# COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
# Ingegneria dell'Informazione
# 15 Febbraio 2018

**Esercizio 1.** [10 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{s^2}{10^2}\right)\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)^2}{s^2\left(1 + \frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$ (non è richiesto il calcolo di eventuali asintoti ed intersezioni con gli assi);

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ (determinandone l'eventuale numero di poli a parte reale positiva e/o nulla) al variare di $k$ in $\mathbb{R}, k \neq 0$.

**Esercizio 2.** [10.5 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s + 2\sqrt{3})(s - 2\sqrt{3})}{(s-6)^2(s+3)}$$

è richiesto il tracciamento dei luoghi (positivo e negativo), con individuazione di asintoti, punti doppi ed intersezioni con l'asse immaginario (compreso il calcolo dei corrispondenti valori di $k$). Si deduca quindi se e per quali valori di $k$ la funzione retroazionata $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ risulta BIBO-stabile.
[**Nota**: attenzione nel luogo c'è un punto triplo ovvero un punto in cui entrano ed escono tre rami del luogo]

**Esercizio 3.** [5.5 punti]

i) Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+s}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}$$

si progetti un controllore proprio e stabilizzante $C(s) \in \mathbb{R}(s)$ che attribuisca al sistema retroazionato $W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$ tipo 0 e relativo errore a regime (al gradino) $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.1$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia $\omega_A \simeq \omega_A^* = 100, m_\psi \simeq m_\psi^* = 90°$.

ii) Dato il processo di funzione di trasferimento

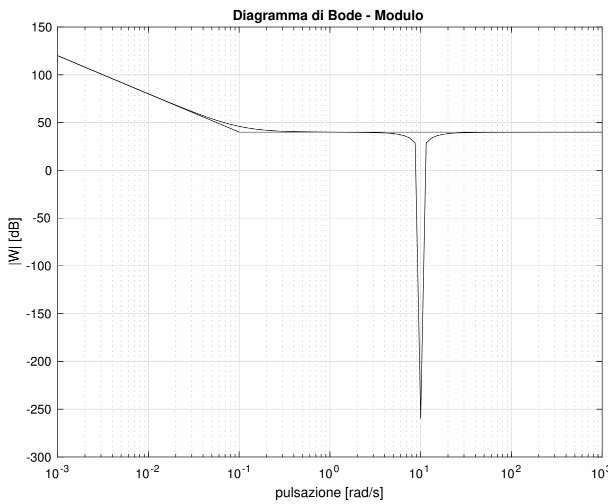
$$G(s) = \frac{1-s}{(s+3)^2}$$

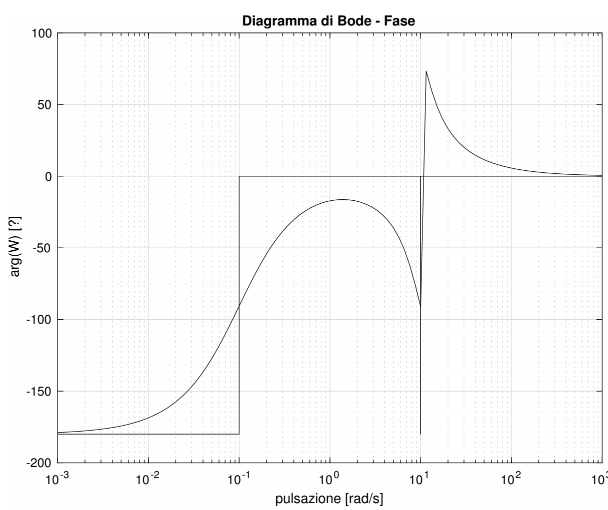
si progetti un controllore proporzionale $k < 0$ in modo tale che il risultante sistema retroazionato $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ sia BIBO stabile e la risposta forzata di uscita a regime in corrispondenza al segnale sinusoidale in ingresso $u(t) = \sin t \; \delta_{-1}(t)$, sia $y_{rp}(t) = A \sin(t + \pi/2)$, per qualche $A \in \mathbb{R}$.
[**Suggerimento**: sfruttare l'espressione della risposta a regime $y_{rp}(t)$ in termini della risposta in frequenza $W(j\omega)$].

**Teoria.** [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

# SOLUZIONI

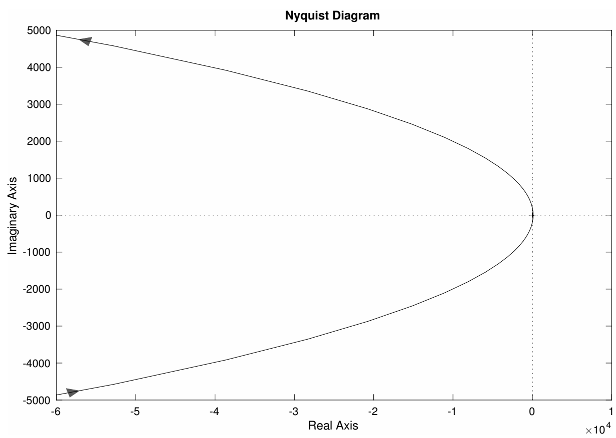
**Esercizio 1.** i) Il diagramma di Bode dei moduli parte decrescente con pendenza di $-40$ dB/decade, poi procede sempre piatto lungo la retta orizzontale di ordinata 40 dB, ad eccezione di un picco di antirisonanza infinito per $\omega = 10$ rad/s (sebbene nella figura sotto appaia finito). Il diagramma asintotico delle fasi parte da $-180°$ poi, per $\omega = 0.1$ rad/s ha un salto di $180°$ e poi procede dritto lungo l'asse delle ascisse fino a $\omega = +\infty$. Invece il diagramma reale parte da $-180°$, cresce ed ha un punto di massimo prossimo a $0°$ per $\omega = 1$ rad/s. Poi subentra l'effetto congiunto dei due termini con punto di spezzamento $\omega = 10$ rad/s, che fanno sì che la fase scenda fino a $-90°$ poi scatti verticalmente di $+180°$ (fino a $90°$), e infine si riporti a zero.

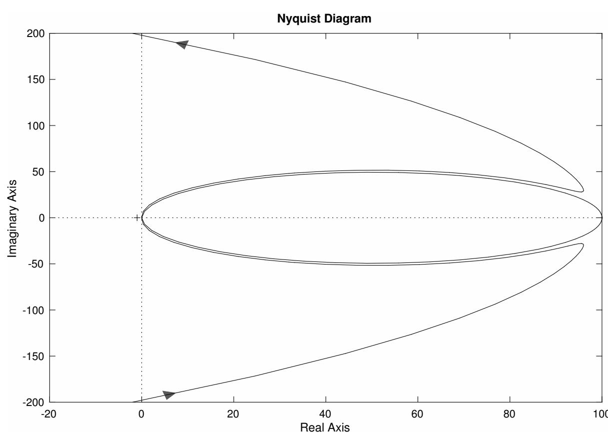



ii) Dallo studio del diagramma di Bode deduciamo il diagramma di Nyquist. Il tratto per pulsazioni positive parte (per $\omega = 0^+$) dal punto improprio parallelo al semiasse reale negativo, poi attraversa il semiasse immaginario negativo e ruota portandosi a un angolo prossimo a zero, poi di colpo il modulo cala e la fase cala fino a portare all'attraversamento dell'origine con fase $-90°$. Il diagramma poi esce dall'origine per $\omega = 10^+$ rad/s parallelo al semiasse immaginario positivo e si porta sul semiasse reale nel punto 100 (per $\omega = +\infty$).

Qui di seguito viene riportato il diagramma di Nyquist completo e un suo dettaglio per valori di $|\omega| \geq 0.1$ rad/sec.




iii) Osserviamo preliminarmente che $n_{G+} = 0$. La chiusura del diagramma all'infinito porta ad un cerchio di raggio infinito in verso orario. Se $s = -\frac{1}{k} < 0$, ovvero $k > 0$, allora $N = 0$ e quindi $W(s)$ è BIBO stabile. Se $k < 0$ invece distinguiamo due casi: se $-1/100 < k < 0$ allora $N = -1$, da cui segue $n_{W_+} = 1$ e quindi $W(s)$ ha un polo reale positivo e non è BIBO stabile. Se invece $k < -1/100$ allora $N = -2$ da cui segue $n_{W_+} = 2$ e quindi $W(s)$ ha due poli a parte reale positiva e non è BIBO stabile. Morale: ho stabilità BIBO se e solo se $k > 0$.

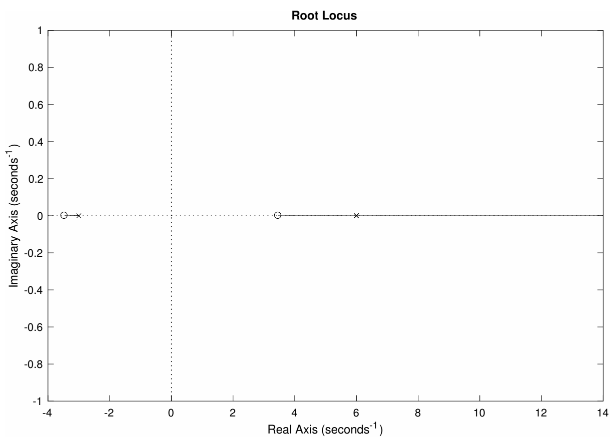
**Esercizio 2.** L'equazione dei punti doppi porge, dopo semplici calcoli

$$s^2(s+6)(s-6) = 0$$

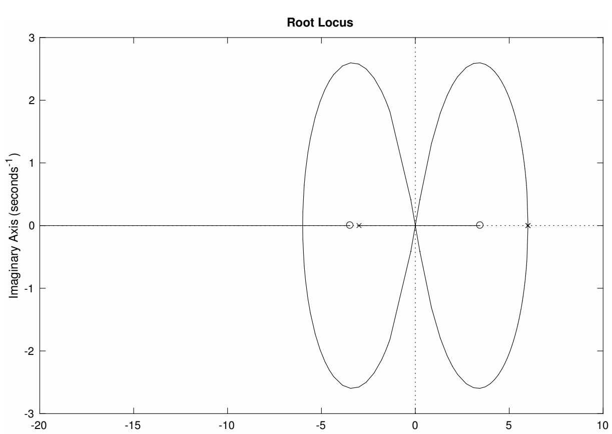
da cui i punti doppi $s = 6$ (banale, $k = 0$), $s = -6$ (con $k = 18$), $s = 0$ (con $k = 9$), l'ultimo dei quali si può già intuire che sarà in realtà un punto triplo, comparendo nell'equazione dei punti doppi con molteplicità 2 (questa considerazione non è tuttavia necessaria: che sia un punto triplo, sarà evidente dal tracciamento del luogo). Per quel che riguarda le intersezioni con l'asse immaginario, ponendo $q(j\omega) + kp(j\omega) = 0$ si ottiene

$$(12 + \omega^2)(9 - k) - j\omega^3 = 0 \;\Rightarrow\; \omega = 0,\; k = 9$$

che evidenzia l'unica intersezione nel già determinato punto triplo in $s = 0$. Possiamo ora tracciare i luoghi. Quello negativo è semplicissimo, in quanto dal polo doppio $s = 6$ escono due rami che, muovendosi sull'asse reale, tendono uno a $+\infty$ (asintoto), l'altro allo zero in $s = +2\sqrt{3}$, mentre il ramo che parte dal polo in $s = -3$ si muove sull'asse reale verso lo zero in $s = -2\sqrt{3}$. Essendoci sempre 2 rami a destra dell'asse immaginario, abbiamo instabilità (con 2 poli positivi ed 1 negativo).




Il luogo positivo è più complesso: i due rami che escono dal polo doppio escono nel piano complesso (con simmetria coniugata) per incontrarsi nel punto $s = 0$ assieme al ramo reale che proviene dal polo $s = -3$ per $k = 9$, poi un ramo prosegue sull'asse reale verso lo zero in $s = +2\sqrt{3}$, mentre gli altri due devono ancora uscire nel piano complesso per reincontrarsi nel punto doppio $s = -6$ per $k = 18$, dopodichè i 2 rami proseguono sull'asse reale, dirigendosi uno verso lo zero in $s = -2\sqrt{3}$ e l'altro verso $-\infty$ (asintoto). L'assenza di intersezioni con l'asse immaginario (eccetto per $s = 0$) garantisce che i rami complessi stiano a destra dell'asse immaginario prima di $k = 9$, ed a sinistra dopo $k = 9$. Abbiamo quindi 2 poli a parte reale positiva per $k < 9$, uno positivo per $k > 9$, e tre poli in $s = 0$ per $k = 9$. In ogni caso anche nel luogo positivo la stabilità è esclusa, quindi $W(s)$ non è BIBO stabile per nessun valore di $k$ reale.



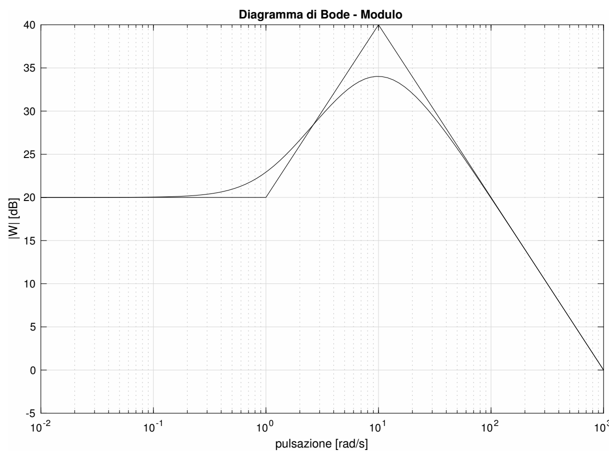
**Esercizio 3.** i) Per sistemare la specifica su tipo ed errore a regime dobbiamo semplicemente attribuire al controllore $C'(s)$ un guadagno di Bode pari a 10, ovvero il precompensatore deve essere

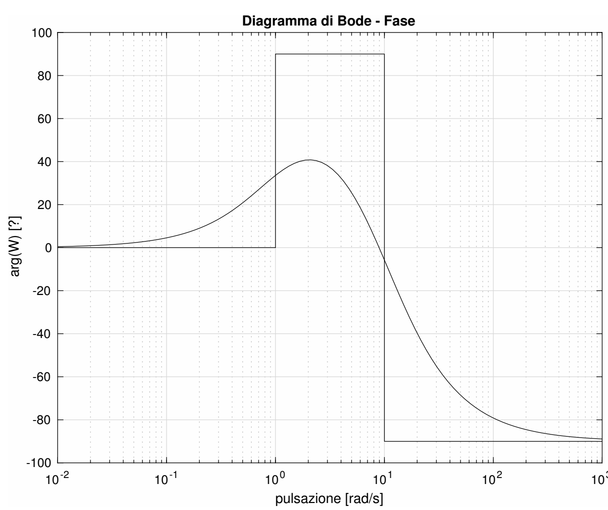
$$C'(s) = 10.$$

La funzione di trasferimento di $C'(s)G(s)$ è

$$C'(s)G(s) = 10\frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$$

e i suoi diagrammi di Bode sono:

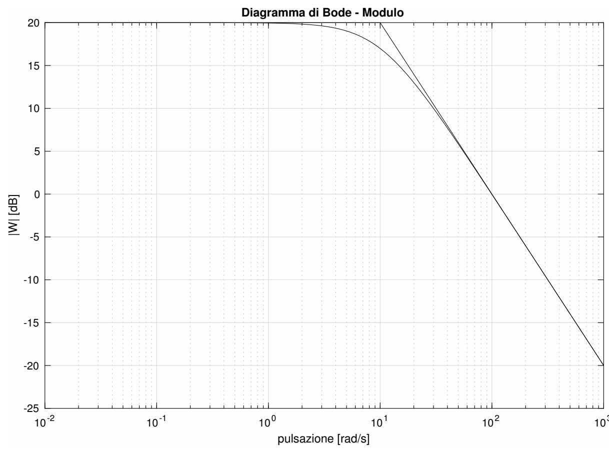


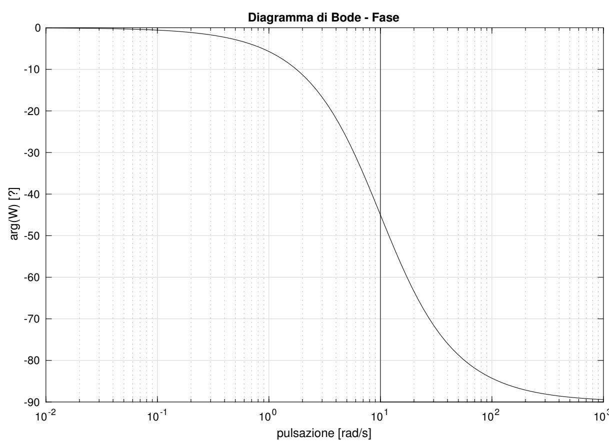




Notiamo che in corrispondenza a $\omega_A^* = 100$ rad/s il modulo vale $M = 20$dB mentre il margine di fase è a posto. Basta una rete ritardatrice con coppia polo-zero distanziata di una decade. La scelta migliore, che induce una doppia cancellazione zero-polo, è

$$C(s) = 10\frac{1+\frac{s}{10}}{1+s} \;\Rightarrow\; C(s)G(s) = \frac{10}{1+\frac{s}{10}}$$

che soddisfa tutte le specifiche, e rende il sistema retroazionato BIBO stabile in virtù del Criterio di Bode. Il diagramma di Bode della risultante funzione di trasferimento in catena aperta è:




ii) La funzione di trasferimento del sistema retroazionato è

$$W(s) = \frac{k(1-s)}{(s+3)^2 + k(1-s)} = \frac{k(1-s)}{s^2 + (6-k)s + (9+k)}.$$

Se la valuto per $s = j1$ ottengo

$$W(j) = \frac{k(1-j)}{(9+k-1) + j(6-k)} = \frac{k(1-j)}{(8+k) + j(6-k)},$$

e il suo argomento è

$$\arg(W(j)) = \arg(k) + \arg(1-j) - \arg[(8+k) + j(6-k)].$$

Ora, se $k < 0$ ne consegue che

$$\arg(W(j)) = \pi - \pi/4 - \arg[(8+k) + j(6-k)],$$

e quindi devo capire se esiste $k < 0$ tale che $\pi/2 = \arg(W(j)) = 3\pi/4 - \arg[(8+k)+j(6-k)]$, ovvero

$$\arg[(8+k) + j(6-k)] = \pi/4.$$

È immediato verificare che ciò richiede di imporre a parte reale e immaginaria del numero complesso $(8+k) + j(6-k)$ lo stesso valore e ciò è possibile se e solo se $k = -1$. Per tale valore è anche immediato verificare che $W(s)$ è BIBO stabile.

**Teoria.** [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 189 e successive.