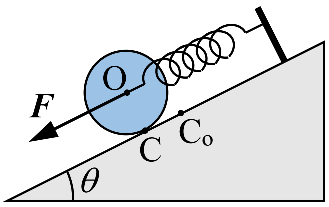
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica - Canale 1 (Prof. G. Naletto)
Seconda Prova in Itinere di Fisica Generale 1 - Padova, 16 giugno 2022

Cognome .... Nome .... Matricola ....

Problema 1



Un disco omogeneo di massa m = 2.2 kg e raggio R è posto su un piano scabro inclinato di un angolo θ = 35° rispetto all'orizzontale. Il disco, potenzialmente in grado di rotolare lungo il piano inclinato, è mantenuto fermo con punto di contatto C dall'azione combinata di una forza $\vec{F}$ applicata al centro di massa O del disco, parallela al piano inclinato orientata verso il basso e di una molla ideale parallela al piano inclinato di costante elastica k = 220 N/m applicata in O e vincolata all'altro estremo posto in alto rispetto al disco (vedi figura); la molla è estesa di $|\Delta x|$ = 0.15 m rispetto alla sua lunghezza a riposo. Poi si toglie la forza $\vec{F}$ ed il disco risale il piano inclinato con moto di puro rotolamento. Determinare:

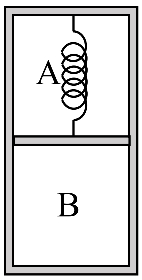
a) il modulo F della forza inizialmente applicata in O;
b) il modulo a_{CM} dell'accelerazione del centro di massa del disco nell'istante in cui si toglie la forza $\vec{F}$;
c) il modulo v_{CM} della velocità del centro di massa del disco quando la molla ha lunghezza pari alla sua lunghezza di riposo, in cui il punto di contatto del disco con il piano è C_o;
d) il minimo valore $\mu_{s,min}$ del coefficiente di attrito statico in C_o affinché il disco rotoli senza strisciare.

Problema 2

Un cilindro con pistone a tenuta che si può muovere senza attrito contiene n moli di un gas perfetto biatomico. Il cilindro è in contatto termico con un serbatoio di energia alla temperatura T_A ed il gas è in equilibrio. Agendo in modo molto lento e graduale dall'esterno, si espande il gas finché questo si porta allo stato di equilibrio B, in cui il rapporto tra i volumi occupati dal gas negli stati B e A è $V_B/V_A = 3$. A questo punto si blocca il pistone e si mette il cilindro in contatto termico con un altro serbatoio alla temperatura $T_C = \frac{3}{5}T_A$, fino a quando il gas raggiunge il nuovo stato di equilibrio C. Infine, si isola adiabaticamente il cilindro e si comprime rapidamente il gas finché ritorna nello stato iniziale A. Disegnare il ciclo compiuto dal gas e determinare:

a) il rendimento η del ciclo (NB i valori numerici delle variabili non sono forniti perché non necessari);
b) il numero n di moli del gas sapendo che nella trasformazione AB l'entropia del serbatoio è variata di $\Delta S_{serb,AB}$ = –18.3 J/K;
c) la variazione di entropia $\Delta S_{U,ciclo}$ dell'universo nel ciclo;
d) (facoltativa) il rendimento η' del ciclo nel caso in cui la trasformazione BC avvenisse in contatto termico con un serbatoio alla temperatura T'_C (NB: diversa da $T_C = \frac{3}{5}T_A$) e la trasformazione CA fosse reversibile.

Problema 3



Un cilindro a pareti rigide adiabatiche, di sezione S e altezza $2h$ è diviso in due parti A e B da un pistone a tenuta mobile senza attrito. Nella porzione B ci sono n = 0.18 moli di un gas ideale biatomico alla temperatura T_0 = 270 K; nella porzione A, in cui è stato fatto il vuoto, c'è una molla ideale di costante elastica k = 7500 N/m, parallela all'asse del cilindro. Inizialmente il gas è in equilibrio, la molla è compressa di $|\Delta x_0|$ = 0.08 m e i volumi delle due porzioni del cilindro sono uguali ($V_{0A} = V_{0B} = V_0$). Successivamente, si mette il gas in contatto termico con un serbatoio di energia a temperatura T_1 ed il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio con la molla compressa di $|\Delta x_1|$ = 0.1 m. Determinare:

a) la semialtezza h del cilindro;
b) la temperatura T_1 del serbatoio [suggerimento: si osservi che nella trasformazione il volume del gas varia di $\Delta V_B = (\Delta x_1 - \Delta x_0)S$];
c) il lavoro W_{01} fatto dal gas nella trasformazione.

Soluzioni

Problema 1

a) Posto C come polo e asse x parallelo al piano orientato verso l'alto ($F_{el} = -k\Delta x$, con $\Delta x < 0$):

$$-RF - Rmg\sin\theta + RF_{el} = 0 \;\Rightarrow\; F = F_{el} - mg\sin\theta = -k\Delta x - mg\sin\theta = 20.6\ \text{N}$$

Oppure, posto come polo il centro del disco: $\begin{cases} Rf_{as} = 0 \\ -k\Delta x - F - mg\sin\theta - f_{as} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{as} = 0 \\ F = -k\Delta x - mg\sin\theta \end{cases}$

b) Si orienta f'_{as}, tangente al piano inclinato, verso il basso; assumendo C come polo:

$$R(-k\Delta x) - Rmg\sin\theta = I_C\alpha = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\cdot\frac{a_{CM}}{R} \;\Rightarrow\; a_{CM} = -\frac{2}{3m}(k\Delta x + mg\sin\theta) = 6.25\ \text{m/s}^2$$

c) $$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 + mg|\Delta x|\sin\theta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 + mg|\Delta x|\sin\theta \;\Rightarrow$$

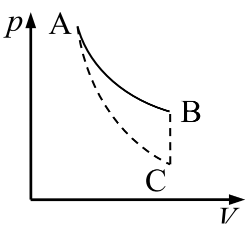
$$\Rightarrow\; v_{CM} = \sqrt{\frac{2k}{3m}\Delta x^2 - \frac{4}{3}g|\Delta x|\sin\theta} = 0.61\ \text{m/s}$$

d) $$\begin{cases} Rf''_{as} = I_O\alpha = \frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{a''_{CM}}{R} \\ -mg\sin\theta - f''_{as} = ma''_{CM} \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} ma''_{CM} = 2f''_{as} \\ 3f''_{as} = -mg\sin\theta \end{cases};$$

NB Si osservi che la soluzione dà $f''_{as} < 0$, quindi f''_{as} ha qui verso concorde all'asse (orientata verso l'alto).

$$|f''_{as}| = \frac{1}{3}mg\sin\theta \le \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta \;\Rightarrow\; \mu_s \ge \mu_{s,min} = \frac{1}{3}\tan\theta = 0.233$$

Problema 2



a) $$Q_{AB} = nRT_A\ln\frac{V_B}{V_A};\quad Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = nc_VT_A\left(\frac{T_C}{T_A} - 1\right);\quad Q_{CA} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \eta = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{nc_VT_A\left(\frac{T_C}{T_A} - 1\right)}{nRT_A\ln\frac{V_B}{V_A}} = 1 + \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{T_C}{T_A} - 1\right)}{\ln\frac{V_B}{V_A}} = 0.09$$

b) $$\Delta S_{serb,AB} = -\Delta S_{gas,AB} = -nR\ln\frac{V_B}{V_A} \;\Rightarrow\; n = -\frac{\Delta S_{serb,AB}}{R\ln\frac{V_B}{V_A}} = 2.0$$

c) $$\Delta S_{U,ciclo} = \Delta S_{amb,ciclo} = \Delta S_{amb,ABC} = \Delta S_{serb,AB} + \frac{-nc_V(T_C - T_B)}{T_C} = \Delta S_{serb,AB} + nc_V\left(1 - \frac{T_A}{T_C}\right) = 9.46\ \text{J/K}$$

oppure $$\Delta S_{U,ciclo} = \Delta S_{U,BC} + \Delta S_{gas,CA} = \left(nc_V\ln\frac{T_C}{T_B} - \frac{nc_V(T_C - T_B)}{T_C}\right) + \left(nR\ln\frac{V_A}{V_C} + nc_V\ln\frac{T_A}{T_C}\right)$$

d) $$T'_CV_C^{\gamma-1} = T_AV_A^{\gamma-1} \;\Rightarrow\; T'_C = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1};\quad Q_{BC} = nc_V(T'_C - T_B) = nc_VT_A\left[\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \eta' = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{n\frac{5}{2}RT_A\left[\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} - 1\right]}{nRT_A\ln\frac{V_B}{V_A}} = 1 + \frac{\frac{5}{2}\left[\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} - 1\right]}{\ln\frac{V_B}{V_A}} = 0.191$$

Problema 3

a) $$p_{0B} = p_{0A} = \frac{k\Delta x_0}{S} \;\Rightarrow\; V_{0B} = Sh = \frac{nRT_0}{p_{0B}} = \frac{nRT_0S}{k\Delta x_0} \;\Rightarrow\; h = \frac{nRT_0}{k\Delta x_0} = 0.673\ \text{m}$$

b) Con la molla compressa di Δx_1, il volume occupato dal gas varia di $\Delta V_B = (\Delta x_1 - \Delta x_0)S$.

$$p_{1B} = p_{1A} = \frac{k\Delta x_1}{S} = \frac{nRT_1}{V_{1B}} = \frac{nRT_1}{V_{0B} + \Delta V_B} = \frac{nRT_1}{S(h + \Delta x_1 - \Delta x_0)} \;\Rightarrow\; T_1 = \frac{k\Delta x_1}{nR}(h + \Delta x_1 - \Delta x_0) = 347.5\ \text{K}$$

c) $$W_{01} = -W_{molla} = \Delta E_{p,el} = \frac{1}{2}k\Delta x_1^2 - \frac{1}{2}k\Delta x_0^2 = 13.5\ \text{J}$$