COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
27 Giugno 2017

Esercizio 1. [10 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s^2}{100}}{s(1 + 10s)\left(1 + \frac{s}{10}\right)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuandone asintoti ed intersezioni con gli assi;

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ (determinandone l'eventuale numero di poli a parte reale positiva e/o nulla), al variare di $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

Esercizio 2. [8.5 punti] Data la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante:

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2(s-2)},$$

è richiesto di tracciare i luoghi delle radici positivo e negativo, determinando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, e deducendo quindi per quali valori reali di K il sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ è BIBO stabile.

Esercizio 3. [4 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+100)} \in \mathbb{R}(s)$$

di un processo, è richiesto il progetto di un compensatore razionale, proprio e stabilizzante $C(s)$ in modo che esso sia in grado di garantire le seguenti prestazioni: il sistema retroazionato deve essere di tipo 0 con relativo errore di regime permanente $e_{rp}^{(1)} \approx 0.1$ (al gradino unitario), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ deve avere pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 100$ rad/sec e margine di fase $m_\psi \simeq 45°$.

Esercizio 4. [3 punti] Data il sistema BIBO stabile di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{K}{s+1},$$

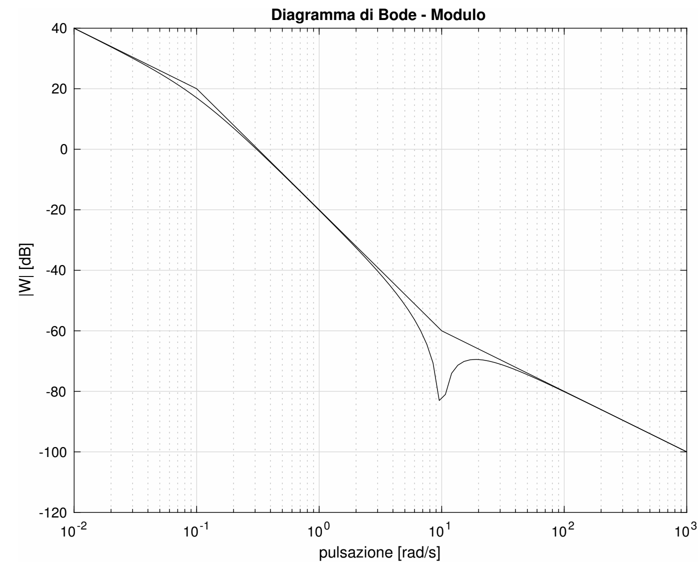
si determini per quale valore di $K \in \mathbb{R}, K \neq 0$, il sistema risponde all'ingresso sinusoidale causale $u(t) = \sin t\ \delta_{-1}(t)$, in condizioni di sola evoluzione forzata, con uscita transitoria pari a

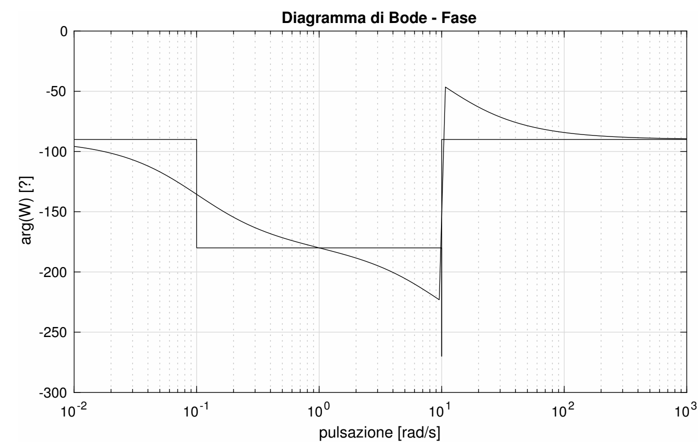
$$y_{tr}(t) = 3e^{-t}\delta_{-1}(t).$$

Teoria. [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti ed a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Il diagramma di Bode è il seguente:



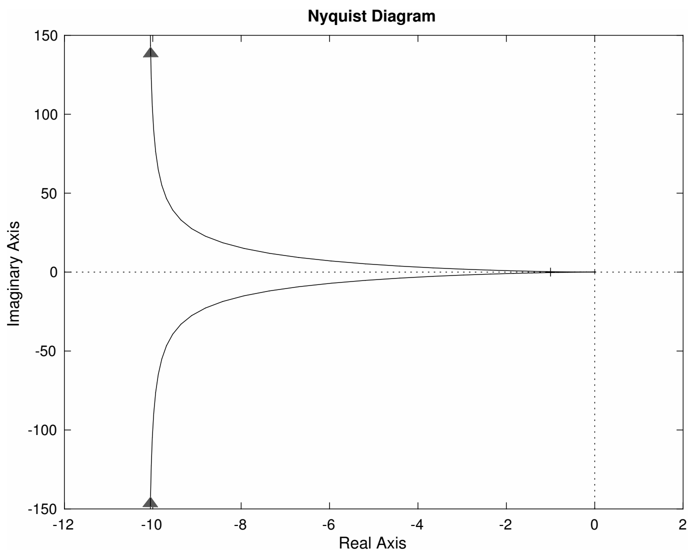


Il modulo parte da $+\infty$ per $\omega = 0$ ed è monotono decrescente, fatta eccezione solo per la presenza di un picco di antirisonanza infinito per $\omega = 10$, inoltre tende a $-\infty$ per $\omega \to +\infty$. La fase parte da $-90°$ ed è monotona decrescente fino a circa $-225°$ per $\omega = 10$, dove una discontinuità di $180°$ la porta circa a $-45°$, da cui prosegue sempre monotonicamente fino a $-90°$. Per motivi di simmetria, la fase vale esattamente $-180°$ per $\omega = 1$, quindi possiamo già attenderci un'intersezione con il semiasse reale negativo nel diagramma di Nyquist in corrispondenza alla pulsazione $\omega = 1$.

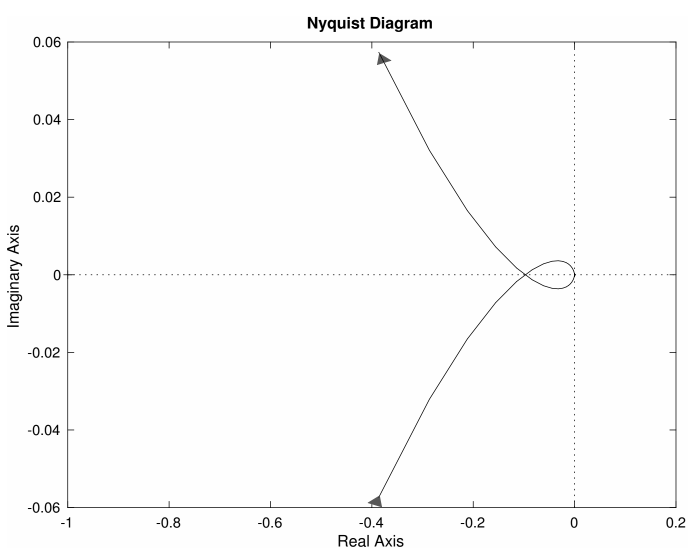
ii) Il calcolo di $G(j\omega)$ porge, dopo alcuni conti,

$$G(j\omega) = -\frac{101}{10}\frac{1-\frac{\omega^2}{100}}{(1-\omega^2)^2+\frac{101^2}{100}\omega^2} - j\frac{(1-\omega^2)\left(1-\frac{\omega^2}{100}\right)}{\omega\left[(1-\omega^2)^2+\frac{101^2}{100}\omega^2\right]}$$

Il limite per $\omega \to 0^+$ porge il valore $-\frac{101}{10}$ per la parte reale e $-\infty$ per quella immaginaria, da cui l'asintoto verticale centrato in $s = -\frac{101}{10}$, con Nyquist che proviene dal punto improprio in basso. In accordo con Bode, Nyquist deve ruotare in senso orario da $-90°$, attraversando il semiasse reale negativo, per poi attraversare l'origine con tangente di angolo circa $-225°$, rispuntando nel quarto quadrante, dove continuando a ruotare in senso orario e formando un piccolo cappio termina nell'origine con tangente verticale. La parte reale si annulla per solo per $\omega = 10$, dove si annulla anche quella immaginaria (passaggio per l'origine in corrispondenza del picco di antirisonanza), mentre quella immaginaria si annulla (come già previsto) anche per $\omega = 1$, dove la parte reale vale $-\frac{99}{1010}$, che rappresenta l'unica intersezione con gli assi oltre alla già citata origine. Il diagramma di Nyquist è il seguente:



Il suo dettaglio per pulsazioni molto prossime a zero viene riportato qui di seguito (ed in realtà non evidenzia affatto, per problemi numerici, quello che succede per valori di ω maggiori di 10 in modulo):



Riportando il diagramma di Nyquist complessivo (per pulsazioni positive e negative) al finito con un semicerchio percorso in senso orario, si ottiene una curva chiusa di cui va valutato il numero di giri N attorno al punto critico $-\frac{1}{k}$. Essendo $n_{G_+} = 0$ e quindi $n_{W_+} = -N$, si hanno i seguenti casi possibili

- $-\frac{1}{k}$ a sinistra di $-\frac{99}{1010}$, cioè $0 < k < \frac{1010}{99}$: in tal caso $N = 0$ e quindi $n_{W_+} = 0$ e c'è stabilità BIBO;
- $-\frac{1}{k}$ coincidente con $-\frac{99}{1010}$, cioè $k = \frac{1010}{99}$: in tal caso non si può valutare N, tuttavia c'è instabilità con 2 poli a parte reale nulla ($s = \pm j$, avvenendo il passaggio per il punto critico per $\omega = 1$) oltre ad un polo negativo (per motivi di continuità dal caso precedente);
- $-\frac{1}{k}$ a destra di $-\frac{99}{1010}$ ma a sinistra dell'origine, cioè $k > \frac{1010}{99}$: in tal caso $N = -2$ e quindi $n_{W_+} = 2$, che corrisponde ad instabilità con 2 poli a parte reale positiva ed 1 negativo;
- $-\frac{1}{k}$ a destra dell'origine, cioè $k < 0$: in tal caso $N = -1$ e quindi $n_{W_+} = 1$, che corrisponde ad instabilità con 2 poli a parte reale negativa ed 1 positivo.

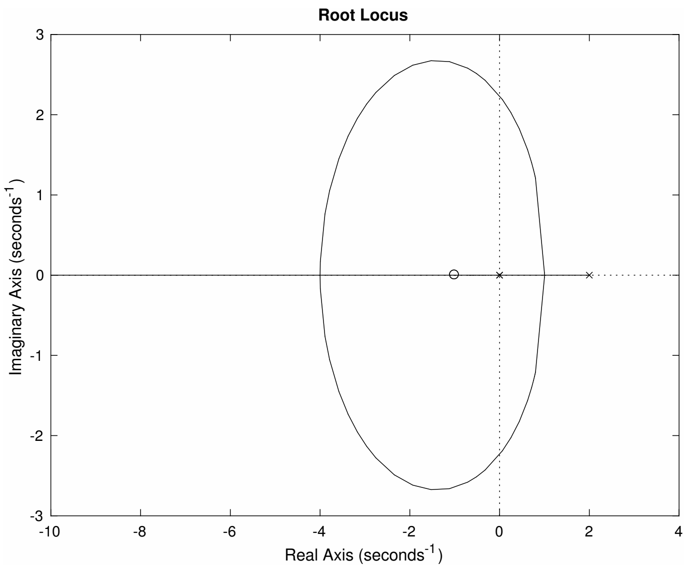
Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi conduce facilmente a

$$s(s+1)(s^2+3s-4) = 0 \;\Rightarrow\; s(s+1)(s-1)(s+4) = 0$$

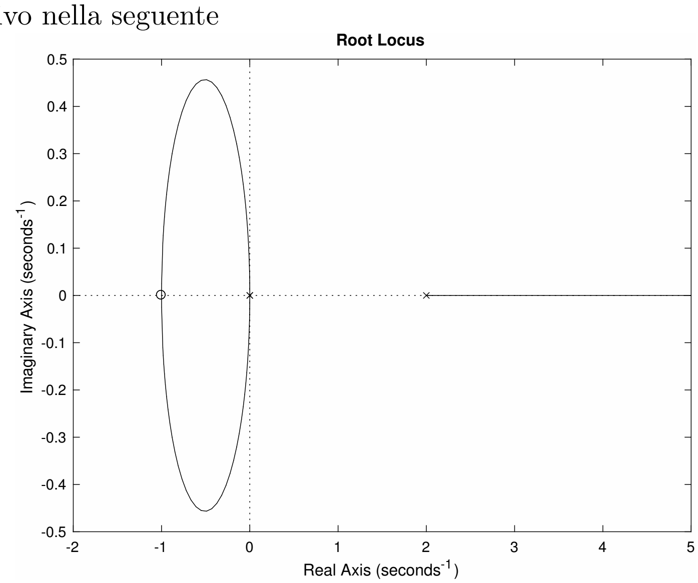
da cui i punti doppi banali ($s = 0, k = 0$ e $s = -1, k = \infty$) ed i punti doppi $s = 1$ ($k = \frac{1}{4} > 0$) e $s = -4$ ($k = \frac{32}{3} > 0$), entrambi appartenenti al Luogo positivo. Per le intersezioni con l'asse immaginario consideriamo $q(j\omega) + kp(j\omega) = 0$, cioè

$$-\omega^2(j\omega - 2) + k(1+j\omega)^2 = 0 \;\Rightarrow\; j\omega(2k - \omega^2) + [2\omega^2 + k(1-\omega^2)] = 0$$

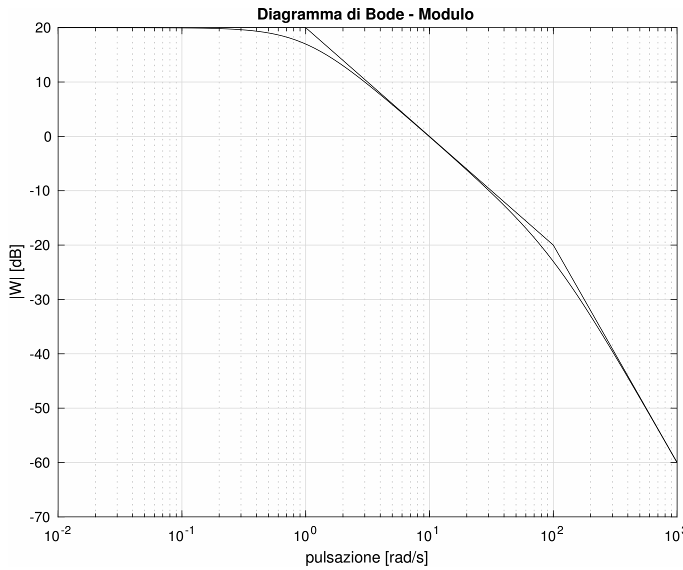
Eguagliando a zero la parte immaginaria si trova $\omega = 0$ oppure $\omega^2 = 2k$ che, sostituite nella parte reale uguagliata a zero, porgono $k = 0$ e $k(5-2k) = 0$ rispettivamente, da cui le soluzioni ($\omega = 0, k = 0$) e ($\omega = \pm\sqrt{5}, k = \frac{5}{2}$). Gli asintoti sono ovviamente il semiasse reale negativo per il Luogo positivo ed il semiasse reale positivo per il Luogo negativo. Facilissimo quindi il Luogo negativo: un ramo parte dal polo $s = 2$ andando verso $+\infty$ e muovendosi sull'asse reale, mentre gli altri due rami escono sul piano complesso dal polo doppio $s = 0$ (non sono disponibili altri tratti dell'asse reale) con simmetria coniugata, tendendo allo zero doppio $s = -1$ senza mai attraversare l'asse immaginario (non ci sono intersezioni con $k < 0$) tranne che nel punto doppio di partenza, e restando quindi sempre confinati nel semipiano negativo. Quindi è presente sempre e solo un polo positivo, il che preclude la stabilità. Nel Luogo positivo, invece, due rami dal polo $s = 2$ e dal polo $s = 0$ si muovono su un segmento dell'asse reale, incontrandosi nel punto doppio $s = 1$ per $k = \frac{1}{4}$, poi escono nel piano complesso e, con simmetria coniugata, attraversano l'asse immaginario in $s = \pm j\sqrt{5}$ per $k = \frac{5}{2}$, quindi passano nel semipiano negativo e si incontrano nel punto doppio $s = -4$ per $k = \frac{32}{3}$, quindi i due rami proseguono lungo l'asse reale, uno verso lo zero $s = -1$, l'altro verso $-\infty$. Il terzo ramo si muove invece sull'asse reale, dal polo $s = 0$ verso lo zero $s = -1$. Quindi abbiamo tre poli a parte reale negativa, e quindi stabilità, se e solo se $k > \frac{5}{2}$. Il luogo positivo è illustrato nella seguente figura

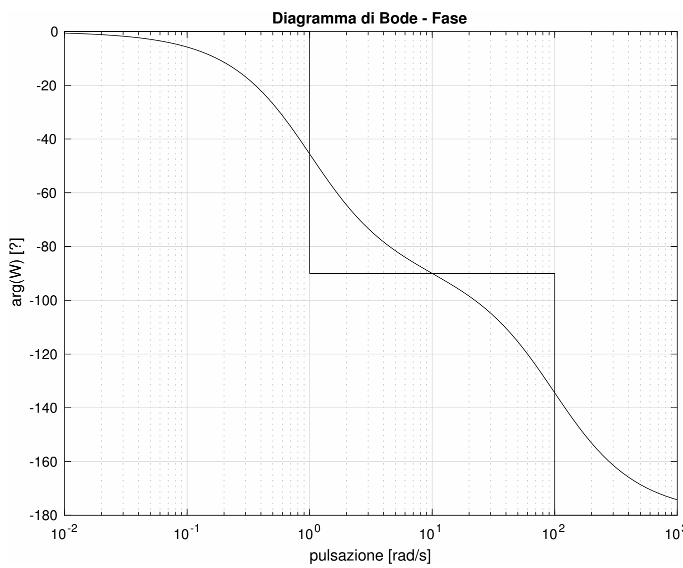


ed il luogo negativo nella seguente



Esercizio 3. i) Il precompensatore che deve sistemare tipo ed errore di regime permanente è $C'(s) = 10^3$. Il diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$ presenta pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 10$ rad/sec e margine di fase di circa $90°$.





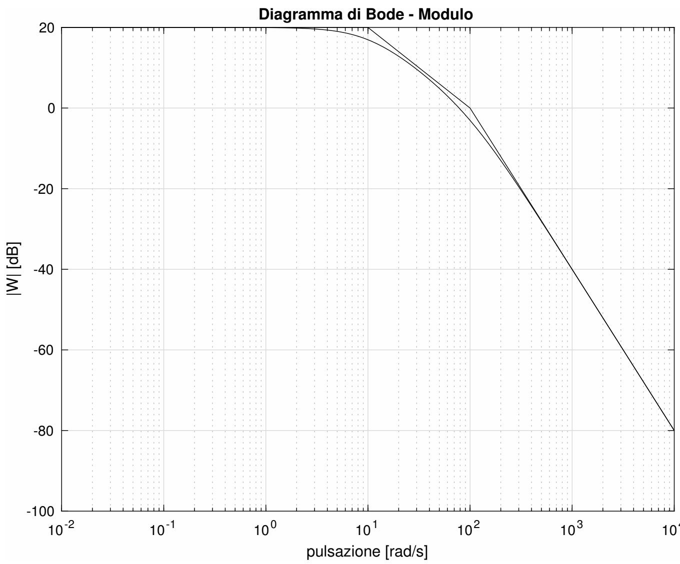
Dovendo alzare $|C'(j\omega_A)G(j\omega_A)|$ di 20 dB, è necessario il ricorso ad una rete anticipatrice con coppia zero-polo distanziata 1 decade e posizionata prima di $\omega_A \simeq 100$ rad/sec. Una possibilità consiste nel mettere uno zero in $s = -1$ ed un polo in $s = -10$ (che induce una cancellazione zero-polo ammissibile), il che corrisponde ad assumere come rete anticipatrice

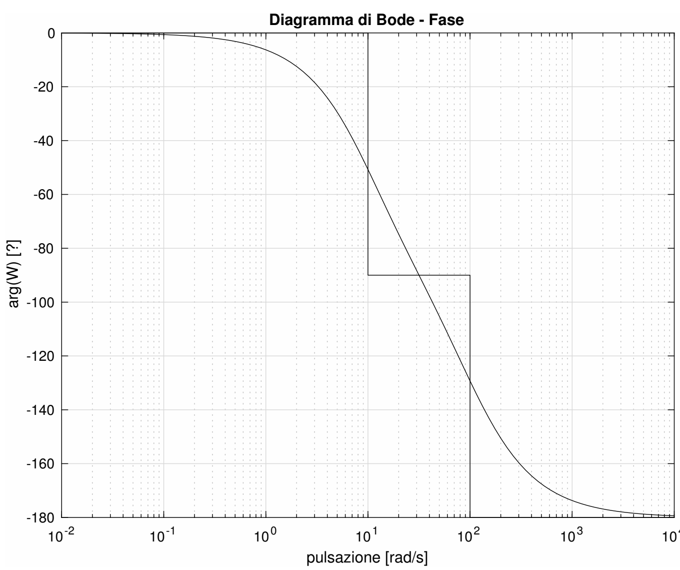
$$C''(s) = \frac{1+s}{1+\frac{s}{10}}$$

e quindi come controllore complessivo

$$C(s) = 1000\frac{1+s}{1+\frac{s}{10}}.$$

La funzione di trasferimento in catena aperta finale $C(s)G(s)$ ha diagrammi di Bode





In base al criterio di Bode, il sistema retroazionato finale risulta BIBO stabile.

Esercizio 4. Operando nel dominio delle trasformate, si trova che il sistema (BIBO stabile) in condizioni di evoluzione forzata risponde all'ingresso sinusoidale causale $u(t) = \sin t \delta_{-1}(t)$, nel seguente modo:

$$Y_f(s) = W(s)U(s) = \frac{K}{s+1}\frac{1}{s^2+1} = \frac{K/2}{s+1} + \frac{-K/2s + K/2}{s^2+1},$$

e quindi nel dominio del tempo con

$$y_f(t) = \left[\frac{K}{2}e^{-t} - \frac{K}{2}\cos t + \frac{K}{2}\sin t\right]\delta_{-1}(t).$$

Ma allora $\frac{K}{2}e^{-t} = y_{tr}(t) = 3e^{-t}$ se e solo se $K = 6$.

Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 189 e successive.