



Algebra Lineare e Geometria

16 giugno 2020

Esercizio 1

Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 0, 3)$, $u_2 = (1, 4, -3, 3)$, $u_3 = (1, -2, 1, 1)$ e sia W il sottospazio di \mathbb{R}^4 di equazioni $3x_1 + x_3 = 0$, $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

- (a) Si trovi una base di U e una base di W .
- (b) Si scriva un sistema di equazioni lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 che abbia U come insieme delle soluzioni.
- (c) Si trovi una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.
- (d) Si dica se esiste un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus Z = \mathbb{R}^4$ e $W \oplus Z = \mathbb{R}^4$. Se tale Z esiste se ne scriva una base.

Esercizio 2

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- (b) Sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 1)$ e $u_2 = (2, 1, 0)$ e sia $g: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione definita ponendo $g(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di g rispetto alla base $\{u_1, u_2\}$ di U e alla base canonica del codominio. La funzione g è iniettiva? è suriettiva?
- (c) Sia $w_\alpha = (3, \alpha, -1)$. Determinare per quale valore di α l'immagine inversa $f^{-1}(w_\alpha)$ è diversa dall'insieme vuoto.
- (d) È possibile stabilire, senza calcolare autovalori e autovettori, se A è diagonalizzabile? Perché?

Esercizio 3

Nello spazio affine \mathbb{A}^3 sono assegnati i punti $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 4, 1)$, $C = (-1, 1, 2)$.

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per A , B e C .
- (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta r ortogonale al piano π e passante per il baricentro G del triangolo ABC .
- (c) Determinare il punto Q , simmetrico di $P = (6, -4, 5)$ rispetto al piano π .
- (d) Scrivere le equazioni parametriche della retta s contenuta nel piano π , passante per A e di minima distanza da P .