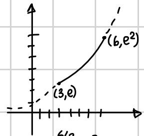
Quiz 1



1) $\{(3x, e^x) : x \in [1,2]\}$: è il sostegno di una curva (generica) ed il grafico di $e^{x/3}, x \in [3,6]$ $\rightarrow$

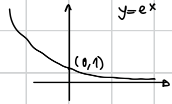
infatti per $x=1 \rightarrow (3, e^1)$ e per $x=2 \rightarrow (6, e^2)$ che sono gli estremi di $x=3 \rightarrow e^1$ e $x=6 \rightarrow e^{6/3} = e^2$

2) $f: [0,10] \rightarrow \mathbb{R}^2$ funzione di classe C^1 t.c. $f(1) = (4,4)$ e $f'(1) = (1,14)$. Stimare la somma delle due componenti di $f(1.08)$

$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \overset{\approx 0}{\sigma_{t_0}(t-t_0)}$

$f(1.08) \simeq f(1) + f'(1)(1.08-1) = (4,4) + (1,14)(0.08) = (4,4) + (0.08, 1.12) = (4.08, 5.12)$

La somma delle componenti di $f(1.08) \approx 4.08 + 5.12 = 9.20$



3) $\forall x \geq 0$, $L(x)$ è la lunghezza della curva espressa in coordinate polari da $\rho(t) = 2e^{-3t}, t \in [0, x]$. Calcolare $\lim_{x \to \infty} L(x)$

$L(x) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2}\, dt$

$L(x) = \int_a^b \sqrt{(-6e^{-3t})^2 + (2e^{-3t})^2}\, dt = \int_0^x \sqrt{36e^{-6t} + 4e^{-6t}}\, dt = \int_0^x \sqrt{40e^{-6t}}\, dt = \sqrt{40} \int_0^x \sqrt{e^{-6t}}\, dt = \sqrt{40} \int_0^x (e^{-6t})^{1/2} dt = \sqrt{40} \int_0^x e^{-3t} dt$

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{40} \left[-\frac{1}{3} e^{-3t} \right]_0^\infty = \lim_{x \to \infty} -\frac{\sqrt{40}}{3} \left[e^{-\infty} - e^0 \right] = -\sqrt{40}/3\, [0-1] = \sqrt{40}/3 = 2.1081$

4) Calcolare la lunghezza di $f(t) = (3\cos t, 3\sin t, 5t)$, $t \in [-1,1]$

$L(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$

$\int_{-1}^1 |(-3\sin t, 3\cos t, 5)|\, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 25}\, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{9(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) + 25}\, dt = \int_{-1}^1 \sqrt{34}\, dt = \sqrt{34}\, [t]_{-1}^1 = \sqrt{34} - (-\sqrt{34}) = 2\sqrt{34} = 11.6619$

5) Calcolare la lunghezza di $h(t) = 2t^{3/2}, t \in [1,5]$

$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + h'(t)^2}\, dt$

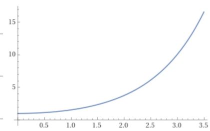
$L(f) = \int_1^5 \sqrt{1 + (3t^{1/2})^2}\, dt = \int_1^5 \sqrt{1 + 9t}\, dt$ posto $\begin{cases} x = 1 + 9t \\ t = \frac{x}{9} + \frac{1}{9} \\ dt = \frac{1}{9} dx \end{cases}$ con nuovo intervallo di integrazione $[10, 46]$

$\int_{10}^{46} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{9} dx = 1/9 \int_{10}^{46} \left[2/3\, x^{2/3} \right]_{10}^{46} = 2/27 \left[46^{3/2} - 10^{3/2} \right] = 20.7677$

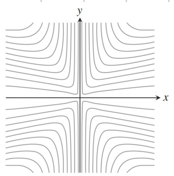
6) Calcolare la lunghezza del grafico della funzione $y = \cos(h)$, $x \in [0, 3.5]$. $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$L(x) = \int_0^{3.5} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$

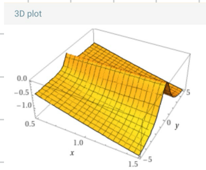
con $y'(x) = \sinh x$ ottengo $L(x) = \int_0^{3.5} \sqrt{1 + \sinh x^2}\, dx = \int_0^{3.5} \cosh x\, dx = [\sinh x]_0^{3.5} = 16.5426$

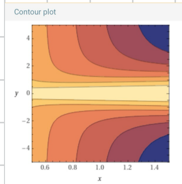


Quiz 2

1) 

Il grafico corrisponde alla funzione $f(x,y) = \frac{-xy^2}{x^2+y^2}$ con Wolphramalpha $\longrightarrow$





2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2-5y^2}$. Utilizzando stime asintotiche: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3xy)}{x^2-5y^2} \longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2-5y^2}$ per $(x,y)\to(0,0)$ $\sin(3xy) \approx 3xy$

Utilizzo la restrizione del dominio per le rette:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x(mx)}{x^2-5m^2x^2} = \frac{3mx^2}{x^2(1-5m^2)} = \frac{3m}{1-5m^2}$ $\longrightarrow$ il limite dipende da m, quindi $\nexists$ non esiste

3) Sia, $\forall t \in [0,2\pi]$ $D_t := \{(\rho\cos t, \rho\sin t) : \rho > 0\}$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall t \in [0,2\pi]$ si abbia $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y) = 3$. Allora $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 3$

NO! Se un limite esiste in un sottoinsieme di D, non è detto che esista in tutto D. Invece, se consideriamo una partizione finita di D, e il limite esiste in ogni sua partizione, allora il limite $\exists$ in tutto D.

4) $f(x,y) = \frac{2x^2-8y^2}{9x^2+4y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, c altrimenti.

Trovare c t.c. $\exists$ $\frac{df}{dt}$ in $(0,0)$ rispetto al vettore $(1,1)$

$\|u\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Il vettore non ha norma unitaria. $v = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0+(1/\sqrt{2})t,\, 0+(1/\sqrt{2})t) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\frac{6}{13} = -0.4615$

Si definisce derivata direzionale di $f(x,y)$ lungo la direzione $v = (v_1, v_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1,\, y+tv_2) - f(x,y)}{t}$$

5) Sia $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$. Si ha $f(3,3) = 1$. È vero che $f(x,y) \leq 1.000001$ in un intorno di $(3,3)$.

$f(3,3) = 1 < 1.0000001$ ed è f continua. Per il teorema della permanenza del segno vi è un intorno di $(3,3)$ sul quale $f(x,y) < 1.0000001$

QUIZ MOODLE_SETTIMANA 3

(1) 1) Una funzione differenziabile è di classe C^1 × → una funzione C^1 è differenziabile ma non sempre vale il viceversa

2) Una funzione che ammette derivate parziali in un punto è differenziabile su quel punto × → non è detto che le derivate parziali esistano in ogni direzione

3) Una funzione differenziabile in un punto p è continua in p ✓

4) Una funzione che ammette derivate parziali in p è continua in p × → $\exists$ funzioni che ammettono derivate parziali $\forall p$, ma che non sono continue

5) Una funzione $f: D \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $p \in D$ se e solo se $\nabla f(p)$ esiste ed è $\lim_{x \to p} f(x)-[f(p)+\nabla f(p)\cdot(x-p)]=0$ × → il limite corretto è: $\lim_{x \to p} \frac{f(x)-[f(p)+\nabla f(p)(x-p)]}{|x-p|}$

6) Una funzione di variabile reale derivabile in t_0 è differenziabile in t_0 ✓

(2) Sia $f(x,y)=\frac{4x^3}{x^2+y^2}$ fuori dall'origine, estesa per continuità nell'origine, calcolare, se esiste, $\partial_x f(0,0)$

Secondo la definizione di derivata direzionale è $\lim_{t\to 0} \frac{f(p+tx)-f(p)}{t}$. Per calcolare $\partial_x f(0,0)$ è necessario trovare il valore di $f(0,0)$ per continuità, ovvero $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

Per questo calcolo utilizzo la restrizione delle rette in coordinate polari.

Posto $(x,y)=(\rho\cos t, \rho\sin t)$, $\lim_{\rho \to 0} \frac{4\rho^3\cos^3 t}{\underbrace{\rho^2\cos^2 t+\rho^2\sin^2 t}_{\sin^2 t+\cos^2 t=1}} = 4\rho\cos^3 t \to 0$ per $\rho \to 0$

quindi $|g(\rho)-\rho| \leq \rho$ per $\rho \to 0$ quindi $g(\rho) \to 0 \Rightarrow g(0,0)=0$.

$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-g(0,0)}{t} = \left(4\frac{t^3}{t^2}-0\right)\frac{1}{t} = 4$

(3) Due amici effettuano due percorsi distinti su una montagna che ha la forma del grafico di una funzione f di classe C^1 sul piano. Entrambi i percorsi passano per il punto $P=(1,0,f(1,0))$.
Luigi passa nel punto P all'istante $t=0$ e la sua quota ad un istante t è data da $f(\cos(t),2\sin(2t))=12\cos^2(t)+8\sin^2(2t)+18\sin(2t)\cos(t)$, Francesca passa nel punto P all'istante $t=1$ e la sua quota ad ogni istante t è data da $f(t,t^2-1)=2-9t+8t^2+9t^3+2t^4$.
Determinare il tasso di crescita massimo di f nel punto $(1,0)$. Scrivere -1000 se i dati non sono sufficienti per concludere.

Il tasso di massima crescita in un punto è dato da $D_{u\,max} f(p) = |\nabla f(p)|$

Bisogna trovare il gradiente di f in $(1,2)$. Per farlo utilizzo le informazioni sul passaggio di Luigi e Francesca. Questo perché, per conoscere come varia una funzione C^1 rispetto a tutte le direzioni, basta sapere come varia rispetto a 2 direzioni.

LUIGI $f(\cos t, 2\sin(2t)) = 12\cos^2(t)+8\sin^2(2t)+18\sin(2t)\cos(t)$

$x'(t)=\frac{d}{dt}(\cos t, 2\sin(2t)) = (-\sin t, 4\cos(2t)) \Rightarrow x'(t_0)=x'(0)=(0,4)$

Inoltre, $F'(x(t)) = -24\overset{0}{\cancel{\sin t}}\cos t+32\overset{0}{\cancel{\sin(2t)}}\cos(2t)+36\cos(2t)\cos t-18\overset{0}{\cancel{\sin t}}\,\overset{0}{\cancel{\sin(2t)}}$ per $t \to 0$

$\overset{!}{=} 36\cos(2t)\cos t = 36$

Applichiamo ora la regola della catena per trovare il gradiente

$(f\circ x)'(t_0) = \nabla f(x(t_0))\, x'(t_0)$

$\nabla f(x(t_0)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x(t_0)), \frac{\partial}{\partial y} f(x(t_0))\right) \longrightarrow \overbrace{(g\circ x)'(t_0)}^{36} = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t_0)) \cdot \overbrace{x'_x(t_0)}^{0} + \frac{\partial}{\partial y} f(x(t_0))\, \overbrace{x'_y(t_0)}^{4}$

Otteniamo $\frac{\partial}{\partial y} f(x(t_0)) = \frac{(f\circ x)'(t_0)}{x'_y(t_0)} = \frac{36}{4} = 9$

FRANCESCA Procedendo analogamente, $f(t, t^2-1) = 2 - 9t + 8t^2 + 9t^3 + 2t^4$

$x(t) = (t, t^2-1)$, $x'(t) = (1, 2t)$, $x'(1) = (1,2)$

$g'(x(t)) = -9 + 16t + 27t^2 + 8t^3$ quindi $g'(1) = -9 + 16 + 27 + 8 = 42$

Applicando la regola della catena: $\underbrace{(g\circ x)'(t_0)}_{42} = \frac{\partial}{\partial x} f(x(t_0))\, \underbrace{x'_x(t_0)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(x(t_0))}_{9}\, \underbrace{x'_y(t_0)}_{2}$

Quindi:

$\frac{\partial}{\partial x} f(x(t_0)) = \frac{(f\circ x)'(t_0) - \frac{\partial}{\partial y} f(x(t_0))\, x'_y(t_0)}{x'_x(t_0)} = \frac{42 - 9\cdot 2}{2} = 42 - 18 =$

Infine, $\nabla f(1,0) = (24, 9)$. Il tasso di minima cresuta è $D_u \max f(1,0) = |\nabla f(1,0)| = \sqrt{24^2 + 9^2} = 25.6320$

(4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che

$$f(1,3) = -7, \quad \partial_x f(1,3) = 2, \quad \partial_y f(1,3) = 7.$$

Usando l'approssimazione con il piano tangente, fornire il valore approssimato di $f(1.03, 2.94)$.

Uso la linearizzazione di una funzione mediante la sua funzione affine in un punto p:

$L(x,y) \simeq f(p) + \nabla f(p)((x,y) - p)$. La linearizzata in $p = (1,3)[(x,y) - (1,3)] = -7 + \nabla f(1,3)[x-1, y-3] = -7 + (2,7)(x-1, y-3)$

$f(1.03, 2.94) \approx L(1.03, 2.94)$, $L(1.03, 2.94) = -7 + 2(1.03 - 1) + 7(2.94 - 3) = -7 + 0.06 - 0.42 = -7.36$

(5) Studiare la natura dei punti critici di $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$. Indicare il valore della funzione nel punto di massimo locale (cioè trovare il punto di massimo locale sul foglio, calcolare esplicitamente il valore della funzione in quel punto e riportarlo qui sotto)

$\nabla f(p) = 0$ è punto critico $\begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ 3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x(x+2) \\ 3y(y-2) \end{cases}$ ovvero, i punti critici sono $(0,0), (-2,0), (-2,2), (0,2)$

$\nabla f(p) = (3x^2 + 6x, 3y^2 - 6y)$ Il punto di massimo locale è $(-2,0)$ con $f(-2,0) = 4$

(6) Calcolare la seconda componente del gradiente di $\sin^3(|x,y|)$ in $\left(\frac{\pi}{27}\sqrt{72}, -\frac{\pi}{9}\right)$

uso la formula del gradiente $\nabla g(p) = (\partial x_1 g(p), \dots \partial x_n g(p))$. $g(x,y) = \sin^3(\sqrt{x^2+y^2})$:

$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sin^3\sqrt{x^2+y^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin^2\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\sqrt{x^2+y^2}\right.$

$= \sin^2\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin\sqrt{x^2+y^2}\right] \cdot \sin\sqrt{x^2+y^2}$

$= \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \left[\frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2}\, 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2}\, 2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right] \sin\sqrt{x^2+y^2}$

$= \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2} \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2}\, y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin^2\sqrt{x^2+y^2}\, \cos\sqrt{x^2+y^2}\, y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \frac{3y \sin^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

A questo punto sostituisco

$(x,y) = \left(\frac{\pi}{27}\sqrt{72}, -\frac{\pi}{9}\right)$

$\frac{3 - \left(-\frac{\pi}{9}\right) \sin^2\sqrt{\left(\frac{\pi}{27}\sqrt{72}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{9}\right)^2}\, \cos\sqrt{\left(\frac{\pi}{27}\sqrt{72}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{9}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{27}\sqrt{72}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{9}\right)^2}}$

$\left[\sqrt{\left(\frac{\pi}{27}\sqrt{72}\right)^2 + \left(-\frac{\pi}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{729} \cdot 72 + \frac{\pi^2}{81}}\right.$

$= \sqrt{\frac{72}{729}\pi^2 + \frac{\pi^2}{81}} = \sqrt{\frac{72\pi^2 + 9\pi^2}{729}} = \sqrt{\frac{81\pi^2}{729}}$

$\left.= \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \frac{\pi}{3}\right]$

Quindi: $\dfrac{3\left(-\frac{\pi}{9}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{3\left(-\frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\pi}{3}} = -3/8 = -0.375$

(7) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che per ogni vettore $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ si abbia $D_u f(0,0) = 3u_1 - 7u_2$. Determinare il tasso di crescita **minimo** di f in $(0,0)$.

Il tasso di minima crescita di f in p è $D_u f(p)$, dove u è il vettore unitario lungo il quale la crescita di f è minima in p

Il tasso di minima crescita di f in $(0,0)$ è $-|\nabla g(0,0)|$

1. Trovo le coordinate del gradiente $(\partial_x g(0,0); \partial_y g(0,0))$

$D_u g(0,0) = 3u_1 - 7u_2$ ovvero $\partial_x g(0,0) \cdot u_1 = 3$ e $\partial_y g(0,0) \cdot u_2 = -7$

2. Trovo $-|\nabla g(0,0)| = -\sqrt{(\partial_x g(0,0))^2 + (\partial_y g(0,0))^2} = -\sqrt{3 + (-7)^2} = -\sqrt{9+42} = -\sqrt{58} = -7.6157$

(8) Sia f funzione di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$. Siano $u = (3,-4), v = (2,1)$ due vettori e $p = (7,7)$. Si supponga che

$$D_u f(p) = -7, \quad D_v f(p) = 10.$$

Calcolare $D_{(-1,4)} f(p)$.

$\begin{cases} D_u F(p) = -7 \\ D_v F(p) = 10 \end{cases} \longrightarrow$ calcolare $D_{(-1,4)} F(p)$ $\begin{cases} \nabla x 3 - 4\nabla y = -7 \\ \nabla x 2 + 1\nabla y = -1 \end{cases}$ rinomino (per comodità) $\nabla x = x$ e $\nabla y = y$

$\begin{cases} 3x - 4y = -7 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 4(10-2x) = -7 \\ y = 10 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 40 + 8x = -7 \\ \checkmark \end{cases}$ $\begin{cases} 11x = 33 \to x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

Trovo $D_{(-1,4)} F(p) = \nabla F(p)(-1,4) = (3,4)(-1,4) = -3 + 16 = 13$

(9) Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con derivate parziali in $(0,0)$ sia rispetto a x che y. Allora:

$F(x,0) = F(0,0) + \partial_x F(0,0)x + \sigma(x)$ per $x \to 0$

(10) Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1 e sia $p \in \mathbb{R}^2$. Allora:

- la funzione $\vec{u} \mapsto \partial_{\vec{u}} F(p)$ è lineare
- le derivate direzionali di F in p si calcolano a partire dal gradiente di F in p
- se $\nabla F(p) \neq 0$ esiste una direzione $\vec{v}$ tale che $\partial_{\vec{v}} F(p) = 0$

(11) Sia $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in p. Allora:

- F è continua in p
- F ha derivate direzionali in p rispetto ad ogni vettore
- $\lim_{x \to p} \dfrac{F(x) - F(p) - \nabla F(p) \cdot (x-p)}{\|x-p\|} = 0$

per Weierstrass max e min $\exists \iff$ l'insieme è chiuso e limitato

QUIZ MOODLE_SETTIMANA 4

(1) $F(x,y) = x^2+y^2-8x^2y+3$. Determinare, se esiste, il massimo sul disco unitario chiuso

Il massimo assoluto è dato da $\max[\{\text{punti critici interni a } D\} \cup \{\text{massimi di } F \text{ su } \partial D\}]$

Trovo i punti di max relativo interni a D

$\nabla F(x,y) = (2x-16xy,\ 2y-8x^2)$

$$\begin{cases} \partial x = 0 \\ \partial y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-16xy=0 \\ 2y-8x^2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-16x(4x^2)=0 \\ y=4x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-64x^3=0 \\ y=4x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{I } x-32x^3=0 \\ \text{II } y=4x^2 \end{cases}$$

I $x(1-32x^2)=0$ sol: $x=0 \wedge x_2=\frac{1}{\sqrt{32}} \wedge x_3=-\frac{1}{\sqrt{32}}$

II $y=4x^2$ sol: $y=0 \wedge y_1=\frac{1}{9} \wedge y_3=\frac{1}{9}$ $\rightarrow$ Punti critici $A=(0,0)$, $B=\left(\frac{1}{\sqrt{32}},\frac{1}{9}\right)$, $C=\left(-\frac{1}{\sqrt{32}},\frac{1}{9}\right)$

La matrice Hessiana di F è $\text{Hess}F(x,y) = \begin{pmatrix} 2-16y & -16x \\ -16y & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{A=(0,0)}$

$\text{Hess}\,F(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, det $= 4 > 0$ Poiché $\partial^2_{xx}(A)>0$ $A(0,0)$ è un punto di min relativo

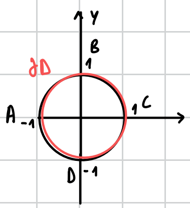
$\boxed{B=\left(\frac{1}{\sqrt{32}},\frac{1}{9}\right)}$

$\text{Hess}\,F\left(\frac{1}{\sqrt{32}},\frac{1}{9}\right) = \begin{bmatrix} 2/9 & -16/\sqrt{32} \\ -16/9 & 2 \end{bmatrix}$, $\det B = 4/9 - \left(\frac{16^2}{9\sqrt{32}}\right) = -4.58387 < 0$ B è un punto di sella

$\boxed{C=\left(-\frac{1}{\sqrt{32}},\frac{1}{9}\right)}$

$\text{Hess}\,F\left(-\frac{1}{\sqrt{32}},\frac{1}{9}\right) = \begin{bmatrix} 2/9 & 16/\sqrt{32} \\ -16/9 & 2 \end{bmatrix}$, $\det C = +4/9 - \left(-\frac{16^2}{9\sqrt{32}}\right) = 4.58387$ è un punto di min relativo

Studio i punti del bordo ∂D $F(x,y) = x^2+y^2-8x^2y+3$



Il disco unitario ha equazione $x^2+y^2=1$.

Considero il dominio $\{x^2+y^2 \le 1\}$ $\rightarrow$ C.E: $x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq 1,\ x \neq -1$

Sul bordo: $y_1=\sqrt{1-x^2}$ e $y_2=-1\sqrt{1-x^2}$

1) $F(x,-\sqrt{1-x^2}) = \cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+8x^2\sqrt{1-x^2}+3$

$= 8x^2\sqrt{1-x^2}+4$

$F'(x) = \frac{8x(3x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}$ pongo $F'(x)=0 \rightarrow x=0 \cup x=+\sqrt{2/3} \cup x=-\sqrt{2/3}$

Quindi $F(x) = +8x^2\sqrt{1-x^2}+4$

$F(0) = 4$

$F\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = +\frac{16}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}}+4 = +\frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+4 = 7.079201436$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$F(x,\sqrt{1-x^2}) = \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} - 8x^2\sqrt{1-x^2} + 3$

$\overset{!}{=} -8x^2\sqrt{1-x^2}+4$ $\qquad x^2 \neq 1$ ovvero $x \neq 1,\ x \neq -1$

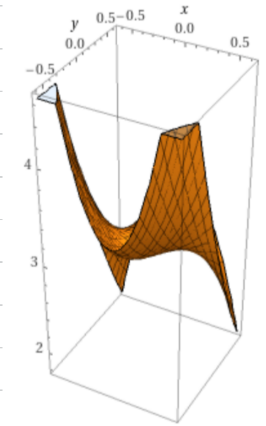
$F'(x) = \dfrac{8x(3x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}$ pongo $F'(x)=0$ $\quad \dfrac{8x(3x^2-2)}{\sqrt{1-x^2}}=0$ $\quad F'(x)=0$ per $x=0 \cup x=+\sqrt{2/3}$ $\cup\ x=-\sqrt{2/3}$

Quindi $f(x) = -8x^2\sqrt{1-x^2}+4$

$f(0) = 4$

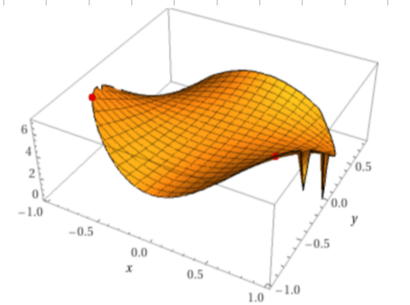
$f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{16}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}}+4 = -\frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+4 = 0.9207985643$

$F(x,y) = x^2+y^2-8x^2y+3$ ha grafico:



(Confrontiamo i punti trovati, calcolando f(x) in ognuno di essi)

Sul disco unitario la funzione risulta:



queste coordinate fanno riferimento ad un punto sul bordo!

$\max\{x^2+y^2-8x^2y+3 \mid x^2+y^2 \leq 1\} = \frac{4}{9}(9+4\sqrt{3})$ in $(x,y) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{8}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{67+16\sqrt{3}}\right)$ $\quad \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\ldots\right)^2=1$

ovvero $\max F(x,y) = 7.079201436$

(2) $F(x,y) = 8x^2-144x+648-7y^2$. Determinare, se esiste, il massimo sul quadrato $[-10,10]\times[-10,10]$

Il massimo assoluto è dato da: max [{punti critici interni a Δ} ∪ {massimi di F su $\partial\Delta$}]

Trovo i punti di max relativo interni a Δ

$\nabla F(x,y) = (16x-144,\ -14y)$

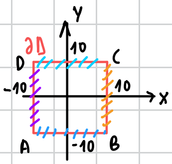
$\begin{cases}\partial x=0\\ \partial y=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}16x-144=0\\ -14y=0\end{cases} \quad \begin{cases}x=144/16=9\\ y=0\end{cases}$ $\quad$ punto critico in $(9,0)$

La matrice Hess $F(x,y) = \begin{bmatrix}16 & 0\\ 0 & -14\end{bmatrix}$

$\boxed{A=(9,0)}$

Hess $F(9,0)$, det $= 16(-14) = -224$ è un punto di sella

Studio i punti del bordo ∂D



1) Lato AB

per $y=-10$, $x \in [-10,10]$

Studio $F(x,-10) = 8x^2-144x+648-7y^2 = 8x^2-144x+648-7(100) = 8x^2-144x-52$

Parabola con concavità verso l'alto con minimo in $16x-144=0$ ovvero $x=9$

per $x=9$, $y=-700$

per $x=-10$ $\quad f(-10,-10) = 800+1440+648-700 = 2188$

per $x=10$ $\quad f(10,-10) = 800-1440+648-700 = -692$

2) Lato BC

per $x=10$, $y \in [-10,10]$ Studio $f(10,y) = 800-1440+648-7y^2 = -7y^2+8$

Parabola con concavità verso il basso con massimo in $-14y=0 \rightarrow y=0$, $x=8$

Per $y=-10$, $f[10,-10] = -700+8 = -692$

Per $y=10$, $f[10,10] = -700+8 = -692$

3) Lato CD

per $y=10$, $x \in [-10,10]$ studio $f(x,10) = 8x^2-144x+648-700 = 8x^2 144x-52$

come caso 1

4) Lato DA

Per $x=-10$, $y \in [-10,10]$ Studio $f(-10,y) = 800+1440+648-7y^2 = -7y^2+2888$

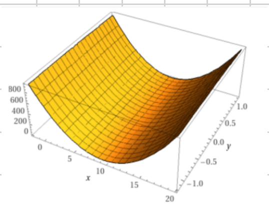
Parabola con concavità verso il basso con massimo in $-14y=0$ quindi massimo in $y=0$, $x=2888$

Per $y=-10$, $f(-10,10) = 2888-700 = 2188$

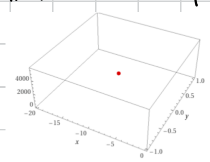
Per $y=10$, $f(-10,-10) = 2888-700 = 2188$

Il massimo di f è quindi 2888 in $(-10,0)$

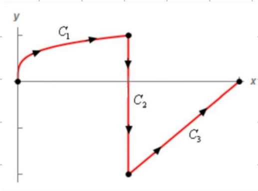
$\max\{8x^2-144x+648-7y^2 \mid \{-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10\}\} = 2888$ in $(x,y) = (-10,0)$



Il massimo sul quadrato $[-10,10] \times [-10,10]$, $\max f(x,y) = 2888$



(3)



Siano:

- C_1 la curva cartesiana $x = 4y^4, y \in [0,1]$;
- C_2 il segmento verticale da $(4,1)$ a $(4,-8)$;
- C_3 il segmento da $(4,-8)$ a $(8,0)$

Calcolare l'integrale in ds di $6y^5$ sulla giustapposizione dei tre cammini C_1, C_2, C_3, dato da:

$$\int_{C_1} 6y^5\,ds + \int_{C_2} 6y^5\,ds + \int_{C_3} 6y^5\,ds$$

L'integrale sulla giustapposizione dei 3 cammini è dato da:

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} N(r(t))\,|r'(t)|\,dt$$

1) $\boxed{C_1}$ $r_1 = (4y^4, y),\ y \in [0,1]$

$r_1' = (16y^3, 1)$

$|r_1'| = \sqrt{16^2 y^6 + 1} = \sqrt{256y^6+1}$

per $y=0$, $t=1$
per $y=1$, $t=257$

$$\Rightarrow \int_{C_1} 6y^5\sqrt{256y^6+1}\,dy = \int_0^1 6y^5\sqrt{256y^6+1}\,dy = 6\int_0^1 y^5\sqrt{256y^6+1}\,dy = \text{pongo } \begin{cases} t = 256y^6+1 \\ dt = 1536y^5 \rightarrow y^5 = \frac{dt}{1536} \end{cases}$$

$$= \frac{6}{1536}\int_1^{257}\sqrt{t}\,dt = F(257) - F(1) = \frac{257\sqrt{257}}{384} - \frac{1}{384} = \frac{257\sqrt{257}-1}{384} = 10.7266235 \checkmark$$

$$= \frac{1}{256}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^{257} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{256}\left[257^{3/2}-1\right]$$

2) $\boxed{C_2}$ Parametrizzo r_2: $r_2(t) = (4, y),\ y \in [-8, 1]$

$r_2'(t) = (0,1)$

$$|r_2'(t)| = \sqrt{0^2+1^2} = 1 \Rightarrow \int_{-8}^{1} 6y^5 = 6\int_{-8}^{1} y^5 = 6\left[\frac{y^6}{6}\right]_{-8}^{1} = 6\left[\frac{1}{6} - \frac{8^6}{6}\right] = -262143 \checkmark$$

3) $\boxed{C_3}$ Per parametrizzare r_3 devo trovare l'equazione della retta passante per $A=(4,-8)$ e $B=(8,0)$

determino m e q

$\boxed{m}$: $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8}{4} = 2$ $\quad\boxed{q}$: $y = 2x+q \quad y-2x = q \rightarrow$ sostituisco il punto B $\rightarrow -2(8) = q = -16$

L'equazione della retta è $y = -2x - 16 \longrightarrow x = -y/2 - 8$

$$r_3(t) = \left(-\frac{y}{2} - 8, y\right),\ y \in [-8, 0],\ r_3'(t) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right),\ |r_3'(t)| = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \int_{-8}^{0} 6y^5\sqrt{\frac{5}{4}}\,dy = \left[\cancel{6}\sqrt{\frac{5}{4}}\,\frac{y^6}{\cancel{6}}\right]_{-8}^{0} = -293085.9019$$

Sommo i 3 risultati: $C_1(10.7266235) + C_2(-262143) + C_3(-293085.9019) = -555218.1753$

(4) Sia $F(x,y,z) = (9e^x\cos(6yz) + 8x,\ -54e^x z\sin(6yz),\ 11\cos(11z) - 54e^x y\sin(6yz))$

Dopo aver determinato la primitiva U di F tale che $U(0,0,0) = 13$, determinare $U(1, 0, \frac{\pi}{22})$

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{cases} 9e^x\cos(6yz) + 8x = f(x) \\ -54e^x z\sin(6yz) = g(y) \\ 11\cos(11z) - 54e^x y\sin(6yz) = h(z) \end{cases}$$

Trovo una primitiva U tale che $\nabla U = F(x,y,z)$. Integro parzialmente $\vec{F}(x,y,z)$ in dx, dy, dz

1) dx: $\int 9e^x\cos(6yz)+8x\,dx = 9e^x\cos(6yz)+4x^2+ g(y)+h(z)$

Faccio una verifica $\frac{\partial}{\partial x}[9e^x\cos(6yz)+4x^2+\text{costante}] = 9e^x\cos(6yz)+8x$ ✓

2) dy: $\int -54e^x z\sin(6yz)\,dy = -9e^x\int 6z\sin(6yz)\,dy = 9e^x\cos(6yz)+4x^2+h(z)+k$

AGGIUNGO UNA COSTANTE GENERICA PERCHÉ LA DERIVATA RISPETTO A X È NULLA

Faccio una verifica: $\frac{\partial}{\partial y}[9e^x\cos 6(yz)+4x^2+k] = -9e^x\sin(6yz)6z+4x^2 = -54e^x z\sin(6yz)$ ✓

3) dz: $\int 11\cos(11z)-54e^x y\sin(6yz)\,dz = 9e^x\cos(6yz)+\sin(11z)+4x^2+\text{costante}$

Faccio una verifica: $\frac{\partial}{\partial z}[9e^x\cos(6yz)+\sin(11z)+4x^2+k] = -9e^x\sin(6yz)\cdot 6+11\cos(11z)$
$= -54e^x\sin(6yz)+11\cos(11z)$ ✓

La primitiva è $U = 9e^x\cos(6yz)+\sin(11z)+4x^2+k$. Devo determinare k:

La condizione $U(0,0,0)=13 \Rightarrow 9e^0\cos(0)+\sin(0)+4(0)^2+k=13 \Rightarrow 9+k=13 \Rightarrow k=4$

La primitiva cercata è $U=\sin(11z)+9e^x\cos(6yz)+4x^2+k$

Calcolo $U=(1,0,\pi/22) = \sin(11\cdot(\pi/22))+9e^1\cos(6\cdot 0\cdot \pi/22)+4+4 =$
$\stackrel{!}{=} \sin(\pi/2)+9e^1\cos(0)+8 = 1+9e+8 = 33.46453646$

(La derivata della primitiva U trovata rispetto ad x risulta $9e^x\cos(6yz)+8x$
La derivata della primitiva U trovata rispetto ad y risulta $-9e^x\sin(6yz)\cdot 6 = -54e^x\sin(6yz)$
La derivata della primitiva U trovata rispetto a z risulta $11\cos(11z)-54e^x\sin(6yz)$)

(5) Sia $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ campo C^1 irrotazionale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- F è conservativo sul semipiano $x>0$;
- la circuitazione di F sul disco di centro $(2,2)$ e raggio 1 è uguale zero

(6)

Un campo C^1 irrotazionale su un dominio è conservativo ✗ Un campo conservativo C^1 è irrotazionale, ma il viceversa in generale è falso. Lo è se D è un aperto semplicemente connesso	FALSO ✓
Un campo continuo radiale su $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ è conservativo.	VERO ✓
L'integrale di un campo su un cammino coincide con l'integrale dello stesso campo sul cammino inverso ✗ $\int_a^b F dr = -\int_b^a F dr$ è l'inverso	FALSO ✓
Un campo continuo conservativo è un campo gradiente	VERO ✓
Siano $F,G: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ due campi, con F conservativo. Allora $F+G$ è conservativo se e solo se G è conservativo.	VERO ✓
Un campo continuo gradiente è conservativo	VERO ✓

QUIZ MOODLE_ SETTIMANA 5

(1)

Sia $\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}, \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)$ su $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$. Calcolare l'integrale di $\vec{F}$ sulla curva $\alpha(t) = \left(e^{t^4}, 1 + t^2\right), t \in [0,1]$

Select one:

- $2^e - e^2 + 1$
- X $-2 + \frac{e}{2} + \frac{2}{e}$
- $1 - 2e - e^2$
- $e^2 - 2^e$
- $\frac{e}{2} - \frac{2}{e}$

$\vec{F}(x,y)$ è campo gradiente: teorema fondamentale del calcolo.

$U = \int -\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\, dx = -y\int \frac{1}{x^2}\, dx + \frac{1}{y}\int dx = +\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + H(y) + k$

$U = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\, dy = \frac{1}{x}\int dy - x\int \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + G(x) + k$

$U = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ a questo punto $U(r(a)) = \frac{1+0^2}{e^{0^4}} + \frac{e^{0^4}}{1+0^2} = 2$, $U r(b)) = \frac{1+1^2}{e^{1^4}} + \frac{e^{1^4}}{1+1^2} = \frac{2}{e} + \frac{e}{2}$

$U(r(b)) - U(r(a)) = \frac{2}{e} + \frac{e}{2} - 2$

(2)

Sia $\vec{F}(x,y) = \left(2x\cos(x^2+y^2), 2y\cos(x^2+y^2) + 1\right)$.

Sia r la curva $r(t) = \left(t\sqrt{\pi/2}, t^2(1-t^2)\right)$ con $t \in [0,1]$; calcolare l'integrale di $\vec{F}$ lungo r.

(suggerimento: Provare che $\vec{F}$ \`e conservativo e calcolarne un potenziale)

Select one:

- $-e^{4\pi}$
- 0
- X 1
- $\frac{\pi^2}{4}$
- 30

$U = \sin(x^2+y^2) + y \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \cos(x^2+y^2)\, 2x$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \cos(x^2+y^2)\, 2y + 1$

$U(r(t)) = \sin\left((t\sqrt{\pi/2})^2 + (t^2(1-t)^2)^2\right) + t^2(1-t^2))$

$U r(a) = \sin(0) + 0 = 0$

$U r(b) = \sin(\sqrt{\pi/2})^2 = \sin \pi/2 = 1$

$\int_r F\, dr = U r(b) - U(r(a)) = 1 - 0 = 1$

(3) Sia $F(x, y) = (x + e^y, 2y + xe^y)$.

Calcolare l'integrale di F sul cammino

$\gamma(t) = (\sin^2 t, \sin t), t \in [0, \pi/2]$.

(suggerimento: provare che il campo è conservativo e trovarne un potenziale)

Select one:

- $\sin(e) + \sin(e^2)$
- $\frac{1}{2} - e$
- X $\frac{3}{2} + e$
- $\frac{5}{2} + e$
- $e - \frac{1}{2}$

$$U = \int x + e^y dx = \int x\,dx + e^y \int dx = \frac{x^2}{2} + xe^y + H(y) + k$$

$$U = \int 2y + xe^y dy = 2\int y\,dy + x\int e^y dy = \cancel{2}\frac{y^2}{\cancel{2}} + xe^y + G(x) + k$$

$$U = \frac{x^2}{2} + y^2 + xe^y$$ verifico $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{2} + e^y = x + e^y$ ok. e $\frac{\partial U}{\partial y} = 2y + xe^y$ ok.

$$u(r(t)) = \frac{(\sin^2 t)^2}{2} + (\sin t)^2 + (\sin^2 t)e^{\sin t}$$ con $\begin{cases} Ur(a) = 0 \\ Ur(b) = \frac{(\sin^2 \pi/2)^2}{2} + (\sin \pi/2)^2 + \sin^2 \pi/2\, e^{\sin(\pi/2)} = \frac{3}{2} + e = 4.21 \end{cases}$

(4) Calcolare l'integrale di $f(x,y) = yx^7\cos(yx^8)$ su $R := [0,1] \times [1,3]$

utilizzo la formula di riduzione su rettangoli

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dy\,dx$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{8}\cos(yx^8)\,8yx^7 = yx^7\cos(yx^8)$ ok.

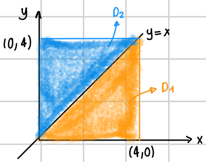
$$\int_1^3 \left[\int_0^1 yx^7\cos(yx^8)\,dx\right] dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{8}\sin(yx^8)\right]_0^1 dy = \int_1^3 \left[\frac{1}{8}\sin y\right] dy = \frac{1}{8}\left[-\cos y\right]_1^3 = -\frac{1}{8}\cos 3 + \frac{1}{8}\cos 1 = 0.1912$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{8}\sin y$ ok.

(5) Sia $f : D := [0,4] \times [0,4] \to \mathbb{R}$ definita da

$\forall (x,y) \in D \begin{cases} 6(x-4)^2 & \text{se } x > y \\ 6(y-4)^2 & \text{se } x \leq y \end{cases}$

Calcolare $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$



l'integrale sul quadrato è dato dalla somma su due triangoli

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

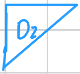
$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 \int_y^4 (6(x-4)^2\,dx\,dy = \int_0^4 \int_y^4 6(x^2 - 8x + 16)\,dx\,dy = \int_0^4 \int_y^4 6x^2 - 48x + 96\,dx\,dy$$

$$= \int_0^4 \left[2x^3 - 24x^2 + 96x\right]_y^4 dy = 2(4)^3 - 24(4)^2 + 96(4) - \left[2y^3 - 24y^2 + 96y\right]$$

$$= \int_0^4 128 - 2y^3 + 24y^2 - 96y\,dy$$

$$= \left[128y - \frac{1}{2}y^4 + 8y^3 - 48y^2\right]_0^4 = 128(4) - \frac{1}{2}(4)^4 + 8(4)^3 - 48(4)^2 = 128$$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x^2 - 48x + 96$ ok. $\frac{dF}{dy} = 128 - 2y^3 + 24y^2 - 96y$ ok.



In D_2 $\begin{cases} y \text{ va da } x \text{ a } 4 \\ x \text{ va da } 0 \text{ a } 4 \end{cases}$

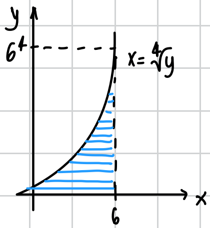
$\int_0^4 \int_x^4 6(y-4)^2 dxdy$ ...

... con calcoli analoghi al punto D_2 (integrando prima per y e poi per x) si ottiene 128

Si conclude $\int_D F(x,y)\, dx\, dy = D_1 + D_2 = 128 + 128 = 256$

(6) Calcolare l'integrale iterato $\int_0^{6^4} \int_{\sqrt[4]{y}}^{6} \sqrt{x^5+1}\, dy$ $\begin{cases} 0 \le y \le 6^4 \\ \sqrt[4]{y} \le x \le 6 \end{cases}$

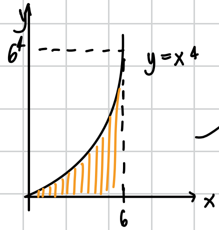
Il dominio è semplice rispetto ad y, lo riscrivo rispetto ad x



Riscrivo:

$x = \sqrt[4]{y} \rightarrow y = x^4$

D $\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le x^4 \end{cases}$



si ottiene una nuova direzione di integrazione per fili verticali, anziché orizzontali

$$\int_0^6 \int_0^{x^4} \sqrt{x^5+1}\, dy dx = \int_0^6 \left[y\sqrt{x^5+1} \right]_0^{x^4} dx = \int_0^6 x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx$$

$\frac{\partial}{\partial x} x^n = n x^{n-1}$ quindi $\frac{\partial}{\partial x} (x^5+1)^{3/2} = \frac{3}{2}(x^5+1)^{1/2} 5x^4$

$$\int_0^6 x^4 (x^5+1)^{1/2} dx = \frac{2}{3}\,\frac{1}{5} \int_0^6 \frac{3}{2}(x^5+1)^{1/2}\, 5x^4 = \frac{2}{15}\left[(x^5+1)^{3/2}\right]_0^6 = \frac{2}{15}\left[(6^5+1)^{3/2} - (1)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[(6^5+1)^{3/2} - 1\right] = 91444{,}2183$$

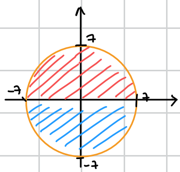
aggiungo qs contributo per facilitare l'integrale

(7) Calcolare l'integrale sul disco di centro (0,0) e r=7 della funzione $(x,y) \mapsto 4x\cos(xy)$

$\{(x,y) : x^2+y^2 \le 7\}$

Il dominio è simmetrico rispetto ad x e y

$$\int_{-7}^{7} \int_{-7}^{7} 4x\cos(xy) dxdy = 0$$



(x,y) $(-x,y)$
$(7,0) \in D$ e $(-7,0) \in D$

inoltre

$-f(x,y) = -4(7)\cos(0) = -28$

$= f(-x,y) = 4(-7)\cos(0) = -28$

ok.

$(x,y) \in D \Leftrightarrow (-x,y) \in D$, e $F(-x,y) = -F(x,y)$

(8) Determinare l'area della regione $\rho \le \sqrt{\sin(5t)}$, $t \in [0, \pi/5]$

$Area(D) = \int_D 1\,dxdy = \int_D \rho\, d\rho dt$ → Formula di riduzione in coordinate polari

sostituisco ed ottengo

$$\int_0^{\pi/5}\int_0^{\sqrt{\sin(5t)}} \rho\, d\rho dt = \int_0^{\pi/5} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\sin(5t)}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/5} \sin(5t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^{\pi/5} 5\sin 5t\, dt$$

$$= -\frac{1}{10}\left[\cos(5t)\right]_0^{\pi/5} = -1/10\left[\cos(\pi) - \cos(0)\right) = -\frac{1}{10}(-1-1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

(9) Siano $\varphi(u,v) := (9u+1v, 4u+7v), (u,v) \in \mathbb{R}^2$ e E regione del piano di Area 14. Quanto vale $\varphi(E)$?

$Area(E) = \int_E 1\,dudv$

$\int_E 1\,dudv = 14$ *

quindi $Area[\varphi(E)] = \int_E 1|\varphi'(u,v)dudv$

$\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ $\det[\varphi(u,v)] = (9\cdot 7) - (4\cdot 1) = 63 - 4 = 59$

$Area[\varphi(E)] = \int_E 59\,dudv = 59\underbrace{\int_E dudv}_{=14 \text{ per } *} = 59 \cdot 14 = 826$

Più in generale, $Area[\varphi(E)] = (ad-bc)\cdot n$ se $\varphi(u,v) = (au+bv, cu+dv)$

(10) Calcolare l'integrale $\int_{B((0,0),4]} \sqrt{1+3(x^2+y^2)}\, dxdy$

Faccio il cambio di variabili in coordinate polari $\int_D F(x,y)\,dxdy = \int_E f(\rho\cos t, \rho\sin t)\,\rho\, d\rho dt$

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 16$ ovvero $\rho^2\cos^2 t + \rho^2\sin^2 t \le 16 \to \rho^2 \le 16 \to \rho \le 4$

$\sqrt{1+3(x^2+y^2)} \to \sqrt{1+3(\rho^2\cos^2 t + \rho^2 \sin^2 t)} = \sqrt{1+3\rho^2}$ con $E = \{t \in [0, 2\pi], 0 \le \rho \le 4\}$

sostituisco e ottengo:

$$\int_E \sqrt{1+3\rho^2}\,\rho\, d\rho dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\int_0^4 \frac{3}{2} 6\rho\sqrt{1+3\rho^2}\, d\rho dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2}{18}\left[(1+3\rho^2)^{3/2}\right]_0^4 dt$$

verifico $\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{3}{2}\sqrt{1+3\rho^2}\, 6\rho$ ok.

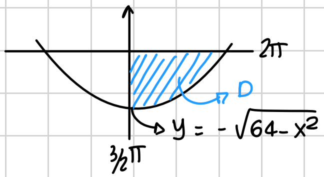
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{9}\left[(1+3(4)^2)^{3/2} - 1\right] dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{9}\left((49)^{3/2} - 1\right) dt$$

Infine $2\pi\left(\frac{1}{9}\left((49)^{3/2} - 1\right)\right) = 238.7610$

(11) Calcolare l'integrale iterato $\int_0^8 \int_{-\sqrt{8^2-x^2}}^{0} e^{(x^2+y^2)/100}\, dy\, dx$

$D = \{x \in [0,8], -\sqrt{8^2-x^2} \le y \le 0\}$
$y \le -\sqrt{64-x^2}$ ovvero $y^2+x^2 \le 64$

$\rightarrow$ il dominio è radiale quindi posso cambiare in coordinate polari



$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(\rho\cos t, \rho\sin t)\,\rho\, d\rho\, dt$ $\rightarrow$ attenzione a questo contributo

$E\{(\rho,t): 0 \le \rho \le 8, \frac{3}{2}\pi \le t \le 2\pi\}$

$\int_{3/2\pi}^{2\pi}\int_0^8 e^{(\rho^2(\cos^2 t+\sin^2 t)/100)} \cdot \rho \cdot d\rho\, dt$

$\rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = 1$

verifico $\frac{\partial}{\partial\rho} = e^{\rho^2/100} \cdot \left(\frac{2}{100}\rho\right) \overset{!}{=} \frac{1}{50}\rho e^{\rho^2/100}$ ok.

contributo aggiunto dalla forma

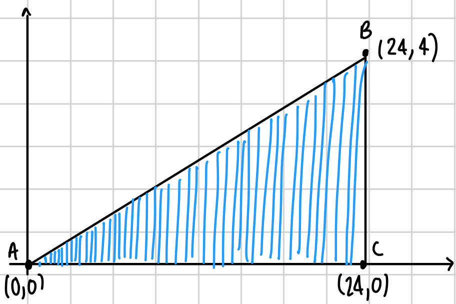
ovvero: $\int_{3/2\pi}^{2\pi} 50 \int_0^8 \frac{1}{50}\rho e^{\rho^2/100}\, d\rho\, dt = \int_{3/2\pi}^{2\pi} 50\left[e^{\rho^2/100}\right]_0^8 dt$

contributi che aggiungo io

$= \int_{3/2\pi}^{2\pi} 50\left(e^{64/100}-1\right)dt = \left[50\left(e^{64/100}-1\right)t\right]_{3/2\pi}^{2\pi}$

$= 2\pi(50)\left(e^{64/100}-1\right) - \frac{3}{2}\pi 50\left(e^{64/100}-1\right) = 70.4094$

(12) Calcolare il volume del trapezoide di $f(x,y) = 6+\cos(x^2)$ sopra il triangolo di $(0,0)$; $(24,0)$; $(24,4)$



$0 \le x \le 24$

trovo la retta AB

$m = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ e $0 = \frac{1}{6}(0)+q \rightarrow q=0$

quindi $y = \frac{1}{6}x$ è l'equazione della retta

Il dominio è $D:\{(x,y) : 0 \le x \le 24,\ 0 \le x \le 1/6x\}$. Il dominio è semplice rispetto a x, uso la formula di riduzione.

$\int_D f(x,y)\,dy\,dx$

$$\int_0^{24}\int_0^{1/6x} 6+\cos(x^2)\,dy\,dx = \int_0^{24} \left[(6+\cos(x^2))y\right]_0^{1/6x} = \left[\,6y + y\cos(x^2)\right]_0^{1/6x}$$

$$= \int_0^{24} x + \frac{1}{6}x\cos(x)^2\,dx = \int_0^{24} x\,dx + \frac{1}{6}\int x\cos x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{24} + \frac{1}{6\cdot 2}\int_0^{24} 2x\cos(x^2)\,dx$$

aggiungo io

$$= \frac{24^2}{2} + \frac{1}{12}\left[\sin(x^2)\right]_0^{24} = 288 + \frac{1}{12}\left[\sin(24^2) - \cancel{\sin(0)}\right] = 287{,}9261$$

verifico $\frac{d}{dx} = \cos(x^2)(2x) = 2x\cos x^2$ ok

(13) Sia $D=\{(x,y) : 2 \le xy \le 8,\ 2 \le y \le 9\}$

Effettuando il calcolo dell'integrale $\int_D xy^9\,dx\,dy$ con il cambio di variabile $u=xy$, $v=y$ che si riconduce ad un integrale del tipo $\int_2^8\int_2^9 \dots du\,dv = \int_2^8 ku\,du$. Determinare k

Ponendo $\begin{cases} u=xy \\ v=y \end{cases}$ il nuovo dominio è $2 \le u \le 8$, $2 \le v \le 9$ ovvero $E:\{(u,v) : u\in[2,8],\ v\in[2,9]\}$

Trovo $x(u,v), y(u,v)$ $\begin{cases} u=xy \\ v=y \end{cases} \to \begin{cases} u=x\cdot v \\ // \end{cases} \begin{cases} x=u/v \\ y=v \end{cases}$

$F(x,y)=\varphi(u,v)=\left(\frac{u}{v}, v\right)$ $\quad \varphi'(u,v)=\begin{bmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |\varphi'(u,v)| = \frac{1}{v}$ $\quad \left(\det|\varphi| = \left(1/v - \left(-\cancel{u/v^2 \cdot 0}\right)\right) = \frac{1}{v}\right)$

$\int_D xy^9\,dx\,dy$ con $xy^9 = \frac{u}{v}v^9 = uv^8$

ovvero $\int_2^8\int_2^9 u\,\cancel{v^8}^{\,7}\cdot\frac{1}{\cancel{v}}\,dv\,du = \int_2^8 u\left[\frac{v^8}{8}\right]_2^9 du$

questa è k! quindi $\frac{9^8}{8} - \frac{2^8}{8} = \frac{9^8-2^8}{8} = 5380808.125$

$\frac{d}{dv} = \frac{u\cancel{8}v^7}{\cancel{8}} = uv^7\,du$ ok.

(Formula di cambiamento variabili) Siano X, Y aperti di $\mathbb{R}^2$ e $\varphi: X \to Y$ biettiva, di classe C^1 con $\det\varphi' \neq 0$. Siano $E \subset X$ limitato, $D = \varphi(E)$. Allora $f: D \to \mathbb{R}$ è integrabile se e solo se lo è $(f\circ\varphi)|\det\varphi'| : E \to \mathbb{R}$ e in tal caso vale la formula $\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_E f(\varphi(u,v))|\varphi'(u,v)|\,du\,dv$

QUIZ MOODLE _ SETTIMANA 6

(1)

Per $a > 0$ sia $f_a(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^a}$ se $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Tale funzione è illimitata attorno all'origine. Selezionare, se ve ne sono, TUTTI i valori di a per i quali l'integrale $\int_{B((0,0),1]} f_a(x,y)\,dx\,dy$ esiste finito.

NB: si perde 1/10 di punto alle risposte errate.

Select one or more:

- [x] 0.8
- [x] 0.9
- [ ] 1
- [ ] 1.1
- [ ] 1.2
- [ ] 1.8
- [ ] 1.9
- [ ] 2
- [ ] 2.1
- [ ] 2.2

$a>0$: $F_a(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x^2+y^2)^a} & \text{se } F_a(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Determinare $a: \int_{B((0,0),1]} F_a(x,y)\,dxdy \;\exists < +\infty$

Il dominio è $D = \{x^2+y^2 \leq 1\} \Rightarrow \int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy$

Poiché la funzione è radiale conviene trasformare in coordinate polari

$E = \{0 \leq \rho \leq 1,\ t \in [0,2\pi]\}$

ovvero $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a}}\rho\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-1}}\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^{-2a+1}\,d\rho\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{-2a+2}\left[\rho^{-2a+2}\right]_0^1 dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{-2a+2}\,dt = \frac{1}{-2a+2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{-2a+2}[t]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{-2a+2} = \frac{\pi}{-a+1}$

L'integrale esiste finito $\Leftrightarrow$ den $\neq 0$, risultato >0

quindi posto $\pi \neq 0$ e $\pi > 0$, $-2a+2 \neq 0$ e $-2a+2>0$ otteniamo $a \neq 1$ $-2a > -2$

ovvero $a < 1$. L'integrale $\exists$ finito solo per $a<1$

(2) Calcolare, se esiste finito, $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B((0,0),1/9]} (x^2+y^2)^6 e^{-(x^2+y^2)^7}\,dxdy$

cambio in coordinate polari $\qquad E = \{t \in [0,2\pi],\ \rho \in [1/9, +\infty[\}$

$x^2+y^2 \leq 1/9$

$x = \rho\cos\theta \qquad (\rho^2)^6 e^{-(\rho^2)^7}\,d\rho\,dt$

$y = \rho\sin\theta$

Otteniamo $\int_0^{2\pi}\int_{1/9}^{+\infty} \rho^{12} e^{-\rho^{14}}\rho\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\int_{1/9}^{+\infty} \rho^{13} e^{-\rho^{14}}\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{14}e^{-\rho^{14}}\right]_{1/9}^{+\infty}$

$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{14}e^{-\infty} + \frac{1}{14}e^{-(\frac{1}{9})^{14}}\right]dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{14}e^{-\frac{1}{9^{14}}}\,dt = \frac{1}{14}e^{-\frac{1}{9^{14}}}\int_0^{2\pi}dt$

$= \frac{1}{14}e^{-\frac{1}{9^{14}}}[t]_0^{2\pi} = +\frac{1}{14}e^{-\frac{1}{9^{14}}}\cdot 2\pi = 0.4487$

(3) Determinare l'ascissa del baricentro di $D = \{(x,y): 4x^2 \le y \le 6x\}$

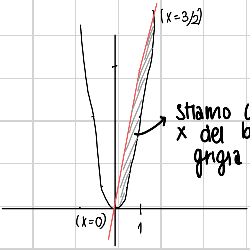
La regione D è limitata dalle curve $y=4x^2$ e $y=6x$

Per determinare gli estremi della regione, troviamo i punti in cui le curve si intersecano

$4x^2 = 6x \iff x=0$ e $x=\frac{3}{2}$

La regione D è delimitata orizzontalmente tra $x=0$ e $x=\frac{3}{2}$ e verticalmente dalle curve $y=4x^2$, in basso, e $y=6x$ in alto.

L'ascissa del baricentro $\bar{x}$ di una regione piana può essere trovata come $\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,dx\,dy$ con A = area della regione.



stiamo cercando la coordinata x del baricentro dell'area grigia

Calcoliamo l'area A come

$$A = \int_0^{3/2}\int_{4x^2}^{6x} 1\,dy\,dx = \int_0^{3/2} 6x-4x^2\,dx$$

$$= 3x^2 - \frac{4}{3}x^3\Big|_0^{3/2} = 3(9/4) - 4/3\,(27/8) = 27/4 - 9/2 = 9/4$$

Calcoliamo ora $\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{3/2}\int_{4x^2}^{6x} x\,dy\,dx = \int_0^{3/2} x(6x-4x^2)\,dx$ ovvero $\iint_D x\,dx\,dy = 2x^3 - x^4\Big|_0^{3/2}$

$$= \cancel{2}^{1}\cdot\frac{27}{\cancel{8}_4} - \frac{81}{16} = \frac{27}{4} - \frac{81}{16} = \frac{27}{16}$$

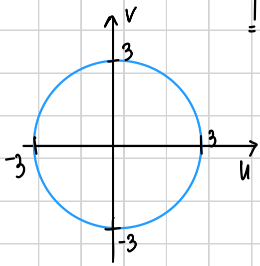
l'ascissa ottenuta (x) è quindi $\frac{1}{9/4}\cdot 27/16 = \frac{\cancel{4}^{1}\cdot \cancel{27}^{3}}{\cancel{9}_1\cdot \cancel{16}_4} = 3/4 = 0.7500$

(4) Calcolare l'area della superficie parametrica

$p(u,v) = (7(u+v), 8v, 7u)$ $u^2+v^2 \le 9$, $D = \{u^2+v^2 \le 9\}$

uso la formula dell'area di una superficie

$\text{Area}(D) = \int_D |P_u(u,v) \times P_v(u,v)|\,du\,dv$



Calcolo l'elemento d'area $|P_u(u,v) \times P_v(u,v)|$

$P(u,v) = (7u+7v, 8v, 7u)$

$P_u = (7,0,7)$, $P_v = (7,8,0)$

$$P_u(u,v) \times P_v(u,v) = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 7 & 0 & 7 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = e_1(-56) + e_2(49) + e_3(56) = (-56, 49, 56)$$

$$|P_u(u,v) \times P_v(u,v)| = \sqrt{56^2+49^2+56^2} = 7\sqrt{177}$$

A questo punto sostituisco le campio in coordinate polari

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho\, 7\sqrt{177}\,d\rho\,dt = \int_0^{2\pi} 7\sqrt{177}\left(\frac{1}{2}\rho^2\Big|_0^3\right) = \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}7\sqrt{177}\,dt = 2\pi\cdot\frac{9}{2}7\sqrt{177} = 2633.1588$$

(5) Calcolare l'area della superficie $z = 14+7y+\frac{1}{5}x^5, \quad 0 \le y \le x^7, \quad 0 \le x \le 1$

L'elemento d'area di una superficie cartesiana è dato da $|P_x \times P_y(x,y)| = \sqrt{1+|\nabla F(x,y)|^2}$

Calcolo $|P_x \times P_y|$

$\nabla F(x,y) = (x^4, 7)$

$|\nabla F(x,y)| = \sqrt{x^8+49}$

$\rightarrow |P_x \times P_y(x,y)| = \sqrt{1+|\nabla F(x,y)|^2} = \sqrt{1+x^8+49} = \sqrt{x^8+50}$

• Trovo l'area usando la formula dell'area $\int_D |P_x \times P_y(x,y)|\,dxdy = \int_D \sqrt{1+|\nabla F(x,y)|^2}\,dxdy$

$$\int_D \sqrt{x^8+50} = \int_0^1 \int_0^{x^7} \sqrt{x^{10}+50}\,dydx = \int_0^1 x^7\sqrt{x^8+50}\,dx =$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_0^1 \frac{3}{2}\cdot 8x^7\sqrt{x^8+50}\,dx = \frac{1}{12}\cdot\left[(x^8+50)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left[(51)^{3/2}-(50)^{3/2}\right]$$

$= 0.8882$

verifico

$$\frac{d}{dx} = \frac{3}{2}(8x^7)(\sqrt{x^8+50})\ \text{ok}$$

(6) Calcolare l'integrale di $\left(\frac{z-6}{3}\right)^3$ sulla superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva cartesiana $z=3x+6$, $x \in [5,11]$ contenuta nel semipiano xz, $x \ge 0$

Ruotando la curva attorno all'asse z, otteniamo una superficie di rivoluzione

La formula generale per calcolare un integrale su una superficie di rivoluzione ottenuta ruotando una curva $C(x) = (x, z(x))$ attorno all'asse z è $\int_S f(x,y,z)\,dS = \int_a^b f(x,y(x),z(x))\cdot 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,dx$

dove:
- $F(x,y,z)$ è la funzione da integrare sulla superficie;
- $y(x)$ è la coordinata y ottenuta dalla rotazione con $y = x\sin\theta$
- $z(x) = 3x+6$ determina la coordinata z sulla curva

In questo caso, $F(x,y,z) = \left(\frac{z-6}{3}\right)^3$ ovvero $f(x,y,z) = \left(\frac{z(x)-6}{3}\right)^3$

$\left(\frac{3x}{3}\right)^3 = x^3$

Poiché $z(x) = 3x+6$, $\frac{dz}{dx} = 3$

Calcoliamo ora l'integrale sostituendo la funzione $f(x,y,z) = \left(\frac{z-6}{3}\right)^3 = \left(\frac{3x+6-6}{3}\right)^3 = x^3$

$$\int_5^{11} (x^3\cdot 2\pi\cdot x\sqrt{1+3^2}\,dx = \int_5^{11} x^3\cdot 2\pi\cdot x\cdot\sqrt{10}\,dx = 2\pi\sqrt{10}\int_5^{11} x^4\,dx$$

ovvero $2\pi\sqrt{10}\left[\frac{x^5}{5}\right]_5^{11} = 2\pi\sqrt{10}\left[\frac{11^5}{5}-\frac{5^5}{5}\right] = 627571.9146$

(6.1). In Alternativa ...

La superficie rotata attorno all'asse z può essere parametrizzata come $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 3r+6)$
con $r \in [5,11]$ e $\theta \in [0,2\pi)$

Calcoliamo il fattore d'area:

I vettori tangenti alla superficie sono:

$\vec{r}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 3)$ e $\vec{r}_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$

Il prodotto vettoriale è $\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 3 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = e_1(-3r\cos\theta), e_2(-(3r\sin\theta)), e_3(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)$
$= (-3r\cos\theta, -3r\sin\theta, r)$

con modulo $\|\vec{r}_r \times \vec{r}_\theta\| = \sqrt{(3r\cos\theta)^2 + (3r\sin\theta)^2 + r^2} = \sqrt{10}\,r$

L'integrale di superficie risulta essere

$$\iint_S \left(\frac{z-6}{3}\right)^3 dS = \int_0^{2\pi}\int_5^{11} r^3 \sqrt{10}\,r \, dr\, d\theta = \sqrt{10}\int_0^{2\pi}\int_5^{11} r^4 \, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}\Big|_5^{11} = \text{vedi sopra...} = 627571{,}91..$$

(7) La temperatura su una sfera di raggio 1 è data dalla funzione $T(x,y,z)=6+\frac{8}{1}\sqrt{x^2+y^2}$. Calcolare la media di T sulla sfera data da $\dfrac{\int_{\partial B(0,1)} T(x,y,z)\,d\sigma}{\text{Area}\,\partial B(0,1)}$ → integrale superficiale di T sulla sfera di raggio 1

NO

Come prima cosa bisogna calcolare l'integrale superficiale (al numeratore)

$\int_N (x,y,z)\, d\sigma_p = \int_D N(p(u,v))\,|p_u(u,v)\times p_v(u,v)|\,du\,dv$

uso l'elemento d'area della sfera $|p_\phi \times p_\theta(\phi,\theta)| = \rho^2 \sin\phi$

uso le coordinate polari sferiche, ma in questo caso il raggio ρ è fisso (ho una sfera cava, non infinite sferette di raggi variabili tra 0 e ρ per fare il volume.

$\forall \rho \geq 0\ \theta \in [0,2\pi], \varphi \in [0,\pi]$

$\varphi(\rho,\theta,\phi) = (\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\theta)$, $\rho = R$ (fisso)

sostituisco $p(\phi,\theta) = R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$, $D\{\phi\in[0,\pi], \theta=[0,2\pi]\}$

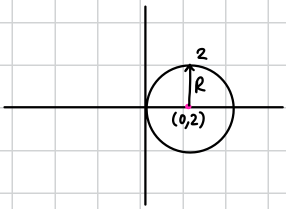
Sostituisco in $T(x,y,z) \longmapsto N(R(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$

$T(x,y,z) = 6+8\sqrt{R^2\sin^2\phi\cos^2\theta + R^2\sin^2\phi\sin^2\theta} = 6+8\sqrt{R^2\sin^2\phi(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{1})} = 6+8\sqrt{R^2\sin^2\phi}$

$= 6+8(R\sin\phi)$ con $R=1$ $6+8\sin\phi$

Quindi $\dfrac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(6+8\sin\phi)\sin\phi\, d\phi\, d\theta}{4\pi(R)^2} = \dfrac{2\cancel{8\pi}(4+\pi)}{\cancel{4\pi}} = 8+2\pi = 14.2831$

(8) Determinare l'area della superficie cilindrica $x^2+y^2=4y$ compresa tra i piani $z=y$ e $z=0$



$\text{Area}(P) = \int_D |P_t(t,\theta)\times P_v(t,\theta)|\,dt\,d\theta$

"sup. cilindrica" = "sostegno della sup. parametrica"

$x^2+y^2-4y=0 \quad x^2+(y-2)^2=4$ è una sfera $C(0,2)$, $r=2$

Dato il cilindro, la sup. parametrica è:

$x^2+y^2=R^2;\ 0\leq z\leq h$ | h = altezza, R = raggio

$D=\{[0,2\pi]\times[0,h]\}$, $P(t,z)=(R\cos t, R\sin t, z)$

$P(t,z)=(\cos t, \sin t+2, z)$

$D=\{t\in[0,2\pi], z\in[0,y]\} \rightarrow z\in[0,\sin t+2]$

$P_t(t,z)=(-\sin t, \cos t, 0)$

$P_z(t,z)=(0,0,1)$

$|P_t(t,z)\times P_z(t,z)| = \sqrt{0+\cos^2(t)+\sin^2 t} = 1$

Sostituisco e calcolo l'integrale

$\text{Area}(P) = \int_0^{2\pi}\int_0^4 dz\,dt = \int_0^{2\pi}[z]_0^4\,dt = [4t]_0^{2\pi} = 8\pi = 25{,}1327$

(9) Calcolare l'area del trapezoide della funzione $f(x,y) = 6x$ sulla curva $y = 6x^2$ con $x \in [0,5]$

Uso la formula dell'area del trapezoide

Area (Trap(h)) = $\int_r h\,ds$

curva : $r(x) = (x, 6x^2)$ $\quad r'(x) = (1, 12x)$

funzione : $h(x) = 6x$

uso la relazion $ds = |r'(x)|dx = \sqrt{1+(12x)^2}\,dx$

Calcolo l'integrale $\int_0^5 6x\sqrt{1+144x^2}\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{48}\int_0^5 \frac{3}{2}\cdot 48 \cdot 6x\sqrt{1+144x^2}\,dx$

$= \frac{1}{72}\left(1+144x^2\right)^{3/2}\Big|_0^5 dx$

verifico: $\frac{d}{dx} = \frac{3}{2}(1+144x^2)^{1/2}(288x)$ ok

$= \frac{1}{72}\left(1+144(5)^2\right)^{3/2} - \frac{1}{72} = 3001.2362$

(10) Si fa ruotare attorno all'asse z la curva $(t^2, \log(t^2+1))$, $t \in [0,\pi]$, contenuta nel semipiano $xz, x \geq 0$, si ottiene un insieme S. Determinare $y > 0$ affinché il punto $\left(\frac{361}{100}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), y, \log\left(\frac{461}{100}\right)\right) \in S$

$x(t) = t^2$

$z(t) = \ln(t^2+1)$

Quando una curva del piano xz viene ruotata attorno all'asse z, otteniamo una superficie di rivoluzione. L'operazione di rotazione si ottiene intorno all'asse z, mantenendo z invariato e modificando le coordinate x e y in funzione dell'angolo di rotazione.

La rotazione avviene attorno a z quindi:

$x' = x\cos\theta$, $y' = x\sin\theta$, $z' = z$

$\forall$ punto della curva $C(t) = (t^2, \log(t^2+1))$, la rotazione attorno all'asse z darà i punti della superficie $(x(t), y(t), z(t)) \to (t^2\cos\theta, t^2\sin\theta, \ln(t^2+1))$ dove $\theta \in [0, 2\pi]$

A questo punto troviamo i punti che soddisfano le seguenti relazioni:

$x(t) = t^2\cos\theta = \frac{361}{100}\cos(\pi/8)$

$y(t) = t^2\sin\theta = y$

$z(t) = \log(t^2+1) = \log(461/100)$

Da $z(t) = \log(t^2+1)$ troviamo $t^2+1 = 461/100$ ovvero $t = \frac{461}{100} - 1 = \frac{19}{10}$

Usando $x(t)$ otteniamo

$t^2\cos(\theta) = \frac{361}{100}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ poiché $t^2 = \frac{361}{100}$ sostituisco:

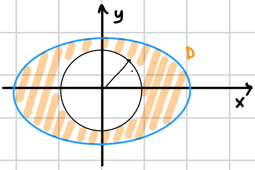
$\frac{361}{100}\cos(\theta) = \frac{361}{100}\cos(\pi/8)$ ovvero $\cos\theta = \cos(\pi/8) \rightarrow \theta = \pi/8$

Determiniamo y usando la relazione $y(t) = t^2 \sin\theta$:

$y = t^2 \sin(\pi/8) = \frac{361}{100}\sin(\pi/8) = 1.3814$

QUIZ MOODLE - SETTIMANA 7

(1) Calcolare il flusso del campo $F(x,y) = (5x + \log(y^2+1), y^2 - x^3)$ uscente dalla regione D compresa tra il cerchio $x^2+y^2=1$ e l'ellisse $x^2+100y^2=200$



questo è un piccolo abuso di notazione

$D = \{(x,y) : x^2+y^2-1 \leq D \leq x^2+100y^2-200\}$

Parametrizzo il dominio
$\begin{cases} \text{circonferenza: } (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi] \quad \text{centro in } (0,0) \\ \text{ellisse: } x^2+100y^2=200 \to \frac{x^2}{200} + \frac{100}{200}y^2 = 1 \to \frac{x^2}{200} + \frac{1}{2}y^2 = 1 \quad a=\sqrt{200} \quad b=\sqrt{2} \end{cases}$

ovvero $r_2 : (R a\cos t, R b \sin t) = (\sqrt{200}\cos t, \sqrt{2}\sin t),\ t \in [0, 2\pi]$

Utilizzo la formula della divergenza $\int_{\partial D} F \cdot N_{ext} = \int_D \operatorname{div} F\, dxdy = \int_D \partial_x F_1(x,y) + \partial_y F_2(x,y)\, dxdy$

$\left.\begin{array}{l} \partial_x F_1(x,y) = 5 \\ \partial_y F_2(x,y) = 2y \end{array}\right\}$ Flusso(D) $= \int_D 2y + 5\, dxdy = \int_D 2y + 5\int_D 1\, dxdy$

una funzione dispari in un dominio simmetrico ha l'integrale che assume valori opposti a dx e sx

considero $5\int 1\, dxdy$ che è $5 \cdot \text{Area}(D)$

Area $D = \pi ab - \pi r^2 = \pi\sqrt{200}\sqrt{2} - \pi$

area ellisse, area cerchio

$5\,\text{Area}(D) = 5\pi(20-1) = \overset{(5\pi \cdot 19)}{95\pi} = 298.4513$

(2) Calcolare il flusso di $F(x,y) = (6x, 9x-3y)$ attraverso la curva $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$

Il flusso uscente da un dominio stokiano è dato da $\int_r F \cdot N\, ds = \int_r F_1(x,y)\, dy - F_2(x,y)\, dx$

$F_1 = 6x \qquad r(t) = (\cos t, \sin t) \to \begin{cases} dx = -\sin t \\ dy = \cos t \end{cases} \qquad t = [0, \pi/2],\ \rho \in [0,1]$

$F_2 = 9x - 3y$

$F(r(t)) = (6\cos t, 9\cos t - 3\sin t) = \int_0^{\pi/2} 6\cos t \cos t - (9\cos t - 3\sin t)(-\sin t)\, dt = \int_0^{\pi/2} 6\cos^2 t - (-9\cos t\sin t + 3\sin^2 t)\, dt$

$\stackrel{!}{=} \int_0^{\pi/2} 6\cos^2 t + 9\cos t \sin t - 3\sin^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} -3\sin^2 t + 9\cos t\sin t + 6\cos^2 t$

$\stackrel{!}{=} -3\int \sin^2 t\, dt + 9\int \cos t \sin t\, dt + 6\int \cos^2 t\, dt = \frac{3(6+\pi)}{4} = 6.8561$

(3) Calcolare il flusso uscente da $F(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ uscente da $\partial B(0,9]$

Il flusso uscente da una superficie è $\int_{\partial D} F\cdot N_{ext}\, ds = \int_{\partial^+ D} F_1(x,y)dy - F_2(x,y)dx$

$r(t)=(9\cos t, 9\sin t),\ t\in[0,2\pi) \to \begin{cases} dx=-9\sin t \\ dy = 9\cos t \end{cases}$ $[ds = r'(t)dt]$

$$\int_0^{2\pi} \frac{9\cos t}{9^2\cos^2 t+9^2\sin^2 t}(9\cos t) - \frac{9\sin t}{9^2\cos^2 t+9^2\sin^2 t}(-9\sin t)\, dt$$

$$\overset{!}{=}\int_0^{2\pi} \frac{81\cos^2 t}{81}+\frac{81\sin^2(t)}{81}dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi = 6.2831$$

(4) Calcolare l'area della regione racchiusa dalla curva espressa in coordinate polari (ρ,t) dall'equazione $\rho=7t$, $t\in[0,2\pi]$ e dal segmento che congiunge l'origine con il punto di coordinate $(14\pi,0)$

L'area racchiusa da una curva in coordinate polari è data da: $A=\frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b}\rho^2 dt$ dove $\rho=\rho(t)$ è la funzione che descrive la curva

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(7t)^2dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}49t^2dt = \frac{49}{2}t^2dt = \frac{49}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{2\pi^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)\frac{49}{2} = \frac{8\pi^3}{3}\cdot\frac{49}{2} = \frac{196\pi^3}{3} = 2025.7434$$

Il triangolo formato dal segmento che congiunge l'origine al punto $(14\pi,0)$, coincide con la linea retta finale della curva, quindi non aggiunge ulteriore aree al calcolo. $\longrightarrow$ per $t=2\pi$, $\rho=14\pi$

(5) Dopo aver risolto $y'-3x^2y=6x^2$ con la condizione $y(0)=3$, calcolare $y(1)$

$$\begin{cases} y'=3x^2y+6x^2 \\ y(0)=3 \end{cases}$$

è un'equazione differenziale lineare del primo ordine

$a(x)=3x^2 \quad b(x)=6x^2$

$A(x)=\int a(x)dx = \int 3x^2 = x^3$

$B(x)=\int b(x)\cdot e^{-A(x)} = \int 6x^2\cdot e^{-x^3}$ = pongo $u=x^3$ $du=3x^2$ $= \int 2e^{-u}du = -2e^{-u} = -2e^{-x^3}+c$

A questo punto $e^{-x^3}y = -2e^{-x^3}+c$

$e^{A(x)}y = B(x)+C \Rightarrow B(x)e^{-A(x)}+Ce^{-A(x)}$

$y(x)=B(x)e^{A(x)}+Ce^{A(x)}$

$= -2\cancel{e^{-x^3}}\cancel{e^{x^3}} + ce^{x^3}$

$= -2 + Ce^{x^3}$

$y(0)=3 \qquad -2+Ce^{x^3}=3 \longrightarrow -2+Ce^0=3 \longrightarrow C=3+2=5$

$y(1) = -2+5e$

(6) Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy $y'=\frac{ty}{2\log y}$, $y(0)=e$. Determinare $y(t)$ e calcolare $y(\sqrt{6})$

$$\begin{cases} y'=\frac{ty}{2\log y} \\ y(0)=e \end{cases}$$

è un' equazione differenziabile a variabili separabili. Uso il metodo di risoluzione delle equazioni a variabili separabili

Risolviamo l'equazione in forma separabile

$h(y)=\frac{y}{2\log y}$ $\quad g(t)=t \longrightarrow \int \frac{dy}{h(y)}=\int g(t)dt \rightarrow \frac{dy\,2\log y}{y}=tdt$

Pongo $u=\log y$ quindi $y=e^u$ e $dy=e^u du$

Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo

$\frac{2u}{e^u}e^u du=tdt$ ovvero $2udu=tdt$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$\int 2udu=\int tdt$

$u^2=\frac{t^2}{2}+C$ dove C è una costante di integrazione.

Sostituendo $t=0$ e $u=1$ nell'equazione otteniamo $C=1$

Pertanto, ricordando che $u=\log y$ abbiamo

$(\log y)^2=\frac{t^2}{2}+1$. Prendendo la radice quadrata di entrambi i membri:

$\log y=\pm\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}$

Per garantire $y>0$ scegliamo $\log y=\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}$

con $y(t)=e^{\sqrt{\frac{t^2}{2}+1}}$

Sostituendo $t=\sqrt{6}$ otteniamo

$y(\sqrt{6})=e^{\sqrt{\frac{6}{2}+1}}=e^2$

QUIZ MOODLE_SETTIMANA 8

(1) 8 Libri di Inglese
7 Libri di Francese
5 Libri di Tedesco
Posso scegliere 3 libri, uno per ciascuna lingua in $8 \times 7 \times 5$ modi = 280 modi

(2) 18 ciambelle al cioccolato
12 ciambelle alla cannella
14 ciambelle allo zucchero caramellato
} 4 scolari

1 step - distribuisco 4×2 ciambelle di ogni tipo.
Rimangono 10 cioccolato, 4 cannella e 6 zucchero

2 step - distribuisco le ciambelle rimanenti
calcoliamo come distribuire le ciambelle rimanenti con:

$$\binom{n+4-1}{4-1} = \binom{n+3}{3} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

cioccolato $\binom{10+3}{3} = \frac{13!}{10!3!} = 286$

cannella $\binom{4+3}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$

zucchero $\binom{6+3}{3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{6!3!} = 84$

Il n° totale di distribuzione, poiché le distribuzioni di ogni tipo di ciambelle sono indipendenti, è dato dal prodotto $286 \cdot 35 \cdot 84 = 840840$ modi

(3) Comitati con 4 donne e 6 uomini. ogni comitato ha:
- 4 membri
- almeno 2 donne
- sgr Baggiolo sgra Baggiolo non posso essere scelti insieme

Almeno 2 donne:
2 donne e 2 uomini — $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$
$15 \cdot 6 = 90$
3 donne e 1 uomo — $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ $\binom{4}{1} = 4$
$20 \cdot 4 = 80$
4 donne e 0 uomini — $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Casi senza restrizioni
$90 + 80 + 15 = 185$

Escludiamo i comitati che includono entrambi i Baggiolo
2 Bagg. + 2 donne $\binom{5}{2} = 10$
2 Bagg + 1 donna e 1 uomo $\binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 15$ $\}$ 25

N.B.: non escludo i casi 2 Bagg + 2 uomini perché ogni comitato deve avere ALMENO 2 donne.

Casi totali: $185 - 25 = 160$ comitati

(4) 10 pesci marchiati su 30
Probabilità di pescare due pesci marchiati su 20?

$$\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{30-10}{18}}{\binom{30}{20}} =$$

$\binom{10}{2}$ modi per scegliere 2 pesci marchiati su 10
$\binom{30-10}{18}$ modi per scegliere i rimanenti pesci tra quelli non marchiati
$\binom{30}{20}$ modi per scegliere 20 pesci sui 30 totali

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!\,2!} \quad \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ modi}$$

$$\binom{20}{18} = \frac{20!}{18!\,2!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190 \text{ modi}$$

$$\binom{30}{20} = \frac{30!}{10!\,20!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 30045015$$

$$P(X=2) = \frac{45 \cdot 190}{30045015} = 0.0002$$

(5) Moneta lanciata 100 volte: Probabilità che esca una testa esattamente dopo 8 croci?
- ogni lancio è indipendente con probabilità $p = 1/2$ per la testa e $p = 1 - 1/2 = 1/2$ per la croce

La probabilità che il primo successo (testa) avvenga al k-esimo lancio è data da

$$P(X=k) = q^{k-1} \cdot p$$

$p \rightarrow$ probabilità di successo $= 1/2$
$k \rightarrow$ posizione di successo $= 9$
$q \rightarrow$ probabilità di fallimento $= 1/2$

$$P(X=9) = \frac{1}{2}^{9-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}^{9} = \frac{1}{512} = 0.00195$$

(6) urna con 18 palline da 1 a 18

si estraggono una a una <u>senza reimmissione</u>

si mettono in fila in posti numerati. Modi in cui le pari vanno sulle pari e le dispari sulle dispari?

- 9 palline pari : 9 permutazioni $9! = 362880$
- 9 palline dispari : 9 permut. $9! = 362880$

la disposizione di palline pari e dispari è indipendente

n° tot modi : $9! \times 9! = 131681894400$

(7) 12 carte a 4 giocatori

L'ordine non conta

N ha 3 carte

S ha 3 carte

E ha 3 carte

W ha 3 carte

utilizzo il coeff. multinomiale

$$\binom{12}{3,3,3,3} = \frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{12!}{1296} = 369600$$

(8) Casa di 4 piani (oltre al piano terra)

un ascensore parte dal piano terra con 5 persone

non sale nessun altro, ogni persona scende a caso ad uno dei due piani

Probabilità che l'ascensore si svuoti al terzo piano?

Si consideri come spazio campionario Ω delle 5-sequenze di I_4, si ha: $|\Omega| = 4^5$. n^k = numero di sequenze

L'evento A al quale siamo interessati è A = 5-sequenze di I_3 con almeno un 3, ovvero 5-sequenze di I_3 che non sono sequenze di I_2: $|A| = 3^5 - 2^5$.

Si ha $P(A) = |A| / |\Omega| = 0.20605$

QUIZ MOODLE_SETTIMANA 9

1) Un'urna contiene infinite palline. La pallina $k \in \{1,2,3...\}$ può essere estratta con probabilità $\frac{4}{5^k}$.
Estraendo una pallina, con quale probabilità sarà un multiplo di 3?

I multipli di 3 possono essere indicati come $k=3n$ con $n=1,2,3,...$

$\mathbb{P}(\text{multiplo di } 3) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(3n)$

ovvero otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5^{3n}} = \frac{\frac{4}{5^3}}{1-1/5^3}$ che è una serie geometrica

$\mathbb{P}(3^c)$: numero non multiplo di 3

$$\frac{4/5^3}{1-1/5^3} = \frac{4}{125} \cdot \frac{1}{1-1/125} = \frac{4}{\cancel{125}} \cdot \frac{\cancel{125}}{124} = \frac{4}{124} = \frac{1}{31} = 0.0322$$

2) 240 persone
- 95 fanno gli esercizi da soli
- 145 fanno gli esercizi in compagnia

Scelte tre persone a caso $\mathbb{P}$(persona fa es. da sola)?

Per risolvere l'esercizio conviene passare all'evento complementare $A^c = \{$nessuno fa gli es. da solo$\}$

$\mathbb{P}(A^c) = \frac{145}{240} \cdot \frac{144}{239} \cdot \frac{143}{238}$ → probabilità che facciano gli esercizi in compagnia

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{145}{240} \cdot \frac{144}{239} \cdot \frac{143}{238}\right) = 1 - \frac{2985840}{13651680} = 0.7812$$

3) In Veneto 35% non legge mai un quotidiano (L)
38% fa regolarmente attività sportiva (S)
16% non legge un quotidiano mai né fa attività sportiva (N)

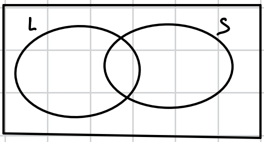
$\mathbb{P}$(non legge quotidiano, ma fa attività sportiva)

$|\Omega| = 100$

$|L| = 35$

$|S| = 38$

$|N| = 16$



$N = (L \cap S^c)$

$\mathbb{P}(L \cap S) = ?$

Probabilità condizionata $\mathbb{P}(L|S) = \frac{\mathbb{P}(L \cap S)}{\mathbb{P}(S)}$

$\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(L \cap S) + \mathbb{P}(L \cap S^c) \Rightarrow \mathbb{P}(L \cap S) = \mathbb{P}(L) - \mathbb{P}(L \cap S^c) \Rightarrow 0.35 - 0.16 = 0.19$

A questo punto calcoliamo $\mathbb{P}(L|S) = \mathbb{P}(L \cap S)/\mathbb{P}(S) = 0.19/0.38 = 0.5$

4) Due dadi indistinguibili. Dado 1 → equilibrato
Dado 2 → 6 nel 73% dei casi

Se non esce 6, probabilità di aver preso il dado equilibrato?

Per risolvere utilizziamo il Teorema di Bayes

"E" = "dado equilibrato" → $P(E) = P(E^c) = 0.5$

"T" = "non esce un 6" → $P(T|E) = 5/6$
$P(T|E^c) = 1 - 0.73 = 0.27$ (sul dado truccato)

Calcoliamo $$P(E|T) = \frac{P(T|E)\ P(E)}{P(T)} = \frac{P(T|E)\ P(E)}{P(T|E) \cdot P(E) + P(T|E^c) \cdot P(E^c)} = \frac{(5/6 \cdot 0.5)}{0.5517} = 0.7552$$

$\left(\frac{5}{6} \cdot 0.5\right) + (0.27 \cdot 0.5) = 0.5517$

5) Squadra di calcetto con 3 donne e 2 uomini scelti tra 10 donne e 7 uomini.
$\mathbb{P}$(Francesca e Giulia non sono insieme e Alberto nella squadra)

$\binom{10}{3}$ modi di scegliere le donne
$\binom{7}{2}$ modi di scegliere gli uomini
$N_{TOT\ SQUADRE} = \binom{10}{3} \cdot \binom{7}{2} = 120 \cdot 21$

Caso 1: Alberto deve essere nella squadra quindi abbiamo $\binom{10}{3} \cdot \binom{6}{1}$ modi
Caso 2: Francesca e Giulia non possono essere nella stessa squadra
2.1) nessuna delle due è nella squadra. Scelgo le donne in $\binom{8}{3}$ modi
2.2) una sola è nella squadra: $2(\circ F \circ G) \cdot \binom{8}{2} = 2 \cdot \binom{8}{2}$ modi

Le squadre che rispettano entrambe le condizioni sono:
$\left(\binom{8}{3} + 2\binom{8}{2}\right) \cdot \binom{6}{1}$
La probabilità si ottiene dividendo per lo spazio campionario, ovvero il numero totale di squadre
$P = \frac{\left(\binom{8}{3}+2\binom{8}{2}\right) \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}\binom{7}{2}} = \frac{(56 + 2(28)) \cdot (6)}{120 \cdot 21} = 4/15 = 0.2667$

6) Probabilità di fare bene il TOLC è pari a 0.36 Probabilità di finire gli studi in 3 anni è 0.85. Chi supera il TOLC ha probabilità 0.38 di finire gli studi entro il terzo anno.
Se studente si laurea entro il terzo anno, probabilità che abbia fatto bene il TOLC di ingresso?

B = Fare bene il TOLC = 0.36
F = Finire gli studi in 3 anni = 0.85
$P(F|B)$ = Finire gli studi superando il TOLC = 0.38

$P(B|F)$ = uso la formula di Bayes $= \frac{P(F|B) \cdot P(B)}{P(F)} = \frac{0.38 \cdot 0.36}{0.85} = 0.1609$

7) Per un candidato alle presidenziali di uno stato straniero, che si svolgono in tre turni, la probabilità di superare il primo turno è del 35%.
Una volta superato il primo turno la probabilità di passare il secondo è del 69% e la probabilità di vincere all'ultimo turno è del 55%.
Probabilità che il candidato vinca le elezioni?
$\mathbb{P}(tot) = 0.35 \cdot 0.69 \cdot 0.55 = 0.1328 = 13,28\%$

8) In un condominio il 30 % è soddisfatto, il 70% non lo è.

In un'assemblea partecipano il 45 % dei soddisfatti e il 62% degli insoddisfatti.

Un condomino viene pescato a caso. Probabilità che sia soddisfatto?

Su 100 – 30 soddisfatti $\rightarrow$ 45 % di S = $\frac{30}{100} \cdot 45 = 13.5$

– 70 insoddisfatti $\rightarrow$ 62 % di I = $\frac{70}{100} \cdot 62 = 43.4$

Tot partecipanti all'assemblea $13.5 + 43.4 = 56.9$

$P(S) = \frac{13.5}{56.9} = 0.2372$

Questo problema si poteva risolvere con la formula di Bayes

$P(S) = 0.3$, $P(S^c) = 0.7$, $P(A|S) = 0.45$, $P(A|S^c) = 0.62$

$P(S|A)$ = probabilità che il condomino sia soddisfatto, dato che ha partecipato all'assemblea

$$P(S|A) = \frac{P(A|S) \cdot P(S)}{P(A)} = \frac{P(A|S) \cdot P(S)}{P(A|S) \cdot P(S) + P(A|S^c) \cdot P(S^c)} = \frac{0.135}{0.569} = 0.237$$

9) $(P+|\text{Malato}) = 0.678$

$(P-|\text{Sano}) = 0.997$

Le persone che fanno questo tipo di test sono più a rischio della popolazione generale, poiché tipicamente lo fanno in quanto esposte a un contagiato $\rightarrow$ non si possono usare le statistiche nazionali per P(Malato)

In una farmacia, si osserva una probabilità totale, sugli antigenici rapidi fatti presso di loro, pari a $P(+) = 0.0101$.
Usando la formula della probabilità totale su P(+), trovare per quale valore di P(malato) si ottiene $P(+) = 0.0101$

La probabilità di P(+) può essere scritta come $P(+) = P(+|\text{Malato}) \cdot P(\text{Malato}) + P(+|\text{sano}) \cdot P(\text{sano})$ dove:

- $P(+|\text{Malato}) = 0.678$: P di ottenere un risultato + $\rightarrow$ la persona è malata;
- $P(-|\text{Sano}) = 0.997$: P di ottenere un risultato – $\rightarrow$ la persona è sana $(P(+|\text{sano}) = 1 - (P(-|\text{sano})) = 0.003$
- $P(\text{malato})$ = probabilità che una persona sia malata $\rightarrow$ quantità da determinare
- $P(\text{sano}) = 1 - P(\text{Malato})$ = p che una persona sia sana

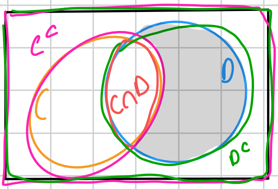
$P(+) = 0.678 \cdot P(\text{Malato}) + 0.003 \cdot 0.003 \cdot (1 - P(\text{Malato}))$

$0.0101 = (0.678 - 0.003) = 0.675 \cdot P(\text{Malato})$

$0.0071 = 0.675 \cdot P(\text{Malato})$

$P(\text{Malato}) = \frac{0.0071}{0.675} \approx 0.0105$

10) Siano C e D due eventi di uno spazio campionario (Ω, P) con $P(C) = 0.65$, $P(D) = 0.67$, e $P(C \cap D) = 0.38$.
Quanto vale $P(C^c \cap D)$?



$$P(C^c \cap D) = P(D) - P(C \cap D) = 0.67 - 0.38 = 0.29$$

11) Mazzo da 25 carte Nere e 16 carte Rosse
Si mescola e si pescano tre carte a caso, senza reinserimento
P che la terza sia nera?

Poiché l'estrazione è casuale e le carte non vengono rimesse nel mazzo, la probabilità che la terza carta sia nera alla terza estrazione dipende dalle carte che sono già state estratte nelle prime due estrazioni
→ la probabilità che la terza carta sia nera può essere calcolata come se fosse l'estrazione di una carta dal mazzo ancora completo, senza preoccuparsi di quali siano le prime due carte estratte, purché non influiscano sul numero di carte nere rimaste

All'inizio 25 carte nere su $25+16=41$ carte.
Probabilità media che la terza carta sia nera : $P = \frac{25}{41}$ ⇝ non stiamo considerando informazioni specifiche sulle prime due estrazioni!
$P \approx 0.6097$

12) Canale A = 93 studenti
Canale B = 129 studenti
5 Studenti a caso da $A \cup B$
P che almeno 5 Studenti siano del canale A?

n° tot studenti : 222
P(almeno 3 studenti di A) = P(3 studenti di A) + P(4 studenti di A) + P(5 studenti di A)

$$P(X=k) = \frac{\binom{n_A}{k} \cdot \binom{n_B}{m-k}}{\binom{n_T}{m}}$$

$n_A = 93$ studenti canale A
$n_B = 129$ studenti canale B
$n_T = 222$ studenti totali
$m = 5$ dimensione gruppo
k = numero di studenti scelti da A

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Caso } k=3 & P(X=3)\ \dfrac{\binom{93}{3}\binom{129}{2}}{\binom{222}{5}} \\[2ex] \text{Caso } k=4 & P(X=4)\ \dfrac{\binom{93}{4}\binom{129}{1}}{\binom{222}{5}} \\[2ex] \text{Caso } k=5 & P(X=5)\ \dfrac{\binom{93}{5}\binom{129}{0}}{\binom{222}{5}} \end{array}\right\} P_{TOT} = \text{Almeno 3 studenti}$$

QUIZ 10

1) Si considera l'esperimento aleatorio che consiste nel lanciare una moneta non truccata due volte. Si descriva lo spazio campionario Ω e si considerino:

- A_1 l'evento di avere T al 1° lancio;
- A_2 l'evento di avere T al 2° lancio;
- A_3 l'evento di avere T una ed una sola volta.

Gli eventi A_1, A_2, A_3 sono a due a due indipendenti

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_1)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{|A_2 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{|A_1 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

Ma non sono eventi indipendenti perché

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(A_3)$$

2) Una fabbrica produce dei bulloni con una percentuale di pezzi difettosi, in modo indipendente uno dall'altro, dello 0.3 %. I bulloni vengono venduti in confezioni da 100 pezzi, e queste vengono sostituite se vi sono almeno 2 (cioè $n \geq 2$) bulloni difettosi.

- individuare la variabile aleatoria che conta il numero di bulloni difettosi;
- determinare la probabilità di dover sostituire una data confezione.

Ogni bullone ha probabilità $p = 0.003$ di essere difettoso

$X \sim \text{Binomiale}(n = 100, p = 0.003)$

$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1)$

La probabilità per $X = k$ in una distribuzione binomiale è dato da $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

quindi, per $X = 0$

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{100}{0} (0.003)^0 (1-0.003)^{100} = (1-0.003)^{100}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \binom{100}{1} (0.003)^1 (1-0.003)^{99} = 100 \cdot 0.003 \cdot (1-0.003)^{99}$$

$\mathbb{P}(X \geq 2) \approx 0.0367$

3) Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0,957. Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio supponendo l'indipendenza dei diametri delle arance

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$X \sim (n=100,\ p=0.957)$

$$\mathbb{P}(X \geq 98) = \mathbb{P}(X=98) + \mathbb{P}(X=99) + \mathbb{P}(X=100) = \binom{100}{98}(0.957)^{98}(1-0.957)^{2} = \frac{\overset{100 \cdot 99}{\cancel{100!}}}{2!\,\cancel{98!}}(\ldots) + \ldots + \ldots$$

$$\stackrel{!}{=} 0.1233 + 0.0554 + 0.0123 \approx 0.1911$$

4) Un imballaggio di arance deve contenere frutti di diametro simile. La probabilità che un'arancia abbia un diametro accettabile è pari a 0.962.
Calcolare la probabilità che su 100 arance ve ne siano almeno 98 adatte all'imballaggio, utilizzando un'opportuna variabile aleatoria di Poisson.

$n = 100$

$p = 0.962$

$1 - p = 0.038 = \frac{\lambda}{n}$

$\lambda = 100 \cdot 0.038 = 3.8$

Definiamo la variabile aleatoria Y come il numero di arance non adatte all'imballaggio

$$\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2)$$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{3.8^0 e^{-3.8}}{0!} + \frac{3.8\, e^{-3.8}}{1!} + \frac{3.8^2 e^{-3.8}}{2!}$$

$$\mathbb{P}(Y \leq 2) \approx 0.26890$$

5) Una fabbrica produce motori elettrici. Un motore può essere, indipendentemente da un altro, difettoso con probabilità 0.01

5.1) probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi?

5.2) Approssimare la probabilità che un campione di 300 motori contenga esattamente 5 motori difettosi utilizzando un'opportuna variabile di Poisson

5.1) $X \sim (n=300,\ p=0.01)$

$$\mathbb{P}(X=5) = \binom{300}{5} p^5 (1-p)^{300-5} = 0.10099$$

$$\frac{300!}{5!\,(300-5)!} \cdot (0.01)^5 \cdot (0.99)^{295}$$

5.2) $\lambda = n \cdot p = 300 \cdot 0.01 = 3$

$$\mathbb{P}(Y=5) = \frac{\lambda^5 e^{-\lambda}}{5!} = 0.10082$$

6) Un'urna contiene i numeri da 1 a 26. Pesco a caso un numero e lo reinserisco nell'urna, ne pesco un'altro e lo reinserisco nell'urna, e così via...
Probabilità che esca 10 per la prima volta al 12° tentativo.
Questo esercizio segue una distribuzione geometrica $p(1-p)^{k-1} = P(X=k)$

$p = \frac{1}{26}$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \Rightarrow P(X=12) = \left(1-\frac{1}{26}\right)^{12-1}\left(\frac{1}{26}\right) = \left(\frac{25}{26}\right)^{11} \cdot \frac{1}{26} = 0.02498$$

7) Si distribuiscono a caso 1107 caramelle uguali a 100 bambini, indipendentemente una dall'altra.
Calcolare la probabilità che Mario riceva esattamente 11 caramelle.
Possiamo modellare l'esempio come una distribuzione binomiale

$n = 1107$

$p = \frac{1}{100}$ (i bambini ricevono le caramelle in modo indipendente)

$$P(X=11) = \binom{1107}{11} p^{11} (1-p)^{1107-11}$$

utilizziamo la distribuzione di Poisson:

$\lambda = 1107 \cdot 1/100 = 11.07$

$$\mathbb{P}(X=11) = \frac{11.07^{11} e^{-11.07}}{11!} = 0.11935$$ (... moodle dice 0.11995...)

8) Si considerano due mazzi di carte Rosse e Nere. Il mazzo A è normale (26 Rosse, 26 Nere). Il mazzo B ha 23 carte rosse e 28 nere
Il mazzo A di carte viene scelto con probabilità 0.47

Una volta scelto il mazzo si estrae una prima carta dal mazzo, la si rimette poi nel mazzo e si mescola. Si estrae poi una seconda carte.

Probabilità che la seconda carta sia rossa, sapendo che la prima è rossa, ma non sapendo quale dei due mazzi è stato scelto.

Per risolvere utilizzo il Teorema di Bayes, che permette di calcolare la probabilità condizionata

A: mazzo A scelto, $P(A) = 0.47$

B: mazzo B scelto, $P(B) = 1 - P(A) = 0.53$

R_1: 1ª carta estratta è Rossa

R_2: 2ª carta estratta è Rossa

$P(R|A) = 26/52 = 0.5$ carta Rossa dal mazzo A
$P(R|B) = 23/51$ carta Rossa dal mazzo B

Dopo ogni estrazione, la carta viene rimessa nel mazzo e mescolata. Questo significa che le estrazioni sono indipendenti. Quindi, per ogni mazzo, la probabilità di ottenere 2 carte rosse consecutive è:

$P(R_1 \cap R_2 | A) = P(R_1|A) \cdot P(R_2|A) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$

$P(R_1 \cap R_2 | B) = P(R_1|B) \cdot P(R_2|B) = 23/51 \cdot 23/51$

$P(R_1) = P(R_1|A)P(A) + P(R_1|B)P(B) = (0.5 \cdot 0.47) + (\frac{23}{51} \cdot 0.53) = 0.47402$

$P(R_2|R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{P(R_1 \cap R_2|A)P(A) + P(R_1 \cap R_2|B)P(B)}{P(R_1)} = \frac{(0.25 \cdot 0.47) + (\frac{23}{51} \cdot \frac{23}{51} \cdot 0.53)}{P(R_1)} = 0.4753$

9) Si mettono a caso 187335 oggetti in 23150 cassetti, indipendentemente l'uno dall'altro. Approssimare, usando un'opportuna variabile di Poisson, la probabilità che il primo cassetto contenga esattamente 8 oggetti.

$X \sim (n = 187335, p = 1/23150)$

$P(X=8) =$

$\lambda = 187335 \cdot \frac{1}{23150} = \frac{8.092224622^8 e^{-8.092224622}}{8!} = 0.13951$

10) In un laboratorio c'è una sequenza (infinita) di computer numerati. Ognuno di questi può essere infettato da un virus, indipendentemente dall'altro con probabilità 0.4.
Probabilità che testandoli uno ad uno occorre testare almeno i primi 24 per individuare la presenza di un virus (= i primi 23 non sono infettati)

p che non sia infettato $= 1 - 0.04 = 0.96$

$P(\text{nessuno dei primi 23 infettato}) = 0.96^{23} \approx 0.3910$

11) In alcuni telefilm polizieschi il criminale "ha questa insusuale caratteristica" con una probabilità di $0.8 \cdot 10^{-6}$, indipendentemente dagli altri individui (4 milioni di abitanti)

- Approssimare con un'opportuna variabile discreta la possibilità che ce ne sia almeno un'altra ($n \geq 2$)

$n = 4.000.000{,}000 \quad p = 0{,}8 \cdot 10^{-6}$

$\stackrel{!}{=} 4 \cdot 10^6$

$\frac{3.2^0 e^{-3.2}}{0!} = e^{-3.2}$

$\frac{3.2^1 e^{-3.2}}{1!} = 3.2 e^{-3.2}$

$\lambda = 4 \cdot 10^6 \cdot 0.8 \cdot 10^{-6} = 3.2$

$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \longrightarrow P(X \leq 1) : P(X=0) + P(X=1)$

$P(X \leq 1) = e^{-3.2}(1 + 3.2)$

quindi $P(X \geq 2) = 0.8288$ (... su moodle mette 0.8640 ...)

QUIZ 11

1) 21 persone estraggono una ad una due palline a testa senza reimmissione da un'urna che contiene inizialmente 86 palline Rosse e 131 palline Nere. (quindi la persona 1 estrae 2 palline che non vengono rimesse dentro, la persona 2 ne estrae 2 dalle rimanenti, ecc...) Determinare il numero atteso di persone che pescano due palline dello stesso colore.

Passo 1: probabilità che una persona peschi due palline dello stesso colore

$$P(RR) = \frac{\binom{86}{2}}{\binom{217}{2}} = \frac{\text{modi per scegliere due palline rosse}}{\text{modi per scegliere due palline qualsiasi}} = \frac{86 \cdot 85}{217 \cdot 216}$$

$$P(NN) = \frac{\binom{131}{2}}{\binom{217}{2}} = \frac{131 \cdot 130}{217 \cdot 216}$$

P(stesso colore) = P(RR) + P(NN) = P(RR) + P(NN)

Passo 2: Numero atteso di persone che pescano due palline dello stesso colore

$$Y = \sum_{i=1}^{21} X_i$$

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{21} E[X_i]$$

E[Y] = 21 · P(stesso colore) · ogni persona estrae in condizioni simili

$$E[Y] = 21 \cdot \left(\frac{86 \cdot 85}{217 \cdot 216} + \frac{131 \cdot 130}{217 \cdot 216}\right) = 21 \cdot 0.5193 \approx 10.91$$

2) Due giocatori disputano una serie di partite che termina solo quando uno dei due arriva a vincerne due. Supponiamo che ogni partita venga vinta, indipendentemente dalle altre, dal primo giocatore con probabilità 0.42 e dall'altro con probabilità 1-0.42. Sia N la variabile aleatoria uguale al numero di partite disputate.

Calcolare la densità discreta di N e dedurne il valore atteso.

La competizione termina in N partite (N = 2,3,4)

N=2 un giocatore vince entrambe le prime due partite ovvero AA o BB

$$P(N=2) = p^2 + (1-p)^2 = 0.5128$$

N=3 un giocatore vince due partite e l'altro una. AAB o BBA (ma anche ABA e BAB)

$$P(N=3) = 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) + 2(1-p)^2 \cdot p = 2 \times 0.2436$$

Il valore atteso da $E[N] = 2 \cdot P(N=2) + 3P(N=3)$

$$= 2 \cdot 0.5128 + 3 \cdot 0.4872$$

$$= 2.4872$$

3) Il cosiddetto test del DNA non fa altro che misurare la lunghezza di K geni, senza controllare le basi azotate che li compongono. Per ognuno di tali geni, la probabilità che due dati individui presentino una lunghezza uguale viene assunta come pari a $1/10$. Un'altra ipotesi che viene comunemente fatta è che le lunghezze di geni diversi siano indipendenti l'una dall'altra. Supponiamo di misurare la lunghezza di $K = 7$ geni da un campione di DNA trovato su una scena del crimine. Supponendo di avere un database di 18566679 individui, calcolare il numero medio di individui che si troveranno con il test del DNA che corrisponde al campione incriminato.

Il problema deve essere risolto modellando il numero di individui che corrispondono al campione di DNA come una variabile aleatoria binomiale.

Ci sono 18566679 individui nel database. Per ogni individuo, la probabilità che i loro geni corrispondano al campione è $p = \left(\frac{1}{10}\right)^K = \left(\frac{1}{10}\right)^7$

Il numero X di individui che corrispondono al campione segue una distribuzione binomiale

$X \sim B(n,p) \longrightarrow B(18566679, (1/10)^7)$

Per una variabile aleatoria binomiale $X \sim \text{Binomiale}(n,p)$, il valore atteso è dato da $E[X] = n \cdot p$

$E[X] = 18.566.679 \cdot \frac{1}{10000000} \approx 1.8567$

4) In una zona sismica del pianeta, il numero di terremoti è descritto da un processo di Poisson.

In un mese ci sono in media 9 terremoti di magnitudo maggiore di 4 (i mesi sono assunti di uguale durata). Se durante due mesi se ne sono verificati 20, qual è la probabilità che 9 di questi si siano verificati nel primo mese?

Il valore atteso di una Poisson corrisponde a λ.

$\left.\begin{array}{l} X_1 : \text{terremoti nel primo mese} \\ X_2 : \text{terremoti nel secondo mese} \end{array}\right\}$ entrambe hanno parametro λ

$X = X_1 + X_2 \rightarrow$ Poisson di parametro $\lambda_X = 18$

Dato che $X_1 + X_2 = 20$, la distribuzione condizionata di X_1 è binomiale

$X_1 | (X_1 + X_2) \sim \text{Binomiale}(20, p)$ dove p è la proporzione della media di terremoti del primo mese rispetto al totale

$p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{9}{18} = 0.5 \longrightarrow X_1 | (X_1 + X_2) \sim \text{Binomiale}(20, 0.5)$

La probabilità che $X_1 = 9$ è data dalla funzione di probabilità della binomiale

$P(X_1 = 9 | X_1 + X_2 = 20) = \binom{20}{9} \cdot (0.5)^9 \cdot (0.5)^{11} = \binom{20}{9} (0.5)^{20} = 167960 \cdot (0.5)^{20} \approx 0.1602$

5) Una variabile aleatoria discreta X assume i valori $\{1, 2, \dots, 9\}$ con densità discreta pari a

$$p_X(k) = \frac{14-k}{81}, \qquad k = 1, \dots, 9.$$

Determinare la varianza di X

Per calcolare la varianza di X, dobbiamo seguire questi passi:

1. Verificare che $p_X(k)$ sia una densità valida
2. Calcolare $E[X]$
3. Calcolare $E[X^2]$
4. Usare la formula della varianza $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

La densità discreta è data da $p_X(k) = \frac{14-k}{81}$, $k = 1, \dots, 9$

Per verificare che sia valida, dobbiamo calcolare la somma totale delle probabilità

$$\sum_{k=1}^{9} p_X(k) = \sum_{k=1}^{9} \frac{14-k}{81} = \sum_{k=1}^{9} (14-k) = \sum_{k=1}^{9} 14 - \sum_{k=1}^{9} k$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{9} 14 = 14 \cdot 9 = 126 \\ \sum_{k=1}^{9} k = \frac{9(9+1)}{2} = 45 \end{array}\right\}$$ La densità è valida perchè otteniamo $\sum_{k=1}^{9} p_X(k) = \frac{126-45}{81} = \frac{81}{81} = 1$ □

Per calcolare $E[X]$ usiamo $\sum_{k=1}^{9} k \cdot p_X(k) = \sum_{k=1}^{9} k \frac{14-k}{81}$

$$E[X] = \frac{1}{81} \sum_{k=1}^{9} (k \cdot (14-k)) = \frac{1}{81} \sum_{k=1}^{9} (14k - k^2)$$

Quindi $E[X] = \frac{1}{81} \sum_{k=1}^{9} 14k - \sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{14 \cdot 45 - \left(\frac{9 \cdot (9+1) \cdot (2 \cdot 9+1)}{6}\right)}{81} = \frac{630 - 285}{81} = \frac{345}{81} = 4.2592$

$$E[X^2] = \frac{1}{81} \sum_{k=1}^{9} (k^2 \cdot (14-k)) = \frac{1}{81} \sum_{k=1}^{9} 14k^2 - k^3 = \frac{1}{81} \left(\sum_{k=1}^{9} 14k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^3 \right) = \frac{655}{27} = 24.2592$$

Calcoliamo ora la varianza di X, $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^3 = 655/27 - (155/27)^2 = 4460/729 = 6.1179$

6) Un mazzo ha 9 carte Rosse e 6 carte Nere. Se ne estraggono tre. Qual è la varianza del numero di carte Rosse estratte?

Il mazzo ha $N=15$ carte totali

X è il numero di carte rosse nelle tre estrazioni

$$\left.\begin{array}{l} N=15 \\ k=9 \\ n=3 \end{array}\right\} Var(X) = n \cdot \overset{p}{\frac{k}{N}} \cdot \frac{N-k}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$ è la varianza di una distribuzione ipergeometrica

$$= 3 \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{15} \cdot \frac{15-3}{15-1} \approx 0.6171$$

7) Supponiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate per attacchi violenti di asma in un dato ospedale sia una variabile aleatoria di Poisson di media 33. In giornate in cui l'inquinamento dell'aria aumenta, la distribuzione di attacchi su un giorno diventa una legge di Poisson con media 66. Se in un anno non bisestile(quindi formato da 365 giorni) 45 giorni sono di alto inquinamento, qual è la varianza dei ricoveri per asma in quell'anno?

Assumiamo che il numero giornaliero di persone ricoverate sia indipendente da ciò che succede nelle altre giornate.

normalmente, $\lambda = 33$

in giornate in cui l'inquinamento dell'aria aumenta, $\lambda = 66$ → 45 giorni su 365

$$\lambda' = \frac{45(66) + (365-45)(33)}{365} = 37$$ è la varianza giornaliera media

La varianza totale per l'anno si ottiene moltiplicando la varianza giornaliera media per il numero totale di giorni (le variabili giornaliere sono indipendenti)

Varianza totale annuale $= 365 \cdot 37 = 13505$

8) Sia X variabile di Poisson di parametro 0.6. Sia poi $g(x) = (0.6)^x$ per ogni $x \geq 0$. Calcolare il valore atteso di $g(X)$.

Il valore atteso di funzioni composte di 1 variabile aleatoria si calcola come:

$$E[g \circ X] =: E[g(X)] = \sum_{x \in Im X} g(x)\, p_X(x)$$

$p_X(x) = P(X=x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ quindi $E[g(X)] = (0.6)^x \cdot \frac{(0.6)^x e^{-0.6}}{x!}$

questa è una serie di Taylor per $e^{(0.6)^2}$. Infatti, la somma $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!}$ è la definizione di e^a. In questo caso $a = (0.6)^2 = 0.36$

$$E[g(X)] = e^{-0.6} \cdot e^{0.36} = e^{-0.24} = 0.7866$$

9) Sia X una variabile aleatoria su uno spazio con probabilità (Ω, P) la cui funzione distribuzione è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x < -7, \\ 1/23, \ -7 \le x < 0, \\ 6/69, \ 0 \le x < 10, \\ \frac{6}{46} + \frac{17}{46}\frac{x-10}{7}, \ 10 \le x < 17 \\ 1, \ x \ge 17. \end{cases}$$

Quanto vale $P(X \in]0, 17[)$?

$P(X \in]0,17[) =$

10) Il periodo di quarantena per una certa malattia varia tra 2 e 14 giorni dal contagio. Il tempo che intercorre tra il contagio e l'apparizione dei sintomi è descritto da una variabile aleatoria continua X la cui densità su quell'intervallo è data da (t è espresso in giorni)

$$f(t) = \begin{cases} k(t-2)(14-t), & t \in [2, 14] \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

per qualche $k \in \mathbb{R}$. Determinare la probabilità che i sintomi appaiano entro 6 giorni dal contagio.

Per determinare la probabilità che i sintomi appaiano entro 6 giorni dal contagio, dobbiamo calcolare l'integrale della densità di probabilità $f(t)$ nell'intervallo da 2 a 6.

La funzione $F(t)$ è una funzione di densità di probabilità, quindi deve soddisfare la condizione che l'integrale della densità su tutto l'intervallo di supporto sia uguale a 1. In altre parole, dobbiamo avere $\int_2^{14} F(t)\,dt = 1$

Sostituendo la funzione $f(t) = k(t-2)(14-t)$, otteniamo: $\int_2^{14} k(t-2)(14-t)dt = 1$. Risolviamo per determinare k

$$k\int_2^{14} 16t - t^2 - 28 = k\left[8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 28t\right]_2^{14} = k\left(\left[8(14)^2 - \frac{1}{3}(14)^3 - 28(14)\right] - \left[8(4) - \frac{1}{3}(8) - 28(2)\right]\right)$$

$$= k\,288 = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{288}$$

$$P(2 \le t \le 6) = \int_2^6 \frac{1}{288}(t-2)(14-t)dt = \frac{1}{288}\int_2^6 16t - t^2 - 28 = \frac{1}{288}\left[8t^2 - \frac{1}{3}t^3 - 28t\right]_2^6$$

$$= \frac{1}{288}\left[\left(\left(8(36) - \frac{1}{3}(6)^3 - 28(6)\right) - \left(32 - \frac{8}{3} - 56\right)\right]\right] = 7/27 = 0.2592$$

12)

Il numero di automobili che passa al casello autostradale è descritta da un Processo di Poisson di intensità 570 all'**ora**. Qual è la probabilità che, ad un dato istante, la prima automobile passi dopo 0.11 **minuti**?

$\lambda_{min} = 570/60 = 9.5$ automobili al minuto

Per un processo di Poisson la, distribuzione del tempo fino al primo evento è descritta dalla distribuzione esponenziale $f(t) = \lambda_{min} e^{-\lambda_{min} t}$

La probabilità che la prima automobile passi dopo un tempo t è data dalla funzione di sopravvivenza della distribuzione esponenziale $P(T>t) = e^{-\lambda_{min} t}$

In questo caso $t = 0.11$ e $\lambda_{min} = 9.5$ quindi $P(T>0.11) = e^{-9.5(0.11)} = 0.3517$

QUIZ 12

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

1) I risultati di un test universitario sono distribuiti con una variabile normale di media 78 e deviazione standard 16.

Soglia di punteggio affinchè la probabilità di fallire al test sia la più vicina al 10.03%?

$P(X \le x) = 0.1003$

Convertire alla variabile standardizzata $z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dove X è il valore soglia da determinare

Per $P(Z \le z) = 0.1003 \rightarrow z \approx -1.28$ $\left(1 - \Phi(1.28)\right)$

Convertire Z in X

$X = \mu + z\sigma$

$X = 78 + (-1.28)(16)$

$X = 78 - 20.48 = 57.5200$

2) X variabile di media $\underset{}{\overset{(\mu)}{12}}$ e d.s. $\overset{(\sigma)}{4.4}$. P che $X \in [11.2, 12.3]$

$z := \frac{X-12}{4.4} = \quad \frac{11.2-12}{4.4} < z < \frac{12.3-12}{4.4} \rightarrow -0.1818 < z < 0.0682$

$P(11.2 \le x \le 12.3) = P(Z \le 0.0682) - P(Z \le -0.1818)$

$\approx 0.5239 - (1 - (0.5714)) = 0.5279 - 0.4286 = 0.0993$

(Approssimato a 0.07)

3) Un autovelox misura la velocità delle auto in tangenziale di Padova dove il limite è 93 km/h. Chi supera i 93.5 km/ora prende la multa. Le velocità sono distribuite con $\mu = 93$ e $\sigma = 10$

P che $X \geq 93.5$?

$\frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow Z \geq \frac{93.5-93}{10} = 0.05 \qquad P(X \geq 93.5) = 1 - \Phi(0.05) = 1 - 5199 = 0.4801$

4) Durata di una pila per orologi è una v.a. di media 101 ore e deviazione standard $\sigma = \sigma$ ore.
Utilizzando il TCL calcolare il minimo valore di σ affinché utilizzando 260 pile si possa garantire il funzionamento dell'orologio per almeno 26412 ore con una probabilità superiore a 0.0749 (senza correzione di continuità)

La somma delle durate delle 260 pile è $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_{260}$ dove X_i è la durata della i-esima pila

La media è $\mu_{S_n} = n \cdot \mu = 260 \cdot 101 = 26'260$

La deviazione standard è $\sigma_{S_n} = \sqrt{n} \cdot \sigma = \sqrt{260} \cdot \sigma$

La probabilità che $S_n \geq 26412$ è $P(S_n \geq 26412 = P\left(Z \geq \frac{26412 - \mu S_n}{\sigma_{S_n}}\right)$

Sappiamo che $P(Z \geq z) = 0.0749$ quindi $z = 1.44$ $\rightarrow \left(P = 1 - \Phi(1.44) = 1 - 0.9251 = 0.0749\right)$

$Z = \frac{26412 - \mu S_n}{\sigma_{S_n}} \qquad 1.44 = \frac{26412 - 26260}{\sqrt{260}\,\sigma} \longrightarrow \sigma = \frac{152}{1.44 \cdot \sqrt{260}} \approx 6.55$

5) Esperimento di telepatia, una persona scelta a caso da un computer tra 4 individui effettua una telefonata ad uno sperimentatore. Probabilità che lo sperimentatore indovini correttamente chi lo sta chiamando almeno 1369 volte su 5608 esperimenti

$1369 \leq X \leq 5608$

ogni interlocutore ha probabilità 1/4 di essere scelto.

Secondo il TCL, per n sufficiente grande, la distribuzione binomiale può essere approssimata ad una distribuzione normale

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

dove $\mu = n \cdot p = 1402$

$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1051.5} = 32.42$ $\longrightarrow$ $P(B(n,p) \leq x) \approx P(N(np, np(1-p)) \leq x)$

$P(B(5608, 1/4) \leq 1369) \approx P(N(1402, 1051.5) \leq 1369)$

$P(X \geq 1369) \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{1369-1402}{32.42} = \frac{-33}{32.42} \approx -1.02$

$P(Z \geq -1.02) = 1 - P(Z \leq -1.02) \approx 1 - (1 - \Phi(1.02)) = 1 - 1 + \Phi(1.02) = 0.8461$

6) Un gioco elettronico fa uscire 3 valori:

- 1 con $p = 1/2$
- 2 con $p = 1/4$
- 3 con $p = 1/4$

si effettuano n giocate indipendenti e si sommano i punteggi
n affinche la somma sia $\Sigma n \geq n\, 1{,}71$ con $P \geq 0.7703$

$P(X=1) = 1/2, \quad P(X=2) = 1/4, \quad P(X=3) = 1/4$

media(μ_x) = $E[X] = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1.75$

varianza(σ_x^2): $\sigma_x^2 = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 3^2 \cdot \frac{1}{4} = 3.75$$

$$\sigma_x^2 = 3.75 - 1.75^2 = 0.6875$$

Sia $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$

$\mu_{S_n} = 1.75n$

$\sigma_{S_n}^2 = n \cdot \sigma_x^2 = 0.6875n$

$\sigma_{S_n} = \sqrt{n\, 0.6875}$

Applico il TCL come

$S_n \sim N(\mu_{S_n}, \sigma_{S_n}^2)$

$P(S_n \geq 1.71\, n) = P\left(Z \geq \frac{1.71 \cdot n - 1.75 \cdot n}{\sqrt{n \cdot 0.6875}}\right)$

$P(Z \leq z) = 0.7703 \longrightarrow z \approx 0.74$

quindi $\frac{1.71n - 1.75n}{\sqrt{n\, 0.6875}} = -0.74 \longrightarrow$ $n \approx 236$

QUIZ 13

1) Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori -2,-1,0,1; la variabile Y assume i valori 0,1,2. La densità congiunta $p_{(X,Y)}$ vale:

$$p_{(X,Y)}(-2,0) = 1/31, \quad p_{(X,Y)}(-1,0) = 3/31, \quad p_{(X,Y)}(0,0) = 5/31, \quad p_{(X,Y)}(1,0) = 5/31,$$
$$p_{(X,Y)}(-2,1) = 2/31, \quad p_{(X,Y)}(-1,1) = 4/31, \quad p_{(X,Y)}(0,1) = 1/31, \quad p_{(X,Y)}(1,1) = 4/31,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,2) = 1/31, \quad p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/31, \quad p_{(X,Y)}(0,2) = 2/31, \quad p_{(X,Y)}(1,2) = ?.$$

Dopo aver trovato il valore di $p_{(X,Y)}(1,2)$, indicare qui sotto il valore di $P(XY \le 0 \mid X > -2)$.

x \ y	0	1	2	
-2	1/31	2/31	1/31	$\to P_X(-2) = 4/31$
-1	3/31	4/31	2/31	$\to P_X(-1) = 9/31$
0	5/31	1/31	2/31	$\to P_X(0) = 8/31$
1	5/31	4/31	x/31	$\to P_X(1) = 9+x/31$
	$\downarrow$ $P_Y(0) = 14/31$	$\downarrow$ $P_Y(1) = 11/31$	$\downarrow$ $P_Y(2) = 5+x/31$	

$\sum P_X = 1$ quindi $4/31 + 9/31 + 8/31 + 9+x/31 = 1 \longleftrightarrow \frac{30+x}{31} = 1 \longleftrightarrow x = 1$

$\sum P_Y = 1$ quindi $14/31 + 11/31 + 5+x/31 = 1 \longleftrightarrow \frac{30+x}{31} = 1 \longleftrightarrow x = 1$

La probabilità $p(X,Y)(1,2) = 1/31$

$$P(XY \le 0 \mid X > -2) = \frac{P((XY \le 0) \cap (X > -2))}{P(X > -2)}$$

I valori di $x > -2$ sono $X = -1, 0, 1$

Quindi $P(X > -2) = \sum_y p(X,Y)(-1,y) + \sum_y p(X,Y)(0,y) + \sum_y p(X,Y)(1,y)$
$\stackrel{!}{=} 3/31 + 4/31 + 2/31 + 5/31 + 1/31 + 2/31 + 5/31 + 4/31 + 1/31$ $\Big\}$ $P(X > -2) = 27/31$

Affinché $P((XY \le 0) \cap (X > -2))$. Condizioni per $XY \le 0$:

se $X > 0 \to Y \le 0$

se $X = 0 \to Y$ qualsiasi

se $X < 0 \to Y \ge 0$

$P((XY \le 0) \cap (X > -2)) = p(-1,0) + p(-1,1) + p(-1,2) + p(0,0) + p(0,1) + p(0,2) + p(1,0)$
$\stackrel{!}{=} 3/31 + 4/31 + 2/31 + 5/31 + 1/31 + 2/31 + 5/31 = 22/31$

$$P(XY \le 0 \mid X > -2) = \frac{\frac{22}{31}}{\frac{27}{31}} = 22/27 = 0.8148$$

2)

Siano X ed Y due variabili aleatorie. La variabile X assume i valori -2,-1,0,1; la variabile Y assume i valori 0,1,2. La densità congiunta $p_{(X,Y)}$ vale:

$$p_{(X,Y)}(-2,0) = 1/46, \quad p_{(X,Y)}(-1,0) = 3/46, \quad p_{(X,Y)}(0,0) = 5/46, \quad p_{(X,Y)}(1,0) = 5/46,$$
$$p_{(X,Y)}(-2,1) = 2/46, \quad p_{(X,Y)}(-1,1) = 4/46, \quad p_{(X,Y)}(0,1) = 1/46, \quad p_{(X,Y)}(1,1) = 4/46,$$

$$p_{(X,Y)}(-2,2) = 1/46, \quad p_{(X,Y)}(-1,2) = 2/46, \quad p_{(X,Y)}(0,2) = 2/46, \quad p_{(X,Y)}(1,2) = 16/46.$$

Calcolare la covarianza di X, Y.

X \ y	0	1	2	
-2	1/46	2/46	1/46	→ 4/46
-1	3/46	4/46	2/46	→ 9/46
0	5/46	1/46	2/46	→ 8/46
1	5/46	4/46	16/46	→ 25/46
	↓ 14/46	↓ 11/46	↓ 21/46	

$\mathbb{E}(XY) = \sum_x \sum_y xy\, p_{x,y}(x,y)$

$= -2(2/46) - 4(1/46) - 4/46 - 2(2/46) + 4/46 + 2(16/46) =$

$= \cancel{-4/46} - 4/46 - 4/46 - 4/46 \cancel{+4/46} + 32/46$

$= 32/46 - 12/46 = 20/46$

$\mathbb{E}(x) = -2(4/46) - 9/46 + 25/46 = 8/46$

$\mathbb{E}(y) = 11/46 + 2(21/46) = 53/46$

$Cov(x,y) = \mathbb{E}(x,y) - \mathbb{E}(x) \cdot \mathbb{E}(y) = 20/46 - (8/46 \cdot 53/46) = 0.2344$

3)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la densità congiunta di (X, Y), così definita:

- $c(x^2 + xy)$ se $0 \leq y \leq x \leq 1$
- 0 altrimenti

Calcolare

$$P\left(X^2 < Y \mid X < \frac{1}{3}\right).$$

Dobbiamo trovare la costante c usando la condizione di normalizzazione
La regione in cui $f(x,y) > 0$ è data da $0 \leq y \leq x \leq 1$. Quindi: $\int_0^1 \int_0^x c(x^2+xy)\,dy\,dx = 1$
Calcoliamo l'integrale: $\int_0^x (x^2+xy)\,dy = \int_0^x x^2 dy + \int_0^x xy\,dy$

$\int_0^x x^2 dy = x^2 y \Big|_0^x = x^3, \quad \int_0^x xy\,dy = x\frac{y^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^3}{2} \longrightarrow \int_0^x (x^2+xy)\,dy = x^3 + x^3/2 = 3x^3/2$

L'integrale esterno risulta $\int_0^1 3x^3/2\, c\,dx = c\,3/2 \int_0^1 x^3 dx = c\,3/2 \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = c\,3/2 \cdot 1/4$
otteniamo $3/8\, c = 1 \rightarrow c = 8/3$
$P(x^2 < Y \mid X < 1/3) = \dfrac{P((X^2<Y) \cap (X<1/3))}{P(X<1/3)}$

... La regione $X<1/3$ corrisponde a $0 \le y \le x \le 1/3$ quindi: $P(X<1/3) = \int_0^{1/3} \int_0^x \frac{8}{3}(x^2+xy)\,dy\,dx = \ldots = 1/81$

La regione in cui $X^2<Y$ e $X<1/3$ è definita da $X^2<Y \le X$ con $0 \le X \le 1/3$. Quindi:

$P((X^2<Y) \cap (X<1/3)) = \int_0^{1/3} \int_{x^2}^x \frac{8}{3}(x^2+xy)\,dy\,dx = 2698/4374$

$$P(X^2<Y \mid X<1/3) = \frac{\frac{2698}{4374}}{\frac{1}{81}} = \frac{2698 \cdot 81}{4374} = 49,9629\,\% \approx 0.4996$$

4) Angela e Tiziano arrivano in dipartimento uno indipendentemente dall'altro. Angela arriva alle 8 e X_A minuti, dove X_A è uniformemente distribuita tra le 0 e 25 minuti. Tiziano invece arriva in dipartimento X_T minuti dopo le 8:00 con X_T variabile esponenziale di parametro 0.2. Calcolare la probabilità che Tiziano arrivi in dipartimento prima di Angela.

Per calcolare la probabilità che Tiziano arrivi in dipartimento prima di Angela, dobbiamo determinare: $P(X_T<X_A)$

dove $X_A \sim$ Uniforme $[0,25]$

$X_T \sim$ Esponenziale $(\lambda = 0.2)$

I due eventi sono indipendenti, quindi possiamo calcolare questa probabilità integrando la densità congiunta $f_{X_A,X_T}(x_A,x_T) = f_{X_A}(x_A) \cdot f_{X_T}(x_T)$ sull'insieme $\{(x_A,x_T) : x_T < x_A\}$

La densità di X_A è $f_{X_A}(x_A) = \begin{cases} 1/25, & \text{se } 0 \le x_A \le 25 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

La densità di X_T è $f_{X_T}(x_T) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x_T}, & \text{se } x_T \ge 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

Calcolo la probabilità $P(X_T<X_A) = \int_0^{25} \int_0^{x_A} f_{X_T}(x_T) f_{X_A}(x_A)\, dx_T\, dx_A$

$P(X_T<X_A) = \int_0^{25} \int_0^{x_A} (0.2e^{-0.2x_T}) \cdot \frac{1}{25}\, dx_T\, dx_A$

$\overset{!}{=} \int_0^{25} [-e^{-0.2x_T}]_0^{x_A} = \int_0^{25} \frac{1}{25}(1-e^{-0.2x_A})\,dx_A = \frac{1}{25} \int_0^{25} e^{-0.2x_A}\,dx_A = \frac{1}{25} \cdot 5(1-e^{-5}) = \frac{1-e^{-5}}{5} \approx 0.8013$

5) Sia (X,Y) congiunta continua con densità $f(x,y) = e^{-x-y}$ se $x,y>0$, 0 altrimenti. Calcolare la probabilità dell'evento $X+Y<2/17$.

$F(x,y) \begin{cases} e^{-x-y}, & x,y>0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$P(X+Y<2/17)$: L'evento $X+Y<2/17$ definisce una regione nel piano (x,y), ossia la parte sotto la retta $x+y = 2/17$ con $x,y>0$

La probabilità è data dall'integrale della densità $f(x,y)$ sopra tale regione

... $P(X+Y<2/17) = \int_0^{2/17}\int_0^{2/17-x} f(x,y)\,dy\,dx$

$= \int_0^{2/17}\int_0^{2/17-x} e^{-x-y}\,dy\,dx = \int_0^{2/17} [-e^{-y}]_0^{2/17-x} = \int_0^{2/17} 1-e^{-2/17+x} = \int_0^{2/17} e^{-x}dx - e^{-2/17}\int_0^{2/17} 1\,dx$

$= (1-e^{-2/17}) - e^{-2/17}\cdot 2/17$

$= 1-e^{-2/17}(1+2/17) = 0{,}0064$

6)

Sia (X, Y) congiunta con densità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{45}{18}x^2 + \frac{9}{18}y^2 \text{ se } x, y \in [0,1] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare la covarianza di X, Y.

$Cov[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$ $\quad \mu_x = E[X], \mu_y = E[Y]$

$= E[XY] - \mu_x\mu_y$

Applicazione della densità congiunta: La densità $f(x,y)$ è data da $f(x,y)$. Poiché $x,y \in [0,1]$, l'integrale va calcolato su $[0,1]\times[0,1]$

Normalizzazione della densità: Verifichiamo che $f(x,y)$ sia una densità $\int_0^1\int_0^1 (\frac{45}{18}x^2 + \frac{9}{18}y^2)\,dx\,dy$

Risolvendo $\int_0^1\int_0^1 \frac{45}{18}x^2\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 9/18\, y^2\,dx\,dy$

$= 5/6 + 1/6 = 1 \longrightarrow$ la densità è valida

Calcolo di $\mathbb{E}[X]$ $\quad f_X(x) = \int_0^x \frac{45}{18}x^2 + \frac{9}{18}y^2 dy = \left[\frac{45}{18}x^2 y\right]_0^x + \frac{9}{18}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x = \frac{45}{18}x^3 + \frac{1}{6}x^3 = \frac{8}{3}x^3$

$E[X] = \int_0^1 \frac{8}{3}x^3 = \frac{8}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{4} = \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Calcolo di $\mathbb{E}[X] = f_Y(y) = \int_0^y \frac{45}{18}x^2 + \frac{9}{18}y^2 dx = \frac{45}{18}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y + \left[\frac{9}{18}y^2 x\right]_0^y = \frac{5}{6}y^3 + \frac{9}{18}y^3 = \frac{4}{3}y^3$

$E[Y] = \int_0^1 \frac{4}{3}y^3 = \frac{4}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1\int_0^1 xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy\left(\frac{45}{18}x^2 + \frac{9}{18}y^2\right)dx\,dy =$

$\int_0^1\int_0^1 \frac{5}{2}x^3y + \frac{9}{18}y^3x\,dx\,dy = \int_0^1\left[\frac{5}{2}x^3\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \frac{9}{18}x\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1\right]dx$

$= \int_0^1 \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{8}x\,dx = \frac{5}{4}\int_0^1 x^3 + \frac{1}{8}\int x = \frac{5}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) =$

Una covarianza negativa indica che i dati hanno comportamenti mediamente discordi

7)

Sia (X, Y) congiunta continua con densità $f_{X,Y}(x, y) = \frac{c}{(1 + x + y)^{17}}$ se $x, y \geq 0$, 0 altrimenti, dove c è una opportuna costante. Calcolare la covarianza di X, Y.