A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2º Appello — 9 luglio 2013

Esercizio 1. Data una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, il *grafico* di f è il sottospazio vettoriale $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^4$ definito ponendo

$$\Gamma_f = \{\, (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \,\}.$$

Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici (rispetto alle basi canoniche) sono, rispettivamente

$$F = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ -2 & -2t \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si stabilisca se g è iniettiva e si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f **non è** iniettiva.

(b) Si scriva una base di Γ_g e si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b, 4, 5) \in \Gamma_g$.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione e una base di $\Gamma_f \cap \Gamma_g$. Si dica per quali valori di t si ha $\Gamma_f \oplus \Gamma_g = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A, le basi degli autospazi e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (0, 1, 0, -1)$ e $u_2 = (0, 3, 0, 1)$. Si verifichi che, per ogni $v \in U$, si ha $Av \in U$.

(c) Si scriva la matrice B della funzione lineare $f : U \to U$ definita da $f(v) = Av$, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, 0, -1, -1)$, $u_2 = (1, 1, -2, 2)$, $u_3 = (3, -1, 0, -4)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, -6, 1, -1)$ sul sottospazio U.

(c) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se tale W esiste se ne determini una base.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (0, 1, -2)$, $B = (3, 2, 2)$ e la retta r di equazioni $x + 3y - 1 = 0$ e $z + 1 = 0$.

(a) Si determini il punto A', proiezione ortogonale di A sulla retta r.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di A su π sia il punto B assegnato.

(c) Fra le rette passanti per A e complanari a r si determini quella che ha distanza minima dal punto B. Si determini poi tale distanza.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2o Appello — 9 luglio 2013

Esercizio 1. Data una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, il *grafico* di f è il sottospazio vettoriale $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^4$ definito ponendo

$$\Gamma_f = \{\,(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2) = f(x_1, x_2)\,\}.$$

Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici (rispetto alle basi canoniche) sono, rispettivamente

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -t \\ 2-t & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si stabilisca se g è iniettiva e si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f **non è** iniettiva.

(b) Si scriva una base di Γ_g e si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b, 4, 1) \in \Gamma_g$.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione e una base di $\Gamma_f \cap \Gamma_g$. Si dica per quali valori di t si ha $\Gamma_f \oplus \Gamma_g = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A, le basi degli autospazi e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (2, 0, -1, 0)$. Si verifichi che, per ogni $v \in U$, si ha $Av \in U$.

(c) Si scriva la matrice B della funzione lineare $f : U \to U$ definita da $f(v) = Av$, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0, 3, 1, -1)$, $u_2 = (2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (4, -1, 3, -1)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 4, 5, 0)$ sul sottospazio U.

(c) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se tale W esiste se ne determini una base.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (-2, 0, -3)$, $B = (1, 1, 2)$ e la retta r di equazioni $x - 1 = 0$ e $2y - z - 6 = 0$.

(a) Si determini il punto A', proiezione ortogonale di A sulla retta r.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di A su π sia il punto B assegnato.

(c) Fra le rette passanti per A e complanari a r si determini quella che ha distanza minima dal punto B. Si determini poi tale distanza.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2$^{\text{o}}$ Appello — 9 luglio 2013

Esercizio 1. Data una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, il *grafico* di f è il sottospazio vettoriale $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^4$ definito ponendo

$$\Gamma_f = \{ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \}.$$

Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici (rispetto alle basi canoniche) sono, rispettivamente

$$F = \begin{pmatrix} t-2 & 0 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si stabilisca se g è iniettiva e si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f **non è** iniettiva.

(b) Si scriva una base di Γ_g e si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b, 5, 8) \in \Gamma_g$.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione e una base di $\Gamma_f \cap \Gamma_g$. Si dica per quali valori di t si ha $\Gamma_f \oplus \Gamma_g = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A, le basi degli autospazi e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (0, 1, 0, 1)$ e $u_2 = (0, 2, 0, -1)$. Si verifichi che, per ogni $v \in U$, si ha $Av \in U$.

(c) Si scriva la matrice B della funzione lineare $f : U \to U$ definita da $f(v) = Av$, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (-2, 1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 3, -2, -1)$, $u_3 = (-3, 5, -2, 3)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (-1, 0, -9, 3)$ sul sottospazio U.

(c) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se tale W esiste se ne determini una base.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (0, 4, 1)$, $B = (3, 1, -2)$ e la retta r di equazioni $2x + y - z + 3 = 0$ e $y - 1 = 0$.

(a) Si determini il punto A', proiezione ortogonale di A sulla retta r.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di A su π sia il punto B assegnato.

(c) Fra le rette passanti per A e complanari a r si determini quella che ha distanza minima dal punto B. Si determini poi tale distanza.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

2º Appello — 9 luglio 2013

Esercizio 1. Data una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, il *grafico* di f è il sottospazio vettoriale $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^4$ definito ponendo

$$\Gamma_f = \{ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mid (y_1, y_2) = f(x_1, x_2) \}.$$

Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari le cui matrici (rispetto alle basi canoniche) sono, rispettivamente

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2+t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si stabilisca se g è iniettiva e si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la funzione f **non è** iniettiva.

(b) Si scriva una base di Γ_g e si determinino $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $(a, b, 7, -5) \in \Gamma_g$.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione e una base di $\Gamma_f \cap \Gamma_g$. Si dica per quali valori di t si ha $\Gamma_f \oplus \Gamma_g = \mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A, le basi degli autospazi e si stabilisca se A è diagonalizzabile.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, -1, 0)$ e $u_2 = (2, 0, 1, 0)$. Si verifichi che, per ogni $v \in U$, si ha $Av \in U$.

(c) Si scriva la matrice B della funzione lineare $f : U \to U$ definita da $f(v) = Av$, rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -2, 1, 0)$, $u_2 = (4, -3, 2, 1)$, $u_3 = (2, -3, 1, -1)$.

(a) Si determini una base ortogonale di U e una base di $U^\perp$.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del vettore $v = (4, -7, 3, 3)$ sul sottospazio U.

(c) Si dica se è possibile trovare un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se tale W esiste se ne determini una base.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (-4, 3, 0)$, $B = (3, 0, 1)$ e la retta r di equazioni $3x - z + 4 = 0$ e $y + 1 = 0$.

(a) Si determini il punto A', proiezione ortogonale di A sulla retta r.

(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π tale che la proiezione ortogonale di A su π sia il punto B assegnato.

(c) Fra le rette passanti per A e complanari a r si determini quella che ha distanza minima dal punto B. Si determini poi tale distanza.