A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ, R. SÁNCHEZ

3º Appello — 9 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 3, 1, -2)$, $u_2 = (-2, 1, 2, -1)$, $u_3 = (0, 7, 4, -5)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si verifichi che $U \subset W$ e si determini un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$.

(c) Si scriva un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

(d) Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \mathrm{Ker}(f)$ e $W = \mathrm{Im}(f)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Siano assegnati i vettori $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (2, 1, -1)$, $v_3 = (0, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esistono delle funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tali che $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = 3$ e $f(v_3) = t$.

(b) Per il valore di t trovato al punto (a), si scrivano le matrici (rispetto alle basi canoniche) di tutte le funzioni lineari f che soddisfano le richieste indicate al punto (a).

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le funzioni lineari associate alle matrici trovate al punto (b).

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (1, 2, -2)$ e il piano π di equazione $x + 2y - z + 3 = 0$.

(a) Si determini la lunghezza del segmento $A'B'$, proiezione ortogonale del segmento AB sul piano π.

(b) Si determinino le equazioni della retta $\ell \subset \pi$ formata dai punti $P \in \pi$ tali che $\mathrm{dist}(P, A) = \mathrm{dist}(P, B)$.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $C = (2, 0, -4)$ e raggio 4 con il piano π.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3° Appello — 9 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 1, 3)$, $u_2 = (-1, 3, 1, -2)$, $u_3 = (4, 3, 5, 5)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si verifichi che $U \subset W$ e si determini un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$.

(c) Si scriva un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

(d) Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \mathrm{Ker}(f)$ e $W = \mathrm{Im}(f)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Siano assegnati i vettori $v_1 = (2, -1, 0)$, $v_2 = (3, -2, -3)$, $v_3 = (1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esistono delle funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tali che $f(v_1) = 1$, $f(v_2) = -2$ e $f(v_3) = t$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si scrivano le matrici (rispetto alle basi canoniche) di tutte le funzioni lineari f che soddisfano le richieste indicate.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le funzioni lineari associate alle matrici trovate al punto (b).

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (1, 3, -1)$, $B = (2, -3, 0)$ e il piano π di equazione $2x - y + z - 1 = 0$.

(a) Si determini la lunghezza del segmento $A'B'$, proiezione ortogonale del segmento AB sul piano π.

(b) Si determinino le equazioni della retta $\ell \subset \pi$ formata dai punti $P \in \pi$ tali che $\mathrm{dist}(P, A) = \mathrm{dist}(P, B)$.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $C = (1, 2, -5)$ e raggio 3 con il piano π.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 9 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (4, 2, -1, 2)$, $u_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (-7, 1, 4, 1)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si verifichi che $U \subset W$ e si determini un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$.

(c) Si scriva un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

(d) Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \mathrm{Ker}(f)$ e $W = \mathrm{Im}(f)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Siano assegnati i vettori $v_1 = (0, 3, 2)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $v_3 = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esistono delle funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tali che $f(v_1) = 3$, $f(v_2) = 1$ e $f(v_3) = t$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si scrivano le matrici (rispetto alle basi canoniche) di tutte le funzioni lineari f che soddisfano le richieste indicate.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le funzioni lineari associate alle matrici trovate al punto (b).

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (2, 3, 0)$, $B = (-1, -3, 3)$ e il piano π di equazione $3x + y - 2z - 2 = 0$.

(a) Si determini la lunghezza del segmento $A'B'$, proiezione ortogonale del segmento AB sul piano π.

(b) Si determinino le equazioni della retta $\ell \subset \pi$ formata dai punti $P \in \pi$ tali che $\mathrm{dist}(P, A) = \mathrm{dist}(P, B)$.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $C = (3, -2, -1)$ e raggio 2 con il piano π.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò, R. Sánchez

3º Appello — 9 settembre 2013

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (-1,-2,3,1)$, $u_2 = (2,1,2,-1)$, $u_3 = (-5,-7,7,4)$.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si verifichi che $U \subset W$ e si determini un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $W = U \oplus L$.

(c) Si scriva un sistema di equazioni lineari che abbia U come insieme delle soluzioni.

(d) Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $U = \mathrm{Ker}(f)$ e $W = \mathrm{Im}(f)$? (la risposta deve essere giustificata)

Esercizio 2. Siano assegnati i vettori $v_1 = (1,3,0)$, $v_2 = (2,1,2)$, $v_3 = (0,-5,2) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esistono delle funzioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tali che $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = 1$ e $f(v_3) = t$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a), si scrivano le matrici (rispetto alle basi canoniche) di tutte le funzioni lineari f che soddisfano le richieste indicate.

(c) Si determini l'intersezione dei nuclei di tutte le funzioni lineari associate alle matrici trovate al punto (b).

Esercizio 3. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) È possibile stabilire, senza calcolare gli autovalori e autovettori, se la matrice A è simile a una matrice diagonale? (la risposta deve essere giustificata).

(b) Si determinino il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi della matrice A.

(c) Si determini una *base ortonormale* di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sono dati i punti $A = (-2,4,-1)$, $B = (1,-2,2)$ e il piano π di equazione $2x - y + 3z + 4 = 0$.

(a) Si determini la lunghezza del segmento $A'B'$, proiezione ortogonale del segmento AB sul piano π.

(b) Si determinino le equazioni della retta $\ell \subset \pi$ formata dai punti $P \in \pi$ tali che $\mathrm{dist}(P,A) = \mathrm{dist}(P,B)$.

(c) Si determini il raggio della circonferenza ottenuta intersecando la sfera di centro $C = (1,-1,-3)$ e raggio 1 con il piano π.