Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 12 (ripasso per il compitino)

06/06/2024

Esercizio 1

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia $\mathscr{S}$ la sfera di centro $C = (2, -1, 1)$ passante per il punto $A = (3, 1, 0)$.

(a) Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente a $\mathscr{S}$ nel punto A.

(b) Sia γ la circonferenza ottenuta intersecando la sfera $\mathscr{S}$ con il piano $\pi : 3x + y + 2z - 2 = 0$. Trovare il centro e il raggio di γ .

(c) Dopo aver verificato che il punto $P = (0, -2, 2)$ appartiene alla circonferenza γ , scrivere le equazioni parametriche della retta r tangente a γ nel punto P.

Esercizio 2

Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, sia r la retta passante per il punto $R = (1, -2, -2)$ con direzione data dal vettore $v_r = (3, 1, -4)$. Sia inoltre π il piano di equazione $3x - y + 2z - 1 = 0$.

(a) Si determini la proiezione ortogonale A' del punto $A = (-7, 2, -2)$ sul piano π e la distanza di A' dalla retta r.

(b) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta dall'intersezione della sfera di raggio 1 centrata nell'origine con il piano π.

Esercizio 3

Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni:

$$U\colon \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dal vettore $\ell = (0, 1, 1, 0)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Sia $V = U^\perp \cap L^\perp$. Trovare una base di V.

(c) Dato il vettore $w = (2, 3, -2, 2) \in \mathbb{R}^4$, determinare la sua proiezione ortogonale su $V^\perp$.

Esercizio 4

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo $f(e_1) = (-3, -1, 1), f(e_2) = (4, 1, -2)$ e tale che $Ker(f)$ è generato dal vettore $(2, 1, -1)$.

(a) Si scriva la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A e si dica se A è diagonalizzabile.

(c) Si dimostri che, per ogni intero **dispari** $n > 0$, si ha $A^n = A$.