ESERCIZI SCHEDA 7

ESERCIZIO 1

ⓐ

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\cos(\pi x)}{1+x^2} & \text{se } x\le 0 \\[2ex] \dfrac{(1+x^3)^\alpha - e^{x^4}}{5x^3+x\log(1+x^2)} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

La funzione è definita a tratti da funzioni composte di funzioni continue, quindi presentano punti di continuità. L'unico punto probabile di discontinuità di $f(x)$ sta in $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\cos(\pi x)}{1+x^2} = 2 = f(0)$$

Vorrei trovare α tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1+x^3)^\alpha - e^{x^4}}{5x^3+x\log(1+x^2)}$$

sviluppi di Taylor:

- $e^x = 1+x+o(x)$ per $x\to 0$
  $\Rightarrow e^{x^4} = 1+x^4+o(x^4)$ per $x\to 0$
- $\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$
  $\Rightarrow \log(1+x^2) = x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$
- $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+o(x)$
  $\Rightarrow (1+x^3)^\alpha = 1+\alpha x^3+o(x^3)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1}+\alpha x^3+o(x^3)-\cancel{1}+x^4+o(x^4)}{5x^3+x\left(x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^3+o(x^3)}{6x^3-\frac{5}{2}x^7+o(x^7)} = 2 \iff \boxed{\alpha = 12}$$

ⓑ $$g(x)=\begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ |x|^{2\alpha} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

La funzione è definita a tratti da funzioni composte di funzioni continue, quindi presentano punti di continuità. L'unico punto probabile di discontinuità di $f(x)$ sta in $x=0$.

$g(0)=0$, voglio quindi trovare α tale che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) \iff \alpha>0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x|^{2\alpha} \iff \alpha>0 \end{array}\right\}$$ Si ha continuità per $\alpha>0$

Esercizio 2

$$f(x)=e^{x^2}+\log(2x^2-1)-10$$

dominio: $2x^2-1>0 \iff x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

ⓐ $f(1)=e^{1^2}+\log(2-1)-10 = e+\cancel{\log 1}-10 = e-10<0$

$f(2)=e^{2^2}+\log(2\cdot 2^2-1)-10 = e^4+\log 7-10>0$

La funzione è funzione composta di funzioni continue, quindi $f(x)$ è una funzione continua.

$f(1)<0$, $f(2)>0$. Per il teorema di Bolzano, esistono zeri di $f(x)$ nell'intervallo $[1,2]$

ⓑ Nell'intervallo $[1,2]$, e^{x^2} è crescente, $\log(2x^2-1)$ è crescente e -10 è funzione costante. Di conseguenza, $f(x)$ è crescente in $[1,2]$ e quindi si ha un solo zero per il corollario del teorema di Bolzano.

(c) $f(-x) = e^{(-x)^2} + \log[2(-x)^2-1] - 10$

$\overset{!}{=} e^{x^2} + \log(2x^2-1) - 10 = f(x) \Rightarrow f(x)$ è PARI

$\Rightarrow$ Se $f(x)$ presenta uno zero in $[1,2]$, allora ne presenta un altro in $[-2,-1]$.

ESERCIZIO 3

Per ogni funzione uso il 2° corollario del teorema di Bolzano.

(a) $\log x + \cosh(2x) = 0 \qquad$ in $I = (0, +\infty)$

Considero la funzione $f(x) = \log x + \cosh(2x) = \log x + \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\log x + \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right) = -\infty + \frac{1+1}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\log x + \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right) = +\infty + \frac{+\infty+0}{2} = +\infty$$

Per il corollario del teorema di Bolzano, esiste uno zero di $f(x)$ in I.

(b) $1 - 2^{-x} = \dfrac{a}{x} \iff 2^{-x} + \dfrac{a}{x} - 1 = 0 \qquad$ in $I = (2, +\infty)$

Considero la funzione $f(x) = 2^{-x} + \dfrac{a}{x} - 1 = \dfrac{1}{2^x} + \dfrac{a}{x} - 1 = \dfrac{x + a\cdot 2^x - x\cdot 2^x}{x\cdot 2^x}$

con $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+a\cdot 2^x - x\cdot 2^x}{x\cdot 2^x} = \frac{2+4a-2\cdot 4}{2\cdot 4} = \frac{4a-6}{8} = \frac{2a-3}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+a\cdot 2^x - x\cdot 2^x}{x\cdot 2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\cancel{x\cdot 2^x}\left(-\frac{1}{2^x}-\frac{a}{x}+1\right)}{\cancel{x\cdot 2^x}} = -1$$

Per applicare il corollario voglio: $\frac{2a-3}{4} > 0 \iff a > \frac{3}{2}$

Se $a > \frac{3}{2}$ si può dire che esistono zeri di $f(x)$ in I.

Se $a \leq \frac{3}{2}$ non si può ricavare alcuna informazione.

c) $x^6 + 2x^5 - 3x^2 - x = 1 - \sqrt{2}$ in $I = \mathbb{R}$

$x^6 + 2x^5 - 3x^2 - x + \sqrt{2} - 1 = 0$

Considero $f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^2 - x + \sqrt{2} - 1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ Non è possibile concludere nulla.

Osservo però che:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f(0) = \sqrt{2} - 1 > 0 \\ &\bullet\ f(1) = \cancel{1} + \cancel{2} - \cancel{3} - 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - 2 < 0 \end{aligned}\right\} \exists\, c \in (0,1) \text{ tale che } f(c) = 0 \Downarrow c \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4

$$x^8 + 5x^5 - 4x^4 - 2x + e^{\frac{1}{1+|x|^2}} = 9$$

Considero la funzione: $f(x) = x^8 + 5x^5 - 4x^4 - 2x + e^{\frac{1}{1+|x|^2}} - 9$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Osservo che $f(0) = e - 9 < 0$

Dai limiti e dal valore di $f(0)$, si ricava, tramite il secondo corollario del teorema di Bolzano che esiste almeno uno zero in $[0, +\infty)$ e che esiste almeno uno zero in $(-\infty, 0]$, quindi esistono almeno 2 zeri in $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ 2 soluzioni dell' equazione.