Quiz 3

Question 1
Not complete
Marked out of 1.00
Flag question

Dire se le affermazioni sono vere o false

Una funzione differenziabile è di classe C^1 — Choose...

Una funzione che ammette derivate parziali in un punto è differenziabile su quel punto — Choose...

Una funzione differenziabile in un punto p è continua in p — Choose...

Una funzione che ammette derivate parziali in p è continua in p — Choose...

Una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n$ è differenziabile in $p \in D$ se e solo se $\nabla f(p)$ esiste ed è — Choose...

$$\lim_{x \to p} f(x) - [f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)] = 0.$$

Una funzione di variabile **reale** derivabile in t_0 è differenziabile in t_0 — Choose...

Check

1) FALSO: UNA FUNZIONE C^1 E' DIFFERENZIABILE, MA NON NECESSARIAMENTE VALE IL VICEVERSA

2) FALSO: NON E' DETTO CHE LE DERIVATE PARZIALI ESISTANO SU OGNI DIREZIONE

3) VERO: PER PROPOSIZIONE 3.5

4) FALSO: $\exists$ FUNZIONI CHE AMMETTONO DERIVATE PARZIALI IN OGNI PUNTO, MA CHE NON SONO CONTINUE

5) FALSO: E' $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x) - [f(p) + \nabla f(p)(x-p)]}{|x-p|}$

6) VERO: IN 1D DERIVABILE $\equiv$ DIFFERENZIABILE

Back

Question **2**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Rispondere alle domande seguenti

Se una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ha un minimo locale in $p \in D$ allora $\nabla f(p) = 0$	Choose...
Un punto critico è necessariamente un massimo o minimo locale	Choose...
Se una funzione di classe C^2 ha un punto critico, il criterio dell'Hessiana permette sempre di concludere sulla natura del punto	Choose...
La definizione di massimo o minimo coinvolge solo delle disuguaglianze, non il gradiente o l'hessiana	Choose...
Un punto critico $p \in D$ è di sella per una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se e solo se per ogni intorno U di p esistono $x_1, x_2 \in U \cap D$ tali che $f(x_1) \leq f(p)$ e $f(x_2) \geq f(p)$	Choose...

Check

1) FALSO: NEGLI ESTREMI DEL DOMINIO, $P = $ MIN. LOCALE $\not\Rightarrow \nabla f(P) = 0$

2) FALSO: POTREBBE ESSERE UN PUNTO DI SELLA

3) FALSO: SE $\det(\text{Hess}\, f(P)) = 0$, NULLA SI PUÒ CONCLUDERE

4) VERO: PER DEFINIZIONE DI MASSIMO O MINIMO

5) FALSO: LE DISUGUAGLIANZE SONO STRETTE: $f(x_1) < f(P) < f(x_2)$

Question **3**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Nell'esercizio precedente, la funzione f è differenziabile nell'origine?

Select one:

- a. SI
- b. NO

Check

Question **4**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f(x,y) = \dfrac{7y^3}{x^2+y^2}$ fuori dall'origine, estesa per continuità nell'origine.

Calcolare, se esiste, $\partial_y f(0,0)$. Viene un intero: scriverlo senza virgole

Answer:

Check

4

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7y^3}{x^2+y^2} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$\partial_y f(0,0) = ?$

SOL. 1) USO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA DIREZIONALE (3.1 pag. 44)

$$\boxed{\partial_y f(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+ty) - f(P)}{t}}$$

2) PER CALCOLARE $\partial_y f(0,0)$ MI SERVE IL VALORE DI $f(0,0)$. PER CONTINUITÀ:

$$f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7y^3}{x^2+y^2}$$ USO RESTRIZIONE RETTE IN COORDINATE POLARI

$$(x,y) \to (\rho\cos t, \rho\sin t) \to \lim_{\rho\to 0} \frac{7\rho^3 \sin^3 t}{\rho^2\cos^2 t + \rho^2 \sin^2 t} = \frac{7\rho^3 \sin^3 t}{\rho^2} = 7\rho\underbrace{\sin^3 t}_{\text{LIMITATA}} \quad 0 \text{ PER } \rho \to 0$$

QUINDI, $|g(\rho) - \rho| \leq \rho_{\to 0 \text{ PER } \rho \to 0} \Rightarrow g(\rho) \to 0 \Rightarrow g(0,0) = 0$

3) SOSTITUISCO NELLA DEFINIZIONE INIZIALE

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - g(0,0)}{t} = \left(\frac{7t^3}{t^2} - 0\right)\frac{1}{t} = \frac{7t^3}{t^3} = 7$$ ✓

3 RISPOSTA: NO

SPIEGAZIONE: UNA FUNZIONE f È DIFFERENZIABILE IN UN PUNTO $\Leftrightarrow$ $\boxed{\exists \lim_{x\to P} \frac{f(x) - f(P) + \nabla f(P)(x-P)}{|x-P|}}$

SOSTITUISCO:

$$[\nabla f(0,0) = (0,7)]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x) - f(0,0) + \nabla f(0,0)(x-(0,0))}{|x-(0,0)|} \stackrel{\uparrow}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{7y^3}{x^2+y^2} - (0,7)(x,y)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{7y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$ FACCIO UNA RESTRIZIONE DI D SULLE RETTE $y = mx$

$$= \frac{7m^3}{x^2+m^2x^2} = \frac{7m^3x^3}{x^2(1+m^2)} = \frac{7m^3x}{1+m^2}$$

DIPENDE DA $m \Rightarrow$ LIM $\nexists \Rightarrow$ F NON E' DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

Question 5

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\partial_x f(1,2) = -3, \partial_y f(1,2) = 5$

Determinare $\frac{d}{dt} f(1+t, 2e^t)_{t=0}$.

Answer:

Check

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad C^1$:

$\partial_x F(1,2) = -3$

$\partial_y F(1,2) = 5$

CALCOLARE $\frac{d}{dt} F(1+t, 2e^t) \Big|_{t=0}$

SOL. APPLICO LA REGOLA DELLA CATENA:

$$\boxed{(F \circ x)'(t_0) = \nabla F(x(t_0))\, x'(t_0)}$$

$x(t) = (1+t,\ 2e^t)$, $\quad x(0) = (1,2)$

$x'(t) = (1,\ 2e^t)$, $\quad x'(0) = (1,2)$

$x(t_0) = (1,2) \Rightarrow \nabla F(x(t_0)) = \nabla g(1,2) = (-3,5)$

ORA SOSTITUISCO:

$(g \circ x)'(0) = (-3,5)(1,2) = -3 + 10 = 7$ ✓

Question 6

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Due amici effettuano due percorsi distinti su una montagna che ha la forma del grafico di una funzione f di classe C^1 sul piano. Entrambi i percorsi passano per il punto $P=(1,0,f(1,0))$.

Luigi passa nel punto P all'istante $t=0$ e la sua quota ad un istante t è data da $f(\cos(t),2\sin(2t))=9\cos^2(t)+8\sin^2(2t)+14\sin(2t)\cos(t)$, Francesca passa nel punto P all'istante $t=1$ e la sua quota ad ogni istante t è data da $f(t,t^2-1)=2-7t+5t^2+7t^3+2t^4$.

Determinare il tasso di crescita massimo di f nel punto $(1,0)$. Scrivere -1000 se i dati non sono sufficienti per concludere.

Answer:

Check

$F : C^1$

$P = (1, 0, F(1,0))$

LUIGI: $F(\cos t, 2\sin(2t)) = 9\cos^2(t) + 8\sin^2(2t) + 14\sin(2t)\cos(t)$

FRANCESCA: $F(t, t^2-1) = 2 - 7t + 5t^2 + 7t^3 + 2t^4$

CALCOLARE TASSO DI MASSIMA CRESCITA DI F NEL PUNTO 1,0

SOL. IL TASSO DI MASSIMA CRESCITA IN UN PUNTO P E' DATO DA: (PROPOSIZIONE 3.3)

$$\boxed{D_{u_{MAX}} F(P) = |F(P)|}$$

DEVO, OVVIAMENTE, TROVARE IL GRADIENTE DI F IN (1,2). PER FARLO UTILIZZO LE INFORMAZIONI SUL PASSAGGIO DI LUIGI E FRANCESCA. QUESTO PERCHE', SE IO IN UN PUNTO DI UNA FUNZIONE C^1 CONOSCO COME VARIA RISPETTO A 2 DIREZIONI, POSSO CONOSCERE COME VARIA RISPETTO A TUTTE LE DIREZIONI

1. LUIGI: $F(\cos t, 2\sin(2t)) = 9\cos^2(t) + 8\sin^2(2t) + 14\sin(2t)\cos(t)$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(\cos t, 2\sin(2t)) = (-\sin t, 4\cos(2t))$$

$$x'(t_0) = x'(0) = (0, 4)$$

DERIVO X(t) RISPETTO A t

$$\to F'(x(t)) = -18\sin(t)\cos(t) + 32\sin(2t)\cos(2t) + 28\cos(2t)\cos t - 14\sin(t)\sin(2t)$$

$$F'(x(0)) = -18\,\cancel{\sin(0)}^{0}\cos(0) + 32\,\cancel{\sin(0)}^{0}\cos(0) + 28\cos(0)\cos(0) - 14\,\cancel{\sin(0)}^{0}\,\cancel{\sin(0)}^{0}$$

$$\overset{!}{=} 28$$

ORA APPLICO LA REGOLA DELLA CATENA PER TROVARE IL GRADIENTE:

$$\boxed{(F \circ x)'(t_0) = \nabla F(x(t_0))\, x'(t_0)}$$

$$\nabla F(x(t_0)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x(t_0)), \frac{\partial}{\partial y} F(x(t_0))\right)$$

$$\to \underbrace{(g \circ x)'(t_0)}_{28} = \frac{\partial}{\partial x} F(x(t_0)) \cdot \underbrace{x'_x(t_0)}_{0} + \frac{\partial}{\partial y} F(x(t_0))\, \underbrace{x'_y(t_0)}_{4}$$

$$\to \frac{\partial}{\partial y} F(x(t_0)) = \frac{(F \circ x)'(t_0)}{x'_y(t_0)} = \frac{28}{4} = 7$$

2. FRANCESCA: PROCEDO ANALOGAMENTE

$$F(t,t^2-1) = 2 - 7t + 5t^2 + 7t^3 + 2t^4 \Big|_{t_0=1}$$

$$X(t) = (t, t^2-1)$$
$$X'(t) = (1, 2t)$$
$$X'(1) = (1,2)$$

DERIVO RISPETTO A t

$$g'(x(t)) = -7 + 10t + 21t^2 + 8t^3$$
$$F'(x(1)) = -7 + 10 + 21 + 8 = 32$$

APPLICANDO LA REGOLA DELLA CATENA: $\underbrace{(g \circ x)'(t_0)}_{32} = \frac{\partial}{\partial x} F(x(t_0)) \underbrace{x'_x(t_0)}_{1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} F(x(t_0))}_{7} \underbrace{x'_y(t_0)}_{2}$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F(x(t_0)) = \frac{(F \circ x)'(t_0) - \frac{\partial}{\partial y} F(x(t_0)) x'_y(t_0)}{x'_x(t_0)} = \frac{32 - 7 \cdot 2}{1} = 32 - 14 = 18$$

QUINDI, $\nabla F(1,0) = (18,7)$. ORA FINALMENTE POSSO CALCOLARE IL TASSO DI MASSIMA CRESCITA:

$$D_{v_{MAX}} F(1,0) = |\nabla F(1,0)| = \sqrt{18^2 + 7^2} = \sqrt{373} = 19.3132$$

Question 7

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f(x,y) = x^2 + 9y^2 - 8x^2y + 4$. Determinare il valore del massimo assoluto di f sul quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$ (NB: se in p c'è il massimo assoluto si chiede quindi il valore di $f(p)$).

Answer:

Check

$F(x,y) = x^2+9y^2-8x^2y+4$

TROVARE MAX ASSOLUTO DI f NEL QUADRATO $[-1,1]\times[-1,1]$

SOL. IL MASSIMO ASSOLUTO E' DATO DA: $\max\left[\{\text{punti critici interni a } D\} \cup \{\text{massimi di } f \text{ su } \partial D\}\right]$

1. TROVO I PUNTI DI MAX RELATIVO INTERNI A D

$\nabla F(x,y) = (2x-16xy,\ 18y-8x^2)$ PER TROVARE I PUNTI CRITICI, $\nabla F(x,y)=0$

$$\begin{cases}\partial_x = 0\\ \partial_y=0\end{cases} \to \begin{cases}2x-16xy=0\\ 18y-8x^2=0\end{cases} \to \begin{cases}2x-16x\frac{4}{9}x^2=0\\ y=\frac{4}{9}x^2\end{cases} \to \begin{cases}2x-\frac{64}{9}x^3=0\\ y=\frac{4}{9}x^2\end{cases} \to \begin{cases}\mathrm{I}\ \ x-\frac{32}{9}x^3=0\\ \mathrm{II}\ \ y=\frac{4}{9}x^2\end{cases}$$

(I): $9x-32x^3=0 \to x(9-32x^2)=0$ Sol: $x=0 \wedge x=-\frac{3\sqrt{2}}{8} \wedge x=\frac{3\sqrt{2}}{8}$

(II): $y=\frac{4}{9}x^2$ Sol. $y=0 \wedge y=\frac{1}{8} \wedge y=\frac{1}{8}$

QUINDI, I PUNTI CRITICI SONO: $A=(0,0)$ $B=\left(\frac{3\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8}\right)$, $C=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8}\right)$

LA MATRICE HESSIANA DI F E' $\text{Hess } F(x,y) = \begin{bmatrix}2-16y & -16x\\ -16x & 18\end{bmatrix}$

$\boxed{A=(0,0)}$

$\text{Hess } F(0,0) = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 18\end{bmatrix}$, $\det = 36>0$. POICHÉ $\partial^2_{xx}(A)>0$

$A(0,0)$ E' PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$\boxed{B=\left(\frac{3\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8}\right)}$

$$\text{Hess } F(B) = \begin{bmatrix}2-16\cdot\frac{1}{8} & -16\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8}\\ -16\,\frac{3\sqrt{2}}{8} & 18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -6\sqrt{2}\\ -6\sqrt{2} & 18\end{bmatrix}$$

$\det = -72<0$

B E' PUNTO DI SELLA

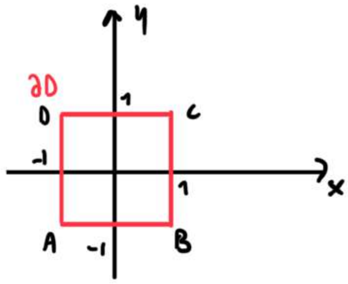
$\boxed{C=\frac{-3\sqrt{2}}{8},\frac{1}{8}}$

$$\text{Hess } F(C) = \begin{bmatrix}0 & 6\sqrt{2}\\ 6\sqrt{2} & 18\end{bmatrix}$$

$\det = -72<0$

C E' PUNTO DI SELLA

2. STUDIO I PUNTI DEL BORDO ∂D



1) LATO AB

PER $y=-1$, $x \in [-1,1]$

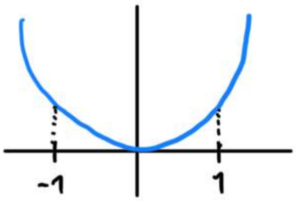
STUDIO $f(x,-1) = x^2+9+8x^2+4 = 9x^2+13=0$

è una parabola con concavità verso l'alto.

ha un minimo in $x=0$, massimo in $x=1$, $x=-1$

PER $x=-1 \to g(-1,-1)=22$

PER $x=1$, $g(1,-1)=22$



2) LATO BC

PER $x=1$, $y \in [-1,1]$

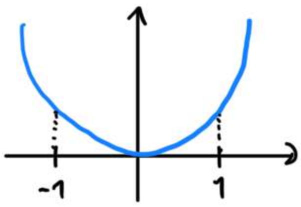
STUDIO $f(1,y) = 1+9y^2-8y+4 = 9y^2-8y+5$

è una parabola con concavità verso l'alto.

ha massimo in $f(1,1)$, $g(1,-1)$

$g(1,1)=6$

$g(1,-1)=22$



3) LATO CD

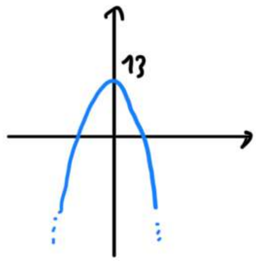
$x \in [-1,1]$, $y=1$

$g(x,1) = x^2+9-8x^2+4 = -7x^2+13$

parabola con concavità verso il basso

il massimo è nel vertice: $x_v = -\frac{b}{2a} = 0$

$V=(0,13)$



4) LATO DA

$x=-1$, $y \in [-1,1]$

$g(-1,y) = 1+9y^2-8y+4 = 9y^2-8y+5$

È IDENTICO AL LATO BC, CIOÈ HA 2 MAX IN $(1,22)$, $(-1,22)$

CONCLUSIONE: IL MASSIMO ASSOLUTO DI F È IN $y=22$

Question **8**

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si supponga che

$$f(1,3) = -6, \quad \partial_x f(1,3) = 7, \quad \partial_y f(1,3) = 8.$$

Usando l'approssimazione con il piano tangente, fornire il valore approssimato di $f(1.08, 2.95)$.

Answer:

Check

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad C^1$ [RIVEDERE ES. 3.22 PER MAGGIORI INFO]

$F(1,3) = -6 \qquad \partial_x F(1,3) = 7$

$\partial_y F(1,3) = 8$

CALCOLARE IL VALORE APPROSSIMATO DI $F(1.08, 2.95)$

SOL. USO LA LINEARIZZAZIONE (DEF. 3.6) DI UNA FUNZIONE MEDIANTE LA SUA FUNZIONE AFFINE IN UN PUNTO P:

$$\boxed{L(x,y) \approx F(P) + \nabla F(P)\big((x,y) - P\big)}$$

LA LINEARIZZATA IN $P = (1,3)$ È:

$$L(x,y) = F(1,3) + \nabla F(1,3)\big[(x,y)-(1,3)\big] \overset{!}{=} -6 + \nabla F(1,3)[x-1, y-3] \overset{!}{=} -6 + (7,8)(x-1, y-3)$$

QUINDI, $F(1{,}08, 2{,}95) \approx L(1{,}08, 2{,}95)$

$$\rightarrow L(1{,}08, 2{,}95) = -6 + (7,8)(1{,}08-1,\ 2{,}95-3) \overset{!}{=} -6 + 7(1{,}08-1) + 8(2{,}95-3) \overset{!}{=} -5.84$$ ✓

Question 9

Not complete

Marked out of 1.00

Flag question

Sia f una funzione di classe C^2 definita su $\mathbb{R}^2$. Si supponga che il punto $(1,1)$ sia critico per f, e che le derivate doppie di f in $(1,1)$ siano date da

$$\partial^2_{x,x} f(1,1) = -1,\ \partial^2_{x,y} f(1,1) = 2,\ \partial^2_{y,y} f(1,1) = -8.$$

Determinare la natura del punto critico.

Select one:

- a. minimo locale stretto
- b. massimo locale stretto
- c. sella
- d. non voglio rispondere
- e. altro
- f. non si può concludere da queste informazioni

Check

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad C^2$

PUNTO CRITICO: $(1,1)$

$\partial^2_{xx} F(1,1) = -1$

$\partial^2_{xy} F(1,1) = 2$

$\partial^2_{yy} F(1,1) = -8$

DETERMINARE NATURA DEL PUNTO CRITICO

SOL. 1) SCRIVO LA MATRICE HESSIANA DI F IN $(1,1)$:

$$\text{Hess } F(1,1) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$$

2) CALCOLO IL DETERMINANTE:

$$\det \text{Hess } F(1,1) = 8 - 4 = 4 > 0$$

3) ORA USO IL CRITERIO DELL'HESSIANA (TEOREMA 4.2)

POICHÉ $\partial^2_{xx} F(1,1) = -1 < 0$, F IN $(1,1)$ HA UN MASSIMO LOCALE STRETTO ✓