COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
1 Febbraio 2013

Esercizio 1. [11 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10^3 \, \frac{(s+0.1)(s^2+1)}{(s+1)\,(s^2-2s+100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. [9 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^2-2s+10}{(s+a)(s+5)^2}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

i) si determini il valore di a sapendo che $s=-2$ è un punto doppio del luogo;

ii) si tracci il luogo positivo, determinandone asintoti, punti doppi, intersezioni con asse immaginario e studiando quindi la stabilità BIBO di
$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$
al variare di $K>0$;

iii) si tracci il luogo negativo, determinandone asintoti, punti doppi, intersezioni con asse immaginario e studiando quindi la stabilità BIBO di $W(s)$, al variare di $K<0$.

Esercizio 3. [6 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

si progettino due compensatori stabilizzanti, $C_1(s)$ e $C_2(s)$, in modo che il sistema retroazionato, in corrispondenza ad entrambi i compensatori,

- sia di tipo 1, con $e_{rp} \simeq 0.01$ alla rampa lineare;
- abbia margine di fase $m_\phi \simeq 90^o$;

la risultante funzione di trasferimento in catena aperta

- abbia $\omega_a \simeq 0.1$ rad/s in corrispondenza a $C_1(s)$ e $\omega_a \simeq 1000$ rad/s in corrispondenza a $C_2(s)$.

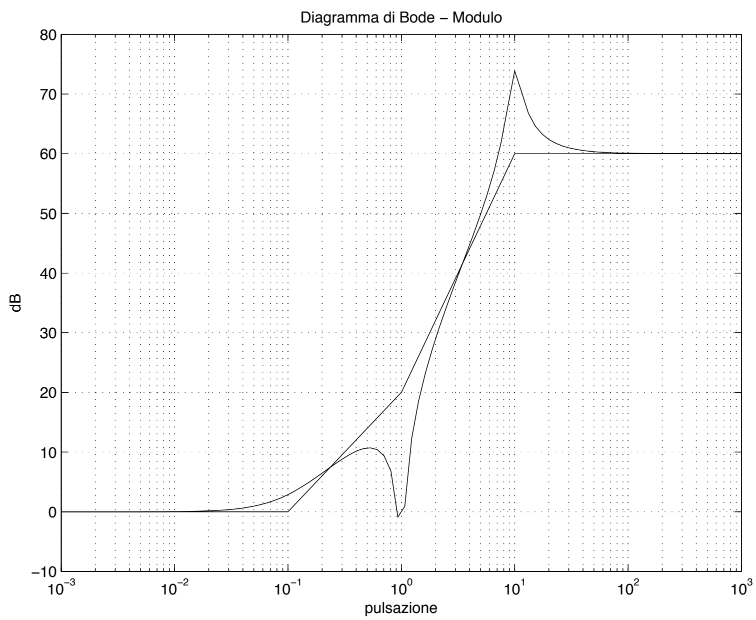
Teoria. [5 punti] Si spieghi in dettaglio come si modifica il criterio di Routh per studiare la stabilità nel caso a tempo discreto, fornendone anche le motivazioni (con particolare attenzione al possibile fenomeno dell'abbassamento di grado del polinomio).

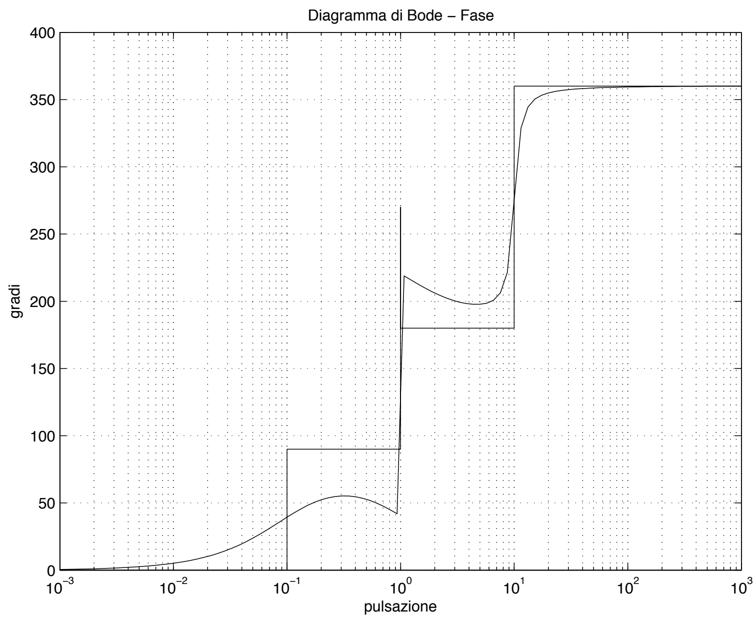
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1 + s^2\right)}{(1 + s)\left(1 - 2\frac{1}{10}\frac{s}{10} + \frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

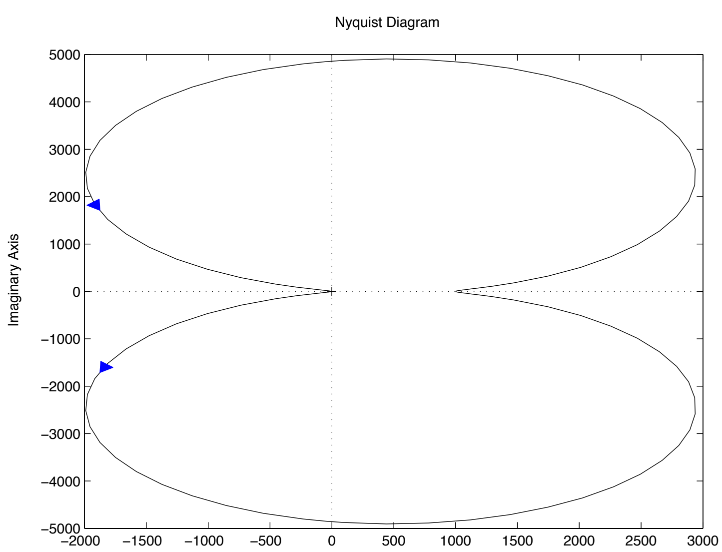
Pertanto $K_B = 1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo semplice in -10^{-1} $(1/T' = 0.1, \mu' = 1)$, una coppia di zeri immaginari coniugati con $\omega_n' = 1$ e $\xi' = 0$, un polo reale negativo in -1 $(1/T = 1, \mu = 1)$, ed una coppia di poli complessi coniugati con $\omega_n = 10$ e $\xi = -1/10$ (e $|\xi| < 1/\sqrt{2}$). Si noti che i due poli complessi coniugati hanno parte reale positiva e sono quindi instabili. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



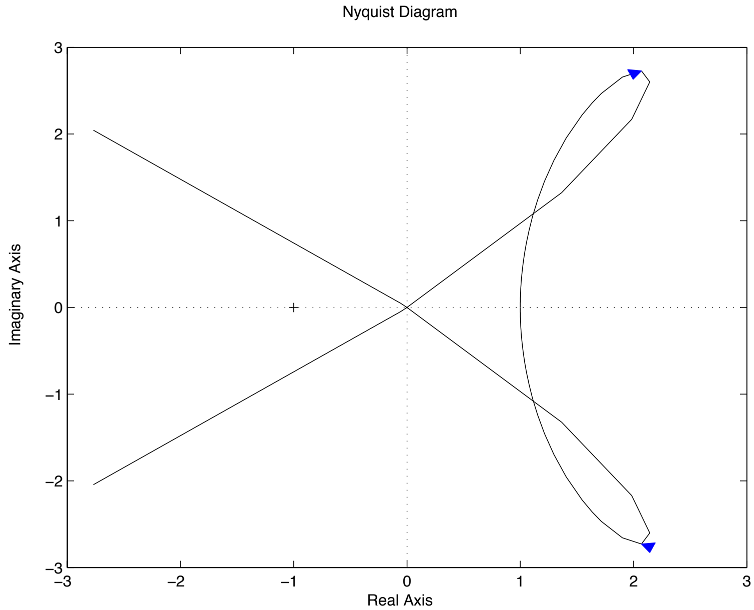


Si noti che il picco negativo alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec è in realtà illimitato verso il basso, in quanto corrisponde ad una coppia di zeri immaginari coniugati. Inoltre il comportamento strano della fase in corrispondenza alla pulsazione 1 rad/s è dovuto al fatto che 1 rad/s è la pulsazione di spezzamento di due distinti termini, con velocità di variazione completamente diverse.

ii) Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Nella seguente figura viene riportato il dettaglio del diagramma di Nyquist per pulsazioni prossime allo zero ($\omega \in [-1.2, 1.2]$ rad/s).



Il diagramma di Nyquist si mantiene al finito e non compie nessun giro attorno a $-1+j0$, ovvero $N = 0$. Poichè $G(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 2$, la condizione $N = 0$ implica $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. i) L'equazione dei punti doppi porge

$$(2s-2)(s+a)(s+5)^2 = (s^2-2s+10)(s+5)(3s+2a+5)$$

e, valutata per $s = -2$, fornisce un'equazione lineare in a la cui unica soluzione è $a = 1$. Sostituendo tale valore di a si ottiene

$$(s^3 - 9s^2 + 18s + 80)(s+5) = 0$$

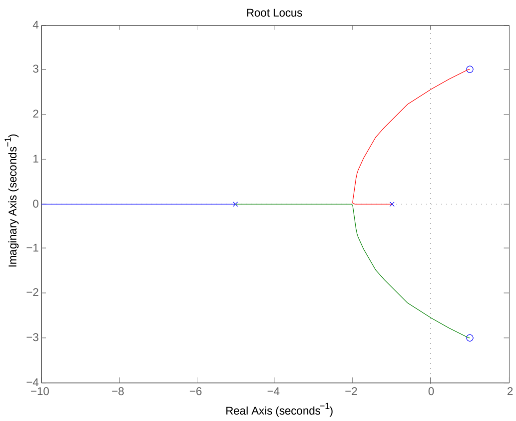
Dovendo essere il polinomio di III grado divisibile per $s+2$, si trova

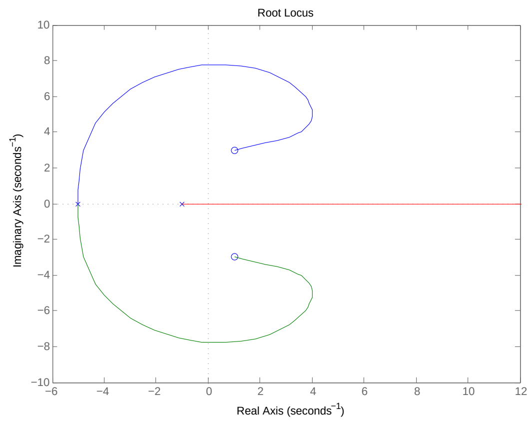
$$(s+5)(s+2)(s^2 - 11s + 40) = 0$$

da cui i punti doppi $s = -2, -5$, corrispondenti rispettivamente a $K = 0.5$ ed a $K = 0$, punto doppio iniziale del luogo (gli altri 2 sono complessi coniugati e non possono essere ammissibili, avendo $G(s)$ grado 3).

ii) e iii) Il luogo positivo ha un ramo che da $s = -1$ si muove verso sinistra incontrando uno dei 2 rami provenienti da $s = -5$ nel punto doppio $s = -2$ per $K = 0.5$, dopodiché i due rami escono sul piano complesso e, attraversando l'asse immaginario, tendono ai 2 zeri collocati in $1 \pm 3i$, mentre un altro ramo va da $s = -5$ a $-\infty$ (asintoto).

Nel luogo negativo, invece, un ramo parte da $s = -1$ e si dirige, restando sull'asse reale, verso $s = +\infty$ (asintoto) tagliando l'asse immaginario in $s = 0$, mentre gli altri due rami partono dal semipiano negativo, attraversano l'asse immaginario e tendono infine ai due zeri collocati in $s = 1 \pm 3i$. Luogo positivo e negativo sono raffigurati nelle seguenti figure, rispettivamente a sinistra e a destra.





Per trovare le intersezioni con l'asse immaginario, si scrive l'equazione del luogo per $s = i\omega$

$$(1 + i\omega)(5 + i\omega)^2 + K(10 - 2i\omega - \omega^2) = 0$$

da cui

$$[(K(10 - \omega^2) + (25 - 11\omega^2)] + i\omega(35 - \omega^2 - 2K) = 0$$

Uguagliando a zero la parte immaginaria si ottiene $\omega = 0$ oppure $K = \frac{35-\omega^2}{2}$ che, sostituite nella parte reale anch'essa uguagliata a zero, forniscono

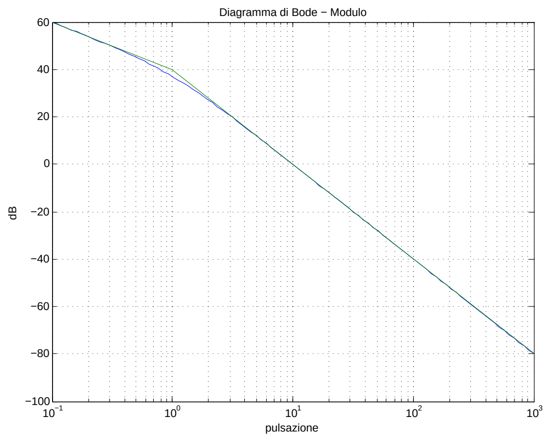
$$\omega = 0 \;\rightarrow\; K = -2.5$$

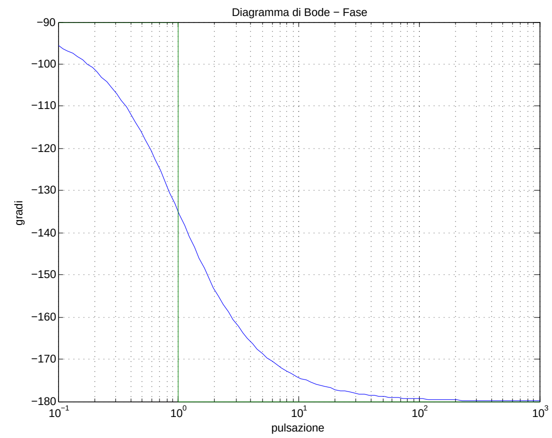
oppure

$$\omega^4 - 67\omega^2 + 400 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \omega \simeq 7.77, & K = -12.69, \\ \omega \simeq 2.57, & K \simeq 14.19. \end{cases}$$

Tali valori individuano sia i punti in corrispondenza ai quali il luogo attraversa l'asse immaginario (sia nel luogo positivo, uno solo, che in quello negativo, due), sia i valori di K per cui l'attraversamento accade. Si ha quindi stabilità BIBO per $0 > K > -2.5$ e per $0 < K < 14.19$.

Esercizio 3. Il requisito su tipo ed errore alla rampa impone l'utilizzo, in entrambi i casi, di un precompensatore di $C'(s) = \frac{100}{s}$.





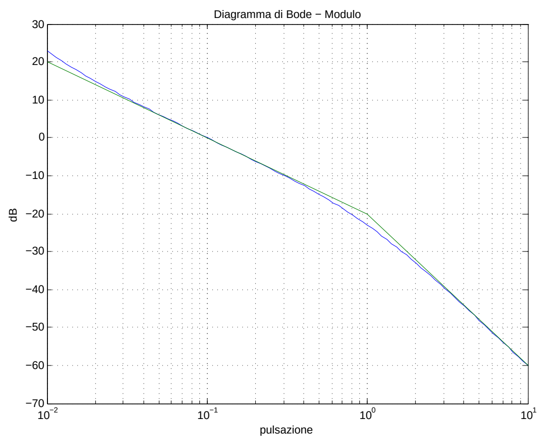
Veniamo ora al caso del primo compensatore. Dall'osservazione del diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$ si nota che in $\omega = 0.1$ rad/s il modulo vale circa 60dB, mentre il margine di fase alla pulsazione di attraversamento desiderata è all'incirca quello richiesto. Non potendo abbassare il guadagno di Bode (altrimenti non verrebbe rispettato il requisito sull'errore a regime permanente), è necessario l'impiego di una rete ritardatrice, con polo e zero distanziati di 3 decadi e posizionati abbastanza prima di $\omega = 0.1$ rad/s per ottenere che la pulsazione di attraversamento sia pari a $\omega_a = 0.1$ rad/s, senza sostanzialmente modificare la fase e quindi garantendo il margine di fase richiesto. Ad esempio, possiamo prendere

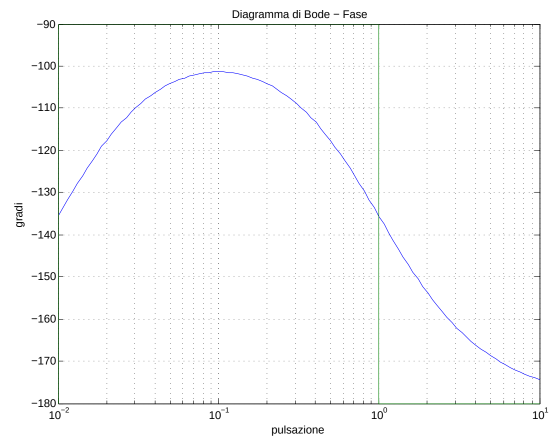
$$C_1''(s) = \frac{1 + 100s}{1 + 100000s},$$

che corrisponde al controllore complessivo

$$C_1(s) = C'(s)C_1''(s) = \frac{100(1 + 100s)}{s(1 + 100000s)}.$$

La verifica del risultato ottenuto è illustrata nei due seguenti diagrammi di Bode:





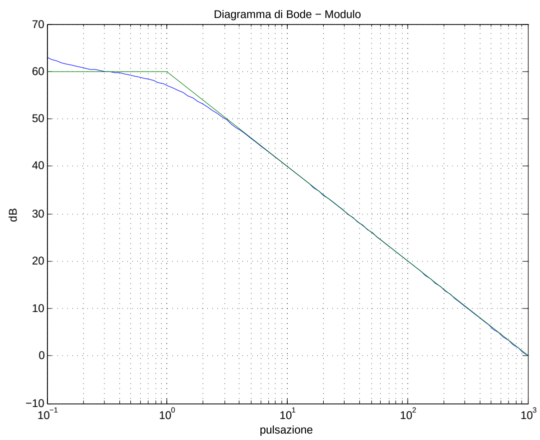
Passiamo ora al secondo controllore. In $\omega = 1000$ rad/s il modulo di $C'(i\omega)G(i\omega)$ vale circa -80dB ed il margine di fase è quasi nullo, per cui è necessario ricorrere ad uno zero posizionato 4 decadi prima di $\omega_a = 1000$ per ottenere il taglio in $\omega_a = 1000$ rad/s ed il margine di fase richiesto. Quindi prendiamo

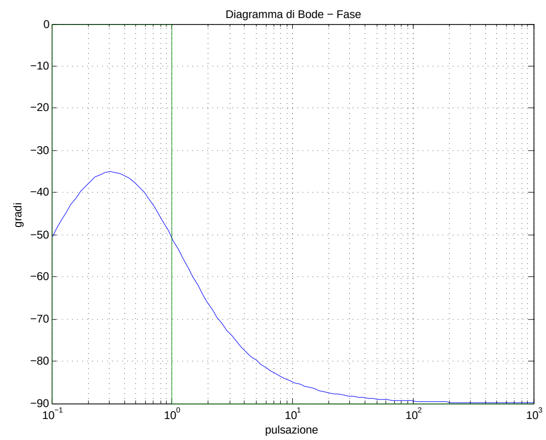
$$C_2''(s) = 1 + 10s,$$

che corrisponde al controllore complessivo

$$C_2(s) = C'(s)C_2''(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s}.$$

Si noti che non è necessario il polo in alta frequenza (rete anticipatrice), in quanto $C_2(s)$ è già propria per la presenza dell'integratore. La verifica del risultato ottenuto è illustrata nei due seguenti diagrammi di Bode:





Teoria. Si veda il Capitolo 13, pagine 344-345, del Libro di testo.