Quarto test di autovalutazione di FONDAMENTI DI AUTOMATICA A.A. 2020/21

Data: 4 Novembre 2020

1. Si tracci la risposta al gradino di ciascuno dei seguenti modelli ingresso/uscita, e si determini per ciascuna di esse, almeno in modo approssimativo, tempo di salita (al 10%) e sovraelongazione (se esiste):

   (a) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 22\frac{dy}{dt} + 40y(t) = 11\frac{du}{dt} + 40u(t)$;

   (b) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 4y(t) = 4\frac{du}{dt} + 4u(t)$.

2. Con riferimento alle seguenti funzioni di trasferimento

   (a) $W(s) = \dfrac{s+9}{(s+1)(s+10)}$;

   (b) $W(s) = \dfrac{s+10}{(s+2)(s+5)}$;

   (c) $W(s) = \dfrac{2s+1}{(s+1)^2}$,

   se ne determini il tipo k, la risposta forzata del sistema, $w_{-(k+1)}(t)$, al segnale canonico $\delta_{-(k+1)}(t) := \frac{t^k}{k!}\delta_{-1}(t)$ e l'errore di regime permanente

$$e_{rp}^{(k+1)} := \lim_{t\to+\infty} \left[\delta_{-(k+1)}(t) - w_{-(k+1)}(t)\right].$$

RISPOSTE

1. Risposta al gradino:

   (a) La risposta al gradino è

   $$y_f(t) = \left[1 - 0.5e^{-2t} - 0.5e^{-20t}\right]\delta_{-1}(t).$$

   La sua derivata vale per $t > 0$

   $$\frac{dy_f}{dt} = e^{-2t} + 10e^{-20t}.$$

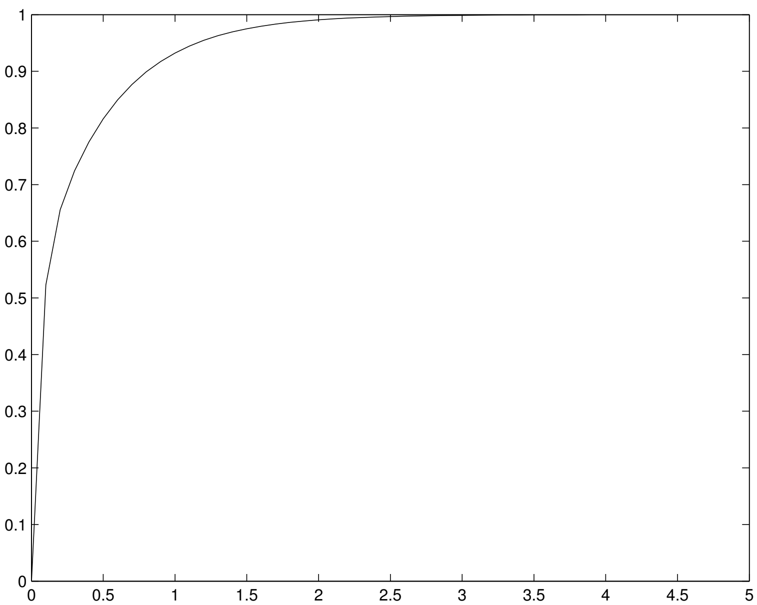
   Chiaramente tale derivata è positiva per ogni $t > 0$, e pertanto la risposta al gradino ha un andamento monotono crescente. Non esiste sovraelongazione e tempo di salita e di assestamento coincidono e si trovano imponendo

   $$y_f(t_r) = 0.9y_\infty = 0.9.$$

   Ricorrendo all'approssimazione

   $$y_f(t) \approx \left[1 - 0.5e^{-2t}\right]\delta_{-1}(t),$$

   (ragionevole dal momento che il modo e^{-20t} si estingue immediatamente se raffrontato con il modo e^{-2t}), si trova, quindi, $t_r = 0.8047$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:

   (b) La risposta al gradino è

   $$y_f(t) = \left[1 - e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)\right]\delta_{-1}(t).$$

   La sua derivata vale per $t > 0$

   $$\frac{dy_f}{dt} = 4e^{-t}\cos(\sqrt{3}t).$$

Chiaramente tale derivata è inizialmente positiva, e si annulla in corrispondenza a tutti i punti $t_k, k \in \mathbb{N}$, per cui $\sqrt{3}t_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ovvero per $t_k = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + k\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, con k intero positivo. Pertanto la risposta al gradino ha un andamento oscillatorio. Per valutare la sovraelongazione è necessario valutare il punto di massimo della risposta a gradino che certamente sarà $y_f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$. Si trova

$$y_f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)},$$

da cui segue che $s = \frac{y_f\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)-1}{1} \cdot 100\% = \sqrt{3}e^{-\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)} \cdot 100\% = 70\%$. Poiché la massima sovraelongazione è superiore al 70%, ne consegue che tempo di salita e tempo di assestamento al 10% non coincidono. Il tempo di salita si trova determinando il più piccolo istante t_r per cui

$$y_f(t_r) = 0.9y_\infty = 0.9.$$

Poiché una stima esatta risulta computazionalmente complessa, possiamo ricorrere ad un'approssimazione. Valutiamo l'istante t_1 in cui $y_f(t_1) = 1$. Poiché l'andamento dlla risposta al gradino è inizialmente molto ripido, tale valore è un'approssimazione accettabile di t_r. Si impone, quindi,

$$1 = y_f(t_1) = 1 - e^{-t_1}\cos(\sqrt{3}t_1) + \sqrt{3}e^{-t_1}\sin(\sqrt{3}t_1),$$

da cui segue

$$0 = -e^{-t_1}\cos(\sqrt{3}t_1) + \sqrt{3}e^{-t_1}\sin(\sqrt{3}t_1),$$

ovvero

$$0 = -2e^{-t_1}\left[\frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t_1)\right] = -2e^{-t_1}\cos(\sqrt{3}t_1 + \pi/3),$$

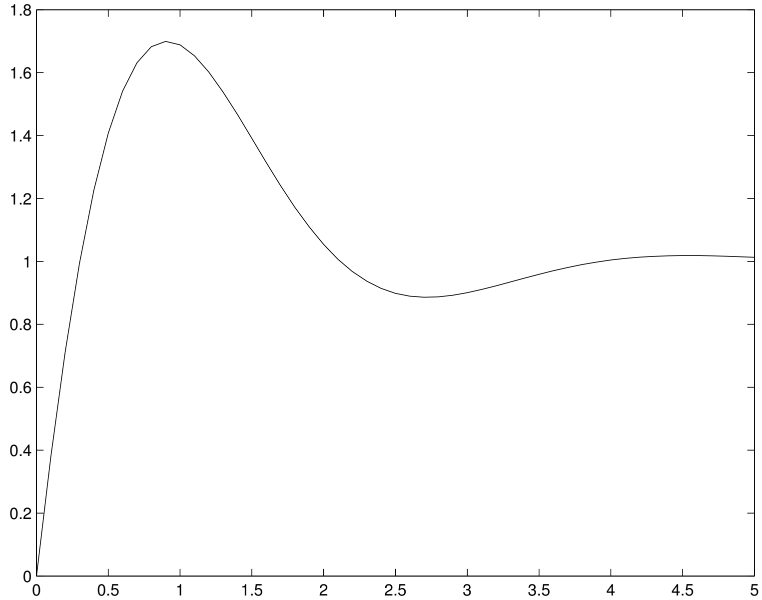
che porta a

$$0 = \cos(\sqrt{3}t_1 + \pi/3)$$

ovvero

$$\sqrt{3}t_1 + \pi/3 = \frac{\pi}{2},$$

da cui $t_r \approx t_1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \approx 0.3$ s. Il grafico della risposta al gradino è il seguente:



2. Tipo, risposta forzata ed errore di regime permanente:

   (a) $W(0) = \frac{9}{10} = 0.9$ pertanto il sistema è di tipo 0 e l'errore di regime permanente al gradino è $e_{rp}^{(1)} = \lim_{t\to+\infty} \delta_{-1}(t) - W(0)\delta_{-1}(t) = 1 - W(0) = 0.1$. Il calcolo della risposta al gradino, $w_{-1}(t)$, può essere effettuato nel dominio della trasformate e porta a

$$W_{-1}(s) = W(s)\frac{1}{s} = \frac{s+9}{s(s+1)(s+10)} = \frac{9}{10}\frac{1}{s} - \frac{8}{9}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{90}\frac{1}{s+10},$$

   ovvero

$$w_{-1}(t) = \left[\frac{9}{10} - \frac{8}{9}e^{-t} - \frac{1}{90}e^{-10t}\right]\delta_{-1}(t).$$

   (b) $W(0) = \frac{10}{2\cdot 5} = 1$, mentre $\frac{dW(0)}{ds} = -0.6$. Pertanto il sistema è di tipo 1 e l'errore di regime permanente alla rampa lineare $\delta_{-2}(t) = t \cdot \delta_{-1}(t)$ è

$$e_{rp}^{(2)} = -\frac{dW(0)}{ds} = 0.6.$$

   Il calcolo della risposta alla rampa lineare, $w_{-2}(t)$, può essere effettuato nel dominio della trasformate e porta a

$$W_{-2}(s) = W(s)\frac{1}{s^2} = \frac{s+10}{s^2(s+2)(s+5)} = -0.6\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{15}\frac{1}{s+5},$$

   ovvero

$$w_{-2}(t) = \left[-0.6 + t + \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{15}e^{-5t}\right]\delta_{-1}(t).$$

   (c) $W(0) = 1$, $\frac{dW(0)}{ds} = 0$ mentre $\frac{d^2W(0)}{ds^2} = -2$. Di conseguenza il sistema è di tipo 2 e l'errore di regime permanente alla rampa parabolica $\delta_{-3}(t) = \frac{t^2}{2!} \cdot \delta_{-1}(t)$ è

$$e_{rp}^{(3)} = -\frac{1}{2!}\frac{d^2W(0)}{ds^2} = 1.$$

Il calcolo della risposta alla rampa parabolica, $w_{-3}(t)$, può essere effettuato nel dominio della trasformate e porta a

$$W_{-3}(s) = W(s)\frac{1}{s^3} = \frac{2s+1}{s^3(s+1)^2} = -\frac{1}{s} + \frac{0}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2},$$

ovvero

$$w_{-3}(t) = \left[-1 + \frac{t^2}{2!} + e^{-t} + te^{-t}\right]\delta_{-1}(t).$$