A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3^{o} appello — 20 settembre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio le cui equazioni sono $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$

(a) Trovare una base di U e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di U.

(b) Sia $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$, ove $v = (1, 0, 0, 1)$. Verificare che $U \subset W$ e trovare una base di un sottospazio L tale che $U \oplus L = W$. Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio L' tale che $U \oplus L' = W$, ma $L' \neq L$.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^{\perp}$ e trovare una sua base.

(d) Trovare una base di $U^{\perp} \cap W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -6 & t \end{pmatrix}$.

(a) Determinare il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio si ponga $t = 0$. Sia $v = (2, \alpha, 2, 3)$. Trovare il valore di α per cui il sistema $A_0 X = v$ ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

(c) Sia U il sottospazio generato dalle righe di A_0 e W il sottospazio generato dalle colonne di A_0. Trovare una base di U e una base di W.

(d) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(A_0^T)$ (ove A_0^T è la trasposta della matrice A_0) e verificare che $\mathrm{Ker}(A_0^T) = W^{\perp}$.

Esercizio 3. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(e_2) = (2, -2, -3)$, $f(e_3) = (0, 4, 4)$ e il nucleo di f è generato dal vettore $(-1, 1, 1)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

(b) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Trovare delle basi degli autospazi di f. È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di f rispetto a questa base sia diagonale?

(d) Si dica se è possibile trovare una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice abbia l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e tale che $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$. La matrice di una tale funzione g (se esiste) è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (1, 2, -1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per P e perpendicolare alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, incidente la retta r e perpendicolare al vettore $u = (1, -1, -1)$.

(c) Tra tutte le rette passanti per P e contenute nel piano π trovare quella di minima distanza dal punto $A = (1, 3, 4)$ e scriverne le equazioni parametriche.

B

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 20 settembre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio le cui equazioni sono $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

(a) Trovare una base di U e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di U.

(b) Sia $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \,|\, w \cdot v = 0\}$, ove $v = (2, 1, 0, 0)$. Verificare che $U \subset W$ e trovare una base di un sottospazio L tale che $U \oplus L = W$. Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio L' tale che $U \oplus L' = W$, ma $L' \neq L$.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(d) Trovare una base di $U^\perp \cap W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & t \end{pmatrix}$.

(a) Determinare il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio si ponga $t = 0$. Sia $v = (1, \alpha, 3, -1)$. Trovare il valore di α per cui il sistema $A_0 X = v$ ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

(c) Sia U il sottospazio generato dalle righe di A_0 e W il sottospazio generato dalle colonne di A_0. Trovare una base di U e una base di W.

(d) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(A_0^T)$ (ove A_0^T è la trasposta della matrice A_0) e verificare che $\mathrm{Ker}(A_0^T) = W^\perp$.

Esercizio 3. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(e_2) = (-1, 2, 3)$, $f(e_3) = (1, -3, -4)$ e il nucleo di f è generato dal vettore $(-1, 2, 2)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

(b) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Trovare delle basi degli autospazi di f. È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di f rispetto a questa base sia diagonale?

(d) Si dica se è possibile trovare una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice abbia l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e tale che $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$. La matrice di una tale funzione g (se esiste) è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (2, 1, 1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per P e perpendicolare alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, incidente la retta r e perpendicolare al vettore $u = (2, 2, -1)$.

(c) Tra tutte le rette passanti per P e contenute nel piano π trovare quella di minima distanza dal punto $A = (1, -4, 2)$ e scriverne le equazioni parametriche.

C

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 20 settembre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio le cui equazioni sono $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

(a) Trovare una base di U e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di U.

(b) Sia $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$, ove $v = (0, 1, 1, 0)$. Verificare che $U \subset W$ e trovare una base di un sottospazio L tale che $U \oplus L = W$. Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio L' tale che $U \oplus L' = W$, ma $L' \neq L$.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(d) Trovare una base di $U^\perp \cap W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & t \end{pmatrix}$.

(a) Determinare il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio si ponga $t = 0$. Sia $v = (0, \alpha, -4, -1)$. Trovare il valore di α per cui il sistema $A_0 X = v$ ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

(c) Sia U il sottospazio generato dalle righe di A_0 e W il sottospazio generato dalle colonne di A_0. Trovare una base di U e una base di W.

(d) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(A_0^T)$ (ove A_0^T è la trasposta della matrice A_0) e verificare che $\mathrm{Ker}(A_0^T) = W^\perp$.

Esercizio 3. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(e_2) = (-2, -1, 0)$, $f(e_3) = (6, 2, -1)$ e il nucleo di f è generato dal vettore $(-1, 1, 1)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

(b) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Trovare delle basi degli autospazi di f. È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di f rispetto a questa base sia diagonale?

(d) Si dica se è possibile trovare una funzione lineare $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice abbia l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e tale che $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$. La matrice di una tale funzione g (se esiste) è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (-1, 2, 1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per P e perpendicolare alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, incidente la retta r e perpendicolare al vettore $u = (4, -1, 3)$.

(c) Tra tutte le rette passanti per P e contenute nel piano π trovare quella di minima distanza dal punto $A = (0, 1, 5)$ e scriverne le equazioni parametriche.

D

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3º appello — 20 settembre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio le cui equazioni sono $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$

(a) Trovare una base di U e poi, dalla base trovata, ricavare una base **ortonormale** di U.

(b) Sia $W = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid w \cdot v = 0\}$, ove $v = (1, 0, 2, 0)$. Verificare che $U \subset W$ e trovare una base di un sottospazio L tale che $U \oplus L = W$. Se possibile, trovare una base di un altro sottospazio L' tale che $U \oplus L' = W$, ma $L' \neq L$.

(c) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(d) Trovare una base di $U^\perp \cap W$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & t \end{pmatrix}$.

(a) Determinare il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Per tutto il resto dell'esercizio si ponga $t = 0$. Sia $v = (3, \alpha, 6, -1)$. Trovare il valore di α per cui il sistema $A_0X = v$ ha soluzioni, e trovare tutte le soluzioni di tale sistema.

(c) Sia U il sottospazio generato dalle righe di A_0 e W il sottospazio generato dalle colonne di A_0. Trovare una base di U e una base di W.

(d) Trovare una base di $\mathrm{Ker}(A_0^T)$ (ove A_0^T è la trasposta della matrice A_0) e verificare che $\mathrm{Ker}(A_0^T) = W^\perp$.

Esercizio 3. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(e_2) = (-2, 1, 3)$, $f(e_3) = (2, -3, -5)$ e il nucleo di f è generato dal vettore $(-1, 2, 2)$.

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica (nel dominio e nel codominio).

(b) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f.

(c) Trovare delle basi degli autospazi di f. È possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice di f rispetto a questa base sia diagonale?

(d) Si dica se è possibile trovare una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice abbia l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 2 e tale che $\dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$. La matrice di una tale funzione g (se esiste) è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati il punto $P = (1, 1, 1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 3x - y - 1 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per P e perpendicolare alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, incidente la retta r e perpendicolare al vettore $u = (2, -1, -1)$.

(c) Tra tutte le rette passanti per P e contenute nel piano π trovare quella di minima distanza dal punto $A = (1, -1, 5)$ e scriverne le equazioni parametriche.