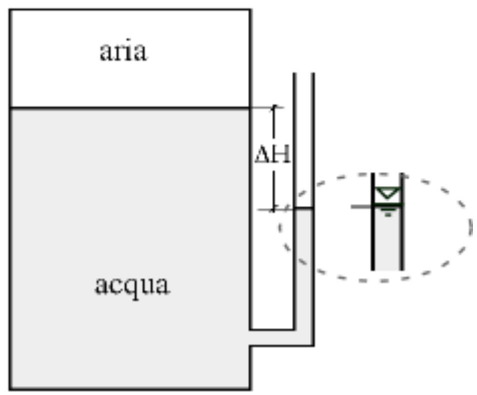
Misure piezometriche: esempi applicativi.

Esempio 1



Dati: γ =9806 N/m^3

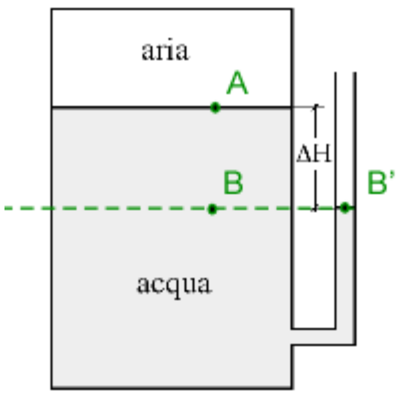
ΔH=0,12 m

Calcolare p_{aria}

Rappresentare l'andamento della pressione relativa all'interno del recipiente.

Nel volume d'aria contenuto nel recipiente la pressione si può considerare costante in ogni punto.

Infatti l'aria: può essere riguardata come un fluido in quiete, pesante e incomprimibile → eq.ne fondamentale idrostatica MA γ_{aria} (circa 10 N/m^3) è così piccolo che per avere variazioni sensibili di pressione si devono avere variazioni significative di quota (non realistiche per i nostri problemi).



In particolare, allora, nel punto A di figura vale

$$p_A = p_{aria}$$

Applico eq.ne fondamentale idrostatica tra i punti A e B

$$p_B = p_A + \gamma \Delta H = p_{aria} + \gamma \Delta H$$

Osservo che superficie orizzontale B-B' è isobara

$$p_B = p_{B'}$$

e che B' è a contatto dell'atmosfera

$$p_{B'} = 0$$

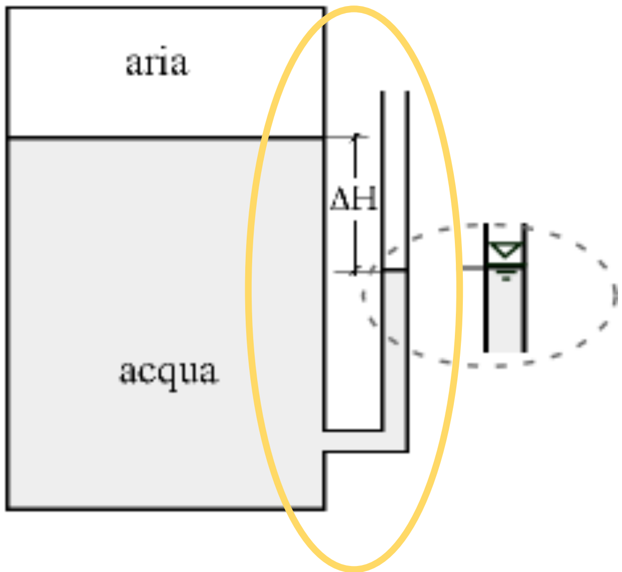
Vale perciò

$$p_B = p_{aria} + \gamma \Delta H = p_{B'} = 0 \quad \rightarrow \quad p_{aria} = -\gamma \Delta H = -9806 \cdot 0{,}12 = -1176{,}72 \ \text{Pa}$$

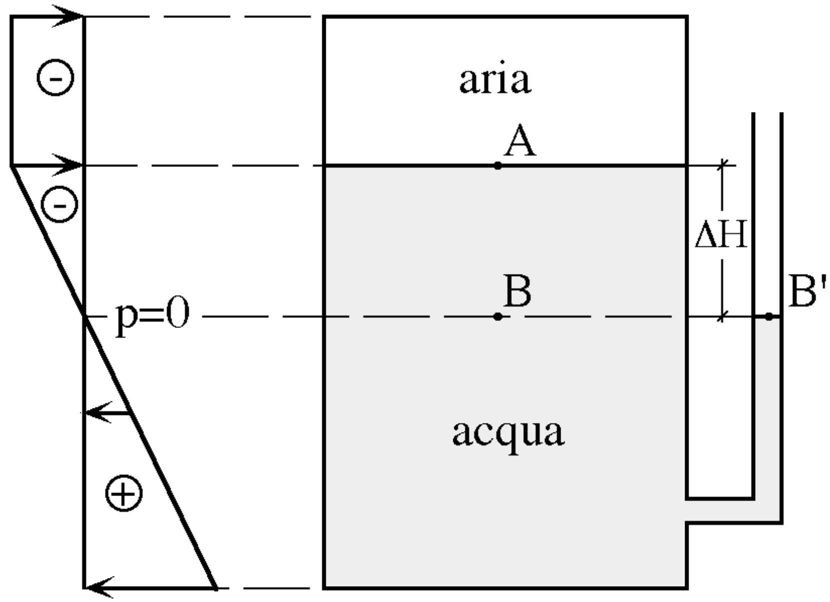
i.e. pressione relativa negativa - *depressione* - pressione assoluta minore della pressione atmosferica

↳ aria è a una pressione < pressione atmosferica

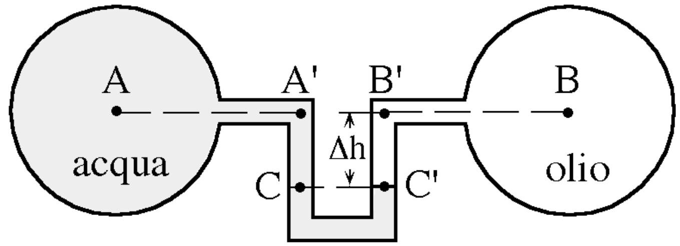
Prima di passare alla parte grafica, osserviamo che l'esercizio illustra l'uso di un piezometro semplice.



Andamento della pressione nel recipiente



Esempio 2



Dati:

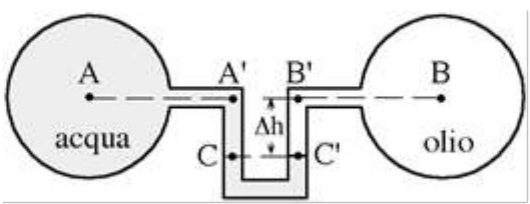
acqua (γ=9806 N/m^3) e olio ($\gamma_o = 0{,}6\gamma$)

$\Delta h = 0{,}2\ m$

Determinare:

$\Delta p = (p_B - p_A)$ tra i centri dei due recipienti

L'esercizio illustra il funzionamento di un piezometro differenziale



Le superfici A-A', B-B' e C-C' sono superfici isobare

$$p_A = p_{A'}$$

$$p_B = p_{B'}$$

$$p_C = p_{C'}$$

Eq.ne fond. idrostatica tra A’ e C e tra B’ e C’:

$$p_C = p_A + \gamma \Delta h$$
$$p_{C'} = p_B + \gamma_o \Delta h$$

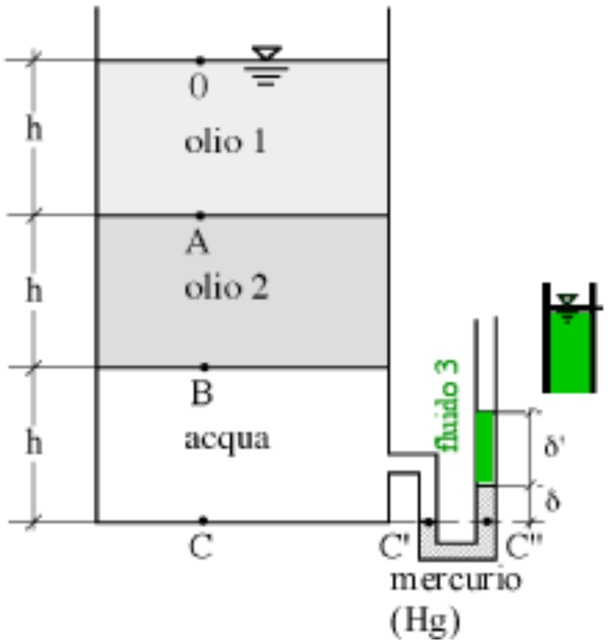
da cui subito

$$\Delta p = p_B - p_A = (\gamma - \gamma_o)\Delta h = 0,4\gamma\Delta h$$
$$= 0,4 \cdot 9806 \cdot 0,2 = 784,48 \ \text{Pa}$$

Osservazione: la disposizione del manometro differenziale rappresentata in figura consente di misurare differenze di pressione olio-acqua positive (pressione nell’olio maggiore della pressione nell’acqua).

Per misurare differenze di pressione olio-acqua negative, il piezometro deve essere ‘capovolto’ (configurazione ad U rovescia). PROVARE!!!

Esempio 3



Dati:
h=30 cm
$\gamma_1 = 0.6\gamma \quad \gamma_2 = 0.8\gamma$ (γ = peso specifico dell'acqua)
$\gamma_{Hg} = 13.56\gamma$
$\delta = 3$ cm e $\delta' = 6$ cm

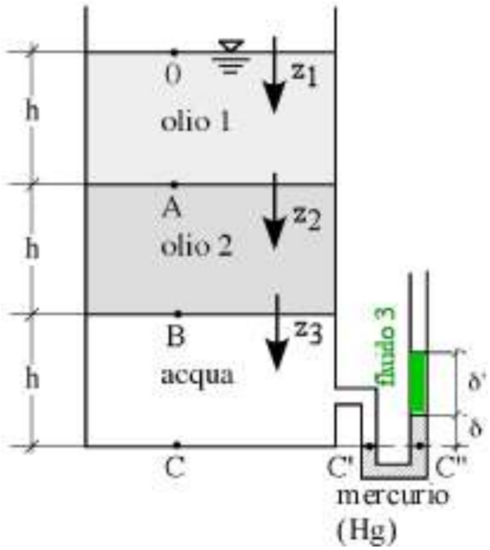
Determinare:
- La pressione nei punti A, B e C di figura
- tracciare l'andamento della pressione nel recipiente.
- γ_3

L'esercizio propone il caso di un sistema di fluidi stratificati.

Si applica 'in cascata' l'equazione fondamentale dell'idrostatica a partire da un punto O sulla superficie libera, i.e. a pressione nota

$$p_A = p_0 + \gamma_1 h = 0 + 0.6 \cdot 9806 \cdot 0,3 = 1765,08 \text{ Pa}$$
$$p_B = p_A + \gamma_2 h = 1765,08 + 0,8 \cdot 9806 \cdot 0,3 = 4118,52 \text{ Pa}$$
$$p_C = p_B + \gamma h = 4118,52 + 9806 \cdot 0,3 = 7060,32 \text{ Pa}$$

Andamento della pressione: immediato vedere che nel generico punto di ciascuno dei tre strati

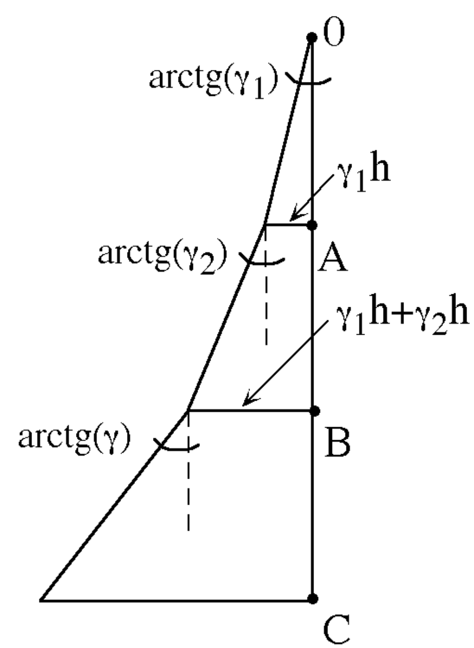


strato superiore $p = \gamma_1 z_1$

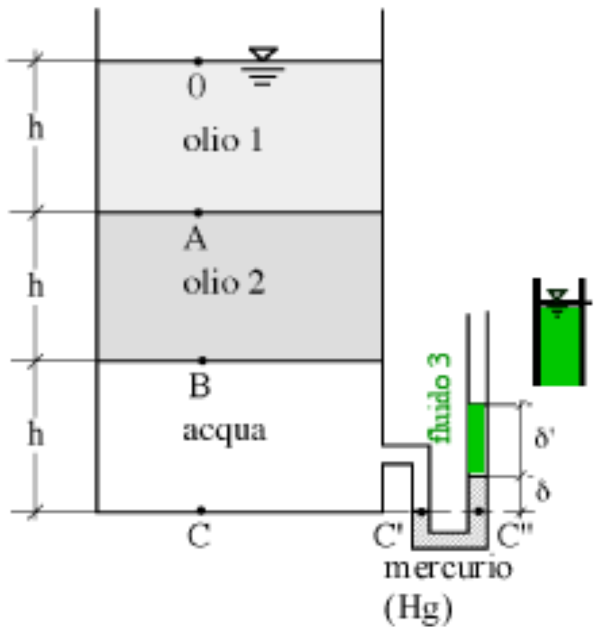
strato intermedio $p = \gamma_1 h + \gamma_2 z_2$

strato inferiore $p = \gamma_1 h + \gamma_2 h + \gamma z_3$

Graficamente



CALCOLO di γ_3



C, C’ e C’’ appartengono alla medesima superficie orizzontale e, a due a due, al medesimo fluido (C e C’ all’acqua, C’ e C’’ al mercurio), quindi

$$p_C = p_{C'} = p_{C''}$$

Dal piezometro si ha

$$p_{C''} = \gamma_3 \delta' + \gamma_{Hg} \delta$$

e dunque

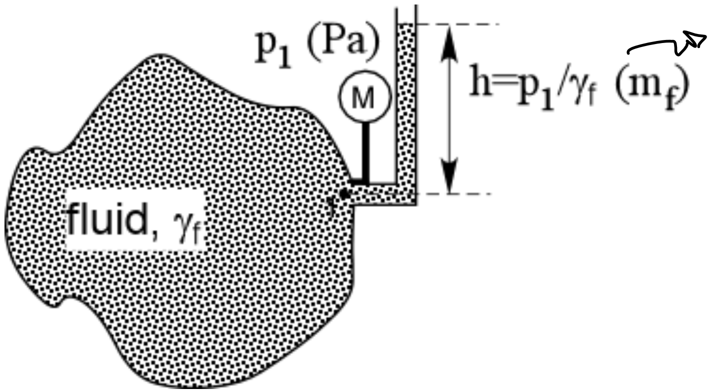
$$\gamma_3 = \frac{p_{C''} - \gamma_{Hg}\delta}{\delta'} = \frac{p_C - \gamma_{Hg}\delta}{\delta'}$$

$$= \frac{7060,32 - 13,56 \cdot 9806 \cdot 0,03}{0,06} = 51187,32 \ \frac{N}{m^3}$$

Pressione come altezza di colonna fluida

Simbolo: p/γ_f dove γ_f è il peso specifico del fluido

Unità di misura: m_{fluido} metri (di fluido con cui si sta lavorando)



metri di fluido f

Il manometro M fornisce la pressione in Pa

Il piezometro in metri di colonna fluida

Esempio:

fluido: sangue $\gamma_f = 1.04*9806$ N/m^3

p_1=13000 Pa

Calcolare l'altezza h, in metri di sangue, letta al manometro e poi trasformarla in altezza di mercurio

$$\rightarrow h = \frac{p_1}{\gamma_f} = \frac{13000}{1.04x9806} = 1.303\, m_f\,;\quad h_{Hg} = \frac{1.303x1.04x9806}{13.56x9806} x1000 = 100\, mm_{Hg}$$

altezza nella colonna di sangue

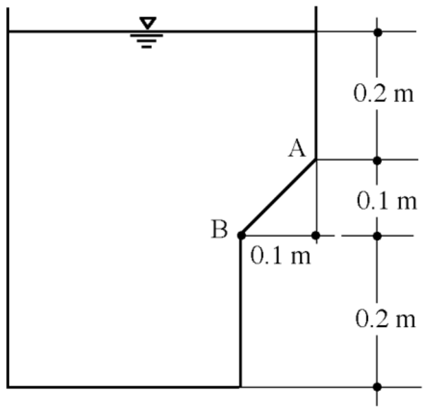
p_1 — lo ritrasformo in Pascal

per trasformare in mm

γ_{Hg} (il nuovo fluido che mi interessa)

Spinte idrostatiche su superfici piane: esempi applicativi.

Esempio 1



Dati:

- γ=10,5 kN/m^3
- larghezza recipiente B=0,25 m

Determinare la spinta (modulo, direzione, verso e posizione) che il fluido esercita sulla superficie rettangolare di traccia AB.

Pressione nel baricentro di AB

$$p_G = \gamma z_G = 10{,}5 \cdot (0{,}2 + 0{,}05) = 2{,}625 \ \text{kPa}$$

(p_0.= 0 !!!)

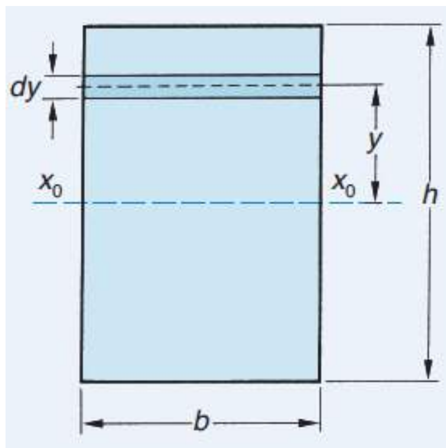
Modulo della spinta

$$S = p_G (L_{AB} \cdot B) = 2{,}625 \cdot 0{,}1\sqrt{2} \cdot 0{,}25 = 0{,}0928\,\text{kN} = 92{,}8\,\text{N}$$

<u>Posizione del centro di spinta</u> rispetto al baricentro, lungo la traccia AB

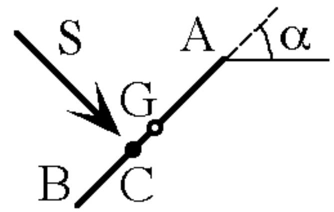
$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_X \operatorname{sen}\alpha}{S} = \frac{10{,}5 \cdot 5{,}892 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}707}{0{,}0928} = 4{,}713 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = 4{,}713\ \mathrm{mm}$$

$I_X = \frac{1}{12}\left(0{,}1\sqrt{2}\right)^3 \cdot 0{,}25 = 5{,}892 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^4$ il momento di inerzia della superficie

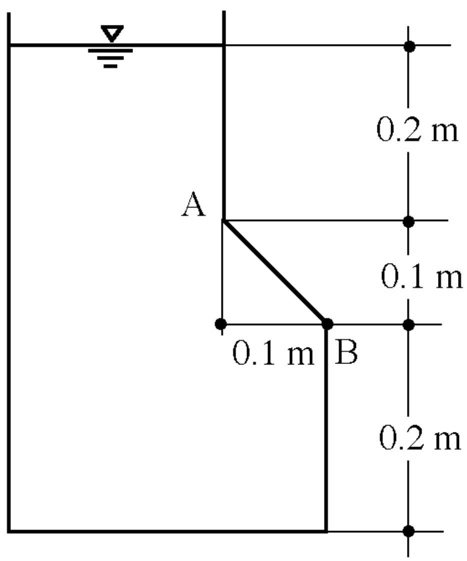


$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Direzione e verso:



Esempio 2

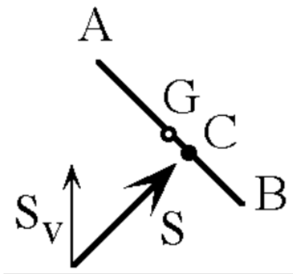


Dati:

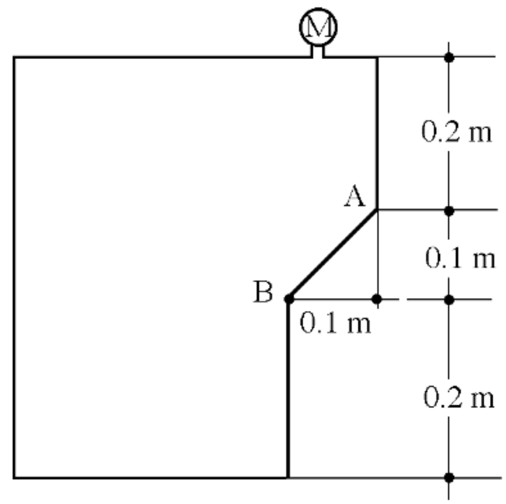
- γ=10.5 kN/m^3
- larghezza recipiente B=0.25 m

determinare la spinta [redacted] (modulo, direzione, verso e posizione)

Nulla cambia rispetto al caso precedente, se non la direzione della spinta (che è normale alla superficie) e dunque il verso della sua componente verticale.



Esempio 3



Dati:

- larghezza B=0,3 m
- acqua
- p_M= - 4 kPa

<u>Determinare</u> la spinta [redacted]

<u>Pressione</u> nel baricentro

$$p_G = p_M + \gamma z_G = -4 + 9{,}81 \cdot (0{,}2 + 0{,}05) = -1{,}547\,\text{kPa}$$

risulta negativa!

<u>Modulo</u> della spinta

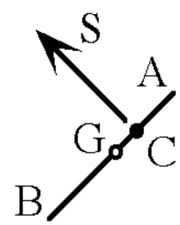
$$S = -1{,}547 \cdot 0{,}1\sqrt{2} \cdot 0{,}3 = -0{,}0656\,\mathrm{kN} = -65{,}6\,\mathrm{N}$$

dove il segno negativo indica che la spinta è 'di trazione' per la superficie AB.

Posizione del centro di spinta

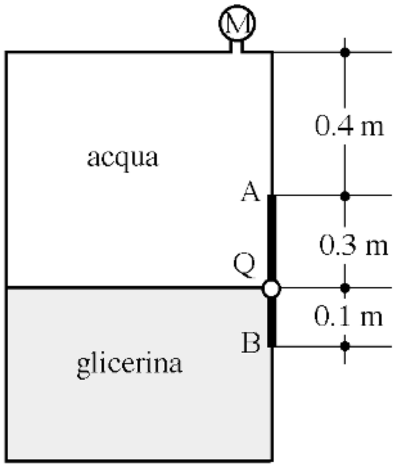
$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_X \mathrm{sen}\alpha}{S} = \frac{9{,}81 \cdot 5{,}892 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}707}{-0{,}0656} = -6{,}23 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} = -6{,}23\,\mathrm{mm}$$

cioè superiore al baricentro (si veda la figura seguente).



Infine, S è diretta lungo la normale alla direzione della traccia AB e, essendo negativa la pressione baricentrica, va dalla superficie verso il fluido.

Esempio 4



Dati:

- larghezza B=0,3 m
- γ_g=1,27γ
- p_M = 10 kPa.
- apertura rettangolare, chiusa da superficie piana AB incernierata in Q

Determinare:

la spinta $\vec{S}$ (modulo, direzione, verso)

$\vec{M}_{ext}$ affinché AB non si apra

Superficie bagnata da fluidi diversi → valutare separatamente la spinta idrostatica di ciascun fluido!

<u>Spinta dell'acqua:</u>

<u>pressione</u> nel baricentro G_1

$$p_{G_1} = p_M + \gamma z_{G_1} = 10 + 9{,}81 \cdot (0{,}4 + 0{,}15) = 15{,}395\ \text{kPa}$$

<u>modulo</u> della spinta dell'acqua

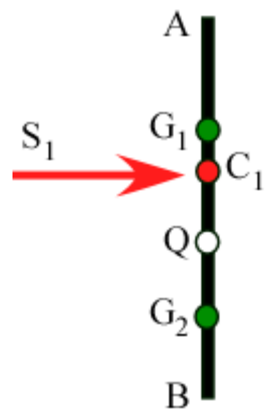
$$S_1 = 15{,}395 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 1{,}386\ \text{kN}$$

<u>centro di spinta</u> di S_1

$$y_{C_1} - y_{G_1} = \frac{\gamma I_X \operatorname{sen}\alpha}{S_1} = \frac{9{,}81 \cdot 6{,}75 \cdot 10^{-4} \cdot 1}{1{,}386} = 4{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 4{,}78\ \text{mm}$$

($I_X = \frac{1}{12} 0{,}3^4 = 6{,}75 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^4$ e sen α =1).

Soluzione grafica per la spinta dell'acqua:



Spinta della glicerina:

pressione nel baricentro G_2

$$p_{G_2} = p_Q + \gamma_g z_{G_2} = (10 + 9{,}81 \cdot 0{,}7) + 1{,}27 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 = 17{,}490\,\mathrm{kPa}$$

essendo:

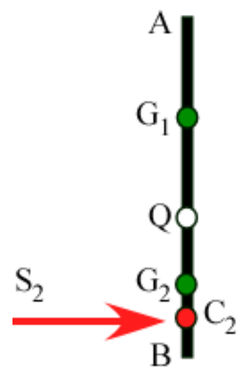
- $p_Q = (p_M + \gamma(0{,}4+0{,}3))$

- profondità z_{G2} valutata dalla superficie di separazione acqua - glicerina modulo della spinta dovuta alla glicerina

$$S_2 = 17,490 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,525 \text{ kN}$$

centro di spinta di S_2

$$y_{C_2} - y_{G_2} = \frac{\gamma_g I_X \text{sen}\alpha}{S_2} = \frac{1,27 \cdot 9,81 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 1}{0,525} = 5,933 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,593 \text{ mm}$$



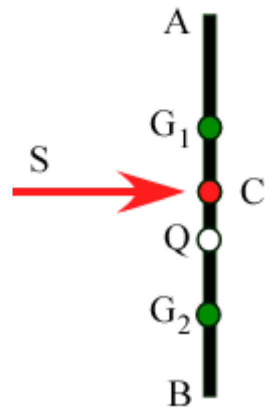
Spinta risultante:

$\vec{S}$: somma vettoriale delle due spinte $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$

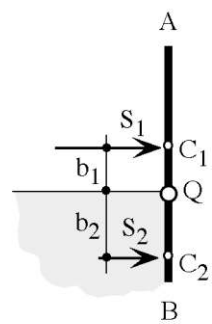
- $\vec{S}_1$ e $\vec{S}_2$ dirette lungo la stessa direzione → modulo risultante S pari a somma algebrica dei moduli componenti S_1 e S_2

$$S = 1,386 + 0,525 = 1,911 \text{ kN}$$

Il valore risulta, ovviamente, positivo, ad indicare che anche S è diretta dal campo fluido verso la superficie.



Momento esterno per equilibrio di AB

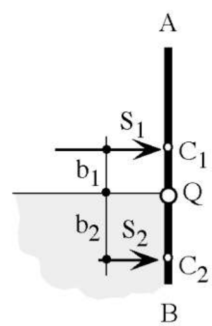


S_1 ed S_2 producono momento rispetto a Q → per equilibrio AB necessario momento esterno con modulo pari a somma algebrica dei momenti M_1 ed M_2, con verso di rotazione opposto al verso del momento risultante

Si assume positivo il verso di rotazione orario → momento risultante esercitato dalle spinte idrostatiche

$$M = S_1 \cdot b_1 - S_2 \cdot b_2$$

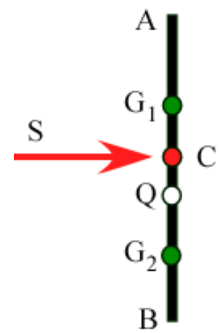
b_1 e b_2 sono i bracci di S_1 ed S_2 rispetto alla cerniera Q



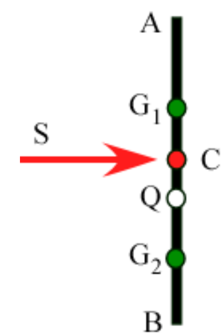
$$\rightarrow M = 1{,}386 \cdot \left(0{,}15 - 4{,}78 \cdot 10^{-3}\right) - 0{,}525 \cdot \left(0{,}05 + 5{,}933 \cdot 10^{-4}\right) = 0{,}174 \text{ kNm}$$

<u>positivo, dunque orario.</u>

Il momento esterno da applicare alla superficie AB affinché la stessa sia in equilibrio ha pertanto modulo pari a 0,174 kNm e verso di rotazione antiorario.



Posizione di C



Può essere determinata ricorrendo di nuovo ai momenti, Infatti, notiamo che il modulo del momento interno M può essere calcolato come

i) $M = S_1 \cdot b_1 - S_2 \cdot b_2$ cioè come la risultante dei momenti componenti

MA ANCHE COME)

ii) $M = S \cdot b$ cioè come il il momento della risultante delle forze, assumendo che la distanza b di C da Q sia assunta (per ipotesi) come in figura (cioè con C superiore a Q), dunque con momento M orario.

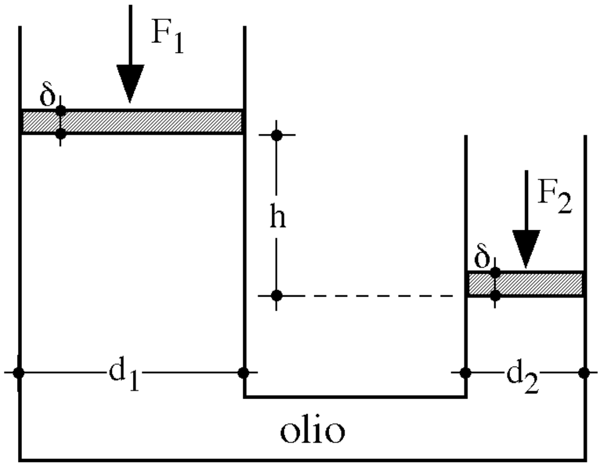
Si ha dunque che

$$b = \frac{S_1 \cdot b_1 - S_2 \cdot b_2}{S}$$

$$b = \frac{1{,}386 \cdot \left(0{,}15 - 4{,}78 \cdot 10^{-3}\right) - 0{,}525 \cdot \left(0{,}05 + 5{,}933 \cdot 10^{-4}\right)}{1{,}911} = 0{,}0898 \ \ \mathrm{m}$$

Notiamo che b risulta positivo. Tale segno del risultato mostra che l'assunzione che *C* sia superiore a Q corrisponde all'effettiva condizione del problema proposto.

Esempio 5



Dati:

- γ_o=0,8γ
- pistoni a tenuta distanti h=0,15 m
- spessore δ= 0,01 m
- diametri d_1=0,1 m e d_2=0,05 m
- materiale γ_m=2,5γ
- F_1=10N

<u>determinare</u> F_2 per l'equilibrio del sistema

Il problema descrive la cosiddetta pressa idraulica, cioè una macchina composta di sue cilindri "tappati" da due piastre mobili e collegati al fondo da un "condotto". I due cilindri hanno diverso diametro, con ciò assicurando che applicando una forza al pistone più piccolo il pistone più grande è in grado di sostenere in equilibrio una forza maggiore (si veda la soluzione).

- Pistone di sinistra: sollecitato da F_1 (↓), da peso proprio G_1 (↓) e da spinta S_1 dell'olio (↕) (come faccio a essere sicura che S_1 sia verticale???)
- Pistone in equilibrio se la somma vettoriale di tutte le forze è nulla → i) S_1 non può che essere ↑

ii) assumendo come verso positivo per la verticale quello verso il basso la condizione di equilibrio si scrive

$$F_1 + G_1 - S_1 = 0$$

peso proprio pistone

$$G_1 = \gamma_m \delta \frac{\pi {d_1}^2}{4} = 2{,}5 \cdot 9806 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{\pi 0{,}1^2}{4} = 1{,}925\ \mathrm{N}$$

spinta dell'olio

$$S_1 = p_1 \frac{\pi {d_1}^2}{4}$$

con p_1 = pressione nel baricentro della superficie di base

Dalla relazione di equilibrio quindi

$$p_1 = \frac{F_1 + G_1}{\pi {d_1}^2 / 4} = \frac{10 + 1{,}925}{0{,}00785} = 1518{,}338\ \mathrm{Pa}$$

Si può ora calcolare la p_2 alla base del pistone di destra

$$p_2 = p_1 + \gamma_o h = 1518{,}338 + 0{,}8 \cdot 9806 \cdot 0{,}15 = 2695{,}058\ \mathrm{N}$$

Quindi, spinta olio → pistone di destra

$$S_2 = p_2 \frac{\pi d_2{}^2}{4} = 2695{,}058 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 5{,}292 \text{ N}$$

peso proprio del pistone

$$G_2 = \gamma_m \delta \frac{\pi d_2{}^2}{4} = 2{,}5 \cdot 9806 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{\pi 0{,}05^2}{4} = 0{,}481 \text{ N}$$

Pistone di destra in equilibrio se somma vettoriale di G_2, S_2 e di F_2 è pari a zero

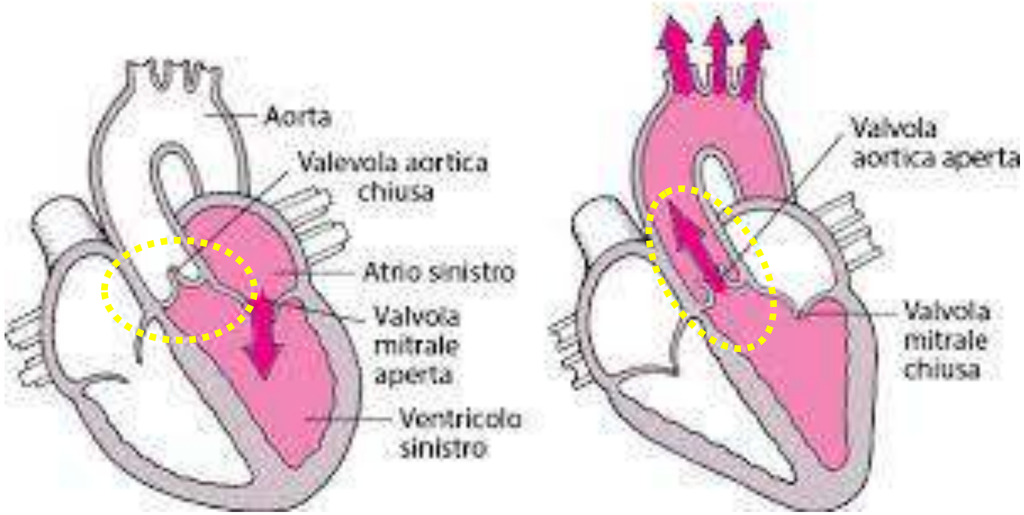
$$F_2 + G_2 - S_2 = 0 \qquad (\downarrow +)$$

da cui

$$F_2 = S_2 - G_2 = 5{,}292 - 0{,}481 = 4{,}811 \text{ N}$$

Segno positivo dal calcolo di F_2 → F_2 effettivamente diretta verso il basso, come hp.

Applicazione: spinta su lembo di protesi bileaflet in posizione aortica



Valvola aortica:

- Separa ventricolo sx e aorta
- Aperta in sistole
- **Chiusa in diastole**

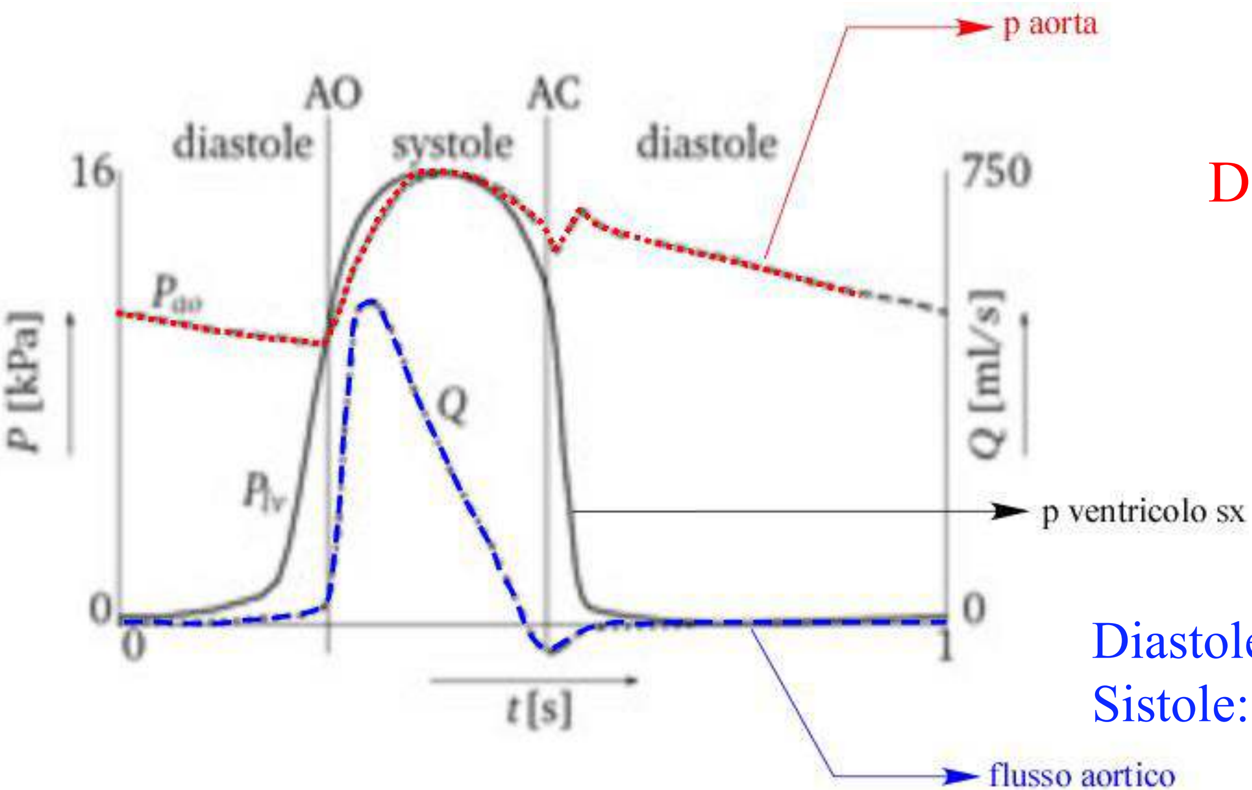
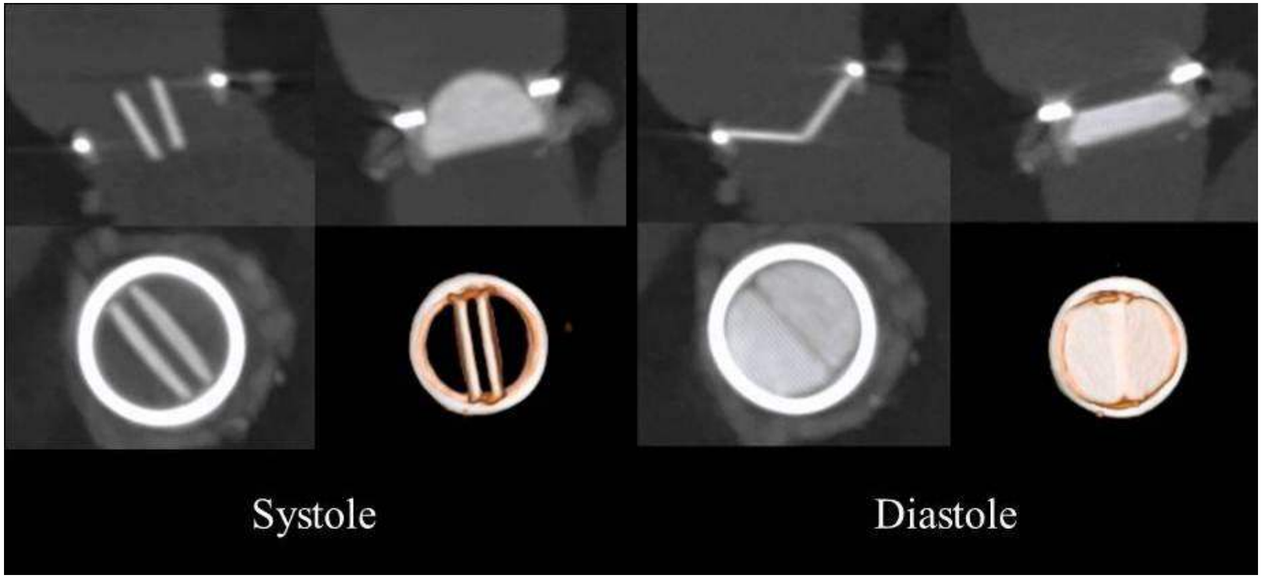


Diagramma di Wiggert

Diastole: flusso aortico nullo
Sistole: flusso aortico (quasi sempre) positivo

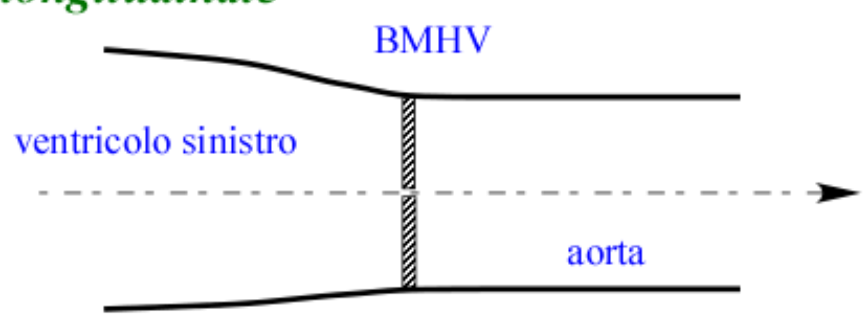
Protesi bileaflet in posizione aortica



a valvola chiusa sono inclinati rispetto al piano

Come schematizzare il caso reale per il calcolo della spinta su di un leaflet?

Vista longitudinale

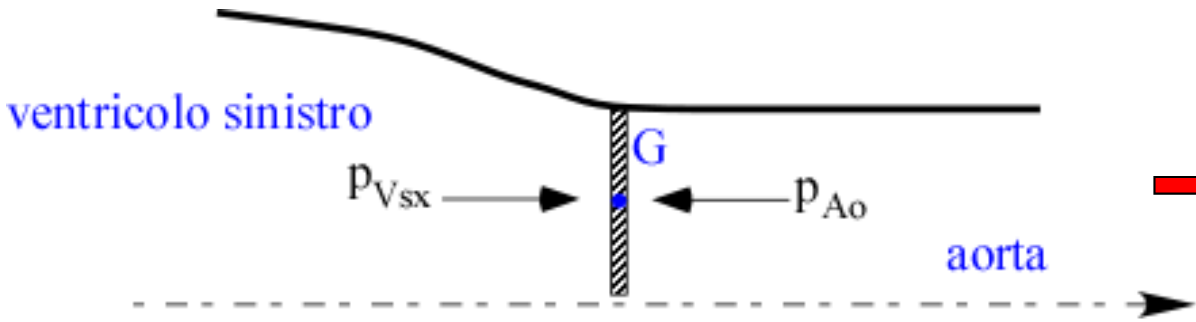


Vista trasversale

inclinazione dei leaflet: <u>trascurata</u>

Il sangue può essere considerato in quiete sia in ventricolo che in aorta
↓
Condizioni idrostatiche!

Il problema è simmetrico: consideriamo un solo leaflet



Spinta idrostatica dal ventricolo sx

$\overrightarrow{S_{Vsx}}$

Spinta idrostatica dall'aorta

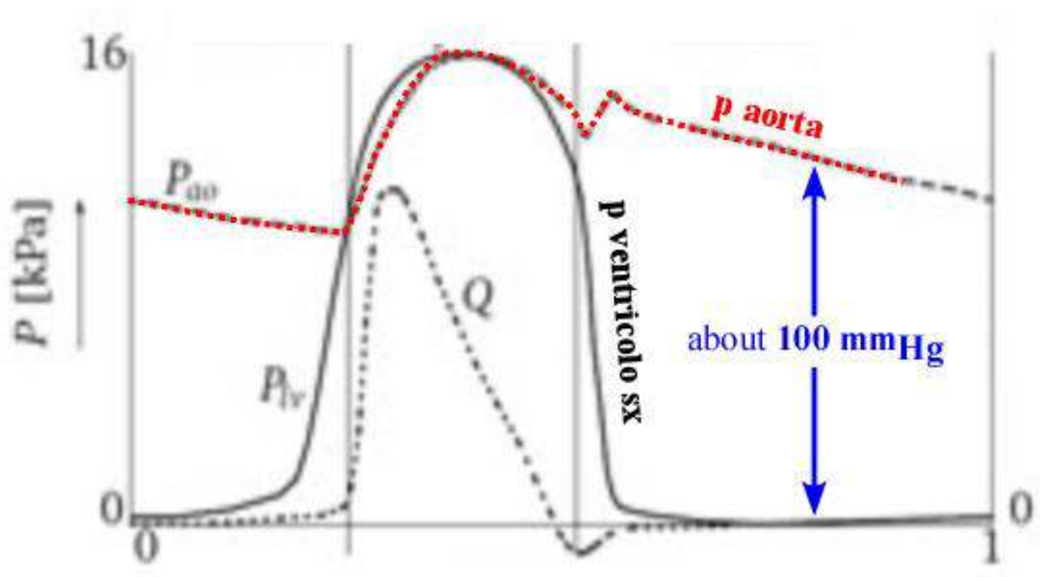
$\overrightarrow{S_{Ao}}$

In diastole (valvola chiusa!):

$$p_{Ao} > p_{Vsx} \quad \Rightarrow \quad \left|\overrightarrow{S_{Ao}}\right| > \left|\overrightarrow{S_{Vsx}}\right|$$

La spinta complessiva $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S_{Ao}} + \overrightarrow{S_{Vsx}}$ è una forza:

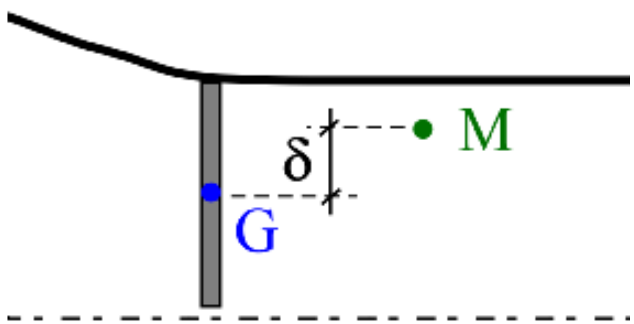
- orizzontale
- diretta dall'aorta verso il leaflet
- con modulo pari a $\boxed{S = (p_{Ao} - p_{Vsx}) \cdot A_{leaflet}}$



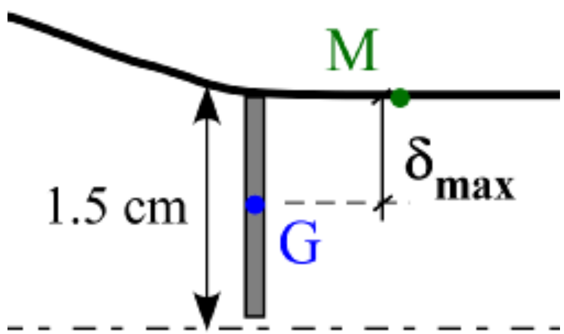
In diastole: la differenza tra pressione aortica e pressione ventricolare è pari a circa 100 mm_{Hg}

MA

«dove» sono misurate p_{Ao} e p_{Vsx}?
Cioè: a quale altezza rispetto a G?



Cioè: quanto conta nella misura di p la distanza δ lungo la verticale tra G e il punto M di misura?

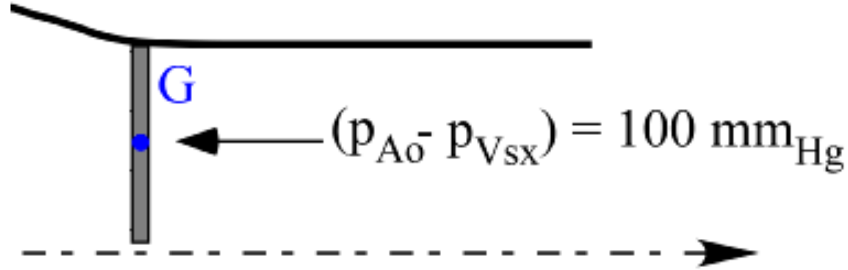


δ_{max} può essere stimato pari a 0.75 cm
il che corrisponde a una variazione di pressione:
($\delta p/\gamma$) = 0.75 cm_{sague}

= 0.75*10*1.04/13.56 = **0.6 mm_{Hg}**

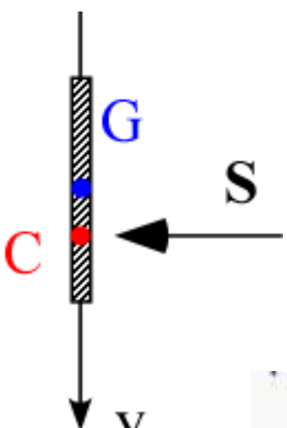
<u>del tutto trascurabile rispetto ai 100 mm_{Hg}!!!</u>

Risolviamo dunque il problema:



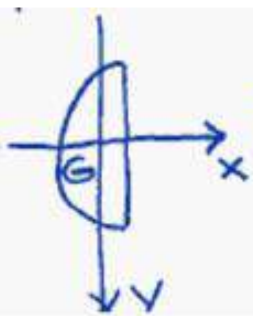
$$S = (p_{Ao} - p_{Vsx}) \cdot A_{leaflet} = \frac{100 \cdot 13.56 \cdot 9806}{1000} \cdot \frac{\pi(1.5 \cdot 10^{-2})^2}{2}$$

$= 4.7$ N (← orizzontale verso sx)



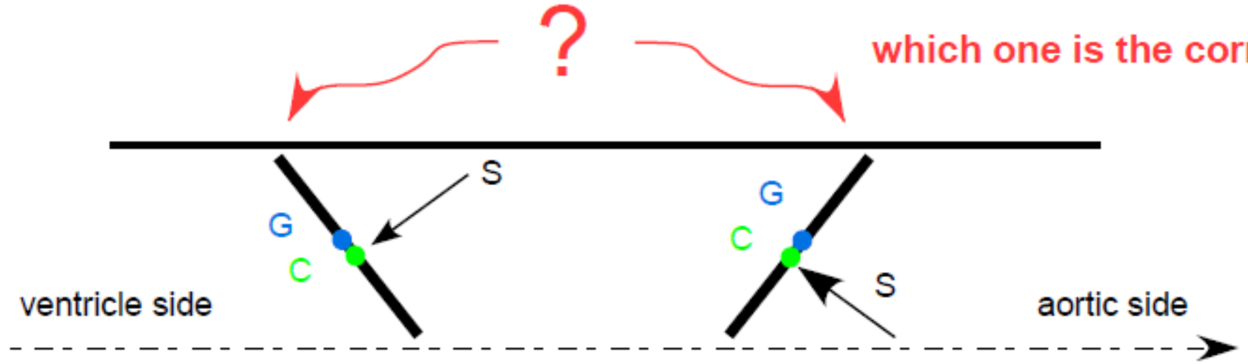
$$y_C - y_G = \frac{\gamma I_X sen\alpha}{S} = \frac{1.04 \cdot 9806 \cdot 5.56 \cdot 10^{-9} \cdot 1}{4.7} =$$

$= 1.2 \cdot 10^{-2}$ mm

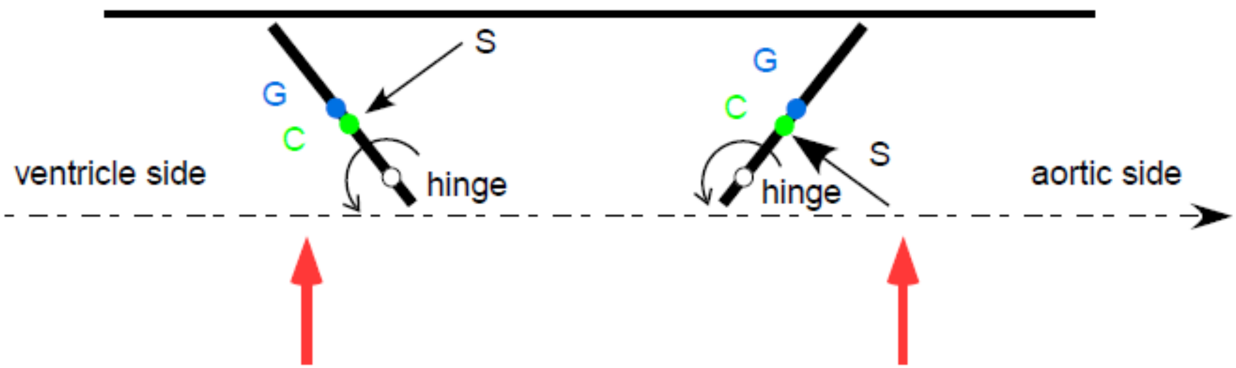


$I_x = 0.10976\, R^4 = 5.56 \cdot 10^{-9}\, m^4$

which one is the correct placement?

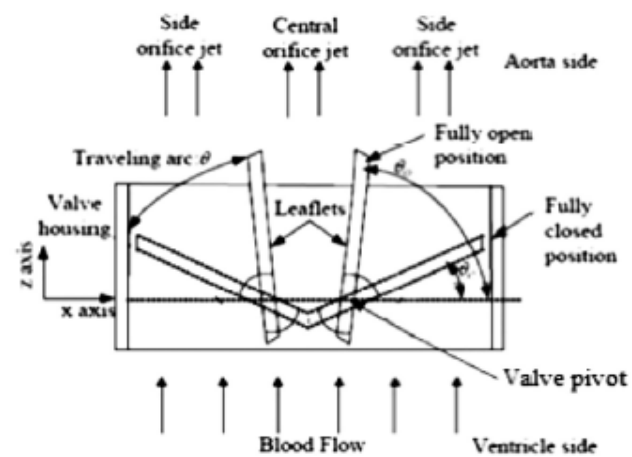


hinge position is much lower than C
hence M is (or would be) like depicted

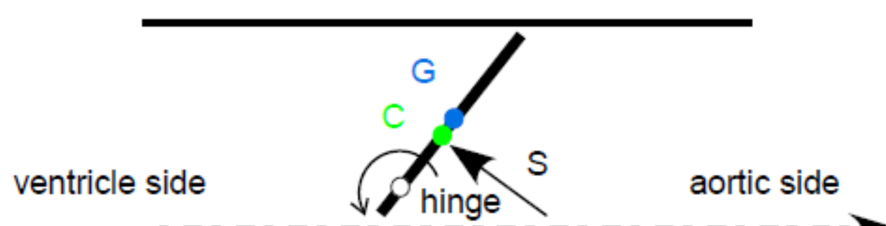


walls are NOT able to react with an opposed moment: the leaflet OPENS!

walls ARE able to react with an opposed moment: the leaflet DO NOT open!

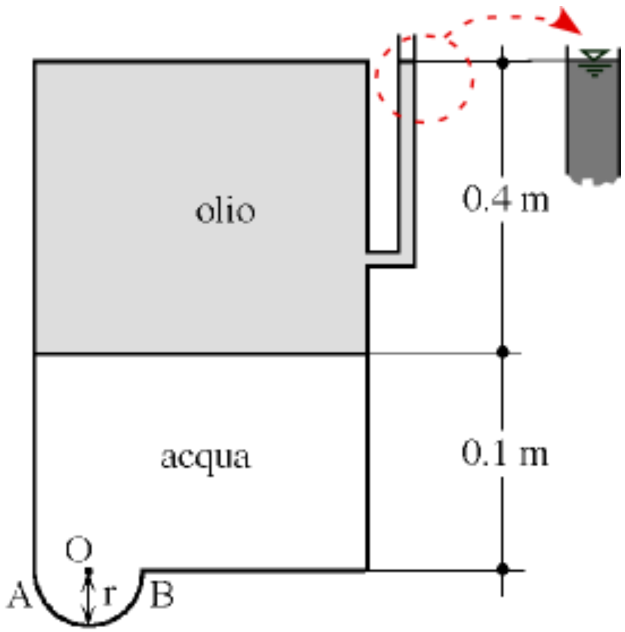


This is the correct placement



SPINTE IDROSTATICHE SU SUPERFICI CURVE

Esempio 1



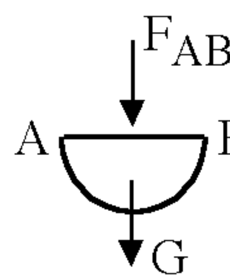
Dati:

- γ_0=0,8γ
- raggio superficie semisferica AB r=0.04 m

<u>Determinare</u>

spinta $\vec{S}$ (modulo, direzione, verso, centro di applicazione) acqua → AB

Volume isolato: volume d'acqua contenuto nella semisfera:



Forze agenti sul volume d'acqua

peso $\vec{G}$

forza $\vec{F}_{AB}$ trasmessa dalla superficie piana (ideale) di traccia AB

forza $\vec{F}_{semisfera}$ trasmessa dalla superficie semisferica.

Relazione di equilibrio:

$$\vec{G} + \vec{F}_{semisfera} + \vec{F}_{AB} = 0$$

Vale:

$\vec{S}$ (acqua → sup. semisferica) = $-\vec{F}_{semisfera}$ (forza sup. semisferica → acqua).

Perciò

$$\vec{S} = -\vec{F}_{semisfera} = \vec{G} + \vec{F}_{AB}$$

Forze da calcolare

$$G = \gamma \frac{2}{3} \pi r^3 = 9806 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}04^3 = 1{,}314 \text{ N} \qquad (\downarrow)$$

$$F_{AB} = p_{AB} A_{AB}$$

dove

$$p_{AB} = \gamma_o \cdot 0{,}4 + \gamma \cdot 0{,}1 = 9806 \cdot (0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}1) = 4118{,}52\ \text{Pa} \qquad A_{AB} = \pi r^2$$

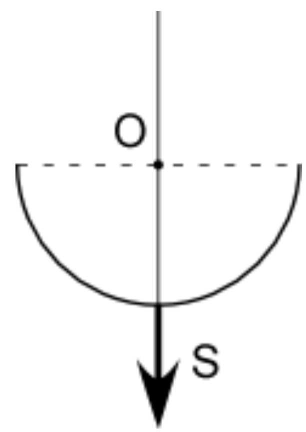
e dunque

$$F_{AB} = 4118{,}52 \cdot \pi \cdot 0{,}04^2 = 20{,}702\ \text{N} \quad (\downarrow)$$

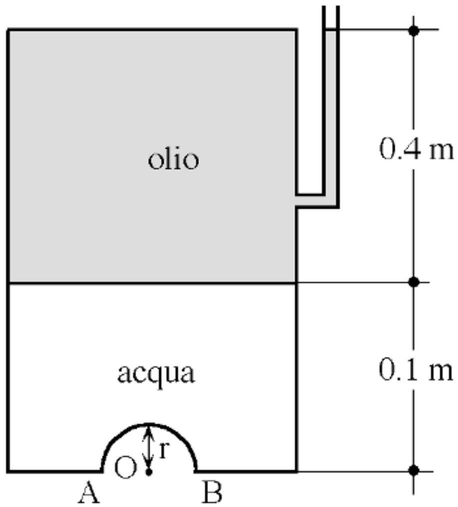
La S coincide dunque con la sua componente verticale e vale

(assunto y+↓) $$S_y = S = 1{,}314 + 20{,}702 = 22{,}016\ \text{N}$$ positiva, cioè (↓).

Punto di applicazione: la *superficie curva AB è a curvatura costante → retta d'azione passante per il centro di curvatura O*



Esempio 2



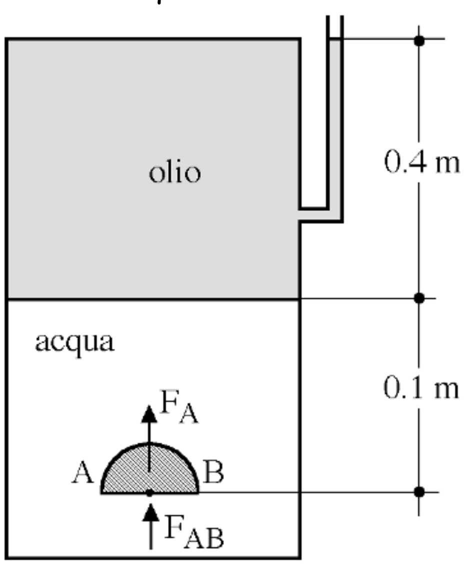
Dati:

- γ_o=0,8γ
- raggio superficie semisferica AB r=0.04 m

<u>Determinare</u>

spinta $\vec{S}$ (modulo, direzione, verso, centro di applicazione) acqua → AB

Sistema equivalente



Corpo (senza peso) semisferico delimitato dalla superficie curva $\overset{\frown}{AB}$ e dalla superficie piana $\overline{AB}$

Forza trasmessa dall'acqua alla superficie che racchiude il corpo

Spinta di Archimede $\vec{F}_A$

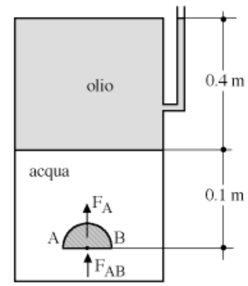
Indicata con $\vec{F}_{AB}$ la spinta trasmessa attraverso la superficie piana vale dunque

$$\vec{S} = \vec{F}_A - \vec{F}_{AB}$$

Vale

$$F_A = \gamma \frac{2}{3} \pi r^3 = 9806 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}04^3 = 1{,}314 \text{ N} \qquad (\uparrow).$$

e



$$F_{AB} = p_{AB} A_{AB}$$

dove

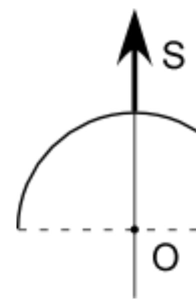
$$p_{AB} = \gamma_o \cdot 0{,}4 + \gamma \cdot 0{,}1 = 9806 \cdot (0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}1) = 4118{,}52 \text{ Pa}$$

e dunque

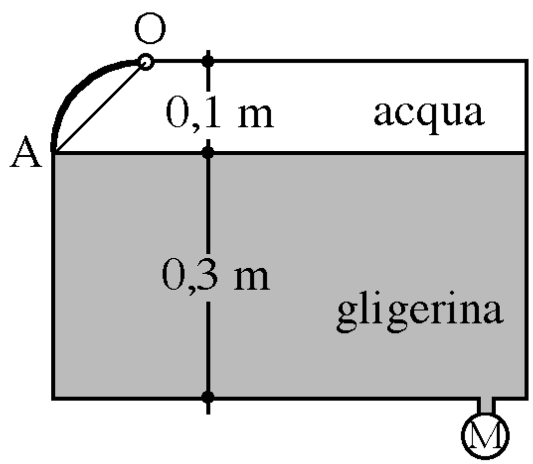
$$F_{AB} = 4118{,}52 \cdot \pi \cdot 0{,}04^2 = 20{,}702 \text{ N} \qquad (\uparrow).$$

(assunto y+ ↓) $S_y = S = 1{,}314 - 20{,}702 = -19{,}388 \text{ N}$ negativa, cioè (↑)

Punto di applicazione: $\vec{s}$ passa certamente per il centro O della sfera.



Esempio 3



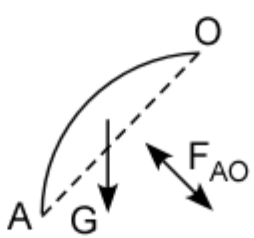
Dati:

- valvola cilindrica di traccia AO, incernierata in A e larga b=0,2 m
- p_M=1000 Pa

<u>Determinare</u>

- la spinta agente sulla valvola
- modulo e verso della forza orizzontale da applicare alla valvola in A affinché la valvola non si apra.

Volume isolato



La superficie piana è un rettangolo di lati $\overline{AO}=0{,}1\sqrt{2}=0{,}141$ m e b=0,2 m.

Equilibrio volume isolato

$$\vec{S} = \vec{G} + \vec{F}_{AO}$$

Peso del volume isolato (r=0,1 m raggio della valvola)

$$G = \gamma\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = 9806\left(\frac{\pi 0{,}1^2}{4} - \frac{0{,}1^2}{2}\right) = 27{,}947\ \text{N} \qquad (\downarrow).$$

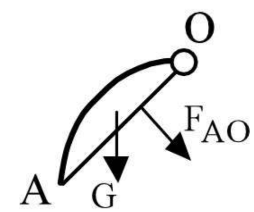
Pressione nel baricentro della superficie piana

$$p_G = p_M - \gamma_g \cdot 0{,}3 - \gamma \cdot \frac{0{,}1}{2} = 1000 - 9806 \cdot (1{,}27 \cdot 0{,}3 + 0{,}05) = -3226{,}39\ \text{Pa}$$

Spinta $\vec{F}_{AO}$

$$F_{AO} = p_G A_{AO} = -3226{,}39 \cdot 0{,}141 \cdot 0{,}2 = -90{,}984\ \text{N}$$

il segno negativo indica che la spinta è diretta dalla superficie piana verso il fluido interno al recipiente



Proiezione scalare equazione MEG $\vec{S} = \vec{G} + \vec{F}_{AO}$

$$(x+ \rightarrow\ ;\ \ y+ \downarrow)$$

$$S_x = F_{AO} \cos 45° = 90{,}984 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 64{,}335\ \mathrm{N}$$ positiva, quindi →

$$S_y = G + F_{AO}\ \mathrm{sen} 45° = 27{,}947 + 90{,}984 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 92{,}282\ \mathrm{N}$$ positiva, quindi ↓

Modulo di $\vec{s}$

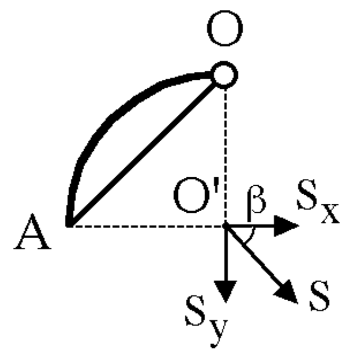
$$S = \sqrt{S_x{}^2 + S_y{}^2} = \sqrt{64{,}335^2 + 92{,}282^2} = 112{,}494\ \mathrm{N}$$

Direzione (angolo β retta d'azione --- orizzontale)

$$\beta = \arctan \frac{S_y}{Sx} = 55{,}12°$$

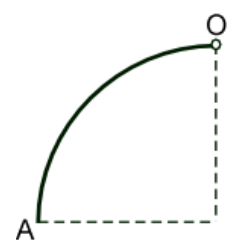
Verso: dalla composizione grafica di S_x e S_y (vedi figura sotto)

Retta d'azione: certamente per il punto O', centro di curvatura della superficie (a curvatura costante)



Homework:

Provare a calcolare la S isolando il volume fluido di figura

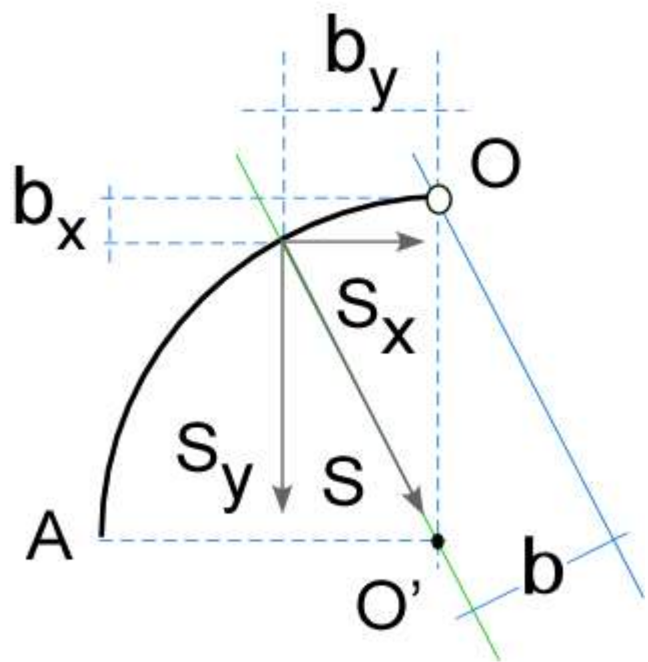


Forza orizzontale in A affinché la valvola non si apra

La S tende a far ruotare la valvola attorno alla cerniera O con un momento antiorario

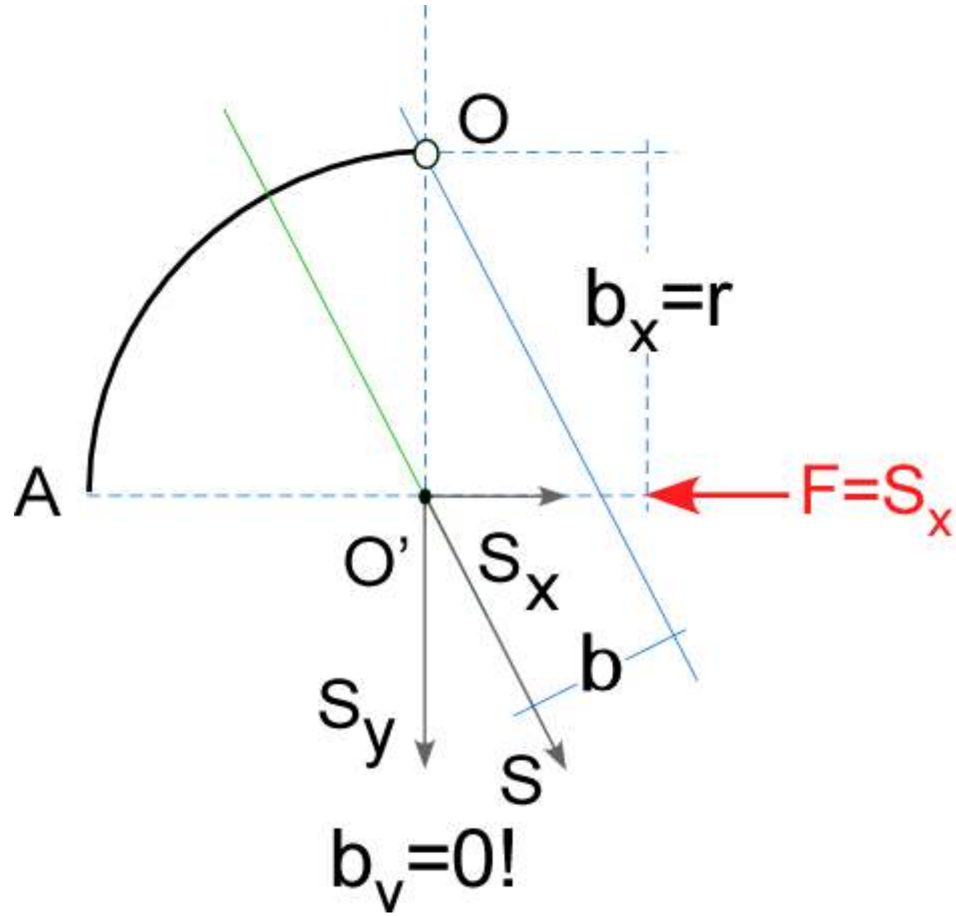
⟶ la F deve produrre momento uguale e opposto.

Come calcolare il momento e la F?



$\circlearrowright^{+} M = Sb = S_x b_x + S_y b_y$

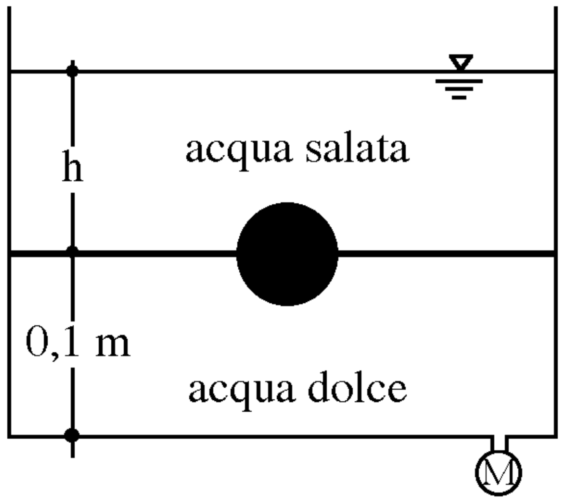
Ma anche:



La forza $\vec{F}$, quindi, deve avere modulo pari al modulo di S_x, e verso opposto

$$F=64{,}335\ N \qquad (\leftarrow)$$

Esempio 4



Info & Dati:

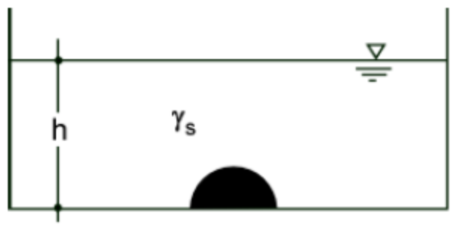
- due vani completamente separati con setto rigido orizzontale
- Foro circolare nel setto, chiuso da valvola sferica di raggio r
- $r=0{,}05$ m
- $p_M=1500$ Pa
- $\gamma_s=1{,}03\gamma$

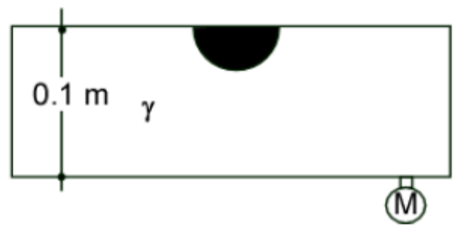
determinare

- livello h necessario per equilibrio valvola

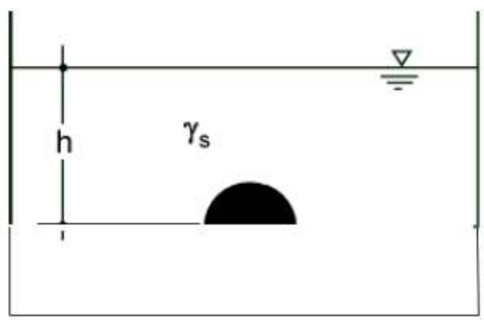
Forze che sollecitano la valvola (spinte idrostatiche): verticali, passanti per centro sfera $\rightarrow$ Valvola in posizione (equilibrio) quando spinta semisfera superiore e spinta semisfera inferiore uguali ed opposte

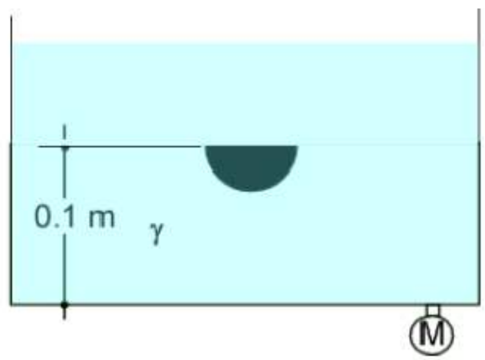
Per entrambe le porzioni della valvola: MEG per 'superficie che entra nel fluido' $\vec{S} = \vec{F}_A - \vec{F}_{piana}$ → sistemi equivalenti:

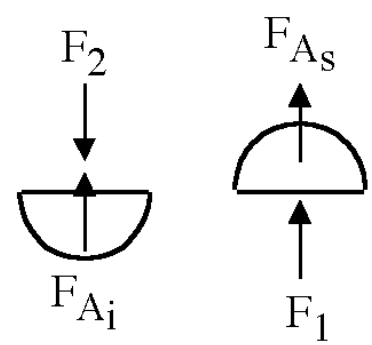




Questa rappresentazione può portare a equivoci perché non mette in evidenza la presenza di fluido anche "dalla parte" delle superfici piane. Meglio la rappresentazione seguente:







Semisfera inferiore

$$\vec{S}_i = \vec{F}_{A_i} - \vec{F}_2$$

con

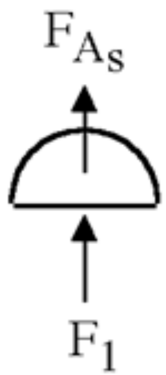
$$F_{A_i} = \gamma \frac{2}{3} \pi r^3 = 9806 \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot 0{,}05^3 = 2{,}566\,\mathrm{N}$$ (spinta archimedea, ↑)

$$F_2 = p_2 \pi r^2 = (p_M - \gamma \cdot 0{,}1) \pi r^2 = (1500 - 9806 \cdot 0{,}1) \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 = 4{,}077\ \mathrm{N}$$ (p_2>0, quindi ↓).

Vale quindi

(y+ ↑) $$S_i = S_{iy} = 2{,}566 - (-4{,}077) = 6{,}643\ \mathrm{N}$$ (positiva, quindi ↑)

Semisfera superiore



$$\vec{S}_S = \vec{F}_{A_s} - \vec{F}_1$$

essendo

$$F_{A_s} = \gamma_S \frac{2}{3}\pi r^3 = 1{,}03 \cdot 9806 \cdot \frac{2}{3}\pi \cdot 0{,}05^3 = 2{,}643\ \text{N}$$

(spinta archimedea, ↑)

$$F_1 = p_1 \pi r^2 = \gamma_S h \pi r^2 = 1{,}03 \cdot 9806 \cdot h \cdot \pi \cdot 0{,}05^2 = 79{,}286 \cdot h\ \text{N}$$

(NB $h>0 \rightarrow p_1>0 \rightarrow F_1 \uparrow$).

Vale dunque

$$(y+\uparrow) \quad S_S = S_{Sy} = 2{,}643 - 79{,}286 \cdot h\ \ \text{N}$$

Equilibrio valvola sferica

$$S_i = -S_s$$

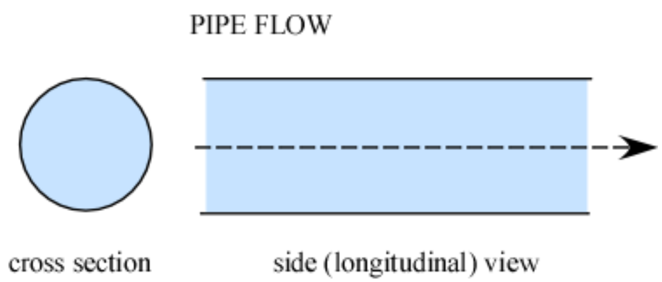
$$6{,}643 = -(2{,}643 - 79{,}286 \cdot h)$$

$$h = \frac{6.643 + 2.643}{79.286} = 0.117\text{m}$$

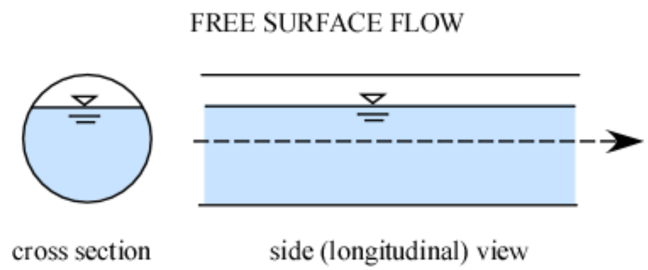
APPLICAZIONI DI CINEMATICA

Esempio 1

La portata Q=0,5 l/s fluisce in un condotto circolare di diametro d=1,5 cm, occupandone l'intera sezione. Determinare la velocità media V della corrente nel condotto.



Il moto in un condotto completamente riempito di fluido si dice **moto in pressione.**



Il moto in un condotto parzialmente riempito di fluido è un **moto a superficie libera.**

$\longrightarrow$ nei moti in pressione la sezione trasversale della corrente = sezione condotto, i.e. nel caso in esame:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0.015^2}{4} = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

⟶ velocità media

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{1{,}77 \cdot 10^{-4}} = 2{,}829\ \mathrm{m/s}$$

Avete un'idea di 'quanto sia veloce' questa corrente? Provate a cercare esempi nella quotidianità che ci circonda.

Pedone: 6 km/h=1.67 m/s

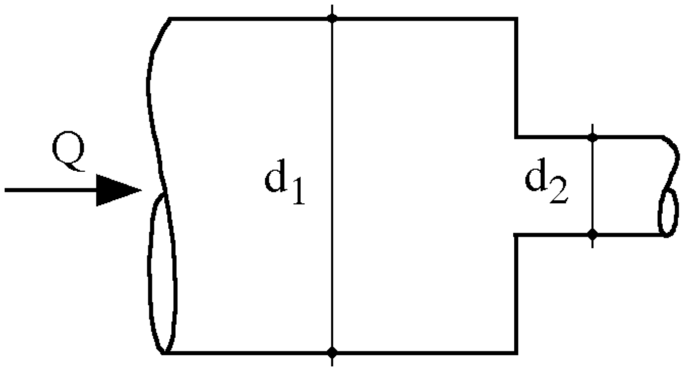
Bicicletta veloce: 18 km/h=5 m/s circa

Fiume Piovego regime ordinario: 0.2 m/s

Fiume Po in piena: 2 m/s

Rubinetto cucina: 1.7 -1.9 m/s

Esempio 2



Dati:

- condotto circolare d_1=2 cm e d_2=1 cm.
- velocità media corrente di monte V_1= 1,6 m/s
- fluido incomprimibile e moto permanente

<u>determinare</u>

- Q nel tratto di monte
- Q, V nel tratto di valle

Note V e A si ha subito, per definizione di velocità media, Q=VA $\longrightarrow$ (pedice 1 = grandezze di monte)

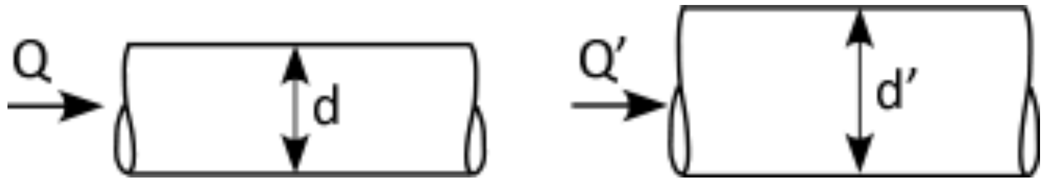
$$Q = V_1 \cdot A_1 = 1{,}6 \frac{\pi \cdot 0{,}02^2}{4} = 0{,}0005026\,\mathrm{m^3/s} = 5{,}026 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{l/s}$$

fluido incomprimibile & moto permanente $\longrightarrow$ portata Q costante lungo condotto (eq. continuità)

$\longrightarrow$ velocità media tratto di valle

$$V_2 = V_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = \text{(per sezioni circolari)} = V_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 1{,}6 \cdot \left(\frac{0{,}02}{0{,}01}\right)^2 = 6{,}4\ \mathrm{m/s}$$

Esempio 3



Dati:

- d=2 mm , Q=0,02 l/s.
- Q'=1,5·Q , V'=V

Determinare d'

Imporre la stessa velocità nei due condotti significa imporre

$$\frac{Q}{A} = V = \frac{Q'}{A'}$$

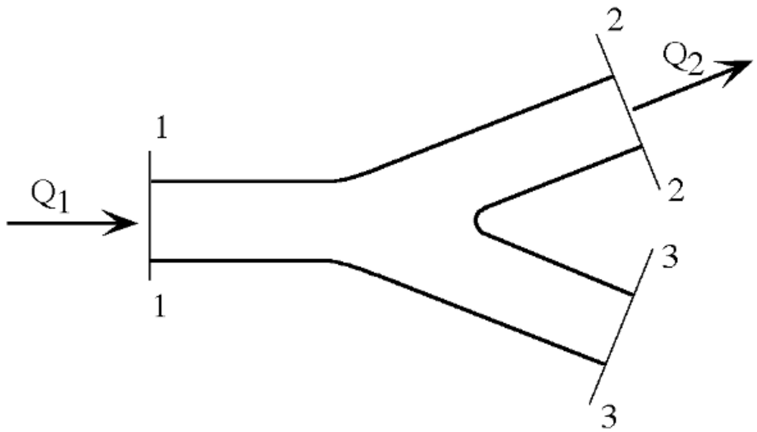
Si ha perciò, per l'area e per il diametro

$$\frac{A'}{A} = \frac{Q'}{Q}$$

$$\frac{d'}{d} = \sqrt{\frac{Q'}{Q}} = \sqrt{1,5} = 1,225$$

da cui $d' = 1,225d = 2,45$ mm.

Esempio 4



Dati:

- Q_1=0,1 l/s
- Q_2=0,04 l/s
- fluido incomprimibile e nodo indeformabile
  - <u>determinare</u> Q_1 (valore e verso)

Equazione di continuità al nodo, hp Q_3 uscente dal nodo

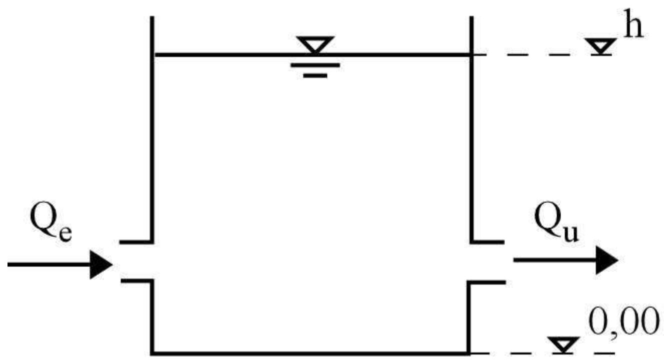
$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

da cui, per la portata attraverso la sezione 3,

$$Q_3 = Q_1 - Q_2 = 0{,}1 - 0{,}04 = 0{,}06 \ \text{l/s}$$

Q_3 calcolata positiva $\longrightarrow$ ipotizzato per Q_3 è corretto (Q_3 uscente dal nodo).

Esempio 5



Dati:

- recipiente a pareti rigide di sezione Ω=1 m^2,
- Q_e=0,5 l/s e Q_u=0,3 l/s
- fluido è incomprimibile
- all'istante t=0 s superficie libera alla quota h_0=0,1 m

<u>determinare</u>

- tempo necessario affinché livello nel recipiente alla quota h_1=0,18 m.

Equazione di continuità dei serbatoi

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_e - Q_u}{\Omega} = k = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{1} = 2 \cdot 10^{-4} \ \ m/s$$

(NB dh/dt è la velocità con cui si sposta il livello nel serbatoio)

Integrando tra $t=0$ (con $h=h_0$) e t generico (con h generico)

$$h = h_0 + k \cdot t$$

I.e. quota della superficie libera aumenta (linearmente) nel tempo (intuibile perché Q in ingresso maggiore Q in uscita)

La quota $h_1=0{,}18$ m viene raggiunta all'istante

$$h_1 = h_0 + k \cdot t_1$$

$$t_1 = \frac{h_1 - h_0}{k} = \frac{0.18 - 0.1}{2 \cdot 10^{-4}} = 400\text{s} = 6.67\,\text{min}$$

APPLICAZIONI DI CINEMATICA – analisi locale del moto

Esempio 1

Si consideri il campo di moto fluido che presenta le seguenti caratteristiche:

- Dominio geometrico (riferimento cartesiano x,y,z):

$$\left(x \in [-\infty, +\infty] \ ; \ \left(y^2 + z^2\right)^{1/2} \in [-R, +R] \right)$$

- Campo cinematico:

$$\vec{v} = \left(v_x = k\left[\left(y^2 + z^2\right) - R^2\right] \ ; \ v_y = 0 \ ; \ v_z = 0 \right)$$

Si risponda ai seguenti quesiti (nel calcolo si assuma k=1 e R=1):

i. stabilire la morfologia del dominio geometrico
ii. stabilire il carattere del moto rispetto al tempo e nello spazio
iii. verificare se il campo in questione rispetta il principio di conservazione della massa, nell'ipotesi di fluido incomprimibile

iv. stabilire se il campo di moto è accelerato

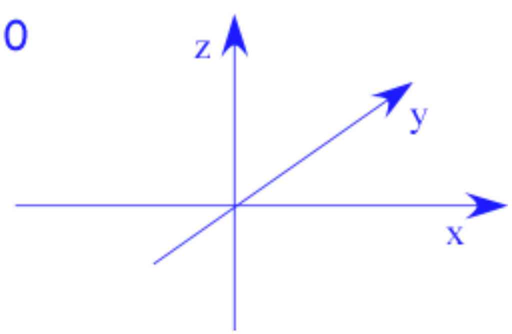
v. calcolare la velocità alla generica coordinata x e rappresentarne graficamente l'andamento (profilo di velocità)

vi. rappresentare graficamente la distribuzione di velocità nel dominio geometrico in scala di colori

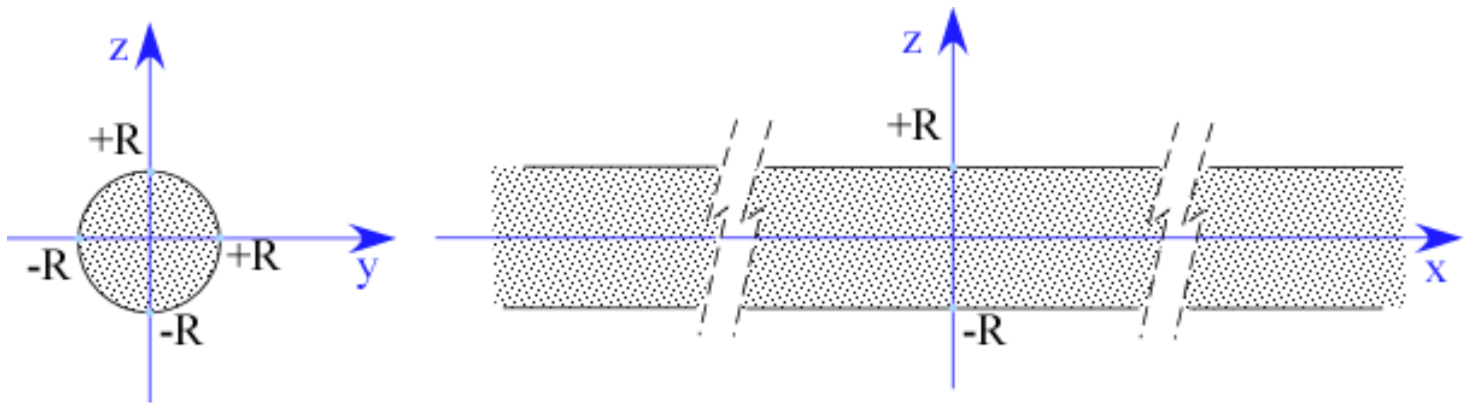
vii. ricavare l'espressione di $\nabla\vec{v}$ e stabilire il tipo di spostamenti e deformazioni che un elemento fluido può subire

i) Il dominio in questione è descritto da

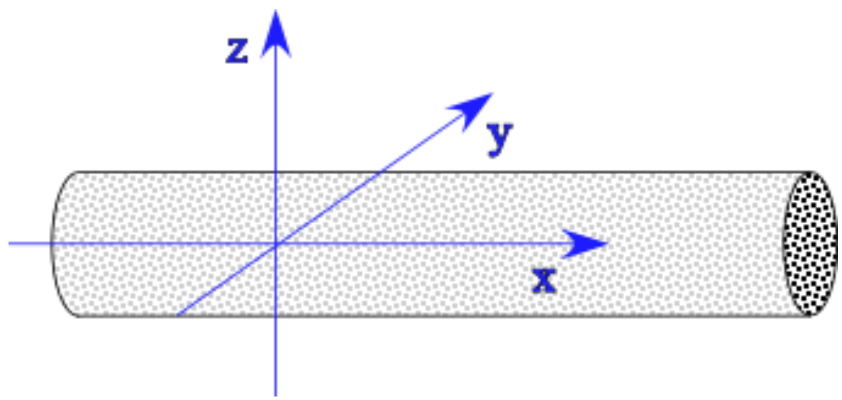
$$\left(x \in [-\infty,+\infty] \,;\, \left(y^2+z^2\right) \in [-R,+R]\right) \text{ con } R>0$$



Rappresentando le condizioni suddette nei piani (x,z) e (y,z) si vede che i bordi del dominio delimitano una regione cilindrica, infinitamente estesa lungo l'asse x e di raggio R



Il campo di moto cioè si sviluppa in un condotto circolare infinitamente lungo e di raggio R



ii) Il fluido in questione si muove con velocità $\vec{v} = (v_x \,; v_y \,; v_z = 0)$ descritta dalle:

$$\vec{v} = \left(v_x = k\left[\left(y^2 + z^2\right) - R^2\right] \; ; \; v_y = 0 \; ; \; v_z = 0\right)$$

$$v_y = 0$$

$$v_z = 0$$

Tale campo cinematico:

- non presenta dipendenza dal tempo: il **moto** in questione dunque è **stazionario o permanente**
- ha un'unica componente di velocità non nulla: il **moto** dunque è **monodimensionale o lineare (1D)**, lungo la direzione dell'asse del condotto

iii) Il principio di conservazione della massa nell'ipotesi di fluido incomprimibile e in forma locale si scrive:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ricordando le espressioni delle componenti di velocità si vede immediatamente che

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

e dunque è nulla anche la loro somma, i.e.

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$ c.v.d.

iv) Ricordiamo che l'accelerazione è definita come

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_i \qquad i = x, y, z$$

Nel problema in esame:

* certamente $a_y = a_z = 0$ poiché sono nulle le corrispondenti componenti di velocità
* per la componente ax possiamo scrivere:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (v_x; v_y; v_z) \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}; \frac{\partial v_x}{\partial y}; \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

MA

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$$ perché il moto è stazionario

$$(v_x; v_y; v_z) \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}; \frac{\partial v_x}{\partial y}; \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = 0$$ ………perché $v_y = v_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$

Il moto in esame dunque **non presenta accelerazione**

v) Dobbiamo calcolare la velocità in una prescelta griglia di calcolo (i.e. su di un insieme di punti scelto opportunamente). "Opportuno": dipende dal grado di dettaglio con cui vogliamo la descrizione della soluzione e dalle risorse di calcolo che abbiamo a disposizione.

Nel problema in esame, l'unica componente di velocità è quella lungo x

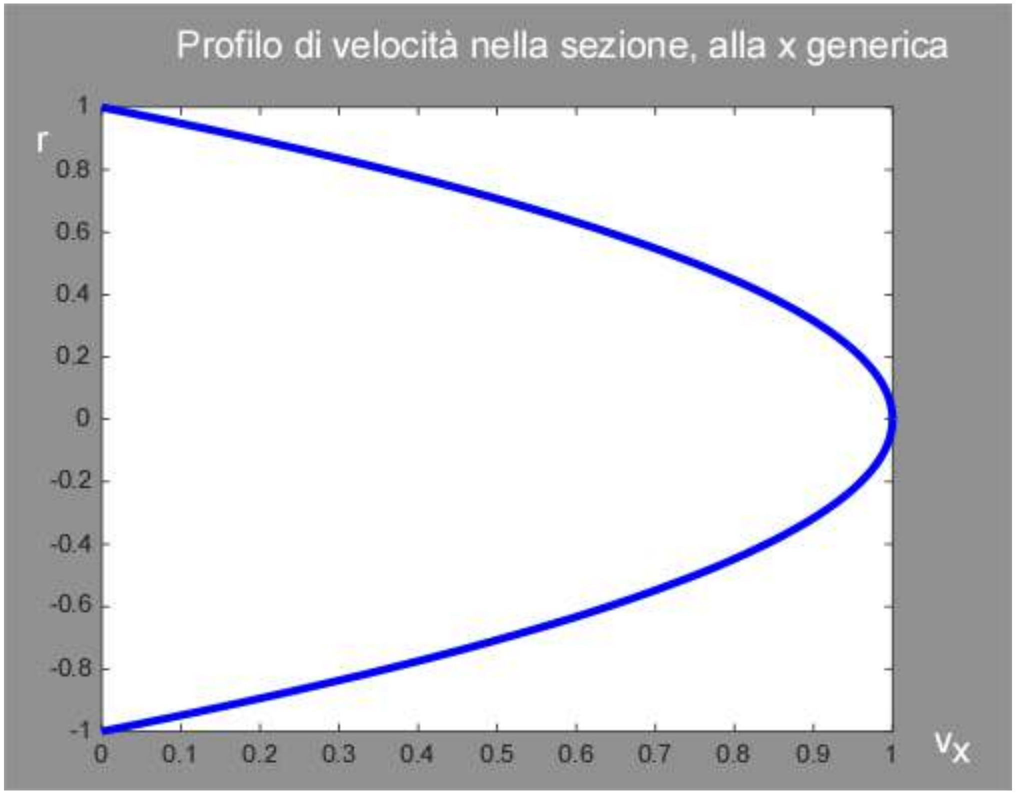
$$v_x(y,z) = k[(y^2+z^2) - R^2]$$

che può essere facilmente implementata in matlab o in excel o….accorgendosi che si può passare dalle coordinate cartesiane (y,z) alla coordinata radiale r = $(y^2+z^2)^{1/2}$ così da avere, semplicemente,

$$v_x\,(r) = k\,[r^2 - R^2] \quad r \in [0,R]$$

La formulazione precedente ci mostra anche immediatamente che la velocità v_x in questo campo di moto ha distribuzione parabolica. In particolare: il **profilo di velocità, cioè l'andamento della**

velocità nella sezione del condotto al variare di r, è una parabola, con $v_x=0$ sulla parete del condotto e $v_x=v_{max}$ sull'asse.



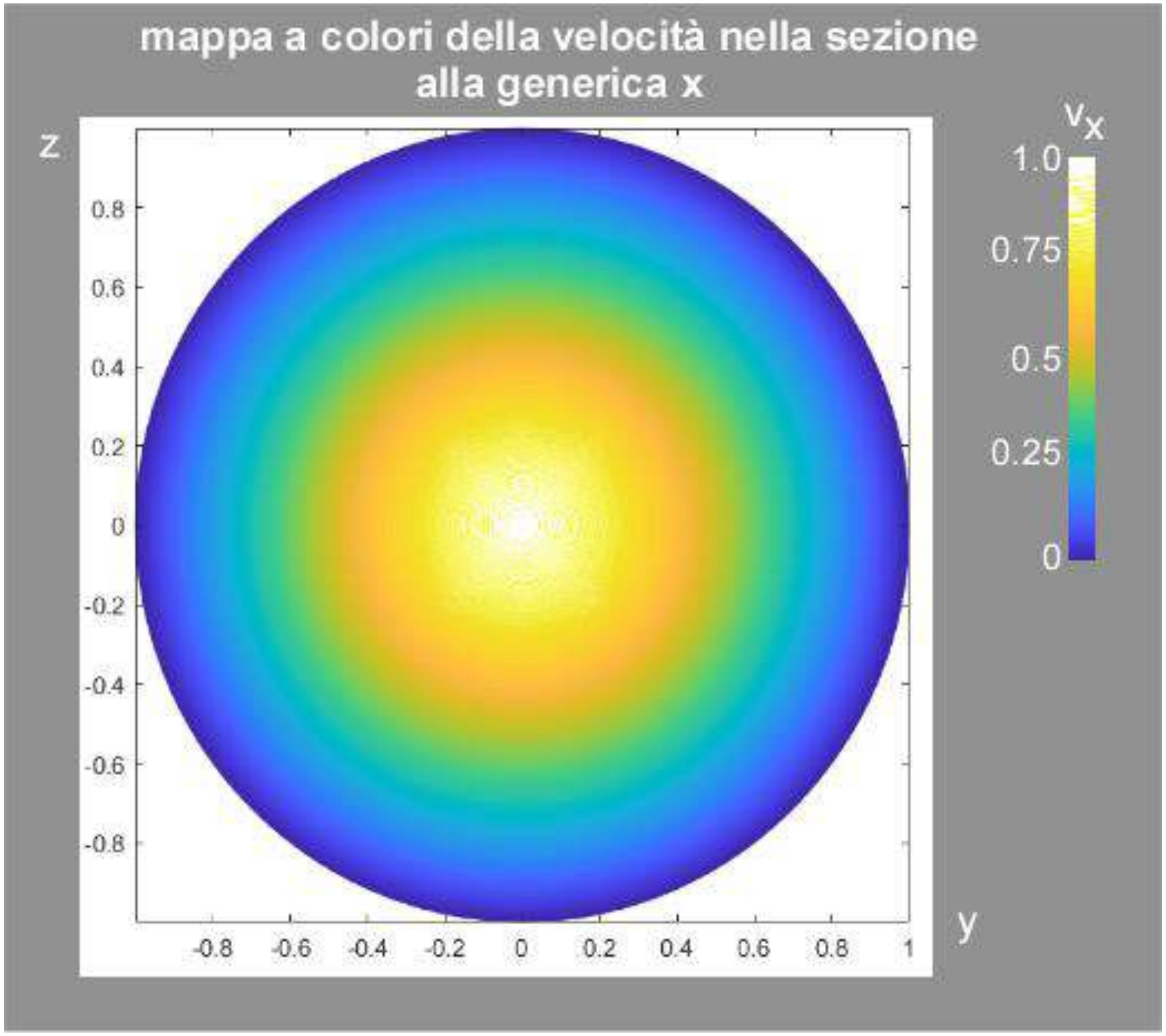
Che effetto ha il segno di k? Discutere!

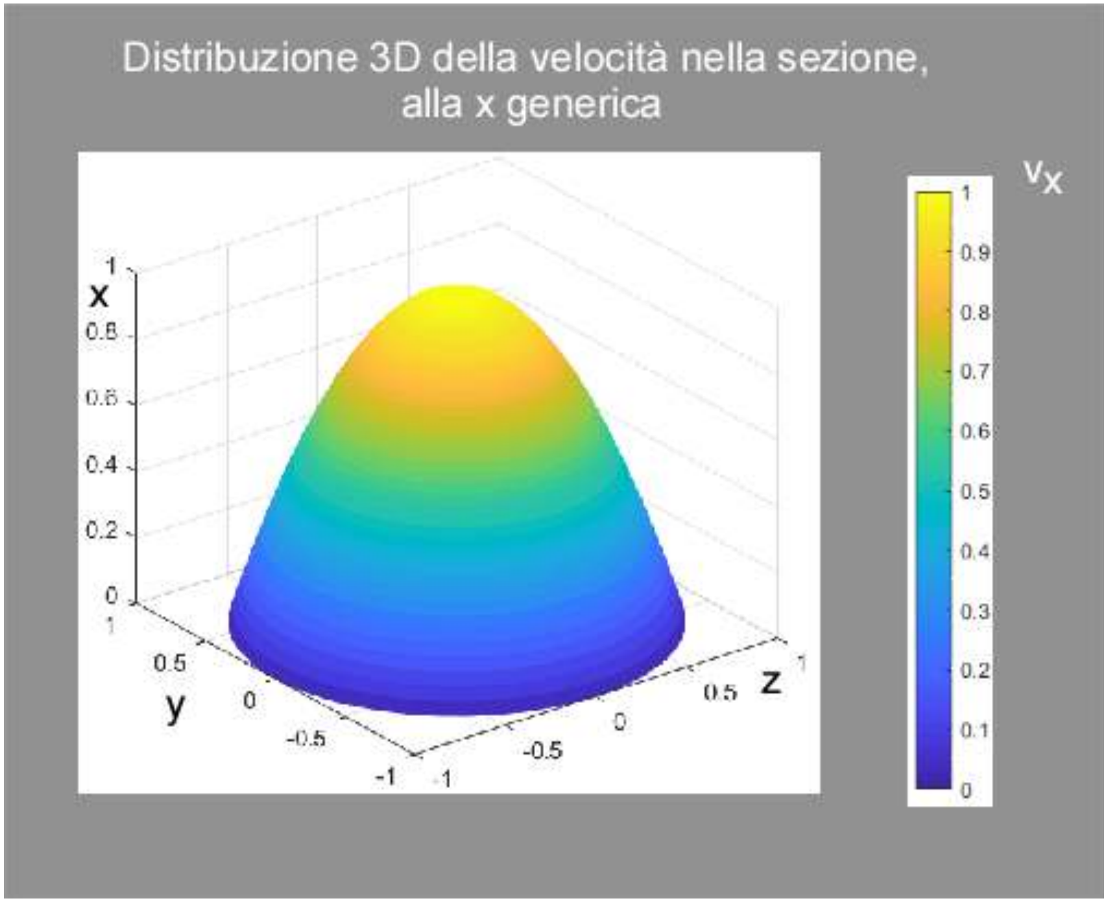
vi) Solo un poco più complesso è il calcolo (matlab è ok, excel meno….) se si vuole calcolare e rappresentare $v_x = v_x(y,z)$

SCRIPT MATLAB

```
% cinematica esercizio file 4b_1.doc
clear all;
close all;
k = -1 ;     % coefficiente della velocità
R = 1;       % raggio, adimensionale
N=50;dr=R/(N-1);dtheta=2*pi/(N-1);
r=[0:dr:R];  %distanza radiale dei punti nella sezione di calcolo, adim
for i=1:N;
    vx(i)=k*(r(i)^2-R^2); %velocità in funzione di r
end;
figure(1); plot(vx,r,'b',vx,-r,'b');

theta=[0:dtheta:2*pi];
for i=1:N;
    for j=1:N;
        Y(i,j)=r(i)*cos(theta(j));
        Z(i,j)=r(i)*sin(theta(j));
        vxYZ(i,j)=k*(r(i)^2-R^2); %velocità in funzione di (Y,Z)
    end;
end;
figure(2);contour(Y,Z,vxYZ,10);colorbar;
figure(3);surf(Y,Z,vxYZ);colorbar;
```


mappa a colori della velocità nella sezione
alla generica x
z
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
y
v_x
1.0
0.75
0.5
0.25
0



vii) ricavare l'espressione di $\nabla\vec{v}$ e stabilire il tipo di spostamenti e deformazioni che un elemento fluido può subire: homework

APPLICAZIONI DEL MOTO DI POISEUILLE

Premessa

Moto di Poiseuille in un condotto assumendo l'ipotesi che il contributo gravitazionale ($\gamma \nabla h$) sia trascurabile rispetto al contributo di pressione (∇p):

$$v_x(r) = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu} = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu}$$

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu} = \frac{p_1 - p_2}{L}\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu}$$

Nell'ipotesi più generale di tener conto anche del termine gravitazionale si ottiene invece

$$v_x(r) = -\frac{\partial(p + \gamma h)}{\partial x}\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu} = \frac{(p_1 + \gamma h_1) - (p_2 + \gamma h_2)}{L}\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu} = -\gamma\frac{\partial h^*}{\partial x}\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu} = \gamma i\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu}$$

$$Q = -\frac{\partial(p + \gamma h)}{\partial x}\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu} = \frac{(p_1 + \gamma h_1) - (p_2 + \gamma h_2)}{L}\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu} = -\gamma\frac{\partial h^*}{\partial x}\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu} = \gamma i\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu}$$

dove $i = -\gamma\frac{\partial h^*}{\partial x}$ è detta cadente piezometrica

Esempio 1

In un condotto circolare di diametro d=1 cm scorre un fluido incomprimibile newtoniano di densità ρ=**1,05**ρ_{H_2O} e viscosità dinamica μ=**4**μ_{H_2O}. La portata fluente è **Q=0,05 l/s**. Determinare il numero di Reynolds Re del moto nel condotto, e stabilire la tipologia del regime dinamico. Determinare il valore della velocità massima nel condotto e il valore della velocità nei punti posti ad una distanza dall'asse pari a $r=r_0/2$. (rispetta tutte le ipotesi del moto di Poiseuille → devo solo verificare che sia in moto laminare, calcolando il n° di Reynolds)

Nel moto stazionario in un condotto circolare

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{V d}{\nu} \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Nel caso in esame

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}05 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}01^2} = 0{,}637\, m/s$$ → velocità media

la viscosità cinematica

$\nu_{H_2O} = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$

viscosità dinamica

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{4}{1{,}05}\nu_{H_2O} = 3{,}809 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$$

densità del fluido

quindi per il numero di Reynolds si ha

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}637 \cdot 0{,}01}{3{,}809 \cdot 10^{-6}} = 1672{,}355$$

cioè

$$Re < 2000 \div 2500 \rightarrow \text{moto in regime laminare.}$$

→ il moto risulta dunque essere 'alla Poiseuille' →

$$v_x(r) = -\frac{\partial(p + \gamma h)}{\partial x}\frac{\left(r_0^{\,2} - r^2\right)}{4\mu} = \gamma i \frac{\left(r_0^{\,2} - r^2\right)}{4\mu}$$

la velocità max si ha sull'asse, i.e. per r=0 e, conoscendo i, possiamo calcolarla dal profilo di velocità. **Osserviamo però anche che**:

ricordarsi la relazione tra Vmax e V(media) $\Longrightarrow$ $V_{max} = 2V$

$$\rightarrow \quad v_{max} = -\frac{\partial(p+\gamma h)}{\partial x}\frac{{r_0}^2}{4\mu} = \gamma i \frac{{r_0}^2}{4\mu} = 2V$$

e dunque

$$v_{max} = 2V = 2 \cdot 0{,}637 = 1{,}274\ \text{m/s}$$

così posso anche calcolare la cadente piezometrica i

Velocità puntuale v(r)

$$v_x(r) = -\frac{\partial(p+\gamma h)}{\partial x}\frac{\left({r_0}^2 - r^2\right)}{4\mu} = \gamma i \frac{\left({r_0}^2 - r^2\right)}{4\mu}$$

La cadente piezometrica i si può calcolare come

$$i = v_{max}\frac{4\mu}{\gamma {r_0}^2} = 1{,}274 \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{1{,}05 \cdot 9806 \cdot 0{,}005^2} = 0{,}0622 \quad \text{(adimensionale)}$$

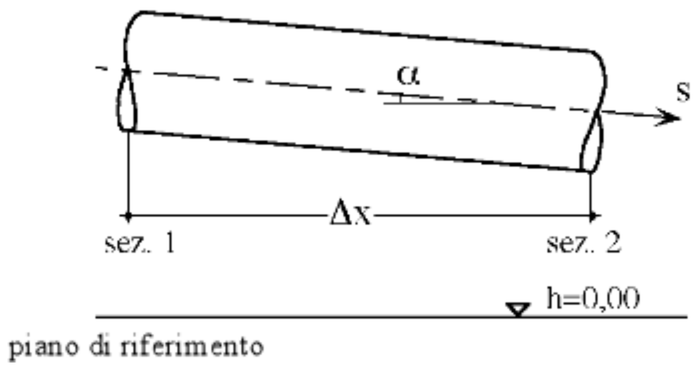
qual è il significato fisico di questo numero?

ogni metro che faccio nel mio condotto perdo la i $\Longrightarrow$ $h_B^* = (h_A^* - i)\,m$

I punti distanti $r=r_0/2=0{,}25$ cm dall'asse hanno velocità

$$v = \gamma i \left.\frac{\left(r_0{}^2 - r^2\right)}{4\mu}\right|_{r=r_0/2} = 1.05 \cdot 9806 \cdot 0{,}0622 \cdot \frac{\left(0{,}005^2 - 0{,}0025^2\right)}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 0{,}75 \;\; \text{m/s}$$

Esempio 3



Dati:

- $d=0{,}02$ m
- $\alpha=10°$
- $Q=0{,}06$ l/s, costante nel tempo
- fluido incomprimibile e newtoniano ($\rho=1{,}05\rho_{H_2O}$; $\mu=4\mu_{H_2O}$). $\Delta x=5$ cm

<u>determinare</u>

- la differenza di pressione $\Delta p=p_2-p_1$

Date le caratteristiche del sistema indagato (caratteristiche fisiche del fluido, caratteristiche geometriche del condotto e caratteristiche cinematiche), <u>si può supporre che nel condotto si realizzi un moto alla Poiseuille</u>.

La verifica di tale ipotesi viene svolta calcolando il numero di Reynolds

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho V d}{\mu}=\frac{V d}{\nu}$$

dove

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}06 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 0{,}191 \text{ m/s}$$

Si ha quindi

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{1{,}05 \cdot 1000 \cdot 0{,}191 \cdot 0{,}02}{4 \cdot 10^{-3}} = 1002{,}75 < 2000 - 2500$$

i.e. moto laminare, alla Poiseuille.

Ricordando la definizione della cadente piezometrica $i = -\partial(p/\gamma+h)/\partial x$ e osservando che nel problema in questione si può porre $i = -\Delta(p/\gamma+h)/\Delta x$

possiamo scrivere l'espressione della portata "di Poiseuille" come:

$$Q = \frac{(p_1 + \gamma h_1) - (p_2 + \gamma h_2)}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu}$$

$$= \frac{(p_1 - p_2) + (\gamma h_1 - \gamma h_2)}{L} \frac{\pi r_0^4}{8\mu}$$

e dunque per la differenza di pressione cercata

$$\Delta p = p_1 - p_2 = Q \cdot L \cdot \frac{8\mu}{\pi r_0^4} - (\gamma h_1 - \gamma h_2) = Q \cdot L \cdot \frac{8\mu}{\pi r_0^4} - \gamma \Delta h$$

con $\Delta h = h_1 - h_2 = \Delta x \cdot tg\alpha = 8{,}816 \cdot 10^{-3}$ m

e $L = \Delta x / \cos\alpha = 5{,}1 \cdot 10^{-1}$ m

La differenza di pressione cercata è dunque

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 0{,}06 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot}{\pi \cdot 0{,}02^4} - 1{,}05 \cdot 9806.8{,}816 \cdot 10^{-3} = 87{,}672 \text{ Pa} \cong 0{,}659 \text{ mm}_{Hg}$$

$\gamma_{HG} = 13{,}56\, \gamma_{H2O}$ $\gamma_{H2O} = 9806$ $KPa \rightarrow \frac{K}{\gamma_{Hg}} \cdot 1000 = mmHg$

Esempio 4

Determinare il valore dello sforzo tangenziale massimo nel moto di cui all'esempio precedente.

Lo sforzo tangenziale viscoso massimo si realizza in corrispondenza della parete del condotto, dove $r=r_0$ e vale

moto di Poiseuille

$$\tau_0 = \frac{\gamma i}{2} r_0$$

La cadente piezometrica è calcolabile dalla espressione che collega la i alla portata

$$i = Q\frac{8\mu}{\mu\pi r_0^{\;4}} = 0{,}06 \cdot 10^{-3}\,\frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}\,\cdot}{\pi \cdot 0{,}02^4} = 0{,}00593$$ senza unità di misura

in ogni unità di condotto, la quota piezometrica cala di questo valore

e dunque si ha

$$\tau_0 = \frac{1{,}05 \cdot 9806 \cdot 0{,}00593}{2} \cdot 0{,}01 = 0{,}305\ \mathrm{N/m^2} = 3{,}05\ \mathrm{dyne/cm^2}$$

$= 0.305\ \mathrm{Pa}$

ci permette di confrontare il valore con quello caratteristico

Normal $\underbrace{\text{shear stress:}}_{\text{valori caratteristici}}$ in arteries = 10-70 dyne/cm^2

in veins = 1-6 dyne/cm^2

Esempio 5

moto di Poiseuille: fluido newtoniano
laminare
stazionario

Dati:

- tubo orizzontale lungo L=20 cm
- acqua in condizioni laminari stazionarie
- differenza di pressione $\Delta p=p_2-p_1=-500$ Pa. differenza di pressione tra valle e monte

Determinare la portata quando

- $r_0=0{,}5$ cm
- $r_0'=1$ cm.

In un tubo orizzontale la portata alla Poiseuille è data dalla

$$Q=-\frac{\Delta p}{L}\frac{\pi {r_0}^4}{8\mu}$$

ci sono approssimazioni in questa espressione NEL CASO IN ESAME?

Dato che il tubo è orizzontale, le formulazioni generali si riducono a quelle in cui non viene considerato il contributo gravitazionale

Nel caso in esame dunque, per i due valori del raggio risulta rispettivamente

$$Q=-\frac{\Delta p}{L}\frac{\pi r_0{}^4}{8\mu}=-\frac{-500}{0{,}20}\frac{\pi\cdot 0{,}005^4}{8\cdot 1\cdot 10^{-3}}=6{,}13\cdot 10^{-4}\ m^3/s=0{,}613\ l/s$$

$$Q'=-\frac{\Delta p}{L}\frac{\pi r_0{}'^4}{8\mu}=-\frac{-500}{0{,}20}\frac{\pi\cdot 0{,}01^4}{8\cdot 1\cdot 10^{-3}}=9{,}812\cdot 10^{-3}\ m^3/s=9{,}812\ l/s$$

$\Longrightarrow$ il raggio influenza moltissimo il valore di Q

cioè, dato **il legame della portata con la quarta potenza del raggio**

con $r_0'/r_0=2$ si ha $Q'/Q=16$

APPLICAZIONI DEL MOTO DI POISEUILLE

visto già nella parte di Teoria

Esempio 6

dimostra che nei piccoli vasi la resistenza ha valore con ordine di grandezza maggiori rispetto a quelli nei grandi vasi

Aorta:

r_{Ao}=1.5 cm

L_{Ao}=50 cm

Arteriola singola

r_{art}=7.5 μm

L_{Art}=1 mm

$$R_{Ao} = \frac{8\mu}{\pi r_{Ao}^4} L_{Ao} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0.015^4} 0.5 \cong 1 \cdot 10^5 \ \frac{kg}{m^4 s}$$

$$R_{Art} = \frac{8\mu}{\pi r_{art}^4} L_{Art} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (7.5 \cdot 10^{-6})^4} 1 \cdot 10^{-3} \cong 3 \cdot 10^{15} \ \frac{kg}{m^4 s}$$

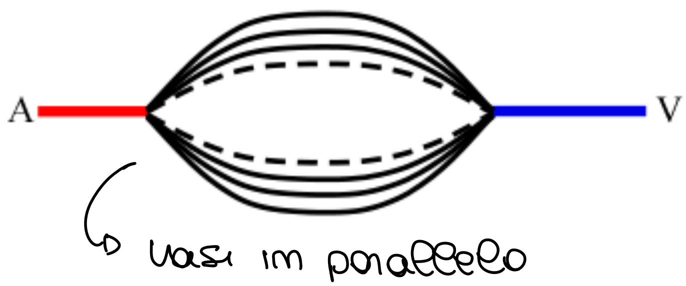
R_{art}/R_{Ao} vale cioè circa $3 \cdot 10^{10}$!

arteriole sistema di vasi in parallelo $N = 3 \cdot 10^8$

$$R_{tot\_art} = \frac{R_{art}}{N} = \frac{3 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^8} = 10^7$$

R_{tot_art}/R_{Ao} risulta perciò dell'ordine di 100

Esempio 7



$p_A = 50\ mm_{Hg}$
$p_V = 5\ mm_{Hg}$
$L_A = 4\ cm$
$L_V = 6\ cm$
$L_{cp} = 4\ mm$ (singolo capillare)
$r_A = 5\ mm$
$r_V = 8\ mm$
$r_{cp} = 170\ \mu m$ (singolo capillare)
$N_{cp} = 40$ = n° totale di capillari in parallelo

Il sistema di figura ha caratteristiche morfometriche e dinamiche riportate in tabella. Il fluido che circola è sangue. **Calcolare**:

- la resistenza: nel ramo arterioso, nel ramo venoso, nel singolo capillare, nel sistema di capillari;
- la portata: nel ramo arterioso, nel ramo venoso, nel singolo capillare, nel sistema di capillari;

Ricordiamo innanzi tutto l'espressione di R:

per un vaso generico:

$$\boxed{R = \frac{8\mu L}{\pi r_0^4}}$$

per un sistema di vasi in parallelo:

vasi che hanno tutti la medesima Ri

$$\boxed{R_{tot} = \frac{R_i}{N}}$$

Possiamo dunque procedere al calcolo sostituendo i valori opportuni caso per caso:

- ramo arterioso: $R_A = \frac{8\mu L_A}{\pi r_A{}^4} = -\frac{8\cdot 3.5\cdot 10^{-3}\cdot 0.04}{\pi\cdot 0.005^4} = 5.707\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{Pa\cdot s}}{\mathrm{m^3}}\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s\cdot m^4}}\right)$

- ramo venoso: $R_V = \frac{8\mu L_V}{\pi r_V{}^4} = -\frac{8\cdot 3.5\cdot 10^{-3}\cdot 0.06}{\pi\cdot 0.008^4} = 1.306\cdot 10^5\ \frac{\mathrm{Pa\cdot s}}{\mathrm{m^3}}\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s\cdot m^4}}\right)$

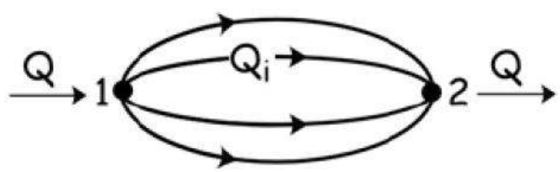
- singolo capillare: $R_{cp} = \frac{8\mu L_{cp}}{\pi r_{cp}{}^4} = -\frac{8\cdot 3.5\cdot 10^{-3}\cdot 0.004}{\pi\cdot 0.00017^4} = 4.271\cdot 10^{10}\ \frac{\mathrm{Pa\cdot s}}{\mathrm{m^3}}\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s\cdot m^4}}\right)$

noto che i singoli capillari hanno una R con ordine di grandezza molto maggiore mettendo i capillari in parallelo la R si abbassa di 1 ordine di grandezza

- sistema dei capillari: $R_{TOTcp} = \frac{R_{cp}}{N} = \frac{4.271 \cdot 10^7}{40} = 1.068 \cdot 10^9 \frac{Pa \cdot s}{m^3} \left(\frac{kg}{s \cdot m^4} \right)$

Calcolo della portata:

ricordiamo lo schema generale dei sistemi in parallelo



$$\boxed{Q = \frac{\Delta p_{tot}}{R_{tot}} = \frac{\Delta p_{1\to 2}}{R_{tot}}}$$

che, applicato al problema in esame, ci permette di scrivere:

per tratto arterioso, tratto venoso e sistema dei capillari:

cambio unità di misura

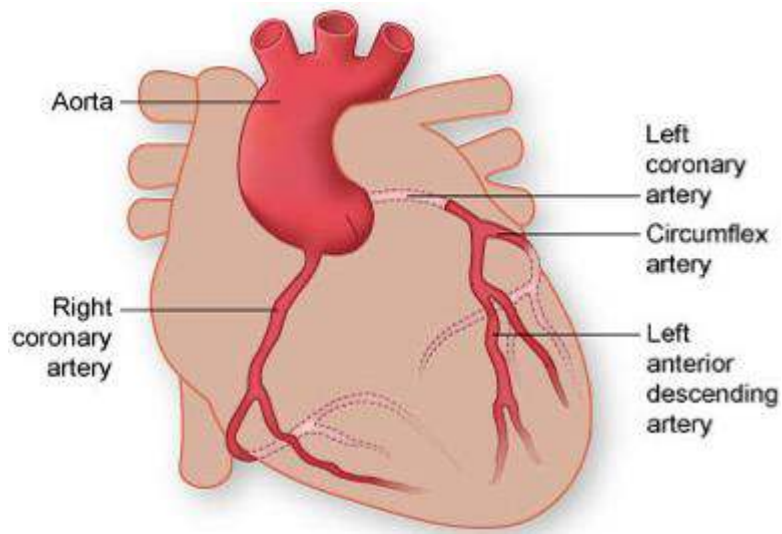
- $Q_A = Q_V = Q_{TOTcp} = \frac{p_A - p_V}{R_{TOTcp}} = \frac{(500-5) \cdot 10^{-3} \cdot 13.56 \cdot 9806}{1.068 \cdot 10^9} = 0.0000616 \frac{m^3}{s} = 61.6 \frac{ml}{s}$

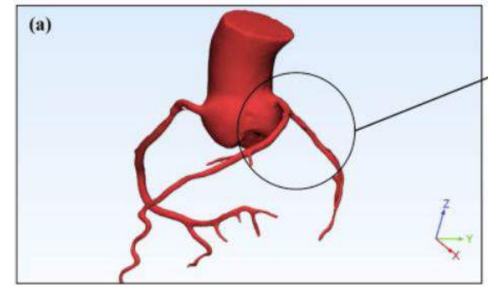
per il singolo capillare:

- $Q_{cp} = Q_V = \frac{Q_V}{N} = \frac{61.6}{40} = 0.0000616 \frac{m^3}{s} = 1.54 \frac{ml}{s}$

ciascun capillare porta la stessa portata

Esempio 8

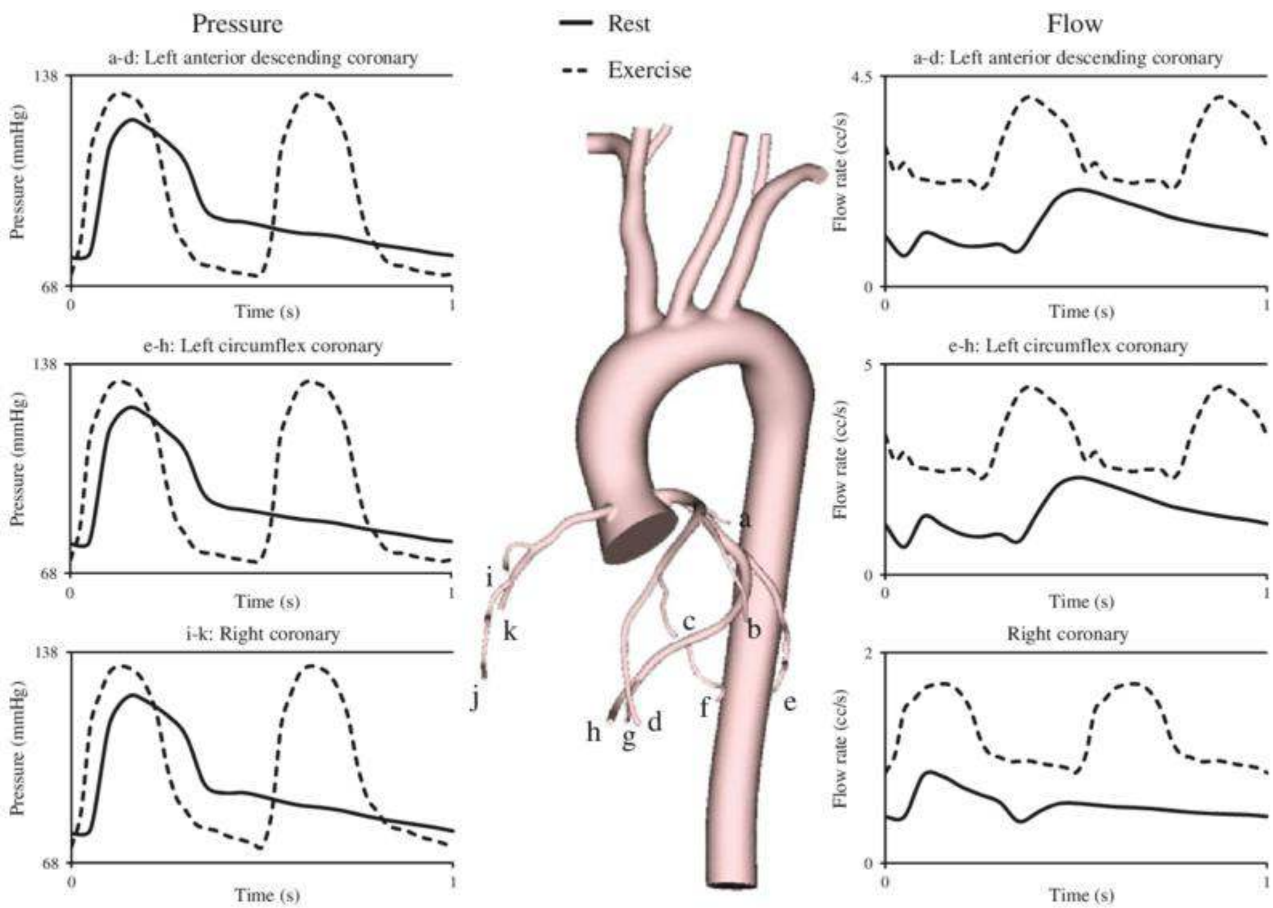




La tabella riportata di seguito fornisce le caratteristiche morfometriche delle coronarie di un paziente maschio adulto.

Coronary artery	Diametro (mm)	Lunghezza (mm)
Left anterior descending (LAD)	2.8	31.2
Left Circumflex (LC)	2.7	21.7
Right (R)	3.4	28.4

La figura riportata nel seguito fornisce le onde di flusso e pressione registrate per il medesimo paziente.

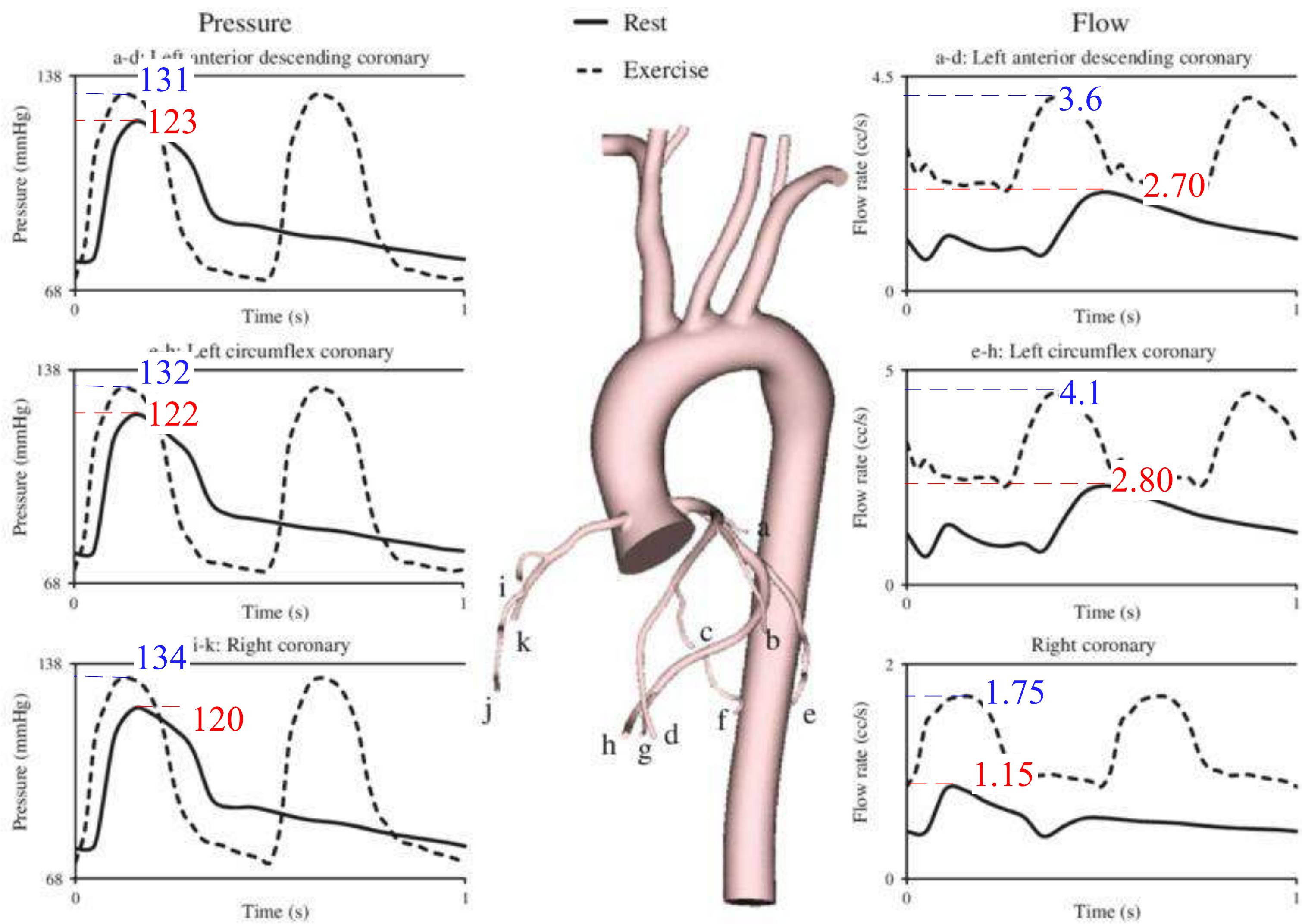


Si chiede di:

- stimare la portata di picco Q_{peak} e la pressione sistolica SBP in tutte le condizioni illustrate;
- calcolare, in corrispondenza di Q_{peak}:
    i. la velocità media V nei tre vasi
    ii. il numero di Reynolds Re nei tre vasi
    iii. la cadente piezometrica i nei tre vasi (hp moto di Poiseuille)
    iv. lo sforzo tangenziale alla parete τ_0 nei tre vasi, (hp moto di Poiseuille)
    v. la resistenza R nei tre vasi
    vi. il salto di pressione Δp tra monte e valle nei tre vasi (trascurare il contributo gravitazionale)
- giustificare il comportamento di SBP in condizioni di riposo/esercizio sulla base dei risultati precedenti nei tre vasi:

Stima della portata di picco Q_{peak} e della pressione sistolica SBP:

si può digitalizzare i dati grafici o utilizzare….righello, carta, penna e proporzioni



E' comunque opportuno riportare le stime anche in forma tabellare:

Coronary artery	**Q_{peak} (cc/s=ml/s)**		**SBP (mm_{Hg})**	
	Exercise	Rest	Exercise	Rest
Left anterior descending (LAD)	3.6	2.7	131	123
Left Circumflex (LC)	4.1	2.8	132	122
Right (R)	1.75	1.15	134	120

Calcolo della velocità media V nei tre vasi (al picco):

$$V = \frac{Q}{A}$$

↓

Coronary artery	**Q_{peak} (cc/s=ml/s)** Exercise	Rest	**(d, mm) - $A=\pi d^2/4$ (mm^2)**	**V=Q/A (m/s)** Exercise	Rest
Left anterior descending (LAD)	3.6	2.7	2.8 - 6.157	0.585	0.438
Left Circumflex (LC)	4.1	2.8	2.7 - 5.726	**0.716**	0.489
Right (R)	1.75	1.15	3.4 - 9,079	0.193	**0.123**

Calcolo del numero di Reynolds Re nei tre vasi (al picco):

$$\mathrm{Re} = \frac{Vd}{\nu}$$

assumiamo $\nu = 3.5 \cdot 10^{-6}$ m^2/s ↓

Coronary artery	**Q_{peak} (cc/s=ml/s)** Exercise	Rest	**(d, mm)**	**Re** Exercise	Rest
Left anterior descending (LAD)	3.6	2.7	2.8	468	350,4
Left Circumflex (LC)	4.1	2.8	2.7	**552,3**	377,2
Right (R)	1.75	1.15	3.4	187,4	**119,4**

→ regime laminare (attenzione: confronto fatto con i limiti di moto stazionario!)

Calcolo della cadente piezometrica i nei tre vasi (hp moto di Poiseuille):

$$i = \frac{8\mu V}{\gamma \cdot r_0^{\ 2}}$$

Coronary artery	**V (m/s)** Exercise	Rest	**(d, mm)**	**i** Exercise	Rest
Left anterior descending (LAD)	0.585	0.438	2.8	8,12E-01	6,08E-01
Left Circumflex (LC)	0.716	0.489	2.7	**1,07E+00**	7,30E-01
Right (R)	0.193	0.123	3.4	1,82E-01	**1,16E-01**

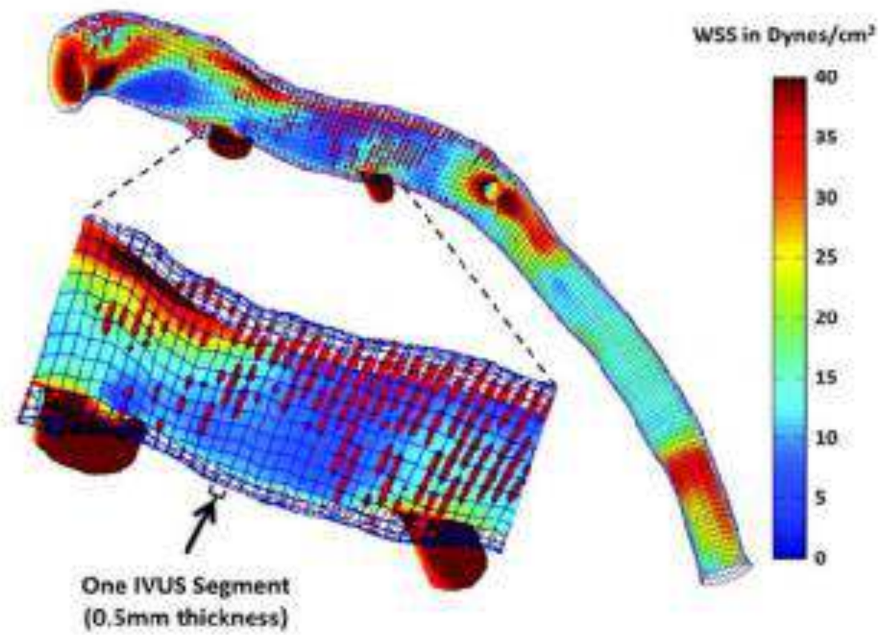
Significato fisico?

Calcolo dello sforzo tangenziale a parete τ_0 nei tre vasi, (hp moto di Poiseuille):

$$\tau_0 = \gamma i \frac{r_0}{2}$$

Coronary artery	*i* Exercise	Rest	τ_0 **(Pa)** Exercise	Rest
Left anterior descending (LAD)	8,12E-01	6,08E-01	11,72	8,76
Left Circumflex (LC)	1,07E+00	7,30E-01	**14,85**	10,14
Right (R)	1,82E-01	1,16E-01	3,18	**2,02**

1 Pa = 10 dyn/cm^2



Samady et al. 2011. https://doi.org/10.1161/CIRCULATIONAHA.111.021824Circulation. 2011;124:779–788

Download figure | Download PowerPoint

Figure 2. Example of a wall shear stress (WSS) profile of the left anterior descending coronary artery from a patient demonstrating lumen and external elastic membrane boundaries, superimposed virtual histology

Il modello del moto alla Poiseuille applicato all'istante di picco sembra dunque fornire risultati in qualche misura maggiori della realtà fisiologica. Può essere utilizzato al più per una prima stima dello shear stress (meglio se con riferimento alla portata media nel battito).

Calcolo della resistenza R nei tre vasi, (hp moto di Poiseuille):

$$R = \frac{8\mu L}{\pi \cdot r_0^{\ 4}}$$

Coronary artery	d (mm)	L (mm)	R (kg/m^4s)
Left anterior descending (LAD)	2.8	31.2	7,24E+07
Left Circumflex (LC)	2.7	21.7	5,83E+07
Right (R)	3.4	28.4	3,03E+07

Calcolo del salto di pressione Δp nei tre vasi (trascurare il contributo gravitazionale):

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = i \cdot L$$

Coronary artery	**L (mm)**	**i**		**Δp/γ (mmHg)**	
		Exercise	Rest	Exercise	Rest
Left anterior descending (LAD)	31.2	8,12E-01	6,08E-01	**1,96**	1,47
Left Circumflex (LC)	21.7	1,07E+00	7,30E-01	1,80	1,23
Right (R)	28.4	1,82E-01	1,16E-01	0,40	**0,25**

APPLICAZIONI DI CORRENTI 1D

Esempio 1

Dati:

- fluido incomprimibile con $\nu=4\cdot10^{-6}$ m^2/s
- condotto di diametro d=2 cm
- e = 0,02 mm
- L=25 cm
- Q_1=0,07 l/s
- Q_2=0,7 l/s

<u>Determinare</u>

- f_1, j_1, ΔE_{L1}
- f_2, j_2, ΔE_{L2}

Espressione per f: dipende dal regime del moto! → calcolare Reynolds!

Nelle due diverse condizioni di portata:

$$V_1 = \frac{Q_1}{A} = \frac{4Q_1}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}07 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 0{,}2223 \text{ m/s}$$

$$Re_1 = \frac{V_1 d}{\nu} = \frac{0{,}2223 \cdot 0{,}02}{4 \cdot 10^{-6}} = 1114{,}65 \quad \rightarrow \text{LAMINARE!}$$

e

$$V_2 = \frac{Q_2}{A} = \frac{4Q_2}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 2{,}223 \text{ m/s}$$

$$Re_2 = \frac{V_2 d}{\nu} = \frac{2{,}223 \cdot 0{,}02}{4 \cdot 10^{-6}} = 11146{,}50 \quad \rightarrow \text{TURBOLENTO!}$$

→ per la Q_1:

$$f_1 = \frac{64}{Re_1} = 0{,}05742$$

$$j_1 = \frac{f_1}{d}\frac{V_1^2}{2g} = \frac{0{,}05742}{0{,}02}\frac{0{,}2223^2}{19{,}62} = 7{,}272\cdot 10^{-3}$$

ogni unità di lunghezza porosa, il fluido dissipa $7\cdot 10^{-3}$ unità di energia

$$\Delta E_1 = j_1 L = 7{,}272\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}25 = 1{,}819\cdot 10^{-3}\ \text{m}$$

dissipazione di energia lungo il tratto L

Per la Q_2: f da equazione di Colebrook-White, <u>per successive iterazioni</u>, poiché implicita in f

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{e/d}{3{,}71} + \frac{2{,}52}{Re\sqrt{f}}\right) \quad (*) \qquad (1)$$

❖ Per ogni iterazione

- <u>nell'argomento</u> del logaritmo:
  - e/d (scabrezza relativa) e Re hanno i rispettivi valori del problema in esame (qui, e/d=0,001 e Re=11146,50)
  - si assume f^{tent} = valore di tentativo di f
- si calcola la f^{calc} dalla (1) valori calcolati
- si confrontano f^{calc} e f^{tent}: avanti con nuova iterazione <u>finché i due valori non sono uguali</u> (6a cifra decimale)

❖ Come si sceglie f_{tent} al primo giro dell'iterazione? ipotizzo che siamo nel caso di

- $f^{I tent}$ per condizioni di parete idraulicamente scabra per la data e/d!

fissato $\frac{e}{d} = \frac{0{,}02 \cdot 10^{-3}}{0{,}02} = 0{,}001$ e avendo Re alto posso approssimare $\frac{2.52}{Re\sqrt{f}} \simeq 0$

e considerare

$$\longrightarrow \quad f_2^{I\,tent} = \left[-2\log_{10}\left(\frac{e/d}{3{,}71}\right)\right]^{-2} = \left[-2\log_{10}\left(\frac{0{,}001}{3{,}71}\right)\right]^{-2} = 0{,}01962$$

Tabella delle iterazioni nel caso in esame

Non sapendo se Re è abbastanza grande prendo l'equazione completa (*) e per cercare di avvicinarmi a una f nel primo tentativo che faccio prendo la f ipotizzando di essere nel caso di parete idraulicamente scabra

f_2 tent	f_2 calc
0,01962	0,03366
0,03366	0,03136
0,03136	0,03164
0,03164	0,03161
0,03161	**0,03161**

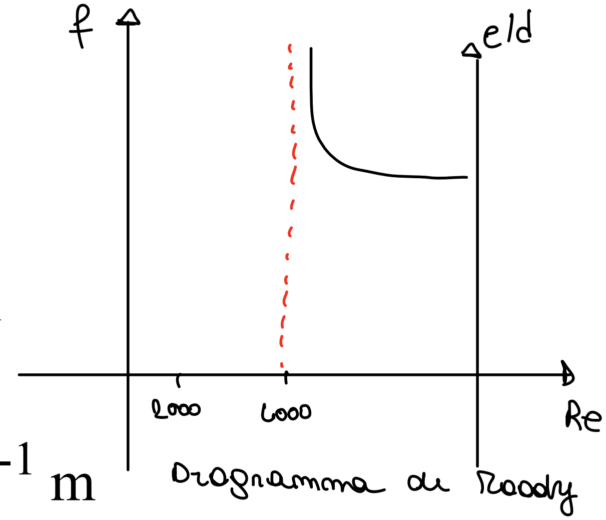
i.e. $f_2=0{,}03161$.

N.B. Se al primo ciclo ottengo $f^{tent} = f^{calc}$ vuol dire che sono effettivamente in moto di una parete idraulicamente scabra

→ vale quindi

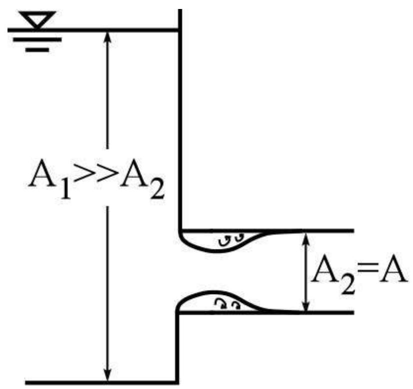
$$j_2 = \frac{f_2}{d}\frac{V_2^{\ 2}}{2g} = \frac{0{,}03161}{0{,}02}\frac{2{,}223^2}{19{,}62} = 4{,}004 \cdot 10^{-1}$$

$$\Delta E_2 = j_2 L = 4{,}004 \cdot 10^{-1} \cdot 0{,}25 = 1{,}001 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m}$$



al e/d fissato, traccio la curva di f al variare di Re   ↑Re, ↓f

Esempio 2



Nel caso $A_1 >> A_2$ $\frac{A_2}{A_1} \simeq 0$

Dati:

- condotto con imbocco 'brusco' da serbatoio, due casi:
- a) d=2 cm $\nu = 4 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ Q=0,1 l/s
- b) d'=20 cm $\nu' = 4 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$ Q'=10 l/s

Determinare ΔE_{imb}

Imbocco brusco da un serbatoio: **assimilabile al caso di brusco restringimento con area sezione di monte risulta molto maggiore area sezione di valle**

Avrò una $\Delta E_{imb} = \Delta E^{loc}$

$$\Delta E_{imb} = \xi_{imb} \frac{V^2}{2g} \Longrightarrow \text{dipende dal regime di moto}$$

laminare: ξ sono tabellate, $\xi = \xi(Re, \text{geometria})$

Turbolento: $\xi = \left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2 = 0.5$

$$\Delta E_{imb} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{C_c} - 1\right)^2$$

$$\Delta E = \xi \frac{V_2^{\,2}}{2g} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

Nei due casi proposti, in particolare, si ha

Caso a)

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 0{,}318 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}318 \cdot 0{,}02}{4 \cdot 10^{-6}} = 1592{,}357$$

Poiché Re risulta laminare, dalla tabella di Idelchik per brusco restringimento si desume, per $A_2/A_1 \to 0$, $\xi \cong 0{,}69$ e dunque per la dissipazione

$$\Delta E_{imb} = 0{,}69 \frac{0{,}318^2}{19{,}62} = 3{,}556 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Caso b)

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 0{,}318 \text{ m/s}$$

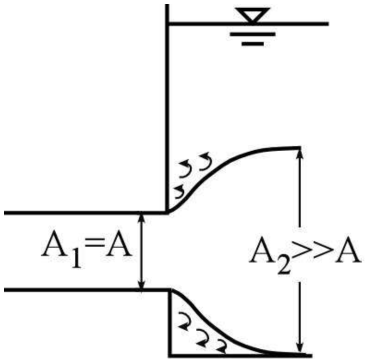
$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}318 \cdot 0{,}2}{4 \cdot 10^{-6}} = 15923{,}57$$

Poiché Re risulta turbolento si può fare riferimento all'espressione della dissipazione vista per la teoria, assumendo in particolare A1>>A2 e, dunque, cc=0,61. Risulta allora per la dissipazione di imbocco in moto turbolento

$$\Delta E_{imb} = 0{,}5 \frac{0{,}318^2}{19{,}62} = 2{,}577 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

ξ_{imb}=0.5!!!

Esempio 3



condotto di sezione circolare sbocca 'bruscamente' in un serbatoio. Determinare la dissipazione localizzata di energia ΔE_{sb} che si verifica subito a valle dello sbocco, nei seguenti due casi:

a) d=2 cm $\quad \nu=4{\cdot}10^{-6}\ m^2/s \quad$ Q=0,1 l/s

b) d'=20 cm $\quad \nu'=4{\cdot}10^{-6}\ m^2/s \quad$ Q'=10 l/s

Lo sbocco brusco di una corrente in un serbatoio può essere assimilato al caso di un **brusco allargamento in cui l'area della sezione di valle risulta molto maggiore dell'area della sezione di monte, cosicché $A_1/A_2 \to 0$**.

Si ha perciò

$$\Delta E = \xi \frac{V_1^{\,2}}{2g} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

dipende dal moto → laminare = tabellato

→ Turbolento $\Delta E = \frac{v^2}{2g}(1)$

$\xi = \left(\frac{A_2 - A_1}{A_2}\right)^2 = 1$

$= 1 - \frac{A_1}{A_2} \qquad \frac{A_1}{A_2} \simeq 0$

essendo V la velocità media della corrente nel condotto.

Nei due casi proposti, in particolare, si ha

Caso a)

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 0{,}318\,\text{m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}318 \cdot 0{,}02}{4 \cdot 10^{-6}} = 1592{,}357$$

Poiché Re risulta laminare, dalla tabella di Idelchik si desume, per $A_1/A_2 \rightarrow 0$, $\xi \cong 2{,}2$ e dunque per la dissipazione

$$\Delta E_{sb} = 2{,}2 \frac{0{,}318^2}{19{,}62} = 0{,}0113\,\text{m}$$

Caso b)

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 0{,}318\,\text{m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}318 \cdot 0{,}2}{4 \cdot 10^{-6}} = 15923{,}57$$

Poiché Re risulta turbolento, dalla relazione teorica del brusco allargamento si desume, per $A_1/A_2 \to 0$, $\xi = 1$ e dunque per la dissipazione

$$\Delta E_{sb} = 1 \frac{0{,}318^2}{19{,}62} = 5{,}154 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

sbagliato

$\cancel{\xi_{sb}=0.5}$

Sistema idraulico:

insieme di elementi (serbatoi, condotte, nodi, raccordi, valvole, pompe… tra loro variamente collegati) nel quale scorre (a moto permanente *) un fluido (incomprimibile newtoniano) la cui dinamica può essere descritta tramite le equazioni delle correnti 1D:

- equazione di continuità (tronco di corrente, nodo) $Q = VA = cost$
- equazione di bilancio dell'energia (N.B.!!! verso della corrente!!!) $E_1 - E_2 + \overset{\text{se pompa}}{H_p} = \Delta E^{cont} + \Delta E^{loc}$

Risolvere la dinamica di un sistema idraulico significa essere in grado di calcolare:

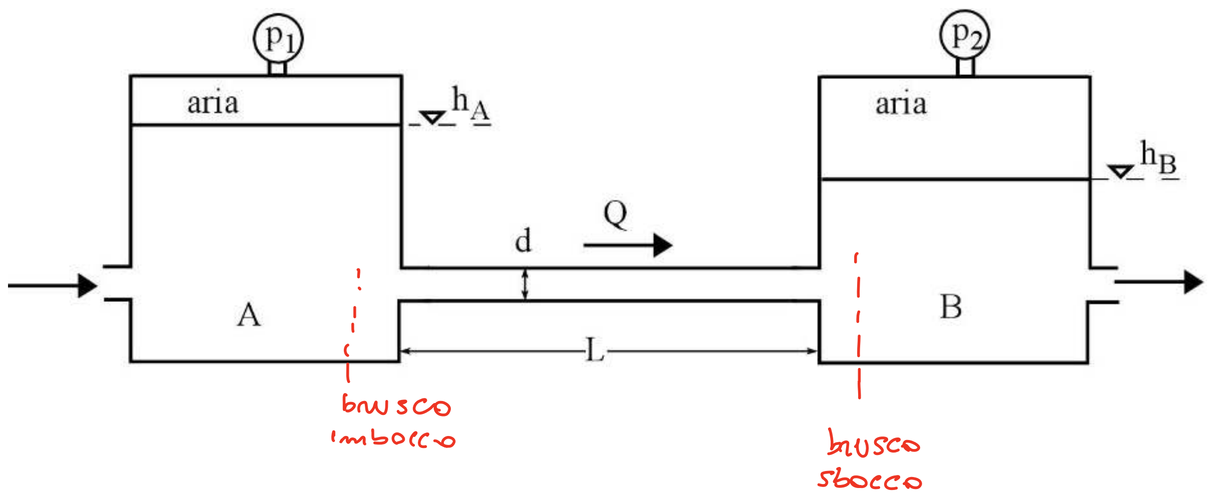
- pressione, quota piezometrica (h^*)
- velocità media della corrente
- energia

in sezioni significative del sistema.

* Unico caso di moto vario che tratteremo: riempimento-svuotamento di un serbatoio (i.e. equazione di continuità in un serbatoio).

N.B. in condizioni di moto permanente, il livello in un serbatoio è necessariamente costante nel tempo!

Esempio 5



Dati:
d=5 cm
L=60 cm
h_A=20 cm
h_B=15 cm
p_1=4 kPa
p_2=1,5 kPa

Dati:

- condizioni laminari permanenti
- fluido incomprimibile ρ=1030 kg/m^3 e viscosità dinamica μ=0,15 kg/ms

<u>Determinare la portata Q</u> fluente dal recipiente A al recipiente B nei seguenti due casi:

a) trascurando le dissipazioni di energia localizzate;

b) tenendo conto delle dissipazioni di energia localizzate, assumendo per la dissipazione di imbocco ξ_{imb}=0,7 e per quella di sbocco ξ_{sb} =2.

Premessa:

<u>per definizione,</u> in un '**serbatoio**' la velocità del fluido può essere trascurata

parte del sistema caratterizzato da dimensioni trasversali tanto + grande delle dimensioni trasversali dei condotti in modo da poter trascurare la V della corrente del serbatoio

$$\rightarrow \qquad E_{serb.} = \left(\frac{p}{\gamma} + h\right)_{serb.}$$

cioè

$$E_{serb} = h^*_{serb}$$

Certamente h^*_{serb}=cost (fluido in quiete!) $\rightarrow$ h^*_{serb} può essere espressa e calcolata in un qualsiasi punto del fluido nel serbatoio tipicamente, la superficie libera o la superficie di separazione tra il fluido e ciò che lo sovrasta)

Nel sistema in esame, bilancio di energia 'risolutivo' è quello scritto tra i due serbatoi

$$E_A = E_B + \Delta E_{A \to B}$$

E_A ed E_B : l'energia specifica del fluido contenuto in A e in B rispettivamente.

Vale dunque

$$E_A = \frac{p_1}{\gamma} + h_A = \frac{4000}{1030 \cdot 9{,}81} + 0{,}20 = 0{,}596\,\mathrm{m}$$

$$E_B = \frac{p_2}{\gamma} + h_B = \frac{1500}{1030 \cdot 9{,}81} + 0{,}15 = 0{,}298\,\mathrm{m}$$

$E_A - A_B > 0$
si è dissipata energia
$\Delta E > 0$ ed è coerente con
il verso del fluido che mi viene
dato

Dissipazioni di energia da A a B: diverse nei due casi proposti

caso a): solo dissipazioni continue $\longrightarrow$

$$\Delta E_{A \to B} = jL$$

$$\text{dove, da Darcy - Weisbach, } j = \frac{f}{d}\frac{V^2}{2g}.$$

Hp regime laminare $\longrightarrow$

$$f = \frac{64}{Re}$$

Sostituendo in Darcy-Weisbach l'espressione di f e, in questa, quella di Re si arriva alla

$$j = \frac{64\nu}{d^2}\frac{V}{2g} = \frac{64\cdot(0{,}150/1030)}{0{,}05^2}\frac{V}{19{,}62} = 0{,}19V$$

(nel moto laminare si ha dipendenza lineare tra j e V, i.e. j e Q!)

Sostituendo tutto quanto trovato nel bilancio di energia

$$0{,}596 = 0{,}298 + 0{,}19V \cdot L = 0{,}298 + 0{,}19V \cdot 0{,}60$$

da cui subito la velocità

$$V = \frac{0{,}596 - 0{,}298}{0{,}19 \cdot 0{,}60} = 2{,}614\ \mathrm{m/s}$$

La portata vale perciò, nel caso a)

$$Q = VA = 2{,}614 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 0{,}00513\ \mathrm{m^3/s} = 5{,}13\ \mathrm{l/s}$$

Il numero di Reynolds vale pertanto

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{2{,}614 \cdot 0{,}05}{(0{,}15/1030)} = 897{,}66$$ cioè nel regime laminare, **<u>come ipotizzato</u>**.

caso b): sia dissipazioni continue che dissipazioni localizzate

- dissipazioni localizzate: data la geometria del sistema, le sole dissipazioni di imbocco di di sbocco.
- dissipazioni continue: come caso a) (ancora **hp moto laminare**), con $j = 0{,}19V$

Bilancio dell'energia tra A e B è quindi

$$E_A = E_B + jL + \xi_{imb} \frac{V^2}{2g} + \xi_{sb} \frac{V^2}{2g}$$

con V = velocità media nel condotto

N.B.! la velocità, e dunque anche la dissipazione unitaria j, saranno diverse, in termini numerici, da quanto ricavato nel caso a)

In sintesi il bilancio è dunque

$$0{,}596 = 0{,}298 + 0{,}19V \cdot L + \frac{2{,}7}{19{,}62} V^2 = 0{,}298 + 0{,}19V \cdot 0{,}60 + 0{,}138V^2$$

cioè per V l'equazione di 2° grado

$$0{,}138V^2 + 0{,}114V - 0{,}298 = 0$$

e dunque, per la velocità

$$V_{1,2} = \frac{-0{,}114 \pm \sqrt{0{,}114^2 + 4 \cdot 0{,}138 \cdot 0{,}298}}{2 \cdot 0{,}138}$$ scelgo la $V > 0$

Delle due soluzioni, risulta fisicamente significativa solo

$$V = 1{,}113 \text{ m/s}$$

da cui la portata

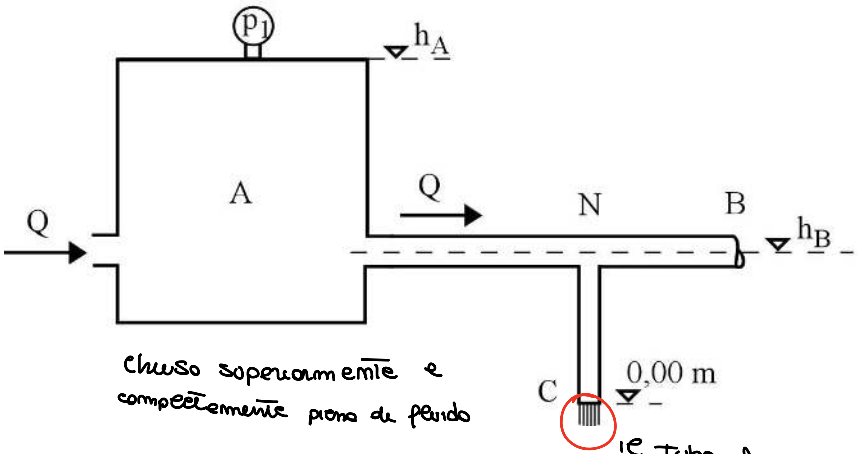
$$Q = VA = 1{,}113 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 0{,}00218 \text{ m}^3/\text{s} = 2{,}18 \text{ l/s}$$

Il numero di Reynolds vale pertanto

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}113 \cdot 0{,}05}{(0{,}15/1030)} = 382{,}21$$ **i.e. regime laminare**

Q caso A $>$ Q caso B $\Longrightarrow$ aggiungendo una fonte di dissipazione, la portata diminuisce

Esempio 5



chiuso superiormente e completamente pieno di fluido

il tubo finisce, esce corrente verso l'atmosfera

Dati:

tratto	d	L
AN	2 cm	2,0 m
NB	2 cm	1,0 m
NC	1 cm	1,0 m

Dati:

- condizioni laminari permanenti
- fluido incomprimibile di densità ρ=850 kg/m^3 e viscosità dinamica μ=0,015 kg/ms
- portata da A a N: Q=0,3 l/s
- il manometro sul tetto misura p_1/γ=0,5 m
- quota tetto h_A=1,1 m

<u>determinare</u>:

- l'energia E_N nel nodo N;
- la portata Q_{NC} lungo NC (C è sezione di sbocco libero in atmosfera!) e la portata Q_{NB} lungo NB;
- la quota piezometrica h^*_B e la pressione p_B/γ nella sezione B, sapendo che h_B=0,6 m.

N.B.: *si trascurino le dissipazioni localizzate in corrispondenza del nodo N e, in corrispondenza* *dell'imbocco dal recipiente A, si assuma ξ_{imb}=0,5.*

Domanda 1).

bilancio dell'energia tra A e N

$$\overset{\frac{p}{\gamma}+h}{\overset{\parallel}{E_A}} = E_N + \Delta E_{A \to N}$$

essendo

$$\Delta E_{A \to N} = j_{AN} L_{AN} + \xi_{imb} \frac{{V_{AN}}^2}{2g}$$

Per il <u>calcolo delle dissipazioni</u>, è necessario determinare la velocità media V_{AN} e il numero di Reynolds Re_{AN}

$$V_{AN} = \frac{Q}{A_{AN}} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 0{,}955\ \mathrm{m/s}$$

$$Re_{AN} = \frac{V_{AN} \cdot d_{AN}}{\nu} = \frac{0{,}955 \cdot 0{,}02}{(0{,}015/850)} = 1082{,}33$$

<u>Dissipazioni continue</u>:

$$j_{AN} L_{AN} = \frac{f_{AN}}{d_{AN}} \frac{V_{AN}{}^2}{2g} L_{AN}$$

Poiché il regime di moto è laminare, si ha

$$f_{AN} = \frac{64}{Re_{AN}} = \frac{64}{1082,33} = 0,0591$$

e dunque

$$j_{AN} L_{AN} = \frac{0,0591}{0,02} \frac{0,955^2}{19,62} \cdot 2 = 0,275\,\mathrm{m}$$

<u>Dissipazioni localizzate</u>:

la sola perdita di imbocco

$$\xi_{imb} \frac{V_{AN}{}^2}{19,62} = 0,5 \cdot \frac{0,955^2}{19,62} = 0,023\,\mathrm{m}$$

(nel caso proposto la dissipazione localizzata è molto piccola rispetto alla dissipazione continua)

<u>Energia nel recipiente</u>:

coincide con la quota piezometrica nel recipiente, pertanto

$$E_A = \frac{p_1}{\gamma} + h_A = 0{,}5 + 1{,}1 = 1{,}6\,\mathrm{m}$$

Dal bilancio dell'energia precedentemente scritto si ha subito

$$E_N = E_A - \Delta E_{A\to N} = 1{,}6 - 0{,}275 - 0{,}023 = 1{,}302\,\mathrm{m}$$

Domanda 2)

La portata fluente nel ramo NC scorre da N a C: C, infatti, è sezione di sbocco in atmosfera!

Il bilancio di energia in NC è dunque

$$E_N = E_C + \Delta E_{N\to C}$$

N.B. le dissipazioni che la corrente subisce da N a C sono le sole dissipazioni continue: **in corrispondenza di uno sbocco in atmosfera, infatti, non si verifica alcuna dissipazione di energia**

$$\rightarrow \quad \Delta E_{N\rightarrow C} = j_{NC} \cdot L_{NC} = \frac{64\nu}{d^2}\frac{V_{NC}}{2g} \cdot L_{NC} = \frac{64\cdot(0{,}015/850)}{0{,}01^2}\frac{V_{NC}}{19{,}62} \cdot 1 = 0{,}576 V_{NC}$$

<u>Energia nella sezione *C*</u>:

la sezione *C* è di **sbocco in atmosfera** $\longrightarrow$ il **fluido è a pressione (relativa) nulla**. Inoltre, dai dati del problema si ha h_C=0. L'energia perciò è

$$E_C = 2\frac{V_{NC}{}^2}{2g} = 0{,}102 V_{NC}{}^2$$ i. e. il solo termine cinetico

N.B. α=2 (moto laminare!!!)

Il bilancio di energia da N a C pertanto

$$0{,}102 V_{NC}{}^2 + 0{,}576 V_{NC} - 1{,}302 = 0$$

da cui per la velocità

$$V_{NC} = \frac{-0{,}576 \pm \sqrt{0{,}576^2 + 4\cdot 0{,}102 \cdot 1{,}302}}{2\cdot 0{,}102}$$

la cui soluzione fisicamente significativa è

$$V_{NC} = 1{,}730 \text{ m/s}$$

La portata è quindi pari a

$$Q_{NC} = V_{NC} A_{NC} = 1{,}730 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}01^2}{4} = 0{,}000136 \text{ m}^3/\text{s} = 0{,}136 \text{ l/s}$$

e il numero di Reynolds

$$Re_{NC} = \frac{V_{NC} d_{NC}}{\nu} = \frac{1{,}730 \cdot 0{,}01}{(0{,}015/850)} = 980{,}33$$

Portata lungo il ramo NB: l'equazione di continuità nel nodo N.

Hp: Q_{NB} uscente dal nodo $\longrightarrow$

$$Q_{AN} = Q_{NC} + Q_{NB}$$

da cui

$$Q_{NB} = Q_{AN} - Q_{NC} = 0{,}3 - 0{,}136 = 0{,}164 \text{ l/s}$$

segno positivo del risultato: l'ipotesi è corretta.

Domanda 3).

Osservazione: **Conoscere il verso della portata nel ramo NB permette di scrivere in modo corretto l'equazione di bilancio dell'energia lungo il ramo stesso!**

$$E_N = E_B + \Delta E_{N \to B}$$

L'unico termine incognito è l'energia E_B, che pertanto può essere immediatamente calcolata.

Preliminarmente, conviene determinare la velocità media V_{NB} e il numero di Reynolds Re_{NB}

$$V_{NB} = \frac{Q}{A_{NB}} = \frac{4 \cdot 0{,}164 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}02^2} = 0{,}522 \text{ m/s}$$

$$Re_{NB} = \frac{V_{NB} \cdot d_{NB}}{\nu} = \frac{0{,}522 \cdot 0{,}02}{(0{,}015/850)} = 591{,}93$$

Regime di moto laminare $\longrightarrow$

$$f_{NB} = \frac{64}{Re_{NB}} = \frac{64}{591{,}93} = 0{,}108$$

ΔE_{NB} (sono le sole dissipazioni continue!!!) è quindi

$$j_{NB}L_{NB} = \frac{0{,}108}{0{,}02}\frac{0{,}522^2}{19{,}62}\cdot 1 = 0{,}075\ \mathrm{m}$$

e dunque l'energia in B

$$E_B = E_N - j_{NB}L_{NB} = 1{,}302 - 0{,}075 = 1{,}227\ \mathrm{m}$$

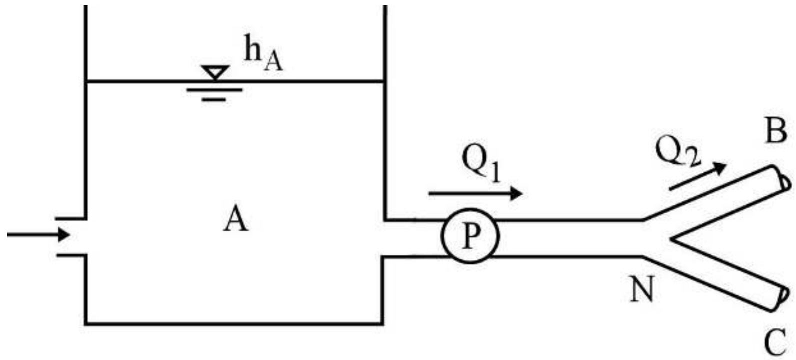
Quota piezometrica immediatamente nota

$$h^*{}_B = E_B - 2\frac{V_{NB}{}^2}{2g} = 1{,}227 - 2\frac{0{,}522^2}{19{,}62} = 1{,}199\ \mathrm{m}$$

e così pure la pressione

$$\frac{p_B}{\gamma} = h^*{}_B - h_B = 1{,}199 - 0{,}6 = 0{,}599\ \mathrm{m}$$

Esempio 6



Dati:

tratto	d	L	e (mm)
1	10 cm	2,5 m	0,2
2	5 cm	0,5 m	0,1
3	5 cm	? m	0,1

Dati:

- acqua
- h_A=0,6 m
- Q_1=15 l/s
- E_N=2,4 m
- $Q_2 = Q_1/2$

<u>Determinare</u>:

- la prevalenza H_P e la potenza utile P_u della pompa P;
- l'energia E_B e la pressione p_B/γ della corrente nella sezione B, la cui quota geodetica è h_B=0,3 m;
- la portata Q_3 fluente lungo il tratto 3 (da N a C);
- la lunghezza L_3 del tratto 3, sapendo che l'energia della corrente nella sezione C vale E_C=0,80 m.

N.B. si trascurino le dissipazioni di energia localizzate in corrispondenza del nodo N.

Domanda 1).

E' possibile caratterizzare cinematicamente la corrente Q_1

$$V_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{4 \cdot 0{,}015}{\pi \cdot 0{,}10^2} = 1{,}911\,\text{m/s}$$

Il numero di Reynolds è pertanto

$$Re_1 = \frac{V_1 d_1}{\nu} = \frac{1{,}911 \cdot 0{,}10}{1 \cdot 10^{-6}} = 191082{,}50$$

<u>La corrente 1 fluisce, cioè, in condizioni di moto turbolento.</u>

Bilancio di energia AN

$$E_A + H_P = E_N + \Delta E_1$$

essendo

$$\Delta E_1 = j_1 L_1 + \xi_{imb} \frac{V_1{}^2}{2g}$$

Dissipazioni continue:

$$j_1 L_1 = \frac{f_1}{d_1}\frac{V_1^{\,2}}{2g} L_1$$

Regime di moto turbolento $\rightarrow$ f_1 per mezzo di Colebrook-White, con Re_1=191082,50 e $(e/d)_1$=(0,0002/0,1)=0,002

Il metodo iterativo fornisce

f_1 tent	**f_1 calc**
0,02340	0,02435
0,02435	0,02434
0,02434	**0,02434**

e dunque

$$j_1 L_1 = \frac{0{,}02434}{0{,}10}\frac{1{,}911^2}{19{,}62}\cdot 2{,}5 = 0{,}113\,\mathrm{m}$$

Dissipazioni localizzate:

la corrente risente della sola perdita di imbocco; coefficiente pari a 0,5 (moto turbolento!) $\longrightarrow$

$$\xi_{imb}\,\frac{V_1^{\,2}}{19{,}62}=0{,}5\cdot\frac{1{,}911^2}{19{,}62}=0{,}093\,\mathrm{m}$$

Energia nel recipiente:

coincide con la quota piezometrica nel recipiente

$$E_A=h_A=0{,}6\,\mathrm{m}$$

Dal bilancio dell'energia si ha subito la prevalenza

$$H_P=E_N+\Delta E_1-E_A=2{,}4+0{,}113+0{,}093-0{,}6=2{,}006\,\mathrm{m}$$

La potenza utile quindi è

$$P_u=\gamma Q H_P=9810\cdot 0{,}015\cdot 2{,}006=295{,}183\,\mathrm{W}$$

Domanda 2)

Caratterizzazione cinematica della corrente lungo il tratto 2 (Q_2=Q_1/2=7,5 l/s)

$$V_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{4 \cdot 0{,}0075}{\pi \cdot 0{,}05^2} = 3{,}822 \text{ m/s}$$

$$Re_2 = \frac{V_2 d_2}{\nu} = \frac{3{,}822 \cdot 0{,}05}{1 \cdot 10^{-6}} = 191082{,}50 = Re_1$$

<u>I.e. regime turbolento</u>

Bilancio di energia lungo il tratto 2 (si conosce il verso!)

$$E_N = E_B + \Delta E_2$$

essendo

$$\Delta E_2 = j_2 L_2$$

(nessuna fonte di dissipazione localizzata!)

con:

$$j_2 L_2 = \frac{f_2}{d_2} \frac{V_2{}^2}{2g} L_2$$

Regime di moto turbolento $\longrightarrow$ f_2 calcolata con Colebrook-White, per Re_2=191082,50 e $(e/d)_2$=(0,0001/0,05)=0,002

N.B. Re_2 e $(e/d)_2$ = = Re_1 e $(e/d)_1$ $\longrightarrow$ $f_2=f_1$=0,02434

$$\rightarrow \qquad j_2 L_2 = \frac{0{,}02434}{0{,}05}\frac{3{,}822^2}{19{,}62}\cdot 0{,}5 = 0{,}181\,\text{m}$$

$\longrightarrow$ In B l'energia vale perciò

$$E_B = E_N - j_2 L_2 = 2{,}4 - 0{,}181 = 2{,}219\,\text{m}$$

e la pressione

$$\frac{p_B}{\gamma} = E_B - h_B - \frac{V_2{}^2}{2g} = 2{,}219 - 0{,}3 - \frac{3{,}822^2}{19{,}62} = 1{,}174\,\text{m}$$ **(NB α=1 moto turbolento!)**

Domanda 3).

Portata nel tratto 3: dall'equazione di continuità nel nodo

Dai dati del problema: certamente $Q_3=Q_2=Q_1/2$=7,5 l/s, uscente dal nodo.

Domanda 4).

I dati del problema (vedi tabella!) e il fatto che Q_3=Q_2 mostrano la corrente 3 ha le stesse caratteristiche cinematiche, di scabrezza relativa e pertanto anche di resistenza al moto già individuati per il tratto 2.

In particolare, la dissipazione unitaria vale

$$j_3 = \frac{0{,}02434}{0{,}05}\frac{3{,}822^2}{19{,}62} = 0{,}362$$

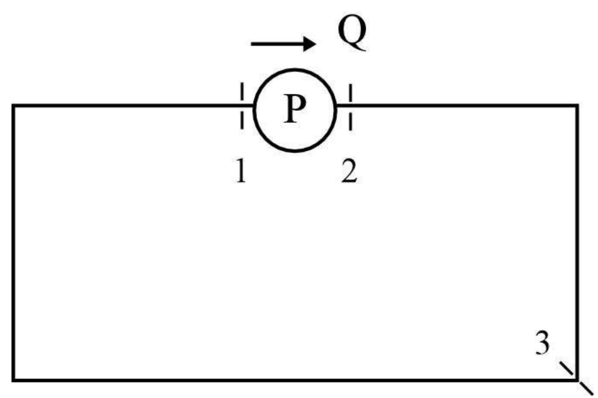
Dal bilancio di energia tra N e C si ha pertanto

$$L_3 = \frac{E_N - E_C}{j_3} = \frac{2{,}4 - 0{,}8}{0{,}362} = 4{,}420\,\mathrm{m}$$

Esempio 6

Dati/info

- Sistema a circuito chiuso
- fluido incomprimibile di peso specifico $\gamma=1,5\gamma_{H_2O}$ e viscosità cinematica $\nu=10\nu_{H_2O}$,
- condotto di diametro d=1 cm e lunghezza complessiva L=5 m
- pompa P con potenza assorbita P_{ass}=1 W e rendimento η=0,8
- moto in condizioni laminari
- Nella sezione 1: pressione pari a p_1/γ=2 m



Determinare:

- portata fluente Q

– prevalenza della pompa H_P.

– pressione nella sezione 2, subito a valle della pompa,

– pressione nella sezione 3, a una distanza dalla sezione 1 pari a L/3.

N.B. Si trascurino in ogni caso le dissipazioni localizzate di energia e le differenze di quota geodetica.

In un sistema a circuito chiuso, **qualsiasi sezione del circuito può essere considerata tanto sezione 'di monte' quanto sezione 'di valle' dell'intero percorso**

$$\downarrow$$

Equazione di bilancio dell'energia partendo/arrivando da/a la sezione generica x (i.e. lungo l'intero circuito)

$$H_P = \Delta E_{tot}$$

con ΔE_{tot} = dissipazioni di energia lungo l'intero circuito.

Nel circuito di figura, le dissipazioni che interessano sono le sole dissipazioni continue, e dunque

$$H_P = j \cdot L$$

Per le dissipazioni di energia continue, ricordando quanto visto in esempi precedenti in caso di moto laminare

$$j = \frac{64\nu}{d^2}\frac{V}{2g} = \frac{64\nu}{d^2}\frac{4Q}{2g\pi d^2} = \frac{64\cdot 1\cdot 10^{-5}\cdot 4}{0{,}01^4\cdot 19{,}62\cdot \pi}Q = 4155{,}38Q$$

e dunque la relazione tra H_P e Q

$$H_P = jL = 4155{,}38\cdot Q\cdot 5 = 20776{,}9Q \qquad (*)$$

Si può ovviamente anche scrivere un'ulteriore relazione tra H_P e Q, i.e. relazione Nota P_u, per la prevalenza si può scrivere

$$H_P = \frac{P_u}{\gamma Q}$$

e, scrivendo per la potenza utile:

$$P_u = \eta P_{ass} = 0{,}8\cdot 1 = 0{,}8\ \text{W}$$

scrivere:

$$H_P = \frac{P_u}{\gamma Q} = \frac{0{,}8}{1{,}5 \cdot 9810 \cdot Q} = \frac{5.437 \cdot 10^{-5}}{Q} \qquad \textbf{(**)}$$

Mettendo insieme (*) e (**) si ottiene perciò

$$\frac{5{,}437 \cdot 10^{-5}}{Q} = 20776{,}9Q$$

da cui

$$Q = \sqrt{\frac{5{,}437 \cdot 10^{-5}}{20776{,}9}} = 5{,}116 \cdot 10^{-5}\ m^3/s = 0{,}05116\ l/s$$

La velocità e il numero di Reynolds valgono pertanto

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot 5{,}116 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot 0{,}01^2} = 0{,}652 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0{,}652 \cdot 0{,}01}{1 \cdot 10^{-5}} = 652$$

cioè il regime è laminare, <u>come ipotizzato</u>.

La prevalenza, infine, risulta pari a

$$H_P = \frac{5.437 \cdot 10^{-5}}{Q} = 1{,}063 \text{ m}$$

La pressione nella sezione 2: dal bilancio dell'energia tra la sezione 1 e la sezione 2, <u>senza alcuna dissipazione di energia, data la distanza del tutto trascurabile tra le due sezioni</u>

$$E_1 + H_P = E_2$$

che, tenendo conto del fatto che le due sezioni si trovano alla stessa quota geodetica e presentano la medesima energia cinetica, si scrive come

$$\frac{p_1}{\gamma} + H_P = \frac{p_2}{\gamma} = 2 + 1{,}063 = 3{,}063 \text{ m}$$

Allo stesso modo (stavolta con le dissipazioni continue lungo il percorso, proporzionali a L/3) e trascurando la differenza di quota geodetica tra le due sezioni

$$E_1 + H_P = E_3 + j\frac{L}{3}$$

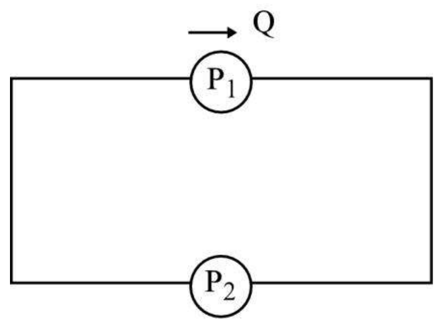
in cui

$$j = 4155{,}38 \cdot 5{,}116 \cdot 10^{-5} = 0{,}213$$

Vale perciò

$$\frac{p_3}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + H_P - j\frac{L}{3} = 2 + 1{,}063 - 0{,}213 \cdot \frac{5}{3} = 2{,}713\ \text{m}$$

Esempio 7



Nel sistema a circuito chiuso di figura scorre la portata d'acqua Q=10 l/s. Il condotto ha diametro d=10 cm, scabrezza relativa e/d=0,00015 ed è complessivamente lungo L=3 m. Nel sistema sono presenti la pompa P_1 e la pompa P_2. Si considerino le seguenti due possibilità di funzionamento:

1. entrambe le pompe sono attive, e la potenza utile erogata da P_1 è uguale alla potenza utile erogata da P_2. In queste condizioni, calcolare la prevalenza e la potenza utile di ciascuna pompa.
2. è in funzione una sola pompa. In questo caso, calcolare la portata Q' che fluisce nel circuito, nell'ipotesi che non sia cambiata rispetto al caso precedente la potenza utile della pompa. Si consideri invariato anche il coefficiente di resistenza f del moto nel condotto.

N.B: si trascurino le dissipazioni di energia localizzate.

Domanda 1).

E' possibile innanzi tutto caratterizzare cinematicamente la corrente nel circuito. Vale infatti

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \cdot 0{,}010}{\pi \cdot 0{,}10^2} = 1{,}274 \text{ m/s}$$

Il numero di Reynolds è pertanto pari a

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{1{,}274 \cdot 0{,}10}{1 \cdot 10^{-6}} = 127400$$

La corrente si sviluppa, cioè, in **regime turbolento**.

Si osservi ora che **se la potenza utile delle due pompe è la stessa** (la si indichi con P_u), **è la stessa anche la prevalenza che ciascuna pompa fornisce alla corrente**, **poiché è la medesima la portata pompata** da P_1 e quella pompata da P_2. Detta H_P la prevalenza di ciascuna pompa, **il bilancio di energia lungo l'intero circuito porge pertanto**

$$2H_P = jL$$

due pompe presenti!!!!

La **valutazione della dissipazione unitaria di energia** richiede la valutazione del coefficiente di resistenza f per mezzo dell'equazione di **Colebrook-White**, in corrispondenza dei parametri **Re=127400** e **e/d=0,00015**. La procedura iterativa porge

f tent	f calc
0,01295	0,01857
0,01857	0,01796
0,01796	0,01801
0,01801	**0,01801**

Si ha perciò

$$j = \frac{0{,}01801}{0{,}1}\frac{1{,}274^2}{19{,}62} = 0{,}0149$$

da cui subito la prevalenza di ciascuna delle due pompe

$$H_P = \frac{jL}{2} = \frac{0{,}0149 \cdot 3}{2} = 0{,}0223\,\mathrm{m}$$

e la potenza utile, ancora di ciascuna pompa

$$P_u = \gamma Q H_P = 9810 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}0223 = 2{,}188\ \mathrm{W}$$

Domanda 2).

Con una sola pompa in funzione, il **bilancio di energia lungo il circuito** si scrive

$$H'_P = j'L$$

<u>Per la prevalenza</u> si può scrivere anche

$$H'_P = \frac{P_u}{\gamma Q'} = \frac{2{,}188}{9810Q'} = \frac{2{,}23 \cdot 10^{-4}}{Q'}$$

e <u>per le dissipazioni</u>

$$j'L = \frac{0{,}01801}{0{,}1}\frac{V'^2}{19{,}62} \cdot 3 = \frac{0{,}01801}{0{,}1}\frac{Q'^2}{19{,}62}\left(\frac{4}{\pi \cdot 0{,}1^2}\right)^2 \cdot 3 = 446{,}886Q'^2$$

Si ha perciò

$$\frac{2{,}23 \cdot 10^{-4}}{Q'} = 446{,}886Q'^2$$

da cui

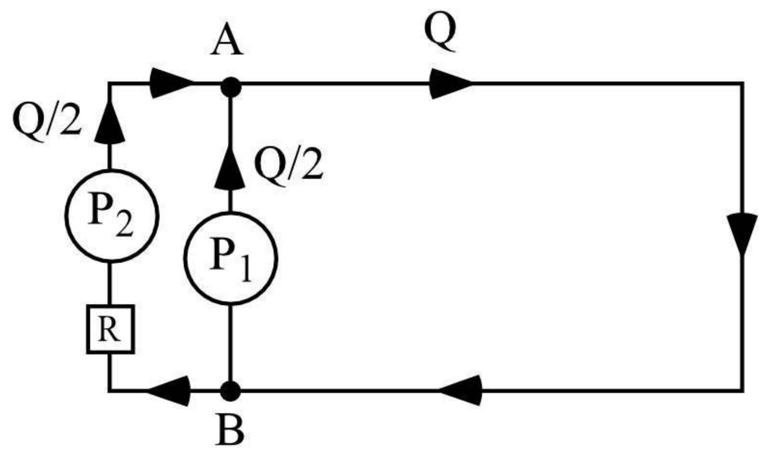
$$Q' = \left(\frac{2{,}23 \cdot 10^{-4}}{446{,}886}\right)^{1/3} = 7{,}932 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Esempio 8

1. Nei diversi rami del sistema di figura fluiscono, con il rubinetto R completamente aperto, la portata d'acqua Q e la portata d'acqua Q/2 secondo quanto indicato. Entrambe le pompe P_1 e P_2 sono in funzione, e ciascuna eroga la medesima potenza utile P_u=20 W. Il numero di resistenza è costante in tutto il sistema, e pari a f=0,02. Inoltre, la lunghezza del ramo AB percorso da Q è pari a L=2,5 m e la lunghezza del ramo BA in cui è posta P_1 è pari a l=0,5 m. Tutti i diversi tratti hanno diametro d=5 cm. Nelle condizioni sopra descritte, determinare la portata Q e la prevalenza di ciascuna delle due pompe.

3. Nel medesimo sistema, ma con il rubinetto R completamente chiuso, si calcolino la prevalenza e la potenza utile da assegnare alla pompa P_1 affinché Q rimanga invariata rispetto al caso precedente. Si assuma ancora ovunque f=0,02.

N.B: si trascurino in ogni caso le dissipazioni di energia localizzate.



Domanda 1).

Il sistema considerato non può dirsi, nonostante sia 'geometricamente' chiuso, un circuito idraulico chiuso.

E' infatti costituito da tre correnti distinte:

– la corrente da A a B lungo il ramo principale

– le due correnti da B ad A, ciascuna lungo uno dei due rami dotati di pompa.

→ **Necessario** quindi **descrivere idraulicamente il sistema** scrivendo le **equazioni di bilancio dell'energia per ciascuna corrente**.

Prima però osserviamo che:

– la potenza utile P_u erogata da P_1 e da P_2, è la medesima;

– la portata pompata da P1 è pari alla portata pompata da P2 (ciascuna pari a Q/2)

– → **la prevalenza di P1 è uguale alla prevalenza di P2**. E vale cioè per la prevalenza

$$H_{P_1} = H_{P_2} = H_P = \frac{P_u}{\gamma Q/2} = \frac{2P_u}{\gamma Q} = \frac{2 \cdot 20}{9810 \cdot Q} = \frac{4{,}077 \cdot 10^{-3}}{Q}$$

Si può allora facilmente vedere che il bilancio di energia lungo il ramo con P_1 e il bilancio di energia lungo il ramo con P_2 sono <u>assolutamente identici</u>.

Pertanto, le equazioni che interessano sono

- da A a B lungo il ramo 'principale', entro il quale fluisce Q

$$E_A = E_B + \Delta E_{A \to B}$$

- da B ad A lungo il ramo in cui è posta P_1, entro il quale fluisce Q/2

$$E_B + H_P = E_A + \Delta E_{(B \to A)_1}$$

Dalle due equazioni si ricava quindi immediatamente

$$H_P = \Delta E_{A \to B} + \Delta E_{(B \to A)_1} \qquad \text{Eq.ne (a)}$$

<u>Dissipazioni da A a B</u>:

sole dissipazioni continue

$$\Delta E_{A\to B} = j_{AB} L = \frac{f}{d}\frac{V_{AB}^{2}}{2g} L = \frac{f}{d}\frac{16Q^2}{2g\pi^2 d^4} L = \frac{8f}{\pi^2 d^5}\frac{Q^2}{g} L = \frac{8\cdot 0{,}02}{\pi^2 0{,}05^5}\frac{Q^2}{9{,}81} 2{,}5 = 13233{,}71Q^2$$

<u>Dissipazioni da B ad A lungo il percorso 1</u>:

anch'esse sole dissipazioni continue

$$\Delta E_{(B\to A)_1} = j_{BA} l = \frac{f}{d}\frac{V_{BA}^{2}}{2g} l = \frac{f}{d}\frac{16(Q/2)^2}{2g\pi^2 d^4} l = \frac{2f}{\pi^2 d^5}\frac{Q^2}{g} l = \frac{2\cdot 0{,}02}{\pi^2 0{,}05^5}\frac{Q^2}{9{,}81} 0{,}5 = 661{,}68Q^2$$

L'equazione (a) perciò diventa, tenuto conto anche della relazione precedentemente scritta tra la prevalenza H_P e la portata Q

$$\frac{4{,}077\cdot 10^{-3}}{Q} = 13233{,}71Q^2 + 661{,}68Q^2 = 13895{,}39Q^2$$

da cui la portata

$$Q = \sqrt[3]{\frac{4{,}077\cdot 10^{-3}}{13895{,}39}} = 6{,}645\cdot 10^{-3}\ m^3/s = 6{,}645 l/s$$

La prevalenza fornita all'acqua da ciascuna pompa è pertanto pari a

$$H_P = \frac{4{,}077 \cdot 10^{-3}}{6{,}645 \cdot 10^{-3}} = 0{,}613\,\mathrm{m}$$

Domanda 2).

Con rubinetto R completamente chiuso:

il sistema si riduce, dal punto di vista fluidodinamico, al circuito chiuso ABA composto dal ramo principale da A a B e dal ramo da B ad A dove è posta P_1. In tale circuito circola, per ipotesi, la medesima portata Q ricavata alla domanda precedente.

Il bilancio di energia lungo il circuito chiuso pertanto porge

$$H'_P = j'(L + l)$$

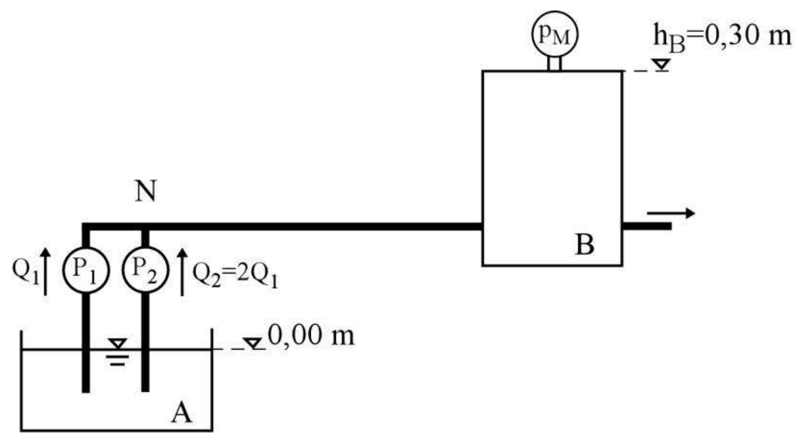
dove j' coincide con la dissipazione unitaria j_{AB} espressa alla domanda precedente (si verifichi l'affermazione). La nuova prevalenza di P_1 vale perciò

$$H'_P = \frac{8 \cdot f}{\pi^2 d^5} \frac{Q^2}{g} (L + l) = \frac{8 \cdot 0{,}02}{\pi^2\, 0{,}05^5} \frac{\left(6{,}645 \cdot 10^{-3}\right)^2}{9{,}81} (2{,}5 + 0{,}5) = 0{,}701\,\mathrm{m}$$

e la potenza utile

$$P'_u = \gamma Q H'_P = 9810 \cdot 6{,}645 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}701 = 45{,}71\ \mathrm{W}$$

Esempio 8



Nel sistema di figura, un fluido incomprimibile di peso specifico γ=10800 N/m^3 e viscosità cinematica ν=2·10^{-5} kg/ms viene trasferito dal recipiente a superficie libera A al recipiente a tenuta B, grazie alle pompe P_1 e P_2. Sapendo che la portata sollevata da P_1 vale Q_1=0,035 l/s, che i condotti hanno diametro d=1 cm e che il tratto dal nodo N al recipiente B è lungo L=2 m, determinare

1. la portata Q complessivamente trasferita al recipiente B;
2. la prevalenza e la potenza utile da assegnare a ciascuna delle due pompe affinché la pressione

relativa p_M agente sul tetto del recipiente B sia positiva.

N.B. Si trascurino tutte le dissipazioni localizzate, nonché le dissipazioni continue da A ad N.

Si lascia lo svolgimento al lettore. Suggerimento per la seconda domanda: si scriva l'espressione dell'equazione di bilancio dell'energia da A ad N lungo il tratto con la P_1 e l'espressione dell'equazione di bilancio dell'energia da A ad N lungo il tratto con la P_2 per 'ragionare' sulla prevalenza delle due pompe….