A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3° appello — 2 settembre 2021

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (2, 0, -1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 2, 0)$, $v_3 = (3, 1, 0, 2)$, $v_4 = (0, 2, 3, 1)$.

(a) Ridurre in forma a scala la matrice le cui **righe** sono i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, usando **solo** operazioni elementari sulle righe. Dedurre da ciò la dimensione e una base di V.

(b) Sia $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Trovare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(b) Scrivere la matrice della funzione composta $f \circ f$ (rispetto alle basi canoniche). Trovare una base del nucleo di $f \circ f$ e una base dell'immagine di $f \circ f$.

(c) Trovare gli autovalori di A e una base degli autospazi. Dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = M(2, \mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali definiamo un prodotto scalare ponendo, per $A, B \in M(2, \mathbb{R})$,

$$A \cdot B = \mathrm{Tr}(AB^T)$$

(Tr indica la *traccia* di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale).

(a) Calcolare esplicitamente il prodotto scalare delle matrici $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ e verificare che la formula ottenuta è analoga a quella del prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$.

(b) Sia U il sottospazio generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $W = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid AB = BA\}$, ove $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di W.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $A = (5, 0, 5)$ e il piano $\pi : 2x - y + z = 3$.

(a) Determinare la distanza $\mathrm{dist}(A, \pi)$ di A dal piano π e il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano π' parallelo al piano π e tale che $\mathrm{dist}(A, \pi') = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(A, \pi)$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, parallela al piano π e ortogonale al vettore $v = (1, 2, -3)$.

(d) Dato il punto $B = (7, -6, -2)$ trovare il punto $B' \in r$ di minima distanza da B.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3$^{\text{o}}$ appello — 2 settembre 2021

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, 0, 2, -2)$, $v_2 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 4, -3)$, $v_4 = (-3, 2, 2, 0)$.

(a) Ridurre in forma a scala la matrice le cui **righe** sono i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, usando **solo** operazioni elementari sulle righe. Dedurre da ciò la dimensione e una base di V.

(b) Sia $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Trovare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(b) Scrivere la matrice della funzione composta $f \circ f$ (rispetto alle basi canoniche). Trovare una base del nucleo di $f \circ f$ e una base dell'immagine di $f \circ f$.

(c) Trovare gli autovalori di A e una base degli autospazi. Dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = M(2, \mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali definiamo un prodotto scalare ponendo, per $A, B \in M(2, \mathbb{R})$,

$$A \cdot B = \mathrm{Tr}(AB^T)$$

(Tr indica la *traccia* di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale).

(a) Calcolare esplicitamente il prodotto scalare delle matrici $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ e verificare che la formula ottenuta è analoga a quella del prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$.

(b) Sia U il sottospazio generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $W = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid AB = BA\}$, ove $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di W.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $A = (4, 4, -3)$ e il piano $\pi : x + y - 2z = 2$.

(a) Determinare la distanza $\mathrm{dist}(A, \pi)$ di A dal piano π e il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano π' parallelo al piano π e tale che $\mathrm{dist}(A, \pi') = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(A, \pi)$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, parallela al piano π e ortogonale al vettore $v = (2, 1, 2)$.

(d) Dato il punto $B = (5, -4, -4)$ trovare il punto $B' \in r$ di minima distanza da B.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3$^{\text{o}}$ appello — 2 settembre 2021

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (1, -2, 0, -1)$, $v_2 = (2, -1, 2, 0)$, $v_3 = (0, 3, 2, 2)$, $v_4 = (3, 0, 4, 1)$.

(a) Ridurre in forma a scala la matrice le cui **righe** sono i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, usando **solo** operazioni elementari sulle righe. Dedurre da ciò la dimensione e una base di V.

(b) Sia $U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Trovare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(b) Scrivere la matrice della funzione composta $f \circ f$ (rispetto alle basi canoniche). Trovare una base del nucleo di $f \circ f$ e una base dell'immagine di $f \circ f$.

(c) Trovare gli autovalori di A e una base degli autospazi. Dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = M(2, \mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali definiamo un prodotto scalare ponendo, per $A, B \in M(2, \mathbb{R})$,

$$A \cdot B = \mathrm{Tr}(AB^T)$$

(Tr indica la *traccia* di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale).

(a) Calcolare esplicitamente il prodotto scalare delle matrici $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ e verificare che la formula ottenuta è analoga a quella del prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$.

(b) Sia U il sottospazio generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $W = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid AB = BA\}$, ove $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di W.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $A = (4, 3, -3)$ e il piano $\pi : x + 2y - z = 1$.

(a) Determinare la distanza $\mathrm{dist}(A, \pi)$ di A dal piano π e il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano π' parallelo al piano π e tale che $\mathrm{dist}(A, \pi') = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(A, \pi)$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, parallela al piano π e ortogonale al vettore $v = (1, 1, 1)$.

(d) Dato il punto $B = (-2, 1, -3)$ trovare il punto $B' \in r$ di minima distanza da B.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3^o^ appello — 2 settembre 2021

Esercizio 1. Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $v_1 = (2,1,0,-2)$, $v_2 = (1,0,-2,-1)$, $v_3 = (3,2,2,-3)$, $v_4 = (0,1,4,0)$.

(a) Ridurre in forma a scala la matrice le cui **righe** sono i vettori v_1, v_2, v_3, v_4, usando **solo** operazioni elementari sulle righe. Dedurre da ciò la dimensione e una base di V.

(b) Sia $U = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0\}$. Determinare la dimensione e una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Trovare una base di W e una base di $V \cap W$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(b) Scrivere la matrice della funzione composta $f \circ f$ (rispetto alle basi canoniche). Trovare una base del nucleo di $f \circ f$ e una base dell'immagine di $f \circ f$.

(c) Trovare gli autovalori di A e una base degli autospazi. Dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $V = M(2,\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali definiamo un prodotto scalare ponendo, per $A, B \in M(2,\mathbb{R})$,

$$A \cdot B = \mathrm{Tr}(AB^T)$$

(Tr indica la *traccia* di una matrice, cioè la somma degli elementi sulla diagonale principale).

(a) Calcolare esplicitamente il prodotto scalare delle matrici $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ e verificare che la formula ottenuta è analoga a quella del prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^4$.

(b) Sia U il sottospazio generato dalle matrici $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $W = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$, ove $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trovare una base ortogonale di W.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $A = (1,-4,-4)$ e il piano $\pi : x - 2y - z = 1$.

(a) Determinare la distanza $\mathrm{dist}(A,\pi)$ di A dal piano π e il punto $A' \in \pi$ di minima distanza da A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana di un piano π' parallelo al piano π e tale che $\mathrm{dist}(A,\pi') = \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(A,\pi)$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta r passante per A, parallela al piano π e ortogonale al vettore $v = (2,3,1)$.

(d) Dato il punto $B = (7,-3,4)$ trovare il punto $B' \in r$ di minima distanza da B.