

FONDAMENTI DI ELETTRONAGNETISMO

Corso di Bioelettromagnetismo

A.A. 2022/2023

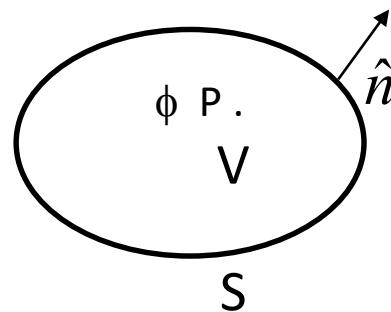
v1.6

RICHIAMI DI MATEMATICA APPLICATA

Il gradiente

- Data una funzione scalare ϕ definita nel volume V racchiuso dalla superficie S , il *grad*- ϕ ($\nabla\phi$) è una funzione vettoriale definita come:

$$\nabla\phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \phi \hat{n} ds$$



- In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale risulta:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z} \right)$$

Il gradiente

- In pratica $\nabla\phi$ è un vettore le cui componenti definiscono la variazione di ϕ rispetto alle coordinate cartesiane
- La relazione $\phi = \text{cost.}$ definisce delle superfici di livello e questo implica che, poiché sulle superfici di livello la funzione ϕ assume sempre lo stesso valore, $\nabla\phi$ è ortogonale alle stesse
- Data la definizione del gradiente, se si deve calcolarne la circuitazione lungo un percorso arbitrario detto γ , risulta:

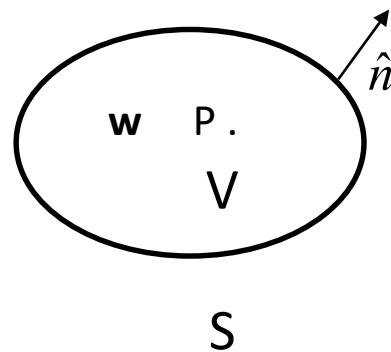
$$\int_{A_\gamma}^B \nabla\phi \, d\gamma = \phi(B) - \phi(A)$$

- Ad esempio in elettrostatica, il campo elettrico si può esprimere come: $\mathbf{e} = -\nabla V$ con V potenziale elettrico: il risultato non dipende dal percorso γ e il campo \mathbf{e} si dice «conservativo»

La divergenza

- Data una funzione vettoriale \mathbf{w} definita nel volume V racchiuso dalla superficie S , la $\text{div } \mathbf{w}$ ($\nabla \cdot \mathbf{w}$) è una funzione scalare definita come:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$



- In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale risulta:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right)$$

La divergenza

- In pratica la $\nabla \cdot \mathbf{w}$ in un punto non è nulla solo se c'è un flusso netto uscente (entrante), per cui può essere interpretata come una misura delle sorgenti (o dei pozzi) dalle quali scaturisce (o muore) il campo vettoriale \mathbf{w}
- Ad esempio in elettrostatica, le cariche elettriche presenti in un punto generano un campo elettrico \mathbf{e} che può essere uscente (od entrante) da quel punto e lì la divergenza del campo \mathbf{e} è non nulla
- Data la definizione della divergenza, ne segue il cosiddetto Teorema di Gauss:

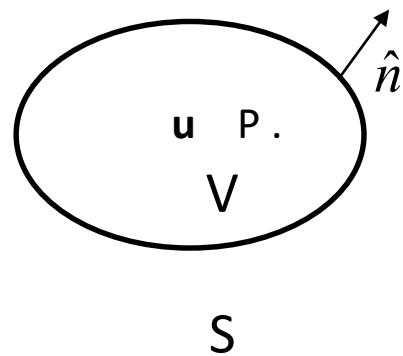
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{w} dv = \oint_S \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

- Ovvero, il calcolo dell'integrale di volume della divergenza di \mathbf{w} è equivalente al calcolo del flusso di \mathbf{w} attraverso la superficie S che racchiude il volume V

Il rotore

- Data una funzione vettoriale \mathbf{u} definita nel volume V racchiuso dalla superficie S , il *rot* \mathbf{u} ($\nabla \times \mathbf{u}$) è una funzione vettoriale definita come:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \hat{n} \times \mathbf{u} \, ds$$



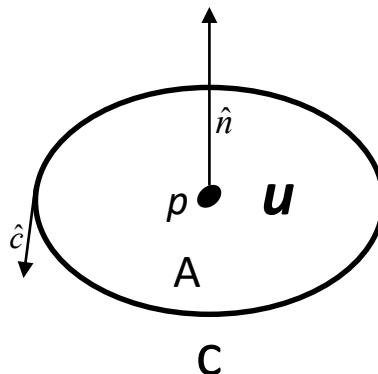
- In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale risulta:

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

Il rotore

- E' possibile dare una definizione alternativa del rotore riferendosi alla sua proiezione lungo una direzione arbitraria:

$$\nabla \times \mathbf{u} \cdot \hat{n} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_C \mathbf{u} \cdot \hat{c} \, dc$$

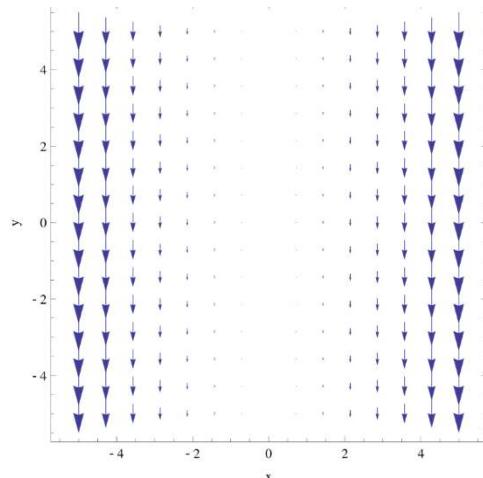
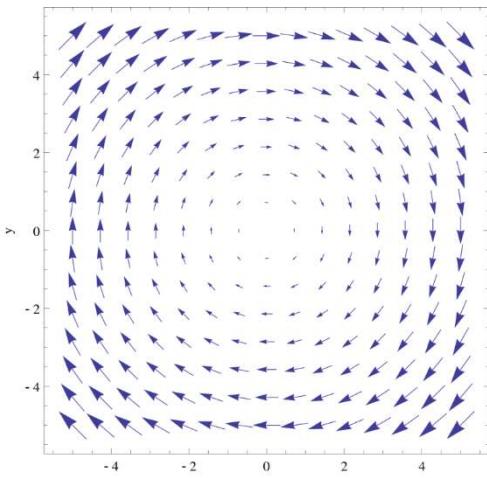


dove ora A è una superficie piana orlata dalla curva chiusa c

Il rotore

- In pratica il $\nabla \times \mathbf{u}$ in un punto esprime il grado di «vorticità» del campo vettoriale \mathbf{u} in quel punto
- Ad esempio, quando si toglie il tappo ad un lavandino colmo d'acqua, se si considera come campo vettoriale \mathbf{u} la velocità delle particelle d'acqua, allora $\nabla \times \mathbf{u}$ è diretto perpendicolarmente al «vortice» d'acqua seguendo l'orientazione destrogiro ed è tanto più intenso tanto più il moto è vorticoso
- **Nota:** un rotore non nullo non implica necessariamente che le linee di forza del campo vettoriale coinvolto siano «vorticose»: possono essere anche «parallele» come avviene per la velocità dell'acqua di un fiume che scorre secondo linee parallele, ma per la diversa velocità dell'acqua che scorre in prossimità delle sponde e il centro del letto del fiume, una foglia che poggia su linee di forza di velocità diverse, comincia a «ruotare»: ne risulta un rotore non nullo del campo velocità dell'acqua diretto secondo la normale al letto del fiume

Il rotore



- Data la definizione del rotore, ne segue il cosiddetto teorema di Stokes:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \hat{n} \, ds = \oint_C \mathbf{u} \cdot \hat{c} \, dc$$

- Ovvero, il calcolo del flusso del rotore di \mathbf{u} attraverso una superficie S è equivalente al calcolo della circuitazione lungo l'orlo C di S del vettore \mathbf{u}

Il Laplaciano

- Esistono poi altri operatori matematici il cui uso risulterà necessario nella derivazione delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, fra questi il Laplaciano
- Data una funzione scalare g , il Laplaciano di g ($\nabla^2 g$) in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale si definisce come:

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

- Il Laplaciano di una funzione vettoriale è un vettore le cui componenti sono il Laplaciano delle componenti del vettore

Cariche e correnti elettriche

- Esistono in natura due tipi di cariche elettriche: positive e negative, la cui legge di attrazione e repulsione è regolata dalla legge di Coulomb
- La carica elettrica elementare è rappresentata da quella dell'elettrone: $e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ [C]
- Nei tessuti biologici le cariche elettriche sono ioni (sodio, calcio, potassio, cloro) che possono essere positivi o negativi
- Si definisce densità volumetrica di carica libera la funzione scalare dello spazio e del tempo così definita:

$$\rho_c(p,t) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} \quad [\text{C}/\text{m}^3]$$

dove Δq è la carica «netta» contenuta nel volume infinitesimo Δv che contiene il punto p

Cariche e correnti elettriche

- Se le cariche elettriche sono in movimento, queste danno luogo ad una corrente elettrica che può definirsi formalmente come:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_s}{\Delta t} \quad [A]$$

dove Δq_s rappresenta la carica netta che fluisce attraverso la superficie orientata S nell'intervallo di tempo Δt

- La corrente elettrica è quindi uno scalare, funzione solo del tempo, che può essere positiva o negativa, dipendendo dalla direzione della normale alla superficie attraverso cui fluiscono le cariche elettriche

Cariche e correnti elettriche

- In elettromagnetismo risulta conveniente introdurre il vettore densità di corrente elettrica \mathbf{j} così definito:

$$\mathbf{j}(p, t) = \rho_c(p, t) \mathbf{v}_p(p, t) [\text{A/m}^2]$$

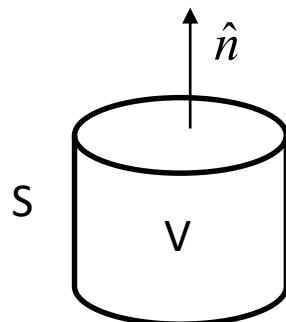
dove \mathbf{v}_p rappresenta la velocità di migrazione media delle particelle cariche

- La relazione quindi tra la corrente elettrica (uno scalare) e la densità di corrente elettrica (un vettore), risulta:

$$i(t) = \int_S \mathbf{j}(p, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

L'equazione di continuità

- Essa è una sorta di principio di conservazione della carica elettrica contenuta in un volume V racchiuso da una superficie S



$$i(t)_{usc} = \oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} ds = - \frac{\Delta q_{int}}{\Delta t}$$

$$i(t)_{usc} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_c dv$$

L'equazione di continuità

- Usando ora il Teorema di Gauss per convertire il calcolo del flusso uscente di un vettore nell'integrale di volume della sua divergenza, si ottiene la seguente relazione:

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \hat{n} \, ds = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_c \, dv$$

- Essendo ora il volume V di forma e dimensione arbitrarie, si perviene all'equazione di continuità in forma differenziale vettoriale e valevole nel generico punto p dello spazio:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

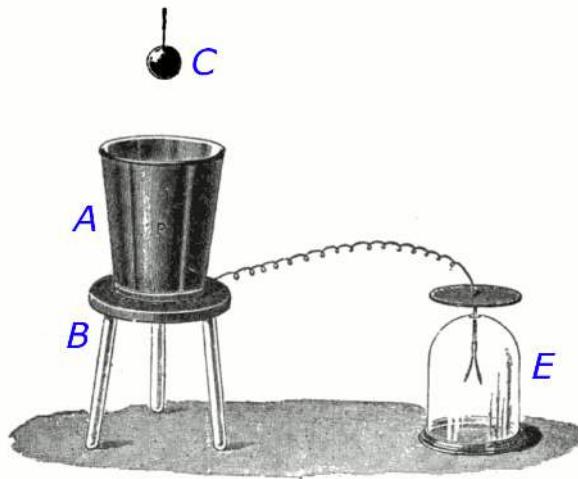
La forza di Lorentz

- Una carica puntiforme q in moto con velocità \mathbf{v} in una regione dello spazio sede di un campo elettromagnetico, risente di una forza \mathbf{f} (detta di Lorentz) data da:

$$\mathbf{f} = q (\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b})$$

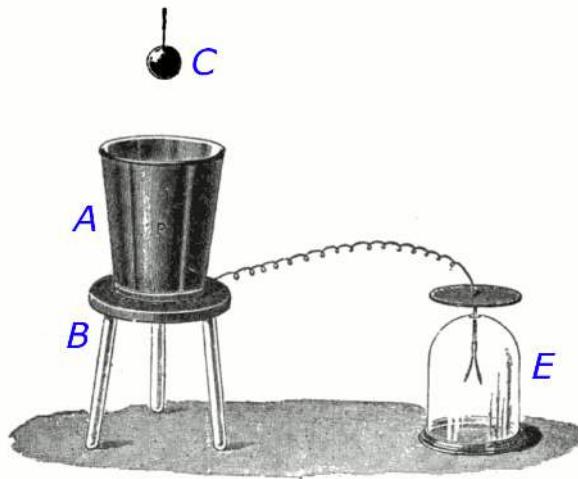
Dove \mathbf{e} rappresenta il campo elettrico [V/m] e \mathbf{b} il campo induzione magnetica [T] o [Wb/m²]

L'esperimento di Faraday



- Una sfera di metallo (C) caricata elettrostaticamente, veniva calata all'interno di un secchio di metallo (A) senza toccarne le pareti. Il secchio poggiava su uno sgabello di legno (B) che lo isolava dal terreno. Un filo elettrico connetteva il secchio ad un elettroscopio (E) placcato d'oro in grado di rilevare presenza di carica elettrica

L'esperimento di Faraday



- Faraday scoprì che una volta inserita all'interno del secchio la sfera carica, quest'ultima «induceva» sul piatto dell'elettroscopio una carica uguale a quella depositata sulla sfera, ma di segno opposto
- Il fenomeno si presentava indipendentemente dal valore e dal segno della carica depositata sulla sfera di metallo calata nel secchio

L'esperimento di Faraday

- Faraday attribuì il fenomeno alla presenza di un campo di «spostamento elettrico» **d** originato dalle cariche elettriche presenti sulla sfera di metallo
- Osservò che le linee di forza dello spostamento elettrico erano uscenti da cariche positive ed entranti nelle cariche negative
- Quantificò che il modulo del vettore spostamento elettrico era tale che il suo flusso attraverso una superficie chiusa era pari al valore totale di carica in essa contenuta:

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = Q$$

ovvero

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_V \rho_c \, dv$$

L'esperimento di Faraday

- L'equazione:

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \int_V \rho_c \, dv$$

è detta legge di Gauss

- Applicando il Teorema di Gauss alla legge di Gauss, si ottiene la corrispondente relazione differenziale vettoriale valevole in un punto generico dello spazio:

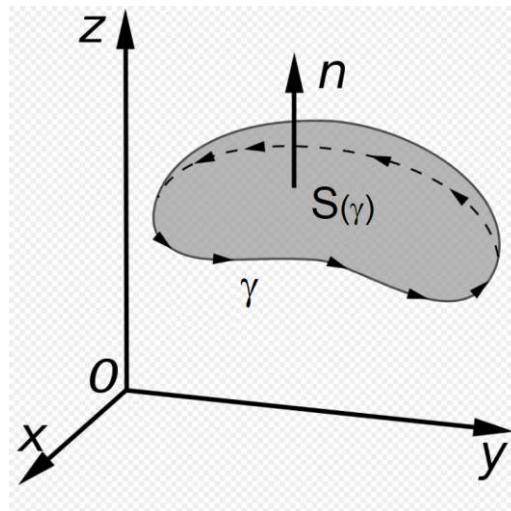
$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_c$$

La legge di Faraday

(legge di induzione elettromagnetica)

- La legge di Faraday afferma che la forza elettromotrice V_γ indotta da un campo di induzione magnetica \mathbf{b} in una linea chiusa γ è pari all'opposto della variazione nell'unità di tempo del flusso magnetico Φ_γ del campo attraverso la superficie $S_{(\gamma)}$ che ha quella linea come frontiera:

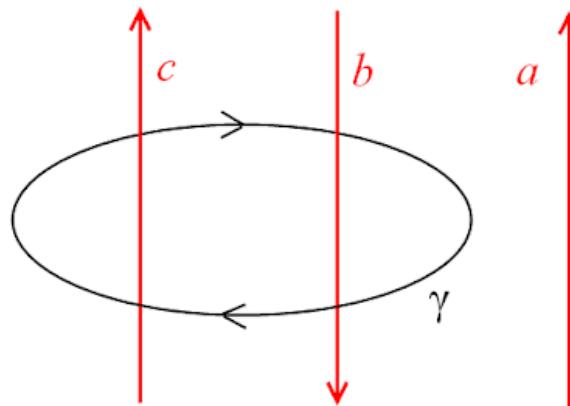
$$V_\gamma = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt} \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{e} \cdot \hat{\gamma} d\gamma = -\frac{d}{dt} \int_{S(\gamma)} \mathbf{b} \cdot \hat{n} ds$$



La legge di Ampère

- La legge di Ampère è una legge fisica che afferma che, nel caso stazionario, l'integrale lungo una linea chiusa γ del campo magnetico \mathbf{h} è uguale alla somma delle correnti elettriche a essa concatenate:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{h} \cdot \hat{\gamma} \, d\gamma = \sum_i I_i = \int_{S(\gamma)} \mathbf{j} \cdot \hat{n} \, ds$$



La legge di Ampère

- Applicando il Teorema di Stokes al primo membro dell'equazione per passare dal calcolo della circuitazione di \mathbf{h} al calcolo del flusso del $\nabla \times \mathbf{h}$ attraverso la stessa superficie su cui è calcolato il flusso del vettore \mathbf{j} , si perviene alla relazione:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}$$

- E poiché (si può dimostrare) la divergenza applicata al rotore di un qualsiasi vettore dà sempre zero, si arriva alla ben nota legge di Kirchhoff ai nodi:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

La legge di Ampère - Maxwell

- E' possibile riformulare la legge di Ampère valida anche in regime non-stazionario; utilizzando la legge di Gauss e l'equazione di continuità infatti:

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_c \Rightarrow \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{d}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = - \nabla \cdot \mathbf{j} \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

- In pratica, il vettore ottenuto sommando $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$ (detto densità di corrente di spostamento) a \mathbf{j} è sempre a divergenza nulla ed è il «pezzo mancante» della legge di Ampère perché sia valida anche in regime non stazionario:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{h} \cdot \hat{\gamma} d\gamma = \int_{S(\gamma)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n} ds$$

Le equazioni di Maxwell

- La legge di Faraday e la legge di Ampère-Maxwell sono equazioni integrali, ovvero regolano grandezze fisiche che sono osservabili e misurabili su intervalli di tempo e su spazi di dimensione finita
- Queste due leggi sono valide anche puntualmente ed istantaneamente, si possono cioè scrivere in forma differenziale: applicando infatti il Teorema di Stokes al primo membro di entrambe le rispettive equazioni, si ottiene:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$$

che sono appunto le due equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell

- Se nella regione in cui si considerano le equazioni di Maxwell sono presenti delle sorgenti di campo elettromagnetico, risulta più conveniente esprimerle nelle equazioni stesse come una densità di corrente elettrica impressa, intendendo con il termine «impressa» la caratteristica di avere nelle equazioni un vettore in più il cui andamento spaziale e temporale è completamente noto:

$$\nabla \times \mathbf{e} = - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_i$$

Relazioni costitutive dei mezzi materiali

- Le equazioni di Maxwell costituiscono un sistema di 6 equazioni (sono 2 equazioni vettoriali) in 15 incognite (i vettori **e**, **h**, **d**, **b**, **j**); per poter quindi affrontare la loro risoluzione servono altre equazioni o legami fra i termini incogniti
- Oltre alle equazioni di Maxwell vanno sempre considerate le «equazioni alle divergenze»:

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_c$$
$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$$

- La prima altro non è che la legge di Gauss, la seconda discende dalla prima delle due equazioni di Maxwell prendendo la divergenza a sinistra e a destra dell'uguale e ricordando che la divergenza di un rotore è sempre nulla
- Dal punto di vista fisico rende conto del fatto che in natura non esistono cariche unipolari magnetiche

Relazioni costitutive dei mezzi materiali

- Il caso più semplice da trattare è quello di un volume occupato dal vuoto senza sorgenti di campo elettromagnetico: in queste condizioni il vettore spostamento elettrico **d** ed il campo elettrico **e** sono legati da una semplice relazione di proporzionalità. Stessa cosa avviene tra i vettori induzione magnetica **b** ed il campo magnetico **h**:

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e} \quad \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h}$$

- $\epsilon_0 = (1/36\pi) \cdot 10^{-9} [\text{F/m}]$ è la permittività dielettrica del vuoto e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{H/m}]$ è la permeabilità magnetica del vuoto
- Ecco allora che le equazioni di Maxwell diventano un sistema di 6 equazioni in 6 incognite (le componenti dei vettori **e** ed **h**)

$$\nabla \times \mathbf{e} = - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}$$

Relazioni costitutive dei mezzi materiali

- Nel caso più generale, sempre in assenza di sorgenti ma all'interno di un mezzo materiale, le relazioni costitutive si complicano e dipendono dalle proprietà dei mezzi stessi
- Nella pratica si riscontra che tali relazioni sono dei funzionali del tipo:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{e}) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{h}) \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{e})$$

che possono essere esplicitati solo analizzando in dettaglio le proprietà generali dei mezzi materiali

- Queste proprietà si dividono i 2 classi:
 - le proprietà connesse alle simmetrie dei mezzi materiali
 - le proprietà connesse alla relazione di causa-effetto

Relazioni costitutive dei mezzi materiali

- Alla prima classe appartengono le seguenti caratteristiche:
 - Omogeneità nel tempo
 - Omogeneità nello spazio
 - Isotropia
- Alla seconda classe appartengono le seguenti caratteristiche:
 - Linearità
 - Dispersività nel tempo
 - Dispersività nello spazio
- Supponendo valga la linearità, la relazione tra il vettore **d** ed **e** (ma analogamente tra il vettore **b** e **h** e tra il vettore **j** ed **e**), può essere matematicamente esprimibile mediante integrali spaziali e temporali

Relazioni costitutive dei mezzi materiali

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{G}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'$$

dove \mathbf{G} , detta matrice di Green, ha dimensione 3x3 e rende conto del fatto della possibile non-isotropia (anisotropia), mentre \mathbf{r} e \mathbf{r}' sono due generici raggi vettori e t, t' due generici istanti temporali

- La relazione sopra può essere molto complicata, ma nel caso particolare di:
 - isotropia
 - omogeneità (temporale e spaziale) e non-dispersività (spaziale e temporale)

si semplifica di molto

- Infatti, in un mezzo materiale che non sia il vuoto, in tutte le ipotesi precedenti, si ha:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$$

dove ϵ [F/m] è detta permittività dielettrica

Relazioni costitutive dei mezzi materiali

- Analoghe considerazioni valgono per i vettori \mathbf{b} e \mathbf{j} :

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$$

dove μ [H/m] è detta permeabilità magnetica e σ [S/m] è detta conducibilità elettrica

- Nei casi pratici però i mezzi materiali sono lineari, isotropi, omogenei nel tempo e non dispersivi nello spazio. Questo implica che la relazione tra, ad esempio, \mathbf{d} ed \mathbf{e} sia più complicata:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{e}(\mathbf{r}, t') dt'$$

una convoluzione temporale lega quindi i 2 campi

- Nella teoria di base dei campi elettromagnetici, faremo però uso delle ipotesi «più favorevoli» che portano quindi a delle «leggi di legame materiale» come quelle di semplice proporzionalità evidenziate sopra

Interazione fra il campo elettromagnetico e la materia

L'interazione campo elettromagnetico-materia si basa sul modello dipolare (valido per frequenze del campo inferiori a quella di ionizzazione).

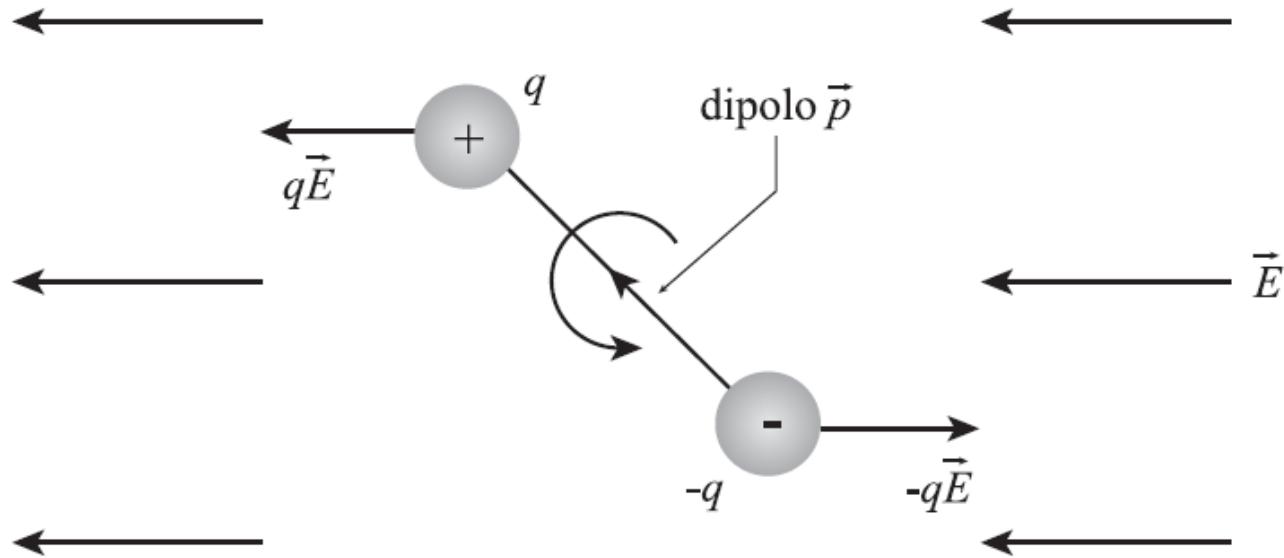


Figura 2-1 Coppia di forze che orientano un dipolo in un campo elettrico

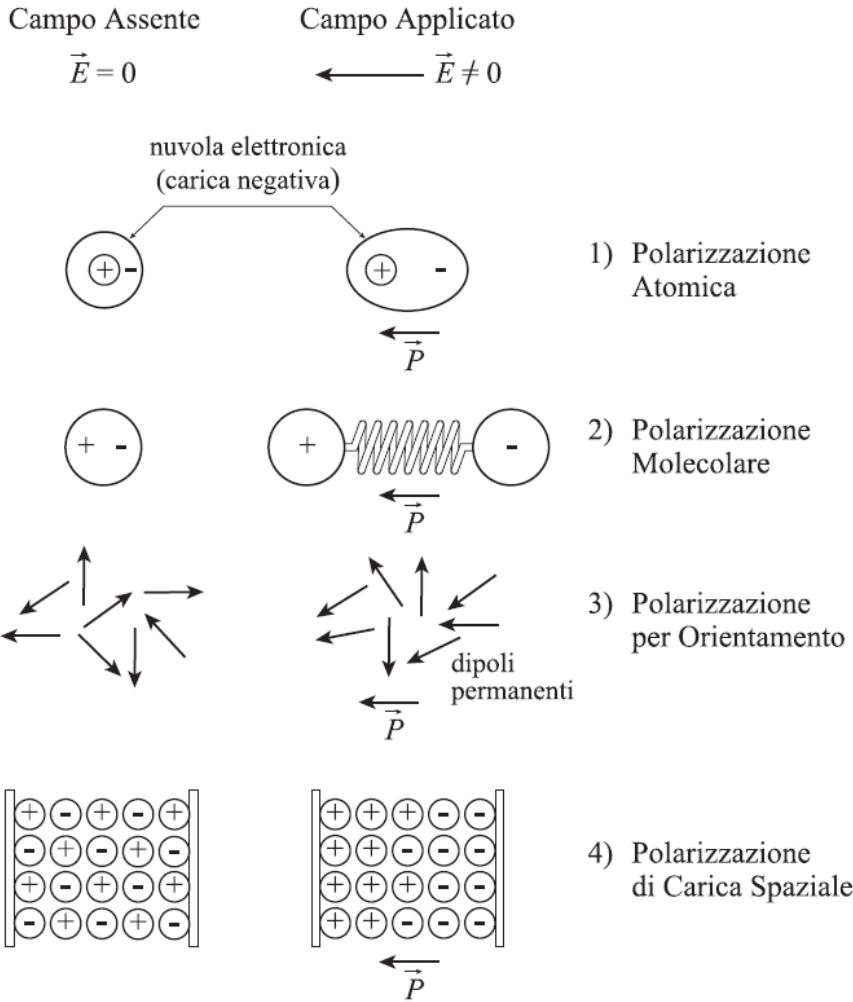


Figura 2-2 Meccanismi di polarizzazione

$$\bar{d} = \epsilon \bar{e} = \epsilon_0 \bar{e} + \bar{P}$$

Dove \bar{P} [C/m²] è la polarizzazione del mezzo (momento di dipolo elettrico per unità di volume)
 Se la risposta del mezzo è lineare:

$$\bar{P} = \epsilon_0 \chi_e^{(1)} \bar{e}$$

dove $\chi^{(1)}$ è detta suscettività elettrica del mezzo.

$$\begin{aligned} \bar{d} &= \epsilon_0 \left(1 + \chi_e^{(1)} \right) \bar{e} = \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r \bar{e} = \epsilon \bar{e} \end{aligned}$$

$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ è detta costante di permittività dielettrica relativa (al vuoto).

Tabella 2-1- Conducibilità statica ($f = 0$) di alcuni materiali

Materiale	Conducibilità [S/m]	Materiale	Conducibilità [S/m]
Argento	6.1×10^7	Acqua di mare	4
Rame	5.8×10^7	Acqua dolce	10^{-3}
Alluminio	3.5×10^7	Acqua distillata	2×10^{-4}
Ottone	1.5×10^7	Vetro	$10^{-10} \div 10^{-14}$
Piombo	4.8×10^6	Mica	$10^{-11} \div 10^{-15}$

Materiale	ϵ_r
Teflon	2,1
Mica	6
Alcool	24,5
Acqua	80

Tabella 2-2 Costanti dielettriche relative di alcune sostanze

Analogamente, $\bar{b} = \mu \bar{h} = \mu_0 (\bar{h} + \bar{M})$

dove \bar{M} è la magnetizzazione del mezzo.

Se la risposta del mezzo è lineare: $\bar{M} = \chi_m^{(1)} \bar{h}$

Dove $\chi_m^{(1)}$ è detta suscettività magnetica del mezzo.

$$\bar{b} = \mu_0 \left(1 + \chi_m^{(1)}\right) \bar{h} = \mu_0 \mu_r \bar{h} = \mu \bar{h}$$

$\mu_r = \mu/\mu_0$ è detta costante di permeabilità magnetica relativa (al vuoto).

Diamagnetici $\chi_m^{(1)} < 0$ ($-10^{-4} \div -10^{-5}$)

Paramagnetici $\chi_m^{(1)} > 0$ (10^{-5})

Ferromagnetici $\chi_m^{(1)} >> 1$ ($10 \div 10^5$)

Ad eccezione dei ferromagnetici, $\mu = \mu_0$ e tali mezzi si definiscono **dielettrici**.

Equazioni di Maxwell in regime armonico

- Spesso nello studio dei campi e.m. interessa l'analisi in «regime armonico», ovvero considerando l'andamento temporale di tutte le grandezze coinvolte noto e di tipo sinusoidale
- In queste condizioni, la forma temporale delle soluzioni delle equazioni di Maxwell è nota a priori e le uniche grandezze da determinare sono le *ampiezze* e le *fasi* delle funzioni sinusoidali in oggetto
- Al pari di quello che viene fatto nell'analisi delle reti elettriche in regime armonico introducendo il concetto di fasore, per i campi elettromagnetici variabili nel tempo secondo una legge puramente sinusoidale, conviene far ricorso a quella che viene chiamata «rappresentazione di Steinmetz»

Equazioni di Maxwell in regime armonico

- In sostanza, ad ogni vettore di campo si associa il corrispondente «vettore complesso» (vettore che verrà indicato con la lettera maiuscola) costruito come la combinazione lineare a coefficienti complessi degli usuali versori di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(\mathbf{r},t) &= \sum_{i=1}^3 h_i(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_i(\mathbf{r})) \hat{x}_i \rightarrow \\ &\rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 h_i(\mathbf{r}) e^{j\varphi_i(\mathbf{r})} \hat{x}_i\end{aligned}$$

- Fra il vettore di campo reale ed il corrispondente complesso, esiste la seguente relazione biunivoca:

$$\mathbf{h}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}$$

dove con ω [rad/s] è stata indicata la pulsazione della funzione sinusoidale, legata alla frequenza temporale f [Hz] dalla relazione:

$$\omega = 2\pi f$$

Equazioni di Maxwell in regime armonico

- E' importante notare come nella notazione di Steinmetz, si faccia uso del valore di picco della funzione sinusoidale e non del valore efficace come si fa per i fasori
- Quando si passa alla notazione a vettori complessi, se nelle equazioni compare una derivata temporale, quest'ultima nella notazione di Steinmetz della stessa equazione compare come la semplice moltiplicazione della quantità $j\omega$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - j\omega \mathbf{B}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Equazioni di Maxwell in regime armonico

- Nella rappresentazione di Steinmetz, le relazioni costitutive nelle ipotesi di linearità, isotropia, omogeneità temporale e non dispersività spaziale risultano:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

consentendo di riscrivere le equazioni di Maxwell come:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}_i = j\omega \epsilon_c \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$$

dove si è introdotta la nuova grandezza $\epsilon_c = \epsilon - j\sigma/\omega$ chiamata «permittività dielettrica complessa»

- In riferimento ad essa si definisce «angolo di perdita»:

$$\delta = \text{atan} \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad 0 \leq \delta < \pi/2$$

un parametro utile a rapportare l'entità della densità di corrente elettrica alla densità di corrente di spostamento

Mezzo buon conduttore

- Se alla pulsazione ω la densità di corrente elettrica risulta di molto superiore alla densità di corrente di spostamento, allora si è in presenza di un mezzo che si classifica come «buon conduttore»:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

- Al contrario un mezzo si classifica come «buon dielettrico» se:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$$

- Viene infine definita permittività dielettrica complessa «relativa» la quantità:

$$\epsilon_{cr} = \epsilon/\epsilon_0 - j\sigma/(\omega\epsilon_0) = \epsilon' - j\epsilon''$$

in analogia alla permittività dielettrica ed alla permeabilità magnetica relative:

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 \qquad \mu_r = \mu/\mu_0$$

PROPRIETÀ DIELETTRICHE DEI TESSUTI BIOLOGICI

- LO STUDIO DELLE PROPRIETÀ DIELETTRICHE DEI TESSUTI BIOLOGICI APPARTIENE SIA ALLA SCIENZA DI BASE CHE A QUELLA APPLICATA

I PRIMI STUDI SCIENTIFICI FURONO PRESENTATI DA SCHWAN NEL **1957**, POI DA SCHWAN E FOSTER NEL **1980**, IN SEGUITO DA PETHIG E KELL NEL **1987**

STUDI PIÙ ESTENSIVI SONO STATI PRESENTATI DA GEDDES E BAKER NEL **1967**
NEL **1980** STUCHLY PRESENTÒ RISULTATI TABULATI NELL'INTERVALLO **10 KHz - 10 GHz**

DUCK NEL **1990** ESTESE LA RICERCA PRESENTANDO DATI VALIDI FINO A **90 GHz**

DI FATTO IN TUTTI QUESTI STUDI, I RISULTATI SONO PRESENTATI SOTTO FORMA DI DATI TABULATI

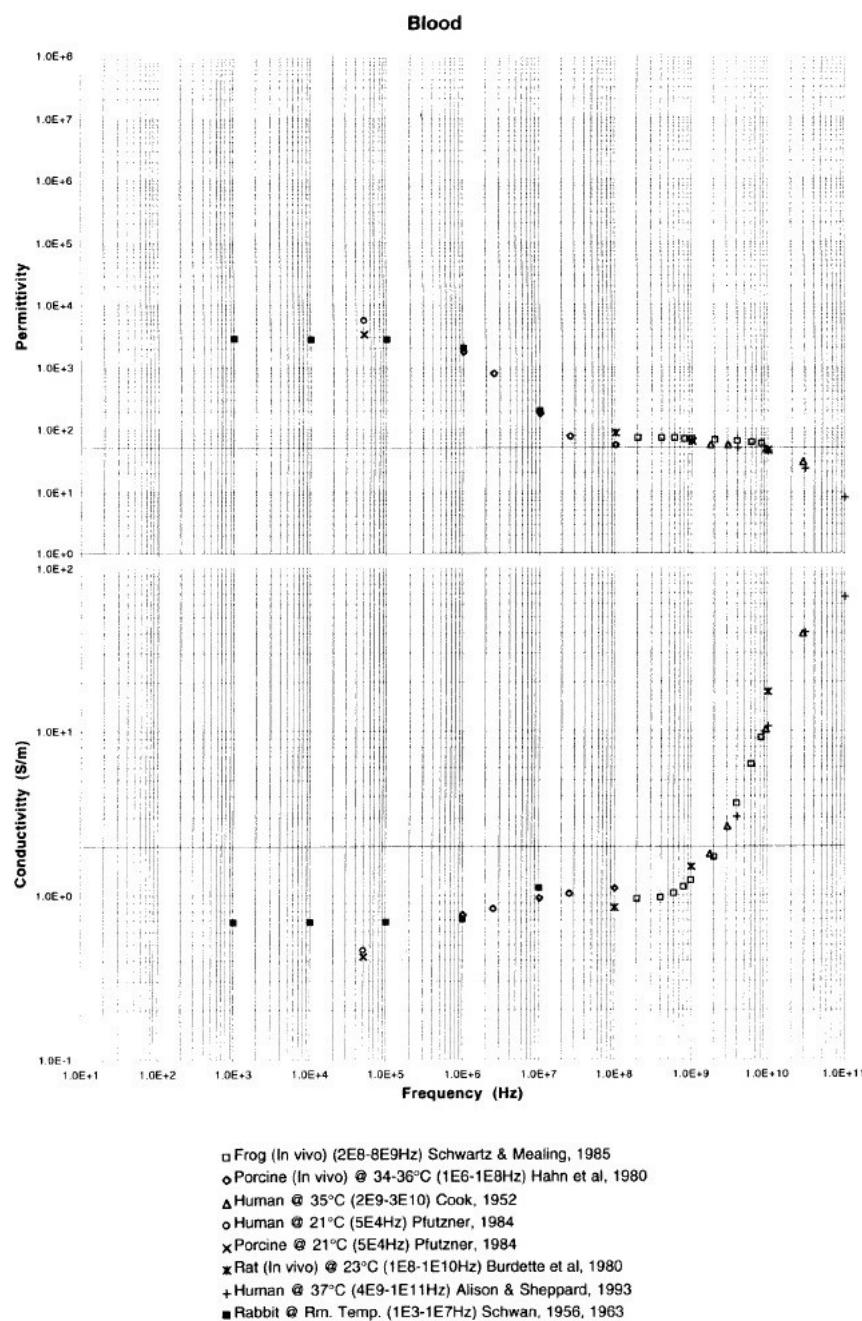


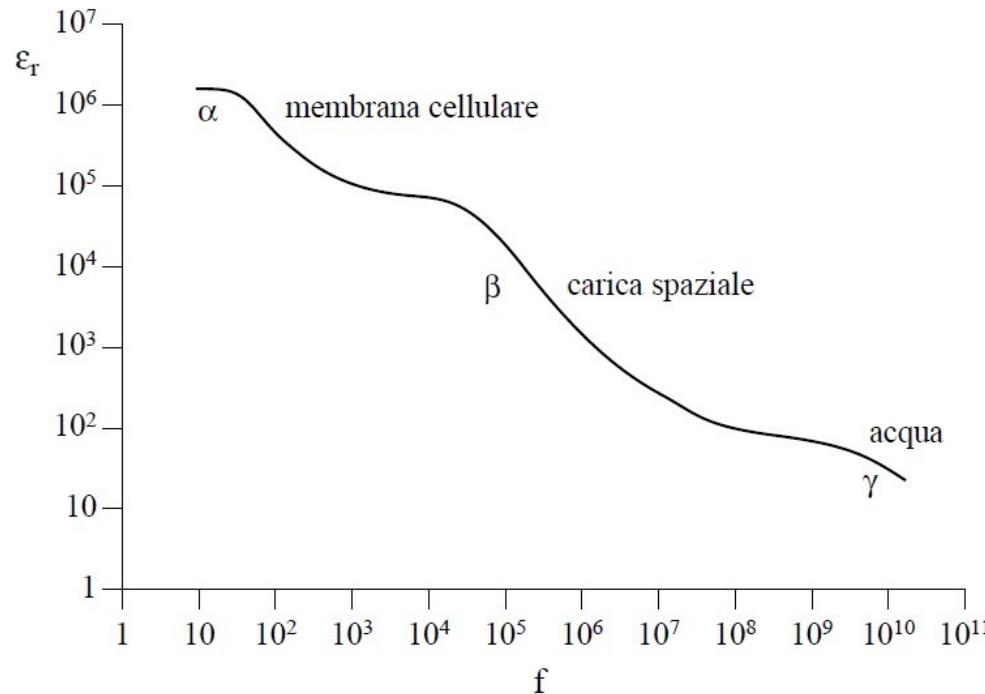
Figure 1. Survey of permittivity and conductivity of tissues in the frequency range 10 Hz to 100 GHz. (a) Blood.

- **LE PROPRIETÀ DIELETTRICHE DEI TESSUTI BIOLOGICI RISULTANO DALL'INTERAZIONE DEI CAMPI E.M. CON I SUOI COSTITUENTI, A LIVELLO CELLULARE E MOLECOLARE**

NEI TESSUTI BIOLOGICI L'ELEMENTO CHE CONTRIBUISCE MAGGIORMENTE ALLE PROPRIETÀ DIELETTRICHE È L'ACQUA

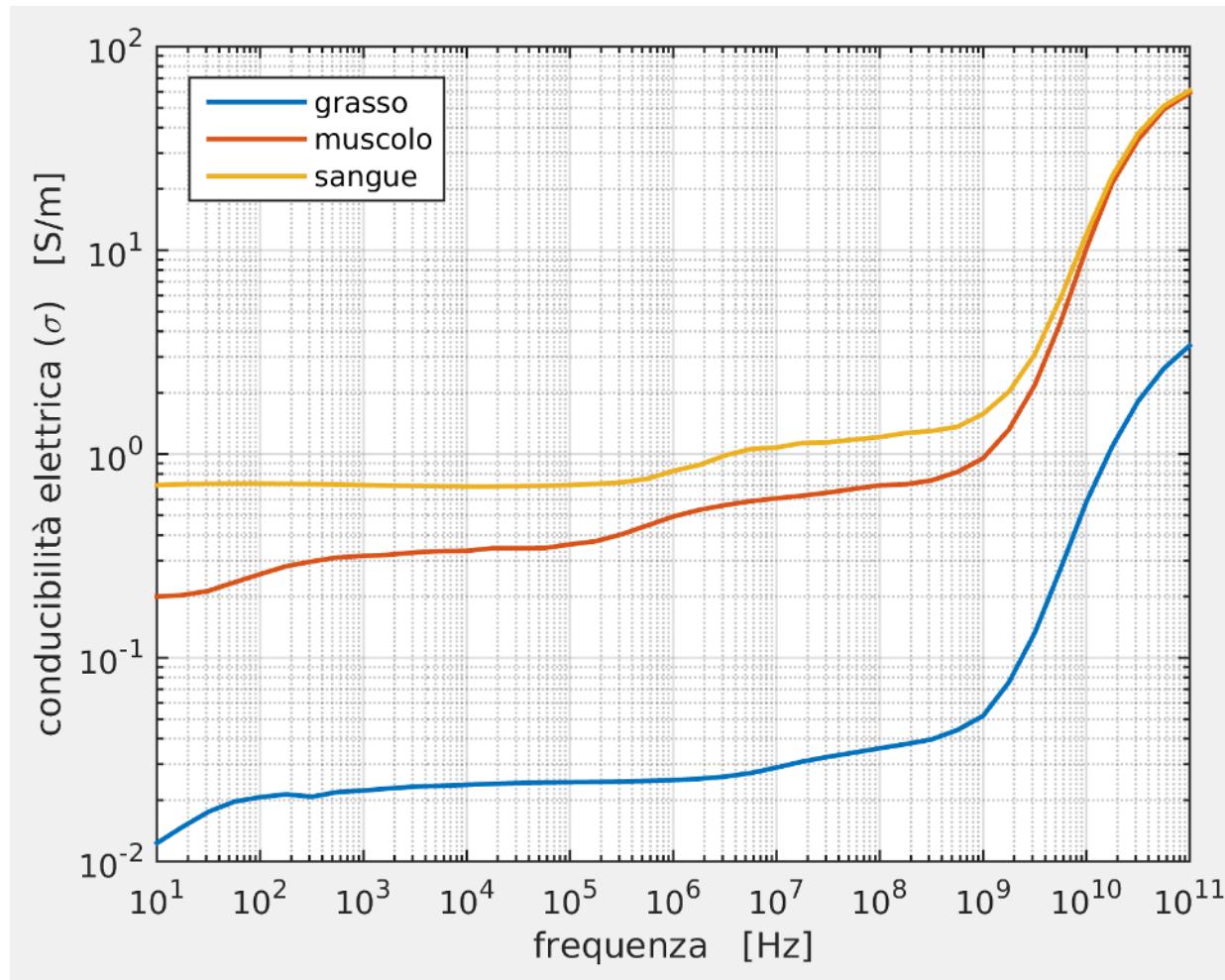
LE PROPRIETÀ DIELETTRICHE DEI VARI TESSUTI SONO QUINDI LEGATE ALLA PERCENTUALE D'ACQUA IN ESSI PRESENTE

Proprietà dei tessuti biologici

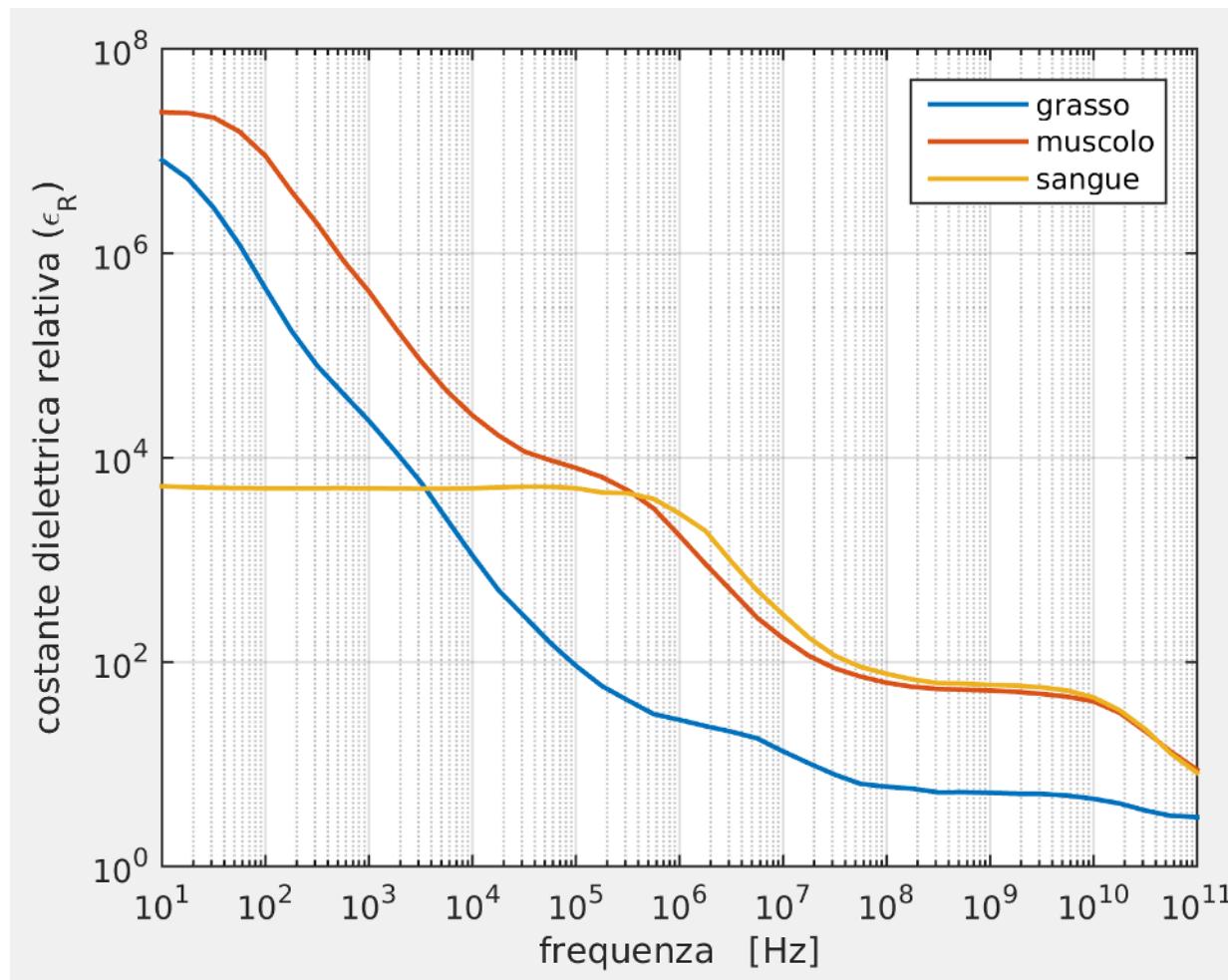


Andamento della costante dielettrica di un tessuto biologico al variare della frequenza f

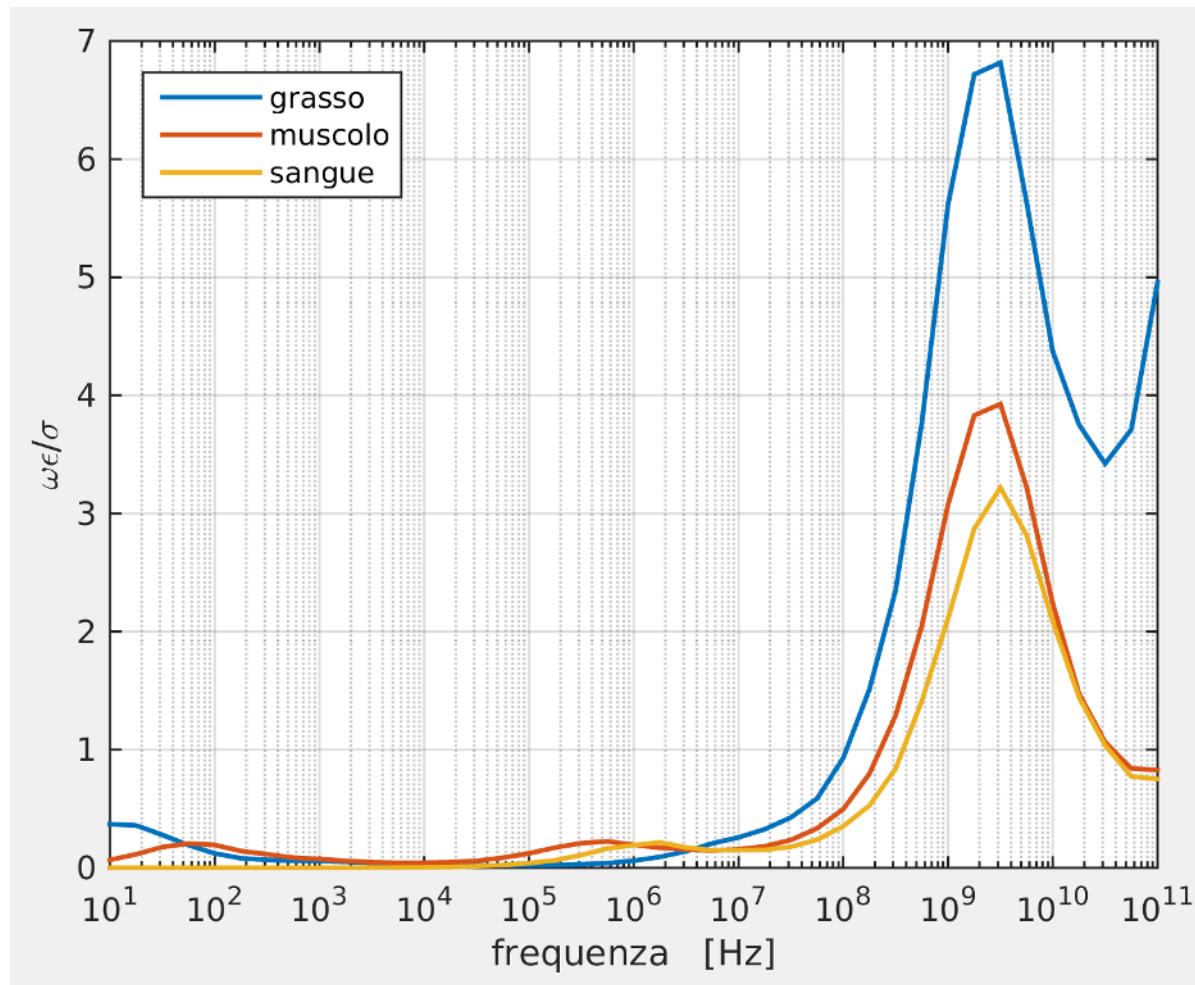
Proprietà dei tessuti biologici



Proprietà dei tessuti biologici



Proprietà dei tessuti biologici

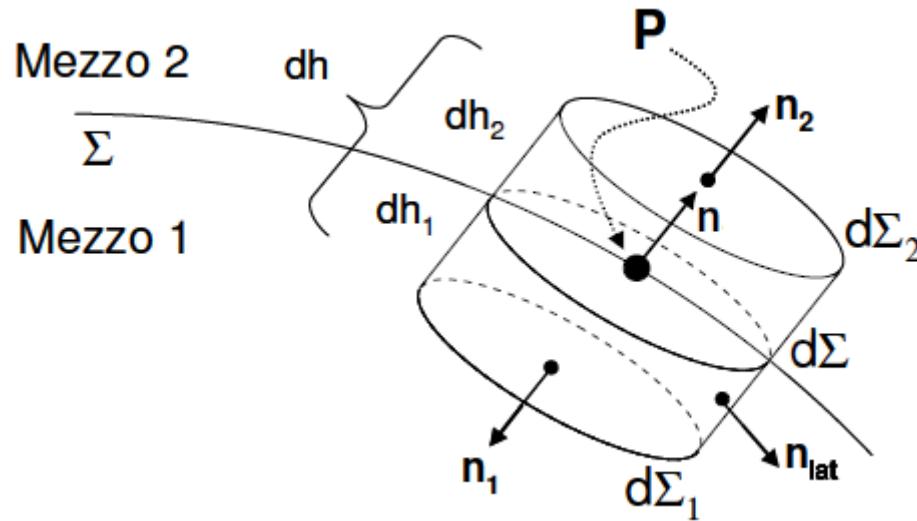


Le condizioni di continuità

- In un contesto realistico il campo elettromagnetico è presente in una regione dello spazio nella quale il materiale è disomogeneo
- Se il passaggio da un mezzo materiale ad un altro avviene in modo «brusco», è possibile ricavare delle condizioni, dette di «continuità», valide per alcune delle componenti del campo elettromagnetico
- Si consideri dapprima il comportamento del vettore spostamento elettrico **d**
- Si applichi la legge di Gauss ad un cilindretto infinitesimo a metà tra i 2 mezzi:

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = Q$$

Le condizioni di continuità



- Scomponendo il flusso netto uscente nei vari contributi si ha:

$$\mathbf{d}_1 \cdot \hat{n}_1 d\Sigma_1 + \mathbf{d}_2 \cdot \hat{n}_2 d\Sigma_2 + \Phi_L = \Delta Q$$

dove Φ_L indica il «flusso laterale» che si annulla quando $dh \rightarrow 0$

- La legge di Gauss applicata al cilindretto per $dh \rightarrow 0$ diventa:

$$-\mathbf{d}_1 \cdot \hat{n} d\Sigma + \mathbf{d}_2 \cdot \hat{n} d\Sigma = \lim_{dh \rightarrow 0} \Delta Q = \Delta Q_s$$

dove ΔQ_s rappresenta l'*eventuale* carica superficiale

Le condizioni di continuità

- La legge di Gauss applicata al cilindretto per $d\Sigma \rightarrow 0$ diventa:

$$(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \hat{n} = \lim_{d\Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_s}{d\Sigma} = \rho_s$$

dove ρ_s [C/m²] rappresenta *l'eventuale* densità superficiale di carica elettrica

- Se nel punto p non è presente una densità superficiale di carica, si ottiene la seguente condizione di continuità per il vettore \mathbf{d} :

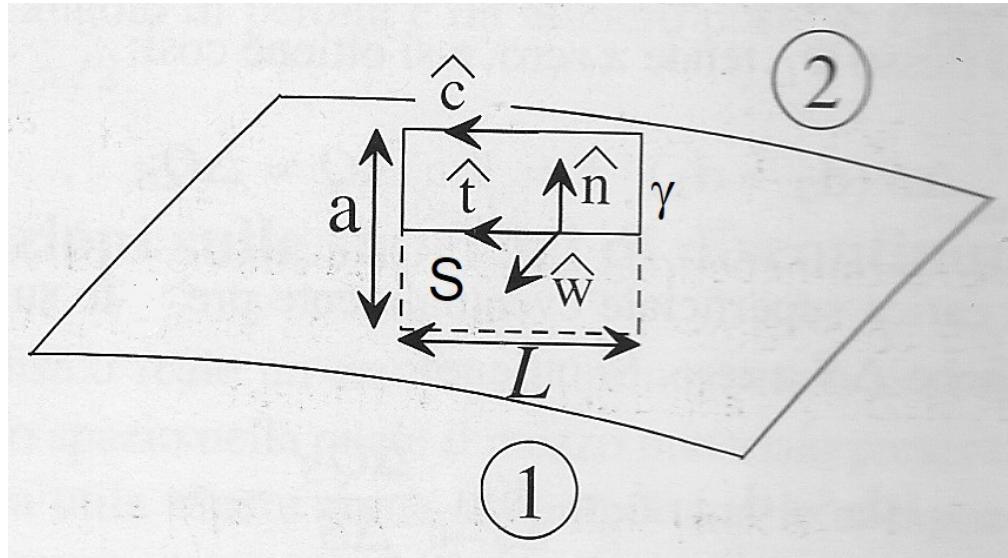
$$\mathbf{d}_{1n} = \mathbf{d}_{2n}$$

- In maniera analoga, partendo dall'equazione $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ si ottiene la seguente condizione di continuità per il vettore \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}_{1n} = \mathbf{b}_{2n}$$

- Le condizioni di continuità dei vettori \mathbf{d} e \mathbf{b} sono riferite quindi alla sola componente normale alla superficie di separazione

Le condizioni di continuità



- Applichiamo ora la legge di Ampère-Maxwell ad una spira rettangolare infinitesima di base L e di altezza a che attraversa i 2 mezzi:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{h} \cdot \hat{c} \, dc = \int_{S(\gamma)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) \cdot \hat{w} \, ds$$

Le condizioni di continuità

- Scomponendo la circuitazione di \mathbf{h} nei vari tratti si ha:

$$\mathbf{h}_1 \cdot \hat{\mathbf{c}}_1 L + \mathbf{h}_2 \cdot \hat{\mathbf{c}}_2 L + C_a = \Delta I + \frac{\partial \phi \mathbf{d}}{\partial t}$$

dove C_a indica la circuitazione lungo i tratti verticali, ΔI l'eventuale corrente attraverso la superficie S della spira e $\phi \mathbf{d}$ il flusso attraverso S del vettore \mathbf{d}

- Facendo tendere l'altezza della spira a 0, vanno a 0 i termini C_a e $\phi \mathbf{d}$:

$$- \mathbf{h}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}} L + \mathbf{h}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}} L = \lim_{a \rightarrow 0} \Delta I = \Delta I_s$$

dove ΔI_s rappresenta l'*eventuale* corrente elettrica superficiale

Le condizioni di continuità

- La legge di Ampere-Maxwell applicata alla spira γ per $L \rightarrow 0$ diventa:

$$(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Delta I_s}{L} = \mathbf{j}_s \cdot \hat{\mathbf{w}}$$

dove \mathbf{j}_s [A/m] rappresenta il vettore densità lineare di corrente elettrica

- Osservando che $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{n}}$ e sfruttando la regola della permutazione ciclica del prodotto misto tra i versori $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{n}}$, l'equazione sopra diventa:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_s \rightarrow \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{h}_2 \text{ se } \mathbf{j}_s = 0$$

- In maniera analoga, partendo dalla legge di induzione elettromagnetica, si ottiene la seguente condizione di continuità per il vettore \mathbf{e} :

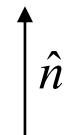
$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{e}_2$$

- Le condizioni di continuità dei vettori \mathbf{h} ed \mathbf{e} sono riferite quindi alla sola componente tangente alla superficie di separazione

Le condizioni di continuità in presenza di CEP

2

Aria



1

Conduttore Elettrico Perfetto

$$\sigma = \infty$$

- Poiché nel mezzo 1 NON vi può essere campo elettrico altrimenti vi sarebbe una corrente infinita: $\mathbf{e}_1 = 0 \rightarrow \hat{n} \times \mathbf{e}_2 = 0 \rightarrow \mathbf{e}_2(\mathbf{d}_2)$ (se non nullo) è NORMALE alla superficie di separazione, inoltre, sulla superficie: $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_{2n} = \rho_s$ ovvero sulla superficie vi è una carica superficiale su cui nascono (o muoiono) le linee di forza del vettore spostamento elettrico
- Poiché nel mezzo 1, in assenza di campo elettrico, NON vi può essere in regime variabile un campo magnetico: $\mathbf{h}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{b}_1 = 0 \rightarrow \mathbf{b}_2 \cdot \hat{n} = 0 \rightarrow \mathbf{b}_2 (\mathbf{h}_2)$ (se non nullo) è TANGENTE alla superficie di separazione, inoltre, sulla superficie:
$$\hat{n} \times \mathbf{h}_2 = \mathbf{j}_s$$
 ovvero sulla superficie vi è una corrente elettrica superficiale

Primo esempio di risoluzione delle eq. di M.

- Si considerino inizialmente le equazioni di Maxwell nel dominio del tempo sotto le seguenti ipotesi di lavoro:
 - mezzo lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo $\rightarrow \epsilon, \mu, \sigma$ sono costanti scalari
 - le sorgenti sono fuori dalla regione di interesse

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{h} = \sigma \mathbf{e} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}$$

- Semplifichiamo ulteriormente la trattazione ipotizzando anche l'assenza di conduzione elettrica ($\sigma = 0$) e si esegua il rotore a sinistra e a destra dell'uguale nella seconda equazione di Maxwell utilizzando poi la prima equazione

Primo esempio di risoluzione delle eq. di M.

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \nabla \times \mathbf{e}}{\partial t} = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2}$$

- Si è quindi ottenuta una sola equazione in una sola incognita (il campo magnetico \mathbf{h}), ma il prezzo da pagare è stato l'innalzamento del grado dell'equazione e la presenza del rotore del rotore di un vettore
- Ci viene in soccorso la seguente identità vettoriale:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\nabla^2 \mathbf{h} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$$

che consente di riscrivere l'equazione sopra come:

$$-\nabla^2 \mathbf{h} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = -\epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2}$$

Primo esempio di risoluzione delle eq. di M.

- Si ricorda ora l'equazione alle divergenze relativa al vettore induzione magnetica \mathbf{b} e si sfrutta l'ipotesi di omogeneità del mezzo:

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \rightarrow \mu \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = 0$$

e si ottiene quella equazione detta «delle onde» conosciuta anche come equazione di d'Alembert:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0$$

- Essa è sì una equazione vettoriale ma potendosi separare in maniera formalmente identica per tutte e 3 le componenti del vettore incognito \mathbf{h} , ci si trova a risolvere un problema di complessità scalare
- Per capire la natura delle sue soluzioni, la si consideri esplicitata in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial z^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0$$

dove si è posto $\nu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$

Primo esempio di risoluzione delle eq. di M.

- Si consideri ora la precedente equazione per una generica componente del vettore \mathbf{h} e senza perdita di generalità si supponga che la soluzione non dipenda dalle coordinate x e y :

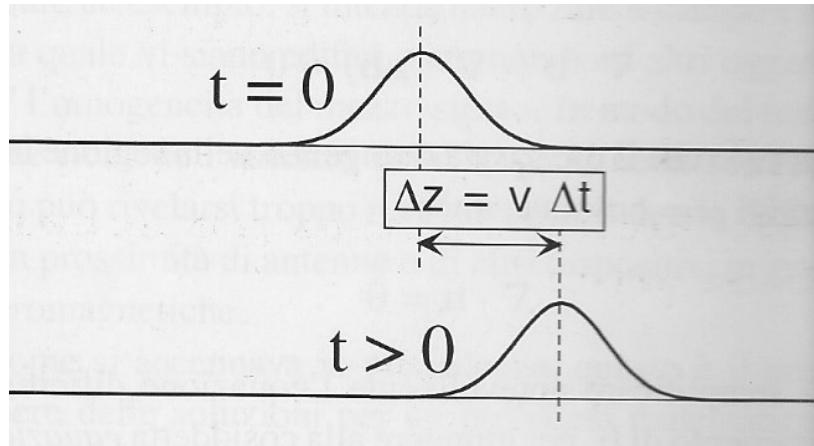
$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

- Si verifica allora per sostituzione diretta che la soluzione generale è del tipo:

$$h(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt)$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie e rappresentano, rispettivamente, un'onda progressiva ed un'onda regressiva

Primo esempio di risoluzione delle eq. di M.



- In figura è riportata una possibile onda progressiva, la cui forma può essere qualunque ed è data dalle particolari condizioni al contorno
- L'onda progressiva si muove nel verso delle z positive a velocità v
- In particolare nel vuoto:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}$$

detta «velocità della luce nel vuoto»

Primo esempio di risoluzione delle eq. di M.

- Nel caso di mezzo omogeneo con perdite ($\sigma \neq 0$), l'equazione delle onde vettoriale, può essere derivata sulla falsariga di quanto fatto nella ipotesi di assenza di perdite:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0$$

dove il termine di derivata prima agisce come una forza di attrito che causa «smorzamento» delle funzioni f e g

- Con procedura analoga è poi possibile ricavare una soluzione anche per il campo elettrico:

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{e} &= -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = -\nabla^2 \mathbf{e} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}) \\ \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_c \rightarrow \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{e} &= \rho_c \text{ se } \rho_c = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{e} = 0 \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}) = 0\end{aligned}$$

e si ottiene nuovamente l'equazione delle onde vettoriale:

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0$$

Risoluzione in regime armonico

- Si considerino ora le equazioni di Maxwell nel dominio dei vettori complessi sotto le seguenti ipotesi di lavoro:
 - mezzo lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo $\rightarrow \epsilon_c, \mu$ sono costanti scalari
 - le sorgenti sono fuori dalla regione di interesse

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_c\mathbf{E}$$

- Si esegua il rotore a sinistra e a destra dell'uguale nella seconda equazione di Maxwell utilizzando poi la prima equazione:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_c \nabla \times \mathbf{E} = j\omega\epsilon_c(-j\omega\mu \mathbf{H}) = -\nabla^2\mathbf{H} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H})$$

Risoluzione in regime armonico

- Si fa ricorso ancora all'equazione alle divergenze relativa al vettore induzione magnetica \mathbf{B} e si sfrutta l'ipotesi di omogeneità del mezzo:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) = 0$$

e si ottiene quella equazione detta «delle onde» in regime armonico conosciuta anche come equazione di Helmholtz vettoriale:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \kappa_{\epsilon}^2 \mathbf{H} = 0$$

avendo posto $\kappa_{\epsilon}^2 = -\omega^2 \mu \epsilon_c$

- Essa è una equazione vettoriale ma potendosi separare in maniera formalmente identica per tutte e 3 le componenti del vettore incognito \mathbf{H} , ci si trova a risolvere un problema di complessità scalare
- Per capire la natura delle sue soluzioni, la si consideri esplicitata in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e senza perdita di generalità si assuma l'indipendenza dalle coordinate spaziali x e y

Risoluzione in regime armonico

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \kappa_\varepsilon^2 H = 0$$

- Dove H è la generica componente del vettore complesso \mathbf{H}
L'equazione ammette soluzioni del tipo:

$$H(z) = H_{0p} e^{-\kappa_\varepsilon z} + H_{0r} e^{+\kappa_\varepsilon z}$$

con $\kappa_\varepsilon = \omega \sqrt{-\mu \varepsilon_c} = \alpha + j\beta$ dove α viene detta «costante di attenuazione» e β viene detta «costante di fase», infatti la soluzione può essere scritta come:

$$H(z) = H_{0p} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + H_{0r} e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}$$

Risoluzione in regime armonico

- In particolare nel vuoto, la soluzione della equazione di Helmholtz risulta:

$$H(z) = H_{0p} e^{-j\beta z} + H_{0r} e^{+j\beta z}$$

con $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$

- La soluzione risulta quindi la somma di due funzioni periodiche di periodo (spaziale) $\lambda = 2\pi/\beta$
- Ricordando che la pulsazione angolare $\omega = 2\pi f$ con f frequenza temporale della sinusoide, il periodo spaziale risulta:

$$\lambda = c/f$$

- Per comprendere il significato fisico della soluzione dell'equazione di Helmholtz, conviene «tornare» nel dominio del tempo

Risoluzione in regime armonico

- Applicando la regola per passare dalla rappresentazione di Steinmetz all'espressione nel dominio del tempo:

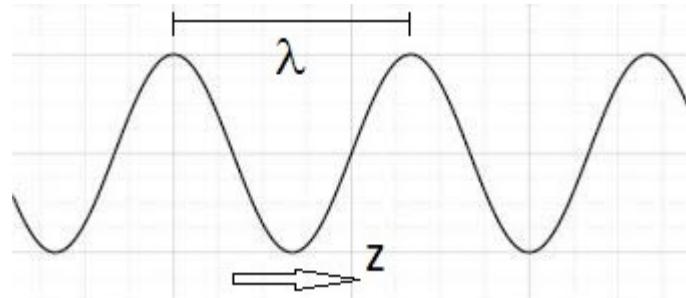
$$h(z,t) = \operatorname{Re}\{H(z)e^{j\omega t}\}$$

la soluzione finale risulta:

$$h(z,t) = H_{0p} \cos(\omega t - \beta z) + H_{0r} \cos(\omega t + \beta z)$$

quindi la somma di un'onda progressiva e di un'onda regressiva di campo magnetico nella direzione z con velocità $\omega/\beta = c$

- Questa volta la forma d'onda è una sinusoide perché la condizione armonica ne ha imposto la dipendenza spaziale:



Lunghezza d'onda

- A titolo di esempio, in aria (assimilabile al vuoto), il periodo spaziale λ per varie frequenze risulta:
 - Radio AM: $f = 800 \text{ KHz} \rightarrow \lambda = 375 \text{ m}$
 - Radio FM: $f = 100 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = 3 \text{ m}$
 - Segnale televisivo terrestre: $f = 600 \text{ MHz} \rightarrow \lambda = 0.5 \text{ m}$
 - Wi-fi: $f = 2.4 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = 12.5 \text{ cm}$
 - Segnale televisivo satellitare: $f = 11\text{GHz} \rightarrow \lambda = 2.7 \text{ cm}$
 - Luce visibile (rosso): $f = 500\text{THz} \rightarrow \lambda = 0.6 \mu\text{m}$
- Se però il mezzo (omogeneo) in cui avviene la propagazione ha una permittività dielettrica maggiore, come ad esempio il vetro con $\epsilon_r \approx 2.25$ alle frequenze delle microonde, la lunghezza d'onda si accorcia:
$$\text{Wi-fi: } f = 2.4 \text{ GHz} \rightarrow \lambda = c / (\sqrt{\epsilon_r} \cdot f) = 8.3 \text{ cm}$$
- Nei tessuti biologici, che presentano una permittività dielettrica che può essere molto maggiore di quella del vuoto, la lunghezza d'onda può risultare molto minore a quella che si avrebbe in aria

Risoluzione in regime armonico

- Con procedura analoga è poi possibile ricavare una soluzione anche per il campo elettrico:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\mu(j\omega\epsilon_c \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c \rightarrow \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c \text{ se } \rho_c = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$$

e si ottiene nuovamente l'equazione di Helmholtz vettoriale:

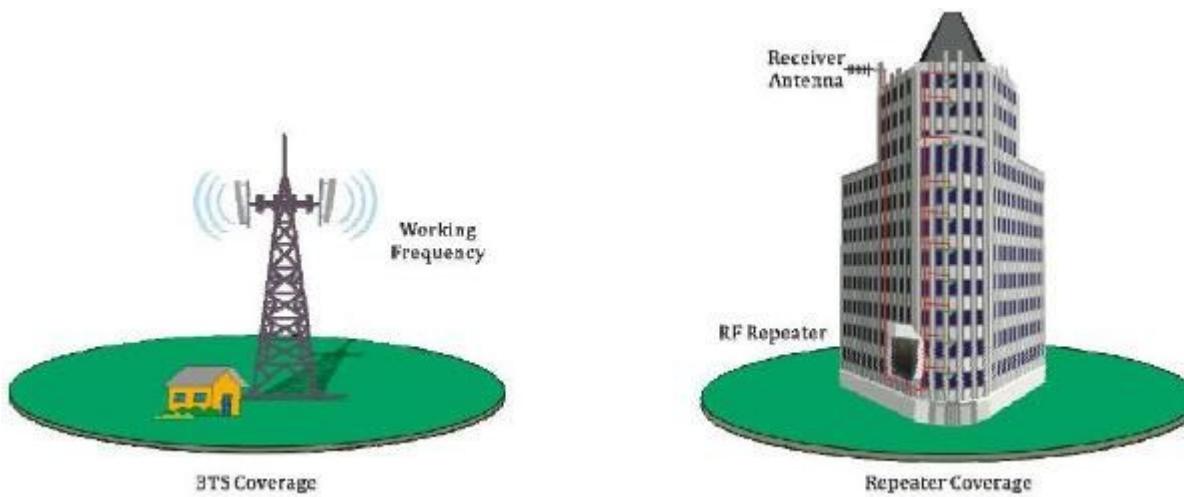
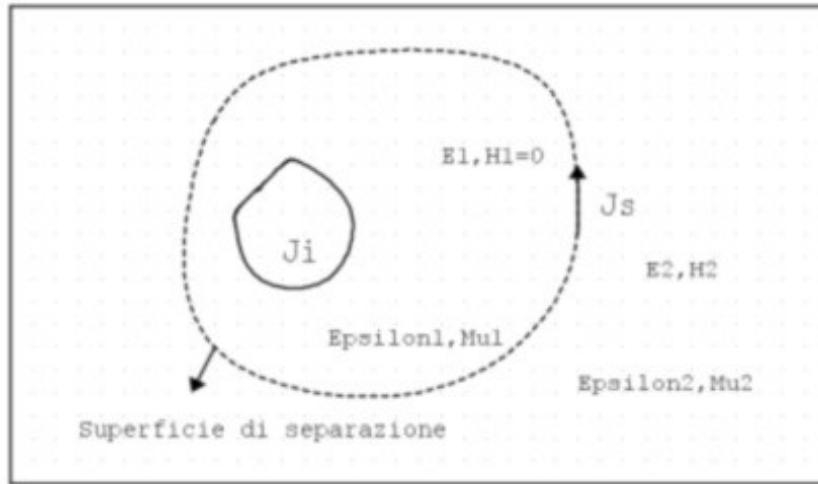
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \kappa_e^2 \mathbf{E} = 0$$

- Le sue soluzioni, anche in questo caso, sono moti ondosi progressivi e regressivi di campo elettrico di forma sinusoidale lungo una direzione arbitraria, eventualmente attenuati per effetto delle perdite ohmiche ($\sigma \neq 0$)

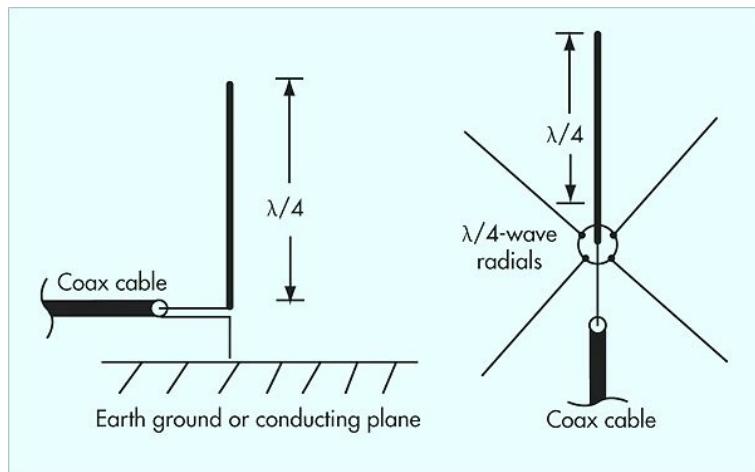
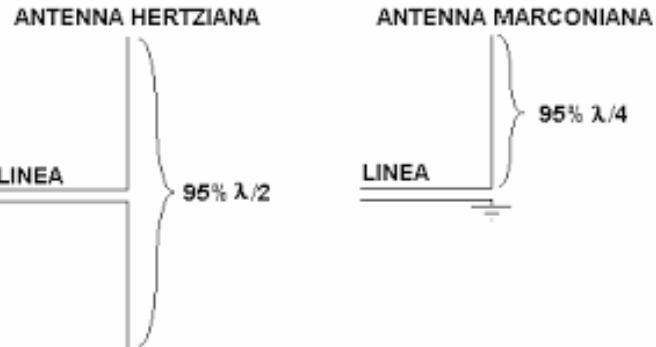
Teoremi fondamentali dell'elettromagnetismo

- In elettromagnetismo vi sono svariati teoremi fondamentali, fra questi:
 - Il teorema di Poynting (bilancio di potenze)
 - Il teorema di reciprocità
 - Il teorema di equivalenza (sostituire le sorgenti reali con altre equivalenti per una risoluzione più efficace)
 - Il teorema delle immagini (per la presenza di un piano conduttore è come se contribuissero al campo e.m. altre sorgenti «fittizie»)
 - Il teorema di unicità (sancisce quando la soluzione trovata è l'unica possibile)
- Nel corso di bioelettromagnetismo si analizzerà dettagliatamente solo il teorema di Poynting, essendo la sua conoscenza indispensabile all'uso della dosimetria dei campi elettromagnetici (ad es. nella valutazione del SAR)

Teorema di equivalenza



Teorema delle immagini



Teorema di Poynting

- Si considerino le equazioni di Maxwell nel dominio del tempo all'interno di un volume V con le seguenti ipotesi di lavoro:
 - Mezzo lineare, isotropo, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio
 - Sorgenti presenti all'interno del volume
- In queste condizioni, le equazioni di Maxwell si scrivono come:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \sigma \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_i$$

- Si moltipichi internamente (si faccia il prodotto scalare) la prima equazione con \mathbf{h} e la seconda equazione con \mathbf{e} , si sottraggano quindi membro a membro le 2 equazioni ottenute per avere:

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} = -\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \sigma |\mathbf{e}|^2 - \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i$$

Teorema di Poynting

- Si faccia ora uso delle seguente identità vettoriale:

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \nabla \times \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$$

applicandola al primo membro dell'equazione precedente

- Ri-arraggiando quindi i vari termini si ottiene:

$$-\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i = \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \sigma |\mathbf{e}|^2 + \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h})$$

che è una equazione valida per ogni punto del volume

- Si può quindi passare alla sua versione integrale in tutto il volume V che costituisce appunto il Teorema di Poynting

$$-\int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i dv = \int_V (\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}) dv + \int_V \sigma |\mathbf{e}|^2 dv + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) dv$$

Teorema di Poynting

- I vari integrali di volume nell'equazione hanno dimensioni fisiche di Watt: il teorema di Poynting rappresenta quindi un bilancio di potenze
- L'integrale di volume a sinistra dell'uguale rappresenta la potenza (istantanea) necessaria a sostenere le sorgenti che generano il campo e.m.

Il segno - rende conto del fatto che deve essere svolto un lavoro per unità di tempo (una potenza) uguale e contrario a quello dovuto alla forza di Lorentz che agisce sulle cariche elettriche in movimento e relative alla densità di corrente elettrica impressa. Tale potenza (sempre un numero positivo) può provenire, ad esempio, da un lavoro meccanico (qualcuno aziona una dinamo), un lavoro elettro-chimico (una batteria alimenta un'antenna che costituisce la sorgente)

- Il primo termine a destra dell'uguale risulta di semplice interpretazione se il mezzo è NON dispersivo nel tempo, cioè se $\mathbf{d} = \epsilon\mathbf{e}$ e $\mathbf{b} = \mu\mathbf{h}$ così che l'integrale di volume diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu |\mathbf{h}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{e}|^2 \right) dv$$

Teorema di Poynting

- In pratica esso rappresenta la variazione per unità di tempo dell'energia magnetica ed elettrica accumulata all'interno del volume V
- Il secondo termine a destra dell'uguale rappresenta la potenza spesa per effetto Joule dovuta alla presenza di materiali conduttori con perdite all'interno del volume V (materiale metallico, tessuto biologico) ed è una dissipazione quindi sempre rappresentata da un numero positivo
- Il terzo termine a destra dell'uguale assume un significato chiaro se si applica il teorema di Gauss. Infatti l'integrale di volume diventa:

$$\oint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = \oint_S \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$$

quindi flusso di potenza (elettromagnetica) che fuoriesce dalla superficie chiusa S che racchiude il volume V

- Il «nuovo» vettore $\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ [W/m^2] viene detto "vettore di Poynting"

Teorema di Poynting in regime armonico

- Si considerino le equazioni di Maxwell nel dominio dei vettori complessi all'interno di un volume V con le seguenti ipotesi di lavoro:
 - Mezzo lineare, isotropo, omogeneo nel tempo, non dispersivo nello spazio
 - Sorgenti presenti all'interno del volume
- In queste condizioni, le equazioni di Maxwell si scrivono come:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_i$$

- Si moltipichi internamente la prima equazione con \mathbf{H}^* e la complessa coniugata della seconda equazione con \mathbf{E} , si sottraggano quindi membro a membro le 2 equazioni ottenute per avere:

$$\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* = -j\omega\mu|\mathbf{H}|^2 + j\omega\epsilon|\mathbf{E}|^2 - \sigma|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*$$

Teorema di Poynting in regime armonico

- Analogamente a quanto fatto nel dominio del tempo, usando un'identità vettoriale e passando ad integrare in tutto il volume V , si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^* dv = j2\omega \int_V \left(\frac{1}{4}\mu|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4}\epsilon|\mathbf{E}|^2 \right) dv + \frac{1}{2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dv + \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

dove si è definito $\mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ [VA/m²] il vettore di Poynting nel dominio dei vettori complessi che non è il vettore rappresentativo secondo Steinmetz del vettore di Poynting \mathbf{p} nel dominio del tempo, in quanto definito dal prodotto fra 2 vettori, quindi il risultato di una operazione non lineare su cui non può essere applicata la notazione di Steinmetz

- L'equazione sopra è un'eguaglianza fra numeri complessi, il teorema può quindi venire enunciato per le parti reali e le parti immaginarie secondo la terminologia delle reti elettriche in regime armonico:

- La potenza attiva erogata dalle sorgenti presenti nel volume eguaglia la somma della potenza attiva dissipata per effetto Joule all'interno del volume ed il flusso di potenza attiva che esce dal volume stesso
- La potenza reattiva erogata dalle sorgenti eguaglia la somma della potenza reattiva immagazzinata all'interno del volume ed il flusso di potenza reattiva che esce dal volume stesso

Teorema di Poynting in regime armonico

- In particolare:
 - La potenza attiva erogata dalle sorgenti [W] è sempre un numero positivo
 - La potenza attiva dissipata per effetto Joule [W] è sempre un numero positivo
 - Il flusso di potenza attiva che esce dal volume [W] è un numero positivo se tale flusso è uscente, altrimenti negativo se il flusso netto è entrante
 - La potenza reattiva erogata dalle sorgenti [VAR] è un numero che può essere positivo o negativo (ad es. positivo se la potenza netta reattiva erogata è di natura induttiva)
 - La potenza reattiva [VAR] immagazzinata all'interno del volume può essere positiva o negativa (ad es. negativa se l'accumulo è di natura capacitiva)
 - Il flusso di potenza reattiva che esce dal volume [VAR] è un numero positivo o negativo a seconda della natura (induttiva/capacitiva) del flusso che può essere netto entrante o netto uscente
- Solo in regime armonico si può instaurare quella condizione detta di «risonanza di volume» ovvero quando si verifica, in assenza di sorgenti e di perdite ohmiche la condizione:

$$j2\omega \int_V \left(\frac{1}{4}\mu|\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon|\mathbf{E}|^2 \right) dv = 0$$

Il vettore di Poynting

Definizione del vettore di Poynting nel dominio del tempo: $\bar{p}(t) = \bar{e}(t) \times \bar{h}(t)$

Definizione del vettore di Poynting nel dominio della frequenza: $\bar{P} = \frac{\bar{E} \times \bar{H}^*}{2}$

Attenzione che essendo la rappresentazione a vettori complessi una operazione lineare:

$$\text{Re}[\bar{P} e^{j\omega t}] \neq \bar{p}(t)$$

Che relazione c'è fra i 2 vettori ?

$$\bar{p}(t) = \bar{e}(t) \times \bar{h}(t) = \text{Re}[\bar{E} e^{j\omega t}] \times \text{Re}[\bar{H} e^{j\omega t}] =$$

$$= \left(\frac{\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}}{2} \right) \times \left(\frac{\bar{H} e^{j\omega t} + \bar{H}^* e^{-j\omega t}}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{E} \times \bar{H}^*}{2} + \frac{\bar{E}^* \times \bar{H}}{2} + \frac{\bar{E} \times \bar{H}}{2} e^{j2\omega t} + \frac{\bar{E}^* \times \bar{H}^*}{2} e^{-j2\omega t} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(2\text{Re}[\bar{P}] + 2\text{Re} \left[\frac{\bar{E} \times \bar{H}}{2} e^{j2\omega t} \right] \right) = \text{Re}[\bar{P}] + \text{Re} \left[\frac{\bar{E} \times \bar{H}}{2} e^{j2\omega t} \right]$$

Il vettore di Poynting

Nella pratica non ha interesse il valore istantaneo di una potenza (o di una densità di potenza) quanto il suo valor medio in un periodo T, quindi:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{p}(t) dt = \frac{1}{T} T \operatorname{Re}[\bar{P}] + 0 = \operatorname{Re}[\bar{P}] , \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

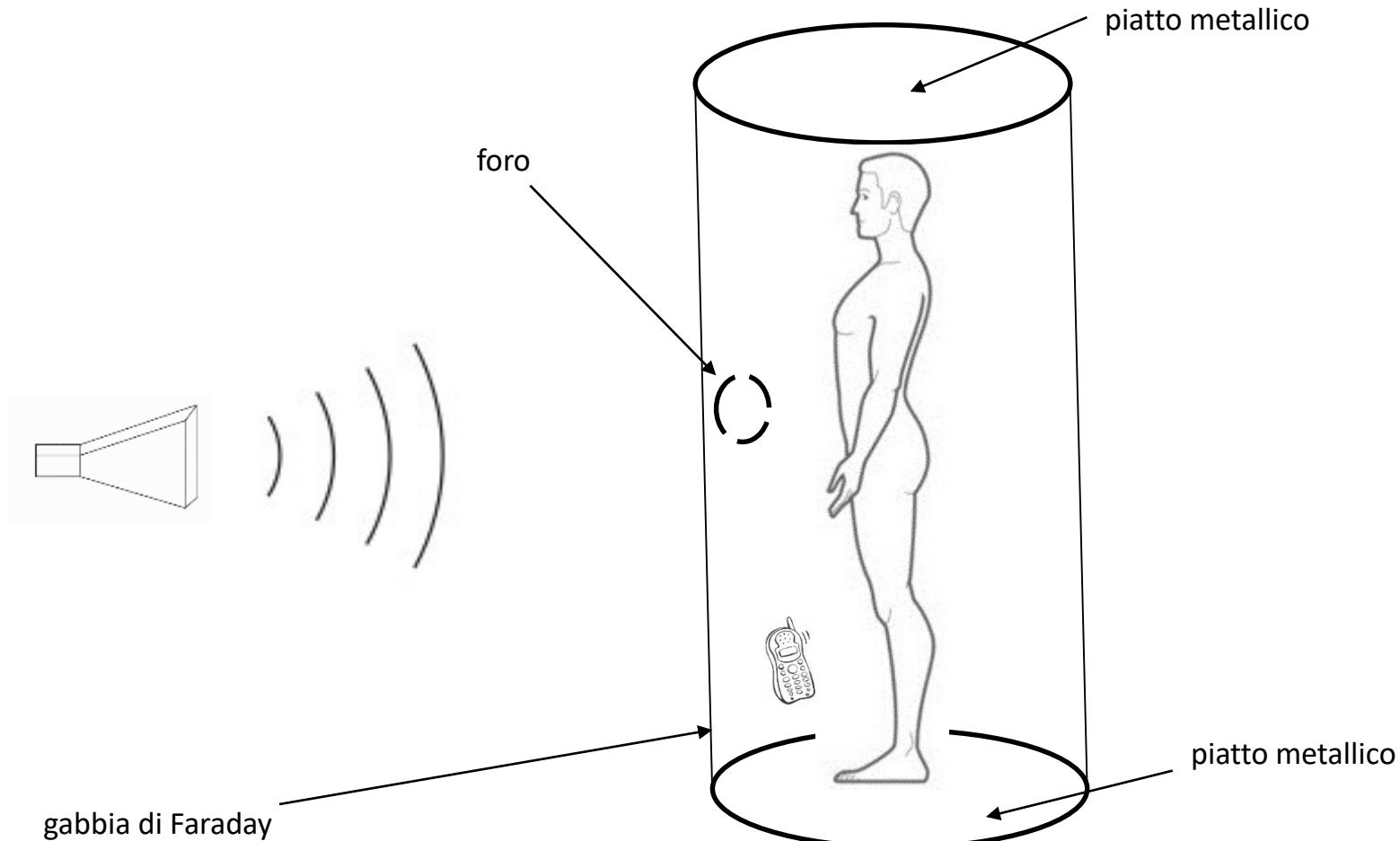
Relazione tra il modulo del vettore complesso di campo elettrico ed il valore efficace dello stesso:

$$\begin{aligned} |\bar{e}(t)|^2 &= \bar{e}(t) \cdot \bar{e}(t) = \frac{1}{4} (\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}) \cdot (\bar{E} e^{j\omega t} + \bar{E}^* e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{2|\bar{E}|^2}{4} + \frac{1}{4} (\bar{E}^2 e^{2j\omega t} + \bar{E}^{*2} e^{-2j\omega t}) \end{aligned}$$

Pertanto, calcolandone il valor medio in un periodo T abbiamo:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\bar{e}(t)|^2 dt = (\text{valore efficace di } \bar{e})^2 = \frac{|\bar{E}|^2}{2}$$

Esempio di applicazione del Teorema di Poynting



Onde piane

- Si considerino le equazioni di Maxwell in regime armonico sotto le seguenti ipotesi di lavoro:
 - Il volume oggetto di analisi sia tutto lo spazio
 - Il volume (tutto lo spazio) sia sede di un mezzo lineare, isotropo, omogeneo e non dispersivo $\rightarrow \epsilon, \mu, \sigma$ sono costanti scalari
 - Assenza di sorgenti
- E' evidente che queste ipotesi di lavoro sono «non fisiche» soprattutto ipotizzando che all'interno del volume sia presente un campo elettromagnetico non nullo pur in assenza di sorgenti che non possono nemmeno essere «esterne» a tutto lo spazio
- Ciò nonostante sarà possibile l'esistenza di una soluzione «valida» che vedremo avrà caratteristiche simili al campo irradiato da un'antenna in un mezzo (non infinito) che abbia le proprietà di cui sopra

Onde piane – campo elettrico

- Nelle condizioni di lavoro prima esposte, vale l'equazione di Helmholtz per il campo \mathbf{H} e per il campo \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \kappa_{\epsilon}^2 \mathbf{E} = 0$$

- Senza perdita di generalità, ipotizziamo che la soluzione per \mathbf{E} sia un'onda polarizzata linearmente lungo l'asse \hat{x} :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \hat{x}$$

- Si supponga ora che la soluzione per $E(\mathbf{r})$ (una funzione scalare dello spazio) sia «separabile»:

$$E(\mathbf{r}) = E_0 [f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)]$$

- Questa posizione, che potrebbe restringere la classe delle soluzioni possibili, porta in realtà ad un insieme di soluzioni «sufficientemente denso» (si può dimostrare)

Onde piane

- L'equazione di Helmholtz scalare per la componente $E(\mathbf{r})$ diventa:

$$E_0 \left[\frac{d^2 f_1}{dx^2} f_2 f_3 + f_1 \frac{d^2 f_2}{dy^2} f_3 + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3}{dz^2} \right] = \kappa^2 \epsilon E_0 f_1 f_2 f_3$$

dividendo ora ambo i membri per $E_0 f_1 f_2 f_3$ si ottiene:

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} = \kappa^2 \epsilon = \text{cost.}$$

somma di 3 funzioni che dipendono da una sola coordinata spaziale e la cui somma è una costante, ma allora devono essere separatamente costanti:

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} = S_1^2 \quad \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = S_2^2 \quad \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} = S_3^2$$

con $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \kappa^2 \epsilon$ in generale tutti numeri complessi

Onde piane

- L'intero problema elettromagnetico si è quindi ridotto a risolvere equazioni armoniche del tipo:

$$\frac{d^2 f_i}{d\xi^2} = S_i^2 f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad \xi = x, y, z$$

la cui soluzione è:

$$f_i(\xi) = C_i e^{-S_i \xi} + D_i e^{+S_i \xi}$$

- Non essendoci informazioni sul segno da prendere quando si esegue la radice quadrata su S_i^2 , senza perdita di generalità:

$$E(x, y, z) = E_0 e^{-(S_1 x + S_2 y + S_3 z)} = E_0 e^{-(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})}$$

con $\mathbf{S} = S_1 \hat{x} + S_2 \hat{y} + S_3 \hat{z}$ e detto «vettore di propagazione»

Onde piane

- Per il vettore di propagazione vale la proprietà:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \kappa_{\varepsilon}^2$$

- Essendo κ_{ε}^2 in generale un numero complesso, si può scrivere $\mathbf{S} = \mathbf{a} + j\mathbf{k}$ con \mathbf{a} e \mathbf{k} vettori reali dello spazio e detti rispettivamente «vettore di attenuazione» e «vettore di fase»
- Ecco allora che la soluzione finale per \mathbf{E} risulta:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{x}$$

- Si riconosce che le superfici equifase ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{cost} \rightarrow d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0$) sono i piani ortogonali al vettore \mathbf{k} e analogamente, le superfici equiampiezza sono i piani ortogonali al vettore \mathbf{a} . Per questo motivo la soluzione trovata viene detta «onda piana»

Onde piane – campo magnetico

- Il modo corretto per ricavare il campo magnetico è quello di inserire la soluzione onda piana nella prima equazione di Maxwell:

$$\mathbf{H} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{j\omega\mu} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}_0 e^{-(S \cdot \mathbf{r})}}{j\omega\mu}$$

- Facendo uso della i.v. $\nabla \times (\mathbf{w}\mathbf{f}) = \mathbf{f}\nabla \times \mathbf{w} + \nabla f \times \mathbf{w}$ si ottiene:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E}}{j\omega\mu} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E}_0 e^{-(S \cdot \mathbf{r})}}{j\omega\mu}$$

- Il campo magnetico ha quindi le stesse caratteristiche del campo elettrico, ovvero è un'onda piana

Onde piane – tipologie

- Si consideri nuovamente la proprietà del vettore di propagazione vista in precedenza:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{k}|^2 + j2\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \kappa_{\varepsilon}^2 = -\omega^2 \mu (\varepsilon - j\sigma/\omega)$$

che è una eguaglianza fra numeri complessi, quindi fra le rispettive parti reali e i coefficienti dell'immaginario:

$$|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{k}|^2 = -\omega^2 \mu \varepsilon$$

$$2\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \omega \mu \sigma$$

- Queste 2 equazioni caratteristiche della soluzione onda piana, permettono di derivare la seguente proprietà:

$$|\mathbf{k}|^2 > |\mathbf{a}|^2 \Rightarrow |\mathbf{k}|^2 > 0 \Rightarrow |\mathbf{k}| \neq 0$$

ovvero, esiste sempre e comunque un moto ondoso

Onde piane uniformi

- Analizzando l'equazione fra le parti immaginarie, si scopre che è possibile classificare le onde piane a seconda che vi siano perdite per conduzione o meno
- Caso $\sigma = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$
 - Sotto caso $\mathbf{a} = 0$

$$\Rightarrow |\mathbf{k}|^2 = \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow |\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Questo tipo di onda viene detta «piana uniforme» (o.p.u.)
- In particolare per le o.p.u. $\mathbf{S} = j\mathbf{k}$ che porta alle relazioni:

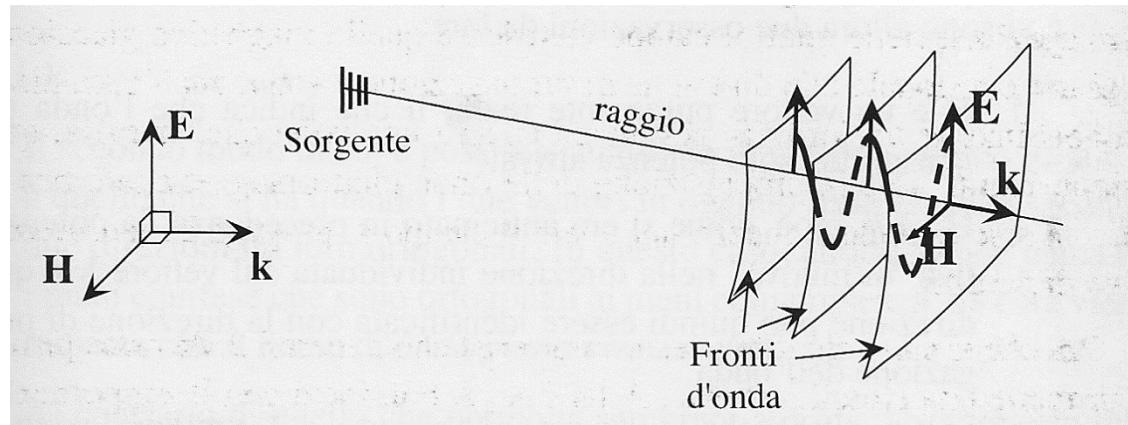
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{\omega \mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

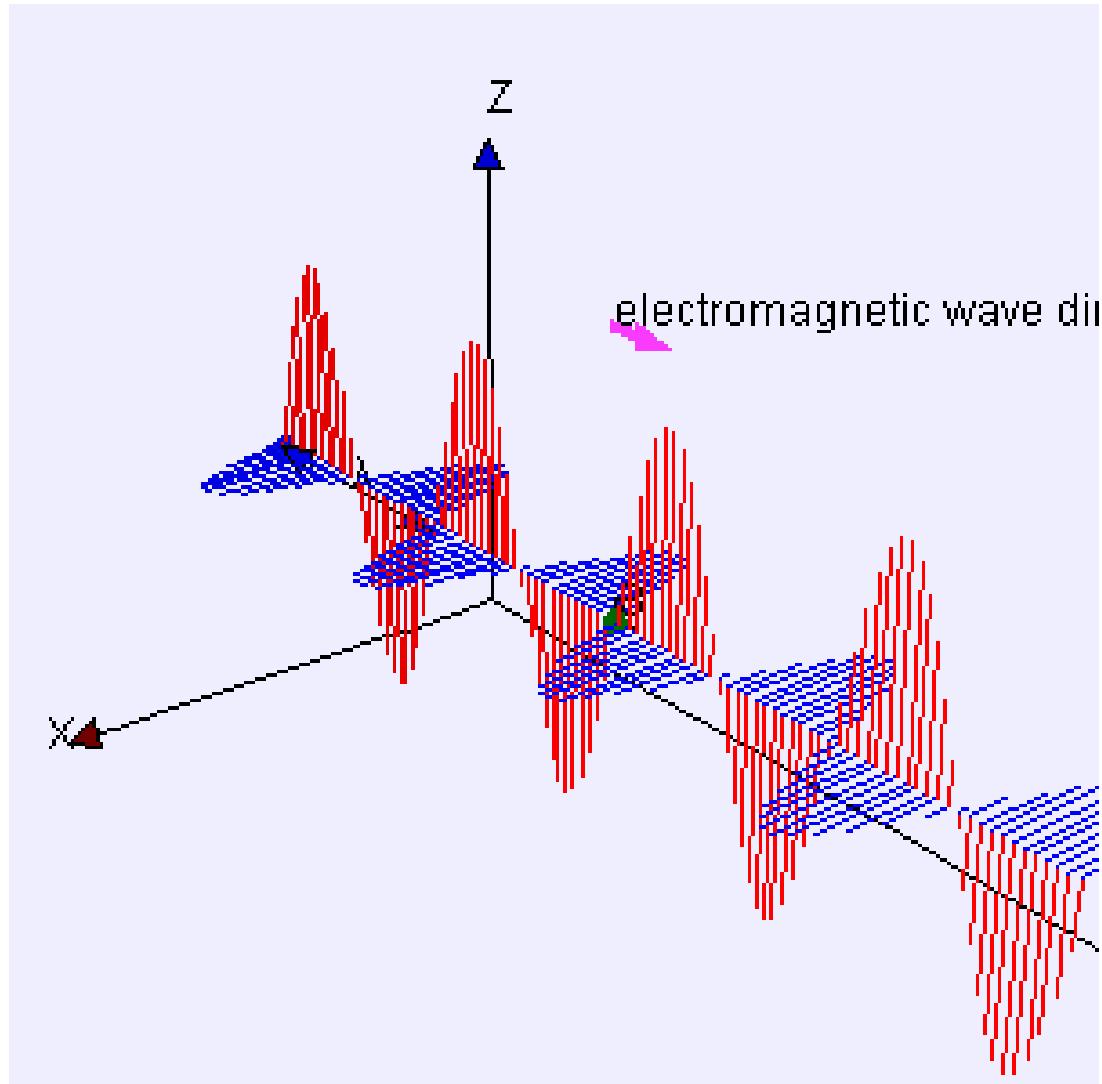
Onde piane uniformi

- Si ricava che:
 - il campo elettrico e magnetico sono in fase fra di loro
 - nel caso di polarizzazione lineare, i vettori dei campi **E**, **H** ed il vettore di fase **k**, formano una terna tri-rettangola
 - i campi **E**, **H** sono trasversi rispetto alla direzione di propagazione (onda trasverso-elettromagnetica o TEM)
 - il vettore di Poynting risulta puramente reale e diretto lungo la direzione di propagazione (direzione del versore \hat{k}):

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{k}$$



Onde piane uniformi



Onde piane evanescenti

- Caso $\sigma = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0$
 - Sotto caso $a \neq 0$
 $\Rightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{a}$
- Questo tipo di onda viene detta «piana evanescente» (o.p.e.)
- Facendo un'analisi approfondita (più complicata rispetto al caso di o.p.u.), si ricava che:
 - i piani equifase sono ortogonali ai piani equiampiezza
 - il campo elettrico e magnetico non sono in fase fra di loro
 - nel caso di polarizzazione lineare del campo \mathbf{E} (\mathbf{H}) il campo \mathbf{H} (\mathbf{E}) risulta in generale polarizzato ellitticamente
 - i piani di polarizzazione di \mathbf{E} e \mathbf{H} non coincidono necessariamente
 - il vettore di Poynting risulta complesso con la parte reale diretta lungo \mathbf{k} mentre la parte immaginaria è diretta lungo \mathbf{a}

Onde piane dissociate

- Caso $\sigma \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{a}$ e \mathbf{k} non sono ortogonali
- Questo tipo di onda viene detta «piana dissociata» (o.p.d.)
- Facendo un'analisi approfondita (più complicata rispetto al caso di o.p.u.), si ricava che:
 - i piani equifase non sono ortogonali ai piani equiampiezza
 - il campo elettrico e magnetico non sono in fase fra di loro
 - nel caso di polarizzazione lineare del campo \mathbf{E} (\mathbf{H}) il campo \mathbf{H} (\mathbf{E}) risulta in generale polarizzato ellitticamente
 - i piani di polarizzazione di \mathbf{E} e \mathbf{H} non coincidono necessariamente
 - il vettore di Poynting risulta complesso con la parte reale diretta lungo \mathbf{k} mentre la parte immaginaria è diretta lungo \mathbf{a}

Onde piane dissociate uniformi

- Nel caso particolare di \mathbf{a} e \mathbf{k} paralleli fra di loro, questo tipo di onda viene detta nuovamente «piana uniforme» ma in un mezzo con perdite
- Si hanno inoltre le seguenti proprietà:
 - i piani equifase sono paralleli ai piani equiampiezza
 - nel caso di polarizzazione lineare del campo \mathbf{E} (\mathbf{H}) il campo \mathbf{H} (\mathbf{E}) risulta anch'esso polarizzato linearmente e forma una terna tri-rettangola con \mathbf{k} (ma anche con \mathbf{a} che è ad esso parallelo)
 - il vettore di Poynting risulta complesso con parte reale ed immaginaria dirette entrambe lungo la direzione di propagazione \mathbf{k}
- Questo tipo di onda è particolarmente rilevante in bioelettromagnetismo perché simile, nella propagazione, al campo e.m. che penetra in un tessuto biologico quando questo si comporta come un buon conduttore

Impedenza d'onda

- Si è visto come l'o.p.u. in un mezzo senza perdite sia un'onda TEM e come le ampiezze dei campi elettrico e magnetico, in fase tra di loro, siano legate dai soli parametri elettromagnetici del mezzo, ϵ e μ
- In analogia con le reti elettriche in regime armonico dove, oltre ai fasori di tensione e corrente, si usa «l'impedenza» per relazionarli, così nel mondo dei vettori complessi si introduce il concetto di «impedenza d'onda» che, nel caso delle o.p.u., risulta semplicemente:

$$\eta_{opu} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\Omega]$$

- Tramite l'impedenza d'onda è possibile, ad esempio, esprimere il vettore di Poynting tramite il solo campo \mathbf{E} :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_{opu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{k}$$

Impedenza d'onda

- L'impedenza di una o.p.u. risulta quindi reale e, dipendendo dalle sole proprietà elettromagnetiche del mezzo, viene detta anche «impedenza d'onda intrinseca», nel vuoto vale:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377 [\Omega]$$

- Poiché però i campi sono quantità vettoriali e per il fatto che le onde piane occupano tutto lo spazio, in generale deve essere possibile valutarne il comportamento lungo direzioni diverse da quella della propagazione (da quella del vettore di fase **k**)
- A tale scopo è possibile estendere il concetto di impedenza d'onda nella direzione di un generico versore \hat{u} :

$$\eta(\hat{u})$$

Impedenza d'onda

- L'impedenza d'onda valutata lungo una generica direzione dello spazio risulta in generale un **numero complesso** che rende conto in pratica della natura del flusso del vettore di Poynting proprio in quella direzione
- Ad esempio:
 - l'impedenza d'onda di una o.p.e. nella direzione di attenuazione, risulta puramente immaginaria, mentre risulta reale nella direzione del vettore di fase
 - l'impedenza d'onda di una o.p.d. risulta complessa sia nella direzione del vettore di attenuazione **a** sia nella direzione del vettore di fase **k** in quanto questi vettori non possono essere ortogonali fra di loro

Velocità di fase delle onde piane

- Si consideri il campo elettrico di un'onda piana nel dominio del tempo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\omega t}]$$

- Supponendo per semplicità che il campo elettrico sia polarizzato linearmente lungo l'asse x , si ottiene:

$$e(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{E}_0| e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

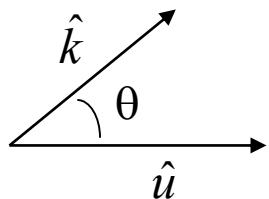
- Si riconosce chiaramente un moto ondoso che «invade tutto lo spazio» ed è diretto lungo il vettore di fase \mathbf{k} ; per valutarne la velocità, occorre ricercare il luogo dei punti dove l'argomento del coseno è costante:

$$d(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) = 0$$

Velocità di fase delle onde piane

- Effettuando quindi la derivazione per i vari termini dell'argomento del coseno, si ottiene:

$$\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} - \omega dt = 0$$



- Osservando la figura dove $\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \hat{k}$, $d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}| \hat{u}$ e θ è l'angolo tra le direzioni dei 2 versori (\hat{u} è allineato lungo una generica direzione dello spazio):

$$|\mathbf{k}| |d\mathbf{r}| \cos(\theta) = \omega dt \Rightarrow v_f(\hat{u}) = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}| \cos(\theta)}$$

dove $v_f(\hat{u})$ è detta velocità di fase dell'onda nella direzione di \hat{u}

Velocità di fase delle onde piane

- La velocità di fase dipende quindi dalla direzione di osservazione e può anche divergere, ma non deve sorprendere perché è come quando si osserva nella direzione della battigia il fronte di un'onda di mare infrangersi sulla spiaggia: la direzione di osservazione è infatti ortogonale alla direzione del moto ondoso
- Come riferimento si considera quindi la velocità di fase osservata lungo la direzione di propagazione ($\theta = 0$):
 - per le o.p.u in un mezzo senza perdite $v_f = \omega / |\mathbf{k}_{o.p.u.}| = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$
 - per le o.p.e $v_f = \omega / |\mathbf{k}_{o.p.e.}| < 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ perché $|\mathbf{k}_{o.p.e.}| > |\mathbf{k}_{o.p.u.}|$
 - per le o.p.d $v_f = \omega / |\mathbf{k}_{o.p.d.}| < 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ perché $|\mathbf{k}_{o.p.d.}| > |\mathbf{k}_{o.p.u.}|$

Le onde piane evanescenti e dissociate vengono per questo dette «onde lente»

Sovrapposizione di onde piane

- Se nel mezzo in questione sono presenti 2 onde piane simultaneamente, data l'ipotesi di linearità, si applica il principio di sovrapposizione degli effetti
- Si consideri il caso più semplice di 2 o.p.u. nel vuoto, entrambe polarizzate linearmente lungo l'asse x , a pari ampiezza e che si propagano in direzioni opposte lungo z :

$$\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{x} = E_0 [e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}] \hat{x}$$

$$\mathbf{H}(z) = \frac{j\mathbf{k} \times \mathbf{E}(z)}{j\omega\mu} = H(z) \hat{y} = E_0 / \eta_0 [e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}] \hat{y}$$

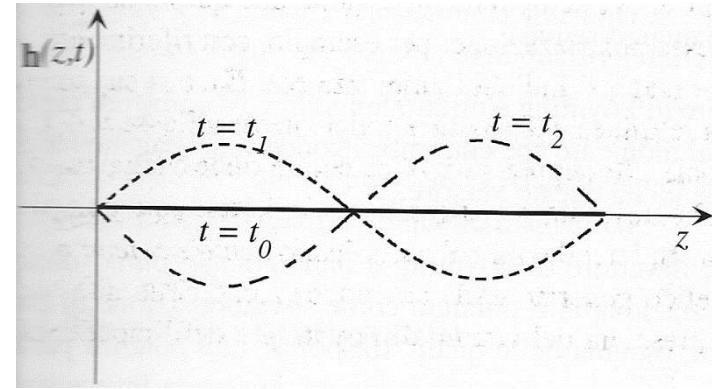
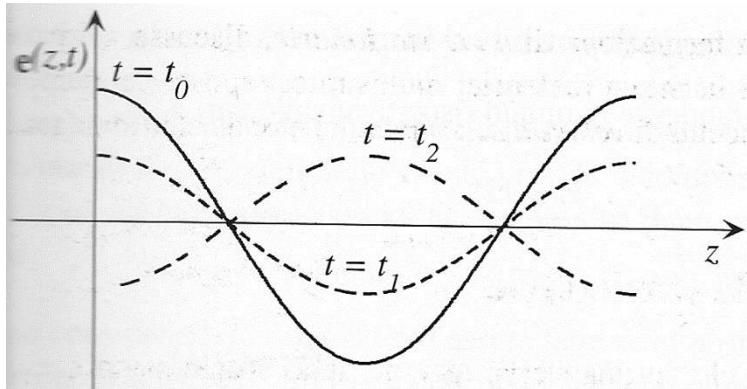
$$\text{con } \beta = |\mathbf{k}| = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \text{ e } \eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

Sovrapposizione di onde piane

- Le corrispondenti espressioni nel dominio del tempo sono:

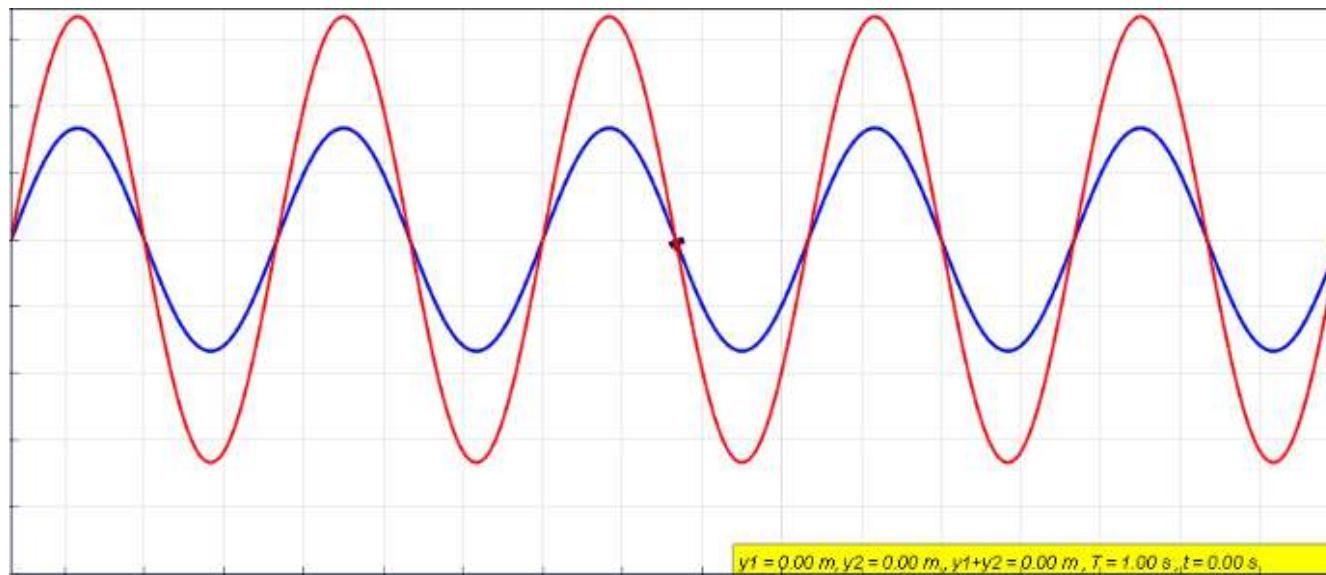
$$\mathbf{e}(z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{E}(z) e^{j\omega t}] = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(\beta z) \hat{x}$$

$$\mathbf{h}(z, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{H}(z) e^{j\omega t}] = 2E_0/\eta_0 \sin(\omega t) \sin(\beta z) \hat{y}$$



- Le onde che ne risultano «pulsano» nel tempo senza però muoversi ed è per questo che sono dette «stazionarie»

Onda stazionaria



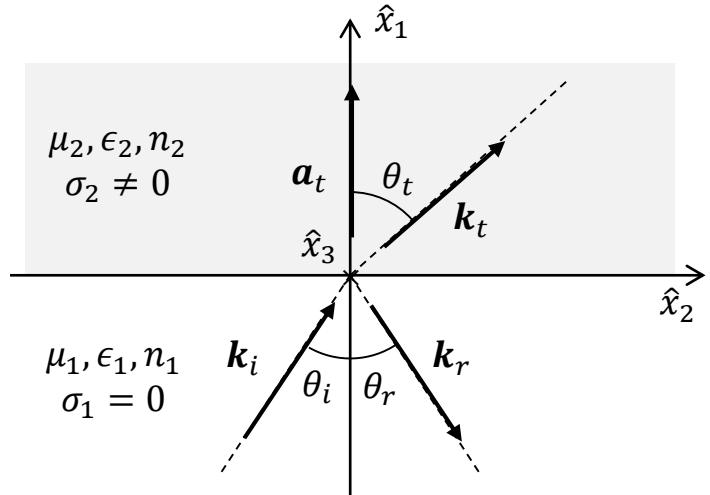
RIFLESSIONE E RIFRAZIONE DI ONDE PIANE

Concetti generali

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{i,0} e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad \text{onda incidente (piana uniforme)}$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{t,0} e^{-S_t \cdot \mathbf{r}} \quad \text{onda trasmessa}$$

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{r,0} e^{-S_r \cdot \mathbf{r}} \quad \text{onda riflessa}$$



$$\text{indice di rifrazione } n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}}/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = c/v_{f1,2}$$

$$\mu_{1,2} = \mu_0 \Rightarrow n_{1,2} = \sqrt{\epsilon_{r1,2}}$$

Le condizioni di continuità per le componenti tangenti del campo elettrico e del campo magnetico impongono (si dimostra, cfr. libro Prof. Midrio) che sia:

$$j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{r} \quad \forall \mathbf{r} \in \{\hat{x}_2, \hat{x}_3\} \quad [1]$$

Da queste relazioni e dalle proprietà delle onde piane, si deduce facilmente che :

- i tre vettori di fase sono ortogonali all'asse \hat{x}_3 (giacciono tutti sul piano \hat{x}_1, \hat{x}_2)
- l'onda trasmessa è in generale dissociata

Onda riflessa

- Analizzando la relazione [1], si evince che se l'onda riflessa fosse una o.p.e., necessariamente il vettore di attenuazione sarebbe parallelo all'asse \hat{x}_1 per soddisfare la relazione:

$$0 = \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r} \quad \forall \mathbf{r} \in \{\hat{x}_2, \hat{x}_3\}$$

- Per l'ortogonalità che deve sussistere tra i vettori di fase e attenuazione di una o.p.e., ne risulterebbe un \mathbf{k}_r parallelo all'asse \hat{x}_2
- Ma allora, sempre in virtù della relazione [1] applicata ai vettori di fase per $\mathbf{r} = \hat{x}_2$:

$$j\mathbf{k}_i \cdot \hat{x}_2 = j\mathbf{k}_r \cdot \hat{x}_2 \Rightarrow |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i = |\mathbf{k}_r|$$

che non può essere soddisfatta visto la diseguaglianza $|\mathbf{k}_r| > |\mathbf{k}_i|$ derivante dalle proprietà (diverse) tra una o.p.u e una o.p.e. nello stesso mezzo

- Si perviene quindi alla conclusione che:
 - l'onda riflessa è necessariamente una o.p.u.
 - l'angolo di riflessione θ_r è uguale a quello di incidenza θ_i

Onda trasmessa in un mezzo con perdite ($\sigma_2 \neq 0$)

Il vettore di propagazione è $\mathbf{S}_t = \mathbf{a}_t + j\mathbf{k}_t$, dalle sue proprietà generali e dalla [1] valgono le seguenti relazioni:

$$|\mathbf{a}_t|^2 - |\mathbf{k}_t|^2 = -\omega^2 \mu_2 \epsilon_2$$

$$2\mathbf{a}_t \cdot \mathbf{k}_t = 2|\mathbf{a}_t||\mathbf{k}_t| \cos \theta_t = \omega \mu_2 \sigma_2$$

$$\mathbf{a}_t \parallel \hat{x}_1$$

$$|\mathbf{k}_t| \sin \theta_t = |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i$$

che, risolte rispetto a $|\mathbf{a}_t|^2$, forniscono la seguente equazione di secondo grado:

$$4|\mathbf{a}_t|^4 + 4\beta_2^2(1 - \xi^2)|\mathbf{a}_t|^2 - \beta_2^4 \left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2 = 0$$

dove $\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$ e $\xi = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$.

Risolvendo l'equazione per $|\mathbf{a}_t|^2$, si ottengono le seguenti espressioni (una delle due soluzioni viene scartata perché negativa):

Onda trasmessa

$$|a_t|^2 = \frac{\beta_2^2}{2} \left\{ \xi^2 - 1 + \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2} \right\}$$

$$|k_t|^2 = \frac{\beta_2^2}{2} \left\{ \xi^2 + 1 + \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2} \right\}$$

$$\xi = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i$$

$$\sin^2 \theta_t = \frac{2\xi^2}{\xi^2 + 1 + \sqrt{(\xi^2 - 1)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2}}$$

Onda trasmessa ($\theta_i = 0$)

In caso di incidenza normale risulta $\theta_t = 0$, quindi \mathbf{a}_t è parallelo a \mathbf{k}_t e l'onda trasmessa è sempre **uniforme**. Risulta allora:

$$|\mathbf{a}_t|^2 = \frac{\beta_2^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2} - 1 \right\}, \quad |\mathbf{k}_t|^2 = \frac{\beta_2^2}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega \epsilon_2} \right)^2} + 1 \right\}$$

Si definisce lo **spessore di penetrazione** δ come $1/|\mathbf{a}_t|$, per cui in questo caso si ottiene (riordinando i termini)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \sigma_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega \epsilon_2}{\sigma_2} \right)^2} - \left(\frac{\omega \epsilon_2}{\sigma_2} \right)}}$$

La corrispondente impedenza d'onda nella direzione della normale alla superficie di separazione si dimostra valere:

$$\eta_t = j \frac{\omega \mu_2}{\mathbf{S}_t \cdot \hat{\mathbf{k}}_t} = j \frac{\omega \mu_2}{|\mathbf{a}_t| + j|\mathbf{k}_t|}$$

Onda trasmessa ($\sigma_2 \gg \omega\epsilon_2$)

In questo caso il mezzo 2 è detto **buon conduttore**.

Dalle espressioni generali risulta con buona approssimazione $\theta_t \cong 0$ per ogni angolo di incidenza, quindi l'onda trasmessa è sempre **quasi uniforme**. Inoltre:

$$|a_t|^2 \cong |\mathbf{k}_t|^2 \cong \frac{1}{2} \omega \mu_2 \sigma_2$$

Lo spessore di penetrazione δ e l'impedenza d'onda η sono rispettivamente

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_2 \sigma_2}}, \quad \eta_t = \left(\frac{\omega \mu_2}{2 \sigma_2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + j) = \frac{1}{2} \omega \mu_2 \delta (1 + j)$$

Si osservi che l'espressione di η_t non dipende dall'angolo di incidenza, per cui può essere intesa come una proprietà intrinseca del mezzo 2; per questo è detta anche **impedenza di parete**.

Si osservi anche che, soddisfatte le ipotesi di mezzo buon conduttore, le proprietà dell'onda trasmessa non dipendono più da ϵ_2 .

Onda trasmessa ($\sigma_2 = 0$)

In assenza di perdite nel mezzo 2 ci sono due possibili casi.

Caso A: l'onda trasmessa è piana uniforme ($\mathbf{a}_t = 0$)

Risulta allora $|\mathbf{k}_t|^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2$ da cui:

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \quad [\text{legge di Snell}]$$

Tuttavia, se $n_2 < n_1$ la legge di Snell ha soluzione se e solo se

$$\theta_i \leq \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad [\text{angolo critico}]$$

Se invece $\theta_i > \theta_c$ vale il caso B.

Caso B: ($n_1 > n_2$, $\theta_i > \theta_c$) l'onda trasmessa è evanescente ($\mathbf{a}_t \perp \mathbf{k}_t$)

Risulta allora $\theta_t = \pi/2$ e quindi:

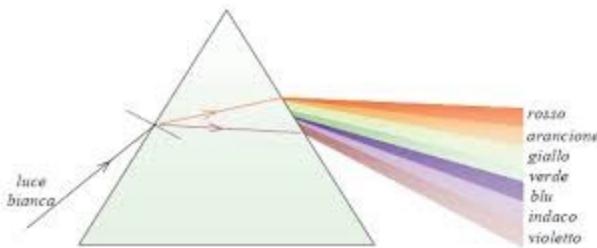
$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_t| &= |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i \\ |\mathbf{a}_t| &= |\mathbf{k}_i| \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c} \end{aligned}$$

Onda trasmessa ($\sigma_2 = 0$)

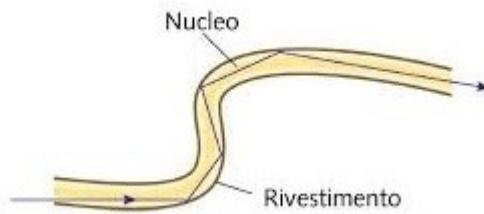
Caso A: onda trasmessa o.p.u. in presenza di dispersione temporale dei mezzi

$$n_2(\omega) \sin \theta_t = n_1(\omega) \sin \theta_i \quad [\text{legge di Snell}]$$

a parità di angolo di incidenza, l'angolo di trasmissione può cambiare in funzione della pulsazione angolare \Rightarrow noto fenomeno del prisma che scomponete la luce bianca nelle sue varie componenti spettrali



Caso B: ($n_1 > n_2, \theta_i > \theta_c$) l'onda trasmessa è evanescente ($\mathbf{a}_t \parallel \hat{x}_1 \ \mathbf{k}_t \parallel \hat{x}_2$)
 \Rightarrow vi è flusso di potenza attiva solo lungo \hat{x}_2 «riflessione interna totale»



- E' il principio di funzionamento della fibra ottica

Coefficienti di Fresnel (incidenza normale)

L'espressione del campo riflesso e di quello trasmesso può essere calcolata a partire dalle condizioni di continuità sulle componenti tangenti dei campi.

Limitatamente al caso di incidenza normale, essendo le onde tutte uniformi e dirette lungo \hat{x}_1 , i campi elettrici e magnetici sono ortogonali ad \hat{x}_1 e quindi interamente tangentili al piano di separazione (sono tutte onde TEM). Si può allora scrivere:

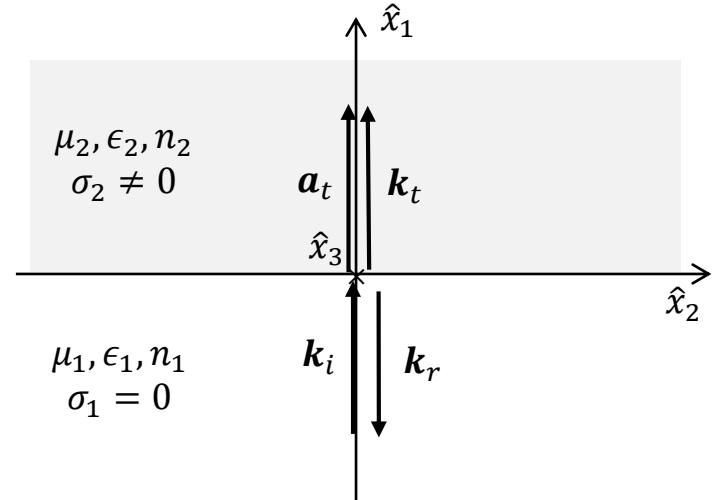
$$\mathbf{E}_{i,0} + \mathbf{E}_{r,0} = \mathbf{E}_{t,0} \quad \mathbf{H}_{i,0} + \mathbf{H}_{r,0} = \mathbf{H}_{t,0}$$

e trattandosi di onde piane uniformi, si ha anche che

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \eta \mathbf{H} \times \hat{k}$$

Riordinando i termini si giunge alle seguenti relazioni:

$$\mathbf{E}_{r,0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{E}_{i,0}, \quad \mathbf{E}_{t,0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \mathbf{E}_{i,0}$$



Coefficienti di Fresnel (incidenza normale)

Si definiscono così i **coefficienti di riflessione e trasmissione** che, per convenzione, sono riferiti al campo elettrico:

$$\rho = \frac{E_{r,0}}{E_{i,0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \tau = \frac{E_{t,0}}{E_{i,0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

N.B. queste espressioni sono state derivate nel caso di incidenza normale.

Nel caso di incidenza obliqua, si può dimostrare che, data la natura vettoriale dei campi elettromagnetici, tali coefficienti dipendono, oltre che dall'angolo di incidenza, anche dal tipo di polarizzazione.

Coefficienti di Fresnel (casi particolari)

Incidenza su un buon conduttore

Al crescere della conducibilità l'impedenza di parete tende a zero:

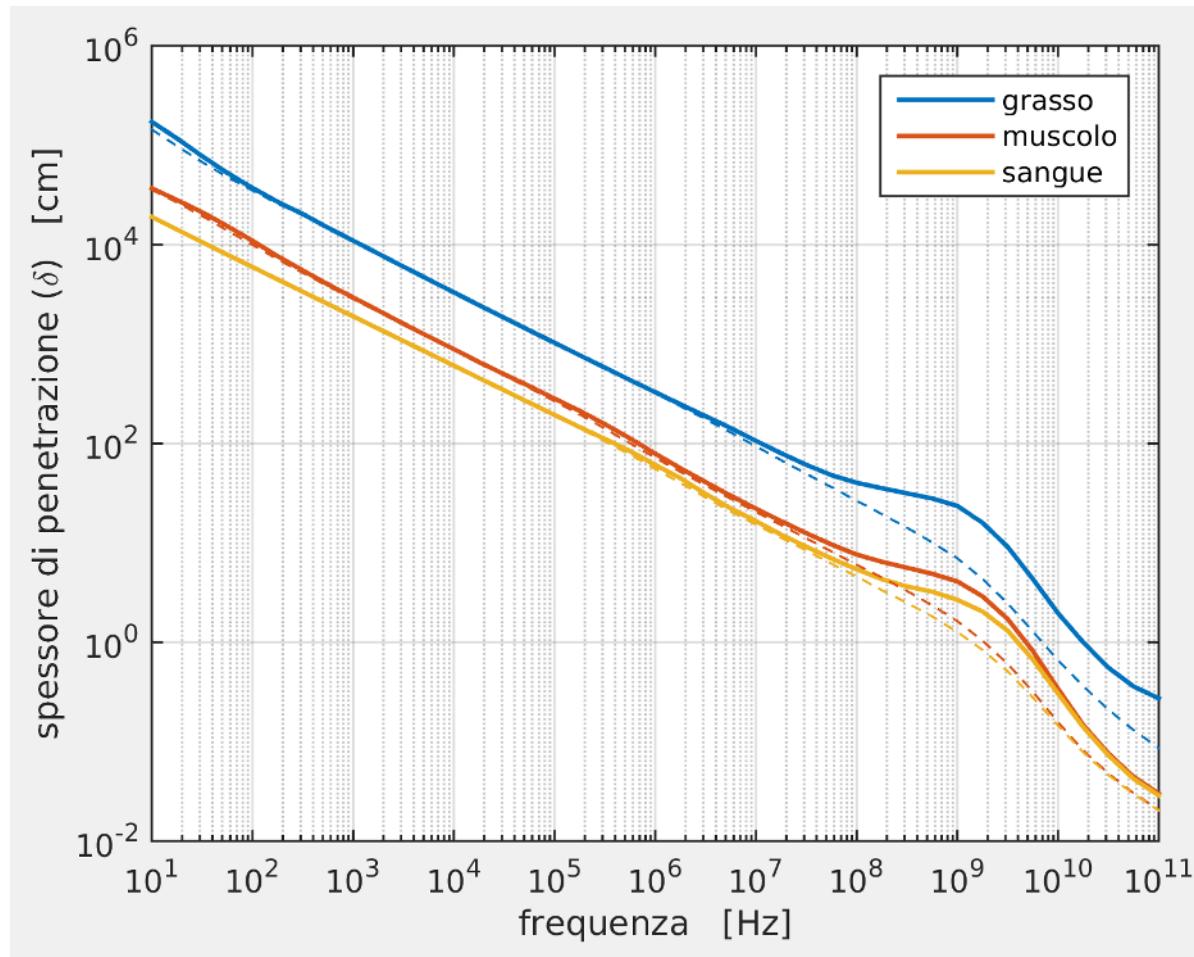
$$\sigma_2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \eta_2 \rightarrow 0 & \Rightarrow \rho \rightarrow -1, \tau \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow 0 \end{cases}$$

Il campo elettrico incidente tende ad essere completamente riflesso, mentre quello trasmesso all'interno del mezzo si attenua molto velocemente (basso spessore di penetrazione).

Onda trasmessa evanescente

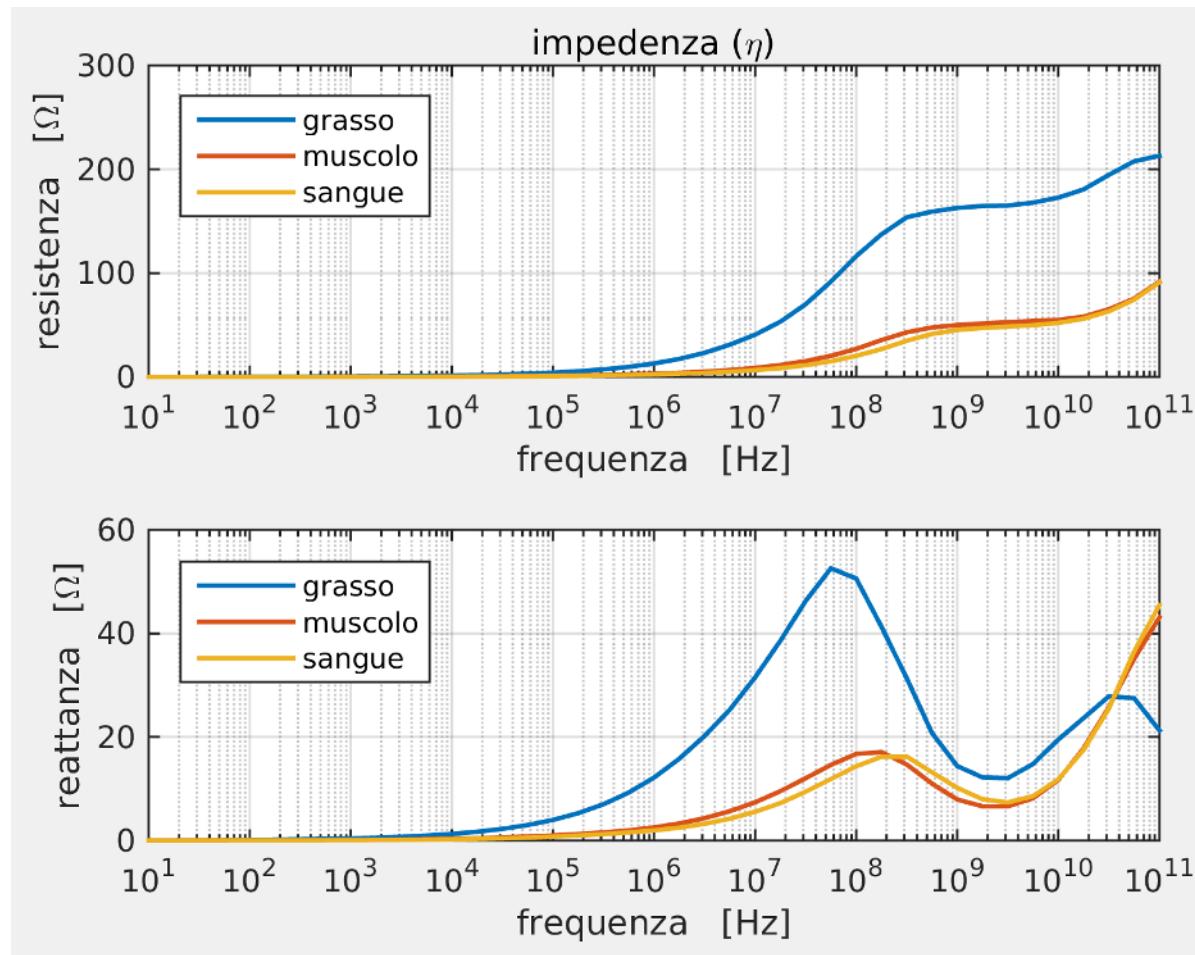
Nel caso l'onda trasmessa sia evanescente, si può dimostrare che la sua impedenza d'onda è puramente immaginaria; ne consegue che il modulo del coefficiente di riflessione è unitario \Rightarrow il caso di angolo di incidenza superiore all'angolo critico causa una riflessione completa della potenza attiva (riflessione interna totale).

Proprietà dei tessuti biologici: lo spessore di penetrazione



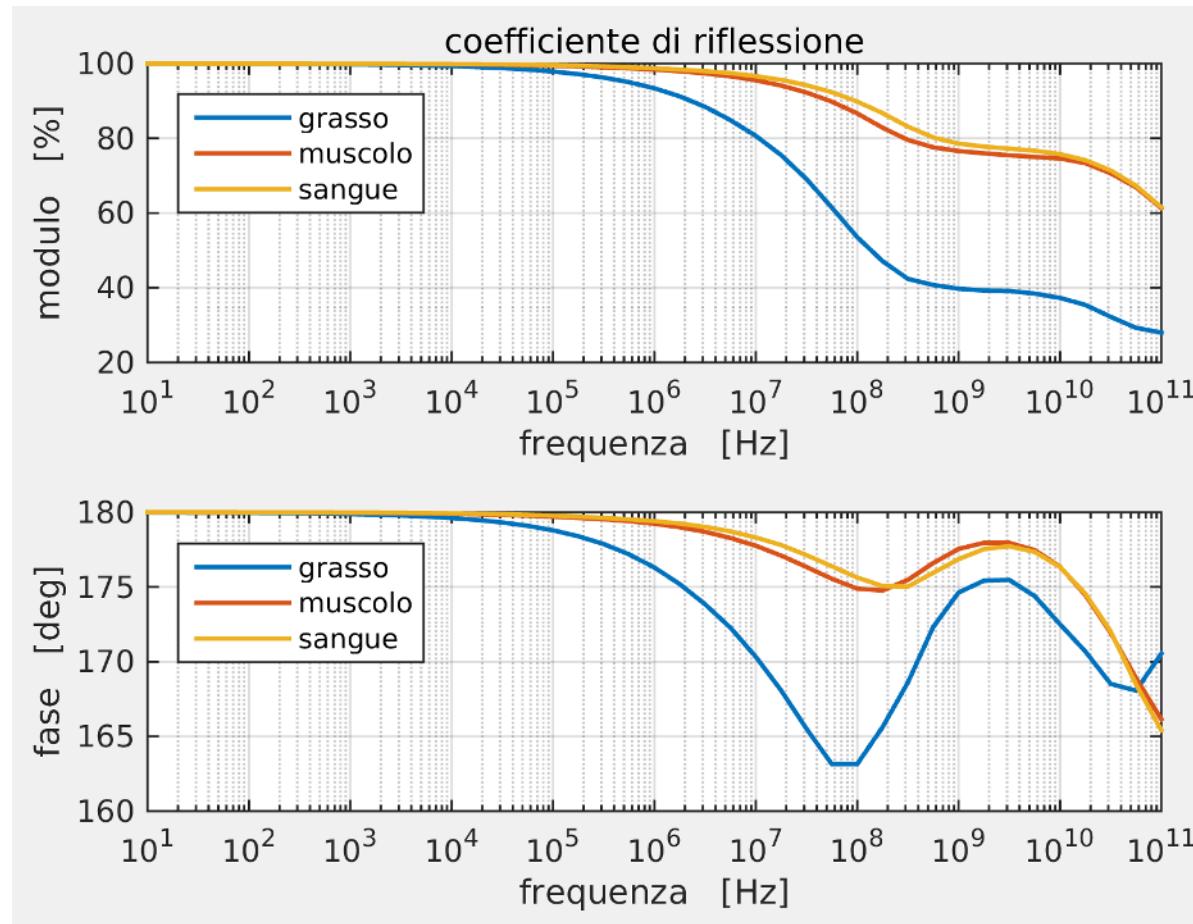
Le curve tratteggiate si riferiscono alla formula approssimata per i buoni conduttori

Proprietà dei tessuti biologici



Impedenza d'onda dell'onda trasmessa nel caso di incidenza normale

Proprietà dei tessuti biologici

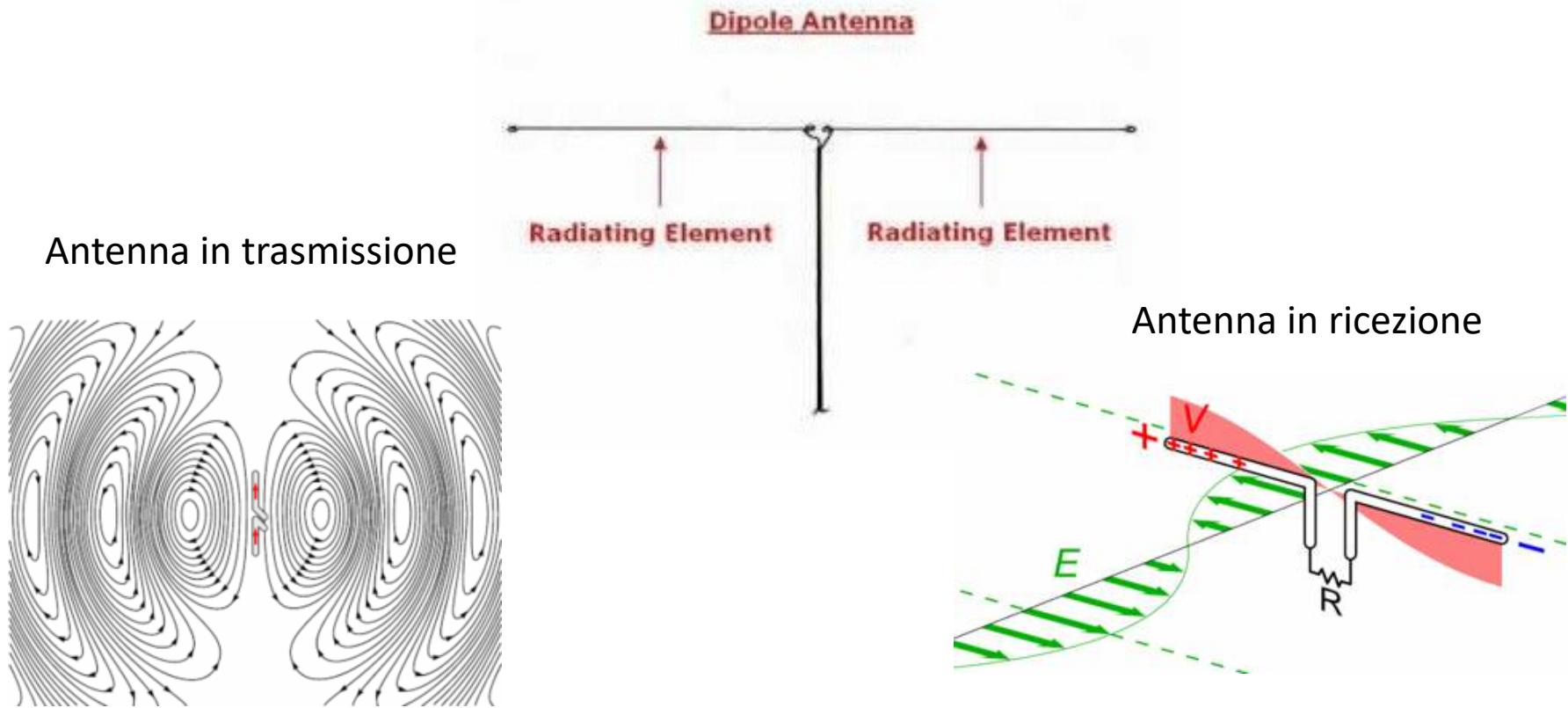


Coefficiente di riflessione del campo elettrico per incidenza normale

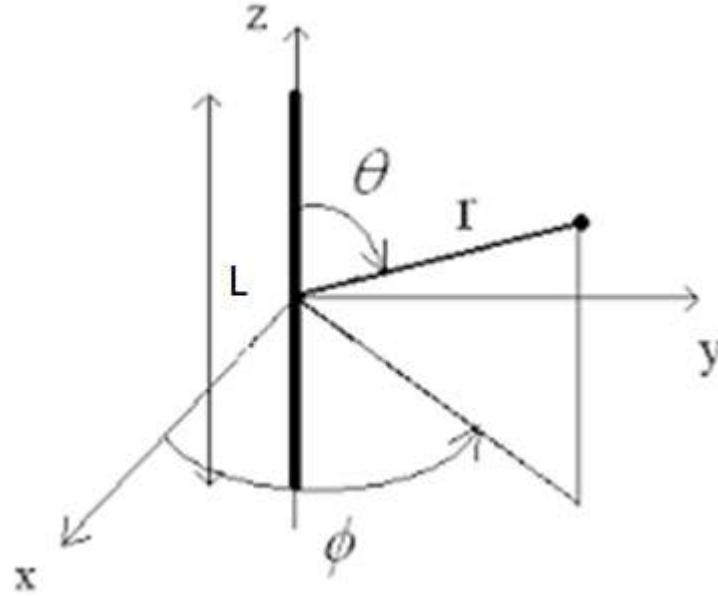
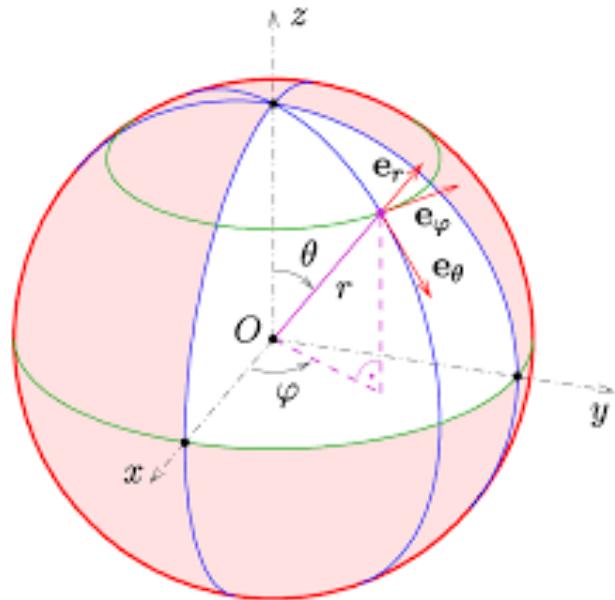
FONDAMENTI DI ANTENNE

Antenne filiformi - il dipolo

- L'antenna più semplice che si possa concepire è fatta da un filo metallico molto sottile ed interrotto al centro per consentire l'iniezione (o la captazione) di segnale



Antenne filiformi - il dipolo elementare



- Si assume la lunghezza del filo conduttore L talmente piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ , da assumere costante il fasore di corrente I che scorre sui bracci d'antenna
- Convenientemente, nell'analisi delle proprietà radiative delle antenne, si ricorre sempre al sistema di riferimento sferico

Il potenziale vettore magnetico

- Nell'analisi elettromagnetica di un'antenna, si assume sempre che essa sia posizionata al centro di un sistema di riferimento in un volume di dimensione infinita (tutto \mathbb{R}^3) sede di un mezzo:
 - lineare, isotropo, omogeneo e non dispersivo
 - con densità di corrente impressa non nulla
- In queste ipotesi, la presenza di sorgenti impedisce che si possa far ricorso all'equazione di Helmholtz (non è infatti garantita la condizione $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ovunque)
- Si fa ricorso quindi ad un «escamotage matematico»
- L'analisi vettoriale ci dice infatti che se in una regione dello spazio è definito un vettore sempre e comunque solenoidale (il vettore \mathbf{B}), allora è dimostrabile l'esistenza di un altro vettore \mathbf{A} , detto «potenziale vettore magnetico», tale che:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Il potenziale vettore magnetico

- Supponendo di essere in possesso della soluzione per \mathbf{A} , si ricavano immediatamente i campi \mathbf{H} ed \mathbf{E} :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_c} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}_i)$$

- Resta il problema di trovare l'equazione che permetta di determinare \mathbf{A}
- Si dimostra che il potenziale vettore magnetico \mathbf{A} soddisfa l'equazione di Helmholtz in presenza di sorgenti:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \kappa_\epsilon^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i$$

- Ancora una volta, un problema di natura vettoriale, presenta una complessità scalare

Il potenziale vettore magnetico

- Attenzione: questa volta l'equazione di Helmholtz per il potenziale vettore magnetico non può venire risolta con la tecnica di separazione delle variabili vista a proposito delle onde piane, perché, una soluzione di quel tipo non può essere fisicamente accettabile in questo contesto
- Si ricorre quindi a quella che viene detta «tecnica della funzioni di Green» che assume in pratica la sorgente (l'antenna filiforme infinitamente più piccola rispetto a λ) praticamente puntiforme
- Si dimostra allora che la soluzione di \mathbf{A} , specifica per il dipolo elementare è:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{IL}{r} e^{-j\beta r} \hat{Z}$$

- Supposto per semplicità, il mezzo senza perdite: $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi/\lambda$

Campo irradiato dal dipolo elementare

- Sebbene il problema (vettoriale) sia di complessità scalare, il passaggio dalla soluzione per il potenziale vettore magnetico \mathbf{A} alle componenti di campo e.m. non è banale:

$$H_\phi = IL \frac{\sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi} \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right)$$

$$E_\theta = IL\eta \frac{\sin \theta e^{-j\beta r}}{4\pi} \left(\frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} - j \frac{1}{\beta r^3} \right)$$

$$E_r = IL\eta \frac{\cos \theta e^{-j\beta r}}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - j \frac{1}{\beta r^3} \right)$$

Nota: espressione del campo e.m. nel caso di assenza di perdite della regione in cui è posta l'antenna per cui $\beta = 2\pi/\lambda$

Campo irradiato dal dipolo elementare

- Nei casi di interesse pratico è importante valutare il campo e.m. a grande distanza dall'antenna, in una regione detta di campo lontano ($r \gg \lambda$). In questa regione il campo e.m. si semplifica:

$$H_\phi \cong jIL \frac{\sin \theta e^{-j\beta r}}{2\lambda r}$$

$$E_\theta \cong jIL\eta \frac{\sin \theta e^{-j\beta r}}{2\lambda r}$$

$$E_r \cong 0$$

- Nel dominio del tempo questo rappresenta il moto di un'onda sferica che si espande e che localmente assume i connotati di onda piana uniforme

Campo irradiato dal dipolo elementare

- Per il dipolo elementare, la componente del vettore di Poynting importante ai fini della radiazione è quella radiale:

$$P_r = \eta(IL)^2 \frac{\sin^2 \theta}{8\lambda^2} \left[\frac{1}{r^2} - j \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3 \frac{1}{r^2} \right]$$

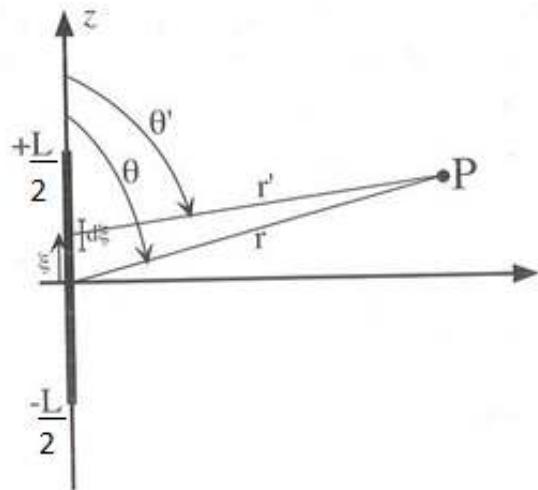
- Il corrispondente flusso attraverso una generica sfera di raggio r centrata nell'origine risulta:

$$W = \eta \frac{\pi(IL)^2}{3\lambda^2} \left[1 - j \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3 \right]$$

Nella regione di campo lontano, il flusso risulta praticamente reale e costante

Antenne filiformi reali

- Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti considerando il filo come una successione infinita di dipoli elementari impilati uno sopra l'altro, dove però il fasore di corrente I non può più assumersi costante :

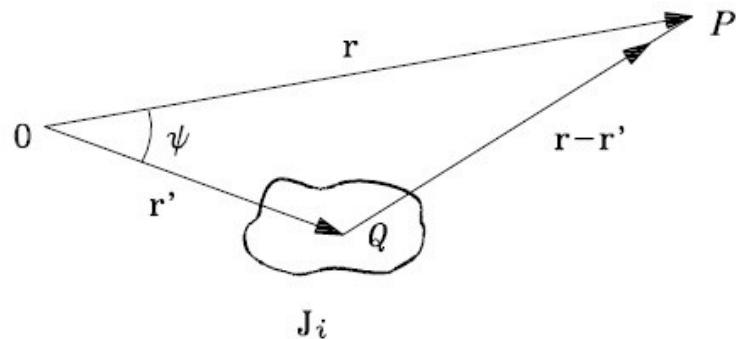


$$E_\theta \approx j\eta \frac{\sin \theta e^{-j\beta r}}{2\lambda r} \int_{-L/2}^{L/2} I(z) e^{j\beta \cos(\theta) z} dz$$
$$H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta}$$

Nota: espressione del campo e.m. nella regione di campo lontano

Antenne generiche con distribuzione di corrente impressa volumetrica

- Si risolve ancora l'equazione di Helmholtz per il vettore potenziale magnetico \mathbf{A} da cui si ricava il campo e.m. corrispondente.



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \mathbf{J}_i(\mathbf{r}') \frac{e^{-j\beta |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

- Si dimostra che nella regione di campo lontano, il campo e.m. irradiato mantiene sempre e comunque i connotati di onda sferica espansiva di natura localmente piana uniforme

Parametri delle antenne in trasmissione

- In pratica, qualsiasi tipo di antenna presenta nella «regione di campo lontano» delle caratteristiche comuni:
 - l'onda è un moto sferico espansivo
 - localmente, il fronte d'onda è quello di un'ona piana
 - il vettore di Poynting è praticamente solo reale
 - la potenza irradiata complessiva è una quantità conservata
 - Il campo decade secondo la legge $1/r$, Poynting con $1/r^2$
- E' necessario quindi definire dei parametri per le antenne nella loro funzione trasmittente che rendano conto, ad esempio, della possibile diversa distribuzione nello spazio del vettore di Poynting, della capacità di un'antenna di focalizzare o meno la potenza di emissione in direzioni preferenziali, il tipo di polarizzazione

Parametri delle antenne in trasmissione

Vi sono quindi svariati parametri che caratterizzano un'antenna nella sua funzione trasmittente, fra questi:

- il solido di radiazione (o superficie di radiazione)
- il diagramma di radiazione (o pattern di antenna)
- la direttività d'antenna
- il guadagno d'antenna
- Il fattore di efficienza d'antenna

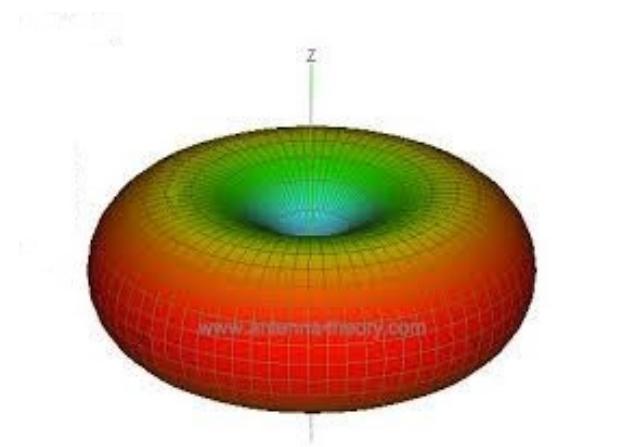
Parametri delle antenne in trasmissione

- Il solido di radiazione si definisce formalmente come:

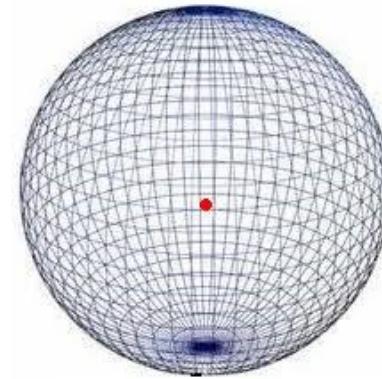
$$S_{rad}(\theta, \varphi) = \frac{|E|^2(r, \theta, \varphi)4\pi r^2}{\oint_{Sfera(r)} |E|^2(r, \theta, \varphi) ds}$$

- Rappresenta in pratica l'andamento del modulo del vettore di Poynting su una sfera centrata nell'origine (nell'antenna) di raggio sufficientemente grande da essere nella regione di campo lontano
- A volte il solido di radiazione viene riferito all'andamento su una sfera del modulo del campo elettrico o di una sua componente

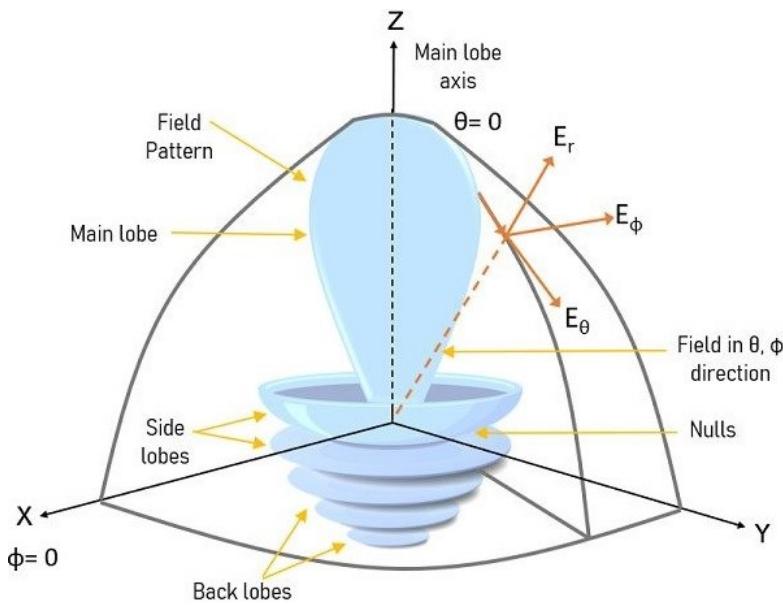
Esempi di solido di radiazione



Solido di una antenna a dipolo



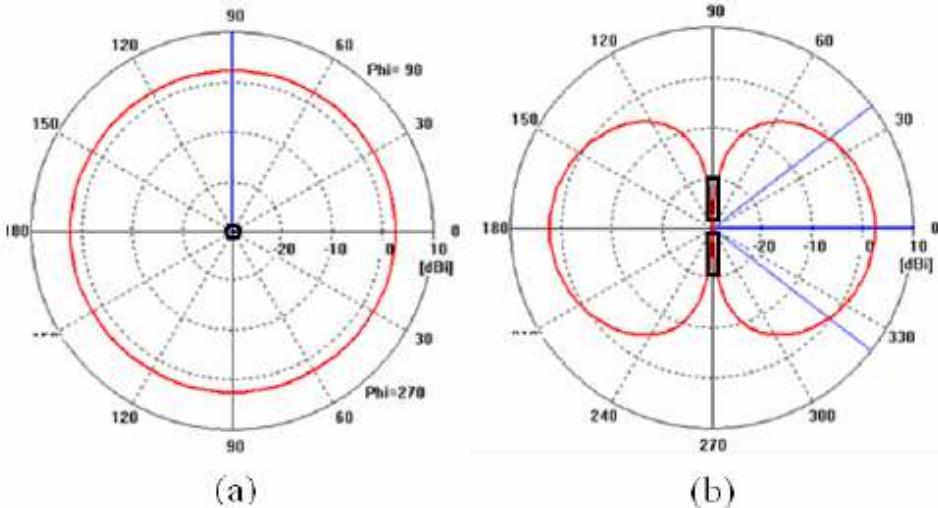
Solido di una antenna isotropa



Solido di una antenna a paraboloido

Parametri delle antenne in trasmissione

- Il diagramma di radiazione è l'intersezione tra il solido di radiazione e un piano specifico passante per l'origine



Diagrammi di una antenna a dipolo

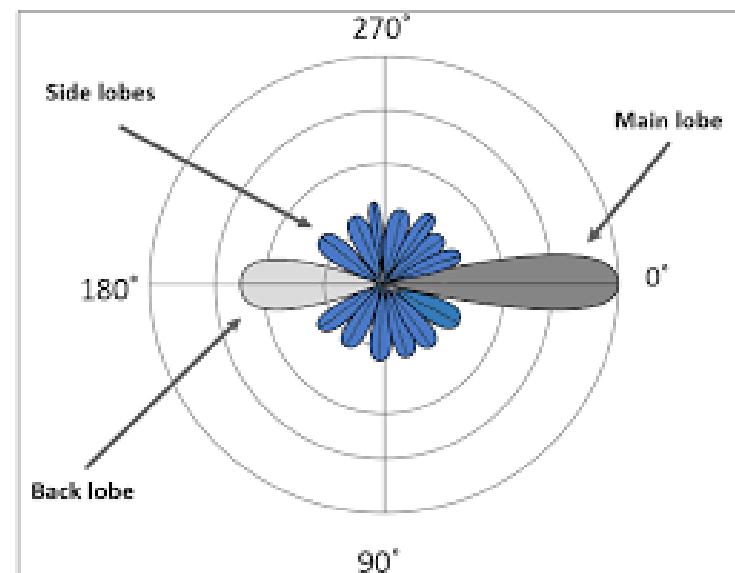
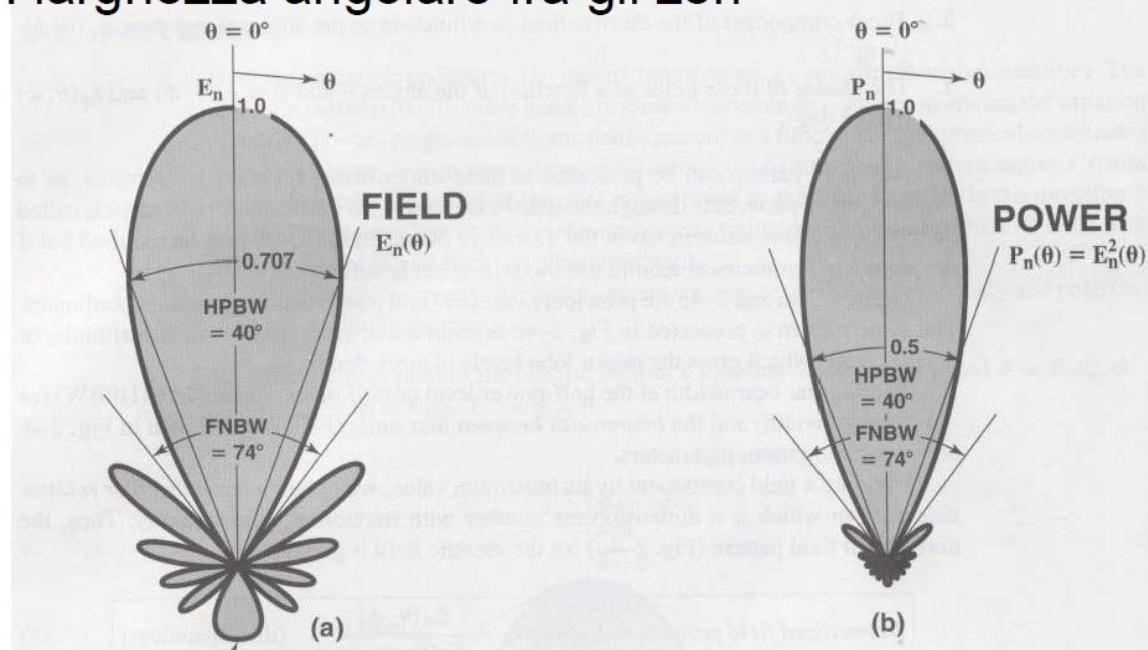


Diagramma di una antenna a paraboloide

Antenne: larghezza angolare del fascio

HPBW: larghezza angolare a metà potenza

FNBW: larghezza angolare fra gli zeri



Antenne: direttività (D) e guadagno (G)

La direttività D di un'antenna è il valore massimo della superficie di radiazione. Dalla definizione analitica della superficie di radiazione:

$$S_{rad}(\theta, \varphi) = \frac{|E|^2(r, \theta, \varphi)4\pi r^2}{\oint_{Sfera(r)} |E|^2(r, \theta, \varphi) ds} = \frac{P(\theta, \varphi)}{P_{irr}}$$

discende la seguente interpretazione:

$$D = S_{rad \ max} = \frac{P_0}{P_{irr}}$$

cioè il rapporto tra la potenza P_0 necessaria ad un'antenna isotropa per produrre in tutte le direzioni dello spazio la stessa intensità prodotta dall'antenna in esame nella sola direzione di massimo, e la potenza complessiva P_{irr} irradiata dall'antenna stessa. Ne segue che:

$$1 \leq D < \infty$$

Antenne: direttività (D) e guadagno (G)

Il guadagno G tiene conto anche delle perdite ohmiche dell'antenna ($G < D$).

In trasmissione queste sono legate al fatto che parte della potenza di alimentazione non viene irradiata, ma viene dissipata sull'antenna.

$$G = kD \quad (0 \leq k \leq 1)$$

k fattore di efficienza di antenna (k può essere molto prossimo a 1)

- La relazione tra Direttività e Guadagno è quindi dipendente dalla quantità di potenza dissipata che viene persa sul totale della potenza di alimentazione fornita ai «morsetti di ingresso»:

$$G = \frac{P_0}{P_{alim}} = \frac{P_0}{P_{irr} + P_{diss}}$$

Direttività di alcuni tipi di antenna

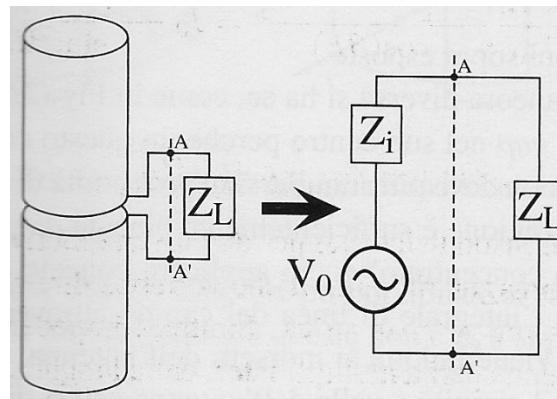
- Dipolo elementare: $D = 1.5$ (1.76 dB)
- Antenna filiforme a mezz'onda ($L = \lambda/2$): $D = 1.63$ (2.12 dB)
- Antenna a paraboloide di 1m di diametro: $D = 100$ (20 dB)
- Antenna per la televisione terrestre: $D = 13$ (11 dB)

Nota: quando si usa la scala logaritmica per esprimere la direttività:

$$D_{\text{dB}} = 10 \log_{10} D$$

Parametri delle antenne in ricezione

- Le stesse antenne che sono usate per la trasmissione possono essere usate per la ricezione di un segnale elettromagnetico
- L'antenna ricevente viene posta in una regione che è sede di un campo elettromagnetico ed «estrae» da questo della potenza che invia ad un circuito cui è connessa



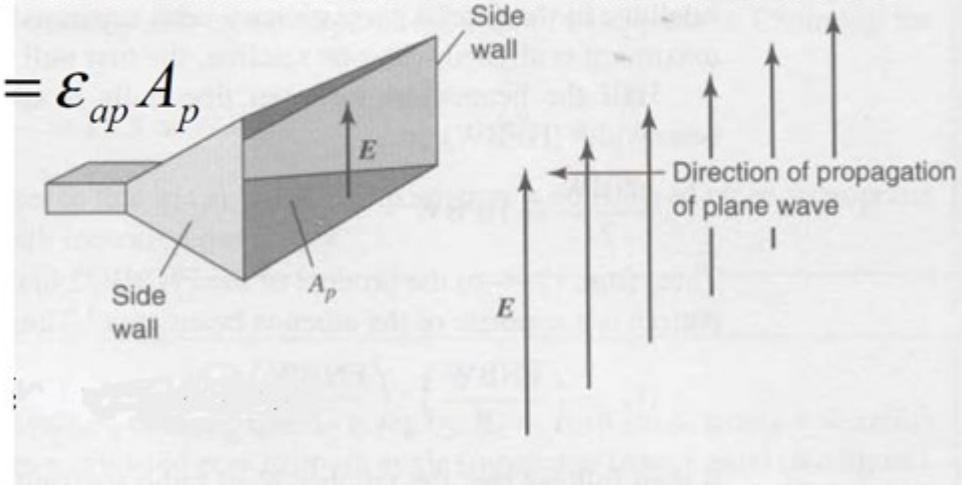
- Per reciprocità, le proprietà delle antenne nella loro funzione trasmittente possono essere «trasferite» alla loro funzione ricevente, ad esempio un'antenna direttiva in trasmissione sarà «ricettiva» nella stessa direzione
- E' comunque conveniente introdurre dei parametri specifici per la funzione ricevente, come «l'area efficace»

Area efficace (apertura di un'antenna)

L'area efficace viene facilmente introdotta con riferimento ad una antenna ricevente.

$$P_{ricevuta} = \frac{E^2}{2\eta} A_e \quad , \quad A_e = \epsilon_{ap} A_p$$

$$0.5 < \epsilon_{ap} < 1$$

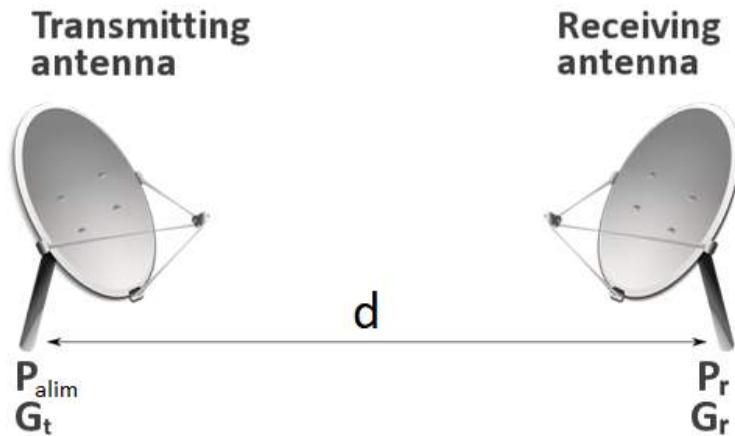


- Per reciprocità è possibile arrivare ad una relazione semplice fra direttività (guadagno se ci sono perdite) ed area efficace:

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D \qquad \qquad A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$$

- Per le antenne ad «apertura» come i paraboloidi o le antenne a «tromba», per cui $A_e \approx A_p$ si noti come all'aumentare della frequenza (al diminuire di λ), non potendo variare A_p , deve aumentare la direttività (il guadagno)

Formula universale del radiocollegamento



- In un radiocollegamento dove 2 antenne distanti d sono orientate in maniera ottimale, per reciprocità, sfruttando il legame tra area efficace e guadagno e la relazione tra guadagno e la potenza irradiata da una antenna isotropa, è possibile ricavare una formula che lega la potenza ricevuta alla potenza di alimentazione dell'antenna trasmittente:

$$P_r = G_r(G_t P_{alim}) \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2$$

Formula universale del radiocollegamento

- Il termine $(G_t P_{alim})$ che racchiude il ruolo dell'antenna nella funzione trasmittente , prende il nome di «potenza irradiata efficace» (Effective Radiated Power o ERP)
- Il termine $\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2$ è detto «attenuazione di spazio libero» anche se non è presente una vera attenuazione dovuta a dissipazione (si suppone che il radiocollegamento sia in aria)
- Il calo di potenza ricevuta con l'aumentare della distanza è infatti dovuta al calare di densità di potenza con la distanza presente nella regione in cui è posta l'antenna in ricezione
- E' chiaro inoltre dalla formula come all'aumentare della frequenza di utilizzo del radiocollegamento, a parità di distanza d e di P_{alim} , la P_r cala a meno che non si compensi con l'aumento dei guadagni

5G e beam forming

- Proprio perché nel nuovo standard è previsto un utilizzo anche a frequenze intorno ai 30GHz (onde millimetriche), l'attenuazione di spazio libero cresce di moltissimo
- Ad esempio, passando da 2.1GHz (una delle frequenze del 4G) a 29GHz, per una distanza di 10 metri, l'attenuazione aumenta da 58dB a 82dB
- Questo effetto deve quindi essere compensato da un guadagno maggiorato dell'antenna trasmittente con fascio «stretto» che però deve anche «seguire» il dispositivo in ricezione (beam forming)

