\times 7\times ...\times 2\times 1$ elementi

Esercizio 14

In quanti modi si possono disporre 8 persone attorno ad un tavolo rotondo?

Soluzione dell'esercizio 14

Proseguendo dall'esempio precedente, per il principio di divisione si ha che:

$$|X| = \frac{8\times 7\times ...\times 2\times 1}{8} = 7\times ...\times 2\times 1$$

Esercizio 15

Contare gli anagrammi di MATMAT nei quali non compaiono accanto due lettere uguali

Soluzione dell'esercizio 15

$$\underbrace{\frac{6!}{2!2!2!}}_{\text{Anagrammi di MATMAT}} - \underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\text{[AA][BB]TT}} - \underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\text{[AA]BB[TT]}} - \underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\text{AA[BB][TT]}} + \underbrace{3!}_{\text{Anagrammi di [MM][AA][TT]}} = 72$$

Esercizio 16

Contare gli anagrammi di ANTARTIDE nei quali non compaiono accanto due lettere uguali

Soluzione dell'esercizio 16

$$\underbrace{\frac{9!}{2!\,2!}}_{\text{Anagrammi di ANTARTIDE}} - \underbrace{\frac{8!}{2!}}_{\text{Anagrammi di [AA]NTRTIDE}} - \underbrace{\frac{8!}{2!}}_{\text{Anagrammi di [TT]ANARIDE}} + \underbrace{7!}_{\text{Anagrammi di [AA][TT]NRIDE}} = 55440$$

Esercizio 17

Un comitato di sei persone viene scelto casualmente da un club composto da 18 maschi e 12 femmine. Contare quante combinazioni ci sono con esattamente tre maschi e tre femmine nel comitato.

Soluzione dell'esercizio 17

Con il principio di moltiplicazione si ha che: $18\times 17\times 16\times 12\times 11\times 10\times \binom{6}{3}$

In alternativa possiamo usare il coefficiente binomiale: $\binom{18}{3}\times\binom{12}{3}$

Esercizio 18

In quanti modi si possono disporre 8 persone lungo un tavolo?

Soluzione dell'esercizio 18

In alternativa, essendo una permutazione di I_8 si ha che il risultato è ottenibile attraverso il fattoriale: 8!

Esercizio 19

In quanti modi 8 persone possono sedersi in fila se ci sono 4 coppie e ognuno è vicino al proprio partner?

Soluzione dell'esercizio 19

$$\underbrace{4!}_{\text{Possibili disposizioni tra le 4 coppie}} \cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{\text{Ogni coppia ha due possibili posizioni}} = 384$$

Esercizio 20

In quanti modi si possono distribuire 52 carte da gioco a 4 giocatori in modo che ciascuno abbia 13 carte?

Soluzione dell'esercizio 20

- Do 13 carte al primo: $\binom{52}{13} = \frac{52!}{39!\cdot 13!}$ scelte
- Do 13 carte al secondo: $\binom{39}{13} = \frac{39!}{26!\cdot 13!}$ scelte
- Do 13 carte al terzo: $\binom{26}{13} = \frac{26!}{13!\cdot 13!}$ scelte
- Do 13 carte al quarto: $\binom{13}{13} = \frac{13!}{0!\cdot 13!} = 1$ scelte

$$\frac{52!}{39!\cdot 13!}\cdot\frac{39!}{26!\cdot 13!}\cdot\frac{26!}{13!\cdot 13!} = \frac{52!}{(13!)^4}$$

Esercizio 21

Si deve formare un comitato formato da 3 uomini e 3 donne scelti da un gruppo di 8 donne e 6 uomini. Quanti comitati sono possibili se 2 degli uomini rifiutano distare in una stessa commissione?

Soluzione dell'esercizio 21

1. Scelgo 3 donne su 8: $\binom{8}{3} = 56$ scelte
2. Scelgo 3 uomini su 6: $\binom{6}{3} = 20$ scelte
3. Tolgo le volte in cui ci sono i 2 uomini che non vogliono stare insieme: 4 scelte:

$$56\cdot(20-4) = 896$$

Esercizio 22

In quanti modi si possono assegnare 8 professori a 4 scuole se ogni scuola deve riceverne due?

Soluzione dell'esercizio 22

$$P_n = \frac{8!}{2!2!2!2!} = 2520$$

Esercizio 23

Quattro palline vengono estratte casualmente da un'urna contenente sei palline rosse e quattro palline blu. Calcolare quante possibili combinazioni diverse ci sono se ciascuna pallina viene re-inserita nell'urna prima che la prossima venga estratta:

Soluzione dell'esercizio 23

$$S((n,k)) = 10^4$$

Esercizio 24

Quattro palline vengono estratte casualmente da un'urna contenente sei palline rosse e quattro palline blu. Calcolare quante possibili combinazioni diverse ci sono se le palline non vengono re-inserite nell'urna:

Soluzione dell'esercizio 24

$$C(n,k) = \binom{10}{4}$$

Esercizio 25

Si estraggono due carte da un mazzo di 52 carte (13 Picche, 13 Fiori, 13 Cuori 13 Quadri). Quante combinazioni ci sono se una è di Quadri e l'altra è di Picche?

Soluzione dell'esercizio 25

$$13 \times 13 \times \binom{2}{1}$$

Oppure

$$\binom{13}{1} \times \binom{13}{1}$$

Esercizio 26

Quante "parole" di quattro lettere ci sono utilizzando un alfabeto di 26 lettere? E quante parole di quattro lettere senza ripetizioni?

Soluzione dell'esercizio 26

Con ripetizioni 26^4, senza $\binom{26}{4}$.

Esercizio 27

Quanti sono gli anagrammi della stringa BOOKKEEPER con le due O vicine?

Soluzione dell'esercizio 27

Considerando le due 0 come una unica lettera:

$$P(1,1,2,3,1,1) = \frac{9!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = 30240$$

Esercizio 28

Dobbiamo disporre 20 invitati ad un matrimonio ed i due sposi in fila per la foto di gruppo. I due sposi devono stare vicini tra loro, ma non ai margini della foto (ovvero non possono essere né i primi due né gli ultimi due della fila). In quanti modi possiamo disporli?

Soluzione dell'esercizio 28

Consideriamo intanto di disporre le 18 persone. Abbiamo quindi una sequenza di 18 oggetti da disporre. Quindi 18!. Abbiamo poi da disporre la coppia non ai margini. Ci sono quindi 2 possibili: MF o FM. E possono stare solamente "in mezzo" quindi in tutto 17 possibilità: $18! \cdot 17 \cdot 2$.

Es. 29 — Dati 8 libri di inglese diversi tra loro, 7 di francese diversi tra loro e 5 di tedesco diversi tra loro: in quanti modi possono essere scelti tre libri, uno per ciascuna lingua?

Soluzione (Es. 29) — 280

Es. 30 — In quanti modi possiamo pescare due carte da un mazzo di 52 carte da gioco in modo tale che:
1. la prima carta sia un asso e la seconda non sia una regina?
2. una sia un asso e l'altra non sia una regina?
3. la prima carta sia di picche e la seconda non sia una regina?
4. una sia di picche e l'altra non sia una regina?

Soluzione (Es. 30) — 188

Soluzione (Es. 30) — 182

Soluzione (Es. 30) — 612

Soluzione (Es. 30) — 546

Es. 31 — In quanti modi si possono lanciare due dadi, uno rosso ed uno verde, in modo da ottenere una somma divisibile per 3?

Soluzione (Es. 31) — 12

Es. 32 — Quando si fanno sedere le persone attorno ad una tavola rotonda non si tiene conto della loro posizione assoluta ma soltanto della posizione relativa tra loro. Determinare in quanti modi 10 persone si possono sedere attorno ad una tavola rotonda, giustificando con cura l'affermazione.

Soluzione (Es. 32) — 9!

Es. 33 — (a) Quante sono le targhe possibili formate da 7 simboli, sapendo che le prime due sono delle lettere (alfabeto di 26 lettere) e le altre cinque dei numeri?
(b) Rispondere ad (a) supponendo che le lettere e i numeri non si ripetano

Soluzione (Es. 33) — 67600000, 19656000

Es. 34 — Quanti sono gli esiti possibili in 4 lanci consecutivi di un dado (diciamo per esempio che l'esito è 3,4,3,1 se il primo lancio dà 3, il secondo 4, il terzo 3 e il quarto 1)

Soluzione (Es. 34) — 6^4

Es. 35 — A venti lavoratori vengono assegnati 20 diversi lavori. Quante sono le assegnazioni possibili?

Soluzione (Es. 35) — 20!

Es. 36 — (a) Alberto, Bruno, Carlo e Marco hanno formato un quartetto, con quattro diversi strumenti. Se ognuno di loro può suonare tutti e quattro gli strumenti, quante sono i modi possibili per formare il quartetto?
(b) Rispondere alla stessa domanda sapendo che Alberto e Bruno possono suonare tutti gli strumenti ma Carlo e Marco sanno suonare solo il pianoforte e il violino.

Soluzione (Es. 36) — $4!, 4$

Es. 37 — Anni fa il prefisso telefonico nel Canada e negli Stati Uniti consisteva in una sequenza di 3 cifre: la prima era un intero compreso tra 2 e 9, la seconda era 0 o 1, la terza era un intero tra 1 e 9. (a) Quanti prefissi erano possibili? (b) Quanti di essi cominciavano con il 4?

Soluzione (Es. 37) — 144, 18

Es. 38 — In quanti modi si possono distribuire 4 libri diversi a 7 bambini?

Soluzione (Es. 38) — 7^4

Es. 39 — Nella prima fila di un'aula devono sedersi 6 studenti: tre ragazzi e tre ragazze.
(a) In quanti modi si possono sedere gli studenti?
(b) In quanti modi si possono sedere se sia i maschi che le femmine devono sedere vicini fra loro?
(c) In quanti modi si possono sedere se solo i maschi devono stare vicini?
(d) In quanti modi si possono sedere se due studenti dello stesso sesso non devono stare vicini?

Soluzione (Es. 39) — 720, 72, 144,72

Es. 40 — Quanti sono gli anagrammi di
(a) Ruota;
(b) Paprika;
(c) Mississippi;
(d) Piccolo?

Soluzione (Es. 40) — 120, 1260, 34650, 1260

Es. 41 — Il gioco di un bimbo consiste di 12 pezzi di legno colorati dei quali 6 sono neri, 4 sono rossi, 1 è bianco e 1 è blu. In quanti modi il bimbo può allineare i pezzi?

Soluzione (Es. 41) — 27720

Es. 42 — In quanti modi 8 persone possono sedersi in fila se
(a) non ci sono restrizioni di nessun tipo;
(b) A e B siedono vicini;
(c) ci sono 4 uomini e 4 donne e due persone dello stesso sesso non possono sedersi vicine;
(d) ci sono 5 uomini, e questi devono sedere vicini fra loro;
(e) ci sono 4 coppie e ognuno è vicino al proprio partner?

Soluzione (Es. 42) — 40320, 10080, 1152, 2880, 384

Es. 43 — In quanti modi si possono sistemare in una libreria 3 romanzi, 2 testi di matematica e uno di chimica se
(a) i libri si possono sistemare in qualunque modo;
(b) i testi di matematica vanno messi vicini fra loro e i romanzi vanno messi vicini fra loro?
(c) i romanzi vanno messi vicini fra loro e gli altri libri si possono sistemare in qualunque ordine?

Soluzione (Es. 43) — 720, 72, 144

Es. 44 — Si devono selezionare cinque studenti di una classe di 30 studenti per assegnare dei premi distinti. In quanti modi si possono selezionare gli studenti se
(a) uno studente può ricevere più premi;
(b) uno studente può ricevere al più un premio?

Soluzione (Es. 44) — $30^5, 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26$

Es. 45 — Si consideri un gruppo di 20 persone. Quante sono le strette di mano se ciascuno dà la mano a tutti gli altri?

Soluzione (Es. 45) — 190

Es. 46 — Quante sono le mani di cinque carte da poker?

Soluzione (Es. 46) — $\binom{52}{5}$

Es. 47 — Una classe di tango argentino ha 22 studenti, 10 donne e 12 uomini. In quanti modi si possono formare 5 coppie?

Soluzione (Es. 47) — 23950080

Es. 48 — Uno studente vuole vendere 2 libri da una collezione di 6 testi di matematica, 7 di scienze e 4 di economia. Quante sono le scelte possibili se:
(a) i 2 libri devono riguardare lo stesso argomento;
(b) i 2 libri devono riguardare soggetti diversi?

Soluzione (Es. 48) — 42, 94

Es. 49 — Si vogliono distribuire 7 diversi regali a 10 bambini. Quante sono le distribuzioni possibili se nessun bimbo può ricevere più di un regalo?

Soluzione (Es. 49) — 604800

Es. 50 — Si deve formare una commissione parlamentare di 7 persone, composta da 2 Popolari, 2 Socialisti e 3 Indipendenti scelti tra 5 Popolari, 6 Socialisti e 4 Indipendenti. Quante commissioni possibili si possono formare?

Soluzione (Es. 50) — 600

Es. 51 — In quanti modi si possono suddividere 12 persone in comitati di rispettivamente 3,4 e 5 persone?

Soluzione (Es. 51) — 27720

Es. 52 — (a) In quanti modi si possono assegnare 8 nuovi maestri a 4 scuole?
(b) Rispondere alla stessa domanda se ogni scuola deve ricevere 2 maestri.

Soluzione (Es. 52) — 65536, 2520

Es. 53 — Contare gli anagrammi di TETRAPAK senza lettere uguali vicine.

Soluzione (Es. 53) — 5760

Es. 54 — Contare gli anagrammi di TABACCHI senza lettere uguali vicine.

Capitolo 11

Probabilità

Sia Ω un insieme. Un esperimento aleatorio con spazio campionario Ω e una procedura che determina aleatoriamente la scelta di un elemento di Ω. Gli elementi di Ω si chiamano eventi elementari o esiti dell'esperimento; si dice evento dell'esperimento un qualunque sottoinsieme di Ω.

Sia $A \subseteq \Omega$ un sottoinsieme chiamato "Evento".

Diremo che P è una probabilità uniforme sullo spazio campionario finito Ω se $P \in [0,1]$ che associa ad ogni sottoinsieme A di Ω il numero:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Si definisce l'evento opposto ad A tale che: $\overline{A} = \Omega - A$, la cui probabilità è pari a:

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Due eventi A e B si dicono incompatibili quando il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, cioè quando i due eventi non possono verificarsi contemporaneamente.

Due eventi A e B si dicono compatibili quando il verificarsi dell'uno non esclude il verificarsi dell'altro e i due eventi possono verificarsi contemporaneamente.

Siano A e B due eventi nello spazio campionario Ω, si ha che la probabilità totale dei due eventi è data da:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Con $P(A \cap B) = P(A\ B)$ si intende la probabilità che gli eventi si verificano contemporanemente, che è 0 se gli eventi sono incompatibili.

Esercizio 55

Si lanciano due dadi equilibrati. Qual è la probabilità che la somma delle due facce che appaiono sia uguale a 9?

Soluzione dell'esercizio 55

Contando abbiamo 4 casi favorevoli su 36

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} = 0.111$$

Esercizio 56

Calcolare la probabilità che in un dado equilibrato esca il numero 1 o il numero 6

Soluzione dell'esercizio 56

Consideriamo il lancio di un dado e chiamiamo E_1 l'evento: "esce il numero 1 " ed E_2 l'evento: "esce il numero $6''$ I due eventi sono incompatibili, cioè il verificarsi di uno dei due esclude necessariamente il verificarsi dell'altro, pertanto la probabilità dell'evento E : "esce il numero 1 oppure esce il numero 5 " è data dalla somma delle probabilità dei due eventi. Essendo:

$$P\left(E_1\right)=P\left(E_2\right)=\frac{1}{6}$$

Allora $P(E)=P\left(E_1\right)+P\left(E_2\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Esercizio 57

Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte un re o una carta di denari?

Soluzione dell'esercizio 57

Indichiamo con E_1 l'evento "viene estratta una carta di denari" e con E_2 l'evento: "viene estratto un re". I due eventi sono compatibili in quanto può accadere che la carta estratta sia il re di denari e quindi i due eventi si verifichino contemporaneamente. Per calcolare la probabilità richiesta calcoliamo quindi:

$P\left(E_1\right)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ in quanto abbiamo 10 casi favorevoli su 40 possibili.

$P\left(E_2\right)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$ poiché i re sono 4.

$P\left(E_1 \cap E_2\right)=\frac{1}{40}$ cioè la probabilità che gli eventi si verifichino contemporaneamente.

Per quanto detto prima allora la probabilità richiesta è data da:

$$P\left(E_1\right)+P\left(E_2\right)-P\left(E_1 \cup E_2\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}-\frac{1}{40}=\frac{10+4-1}{40}=\frac{13}{40}=0.325=$$

Esercizio 58

Un dado non equilibrato viene lanciato. Queste le probabilità dei vari punti: 1: 1/12, 2: 2/12, 3: 3/12, 4: 4/12, 5 e 6: 1/12. Qual è la probabilità che l'esito sia un numero pari?

Soluzione dell'esercizio 58

$$\frac{2}{12}+\frac{4}{12}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

Esercizio 59

Si estraggono due carte da un mazzo di 52 carte (13 Picche, 13 Fiori, 13 Cuori 13 Quadri). Qual è la probabilità che una sia di Quadri e l'altra sia di Picche?

Soluzione dell'esercizio 59

$$\frac{13}{52}\cdot\frac{13}{51}\cdot\binom{2}{1}=0.12$$

$$\frac{\binom{13}{1}\binom{13}{1}}{\binom{52}{2}}=0.12$$

Esercizio 60

Un gruppo è formato da 15 ragazze e 10 ragazzi, due persone vengono scelte a caso. Qual'è la probabilità che si tratti di un ragazzo di una ragazza?

Soluzione dell'esercizio 60

$$\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}+\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}=0.5$$

Esercizio 61

Un comitato di sei persone viene scelto casualmente da un club composto da 18 maschi e 12 femmine.

1. Qual è la probabilità che ci sia almeno una femmina nel comitato?
2. Qual è la probabilità che ci siano esattamente tre maschi e tre femmine nel comitato?

Soluzione dell'esercizio 61

$$P(X \geqslant 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 12) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} = \frac{\binom{18}{6}}{\binom{30}{6}} = 0.031$$

N.B. è errato calcolare $P(X = 0)$ con la v.a. binomiale

$$P(X \geqslant 1) = 1 - \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} \cdot \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} = 0.968$$

b)

$$P(X = 3) = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} \cdot \frac{16}{28} \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} \cdot \frac{10}{25} \cdot 20 = \frac{\binom{18}{3}\binom{12}{3}}{\binom{30}{6}} = 0.3023$$

Il fattore 20 indica le possibili posizioni delle donne, calcolato come $\binom{6}{3}$

N.B. è errato calcolare $P(X = 3)$ con la v.a. binomiale

Esercizio 62

Una scatola contiene 100 calcolatrici, delle quali 3 sono difettose. Ne vengono selezionate 5 a caso, qual è la probabilità che:

1. quattro siano funzionanti ed una sola difettosa?
2. al più due siano difettose?
3. tutte e 5 siano funzionanti?

Soluzione dell'esercizio 62

1)

Per fasi:

$$P(X = 1) = \frac{97}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97} \cdot \frac{3}{96} \cdot 5 = \frac{\binom{97}{4} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{100}{5}} = 0.1380$$

Il fattore 5 indica le possibili posizioni della calcolatrice difettosa, calcolato come $\binom{5}{1}$.

N.B. nonostante sia errato calcolare con la v.a. binomiale in questo comunque fornisce un risultato approsimato relativamente giusto, per la poca differenza tra $\frac{97}{100}, \frac{96}{99}, \frac{95}{98}$ e $\frac{94}{97}$.

2 e 3)

Per la definizione di densità:

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = \frac{97}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{94}{97} \cdot \frac{93}{96} = \frac{\binom{97}{5}}{\binom{100}{5}} = 0.856$$

$$P(X = 2) = \frac{97}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{95}{98} \cdot \frac{3}{97} \cdot \frac{2}{96} \cdot 10 = \frac{\binom{97}{3} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{100}{5}} = 0.00587$$

Il fattore 10 indica le possibili posizioni della calcolatrice difettosa, calcolato come $\binom{5}{2}$.

Esercizio 63

Quattro palline vengono estratte casualmente da un'urna contenente sei palline rosse e quattro palline blu. Trovare la probabilità che tutte e quattro siano blu se:

1. ciascuna pallina viene re-inserita nell'urna prima che la prossima venga estratta;
2. le palline non vengono re-inserite nell'urna.

Soluzione dell'esercizio 63

$$P(4B) = \left(\frac{4}{10}\right)^4 = \frac{16}{625} = 0.0256 \tag{1}$$

$$P(4B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{1}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210} = 0.0047 \tag{2}$$

Esercizio 64

Cinque persone salgono su di un ascensore che si ferma a cinque piani. Supponendo che ciascuna persona abbia la stessa probabilità di scendere in uno qualsiasi dei cinque piani, trovare la probabilità che tutti scendano a piani diversi.

Soluzione dell'esercizio 64

Sia I_n l'insieme delle 5 persone.

Realizziamo quindi una k -sequenza che associa ad ogni persona il proprio piano: questa è una 5-sequenza di I_n. Sia S lo spazio campionario dato da tutte le possibile k -sequenze con ripetizioni ed M il sottoinsieme dello spazio campionario S dato dalle tutte le possibili k -sequenze senza ripetizioni. Ricapitolando abbiamo che:

$$\#S = S((n,k)) = n^k \Longrightarrow 5^5 \qquad \#M = S(n,k) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & \text{se } k \leqslant n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \Longrightarrow \frac{5!}{(5-5)!} = 5!$$

La probabilità quindi è:

$$P(M) = \frac{\#M}{\#S} = \frac{5!}{5^5} = 0.0384$$

Esercizio 65

Trovare la probabilità che in un insieme di 9 persone almeno due abbiano il compleanno nello stesso mese (supponendo che i mesi siano equiprobabili).

Soluzione dell'esercizio 65

$$\begin{aligned} P(M) &= 1 - P\left(M^C\right) = 1 - \frac{\#M^C}{\#S} = 1 - \frac{\frac{12!}{3!}}{12^9} = 1 - \frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{12} \\ &= 1 - 0.0155 = 0.9845 \end{aligned}$$

Esercizio 66

Una coppia ha due figli; si sa che almeno uno del due è maschio. Qual è la probabilità che entrambi siano Maschi? Si suppone che il sesso di un figlio sia indipendente da quello dell'altro.

Soluzione dell'esercizio 66

Elencando il primo, secondo si hanno i seguenti casi (M, M), (M, F), (F, M) : 3

Di questi c'è un unico caso con (M, M) : la probabilità quindi è 1/3

Esercizio 67

Un mazzo di carte è composto da solo 13 carte: 10 valori $\{1, 2, \ldots, 10\}$ e da tre figure $\{J, Q, K\}$. Una persona riceve 5 carte. Qual è la probabilità che la persona abbia almeno una figura tra le sua carte?

Soluzione dell'esercizio 67

Qui se si "sceglie" una figura al primo colpo, la volta dopo ha una figura in meno da scegliere e la probabilità di avere una figura passa da 3/13 a 2/12. Così ad esempio a probabilità di NON avere figure è $\frac{\binom{10}{5}}{\binom{13}{5}}$, non $(10/13)^5$

Cioè che $P = 1 - \frac{\binom{10}{5}}{\binom{13}{5}} = 0.804196$

Esercizio 68

Consideriamo i numeri composti da tre cifre decimali tutte diverse compresi tra 000 e 999 (esempio: 468 o 852 o 035). Qual è la probabilità, scegliendo a caso uno di questi numeri, che tra le 3 cifre sia presente almeno uno dei numeri 0,1,2?

Soluzione dell'esercizio 68

Il numero di possibili casi in cui non c'è nessuna delle tre cifre è pari a $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Il numero di possibili casi è $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Da cui: $P = 1 - \frac{210}{720} = 0.7083$.

In alternativa si ottiene che i casi possi in cui c'è almeno una delle 3 cifre è $3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot \binom{3}{2} + 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \binom{3}{1} = 510$

Da cui: $P = \frac{510}{720} = 0.7083$.

11.1 Probabilità di più eventi condizionata

La probabilità che si avvera sia l'evento E_1 nello spazio campionario Ω_1 che l'evento E_2 nello spazio campionario Ω_2 è pari a, dove Ω_1 è indipendente da Ω_2

$$P(E_1 E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Due eventi (compatibili) E_1 ed E_2 si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno non influisce sul calcolo della probabilità del verificarsi dell'altro.

Due eventi (compatibili) E_1 ed E_2 si dicono dipendenti se il verificarsi dell'uno influisce sul calcolo della probabilità del verificarsi dell'altro.

Se invece tra Ω_1 e Ω_2 sono dipendenti si ha che $P(E_1 E_2) < P(E_1) \cdot P(E_2)$ In particolare:

La probabilità dell'intersezione di due eventi dipendenti E_1 ed E_2 è data dal prodotto della probabilità di un evento per la probabilità condizionata dell'altro, cioè:

$$P\left(E_1\ E_2\right) = P\left(E_1\right) \cdot P\left(E_2 \mid E_1\right)$$

Ovviamente i ruoli di E_1 e di E_2 possono essere invertiti, cioè:

$$P\left(E_1\ E_2\right) = P\left(E_2\right) \cdot P\left(E_1 \mid E_2\right)$$

La regola del prodotto Sia $P\left(E_1 \cdots E_{n-1}\right) > 0$, allora

$P\left(E_1 E_2 E_3 \cdots E_n\right) = P\left(E_1\right) P\left(E_2 \mid E_1\right) P\left(E_3 \mid E_1 E_2\right) \cdots P\left(E_n \mid E_1 \cdots E_{n-1}\right)$

Formula di Bayes Supponiamo che $F_1, F_2, \ldots, F_n$ siano a due a due disgiunti ed esaustivi (cioè che esattamente uno di essi si realizzi) Supponiamo ora che E si sia realizzato e di voler determinare quali degli F_j si sia anch'esso realizzato:

$$P\left(F_j \mid E\right) = \frac{P\left(E F_j\right)}{P(E)} = \frac{P\left(E \mid F_j\right) P\left(F_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(E \mid F_i\right) P\left(F_i\right)}$$

Esercizio 69

Sia data un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che dopo ogni estrazione la pallina venga rimessa nell'urna (estrazione con reinserimento), calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.

Soluzione dell'esercizio 69

Iniziamo col distinguere i due eventi: E_1: "si estrae la pallina numero 5" ed E_2 : "si estrae la pallina numero 6". Dobbiamo calcolare $P\left(E_1 \cap E_2\right)$. Chiediamoci: "il verificarsi di uno influisce sul verificarsi dell'altro?" Poiché l'estrazione avviene con restituzione, la risposta è negativa e quindi $P\left(E_1 \cap E_2\right) = P\left(E_1\right) \cdot P\left(E_2\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01$

Esercizio 70

Sia data un'urna contenente 10 palline numerate da 1 a 10. Potendo estrarre una pallina per volta e supponendo che dopo ogni estrazione la pallina NON venga rimessa nell'urna (estrazione SENZA reinserimento), calcolare la probabilità di estrarre la pallina numero 5 seguita dalla pallina numero 6.

Soluzione dell'esercizio 70

In questo caso gli eventi E_1 : "si estrae la pallina numero 5" ed E_2 : "si estrae la pallina numero 6" sono dipendenti, in quanto non rimettendo la prima pallina estratta nell'urna il verificarsi dell'evento E_2 è stato influenzato dall'evento E_1, quindi:

$P\left(E_1\right) = \frac{1}{10}$ in quanto abbiamo un caso favorevole su 10, mentre $P\left(E_2\right) = \frac{1}{9}$ poiché i casi possibili si riducono a 9 non essendo stata reimbussolata la prima pallina.

$$P\left(E_1\ E_2\right) = P\left(E_1\right) \cdot P\left(E_2 \mid E_1\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90} \simeq 0.011$$

Esercizio 71

L'azienda A fornisce il 40% dei computer venduti ed è in ritardo con le consegne nel 5% dei casi. L'azienda B fornisce il 30% dei computer venduti ed è in ritardo con le consegne il 3% dei casi. Infine, l'azienda C fornice il restante 30% dei computer ed è in ritardo con le consegne nel 2,5% dei casi. Un computer viene consegnato in ritardo; qual è la probabilità che esso provenga dall'azienda A?

Soluzione dell'esercizio 71

$$P(A) = 0.4 \quad P(R|A) = 0.05 \quad P(B) = 0.3 \quad P(R|B) = 0.03 \quad P(C) = 0.3 \quad P(R|C) = 0.025$$

$$P(A|R) = \frac{P(R|A) \cdot P(A)}{\sum_{I=A,B,C} P(R|I) \cdot P(I)} = \frac{0.05 \cdot 0.4}{0.05 \cdot 0.4 + 0.03 \cdot 0.3 + 0.025 \cdot 0.3} = \frac{40}{73} = 0.5479$$

Esercizio 72

Si deve formare una squadra di calcetto formata da 3 donne e 2 uomini scelti da un gruppo di 10 donne e di 8 uomini. Calcolare la probabilità che Francesca e Giulia non siano contemporaneamente nella squadra e che Alberto sia uno dei componenti della squadra.

Soluzione dell'esercizio 72

squadre con Francesca senza Giulia: $\binom{8}{2}$

squadre con Giulia senza Francesca: $\binom{8}{2}$

squadre Femminili: $\binom{10}{3}$

$$P[\text{con Francesca}] = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}$$

$$P[\text{con Giulia}] = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}$$

$$P[\text{con Francesca e Giulia}] = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}}$$

$$P[\text{con Francesca o Giulia}] = \frac{2\binom{8}{2}+\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{14}{15}$$

squadre con Alberto: $\binom{7}{1}$

squadre Maschili: $\binom{8}{2}$

$$P[\text{con Alberto}] = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$P[\text{con Francesca o Giulia e Alberto}] = \frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4} = 0.2333$$

Esercizio 73

Abbiamo due dadi indistinguibili. Uno è equilibrato, l'altro quando viene lanciato dà 6 nel 77% dei casi. Prendiamo a caso uno dei due dadi e lo lanciamo. Se non esce 6, qual è la probabilità di aver preso il dado equilibrato?

Soluzione dell'esercizio 73

$$P(!6 \mid D2) = 0.23 \quad P(!6 \mid D1) = \frac{5}{6} \quad P(D1) = P(D2) = \frac{1}{2}$$

$$P(!6) = \frac{0.23 + \frac{5}{6}}{2} = 0.5316$$

$$P(D1 \mid !6) = \frac{P(!6 \mid D1)P(D1)}{P(!6)} = \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}}{0.5316} = 0.7837$$

Esercizio 74

Nel Veneto il 35% delle persone adulte non legge mai un quotidiano. Il 38,1% fa regolarmente attività sportiva e il 23% non legge mai un quotidiano e non fa regolarmente attività sportiva.

Scelta casualmente una persona adulta, calcolare la probabilità che non legga mai un quotidiano se fa regolarmente attività sportiva.

Soluzione dell'esercizio 74

$$P(!L) = 0.35 \quad P(L) = 0.65 \quad P(S) = 0.381 \quad P(!S) = 0.619$$

$$P(!S!L) = 0.23 \quad P(!L \mid S) = ?$$

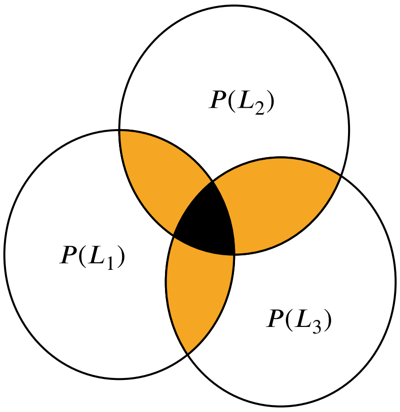
$$P(!S \mid !L) = \frac{P(!S!L)}{P(!L)} = \frac{0.23}{0.35} = 0.6571$$

$$P(S \mid !L) = 1 - 0.6571 = 0.3429$$

$$P(!L \mid S) = \frac{P(S \mid !L)P(!L)}{P(S)} = \frac{0.3429\cdot 0.35}{0.381} = 0.315$$

Esercizio 75

Per un posto di lavoro si presentano 10 candidati. I colloqui con ciascun candidata/o vengono svolti in modo indipendente dai membri di un comitato esaminatore di tre persone: ogni membro del comitato stila una classifica da 1 a 10 dei candidati. Un candidato viene assunto se viene classificato primo da almeno due dei tre membri del comitato esaminatore. Trovare la probabilità che una/o specifica/o candidata/o (diciamo la Dott.ssa Tal dei Tali) venga assunta/o supponendo che i membri della commissione non siano in grado di valutare i candidati e che stilino le loro classifiche in modo completamente casuale.



Soluzione dell'esercizio 75

$$\begin{aligned} P(L_i) &= \frac{1}{10} \\ P(L_1L_2) = P(L_1)P(L_2) &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{100} \\ P(L_2L_3) = P(L_2)P(L_3) &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{100} \\ P(L_1L_3) = P(L_1)P(L_3) &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{100} \\ P(L_1L_2L_3) = P(L_1)P(L_2)P(L_3) &= \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Notiamo che l'intersezione viene contata 3 volte, per cui la dobbiamo togliere 2 volte:

$$P(E) = P(L_1L_2) + P(L_2L_3) + P(L_1L_3) - 2P(L_1L_2L_3) = \frac{3}{100} - \frac{2}{1000} = 0.028$$

Oppure

Sia X una v.a. binomiale di parametri $\left(3, \frac{1}{10}\right)$:

$$P(E) = P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right) + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0.028$$

Esercizio 76

Vengono lanciati due dadi regolari a 6 facce. Qual è la probabilità che la somma delle facce sia:

- 7 o 11?
- un numero primo?
- maggiore di 7 sapendo che uno dei dadi ha dato 3?
- almeno 7?
- un numero pari e maggiore di 7?
- maggiore o uguale di 7 sapendo che uno dei dadi ha dato 3?

Soluzione dell'esercizio 76

$$P(X=1)=0 \qquad P(X=5)=\frac{4}{36} \qquad P(X=9)=\frac{4}{36}$$
$$P(X=2)=\frac{1}{36} \qquad P(X=6)=\frac{5}{36} \qquad P(X=10)=\frac{3}{36}$$
$$P(X=3)=\frac{2}{36} \qquad P(X=7)=\frac{6}{36} \qquad P(X=11)=\frac{2}{36}$$
$$P(X=4)=\frac{3}{36} \qquad P(X=8)=\frac{5}{36} \qquad P(X=12)=\frac{1}{36}$$

a)

$$P(X=7)+P(X=11)=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{2}{9}$$

b)

$$\begin{aligned}P(X \text{ è primo}) &= P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=5)+P(X=7)+P(X=11)\\ &= 0+\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

c)

$$P(X=1|X_1=3\vee X_2=3)=0 \qquad P(X=5|\cdots)=\frac{2}{11} \qquad P(X=9|\cdots)=\frac{2}{11}$$
$$P(X=2|X_1=3\vee X_2=3)=0 \qquad P(X=6|\cdots)=\frac{2}{11} \qquad P(X=10|\cdots)=0$$
$$P(X=3|X_1=3\vee X_2=3)=0 \qquad P(X=7|\cdots)=\frac{1}{11} \qquad P(X=11|\cdots)=0$$
$$P(X=4|X_1=3\vee X_2=3)=\frac{2}{11} \qquad P(X=8|\cdots)=\frac{2}{11} \qquad P(X=12|\cdots)=0$$
$$P(X>7|X_1=3\vee X_2=3)=\frac{2}{11}+\frac{2}{11}=\frac{4}{11}$$

Oppure:

Sia un dado rosso, uno verse. Si ha che:

$$\begin{aligned}P(Y\geqslant 7|(X_R=3)\cup(X_V=3)) &= \frac{P((Y\geqslant 7)\cap[(X_R=3)\cup(X_V=3)])}{P((X_R=3)\cup(X_V=3))}\\ &= \frac{P((Y\geqslant 7)\cap[(X_R=3)\cup(X_V=3)])}{P(X_R=3)+P(X_V=3)-P((X_R=)\cap(X_V=3))}\\ &= \frac{P(Y\geqslant 7|X_R=3)+P(Y\geqslant 7|X_V=3)}{P(X_R=3)+P(X_V=3)-P((X_R=)\cap(X_V=3))}\\ &= \frac{P(X_V\geqslant 5)P(X_R=3)+P(X_R\geqslant 5)P(X_V=3)}{P(X_R=3)+P(X_V=3)-P((X_R=)\cap(X_V=3))}\\ &= \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{11}{36}}=\frac{4}{11}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 7) &= P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)\\ &= \frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 7|\text{pari}) &= P(X=8)+P(X=10)+P(X=12)\\ &= \frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

f) Sia un dado rosso, uno verse. Si ha che:

$$
\begin{aligned}
P(Y \geqslant 7|(X_R = 3) \cup (X_V = 3)) &= \frac{P((Y \geqslant 7) \cap [(X_R = 3) \cup (X_V = 3)])}{P((X_R = 3) \cup (X_V = 3))} \\
&= \frac{P((Y \geqslant 7) \cap [(X_R = 3) \cup (X_V = 3)])}{P(X_R = 3) + P(X_V = 3) - P((X_R =) \cap (X_V = 3))} \\
&= \frac{P(Y \geqslant 7|X_R = 3) + P(Y \geqslant 7|X_V = 3)}{P(X_R = 3) + P(X_V = 3) - P((X_R =) \cap (X_V = 3))} \\
&= \frac{P(X_V \geqslant 4)P(X_R = 3) + P(X_R \geqslant 4)P(X_V = 3)}{P(X_R = 3) + P(X_V = 3) - P((X_R =) \cap (X_V = 3))} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{6}{11}
\end{aligned}
$$

Esercizio 77

La probabilità che domani piova è del 55%. La sera precedente ad un giorno di pioggia, Giuseppe ha sempre mal di schiena; i dolori alla schiena affliggono il povero Giuseppe nel 70% delle serate. Se stasera Giuseppe avrà male alla schiena, quant'è la probabilità che domani piova?

Soluzione dell'esercizio 77

$$
\begin{aligned}
P(P) &= 0.55 & P(M|P) &= 1 \\
P(M) &= 0.7 & P(P|M) &= ?
\end{aligned}
$$

$$
P(P|M) = \frac{P(M|P)P(P)}{P(M)} = \frac{0.55}{0.7} = 0.78
$$

Esercizio 78

Viene fermato dalla polizia un automobilista che è passato con il rosso. Statisticamente, se uno è sobrio non passa con il rosso; se uno è alticcio passa con il rosso 1 volta ogni 25 semafori; se uno ha bevuto molto passa con il rosso 1 volta ogni 10 semafori; se uno è completamente ubriaco, non vede nemmeno il semaforo e passa a prescindere che sia rosso, giallo o verde. Determinare la probabilità che il fermato sia completamente ubriaco, sapendo che mediamente una persona che si mette alla guida è sobria nel 75% dei casi, è alticcia nel 15% dei casi, ha bevuto molto nel 7% dei casi, è completamente ubriaca nel 3% dei casi.

Soluzione dell'esercizio 78

$$
\begin{aligned}
P(R|S) &= 0 & P(S) &= 0.75 & P(U|R) &= ? \\
P(R|A) &= \frac{1}{25} & P(A) &= 0.15 \\
P(R|B) &= \frac{1}{10} & P(B) &= 0.07 \\
P(R|U) &= 1 & P(U) &= 0.03
\end{aligned}
$$

$$
P(U|R) = \frac{P(R|U)P(U)}{P(R|U)P(U) + P(R|B)P(B) + P(R|A)P(A) + P(R|S)P(S)} = 0.70
$$

Esercizio 79

Abbiamo perso un ago in uno tra tre pagliai, l'ago può tovarsi con uguale probabilità in ognuno dei pagliai. Se l'abbiamo perso nel primo, la probabilità di ritrovarlo è del 5%; se l'abbiamo perso nel secondo la probabilità di ritrovarlo è del 10%; se l'abbiamo perso nel terzo, la probabilità di ritrovarlo è del 2%. Sapendo che non si è trovato l'ago nel primo pagliaio, determinare la probabilità condizionata che si trovi nel primo pagliaio e la probabilità condizionata che si trovi nel secondo.

Soluzione dell'esercizio 79

$P(CEN)$: Probabiltià che è stato cercato e non trovato.

$$\begin{array}{lll} P(R|P_1) = 0.05 & P(CEN|P_1) = 0.95 & P(P_1|CEN) = ? \\ P(R|P_2) = 0.10 & P(CEN|P_2) = 1 & P(P_2|CEN) = ? \\ P(R|P_3) = 0.02 & P(CEN|P_3) = 1 & \end{array}$$

$$P(P_1|CEN) = \frac{P(CEN|P_1)P(P_1)}{P(CEN|P_1)P(P_1) + P(CEN|P_2)P(P_2) + P(CEN|P_3)P(P_3)} = \frac{19}{59} = 0.32$$

$$P(P_2|CEN) = \frac{P(CEN|P_2)P(P_2)}{P(CEN|P_1)P(P_1) + P(CEN|P_2)P(P_2) + P(CEN|P_3)P(P_3)} = \frac{20}{59} = 0.34$$

Esercizio 80

Sul commercio si distinguono 2 tipi di PC, quelli affidabili e quelli non affidabili. I primi hanno un guasto entro l'anno nell'1' % dei casi, mentre i secondi nel 10% dei casi. L' 80% dei PC è affidabile. Si acquista un PC, siano A, R_1 e R_2 gli eventi:

- A : "Il PC è affidabile";
- R_1 : "Il PC ha un guasto nel primo anno di vita";
- R_2 : "Il PC ha un guasto ne secondo anno di vita".

Determinare le probabilità:

(a) $P(R_1)$

(b) $P(A|R_1)$

Soluzione dell'esercizio 80

$$\begin{array}{ll} P(R_1|A) = 0.01 & P(A) = 0.80 \\ P\left(R_1|A^C\right) = 0.10 & \end{array}$$

$$P(R_1) = P(R_1|A) \cdot P(A) + P\left(R_1|A^C\right) \cdot P\left(A^C\right) = 0.028$$

$$P(A|R_1) = \frac{P(R_1|A)P(A)}{P(R_1)} = \frac{2}{7} = 0.29$$

Esercizio 81

Abbiamo 3 scatole $1, 2, 3$ contenenti la prima due monete da 50 centesimi, la seconda una da 50 centesimi una da 1 euro, la terza due monete da 1 euro. Si scelga a caso una delle tre scatole, e da questa si estragga una moneta (con probabilità uguale per le 2 monete). La moneta estratta è da 50 centesimi.

(a) Qual è la probabilità che la seconda moneta nella scatola sia anch'essa da 50 centesimi?

(b) Rimettiamo nella scatola la moneta estratta e ne estraiamo a caso una moneta che risulta ancora da 50 centesimi. Qual è la probabilità che si tratti della prima scatola?

Soluzione dell'esercizio 81

a)

$$\begin{array}{ll} P(50C_1|S_1) = 1 & P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = \frac{1}{3} \\ P(50C_1|S_2) = \frac{1}{2} & \\ P(50C_1|S_3) = 0 & P(50C_2|50C_1) = ? \end{array}$$

$$P(50C_1) = P(50C_1|S_1)\cdot P(S_1) + P(50C_1|S_2)\cdot P(S_2) + P(50C_1|S_3)\cdot P(S_3) = \frac{1}{2}$$
$$P(50C_2|50C_1) = P(S_1|50C_1) = \frac{P(50C_1|S_1)P(S_1)}{P(50C_1)} = \frac{2}{3}$$

b)

Sapendo che la prima estratta è una moneta da 50 centesimi ciò equivale a lavorare con solamente le scatole 1 e 2

$$P(50C_1|S_1) = 1 \qquad P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = \frac{1}{3}$$
$$P(50C_1|S_2) = \frac{1}{2}$$
$$P(50C_1|S_3) = 0 \qquad P(S_1|50C_1 50C_2) = ?$$

Dato che una volta scelta la scatole le estrazioni sono indipendenti:

$$P(50C_2 50C_1|S_1) = P(50C_1|S_1)^2 = 1 \qquad P(50C_2 50C_1|S_2) = P(50C_1|S_2)^2 = \frac{1}{4}$$
$$P(50C_2 50C_1|S_3) = P(50C_1|S_3)^2 = 0$$

$$P(50C_2 50C_1) = P(50C_2 50C_1|S_1)P(S_1) + P(50C_2 50C_1|S_2)P(S_2) = \frac{5}{12}$$
$$P(S_1|50C_1 50C_2) = \frac{P(50C_1 50C_2|S_1)P(S_1)}{P(50C_1 50C_2)} = \frac{4}{5}$$

Esercizio 82

Si considerano due mazzi di carte da Poker (Cuori, Picche, Quadri, Fiori). Il mazzo A è normale, mentre il mazzo B ha 26 carte rosse e 20 carte nere. Una procedura permette di scegliere uno dei due mazzi, il mazzo A viene scelto con probabilità **4/5**. Si estrae una prima carta dal mazzo, la si rimette poi nel mazzo e si mescola. Si estrae poi una seconda carta a caso da quel mazzo. Qual è la probabilità che la seconda carta sia rossa, sapendo che la prima è rossa?

Soluzione dell'esercizio 82

Sappiamo che:

$$P\left(R_1|A\right) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$
$$P\left(R_1|B\right) = \frac{26}{46} = \frac{13}{23}$$

Inoltre che:

$$P(A) = \frac{4}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{5}$$

Allora possiamo calcolare la probabilità che al **Primo tentativo esca rossa**:

$$P\left(R_1\right) = P\left(R_1|A\right)P(A) + P\left(R_1|B\right)P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{13}{23}\cdot\frac{1}{5}$$

Questa probabilità, va bene nel caso in cui "Si estrae una seconda carta a caso da uno dei due mazzi a caso". Non nel caso in cui estraggo la carta dallo stesso mazzo! Questo evento è temporalmente dipendente dipende dalla scelta precedente, cioè quella del mazzo!

Osserviamo che: $P\left(R_2|R_1A\right) = P\left(R_1|A\right)$ e $P\left(R_2|R_1B\right) = P\left(R_1|B\right)$

Allora dobbiamo calcolare la probabilità che al **Primo e secondo tentativo esca rossa**.

$$\begin{aligned} P\left(R_2R_1\right) &= P\left(R_2R_1|A\right)P(A) + P\left(R_2R_1|B\right)P(B) \\ &= P\left(R_2|R_1A\right)P\left(R_1|A\right)P(A) + P\left(R_2|R_1B\right)P\left(R_1|A\right)P(B) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{13}{23}\cdot\frac{13}{23}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{169}{529}\cdot\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Applichiamo, quindi, il teorema di Bayes, la per ricavare la probabilità $P\left(R_2|R_1\right)$: Sapendo che:

$$P\left(R_2R_1\right) = P\left(R_2|R_1\right)P\left(R_1\right) \Leftrightarrow P\left(R_2|R_1\right) = \frac{P\left(R_2R_1\right)}{P\left(R_1\right)}$$

Sostituendo con i dati noti:

$$P\left(R_2|R_1\right) = \frac{P\left(R_2R_1\right)}{P\left(R_1\right)} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{169}{529}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{13}{23}\cdot\frac{1}{5}} = 0.514$$

Esercizio 83

Durante una gita in barca un turista afferma di vedere un delfino. In quelle acque, si possono trovare delfini (il 70% delle volte) e squali (il 30% delle volte). A causa del riflesso della luce solare, un turista può identificare correttamente il tipo di pesce con una probabilità del 80%. Quanto vale la probabilità che il pesce avvistato dal turista sia veramente un delfino?

Soluzione dell'esercizio 83

Abbiamo che: $P(TD) = 0.7, \quad P(TS) = 0.3, \quad P(IC) = 0.8$

Sappiamo che la probabilità di $P(VD \mid TD)$ è uguale alla probabilità di idenficiazione corretta $P(IC)$, da cui: $P(VD \mid TD) = P(IC) = 0.8, \quad V(VS \mid TS) = P(IC) = 0.8$

Per la formula della partizione si ha che: $P(VD) = P(VD \mid TD)P(TD) + P(VD \mid TS)P(TS) = 0.7\cdot 0.8 + 0.3\cdot 0.2 = 0.62$

Applicando la formula di Baxes: $P(TD \mid VD) = \dfrac{P(VD \mid TD)P(TD)}{P(VD)} = \dfrac{0.8\cdot 0.7}{0.62} = \dfrac{28}{31}$

Esercizio 84

Un dado con infinite facce $0,1,2,3,4,\dots$ se lanciato fa uscire il numero n con probabilità $\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Qual è la probabilità che al lancio esca un numero diverso da 0 e divisibile per 3?

Soluzione dell'esercizio 84

$$P = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 2^{3n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n} - \frac{1}{8^0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{8}} - 1\right) = \frac{1}{14}$$

$$P = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n+1}} = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 2^{3(t+1)}} = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 8^{t+1}} = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 8\cdot 8^t} = \frac{1}{16}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{8^t} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{14}$$

Esercizio 85

La probabilità che il Venezia sia ripescato in Serie B (evento R) se la Commissione Nazionale lavora con serietà (evento S) è pari al 90%. La probabilità che la Commissione Nazionale non abbia lavorato con serietà (evento S^c) se il Venezia non venisse ripescato (evento R^c) è pari al 99%. Tenendo conto che il Venezia verrà ripescato con probabilità pari al 80%, determinare la probabilità che la Commissione Nazionale abbia lavorato con serietà se il Venezia verrà ripescato. (Suggerimento: Ricavare una formula nell'incognita x uguale alla probabilità cercata)

Soluzione dell'esercizio 85

$$P(R \mid S) = 0.9 \quad P\left(R^C \mid S\right) = 0.1 \quad P\left(S^C \mid R^C\right) = 0.99$$

$$P\left(S \mid R^C\right) = 0.01 \quad P(R) = 0.8 \quad P\left(R^C\right) = 0.2 \quad P(S \mid R) = ? = x \quad P\left(S^C \mid R^C\right) = 0.99$$

$$P(S \mid R) = \frac{P(R \mid S)\left(P\left(S \mid R^C\right)P\left(R^C\right) + P(S \mid R)P(R)\right)}{P(R)} \Leftrightarrow x = \frac{0.9(0.01\cdot 0.2 + x\cdot 0.8)}{0.8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{0.9\cdot 0.01\cdot 0.2}{0.8} + 0.9\cdot x \Leftrightarrow x = \frac{0.9\cdot 0.01\cdot 0.2}{0.1\cdot 0.8} \Leftrightarrow x = 0.0225$$

Esercizio 86

Nel campo del sig. XYZ c'è una pianta di chinotti. La probabilità che la pianta produca almeno 2 Kg di frutti è uguale a 0.7 quando XYZ si ricorda di usare del fertilizzante, altrimenti se si dimentica di usarlo scende a 0.2. In generale la pianta di chinotti del sig. XYZ produce almeno 2 Kg di frutti con probabilità 0.5. Calcolare la probabilità che il sig. XYZ si ricordi di somministrare il fertilizzante.

Soluzione dell'esercizio 86

$$P(2+ \mid F) = 0.7$$
$$P\left(2+ \mid F^C\right) = 0.2$$
$$P(2+) = 0.5$$
$$P(F) = ?$$
$$P(2+) = P(2+ \mid F)P(F) + P\left(2+ \mid F^C\right)(1 - P(F)) \Leftrightarrow 0.7x + 0.2(1-x) = 0.5 \Leftrightarrow P(F) = x = 0.6$$

Esercizio 87

Durante una gita in barca un turista afferma di vedere un delfino. In quelle acque, si possono trovare delfini (il 70% delle volte) e squali (il 30% delle volte). A causa del riflesso della luce solare, un turista può identificare correttamente il tipo di pesce con una probabilità del 80%. Quanto vale la probabilità che il pesce avvistato dal turista sia veramente un delfino?

Soluzione dell'esercizio 87

Abbiamo che: $P(TD) = 0.7, \quad P(TS) = 0.3, \quad P(IC) = 0.8$

Sappiamo che la probabilità di $P(VD \mid TD)$ è uguale alla probabilità di idenficiazione corretta $P(IC)$, da cui: $P(VD \mid TD) = P(IC) = 0.8, \quad V(VS \mid TS) = P(IC) = 0.8$

Per la formula della partizione si ha che: $P(VD) = P(VD \mid TD)P(TD) + P(VD \mid TS)P(TS) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.2 = 0.62$

Applicando la formula di Bayes: $P(TD \mid VD) = \dfrac{P(VD \mid TD)P(TD)}{P(VD)} = \dfrac{0.8 \cdot 0.7}{0.62} = \dfrac{28}{31} = \dfrac{56}{62}$

Es. 88 — Si lanciano due dadi equilibrati. Qual è la probabilità che la somma delle due facce che appaiono sia uguale a 7?

Soluzione (Es. 88) — 1/6

Es. 89 — Si dispone di un'urna con 8 palline numerate da 1 a 8. Si estraggono tutte le palline, senza reimmissione, ed una ad una si inseriscono dalla prima all'ultima in caselle numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che le palline pari vadano nelle caselle pari e le dispari nelle caselle dispari?

Soluzione (Es. 89) — 1/70

Es. 90 — Uno strumento permette di controllare il funzionamento di un certo tipo di componenti elettronici. Lo strumento rileva che un componente difettoso è difettoso nel 95% dei casi, che un componente buono è buono nel 97% dei casi. Si estrae a caso un componente da un lotto la cui difettosità (= percentuale di componenti difettosi) è uguale al 5%. Qual è la probabilità che che il componente estratto sia difettoso, dato che lo strumento lo rileva difettoso?

Soluzione (Es. 90) — 5/8

Es. 91 — È noto che i gemelli possono essere dei veri gemelli, e in questo caso sono dello stesso sesso, o degli pseudo–gemelli, e in tal caso la probabilità che siano dello stesso sesso vale 1/2. Sia p la probabilità che due gemelli siano veri gemelli.
(a) Determinare la probabilità che due gemelli siano veri gemelli sapendo che sono dello stesso sesso;
(b) qual è la probabilità che due gemelli siano di sesso diverso?

Soluzione (Es. 91) — $\dfrac{2p}{p+1}, \dfrac{1-p}{2}$

Es. 92 — La probabilità di colpire un bersaglio al tiro a segno con una buona carabina e 1/4, con una meno buona è 1/6. Un giocatore sceglie a vaso una tra 6 carabine, di cui una è buona.
(a) I giocatore spara un colpo con una carabina; qual è la probabilità di colpire il bersaglio?
(b) Sapendo che il tiratore ha colpito il bersaglio, qual è la probabilità che abbia usato la carabina buona?

Soluzione (Es. 92) — 0.18, 0.23

Es. 93 — Dieci urne contengono tutte 4 palline Rosse e un numero variabile di palline Bianche: più precisamente l'urna i ($i = 1, \ldots, 10$) contiene 4 palline R e i palline B. Un'urna viene scelta a caso e da essa vengono estratte 2 palline.
(a) Qual è la probabilità che una pallina sia Bianca e una sia Rossa?
(b) vengono effettivamente estratte una pallina Bianca e una Rossa: qual è la probabilità p_i che le palline siano state estratte dall'urna i?

Soluzione (Es. 93) — 0.506, $\dfrac{\frac{4}{4+i} \cdot \frac{i}{3+i}}{\sum_{k=1}^{10} \frac{4}{4+k} \cdot \frac{k}{3+k}}$

Es. 94 — Suona il telefono cellulare di Giuseppe. Il suo numero è noto solo alla moglie Silvana, al figlio Stefano ed alla collega Sandra. Giuseppe rimane al telefono per più di due minuti con Silvana una volta su l0, con Stefano tre volte su 10 e con Sandra sette volte su 10. Mediamente Stefano chiama il padre una volta al giorno, Silvana chiama il marito nove volte al giorno e Sandia il collega quattro volte al giorno.
(a) Determinare la probabilità che Giuseppe rimanga al telefono per più di due minuti.
(b) Se la telefonata dura più di due minuti, qual è la probabilità che Giuseppe abbia parlato con il figlio?

Soluzione (Es. 94) — 0.28, 0.075

Es. 95 — Un'urna contiene 6 palline di cui 3 Bianche, 2 Rosse ed 1 Nera. Si estraggono senza reimmissione tre palline e si vince se una delle tre è nera.
(a) Qual è la probabilità di vincere ?
(b) Qual è la probabilità condizionata di vincere sapendo che la pallina Nera non è uscita nelle prime due estrazioni?
(c) Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità condizionata che la pallina Nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?

Soluzione (Es. 95) — 1/2, 1/4, 1/3

Es. 96 — Un tecnico è chiamato in una ditta per intervenire su una macchina che si sta rivelando inaffidabile. Infatti, essa produce un pezzo su 5 difettoso, mentre le altre 3 macchine identiche che si trovano in quella ditta producono solo 1 pezzo su 100 difettoso. Il tecnico entra nella ditta, sceglie una macchina a caso tra le 4 identiche e osserva un pezzo a caso prodotto da quella macchina.
(a) Qual è la probabilità che il pezzo sia difettoso?
(b) Il pezzo scelto risulta effettivamente difettoso. Qual è la probabilità condizionata che la macchina che ha prodotto il pezzo sia quella inaffidabile?

Soluzione (Es. 96) — 0.06, 0.83

Es. 97 — In un condominio il 30% è soddisfatto, il 70% non lo è. In una assemblea partecipano il 20% dei soddisfatti e il 60% degli insoddisfatti. Un condomino che partecipa all'assemblea è scelto a caso.
(a) Qual è la probabilità che si tratti di un condomino insoddisfatto?
(b) Qual è la probabilità che si tratti di un condomino soddisfatto?

Soluzione (Es. 97) — 0.875, 0.125

Es. 98 — La probabilità di fare bene il TOLC di ingresso a Ingegneria è del 50%. la probabilità di finire gli studi in 3 anni è del 60%. Chi supera bene il TOLC ha una probabilità del 90% di finire gli studi entro il terzo anno. Se uno studente si laurea entro il terzo anno, qual è la probabilità che abbia fatto bene il TOLC di ingresso?

Soluzione (Es. 98) — 0.75

Es. 99 — Per un dato candidato alle presidenziali francesi, che si svolgono in due turni, la probabilità di superare il I turno è del 35%. Una volta superato il primo turno, la probabilità di vincere è del 62%. Qual'è la probabilità che il candidato vinca le elezioni?

Soluzione (Es. 99) — 0.217

Es. 100 — Si lancia una moneta che dà testa con probabilità 1/3. Se esce Testa si prende una pallina da un'urna con 3 palline bianche e 3 Rosse. Se esce Croce si prende una pallina da un'urna che ha 2 palline Rosse e 4 palline Bianche. Qual è la probabilità di estrarre una pallina Rossa?

Soluzione (Es. 100) — 0.38

Es. 101 — Si considerano due mazzi di carte da Poker (Cuori, Picche, Quadri, Fiori). Il mazzo A è normale, mentre il mazzo B ha 26 carte rosse e 20 carte nere. Una procedura permette di scegliere uno dei due mazzi, il mazzo A viene scelto con probabilità **4/5**. Si estrae una prima carta dal mazzo, la si rimette poi nel mazzo e si mescola. Si estrae poi una seconda carta a caso da quel mazzo. Qual è la probabilità che la seconda carta sia rossa, sapendo che la prima è rossa?

Soluzione (Es. 101) — 0.514

Es. 102 — Siano C e D due eventi con $P(C) = 0.25, P(D)0.45$, e n $P(C \cap D) = 0.1$. Quanto vale $P(C^c \cap D)$?

Es. 103 — È dato un mazzo di 52 carte da poker (il mazzo ha carte di 4 semi diversi: Cuori, Quadri, Fior, Picche; per ogni seme le carte sono 13: Asso, 2, 3, .., 10, Jack, Regina, Re). Si pescano a caso, nel'ordine e senza re immissione, quattro carte dal mazzo opportunamente mescolato. La quarta carta è uno dei quattro "2". Qual è la probabilità che questa sia l'unica carta con valore uguale a 2?

Es. 104 — Si dispone di due monete apparentemente identiche.
La moneta 1 è equilibrata e dà testa con probabilità del 50%.
La moneta 2 dà testa con probabilità del 30%
Si sceglie a caso una delle due monete e si i effettuano 10 lanci consecutivi con la stessa moneta.
Viene CCCTCCTCCT (Croce, Croce, Croce, Testa, Croce, Croce, Testa, Croce, Croce, Testa).
Qual è la probabilità che sia stata usata la moneta 2?
I lanci sono indipendenti, una volta che la moneta è stata scelta.

Es. 105 — Si dispone di due monete apparentemente identiche.
La moneta 1 è equilibrata e dà testa con probabilità del 50 %.
La moneta 2 dà testa con probabilità del 60 %.
Si sceglie a caso una delle due monete e si effettuano 5 lanci consecutivi con la stessa moneta.
Viene TTCCT (Testa, Testa, Croce, Croce, Testa).
Qual è la probabilità che sia stata usata la moneta 2?
I lanci sono indipendenti, una volta che la moneta è stata scelta.

Es. 106 — Ci sono due dadi equilibrati. II dado A ha 2 facce Rosse e 4 facce Verdi e, il dado B ha 3 facce Rosse e 3 facce Verdi. A occhi chiusi si sceglie a caso uno dei dadi e lo si lancia una volta.
(a) Qual è la probabilità che esca una faccia Rossa?
(b) Esce una faccia Rossa. Qual è la probabilità che si tratti del dado A?
(c) Esce una faccia Rossa. Si rilancia lo stesso dado. Qual è la probabilità che esca di nuovo una faccia Rossa?

Capitolo 12

Variabili Aleatorie Discrete

Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una variabile che può assumere valori diversi in dipendenza da qualche fenomeno aleatorio.

Una V.A. si dice discreta se $\operatorname{Im} X$ è un insieme al più numerabile (finito), altrimenti è una V.A. continua.

Diciamo densità di X la funzione:

$$p_X = P(X = r) \in [0, 1]^1$$

Diciamo distribuzione di X la funzione

$$F_X = P(X \leq r) \in [0, 1]$$

La funzione di distribuzione F_X ha le seguenti proprietà:

- F_X è crescente;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- F_X è continua da destra.

Variabile aleatoria di Bernoulli

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω. Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria di Bernoulli di parametro p (e si pone $X \sim \mathrm{Be}(p)$) se

1. $\operatorname{Im} X = \{0, 1\}$
2. $p_X(1) = p, p_X(0) = 1 - p$

Variabile aleatoria binomiale

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω. Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria binomiale di parametri (n, p) (e si pone $X \sim \mathrm{B}(n, p)$) se

1. $\operatorname{Im} X = \{0, 1, \dots, n\}$
2. $p_X(i) = \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) p^i (1 - p)^{n-i} = P(X = i)$

Variabile aleatoria geometrica

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω. Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria geometrica di parametro $p \in]0, 1[$ (e si pone $X \sim \mathrm{Ge}(p)$) se

1. $\operatorname{Im} X = \mathbb{N}_{\geq 1}$
2. $p_X(k) = p(1 - p)^{k-1} = P(X = k)$
3. $P(X > k) = (1 - p)^k$

Variabile aleatoria di Poisson

Sia Ω uno spazio campionario e P una funzione di probabilità su Ω Una variabile aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria di Poisson di parametro λ (e si pone $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$) se

[1] Nel caso di V.A. continue è ammesso un valore maggiore di 1

1. $\mathrm{Im}\, X = \mathbb{N}$
2. $p_X(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = P(X = i)$

Approssimazione della binomiale con la Poisson

Siano $\lambda > 0$ e $X_n \sim B\left(n, p_n := \frac{\lambda}{n}\right), n = 1, 2, \ldots$. Allora,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(X_n = k\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = P(\mathrm{Po}(\lambda) = k)$$

Nella pratica l'approssimazione di $X \sim B(n, p)$ con $Y \sim \mathrm{Po}(np)$ si può fare se p è "piccolo" e n è "grande":

$$\begin{cases} np \leq 10 \\ n \geq 20 \\ p \leq 5\% \end{cases}$$

Assenza di memoria

Una variabile aleatoria discreta (risp. continua) X possiede mancanza di memoria se per ogni x, y naturali (risp. reali non negativi) vale che $P(X > x + y \mid X > y) = P(X > x)$. Cioè che anche sapendo cosa è successo "in passato" alla variabile aleatoria non importa.

Esercizio 107

Una fabbrica produce motori elettrici. Un motore può essere, indipendentemente da un altro, difettoso con probabilità 0.01.

(a) Qual è la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi?

(b) Approssimare la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi usando una opportuna variabile di Poisson.

Soluzione dell'esercizio 107

$n = 300, p = 0.01, k = 5$

$$P(B(300, 0.01) = 5) = \binom{300}{5} 0.01^5 \cdot 0.99^{300-5} = 0.10099$$

$$P(Po(300 \cdot 0.01) = 5) = P(Po(3) = 5) = e^{-3} \frac{3^5}{5!} = 0.10082$$

Esercizio 108

Si mettono a caso un milione di oggetti in 25 000 cassetti. Approssimare, usando una opportuna variabile di Poisson, la probabilità che il primo cassetto contenga esattamente 40 oggetti.

Soluzione dell'esercizio 108

$n = 1000000, p = \frac{1}{25000} = 4 \cdot 10^{-5}, k = 40 \Rightarrow \lambda = 40$

$$P\left(B\left(100000, 4 \cdot 10^{-5}\right) = 40\right) = P\left(Po\left(1000000 \cdot 4 \cdot 10^{-5}\right) = 40\right) = P(Po(40) = 40) = e^{-40} \frac{40^{40}}{40!} = 0.0629$$

Esercizio 109

Una fabbrica produce dei bulloni con una percentuale di pezzi difettosi, in modo indipendente uno dall'altro, dello 0.3%. I bulloni vengono venduti in confezioni da 100 pezzi, e queste vengono sostituite se vi sono almeno 2 (cioè 2 o più) bulloni difettosi. Dopo aver individuato la variabile aleatoria che conta il numero di bulloni difettosi, determinare la probabilità di dover sostituire una data confezione.

Soluzione dell'esercizio 109

$p = 0.003, n = 100$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - P(B(0.3)=0) - P(B(0.3)=1) \\ &= 1 - \left(\begin{array}{c} 100 \\ 0 \end{array} \right) (0.003)^0 (1-0.003)^{100} - \left(\begin{array}{c} 100 \\ 1 \end{array} \right) (0.003)^1 (1-0.003)^{99} = 0.0367 \end{aligned}$$

Verifichiamo che il risultato è corretto con l'approssimazione di Poisson. $\lambda = 0.3$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - P(Po(0.3)=0) - P(Po(0.3)=1) \\ &= 1 - e^{-0.3} \frac{0.3^0}{0!} - e^{-0.3} \frac{0.3^1}{1!} = 1 - e^{-0.3} - \frac{3}{10} e^{-0.3} = 0.0369 \end{aligned}$$

Esercizio 110

Agli studenti vengono proposti 6 quiz con 4 risposte a scelta ciascuno. Il docente distrattamente ha messo online i quiz di un insegnamento più avanzato, sicché gli studenti rispondono a caso. Qual è la probabilità che lo studente risponda correttamente ad almeno 4 quiz (≥ 4)?

Soluzione dell'esercizio 110

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P\left(B\left(6, \frac{1}{4}\right) \geq 4\right) = P\left(B\left(6, \frac{1}{4}\right) = 4\right) + P\left(B\left(6, \frac{1}{4}\right) = 5\right) + P\left(B\left(6, \frac{1}{4}\right) = 6\right) \\ &= \binom{6}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{6}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{6}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^6 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0375 \end{aligned}$$

Esercizio 111

La ruota della roulette ha 38 settor: 18 Neri, 18 Rossi e 2 verdi. Puntando sul rosso in 5 giocate consecutive, si perdono soldi se si vince al massimo due volte, si guadagnano soldi se si vince almeno 3 volte. Qual è la probabilità di perdere i soldi?

Soluzione dell'esercizio 111

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P\left(B\left(38, \frac{9}{19}\right) < 3\right) = P\left(B\left(38, \frac{9}{19}\right) = 0\right) + \left(B\left(38, \frac{9}{19}\right) = 1\right) + \left(B\left(38, \frac{9}{19}\right) = 2\right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \end{array} \right) \left(\frac{9}{19}\right)^0 \left(\frac{10}{19}\right)^5 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 1 \end{array} \right) \left(\frac{9}{19}\right)^1 \left(\frac{10}{19}\right)^4 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array} \right) \left(\frac{9}{19}\right)^2 \left(\frac{10}{19}\right)^3 = 0.549 \end{aligned}$$

Esercizio 112

In un laboratorio c'è una sequenza (infinita!) di computers. Ognuno di questi può essere infettato da un virus, indipendentemente dall'altro, con probabilità 40%. Qual è la probabilità che testandoli uno ad uno, occorra testarne almeno 6 per individuare la presenza di un virus (cioè che i primi 5 non siano infettati)?

Domanda di riflessione: cambierebbe la risposta se i computers fossero 20?

Soluzione dell'esercizio 112

$$P(X \geq 6) = P(Ge(0.4) > 5) = (1 - 0.4)^5 = 0.0777$$

Domanda di riflessione: Sì, si una una V.A. binominale $p = 0.4, n = 20$ che la approsiamo con una Poisson con $\lambda = 8$

$$P(X \geq 6) = 1 - \sum_{i=0}^{5} P(B(8) = i) = 1 - \sum_{i=0}^{5} P(Po(8) = i)$$

h

Esercizio 113

Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100 paia, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità 1/2 di essere prodotta dal primo macchinario, 1/4 dal secondo e 1/4 dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole.

(a) qual è la probabilità che trovi almeno un paio difettoso?

(b) Se l'ottico trova esattamente due paia difettose, qual è la probabilità che gli occhiali della scatola ricevuta dall'ottico siano stati prodotti dal primo macchinario?

Soluzione dell'esercizio 113

$$\begin{aligned} P(M_1) &= \frac{1}{2} & P(D|M_1) &= \frac{1}{100} \\ P(M_2) &= \frac{1}{4} & P(D|M_2) &= \frac{1}{200} \\ P(M_3) &= \frac{1}{4} & P(D|M_3) &= \frac{1}{300} \end{aligned}$$

a)

Sia X la v.a. che conta quanti pezzi diffettosi ci sono in una scatola,

Sia X_1 la v.a. che conta quanti pezzi diffettosi ci sono in una scatola prodotta dalla macchina 1,

Sia X_2 la v.a. che conta quanti pezzi diffettosi ci sono in una scatola prodotta dalla macchina 2,

Sia X_3 la v.a. che conta quanti pezzi diffettosi ci sono in una scatola prodotta dalla macchina 3.

$$X_1 \sim B\left(100, \frac{1}{100}\right)$$
$$P(X_1 \geqslant 1) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \binom{100}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 0.633$$
$$X_2 \sim B\left(100, \frac{1}{200}\right)$$
$$P(X_2 \geqslant 1) = 1 - P(X_2 = 0) = 1 - \binom{100}{0}\left(\frac{1}{200}\right)^0\left(\frac{199}{200}\right)^{100} = 0.394$$
$$X_3 \sim B\left(100, \frac{1}{300}\right)$$
$$P(X_3 \geqslant 1) = 1 - P(X_3 = 0) = 1 - \binom{100}{0}\left(\frac{1}{300}\right)^0\left(\frac{299}{300}\right)^{100} = 0.283$$
$$P(X \geqslant 1) = P(X_1 \geqslant 1)\cdot P(M_1) + P(X_2 \geqslant 1)\cdot P(M_2) + P(X_3 \geqslant 1)\cdot P(M_3) = 0.486$$

b)

$$P(X = 2|M_1) = P(X_1 = 2) = \binom{100}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^{98} = 0.1849$$
$$P(X = 2|M_2) = P(X_2 = 2) = \binom{100}{2}\left(\frac{1}{200}\right)^2\left(\frac{199}{200}\right)^{98} = 0.0757$$
$$P(X = 2|M_3) = P(X_3 = 2) = \binom{100}{2}\left(\frac{1}{300}\right)^2\left(\frac{299}{300}\right)^{98} = 0.0396$$
$$P(X = 2) = P(X_1 = 2)P(M_1) + P(X_2 = 2)P(M_2) + P(X_3 = 2)P(M_4) = 0.1212$$

$$P(M_1|X = 2) = \frac{P(X = 2|M_1)P(M_1)}{P(X = 2)} = 0.7621$$

Esercizio 114

Sappiamo che in un negozio arrivano in media 14 clienti alla settimana

(a) Si associ ai dati precedenti la v.a. di Poisson, Po, collegata con il numero di clienti che arrivano in 10 giorni. Descrivere esplicitamente tale legge; trovare la sua media.

(b) Calcolare, tramite la legge introdotta in a), la probabilità che in 10 giorni arrivino esattamente 20 clienti.

Soluzione dell'esercizio 114

$$X \sim Po(14)$$

$$X_{10/7} = X_{10/7} \sim Po(14 \cdot 10/7) = Po(20)$$

$$\mu = 43$$

$$P(Po(20) = 20) = \frac{(20)^{20}}{20!} e^{-20} = 0.0866$$

Esercizio 115

(a) Un dado equilibrato viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità che il 6 sia uscito esattamente 2 volte?

(b) Qual è la probabilità che in n lanci il 6 sia uscito esattamente 2 volte?

Soluzione dell'esercizio 115

$$P\left(B\left(3, \frac{1}{6}\right) = 2\right) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0.0694$$

$$P\left(B\left(n, \frac{1}{6}\right) = 2\right) \simeq P\left(Po\left(\frac{n}{6}\right) = 2\right) = \frac{\left(\frac{n}{6}\right)^2}{2!} e^{-\left(\frac{n}{6}\right)} \to 0$$

Esercizio 116

Un canale di comunicazione trasmette le cifre 0 e 1. Se la cifra trasmessa è 0, la cifra viene correttamente ricevuta con probabilità 0.99; se è stato trasmesso l'1 la cifra viene correttamente ricevuta con probabilità 0.95. L'80% di cifre trasmesse è 1.

(a) Si trasmette una cifra. Qual è la probabilità p di una errata ricezione della cifra trasmessa?

(b) Si trasmettono 30 cifre. Qual è la variabile aleatoria che conta il numero di errori su 30 cifre trasmesse? si calcoli la probabilità che su 30 cifre trasmesse si verifichino più di 2 errori (2 compreso).

(c) E ragionevole approssimare la probabilità calcolata in b) con una variabile di Poisson? Calcolare in tal caso la probabilità approssimata.

[In (b) e (c) esprimere i risultati con delle formule dove compare p trovato in (a)]

Soluzione dell'esercizio 116

a)

$$\begin{aligned} P(C|0) &= 0.99 & P(1) &= 0.8 \\ P(C|1) &= 0.95 & p = P(C) &= ? \end{aligned}$$

$$P(C) = P(C|0)P(0) + P(C|1)P(1) = 0.958$$
$$P(E) = 0.042$$

b)

$$X \sim B(30, 0.042)$$
$$P(B(30, 0.042) = 0) = 0.2760$$
$$P(B(30, 0.042) = 1) = 0.3631$$
$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0.3609$$

c)

è ragionevole solo e solo se sono rispettate le tre condizioni quì seguenti:

$$\begin{cases} np \leqslant 10 & OK \\ n \geqslant 20 & OK \\ p \leqslant 5\% & OK \end{cases}$$

Si è ragionevole.

$$X \sim B(30, 0.042) \sim Po(30 \cdot 0.042)$$
$$P(Po(30 \cdot 0.042) = 0) = 0.2837$$
$$P(Po(30 \cdot 0.042) = 1) = 0.3574$$
$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0.3589$$

Esercizio 117

Un'urna contiene i numeri da 1 a 19. Pesco un numero e lo reinserisco nell'urna; ne pesco un'altro e lo reinserisco nell'urna, e così via. Calcolare la probabilità che il numero 10 esca per la prima volta al nono tentativo.

Soluzione dell'esercizio 117

$$P = \left(\frac{18}{19}\right)^9 \left(\frac{1}{19}\right) = 0.03235$$

Esercizio 118

Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0,904. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio.

Soluzione dell'esercizio 118

$$P(B(100, 0.904) = 98) = \binom{100}{98}(0.904)^{98}(1 - 0.904)^2 = 0.00231$$
$$P(B(100, 0.904) = 99) = \binom{100}{99}(0.904)^{99}(1 - 0.904)^1 = 0.00043$$
$$P(B(100, 0.904) = 100) = \binom{100}{100}(0.904)^{100}(1 - 0.904)^0 = 0.0004$$
$$P(B(100, 0.904) \geq 98) = 0.00279$$

Soluzione dell'esercizio 118

Esprimiamo in termini di $P(X < x)$ la probabilità $P(X \in [0, 3[)$

Sappiamo che $P(X \in [0, 3[)$ è l'intersezione tra le probabilità:

- $P(X < 3)$
- $P(X \geqslant 0) = 1 - P(X < 0)$

Otteniamo quindi:

$$P(X \in [0, 3[) = P(X < 3) - P(X < 0)$$

Evidenziando l'area nel disegno, otteniamo che:

$$P(X \in [0, 3[) = P(X < 3) - P(X < 0) = F_X(3) - F_X(0^-) = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 119

Il numero di chiamate ad un centralino in una data ora è una variabile di Poisson di media 250.

Qual è la probabilità che chiamino in quell'ora più di 260 persone?

Soluzione dell'esercizio 119

$$P(Po(250) \geqslant 260) = 1 - P(Po(250) \leqslant 260) = 1 - 0.7486 = 0.2514$$

Es. 120 — Un hacker vuole aprire un file che necessita di una password che sa essere una di una lista di 100. Egli dispone di un software che sceglie a caso una delle password, senza eliminarla alla prova successiva se questa non funziona. Qual è la probabilità che la password corretta sia individuata al 50-esimo tentativo?

Soluzione (Es. 120) — 0.0061

Es. 121 — Una fabbrica produce dei bulloni con una percentuale di pezzi difettosi del 2%. I bulloni vengono venduti in confezioni da 100 pezzi, e queste vengono sostituite se vi sono almeno 2 bulloni difettosi.
(a) Qual è una variabile aleatoria X appropriata per contare il numero di pezzi difettosi in una confezione?
(b) Qual è la probabilità di dover sostituire una data confezione?
(c) Approssimare il risultato precedente utilizzando una opportuna variabile di Poisson.

Soluzione (Es. 121) — $X \sim B\left(100, \frac{2}{100}\right), 0.5967, 0.5939$

Es. 122 — Supponiamo che un individuo sia allergico ad un farmaco con probabilità pari a 0.001.
(a) Determinare la probabilità che su 2000 individui vi siano esattamente 3 individui allergici e la probabilità che ve ne siano almeno 3 allergici.
(b) Approssimare il risultato precedente utilizzando una opportuna v.a. di Poisson.

Soluzione (Es. 122) — 0.3233, 0.3233

Es. 123 — La probabilità di vincere un premio nei concorsi di un supermercato è molto bassa, pari a 0.008. Una signora partecipa a 200 concorsi (indipendenti).
(a) Qual è la probabilità di vincere esattamente 5 premi?
(b) Approssimare la probabilità precedente usando una opportuna variabile discreta.

Soluzione (Es. 123) — 0.0174, 0.0176

Es. 124 — Si distribuiscono a caso 51 caramelle uguali a 100 bambini. Calcolare la probabilità che Carletto riceva 11 caramelle.

Soluzione (Es. 124) — 0

Es. 125 — Un'urna contiene i numeri da 1 a 19. Pesco un numero e lo reinserisco nell'urna; ne pesco un'altro e lo reinserisco nell'urna, e così via. Calcolare la probabilità che il numero 10 esca per la prima volta al dodicesimo tentativo.

Soluzione (Es. 125) — 0.02904

Es. 126 — Un venditore ha fissato due appuntamenti per vendere una enciclopedia. Il suo primo appuntamento lo porterà a vendere una enciclopedia con probabilità pari a 0.3 e il secondo con probabilità pari a 0.6. Ogni vendita ha la stessa probabilità di riguardare l'edizione di lusso (del valore di 1000 euro) o quella standard (del valore di 500 euro). Si determini la densità discreta di X, la variabile aleatoria che conta il totale dei guadagni del venditore.

Es. 127 — Un uomo afferma di avere poteri extrasensoriali. Come test, viene lanciata 10 volte una moneta equilibrata e si chiede all'uomo di prevederne l'esito in anticipo. Lui indovina 7 dei 10 risultati. Qual è la probabilità che lo abbia conseguito se non è dotato dei suddetti poteri (ovvero ha agito in maniera casuale)?

Es. 128 — Supponiamo che un motore di un aereo in volo possa andare in avaria con probabilità pari a $1 - p$, in maniera indipendente dagli altri motori. Se un aereo ha bisogno di almeno metà dei propri motori per poter concludere il volo senza problemi, per quali valori di p è più sicuro un aereo a 5 motori rispetto a uno a 3 motori?

Es. 129 — Si sa che i dischetti prodotti da una certa azienda sono difettosi con probabilità pari a 0.01 in maniera indipendente l'uno dall'altro. L'azienda vende i dischetti in confezioni da 10 e offre una garanzia di rimborso nel caso in cui almeno 1 dei dischetti sia difettoso. Se una persona acquista 3 scatole, qual è la probabilità che ne restituisca esattamente 1 scatola?

Es. 130 — Quando la moneta 1 viene lanciata, si ottiene testa con probabilità pari a 0.4; quando viene lanciata la moneta 2, ciò avviene con probabilità pari a 0.7. Scegliamo a caso una di queste monete e la lanciamo 10 volte.
(a) Qual è la probabilità che esattamente 7 dei 10 lanci diano testa?
(b) Dato che il primo lancio ha dato testa, quanto vale la probabilità condizionata che esattamente 7 dei 10 lanci diano testa?

Es. 131 — Supponiamo che una moneta non equilibrata dia testa con probabilità pari a p e che venga lanciata 10 volte. Se otteniamo un totale di 6 testa, si trovi la probabilità condizionata che i primi 3 esiti siano stati:
(a) T, C, C;
(b) C, T, C.

Es. 132 — Il numero medio mensile di incidenti di aerei commerciali in tutto il modo è pari a 3.5. Qual è la probabilità che ci siano
(a) almeno 2 incidenti il prossimo mese;
(b) al più 1 incidente il prossimo mese?

Es. 133 — L'anno scorso si sono celebrati all'incirca 80 000 matrimoni nello stato di New York. Si stimi la probabilità che almeno una di queste coppie abbia i due partner
(a) nati il 30 aprile;
(b) che compiono gli anni nel medesimo giorno.

Es. 134 — Supponiamo che il numero atteso di veicoli abbandonati settimanalmente in una certa autostrada sia pari a 2.2. Si approssimi la probabilità che ci siano
(a) nessun veicolo abbandonato la prossima settimana;
(b) almeno 2 veicoli abbandonati la prossima settimana.

Es. 135 — Supponiamo che il numero di incidenti che avvengono ogni giorno su un tratto di autostrada si distribuisca come una variabile di Poisson di parametro 3.
(a) Si trovi la probabilità che 3 o più incidenti avvengano oggi.
(b) Si ripeta il precedente calcolo sotto l'ipotesi che almeno un incidente avvenga oggi.

Es. 136 — Se si acquista un biglietto della lotteria in 50 lotterie diverse, ognuno con una probabilità pari a 1/100 di darci un premio, qual è la probabilità (approssimata) che si vinca un premio
(a) almeno una volta;
(b) esattamente una volta;
(c) almeno due volte?

Soluzione (Es. 136) — 0.31, 0.40, 0.09

Es. 137 — Si lancia quattro volete una moneta equilibrata. Denotiamo con X il numero totale di testa ottenute. Si determini X

Soluzione (Es. 137) — $X = B\left(4, \frac{1}{2}\right)$

Es. 138 — Sia X una variabile binomiale di parametri $\left(120000, \frac{1}{15000}\right)$. Usando una opportuna variabile di Poisson approssimare il valore di $P(X = 7)$.

Es. 139 — Sia X una variabile binomiale di parametri $\left(90000, \frac{1}{30000}\right)$. Usando una opportuna variabile di Poisson approssimare il valore di $P(X = 4)$

Soluzione (Es. 139) — 0.168

Es. 140 — Sia X una variabile binomiale di parametri $\left(10000, \frac{1}{5000}\right)$. Usando una opportuna variabile di Poisson approssimare il valore di $P(X = 4)$

Soluzione (Es. 140) — 0.0902

Es. 141 — Sia X una variabile binomiale di parametri $\left(80000, \frac{1}{20000}\right)$. Usando una opportuna variabile di Poisson approssimare il valore di $P(X = 5)$

Soluzione (Es. 141) — 0.1562

12.1 Variabile aleatorie Discrete: Media, varianza e covarianza

Sia X una v.a. discreta; indichiamo con $\operatorname{Im} X$ la sua immagine. Diciamo valore atteso o media di X il numero

$$E[X] := \sum_{x \in \operatorname{Im} X} x p_X(x) = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} x P(X = x)$$

Siano $X_1, \ldots, X_m$ variabili aleatorie. Allora $E\left[X_1 + \cdots + X_m\right] = E\left[X_1\right] + \cdots + E\left[X_m\right]$

- $E[\mathrm{Be}(p)] = p$
- $E[\mathrm{B}(n,p)] = np$
- $E[\mathrm{Po}(\lambda)] = \lambda$
- $E[\mathrm{Ge}(p)] = \dfrac{1}{p}$

$$E[g \circ X] =: E[g(X)] = \sum_{x \in \operatorname{Im} X} g(x) p_X(x)$$

Sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. discreta ed $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $E[aX + b] = aE[X] + b$

Una V.A. con $\mathrm{E}(Y) = 0, \mathrm{Var}(Y) = 1$ è detta normalizzata.

Sia X una v.a. qualunque. Diciamo varianza di X il numero

$$\operatorname{Var} X := E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2\right] - E[X]^2$$

Diciamo deviazione standard di X il numero

$$\sigma_X := \sqrt{\operatorname{Var} X}$$

$\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var} X$

- $\operatorname{Var}(\mathrm{Be}(n,p)) = p(1-p)$
- $\operatorname{Var}(B(p)) = np(1-p)$
- $\operatorname{Var}(Po(\lambda)) = \lambda$
- $\operatorname{Var}(Ge(p)) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Siano $X_1, \ldots, X_m$ variabili aleatorie indipendenti. Allora $\operatorname{Var}\left(X_1 + \cdots + X_m\right) = \operatorname{Var}\left(X_1\right) + \cdots + \operatorname{Var}\left(X_m\right)$

Altrimenti Siano X ed Y due v.a. Allora

$$\operatorname{Var}(X + Y) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)$$

$$\operatorname{Cov}(X, Y) := E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Formula alternativa (per il calcolo):

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y] = \operatorname{Cov}(Y, X)$$

Esercizio 142

Una variabile aleatoria discreta X assume i valori $600, 470, 170, 430$ e 300 con uguale probabilità $\frac{1}{5}$. Determinare la deviazione standard di X .

Soluzione dell'esercizio 142

$$E[X] = \frac{1}{5} \cdot 600 + \frac{1}{5} \cdot 470 + \frac{1}{5} \cdot 170 + \frac{1}{5} \cdot 430 + \frac{1}{5} \cdot 300 = 394$$

$$\operatorname{var} X = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

$$\frac{1}{5} \cdot (600 - 394)^2 + \frac{1}{5} \cdot (470 - 394)^2 + \frac{1}{5} \cdot (170 - 394)^2 + \frac{1}{5} \cdot (430 - 394)^2 + \frac{1}{5} \cdot (300 - 394)^2 = 21704$$

$$\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var} X} = 147$$

Esercizio 143

Una moneta dà Testa con probabilità $\frac{1}{4}$, Croce con probabilità $\frac{3}{4}$ ogni lancio si vince 1 euro se esce Testa, si perde $\frac{1}{2}$ euro se esce Croce. Calcolare media e varianza.

Soluzione dell'esercizio 143

$$X_1 = \begin{cases} +1 & \text{se esce Testa} \\ -\frac{1}{2} & \text{se esce Croce} \end{cases}$$

$$P(\text{Testa}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{Croce}) = \frac{3}{4}$$

$$E[X_i] = 1 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$E\left[X^2\right] = 1^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$$

$$\text{Var}[X_i] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \frac{7}{16} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{17}{64}$$

Esercizio 144

In un night 10 clienti lasciano il cappello in guardaroba. All'uscita ognuno prende a caso un cappello. Qual è il numero medio di persone che riprende il proprio cappello?

Soluzione dell'esercizio 144

Sia X il numero di persone che riprendono il proprio cappello. Si ha che:

$$X = X_1 + \cdots + X_{10}$$

Dove:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se ha preso il cappello corretto} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ed:

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{10}$$

Ora possiamo creare una v.a. binomiale $P\left(\text{B}\left(10, \frac{1}{10}\right) = 1\right)$. Sapendo che $E[\text{B}(n, p)] = np$:

$$E[X] = E\left[\text{B}\left(10, \frac{1}{10}\right)\right] = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$$

Esercizio 145

In un night 10 clienti lasciano sciarpa e cappello in guardaroba. All'uscita ognuno prende a caso sciarpa e cappello.

Qual è il numero medio di persone che riprende la propria sciarpa o il proprio cappello [P o Q è vera se e solo se almeno una delle due proposizioni è vera]?

(suggerimento Calcolare la probabilità che un dato cliente riprenda il proprio cappello o la propria sciarpa, scrivere poi il numero di persone che riprendono cappello o sciarpa come somma di variabili aleatorie...).

Soluzione dell'esercizio 145

In maniera simile a prima analizziamo il caso in cui il cliente riprenda il proprio cappello:

$$X = X_1 + \cdots + X_{10}, \quad X_i = \begin{cases} 1, & \text{se ha preso il cappello corretto} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ed il caso in cui il cliente riprenda la propria sciarpa:

$$Y = Y_1 + \cdots + Y_{10}, \quad Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se ha preso la sciarpa corretta} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sommando le variabili aleatorie otteniamo che:

$$Z_i^\star = X_i + Y_i = \begin{cases} 2, & \text{cappello e sciarpa corretti} \\ 1, & \text{o cappello o sciarpa corretto} \\ 0, & \text{nessuno dei due} \end{cases}$$

Ma non ci va bene il caso in cui $Z_i^\star$ è 2 in quanto non fa differenza se una persona prende entrambi gli indumenti corretti o solo uno dei due.

Introduciamo quindi un'altra variabile aleatoria:

$$X_i \cap Y_i = \begin{cases} 1, & \text{se ha preso sia il cappello che la sciarpa corretti} \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Da cui possiamo sommare le variabili aleatorie:

$$Z = X + Y - X \cap Y, \quad Z_i = X_i + Y_i - X_i \cap Y_i = \begin{cases} 1, & \text{cappello o sciarpa} \\ 0, & \text{nessuno dei due} \end{cases}$$

Calcoliamo ora le probabilità di X_i, Y_i ed $X_i \cap Y_i$:

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{10} \quad P(Y_i = 1) = \frac{1}{10} \quad P(X_i \cap Y_i = 1) = \frac{1}{100}$$

Da cui la probabilità di Z_i

$$P(Z_i = 1) = P(X_i = 1) + P(Y_i = 1) - P(X_i \cap Y_i = 1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{19}{100}$$

Ora possiamo creare una v.a. binomiale $P\left(\mathrm{B}\left(10, \frac{19}{100}\right) = 1\right)$. Sapendo che $E[\mathrm{B}(n,p)] = np$:

$$E[X] = E\left[\mathrm{B}\left(10, \frac{19}{100}\right)\right] = 10 \cdot \frac{19}{100} = 1.9$$

Es. 146 — Quattro autobus portano 148 studenti allo stadio del football. Gli autobus portano, rispettivamente, 40, 33, 25 e 50 studenti. Scegliamo a caso uno degli studenti. Denotiamo con X il numero degli studenti che hanno viaggiato sull'autobus dello studente scelto a caso. Scegliamo ora a caso uno dei conducenti dei bus e denotiamo con Y il numero degli studenti che hanno viaggiato sul suo autobus.
(a) Quale tra E(X) e E(Y) e pensate sia più grande? Perché?
(b) Si calcolino E(X) e E(Y).

Es. 147 — Una scatola contiene 5 bilie rosse e 5 bilie blu. Estraiamo 2 bilie a caso. Se hanno il medesimo colore, vinciamo 1.10 euro; in caso contrario vinciamo -1.00 euro (cioè perdiamo 1.00 euro). Si calcoli
(a) il valore atteso della vincita;
(b) la varianza della vincita.

12.2 Processo di Poisson

Un processo di Poisson di intensità λ è una famiglia di variabili aleatorie $\{X_t : t > 0\}$ dove: $a \quad b \quad P_0/\lambda(b-a)'$

- Per ogni $t > 0, X_t \sim Po(\lambda t)$
- Per ogni $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ le variabili
$$X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$
sono indipendenti;
- Per ogni $0 < t$ and $0 < \tau$ si ha $X_{t+\tau} - X_t \sim Po(\lambda\tau)$

Esercizio 148

Il numero di telefonate che riceve un centralino è descritto da un processo di Poisson di intensità $\lambda = 30$ telefonate all'ora.

(a) Qual è la probabilità che nei prossimi 3 minuti il centralino non riceva telefonate?

(b) Il centralino non riceve telefonate nel primo quarto d'ora. Qual è la probabilità di riceverne esattamente una tra i 15 e i 18 minuti dall'inizio dell'attività?

Soluzione dell'esercizio 148

(a)

$$X_{3\text{min}} \sim Po(3/2) \Rightarrow P(X_{3\text{min}} = 0)e^{-3/2}$$

(b)

$$P(X_{18} - X_{15} = 1 | X_{15} = 0) = P(X_{18} - X_{15} = 1) = e^{-3/2} \frac{(3/2)^1}{1!}$$

Esercizio 149

Si ipotizza che il numero di autovetture che transitano in un certo punto dell'autostrada durante le ore centrali di una giornata feriale in inverno sia approssimativamente distribuito secondo un processo di Poisson con un numero medio di passaggi pari a 3 al minuto. Il numero di camper che transitano nello stesso tratto è anch'esso approssimabile con un processo di Poisson con un numero medio di passaggi pari a 0,2 al minuto.

(a) Qual è la probabilità che in 10 minuti passi un camper sapendo che in totale sono passati 10 automobili?

(b) Se un pazzo attraversa l'autostrada senza guardare qual è la probabilità che rimanga illeso se il tempo che gli serve per attraversare la strada è pari a 30 secondi?

Soluzione dell'esercizio 149

$$N_A \sim Po(3 \cdot t), \quad N_C \sim Po(0.2 \cdot t)$$

$$N_{C10\,\text{min}} \sim Po(0.2 \cdot 10) \quad P\left(N_{C10\,\text{min}} = 1\right) = e^{-2} \frac{2^1}{1!} = 0.27$$

$$N_{AC0.5\,\text{min}} \sim Po(3.2 \cdot 0.5) \quad P\left(N_{AC0.5\,\text{min}} = 0\right) = e^{-1.6} \frac{2^{1.6}}{0!} = e^{-1.6} = 0.20$$

Esercizio 150

Il numero di automobili che passa al casello autostradale è descritta da un Processo di Poisson di intensità 924 all'ora. Qual è la probabilità che, ad un dato istante, la prima automobile passi dopo 0,12 minuti?

Soluzione dell'esercizio 150

$$X_t \sim Po(924 \cdot t)$$

$$X_{0{,}01\,\text{min}} = \text{Po}\left(\frac{924}{60} \cdot 0.01\right) = Po(0.154)$$

$$P\left(X_{0{,}12}\,\text{min} = 0\right) = e^{-1.848} \frac{2^{1.848}}{0!} = 0.1576$$

Es. 151 — Al tempo 0 una moneta, che dà testa con probabilità pari a p, viene lanciata e cade al suolo. Supponiamo che dia testa.A un istante scelto in accordo con un processo di Poisson di parametro λ, la moneta viene raccolta e lanciata. (Tra lanci successivi la moneta rimane al suolo). Qual è la probabilità che la moneta mostri la faccia con la testa al tempo t?

Capitolo 13

Variabili Aleatorie Continue

Una v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice continua se esiste una funzione

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

tale che $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ si ha:

$$P(X \in B) = \int_B f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

La funzione f_X è detta densità continua di X. Ogni funzione continua a tratti, non negativa e con integrale su tutto $\mathbb{R}$ uguale ad 1 è la densità di una v.a. continua.

Diciamo distribuzione di X la funzione

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_X(r) = P(X \leq r) = \int_{-\infty}^{r} f_X(t)dt$$

Il valore atteso di X è

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora anche $g \circ X$ è una variabile aleatoria continua.

$$E[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Variabile aleatore uniforme

Sia $[a,b]$ un intervallo della retta reale. Diciamo v.a. uniformemente distribuita su [a,b] la v.a. continua $U([a,b])$ che ha come funzione di densità

$$f_{U([a,b))} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a,b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a,b] \end{cases} \qquad F_{U([a,b))}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases} \qquad E[U([a,b))] = \frac{a+b}{2} \quad \mathrm{Var}[U([a,b))] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Variabile aleatore esponenziale

La variabile aleatoria esponenziale $\mathrm{Exp}(\lambda)$ di parametro λ ha densità:

$$f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad F_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad E[\mathrm{Exp}(\lambda)] = \frac{1}{\lambda} \quad \mathrm{Var}[\mathrm{Exp}(\lambda)] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Esercizio 152

Il periodo di quarantena per una certa malattia varia tra i 5 e gli 11 giorni dal contagio. La probabilità di mostrare sintomi durante il periodo di quarantena è descritto da una variabile aleatoria continua la cui densità su quell'intervallo è data da

$$f(t-5)(11-t), \quad t \in [5,11]$$

per qualche k. Determinare k e la probabilità che i sintomi appaiano entro 7 giorni dal contagio.

Soluzione dell'esercizio 152

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \Leftrightarrow \int_{5}^{11} k(t-5)(11-t)dt = 1 \Leftrightarrow 36k = 1 \Leftrightarrow 36k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{36}$$

$$P(X \leq 7) = \int_{5}^{7} \frac{1}{36}(t-5)(11-t)dt = \frac{7}{27} = 0.2592$$

Esercizio 153

la durata, in chilometri, di un pneumatico, e una variabile aleatoria espressa in migliaia di chilometri, la cui densità continua è data da

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x/40}, x > 0 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Determinare k sul proprio foglio e la probabilità che il pneumatico resista almeno 30000 chilometri.

Soluzione dell'esercizio 153

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} ke^{-\frac{x}{40}}\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow k\left[-40e^{-\frac{x}{40}}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = k[0-(-40)] = k40 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{40}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{40}e^{-\frac{x}{40}}, x > 0 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases} \overset{\int}{\Leftrightarrow} F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\frac{x}{40}}, x > 0 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

$$P(X \geq 30000) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \left(1 - \underbrace{e^{-\frac{30}{40}}}_{0}\right) = 0.4723$$

Esercizio 154

Un vecchio walkman funziona con una sola pila di tipo AAA non ricaricabile; si cambia la pila appena questa è scarica. Con una pila esso funziona con un tempo (in ore) che è una variabile aleatoria continua T di densità

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t, & t \in [0,5] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria T (esprimere i risultati in frazioni a/b, con a e b espliciti);

Soluzione dell'esercizio 154

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\, dt = \int_{0}^{5} t \cdot \frac{2}{25}t\, dt = \left[\frac{2}{3\cdot 25}t^3\right]_{t=0}^{t=5} = \frac{10}{3}$$

$$E\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt = \int_{0}^{5} \left(\frac{2}{25}t^3\right)\, dt = \left[\frac{t^4}{625}\right]_{t=0}^{t=5} = \frac{25}{2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}$$

Esercizio 155

Sia X una variabile aleatoria la cui densità è

$$f(x) = \begin{cases} c\left(1-x^2\right) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Qual è il valore di c ?

(b) Qual è la funzione di distribuzione di X?

Soluzione dell'esercizio 155

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} c\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{c} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}\left(1-t^2\right)dt & x \in]-1,1[= \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \le -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} & x \in]-1,1[\\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Esercizio 156

Sia Y una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 2$ e X una variabile aleatoria (indipendente da X) che assume valore 1 con probabilità $p = 0.4$ e valore 2 con probabilità $1-p = 0.6$. Sia $Z = X+Y$.

1. Scrivere l'espressione di $\mathbb{P}(Z > A \mid x = 2\ )$ e calcolarne il valore per $A = 1$ e $A = 3$

2. Scrivere l'espressione di $\mathbb{P}(Z > A \mid x = 2)p_x(2) + \mathbb{P}(Z < A \mid x = 1)p_x(1)$ e calcolarne il valore per $A = -2$

Soluzione dell'esercizio 156

$$Y = \begin{cases} 2e^{-2a}, a \ge 0 \\ 0,\ \text{altrimenti} \end{cases} \qquad F_Y = 1 - e^{-2\max(a,0)}$$

$$\mathbb{P}(Z > A \mid x = 2) = \mathbb{P}(Y > A-2) = 1 - \left(1 - e^{-2\max(A-2,0)}\right) = e^{-2\max(A-2,0)}$$

$$\mathbb{P}(Y > 1-2) = 1 - 1 + e^{-\max(-2,0)} = 1$$

$$\mathbb{P}(Y > 3-2) = 1 - 1 + e^{-2} = e^{-2}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z > A) &= \mathbb{P}(Z > A \mid X = 2)\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(Z < A \mid x = 1)\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Z > A-2)\mathbb{P}(X = 2) + (Z < A-1)\mathbb{P}(X = 1) \\ &= 0.6 \cdot e^{-2\max(A-2,0)} + 0.4\left(1 - e^{-2}\max(A-1,0)\right)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Z > -2) = 0.6 \cdot e^{-2\max(-4,0)} + 0.4\left(1 - e^{-2\max(-3,0)}\right) = 0.6 + 0.4(1-1) = 0.6$$

Esercizio 157

Sia X variabile uniforme sull'intervallo $[4,18]$. Calcolare la probabilità che $P(X \in [5,16])$

Soluzione dell'esercizio 157

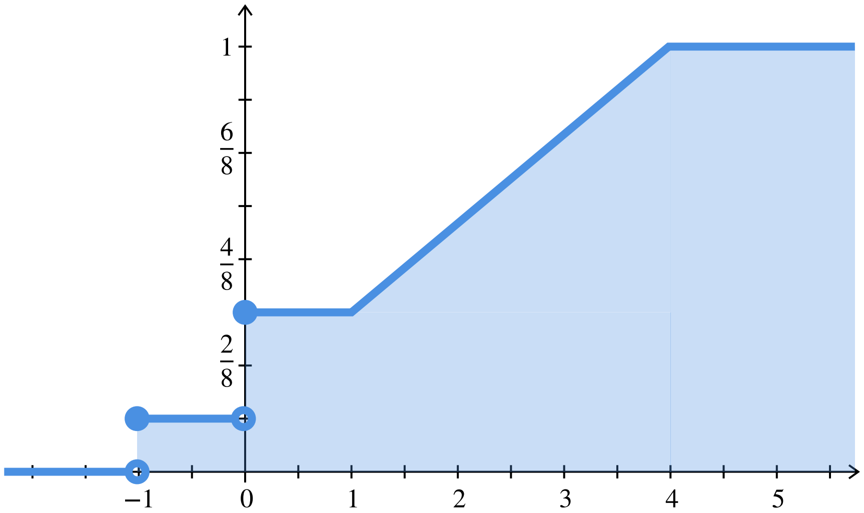
$$P(X \in [5,16]) = P(X < 16) - P(X < 5) = F_X(16) - F_X(5) = \frac{16-4}{18-4} - \frac{5-4}{18-4} = 0.7857$$

Esercizio 158

Sia X una variabile aleatoria su uno spazio con probabilità (Ω, P) la cui funzione di distribuzione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < -1 \\ 1/8, -1 \le x < 0 \\ 3/8, 0 \le x < 1 \\ 3/8 + 1/8(x-1), 1 \le x < 4 \\ 1, x \ge 4 \end{cases}$$

Quanto vale $P(X \in [0,3[)$?



Da cui: $P(X \in [0,3[= F(3) - F(0-) = \left[\frac{3}{8} + \frac{x-1}{8}\right]_{x=3} - \left[\frac{1}{8}\right]_{x=0-} = \frac{1}{2}$

Es. 159 — Un sistema può funzionare per un tempo aleatorio X. Se la densità di X (in mesi) e

$$f(x) = \begin{cases} \text{Cxe}^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

quale è la probabilità che il sistema funzioni per almeno 5 mesi?

Soluzione (Es. 159) — $C = 1/4$, $P = 0.2873$

Es. 160 — Un benzinaio è rifornito di gasolio una volta la settimana. Se la sua vendita settimanale in migliaia di litri è una variabile aleatoria con densità

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quale deve essere la capacità del serbatoio affinché la probabilità che il gasolio sia esaurito in una settimana sia pari a 0.01?

Soluzione (Es. 160) — 600 litri

Es. 161 — (a) La caserma dei pompieri si trova su una strada lunga A. Se gli incendi si distribuiscono uniformemente su $(0, A)$, dove deve trovarsi la caserma affinché sia minima la distanza attesa dall'incendio? Cioè, determinare a per minimizzare $E[|X - a|]$, dove X è uniformemente distribuita su $(0, A)$.

(b) Supponiamo ora che la strada abbia una lunghezza infinita: dall'origine 0 all'infinito. Se la distanza di un incendio dall'origine è distribuita esponenzialmente con parametro λ in quale punto dovrebbe ora trovarsi la caserma dei pompieri? Cioè, determinare a per minimizzare $E[|X - a|]$ dove X è esponenziale di parametro λ

Es. 162 — Il numero di anni di funzionamento di un tipo di radio è distribuito esponenzialmente con parametro $\lambda = 1/8$ Comprando una radio usata di questo tipo, qual è la probabilità che essa duri per più di 8 anni?

Es. 163 — I treni per una destinazione A passano alla stazione ogni 15 minuti a partire dalle 7; quelli per B passano ogni 15 minuti a partire dalle 7:05.

(a) Un passeggero arriva alla stazione in un instante che è uniformemente distribuito tra le 7 e le 8 e sale sul primo treno che arriva. Qual è la probabilità che egli salga su un treno diretto ad A?

(b) Stessa domanda se il passeggero arriva in un instante che è uniformemente distribuito tra le 7:10 e le 8:10.

Es. 164 — Si taglia in un punto a caso un segmento di lunghezza L. Interpretare l'affermazione e calcolare la probabilità che il rapporto tra il pezzo più corto e il pezzo più lungo del segmento sia minore di 1/4.

Es. 165 — Il Sig. Rossi ritiene che la durata in migliaia di chilometri di un'auto sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1/20. Il Sig. Rossi acquista un'auto usata che ha percorso 10 000 chilometri. Qual è la probabilità che l'auto percorra altri 20 000 chilometri? Ripetere l'esercizio supponendo che la durata (in migliaia di chilometri) sia una variabile distribuita uniformemente su (0, 40).

Es. 166 — Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$F(b) = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{b}{4} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{b-1}{4} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq b < 3 \\ 1 & 3 \leq b \end{cases}$$

(a) Calcolare $P\{X = i\}, i = 1,2,3$. (b) Calcolare $P\left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right\}$.

Soluzione (Es. 166) — a) 1/4, 1/6, 1/12, b) 1/4

Es. 167 — Supponiamo che la funzione di distribuzione della variabile aleatoria X sia data da

$$\begin{matrix} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{3}{5} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{4}{5} & 2 \leq b < 2 \\ \frac{9}{10} & 3 = b < 3.5 \\ 1 & b = 3.5 \end{matrix}$$

Si calcoli la densità discreta associata a questa funzione

Soluzione (Es. 167) — $f_X = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq b < 1 \\ \frac{1}{10} & 1 \leq b < 2 \\ \frac{1}{5} & 2 \leq b < 2 \\ \frac{1}{10} & 3 \leqslant b < 3.5 \\ \frac{1}{10} & b = 3.5 \end{cases}$

Es. 168 — Sia X una variabile aleatoria con distribuzione

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{2} & \text{se } 0 < x < 1, \\ \frac{2}{3} & \text{se } 1 \leq x < 3, \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

(a) Calcolare $P(1 < X \leq 2)$
(b) Calcolare $P(X < 3)$
(c) Calcolare $P(X = 1)$
(c) Calcolare $P(X = 2)$

Soluzione (Es. 168) — 0, 1/6, 1/6, 0

Es. 169 — Il treno delle 14:51 per Venezia ha un ritardo uniformemente distribuito su [0,15].
(a) Calcolare la probabilità che si debba aspettare esattamente 10 minuti
(b) Calcolare la probabilità che si debba aspettare almeno 10 minuti.
(c) Calcolare dopo che abbiamo aspettato invano 5 minuti, si calcoli la probabilità di doverne aspettare almeno altri 5.

Soluzione (Es. 169) — 0, 1/3, 1/2

Es. 170 — Sia $X \sim \text{Exp}(1/4)$. Calcolare
(a) $P(X > 1)$
(b) $P(X \leq 3)$
(c) $P(X > 11|X > 10)$

Soluzione (Es. 170) — $e^{-1/4}, 0, e^{-1/4}$

Es. 171 — Sia F_X la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X, definita da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 6x^4 - 8x^3 + 3x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare la densità di X;

(b) Determinare il valore atteso di X.

Soluzione (Es. 171) — $f_X(x) = \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0,1] \\ 24x^3 - 24x^2 + 6x & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}, \dfrac{4}{5}$

Es. 172 — Il passaggio dell'autobus alla Stazione è previsto a mezzogiorno. In realtà l'autobus ha sempre un ritarto T in minuti, che è una variabile esponenziale di media 10 minuti (e quindi di parametro 1/10).

L'autobus non è ancora passato a mezzogiorno dieci minuti. Qual' è la probabilità che si debbano aspettare almeno altri 5 minuti?

Soluzione (Es. 172) — Va calcolata la probabilità condizionata $(T > 15 \mid T > 10)$ e questa è uguale a $P(T > 5)$: 0.6065

13.1 Variabili aleatorie continue composte

Esercizio 173

Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro 1/2 su uno spazio con probabilità (Ω, P). Provare che la variabile $Y = e^{-3X+7}$ è continua e determinarne la densità in $x = 1$.

Soluzione dell'esercizio 173

Determiniamo per prima cosa $F_Y(x)$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(e^{-3X+7} \leqslant x\right)$$

Risolviamo la disequazione: $e^{-3X+7} \leqslant x \Leftrightarrow -3X+7 \leqslant \log x \Leftrightarrow X \leqslant \dfrac{7-\log x}{3}$. Notiamo che la disequazione per $x \leqslant 0$ non è mai verificata, quindi la funzione $F_Y(x)$ assegnerà sempre 0.

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ P\left(X \geqslant \frac{7-\log x}{3}\right) = 1 - P\left(X \leqslant \frac{7-\log x}{3}\right), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Sia $X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}k}, & \text{se } k > 0 \\ 0, & \text{se } k \leqslant 0 \end{cases}$ e $k = \dfrac{7-\log x}{3}$. Calcolo $F_X(k)$:

$$F_X(k) = P(X \leqslant k) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}k}, & \text{se } k > 0 \\ 0, & \text{se } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione $k = \dfrac{7-\log x}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow k \in]0, e^7[$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{2}k}, & \text{se } x \in \left]0, e^7\right[\\ 0, & \text{se } x \notin \left]0, e^7\right[\end{cases}$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 - P\left(X \leqslant \frac{7-\log x}{3}\right), & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 - P\left(X \leqslant \frac{7-\log x}{3}\right), & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1 - \underbrace{P\left(X \leqslant \frac{7-\log x}{3}\right)}_{0}, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 - P\left(X \leqslant \frac{7-\log x}{3}\right), & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\frac{7-\log x}{3}}\right), & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{6}(7-\log x)}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{6}\left(\log\left(\frac{e^7}{x}\right)\right)}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ \left(\frac{e^7}{x}\right)^{-\frac{1}{6}}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ \left(\frac{x}{e^7}\right)^{\frac{1}{6}}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ \sqrt[6]{\frac{x}{e^7}}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases}$$

Deriviamo $F_Y(x)$ e calcoliamo $f_Y(1)$:

$$f_Y(x) = \frac{d}{\mathrm{d}x}\begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 0 \\ \left(\frac{x}{e^7}\right)^{\frac{1}{6}}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 1, & \text{se } x \geqslant e^7 \end{cases} = \begin{cases} \frac{d}{\mathrm{d}x}(0), & \text{se } x \le 0 \\ \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{e^7}\right)^{\frac{1}{6}}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ \frac{d}{\mathrm{d}x}(1), & \text{se } x \ge e^7 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0 \\ \left(\frac{x}{e^7}\right)^{\frac{1}{6}-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{e^7}\right), & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 0, & \text{se } x \ge e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } x \le 0 \\ \frac{1}{6e^{\frac{7}{6}}x^{\frac{5}{6}}}, & \text{se } x \in]0, e^7[\\ 0, & \text{se } x \ge e^7 \end{cases}$$

$$f_Y(1) = \frac{1}{6e^{\frac{7}{6}}1^{\frac{5}{6}}} = 0.0519$$

Esercizio 174

Sia X v.a. di densità $f_X(x)$, F_X di classe C^1) Dire se $Y = e^{2X-5}$ è variabile continua; $F_y(y) = P(Y \leqslant y)$ determinarne la densità in caso affermativo.

Soluzione dell'esercizio 174

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(e^{2X-5} \le y\right)$$

- Se $y \le 0$ l'equazione $e^{2X-5} \le y$ non ha soluzione: $F_Y(y) = 0$
- Se $y > 0$ l'equazione $e^{2X-5} \le y$ equivale a

$$2X - 5 \le \log y \Rightarrow X \le \frac{5 + \log y}{2}$$

$$P(Y \le y) = P\left(X \le \frac{5+\log y}{2}\right) = F_X\left(\frac{5+\log y}{2}\right) \Leftrightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ F_X\left(\frac{5+\log y}{2}\right) & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{d}{\mathrm{d}y}F_X\left(\frac{5+\log y}{2}\right) = \left(\frac{1}{2y}\right) f_X\left(\frac{5+\log y}{2}\right), & y > 0 \end{cases}$$

Esercizio 175

Sia X variabile uniforme sull'intervallo $[4, 18]$. Calcolare il valore atteso della variabile $\exp(7X + 2)$.

Soluzione dell'esercizio 175

$$F_y = P\left(e^{7X+2} \leq y = e^{\ln y}\right) = P(7X+2 < \ln y) = P\left(X < \frac{\ln y - 2}{7}\right) = \left\{ F_X\left(\frac{\ln y - 2}{7}\right), \quad y \geq 0\right.$$

$$= \begin{cases} \frac{1ny-2}{7} - 4, & y \leq 0 \vee \frac{\ln y-2}{7} < 4 \\ \frac{18-4}{1,}, & \frac{\ln y-2}{7} \in [4, 18] \\ \frac{\ln y-2}{7} > 18, & \frac{\ln y-2}{7} > 18 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < e^{30} \\ \frac{\ln y}{98} - \frac{15}{49} & y \in \left[e^{30}, e^{128}\right] \\ 1, & y > e^{128} \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} 0, & y \notin \left[e^{30}, e^{128}\right] \\ \frac{1}{98y}, & y \in \left[e^{30}, e^{128}\right] \end{cases}$$

$$E\left[f_y\right] = \int_{e^{30}}^{e^{128}} \frac{y}{98y}\, \mathrm{d}x = 3.96 \cdot 10^{53}$$

Un altro modo per arrivare allo stesso risultato è $E[\exp(7X+2)] = \displaystyle\int_4^{18} \frac{e^{7y+2}}{18-4}\, \mathrm{d}y = 3.96 \cdot 10^{53}$, che è molto più veloce se non è richiesto di determinare f_Y.

Esercizio 176

Sia X variabile esponenziale di media (non parametro !) 2,9. Determinare la densità continua di $\exp(-2,4X+7)$ in 2. Troncare a 4 decimali dopo la virgola senza approssimare.

Soluzione dell'esercizio 176

$$\mathbb{E}(X) = 2.9 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2.9}$$

$$\mathrm{F_Y} = \mathrm{P}\left(\exp(-2.4\mathrm{X}+7) \leq \mathrm{y} = \mathrm{e}^{\ln y}\right) = \mathrm{P}(-2.4\mathrm{X}+7 \leq \ln y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_X\left(\frac{35-5\ln y}{12}\right), & y > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{35-5\ln y}{2.9\cdot 12}}, & y \in [0, e^7] \\ 1, & y > e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{175-25\ln y}{174}}, & y \in [0, e^7] \\ 1, & y > e^7 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - \frac{y^{\frac{25}{174}}}{e^{\frac{175}{174}}}, & y \in [0, e^7] \\ 1, & y > e^7 \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} 0, & y \notin \left[0, e^7\right] \\ \frac{25}{174} \frac{1}{e^{\frac{175}{174}} y^{\frac{149}{174}}}, & y \in \left[0, e^7\right] \end{cases} \qquad f_Y(2) = 0.029$$

Es. 177 — Sia X v.a. continua. È vero che X^2 è continua? Determinarne la densità in caso affermativo.

Es. 178 — Sia X una variabile uniforme su $[0,1]$. Determinare la funzione di distribuzione e la densità della v.a. $Y = e^X$.

Soluzione (Es. 178) — $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin]1, e[\\ \frac{1}{x} & \text{se } x \in]1, e[\end{cases}$

Es. 179 — Sia R una variabile esponenziale con densità $f_R(x) = 2e^{-2x}$ se $x \geq 0$, 0 altrimenti. Sia T la variabile $T = 1/R$. Mostrare sul foglio che T è una variabile continua, e determinare la funzione di distribuzione $F_T(x)$ di T sui reali positivi.

Soluzione (Es. 179) — $e^{-2/x}$

Es. 180 — Sia X variabile aleatoria di valore atteso 50 e varianza 25. Calcolare il valore atteso di $(X-55)^2$

13.2 Variabile Aleatoria Normale

Si definisce variabile aleatoria normale di parametri μ, σ (media e deviazione standard) la seguente funzione di densità:
$f_{N(\mu,\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Nel caso in cui $\mu = 0, \sigma = 1$ si ha che: $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, detta **variabile normale standard**.

La funzione di distribuzione viene caclolata attraverso l'integrale di Gauss che non è risolvibile elementarmente: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$
Calcolo dei valori di una nomale standard Si prende il valore, lo si cerca nella tabella. Per esempio:

$$\Phi(1,57) = 0,94179$$

Per i numeri negativi:

$$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$

Per i numeri $> 3,5$ si assume $\Phi(> 3,5) = 1$ (sempre se non siamo in telecomunicazioni, ove si cercano probabilità dell'ordine di $10^{-3}, 10^{-}-6$), mentre per i numeri $< -3,5$ si assume $\Phi(< -3,5) = 0$

$$P[X < a] = F_X = \Phi(a) = 1 - Q(a) \quad P[X > a] = 1 - \Phi(a) = Q(a)$$

$$P[y \in [b,c]] = \Phi(c) - \Phi(b) = Q(b) - Q(c) \quad P[y \in [-a,a]] = 2\Phi(a) - 1 = 1 - 2Q(a)$$

La variabile aleatoria $N\left(\mu, \sigma^2\right) := \mu + \sigma Z$ è detta normale di parametri $\left(\mu, \sigma^2\right)$.

$$\begin{aligned} F_{N\left(\mu,\sigma^2\right)}(a) &= P\left(N\left(\mu,\sigma^2\right) \leq a\right) = P(\mu + \sigma Z \leq a) = P(\sigma Z \leq a - \mu) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Normalizzazione di una gaussiana x con media μ e deviazione standard σ: $a = \frac{x-\mu}{\sigma}$

I valori di $\Phi(a)$ possono essere presi dalla seguente tabella:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0,1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0,2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0,3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0,4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0,5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0,6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0,7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0,8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0,9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1,0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85.314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1,1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1,2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1,3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1,4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1,5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1,6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1,7	0.95543	0.95637	0.95.728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1,8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1,9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2,0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2,1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2,2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2,3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2,4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2,5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2,6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2,7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2,8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2,9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3,0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3,1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3,2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3,3	0.99952	0199953	0.99957	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3,4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976

Esercizio 181

Una variabile normale X ha media 80 e deviazione standard 12. La probabilità che X sia compresa tra 59 e 80 è?

Soluzione dell'esercizio 181

$$\begin{aligned}P\left(N\left(80,12^2\right)\in[59,80]\right)=&P\left(N\left(80,12^2\right)\le 80\right)-P\left(N\left(80,12^2\right)\le 59\right)=\Phi\left(\frac{80-80}{12}\right)-\Phi\left(\frac{59-80}{12}\right)\\=&\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{7}{4}\right)=\Phi(0)-1+\Phi(1.75)=0.50000-1+0.95994=0.45994\end{aligned}$$

Esercizio 182

I risultati ad un test universitario sono distribuiti con una variabile normale di media 76 e deviazione standard 8. Qual è la soglia di punteggio da assegnare affinché la probabilità di fallire al test sia circa del 10%?

Soluzione dell'esercizio 182

Dobbiamo determinare il valore x in cui la distribuzione normale di parametri $76, 8^2$ dia 0.1:

$$P\left(N\left(76,8^2\right)\leqslant x\right)=0.1\Leftrightarrow P(76+8Z\leqslant x)=0.1\Leftrightarrow P\left(Z\leqslant\frac{x-76}{8}\right)=0.1\Leftrightarrow\Phi\left(\frac{x-76}{8}\right)=0.1$$

Dato che la tabella della distribuzione normale standard ha come output una probabilità $\in [0.5, 1^-]$ utilizziamo la proprietà: $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ ed invertiamo i segni:

$$\Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{76-x}{8}\right) = 1 - 0.1 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{76-x}{8}\right) = 0.9$$

Cerchiamo quindi 0.9 all'interno della tabella della distribuzione normale:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0,1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0,2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0,3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0,4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0,5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0,6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0,7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0,8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0,9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1,0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85.314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1,1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1,2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1,3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1,4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1,5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408

Dato che 0.89973 è più vicino a 0.9 di 0.90147 utilizziamo che $0.9 \simeq \Phi(1.28)$

$$P\left(N\left(76, 8^2\right) \leqslant x\right) = 0.1 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{76-x}{8}\right) = 0.9 \simeq \Phi(1.28) \Leftrightarrow \frac{76-x}{8} \simeq 1.28 \Leftrightarrow x \simeq 65.76$$

Esercizio 183

Il diametro interno medio delle guarnizioni prodotte da una macchina è 0.502 cm e la deviazione standard è di 0.005 cm. Per gli scopi per cui sono prodotte la tolleranza massima è tra 0.495 cm e 0.508 cm. In caso contrario sono difettose. Assumendo la legge normale:

(a) la percentuale di pezzi non difettosi;

(b) la percentuale di quelle per cui il diametro è maggiore di 0.510cm.

Soluzione dell'esercizio 183

a)

$$\begin{aligned}
P\left(N\left(0.502, 0.005^2\right) \in [0.495, 0.508]\right) &= \begin{array}{l} P\left(N\left(0.502, 0.005^2\right) < 0.508\right) \\ -P\left(N\left(0.502, 0.005^2\right) < 0.508\right) \end{array} \\
&= \begin{array}{l} P(0.005Z + 0.502 < 0.508) \\ -P(0.005Z + 0.502 < 0.495) \end{array} \\
&= P(Z < 1.2) - P(-1.4) \\
&= \Phi(1.2) - 1 + \Phi(1.4) \\
&= 0.88493 - 1 + 0.91924 = 0.80417
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
P\left(N\left(0.502, 0.005^2\right) > 0.510\right) &= P\left(N\left(0.502, 0.005^2\right) > 0.508\right) \\
&= P\left(Z > \frac{0..510 - 0.502}{0.005}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.6) = 0.0548
\end{aligned}$$

Esercizio 184

L'errore accidentale nelle misurazioni di lunghezze effettuate con un calibro di precisione dipende dal tasso di umidità ambientale. Supponiamo che tale errore sia una v.a. normale di media 0 e varianza $(0.5)^2$ se l'ambiente è secco, una v.a normale di media 0 e varianza $(0.25)^2$ se l'ambiente è umido. Si è constatato che le misure vengono effettuate in ambiente secco solo nel 20% dei casi.

(a) Qual è la probabilità che in una misurazione si abbia $|X| < 0.6$?

(b) Sapendo che in una misurazione si è verificato che $|X| < 0.6$, qual è la probabilità che essa sia stata effettuata in ambiente umido?

Soluzione dell'esercizio 184

a)

$$\begin{aligned} P(X \in [-0.6, 0.6] | S) =& P(Z \cdot 0.5 < 0.6) - P(Z \cdot 0.5 < -0.6) \\ =& P(Z < 1.2) - P(Z < -1.2) \\ =& 2\Phi(1.2) - 1 = 2(0.88493) - 1 = 0.76986 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \in [-0.6, 0.6] | U) =& P(Z \cdot 0.25 < 0.6) - P(Z \cdot 0.25 < -0.6) \\ =& P(Z < 2.4) - P(Z < -2.4) \\ =& 2\Phi(2.4) - 1 = 2(0.99180) - 1 = 0.9836 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \in [-0.6, 0.6]) &= P(X \in [-0.6, 0.6] | S) P(S) + P(X \in [-0.6, 0.6] | U) P(U) \\ &= 0.9408 \end{aligned}$$

b)

$$P(U | X \in [-0.6, 0.6]) = \frac{P(X \in [-0.6, 0.6] | U) P(U)}{P(X \in [-0.6, 0.6])} = 0.8364$$

Esercizio 185

Dei pezzi meccanici prodotti da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 20 cm; sono accettabili pezzi entro i limiti di tolleranza da 19.5 a 20.5 cm. Le lunghezze reali dei pezzi prodotti sono in realtà distribuite normalmente attorno ad una media di 20 cm, con una deviazione standard di 0.25 cm.

(a) Quale percentuale dei pezzi prodotti non rispetta i limiti di tolleranza dati?

(b) Potendo ricalibrare la linea di produzione, a quale valore dobbiamo ridurre la deviazione standard se vogliamo che il 99% dei pezzi rispettino i limiti di tolleranza?

Soluzione dell'esercizio 185

$$\begin{aligned} P\left(N\left(20, 0.25^2\right) \in [19.5, 20.5]\right) &= \Phi\left(\frac{20.5 - 20}{0.25}\right) - \Phi\left(\frac{19.5 - 20}{0.25}\right) = \Phi(2) - 1 + \Phi(2) \\ &= 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9545 \\ P\left(N\left(20, 0.25^2\right) \notin [19.5, 20.5]\right) &= 1 - 0.9545 = 0.0455 \\ P\left(N\left(20, \sigma^2\right) \in [19.5, 20.5]\right) &= \Phi\left(\frac{20.5 - 20}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{19.5 - 20}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - 1 \\ 2\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - 1 = 0.99 &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.995 = \Phi(3.39) \Leftrightarrow \frac{0.5}{\sigma} = 3.39 \Leftrightarrow \sigma = 0.147 \end{aligned}$$

Esercizio 186

La durata di una pila da orologi è una variabile aleatoria di media 200 ore e deviazione standard σ ore. A partire dalla tabella della normale determinare per quali valori $\sigma > 0$, con 100 pile, si può garantire il funzionamento dell'orologio per almeno 20260 ore con una probabilità superiore al 40%

Soluzione dell'esercizio 186

$$Z = \frac{N - \mu}{\sigma} = \frac{N - 200}{\sigma}$$

$$N\left(100\mu, 100\sigma^2\right) = 100\mu + \sqrt{100}\sigma Z = 20000 + \sqrt{100}\sigma Z$$

$$P(20000 + 10\sigma Z \geq 202.60) = 0.4 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{26}{\sigma}\right) = 0.4 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{26}{\sigma}\right) = 0.4 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{26}{\sigma}\right) = 0.6 \quad \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{26}{\sigma}\right) = 0.6 = \Phi(0.26) \Leftrightarrow \frac{26}{\sigma}$$

Esercizio 187

Un pastificio produce spaghetti il cui diametro è una variabile aleatoria normale di media 0.3 mm e varianza 0.09 mmq. Uno spaghetto è accettabile se il suo diametro è compreso tra 0.21 mm e 0.39 mm.

Soluzione dell'esercizio 187

$$
\begin{aligned}
X &\sim N(0.3, 0.09) \\
P(0.21 \leq X \leq 0.39) &= P(X \leq 0.39) - P(X \leq 0.21) \\
&= P(Z\sqrt{0.09} + 0.3 \leq 0.39) - P(Z\sqrt{0.09} + 0.3 \leq 0.21)
\end{aligned}
$$

Es. 188 — Le precipitazioni annuali (in centimetri) di una certa regione sono distribuite normalmente con $\mu = 40$ e $\sigma = 4$. Qual è la probabilità che iniziando quest'anno, ci vogliano 10 anni prima che in un anno si superino 50 centimetri di precipitazioni? Quali ipotesi state facendo?

Es. 189 — Si supponga che X sia una variabile aleatoria normale con media 5. Se $P(X > 9) = 0.2$ quanto vale approssimativamente $\mathrm{Var}[X]$?

Es. 190 — Sia X una variabile aleatoria normale con media 12 e varianza 4. Determinare il valore di c tale che $P(X > c) = 0.10$.

Es. 191 — Un autovelox misura la velocità delle auto in tangenziale di Padova dove il limite è di 90 km/ora: chi supera i 100km/ora prende la multa. Le velocità delle auto sono distribuite normalmente con media di 90 km/ora e deviazione standard di 10 km/ora. Qual è la probabilità che un'automobilista che passa davanti all'autovelox prenda la contravvenzione?

Soluzione (Es. 191) — 0.1587

Es. 192 — Sia Z una variabile normale standard. Determinare la densità continua di $Z/2$ nel punto $x = 0.4$

Capitolo 14

Teorema centrale del limite, Legge dei grandi numeri, Dis. di Markov e Chebytschev

Siano $X_1, X_2, \ldots$ una famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.), con $E\left[X_1\right] = \mu$ e $\operatorname{Var}(X) = \sigma^2$. Si ha

$$E\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = n\mu \quad \text{e} \quad \operatorname{Var}\left(X_1 + \cdots + X_n\right) = n\sigma^2$$

Data una variabile Y con $E[Y] = \mu$ e $\operatorname{Var}(Y) = \sigma^2$, diciamo standardizzata di Y la variabile

$$\bar{Y} = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

Si ha

$$E[\bar{Y}] = E\left[\frac{Y-\mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} E[Y - \mu] = 0$$

$$\operatorname{Var}(\bar{Y}) = \operatorname{Var}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Var}(Y - \mu) = 1$$

Teorema centrale del limite

Siano $X_1, X_2, \ldots$ una famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.), con $E\left[X_i\right] = \mu$ e $\operatorname{Var}(X_i) = \sigma^2$. Allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$P\left(X_1 + \cdots + X_n \leq a\right) = P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \longrightarrow \Phi(a), n \to +\infty$$

$$\begin{aligned} P\left(X_1 + \cdots + X_n \leq a\right) &\approx P\left(N\left(n\mu, n\sigma^2\right) \leq a\right) = P(n\mu + \sigma\sqrt{n}Z \leq a) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

Approssimazione della v.a. binomiale La v.a. $B(n, p)$ è somma di n Bernoulli indipendenti $\operatorname{Be}(p)$. Per $n >> 0$ allora

$$B(n, p) = \operatorname{Be}_1(p) + \cdots + \operatorname{Be}_n(p) \approx N(np, np(1-p))$$

L'approssimazione della binomiale con la normale è ragionevole nella pratica se

$$np \geq 10 \quad \text{e} \quad n(1-p) > 10$$

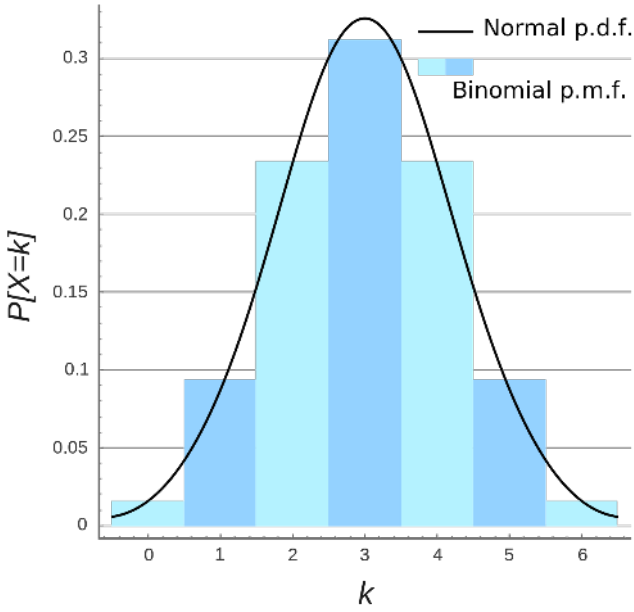
Sia $a \in \mathbb{N}$:

Correzione di continuità

Dato che una v.a. discreta ha una $\operatorname{Im} f$ al più numerabile, mentre quella di una v.a. continua non è numerabile, notiamo che:

$$(X \leq 5) = (X < 6) = (X < 5.5) = (X \leq 5.5) \quad (X \geq 5) = (X > 4) = (X > 4.5) = (X \geq 4.5)$$

$$(X = 5) = (5 \leq X \leq 5) = (4.5 \leq X \leq 5.5)$$



Approssimando X v.a. discreta con una variabile aleatoria continua Y, è preferibile procedere così:

$$(X \leq 5) \approx (Y \leq 5.5) = (Y < 5.5) \quad (X \geq 5) \approx (Y \geq 4.5) = (Y > 4.5)$$

$$(X = 5) \approx (4.5 \leq Y \leq 5.5) = (4.5 < Y < 5.5)$$

$$P(B(n,p) \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right) = \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

Approssimazione della v.a. di Poisson

Sia $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. La v.a. $\mathrm{Po}(\lambda)$ è somma di n Poisson indipendenti $\mathrm{Po}(\lambda/n)$. Per $n >> 0$ allora

$$\mathrm{Po}(\lambda) = \mathrm{Po}_1(\lambda/n) + \cdots + \mathrm{Po}_n(\lambda/n) \approx N(\lambda, \lambda)$$

$$P(\mathrm{Po}(\lambda) \leq k) = P\left(Z \leq \frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \right) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

Potremmo pensare di approsimare una v.a. Binominale con una v.a. di Poisson e quest'ultima con una v.a. Normale. Notiamo che:

$$B(n,p) \simeq Po(np) \simeq N(np, np) \neq N(np, np(1-p)$$

Notiamo come il risultato è molto diverso da quello visto prima.

Disuguaglianza di Markov

Sia X una variabile aleatoria che assume valori ≥ 0 e sia $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Allora

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

Disuguaglianza di Chebytschev

Sia X una variabile aleatoria con $E[X] = \mu$. Per ogni $c \geq 0$

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2}$$

Legge dei grandi numeri

Siano $X_1, X_2, \ldots$ una famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.), con $E\left[X_1\right] = \mu$. Posto

$$\hat{X}_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

Legge debole: per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\hat{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Legge forte:

$$P\left(\lim_{n\to+\infty} \hat{X}_n = \mu\right) = 1$$

Esercizio 193

Usando il teorema centrale del limite, qual è il minimo numero di lanci che bisogna effettuare con un dado equilibrato affinché il punteggio totale sia maggiore o uguale a 3000 con probabilità di almeno 0.8?

a. 1438 b. 870 c. 1376 d. 748 e. 651

Soluzione dell'esercizio 193

Calcoliamo la media e la varianza del dado:

$$\mu_X = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = 3.50$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= \frac{(1-3.5)^2}{6} + \frac{(2-3.5)^2}{6} + \frac{(3-3.5)^2}{6} + \frac{(4-3.5)^2}{6} + \frac{(5-3.5)^2}{6} + \frac{(6-3.5)^2}{6} \\
&= \frac{1}{6}(6.25 + 2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25 + 6.25) = \frac{17.5}{6} = 2.92
\end{aligned}$$

Possiamo applicare il T.L.C.:

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 3000\right) = 0.8 &\overset{T.L.C.}{\iff} P(N(n\cdot 3.5, n\cdot 2.92) \geq 3000) = 0.8 \\
&\Leftrightarrow P(n\cdot 3.5 + Z\sqrt{n\cdot 2.92} \geq 3000) \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{3000 - n\cdot 3.5}{\sqrt{n\cdot 2.92}}\right) = 0.8 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3000 - n\cdot 3.5}{\sqrt{n\cdot 2.92}}\right) = 0.2 \Leftrightarrow \Phi\left(-\frac{3000 - n\cdot 3.5}{\sqrt{n\cdot 2.92}}\right) = 0.8 = \Phi(0.85) \\
&\Leftrightarrow -\frac{3000 - n\cdot 3.5}{\sqrt{n\cdot 2.92}} = 0.85
\end{aligned}$$

Dato che questa equazione è complicata, la strada più semplice è vedere quale dei 5 risultati è più vicino a 0.85, tramite un software, tipo Matlab:

```
>> a = [1438,870,1376,748,651]

a =

        1438         870        1376         748         651

>> c=arrayfun(@(b) -(3000 - b*3.5)/sqrt(b*2.92),a)

c =

   31.3738    0.8928   28.6494   -8.1737  -16.5483
```

Troviamo che l'unico valore che è vicino a 0.85 è 0.89, cioè che la risposta è 870. P.S. nessuno ci vieta di provare e risolverla:

$$\frac{3000 - n \cdot 3.5}{\sqrt{n \cdot 2.92}} = 0.85 \overset{t=u^2}{\iff} -\frac{3000 - u^2 \cdot 3.5}{u\sqrt{2.92}} = 0.85 \Leftrightarrow -3000 + 3.5u^2 + 0.84\sqrt{2.92}u = 0$$
$$\Leftrightarrow u = \pm 29 \Leftrightarrow t = 841 \simeq 870$$

Esercizio 194

Si lancia un dado equilibrato n volte, i lanci sono indipendenti. Si pone $X_i = 1$ se esce il 6 all'i-esimo lancio, 0 altrimenti.

Soluzione dell'esercizio 194

Usando la disuguaglianza di Chebytschev determinare il minimo valore n affinché:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{10}\right) \geq 0.8$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = p(1-p) = \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\frac{1}{100}n} \geq 1 - P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \frac{1}{10}\right) \geq 0.8$$

$$1 - \frac{\frac{5}{36}}{\frac{n}{100}} \geq 0.8 \Leftrightarrow n \geq \frac{625}{9} = 69.4$$

Esercizio 195

Il voto di un test è una variabile a valori in $[0, 100]$ con media 70 e varianza 25. 100 studenti fanno il test, gli esiti sono indipendenti uno dall'altro. Allora la probabilità che la media dei voti sia compresa tra 65 e 75 è sicuramente (può esserci più una risposta esatta):

Soluzione dell'esercizio 195

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100} \in [65, 75]\right) =& P\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} \in [6500, 7500]\right) \\ =& (P(N(700, 25 \cdot 100) \in [6500, 7500]) = \Phi\left(\frac{7500 - 7000}{50}\right) - \Phi\left(\frac{6500 - 7000}{50}\right) \\ =& 2\Phi(10) - 1 \simeq 1 \end{aligned}$$

Oppure con la dis di Chebytschev:

$$1 \geq P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100} - 70\right| < 5\right) \geq \frac{25}{5^2} = 1$$

Esercizio 196

In una data popolazione la media della retribuzione annuale è di 40000 euro. Determinare, senza conoscere la variabile aleatoria X del reddito annuale (in euro) degli individui, la migliore stima dall'alto della probabilità $P(X > 200000)$.

Soluzione dell'esercizio 196

$$P(X > 20000) \leq \frac{4000}{20000} = 0.2$$

Esercizio 197

Sia X variabile aleatoria di valore atteso 10 e varianza $\frac{100}{3}$. Determinare la migliore stima dall'alto della probabilità che $|X-10| \geq 9$.

Soluzione dell'esercizio 197

$$P(|X-10| \geq 9) \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{9^2} = \frac{\frac{100}{3}}{9^2} = 0.411$$

Esercizio 198

Si lancia un dado equilibrato n volte, i lanci sono indipendenti.

Sia f_n il rapporto tra il numero di volte che esce il 6 e il numero n di lanci.

(a) Usando l'approssimazione fornita dal Teorema Centrale del Limite determinare il minimo valore n affinché

(b) Ricalcolarlo usanto la disegualianza di Chebytschev

Soluzione dell'esercizio 198

$X_i = \{1 \text{ se esce } 6{,}0 \text{ altrimenti } \}$

$$\operatorname{Var}\left(X_i\right) = \sigma^2 = p(1-p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

a)

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 0.98 &\Leftrightarrow P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{6} \in \left[-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right]\right) \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow P\left(X_1+\cdots+X_n - \frac{n}{6} \in \left[-\frac{n}{100}, \frac{n}{100}\right]\right) \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z\sqrt{\sigma^2 n} \in \left[-\frac{n}{100}, \frac{n}{100}\right]\right) \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z\sqrt{\frac{5}{36}n} \in \left[-\frac{n}{100}, \frac{n}{100}\right]\right) \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z \in \left[-\frac{n}{100\sqrt{\frac{5}{36}n}}, \frac{n}{100\sqrt{\frac{5}{36}n}}\right]\right) \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow P\left(Z \in \left[-\frac{3\sqrt{n}}{50\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{n}}{50\sqrt{5}}\right]\right) \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{3\sqrt{n}}{50\sqrt{5}}\right) - 1 \geq 0.98 \\
&\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3\sqrt{n}}{50\sqrt{5}}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.33) \\
&\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{n}}{50\sqrt{5}} \geq 2.33 \Leftrightarrow n \geq 7540
\end{aligned}$$

b)

$$1 - \frac{\frac{5}{36}}{n\left(\frac{1}{100}\right)^2} \geq P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 0.98 \Leftrightarrow n \geq 69444$$

Esercizio 199

La durata di una pila per orologi è una variabile aleatoria continua di media 200 ore e deviazione standard σ ore. Calcolare il minimo valore di σ affinché utilizzando 100 pile si possa garantire il funzionamento dell'orologio per almeno 20260 ore con una probabilità superiore al 40%.

Soluzione dell'esercizio 199

$$P\left(N\left(100\cdot 200, 100\cdot\sigma^2\right) > 20260\right) > 0.4 \Leftrightarrow P(Z\sigma + 200 > 20260) > 0.4 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{20060 - 200\cdot 100}{10\sigma}\right) > 0.4$$
$$\Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{26}{\sigma}\right) > 0.4 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{26}{\sigma}\right) < 0.6 = \Phi(0.25) \Leftrightarrow \sigma = 104$$

Esercizio 200

Sia X una variabile aleatoria binomiale di parametri $(1000, p)$, dove $p \in [0, 1]$.

(a) Determinare p sapendo che la distribuzione di X si approssima con quella di una variabile di Poisson di parametro 2;

(b) Approssimando ora la variabile X con una opportuna variabile normale, fornire un risultato approssimato di $P(X \leqslant 3)$. (esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione della normale standard sui positivi).

Soluzione dell'esercizio 200

$$B(1000, p) \simeq Po(2) \Leftrightarrow 1000\cdot p = 2 \Leftrightarrow p = 0.002$$
$$P(B(1000, p) \leqslant 3) \simeq P(N(2, 2(1 - 0.002) \leqslant 3.5) = \Phi\left(\frac{3.5-2}{\sqrt{2(1-0.002)}}\right) = \Phi(1.06) = 0.8554$$
$$P(B(1000, p) \leqslant 3) = \sum_{i=0}^{3} P(B(1000, p) = i) = 0.8573$$

Esercizio 201

Una moneta dà Testa con probabilità $\frac{1}{4}$, Croce con probabilità $\frac{3}{4}$ ogni lancio si vince 1 euro se esce Testa, si perde $\frac{1}{2}$ euro se esce Croce. Si effetuano 16 lanci della moneta. Determinare, utilizzando il Teorema del Limite Centrale, la probabilità che alla fine dei 16 giochi un giocatore intaschi almeno 1 euro.

Soluzione dell'esercizio 201

$$X_1 = \begin{cases} +1 & \text{se esce Testa} \\ -\frac{1}{2} & \text{se esce Croce} \end{cases}$$
$$P(\text{Testa}) = \frac{1}{4}$$
$$P(\text{Croce}) = \frac{3}{4}$$
$$E[X_i] = 1\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{8}$$
$$E\left[X^2\right] = 1^2\cdot\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{16}$$
$$\text{Var}[X_i] = E\left[X^2\right] - E^2[X] = \frac{7}{16} - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{17}{64}$$

$$P\left(N\left(-\frac{16}{8}, 16\cdot\frac{17}{64}\right) \geqslant 1\right) = P\left(N\left(-2, \frac{17}{4}\right) \geqslant 1\right) = 1 - P\left(Z\sqrt{\frac{17}{4}} - 2 \leqslant 1\right)$$
$$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{3}{\sqrt{\frac{17}{4}}}\right) = 1 - \Phi(1.45) = 1 - 0.92647 = 0.07353$$

Esercizio 202

Nel correggere gli esercizi di una prova scritta incerta, un docente dichiara erroneamente sufficiente una prova con probabilità $\frac{1}{5}$.

(a) Se nel primo appello vi erano 37 prove incerte, qual è la probabilità che vengano ingiustamente promosse almeno 5 persone (5 incluso)?

(b) Approssimare il risultato precedente utilizzando prima una variabile di Poisson, poi una variabile normale

Soluzione dell'esercizio 202

$$
\begin{aligned}
&P\left(B\left(37,\tfrac{1}{5}\right) \geqslant 5\right) = 1 - \textstyle\sum_{i=0}^{4} P\left(B\left(37,\tfrac{1}{5}\right) = i\right) = 0.8880 \\
&P\left(B\left(37,\tfrac{1}{5}\right) \geqslant 5\right) \simeq P\left(Po\left(\tfrac{37}{5}\right) \geqslant 5\right) = 1 - \textstyle\sum_{i=0}^{2} P\left(Po\left(\tfrac{37}{5}\right) = i\right) = 0.8605 \\
&P\left(B\left(37,\frac{1}{5}\right) \geqslant 5\right) \simeq P\left(N\left(\frac{37}{5}, \frac{37}{5}\cdot\frac{4}{5}\right) \geqslant 4.5\right) = P\left(Z\sqrt{\frac{37}{5}\cdot\frac{4}{5}} + \frac{37}{5} \geqslant 4.5\right) \\
&\qquad = P(Z \geqslant -1.19) = 1 - P(Z \leqslant -1.19) = 1 - \Phi(-1.19) = \Phi(1.19) = 0.86214
\end{aligned}
$$

Esercizio 203

Il numero di gol subiti dal Padova in una partita di campionato è una variabile aleatoria di media 1.25 e varianza 4. Dare una approssimazione della probabilità che nelle prossime 10 partite, la squadra biancoscudata subisca almeno 20 reti.

Soluzione dell'esercizio 203

$$
\begin{aligned}
P(10 \cdot N(1.25, 4) \geqslant 20) &= P(N(10 \cdot 1.25, 10 \cdot 4) \geqslant 20) \\
&= P\left(Z\sqrt{40} + 12.5 \geqslant 20\right) \\
&= P(Z \geqslant 1.18) \\
&= 1 - \Phi(1.18) = 1 - 0.881 = 0.119
\end{aligned}
$$

Esercizio 204

Nell'esperimento di Buffon, con linee verticali distanti 40cm e matita lunga 20cm, la probabilità che questa cadendo intersechi una linea (Successo) è pari a $\frac{1}{\pi}$.

1.a. Usando il TCL, quanti lanci si devono fare affinché la frequenza di successi disti da $\frac{1}{\pi}$ per meno di 0.1 con probabilità di almeno 95%?

1.b. E usando Chebychev?

2. (Difficile) Effettuando 1000 lanci, qual è la probabilità che l'inverso della frequenza di successi approssimi π per meno di 0.1?

Soluzione dell'esercizio 204

$$
X_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i\text{-esimo è S} \\ 0 & \text{se } i\text{-esimo è I} \end{cases}
$$

$$
P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{\pi}\right| < 0.1\right) \geqslant 0.95
$$

$$
\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{\pi}\right|<0.1\right) &= P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{\pi}\in[-0.1,0.1]\right)\\
&= P\left(\frac{Z\sqrt{n\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}+n\frac{1}{\pi}}{n}-\frac{1}{\pi}\in[-0.1,0.1]\right)\\
&= P\left(\frac{Z\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}{\sqrt{n}}\in[-0.1,0.1]\right)\\
&= P\left(Z\in\left[-\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}},\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}\right]\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}\right)-\Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}\right)\\
&= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}\right)-1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}\right)-1\geqslant 0.95 &\Leftrightarrow 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}\right)\geqslant 0.975=\Phi(1.96)\\
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}}=1.96\Leftrightarrow n\geqslant 70
\end{aligned}
$$

$$
1-\frac{\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}\right)}{0.1^2}\geqslant P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\frac{1}{\pi}\right|<0.1\right)\geqslant 0.95\Leftrightarrow n\geqslant 434
$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{\frac{1000}{\pi-0.1}-\frac{1000}{\pi}}{\sqrt{1000\sqrt{1/\pi(1-1/\pi)}}}\right)-\Phi\left(\frac{\frac{1000}{\pi+0.1}-\frac{1000}{\pi}}{\sqrt{1000\sqrt{1/\pi(1-1/\pi)}}}\right)\\
&\approx 0.761286-0.25251\approx 50\%. E\,\text{con}\,10000\ \text{lanci?}\ \approx 97\%
\end{aligned}
$$

Esercizio 205

Si lancia una moneta equilibrata infinite volte; se ω è una sequenza infinita di $\{T,C\}$ sia $f_n(\omega)$ la frequenza del numero di Teste uscite sui primi n lanci di ω. Allora l'evento costituito dalle sequenze ω di $\{T,C\}$ tali che $\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega)\neq\frac{1}{2}$

Soluzione dell'esercizio 205

Dalla legge forte dei grandi numreri si ha che $P\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega)=\frac{1}{2}\right)=1$. Da cui $P\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega)\neq\frac{1}{2}\right)=0$

Esercizio 206

L'ascensore dell'Empire State Building può sostenere al massimo un peso pari a 1 100 Kg; se viene superato tale peso l'ascensore si blocca. 16 turisti vogliono salire insieme in cima al grattacielo. Se il peso dei turisti è una variabile aleatoria di media 70 Kg e varianza 25 Kg, determinare la probabilità che l'ascensore non si blocchi.

Soluzione dell'esercizio 206

$$P(X_1+\cdots+X_n \leq 1100) \simeq P(N(16\cdot 70, 16\cdot 25) \leq 1100) = \phi\left(\frac{1100-16\cdot 70}{\sqrt{25}\sqrt{16}} = \phi(-1) = 1-\phi(1) = 0.1587\right)$$

Es. 207 — Sia X variabile aleatoria tale che $E(X) = 10$. Allora $P(X < 20) \leq \frac{1}{2}$.

Soluzione (Es. 207) — Falso

Es. 208 — Una data popolazione di individui ha uno stipendio medio di 40000 euro, con deviazione standard di 20000 euro. Ignorando la legge della variabile aleatoria X del reddito annuale degli individui (in euro) determinare la migliore stima dall'alto della probabilità $P(X < 10000 \text{ o } X > 70000)$

Soluzione (Es. 208) — 4/9

Es. 209 — Vi è una probabilità pari al 3% che una macchina fotografica ordinata via internet sia difettosa.
(a) Determinare la probabilità che, su 1000 macchine fotografiche spedite ve ne siano al più 20 ($\leqslant 20$)
difettose. Quale variabile aleatoria state considerando?
(b) Approssimare il risultato precedente attraverso un'altra variabile aleatoria discreta.
(c) Approssimare il risultato trovato in a) attraverso un'opportuna variabile aleatoria continua.

Soluzione (Es. 209) — 0.0333 (Matlab), 0.0353, 0.0392

Es. 210 — Il peso del bagaglio di un passeggero che fa il check-in all'aeroporto di Venezia è una variabile aleatoria di media 15 kg e varianza 4 Kg. In un volo per Parigi salgono a bordo 144 persone. Usando un'opportuna variabile aleatoria continua, dare un'approssimazione della probabilità che il peso dei loro bagagli superi 2130 kg.

Soluzione (Es. 210) — 0.89435

Es. 211 — Il numero di chiamate ad un centralino in una data ora è una variabile di Poisson di media 250.
(a) Qual è la probabilità che chiamino in quell'ora più di 260 persone?
(b) Approssimare la probabilità precedente utilizzando la variabile normale, motivandone la ragione.
Esprimere il risultato tramite la funzione di distribuzione Φ sui reali positivi.

Soluzione (Es. 211) — 0.27425

Es. 212 — Un vecchio walkman funziona con una sola pila di tipo AAA non ricaricabile; si cambia la pila appena questa è scarica. Con una pila esso funziona con un tempo (in ore) che è una variabile aleatoria continua T di densità

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{25}t, & t \in [0,5] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dopo aver determinato il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria T.
Siano T_1 la durata della prima prima pila sostituita, T_2 la durata della seconda pila sostituita, T_m la durata dell' m -esima batteria sosteria sosteria sostituita, ...; descrivere a parole l'evento $T_1 + \ldots + T_{72} > 250$;
Aprossimare la probabilità $P(T_1 + \ldots + T_{72} > 250)$: semplificare le espressioni trovate ed esprimere il risultato con un numero esplicito.

Soluzione (Es. 212) — 0.1587

Es. 213 — Il 35% dell'elettorato è a favore di Pinco Pallino. In una sezione elettorale votano 200 persone ("scelte a caso") e X è il numero di quelle che sono a suo favore.
(a) Determinare la probabilità che $X \geqslant 75$;
(b) Fornire il risultato approssimato utilizzando il teorema del limite centrale;

Soluzione (Es. 213) — 0.2511 (Matlab), 0.2514

Es. 214 — Il numero di errori tipografici di ogni pagina di un libro è una variabile di media 1/2 e varianza 1/9. Supponiamo che il numero di errori in una pagina sia indipendente dal numero di errori presenti in ogni altra pagina. Il libro ha 400 pagine.
(a) Determinare media e varianza della variabile che conta il numero complessivo di errori tipografici nel libro.
(b) Fornire una formula approssimata per la probabilità che il libro contenga meno di 180 errori tipografici.

Soluzione (Es. 214) — $\mu = 200, \sigma^2 = 400/9, 0.014$

Es. 215 — Siano $X_1, X_2, \dots$ va. i.d.d, di media $\mu = 5$ e varianza 100. Usando la disuguaglianza di Chebychev trovare il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - 5\right| < \frac{1}{100}\right) \geqslant 0.9.$$

Quanto si otterrebbe usando il Teorema Centrale del Limite?

Soluzione (Es. 215) — 10000000, 2722500

Es. 216 — Sia X v. a. continua con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ se } 1 < x < 4 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

(a) Calcolare $E[X]$, usando la disuguaglianza di Markov determinare una stima di $P(X \geqslant 3)$
(b) Calcolare esplicitamente $P(X \geqslant 3)$

Soluzione (Es. 216) — 5/2, 1/3

Es. 217 — Si lancia una moneta equilibrata n volte, i lanci sono indipendenti. Si pone al solito $X_i = \begin{cases} 1 \text{ se testa} \\ 0 \text{ se croce} \end{cases}$
Usando la disuguaglianza di Chebychev determinare quanto grande deve essere n affinché

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) \geqslant 0.9$$

Quanto si otterrebbe usando il Teorema Centrale del Limite?

Soluzione (Es. 217) — 250, 68

Es. 218 — Si lancia una moneta equilibrata n volte, i lanci sono indipendenti. Sia X_n la variabile aleatoria che conta il numero di Teste su n lanci. Usando l'approssimazione fornita dal Teorema Centrale del Limite determinare il minimo valore n tra quelli indicati affinché

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 1/1000\right) \geq 0.94$$

Soluzione (Es. 218) — 894000

Es. 219 — Una moneta da testa con probabilità $\frac{3}{5}$. La moneta viene lanciata 10000 volte (lanci indipendenti). Approssimare la probabilità che la moneta dia testa per più di 6050 volte.

Es. 220 — Sia X variabile aleatoria positiva continua di valore atteso 5. La stima migliore che si possa dare per $P(X < 6)$ attraverso una nota disuguaglianza è:

Es. 221 — Sia X variabile aleatoria continua di media 20 e varianza 4.
Qual è la miglior stima possibile per la probabilità $P(\|X - 20\| < 5)$?

Soluzione (Es. 221) — $\geq \frac{21}{25}$

Es. 222 — Siano $X_1, \dots, X_{82}$ delle variabili i.i.d. ciascuna con valore atteso $\mu = 30$ e varianza $\sigma^2 = 25$. usando il teorema centrale del limite approssimare $P\left(X_1 + \cdots + X_{82} < 2450\right)$.

Es. 223 — Si lanciano ripetutamente due dadi i simultaneamente più volte. Usando una opportuna variabile continua approssimare la probabilità che su 3600 lanci la somma dei dadi sia uguale a 12 per esattamente 90 volte. (Sugg: utilizzare l'approssimazione di continuità).

Es. 224 — Siano $X_1, \dots, X_{100}$ delle variabili i.i. d. ciascuna con valore atteso $\mu = 8$ e varianza $\sigma^2 = 9$. usando il teorema centrale del limite approssimare $P\left(X_1 + \cdots + X_{100} > 780\right)$

Es. 225 — Sia X variabile aleatoria continua di media 40 e varianza 9. Qual è la miglior stima possibile per la probabilità $P(32 < X < 48)$?

Capitolo 15

Variabili Aleatorie Congiunte

15.1 Variabili congiunte discrete

Una variabile congiunta discreta è una coppia (X, Y) di variabili discrete: $\omega \in \Omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$.

Siano X ed Y due variabili discrete. Diciamo densità congiunta di X ed Y la funzione:

$$p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1], \quad (a,b) \mapsto P(X = a, Y = b)$$

Le densità p_X e p_Y sono dette densità marginali di $p_{X,Y}$.

Se conosciamo la densità congiunta $p_{X,Y}$ di due variabili aleatorie discrete X ed Y, le densità marginali p_X e p_Y si ottengono così:

$$P(X = a) = p_X(a) = \sum_{y \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(a, y) \quad P(Y = b) = p_Y(b) = \sum_{x \in \mathbb{R}} p_{X,Y}(x, b)$$

Siano X ed Y due v.a. discrete con densità discreta p_X e p_Y rispettivamente. In generale non si può dedurre la densità congiunta!

Valore atteso di una funzione di due variabili

Siano X ed Y due v.a. discrete e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora

$$\mathrm{E}[g(X, Y)] = \sum g(x, y) p_{X,Y}(x, y)$$

Covarianza di una funzione di due variabili

Siano X ed Y due v.a. discrete e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

Densità congiunta di variabili indipendenti

Nel caso di due variabili indipendenti X, Y le densità marginali determinano la densità congiunta.

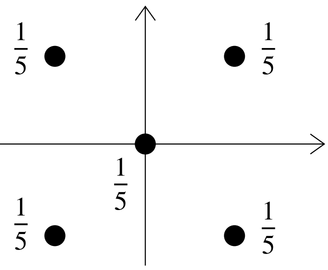
$$p_{X,Y}(a, b) = p_X(a) \times p_Y(b) = P(X = a | Y = B) = P(X = a) \times P(X = b)$$

Notiamo che se X e Y sono indipendenti allora $E[XY] = E[X]E[Y]$, dunque

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

Esercizio 226

Si sceglie a caso uno dei 5 punti di $E := \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (0, 0)\}$, ognuno con probabilità $\frac{1}{5}$



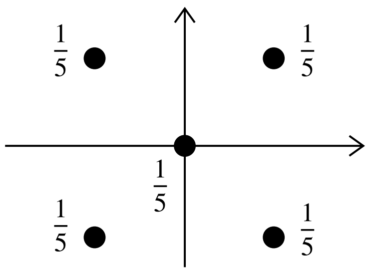
Se (X,Y) sono le coordinate del punto scelto, (X,Y) è variabile

congiunta discreta.

Per ogni punto $(x_*, y_*) \in E$ si ha $P((X,Y) = (x_*, y_*)) = \frac{1}{5}$ Qual è la densità discreta di X, di Y ?

Soluzione dell'esercizio 226

Effettuando la somma si ha che:



$P(X=-1) = \frac{2}{5}$

$P(X=0) = \frac{1}{5}$

$P(X=1) = \frac{2}{5}$

$P(Y=-1) = \frac{2}{5}$ $\quad P(Y=1) = \frac{2}{5}$

$P(Y=0) = \frac{1}{5}$

Esercizio 227

Abbiamo tre dadi, uno rosso, uno verde ed uno bianco. Il dado rosso ha le facce numerate da 1 a 6; in quello verde compaiono solo i numeri $1,2,3$ ciascuno ripetuto due volte; in quello biance compaiono solo numeri $1,2$ ciascuno ripetuto tre volte. Lancio rosso; se esce un numero pari lancio il dado verde altrimenti quello bianco. Indico con X ed Y le variabili aleatorie che registrano del primo lancio e del secondo lancio dei dadi. Determinare la densità congiunta di X ed Y e calcolare rispettivamente l'esito $P(X \leqslant Y)$.

Soluzione dell'esercizio 227

La v.a. X assume i valori $1,2,3,4,5,6$, la v.a. Y o valori $1,2,3$. La densità congiunta è nella seguente tabella:

$X \backslash Y$	$P(Y=1)=\frac{5}{12}$	$P(Y=2)=\frac{5}{12}$	$P(Y=3)=\frac{1}{6}$
$P(X=1)=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
$P(X=2)=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$P(X=3)=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
$P(X=4)=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$P(X=5)=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
$P(X=6)=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

$$P(X \leqslant Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$$

Esercizio 228

Siano $X_i, i = 1,2,3,$ variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti di parametro $1/(i+1)$. Si considerino le variabili discrete $X = X_1 + X_2$ e $Y = X_2 + X_3$.

(a) Si calcoli la densità discreta di X.

(b) Si calcoli la densità congiunta di (X,Y) in $(0,2)$, $(1,2)$ e in $(2,2)$.

(c) Usare (b) per determinare la densità discreta di Y in 2.

Soluzione dell'esercizio 228

$$X_1 = Be\left(\frac{1}{2}\right) \quad X_2 = Be\left(\frac{1}{3}\right) \quad X_3 = Be\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$X = X_1 + X_2 = Be\left(\frac{1}{2}\right) + Be\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$Y = X_2 + X_3 = Be\left(\frac{1}{3}\right) + Be\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$P(X=0) = P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(X=1) = P(X_1 = 1 | X_2 = 0 \vee X_2 = 1 | X_1 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$
$$P(X=2) = P(X_1 = 1 \oplus X_2 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P(Y=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(Y=1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$
$$P(Y=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

b)

$$P(X=0|Y=2)=0$$
$$P(X=1|Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$
$$P(X=2|Y=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

c)

$$P(Y=2)=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$$

Esercizio 229

Sia Ω uno spazio campionario e X,Y due variabili aleatorie su Ω che assumono rispettivamente i valori $\{7,8,16\}$ e $\{4,2\}$. Sono conosciute le probabilità congiunte $p(a,b)$ cioé la probabilità che X assuma valore a e che Y assuma valore b.

$$p(7,4)=0.1; p(7,2)=0.1; p(8,4)=0.2; p(8,2)=0.3; p(16,4)=0.2; p(16,2)=0.1$$

i) Calcolare le densità di X e Y, cioè le densità marginali.

ii) Le due variabili aleatorie sono indipendenti?

iii) Calcolare il valore atteso delle v.a. X e Y. Calcolare la loro covarianza.

iv) Si consideri la variabile aleatoria data dal prodotto XY, trovare i valori assunti. Tra i valori assunti vi è 32: calcolare $P(XY=32)$.

Soluzione dell'esercizio 229

i)

$$P(X=7)=0.1+0.1=0.2$$
$$P(X=8)=0.2+0.3=0.5$$
$$P(X=16)=0.2+0.1=0.3$$

$$P(Y=4)=0.1+0.2+0.2=0.5$$
$$P(Y=2)=0.1+0.3+0.1=0.5$$

ii) NO

iii)

$$E[X]=0.2\cdot 7+0.5\cdot 8+0.3\cdot 16=10.2$$
$$E[Y]=0.5\cdot 4+0.5\cdot 2=3$$
$$E[XY]=7\cdot 4\cdot 0.1+7\cdot 2\cdot 0.1+8\cdot 4\cdot 0.2+8\cdot 2\cdot 0.3+16\cdot 4\cdot 0.2+16\cdot 2\cdot 0.1=31.4$$
$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=31.4-10.2\cdot 3=0.8$$

iv)

$$P(XY=32)=p(8,4)+p(16,2)=0.2+0.1=0.3$$

Esercizio 230

Sia (X,Y) una variabile congiunta discreta la cui densità congiunta è data da

$$p(0,0)=a, p(1,0)=0, p(0,1)=0, p(1,1)=b, p(0,2)=c, p(1,2)=0$$

ove a,b,c sono numeri reali non nulli.

(a) A quale ulteriori condizioni devono soddisfare i parametri a,b,c affinché quella data sia effettivamente una densità congiunta? Calcolare le densità marginali e i valori attesi di X e di Y.

(b) Mostrare che X e Y non sono indipendenti.

(c) Dare una condizione necessaria e sufficiente affinché X e Y non siano correlate (cioè $Cov(X, Y) = 0$).

Soluzione dell'esercizio 230

a)

$$
\begin{gathered}
P(X=0)=a+c \\
P(X=1)=b=1-a-c \\
P(Y=0)=a \\
P(Y=1)=b=1-a-c \\
P(Y=2)=c \\
a+b+c=1 \\
a\in[0,1],\ \ b\in[0,1],\ \ c\in[0,1] \\
E[X]=1-a-c \\
E[Y]=b+2\cdot c=1-a-c+2\cdot c \\
E[XY]=b=1-a-c
\end{gathered}
$$

b)

$$Cov[XY]=E[XY]-E[X]E[Y]=1-a-c-(1-a-c+2\cdot c)=-2c$$

c)

Affinché siano indipendenti è neccessario che $Cov[XY]=0 \Leftrightarrow c=0$

Ma allora:

$$p(0,0)=1, p(1,0)=0, p(0,1)=0, p(1,1)=0, p(0,2)=0, p(1,2)=0$$

Esercizio 231

Siano X, Y due variabili aleatorie indipendenti con legge uniforme su $1,2,3,4,5,6$; si può pensare a due lanci indipendenti di un dado regolare. poniamo $M=\max\{X,Y\}$

(a) Determinare $P(M=j|X=i)$ per i valori di i e j per i quali tale probabilità non è nulla (conviene distinguere i casi $i=j$ e $i\neq j$);

(b) dedurre dal punto precedente la densità discreta di M.

Soluzione dell'esercizio 231

$$
\begin{gathered}
P(M=j|X=i)=P(M=j|X=i|j<i)+P(M=j|X=i|j=i)+P(M=j|X=i|j>i) \\
P(M=j|X=i|j<i)=0 \\
P(M=j|X=j)=P(X=j|Y=j)=P(X=j)P(Y=j)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36} \\
P(M=j|X=i|j>i)=P(Y=j)=\frac{1}{6} \\
P(M=j)=\frac{2i+1}{36}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
P(M=1)&=\frac{1}{36} & P(M=4)&=\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{3}{36} \\
P(M=2)&=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36} & P(M=5)&=\frac{1}{36}+\frac{4}{36}+\frac{4}{36} \\
P(M=3)&=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{2}{36} & P(M=6)&=\frac{1}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}
\end{aligned}
$$

Esercizio 232

Siano X, Y due variabili discrete con legge congiunta

$$p(0,0) = 1/7, \quad p(0,1) = 3/7, \quad p(1,0) = 2/7, \quad p(1,1) = 1/7$$

Si dica se X, Y sono indipendenti motivando la risposta.

Soluzione dell'esercizio 232

No non sono indipendenti. Una volta trovata la probabilità di $X = i$, $Y = j$:

$$P(X=0) = \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$
$$P(X=1) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$
$$P(Y=0) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$
$$P(X=1) = \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

Basta provare che la seguente uguaglianza non è rispettata:

$$P(X=i|Y=j) = P(X=i)P(Y=j)$$

Non è rispettata in $p(0,0)$ in quanto $1/7 \neq 12/49$

Esercizio 233

Un tecnico collauda certi pezzi con uno strumento che è in grado di identificarne uno difettoso con probabilità $p = 90\%$. Egli prende $N = 50$ pezzi difetosi e sottopone ciascuno di essi a un primo collaudo; poi prende quelli che, pur difettosi, hanno superato il primo teste li sottopone a un secondo collaudo.

(a) Riconoscere la distribuzione della v.a. X che conta quanti dei 50 pezzi iniziali non hanno superato il primo collaudo (cioè sono stati identificati come difettosi).

(b) detta Y la v.a. che conta quanti dei pezzi sottoposti al secondo collaudo non lo superano, determinare la densità condizionata di Y dato $X = k$, per $k = 0, ..., 50$. Qual'è una variabile aleatoria che ammette tale densità?

Soluzione dell'esercizio 233

$$X \sim B(50, 0.9)$$
$$Y \sim B(X, 0.9)$$
$$f_{Y|X=k} = B(k, 0.9)$$

Esercizio 234

Sia (X, Y) variabile aleatorie congiunta discreta la cui legge congiunta è data dalla tabella

	Y		
$p(x,y)$	**0**	**2**	**4**
0	0.1	0.150	0.025
1	0.025	0.25	0.075
5	0.075	0.1	0.2

(a) Calcolare $P(X > Y)$

(b) Calcolare $E(XY) - E(X)E(Y)$

Soluzione dell'esercizio 234

$$P(X > Y) = 0.025 + 0.075 + 0.1 + 0.2 = 0.4$$

$$P(X = 0) = 0.1 + 0.15 + 0.025 = 0.275$$

$$P(X = 1) = 0.025 + 0.25 + 0.075 = 0.35$$

$$P(X=5)=0.075+0.1+0.2=0.375$$

$$E(X)=2.225$$

$$P(Y=0)=0.1+0.025+0.075=0.2$$

$$P(X=2)=0.15+0.25+0.1=0.5$$

$$P(X=4)=0.025+0.075+0.2=0.3$$

$$E(Y)=2.2$$

$$E(X)E(Y)=2.225\cdot 2.2=4.895$$

$$E(XY)=0+1\cdot 2\cdot 0.25+2\cdot 5\cdot 0.1+4\cdot 1\cdot 0.075+4\cdot 5\cdot 0.2=5.8$$

$$E(XY)-E(X)E(Y)=5.8-4.895=0.905$$

Esercizio 235

Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori $-2,-1,0,1$; la variabile Y assume i valori $0,1,2$. La densità congiunta $p(X,Y)$ vale:

$$p_{(X,Y)}(-2,0)=1/44,\quad p_{(X,Y)}(-1,0)=3/44,\quad p_{(X,Y)}(0,0)=5/44,\quad p_{(X,Y)}(1,0)=5/44,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,1)=2/44,\quad p_{(X,Y)}(-1,1)=4/44,\quad p_{(X,Y)}(0,1)=1/44,\quad p_{(X,Y)}(1,1)=4/44,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,2)=1/44,\quad p_{(X,Y)}(-1,2)=2/44,\quad p_{(X,Y)}(0,2)=2/44,\quad p_{(X,Y)}(1,2)=?.$$

Dopo aver calcolato il valore di $p_{(X,Y)}(1,2)$, si indichi nella spazio riservato alla risposta il valore di

$$P(XY\leq 0\mid X>-2)$$

Soluzione dell'esercizio 235

$$p_{(X,Y)}(1,2)=1-\sum_{(x,y)\neq(1,2)}p_{(X,Y)}(x,y)=\frac{14}{44}$$

$$P(XY\leq 0\mid X>-2)=\frac{P((XY\leq 0)\cap(X>-2))}{P(X>-2)}=\frac{P((XY\leq 0)\cap(X>-2))}{P(X>-2)}=\frac{22/44}{40/44}=0.55$$

Es. 236 — Sia uno spazio campionario e X,Y due variabili aleatorie su che assumono rispettivamente i valori $\{7,8,16\}$ e $\{4;2\}$. Sono conosciute le probabilità congiunte $p(a;b)$ cioè la probabilità che X assuma valore a e che Y assuma valore b. $p(7;4)=0.1; p(7;2)=0.1; p(8;4)=0.2; p(8;2)=0.3; p(16;4)=0.2; p(16;2)=0.1$
i) Calcolare le densità marginali di X e Y.
ii) Le due variabili aleatorie sono indipendenti?

Es. 237 — Sia $X;Y$ una variabile congiunta discreta la cui densità congiuntap è data da $p(0,0)=a; p(1,0)=0; p(0,1)=0; p(1,1)=bp(0,2)=c; p(1,2)=0$ ove $a;b;c$ sono numeri reali non nulli.
(a) A quale ulteriori condizioni devono soddisfare i parametri $a;b;c$ affinché quella data sia effettivamente una densità congiunta? Calcolare le densità marginali e i valori attesi di X e di Y.
(b) Mostrare che X e Y non sono indipendenti.

Es. 238 — Sia (X,Y) variabile congiunta discreta con densità congiunta $p_{X,Y}$ e densità marginali p_X, p_Y. Quale delle seguenti affermazione è vera? Ci possono essere più risposte esatte.
a. Per ogni (a,b) si $p_{X,Y}(a,b)=p_X(a)p_Y(b)$
b. Nessuna delle altre risposte
c. Per ogni (a,b) si ha $p_{X,Y}(a,b)=p_X(a)p_Y(b)$ se solo se

$$X.Y$$

sono indipendenti
d. Dalle densità marginali discrete si può ricavare la densità congiunta discreta x
e. Dalla densità congiunta discreta si possono ricavare le densità marginali

15.2 Variabili congiunte continue

Una variabile congiunta continua su uno spazio campionario (Ω, P)
una coppia di variabili aleatorie $(X,Y) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ tali che esiste

$$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$$

(densità congiunta continua) tale che

$$\forall B \subseteq R^2 \;\; P((X,Y) \in B) = \int_B f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Si ha $f_{X,Y} \geq 0$e

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = P\left((X,Y) \in \mathbb{R}^2\right) = 1$$

Variabile congiunta uniforme

Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ limitato. La variabile uniforme su C - si scrive
$(X,Y) \sim U(C)-$ è la variabile congiunta continua con densità

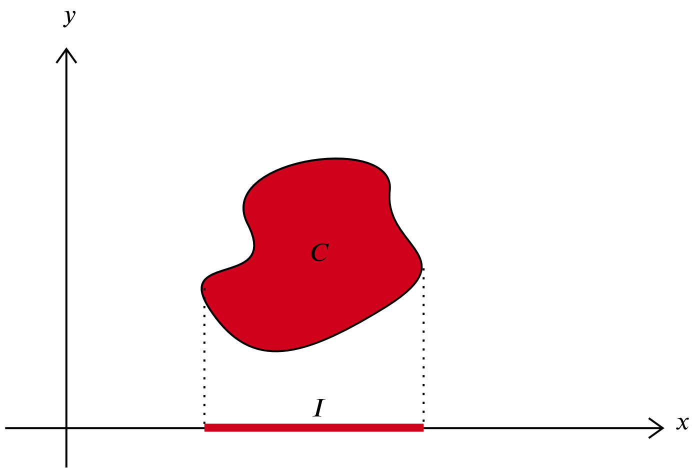
$$f_{X,Y}(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{\text{AreaC}} & \text{se } (x,y) \in C \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $B \subseteq C$

$$P((X,Y) \in B) = \int_B \frac{1}{\text{Area } C}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\text{Area } B}{\text{Area } C}$$

Attenzione agli insiemi dove le densità sono nulle: Si supponga $C \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, (X,Y) congiunta continua con $f_{X,Y} = 0$ fuori di C. Se I è la proiezione di C sull'asse x si ha

$$\forall x \notin I \;\; f_X(x) = 0$$



Se poi C è x -semplice, $C = \{(x,y) : x \in [a,b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y & \text{se } x \in [a,b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Densità marginali

Sia (X,Y) variabile congiunta continua con densità $f_{X,Y}$. Le densità f_X
e f_Y di X ed Y sono dette densità marginali di $f_{X,Y}$. Come si calcolano?

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(a,y)\,\mathrm{d}y; \;\; f_Y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,b)\,\mathrm{d}x$$

Densità congiunta di variabili indipendenti Siano X ed Y sono due variabili continue. Allora X ed Y sono indipendenti se e solo se per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si ha:

$$f_{X,Y}(a,b) = f_X(a) \times f_Y(b)$$

Osservazione: il caso di marginali non nulle su intervalli. Se

$\{x : f_X(x) \neq 0\} = (\alpha, \beta)$ e $\{y : f_Y(y) \neq 0\} = (\gamma, \delta)$ allora

$$\{(x,y) : f_X(x) \times f_Y(y) \neq 0\} = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$$

Funzione di distribuzione di una variabile congiunta continua

Sia (X,Y) congiunta continua. La funzione di distribuzione di (X,Y)ė

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Sia $F_{X,Y}$ distribuzione di una v.a. congiunta continua.Se $f_{X,Y}$ è la densità di (X,Y) su ogni regione dove $F_{X,Y}$ è C^2 si ha

$$f_{X,Y}(x,y) = \partial^2_{x,y} F_{X,Y}(x,y)$$

Valore atteso di una funzione di due variabili

Siano X ed Y due v.a. discrete e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

$$\mathrm{E}[g(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

In particolare

$$\mathrm{E}[XY] = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} xy f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Condizionamento

Sia (X,Y) una coppia di v.a. discrete. È possibile considerare la probabilità condizionata

$$P\left(X = x_r \mid Y = y_s\right) = \frac{P\left(X = x_r, Y = y_s\right)}{P\left(Y = y_s\right)}$$

Funzione di distribuzione condizionata

Se X e Y hanno una densità congiunta $f(x,y)$, allora la densità condizionata di X dato $Y = y$, è definita per tutti i valori y per i quali $f_Y(y) > 0$, come

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Valore atteso condizionato

Si ha che:

$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)\, \mathrm{d}x$$

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y = y] f_Y(y)\, \mathrm{d}y$$

Varianza condizionata

Come abbiamo definito il valore atteso condizionato di X dato il valore di Y, possiamo definire la varianza condizionata di X dato $Y = y$, nel modo seguente:

$$\mathrm{Var}(X \mid Y = y) = E\left[(X - E[X \mid Y = y])^2 \mid Y = y\right]$$

Sia $\mathrm{Var}(X \mid Y)$ la funzione di Y il cui valore in $Y = y$ è $\mathrm{Var}(X \mid Y = y)$

$$\mathrm{Var}(X \mid Y) \equiv E\left[(X - E[X \mid Y])^2 \mid Y\right] = E[\mathrm{Var}(X \mid Y)] + \mathrm{Var}(E[X \mid Y])$$

Esercizio 239

Due persone fissano un appuntamento tra le 00:00 e l'01:00.

- la prima arriva a caso tra le 00:15 e le 00:45;
- la seconda arriva a caso tra le 00:00 e le 01:00
- Le due persone arrivano indipendentemente una dall'altra.

Qual è la probabilità che una non aspetti l'altra per più di 5 minuti?

Soluzione dell'esercizio 239

$$X \sim U([15,45]), Y \sim U([0,60])$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{30}\frac{1}{60} & (x,y) \in [15,45]\times[0,60] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
$$P(|Y-X| \le 5) = \int_{15}^{45}\int_{x-5}^{x+5} \frac{1}{30}\frac{1}{60}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$$

Esercizio 240

In una stanza ci sono due lampadine accese, una rossa ed una blu. La durata T_r, T_b delle due lampadine è misurata da variabili esponenziali di media $\lambda_r = 2$ e $\lambda_b = 3$. La durata di una lampadina *ė* indipendente dalla durata dell'altra. Calcolare la probabilità che la lampadina blu si rompa prima della rossa.

Soluzione dell'esercizio 240

$$\begin{aligned} P\left(T_b < T_r\right) &= \int_{0<y<x} f_{T_r}(x) f_{T_b}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\times 3 \int_{0<y<x} e^{-2x}e^{-3y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 6\int_0^{+\infty} e^{-2x}\int_0^x e^{-3y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{+\infty} e{-2x}\left(1-e^{-3x}\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-2x}-e^{-5x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Esercizio 241

Alberto e Carlo arrivano in dipartimento uno indipendentemente dall'altro. L'ora a cui arriva Alberto è una v.a. X uniformemente distribuita tra le 8:00 e le 8:25. Carlo invece arriva in dipartimento Y minuti dopo le 8:00 con Y variabile esponenziale di parametro 0,56. Calcolare la probabilità che Carlo arrivi in dipartimento prima di Alberto.

Soluzione dell'esercizio 241

$$X \sim \mathcal{U}(25), Y \sim 0.56e^{-0.56y}$$

$$f(x,y) = f_x f_y = \frac{1}{25}\cdot 0.56\cdot e^{-0.56y}$$

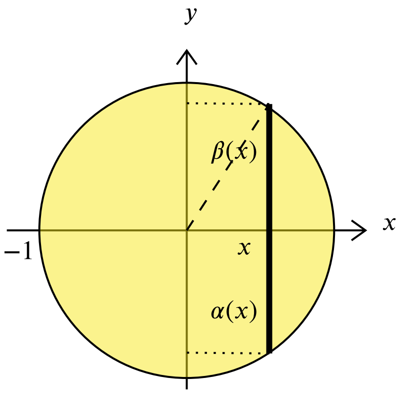
$$P(X<Y) = \int_0^{25}\int_0^x \frac{1}{25}\cdot 0.56\cdot e^{-0.56y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^{25}\frac{1-e^{-\frac{14x}{25}}}{25}\,\mathrm{d}x = 0.9285$$

Esercizio 242

Calcolare le densità marginali della variabile uniforme sul disco B di raggio 1. X, Y sono indipendenti?

Soluzione dell'esercizio 242

Disegnamo:



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{se}(x,y) \in B \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$x^2 + \beta^2(x) = 1$$

$$\beta(x) \geqslant 0$$
$$\beta(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\alpha(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Se $x \notin [-1,1]$: $f_X(x) = 0$

Se $x \in [-1,1]$: $f_X(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_X(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f_X(x,y)\,\mathrm{d}y = \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & \text{se}(x) \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & \text{se}(y) \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{X,Y} \stackrel{?}{=} f_X(x) f_Y(y) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \cdot \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & \text{se}(x,y) \in B \\ 0 \ = 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \cdot \frac{2\overbrace{\sqrt{1-y^2}}^{x}}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{4x\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}$$
$$\Leftrightarrow \pi = 4x\sqrt{1-x^2}$$

No, X, Y non sono indipendenti!

Esercizio 243

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{se } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità di una variabile congiunta continua (X,Y). Dopo aver determinato c calcolare la probabilità che $X - Y > 1/2$. Esprimere il risultato troncando ai primi 3 decimali dopo la virgola.

Soluzione dell'esercizio 243

$$F_{X,Y} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 cxy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \text{se } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \int_0^1 \frac{cy}{2}\,\mathrm{d}y & \text{se } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{c}{4} & \text{se } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{4} = 1 \Leftrightarrow c = 4$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_0^{x-\frac{1}{2}} 4xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{96} = 0.073$$

Esercizio 244

Sia

$$f(x,y)=\begin{cases} cx & \text{se } 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

la densità di una variabile congiunta continua (X,Y). Dopo aver determinato c calcolare la covarianza di (X,Y).

Soluzione dell'esercizio 244

$$\begin{aligned} F_{X,Y} &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1\int_0^x cx\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x & \text{se } 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^1 cx^2\,\mathrm{d}x & \text{se } 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} = \begin{cases} \frac{c}{3} & \text{se } 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{c}{3}=1 \Leftrightarrow c=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^1\int_0^x 3x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \\ E[Y] &= \int_0^1\int_0^x 3xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8} \\ E[XY] &= \int_0^1\int_0^x 3x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10} \\ Cov[XY] &= E[XY]-E[X]E[Y] = \frac{3}{160} = 0.01875 \end{aligned}$$

Esercizio 245

$$f(x,y)=\begin{cases} cx & \text{se } 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

la densità di una variabile congiunta continua (X,Y) per qualche $c>0$. Le variabili X,Y sono indipendenti?

Soluzione dell'esercizio 245

No

Esercizio 246

Siano X e Y due variabili indipendenti e uniformi su $[0,1]$. Calcolare

$$P(XY>1/2)$$

Soluzione dell'esercizio 246

$$f_X = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad f_Y = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{X,Y} = \begin{cases} 1 & \text{se } x, y \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(XY > 1/2) &= P\Big(\underbrace{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy > \frac{1}{2}}_{A}\Big) = \int_{A \cap [0,1]\times[0,1]} 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{\frac{1}{2x}}^{1} 1 \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big(1 - \frac{1}{2x}\Big) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1 - \ln 2}{2} = 0.15 \end{aligned}$$

Esercizio 247

Siano X ed Y due v.a. continue con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{(x+y+3)^3} & \text{se } x, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Calcolare α;
2. Calcolare le densità marginali di X ed Y e le loro funzioni di distribuzione;
3. Calcolare $P(X > 3 \mid Y > 3)$
4. Sia $W := \min\{X, Y\}$; calcolare la funzione di distribuzione e la funzione di densità di W;
5. Sia $T := \max\{X, Y\}$; calcolare la funzione di distribuzione e la funzione di densità di T.

Soluzione dell'esercizio 247

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(x+y+3)^3} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 1 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

$$f_X(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(x+y+3)^3} \mathrm{d}y = \begin{cases} \frac{3}{(a+3)^2} & a > 0, \\ 0 & a \leq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{(x+y+3)^3} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{3}{(a+3)^2} & b > 0, \\ 0 & b \leq 0 \end{cases}$$

$$F_X(r) = F_Y(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(a) da = \begin{cases} 1 - \frac{3}{3+r} & r > 0, \\ 0 & a \leq 0 \end{cases}$$

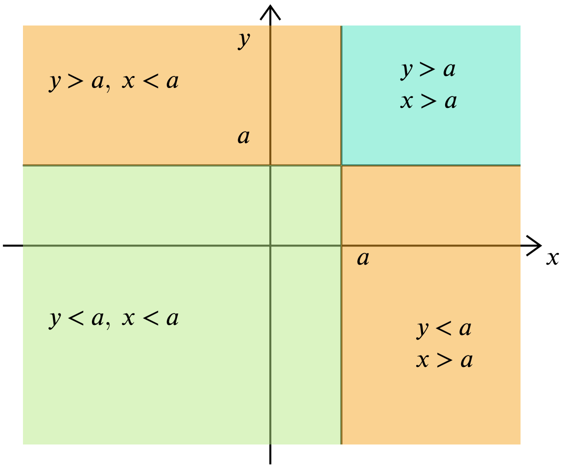
$$P(X > 3 \mid Y > 3) = \frac{P((x > 3)(y > 3))}{P(y > 3)}$$

$$P((X > 3)(y > 3)) = \int_3^{+\infty} \int_3^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_3^{+\infty} \int_3^{+\infty} \frac{6}{(x+y+3)^3} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_3^{+\infty} \frac{3}{(y+6)^2} \mathrm{d}y = \frac{3}{3+6}$$

$$P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 1 - \Big(1 - \frac{3}{3+3}\Big) = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 3 \mid Y > 3) = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$$

Dividendo il piano dalle linee $x = a, \ y = a$:



Nel caso $\min\{X,Y\} \leqslant a$ ci interessano le zone arancioni e quella verde

Nel caso $\max\{X,Y\} \leqslant a$ Ci interessa soalmente l'area verde

Determiniamo quindi:

$$\begin{aligned}
F_{\text{verde}}(a) &= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{a}\int_{0}^{a} \frac{6}{(x+y+3)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \left[-\frac{3}{(x+y+3)^2}\right]_{x=0}^{x=a} \mathrm{d}y = \int_0^a \frac{3}{(y+3)^2} - \frac{3}{(a+y+3)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \frac{3}{(y+3)^2} - \frac{3}{(a+y+3)^2}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{3}{y+a+3} - \frac{3}{y+3}\right]_{y=0}^{y=a} = \\
&= \left(\frac{3}{2a+3} - \frac{3}{a+3}\right) - \left(\frac{3}{a+3} - 1\right) = 1 + \frac{3}{2a+3} - \frac{6}{a+3} \\
F_{\text{arancione}}(a) &= \int_{-\infty}^{a}\int_{a}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{0}^{a}\int_{a}^{+\infty} \frac{6}{(x+y+3)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \left[-\frac{3}{(x+y+3)^2}\right]_{x=a}^{x=+\infty} \mathrm{d}y = \int_0^a \frac{3}{(a+y+3)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[-\frac{3}{a+y+3}\right]_{y=0}^{y=a} = \left(\frac{3}{a+3}\right) - \left(\frac{3}{a+a+3}\right) \\
&= \frac{3}{a+3} - \frac{3}{2a+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_W(a) = P(W \leqslant a) = P(\min\{X,Y\} \leqslant a) &= \begin{cases} 1 + \frac{3}{2a+3} - \frac{6}{a+3} + 2\left(\frac{3}{a+3} - \frac{3}{2a+3}\right) & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 - \frac{3}{2a+3} & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases} \\
F_T(a) = P(T \leqslant a) = P(\max\{X,Y\} \leqslant a) &= \begin{cases} 1 + \frac{3}{2a+3} - \frac{6}{a+3} & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f_W(a) = \frac{d}{da}\left(\begin{cases} 1 - \frac{3}{2a+3} & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}\right) = \begin{cases} \frac{6}{(2a+3)^2} & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$$f_T(a) = \frac{d}{da}\left(\begin{cases} 1 + \frac{3}{2a+3} - \frac{6}{a+3} & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}\right) = \begin{cases} \frac{6}{(a+3)^2} - \frac{6}{(2a+3)^2} & a \geqslant 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

Esercizio 248

Sia (X,Y) congiunta continua con desnità $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Determinare la funzione di distribuzione in (x,x) : $F_{X,Y}(x,x)$;
2. Calcolare le densità marginali di X e Y;
3. Dedurre F_X, F_Y;
4. Sono X ed Y indipendenti?
5. Sia $W = \min\{X,Y\}$. Calcolare la funzione di distribuzione e la densità di W.

Soluzione dell'esercizio 248

$$F_{X,Y}(x,x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \iint_{0\le t\le s\le x} 2ds dt = x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$f_X(s) = \begin{cases} 2s & \text{se } s \in]0,1[, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad f_Y(t) = \begin{cases} 2(1-t) & \text{se } t \in]0,[1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1, \\ & \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1-(y-1)^2 & 0 \le y \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Sono X ed Y indipendenti? NO

$$\begin{aligned} P(W \le x) &= P(\{X \le x\} \circ \{Y \le x\}) \\ &= P(X \le x) + P(Y \le x) - P(X \le x, Y \le x) \\ &= F_X(x) + F_Y(x) - F_{X,Y}(x,x) \\ &= \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^2 + 1 - (1-x)^2 - x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 249

Sia (X,Y) una variabile congiunta continua uniforme sul quadrato di vertici $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ (cioè la cui densità è costante sul quadrato).

a) Determinare la densità di (X,Y);

b) Calcolare le densità marginali;

c) Calcolare $P(Y > 1/2 | X < 1/2)$;

d) Determinare la densità di $X+Y, X-Y$

Soluzione dell'esercizio 249

$$f_{X,Y} = \begin{cases} k & \text{se } x,y \in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_Q k\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_Q k\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\int_{-1+x}^{1+x} k\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1$$
$$\Leftrightarrow 1 = 2k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x,y \in Q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_X = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1,\ x > 1 \\ \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y & \text{se } x \in [0,1] \\ \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1,\ x > 1 \\ 1+y & \text{se } x \in [0,1] \\ 1-y & \text{se } x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$f_Y = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -1,\ x > 1 \\ \int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & \text{se } y \in [0,1] \\ \int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x & \text{se } y \in [-1,0] \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -1,\ x > 1 \\ 1+x & \text{se } y \in [0,1] \\ 1-x & \text{se } y \in [-1,0] \end{cases}$$

$$P(X+Y<a) = \int_{x+y\leq a} f_{X,Y} = \begin{cases} 0, & a<1 \\ \int_{-1}^{a}\int_{-1-x}^{a-x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, & a \in [0,1], \\ 1, & a>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a<1 \\ \int_{-1}^{a} \frac{a+1}{2}\,\mathrm{d}x, & a \in [0,1], \\ 1, & a>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a<1 \\ \frac{a^2}{2}+a+\frac{1}{2}, & a \in [0,1], \\ 1, & a>1 \end{cases}$$

$$f_{X+Y} = \frac{d}{\mathrm{d}a}\left(\frac{a^2}{2}+a+\frac{1}{2}\right) = a+1$$

$$P(X+Y<a) = \int_{x-y\leq a} f_{X,Y} = \begin{cases} 0, & a<1 \\ \int_{-1}^{a}\int_{-1-x}^{a+x} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, & a \in [0,1], \\ 1, & a>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a<1 \\ \int_{-1}^{a} \frac{a+2x+1}{2}\,\mathrm{d}x, & a \in [0,1], \\ 1, & a>1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & a<1 \\ a^2+a, & a \in [0,1], \\ 1, & a>1 \end{cases}$$

$$f_{X-Y} = \frac{d}{\mathrm{d}a}\left(a^2+a\right) = 2a+1$$

Esercizio 250

Data la v.a. (X,Y) continua con densità

$$f(x,y) = x+y \quad \text{se } 0<x<1, 0<y<1$$

determinare la funzione di distribuzione e la densità della v.a. $Z = Y/X$.

Soluzione dell'esercizio 250

$$\begin{aligned} F_Z =& P(Y/Z \leqslant z) = P\Big(\underbrace{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x}{y} \leqslant z}_{A}\Big) = \int_{A\cap[0,1]\times[0,1]} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ =& \begin{cases} \int_0^1\int_0^{yz}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\left(\frac{y^2z^2}{2}+zy^2\right)\mathrm{d}y = \frac{z^2}{6}+\frac{z}{3} & \text{se } z>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \\ f_Z =& \frac{dF_Z}{dz} = \begin{cases} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{6}+\frac{z}{3}\right) = \frac{z+1}{2} & \text{se } z>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 251

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} Kxy & \text{se } 0<x<1-y<1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare la costante K in modo che $f(x,y)$ sia la densià congiunta di una v.a. congiunta continua (X,Y);

(b) calcolare le densità marginali di X e di Y;

(c) Calcolare il valore atteso condizionato $E[X|Y=y]$

Soluzione dell'esercizio 251

$$F_{X,Y} = \int_0^1\int_0^{1-y} Kxy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{K\,y(1-y)^2}{2}\,\mathrm{d}y \quad = \frac{K}{24} = 1 \Leftrightarrow K = 24$$

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{1-x} 24xy\ \mathrm{d}y = 12x(1-x)^2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{1-y} 24xy\ \mathrm{d}x = 12y(1-y)^2 & \text{se } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}}{f_Y} \begin{cases} \frac{24xy}{12y(1-y)^2}, & \text{se } x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 x \frac{24xy}{12y(1-y)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3(1-y^2)}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 252

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} 5ye^{-y(x+5)} & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X,Y).

(a) Determinare la densità marginale di Y

(b) Determinare la densità condizionata di X dato $Y = y$

Soluzione dell'esercizio 252

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 5ye^{-y(x+5)}\,\mathrm{d}x = 5e^{-5y} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{X|Y} = \frac{f_{X,Y}}{f_Y} = \begin{cases} \frac{5ye^{-y(x+5)}}{5e^{-y}}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} ye^{-xy-4y}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 253

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x(y-x)e^{-y} & \text{se } 0 < x < y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X,Y).

Determinare le densità marginali di X e di Y;

Soluzione dell'esercizio 253

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^y x(y-x)e^{-y}\,\mathrm{d}x = \frac{y^3}{6e^y} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} x(y-x)e^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{e^x} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 254

Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X,Y).

(a) Calcolare la covarianza di (X,Y);

(n) X, Y sono indipendenti?

(c) Determinare la densità marginale di X.

Soluzione dell'esercizio 254

$$E[XY] = \int_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{3}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$$

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y = x + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}x = y + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{12}$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y = \int_0^1 y\left(y + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{7}{12}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = -\frac{1}{144}$$

Non sono indipendenti.

Esercizio 255

Si consideri la funzione

$$f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_c(x,y) = \begin{cases} c & \text{se } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare per quale valore di c la funzione f_c è una densità congiunta continua.

(b) Per tale valore calcolare le densità marginali di X e Y.

(c) Calcolare il valore atteso condizionato $E[X|Y = 1/2]$.

Soluzione dell'esercizio 255

$$\int_0^1 \int_0^x c\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 cx\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2} = 1 \Leftrightarrow c = 2$$

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^x 2\,\mathrm{d}y = 2x & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_y^1 2\,\mathrm{d}x = 2 - 2y & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_{X|Y=\frac{1}{2}} = \frac{f_{XY}\left(Y = \frac{1}{2}\right)}{f_Y\left(Y = \frac{1}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2}{2-2\cdot\frac{1}{2}} = 2, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 256

Supponiamo che la densità congiunta di due v.a. X ed Y sia

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{se } x, y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare la densità marginale di X e di Y

(c) determinare $P(X + Y \le 4)$

Soluzione dell'esercizio 256

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}y = e^{-x} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x = e^{-y} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P(X+Y \le 4) = \int_{x+y\leqslant 4} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \int_0^{4-y} e^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(e^{-y} - e^{-4}\right)\mathrm{d}x = 1 - 5e^{-4}$$

Esercizio 257

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f = \begin{cases} c\left(x^2 + xy\right) & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Determinare il valore della costante c per la quale la funzione è una densità congiunta continua di una coppia (X,Y) di variabili aleatorie.

(b) Per tale valore di c calcolare

$$P\left(X^2 < Y \middle| X < \frac{1}{2,4}\right)$$

Soluzione dell'esercizio 257

$$\int_0^1 \int_0^x c\left(x^2 + xy\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3cx^3}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{8}{3}$$

$$P\left(X^2 < Y, X < \frac{1}{2.4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2.4}} \int_{x^2}^x \frac{8}{3}\left(x^2 + xy\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2.4}} \left(4x^3 - \frac{8x^4}{3} - \frac{4x^5}{3}\right)\mathrm{d}x = 0.0222$$

$$P\left(X < \frac{1}{2.4}\right) = \int_0^{\frac{1}{2.4}} \int_0^x \frac{8}{3}\left(x^2 + xy\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2.4}} 4x^3\,\mathrm{d}x = 0.0301$$

$$P\left(X^2 < Y \mid X < \frac{1}{2.4}\right) = \frac{P\left(X^2 < Y, X < \frac{1}{2.4}\right)}{P\left(X < \frac{1}{2.4}\right)} = \frac{0.0222}{0.0301} = 0.7375$$

Esercizio 258

Siano X, Y, Z variabili indipendenti, uniformemente distribuite sull'intervallo $(0,1)$. Si calcoli $P\{X \ge YZ\}$

Soluzione dell'esercizio 258

Essendo

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) = 1 \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$$

abbiamo

$$\begin{aligned} P\{X \ge YZ\} &= \iiint_{x \ge yz} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{yz}^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - yz)\,\mathrm{d}y\,dz \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{z}{2}\right) dz \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 259

Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} ax^2(5-y) & \text{se } (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 & \text{altriementi} \end{cases}$$

1. Per quale valore del parametro reale a la funzione f è la densità congiunta di una coppia di variabili aleatorie continue X e Y.

2. Per il valore trovato nel punto (1) determinare le densità marginali.

3. Calcolare la probabilità dell'evento $X \leq 2Y$.

Soluzione dell'esercizio 259

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 ax^2(5-y)dxdy = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{a(5-y)}{3}dy = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a=\frac{2}{3}}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 \frac{2}{3}x^2(5-y)dy & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altriementi} \end{cases} = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altriementi} \end{cases}$$

$$f_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a=\frac{2}{3}}(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^1 \frac{2}{3}x^2(5-y)dx & \text{se } y \in [0,1] \\ 0 & \text{altriementi} \end{cases} = \begin{cases} \frac{10-2y}{9} & \text{se } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altriementi} \end{cases}$$

Esercizio 260

Sia (X,Y) congiunta continua con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx+1 \text{ se } x \geq 0, y \geq 0, x+y < 1 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato c, calcolare la probailità dell'evento $\{Y \leq 2X^2\}$.

Soluzione dell'esercizio 260

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} cx+1dxdy = \int_0^1 \frac{c(1-y)^2}{2} - y + 1dy = \frac{c}{6} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow c = 3$$

$$\int_0^{0.5} \int_0^{2x^2} 3x+1dydx + \int_{0.5}^1 \int_0^{1-x} 3x+1dydx = \frac{53}{96}$$

Esercizio 261

Sia (X,Y) congiunta continua con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx+\frac{2}{3} \text{ se } x \geq 0, y \geq 0, x+y < 1 \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato c, calcolare la probailità dell'evento $\{Y \leq 2X^2\}$.

Soluzione dell'esercizio 261

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} cx+\frac{2}{3}dxdy = \int_0^1 \frac{c(1-y)^2}{2} - \frac{2y}{3} + \frac{2}{3}dy = \frac{c}{6} + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow c = 4$$

$$\int_0^{0.5} \int_0^{2x^2} 4x+\frac{2}{3}dydx + \int_{0.5}^1 \int_0^{1-x} 4x+\frac{2}{3}dydx = \frac{13}{72} + \frac{5}{12} = \frac{43}{72}$$

Esercizio 262

Sia c un parametro reale. Si consideri la funzione $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_c(x,y) = \begin{cases} 2cy & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato c in modo che f_c sia la densità congiunta della variabile congiunta (X,Y), si calcoli la probabilità $P(\{Y \leq 1/9\} \cap \{X \leq 1/2\})$.

Soluzione dell'esercizio 262

Determiniamo c:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} 2cy\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow c = 10$$

Determiniamo la probabilità, essa corrisponde a due integrali in quanto il dominio non è semplice:

$$\int_0^{1/3} \int_0^{x^2} 10y\,dy\,dx + \int_{1/3}^{1/2} \int_0^{1/9} 10y\,dy\,dx = 0.0144$$

Es. 263 — Siano X e Y due variabili indipendenti e uniformi su $[0,1]$. Calcolare $P(X+Y > 1/2)$ e $P(XY > 1/2)$.

Es. 264 — Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la densità congiunta di una variabile congiunta continua (X,Y). Determinare se X,Y sono indipendenti?

Es. 265 — Si provi che $f(x,y) = 1/x, 0 < y < x < 1$ è una densità di probabilità. Supponendo che f e la densità congiunta di X,Y, si trovi:
(a) la densità marginale di Y;
(b) la densità marginale di X;
(c) $E[X]$
(d) $E[Y]$

Es. 266 — Sia

$$f(x,y) = 24xy \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x+y \leq 1$$

e 0 altrove.
(a) Si mostri che $f(x,y)$ è la densità congiunta di un variabile aleatoria congiunta (X,Y)
(b) Si determini $E[X]$.
(c) Si determini $E[Y]$.

Es. 267 — La densità congiunta di X e Y è data da

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Sono X e Y indipendenti?
(b) Si calcoli la densità di X.
(c) Si determini $P\{X+Y < 1\}$.

Es. 268 — Le variabili aleatorie X e Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = 12xy(1-x) \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

e 0 altrove.
(a) Sono X e Y indipendenti?
(b) Si determini $E[X]$.
(c) Si determini $E[Y]$.
(d) Si determini $\mathrm{Var}(X)$.
(e) Si determini $\mathrm{Var}(Y)$.

Es. 269 — Si consideri la funzione di due variabil

$$f_a(x,y) = \begin{cases} ax^2(y+1) & \text{se } (x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Per quale valore del parametro reale a la funzione fa è la densità congiunta di una coppia di variabili aleatorie continue X e Y.
2. Per il valore trovato nel punto 1) determinare le densità marginali.
3. X e Y sono indipendenti?
4. Calcolare la probabilità dell'evento $Y \le X^2$.

Soluzione (Es. 269) — 2, $3x^2$ se $x \in [0,1]$, 0 altrimenti e $\dfrac{2y+2}{3}$ se $y \in [0,1]$, 0 altrimenti, sono indipendenti, $\dfrac{19}{35}$

Es. 270 — Sia (X,Y) variabile congiunta di densità congiunta continua

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(1+y) & \text{se } x,y \in [0,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ dopo aver determinato c, calcolare la funzione di distribuzione $F_X(1) = P(X \le 1)$ di X in 1.

Soluzione (Es. 270) — $\dfrac{1}{4}$

Es. 271 — Siano X,Y variabili con densità congiunta continua

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-y} & \text{se } x,y \in [0,1], y < x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dopo aver determinato c, calcolare la probabilità dell'evento $\left\{Y > \dfrac{X}{3}\right\}$

Soluzione (Es. 271) — $1 - 3e^{2/3} + 2e$

Es. 272 — La densità congiunta di X ed Y è la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-2y} & \text{se } 0 \le x \le 2, 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver determinato c, calcolare $P(X < Y)$

Appendice B

Altri argomenti trattati nei Quiz di Probabilità

B.1 Domande di Teoria

Esercizio 273

II numero di funzioni da I_3 a I_5 è uguale al

a. Numero di sottoinsiemi di 3 elementi tra 8

b. Numero di 3-sequenze di I_5

c. Numero di sottoinsiemi di 3 elementi tra 5

d. Numero di 5-sequenze di I_3

Soluzione dell'esercizio 273

Il numero di funzioni (iniettive) $I_k \to I_n$ è il numero delle k-sequenze di I_n

CIoè b.

Esercizio 274

Devo spartire 52 carte a 3 persone. La spartizione (carta 1 alla persona.... carta 2 alla persona.......) si può descrivere con

a. Una 55 -sequenza di I_3

b. Una 3 -sequenza di I_{52}

c. una 52 -sequenza di I_3

d. Un insieme di 52 elementi

e. Un insieme di 52 elementi

Soluzione dell'esercizio 274

Se devo spartire k oggetti a n persone, essa è una k-sequenza di I_n

Cioè c.

Esercizio 275

Devo formare una mano (un insieme, non conta l'ordine) di tre carte tra 52. Faccio l'esperimento in 3 tappe: sceglia una carta. Alla prima tappa ho 52 possibilità, alla seconda 51, alla terza 50. Posso usare il principio di moltiplicazione e concludere che ci sono $52\times 51\times 50$ mani di 3 carte?

Soluzione dell'esercizio 275

Per calcolare il numero di possibili mazzi si deve usare il calcolo delle combinazioni:

$$C_{52,5} = \begin{pmatrix} 52 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{52!}{3!49!} \neq 52\times 51\times 50$$

Cioè falso

Esercizio 276

Devo formare un gruppo con 2 rappresentanti per ognuno dei corsi di Famp canale 1, Famp canale 2, e 4 studenti di Camp. Faccio il gruppo in tre tappe:

Soluzione dell'esercizio 276

1) Scelta dei 4 studenti di Camp: n_1 scelte

2) Scelta dei 2 studenti di Famp 1: n_2 scelte

3) Scelta dei 2 studenti di Famp 2: n_3 scelte

(i numeri indicati sono le possibilità di scegliere i rappresentanti)

Soluzione dell'esercizio 276

Posso applicare il Principio di Moltiplitazione e concludere che ci sono $n_1 \times n_2 \times n_3$ scelte possibili?

Cioè vero.

Esercizio 277

Si consideri l'esperimento del lancio di una moneta non truccata due volte. Si descriva lo spazio campionario Ω e si considerino: A_1 l'evento di avere testa al primo lancio; A_2 l'evento di avere testa al secondo lancio; A_2 l'evento di avere testa una ed una sola volta.

Allora gli eventi A_1, A_2, A_3:

Soluzione dell'esercizio 277

sono a due a due indipendenti ma non indipendenti

Esercizio 278

Una v.a. sullo spazio campionario Ω è :

a. una funzione $\Omega \to R$

b. una funzione $[0, 1] \to \Omega$

d. una funzione$\Omega \to [0, 1]$

e. una funzione $R \to \Omega$

Soluzione dell'esercizio 278

una funzione $\Omega \to R$

Esercizio 279

Sia Ω lo spazio campionario formato dalle 10-sequenze di I_{20} . Si considera la v.a. X che conta in ciascuna sequenza il numero di 5 più 2 volte il numero di 10. Quali del seguenti eventi coincidono con l'intero spazio campionario?

a. $X < 20$

b. $X = 20$

c. $X \geq 20$

d. $X > 20$

e. $X \leq 20$

Soluzione dell'esercizio 279

Sia $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ una tupla di elementi non necessariamente distinti di I_n allora:

Nel caso migliore, dove $a_x = 1, \forall x, X = 0$.

Nel caso peggiore, dove $a_x = 10, \forall x, X = 20$.

Negli altri casi varia tra 1 e 19, percui $X \leq 20$

Esercizio 280

Una v. a. X sullo spazio campionario Ω è discreta se e solo se:

a. Ω è al più infinito numerabile

b. Ω è finito

c. $\operatorname{Im} X$ è finito

d. $\operatorname{Im} X$ è al più infinito numerabile

Soluzione dell'esercizio 280

$\operatorname{Im} X$ è al più infinito numerabile

Esercizio 281

Sia Ω lo spazio campionario formato dalle 10-sequenze di I_{20}. Si consideri la va. X che conta in ciascuna sequenza il numero di 5 più 2 volte il numero di 10.

Quale delle seguenti sequenze appartengono a $(X \leq 6)$?

a. $(10, 5, 5, 6, 3, 13, 2, 8, 5, 5)$

b. $(5, 5, 5, 6, 5, 13, 5, 8, 5, 5)$

c. $(10, 5, 5, 5, 3, 13, 2, 8, 10, 2)$

d. $(10, 4, 5, 6, 3, 13, 2, 8, 10, 10)$

Soluzione dell'esercizio 281

a, c, d

Esercizio 282

Una variabile aleatoria è: (possono esserci più risposte esatte)

a. Un sottoinsieme di uno spazio campionario

b. Nessuna delle altre risposte

c. Un insieme di numeri

d. Una funzione da uno spazio campionario a valori reali

e. Una funzione reale di variabile reale

f. Una funzione da uno spazio campionario all'intervallo reale $[0, 1]$

Esercizio 283

Sia X variabile aleatoria discreta su uno spazio campionario (Ω, P). La densità discreta di X è:

a. La funzione $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definita da $p_X(a) = P(X \leq a)$

b. La funzione $p_X : \mathrm{R} \to [0, 1]$ definita da $p_X(a) = P(X = a)$

c. La funzione f_X tale che $P(X \in B) = \displaystyle\int_B f_X(t)\, dt$

d. La media pesata dei valori assunti dalla X

Soluzione dell'esercizio 283

La funzione $p_X : \mathrm{R} \to [0, 1]$ definita da $p_X(a) = P(X = a)$