

Esercizi Tutorato Algebra

chiara.malerba@studenti.unipd.it

a.a. 2022/2023

Esercitazione del 16 Marzo 2023

- Si considerino i due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^3 :

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0 \right\}$$

- Calcolare $(V \cap W)$.
 - Calcolare $\dim W$, $\dim V$, $\dim (V \cap W)$.
 - Calcolare $\dim (V + W)$.
- Siano dati i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^3 :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0 \right\}$$

,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0 \right\}$$

determinare:

- dimensione e base di V e W
 - il sottospazio $V + W$ e una sua base
 - il sottospazio $V \cap W$ e una sua base
 - la somma $V + W$ è diretta?
 - a quale dei precedenti sottospazi appartiene il vettore $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Determinare due sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4 , U e W , tali che \mathbb{R}^4 sia uguale alla somma diretta di U e W .
 - Si consideri

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e il vettore $v_k = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e si dica per quale valore di k si ha $v_k \in U$.

Sia $V = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$ si determini una base di V una base di $U \cap V$.

- Si consideri U , sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 , generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Calcolare dimensione e base di U .
- Completare la base di U a una base di \mathbb{R}^4