FAMP_2018_19_Appello4

martedì 17 settembre 2019 21:07

FAMP_2018_19_Appello4

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________Docente del corso______________

Università degli Studi di Padova

Padova, 17 settembre 2019 Appello IV**FAMP** Tempo: 2 ore e 45 minuti.

Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Questo foglio va consegnato unitamente al solo foglio di bella. Richiesta certificato di partecipazione all'esame: carlo.mariconda@unipd.it

0.1 Analisi

(A_1) Determinare il volume della regione dello spazio contenuta nel cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e delimitata dai piani $z = 0$ e $z = -y$.

(A_2) Sia $\vec{F}(x, y) = (6y + x, y + 2x)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dire se $\vec{F}$ è conservativo. Calcolare poi l'integrale di $\vec{F}$ sul bordo del disco $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$, orientato in senso antiorario.

(A_3) Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $y^2(x)y'(x) = 3x^2y^3(x) - 6x^2, y(-1) = 1$.

(A_4) Integrare x^2 sulla superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Probabilità

Sono richiesti valori numerici, non solo le formule.

P_1) Si consideri la funzione di due variabili

$$f_a(x, y) = \begin{cases} ax^3(y + 1) & \text{se } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Per quale valore del parametro reale a la funzione f_a è la densità congiunta di una coppia di variabili aleatorie continue X e Y.
2. Per il valore trovato nel punto a) determinare le densità marginali.
3. X e Y sono indipendenti?
4. Calcolare la probabilità dell'evento $Y \leq X^2$.

P_2) Un pastificio produce spaghetti il cui diametro è una variabile aleatoria normale di media 0.3 mm e varianza 0.09 mm^2. Uno spaghetto è accettabile se il suo diametro è compreso tra 0.21 mm e 0.39 mm.

1. Determinare la probabilità che uno spaghetto sia accettabile;
2. Determinare il valore massimo che deve avere la varianza (al posto dei precedenti 0.09 mm^2) che assicura che uno spaghetto sia accettabile con probabilità almeno uguale al 90%.

P_3) Nel campo del sig. XYZ c'è una pianta di chinotti. La probabilità che la pianta produca almeno 2 Kg di frutti è uguale a 0.7 quando XYZ si ricorda di usare del fertilizzante, altrimenti se si dimentica di usarlo scende a 0.2. In generale la pianta di chinotti del sig. XYZ produce almeno 2 Kg di frutti con probabilità 0.5. Calcolare la probabilità che il sig. XYZ si ricordi di somministrare il fertilizzante.

P_4) Dobbiamo disporre 20 invitati ad un matrimonio ed i due sposi in fila per la foto di gruppo. I due sposi devono stare vicini tra loro, ma non ai margini della foto (ovvero non possono essere né i primi due né gli ultimi due della fila). In quanti modi possiamo disporli? (Spiegare bene i principi di combinatoria utilizzati non solo il risultato)

Analisi

$$(A_1) \quad \int_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y<0}} \int_0^{-y} 1 \, dz = \int_{\substack{x^2+y^2 \leq 1 \\ y<0}} -y \, dz = -\int_{\substack{\rho \in [0,1] \\ t \in [\pi, 2\pi]}} \rho^2 \sin t \, d\rho \, dt = +\frac{1}{3}\left[\cos t\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{3}$$

$x^2+y^2 \le 1$ $\quad$ $x^2+y^2\le 1$ $\quad$ $\rho\in[0,1]$

$y<0$ $\quad$ $y<0$ $\quad$ $t\in[\pi,2\pi]$

(A_2) $\vec{F}(x,y) = (6y+x,\, y+2x)$. $\quad \underbrace{\partial_y(6y+x)}_{6} \ne \underbrace{\partial_x(y+2x)}_{2}$

$\Rightarrow \vec{F}$ NON è conservativo.

Green: $C = \{(x,y) : (x-2)^2+(y-3)^2 \le 4\}$

$$\int_{\partial^+ C} \vec{F}\cdot d(\partial^+ C) = \int_C \det\begin{pmatrix}\partial_x & 6y+x \\ \partial_y & y+2x\end{pmatrix} dx\,dy$$

$$= \int_C 2-6\,dx\,dy = -4 \text{ Area } C$$

$$= -4\pi\cdot 4 = -16\pi\,.$$

(A_3) $y^2y' = 3x^2(y^3-2) \Rightarrow \dfrac{y^2y'}{y^3-2} = 3x^2$

$$\int \frac{u^2}{u^3-2}\,du \quad (u=y(x)) \quad = x^3+C \Rightarrow \frac{1}{3}\lg|y^3(x)-2| = x^3+C$$

$\Rightarrow |y^3(x)-2| = e^{3(x^3+C)} \quad \Rightarrow \quad y^3(x)-2 = \varepsilon\, e^{3(x^3+C)}$ $\quad$ $\varepsilon = 1$ o $\varepsilon=-1$

Per $x=-1$ è $\quad y(-1)=1 \Longrightarrow -1 = \varepsilon\, e^{3(C-1)} \Rightarrow \begin{cases}\varepsilon=-1\\ C=1\end{cases}$

$\Rightarrow y^3(x)-2 = -e^{3(x^3+1)} \qquad y^3(x) = 2-e^{3(x^3+1)}$

$\Rightarrow$ (essendo $y(-1)>0$ $\quad y(x) = \sqrt[3]{2-e^{3(x^3+1)}}$ attorno a $x=-1$.

(A_4) $$\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}} x^2\,d\sigma(x,y) = \int_{x^2+y^2\le 1} x^2\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

$$= \sqrt{2}\int_{x^2+y^2\le 1} x^2\,dx\,dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{x^2+y^2\le 1} x^2+y^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} 2\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Probabilità

P1) 1. $\int_{\mathbb{R}^2} f_a(x,y)\,dx\,dy = 1 \iff \int_{[0,1]\times[0,1]} a x^3 (1+y)\,dx\,dy = 1$

$\iff \frac{a}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right) = 1 \iff a = \frac{8}{3}$

2. $f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ a x^3 \int_0^1 (y+1)\,dy = \frac{3}{2} a x^3 = 4x^3 & x \in [0,1] \end{cases}$

$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin [0,1] \\ (y+1)\frac{a}{4} = 2\frac{y+1}{3} & y \in [0,1]. \end{cases}$

3. $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$: X e Y indip.

4. $P(Y \leq X^2) = \int_{0 \leq y \leq x^2 \leq 1} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \dots = \frac{11}{48} a = \frac{11}{18}.$

P2) 1. $P(0.21 \leq 0.3 + \sqrt{0.09}\,Z \leq 0.39) = P(0.21 \leq 0.3 + 0.3Z \leq 0.39)$

$= P(-0.09 \leq \sqrt{0.09}\,Z \leq 0.09) = P(-\sqrt{0.09} < Z \leq \sqrt{0.09})$

$= 2\phi(\sqrt{0.09}) - 1 = 2\phi(0.3) - 1 = 2 \times 0.6179 - 1 = 23.4\%$

2. $\mathrm{Var}\, X = \sigma^2$. $P(0.21 \leq 0.3 + \sigma Z \leq 0.39) \geq 0.9$

$\iff 2\phi\left(\frac{0.09}{\sigma}\right) \geq 1.9 \iff \phi\left(\frac{0.09}{\sigma}\right) \geq 0.95$

$\iff \frac{0.09}{\sigma} \geq 1.65 \iff \sigma \leq \frac{0.09}{1.65} = \frac{9}{165} = \frac{3}{55} \Rightarrow \mathrm{Var} \leq \frac{9}{55^2}$

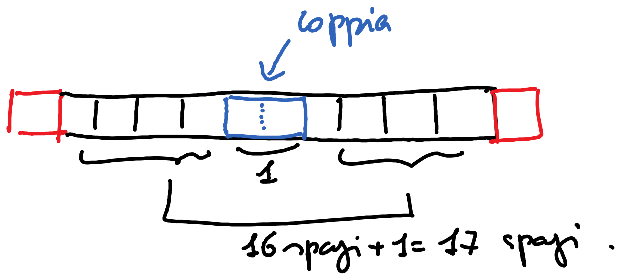
P3) $P(2\text{kg} \mid F) = 0.7$ $\quad P(2\text{kg} \mid F^c) = 0.2$ $\quad P(2\text{ kg}) = 0.5$

$$P(2kg) = P(2kg|F)P(F) + P(2kg|F^c)(1-P(F))$$

$$\Rightarrow P(F)\left(P(2kg|F) - P(2kg|F^c)\right) = P(2kg) - P(2kg|F^c)$$

$$\Rightarrow P(F)(0.5) = 0.5 - 0.2 \Rightarrow \boxed{P(F) = \tfrac{3}{5}}.$$

P_4) Principio di moltiplicazione.



a) Nella coppia: MF o FM : 2 scelte

b) Posizione del blocco $\boxed{MF}$ o $\boxed{FM}$ tra 17 posiz: 17 scelte

c) Disposizione dei rimanenti 18 elementi: $18!$

P Molt: $2 \times 17 \times 18!$ disposizioni possibili