Esercizi di Fondamenti di Automatica - 6
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica
A.A. 2020/2021

Esercizio 1. Si tracci approssimativamente[1] i luoghi delle radici positivo e negativo associati alle seguenti funzione di trasferimento (in catena aperta):

(1) $G(s) = \dfrac{s(s+5)}{(s-3)(s+2-j)(s+2+j)}$;

(2) $G(s) = \dfrac{s^2(s-1)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$;

(3) $G(s) = \dfrac{(s^2+4s+5)(s-1)}{(s+0.1)^2(s+2)(s^2+1)}$;

(4) $G(s) = \dfrac{(s+1)(s-1)^2}{(s+10)(s+5)^2(s^2-4)}$;

(5) $G(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s-5)(s^2+4s+13)}$;

(6) $G(s) = \dfrac{s(s+1)}{(s+2)^3(s+3)}$;

(7) $G(s) = \dfrac{s^2+4s+5}{(s-1)(s+1)(s+2)^2}$;

(8) $G(s) = \dfrac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$ (in questo caso è richiesto solo il tracciamento del luogo positivo);

(9) $G(s) = \dfrac{s^2+4s+5}{s(s-1)(s+1)(s+3)}$.

Esercizio 2. Si traccino i luoghi delle radici positivo e negativo associati alle seguenti funzione di trasferimento (in catena aperta) e se ne calcolino gli eventuali punti doppi, gli asintoti, le intersezioni con l'asse immaginario e i valori di K per cui il sistema retroazionato $W(s) = KG(s)/[1+KG(s)]$ è BIBO stabile:

(1) $G(s) = \dfrac{s+2}{(s+1)s}$;

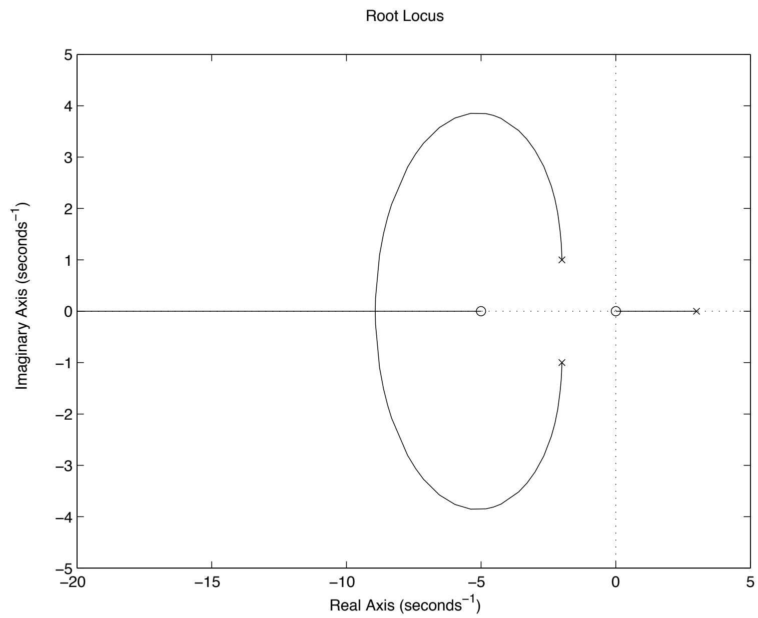
(2) $G(s) = \dfrac{(s^2-1)}{(s+2)(s+3)}$;

(3) $G(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2(s+8)}$.

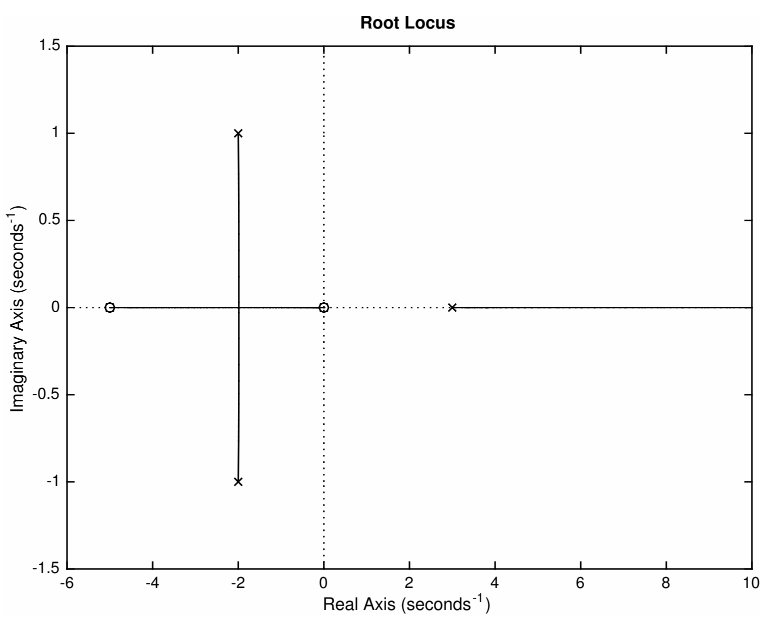
[1] Non è richiesto il calcolo di punti doppi e/o le intersezioni con gli assi.

Soluzioni numeriche di alcuni esercizi

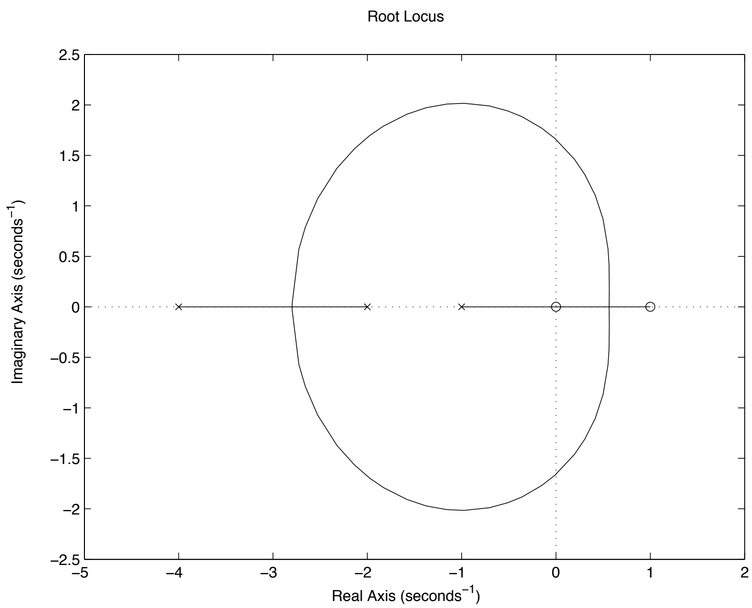
Esercizio 1. (1) Luogo positivo:

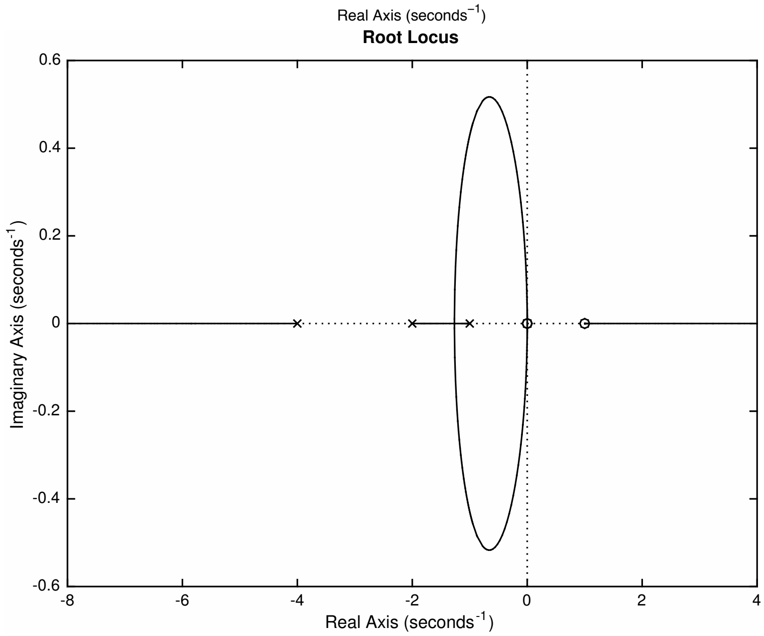


Luogo negativo:



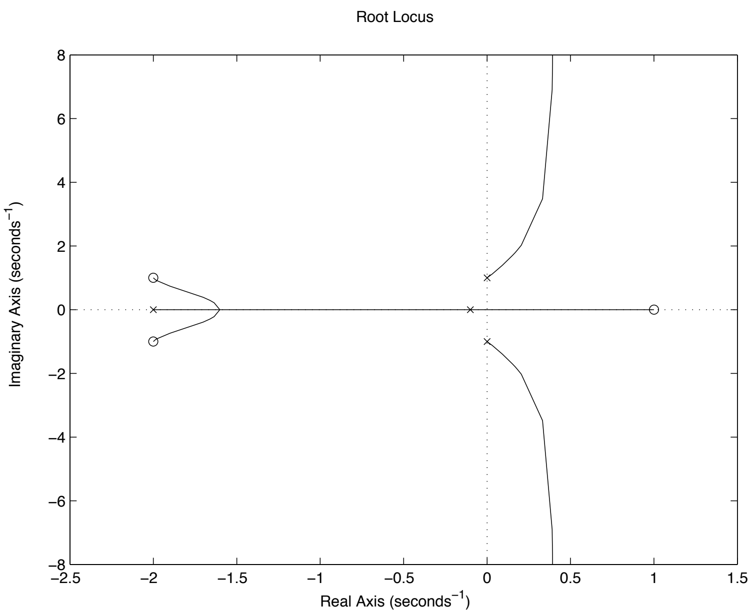
(2) Luogo positivo:



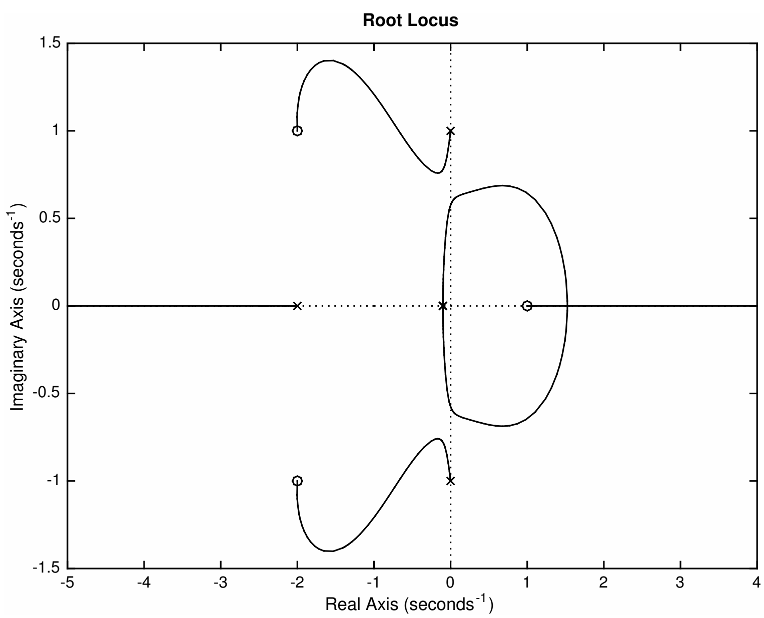


Luogo negativo:

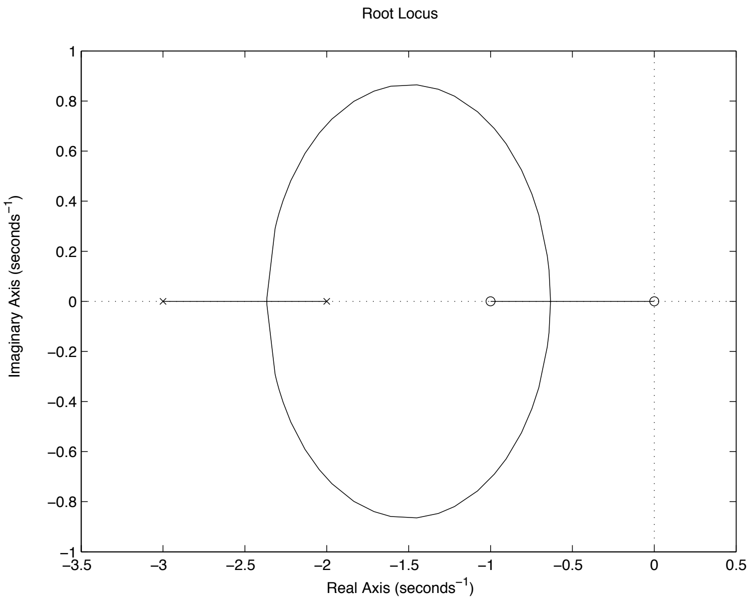
(3) Luogo positivo:



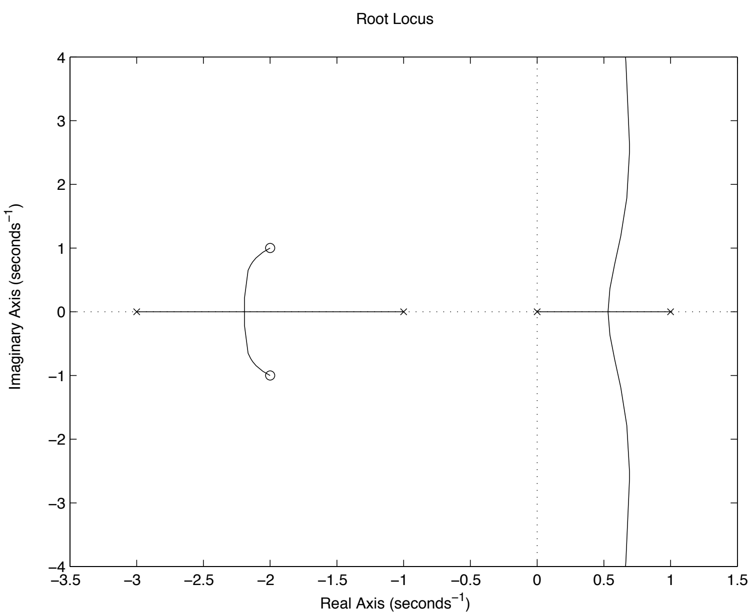
Luogo negativo:



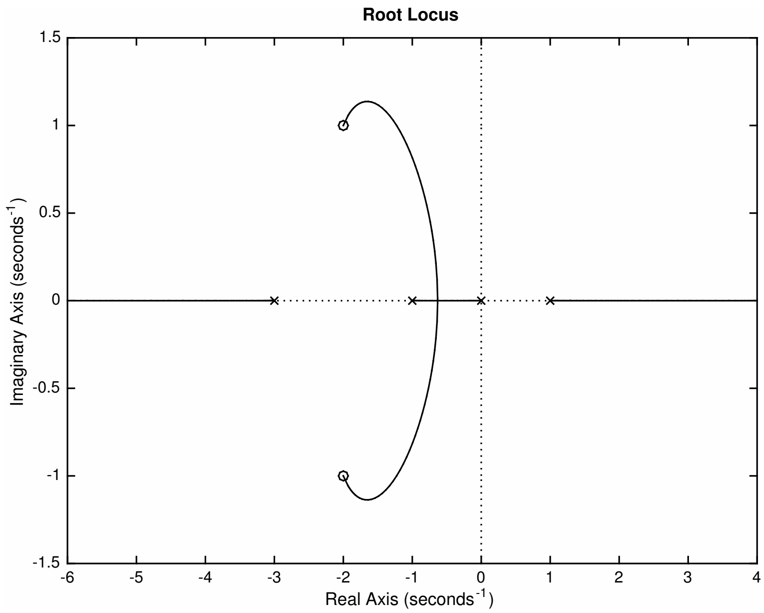
(8) Luogo positivo:



(9) Luogo positivo:



Luogo negativo:



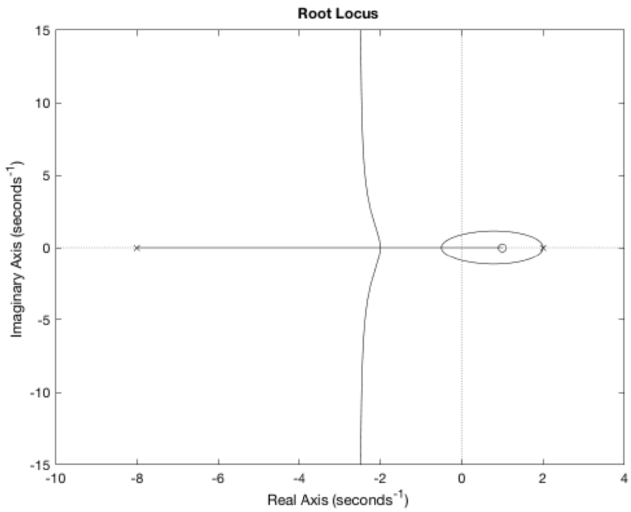
Esercizio 2. (3) L'equazione dei punti doppi porge

$$(s-2)(2s^2+5s+2)=0 \;\Rightarrow\; s=-2,-0.5,+2,$$

corrispondenti rispettivamente a $K=32, 31.25, 0$, mentre l'asintoto è verticale in $s=-2.5$. Sostituendo $s=j\omega$ in $d(s)+Kn(s)=0$ si trova

$$(32-4\omega^2-K)+j\omega(K-28-\omega^2)=0$$

che conduce alle soluzioni $\omega=0, K=32$ e $\omega=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, K=28.8$. Il luogo positivo ha due rami che partono dal punto doppio $s=2$ uscendo dall'asse reale ed attraversano l'asse immaginario in $s=\pm i\frac{2}{\sqrt{5}}$ per $K=28.8$, poi i rami passano nel semipiano sinistro e per $K=31.25$ si ricongiungono nel punto doppio $s=-0.5$. Ora un ramo prosegue sull'asse reale verso lo zero in $s=1$, attraversando l'asse immaginario in $s=0$ per $K=32$, mentre l'altro ramo prosegue verso sinistra e si fonde nel punto doppio $s=-2$ con l'altro ramo proveniente sull'asse reale dal polo in $s=-8$ per $K=32$, infine escono due rami dall'asse reale diretti verso l'asintoto verticale in $s=-2.5$.



Il luogo negativo è invece banale: un ramo va da $s = 2$ verso $+\infty$, l'altro da $s = 2$ verso lo zero in $s = 1$, mentre il ramo che parte dal polo in $s = -8$ va verso $-\infty$. Di conseguenza si ha stabilità solo per $K > 0$, e più precisamente dall'attraversamento in $s = \pm i\frac{2}{\sqrt{5}}$ fino al riattraversamento in $s = 0$, quindi per $28.8 < K < 32$. Quando $K = 32$ il polinomio dev'essere divisibile per s, ed infatti $d(s)+32n(s) = s(s^2+4s+4) = s(s+2)^2$, per cui le radici sono $-2, -2, 0$, mentre per $K = 28.8$ il polinomio dev'essere divisibile per $s^2 + \frac{4}{5}$, ed infatti $d(s) + \frac{144}{5}n(s) = (s+4)\left(s^2 + \frac{4}{5}\right)$, da cui le radici $-4, \pm i\frac{2}{\sqrt{5}}$.