# COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
## Ingegneria dell'Informazione
## 20 Febbraio 2014

**Esercizio 1.** [11 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10^3 \, \frac{s(s+1)(s+10)}{(s^2+s+1)\,(s^2-100s+10^4)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

**Esercizio 2.** [8 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2(s^2+2s+2)}{(s-1)(s+1)^2(s+7)(s+a)}$$

è richiesto di

i) determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$, sapendo che $s = -2$ è punto doppio del luogo;

ii) per tale valore di $a$ tracciare il luogo positivo delle radici;

iii) senza effettuare nessun calcolo particolare, per il luogo negativo ci sono a priori 3 diversi possibili andamenti, dei quali è richiesto il tracciamento.

**Esercizio 3.** [7 punti] Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+s}{1+\frac{s}{a}+\frac{s^2}{100}}.$$

i) Per $a = 10$, è richiesto di progettare un compensatore stabilizzante $C_1(s)$ che garantisca errore a regime al gradino pari a circa 0.1, pulsazione di attraversamento pari a circa $10^4$ rad/s e margine di fase pari a circa 90°.

ii) Sempre assumendo $a = 10$, è richiesto di progettare un compensatore stabilizzante $C_2(s)$ che garantisca errore a regime alla rampa pari a circa 0.1 rad/s, pulsazione di attraversamento pari a circa 0.1 rad/s e margine di fase pari a circa 45°.

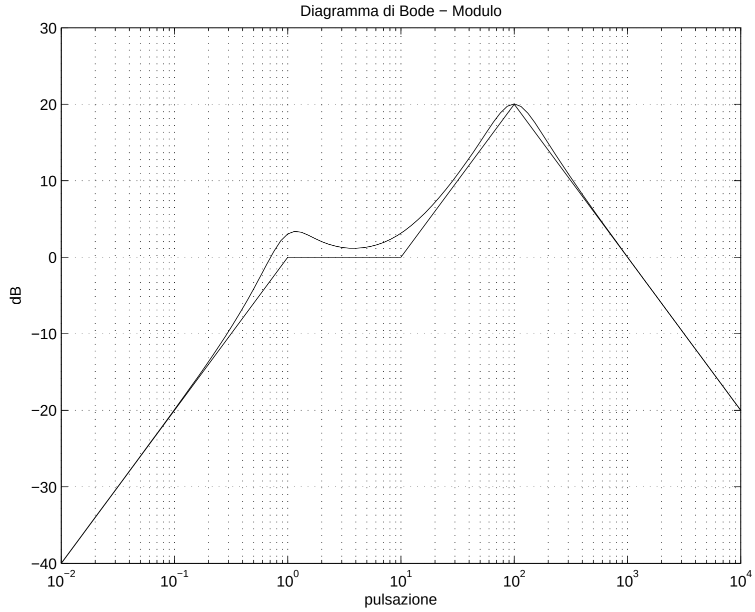
iii) Per $a$ molto grande (molto maggiore di 10), il funzionamento del compensatore $C_2(s)$ appena progettato verrebbe compromesso: per quale motivo?

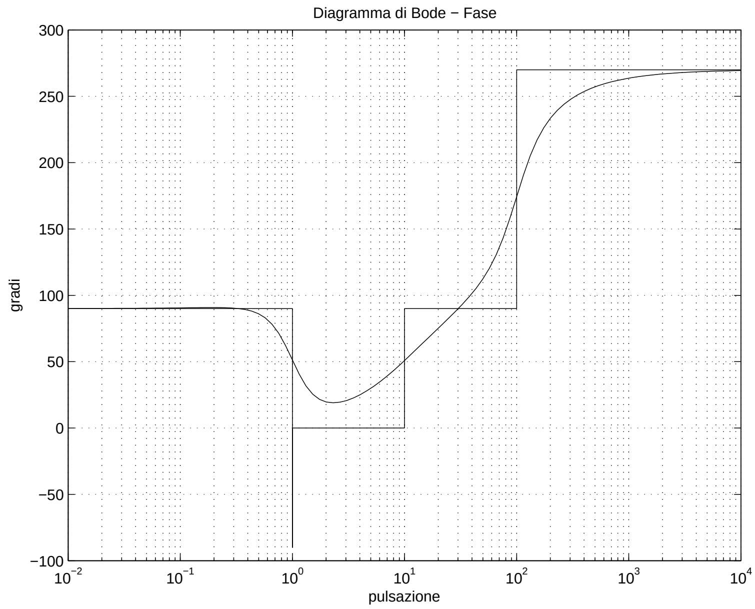
**Teoria.** [5 punti] Dato un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti:

- si definisca il concetto di stabilità BIBO;
- si forniscano due caratterizzazioni della stabilità BIBO in termini di proprietà della risposta impulsiva del sistema;
- si dimostri che tali condizioni sono equivalenti tra loro ed alla stabilità BIBO;
- si dimostri che la stabilità BIBO è equivalente al fatto che la funzione di trasferimento del sistema abbia tutti i poli a parte reale negativa.

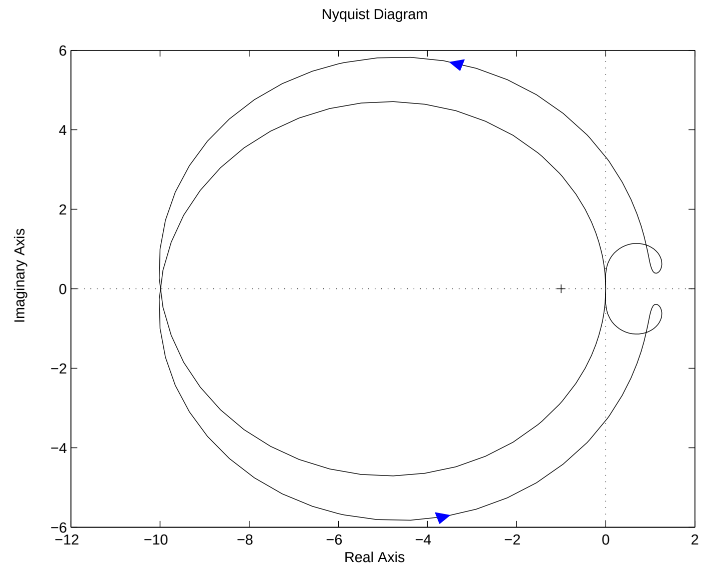
# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [5 punti]



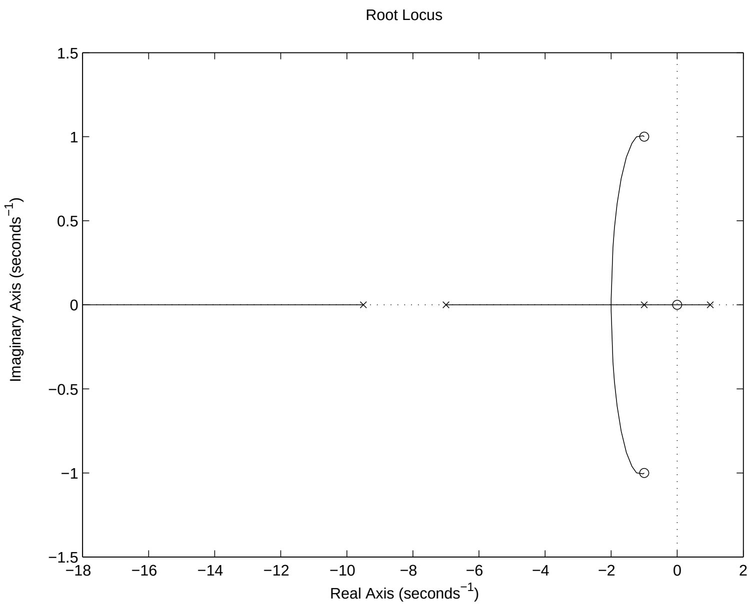

ii) [6 punti]



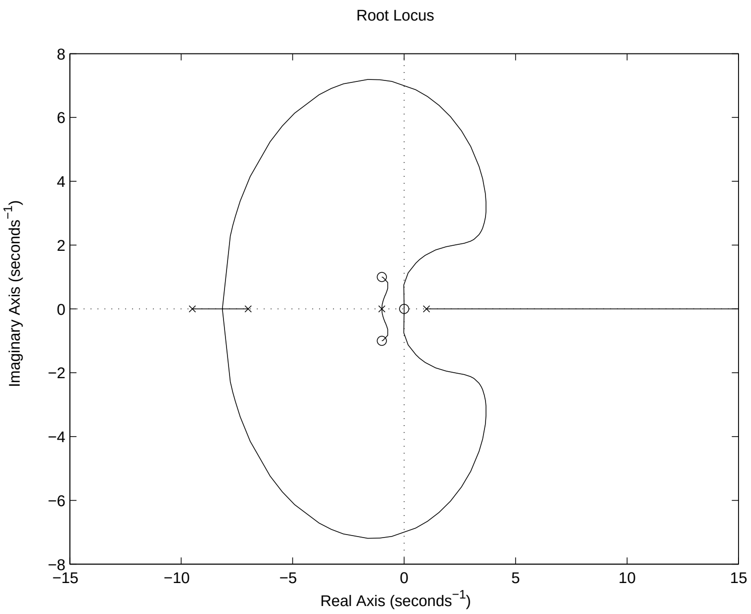

$N = 2, n_{G+} = 2$ e quindi $n_{W+} = 0$. Pertanto $W(s)$ è BIBO stabile.

**Esercizio 2.** i) [2 punti] Valutando l'equazione dei punti doppi per $s = -2$ si trova un'equazione lineare in $a$, che è verificata se e solo se $a = \frac{19}{2}$.

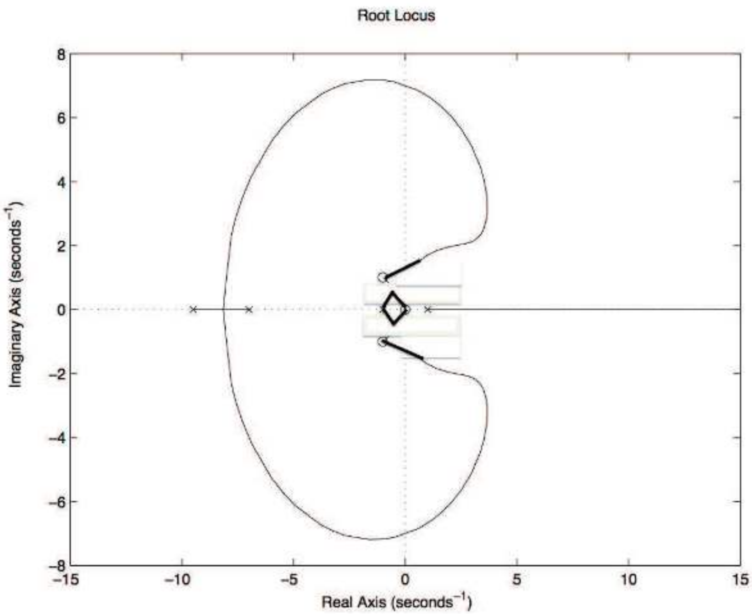
ii) [3 punti] Dalla regola dei segmenti sull'asse appartenenti al luogo, due rami necessariamente si muovono sull'asse reale da $s = -1$ e $s = +1$ verso lo zero doppio in $s = 0$, un altro ramo sull'asse reale verso $-\infty$ partendo da $s = -\frac{19}{2}$ (unico asintoto), e due rami convergono sull'asse reale verso il punto doppio partendo da $s = -7$ e da $s = -1$. Dopo l'incontro nel punto doppio, i due rami non possono che fuoriuscire dall'asse reale (con simmetria coniugata) e dirigersi verso i due zeri in $s = -1 \pm i$.

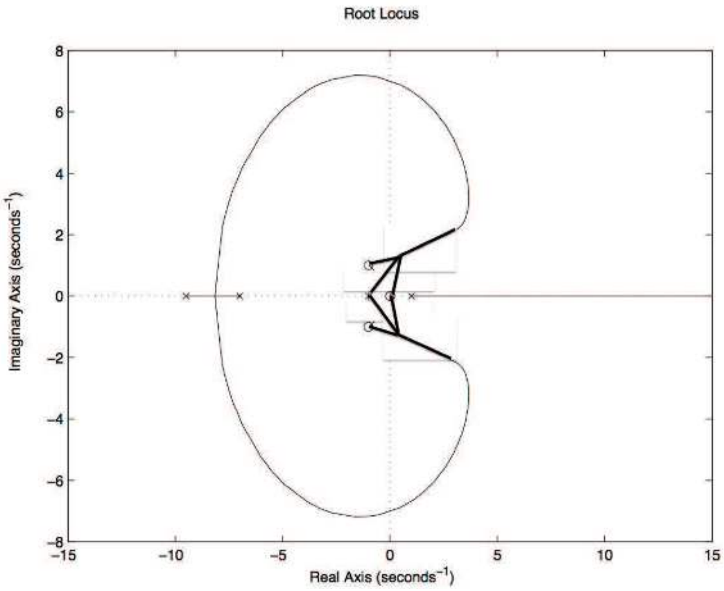



iii) [3 punti] In ogni caso deve esserci un punto doppio reale tra $s = -\frac{19}{2}$ e $s = -7$, da cui escono due rami complessi, ed anche due rami complessi che escono dal polo doppio in $s = -1$, mentre un ramo reale va verso l'asintoto $(+\infty)$ uscendo da $s = +1$. I due rami uscenti dal punto doppio a sinistra di $s = -7$ possono andare verso la coppia di zeri complessi coniugati, mentre quelli uscenti dal polo doppio in $s = -1$ verso lo zero doppio in $s = 0$, ma può accadere anche il viceversa. Infine, la terza possibilità è che i rami complessi si incrocino in due punti doppi complessi coniugati, e da questo si dipartano altri rami che terminano nei 4 zeri $(0, 0, -1 + i, -1 - i)$. Il luogo negativo effettivo è il seguente:

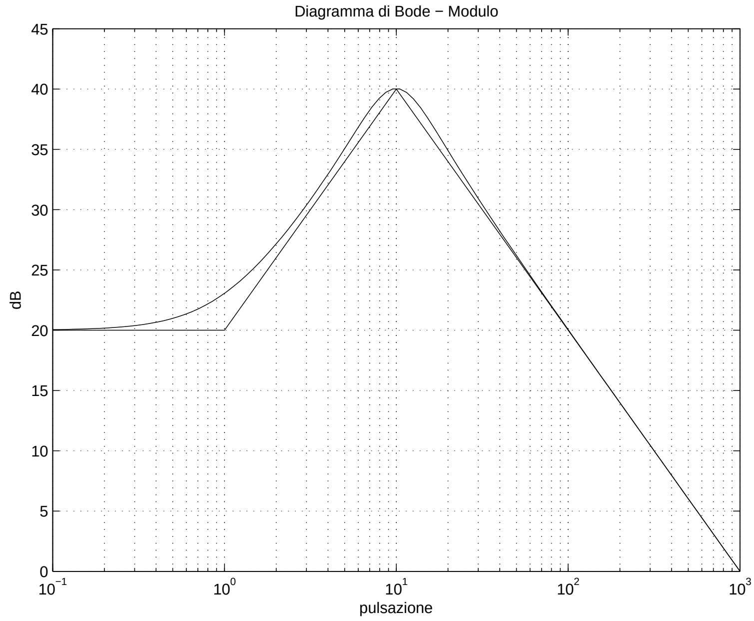


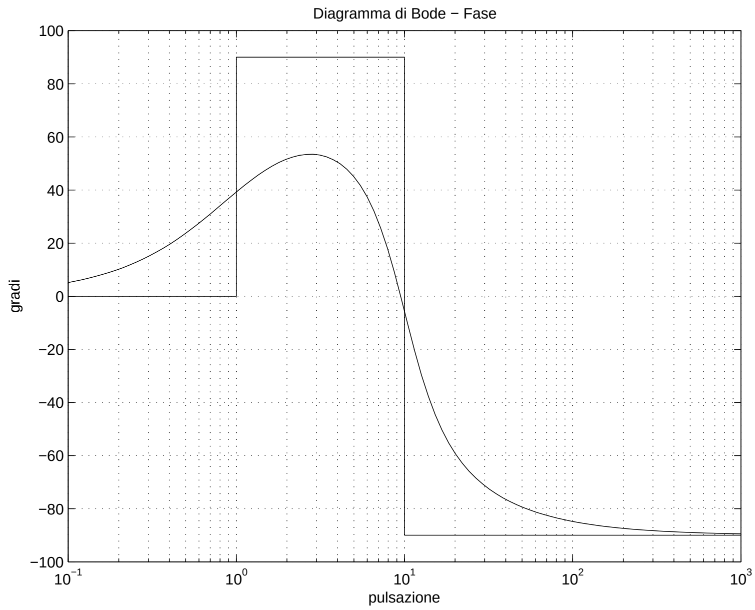

I seguenti rappresentano le altre due situazioni precedentemente illustrate:






**Esercizio 3.** i) [2.5 punti] È necessario il ricorso preliminare a $C_1'(s) = 10$, con il che il diagramma di Bode di $C_1'(s)G(s)$ taglia l'asse a 0 dB a circa $10^3$ rad/s con margine di fase di circa $90°$.

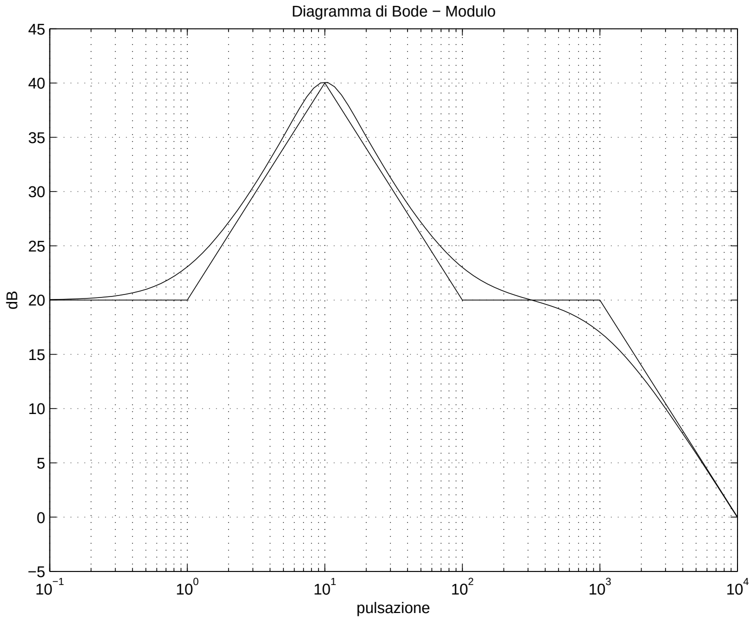


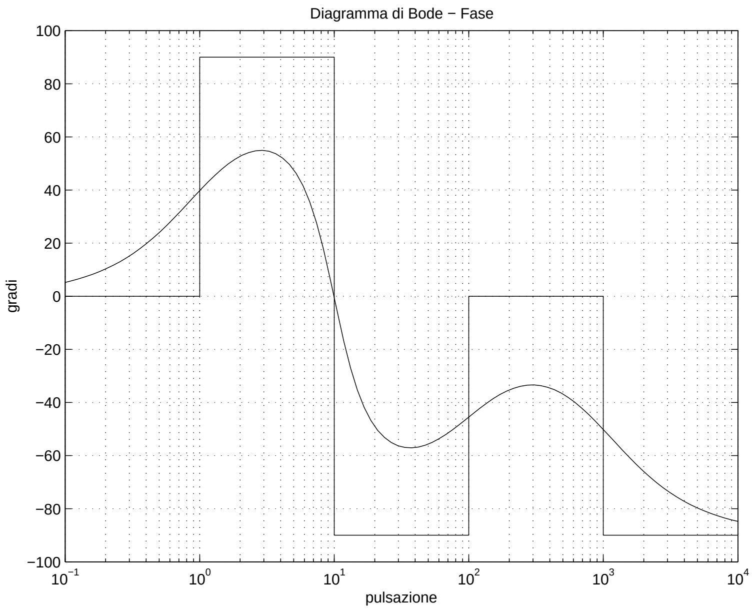




Ricorrendo ad una rete anticipatrice con coppia polo-zero distanziata di una decade, ad esempio

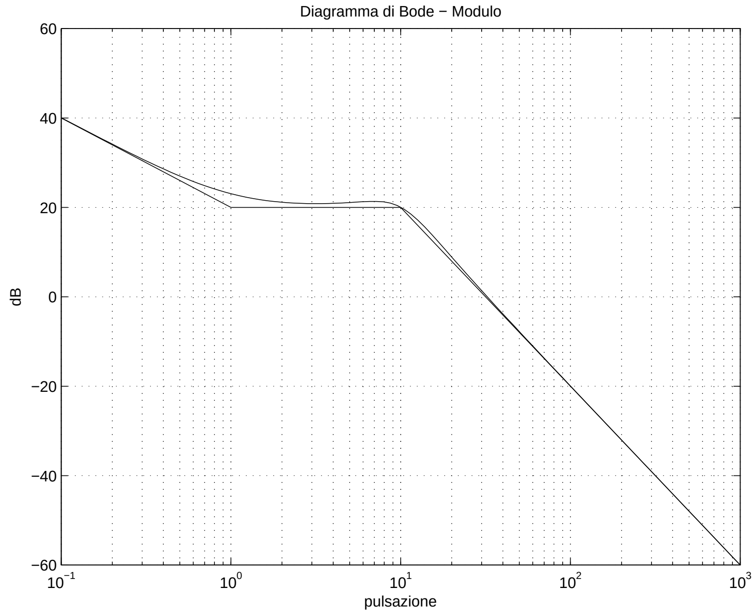
$$C_1(s) = 10\frac{1 + \frac{s}{100}}{1 + \frac{s}{1000}}$$

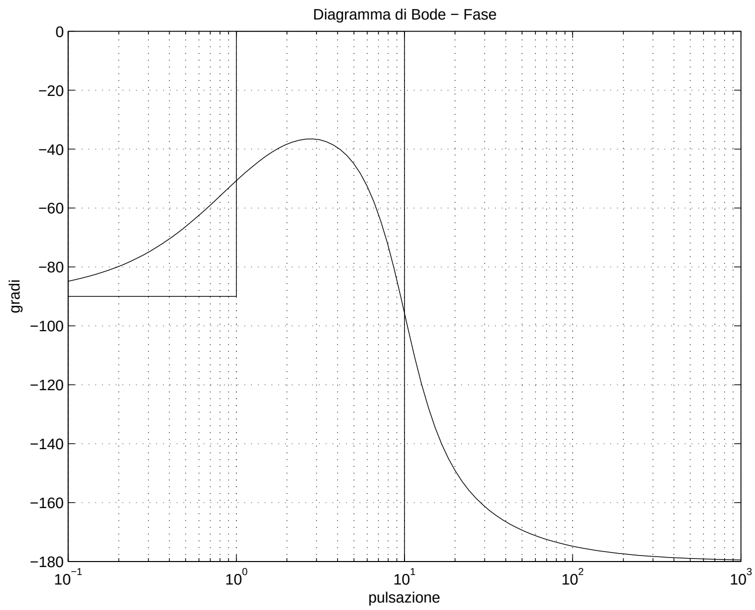
si ottiene il risultato desiderato.



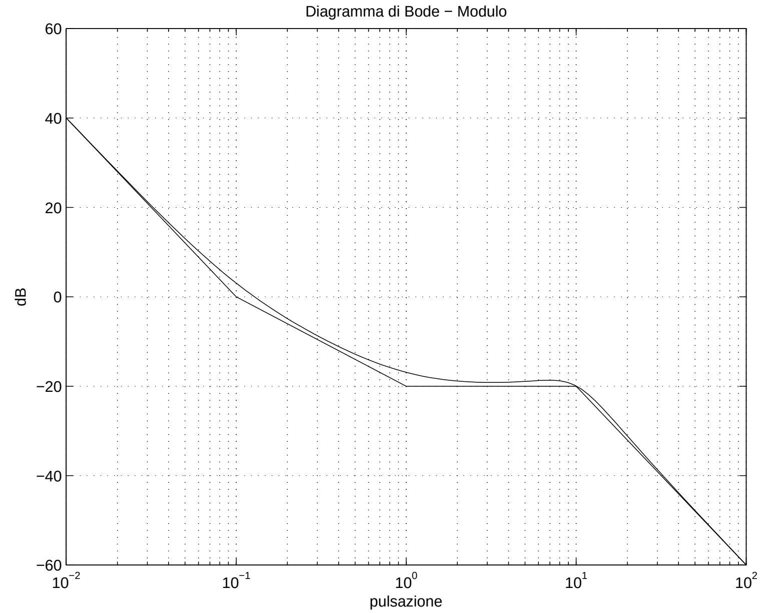

ii) [3.5 punti] Nel secondo caso è necessario il ricorso preliminare a $C_2'(s) = \frac{10}{s}$, con il che il modulo in $\omega = 0.1$ è di circa 40db.

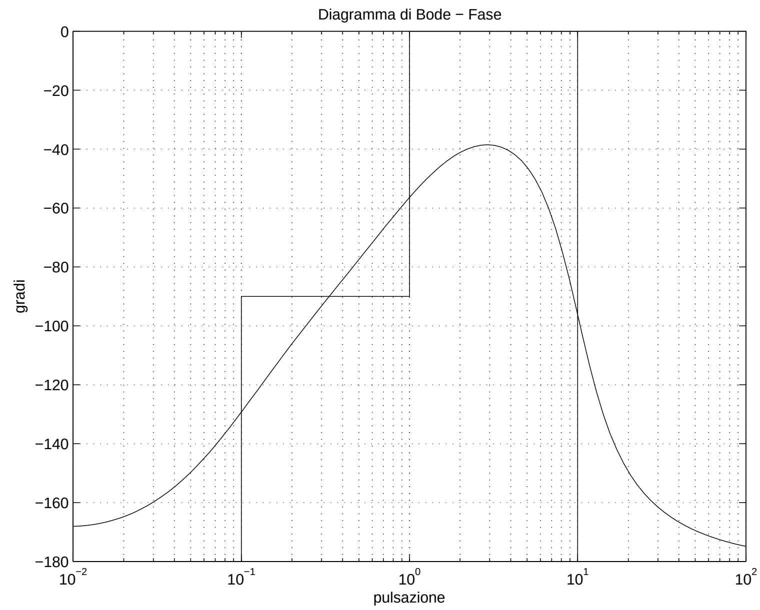



Da ciò la necessità di una rete ritardatrice con coppia polo-zero distanziata di due decadi, oltre al posizionamento dello zero in corrispondenza della pulsazione di attraversamento, per il requisito sul margine di fase. Quindi

$$C_2(s) = \frac{10}{s} \times \frac{1+10s}{1+1000s}$$




iii) [1 punti] Il piccolissimo picco di risonanza ($\xi = 0.5$) non crea alcun problema in tali contesti, e la stabilità BIBO del sistema retroazionato è garantita in entrambi i casi dal Criterio di Bode. Se $a$ fosse molto grande, $\xi$ diminuirebbe a dismisura e potrebbe causare, nel caso del compensatore $C_2(s)$, l'insorgere del fenomeno di multiple pulsazioni di attraversamento, con perdita della stabilità dello schema retroazionato.

**Teoria.** [5 punti] Si veda il Capitolo 4, pag. 80-82, del Libro di testo (seconda edizione).