COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
1 Settembre 2014

Esercizio 1. [11 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10^3 \, \frac{(s+0.1)(s^2+1)}{s^2(s+1)\,(s^2+10s+100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$ e si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. [9 punti] Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s^2+8s+32)(s-4)}{(s-1)^2(s+a)^2(s+b)^2},$$

dove a e b sono due parametri reali **positivi** incogniti, entrambi **diversi** da $\frac{8}{3}$.

i) Si determinino i valori di a e b, sapendo che $s=0$ e $s=-\frac{8}{3}$ sono entrambi punti doppi del luogo positivo delle radici della funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuta per retroazione unitaria negativa a partire da $K \cdot G(s)$, con $K \in \mathbb{R}, K > 0$;
[Attenzione: chi non fosse in grado di determinare il valore di a e b, può proseguire i successivi punti dell'esercizio assumendo $a = \frac{7}{2}, b = \frac{3}{2}$, valori che NON coincidono comunque con quelli che uno otterrebbe effettuando i calcoli che impongono che $s=0$ e $s=-\frac{8}{3}$ siano entrambi punti doppi].

ii) Si tracci il luogo delle radici positivo, sapendo che esso non ha altri punti doppi oltre a quelli banali per $K=0$ e ai due punti doppi in $s=0$ e $s=-\frac{8}{3}$;

iii) si discuta, basandosi esclusivamente sul precedente luogo positivo, la stabilità BIBO della funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

al variare di K sui reali positivi.

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{100\left(1+\frac{s^2}{100}\right)}{(1+s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}.$$

i) Si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$ tale che l'errore di regime permanente al gradino del risultante sistema retroazionato soddisfi $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.01$, e la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia $\omega_a \simeq 1$ rad/s e $m_\phi \simeq 90°$;

ii) si progetti un compensatore stabilizzante di tipo PI $C_2(s)$ tale che l'errore di regime permanente alla rampa lineare del risultante sistema retroazionato soddisfi $e_{rp}^{(2)} \simeq 1$, e la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ abbia $\omega_a \simeq 1$ rad/s e $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5 punti] Si consideri un modello lineare e tempo-invariante descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \qquad t \geq 0,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$.

1. Si definisca la risposta in frequenza $W(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, del sistema e si dimostri che, nell'ipotesi di stabilità BIBO del sistema, essa è finita per ogni valore di $\omega \in \mathbb{R}$.

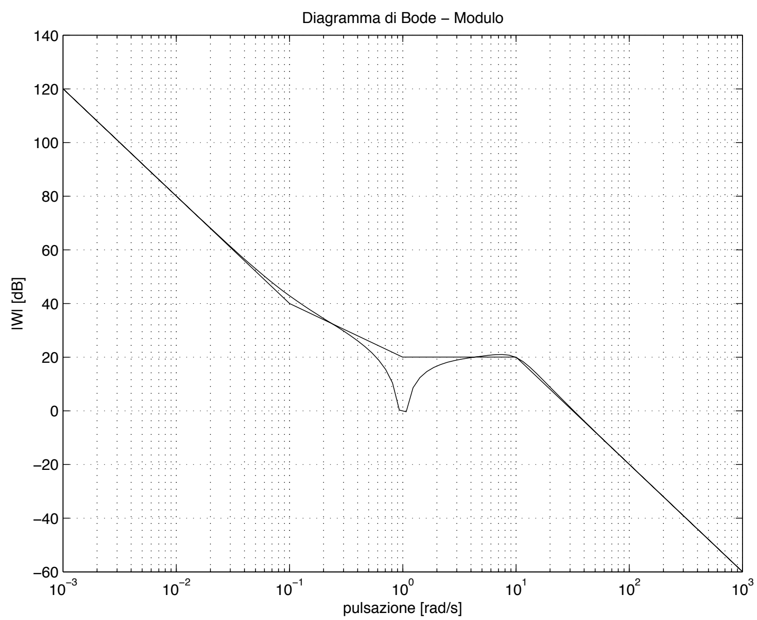
2. Si dimostri, **operando nel dominio delle trasformate**, che, in corrispondenza ad un segnale fasoriale causale $u(t) = e^{j\tilde{\omega}t}\delta_{-1}(t)$, $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$, e in ipotesi di stabilità BIBO, la risposta **forzata** del sistema all'ingresso assegnato ha una componente di regime permanente ed una componente transitoria, e se ne determinino esplicitamente le espressioni.

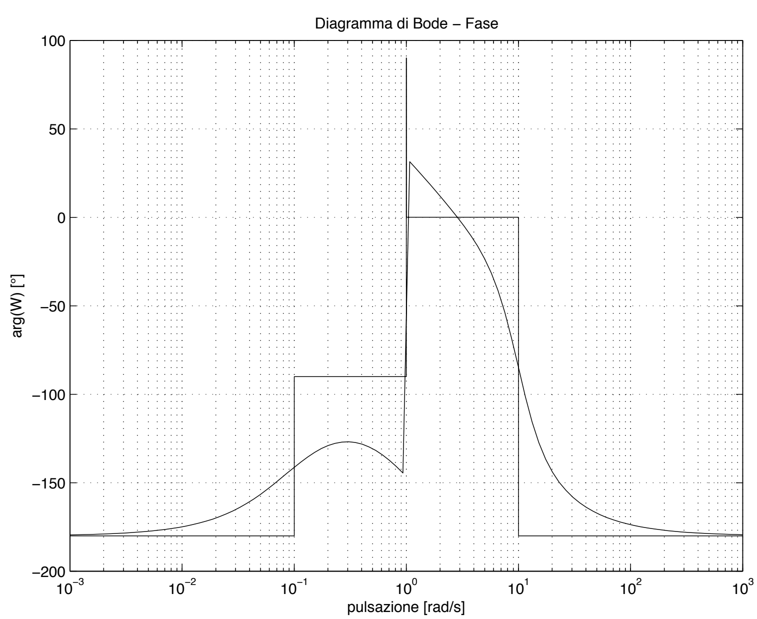
SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = 10^3\ \frac{(s+0.1)(s^2+1)}{s^2(s+1)\,(s^2+10s+100)} = \frac{\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)(1+s^2)}{s^2(1+s)\left(1+2\cdot 0.5\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

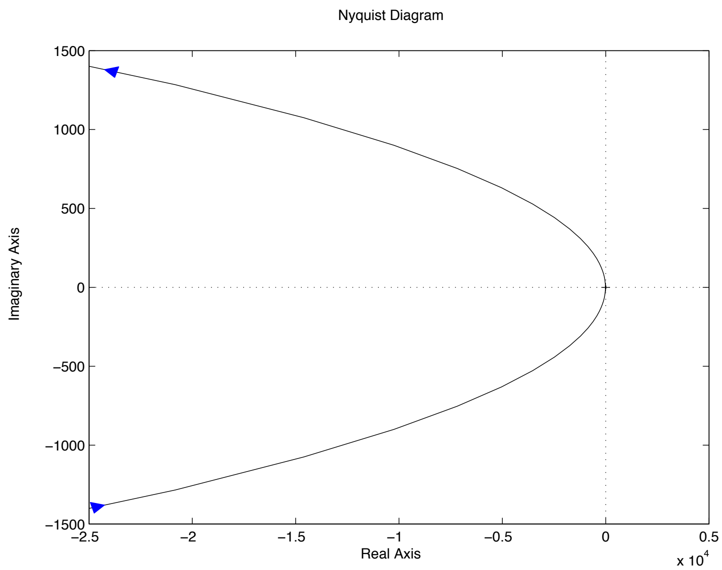
Pertanto i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza sono i seguenti:



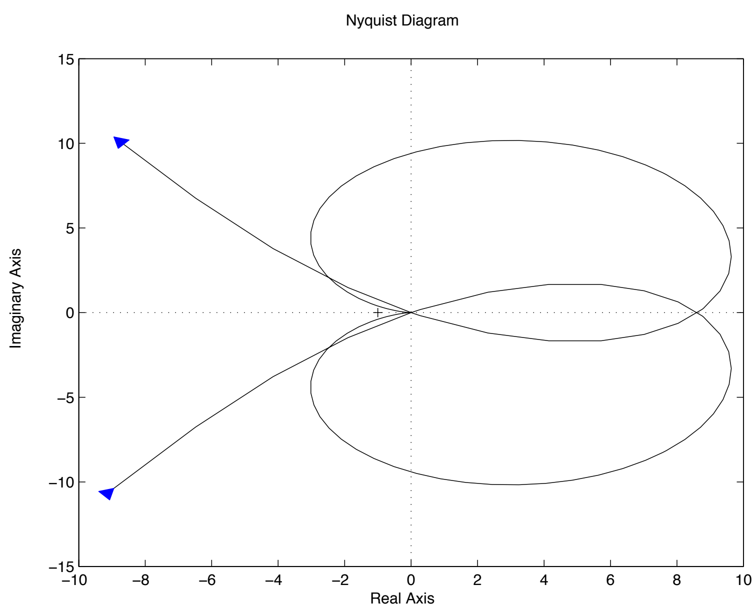


Si noti che il picco negativo alla pulsazione $\omega = 1$ rad/sec è in realtà illimitato verso il basso, in quanto corrisponde ad una coppia di zeri immaginari coniugati. Inoltre il comportamento strano della fase in corrispondenza alla pulsazione 1 rad/s è dovuto al fatto che 1 rad/s è la pulsazione di spezzamento di due distinti termini, con velocità di variazione completamente diverse.

ii) [6 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto i) è:



Il dettaglio del diagramma in un intorno dell'origine è riportato nella seguente figura:



Il diagramma di Nyquist, riportato al finito attraverso il percorso di Nyquist modificato (un giro intero in verso orario dal ramo alto al ramo basso del diagramma), non compie nessun giro attorno a $-1+j0$, ovvero $N=0$. Poichè $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva, ovvero $n_{G+}=0$, la condizione $N=0$ implica $n_{W+}=0$. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile.

Esercizio 2. i) [4 punti] La ricerca dei punti doppi conduce alla seguente equazione, in cui sono stati raccolti a sinistra tutti i fattori possibili:

$$\begin{aligned}(s-1)(s+a)(s+b)\ \cdot\ & \Big\{2[(s+a)(s+b)+(s-1)(s+a)+(s-1)(s+b)] \\ \cdot\ & (s^2+8s+32)(s-4)-s(s-1)(3s+8)(s+a)(s+b)\Big\}=0.\end{aligned}$$

Una volta eliminati i tre fattori a sinistra, che corrispondono ai tre poli doppi di $G(s)$, e che forniscono quindi punti doppi diversi da 0 e da $-\frac{8}{3}$, per le ipotesi poste, otteniamo l'equazione

$$2[(s+a)(s+b)+(s-1)(s+a)+(s-1)(s+b)](s^2+8s+32)(s-4)-s(s-1)(3s+8)(s+a)(s+b)=0.$$

Imponendo che $s=0$ e $s=-\frac{8}{3}$ soddisfino l'equazione, si ottengono le due equazioni non lineari in a e b:

$$\begin{aligned} ab &= a+b \qquad (\text{per } s=0) \\ 3ab &= 19(a+b)-80 \qquad (\text{per } s=-\frac{8}{3}),\end{aligned}$$

da cui si ottiene facilmente

$$ab=a+b=5 \ \Rightarrow\ a=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\simeq 3.62,\ b=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\simeq 1.38$$

(o viceversa, ma visto che $(s+a),(s+b)$ appaiono al denominatore con lo stesso esponente, è indifferente attribuire ad a,b i due valori precedenti oppure scambiarli).

ii) [4 punti] Adottando le regole per il tracciamento del luogo (positivo) delle radici,

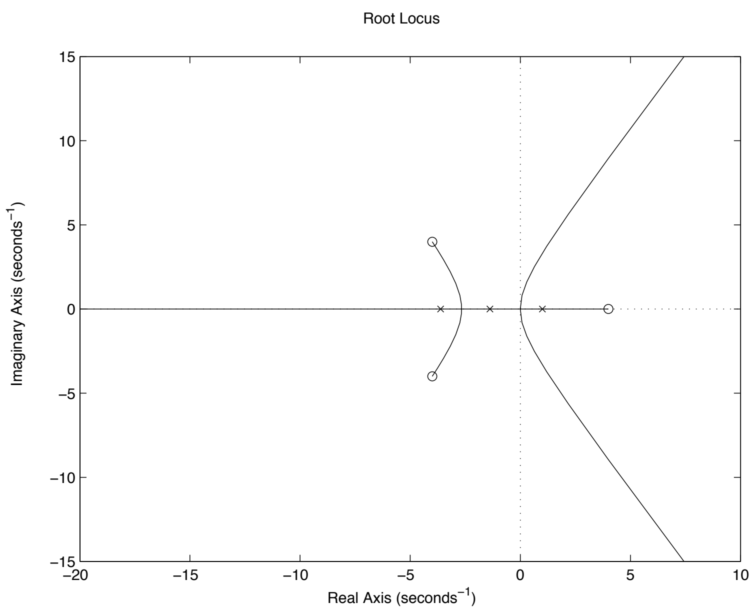
1. verifichiamo subito che appartengono al luogo delle radici tutti i punti della semiretta lungo l'asse reale $(-\infty,4]$.

2. Poichè il numero dei poli è $n=6$ mentre il numero degli zeri è $m=3$, ne consegue che tre rami vanno al punto improprio nelle direzioni angolari $\pi/3,\pi,5\pi/3$.

3. Il baricentro da cui partono gli asintoti è

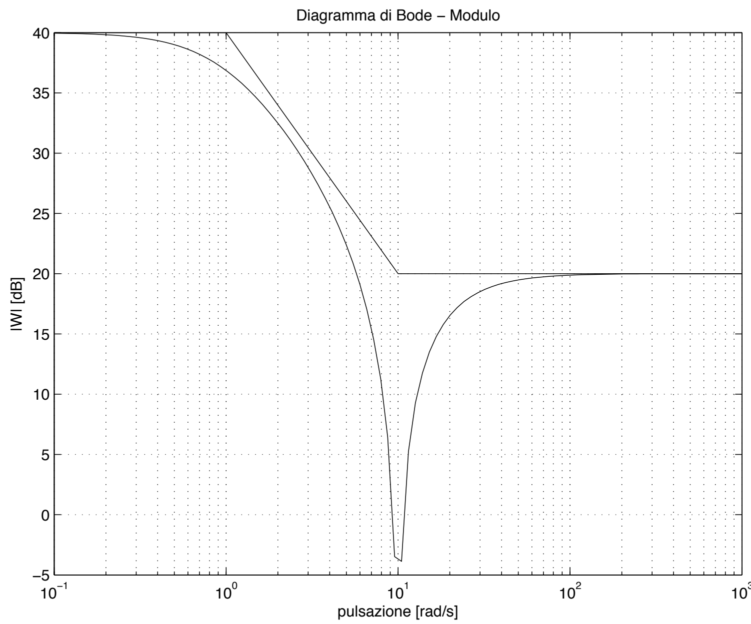
$$C=\frac{(-a-a-b-b+1+1)-(-4+4j-4-4j+4)}{6-3}=-\frac{4}{3}\simeq -1.33.$$

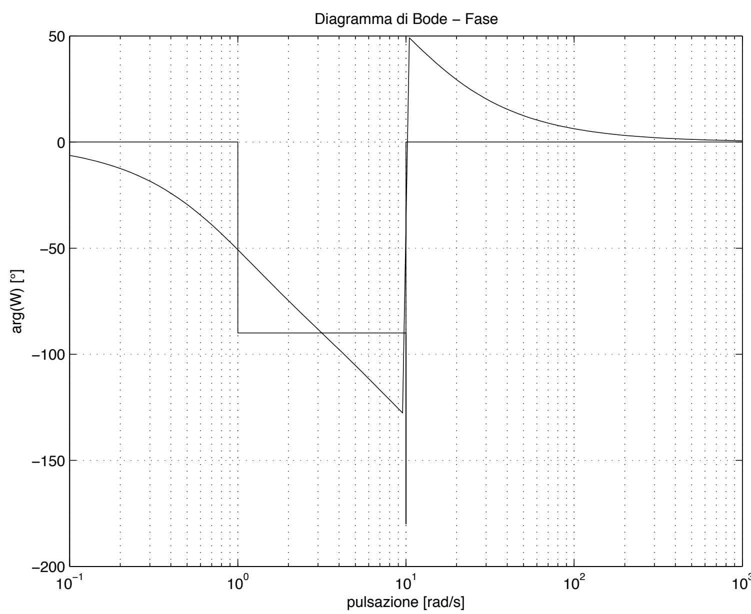
Quindi dal punto doppio $s=1$ partono due rami sull'asse reale, uno che si dirige verso lo zero in $s=4$, l'altro che si dirige verso il punto doppio in $s=0$, dove si incontra con uno dei due rami proveniente da $s=-b$, poi i rami escono sul piano complesso e si dirigono verso gli asintoti complessi. L'altro ramo uscente da $s=-b$ va verso il punto doppio $s=-\frac{8}{3}\simeq -2.67$, dove si incontra con uno dei due rami proveniente da $s=-a$, per poi fuoriuscire nel piano complesso tendendo ai due zeri complessi $s=-4\pm 4j$. Infine, l'altro ramo uscente da $s=-a$ va verso $-\infty$, accompagnando la direzione dell'asintoto reale. La situazione opposta (rami che da un punto doppio vanno verso gli zeri invece che verso gli asintoti) non può verificarsi, altrimenti due (coppie di) rami si intersecherebbero nel piano complesso, originando dei punti doppi complessi che sappiamo per ipotesi non esserci, nel luogo positivo. In figura il luogo positivo. Infine, chi non fosse riuscito a determinare i valori di a, b arriverebbe, con i valori proposti nel testo per a, b, ad un andamento del luogo assolutamente simile (ed anche il centro della stella di asintoti sarebbe lo stesso).



iii) [1 punto] Essendo un ramo del luogo interamente contenuto nel semipiano reale positivo, per ogni valore di $K > 0$ la funzione di trasferimento $W(s)$ non è BIBO stabile.

Esercizio 3. i) [3 punti] Per $C_1(s)$ non è necessario fare nulla per il requisito su $e_{rp}^{(1)}$, già soddisfatto.

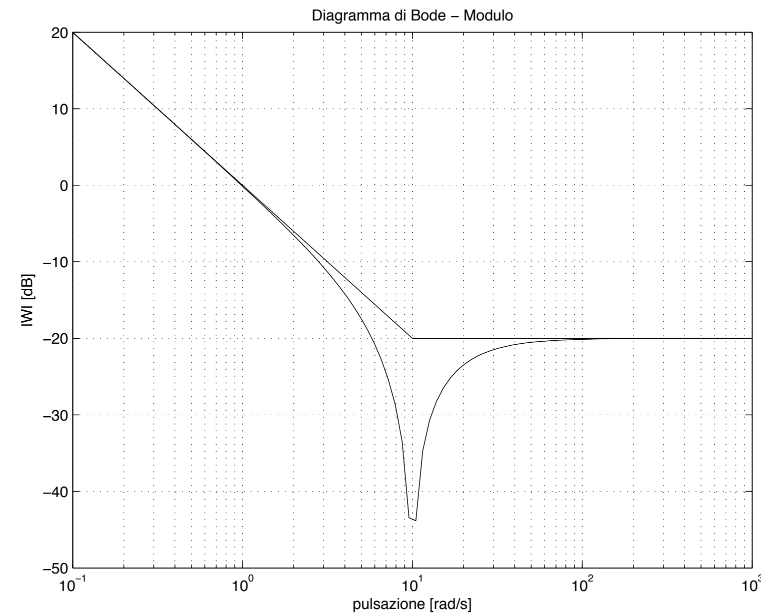


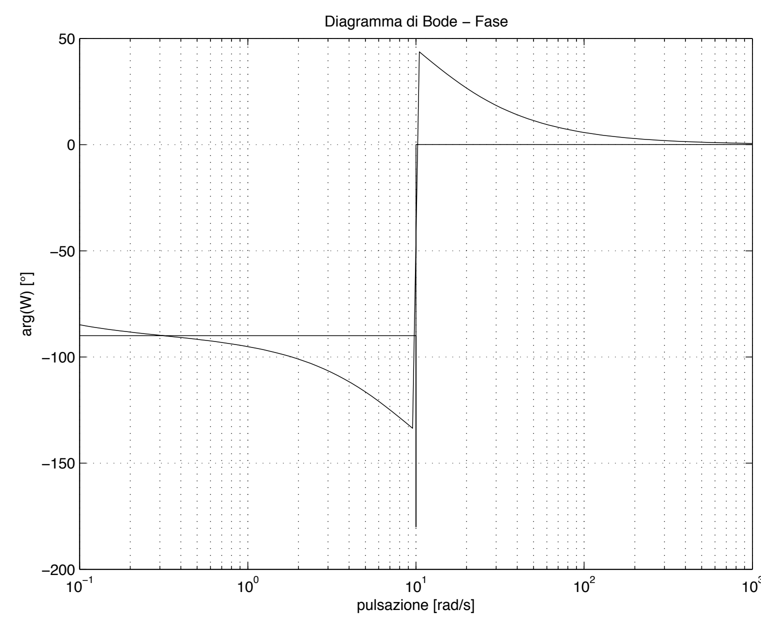


(Si noti che il picco negativo, nel diagramma dei moduli, è di ampiezza infinita.) È invece necessaria una rete ritardatrice per abbassare il modulo di 40 dB in corrispondenza di $\omega_a = 1$ rad/s. La coppia polo-zero deve pertanto distare due decadi, ma la posizione di polo-zero è univocamente determinata dal requisito sul margine di fase, in quanto solo cancellando con uno zero il polo in $s = -1$ si porta la fase al valore desiderato. Quindi

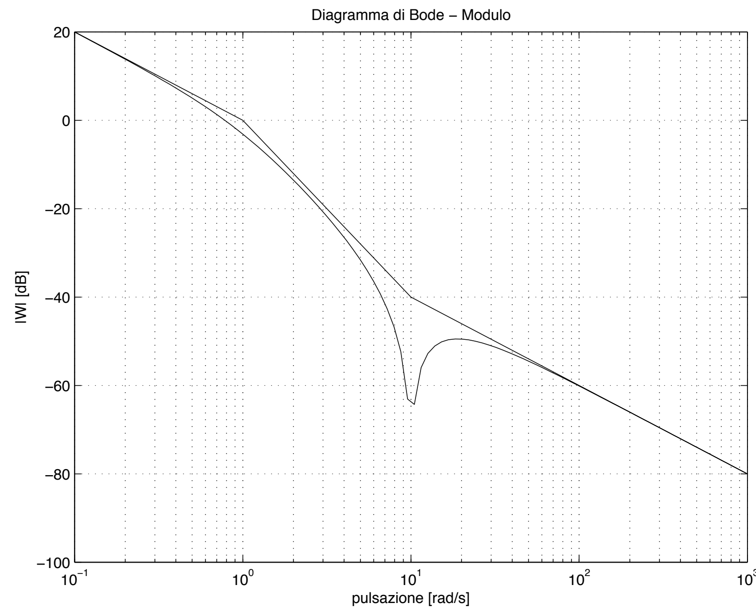
$$C_1(s) = \frac{1+s}{1+100s},$$

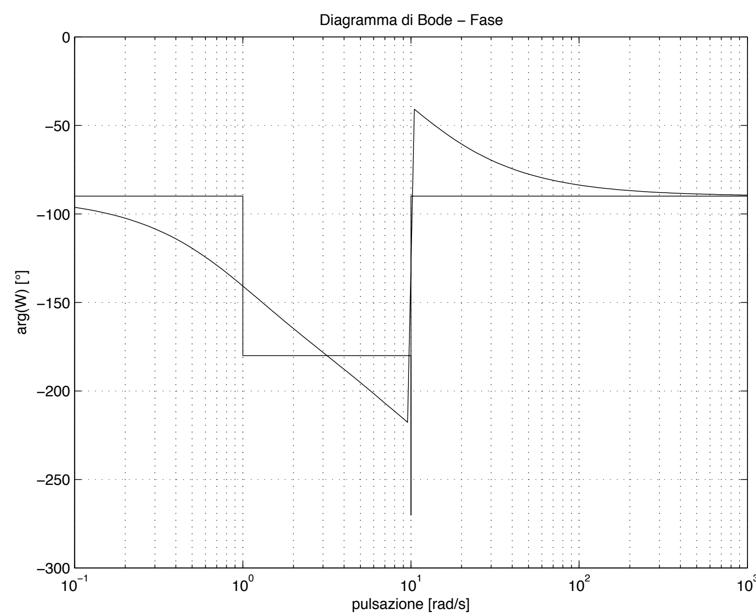
ottenendo in tal modo i seguenti diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta:





ii) [3 punti] Per $C_2(s)$, è necessario $C_2'(s) = \frac{1}{100s}$ per sistemare il requisito sull'errore a regime ed il tipo. (Anche in questo caso il picco negativo, nel diagramma dei moduli, è di ampiezza infinita.)

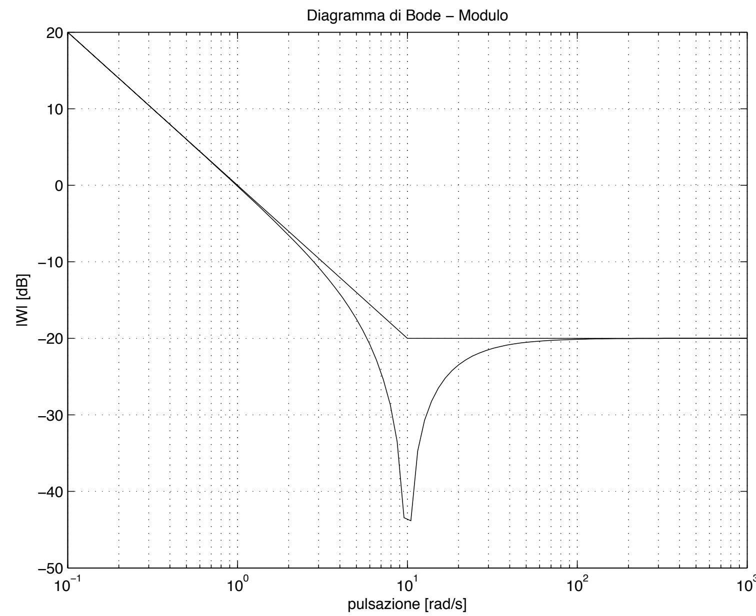


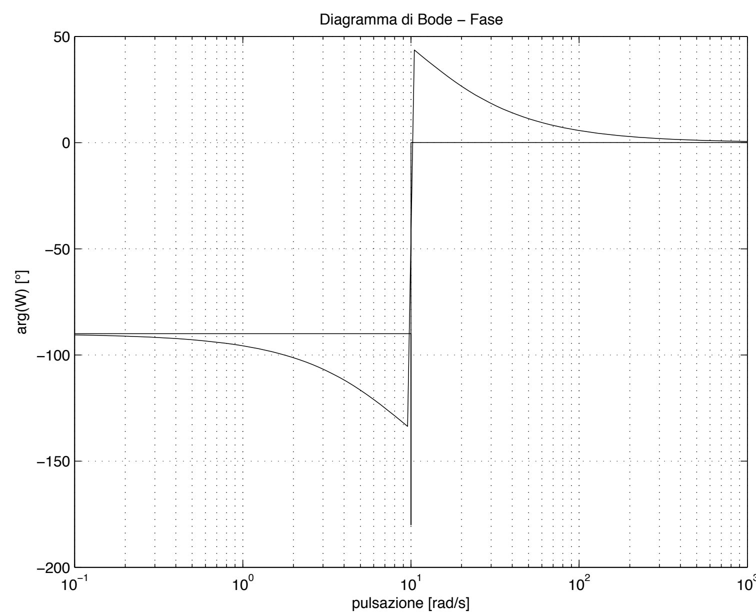


In tal modo si soddisfa anche il requisito su ω_a, tuttavia ai fini di sistemare il margine di fase è necessario uno zero che cancelli il polo in $s = -1$ come prima, e quindi alla fine $C_2(s)$ sarà un controllore PI della forma

$$C_2(s) = \frac{1+s}{100s}.$$

Si ottengono in tal modo i seguenti diagrammi di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta:





Si noti che il problema della non unicità della pulsazione di attraversamento, inizialmente presente in $G(s)$, viene risolto da entrambi i compensatori. È quindi applicabile il Criterio di Bode, essendo soddisfatte tutte le sue ipotesi, e la stabilità BIBO del sistema retroazionato è quindi provata sia nel caso di $C_1(s)$ che in quello di $C_2(s)$.

Teoria. [5 punti] Si veda il Libro di testo, pp. 89-91.