Esercizi Tutorato Algebra

chiara.malerba@studenti.unipd.it

a.a. 2022/2023

Esercitazione del 30 Marzo 2023

- Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, e':

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

  - Si determinino le basi del nucleo e dell'immagine f.
  - Dato il vettore $u_t = (7, 2, t, 1)$ si determini t in modo che $u_t \in Ker(f)$.
  - Dato il vettore $w_t = (2, t, 0)$ si dica per quale valore di t si ha $f^-1(w_t) \neq \emptyset$
  - Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (3, -1, 2, 2)$ e $u_2 = (1, 1, 1, 3)$. Si determini una base del sottospazio $f(U)$.

- Si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare,

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che,

$$f(0, 1, -1) = (3, -1, 0)$$

$$f(-2, 1, 3) = (-t, -1, t + 3)$$

e il nucleo di f sia generato dal vettore $(1, t^2 + 3t, -2)$. Per i valori di t per cui f esiste si specifichi inoltre se essa e' unica oppure no.

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche. Dato il vettore $u = (1, -2) \in \mathbb{R}^2$, si determini $f^-1(u)$.La funzione f e' invertibile?

- Assegnate le matrici,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & -2 & 2k \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & k+2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ -2k & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  - si stabilisca per quali valori del parametro reale K la matrice $C = A + B^T$ e' invertibile.
  - posto $k = 0$, si calcoli la matrice inversa della matrice ottenuta da C togliendo la prima colonna e la terza riga.

- Considerare il vettore $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, disegnarlo nel piano cartesiano insieme ai vettori $x' = (1, 1)$ e $y' = (-1, 1)$.
  - Disegnare le proiezioni di v_1 su x' e y' e trovare α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che sia $\alpha x' + \beta y' = v_1$.
  - Verificare che $B' = \{x', y'\}$ e' una base di $\mathbb{R}^2$ e trovare la matrice $M_B^{B'}$ di cambiamento di base dalla canonica a B'.
  - Calcolare il rango di $M_B^{B'}$.
  - Calcolare $M_B^{B'} v_1$. Analizzare il risultato con attenzione.