Dispensa 2: Filtri e sistemi LTI nel dominio del tempo

Osservazioni generali

1. Un sistema LTI è completamente definito dalla risposta impulsiva:

   $y(n) = x(n) * h(n)$, dove $h(n)$ è la risposta all'impulso unitario $\delta(n)$

2. Un sistema LTI definito da equazione alle differenze, é scrivibile come:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

3. Per un sistema LTI, condizione di Causalità $\Leftrightarrow h(n) = 0 \;\; \forall n < 0$

   NOTA: Per come sono stati scritti i coefficienti nel punto 2 ($a_k \geq 1, b_k \geq 0$), il sistema è causale perchè non dipende da istanti futuri.

4. Per un sistema LTI, condizione di BIBO Stabilità $\Leftrightarrow \exists M \; t.c. \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < M$

5. Sistemi MA:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \Rightarrow h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta(n-k)$$

   - non sono ricorsivi (l'uscita dipende solo dall'ingresso)
   - sono sempre stabili (il supporto limitato di $h(n)$ implica l'assoluta sommabilità e, dunque per il punto 4, la BIBO stabilità)
   - $h(n)$ è sempre definibile dai b_k infatti: $h(n) = \begin{cases} b_k & 0 \leq k \leq M \\ 0 & altrove \end{cases}$

6. Sistemi ARMA:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k), \text{con almeno un } a_k \neq 0$$

   - sono ricorsivi
   - Causalità e BIBO stabilità vanno studiati caso per caso (solitamente è più facile farlo sfruttando la trasformata $\mathbb{Z}$)
   - $h(n)$ non è definibile in forma chiusa dai coefficienti a_k e b_k (solitamente è più facile farlo sfruttando la trasformata $\mathbb{Z}$)

7. Sistemi FIR:

   - sono sistemi la cui risposta impulsiva ha supporto limitato (nel dominio del tempo)[1]

[1] il supporto di una funzione è il sottoinsieme dei punti del dominio dove la funzione non si annulla

- sono sempre stabili (il supporto limitato di $h(n)$ implica l'assoluta sommabilità e, dunque per il punto 4, la BIBO stabilità)
- ogni sistema MA è FIR e ogni FIR può essere scritto come MA (ma potrebbe anche essere scritto come ARMA)

  Ad esempio il sistema FIR $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$ (MA) può essere scritto anche come $y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-3)$ (ARMA).
  Per dimostrarlo calcoliamo consideriamo il modello MA e calcoliamo $y(n-1) = x(n-1)+x(n-2)+x(n-3) \implies x(n-1)+x(n-2) = y(n-1)-x(n-3)$. A questo punto sostituiamo la somma $x(n-1)+x(n-2)$ nuovamente nell'equazione MA e otteniamo l'ARMA.

8. Sistemi IIR:
   - sono sistemi la cui risposta impulsiva ha supporto illimitato (nel dominio del tempo)
   - un sistema IIR può essere scritto solamente come ARMA

ESERCIZI

Esercizio 1

Dato $h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & altrove \end{cases}$

1. Determinare l'equazione alle differenze associata.

2. È causale e BIBO stabile?

SVOLGIMENTO

1. Posso riscrivere la risposta impulsiva come:

   $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)$

   E, dunque, sfruttando $y(n) = h(n) * x(n)$ trovo l'equazione alle differenze:

   $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)$

2. I filtri FIR sono sempre stabili: infatti $|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)| = 5 < 6$.

   Inoltre $h(n)$ è nullo $\forall\ n < 0$ e, dunque, è anche causale.

Esercizio 2

Sia $h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$

Determinare se è causale e/o stabile.

SVOLGIMENTO

$h(n)$ è nullo $\forall\ n < 0$ e, dunque, è causale (conseguenza diretta della definizione di causalità).

Per quanto riguarda la stabilità devo usare la definizione:

$|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)| = |\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n| =$ (serie geometrica, convergente $\Leftrightarrow |a| < 1$) $= \frac{1}{1-a} \implies$ il filtro è stabile per $|a| < 1$

Esercizio 3

Dati i filtri:

1. $y(n) = x(n) + 7x(n-1) + 18x(n-3)$
2. $y(n) = x(n) + 7x(n-1) + 18x(n-3) + 2x(n+3)$

discuterne il tipo (FIR/IIR), la BIBO stabilità e la causalità.

SVOLGIMENTO

1. Dato che è possibile scrivere y(n) attraverso un equazione alle differenze senza parte autoregressiva, il filtro è FIR e, dunque, stabile. Inoltre l'uscita dipende solo da tempi passati e, perciò, il filtro è anche causale.
2. Per tipo e BIBO stabilità vale quanto detto nel punto precedente. Per quanto riguarda la causalità, invece, il termine $2x(n+3)$ rende il filtro non causale (perchè l'uscita dipende da tempi futuri).

Esercizio 4

Dato il filtro:
$y(n) = 3y(n-1) + y(n-2) + x(n)$
discuterne il tipo (FIR/IIR), la BIBO stabilità e la causalità.

SVOLGIMENTO
Il filtro è causale, in quando l'uscita dipende solo da tempi passati.
Consiglio: controllare sempre sia la parte AR che MA.
Per quanto riguarda tipo e BIBO stabilità è necessario ricavare $h(n)$, che non è triviale. Sarà possibile risolverlo più semplicemente attraverso l'analisi in frequenza (trasformata $\mathbb{Z}$).
Attenzione: dalla sola equazione alle differenze NON possiamo concludere che il filtro sia IIR. Infatti anche un filtro MA può essere scritto in forma ricorsiva. Per essere sicuri che il filtro sia IIR è necessario ricorrere alla ROC della trasformata $\mathbb{Z}$.

Esercizio 5

Dati i filtri:

1. $y(n) = x(n)^4$
2. $y(n) = x(n^4)$

discuterne la causalità.

SVOLGIMENTO

1. E' causale (più precisamente statico), infatti l'uscita non dipende da tempi futuri ma solo dal valore puntuale dell'ingresso.

2. Non è causale, ad esempio si può notare che $y(2) = x(16) \Rightarrow$ dipende da tempi futuri, ergo non è causale.

Esercizio 6

Dato il sistema:
$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$, con $x(n) = 0$ per $n < 0$ e $y(n) = 0$ per $n \leq 0$
Discuterne causalità e BIBO stabilità.

SVOLGIMENTO
Innanzitutto determiniamo la risposta impulsiva del sistema, perturbando il sistema con $x(n) = \delta(n)$:
$y(0) = A * 0 + 1$
$y(1) = A * 1 + x(n = 1) = A + 0 = A$
$y(2) = A * y(2-1) + x(n = 2) = A * A + 0 = A^2$
$\vdots$
$y(n) = A^n = h(n) = \begin{cases} A^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
É causale, in quanto $h(n) = 0 \; \forall n < 0$.
É stabile se e solo se $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < M \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A^n| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A|^n = \frac{1}{1-A} < M$ con $|A| < 1$. Ossia è stabile se e solo se $|A| < 1$
NOTA: come possiamo notare, quando ho un'equazione alle differenze ricorsiva non è semplice calcolare $h(n)$ nel dominio del tempo. Sarà molto più semplice passando al dominio della frequenza.

Esercizio 6bis

Dato il sistema
$y(n) = Ay(n-1) + x(n)$, con $x(n) = 0$ per $n < 0$ e $y(n) = 0$ per $n = 0$
Discuterne causalità e BIBO stabilità.
RISPETTO AD ESERCIZIO PREDENTE SONO CAMBIATE LE CONDIZIONI INIZIALI

SVOLGIMENTO
Come prima calcoliamo la risposta impulsiva:
$h(1) = Ay(0) + \delta(1) = 0$
$h(2) = Ay(1) + \delta(2) = 0$
$\vdots$
$h(n) = 0$ per $n \geq 0$
$h(0) = Ah(-1) + \delta(0) \implies 0 = Ah(-1) + 1 \implies h(-1) = -A^{-1}$
$h(-1) = Ah(-2) + \delta(-1) \implies -A^{-1} = Ah(-2) \implies h(-2) = -A^{-2}$

$\vdots$

$h(n) = -A^{-n}$, sequenza monolatera sinistra.

Razionale: Per definire un filtro non basta l'equazione alle differenze, ma necessito anche delle condizioni iniziali. Se queste non vengono specificate, si assume che il filtro sia causale.

Esercizio 7

Sia $x(n) = \begin{cases} |n| & -3 \leq n < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Determinare :

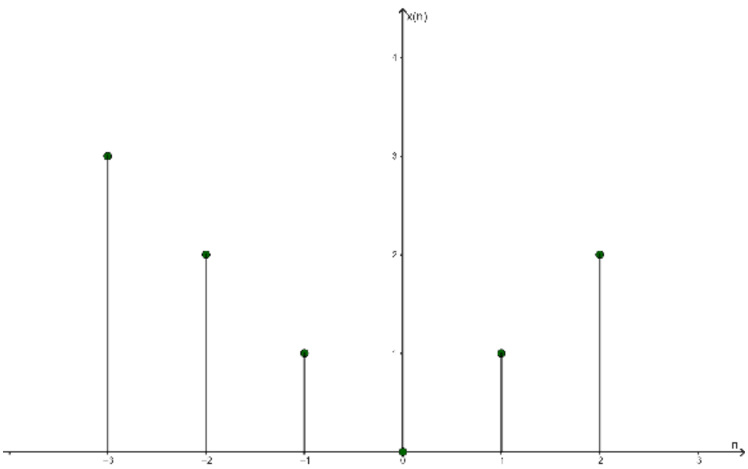
1. $y(n) = x(n+1)$
2. $y(n) = mediana[x(n+1), x(n), x(n-1)]$

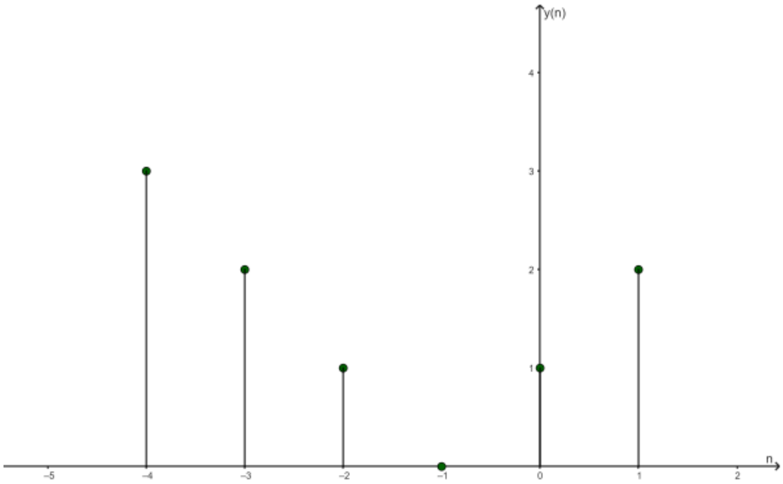
SVOLGIMENTO

1.

$$y(n) = x(n+1) = \begin{cases} |n+1| & -3 \leq n+1 < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} |n+1| & -4 \leq n < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Nota: l'uscita è la traslazione dell'ingresso



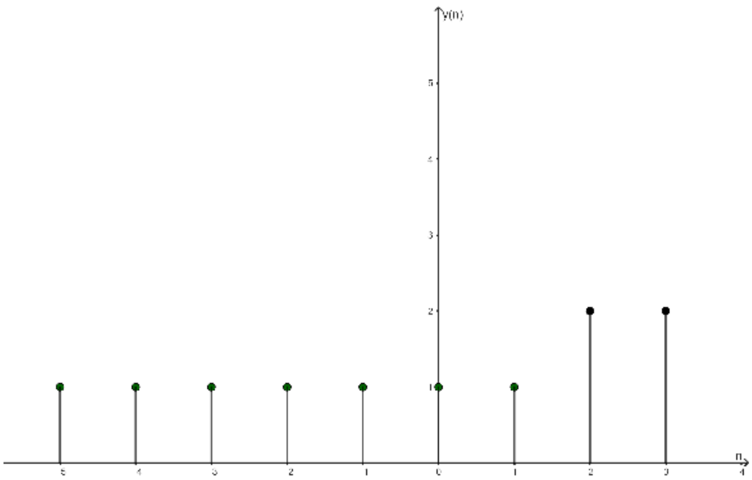


2. Ricordo che la mediana di n dati è:

   - l'osservazione che occupa la posizione centrale nella sequenza dei dati ordinati (in ordine crescente o decrescente) se n è dispari
   - la media delle due osservazioni centrali se n è pari

   Il filtro considera solo 3 campioni del segnale, dunque siamo nel primo caso. A questo punto posso calcolare $y(n)$ $\forall n$ punto per punto, partendo da $n = -\infty$ fino ad $n = +\infty$. Ottenendo:

$$y(n) = \begin{cases} 2 & |n| = 2, 3 \\ 1 & |n| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Esercizio 8

Dati $y_1(n) = \frac{1}{3}[x(n+1) + x(n) + x(n-1)]$ e $x(n) = 2\delta(n) + 4\delta(n-1) + 6\delta(n-2) + 4\delta(n-3) + 2\delta(n-4)$

1. Calcolare $y(n)$ dato l'ingresso $x(n)$ e definire se il sistema è causale e BIBO stabile.

2. Ripetere punto 1 con filtro $y_2(n) = \frac{1}{3}[x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$

SVOLGIMENTO

1. Il sistema non è causale in quanto dipende da tempi futuri ($y_1(n)$ dipende da $x(n+1)$) ma è stabile, in quanto è FIR.

Per calcolare $y_1(n)$ e $y_2(n)$ invece:

n	$x(n)$	$y_1(n)$	$y_2(n)$
≤ -2	0	0	0
-1	0	2/3	0
0	2	2	2/3
1	4	4	2
2	6	14/3	4
3	4	4	14/3
4	2	2	4
5	0	2/3	2
6	0	0	2/3
$\geqslant 7$	0	0	0

2. Per la stabilità di $y_2(n)$ vale lo stesso del punto 1. Per l'uscita si veda l'ultima colonna della tabella. Per quanto riguarda la causalità, invece, non essendoci più il termine $x(n+1)$ l'uscita non dipende più da tempi futuri ed è, dunque, causale.