# COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
# Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
# 28 Giugno 2013

**Esercizio 1.** [10 punti] Sia

$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s-10)^2}{s(s^2+0.05s+0.01)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

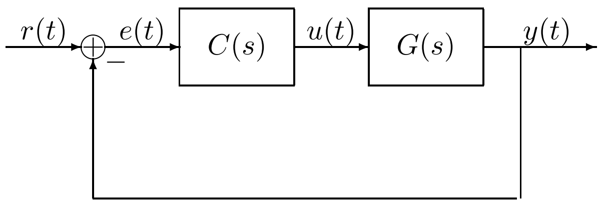
i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$, e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

**Esercizio 2.** [9.5 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^2+1}{(s-1)(s+2)^2}$$

i) e assumendo di operare un'azione di controllo puramente proporzionale, $C(s) = K$, si studi attraverso la tabella di Routh la stabilità BIBO del sistema retroazionato $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ illustrato in figura, determinando per ogni valore di $K$ (ove possibile, ovvero quando la tabella di Routh giunge a compimento) l'eventuale numero di radici a parte reale maggiore o uguale a zero;




ii) se ne tracci il luogo positivo delle radici, individuando asintoti e punti doppi e determinando per quali valori di $K > 0$ la funzione di trasferimento $W(s)$ è BIBO stabile;

iii) se ne tracci il luogo negativo delle radici, individuando asintoti e punti doppi e determinando per quali valori di $K < 0$ la funzione di trasferimento $W(s)$ è BIBO stabile.

**Esercizio 3.** [6.5 punti] Si consideri il sistema lineare, tempo-invariante, a tempo continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = 0.1 \frac{\left(1 + \frac{s}{0.1}\right)(1+s)}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}.$$

Supponendo di controllare il sistema attraverso un sistema di controllo a retroazione unitaria del tipo illustrato nella figura precedente (si veda Esercizio 2), si progettino, se possibile, due controllori, siano $C_1(s)$ e $C_2(s)$, in modo tale che il risultante sistema retroazionato

1) in entrambi i casi (ovvero sia utilizzando $C_1(s)$ che $C_2(s)$) sia di tipo 1 con errore di regime permanente (alla rampa unitaria) $e_{rp}^{(2)} = 1$;

e la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$:

2) per $C(s) = C_1(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A \approx \omega_A^* = 100$ rad/sec e margine di fase maggiore o uguale a $m_\psi^* = 90°$; per $C(s) = C_2(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A \approx \omega_A^* = 10000$ rad/sec e margine di fase maggiore o uguale a $m_\psi^* = 90°$.

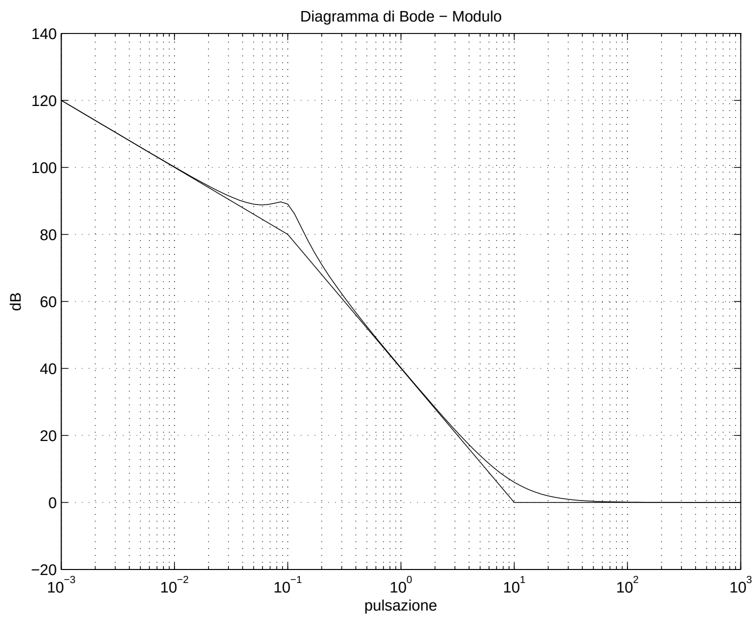
**Teoria.** [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

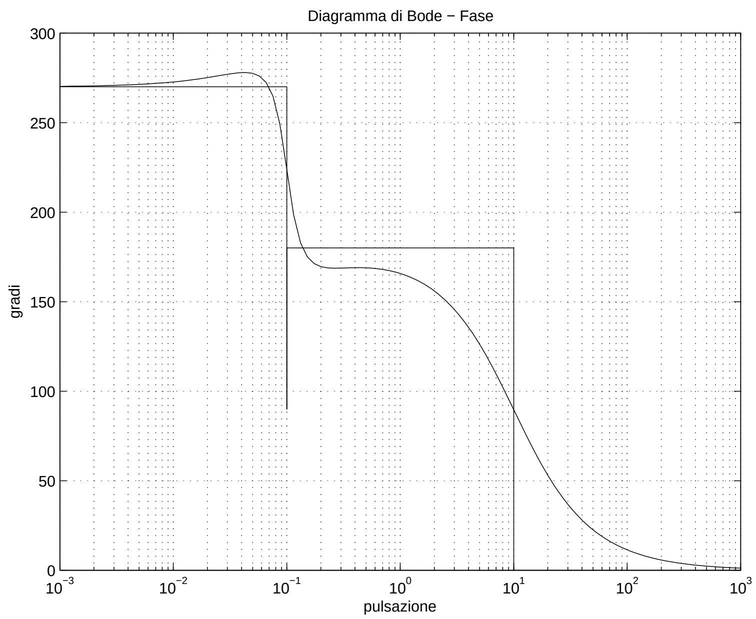
# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) [4 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

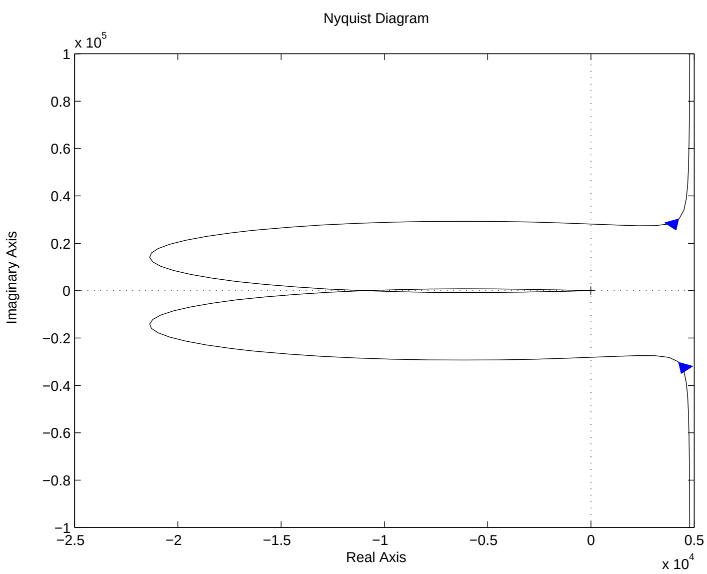
$$G(s) = \frac{(s+0.1)(s-10)^2}{s(s^2+0.05s+0.01)} = 1000\frac{\left(1+\frac{s}{0.1}\right)\left(1-\frac{s}{10}\right)^2}{s\left(1+2\frac{1}{4}\frac{s}{0.1}+\frac{s^2}{0.1^2}\right)}.$$

Pertanto $K_B = 1000$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo con $1/T_1' = 0.1$ e $\mu_1' = 1$, uno zero reale positivo doppio con $1/T_2' = -10$ e $\mu_2' = 2$, un termine trinomio al denominatore corrispondente a due poli complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n' = 0.1$ e smorzamento $\xi = 1/4 = 0.25$, e un polo semplice nell'origine ($\nu = 1$). Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.

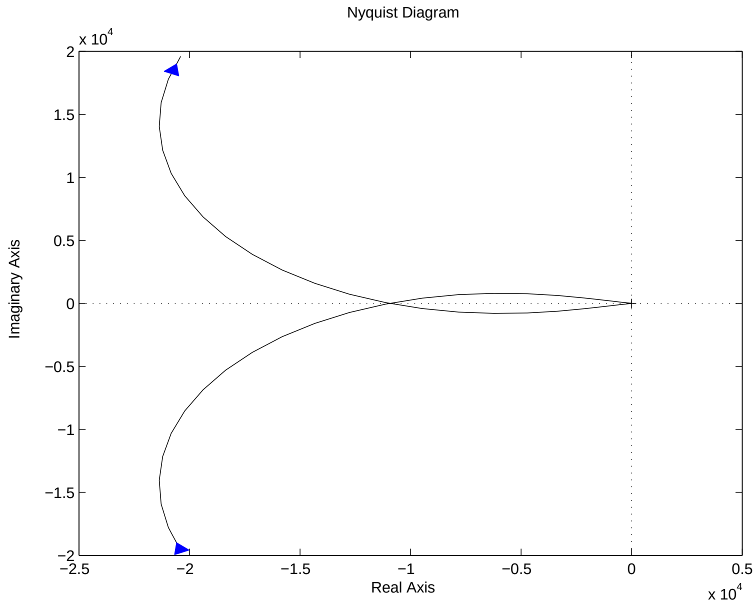




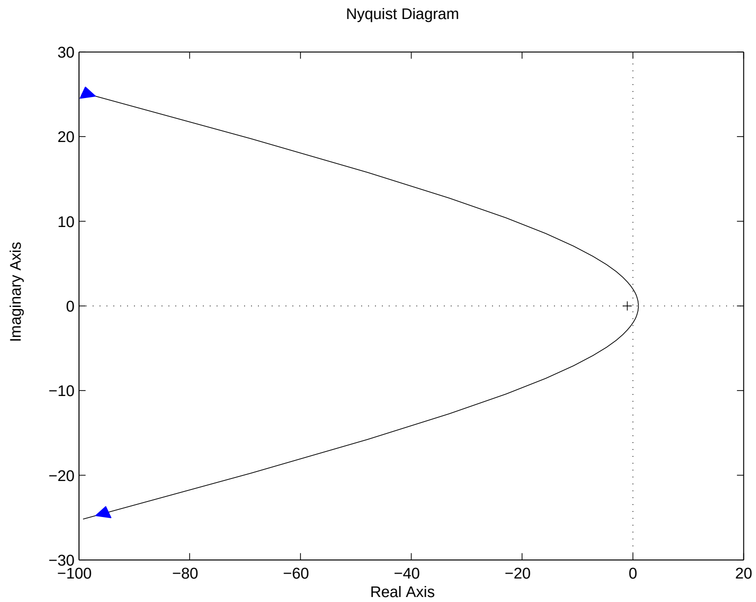

ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:




Un primo dettaglio del diagramma di Nyquist in un intorno dell'origine è:




un secondo dettaglio (da cui si vede che per $\omega$ tendente a $\pm\infty$ il diagramma tende al punto 1) è:




$G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 0$. Riportando il diagramma di Nyquist al finito, attraverso il percorso di Nyquist modificato, e osservando che il diagramma di Nyquist circonda il punto critico e compie due giri in verso orario, si deduce che $N = -2$ e quindi $n_{W+} = 2$. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha due poli a parte reale positiva.

**Esercizio 2.** i) [3 punti] Posto

$$d(s) = (s-1)(s+2)^2 = s^3 + 3s^2 - 4 \qquad n(s) = s^2 + 1,$$

la funzione di trasferimento $W(s)$ è descritta, al variare di $K$ in $\mathbb{R}$, da

$$W(s) = \frac{Kn(s)}{d(s) + Kn(s)}.$$

Essendo $n(s)$ e $d(s)$ coprimi tra loro, anche la precedente rappresentazione della $W(s)$ è coprima e quindi lo studio della stabilità BIBO si riconduce allo studio della collocazione, al variare di $K$, degli zeri del polinomio

$$d(s) + Kn(s) = (s^3 + 3s^2 - 4) + K(s^2 + 1) = s^3 + (3 + K)s^2 + (K - 4).$$

Ora è immediato verificare che il coefficiente del termine di grado 1 è nullo per ogni valore di $K$, e questo ci dice che il polinomio in questione non è mai di Hurwitz e quindi il sistema retroazionato non è mai BIBO stabile. Andiamo a studiare attraverso la tabella di Routh la collocazione dei poli della $W(s)$ al variare di $K$. Si trova:

$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & 0 \\
2 & 3+K & K-4 \\
1 & \dfrac{4-K}{3+K} & 0 \\
0 & K-4 & 0
\end{array}$$

Ora, il polinomio $d(s) + Kn(s)$ potrebbe essere Hurwitz se e solo se le seguenti diseguaglianze fossero simultaneamente verificate:

$$\begin{cases} 3+K > 0 \\ \frac{4-K}{3+K} > 0 \\ K-4 > 0. \end{cases}$$

Chiaramente, non esiste nessun valore di $K$ per cui ciò accada. Notiamo che gli unici valori di $K$ per cui la tabella di Routh non giunge a compimento sono $K = -3$ e $K = 4$. Distinguiamo allora i seguenti intervalli di valori:

- $K < -3$;
- $-3 < K < 4$;
- $K > 4$.

Per $K < -3$ la prima colonna della tabella presenta una variazione (i segni dei coefficienti in prima colonna sono: $+, -, -, -$) e quindi il polinomio ha una radice positiva; per $-3 < K < 4$ la prima colonna della tabella presenta una variazione (i segni dei coefficienti in prima colonna sono: $+, +, +, -$) e quindi il polinomio ha una radice reale positiva; infine per $K > 4$ la prima colonna della tabella presenta due variazioni (i segni dei coefficienti in prima colonna sono: $+, +, -, +$) e quindi il polinomio ha due radici a parte reale positiva.

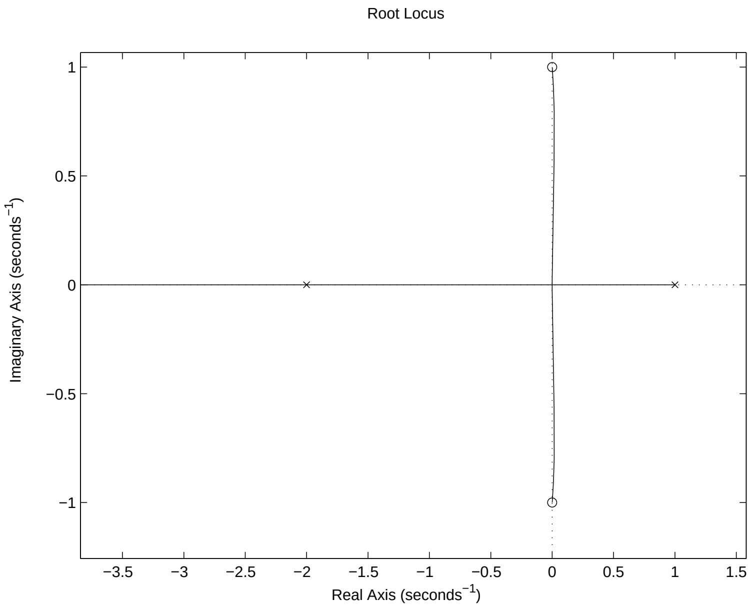
ii) [4 punti] L'asintoto è la semiretta reale negativa, mentre l'equazione dei punti doppi porge

$$s(s+2)(s^2-2s+5)=0$$

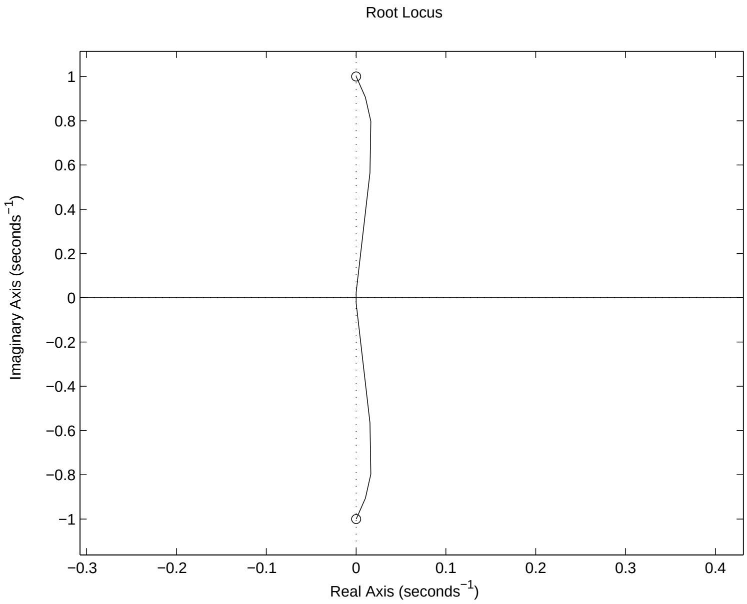
da cui i punti doppi $s=0$ ($K=4$) e $s=-2$ (punto doppio di partenza, $K=0$), mentre il polinomio ha radici complesse (non accettabili essendo $G(s)$ di grado 3, inferiore a 4). Studiando le intersezioni con l'asse immaginario $s=i\omega$ si trova

$$i\omega^3+(4+3\omega^2)+K(\omega^2-1)=0 \;\Rightarrow\; \omega=0,\; K=4$$

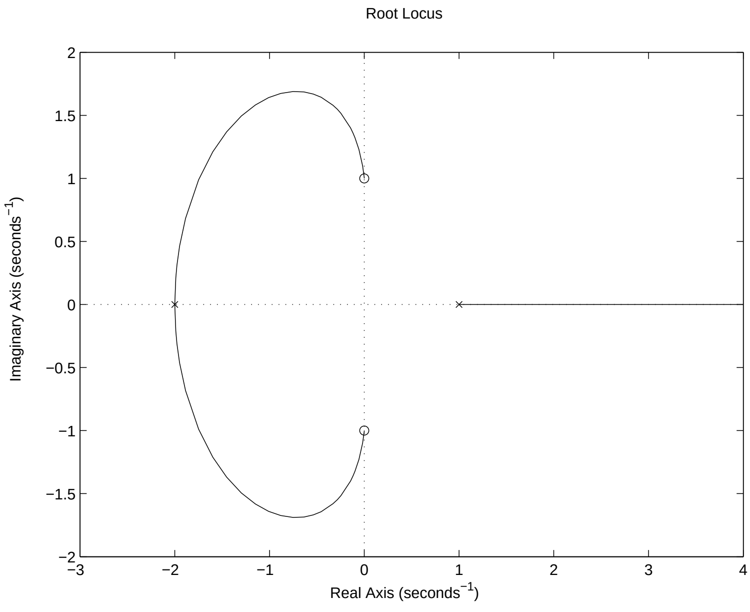
per cui l'unica intersezione avviene nel punto doppio $s=0$. A questo punto, sappiamo che i due rami che dal punto doppio si dirigono verso gli zeri $\pm i$ non intersecano ulteriormente l'asse immaginario, e quindi tali rami stanno completamente a destra oppure a sinistra dell'asse immaginario. Ma dal punto precedente, sappiamo che per nessun valore di $K$, e quindi in particolare per nessun valore di $K>0$, c'è stabilità BIBO. Di conseguenza i due rami devono essere contenuti nel semipiano reale positivo. Il luogo è illustrato in figura




e un suo dettaglio, da cui si vede che i due rami complessi sono interamente collocati nel semipiano reale positivo, appare nella seguente figura:



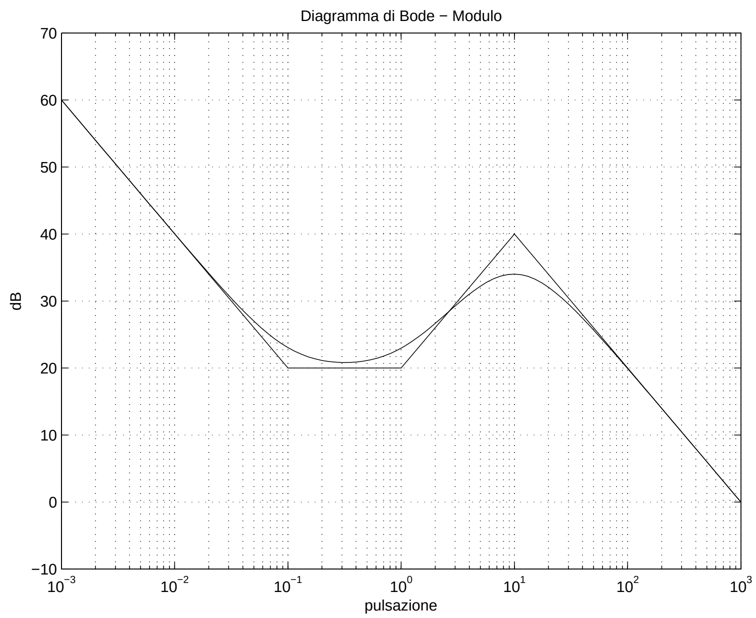

iii) [2.5 punti] Il luogo negativo non ha né punti doppi né intersezioni con l'asse immaginario, in base all'analisi precedente, e l'asintoto è la semiretta reale positiva, da cui il luogo in figura, che dimostra l'instabilitá anche per ogni $K < 0$:

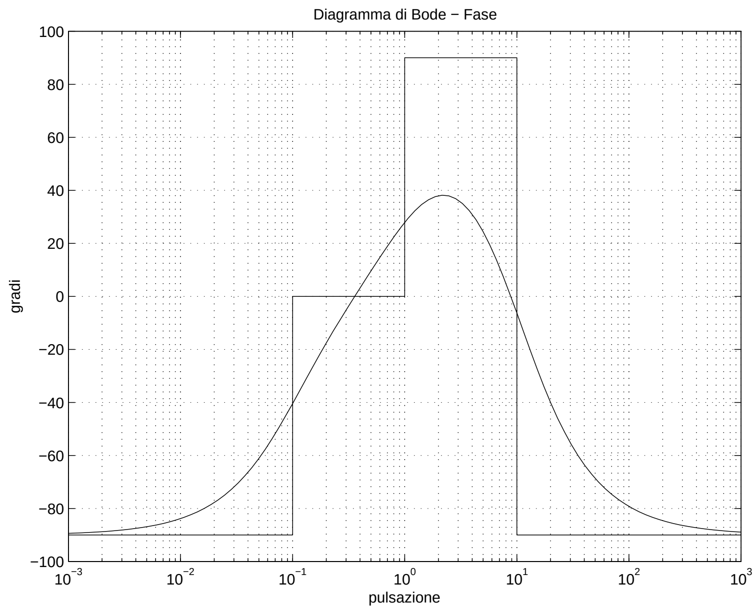



**Esercizio 3.** [6.5 punti] Il requisito sul tipo richiede l'introduzione di un polo nell'origine. Il vincolo sull'errore di regime permanente impone

$$e_{rp}^{(2)} = \frac{1}{K_B(C)K_B(G)} = \frac{1}{0.1K_B(C)} = 1$$

da cui segue $K_B(C) = 10$. Prendiamo $C'(s) = \frac{10}{s}$. I diagrammi di Bode di $\tilde{G}(s) = C'(s)G(s)$ sono i seguenti:

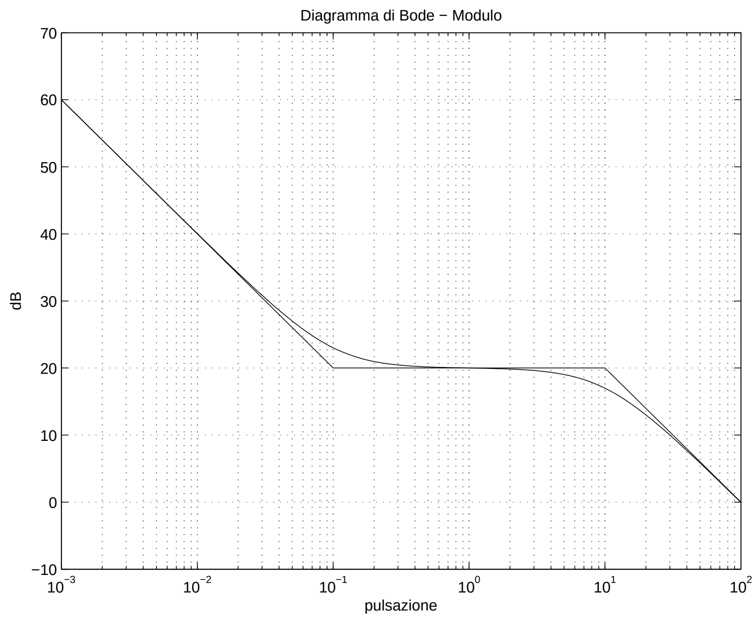


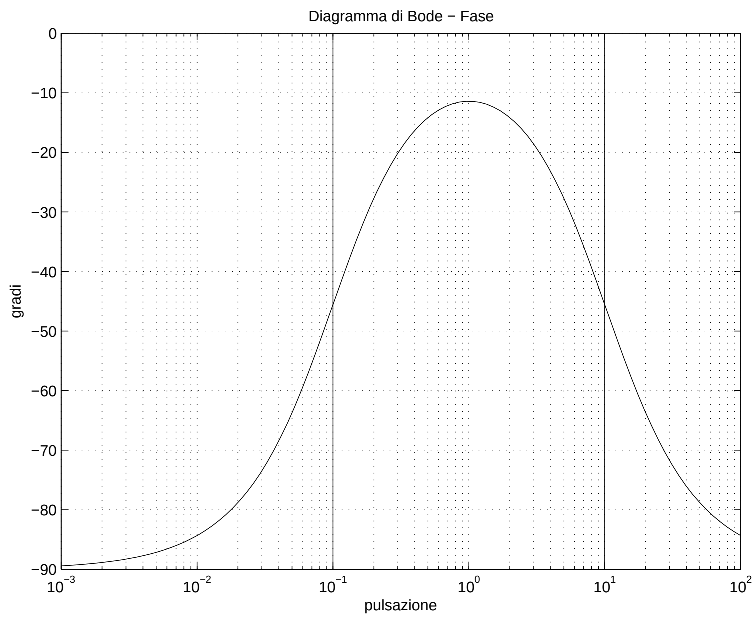




Sintesi di $C_1(s)$: Si trova che la pulsazione di attraversamento $\omega_A$ di $C'(j\omega)G(j\omega)$ è $10^3$ rad/s; pertanto $\omega > \omega_A^* = 100$ rad/s, mentre $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $90° \approx m_\psi(\omega_A^*) = m_\psi^* = 90°$. Saremmo tentati di modificare il guadagno di Bode, ma in tal modo contravverremmo al vincolo prima imposto sull'errore di regime permanente e quindi su $K_B$. Possiamo allora applicare un'azione attenuatrice in modo da abbassare il diagramma delle ampiezze di 20 dB, di modo che la pulsazione di attraversamento diventi $\omega_A^* = 100$ rad/s senza abbassare la fase in corrispondenza a tale pulsazione. A tale risultato possiamo giungere con una rete ritardatrice con coppia polo-zero distante una decade, che per comodità conviene allocare in modo che avvenga una doppia cancellazione zero-polo (di fattori stabili). Infatti ricorrendo a:

$$C"(s) = \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + s} \Rightarrow C_1(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + s}$$

la pulsazione di attraversamento diventa esattamente 100 rad/sec ed il margine di fase rimane di 90°. I seguenti diagrammi di Bode confermano che $C_1(s)$ rispetta le specifiche (e che è stabilizzante in base al Criterio di Bode).




Sintesi di $C_2(s)$: In questo caso $\omega < \omega_A^* = 10000$ rad/s, mentre $m_\psi(\omega_A^*) := 180° + \arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ soddisfa $90° \approx m_\psi(\omega_A^*) = m_\psi^* = 90°$. Ancora una volta, non possiamo modificare il guadagno di Bode e quindi possiamo conseguire il risultato desiderato attraverso una rete anticipatrice che alzi il modulo di 20 dB. Una possibile rete (che introduce un'unica cancellazione zero-polo) è la seguente:

$$C\text{''}(s) = \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{100}} \;\Rightarrow\; C_2(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + \frac{s}{100}}.$$

I diagrammi di Bode di $C_2(j\omega)G(j\omega)$ vengono omessi per brevità.

**Teoria.** [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 160 e successive.