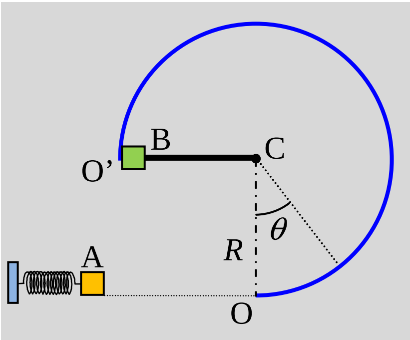
Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, dell'Informazione, Elettronica e Informatica
Canale 3 (Prof. G. Naletto)
Prima Prova in Itinere di Fisica Generale 1 - Padova, 18 Aprile 2015

Cognome .... Nome .... Matricola ....

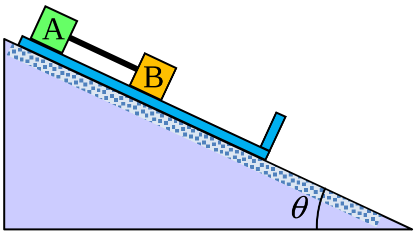
Problema 1



Un corpo A di dimensioni trascurabili e massa $m = 0.5$ kg giace su un piano orizzontale liscio appoggiato ad una molla ideale compressa di $\Delta x = 0.12$ m. Ad un certo istante la molla viene lasciata libera di espandersi mettendo in moto A. Nel suo moto sul piano, il corpo A si appoggia con velocità di modulo $v_A = 0.6$ m/s tangenzialmente sul lato interno dell'estremo O di una guida circolare liscia orizzontale di raggio $R = 0.75$ m, centro C, e lunghezza totale pari a 3/4 di cerchio. All'altro estremo O' della guida si trova fermo un corpo di dimensioni trascurabili B; nell'istante in cui il corpo A passa per O, il corpo B si mette in moto sulla guida verso O grazie ad un motore interno al sistema. Definendo la posizione di un punto sulla guida circolare tramite l'angolo θ di vertice C tale che $\theta = 0$ in O, la legge del moto di B è data da $\theta_B(t) = 3\pi/2 - ct^3$, con c costante. Determinare:

a) il valore k della costante elastica della molla;
b) il valore (e l'unità di misura) della costante c, sapendo che i due corpi si urtano all'istante $t = 2$ s, assumendo $t = 0$ quando A passa per O;
c) l'istante t^* in cui i due corpi hanno velocità di modulo uguale;
d) il modulo a_B^* dell'accelerazione di B all'istante t^*.

Problema 2



Due corpi A e B di dimensioni trascurabili, aventi rispettivamente massa m_A e $m_B = 2$ kg con $m_A = 3m_B$, sono appoggiati su un carrello ad "L" di massa $M = 6m_B$ posto su un piano scabro inclinato di un angolo $\theta = 25°$ rispetto all'orizzontale con la "sponda" sul lato in basso (vedi figura). Tra i due corpi A e B, che sono uniti tra loro da una sbarretta rigida di massa trascurabile, ed il carrello non c'è attrito, mentre tra carrello e piano c'è attrito con coefficiente di attrito statico e dinamico uguali e pari a μ. Inizialmente tutto il sistema è fermo, con il corpo B a distanza $d = 0.45$ m dalla sponda del carrello. Ad un certo istante il sistema viene lasciato libero di muoversi. Determinare:

a) il modulo T della tensione sulla sbarretta tra i corpi A e B mentre scorrono sul carrello.

Nelle due ipotesi che il coefficiente di attrito assuma i valori $\mu_1 = (6\text{tg}\theta)/5$ o $\mu_2 = (\text{tg}\theta)/2$, determinare:

b) l'accelerazione a_C del carrello prima che B tocchi la sponda;
c) il modulo v' della velocità dei due corpi relativamente al carrello un istante prima dell'impatto di B con la sponda.

Nel solo caso che il coefficiente di attrito valga $\mu_2 = \text{tg}\theta/2$, determinare:

d) il modulo ed il verso della tensione $\boldsymbol{T'_A}$ agente sul corpo A dopo che B ha toccato la sponda del carrello nel solo caso di coefficiente di attrito pari a μ_2.

Domande aggiuntive (a scopo didattico): nei due casi $\mu_1 = (6\text{tg}\theta)/5$ o $\mu_2 = (\text{tg}\theta)/2$, determinare:

e) il modulo v della velocità dei due corpi all'istante dell'impatto di B con la sponda;
f) il lavoro W_{attr} delle forze di attrito dall'istante iniziale del moto a quando B tocca la sponda.

Soluzioni

Problema 1

a) $\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mv_A^2}{\Delta x^2} = 12.5 \text{ N/m}$

b) $\theta_A(t) = \omega_A t = \frac{v_A}{R}t; \quad \theta_A(t') = \theta_B(t') \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{R}t = \frac{3}{2}\pi - ct^3 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3\pi}{2t^3} - \frac{v_A}{Rt^2} = 0.389 \text{ s}^{-3}$

c) Le due velocità (come le velocità angolari) sono una opposta all'altra. Quindi:

$$\omega_A(t^*) = -\omega_B(t^*) \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{R} = -\left.\frac{d\theta_B}{dt}\right|_{t^*} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{R} = 3ct^{*2} \quad \Rightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{v_A}{3cR}} = 0.828 \text{ s}$$

d) $$a_B = \sqrt{a_{T,B}^2 + a_{N,B}^2} = \sqrt{(\alpha_B R)^2 + (\omega_B^2 R)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\omega_B}{dt}R\right)^2 + \left[\left(\frac{d\theta_B}{dt}\right)^2 R\right]^2} = \sqrt{(-6ctR)^2 + \left[(-3ct^2)^2 R\right]^2} =$$

$$= 3ctR\sqrt{4 + 9c^2t^6} \quad \Rightarrow \quad a_B^* = 3ct^* R\sqrt{4 + 9c^2t^{*6}} = 1.53 \text{ m/s}^2$$

Problema 2

a) Parallelamente al piano, sui singoli corpi agiscono la componente della forza peso e la tensione della sbarretta. Siccome il sistema dei due corpi è soggetto alla sola componente della forza peso, essi scendono "insieme" lungo piano inclinato con la stessa accelerazione $a_1 = a_2 = a = g\sin\theta$, e la tensione sulla sbarretta è nulla: $T = 0$.

b) Il carrello è fermo se soddisfa la seguente condizione:

$$Mg\sin\theta - f_{as} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_{as} = Mg\sin\theta < f_{as,\max} = \mu_s N = \mu_s(M + m_A + m_B)g\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$6m_B g\sin\theta < \mu_s \cdot 10 m_B g\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu_s > \frac{3}{5}\tan\theta$$

Quindi per $\mu_1 = (6\text{tg}\theta)/5$ il carrello sta fermo ($a_{C,1} = 0$), mentre per $\mu_2 = (\text{tg}\theta)/2$ il carrello scende lungo il piano inclinato. In quest'ultimo caso, l'accelerazione del carrello si ottiene da:

$$Mg\sin\theta - f_{ad} = Ma_{C,2} \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta - \mu_2(M + m_A + m_B)g\cos\theta = Ma_{C,2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 6g\sin\theta - 10\mu_2 g\cos\theta = 6a_{C,2} \quad \Rightarrow \quad a_{C,2} = g\left(\sin\theta - \frac{5}{3}\mu_2\cos\theta\right) = \frac{1}{6}g\sin\theta = 0.69 \text{ m/s}^2$$

c) $v'_1 = v_1 = \sqrt{2a_1 d} = \sqrt{2g\sin\theta \cdot d} = 1.93 \text{ m/s}$

oppure $\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_1^2 = (m_A + m_B)gh \quad \text{con} \quad h = d\sin\theta \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g\sin\theta \cdot d}$

$$a'_2 = a_2 - a_{C,2} = \frac{5}{6}g\sin\theta; \quad \Rightarrow \quad v'_2 = \sqrt{2a'_2 d} = \sqrt{\frac{5}{3}g\sin\theta \cdot d} = 0.65 \text{ m/s}$$

oppure $x_C = \frac{1}{2}a_C t^2 + d; \quad x_B = \frac{1}{2}g\sin\theta t^2; \quad x_C = x_B \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta - a_C}}; \qquad v' = a't = (a - a_C)t$

(oppure $v' = v' - v_C = at - a_C t$) $\quad \Rightarrow \quad v' = (g\sin\theta - a_C)\sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta - a_C}} = \sqrt{2d(g\sin\theta - a_C)}$

d) Indicando come verso positivo del moto quello orientato verso il basso, si ottiene:

$$m_{TOT}g\sin\theta - \mu_2 m_{TOT}g\cos\theta = m_{TOT}a^* \quad \Rightarrow \quad a^* = g(\sin\theta - \mu_2\cos\theta)$$

$$m_A g\sin\theta + T'_A = m_A a^* \quad \Rightarrow \quad T'_A = m_A(a^* - g\sin\theta) = -3\mu_2 m_B g\cos\theta = -\frac{3}{2}m_B g\sin\theta = -12.4 \text{ N}$$

Essendo T' negativa, sulla base dell'orientazione scelta, la tensione $\boldsymbol{T'_A}$ è orientata verso l'alto del piano inclinato.

e) $v_1 = v'_1 = 1.93\,\text{m/s}$

$$d = \frac{1}{2}a'_2 t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a'_2}}; \quad v_2 = a_2 t = a_2\sqrt{\frac{2d}{a'_2}} = g\sin\theta\sqrt{\frac{2d}{\frac{5}{6}g\sin\theta}} = 2\sqrt{\frac{3}{5}dg\sin\theta} = 2.11\,\text{m/s}$$

oppure $x_2 = d + \frac{1}{2}a_{C,2}t^2 = d + \frac{1}{2}a_{C,2}\cdot\frac{2d}{a'_2} = d\left(1+\frac{a_{C,2}}{a'_2}\right) = d\,\frac{a_2}{a'_2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2a_2x_2} = a_2\sqrt{\frac{2d}{a'_2}}$

f) $W_{attr,1} = 0$

$$W_{attr,2} = -\mu_2\cdot 10m_B g\cos\theta\cdot x_{C,2} = -5m_B g\sin\theta\cdot d\,\frac{a_{C,2}}{a'_2} = -5m_B gd\sin\theta\frac{\frac{1}{6}g\sin\theta}{\frac{5}{6}g\sin\theta} = -m_B gd\sin\theta = -3.73\,\text{J}$$

oppure

$$W_{attr,2} = \Delta E_m = \frac{1}{2}Mv_{C,2}^2 - Mgh = \frac{1}{2}6m_B\cdot 2a_{C,2}x_{C,2} - 6m_B g x_{C,2}\sin\theta = 6m_B x_{C,2}\left(a_{C,2} - g\sin\theta\right) =$$

$$= 6m_B\cdot\frac{1}{2}a_{C,2}t^2\left(-\frac{5}{6}g\sin\theta\right) = 3m_B\cdot\frac{1}{6}g\sin\theta\frac{2d}{a'_2}\left(-\frac{5}{6}g\sin\theta\right) = -m_B gd\sin\theta$$