Quiz 6

Question **1**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare il volume di

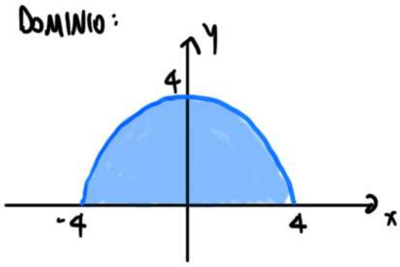
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4^2, y \geq 0,\ 0 \leq z \leq y + 3y^2\}$$

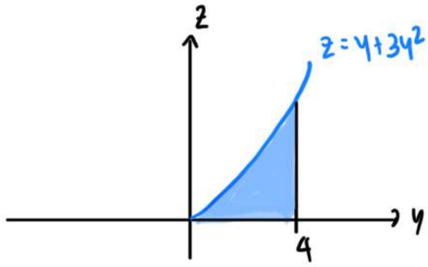
Answer:

Check

CALCOLARE IL VOLUME DI $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4^2, y \geq 0, 0 \leq z \leq y+3y^2\}$

SOL. DISEGNO IL DOMINIO:





IL DOMINIO E' SEMPLICE RISPETTO A x, y $\Rightarrow$ INTEGRO PER FILI

$$\boxed{\int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dx\, dy}$$

LA FORMULA DEL VOLUME:

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\, dy\, dz} \Rightarrow \int_D \left[\int_0^{y+3y^2} 1\, dz \right] dx\, dy = \int_D (3y^2+y)\, dx\, dy$$

ORA PASSO IN COORDINATE POLARI:

$$\boxed{\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_D \rho(\cos t, \sin t)\rho\, d\rho\, dt}$$

$(x,y) \longmapsto (\rho\cos t, \rho\sin t) = 3\rho^2\sin^2(t) + \rho\sin t$

DOMINIO: $0 \leq \rho \leq 4$, $\theta \in [0,\pi]$ [semicerchio per $y \geq 0$ di $C(0,0)$ e $r = 4$]

$$\Rightarrow \int_0^\pi \int_0^4 (3\rho^2\sin^2(t) + \rho\sin t)\rho\, d\rho\, dt = \int_0^\pi \int_0^4 3\rho^3\sin^2 t + \rho^2\sin t\, d\rho\, dt$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{3}{4}\rho^4\sin^2 t + \frac{\rho^3}{3}\sin t \right]_0^4 = \int_0^\pi 3\cdot 4^3\sin^2(t) + \frac{4^3}{3}\sin t\, dt$$

$$= 3\cdot 4^3 \int_0^\pi \sin^2(t) + \frac{4^3}{3}\int_0^\pi \sin(t) = 3\cdot 4^3\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin t\cos t\right]_0^\pi + \frac{4^3}{3}\left[-\cos(t)\right]_0^\pi$$

$$= 3\cdot 4^3\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{4^3}{3}[2] = 344.2595$$

V

Question 2

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Si consideri il triangolo T di vertici $(1, 2)$, $(5, 2)$, $(3, 5)$ sul piano xy. Calcolare il volume del solido Ω che si ottiene facendo ruotare tale triangolo attorno all'asse delle x.

Answer:

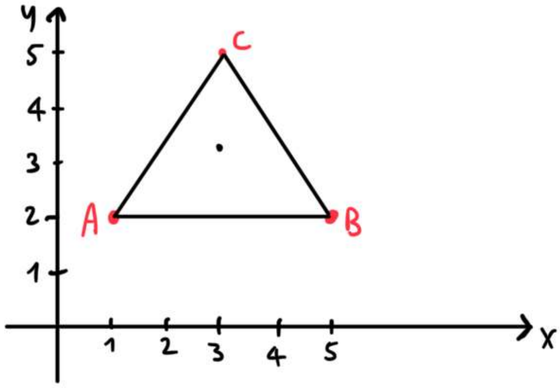
Check

$A = (1,2)$

$B = (5,2)$

$C = (3,5)$

VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE OTTENUTO RUOTANDO T INTORNO ALL'ASSE x?



SOL. 1. TROVO LE RETTE PASSANTI PER AC E BC

$\boxed{AC}$: $m = \dfrac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \dfrac{2-5}{1-3} = \dfrac{3}{2}$

$q: y = \frac{3}{2}x + q \rightarrow y - \frac{3}{2}x = q \xrightarrow{\text{PASSAGGIO PER A}} 2 - \frac{3}{2} = q \rightarrow q = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}$

$\boxed{BC}$: $m = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{5-2}{3-5} = -\dfrac{3}{2}$

$q: y + \frac{3}{2}x = q \rightarrow \xrightarrow{\text{PASSAGGIO PER B}} 5 + \frac{3}{2} \cdot 2 = q \rightarrow q = 8$ $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 8}$

ORA USO LA FORMULA DEL VOLUME DI SOLIDI DI ROTAZIONE (PAPPO - GULDINO)

$$\boxed{\begin{aligned} Vol(\Omega) &= 2\pi \cdot x_D \cdot Area(D) \\ &= 2\pi \int_D x \, dx \, dy \end{aligned}}$$

DIVIDO IL TRIANGOLO IN 2 PARTI:

- TROVO IL DOMINIO DI METÀ TRIANGOLO: $D = \{1 \le x \le 3,\ 2 \le y \le \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\}$

  È SEMPLICE RISPETTO A x, USO LA FORMULA PER IL VOLUME:

$Vol(\Omega) = 2\pi \cdot x_D \cdot Area(D)$. L'AREA DEL TRIANGOLO È $\frac{b \cdot h}{2} = 6$, DEVO TROVARE x_D:

$$x_D = \frac{\int_D x \, dx}{Area(D)} = \frac{\int_1^5 x \, dx}{6} = \frac{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^5}{6} = \frac{\frac{25}{2} - \frac{1}{2}}{6} = 2$$

QUINDI, $x_D = 2+1 = 3$

↳ IL TRIANGOLO È TRASLATO DI 1 RISPETTO ALL'ASSE y

$\Rightarrow Vol(\Omega) = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 = 113.0973$ ✓

Question 3

Not complete

Marked out of 1.00

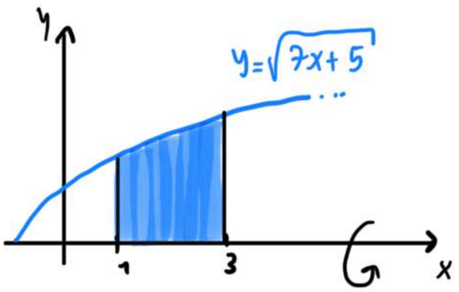
Flag question

Sia $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=\sqrt{7x+5}$. Calcolare il volume del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare il trapezoide di f attorno all'asse delle x.

Answer:

Check

$F:[1,3]\to\mathbb{R} \quad , f(x)=\sqrt{7x+5}$



CALCOLARE VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE X

SOL. IL DOMINIO E': $D=\{x\in[1,3],\ 0\le y\le\sqrt{7x+5}\}$

E' SEMPLICE RISPETTO A X. USO LA

FORMULA PER IL VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE X (PAPPO - GULDINO):

$$\boxed{Vol(\Omega)=2\pi\cdot x_D\cdot Area(D)=2\pi\frac{\int y\,dy\,dx}{Area(D)}\cdot Area(D)=2\pi\int y\,dy\,dx}$$

PERCHE' $\int y\,dy\,dx$? LA FORMULA DI PAPPO-GULDINO E' $Vol(\Omega)=2\pi\cdot x_D\cdot Area(D)$, DOVE x_D E' LA DISTANZA DEL BARICENTRO DI D DALL'ASSE DI ROTAZIONE. IN QUESTO CASO, POICHE' RUOTIAMO ATTORNO ALL'ASSE X, LA DISTANZA DEL BARICENTRO DALL'ASSE X E' DATA DALLA QUOTA y.

PERCHE' INTEGRIAMO IN $dy\,dx$? PERCHE' LA NOSTRA "AREA" CHE FACCIAMO RUOTARE STA SUL PIANO XY

$$\Rightarrow 2\pi\int_1^3\int_0^{\sqrt{7x+5}} y\,dy\,dx = 2\pi\int_1^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{7x+5}}dx = 2\pi\int_1^3\frac{7x+5}{2}\,dx$$

$$=\pi\int_1^3 7x+5\,dx = \pi\left[\frac{7x^2}{2}+5x\right]_1^3=\pi(46.5-8.5)=119.3805$$

✓

Question **4**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Determinare l'ascissa del baricentro di

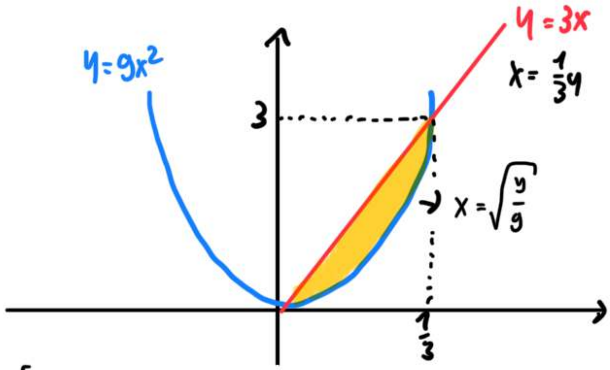
$$D = \{(x, y) : 9x^2 \leq y \leq 3x\}$$

Answer:

Check

$D = \{(x,y) : 9x^2 \le y \le 3x\}$

CALCOLARE X_D



[N.B.: IL DISEGNO NON E' IN SCALA]

SOL. L'ASCISSA DEL BARICENTRO SI CALCOLA CON

$$\boxed{X_D = \frac{\int_D x \, dx \, dy}{\text{Area}(D)}}$$

$\Rightarrow$ IL DOMINIO E' SEMPLICE RISPETTO A X

$D = \{ x \in [0, \frac{1}{3}], \ 9x^2 \le y \le 3x \}$

$\left[\begin{array}{l} 9x^2 = 3x \rightarrow x = 0 \wedge x = \frac{1}{3} \\ \text{PER } x = \frac{1}{3}, \ y = 3 \end{array} \right]$

LO RISCRIVO RISPETTO A Y:

$D = \{ y \in [0,3], \sqrt{\frac{y}{9}} \le x \le \frac{1}{3} y \}$

SICCOME D E' SEMPLICE ANCHE RISPETTO A Y: $\boxed{\int_D x \, dx \, dy = \int_D x \, dy \, dx}$

I: CALCOLO $\int_D x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{9x^2}^{3x} x \, dy \, dx = \frac{1}{108}$

II: TROVO L'AREA (D): $\int_D 1 \, dx \, dy = \int_D 1 \, dy \, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{9x^2}^{3x} 1 \, dy \, dx = \frac{1}{18}$

$\rightarrow X_D = \frac{\text{(I)} \ \int_D x \, dx \, dy}{\text{(II)} \ \text{Area}(D)} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{1}{18}} = \frac{18}{108} = 0.1666$ ✓

Question 5

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Siano $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le \frac{1}{3}, 0 \le z \le 7, 12x^2 \le y \le \frac{12}{9}\}$ e $f(x,y,z) = xze^{zy^2}$. L'integrale di f su Ω si può ricondurre all'integrale di una funzione $g(z)$ della terza variabile z su $[0,7]$. Calcolare $g(1)$.

Answer:

Check

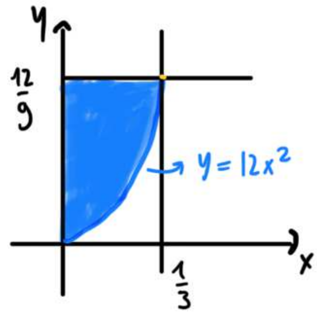
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le \tfrac{1}{3},\ 0 \le z \le 7,\ 12x^2 \le y \le \tfrac{12}{9}\}$$

$$F(x,y,z) = xz\,e^{zy^2}$$

SOL. DEVO CALCOLARE $g(z)$, CIOÈ CALCOLARE L'INTEGRALE DI f SU x E SU y

$$\int_0^7 \underbrace{\int_{12x^2}^{\frac{12}{9}} \int_0^{\frac{1}{3}} xz\,e^{zy^2}\,dx\,dy}_{\text{QUESTA È LA MIA } g(z)}\,dz$$

COSÌ PERÒ L'INTEGRALE NON È DIRETTAMENTE CALCOLABILE TRAMITE FORMULE DI RIDUZIONE. DEVO RISCRIVERE IL DOMINIO IN MODO SEMPLICE



$$y = 12x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{12}}$$

$$\Omega' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0,7],\ y \in [0, \tfrac{12}{9}],\ 0 \le x \le \sqrt{\tfrac{y}{12}}\}$$

ORA POSSO FINALMENTE CALCOLARE L'INTEGRALE ITERATO:

$$\Rightarrow \int_0^7 \int_0^{\frac{12}{9}} \int_0^{\sqrt{\frac{y}{12}}} xz\,e^{zy^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^7 \int_0^{\frac{12}{9}} z\,e^{zy^2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{y}{12}}} dy\,dz$$

$$= \int_0^7 \int_0^{\frac{12}{9}} \frac{y}{24} z e^{y^2} dy\,dz = \int_0^7 \frac{1}{48} \int_0^{\frac{12}{9}} 2yz\,e^{zy^2}\,dy\,dz = \int_0^7 \frac{1}{48}\left[e^{y^2 z}\right]_0^{\frac{12}{9}} dz$$

$$= \int_0^7 \frac{1}{48}\left(e^{\frac{144}{81}z} - e^0\right) dz = \int_0^7 \underbrace{\frac{1}{48}\left[e^{\frac{16}{9}z} - 1\right]}_{\text{HO TROVATO } g(z)\text{. ORA CALCOLO } g(1)} dz$$

$$g(z) = \frac{1}{48}\left(e^{\frac{16}{9}z} - 1\right)$$

$$\Rightarrow g(1) = \frac{1}{48}\left(e^{\frac{16}{9}} - 1\right) \approx 0.1024$$

Question **6**

Correct

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f(x, y, z)$ funzione continua su $\mathbb{R}^3$. L'integrale iterato

$$\int_{-9}^{9} \int_{-\sqrt{9^2-x^2}}^{\sqrt{9^2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{50-(x^2+y^2)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

è l'integrale di f su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$?

Dato che il quiz accetto solo risposte numeriche:

SI: Rispondere 1

NO: Rispondere 0

Answer: 0

Check

SIA: $F(x,y,z)$ FUNZIONE CONTINUA SU $\mathbb{R}^3$. L'INTEGRALE ITERATO:

$$\int_{-9}^{9} \int_{-\sqrt{9^2-x^2}}^{\sqrt{9^2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{50-(x^2+y^2)} F(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

E' L'INTEGRALE DI F SU UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^3$?

SOL. NO, PERCHE':

IL DOMINIO E': $D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -9 \le x \le 9 \ , \ -\sqrt{9^2-x^2} \le y \le \sqrt{9^2-x^2}, \ x^2+y^2 \le z \le 50-(x^2+y^2) \}$

QUESTO DOMINIO E' SEMPLICE RISPETTO A xy, PERCHE' ($\rightarrow$ DEFINIZIONE 7.2): $\alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)$

PER L'OSSERVAZIONE 2, DEVE ESSERE OBBLIGATORIAMENTE

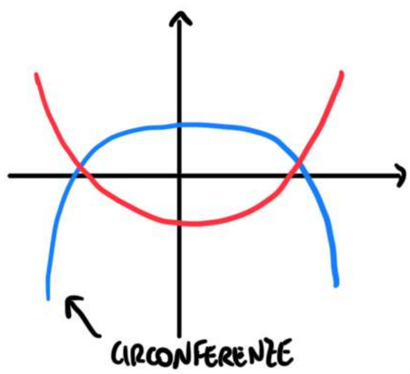
$\alpha(x,y) \le \beta(x,y)$ PER OGNI $(x,y) \in D$

QUINDI, L'INTEGRALE E' IL VOLUME DI F SU UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^3$ SE LA SUPERFICIE INFERIORE E SUPERIORE NON SI INTERSECANO SU $\{ (x,y) : x^2+y^2 \le z \le 50 - (x^2+y^2) \}$

MA, SE $(x,y) = (9,0)$, ALLORA:

SUP. INFERIORE $\longrightarrow$ $x^2+y^2 = 81$

SUP. SUPERIORE $\longrightarrow$ $50-(x^2+y^2) = 50-81 = -31 < 0$



$\Rightarrow$ VI SONO ALCUNI PUNTI DI (x,y) TALI CHE, LA CORRISPONDENTE PROIEZIONE SULL'ASSE z DELL'ESTREMO INFERIORE E' MAGGIORE DELL'ESTREMO SUPERIORE. QUINDI, LE SUPERFICI INFERIORI E SUPERIORI SI INTERSECANO. TALE INTEGRALE QUINDI NON RAPPRESENTA IL VOLUME DI UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^3$

Question 7

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare il volume di $\Omega = \{(x, y, z) : \, x^2 + y^2 \leq 78 : \, x^2 + y^2 \leq z \leq 6x + 4y\}$.

Answer:

Check

CALCOLARE IL VOLUME DI $\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 78, \quad x^2+y^2 \leq z \leq 6x+4y$

Sol. IL VOLUME E' DATO DA:

$$\boxed{Vol(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\, dy\, dz}$$

$$\Omega = \{x^2+y^2 \leq 78, \underbrace{x^2+y^2 \leq z \leq 6x+4y}_{2}\}$$

2: $x^2+y^2 \leq 6x+4y \rightarrow x^2+6x+9-9+y^2-4y+4-4 \leq 0$

$\rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2 \leq 13$

$$\Rightarrow Vol(\Omega) = \int_D \left[\int_{x^2+y^2}^{6x+4y} 1\, dz\right] dx\, dy = \int_D \left(6x+4y-x^2-y^2\right) dx\, dy = -\int_D x^2+y^2-6x-4y \; dx\, dy$$

$$= \int_D \left[(x-3)^2+(y-2)^2-13\right] dx\, dy$$

ORA FACCIO UN CAMBIO VARIABILI IN COORDINATE POLARI: $\int_E F(\rho\cos t, \rho\sin t)\, \rho\, d\rho\, dt$

$E = \{0 \leq \rho \leq \sqrt{13}, \; t \in [0, 2\pi]\}$

(IGNORO LA TRASLAZIONE PERCHE' E' UN VOLUME)

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{13}} \left[-\rho^2+13\right]\rho \; d\rho\, dt = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{13}} -\rho^3+13\rho\, d\rho\, dt = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{\rho^4}{4}+\frac{13}{2}\rho^2\right]_0^{\sqrt{13}}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{13^2}{4}+13\cdot\frac{13}{2}\right] dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{169}{4}\right) dt = 2\pi\,\frac{169}{4} = 265.4645$$

Question 8

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

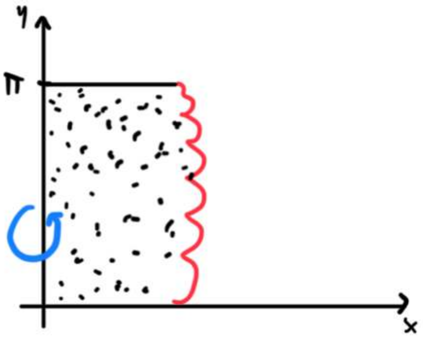
In $\mathbb{R}^3$ sia D il sottoinsieme del piano xy definito da
$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4 + \cos(10y),\ y \in [0,\pi]\}$.

Calcolare il solido ottenuto ruotando D di 2π attorno all'asse y.

Answer:

Check

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4 + \cos(10y),\ y \in [0,\pi]\}$$



SOL. USO LA FORMULA PER IL VOLUME DI SOLIDI DI ROTAZIONE (PAPPO-GULDINO)

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\Omega) = 2\pi \cdot x_0 \cdot \mathrm{Area}(D) = 2\pi \frac{\int_D x \, dx\, dy}{\mathrm{Area}(D)} \cdot \mathrm{Area}(D) = 2\pi \int_D x \, dx\, dy}$$

$$\rightarrow 2\pi \int_0^{\pi} \int_0^{4+\cos(10y)} x \, dx\, dy = 2\pi \int_0^{\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4+\cos(10y)} dy = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{[4+\cos(10y)]^2}{2} dy$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left[\cos^2(14y) + 4\cos(14y) + 4\right] dy = 162.8484$$

Question 9

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

In $\mathbb{R}^3$ un sottoinsieme D del semipiano $xz, x \geq 0$ viene fatto ruotare attorno all'asse z: si ottiene un solido di volume pari a 3. Determinare l'area di D sapendo che D è simmetrico rispetto alla retta $x = 8$ del piano xz.

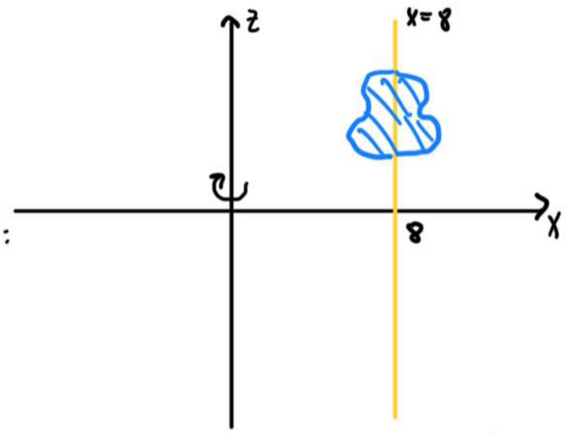
Answer:

Check

SIA $D \subseteq XZ$, $X \geq 0$, SIMMETRICO RISP. RETTA $X = 8$

$Vol(\Omega) = 3$

$Area(D) = ?$



SOL. IL VOLUME DI UN SOLIDO DI ROTAZIONE (PAPPO-GULDINO):

$$\boxed{Vol(\Omega) = 2\pi \cdot X_D \cdot Area(D)}$$

POICHÉ D È SIMMETRICO RISPETTO ALLA RETTA $X = 8$, L'ASCISSA DEL BARICENTRO X_D È PER FORZA $= 8$

$$\rightarrow Vol(\Omega) = 2\pi \cdot X_D \cdot Area(D)$$

$$\rightarrow Area(D) = \frac{Vol(\Omega)}{2\pi \cdot X_D} = \frac{3}{2\pi \cdot 8} = 0.0596$$ ✓

Question 10

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

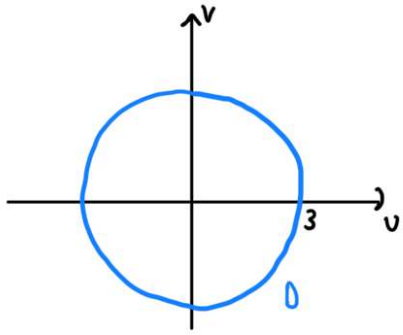
Calcolare l''area della superficie parametrica

$$p(u,v) = (6(u+v), 4v, 6u) \quad u^2 + v^2 \leq 9$$

Answer:

Check

$P(u,v) = \left(6(u+v),\ 4v,\ 6u\right),\quad u^2+v^2 \leq 9$



SOL. $D = \{u^2+v^2 \leq 9\}$

USO LA FORMULA DELL'AREA DI UNA SUPERFICIE

$$\boxed{\text{Area}(P) = \int_D |P_u(u,v) \times P_v(u,v)|\, du\, dv}$$

1) CALCOLO L'ELEMENTO D'AREA $|P_u(u,v) \times P_v(u,v)|$

$P(u,v) = (6u+6v,\ 4v,\ 6u)$

$P_u = (6,0,6)\ ,\quad P_v = (6,4,0)$

$$P_u(u,v) \times P_v(u,v) = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 6 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} = e_1(-24) + e_2(36) + e_3(24) = (-24,36,24)$$

$$\rightarrow |P_u(u,v) \times P_v(u,v)| = |(-24,36,24)| = \sqrt{24^2+36^2+24^2} = 12\sqrt{17}$$

2) SOSTITUISCO: (E CAMBIO IN COORDINATE POLARI)

$$\rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \rho\, 12\sqrt{17}\, d\rho\, dt = 1398.9367 \quad ✓$$

Question **11**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Calcolare l'area della superficie $z = 5 + 8y + \frac{1}{6}x^6$, $0 \leq y \leq x^9$, $0 \leq x \leq 1$.

Answer:

Check

$z = 5 + 8y + \frac{1}{6}x^6 \quad , \quad 0 \le y \le x^9 \,,\; 0 \le x \le 1$

SOL. L'ELEMENTO D'AREA DI UNA SUPERFICIE CARTESIANA E' DATO DA (ESEMPIO 8.7 PAG. 164)

$$\boxed{|P_x \times P_y(x,y)| = \sqrt{1 + |\nabla F(x,y)|^2}}$$

1) CALCOLO $|P_x \times P_y|$:

$\nabla F(x,y) = (x^5, 8)$

$\rightarrow |\nabla F(x,y)| = \sqrt{x^{10} + 64}$

$\rightarrow |P_x \times P_y(x,y)| = \sqrt{1 + |\nabla F(x,y)|^2} = \sqrt{1 + x^{10} + 64} = \sqrt{x^{10} + 65}$

2) TROVO L'AREA USANDO LA (SOLITA) FORMULA DELL'AREA:

$$\boxed{Area(z) = \int_D |P_x \times P_y(x,y)|\, dx\, dy = \int_D \sqrt{1 + |\nabla F(x,y)|^2}\, dx\, dy}$$

$$\rightarrow \int_D \sqrt{x^{10} + 65} = \int_0^1 \int_0^{x^9} \sqrt{x^{10} + 65}\, dy\, dx = \int_0^1 x^9 \sqrt{x^{10} + 65}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} \int_0^1 \frac{3}{2} \cdot 10 x^9 \sqrt{x^{10} + 65}\, dx = \frac{1}{15} \cdot \left[(x^{10} + 65)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{15}\left(66^{\frac{3}{2}} - 65^{\frac{3}{2}} \right) = 0.8093$$

✓

Question 12

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Si consideri il solido Ω ottenuto ruotando il disco di centro $(15, 0)$ e raggio 8 del piano xy attorno all'asse y. Qual è il massimo valore di y affinché

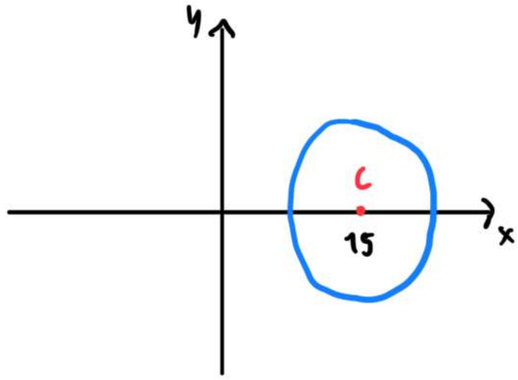
$$\left(\frac{11}{\sqrt{3}}, y, \sqrt{2/3} \times (11)\right) \in \Omega.$$

Answer:

Check

EQUAZIONE DEL DISCO: $(x-15)^2 + y^2 \leq 8^2$

MASSIMO VALORE DI y t.c. $\left(\frac{11}{\sqrt{3}}, y, 11\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \in \Omega$



SOL. E' UN TORO. L'EQUAZIONE DI UN TORO OTTENUTO RUOTANDO UN DISCO ATTORNO ALL'ASSE z E':

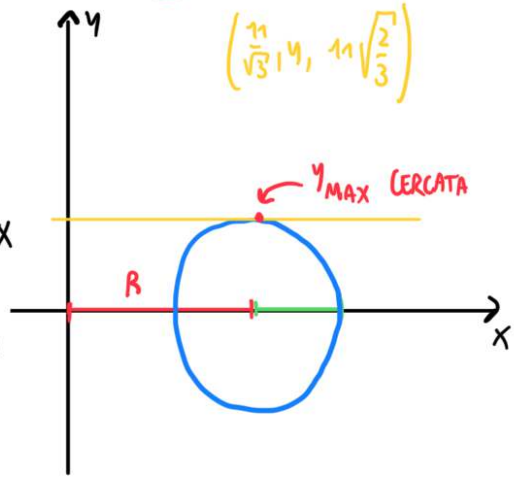
$$\boxed{\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2}$$

DOVE $R = 15$
$r = 8$

→ (ESEMPIO 8.15 p. 171)

NOI PERO' ABBIAMO UN TORO OTTENUTO RUOTANDO IL DISCO ATTORNO ALL'ASSE y. QUINDI DEVO SCAMBIARE y CON z

$$\rightarrow \left(15-\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 + y^2 = 64$$



NOTO CHE $\left(\frac{11}{\sqrt{3}}, y, 11\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ E' UNA RETTA PARALLELA ALL'ASSE X (HO 1 PARAMETRO LIBERO DI VARIARE, y). DEVO CAPIRE QUAL'E' IL PUNTO CON y MAGGIORE CHE INTERSECA IL TORO. PER FARLO DEVO RISOLVERE LA DISEQUAZIONE

$$\left(15-\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 + y^2 \leq 64$$

$$\rightarrow \left(15-\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 - 64 \leq y^2 \quad \rightarrow \quad -\left(15-\sqrt{x^2+z^2}\right) + 64 \leq y^2$$

2) ORA, SOSTITUISCO X, Z DELLA RETTA PER TROVARE LA y_{MAX} CERCATA:

$$\rightarrow y \geq \sqrt{-\left(15-\underbrace{\sqrt{\left(\frac{11}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(11\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}}_{=11}\right)^2 + 64} \quad \rightarrow y = 6.9282$$

✓