Primo test di autovalutazione di FONDAMENTI DI AUTOMATICA A.A. 2020/21

Data: 13 Ottobre 2020

1. Si studi la stabilità asintotica e la stabilità BIBO dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti:

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y(t) = \dfrac{d^2u}{dt^2}$;

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y(t) = \dfrac{du}{dt}$;

   (c) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{du}{dt}$;

   (d) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2y(t) = \dfrac{du}{dt} - u(t)$;

   (e) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 4y(t) = \dfrac{du}{dt} + 2u(t)$.

2. Si studi, al variare del parametro reale a, la stabilità asintotica e BIBO dei seguenti modelli LTI descritti da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti (senza calcolarne esplicitamente le radici caratteristiche):

   (a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4a\dfrac{dy}{dt} + (1-a)y(t) = \dfrac{du}{dt} + 2u(t)$;

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - a\dfrac{dy}{dt} + (5-a)y(t) = \dfrac{du}{dt} - u(t)$;

   (c) $\dfrac{d^3y}{dt^3} + a\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d^2u}{dt^2}$;

   (d) $a\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5a\dfrac{dy}{dt} + (1+a)y(t) = \dfrac{du}{dt}$.

3. Si valuti, mediante il criterio di Routh, se i seguenti polinomi sono di Hurwitz e, in caso negativo, si determini, ove possibile, il numero di radici a parte reale positiva:

   (a) $d(s) = s^4 + 5s^3 - 3s^2 + 2s - 1$;

   (b) $d(s) = 2s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s - 1$;

   (c) $d(s) = 4s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 3s + 1$;

   (d) $d(s) = 4s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 3s + 1$;

   (e) $d(s) = s^5 + 6s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 2s + 1$.

4. Si dica se esiste la risposta di regime permanente di ciascun sistema in corrispondenza al segnale e alle condizioni iniziali assegnati e, in caso affermativo, la si determini.

(a) sistema descritto dall'equazione differenziale $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{du}{dt}$ con ingresso $u(t) = e^{j(t+\phi)}\delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali nulle;

(b) sistema descritto dall'equazione differenziale $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 5y(t) = \dfrac{du}{dt}$ con ingresso $u(t) = \sin t \ \delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali $y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = 1$;

(c) sistema descritto dal legame ingresso/uscita $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y(t) = \dfrac{du}{dt} + 2u(t)$ con ingresso $u(t) = e^{j(1-t)} \ \delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali arbitrarie.

(d) sistema descritto dal legame ingresso/uscita $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} - 6y(t) = \dfrac{du}{dt} - u(t)$ con ingresso $u(t) = \cos(t + \phi) \ \delta_{-1}(t)$ e condizioni iniziali $\frac{dy(0^-)}{dt} = -6y(0^-)$.

RISPOSTE

1. Stabilità asintotica e stabilità BIBO:
   (a) asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile;
   (b) nè asintoticamente stabile nè BIBO stabile;
   (c) nè asintoticamente stabile nè BIBO stabile;
   (d) non asintoticamente stabile ma BIBO stabile;
   (e) nè asintoticamente stabile nè BIBO stabile.

2. Stabilità asintotica e BIBO al variare di un parametro:
   (a) asintoticamente (e quindi BIBO) stabile se e solo se $0 < a < 1$. Non è mai BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile;
   (b) asintoticamente (e quindi BIBO) stabile se e solo se $a < 0$. Non è mai BIBO stabile senza essere asintoticamente stabile;
   (c) non è mai asintoticamente stabile nè BIBO stabile;
   (d) asintoticamente (e quindi BIBO) stabile se e solo se $0 < a$ oppure $a < -1$. Inoltre il sistema è BIBO stabile per $a = -1$.

3. Routh:
   (a) non è di Hurwitz ed ha tre radici a parte reale positiva;
   (b) non è di Hurwitz ed ha una sola radice a parte reale positiva;
   (c) non è di Hurwitz ma la tabella non può essere completata. Pertanto dalla tabella non è possibile appurare il numero delle radici a parte reale positiva;
   (d) non è di Hurwitz ed ha due radici a parte reale positiva;
   (e) è di Hurwitz.

4. Risposta di regime permanente:
   (a) Il sistema non è asinoticamente stabile (ha una radice caratteristica in 0) tuttavia è BIBO stabile e poichè le condizioni iniziali assegnate sono tutte nulle, ciò è sufficiente per poter affermare che esiste la risposta (forzata) di regime permanente al segnale assegnato. La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega} = 1$$

   e il sistema risponde all'ingresso $u(t) = e^{j\phi}e^{jt}\delta_{-1}(t)$ con l'uscita (di regime permanente)

$$y_{rp}(t) = W(j)e^{j\phi}e^{jt}\delta_{-1}(t) = e^{j\phi}e^{jt}\delta_{-1}(t) = u(t).$$

   (b) Il sistema è asinoticamente stabile pertanto esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato, a partire da qualunque coppia di condizioni iniziali e quindi, in particolare, per $y(0^-) = \frac{dy(0^-)}{dt} = 1$. La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + (j\omega) + 5} = \frac{j\omega}{(5 - \omega^2) + j\omega}$$

e il sistema risponde all'ingresso $u(t) = \sin t \ \delta_{-1}(t)$ con l'uscita di regime permanente

$$y_{rp}(t) = |W(j1)| \sin(t + \arg W(j1))\delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{17}} \sin\left(t + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{4}\right)\right) \delta_{-1}(t),$$

giacché $W(j) = \dfrac{j}{4+j}$ ha modulo

$$|W(j1)| = \frac{1}{\sqrt{17}},$$

e fase

$$\arg W(j1) = \arg\left(\frac{j}{4+j}\right) = \frac{\pi}{2} - \arg(4+j) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{4}\right).$$

(c) Il sistema è asintoticamente stabile pertanto esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato, a partire da qualunque coppia di condizioni iniziali assegnate. La risposta in frequenza del sistema è

$$W(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 2)(j\omega + 3)} = \frac{1}{j\omega + 3}$$

e il sistema risponde all'ingresso $u(t) = e^j e^{-jt} \ \delta_{-1}(t)$ con l'uscita di regime permanente

$$y_{rp}(t) = W(-j)e^j e^{-jt}\delta_{-1}(t) = \frac{1}{3-j} e^j e^{-jt}\delta_{-1}(t).$$

(d) Il sistema non è asinoticamente stabile (ha una radice caratteristica in 1) tuttavia è BIBO stabile. Poichè le condizioni iniziali assegnate non sono tutte nulle, è necessario verificare che in corrispondenza alla famiglia di condizioni iniziali assegnate l'evoluzione libera converga a zero. In tale ipotesi esiste la risposta di regime permanente al segnale assegnato, in caso contrario non esiste. In generale l'evoluzione libera del sistema ha la forma

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-6t} + c_2 e^t, t \in \mathbb{R}_+.$$

È immediato verificare che, in corrispondenza alla famiglia di condizioni iniziali assegnate, l'evoluzione libera è del tipo

$$y_\ell(t) = c_1 e^{-6t}, t \in \mathbb{R}_+,$$

e pertanto converge a zero. Ma allora esiste la risposta di regime permanente del sistema al segnale assegnato ed essa vale

$$y_{rp}(t) = |W(j1)| \cos(t + \phi + \arg W(j1))\delta_{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{37}} \cos\left(t + \phi - \arctan\left(\frac{1}{6}\right)\right) \delta_{-1}(t),$$

giacché $W(j) = \dfrac{1}{6+j}$ ha modulo

$$|W(j1)| = \frac{1}{\sqrt{37}},$$

e fase

$$\arg W(j1) = \arg\left(\frac{1}{6+j}\right) = -\arg(6+j) = -\arctan\left(\frac{1}{6}\right).$$