Riassunto di Teoria dei Circuiti

Questo file raccoglie gli schemi riassuntivi che ho scritto per preparare l'esame di Teoria dei Circuiti, tenuto ai corsi di Ingegneria Biomedica e Elettronica (ma va bene anche per Ing. Informatica, dato che l'esame è del tutto simile).
Il riassunto è completo, ovvero è stato fatto unendo sia i paragrafi del libro, sia la dispensa di Desideri. La suddivisione in paragrafi però segue la enumerazione del libro, e questo è il motivo per cui manca un "capitolo 15". Non fateci troppo caso.
Ci tengo a precisare che ho seguito il corso nell'a.a. 2023-2024 con il prof. Desiseri.

Spero vi sia utile e in bocca al lupo :)

Matteo "Top G" Grigolon

TEORIA DEI CIRCUITI

CAPITOLO 1: CARICHE ELETTRICHE E CORRENTI

1. CARICHE ELETTRICHE

LE CARICHE ELETTRICHE CONSENTONO DI DESCRIVERE LE FORZE DI INTERAZIONE CHE SI MANIFESTANO TRA CORPI SOLIDI, ATTRIBUENDO A CIASCUNO DI ESSI UNA CARICA ELETTRICA q.

VE NE SONO DI 2 TIPI:

- POSITIVE ⊕: $q^+ > 0$
- NEGATIVE ⊖: $q^- < 0$

UNITÀ DI MISURA: COULOMB $[C] = [A \cdot s]$

SE SONO DI SEGNO UGUALE SI RESPINGONO, SE SONO DI SEGNO OPPOSTO SI ATTRAGGONO

A LIVELLO MICROSCOPICO LA CARICA ASSUME VALORI DISCRETI, MULTIPLI DELLA CARICA ELEMENTARE

$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C$

LA CARICA PUÒ ESSERE PUNTIFORME O DISTRIBUITA IN UN CORPO

DENSITÀ VOLUMICA DI CARICA: $\rho_c(P,t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{q}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{q^+ + q^-}{\tau}$

DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA: $\sigma_c(P,t) = \lim_{S \to 0} \frac{q}{S} = \lim_{S \to 0} \frac{q^+ + q^-}{S}$

2. CORRENTI ELETTRICHE

IL MOTO DI CARICHE ELETTRICHE (LIBERE O MENO) DÀ LUOGO A CORRENTI ELETTRICHE. VI SONO VARI TIPI DI CORRENTI ELETTRICHE:

- CORRENTI DI CONDUZIONE: CONDUTTORI METALLICI
  CORRENTI DI CONVEZIONE: CORPI CARICHI IN MOVIMENTO

INTENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA: $i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$

È UNA GRANDEZZA SCALARE A CARATTERE INTEGRALE, IN GENERALE VARIABILE NEL TEMPO. DIPENDE DALLA SUPERFICIE S E DALLA SUA ORIENTAZIONE (POSITIVA O NEGATIVA)

UNITÀ DI MISURA: AMPERE $[A]$

RELAZIONE LOCALE: VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA $J(P,t) = \rho_c^+ v_c^+ + \rho_c^- v_c^-$ $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

IL VETTORE $J(P,t)$, ESSENDO FUNZIONE DEL PUNTO P, COSTITUISCE UN CAMPO VETTORIALE DETTO CAMPO DI CORRENTE

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE LA CORRENTE $i(t)$ ATTRAVERSO LA SUPERFICIE S ORIENTATA DA $\vec{n}$ RAPPRESENTA IL FLUSSO DELLA DENSITÀ DI CORRENTE ATTRAVERSO S

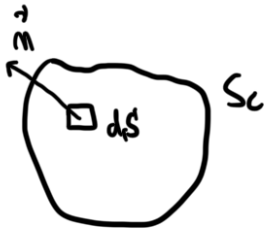
$$i(t) = \int_S J \cdot \vec{n} \cdot dS$$

SPESSO IL MOTO DELLE CARICHE ELETTRICHE AVVIENE IN CONDUTTORI FILIFORMI. IL VETTORE $\vec{J}$ SI PUÒ CONSIDERARE PARALLELO AL VERSORE $\vec{t}$ TANGENTE AL FILO
SE SCEGLIAMO S IN MODO TALE CHE $\vec{n} \equiv \vec{t}$, OTTENIAMO:

$$i = JS \qquad \vec{J} = \frac{i}{S}\vec{t}$$

IL VERSORE $\vec{t}$ CHE INDICA IL VERSO DI MISURA PRENDE IL NOME DI RIFERIMENTO DI CORRENTE

3. LEGGE DI CONTINUITÀ



CONSIDERO UNA REGIONE DI SPAZIO RACCHIUSA DA UNA SUPERFICIE S_c, ORIENTATA SECONDO $\vec{n}$.
SI CONSIDERI LA TOTALE CORRENTE USCENTE DA TALE SUPERFICIE S_c:

$$i_{usc}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_{usc}}{\Delta t} = \frac{d q_{usc}(t)}{dt}$$

POICHÉ LA CARICA SI CONSERVA, $\Delta q_{usc} = -\Delta q_{int}$, QUINDI

$$i_{usc}(t) = -\frac{d q_{int}}{dt}$$

LA LEGGE DI CONTINUITÀ AFFERMA CHE LA TOTALE CORRENTE USCENTE $i_{usc}(t)$ USCENTE DA UNA SUPERFICIE CHIUSA S_c È OPPOSTA ALLA DERIVATA TEMPORALE DELLA CARICA $q_{int}(t)$ CONTENUTA ALL'INTERNO DI S_c

4. CAMPO DI CORRENTE SOLENOIDALE

CONSIDERIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA S_c IN QUIETE A REGIME STAZIONARIO.
COME CONSEGUENZA DELLA LEGGE DI CONTINUITÀ, È NULLA LA CORRENTE TOTALE USCENTE DA S_c:

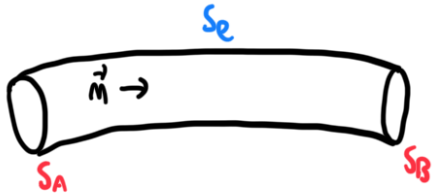
$$I_{usc} = 0$$

UTILIZZANDO LA RELAZIONE $i(t) = \int_S J \cdot \vec{n}\, dS$, SI HA CHE A REGIME STAZIONARIO È NULLO IL FLUSSO DI $\vec{J}$ USCENTE DA UNA QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA.

QUESTO SI ESPRIME DICENDO CHE A REGIME STAZIONARIO IL VETTORE $\vec{J}$ È SOLENOIDALE, O, IN MODO EQUIVALENTE, CHE A REGIME STAZIONARIO IL CAMPO DI CORRENTE È SOLENOIDALE

5. TUBO DI FLUSSO PER IL VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE

CONSIDERIAMO UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE CIRCONDATO DA UN MATERIALE ISOLANTE. CONSIDERIAMO UN TRATTO DI TALE CONDUTTORE, DELIMITATO DA S_A E S_B, CON $\vec{J}$ VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE.



A REGIME STAZIONARIO VALE CHE: $I_{usc} = -I(S_A) + I(S_B) + I(S_e) = 0$

POICHÉ $I(S_e) = 0$, SI HA CHE $I(S_A) = I(S_B)$

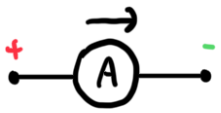
⇒ A REGIME STAZIONARIO, LA CORRENTE ELETTRICA HA LO STESSO VALORE PER QUALSIASI SEZIONE CHE TAGLIA TUTTO IL CONDUTTORE.

IN QUESTO SENSO SI DICE CHE IL CONDUTTORE COSTITUISCE UN TUBO DI FLUSSO PER IL VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE

6. AMPEROMETRO

L'INTENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA NEI CONDUTTORI FILIFORMI VIENE MISURATA CON LO STRUMENTO DETTO AMPEROMETRO, CHE COMPRENDE 2 MORSETTI E UN VISUALIZZATORE.

LA CORRENTE VIENE MISURATA CON IL RIFERIMENTO + ⟶ −



L'AMPEROMETRO È IDEALE SE:

- NON MODIFICA L'INTENSITÀ DI CORRENTE NEL PUNTO IN CUI È INSERITO
- INDICA ISTANTE PER ISTANTE L'INTENSITÀ DI CORRENTE PER QUANTO RAPIDAMENTE ESSA VARI

CAPITOLO 2: CAMPO ELETTRICO E TENSIONE ELETTRICA

1. LEGGE DI COULOMB

2 CARICHE ELETTRICHE PUNTIFORMI DISPOSTE IN QUIETE NEL VUOTO RISENTONO CIASCUNA DI UNA FORZA DOVUTA ALL'INTERAZIONE TRA LE 2 CARICHE: È LA LEGGE DI COULOMB

$$\boxed{F_c(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q q_0}{r_{QP}^2} \vec{u}_{QP}}$$

2. CAMPO ELETTROSTATICO

PRENDIAMO UNA CARICA "DI PROVA" q_0 E SPOSTIAMOCI IN PUNTI DIVERSI DELLO SPAZIO DOVE VI È LA CARICA P. MISURIAMO LA FORZA CHE q_0 RISENTE A CAUSA DELLA PRESENZA DI P:

$$\boxed{\vec{E}_c(P) = \frac{F_c(P)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(Q)}{r_{QP}^2} \vec{u}_{QP}}$$

$\vec{E}_c(P)$ È UN CAMPO VETTORIALE, CHIAMATO CAMPO ELETTROSTATICO $\left[\frac{N}{C}\right] = \left[\frac{V}{m}\right]$

SE È GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA: $E_c(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_c(Q)}{r_{QP}^2} \vec{u}_{QP} \, dV$

CONDIZIONE ELETTROSTATICA: LE CARICHE ELETTRICHE SONO TUTTE STATICHE, CIOÈ SONO TUTTE IN QUIETE NELLO SPAZIO E CON VALORE COSTANTE NEL TEMPO

MATERIALE UNIFORME: UN MATERIALE È DETTO UNIFORME SE È:
- OMOGENEO: LE SUE PROPRIETÀ NON VARIANO AL VARIARE DEL PUNTO
- LINEARE: LE SUE PROPRIETÀ NON DIPENDONO DALL'INTENSITÀ DEL CAMPO VETTORIALE
- ISOTROPO: LE SUE PROPRIETÀ NON DIPENDONO DALLA DIREZIONE DEL CAMPO VETTORIALE

3. PROPRIETÀ DEL CAMPO ELETTROSTATICO:

- CONSERVATIVO: $\oint \vec{E}_c \cdot \vec{t} \cdot dl = 0 \Rightarrow \int_A^B \vec{E}_c \cdot \vec{t} \cdot dl = V(A) - V(B)$

V È IL POTENZIALE ELETTROSTATICO: È UN CAMPO SCALARE

4. CAMPO ELETTRICO

CONSIDERIAMO UNA CARICA ELETTRICA PUNTIFORME "DI PROVA" q_0, IN QUIETE IN UN PUNTO P, IN PRESENZA DI ALTRE CARICHE CHE SI MUOVONO. LA CARICA DI PROVA RISENTE DI UNA FORZA $\vec{F}_e(P,t)$ CHE È PROPORZIONALE AL VALORE DI q_0.

$$\boxed{\vec{E}(P,t) = \frac{\vec{F}_e(P,t)}{q_0}}$$

$\vec{E}(P,t)$ È DETTO CAMPO ELETTRICO

REGIME STAZIONARIO: IN OGNI PUNTO DELLO SPAZIO I FENOMENI ELETTROMAGNETICI SONO INDIPENDENTI DAL TEMPO

5. CAMPO ELETTRICO E INDUZIONE MAGNETICA

CONSIDERIAMO UNA CARICA ELETTRICA PUNTIFORME DI PROVA q_0, IN MOTO CON VELOCITÀ $\vec{v}$ IN UN PUNTO P, IN PRESENZA DI ALTRE CARICHE (CARICHE - SORGENTE) CHE SI MUOVONO. LA CARICA DI PROVA RISENTE DI UNA FORZA $\vec{F}(P,t)$:

$$\frac{\vec{F}(P,t)}{q_0} = \vec{E}(P,t) + \vec{v} \times \vec{B}(P,t)$$

$\vec{B}(P,t)$ È L'INDUZIONE MAGNETICA, UN CAMPO VETTORIALE $[T]$

6. TENSIONE ELETTRICA

SIA DATA UNA LINEA ℓ APERTA IN QUIETE, ORIENTATA SECONDO UN VERSORE $\vec{t}$. SI DEFINISCE TENSIONE ELETTRICA $V(t)$ L'INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO ELETTRICO

$$\boxed{V(t) = \int_\ell \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} \cdot d\ell}$$

LA LINEA È MARCATA DA UN VERSO DI PERCORRENZA DETTO RIFERIMENTO DELLA TENSIONE

POICHÉ IN GENERALE $\vec{E}$ NON È CONSERVATIVO, LA TENSIONE DIPENDE DAGLI ESTREMI A E B E DAL PERCORSO $A \to B$

$$V_{AB}(t) = \int_{A,\ell}^{B} \vec{E}(P,t)\, \vec{t}\, d\ell$$

AL POSTO DEI PEDICI A VOLTE SI METTE IL SEGNO + IN CORRISPONDENZA DEL PUNTO DI INIZIO, - ALLA FINE

A REGIME STAZIONARIO, IL CAMPO ELETTRICO È CONSERVATIVO E QUINDI LA TENSIONE È UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE

$$V_{AB} = V(A) - V(B)$$

7. F.e.m. INDOTTA E F.e.m. MOZIONALE

DEFINIAMO COME FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA L'INTEGRALE DEL CAMPO ELETTRICO SU UNA LINEA CHIUSA ℓ:

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}(P,t) \cdot \vec{t} \cdot d\ell$$

SE SI CONSIDERA IL CASO DI UN CONDUTTORE FILIFORME IN MOTO CON VELOCITÀ $\vec{V}_\ell$, L'ASSE DEL CONDUTTORE FILIFORME COSTITUISCE UNA LINEA E QUINDI SI CONSIDERANO 2 TERMINI:

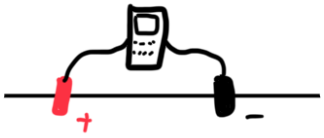
F.e.m. INDOTTA: $\oint \vec{E}(P,t)\vec{t}\, d\ell$

F.e.m. MOZIONALE: $\oint \vec{V}_\ell \times \vec{B} \cdot \vec{t}\, d\ell$

QUANDO LA LINEA È IN QUIETE CI SI RIFERISCE SOLO ALLA F.e.m. INDOTTA, QUANDO LA LINEA È IN MOTO SI AGGIUNGE ALLA F.e.m. INDOTTA LA F.e.m. MOZIONALE

5. VOLTMETRO

LE TENSIONI ELETTRICHE SI MISURANO CON LO STRUMENTO CHIAMATO VOLTMETRO.
ESSO COMPRENDE 2 CONDUTTORI FILIFORMI FLESSIBILI CHE TERMINANO IN 2 PUNTALI (P^+ E P^-) E UN VISUALIZZATORE



IL VOLTMETRO IDEALE:

- NON MODIFICA IL CAMPO ELETTRICO E LA TENSIONE
- I FILI E I PUNTALI SONO EQUIPOTENZIALI
- INDICA ISTANTE PER ISTANTE IL VALORE DELLA TENSIONE, PER QUANTO RAPIDAMENTE ESSA VARI

CAPITOLO 3: MODELLO RETI ELETTRICHE

1. INTRODUZIONE AL MODELLO RETI ELETTRICHE

UN COMPONENTE È UN OGGETTO LIMITATO DA UNA SUPERFICIE CHIUSA DETTA SUPERFICIE LIMITE. DA TALE SUPERFICIE EMERGONO DUE O PIÙ TERMINALI. LA TERMINAZIONE DI CIASCUN TERMINALE È DETTA MORSETTO

LE GRANDEZZE CHE VENGONO USATE PER STUDIARE IL COMPORTAMENTO DEL COMPONENTE SONO LA CORRENTE E LA TENSIONE.

REGIME STAZIONARIO: IL CAMPO DI CORRENTE È SOLENOIDALE E IL CAMPO ELETTRICO È CONSERVATIVO
REGIME VARIABILE QUASI-STAZIONARIO: LE PROPRIETÀ DEL REGIME STAZIONARIO NON VALGONO PIÙ OVUNQUE, MA VALGONO ANCORA CALCOLANDO LE TOTALI CORRENTI USCENTI DA SUPERFICI CHIUSE CHE NON INTERSECANO SUPERFICI LIMITI DEI COMPONENTI, E CALCOLANDO L'INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO ELETTRICO PER LINEE CHE NON INTERSECANO SUP. LIMITE DEI COMPONENTI.

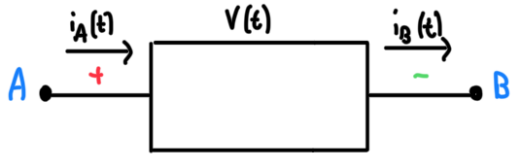
PROPRIETÀ:

1. COMPONENTI: - LE CORRENTI E LE TENSIONI SONO FUNZIONI DEL TEMPO. LA TENSIONE È UNA ddp.
   - CIASCUN TERMINALE È EQUIPOTENZIALE
2. INTERCONNESSIONI FRA COMPONENTI: I COMPONENTI ELETTRICI SONO COLLEGATI FRA DI LORO FORMANDO COSÌ I CIRCUITI ELETTRICI. I PUNTI DI COLLEGAMENTO FRA MORSETTI SONO DETTI NODI

IL MODELLO CHE SI STA INTRODUCENDO È DETTO MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI (O MODELLO A COSTANTI CONCENTRATE)

2. COMPONENTI

CIASCUN COMPONENTE È RAPPRESENTATO DA UNA SUPERFICIE CHIUSA DA CUI EMERGONO I TERMINALI. A CIASCUN TERMINALE SI ASSOCIA UNA CORRENTE ELETTRICA CON IL SUO RIFERIMENTO, E AD OGNI COPPIA DI MORSETTI SI ASSOCIA UNA TENSIONE (CON IL SUO RIF.)



CORRENTE ENTRANTE: RIFERIMENTO DIRETTO VERSO L'INTERNO
CORRENTE USCENTE: RIFERIMENTO DIRETTO VERSO L'ESTERNO

BIPOLO: COMPONENTE CON 2 TERMINALI
TRIPOLO: COMPONENTE CON 3 TERMINALI
n-POLO: COMPONENTE CON n TERMINALI

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEGLI n-POLI

1) È NULLA IN OGNI ISTANTE LA SOMMA DELLE CORRENTI PRESE CON RIF. USCENTE A UN n-POLO (LA STESSA PROPRIETÀ VALE SE LE CORRENTI SONO PRESE TUTTE ENTRANTI)
2) LA TENSIONE FRA UNA QUALSIASI COPPIA DI MORSETTI È UNA d.d.p

3. INTERCONNESSIONE DEI COMPONENTI

I COMPONENTI ELETTRICI SONO COLLEGATI TRA LORO. I COLLEGAMENTI SONO EFFETTUATI IN CORRISPONDENZA DEI MORSETTI. I PUNTI DI COLLEGAMENTO SONO DETTI NODI.

4. RETE ELETTRICA

LA RETE ELETTRICA È DATA DA COMPONENTI ELETTRICI CHE SONO COLLEGATI TRA DI LORO.
SI HANNO 2 ASPETTI CARATTERIZZANTI LA RETE ELETTRICA:
- **TIPOLOGIA**: TIPI DI COMPONENTI CHE COSTITUISCONO LA RETE ELETTRICA
- **TOPOLOGIA**: MODO IN CUI I COMPONENTI SONO INTERCONNESSI.

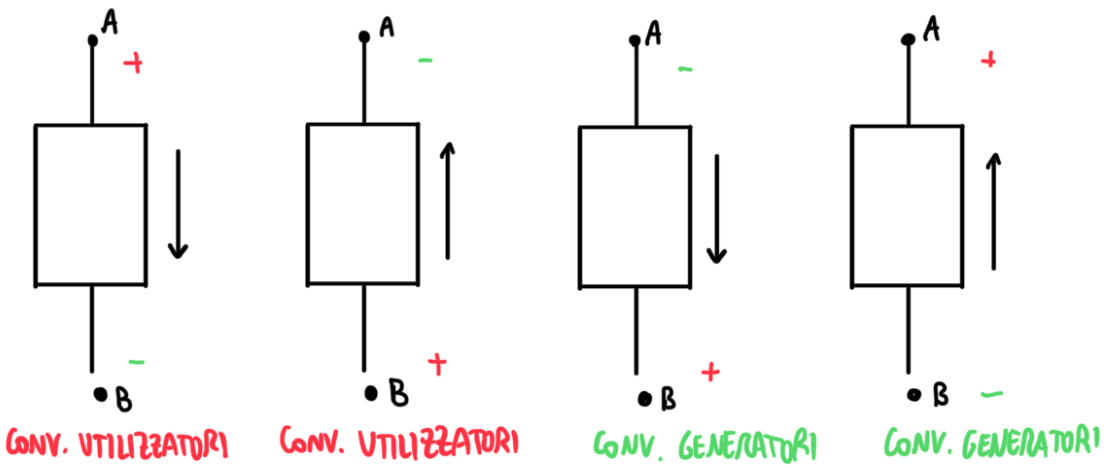
3.5. BIPOLO

IL BIPOLO È UN n-POLO CON $n=2$. IN QUANTO n-POLO VALGONO LE PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEGLI n-POLI.

POICHÉ IN UN BIPOLO LA CORRENTE ENTRANTE È UGUALE ALLA CORRENTE USCENTE, AL BIPOLO SI ATTRIBUISCE UN VALORE UNICO DI CORRENTE DI ENTRAMBI I TERMINALI

RIFERIMENTI

CI SONO 4 DIVERSE SOLUZIONI, CHE SONO LE 4 POSSIBILI COMBINAZIONI DI TENSIONE E CORRENTE



POTENZA ELETTRICA SCAMBIATA DA UN BIPOLO IN RVQS

$$\boxed{P(t) = V(t)\, i(t)} \qquad [V]\cdot[A] = [W]$$

LA POTENZA È IL LAVORO SVOLTO PER UNITÀ DI TEMPO: $P(t) = \frac{dL(t)}{dt}$

LA POTENZA, QUANDO È CALCOLATA CON:
- CONV. UTILIZZATORE ⟶ POTENZA ENTRANTE
- CONV. GENERATORE ⟶ POTENZA USCENTE (POTENZA EROGATA)

6. BIPOLO PASSIVO

SI È VISTO CHE LA POTENZA È IL LAVORO SVOLTO PER UNITÀ DI TEMPO:

$$P(t) = \frac{dL(t)}{dt}$$

INTEGRANDO QUESTA RELAZIONE TRA $-\infty$ E t E RICORDANDO CHE $P(t) = V(t)\, i(t)$

$$L(t) = \int_{-\infty}^{t} P(t')\,dt' = \int_{-\infty}^{t} V(t')\, i(t')\,dt'$$

UN BIPOLO SI DICE PASSIVO SE IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE (CON CONV. UTIL) È NON NEGATIVO PER QUALUNQUE t CONSIDERATO ($L(t) \geq 0$ CON LA CONV. UTIL.)

SE UN BIPOLO NON È PASSIVO, SI DICE **BIPOLO ATTIVO**

NOTA:
- $t = -\infty$ È L'ISTANTE DI FABBRICAZIONE DEL COMPONENTE
- UN BIPOLO PASSIVO PUÒ AVERE POTENZA ENTRANTE POSITIVA, NULLA O NEGATIVA, MA L'INTEGRALE DI TALE POTENZA TRA $-\infty$ E t DEVE ESSERE SEMPRE NON NEGATIVO

7. PORTA ELETTRICA

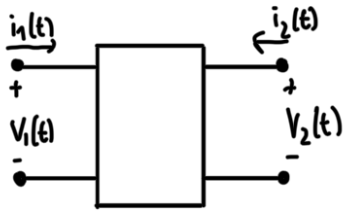
DATO UN n POLO, PUÒ ACCADERE CHE LA CORRENTE ENTRANTE A UN TERMINALE SIA UGUALE A QUELLA USCENTE AD UN ALTRO TERMINALE PER QUALUNQUE ISTANTE t. TALE COPPIA DI TERMINALI È DETTA **PORTA ELETTRICA**

AD UNA PORTA SI ATTRIBUISCE UN VALORE UNICO DI CORRENTE DETTA **CORRENTE DI PORTA**. LA TENSIONE TRA I 2 MORSETTI È DETTA **TENSIONE DI PORTA**.

8. M-BIPOLO

È UN CASO PARTICOLARE DI n-POLO. È UN n-POLO COSTITUITO SOLAMENTE DA m PORTE ELETTRICHE. LE GRANDEZZE ELETTRICHE CHE CARATTERIZZANO UN m-BIPOLO SONO LE m TENSIONI DI PORTA E LE m CORRENTI DI PORTA.

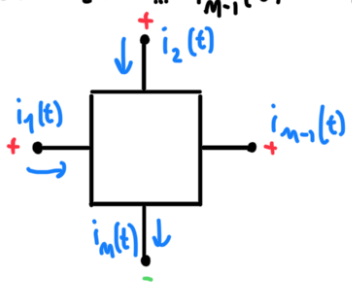
UN m-BIPOLO HA PERTANTO $n = 2m$ TERMINALI, RAGGRUPPATI IN m PORTE. PER $m=1$ È IL BIPOLO, PER $m=2$ È DETTO DOPPIO BIPOLO. PER $m=3$ È DETTO TRIPLO BIPOLO



N-POLO TRATTATO COME UN m-BIPOLO

UN n-POLO PUÒ ESSERE TRATTATO COME UN m-BIPOLO, CON $m = n-1$.

LA CORRENTE AL TERMINALE n PUÒ ESSERE VISTA COME IL RITORNO COMUNE DELLE CORRENTI DEGLI ALTRI TERMINALI: $i_1(t) + i_2(t) + \dots i_{n-1}(t) = i_n(t)$



CAPITOLO 4: CONDUZIONE E RESISTENZE

1. LEGGE DI OHM E DI JOULE

IL MOTO DELLE CARICHE ELETTRICHE (CORRENTE ELETTRICA) DIPENDE DALLE FORZE ELETTRICHE CHE AGISCONO SULLE CARICHE ELETTRICHE. AD ESEMPIO, LE FORZE ELETTROMAGNETICHE.

IN QUESTO CAPITOLO SI CONSIDERA LA CORRENTE ELETTRICA DI CONDUZIONE DESCRITTA DAL CAMPO J CHE SI MANIFESTA NEI MATERIALI PER EFFETTO DEL CAMPO ELETTRICO E.

CI PONIAMO IN CONDIZIONI STAZIONARIE

RESISTENZA ELETTRICA E LEGGE DI OHM

UN CONDUTTORE CILINDRICO OMOGENEO DI SEZIONE NORMALE S COLLEGATO AD UN GENERATORE ELETTRICO È SEDE DI UN CAMPO DI CORRENTE J AL QUALE CORRISPONDE LA CORRENTE I, COSTANTE NEL TEMPO. TRA DUE SUPERFICI S_A E S_B POSTE A DISTANZA ℓ SI MISURA LA d.d.p. V.
SI OSSERVA CHE ESISTE UNA RELAZIONE DI PROPORZIONALITÀ DIRETTA TRA I E V:

$$\boxed{R = \frac{V}{I}}$$

R È DETTA RESISTENZA ELETTRICA. SI MISURA IN OHM $[\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$

$I = \frac{1}{R} = GV$ G È DETTA CONDUTTANZA ELETTRICA $\boxed{G = \frac{1}{R}}$ U.M. SIEMENS [S]

EFFETTO JOULE: UN MATERIALE PERCORSO DA CORRENTE DISSIPA ENERGIA SOTTO FORMA DI CALORE: LA POTENZA DISSIPATA È:

$$\boxed{P_d = RI^2} \qquad [W]$$

2. RESISTIVITÀ E CONDUCIBILITÀ DEI MATERIALI

IL PARAMETRO R DIPENDE DALLA SEZIONE NORMALE S E DALLA LUNGHEZZA ℓ DEL TRATTO DI CILINDRO:

$$\boxed{R = \rho \frac{\ell}{S}}$$

ρ È DETTA RESISTIVITÀ E DIPENDE DAL MATERIALE E DALLA TEMPERATURA. GENERALMENTE VI È UN LEGAME LINEARE CON LA TENSIONE | CORRENTE, MA NON SEMPRE (es., diodo al Germanio)

IL LEGAME TRA RESISTIVITÀ E TEMPERATURA È: $\boxed{\rho = \rho_0 (1 + \alpha(\theta - \theta_0))}$

θ : TEMPERATURA

θ_0 : TEMPERATURA ALLA QUALE LA RESISTIVITÀ VALE θ_0

ρ_0, α : COEFFICIENTI DI TEMPERATURA

5. RESISTORE

SI CHIAMA **RESISTORE** UN COMPONENTE SPECIFICAMENTE COSTRUITO PER VERIFICARE LA LEGGE DI OHM, ANCHE IN CONDIZIONI VARIABILI, $V(t) = R\, i(t)$

POSSONO ESSERE

- **LINEARI**: RESISTORI METALLICI
- **NON LINEARI**:
  - VARISTORI (protezione dispositivi elettrici)
  - DIODI RADDRIZZATORI: resistenza bassissima per $I, V > 0$, resistenza altissima per $I, V < 0$
  - TUBI A SCARICA (lampade a gas ionizzati)

CAPITOLO 5: GENERATORI ELETTRICI

1. FORZE ELETTRICHE SPECIFICHE GENERATRICI

IN CONDIZIONI STAZIONARIE, IL CAMPO ELETTRICO È CONSERVATIVO. MA, POICHÉ AL CAMPO DI CORRENTE SONO ASSOCIATI EFFETTI DISSIPATIVI, DEVONO ESSERE COMPENSATI DA OPPORTUNE FORZE CHE MANTENGONO IL MOTO DELLE CARICHE, SVILUPPANDO UNA POTENZA PARI A QUELLA DISSIPATA.

LE FORZE AGENTI NON POSSONO ESSERE SOLO QUELLE ASSOCIATE AL CAMPO COULOMBIANO, PERCHÉ ESSENDO CONSERVATIVO NON COMPIE LAVORO SU PERCORSI CHIUSI

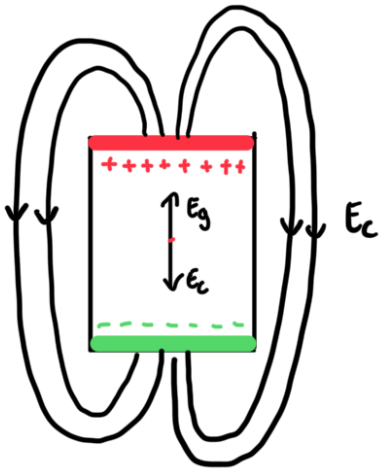
PER MANTENERE UN CAMPO DI CORRENTE STAZIONARIO È NECESSARIO CHE COMPAIANO ANCHE FORZE NON CONSERVATIVE ALMENO IN ALCUNI TRATTI DEL TUBO DI FLUSSO.

UNA TALE FORZA PUÒ NON ESSERE DI NATURA ELETTROMAGNETICA (es: CHIMICA, TERMICA, MECCANICA...)

FORZA ELETTRICA GENERATRICE $E_g(P,t)$: $$\boxed{E_g(P,t) = \frac{F_g(P,t)}{q_0}}$$

2. GENERATORI ELETTRICI

I COMPONENTI IN CUI SI SVILUPPANO FORZE ELETTRICHE SPECIFICHE GENERATRICI SONO DETTI GENERATORI ELETTRICI. ESSI SONO SEDE DI INTERAZIONI TRA FENOMENI ELETTRICI E FENOMENI DI ALTRA NATURA



$$E_g = -E_c$$

COMPORTAMENTO A VUOTO

LE FORZE ELETTRICHE GENERATRICI SEPARANO LE CARICHE CHE SI ACCUMULANO AI TERMINALI. TALI ACCUMULI DI CARICA DANNO LUOGO A UN CAMPO ELETTRICO COULOMBIANO CHE, DENTRO AL GENERATORE SI OPPONE ALLE FORZE ELETTRICHE GENERATRICI CHE HANNO CAUSATO LA SEPARAZIONE.

TALE CAMPO COULOMBIANO SI ESTENDE ANCHE FUORI DAL GENERATORE, E SI PUÒ MISURARE LA d.d.p. AI SUOI CAPI

SE NON VI È CORRENTE ELETTRICA AI SUOI CAPI (SI DICE "A VUOTO") SI CREA UNA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO:

$$E_g = -E_c$$

FORZA ELETTROMOTRICE f.e.m

SI DEFINISCE FORZA ELETTROMOTRICE L'INTEGRALE DELLA FORZA ELETTRICA SPECIFICA GENERATRICE E_g LUNGO UNA QUALSIASI LINEA ℓ INTERNA AL GENERATORE, ORIENTATA DAL - AL + SECONDO IL VERSORE t

$$\boxed{e(t) = \int_{A,\ell}^{B} E_g \cdot t \, d\ell} \qquad [V]$$

$$e = \int_{A,\ell}^{B} E_g \cdot t \, d\ell = \int_{A}^{B} -E_c \cdot t \, d\ell = \int_{A,\ell}^{B} E_c \cdot t \, d\ell = V_0$$

QUINDI, LA Fem DEL GENERATORE È UGUALE ALLA SUA TENSIONE A VUOTO TRA A E B: $e = V_0$

LA F.e.m. È UNA PROPRIETÀ DEL GENERATORE. È ESPRESSA DA UN NUMERO REALE DOTATO DI SEGNO:

COMPORTAMENTO A CARICO DEI GENERATORI

SE UN GENERATORE ELETTRICO È PERCORSO DA UNA CORRENTE I, SI DICE CHE È A CARICO.

IN CONDIZIONI STAZIONARIE, $\mathcal{E} = V_0 \neq V$

LA DIFFERENZA TRA LA TENSIONE A VUOTO E QUELLA A CARICO $\mathcal{E} - V = V_0 - V$, DIPENDE DIRETTAMENTE DALL'INTENSITÀ DI CORRENTE I

RESISTENZA INTERNA

POICHÉ ALL'INTERNO DEL GENERATORE SI HANNO FENOMENI DI DISSIPAZIONE LEGATI AL PASSAGGIO DI CORRENTE, SI DEFINISCE RESISTENZA INTERNA R_i DEL GENERATORE IL COEFF. DI PROPORZIONALITÀ TRA LA CORRENTE I E LA DIFFERENZA $E - V$:

$$E - V = R_i I \quad , \quad V = E - R_i I$$

QUESTA RELAZIONE CARATTERIZZA IL COMPORTAMENTO ESTERNO DEL GENERATORE

4. TIPI DI GENERATORI ELETTRICI

- GENERATORI ELETTROCHIMICI → PILE A SECCO
  → ACCUMULATORI RICARICABILI → PIOMBO/ACIDO
  → IONI DI LITIO
- FOTOVOLTAICI: pannelli solari
- GENERATORI TERMOELETTRICI: si usano come termometri (termocoppie)
- PIEZOELETTRICI: certe sostanze (es. quarzo) quando vengono sollecitate meccanicamente producono fem piezoelettrica di qualche migliaio di volt, ma con correnti molto basse e di tipo impulsivo.
  es. ACCENDIGAS PIEZOELETTRICO
- ELETTROMECCANICI: sono macchine rotanti, dotate di una parte fissa (statore) e di una parte mobile (rotore). Convertono energia meccanica in energia elettrica. sono usati nelle centrali elettriche

CAPITOLO 6: BIPOLI E POTENZA ELETTRICA

1. BIPOLI

SI PUÒ DEFINIRE IL GENERATORE IDEALE DI TENSIONE, CHE VERIFICA LA RELAZIONE:

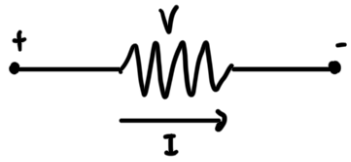
$$\boxed{\mathcal{E} = V} \quad \forall I$$

UN GENERATORE REALE CHE PRESENTA "CADUTA DI TENSIONE RESISTIVA" $R_i I$ TRASCURABILE È APPROSSIMABILE CON UN GENERATORE IDEALE DI TENSIONE

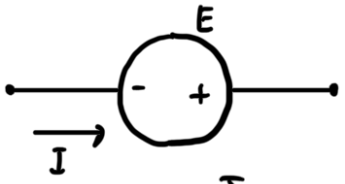
IN MODO ANALOGO, SI PUÒ DEFINIRE IL GENERATORE IDEALE DI CORRENTE (GIC):

$$\boxed{I = J} \quad \forall V$$

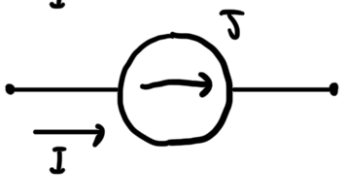
BIPOLI ELEMENTARI: SIMBOLI CIRCUITALI



RESISTENZA



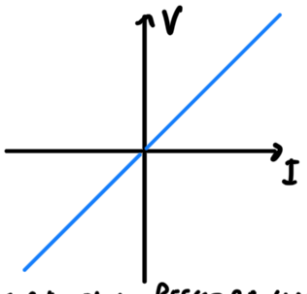
GENERATORE IDEALE DI TENSIONE



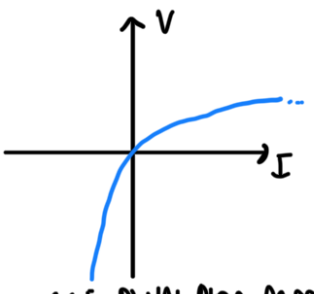
GENERATORE IDEALE DI CORRENTE

CARATTERISTICA ESTERNA DEI BIPOLI

IL COMPORTAMENTO DI UN BIPOLO GENERICO È DEFINITO DALLA RELAZIONE TENSIONE/CORRENTE CHE ESSO PRESENTA AI MORSETTI. TALE RELAZIONE È CHIAMATA CARATTERISTICA ESTERNA DEL BIPOLO. QUANDO TENSIONE E CORRENTE SONO STAZIONARIE SI PARLA DI CARATTERISTICA STATICA ESTERNA DEL BIPOLO

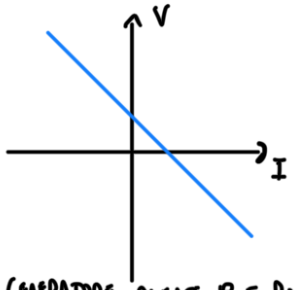


C.S.E. DI UN RESISTORE LINEARE

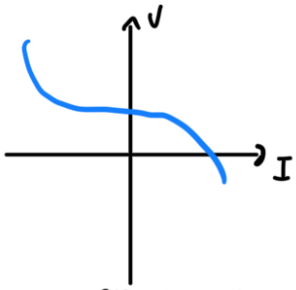


C.S.E. DI UN DIODO RADDRIZZATORE (non lineare)

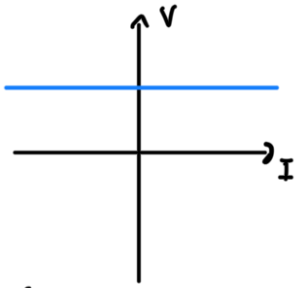
POICHÉ IL RESISTORE È UN BIPOLO PASSIVO, LA SUA C.S.E. OCCUPA SOLO IL 1° E IL 3° QUADRANTE



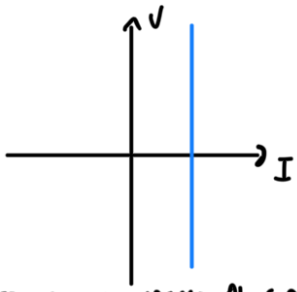
GENERATORE AVENTE $\mathcal{E}$ E R_i COSTANTI $\neq 0$: RETTA NON PASSANTE PER L'ORIGINE



GENERATORE GENERICO



GENERATORE IDEALE DI TENSIONE



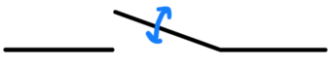
GENERATORE IDEALE DI CORRENTE

BIPOLI PARTICOLARI:

- CORTOCIRCUITO: $V=0 \ \forall I$, $R=0$

- CIRCUITO APERTO: $I=0 \ \forall V$

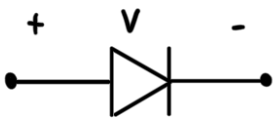
- INTERRUTTORE: AL TEMPO $t=t^*$ COMMUTA, PASSANDO DA CORTOCIRCUITO A CIRCUITO APERTO, E VICEVERSA

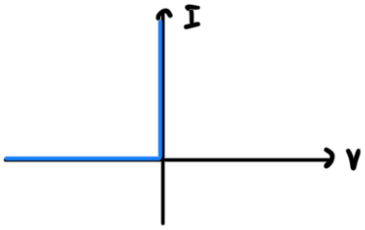


- DIODO A SEMICONDUTTORE: MOLTO DIFFUSO NEI SISTEMI ELETTRICI E ELETTRONICI. COSTITUITO DA 2 STRATI DI SEMICONDUTTORI SOVRAPPOSTI, IN SILICIO

APPLICANDO: $V>0$: CONDUZIONE
$V<0$: INTERDIZIONE

$\xrightarrow{\text{DIODO IDEALE}}$ CONDUZIONE: CORTOCIRCUITO
INTERDIZIONE: CIRCUITO APERTO





2. POTENZA ELETTRICA

SI È GIÀ VISTO CHE A REGIME STAZIONARIO LA POTENZA SCAMBIATA A UNA PORTA ELETTRICA DOTATA DI TENSIONE V E CORRENTE I VALE

$$\boxed{P = VI} \qquad [W] = [V]\cdot[A]$$

A REGIME VARIABILE QUASI STAZIONARIO: $\boxed{P(t) = V(t)\,i(t)}$ $[W]$

CONVENZIONI:

- CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI: POTENZA ENTRANTE
  - → $P > 0$: ASSORBE POTENZA
  - → $P < 0$: EROGA POTENZA
- CONVENZIONE DEI GENERATORI: POTENZA USCENTE
  - → $P > 0$: EROGA POTENZA
  - → $P < 0$: ASSORBE POTENZA

LAVORO ELETTRICO

IL LAVORO ELETTRICO ΔL SCAMBIATO IN Δt AD UNA PORTA ELETTRICA È:

$$\Delta L = \int_{\Delta t} P(t)\,dt = \int_{\Delta t} V(t)\,i(t)\,dt$$

IN REGIME STAZIONARIO LA POTENZA È COSTANTE NEL TEMPO, QUINDI

$$\Delta L = \int_{\Delta t} P\,dt = P\Delta t = VI\Delta t \qquad [J], \quad [kWh] = 3{,}6\cdot 10^6\ J$$

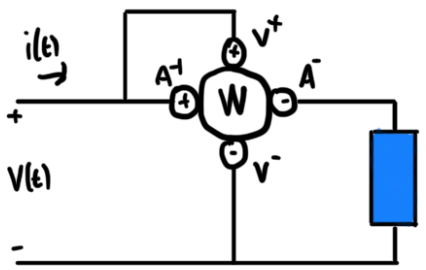
WATTMETRO

SERVE PER MISURARE LA POTENZA ELETTRICA SCAMBIATA AD UNA PORTA.

È DOTATO DI 4 MORSETTI
- → 2 MORSETTI AMPEROMETRICI : IN SERIE
- → 2 MORSETTI VOLTMETRICI : POSTI TRA 2 PUNTI

WATTMETRO IDEALE: TENSIONE NULLA AI MORSETTI AMPEROMETRICI
CORRENTE NULLA AI MORSETTI VOLTMETRICI

SIMBOLO:



CAPITOLO 7: PROPRIETÀ DELLE RETI ELETTRICHE

1. INTRODUZIONE ALLE RETI ELETTRICHE

UNA RETE ELETTRICA È COSTITUITA IN GENERALE DA m POLI, TRA CUI PARTICOLARE ANCHE I BIPOLI ORA, FAREMO RIFERIMENTO ALLE RETI DI BIPOLI, E MOSTREREMO CHE CONOSCENDO LE EQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL LEGAME TRA TENSIONE E CORRENTE IN CIASCUN BIPOLO E LE INTERCONNESSIONI TRA I BIPOLI È POSSIBILE RISOLVERE LA RETE, OVVERO DETERMINARE LE TENSIONI E CORRENTI SU TUTTI I BIPOLI.

2. TOPOLOGIA DELLE RETI ELETTRICHE

LA TOPOLOGIA DI UNA RETE È ESSENZIALMENTE LA DESCRIZIONE DELLE INTERCONNESSIONI ESISTENTI TRA I BIPOLI DELLA RETE. TALE DESCRIZIONE È FONDATA SUI SEGUENTI CONCETTI DI BASE:

- LATO: TRATTO DI RETE CHE RAPPRESENTA UN BIPOLO CON I CONDUTTORI IDEALI DIRETTAMENTE COLLEGATI AI SUOI TERMINALI. PUÒ ESSERE ORIENTATO $[e]$
- NODO: PUNTO DI INTERCONNESSIONE TRA 2 O PIÙ LATI (BIPOLI) DELLA RETE. PUÒ ESSERE ORIENTATO DEFINENDO UN RIF. COERENTE. $[n]$
- GRAFO: DESCRIZIONE GRAFICA DELLA RETE. SE, DISPONENDO TUTTI I NODI SU UN UNICO PIANO, TUTTI I LATI SI POSSONO DISEGNARE SENZA CHE SI INCROCINO, IL GRAFO È DETTO GRAFO PIANO
- GRAFO CONNESSO: UN GRAFO SI DICE CONNESSO QUANDO DATI 2 NODI SI PUÒ SEMPRE PASSARE DALL'UNO ALL'ALTRO MUOVENDOSI LUNGO I SUOI LATI
- GRAFO NON CONNESSO: NEL CASO DI BIPOLI IN REALTÀ SONO PIÙ CIRCUITI
- MAGLIA: INSIEME DI LATI TALI DA COSTITUIRE UN PERCORSO CHIUSO, CHE TOCCA CIASCUN NODO UNA SOLA VOLTA
- ANELLO: UNA MAGLIA CHE ORLA UNA SUPERFICIE NON CONTENENTE ELEMENTI DEL GRAFO
- INSIEME DI TAGLIO: INSIEME DI LATI CONTENUTI IN UN VOLUME ARBITRARIO
- ALBERO: INSIEME DI LATI CHE COLLEGANO TUTTI I NODI DEL GRAFO SENZA FORMARE ALCUNA MAGLIA. SE IL GRAFO HA n NODI, IL NUMERO e_a DI LATI DI OGNI SUO ALBERO È $e_a = n-1$
- COALBERO: COMPLEMENTARE DELL'ALBERO

NEL CASO DI UNA RETE DI m-POLI SI RICORDA CHE UN m-POLO È SEMPRE RICONDUCIBILE A UN m-BIPOLO, E SI FA L'ANALISI PER CIASCUNA PARTE CONNESSA

SIANO p LE PARTI NON CONNESSE DEL GRAFO. SI HANNO:

$$\left.\begin{array}{l} \text{LKC: } n-p \\ \text{LKT: } e-n+p \end{array}\right\} \text{EQUAZIONI INDIPENDENTI, PER UN TOTALE DI } e$$

3. LEGGI DI KIRCHHOFF

1. LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE CORRENTI (LKC):

IN UNA RETE DI m-POLI, LA SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI DEI LATI APPARTENENTI AD UN QUALSIASI INSIEME DI TAGLIO È UGUALE A ZERO IN OGNI ISTANTE:

$$\sum_{\substack{\text{insieme di} \\ \text{taglio (orientato)}}} i(t) = 0$$

2. LEGGE DI KIRCHHOFF DELLE TENSIONI (LKT)

IN UNA RETE DI m-POLI, LA SOMMA ALGEBRICA DELLE TENSIONI DEI LATI APPARTENENTI AD UNA QUALSIASI MAGLIA ORIENTATA È UGUALE A ZERO IN OGNI ISTANTE

$$\sum_{\substack{\text{maglia} \\ \text{(orientata)}}} V(t) = 0$$

4. SISTEMI DI EQUAZIONI TOPOLOGICHE

LE EQUAZIONI CHE ESPRIMONO LE LKT E LE LKC SONO DETTE EQUAZIONI TOPOLOGICHE DELLA RETE, IN QUANTO DESCRIVONO ESSENZIALMENTE LE INTERCONNESSIONI TRA BIPOLI

PER RISOLVERE UNA RETE CONVIENE SCRIVERE UN SISTEMA COSTITUITO DA TUTTE LE POSSIBILI EQUAZIONI TOPOLOGICHE TRA LORO INDIPENDENTI

SISTEMI DI EQUAZIONI LKT INDIPENDENTI

SCEGLIAMO (A PIACERE) UN ALBERO DELLA RETE. PER CIASCUN LATO DEL CORRISPONDENTE COALBERO POSSIAMO INDIVIDUARE UNA MAGLIA COMPOSTA SOLAMENTE DA QUEL LATO DI COALBERO E DA UNO O PIÙ LATI DELL'ALBERO.

TALI MAGLIE SONO $m = \ell_c = \ell - \ell_a = \ell - (n-1)$, E CIASCUNA DI ESSE PER COSTRUZIONE CONTIENE UN LATO CHE NON APPARTIENE ALLE ALTRE MAGLIE.

SI È COSÌ OTTENUTO UN SISTEMA DI m EQUAZIONI INDIPENDENTI TRA LORO

SISTEMI DI EQUAZIONI LKC INDIPENDENTI

SCEGLIAMO (A PIACERE) UN ALBERO DELLA RETE. PER CIASCUN RAMO DI ALBERO POSSIAMO INDIVIDUARE UN INSIEME DI TAGLIO COMPOSTO SOLAMENTE DA UN LATO DI ALBERO E DA UNO O PIÙ LATI DEL COALBERO

TALI INSIEMI DI TAGLIO SONO $\ell_a = n-1$, E CIASCUNO DI ESSI CONTIENE UN LATO CHE PER COSTRUZIONE NON APPARTIENE AGLI ALTRI INSIEMI DI TAGLIO

SI È COSÌ OTTENUTO UN SISTEMA DI $n-1$ EQUAZIONI INDIPENDENTI TRA LORO

⇒ NUMERO DI EQUAZIONI TOPOLOGICHE INDIPENDENTI

PER UNA RETE ELETTRICA POSSONO ESSERE SCRITTE $m + n - 1 = \ell_c + \ell_a = \ell$ EQUAZIONI TOPOLOGICHE INDIP.

$$\sum_{\substack{\text{insieme di} \\ \text{taglio (orientato)}}} i(t) = 0$$ PER CIASCUNO DEGLI $n-1$ INSIEMI DI TAGLIO

$$\sum_{\substack{\text{maglia} \\ \text{(orientata)}}} V(t) = 0$$ PER CIASCUNA DELLE $m = \ell - (n-1)$ MAGLIE

5. CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ELETTRICHE

IN UNA RETE ELETTRICA (COME CONSEGUENZA DELLE LKC E LKT), LA SOMMA DELLE POTENZE (DEFINITE TUTTE CON LA CONV. UTIL.) È NULLA IN OGNI ISTANTE

$$\sum_{h=1}^{\ell} P_h(t) = 0$$

VALE ANCHE CONVENZIONANDO TUTTO CON LA CONV. GEN.. SE ALCUNI BIPOLI RECANO LA CONV. UTIL E ALTRI LA CONV. GEN:

$$\sum_h P_{eh}(t) = \sum_h P_{ah}(t)$$

6. ANALISI DELLE RETI DI BIPOLI (dispensa)

SIA DATA UNA RETE DI ℓ BIPOLI A REGIME STAZIONARIO O A RVQS, AVENTE GRAFO CONNESSO. TALE RETE HA 2ℓ INCOGNITE, TENSIONE E CORRENTE DEGLI ℓ BIPOLI

UTILIZZANDO LE LKT E LKC SI OTTENGONO ℓ EQUAZIONI INDIPENDENTI: TALI EQUAZIONI SONO DETTE EQUAZIONI TOPOLOGICHE PERCHÉ DIPENDONO SOLO DALLA TOPOLOGIA DELLA RETE.

AGGIUNGIAMO ORA LE ℓ EQUAZIONI TIPOLOGICHE DEGLI ℓ BIPOLI. ESSE SONO TRA LORO INDIPENDENTI.

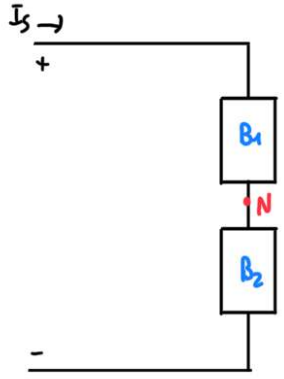
$$\left.\begin{cases} \text{EQ. TOPOLOGICHE} \\ \text{EQ. TIPOLOGICHE} \end{cases}\right] \longrightarrow 2\ell \text{ EQUAZIONI}$$

IN GENERALE, NON È DETTO CHE LA SOLUZIONE $\exists!$. MA NOI ASSUMEREMO SEMPRE CHE $\exists!$

CAPITOLO 8: RETI IN REGIME STAZIONARIO

1. BIPOLI IN SERIE

DUE BIPOLI B_1 E B_2 SONO CONSIDERATI IN SERIE SE UN TERMINALE DI ENTRAMBI È CONNESSO ALLO STESSO NODO N, IN CUI NON CONVERGE NESSUN ALTRO COLLEGAMENTO.



DALLA LKC: $I_S = I_1 = I_2$

DALLA LKT: $V_S = V_1 + V_2$

I DUE BIPOLI POSSONO ESSERE CONSIDERATI COME UN UNICO **BIPOLO SERIE** LE CUI TENSIONI SI SOMMANO

ATTENZIONE: NON TUTTI I BIPOLI POSSONO ESSERE CONNESSI IN SERIE, PER ESEMPIO DUE GIC CON $J_1 \neq J_2$

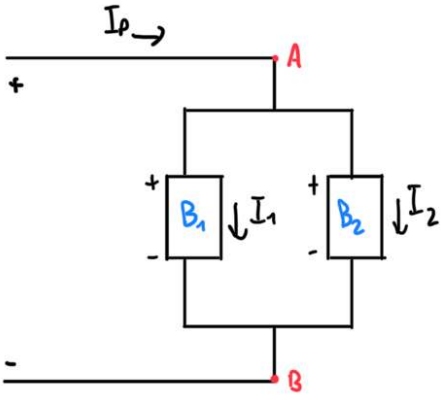
RESISTENZE IN SERIE: IL BIPOLO SERIE DI RESISTORI È UN RESISTORE AVENTE RESISTENZA UGUALE ALLA SOMMA DELLE RESISTENZE

PARTITORE DI TENSIONE RESISTIVO: LA TENSIONE DELLA SERIE V_S SI RIPARTISCE IN MODO PROPORZIONALE ALLA SUA RESISTENZA:

$$V_K = V_S \frac{R_K}{\sum_{h=1}^{e} R_h}$$

2. BIPOLI IN PARALLELO

DUE BIPOLI B_1 E B_2 SONO CONSIDERATI IN PARALLELO SE LE COPPIE DI TERMINALI DI ENTRAMBI SONO COLLEGATI ALLA STESSA COPPIA DI NODI A E B.



PER LA LKT: $V_P = V_1 = V_2$

LKC: $I_P = I_1 + I_2$

BIPOLI IN PARALLELO: SI SOMMANO LE CORRENTI A PARITÀ DI TENSIONE

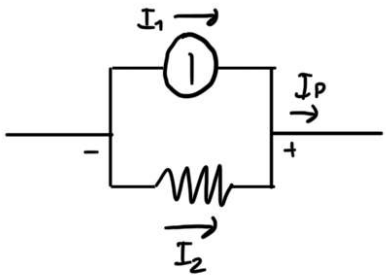
ATTENZIONE: NON TUTTI I BIPOLI POSSONO ESSERE CONNESSI IN PARALLELO. PER ESEMPIO, DUE GIT CON $E_1 \neq E_2$

PARALLELO DI UN GIC E DI UN RESISTORE

UN CASO PARTICOLARE È COSTITUITO DA UN GIC CON CORRENTE COSTANTE J E UN RESISTORE CON CONDUTTANZA G.

CON I RIF. INDICATI LA LKT DIVENTA $V_p = V_1 = -V_2$

LKC: $I_p = I_1 + I_2 = J + GV_2 = J - GV_p$



PARALLELO DI RESISTORI

IL PROCEDIMENTO SOPRA DESCRITTO PUÒ ESSERE GENERALIZZATO AL CASO DI e BIPOLI IN PARALLELO.
NEL CASO DI RESISTORI, PER IL K-ESIMO RESISTORE SI HA:

$$I_K = G_K V_K$$

MENTRE, LA LKC E LKT IMPONGONO $I_p = \sum_{K=1}^{e} I_K$

PER IL PARALLELO $V_K = V_p$

DA QUESTE SI RICAVA: $I_p = \left(\sum_{K=1}^{e} G_K\right) V_p = G_p V_p$, CON $G_p = \sum_{K=1}^{e} G_K = \sum_{K=1}^{e} \frac{1}{R_K}$

LA RESISTENZA EQUIVALENTE IN PARALLELO È $\boxed{R_p = \frac{1}{\sum_{K=e}^{e} \frac{1}{R_K}}}$

PARTITORE DI CORRENTE RESISTIVO

LE RELAZIONI PRECEDENTI IMPLICANO CHE LA CORRENTE DEL PARALLELO I_p SI RIPARTISCE SU CIASCUN RESISTORE PROPORZIONALMENTE ALLA SUA CONDUTTANZA

$$I_K = G_K V_K = G_K V_p = G_K \frac{I_p}{G_p} = \boxed{I_p \frac{G_K}{\sum_{n=1}^{e} G_n}}$$

FORMULA DEL PARTITORE DI CORRENTE RESISTIVO

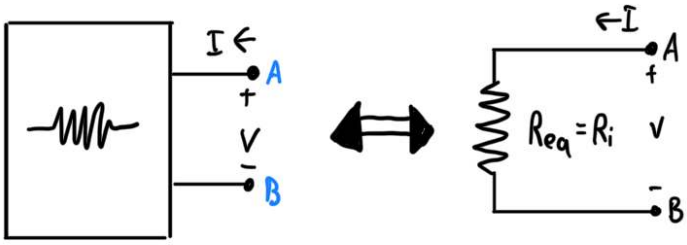
3. RETI DI RESISTORI: RESISTENZA EQUIVALENTE AD UNA COPPIA DI TERMINALI

CONSIDERIAMO UNA RETE GENERICA DI CUI SONO ACCESSIBILI SOLO I TERMINALI A E B.
ESSO PUÒ ESSERE CONSIDERATO COME UN BIPOLO A TUTTI GLI EFFETTI. VOGLIAMO DETERMINARE LA CARATTERISTICA STATICA ESTERNA DI QUESTO BIPOLO

NEL CASO DI RETI PASSIVE, COSTITUITE SOLO DA RESISTORI

$V = R_i I$ $\qquad$ $I = G_i V$

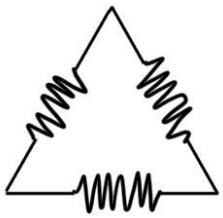
RESISTENZA INTERNA $\qquad$ CONDUTTANZA INTERNA

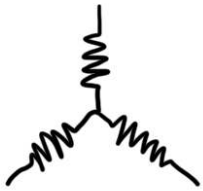


TALE RELAZIONE MOSTRA CHE IL COMPORTAMENTO DELLA RETE PASSIVA TRA A E B È EQUIVALENTE A QUELLO DI UN BIPOLO RESISTORE CON RESISTENZA EQUIVALENTE $R_{eq} = R_i$

POLIGONI DI STELLE E RESISTORI

ESISTONO RETI DI RESISTORI CHE NON SONO NÉ SERIE NÉ PARALLELO. PER ESEMPIO CON RESISTORI COLLEGATI A POLIGONO E STELLA





IN QUESTI CASI SI APPLICANO LE TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO O TRIANGOLO-STELLA

4. METODI DI ANALISI DELLE RETI LINEARI

- METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI
- METODO DELLE CORRENTI DI ANELLO
- METODO DEI POTENZIALI AI NODI
- PROPRIETÀ DI SOSTITUZIONE DI UN BIPOLO
- TEOREMI DEI GENERATORI EQUIVALENTI $\longrightarrow$ TEOREMA DI THEVENIN
  $\longrightarrow$ TEOREMA DI NORTON

PER RISOLVERE UNA RETE LINEARE DOBBIAMO DETERMINARE LE 2e INCOGNITE, PARI A TENSIONE E CORRENTE PER OGNI BIPOLO. POSSIAMO SCRIVERE 2e EQUAZIONI:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\substack{\text{maglia}\\ \text{orientata}}} V_h = 0 \\ \sum\limits_{\substack{\text{insieme di}\\ \text{taglio (orientato)}}} I_h = 0 \end{array}\right] & \text{EQ. TOPOLOGICHE} \\ \left.\begin{array}{ll} V = E & \text{git} \\ I = J & \text{gic} \\ V - RI = 0 & \text{resistori ideali} \end{array}\right] & \text{EQ. TIPOLOGICHE} \end{array}\right.$$

IL SISTEMA PUÒ ESSERE SCRITTO IN FORMA MATRICIALE COME:

$$[A]\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}$$

SE LA SOLUZIONE $\exists!$: $\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ J \end{bmatrix}$

QUESTO METODO DI SOLUZIONE PERÒ È APPLICABILE SOLO SE ℓ È PICCOLO. DA ESSO PERÒ DISCENDONO ALTRI METODI DI ANALISI:

METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

QUESTO METODO SI BASA SUL FATTO CHE LA TENSIONE V E LA CORRENTE I SU CIASCUNO DEI LATI È ESPRIMIBILE COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE TENSIONI DEI GIT E E DELLE CORRENTI DEI GIC J. SE NELLA RETE SONO PRESENTI r GIT $(E_1, E_2, \dots E_m)$ E s GIC $(J_1, \dots, J_s)$, LA TENSIONE E LA CORRENTE DEL GENERICO LATO h-ESIMO SONO ESPRIMIBILI COME:

$$\begin{cases} V_h = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{hk} E_k + \sum_{k=1}^{s} R_{hk} J_k \\ I_h = \sum_{k=1}^{r} G_{hk} E_k + \sum_{k=1}^{s} B_{hk} J_k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_h = \sum_{k=1}^{r} V_{hE_k} + \sum_{k=1}^{s} V_{hJ_k} \\ I_h = \sum_{k=1}^{r} I_{hE_k} + \sum_{k=1}^{s} I_{hJ_k} \end{cases}$$

DOVE:

- $V_{hE_k} = \alpha_{hk} E_k$ È LA TENSIONE PRODOTTA SUL LATO h DAL SOLO GENERATORE E_k
- $V_{hJ_k} = R_{hk} J_k$ È LA TENSIONE PRODOTTA SUL LATO h DAL SOLO GENERATORE J_k

ANALOGAMENTE:

- $I_{hE_k} = G_{hk} E_k$ È LA CORRENTE PRODOTTA SUL LATO h DAL SOLO GENERATORE E_k
- $I_{hJ_k} = B_{hk} J_k$ È LA CORRENTE PRODOTTA SUL LATO h DAL SOLO GENERATORE J_k

QUINDI, PER DETERMINARE LA TENSIONE (O CORRENTE) SU QUALUNQUE LATO DELLA RETE OCCORRE:

- CALCOLARE LA TENSIONE (O LA CORRENTE) SUL LATO CONSIDERATO OTTENUTA ATTIVANDO UN SOLO GENERATORE (E o J) CON TUTTI GLI ALTRI GENERATORI SPENTI
- RIPETERE IL PROCEDIMENTO PER QUANTI SONO I GENERATORI, ATTIVANDONE UNO PER VOLTA
- SOMMARE GLI EFFETTI

OSSERVAZIONI:

1) SPEGNERE UN GENERATORE VUOL DIRE SOSTITUIRLO CON:

GIT $\longrightarrow$ CORTOCIRCUITO

GIC $\longrightarrow$ CIRCUITO APERTO

2) QUESTO METODO È SEMPLICE, MA È LUNGO SE I GENERATORI SONO TANTI. INFATTI, BISOGNA RISOLVERE UNA RETE PER QUANTI SONO I GENERATORI.

3) VALE PER QUALUNQUE BIPOLO. PERÒ NON VALE PER LE POTENZE EROGATE IN QUANTO SONO DETERMINATE DA UN LEGAME NON LINEARE

METODO DELLE CORRENTI DI ANELLO

IL METODO DELLE CORRENTI DI ANELLO CONSENTE DI RIDURRE IL NUMERO DI EQUAZIONI NECESSARIE PER RISOLVERE UNA RETE, UTILIZZANDO COME INCOGNITE DELLE CORRENTI CICLICHE DETTE "CORRENTI DI ANELLO"

SCELTO UN SISTEMA DI $m = \ell - (n-1)$ MAGLIE DELLA RETE INDIPENDENTI TRA LORO, CONSIDERO LE m CORRENTI DI ANELLO. SCELGO UN'ORIENTAZIONE COERENTE CON TUTTE LE MAGLIE (es, ORARIA)

LA CORRENTE DI CIASCUN LATO È ESPRIMIBILE COME DIFFERENZA TRA LE 2 CORRENTI DI ANELLO AL CUI LATO APPARTIENE, OPPURE COME CORRENTE DI UN SOLO ANELLO

ESEMPIO: SE IL LATO GENERICO h APPARTIENE AGLI ANELLI A_r E A_s, E LA CORRENTE I_h HA RIF. CONCORDE CON I_{Ar}, ALLORA ESSA VALE:

$$I_h = I_{Ar} - I_{As}$$

SE CIASCUNO DEI BIPOLI È RAPPRESENTABILE COME UN GENERATORE LINEARE DI TENSIONE (PER CUI SI PUÒ SCRIVERE UN'EQ. CARATTERISTICA DEL TIPO $V_h = E_h - R_h I_h$, SI PUÒ SCRIVERE:

$$V_h = E_h - R_h (I_{Ar} - I_{As})$$

QUESTO È POSSIBILE PER TUTTI I LATI, ESCLUSI QUELLI COSTITUITI DA UN GIC.
LA LKT DI CIASCUNO DEGLI m ANELLI DIVENTA:

$$\sum_h V_h = \sum_h E_h - \sum_h R_h I_h = \sum_h E_h - \sum_h R_h (I_{Ar} - I_{As}) = 0$$

RIORDINANDO I TERMINI SI RICAVA IL SISTEMA DI m EQUAZIONI, LE CUI m INCOGNITE SONO LE m CORRENTI CICLICHE:

$$\begin{cases} R_{A_{11}} I_{A_1} - \sum_{r=2}^{m} R_{A_{1r}} I_{Ar} = E_{A_1} \\ R_{A_{22}} I_{A_2} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 2}}^{m} R_{A_{2r}} I_{Ar} = E_{A_2} \\ \vdots \\ R_{A_{mm}} I_{A_m} - \sum_{r=1}^{m-1} R_{A_{mr}} I_{Ar} = E_{A_m} \end{cases}$$

DOVE $I_{A_1}, I_{A_2}, \dots I_{A_m}$ SONO LE m CORRENTI DI ANELLO

DOVE:

- $R_{A_{11}}, R_{A_{22}}, \dots, R_{A_{mm}}$ SONO LA SOMMA DELLE RESISTENZE DEI LATI DI CIASCUN ANELLO (AUTORESISTENZE DI ANELLO)
- $R_{A_{1r}}, R_{A_{2r}}, R_{A_{mr}}$ SONO LA RESISTENZA DEL LATO COMUNE AGLI ANELLI 1 e r, AGLI ANELLI 2 e r, AGLI ANELLI m e r. (MUTUE RESISTENZE TRA ANELLI)
- $E_{A_1}, E_{A_2}, \dots E_{A_m}$ SONO LA SOMMA ALGEBRICA DELLE TENSIONI DEI GIT PRESENTI LUNGO GLI ANELLI 1, 2, ... m (FEM DI ANELLO)

LE TENSIONI SONO PRESE CON IL SEGNO + SE DATO IL VERSO DI PERCORRENZA DELL'ANELLO SI ENTRA NEL MORSETTO NEGATIVO DEL GENERATORE, NEGATIVO ALTRIMENTI

LA SOLUZIONE DEL SISTEMA DI m EQUAZIONI CONSENTE DI DETERMINARE LE m CORRENTI DI ANELLO.
LE CORRENTI DEI LATI POSSONO ESSERE CALCOLATE CON LA FORMULA $I_h = I_{Ar} - I_{As}$, E LE TENSIONI CON LE EQUAZIONI DI BIPOLO

LATO ANOMALO NEL METODO DELLE CDA

LATO ANOMALO: LATO IN CUI È PRESENTE SOLO UN GIC SENZA AVERE IN PARALLELO UN RESISTORE
COSA SI FA? SI APPLICA IL METODO DELLE CDA CONSIDERANDO COME INCOGNITA LA TENSIONE V_h DEL LATO ANOMALO h, CIOÈ DEL GIC

IL LATO ANOMALO È TRATTATO COME UN GIT CON TENSIONE IMPRESSA $E_h = V_h$
SI AGGIUNGE UN'EQUAZIONE SUPPLEMENTARE:

$$I_h = J_h = \pm (I_{Ar} - I_{As})$$

QUESTO VA FATTO PER OGNI LATO ANOMALO

METODO DEI POTENZIALI AI NODI

IL METODO DEI POTENZIALI AI NODI CONSENTE DI RIDURRE IL NUMERO DI EQUAZIONI NECESSARIE A RISOLVERE UNA RETE, UTILIZZANDO COME INCOGNITE UNA SERIE DI TENSIONI DETTE POTENZIALI AI NODI

1. SI ASSEGNA A UN NODO ARBITRARIO POTENZIALE = 0 (NODO DI MASSA) $U_n = 0$.
   SU CIASCUNO DEGLI ALTRI n-1 NODI SI CONSIDERANO I POTENZIALI RELATIVI A TALE RIFERIMENTO

$$U_1, U_2, \dots U_{n-1}$$

2. LE TENSIONI SU CIASCUN LATO DELLA RETE RISULTANO ALLORA ESPRIMIBILI COME d.d.p., SICCHÉ LA TENSIONE V_h DEL LATO h-ESIMO CHE FA CAPO AI NODI N_r E N_s È:

$$V_h = V_{rs} = U_r - U_s$$

3. SUPPONIAMO CHE CIASCUN BIPOLO DELLA RETE POSSA ESSERE RAPPRESENTATO MEDIANTE UN GIC, DESCRITTO DA UN'EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL TIPO: $I_h = J_h - G_h V_h$. QUESTO È POSSIBILE PER TUTTI I LATI, TRANNE QUELLI ANOMALI (CON UN GIT)

4. ESPRIMENDO LA V_h COME ddp. AI NODI A CUI ESSO È COLLEGATO, SI OTTIENE CHE LA CORRENTE I_h VALE:

$$I_h = J_h - G_h(U_r - U_s)$$

5. LA LKC PER CIASCUNO DEI NODI VALE:

$$\sum_h I_h = \sum_h J_h - \sum_h G_h V_h = \sum_h J_h - \sum_h G_h(U_r - U_s) = 0$$

6. RIORDINANDO I TERMINI SI OTTIENE UN SISTEMA DI $m-1$ EQ., LE CUI $m-1$ INCOGNITE SONO I POTENZIALI AI NODI:

$$\begin{cases} G_{N_{11}} U_1 - \sum_{r=2}^{m-1} G_{N_{1r}} U_r = J_{N_1} \\ G_{N_{22}} U_2 - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 2}}^{m-1} G_{N_{2r}} U_r = J_{N_2} \\ \vdots \\ G_{N_{(m-1)(m-1)}} U_{m-1} - \sum_{r=1}^{m-2} G_{N_{(m-1)r}} U_r = J_{N(m-1)} \end{cases}$$

DOVE $U_1, U_2, \dots, U_{m-1}$ SONO I POTENZIALI AI NODI

- $G_{N_{11}}, G_{N_{22}} \dots G_{N(m-1)(m-1)}$: SOMMA DELLE CONDUTTANZE DEI LATI CHE TOCCANO IL NODO $1, 2, \dots m-1$ (AUTOCONDUTTANZE DI NODO)
- $G_{N_{1r}}, G_{N_{2r}}, \dots G_{N(m-1)r}$: CONDUTTANZE TRA LE COPPIE DI NODI 1 e r, 2 e r, ... $m-1$ e r (MUTUE CONDUTTANZE TRA NODI)
- $J_{N_1}, J_{N_2}, \dots J_{N(m-1)}$: SOMMA ALGEBRICA DELLE CORRENTI DEI GIC COLLEGATI AI NODI $1, 2, \dots m-1$ (CORRENTI IMPRESSE DI NODO)

LE CORRENTI SONO PRESE CON SEGNO POSITIVO SE IL RIF. DI CORRENTE È DIRETTO VERSO IL NODO, NEGATIVO ALTRIMENTI.

7. LA SOLUZIONE DELLE $m-1$ EQ. CONSENTE DI DETERMINARE I POTENZIALI AI NODI. LE TENSIONI DEI LATI POSSONO ESSERE CALCOLATE CON LA FORMULA $V_h = V_{rs} = U_r - U_s$, E LE CORRENTI CON LE EQUAZIONI DI BIPOLO

LATO ANOMALO POTENZIALE AI NODI

LATO ANOMALO: È PRESENTE UN GIT SENZA AVERE IN SERIE UN RESISTORE

COSA SI FA? SI APPLICA IL METODO DEI POTENZIALI AI NODI UTILIZZANDO COME INCOGNITA SUPPLEMENTARE LA CORRENTE I_n DEL LATO ANOMALO, CIOÈ DEL GIT

SI AGGIUNGE UN'EQ. SUPPLEMENTARE:

$$V_n = E_n = \pm(V_{Nr} - V_{Ns})$$

PROPRIETÀ DI SOSTITUZIONE DI UN BIPOLO

CONSIDERIAMO UN QUALUNQUE LATO DI UNA RETE DI ℓ BIPOLI LINEARI, DI TENSIONE E CORRENTE V_n E E_n.

SE IL LATO CONSIDERATO VIENE SOSTITUITO CON UN GIT AVENTE $E = V_n$, OPPURE UN GIC CON $J = I_n$, NULLA CAMBIA PER IL RESTO DELLA RETE. (TRANNE OVVIAMENTE L'EQ. CARATTERISTICA DEL LATO CONSIDERATO)

TEOREMA DI THÉVENIN

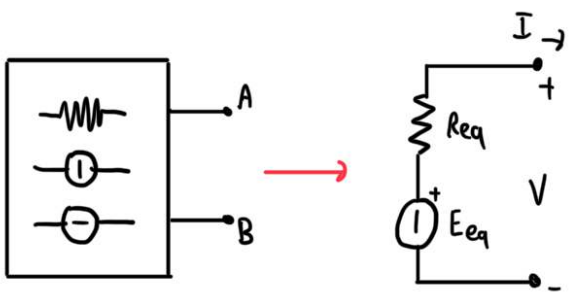
ENUNCIATO: IL COMPORTAMENTO DI UNA QUALUNQUE RETE DI BIPOLI LINEARI IN TERMINI DI TENSIONE V E CORRENTE I AI TERMINALI A E B È EQUIVALENTE A QUELLO DI UN BIPOLO COSTITUITO DA UN GENERATORE IDEALE DI TENSIONE E_{eq} IN SERIE CON UN RESISTORE DI RESISTENZA R_{eq} AVENTE I SEGUENTI VALORI:

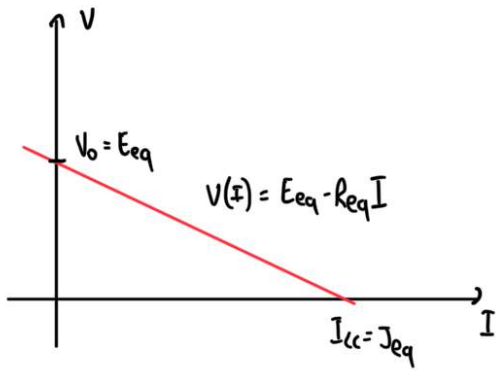
$E_{eq} = V_0$ TENSIONE A VUOTO TRA A E B

$R_{eq} = \frac{V_0}{I_{cc}}$ RESISTENZA EQUIVALENTE

V_0: TENSIONE A VUOTO

I_{cc}: CORRENTE DI CORTOCIRCUITO





DIMOSTRAZIONE: 1. CONSIDERO UN BIPOLO QUALSIASI C CONNESSO AI TERMINALI A E B DELLA RETE. SIANO V E I LA TENSIONE E CORRENTE TRA A E B.

2. IN BASE ALLA PROPRIETÀ DI SOSTITUZIONE, IL BIPOLO C PUÒ ESSERE SOSTITUITO CON UN GIC CON CORRENTE IMPRESSA $J = I$, SENZA MODIFICARE V/I DEL CIRCUITO.

3. LA NUOVA RETE È LINEARE, POSSO APPLICARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.
ESPRIMO LA TENSIONE V COME SOMMA DI $V'+V''$:

$$V = V' + V''$$

V': TENSIONE QUANDO $J=0$ E TUTTI I GENERATORI INTERNI SONO ACCESI
V'': TENSIONE QUANDO J È ATTIVO E TUTTI GLI ALTRI GENERATORI SONO SPENTI

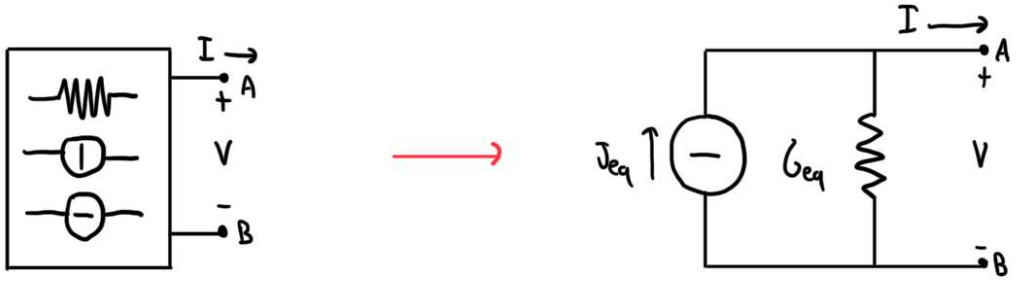
4. V' COINCIDE CON LA TENSIONE A VUOTO TRA A E B
$V'' = -JR_{eq}$

5. SI OTTIENE QUINDI: $V = V_0 - R_{eq} I$

QUESTA RELAZIONE ESPRIME CHE LA CARATTERISTICA STATICA ESTERNA COINCIDE CON QUELLA DI UN GIT DI TENSIONE $E_{eq} = V_0$ E DI UN RESISTORE $R_{eq} = R_i$. ESSO È L'ENUNCIATO DEL TEOREMA DI THÉVENIN

□

TEOREMA DI NORTON



ENUNCIATO: IL COMPORTAMENTO DI UNA QUALUNQUE RETE DI BIPOLI LINEARI IN TERMINI DI TENSIONE V E CORRENTE I AI TERMINALI A E B È EQUIVALENTE A QUELLO DI UN BIPOLO COSTITUITO DA UN GIC J_{eq} IN PARALLELO CON UNA CONDUTTANZA G_{eq}, AVENTI I SEGUENTI VALORI:

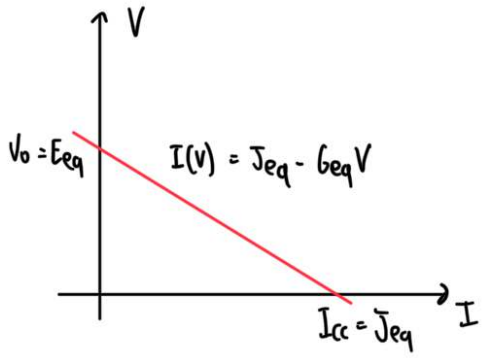
$J_{eq} = I_{cc}$ CORRENTE DI CORTOCIRCUITO TRA A E B

$G_{eq} = \frac{I_{cc}}{V_0} = \frac{1}{R_{eq}}$ CONDUTTANZA EQUIVALENTE

LA CORRENTE I_{cc} È LA CORRENTE TRA A E B QUANDO ESSI SONO COLLEGATI DA UN CORTOCIRCUITO

CARATTERISTICA ESTERNA: RETTA PASSANTE PER LA COPPIA DI PUNTI:

$$(V_0, 0)$$
$$(0, I_{cc})$$



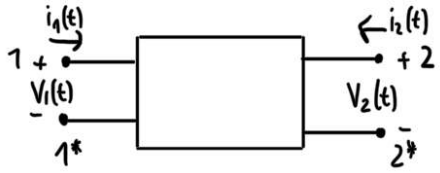
$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$ QUANDO TUTTI I GENERATORI SONO SPENTI

OSSERVAZIONI: L'UTILITÀ DEI GENERATORI EQUIVALENTI DI THEVENIN E NORTON RISIEDE NEL FATTO CHE, UNA VOLTA NOTI E_{eq} E R_{eq}, OPPURE J_{eq} E G_{eq}, PER QUALSIASI CONDIZIONE DI LAVORO LA RETE PUÒ ESSERE SOSTITUITA CON IL GENERATORE EQUIVALENTE.

- ATTENZIONE CHE I TH. DI THEVENIN E NORTON NON CI DANNO ALCUNA INFORMAZIONE CIRCA LE POTENZE SCAMBIATE NELLA RETE

CAPITOLO 9: DOPPI BIPOLI

UN DOPPIO BIPOLO È UN COMPONENTE A 2 PORTE, CIASCUNA CARATTERIZZATA DA UNA TENSIONE E DA UNA CORRENTE.



UN DOPPIO BIPOLO IN GENERALE FISSA 2 RELAZIONI DI LEGAME TRA LE 4 GRANDEZZE DELLE 2 PORTE (CIOÈ TRA LE 2 V E LE 2 I)

2 RELAZIONI, 4 GRANDEZZE ⇒ 2 GRADI DI LIBERTÀ

4 GRANDEZZE ⟶ 2 GRANDEZZE INDIPENDENTI
⟶ 2 GRANDEZZE DIPENDENTI

IN ALCUNI CASI LE GRANDEZZE INDIPENDENTI POSSONO ESSERE SCELTE A PIACERE TRA LE 4. CI SONO 6 SCELTE DIVERSE. AD ESEMPIO, SE SCELGO LE TENSIONI COME GRANDEZZE INDIPENDENTI:

$$\begin{cases} V_1 = F_1(i_1, i_2) \\ V_2 = F_2(i_1, i_2) \end{cases}$$

IN ALTRI CASI INVECE NON È POSSIBILE SCEGLIERNE 2 A CASO

1. DOPPIO BIPOLO IDEALE INERTE DI ORDINE ZERO

UN DOPPIO BIPOLO IDEALE INERTE DI ORDINE ZERO È UN DOPPIO BIPOLO AVENTE RELAZIONI TIPOLOGICHE LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI E TALI CHE SE LE 2 GRAND. INDIP. SONO NULLE, LO SONO ANCHE QUELLE DIPENDENTI

(SI ASSUME CONV. UTIL, SI SOTTINTENDE DIPENDENZA DAL TEMPO)

1. RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN CORRENTE

GRANDEZZE INDIPENDENTI: i_1, i_2

GRANDEZZE DIPENDENTI: V_1, V_2

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ V_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

SONO RELAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI ($R_{11}, R_{12}, R_{21}, R_{22}$) COSTANTI.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RESISTENZA

4 TERMINI MATRICE DI RESISTENZA: PARAMETRI DI RESISTENZA

$$R_{11} = \left.\frac{V_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad R_{12} = \left.\frac{V_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \qquad R_{21} = \left.\frac{V_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad R_{22} = \left.\frac{V_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$

2. RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN TENSIONE

GRANDEZZE INDIPENDENTI: V_1, V_2

GRANDEZZE DIPENDENTI: i_1, i_2

$$\begin{cases} i_1 = G_{11} V_1 + G_{12} V_2 \\ i_2 = G_{21} V_1 + G_{22} V_2 \end{cases}$$

SONO RELAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI ($G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$) COSTANTI.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [G] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

MATRICE DI CONDUTTANZA

4 TERMINI MATRICE DI CONDUTTANZA: PARAMETRI DI CONDUTTANZA

$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad G_{12} = \left.\frac{i_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \qquad G_{21} = \left.\frac{i_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad G_{22} = \left.\frac{i_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

RELAZIONI: $[G] = [R]^{-1}$

$[R] = [G]^{-1}$

3. PRIMA RAPPRESENTAZIONE IBRIDA

GRANDEZZE INDIPENDENTI: i_1, V_2

GRANDEZZE DIPENDENTI: V_1, i_2

$$\begin{cases} V_1 = h_{11} i_1 + h_{12} V_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

SONO RELAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI ($h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$) COSTANTI.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

MATRICE IBRIDA

4 TERMINI MATRICE IBRIDA: PARAMETRI IBRIDI

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{i_1}\right|_{V_2=0} [\Omega] \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{i_1=0} \qquad h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{i_2}{V_2}\right|_{i_1=0} [S]$$

3. SECONDA RAPPRESENTAZIONE IBRIDA

GRANDEZZE INDIPENDENTI: V_1, i_2

GRANDEZZE DIPENDENTI: i_1, V_2

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} V_1 + g_{12} i_2 \\ V_2 = g_{21} V_1 + g_{22} i_2 \end{cases}$$

SONO RELAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI ($g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$) COSTANTI.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

SECONDA MATRICE IBRIDA

4 TERMINI MATRICE IBRIDA: PARAMETRI IBRIDI

$$g_{11} = \left.\frac{i_1}{V_1}\right|_{i_2=0} [S] \qquad g_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{V_1=0} \qquad g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{i_2=0} \qquad g_{22} = \left.\frac{V_2}{i_2}\right|_{V_1=0} [\Omega]$$

RELAZIONE: LA PRIMA E LA SECONDA MATRICE IBRIDA SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA

5. PRIMA RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE

GRANDEZZE INDIPENDENTI: $V_2, -i_2$

GRANDEZZE DIPENDENTI: V_1, i_1

$$\begin{cases} V_1 = A V_2 + B(-i_2) \\ i_1 = C V_2 + D(-i_2) \end{cases}$$

SONO RELAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI (A, B, C, D) COSTANTI

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

PRIMA MATRICE DI TRASMISSIONE

4 TERMINI MATRICE IBRIDA: PARAMETRI DI TRASMISSIONE

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{i_2=0} \qquad B = \left.\frac{-V_1}{i_2}\right|_{V_2=0} \; [\Omega] \qquad C = \left.\frac{i_1}{V_2}\right|_{i_2=0} \; [S] \qquad D = \left.\frac{-i_1}{i_2}\right|_{V_2=0}$$

6. SECONDA RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE

GRANDEZZE INDIPENDENTI: V_1, i_1

GRANDEZZE DIPENDENTI: $V_2, -i_2$

$$\begin{cases} V_2 = A' V_1 + B' i_1 \\ -i_2 = C' V_1 + D' i_1 \end{cases}$$

SONO RELAZIONI LINEARI A COEFFICIENTI (A', B', C', D') COSTANTI

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

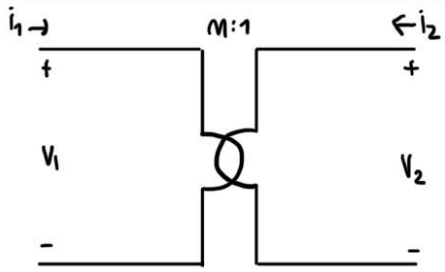
SECONDA MATRICE DI TRASMISSIONE

4 TERMINI MATRICE IBRIDA: PARAMETRI DI TRASMISSIONE

$$A' = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{i_1=0} \qquad B' = \left.\frac{V_2}{i_1}\right|_{V_1=0} \qquad C' = \left.\frac{-i_2}{V_1}\right|_{i_1=0} \qquad D' = \left.\frac{-i_2}{i_1}\right|_{V_1=0}$$

RELAZIONE: LA PRIMA E LA SECONDA MATRICE DI TRASMISSIONE SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA

TRASFORMATORE IDEALE



NELLE RETI ELETTRICHE IL TRASFORMATORE IDEALE È UN DOPPIO BIPOLO IDEALE INERTE DI ORDINE ZERO CHE, (CON LE 2 PORTE CONV. UTIL) HA LE RELAZIONI:

$$\begin{cases} V_1 = m V_2 \\ i_1 = -\frac{1}{m} i_2 \end{cases}$$

DOVE m È IL "RAPPORTO DI TRASFORMAZIONE" (adimensionale)

DA QUESTE RELAZIONI SI DEDUCE CHE NON È POSSIBILE UNA RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN CORRENTE O TENSIONE. È POSSIBILE UNA DELLE ALTRE 4 RAPPRESENTAZIONI

es. PRIMA RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE, CON:

$A = m \qquad C = 0$

$B = 0 \qquad D = \frac{1}{m}$

PROPRIETÀ:

1) CONSERVA LA POTENZA

$$P(t)_{entr} = P_1(t)_{entr} + P_2(t)_{entr} = 0$$

CIOÈ, $P(t)_{entr} = P(t)_{usc}$

2) È UN BIPOLO PASSIVO (DATO CHE CONSERVA LA POTENZA)

3) AMPLIFICA TENSIONI O CORRENTI (tranne nel caso $|m| = 1$)

GENERATORI PILOTATI (O CONTROLLATI)

I GIT/GIC GIÀ VISTI IMPONGONO LA TENSIONE/CORRENTE SU UN LATO, E TALE IMPOSIZIONE È FATTA IN MODO INDIPENDENTE DALL'ALTRA GRANDEZZA DEL LATO E DA OGNI ALTRA GRANDEZZA DELLA RETE.

PER QUESTO MOTIVO SONO DETTI GENERATORI INDIPENDENTI. INVECE, CONSIDERIAMO ORA I GENERATORI PILOTATI:

IL GENERATORE PILOTATO È UN DOPPIO BIPOLO CHE IMPONE IL VALORE DELLA T/C SU UN LATO, E TALE IMPOSIZIONE È FATTA IN MODO INDIPENDENTE DALL'ALTRA GRANDEZZA DI QUEL LATO, MA IN MODO DIPENDENTE DA UN'ALTRA GRANDEZZA DELLA RETE (detta GRANDEZZA DI CONTROLLO)

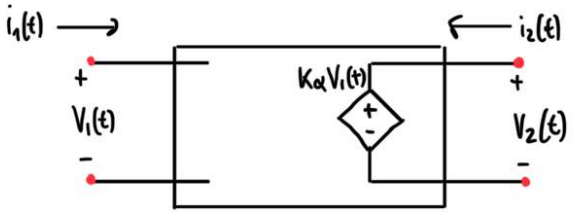
ALLA PORTA 1 C'È $\longrightarrow$ UN CIRCUITO APERTO SE LA GRANDEZZA DI CONTROLLO È UNA TENSIONE

$\longrightarrow$ UN CORTOCIRCUITO SE LA GRANDEZZA DI CONTROLLO È UNA CORRENTE

ALLA PORTA 2 C'È LA GRANDEZZA IMPRESSA PILOTATA

SI DISTINGUONO 4 CASI DI GENERATORI PILOTATI, CORRISPONDENTI ALLE 4 POSSIBILI COMBINAZIONI DI T/C:

1. GENERATORE DI TENSIONE PILOTATO IN TENSIONE (GTPT)



PORTA 1: CIRCUITO APERTO, $i_1(t) = 0$

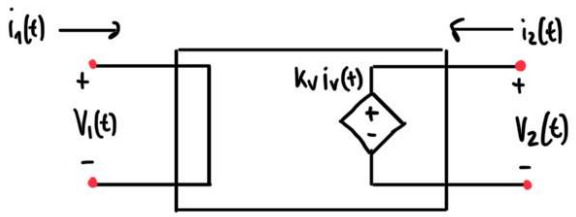
PORTA 2: TENSIONE CHE DIPENDE DALLA TENSIONE PRESENTE ALLA PORTA 1, MOLTIPLICATA PER K_α

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ V_2 = K_\alpha V_1 \end{cases}$$

TALI RELAZIONI SUGGERISCONO LA 2ª RAPPRESENTAZIONE IBRIDA:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

2. GENERATORE DI TENSIONE PILOTATO IN CORRENTE (GTPC)



PORTA 1: CORTOCIRCUITO, $V_1(t) = 0$

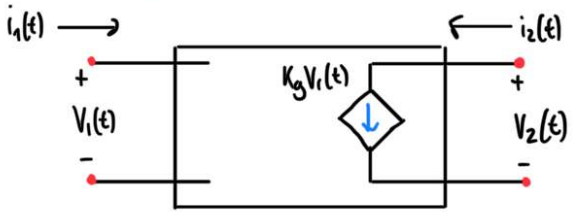
PORTA 2: TENSIONE CHE DIPENDE DALLA CORRENTE PRESENTE ALLA PORTA 1, TRAMITE LA COSTANTE K_v

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ V_2 = K_v i_1 \end{cases}$$

TALI RELAZIONI SUGGERISCONO LA RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN CORRENTE

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

3. GENERATORE DI CORRENTE PILOTATO IN TENSIONE (GCPT)



PORTA 1: CIRCUITO APERTO, $i_1(t) = 0$

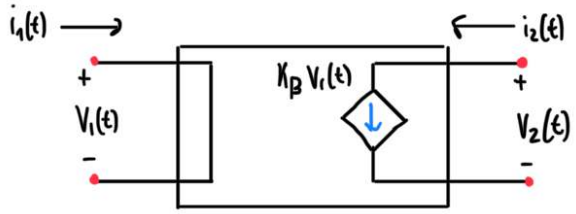
PORTA 2: CORRENTE CHE DIPENDE DALLA TENSIONE PRESENTE ALLA PORTA 1, TRAMITE LA COSTANTE K_g

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = K_g V_1 \end{cases}$$

TALI RELAZIONI SUGGERISCONO LA RAPPRESENTAZIONE CONTROLLATA IN TENSIONE

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

4. GENERATORE DI CORRENTE PILOTATO IN CORRENTE (GCPC)



PORTA 1: CORTOCIRCUITO, $V_1(t) = 0$

PORTA 2: CORRENTE CHE DIPENDE DALLA CORRENTE PRESENTE ALLA PORTA 1, TRAMITE LA COSTANTE K_β

$$\begin{cases} V_1 = 0 \\ i_2 = K_\beta i_1 \end{cases}$$

TALI RELAZIONI SUGGERISCONO LA 1ª RAPPRESENTAZIONE IBRIDA

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

CAPITOLO 10: RETI CON DOPPI BIPOLI

CONSIDERIAMO UNA RETE A REGIME STAZIONARIO, COSTITUITA DA GIT, GIC, RESISTORI IDEALI E DOPPI BIPOLI IDEALI INERTI DI ORDINE ZERO

POSSIAMO SCRIVERE LE LKC, LKT E LE EQUAZIONI TIPOLOGICHE. SI OTTIENE UN SISTEMA LINEARE DI 2e EQUAZIONI, I CUI TERMINI NOTI SONO LE TENSIONI IMPRESSE E LE CORRENTI IMPRESSE.

$$\underbrace{[A]}_{\text{COEFFICIENTI}}\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \underbrace{[B]}_{\text{TERMINI NOTI } (0,E,J)}$$

SE LA SOL. $\exists!$:

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = [A]^{-1}[B]$$

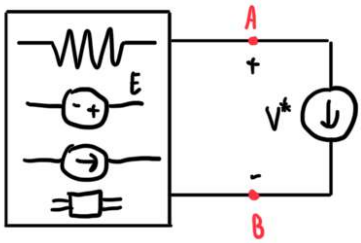
VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI E I TEOREMI DEI GENERATORI EQUIVALENTI (THEVENIN E NORTON)

DATA UNA RETE N_1, FORMATA DA GIC, GIC, RESISTORI E DOPPI BIPOLI IDEALI INERTI DI ORDINE ZERO, LA RETE N_1 SI PUÒ CONSIDERARE COME UN BIPOLO AVENTE PER TERMINALI A E B.

IL BIPOLO EQUIVALENTE AI MORSETTI A E B È LA SERIE DI UN GIT O UN RESISTORE IDEALE (THÉVENIN) O IL PARALLELO DI UN GIC E UN RESISTORE IDEALE.

I DOPPI BIPOLI IDEALI INERTI DI ORDINE ZERO COINVOLTI NEL CALCOLO DEL BIPOLO EQUIVALENTE HANNO LE GRANDEZZE ALLE 2 PORTE TUTTE PRESENTI IN N_1

DIMOSTRAZIONE: APPLICO ALLA PORTA AB UN GIC CON CORRENTE IMPRESSA $J^* = I^*$. SI OTTIENE IL PUNTO DI LAVORO (V^*, I^*). LA CORRENTE IMPRESSA HA UN VALORE GENERICO, QUINDI SI STA CONSIDERANDO UN GENERICO PUNTO DI LAVORO NELLA RETE N_1



LA RELAZIONE TRA V^* E I^* SI CALCOLA APPLICANDO ALLA RETE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- SI FANNO AGIRE TUTTI I GENERATORI TRANNE IL GIC J^* $(V^{*\prime})$
- SI FA AGIRE SOLO IL GIC J^* $(V^{*\prime\prime})$ (NON TOCCANDO I DOPPI BIPOLI E RESISTORI)

⇒ SI HA $V^{*\prime} = V_0$

$$V^{*\prime\prime} = -R_{eq} J^* = -R_{eq} I^*$$

SI OTTIENE COSÍ $V^* = V_0 - R_{eq} I^*$

OSS. 1) UN MODO DI CALCOLARE R_{eq} E' CALCOLARE V_0 E I_{cc} E POI DIVIDERE

2) PER CALCOLARE R_{eq} SI PUÒ ANCHE APPLICARE AD AB UN GIC/GIT, E CON THEVENIN: $R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I_{AB}}$

CAPITOLO 11: BIPOLO CONDENSATORE

IL CONDENSATORE È FORMATO DA UNA COPPIA DI CONDUTTORI DI FORMA GENERICA, DETTI ARMATURE, SEPARATI DA UNA O PIÙ DIELETTRICI

SULLE ARMATURE SONO PRESENTI CARICHE ELETTRICHE LIBERE, $q_A(t)$ E $q_B(t)$, UGUALI E OPPOSTE: $q_A(t) = -q_B(t)$
SI ASSUME CHE IL CAMPO ELETTRICO OVUNQUE, ANCHE SE VARIABILE NEL TEMPO, SIA QUELLO ELETTROSTATICO.
CIASCUNA ARMATURA È EQUIPOTENZIALE E FRA LE 2 ARMATURE C'È UNA TENSIONE V(t) CHE È UNA ddp.

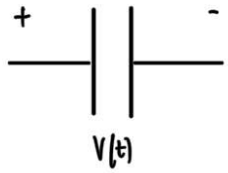
IL LEGAME ESISTENTE TRA LE CARICHE E LA TENSIONE È LA CAPACITÀ (C):

$$C = \frac{q_A(t)}{V_{AB}(t)} = \frac{q_B(t)}{V_{BA}(t)} = \frac{q(t)}{V(t)}$$

U.M.: FARAD $[F] = \left[\frac{C}{V}\right]$

2. BIPOLO CONDENSATORE

IL CONDENSATORE È SCHEMATIZZABILE COME UN BIPOLO: IL BIPOLO CONDENSATORE SONO SODDISFATTE LE 2 PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI UN BIPOLO:
- IL CAMPO ELETTRICO AL SUO INTERNO È QUELLO ELETTROSTATICO
- LA CORRENTE ENTRANTE A UN TERMINALE È UGUALE A QUELLA USCENTE DALL'ALTRO



RELAZIONE DEL BIPOLO (CONV. UTIL): $i(t) = C\frac{dV(t)}{dt}$

INTEGRO: $V(t) = V(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,dt'$

PONGO $V(0) = 0$: $V(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^t i(t')\,dt'$

3. ENERGIA IMMAGAZZINATA

1) SI CONSIDERI UN BIPOLO CONDENSATORE A UN ISTANTE INIZIALE (t^*), IN CUI È SCARICO: $q(t^*) = 0$, $V(t^*) = 0$.
IN QUESTA CONDIZIONE È NULLA L'ENERGIA IMMAGAZZINATA.

2) CONSIDERO UN ISTANTE $t > t^*$ E CALCOLO IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE

$$L_{entr}(0,t) = \int_0^t P_{entr}(t)\,dt = \int_0^t v(t)i(t)\,dt = \int_{V(0)}^{V(t)} C v\,dv = \frac{1}{2}CV^2(t) - \frac{1}{2}CV^2(0) = \frac{1}{2}CV^2(t) \geq 0$$

⇒ IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE È NON NEGATIVO E DIPENDE SOLO DALLO STATO FINALE DEL CONDENSATORE.

3) SE SCARICO IL CONDENSATORE, OTTENGO CHE $L_{entr} = -L_{usc}$

IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE > 0 IN $[0, t_1]$ È STATO ACCUMULATO E TOTALMENTE RESTITUITO IN $[t_2, t_3]$ SENZA CHE VI SIA STATA DISSIPAZIONE. TALE LAVORO CORRISPONDE A ENERGIA IMMAGAZZINATA W_C

$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{2}CV^2(t) \quad [J]}$$

ESSA È FUNZIONE DI STATO DELLA TENSIONE, CHE È LA VARIABILE DI STATO

4) LA POTENZA ENTRANTE È:

$$P_{entr}(t) = V(t)\,i(t) = C\,v(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Cv^2(t)\right] = \frac{d}{dt}W_C(t)$$

IN CONCLUSIONE, IL BIPOLO CONDENSATORE È UN BIPOLO IN GRADO DI IMMAGAZZINARE TUTTO IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE SOTTO FORMA DI ENERGIA LEGATA ALLA TENSIONE, CON PROCESSO REVERSIBILE. È UN BIPOLO PASSIVO

4. BIPOLO CONDENSATORE A REGIME STAZIONARIO

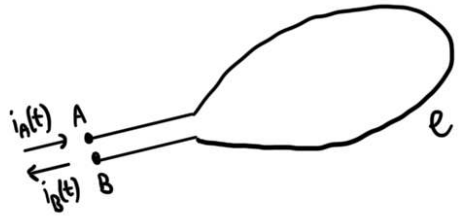
A REGIME STAZIONARIO, CIOÈ CON TUTTE LE GRANDEZZE COSTANTI NEL TEMPO, $\frac{d}{dt} = 0$, QUINDI:
$I = 0, \ \forall V$

A REGIME STAZIONARIO, IL CONDENSATORE PUÒ ESSERE SOSTITUITO DA UN CIRCUITO APERTO

CAPITOLO 12: BIPOLO INDUTTORE

1. INDUTTORE

L'INDUTTORE È FORMATO DA UN CONDUTTORE FILIFORME CHE SI SVILUPPA LUNGO UNA LINEA ℓ DI FORMA QUALSIASI. LA LINEA È CHIUSA E I DUE MORSETTI SONO POSTI MOLTO VICINI

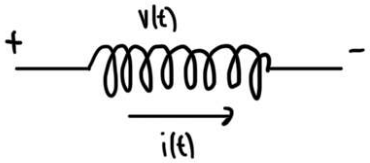


$$i_A(t) = i_B(t)$$

2. BIPOLO INDUTTORE

L'INDUTTORE È SCHEMATIZZABILE COME UN BIPOLO: IL BIPOLO INDUTTORE SONO SODDISFATTE LE 2 PROPRIETÀ FONDAMENTALI DI UN BIPOLO:

- IL CAMPO ELETTRICO RIMANENDO TANGENTI ALLA SUPERFICIE LIMITE È QUELLO ELETTROSTATICO
- LA CORRENTE ENTRANTE A UN TERMINALE È UGUALE A QUELLA USCENTE DALL'ALTRO



LA RELAZIONE DEL BIPOLO INDUTTORE È (CONV. UTIL): $V(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

L: INDUTTANZA U.M. HENRY $[H] = \left[\dfrac{V \cdot s}{A}\right] = [\Omega \cdot s]$

INTEGRANDO LA RELAZIONE: $i(t) = i(0) + \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t V(t')\,dt'$

PONIAMO $i(0) = 0$: $i(t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^t V(t')\,dt'$

3. ENERGIA IMMAGAZZINATA

1) SI CONSIDERI UN BIPOLO INDUTTORE A UN ISTANTE INIZIALE (t^*), IN CUI È SCARICO: $i(t^*) = 0$
IN QUESTA CONDIZIONE È NULLA L'ENERGIA IMMAGAZZINATA. FISSIAMO $t^* = 0$

2) CONSIDERO UN ISTANTE $t > t^*$ E CALCOLO IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE IN $[0, t]$

$$L_{entr}(0,t) = \int_0^t P_{entr}(t)\,dt = \int_0^t V(t)\,i(t)\,dt = \int_{i(0)}^{i(t)} L\,i\,di = \frac{1}{2}Li^2(t) - \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}Li^2(t) \geq 0.$$

⇒ IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE È NON NEGATIVO E DIPENDE SOLO DALLO STATO FINALE DELL'INDUTTORE

3) SE SCARICO L'INDUTTORE, OTTENGO CHE $L_{entr} = -L_{usc}$

IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE > 0 IN $[0, t_1]$ È STATO ACCUMULATO E TOTALMENTE RESTITUITO IN $[t_2, t_3]$ SENZA CHE VI SIA STATA DISSIPAZIONE. TALE LAVORO CORRISPONDE A ENERGIA IMMAGAZZINATA W_L

$$\boxed{W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \quad [J]}$$

ESSA È FUNZIONE DI STATO DELLA CORRENTE, CHE È LA VARIABILE DI STATO

4) LA POTENZA ENTRANTE È:

$$P_{entr}(t) = V(t)\, i(t) = L i(t) \frac{di(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} L i^2(t)\right] = \frac{d}{dt} W_L(t)$$

IL BIPOLO INDUTTORE È UN BIPOLO IN GRADO DI IMMAGAZZINARE TUTTO IL LAVORO ELETTRICO ENTRANTE SOTTO FORMA DI ENERGIA LEGATA ALLA CORRENTE, CON PROCESSO REVERSIBILE, È UN BIPOLO PASSIVO

4. BIPOLO INDUTTORE A REGIME STAZIONARIO

A REGIME STAZIONARIO, CIOÈ CON TUTTE LE GRANDEZZE COSTANTI NEL TEMPO, $\frac{d}{dt} = 0$, QUINDI:
$V = 0$, $\forall I$

A REGIME STAZIONARIO, L'INDUTTORE PUÒ ESSERE SOSTITUITO DA UN CORTOCIRCUITO

CAPITOLO 13: INTRODUZIONE AL REGIME SINUSOIDALE

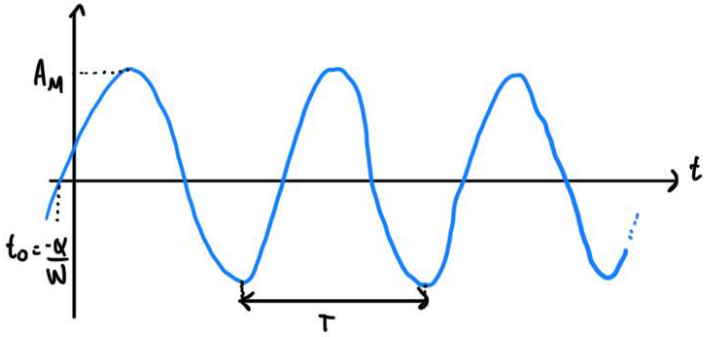
1. FUNZIONI SINUSOIDALI

UNA FUNZIONE SINUSOIDALE DEL TEMPO È ESPRIMIBILE IN TUTTA GENERALITÀ COME:

$$\boxed{a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)}$$

DOVE:

- A_M È L'AMPIEZZA [u.m. = [a]]
- ω È LA PULSAZIONE [rad/s]
- α È LA FASE INIZIALE [rad]
- L'ARGOMENTO $(\omega t + \alpha)$ È LA FASE ISTANTANEA



[NB: AVREMMO POTUTO ESPRIMERE LA STESSA FUNZIONE SINUSOIDALE PER MEZZO DEL COSENO:

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) = A_M \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = A_M \cos(\omega t + \delta)$$]

UNA FUNZIONE SINUSOIDALE È UN CASO PARTICOLARE DI FUNZIONE PERIODICA:

PERIODO: T È PERIODO SE $a(t) = a(t + mT)$ [s]

FREQUENZA: $F = \frac{1}{T}$ [Hz]

NELLE FUNZIONI SINUSOIDALI, IL PERIODO T È DEFINITO COME IL TEMPO IN CUI L'ARGOMENTO SUBISCE UN INCREMENTO DI 2π, OVVERO $\omega T = 2\pi$. SI OTTENGONO LE RELAZIONI:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad F = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

PER LA PERIODICITÀ, α PUÒ ESSERE RICONDOTTA A $-\pi < \alpha \leq \pi$

2. VALORE EFFICACE

SI DEFINISCE VALORE EFFICACE A LA SUA MEDIA QUADRATICA IN UN PERIODO:

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T a^2(t)\,dt} = \frac{A_M}{\sqrt{2}} \approx 0.707\, A_M}$$

ESEMPIO: "corrente alternata a 220 V" = CORRENTE DI V.EFFICACE = 220 V ($A_M \approx 311$ V)

3. FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

FUNZIONI SINUSOIDALI DOTATE DI UGUALE FREQUENZA SI DICONO FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

ACCANTO ALLA FUNZIONE $a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha)$ CONSIDERO UNA FUNZIONE $b(t) = B_M \sin(\omega t + \beta)$ ISOFREQUENZIALE CON $a(t)$

LA DIFFERENZA TRA LE FASI ISTANTANEE DELLE 2 SINUSOIDI RISULTA INDIPENDENTE DALL'ISTANTE TEMPORALE DI ANALISI, ED È PARI ALLA DIFFERENZA TRA LE 2 FASI INIZIALI:

$$\varphi = (\omega t + \alpha) - (\omega t + \beta) = \alpha - \beta$$

φ È DETTO SFASAMENTO, PIÙ PRECISAMENTE "ANTICIPO DI FASE DI $a(t)$ RISPETTO A $b(t)$. SE $\varphi > 0$, $a(t)$ ANTICIPA $b(t)$. SE:

- $\varphi = 0$ $(\alpha = \beta)$ LE DUE SINUSOIDI SONO DETTE IN FASE
- $\varphi = \pm\pi$ $(\alpha = \beta + \pi)$ LE DUE SINUSOIDI SONO DETTE IN OPPOSIZIONE DI FASE
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\alpha = \beta + \frac{\pi}{2})$ $a(t)$ È DETTA IN QUADRATURA IN ANTICIPO SU $b(t)$
- $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $(\alpha = \beta - \frac{\pi}{2})$ $a(t)$ È DETTA IN QUADRATURA IN RITARDO SU $b(t)$

SE LA FREQUENZA È FISSA, OGNI FUNZIONE È DETERMINATA UNIVOCAMENTE DA AMPIEZZA A_M E FASE INIZIALE α

4. TRASFORMATA DI STEINMETZ - FASORI

È CONVENIENTE UTILIZZARE LO STRUMENTO DEI FASORI PER SVOLGERE OPERAZIONI COI NUMERI COMPLESSI, CHE ALTRIMENTI CON LE FUNZIONI SINUSOIDALI SAREBBERO MOLTO LABORIOSE

CIASCUNA FUNZIONE SINUSOIDALE ISOFREQUENZIALE PUÒ ESSERE MESSA IN CORRISPONDENZA BIUNIVOCA CON UN NUMERO COMPLESSO

FASORI

UN NUMERO COMPLESSO PRESENTA 2 GRADI DI LIBERTÀ (MODULO E ARGOMENTO), AL PARI DELLE FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI.

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \alpha)$$

IL NUMERO COMPLESSO HA:

- MODULO PARI AL VALORE EFFICACE A DELLA SINUSOIDE
- ARGOMENTO PARI ALLA SUA FASE INIZIALE α

IN NOTAZIONE POLARE SI ESPRIME COME $\bar{A} = Ae^{j\alpha}$

LA TRASFORMAZIONE COSÌ DEFINITA PRENDE IL NOME DI TRASFORMATA DI STEINMETZ
I NUMERI COMPLESSI CHE ESSA PRODUCE SONO DETTI FASORI

OSS. NON HANNO SENSO OPERAZIONI TRA FASORI DI FUNZIONI SINUSOIDALI NON ISOFREQUENZIALI

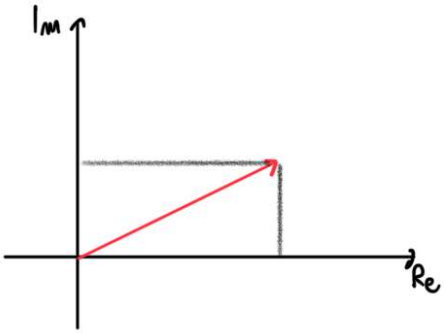
NOTAZIONE TRIGONOMETRICA: $\left(e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha\right)$ $\quad \bar{A} = Ae^{j\alpha} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$

NOTAZIONE CARTESIANA: $\bar{A} = Re + jIm$ $\quad \begin{cases} Re = A\cos\alpha \\ Im = A\sin\alpha \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{Re^2 + Im^2} \\ \tan\alpha = \dfrac{Im}{Re} + K\pi \end{cases}$

DOVE $K = \begin{cases} 0 \text{ se } Re > 0 \\ 1 \text{ se } Re < 0,\ Im > 0 \\ -1 \text{ se } Re < 0,\ Im < 0 \end{cases}$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI FASORI

UN NUMERO COMPLESSO PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO NEL PIANO DI GAUSS



5. OPERAZIONI SUI FASORI

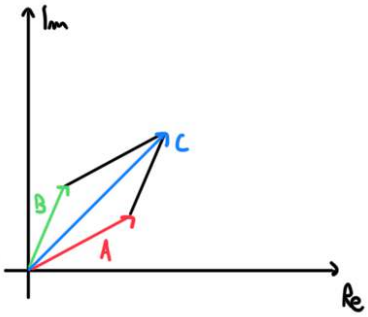
1. SOMMA
2. PRODOTTO PER UNO SCALARE
3. PRODOTTO PER L'IMMAGINARIO $j\omega$ (DERIVATA TEMPORALE)

1. SOMMA

SOMMANDO I FASORI $\bar{A}$ E $\bar{B}$, RAPPRESENTATIVI DELLE SINUSOIDI $a(t)$ E $b(t)$ SI OTTIENE:

$$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B} = (Re_A + Re_B) + j(Im_A + Im_B) = Re_C + jIm_C$$

(A LIVELLO GRAFICO, È EQUIVALENTE A FARE LA SOMMA TRA VETTORI)



LA SOMMA DEI FASORI $\bar{A}$ E $\bar{B}$, RAPPRESENTATIVI DELLE SINUSOIDI $a(t)$ E $b(t)$ È IL FASORE $\bar{C}$ RAPPRESENTATIVO DELLA SINUSOIDE $c(t)$ OTTENUTA DALLA SOMMA DI $a(t)$ E $b(t)$. OVVERO, ALLA SOMMA DELLE SINUSOIDI CORRISPONDE LA SOMMA DEI FASORI

2. PRODOTTO PER UNO SCALARE K

MOLTIPLICANDO $\bar{A}$ PER LO SCALARE K SI OTTIENE:

$$\bar{C} = K\bar{A} = KAe^{j\alpha} = |K|Ae^{j(\alpha \pm m\pi)} = Ce^{j\gamma} \qquad \text{DOVE: } \begin{cases} m=0 & \text{se } K>0 \\ m=1 & \text{se } K<0 \end{cases}$$

QUINDI, IL FASORE $\bar{C}$ AVRÀ MODULO C E ARGOMENTO γ, CHE VALGONO:

$$C = |K|A, \qquad \gamma = \begin{cases} \alpha & \text{se } K>0 \\ \alpha \pm \pi & \text{se } K<0 \end{cases}$$

IL PRODOTTO PER UNO SCALARE K DEL FASORE $\bar{A}$, RAPPRESENTATIVO DELLA SINUSOIDE $a(t)$ È IL FASORE $\bar{C}$ RAPPRESENTATIVO DELLA SINUSOIDE $c(t)$ OTTENUTA DAL PRODOTTO PER K DI $a(t)$. OVVERO, AL PRODOTTO PER UNO SCALARE DELLE SINUSOIDI CORRISPONDE AL PRODOTTO PER LO STESSO SCALARE DEI FASORI

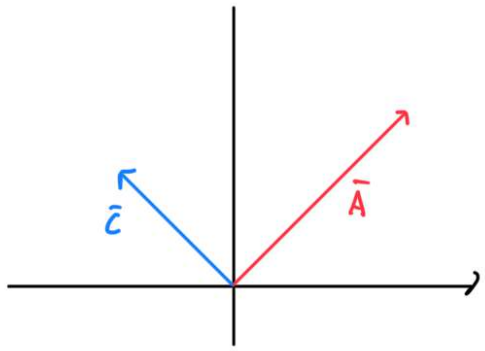
3. PRODOTTO PER L'IMMAGINARIO $j\omega$

MOLTIPLICANDO IL FASORE $\bar{A}$ PER L'IMMAGINARIO $j\omega$ (DOVE $j\omega$ È LA PULSAZIONE DELLE SINUSOIDI) SI OTTIENE:

$$\bar{C} = j\omega\bar{A} = \omega Ae^{j\alpha}e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega Ae^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})} = Ce^{j\gamma}$$

DOVE: $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$. IL RISULTATO È UN NUMERO COMPLESSO AVENTE MODULO C E ARGOMENTO γ CHE VALGONO:

$$C = \omega A, \quad \gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$$



GRAFICAMENTE: MOLTIPLICO PER ω, RUOTO DI $\frac{\pi}{2}$ ↺

IL PRODOTTO PER $j\omega$ DEL FASORE $\bar{A}$, RAPPRESENTATIVO DELLA SINUSOIDE $a(t)$ È IL FASORE $\bar{C}$ RAPPRESENTATIVO DELLA SINUSOIDE $c(t)$ CHE COSTITUISCE LA DERIVATA TEMPORALE DI $a(t)$.
OVVERO, ALLA DERIVATA TEMPORALE DELLE SINUSOIDI CORRISPONDE IL PRODOTTO PER $j\omega$ DEI FASORI, DOVE ω È LA PULSAZIONE ANGOLARE DELLE SINUSOIDI

OSSERVAZIONI:

1. RISPETTO ALLE OPERAZIONI DI SOMMA, PRODOTTO PER UNO SCALARE E DERIVATA TEMPORALE, L'INSIEME DELLE FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI È CHIUSO
2. A TALI TRE OPERAZIONI CORRISPONDONO RISPETTIVAMENTE SOMMA, PRODOTTO PER SCALARE E PRODOTTO PER $j\omega$ ESEGUITI SUI FASORI RAPPRESENTATIVI
3. RISPETTO A QUESTE ULTIME OPERAZIONI PURE L'INSIEME DEI FASORI È CHIUSO
4. PER LE PROPRIETÀ DI SOMMA E PRODOTTO PER SCALARE, LA TRASFORMATA SIMBOLICA È LINEARE

5. PER LA PROPRIETÀ RELATIVA ALLA DERIVAZIONE LA TRASFORMATA SIMBOLICA SOSTITUISCE AL SISTEMA DELLE OPERAZIONI ALGEBRICO-DIFFERENZIALI DELLE SINUSOIDI IL SISTEMA DI OP. ALGEBRICHE IN CAMPO COMPLESSO DEI FASORI, CHE È DI PIÙ AGEVOLE TRATTAZIONE

4. ALTRE OPERAZIONI SUI FASORI

4. PRODOTTO DI UN FASORE PER IL CONIUGATO DI UN SECONDO FASORE
5. RAPPORTO TRA FASORI

4. PRODOTTO DI UN FASORE PER IL CONIUGATO DI UN SECONDO FASORE

CONSIDERIAMO I 2 FASORI $\bar{A}$ E $\bar{B}$. IL PRODOTTO DI UN FASORE $\bar{A}$ PER IL CONIUGATO $\bar{B}^*$ DI B È IL NUMERO COMPLESSO:

$$\dot{P} = \bar{A}\bar{B}^* = Ae^{j\alpha} Be^{-j\beta} = ABe^{j(\alpha-\beta)} = ABe^{j\varphi} = AB\cos\varphi + AB\sin\varphi$$

ESSO HA MODULO UGUALE AL PRODOTTO DEI MODULI E ARGOMENTO UGUALE ALLA DIFFERENZA TRA GLI ARGOMENTI. PERÒ NON RAPPRESENTA ALCUNA FUNZIONE SINUSOIDALE, QUINDI NON È UN FASORE (PER QUELLO C'È UN PUNTO E NON UN TRATTINO)

5. RAPPORTO TRA FASORI

TRA FASORI È POSSIBILE ESEGUIRE ANCHE IL RAPPORTO, ANCHE SE IL RISULTATO NON È UNA SINUSOIDE

$$\dot{O} = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)} = Oe^{j\varphi}$$

SI PUÒ ANCHE SCRIVERE $\bar{A} = \dot{O}B$

5. ANALISI DELLE RETI A REGIME SINUSOIDALE

PER RISOLVERE UNA RETE A REGIME SINUSOIDALE OCCORRE:

1. TRASFORMARE LE TENSIONI O CORRENTI SINUSOIDALI NEI CORRISPONDENTI FASORI
2. ESEGUIRE L'ANALISI DELLA RETE OPERANDO IN CAMPO COMPLESSO
3. SI ANTI TRASFORMANO I FASORI PER DEDURRE LE FUNZIONI SINUSOIDALI INCOGNITE

6. DIAGRAMMA FASORIALE

NELL'ANALISI DELLE RETI CON I FASORI RISULTA MOLTO UTILE IL DIAGRAMMA FASORIALE, CIOÈ L'INSIEME DELLE SUE RAPPRESENTAZIONI GRAFICHE, DISEGNATE NELLO STESSO PIANO COMPLESSO.

- I FASORI DELLE TENSIONI AVRANNO I MODULI TRA LORO IN SCALA
- I FASORI DELLE CORRENTI AVRANNO I MODULI TRA LORO IN SCALA

} LE 2 SCALE SONO INDIPENDENTI

RICORRENDO AL DIAGRAMMA FASORIALE SI PUÒ RISOLVERE LA RETE PER VIA GRAFICA. TUTTAVIA CON UNA PRECISIONE MINORE RISPETTO ALLA VIA ALGEBRICA, QUINDI NOI NON LO FACCIAMO

CAPITOLO 14: RETI IN REGIME SINUSOIDALE

1. GENERALITÀ

UNA RETE ELETTRICA È A REGIME SINUSOIDALE QUANDO TUTTE LE TENSIONI E TUTTE LE CORRENTI VARIANO NEL TEMPO COME FUNZIONI SINUSOIDALI ISOFREQUENZIALI

DAL PUNTO DI VISTA APPLICATIVO SONO MOLTO IMPORTANTI PERCHÉ HANNO VASTO IMPIEGO NELLE RETI DI POTENZA E DI SEGNALE

L'ANALISI DELLE RETI A REGIME SINUSOIDALE SI FA CON METODI SIMILI A QUELLE A REGIME STAZIONARIO. QUESTO SOLO SE LA RETE È LINEARE, PERCHÉ ALTRIMENTI NON POTREI APPLICARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

2. BIPOLI IN REGIME SINUSOIDALE E POTENZA

SI CONSIDERI UN BIPOLO A REGIME SINUSOIDALE E SI SCELGA UNA CONVENZIONE.
A PRESCINDERE DALLA CONVENZIONE ADOTTATA, TENSIONE E CORRENTE SIANO:

$$\begin{cases} v(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, V \sin(\omega t + \alpha) \\ i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta) = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \beta) \end{cases}$$

DOVE V E I SONO I VALORI EFFICACI.
SIA φ LO SFASAMENTO TRA TENSIONE E CORRENTE: $\varphi = \alpha - \beta$

SE $\longrightarrow$ $\varphi > 0$: TENSIONE È IN ANTICIPO SULLA CORRENTE
$\longrightarrow$ $\varphi < 0$: TENSIONE È IN RITARDO SULLA CORRENTE

A TALI TENSIONE E CORRENTE SONO ASSOCIATI I SEGUENTI FASORI: $\begin{cases} \bar{V} = V e^{j\alpha} \\ \bar{I} = I e^{j\beta} \end{cases}$

POTENZE:

- POTENZA ISTANTANEA (E POTENZA FLUTTUANTE)
- POTENZA ATTIVA (REALE)
- POTENZA APPARENTE
- POTENZA REATTIVA
- FATTORE DI POTENZA
- POTENZA COMPLESSA

1) Potenza istantanea

La potenza istantanea entrante nel bipolo (conv. util.) è:

$$\boxed{p(t) = v(t)\,i(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha) \cdot I_M \sin(\omega t + \beta)}$$

Utilizzando le formule di Werner $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{V_M I_M}{2}\cos(2\omega t + \alpha + \beta) = \underset{\text{costante}}{VI\cos\varphi} - \underbrace{VI\cos(2\omega t + \alpha + \beta)}_{\text{potenza fluttuante}}$$

La potenza istantanea è una funzione periodica, ma non è sinusoidale a causa dell'addendo costante

2) Potenza attiva (reale)

Si definisce potenza attiva o potenza reale il valore medio in un periodo di una potenza periodica in regime sinusoidale si ottiene:

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt = VI\cos\varphi} \quad [W]$$

(questo perché la potenza fluttuante ha v.m. nullo in un periodo, quindi potenza attiva = potenza fluttuante)

Max se tensione e corrente sono in fase
Min se tensione e corrente sono in opposizione di fase
Nulla se tensione e corrente sono in quadratura

Il lavoro elettrico è $L = P\Delta t = P_m T$ (nelle applicazioni, $\Delta t \gg T$ è sempre ben verificata)
Se $\Delta t \gg T$, allora $L = P\Delta t$

Ricorrendo alla potenza attiva si determina il lavoro scambiato senza integrare nel tempo la potenza istantanea

3) Potenza apparente

Viene definita potenza apparente: $\boxed{S = VI}$ $[V \cdot A]$

È sempre positiva. Non ha significato energetico

4) Potenza reattiva

Viene definita potenza reattiva: $\boxed{Q = VI\sin\varphi}$ $[V \cdot AR]$

$Q = VI$ se $\bar{V}$ é IN QUADRATURA IN ANTICIPO
$Q = -VI$ se $\bar{V}$ e' IN QUADRATURA IN RITARDO
0 se $\bar{V}$ E $\bar{I}$ SONO IN FASE O IN OPPOSIZIONE DI FASE

RELAZIONI TRA POTENZA ATTIVA (P), POTENZA REATTIVA (Q), POTENZA APPARENTE (S)

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$P = S\cos\varphi$$
$$Q = S\sin\varphi$$

5) FATTORE DI POTENZA

IL FATTORE $\cos\varphi$ VIENE CHIAMATO FATTORE DI POTENZA: $\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}}$

ESSO ESPRIME LA QUOTA PARTE DI POTENZA APPARENTE CHE DÁ LUOGO A POTENZA ATTIVA

6) POTENZA COMPLESSA

SI DEFINISCE POTENZA COMPLESSA IL PRODOTTO TRA IL FASORE DI TENSIONE $\bar{V}$ E IL CONIUGATO $\bar{I}^*$ DI $\bar{I}$

$$\boxed{\dot{S} = \bar{V}\bar{I}^* = VIe^{j\varphi}}$$

TENENDO CONTO CHE $VI = S$, SI OTTIENE:

$$\dot{S} = Se^{j\varphi} = S\cos\varphi + jS\sin\varphi = P + jQ$$

DUNQUE, IL MODULO DELLA POTENZA COMPLESSA E' PARI ALLA POTENZA APPARENTE S E L'ARGOMENTO E' PARI ALLO SFASAMENTO φ

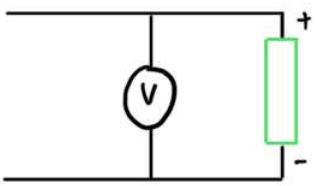
$R_e(\dot{S})$ = POTENZA ATTIVA P
$I_m(\dot{S})$ = POTENZA REATTIVA Q

$\dot{S}$ E' UTILE PERCHÉ DA SOLO FORNISCE 4 INFORMAZIONI IMPORTANTI

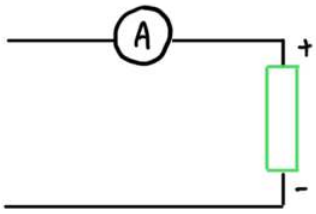
3. STRUMENTI DI MISURA A REGIME SINUSOIDALE

- VOLTMETRO A VALORE EFFICACE

MISURA IL VALORE EFFICACE DELLA TENSIONE AI SUOI MORSETTI. POICHÉ $V_{eff} \geq 0$, I SUOI MORSETTI NON HANNO BISOGNO DI MARCATURE

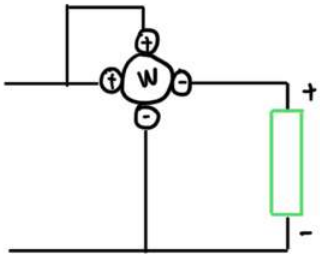


- AMPEROMETRO A VALORE EFFICACE



MISURA IL VALORE EFFICACE DELLA CORRENTE I AI SUOI CAPI. POICHÉ $V_{eff} \geq 0$, I SUOI MORSETTI NON HANNO BISOGNO DI MARCATURE

- WATTMETRO A VALORE MEDIO



IL WATTMETRO A VALORE MEDIO MISURA IL VALORE MEDIO DELLA POTENZA SCAMBIATA, CIOÈ LA POTENZA ATTIVA $P = VI\cos\varphi$

- DETERMINAZIONE DELLA POTENZA APPARENTE:

DEVO COLLEGARE UN VOLTMETRO E UN AMPEROMETRO, E POI MOLTIPLICO I VALORI: $S = VI$

- DETERMINAZIONE DELLA POTENZA REATTIVA

DEVO MISURARE TENSIONE EFFICACE, CORRENTE EFFICACE E POTENZA ATTIVA

$$Q = \sqrt{(VI)^2 - P^2}$$

DOVE IL SEGNO DI Q RIMANE INDETERMINATO, E DEVE ESSERE INDIVIDUATO CON ALTRE MISURE O DALLA CONOSCENZA DELLA RETE

4. BIPOLI IDEALI A REGIME SINUSOIDALE

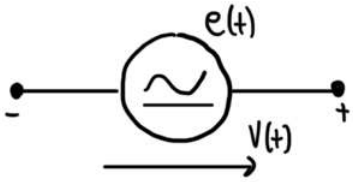
I BIPOLI IDEALI FUNZIONANO IN REGIME SINUSOIDALE QUANDO SONO SOTTOPOSTI A TENSIONE E CORRENTE ENTRAMBI SINUSOIDALI

- GENERATORE DI TENSIONE SINUSOIDALE
- GENERATORE DI CORRENTE SINUSOIDALE
- RESISTORE IDEALE PASSIVO
- INDUTTORE IDEALE
- CONDENSATORE IDEALE

1) GENERATORE IDEALE DI TENSIONE SINUSOIDALE

UN GIT SINUSOIDALE È UN BIPOLO CHE IMPONE AI SUOI MORSETTI LA TENSIONE SINUSOIDALE:

$$\boxed{v(t) = e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t + \alpha)}$$



INDIPENDENTEMENTE DALLA CORRENTE CHE LO ATTRAVERSA.

$e(t)$ È DETTA TENSIONE SINUSOIDALE IMPRESSA

LA CORRENTE È ESPRIMIBILE COME: $i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta)$. ESSA PERÒ DIPENDE DALLA RETE A CUI IL GENERATORE È CONNESSO, QUINDI NON PUÒ ESSERE DETERMINATA A PRIORI.

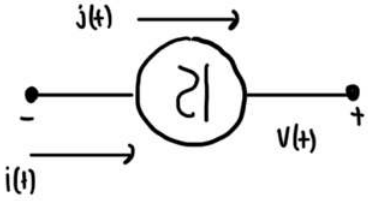
$$\begin{cases} I_M = \sqrt{2}\, I \\ \beta \end{cases}$$ SONO INCOGNITE

QUINDI, IL GENERATORE PUÒ SIA EROGARE SIA ASSORBIRE TANTO POTENZA ATTIVA QUANTO POTENZA REATTIVA

2) GENERATORE IDEALE DI CORRENTE SINUSOIDALE

UN GIC SINUSOIDALE È UN BIPOLO CHE IMPONE AI SUOI MORSETTI LA CORRENTE SINUSOIDALE:

$$\boxed{v(t) = e(t) = E_M \sin(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\, E \sin(\omega t + \alpha)}$$



INDIPENDENTEMENTE DALLA TENSIONE AI SUOI MORSETTI.

$j(t)$ È DETTA CORRENTE SINUSOIDALE IMPRESSA

LA TENSIONE È ESPRIMIBILE COME: $v(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$. ESSA PERÒ DIPENDE DALLA RETE A CUI IL GENERATORE È CONNESSO, QUINDI NON PUÒ ESSERE DETERMINATA A PRIORI.

$$\begin{cases} V_M = \sqrt{2}\, V \\ \alpha \end{cases}$$ SONO INCOGNITE

QUINDI, IL GENERATORE PUÒ SIA EROGARE SIA ASSORBIRE TANTO POTENZA ATTIVA QUANTO POTENZA REATTIVA

3) RESISTORE IDEALE PASSIVO

UN RESISTORE IDEALE PASSIVO, CON RESISTENZA R COSTANTE POSITIVA, CONV. UTIL., VERIFICA IN OGNI ISTANTE LA RELAZIONE:

$$\boxed{v(t) = R\, i(t)}$$

TALE LEGAME IMPONE CHE ALLA CORRENTE SINUSOIDALE $i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta)$

CORRISPONDA LA TENSIONE SINUSOIDALE: $v(t) = R I_M \sin(\omega t + \beta) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$

QUINDI TRA AMPIEZZE, VALORI EFFICACI E FASI INIZIALI DI TENSIONE E CORRENTE VALGONO LE RELAZIONI:

$$\boxed{\frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = R} \qquad \boxed{\alpha - \beta = \varphi = 0}$$

↑ CORRENTE E TENSIONE SONO IN FASE

LA POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA HA VALORE MASSIMO $2VI$ (sempre ≥ 0)

FATTORE DI POTENZA: $\underbrace{\cos\varphi = 1}$

POTENZA ATTIVA $\equiv$ POTENZA APPARENTE

POTENZA REATTIVA $= 0$

$$\boxed{P = S = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}}$$

IL VALORE EFFICACE DI UNA CORRENTE (TENSIONE) È UGUALE A QUEL VALORE DI CORRENTE (TENSIONE) COSTANTE CHE CAUSA IN UN RESISTORE LO STESSO ASSORBIMENTO DI LAVORO ELETTRICO NEL MEDESIMO INTERVALLO DI TEMPO $\Delta t \gg T$.

I FASORI DI TENSIONE E CORRENTE: $\bar{V} = e^{j\alpha}$, $\bar{I} = Ie^{j\beta}$, QUINDI IL LORO RAPPORTO VALE:

$$\boxed{\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} = \frac{V}{I} = R}$$

QUINDI, $R = \frac{1}{G}$ È L'OPERATORE COMPLESSO CHE VINCOLA I DUE FASORI CON LA RELAZIONE $\bar{V} = R\bar{I}$

4) INDUTTORE IDEALE

UN INDUTTORE IDEALE CON INDUTTANZA L COSTANTE, CONV. UTIL, VERIFICA SEMPRE LA RELAZIONE:

$$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt}}$$

TALE LEGAME IMPONE CHE ALLA CORRENTE SINUSOIDALE: $i(t) = I_M \sin(\omega t + \beta)$
CORRISPONDA LA TENSIONE SINUSOIDALE: $v(t) = \omega L I_M \sin\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$

QUINDI, TRA AMPIEZZE, VALORI EFFICACI E FASI INIZIALI DI TENSIONE/CORRENTE VALGONO LE RELAZIONI:

$$\boxed{\frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = \omega L} \qquad \boxed{\alpha - \beta = \varphi = \frac{\pi}{2}}$$

LE AMPIEZZE SONO LEGATE DAL PRODOTTO:

REATTANZA INDUTTIVA: $\boxed{X_L = \omega L}$ $[\Omega]$

LA POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA:

- IN $\frac{T}{4}$ ASSORBE ENERGIA $\qquad w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2$
- NEL $\frac{T}{4}$ RILASCIA QUELLA STESSA ENERGIA

FATTORE DI POTENZA: $\cos\varphi = 0$
POTENZA ATTIVA ASSORBITA $= 0$
POTENZA REATTIVA $\equiv$ POTENZA APPARENTE (PERCHÉ $\sin\varphi = 1$)

$$\boxed{P = 0, \quad Q = S = VI = X_L I^2 = \frac{V^2}{X_L}}$$

SI RICAVA CHE:

$$\boxed{Q = \omega L I^2 = \omega L \frac{I_M^2}{2} = \omega W_{LM}}$$

W_{LM}: VALORE MASSIMO ASSUNTO DALL'ENERGIA INDUTTIVA W_L, NEGLI ISTANTI IN CUI $|I| = I_M$

I FASORI DI TENSIONE E CORRENTE: $\bar{V} = V e^{j\alpha}$, $\bar{I} = I e^{j\beta}$

$$\boxed{\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} = \frac{V}{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L = jX_L}$$

QUINDI, jX_L È L'OPERATORE COMPLESSO CHE VINCOLA I 2 FASORI CON LA RELAZIONE: $\bar{V} = jX_L \bar{I}$
(IN QUESTO CASO SI RIDUCE A UN IMMAGINARIO PURO)

5) CONDENSATORE IDEALE

UN CONDENSATORE IDEALE DI CAPACITÀ C COSTANTE, CONV. UTIL, VERIFICA SEMPRE LA RELAZIONE:

$$\boxed{i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}}$$

TALE LEGAME IMPONE CHE ALLA TENSIONE SINUSOIDALE: $v(t) = V_M \sin(\omega t + \alpha)$
CORRISPONDA LA CORRENTE SINUSOIDALE: $i(t) = \omega C V_M \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = I_M \sin(\omega t + \beta)$

QUINDI, TRA AMPIEZZE, VALORI EFFICACI E FASI INIZIALI DI TENSIONE/CORRENTE VALGONO LE RELAZIONI:

$$\boxed{\frac{V_M}{I_M} = \frac{V}{I} = \frac{1}{\omega C}} \qquad \boxed{\alpha - \beta = \varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

LE AMPIEZZE SONO LEGATE DAL

REATTANZA CAPACITIVA: $\boxed{X_C = -\frac{1}{\omega C}}$ $[\Omega]$

LA POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA:

- IN $\frac{T}{4}$ ASSORBE ENERGIA $\qquad W_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t)$
- NEL $\frac{T}{4}$ RILASCIA QUELLA STESSA ENERGIA

FATTORE DI POTENZA: $\cos\varphi = 0$
POTENZA ATTIVA ASSORBITA $= 0$ (PUR CON TENSIONE E CORRENTE $\neq 0$)
- POTENZA REATTIVA $\equiv$ POTENZA APPARENTE (PERCHÉ $\sin\varphi = -1$)

$$\boxed{P = 0 \ , \ Q = -S = -VI = X_C I^2 = \frac{V^2}{X_C}}$$

SI RICAVA CHE:

$$\boxed{|Q| = \omega C V^2 = \omega C \frac{V_M^2}{2} = \omega W_{CM}}$$

W_{CM}: VALORE MASSIMO ASSUNTO DALL'ENERGIA CAPACITIVA W_C, NEGLI ISTANTI IN CUI $|V| = V_M$

I FASORI DI TENSIONE E CORRENTE: $\bar{V} = V e^{j\alpha}$, $\bar{I} = I e^{j\beta}$

$$\boxed{\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} = \frac{V}{I} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{1}{\omega C} = jX_C}$$

QUINDI, jX_C È L'OPERATORE COMPLESSO CHE VINCOLA I 2 FASORI CON LA RELAZIONE: $\bar{V} = jX_C \bar{I}$
(IN QUESTO CASO SI RIDUCE A UN IMMAGINARIO PURO)

5. IMPEDENZA

NEI PARAGRAFI PRECEDENTI SI È VISTO CHE I BIPOLI IDEALI PASSIVI RESISTORE, CONDENSATORE E INDUTTORE I FASORI $\bar{V}$ E $\bar{I}$ SONO LEGATI DA UNA RELAZIONE DI PROPORZIONALITÀ IN CAMPO COMPLESSO.
UN'ANALOGA PROPORZIONALITÀ NON ESISTE PER I FASORI $\bar{V}$ E $\bar{I}$ DEI GIT/GIC SINUSOIDALI, VISTO CHE ESSI IMPONGONO UNO DEI DUE FASORI, MENTRE L'ALTRO DIPENDE DALLA RETE.

TUTTAVIA, LA PROPRIETÀ VALIDA PER RESISTORI, CONDENSATORI E INDUTTORI PUÒ ESSERE ESTESA AD UN GENERICO BIPOLO LINEARE PASSIVO.

ESSENDO UN BIPOLO PASSIVO: $\begin{cases} P = VI\cos\varphi \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

SI DEFINISCE IMPEDENZA DEL BIPOLO LINEARE PASSIVO (CONV. UTIL.) L'OPERATORE COMPLESSO DATO DAL RAPPORTO FRA FASORE DI TENSIONE E FASORE DI CORRENTE:

$$\boxed{\dot{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{Ve^{j\alpha}}{Ie^{j\beta}} = \frac{V}{I} e^{j\varphi} = Z e^{j\varphi}}$$

IN FORMA CARTESIANA: $\dot{Z} = Ze^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = Re(Z) + j\,Im(Z) \Rightarrow \begin{cases} Re(Z) = Z\cos\varphi \\ Im(Z) = Z\sin\varphi \end{cases}$

$Z = \sqrt{Re(Z)^2 + Im^2(Z)}$, $\varphi = \arctan\left(\frac{Re(Z)}{Im(Z)}\right)$

$$\dot{S} = \bar{V}\bar{I}^* = Z\bar{I}\bar{I}^* = \left(Re(Z) + j\,Im(Z)\right) I^2 \Rightarrow \begin{cases} S = ZI^2 \\ P = Re\, I^2 = ZI^2 \cos\varphi \\ Q = Im\, I^2 = ZI^2 \sin\varphi \end{cases}$$

$Re(Z) \Rightarrow$ ASSORBIMENTO POTENZA ATTIVA

$Im(Z) \Rightarrow$ ASSORBIMENTO POTENZA REATTIVA

IMPEDENZA NEI ...

- RESISTORI: $\dot{Z}_R = Re^{j0} = R + j0 = R$
- INDUTTORI $\dot{Z}_L = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = 0 + jX_L = j\omega L$
- CONDENSATORI: $\dot{Z}_C = |X_C| e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 + jX_C = -j\frac{1}{\omega C}$

AMMETTENZA

SI DEFINISCE AMMETTENZA DEL BIPOLO LINEARE PASSIVO (CONV. UTIL) L'OPERATORE COMPLESSO DATO DAL RAPPORTO FRA FASORE DI CORRENTE E FASORE DI TENSIONE

$$\boxed{\dot{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{V}} = \frac{I}{V} e^{j(\beta - \alpha)} = Y e^{-j\varphi}}$$

ESSA È IL RECIPROCO DELL'IMPEDENZA

$$\begin{cases} |\dot{Y}| = Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} \quad [S] \\ \angle \dot{Y} = -\varphi \end{cases}$$

IN FORMA CARTESIANA:

$$\dot{Y} = Ye^{-j\varphi} = \frac{1}{Z}(\cos\varphi - j\sin\varphi) = Re(Y) + j\,Im(Y) \Rightarrow \begin{cases} Re(Y) = \frac{\cos\varphi}{Z} \\ Im(Y) = -\frac{\sin\varphi}{Z} \end{cases}$$

AMMETTENZA DI ...

- RESISTORE $\dot{Y}_R = \frac{1}{R} e^{j0} = G + j0 = \frac{1}{R}$
- INDUTTORE $\dot{Y}_L = \frac{1}{X_L} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 + jB_L = -j\frac{1}{\omega L}$
- CONDENSATORE $\dot{Y}_C = \frac{1}{X_C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 + jB_C = j\omega C$

RIASSUNTO: IMPEDENZE / AMMETTENZE

	IMPEDENZA $\dot{Z}$	AMMETTENZA $\dot{Y}$
DEFINIZIONE	$\frac{\text{FASORE TENSIONE}}{\text{FASORE CORRENTE}}$	$\frac{\text{FASORE CORRENTE}}{\text{FASORE TENSIONE}}$
MODULO	$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_M}{I_M}$	$Y = \frac{I}{V} = \frac{I_M}{V_M}$
ARGOMENTO	$\varphi = \alpha - \beta$	$-\varphi = \beta - \alpha$
PARTE REALE	$Re(Z) = Z\cos\varphi$	$Re(Y) = Y\cos\varphi$
PARTE IMMAGINARIA	$Im(Z) = Z\sin\varphi$	$Im(Y) = Y\sin\varphi$

6. LEGGI DI KIRCHHOFF IN FORMA SIMBOLICA

LEGGE DI KIRCHHOFF AI FASORI DELLE CORRENTI (LKC): IN UNA RETE A REGIME SINUSOIDALE, I FASORI DELLE CORRENTI $\bar{I}$ POSSONO ESSERE SOMMATI ALGEBRICAMENTE, IN MODO EQUIVALENTE A COME SI SOMMANO LE CORRENTI SINUSOIDALI $i(t)$

PER I LATI CHE FORMANO UN INSIEME DI TAGLIO VALE LA LKC AI FASORI:

$$\boxed{\sum \bar{I} = 0}$$

(LA SOMMATORIA È ALGEBRICA)

LEGGE DI KIRCHHOFF AI FASORI DELLE TENSIONI (LKT): IN UNA RETE A REGIME SINUSOIDALE, I FASORI DELLE TENSIONI $\bar{V}$ POSSONO ESSERE SOMMATI ALGEBRICAMENTE, IN MODO EQUIVALENTE A COME SI SOMMANO LE TENSIONI SINUSOIDALI

PER I LATI CHE FORMANO UNA MAGLIA VALE LA LKT AI FASORI

$$\boxed{\sum \bar{V} = 0}$$

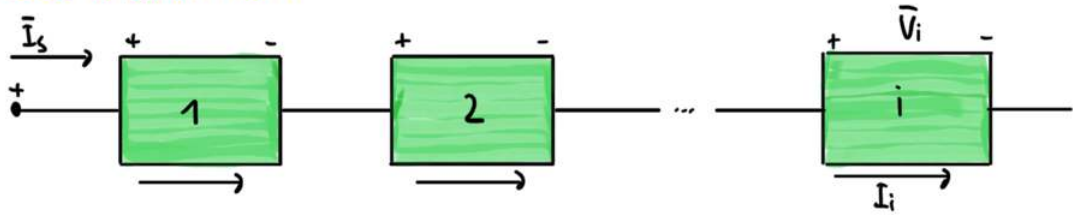
(LA SOMMATORIA È ALGEBRICA)

OSSERVAZIONE: LE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF IN FORMA SIMBOLICA DEVONO TENERE CONTO SIA DELLE RELAZIONI DI AMPIEZZA CHE DI QUELLE DI FASE TRA LE TENSIONI E LE CORRENTI. ESSE QUINDI DEVONO ESSERE SCRITTE ESCLUSIVAMENTE RELATIVE AI FASORI. È ERRATA LA LORO APPLICAZIONE AI VALORI EFFICACI (O AMPIEZZE)

7. RETI DI BIPOLI PASSIVI

- SERIE DI BIPOLI PASSIVI
- PARALLELO DI BIPOLI PASSIVI

1) SERIE DI BIPOLI PASSIVI



LA SERIE DI n BIPOLI PASSIVI COSTITUISCE UN BIPOLO PASSIVO DI CUI PUÒ ESSERE CALCOLATA L'IMPEDENZA EQUIVALENTE

UTILIZZANDO LA CONV. UTIL:

$$\bar{V}_i = \dot{Z}_i \bar{I}_i \qquad i = 1, \dots n$$

$$\bar{V}_s = \sum_{i=1}^{n} \bar{V}_i$$

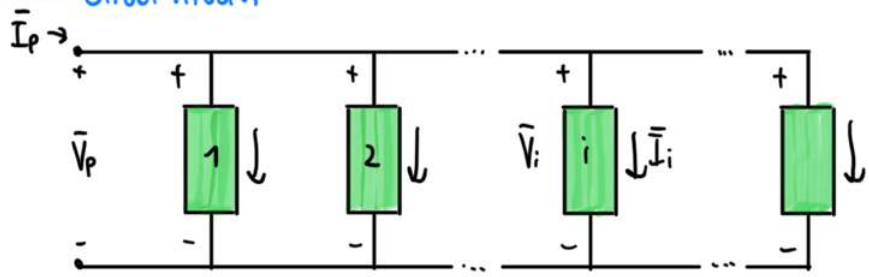
$$\bar{I}_i = \bar{I}_s \qquad i = 1, \dots n$$

DA CUI SI RICAVA:

$$\boxed{\bar{V}_s = \sum_{i=1}^{n} (\dot{Z}_i) \bar{I}_s = \dot{Z}_s \bar{I}_s} \quad \text{CON} \quad \dot{Z}_s = \sum_{i=1}^{n} \dot{Z}_i$$

IL BIPOLO EQUIVALENTE ALLA SERIE HA IMPEDENZA PARI ALLA SOMMA DELLE IMPEDENZE

2) PARALLELO DI BIPOLI PASSIVI



IL PARALLELO DI n BIPOLI PASSIVI COSTITUISCE UN BIPOLO PASSIVO DI CUI PUÒ ESSERE CALCOLATA L'IMPEDENZA EQUIVALENTE

(CONV. UTIL):

$$\bar{I}_i = \dot{Y}_i \bar{V}_i \qquad i = 1, .. m$$

$$\bar{I}_p = \sum_{i=1}^{m} I_i$$

$$\bar{V}_i = \bar{V}_p$$

SI RICAVA:

$$\bar{I}_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \dot{Y}_i\right) \bar{V}_p = \dot{Y}_p \bar{V}_p \qquad \text{CON } \dot{Y}_p = \sum_{i=1}^{m} \dot{Y}_i$$

OVVERO

$$\boxed{\frac{1}{\dot{Z}_p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\dot{Z}_i}}$$

IL BIPOLO EQUIVALENTE AL PARALLELO HA IMPEDENZA PARI AL RECIPROCO DELLA SOMMA DEI RECIPROCI DELLE IMPEDENZE

8. RETE SIMBOLICA

SI È DETTO CHE IMPEDENZE O AMMETTENZE PERMETTONO DI RAPPRESENTARE I BIPOLI PASSIVI PER MEZZO DELLE RELAZIONI SIMBOLICHE:

$$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I} \quad , \quad \bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$$

ANALOGAMENTE I GIT SINUSOIDALI SONO RAPPRESENTATI DA RELAZIONI SIMBOLICHE DEL TIPO:

$$\boxed{\bar{V} = \bar{E} = Ee^{j\alpha}}$$

GENERATORE IDEALE SIMBOLICO DI TENSIONE

I GIC SINUSOIDALI HANNO RELAZIONE:

$$\boxed{\bar{I} = \bar{J} = Je^{j\beta}}$$

GENERATORE IDEALE SIMBOLICO DI CORRENTE

LA SERIE DI UN GIT SIMBOLICO E DI UN BIPOLO PASSIVO DI IMPEDENZA $\dot{Z}$ È DETTA GENERATORE LINEARE SIMBOLICO DI TENSIONE, CHE È GOVERNATO DALL'EQUAZIONE:

$$\boxed{\bar{V} = \bar{E} - Z\bar{I}}$$

DUALMENTE, IL PARALLELO DI UN GIC SIMBOLICO E DI UN BIPOLO PASSIVO DI AMMETTENZA $\dot{Y}$ È DETTA GENERATORE LINEARE SIMBOLICO DI CORRENTE, CHE È GOVERNATO DALL'EQUAZIONE:

$$\boxed{\bar{I} = J - \dot{Y}\bar{V}}$$

SE $\dot{Z} \neq 0, \dot{Y} \neq 0$ È SEMPRE POSSIBILE TRASFORMARE GIC LINEARE SIMBOLICO IN UN GIT LINEARE SIMBOLICO, E VICEVERSA

COME SI FA: GIC $\longrightarrow$ GIT $\quad (\dot{Z} \neq 0)$ PONGO $\begin{cases} \bar{J} = \dfrac{\bar{E}}{\dot{Z}} \\ \dot{Y} = \dfrac{1}{\dot{Z}} \end{cases}$

GIT $\longrightarrow$ GIC $\quad (\dot{Y} \neq 0)$ PONGO $\begin{cases} E = \dfrac{\bar{J}}{\dot{Y}} \\ Z = \dfrac{1}{\dot{Y}} \end{cases}$

OPERATIVAMENTE, PASSO DALLA RETE REALE ALLA RETE SIMBOLICA CON I FASORI E SVOLGO LE OPERAZIONI IN CAMPO COMPLESSO

	REGIME STAZIONARIO	REGIME SINUSOIDALE
LKC	$\sum I = 0$	$\sum \bar{I} = 0$
LKT	$\sum V = 0$	$\sum \bar{V} = 0$
GIT	$V = E$	$\bar{V} = \bar{E}$
GIC	$I = J$	$\bar{I} = \bar{J}$
BIPOLO PASSIVO	$V = RI$, $I = GV$	$\bar{V} = \dot{Z}\bar{I}$, $\bar{I} = \dot{Y}\bar{V}$
GLT	$V = E - RI$	$\bar{V} = \bar{E} - \dot{Z}\bar{I}$
GLC	$I = J - GV$	$\bar{I} = \bar{J} - \dot{Y}\bar{V}$

9. CONSERVAZIONE DELLE POTENZE COMPLESSE

PER L'INSIEME DEI BIPOLI DELLA RETE SIMBOLICA VALE LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE COMPLESSE (ASSUMENDO CHE TUTTI I BIPOLI SIANO CONVENZIONATI ALLO STESSO MODO):

$$\boxed{\sum_{h=1}^{e} \bar{V}_h \bar{I}_h^* = \sum_{h=1}^{e} \dot{S}_h = 0}$$

SVILUPPANDO IN FORMA CARTESIANA:

$$\sum_{h=1}^{e} \dot{S}_h = \sum_{h=1}^{e} (P_h + jQ_h) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum_{h=1}^{e} P_h = 0 \\ \sum_{h=1}^{e} Q_h = 0 \end{cases}$$

VALE DUNQUE ANCHE LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE ATTIVE E LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE REATTIVE NELLE RETI A REGIME SINUSOIDALE. (NON VALE INVECE LA CONSERVAZIONE DELLE POTENZE APPARENTI).

QUESTE RELAZIONI HANNO GRANDE IMPORTANZA APPLICATIVA PERCHÉ GRAZIE A ESSE È POSSIBILE RISOLVERE LA RETE SENZA RICORRERE ALLE LEGGI DI KIRCHHOFF E SENZA UTILIZZARE I FASORI

10. METODI E TEOREMI DELLA RETE SIMBOLICA

GRAZIE ALLE ANALOGIE TRA RETE LINEARE IN REGIME STAZIONARIO E RETE SIMBOLICA, I METODI DI ANALISI ED I TEOREMI DELLE RETI LINEARI IN REGIME STAZIONARIO SI APPLICANO IN FORMA COMPLESSA ALLA RETE SIMBOLICA. CIOÈ, ANZICHÉ OPERARE CON I NUMERI REALI SI OPERA CON I FASORI, MA NON CAMBIA NIENTE DAL PUNTO DI VISTA CONCETTUALE

- METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI
- METODO DELLE CORRENTI DI ANELLO
- METODO DEI POTENZIALI AI NODI
- PROPRIETÀ DI SOSTITUZIONE SIMBOLICA
- TEOREMA DI THÉVENIN SIMBOLICO
- TEOREMA DI NORTON SIMBOLICO

1) METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

APPLICANDO IL METODO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI IN UNA RETE SIMBOLICA:

- OGNI TENSIONE SIMBOLICA DI LATO È UGUALE ALLA SOMMA DELLE TENSIONI SIMBOLICHE CHE CIASCUN GI SIMBOLICO PRODUCE NEL LATO QUANDO SONO ANNULLATE LE GRANDEZZE IMPRESSE DA TUTTI GLI ALTRI GI SIMBOLICI

- OGNI CORRENTE SIMBOLICA DI LATO È UGUALE ALLA SOMMA DELLE CORRENTI SIMBOLICHE CHE CIASCUN GI SIMBOLICO PRODUCE NEL LATO QUANDO SONO ANNULLATE LE GRANDEZZE IMPRESSE DA TUTTI GLI ALTRI GI SIMBOLICI

SE NELLA RETE SONO PRESENTI r GIT SIMBOLICI $(\bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_r)$
s GIC SIMBOLICI $(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \dots, \bar{J}_s)$

VALGONO LE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} \bar{V}_h = \sum_{k=1}^{r} \bar{V}_{h\bar{E}_k} + \sum_{k=1}^{s} V_{h\bar{J}_k} \\ \bar{I}_h = \sum_{k=1}^{r} \bar{I}_{hE_k} + \sum_{k=1}^{s} \bar{I}_{h\bar{J}_k} \end{cases}$$

$\bar{V}_{h\bar{E}_k}$: TENSIONE PRODOTTA NEL LATO h DAL SOLO GENERATORE $\bar{E}_k$
$\bar{V}_{h\bar{J}_k}$: TENSIONE PRODOTTA NEL LATO h DAL SOLO GENERATORE $\bar{J}_k$

$\bar{I}_{h\bar{E}_k}$ CORRENTE PRODOTTA NEL LATO h DAL SOLO GENERATORE $\bar{E}_k$
$\bar{I}_{h\bar{J}_k}$ CORRENTE PRODOTTA NEL LATO h DAL SOLO GENERATORE $\bar{J}_k$

2) METODO DELLE CORRENTI DI ANELLO

SE UNA RETE SIMBOLICA COMPRENDE SOLO GIT E BIPOLI PASSIVI, ASSEGNATE AI SUOI m ANELLI LE CDA SIMBOLICHE $\bar{I}_{Ah}$ $(h = 1, \dots m)$ CON I RIFERIMENTI CONCORDI, TALI m CORRENTI POSSONO ESSERE DETERMINATE RISOLVENDO IL SISTEMA DI m EQUAZIONI A CORRENTI CICLICHE:

$$\boxed{\dot{Z}_{Ahh} I_{Ah} - \sum_{k} \dot{Z}_{Ahk} \bar{I}_{Ak} = \bar{E}_{Ah} \quad (h = 1, \dots m)}$$

DOVE:

$\dot{Z}_{Ahh}$: AUTOIMPEDENZA DI ANELLO h, Σ IMPEDENZE LATI CHE FORMANO TALE ANELLO
$\dot{Z}_{Ahk}$: MUTUA IMPEDENZA TRA GLI ANELLI h E k, IMPEDENZA DEL LATO CHE I 2 ANELLI HANNO IN COMUNE
$\bar{E}_{Ah}$: Fem SIMBOLICA DI ANELLO h, Σ Fem SIMBOLICHE DEI LATI DELL'ANELLO
(SI SOMMANO QUELLE DAL − AL +, SI SOTTRAGGONO QUELLE DAL + AL −

SE LA RETE SIMBOLICA COMPRENDE GIC SIMBOLICI (LATO ANOMALO), SI FANNO GENERALIZZAZIONI ANALOGHE A QUELLE ILLUSTRATE PER IL REGIME STAZIONARIO

3) METODO DEI POTENZIALI AI NODI

SE UNA RETE SIMBOLICA COMPRENDE SOLO GIC E BIPOLI PASSIVI, ASSEGNATI A $m-1$ SUOI NODI I POTENZIALI SIMBOLICI $\bar{U}_h$ $(h=1,\dots m-1)$, AVENDO ASSUNTO IL NODO m-ESIMO COME NODO DI MASSA $\bar{U}_m = 0$, TALI $m-1$ POTENZIALI POSSONO ESSERE DETERMINATI RISOLVENDO IL SISTEMA DI $m-1$ EQUAZIONI:

$$\boxed{\dot{Y}_{Nhh}\bar{U}_h - \sum_K \dot{Y}_{NhK}\bar{U}_K = \bar{J}_{Nh} \qquad (h = 1,\dots,m-1)}$$

DOVE:

$\dot{Y}_{Nhh}$: AUTOAMMETTENZA DI NODO h, Σ AMMETTENZE LATI CHE TOCCANO TALE NODO

$\dot{Y}_{NhK}$: MUTUA AMMETTENZA TRA NODI h E K, AMMETTENZA DEL LATO CHE TOCCA TALI NODI

$\bar{J}_{Nh}$: CORRENTE SIMBOLICA IMPRESSA NEL NODO h, Σ CORRENTI IMPRESSE SIMBOLICHE DEI LATI CHE TOCCANO TALE NODO (SOMMANO QUELLE ENTRANTI, SOTTRAGGONO QUELLE USCENTI)

SE LA RETE SIMBOLICA COMPRENDE GIT SIMBOLICI (LATO ANOMALO), SI FANNO GENERALIZZAZIONI ANALOGHE A QUELLE ILLUSTRATE PER IL REGIME STAZIONARIO

4) PROPRIETÀ DI SOSTITUZIONE SIMBOLICA

SIANO $\bar{V}_h$ E $\bar{I}_h$ LA T/C SIMBOLICHE DEL GENERICO LATO h-ESIMO DI UNA RETE SIMBOLICA.
TALE LATO PUÒ ESSERE SOSTITUITO CON:

- GIT SIMBOLICO CON $\bar{E} = \bar{V}_h$
- GIC SIMBOLICO CON $\bar{J} = \bar{I}_h$

NELLA RETE COSÌ MODIFICATA, TENSIONI E CORRENTI SIMBOLICHE DEI LATI SONO IDENTICHE A QUELLA DELLA RETE ORIGINALE

5) TEOREMA DI THÉVENIN SIMBOLICO

UNA RETE SIMBOLICA TRA I NODI A E B È EQUIVALENTE AD UN GENERATORE LINEARE DI TENSIONE LA CUI Fem SIMBOLICA $\bar{E}_{eq}$ È PARI AL FASORE DI TENSIONE A VUOTO $\bar{V}_0$ E LA CUI IMPEDENZA $\dot{Z}_{eq}$ È PARI ALL'IMPEDENZA INTERNA $\dot{Z}_i$ DELLA RETE ALLA PORTA AB, OVVERO AL RAPPORTO TRA TENSIONE A VUOTO $\bar{V}_0$ E CORRENTE DI CORTOCIRCUITO $\bar{I}_{cc}$ ALLA PORTA AB:

$$\boxed{\bar{E}_{eq} = \bar{V}_0} \qquad \boxed{\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_i = \frac{\bar{V}_0}{\bar{I}_{cc}}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{RETE SIMBOLICA}\\ \text{G.L.T.}\end{array}\right\}\ \text{CONV. GENERATORI}$$

IMPEDENZA INTERNA $\dot{Z}_i$: IMPEDENZA QUANDO LA RETE È PASSIVA (TUTTI I GENERATORI SPENTI)

6) TEOREMA DI NORTON SIMBOLICO

UNA RETE SIMBOLICA TRA I NODI A E B È EQUIVALENTE AD UN GENERATORE LINEARE DI CORRENTE LA CUI CORRENTE IMPRESSA SIMBOLICA $\bar{J}_{eq}$ È PARI AL FASORE DI CORRENTE DI CORTOCIRCUITO $\bar{I}_{cc}$ E LA CUI AMMETTENZA $\dot{Y}_{eq}$ È PARI ALL'AMMETTENZA INTERNA $\dot{Y}_i$ DELLA RETE ALLA PORTA AB, OVVERO AL RAPPORTO TRA CORRENTE DI CORTOCIRCUITO $\bar{I}_{cc}$ E TENSIONE A VUOTO V_0 ALLA PORTA AB:

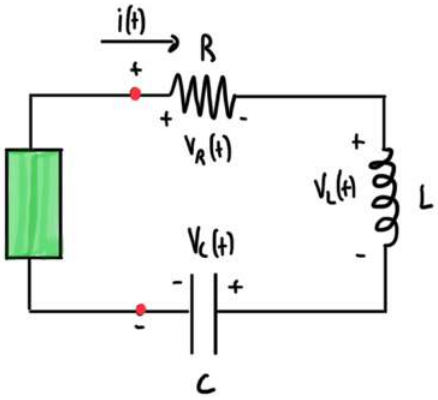
$$\boxed{\bar{J}_{eq} = \bar{I}_{cc}} \qquad \boxed{\dot{Y}_{eq} = \dot{Y}_i = \frac{\bar{I}_{cc}}{\bar{V}_0}}$$

RETE SIMBOLICA
G.L.T. } CONV. GENERATORI

AMMETTENZA INTERNA $\dot{Y}_i$: AMMETTENZA QUANDO LA RETE È PASSIVA (TUTTI I GENERATORI SPENTI)

11. COMPORTAMENTO IN FREQUENZA E RISONANZA ELETTRICA

- RISONANZA SERIE RLC



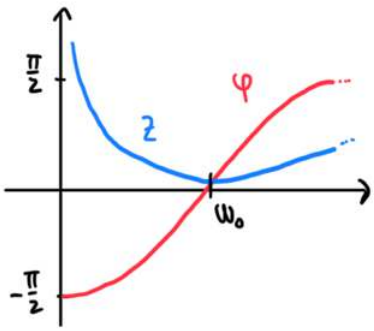
IL BIPOLO A DESTRA DEI TERMINALI IN FIGURA, COSTITUITO DALLA SERIE RLC È ALIMENTATO DALLA TENSIONE SINUSOIDALE: $v(t) = V_M \sin(\omega t)$. LA SUA IMPEDENZA RISULTA:

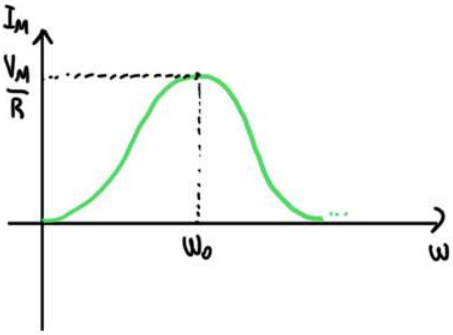
$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

MODULO E ARGOMENTO VALGONO:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

COMPORTAMENTO IN FREQUENZA:





DATO CHE LE REATTANZE $X_L = \omega L$ e $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ DIPENDONO DA $\omega = 2\pi f$, SONO FUNZIONI DELLA PULSAZIONE ω SIA IL MODULO $Z(\omega)$ SIA L'ARGOMENTO $\varphi(\omega)$.

↓

A PARITÀ DI VALORE EFFICACE DELLA TENSIONE $v(t)$, RISULTANO FUNZIONE DI ω LO SFASAMENTO $\varphi(\omega)$ DELLA CORRENTE $i(t)$ RISPETTO A $v(t)$ E LA SUA AMPIEZZA $I_M = \frac{V_M}{Z(\omega)}$

A SECONDA DEL VALORE DELLA PULSAZIONE ω SI HA CHE:

- $\omega = \omega_0$: $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, IL MODULO DELL'IMPEDENZA ASSUME VALORE MINIMO $Z(\omega_0) = R$, MENTRE L'ARGOMENTO $\varphi(\omega_0) = 0$.

CONDIZIONE DI RISONANZA SERIE

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

- $\omega < \omega_0$: REATTANZA CAPACITIVA PREVALE SU QUELLA INDUTTIVA, LA SERIE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO RC

$$\lim_{\omega \to 0} Z(\omega) = +\infty \quad \to \lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

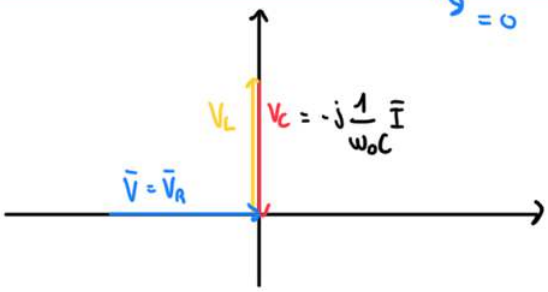
- $\omega > \omega_0$: REATTANZA INDUTTIVA PREVALE SU QUELLA CAPACITIVA, LA SERIE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO RL

$$\lim_{\omega \to +\infty} Z(\omega) = +\infty, \quad \lim_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

FUNZIONAMENTO IN RISONANZA

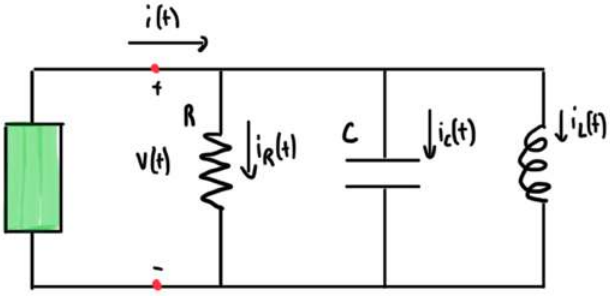
IN RISONANZA, I FASORI DELLE TENSIONI $\bar{V}_L$ E $\bar{V}_C$ RISULTANO UGUALI E OPPOSTI. SI ANNULLANO.
LA TENSIONE TOTALE COINCIDE CON LA TENSIONE SUL RESISTORE $\bar{V}_R$, IN FASE CON LA CORRENTE.
LA SERIE ASSORBE SOLO POTENZA ATTIVA

$$\boxed{Q = Q_L + Q_C = X_L I^2 + X_C I^2 = \underbrace{\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)}_{=0} I^2 = 0}$$



- RISONANZA PARALLELO (O ANTIRISONANZA)

CONSIDERIAMO IL BIPOLO A DESTRA DEI MORSETTI IN FIGURA CIOE' IL PARALLELO RLC, ALIMENTATO DALLA TENSIONE SINUSOIDALE $v(t) = V_M \sin(\omega t)$. LA SUA IMPEDENZA E':

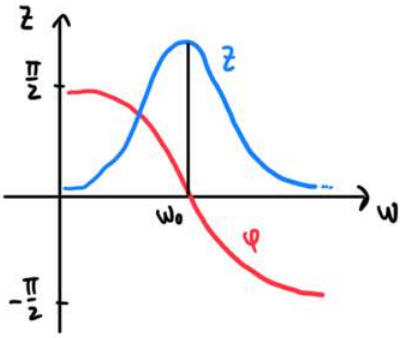


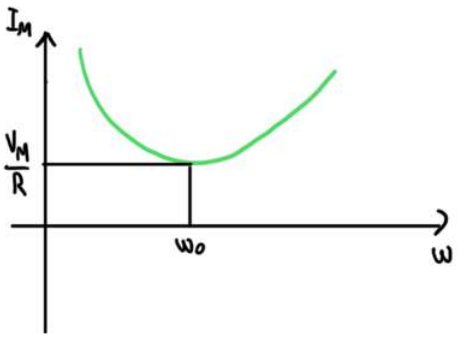
$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{\frac{1}{R} - j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

MODULO E ARGOMENTO:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left[\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) R\right]$$

COMPORTAMENTO IN FREQUENZA:





DATO CHE LE REATTANZE $X_L = \omega L$ e $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ DIPENDONO DA $\omega = 2\pi f$, SONO FUNZIONI DELLA PULSAZIONE ω SIA IL MODULO $Z(\omega)$ SIA L'ARGOMENTO $\varphi(\omega)$.

↓

A PARITÀ DI VALORE EFFICACE DELLA TENSIONE $V(t)$, RISULTANO FUNZIONE DI ω LO SFASAMENTO $\varphi(\omega)$ DELLA CORRENTE $i(t)$ RISPETTO A $V(t)$ E LA SUA AMPIEZZA $I_M = \frac{V_M}{Z(\omega)}$

A SECONDA DEL VALORE DELLA PULSAZIONE ω SI HA CHE:

- $\omega = \omega_0$: $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, IL MODULO DELL'IMPEDENZA ASSUME VALORE MINIMO $Z(\omega_0) = R$, MENTRE L'ARGOMENTO $\varphi(\omega_0) = 0$.

  CONDIZIONE DI RISONANZA PARALLELO O DI ANTIRISONANZA

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

- $\omega < \omega_0$: REATTANZA INDUTTIVA PREVALE SU QUELLA CAPACITIVA, LA SERIE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO RL

$$\lim_{\omega \to 0} Z(\omega) = 0 \quad , \quad \lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

- $\omega > \omega_0$: REATTANZA CAPACITIVA PREVALE SU QUELLA INDUTTIVA, LA SERIE SI COMPORTA COME UN CIRCUITO RC

$$\lim_{\omega \to +\infty} Z(\omega) = 0 \qquad \to \lim_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

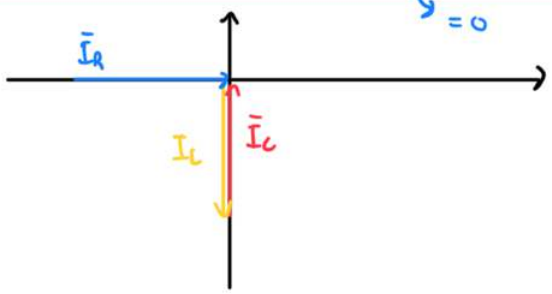
FUNZIONAMENTO IN RISONANZA

IN ANTIRISONANZA, I FASORI DELLE CORRENTI $\bar{I}_L$ E $\bar{I}_C$ RISULTANO UGUALI E OPPOSTI. SI ANNULLANO.

LA CORRENTE TOTALE DEL PARALLELO $\bar{I}$ COINCIDE CON LA CORRENTE SUL RESISTORE $\bar{I}_R$, IN FASE CON LA TENSIONE.

IL PARALLELO ASSORBE SOLO POTENZA ATTIVA

$$\boxed{Q = Q_L + Q_C = \frac{V^2}{X_L} + \frac{V^2}{X_C} = \underbrace{\left(\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C\right)}_{=0} V^2 = 0}$$



CAPITOLO 16: RETI IN REGIME VARIABILE

1. GENERALITÀ

QUANDO LE TENSIONI E LE CORRENTI DI UNA RETE ELETTRICA NON SONO TUTTE COSTANTI O SINUSOIDALI, SI DICE CHE LA RETE SI TROVA IN REGIME VARIABILE

IL REGIME VARIABILE È DOVUTO FONDAMENTALMENTE:

- ALLA PRESENZA NELLA RETE DI UN INTERRUTTORE CHE APRE O CHIUDE LA RETE IN UN ISTANTE CRITICO
- ALLA PRESENZA NELLA RETE DI ALMENO UN GENERATORE CHE IMPRIME UNA TENSIONE O UNA CORRENTE VARIABILE CON UN ANDAMENTO QUALSIASI

2. ISTANTE CRITICO E CONDIZIONI INIZIALI

IN GENERALE SI ASSUME CHE LA RETE SI TROVI IN CONDIZIONI NOTE FINO AD UN CERTO ISTANTE CRITICO, NELLA QUALE LA RETE CAMBIA CONFIGURAZIONE, A SEGUITO DELL'APERTURA/CHIUSURA DI INTERRUTTORI OPPURE ALLO SPEGNIMENTO DI GENERATORI

PONIAMO $t=0$ NELL'ISTANTE CRITICO. SI ASSUME CHE LE CONDIZIONI SIANO NOTE PER $t<0$.

IN GENERALE, LE TENSIONI/CORRENTI DEL CIRCUITO POSSONO SUBIRE DISCONTINUITÀ:

- NELL'INTORNO DELL'ISTANTE CRITICO IN CASO DI CAMBIAMENTI DI CONFIG. DEL CIRCUITO
- IN PRESENZA DI GIC/GIT LA CUI GRANDEZZA IMPRESSA SIA DISCONTINUA

TUTTAVIA, LE GRANDEZZE DI STATO DEI BIPOLI CON MEMORIA NON POSSONO SUBIRE DISCONTINUITÀ:

- LA TENSIONE SU UN CONDENSATORE, ESSENDO VARIABILE DI STATO DIRETTAMENTE LEGATA ALL'ENERGIA IMMAGAZZINATA: $E = \frac{1}{2} C V_C^2(t)$, SE FOSSE DISCONTINUA VORREBBE DIRE CHE VI È UNA VARIAZIONE DI FINITA DI ENERGIA IN UN TEMPO INFINITESIMO. CIÒ IMPLICA CORRENTE INFINITA.
- LA CORRENTE SU UN INDUTTORE, ESSENDO VARIABILE DI STATO DIRETTAMENTE LEGATA ALL'ENERGIA IMMAGAZZINATA: $E = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$, SE FOSSE DISCONTINUA VORREBBE DIRE CHE VI È UNA VARIAZIONE DI FINITA DI FLUSSO IN UN TEMPO INFINITESIMO. CIÒ IMPLICA UNA TENSIONE ISTANTANEA INFINITA

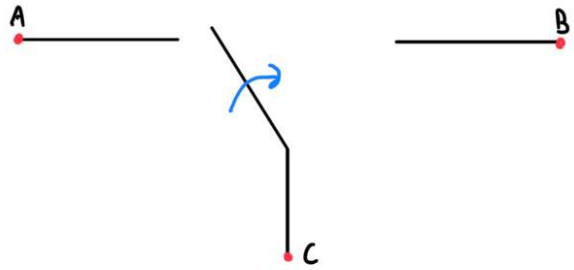
PERTANTO, PER OGNI CONDENSATORE E INDUTTORE DELLA RETE DOBBIAMO SCRIVERE:

$$V_C(0^-) = V_C(0^+) = V_C(0)$$
$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0)$$

TUTTE LE ALTRE TENSIONI/CORRENTI NEL CIRCUITO POSSONO ESSERE DISCONTINUE IN $t=0$

3. DEVIATORE

IL DEVIATORE (O COMMUTATORE) È UN TRIPOLO.



$t < t^*$: A-C IN CORTOCIRCUITO
B APERTO

$t > t^*$: B-C IN CORTOCIRCUITO
A APERTO

ALL' ISTANTE $t = t^*$ SI HA LA COMMUTAZIONE

4. ELEMENTI DI ANALISI DI UNA RETE PER $t > 0$

CONSIDERO PER $t > 0$ ($t = 0$ ISTANTE CRITICO) UNA RETE FORMATA DA GIT, GIC, RESISTORI, INDUTTORI E CONDENSATORI. PER L'ANALISI DELLA RETE SI SCRIVONO LE LKC, LKT E LE EQUAZIONI DEI BIPOLI.

SI OTTIENE UN SISTEMA DI EQUAZIONI CHE IN GENERALE SI PUÒ SCRIVERE NELLA FORMA SEGUENTE:

$$\begin{cases} \sum_h V_h(t) = 0 & \text{LKT} \\ \sum_k i_k(t) = 0 & \text{LKC} \\ V(t) = e(t) & \text{GIT} \\ i(t) = j(t) & \text{GIC} \\ V_R(t) = R\, i_R(t) & \text{RESISTORI} \\ i_C(t) = C \dfrac{dV_C(t)}{dt} & \text{CONDENSATORI} \\ V_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt} & \text{INDUTTORI} \end{cases}$$

È UN SISTEMA DI 2e EQUAZIONI IN 2e INCOGNITE.

INCOGNITE $\longrightarrow$ TENSIONI E CORRENTI DEI LATI DELLA RETE: USCITE $y(t)$

TERMINI NOTI $\longrightarrow$ GRANDEZZE IMPRESSE DAI GIT/GIC: INGRESSI $x(t)$

($\rightarrow$ SEGNALI E SISTEMI)

IN GENERALE, SI COMBINANO LE EQUAZIONI IN MODO DA OTTENERE UNA EQUAZIONE IN UNA SOLA INCOGNITA.

SI OTTIENE UNA EQ. DIFFERENZIALE LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

NOI STUDIAMO I 3 CASI SEGUENTI:

- GENERATORE DI TENSIONE COSTANTE CON CARICO OHMICO - CAPACITIVO (RC)
- GENERATORE DI TENSIONE COSTANTE CON CARICO OHMICO - INDUTTIVO (RL)
- GENERATORE DI TENSIONE COSTANTE CON CARICO OHMICO - INDUTTIVO - CAPACITIVO (RLC)

5. GENERATORE DI TENSIONE COSTANTE CON CARICO OHMICO - CAPACITIVO (RC)

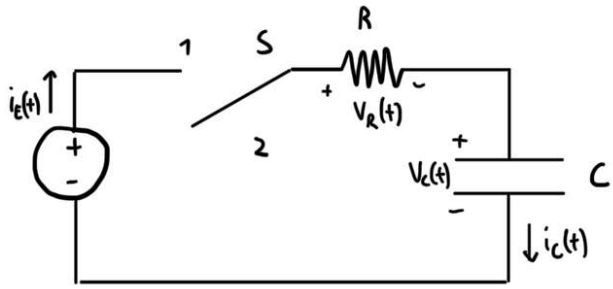
- TRANSITORIO DI CARICA DEL CONDENSATORE
- TRANSITORIO DI SCARICA DEL CONDENSATORE

1) TRANSITORIO DI CARICA DEL CONDENSATORE

PER $t<0$ LA RETE È A REGIME STAZIONARIO.

IN $t=0$ S COMMUTA DA 2 A 1

DETERMINIAMO PER $t>0$ TENSIONE E CORRENTE DEL CONDENSATORE



SOL. $t<0$: RETE A REGIME STAZIONARIO. LA RETE EQUIVALE A UN CIRCUITO APERTO

$t=0$: VALE LA CONTINUITÀ DELLA TENSIONE: $V_C(0^+) = V_C(0^-) = 0$

1. $t>0$: COMMUTATORE S È IN POSIZIONE 1. SI SCRIVONO LE LKC, LKT E LE EQUAZIONI DEI BIPOLI:

$$\begin{cases} V_R(t) + V_C(t) - V_E(t) = 0 \\ i_R(t) = i_C(t) = i_E(t) \\ V_E(t) = E \\ V_R(t) = R i_R(t) \\ i_C(t) = C \dfrac{dV_C(t)}{dt} \end{cases}$$

2. È CONVENIENTE RISOLVERE IL SISTEMA RISPETTO A UNA VARIABILE DI STATO. IN QUESTO CASO SCEGLIAMO $V_C(t)$

$i_C(t) = i_E(t)$

$$\text{I} \begin{cases} R i_C(t) + V_C(t) - E = 0 \\ i_C(t) = C \dfrac{dV_C(t)}{dt} \end{cases}$$

3. SOSTITUISCO $i_C(t)$ NELLA I $\Rightarrow RC \dfrac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = E$

È UNA ED DEL 1° ORDINE, A COEFFICIENTI COSTANTI. LA SOLUZIONE HA LA FORMA: $\boxed{V_C(t) = Ae^{st} + K}$

4. SOSTITUISCO LA SOLUZIONE GENERALE NELL'EQ. DIFF. DI PARTENZA AL POSTO DI $V_C(t)$ PER TROVARE K E S

$$\rightarrow RC \frac{d}{dt}\left[Ae^{st} + K\right] + Ae^{st} + K = E \rightarrow RC \cdot As e^{st} + Ae^{st} + K = E$$

SI VEDE CHE PER AVERE UN'UGUAGLIANZA: $K = E$

$$RC\, As e^{st} + Ae^{st} = 0 \rightarrow RC\, \cancel{A} s \cancel{e^{st}} = -\cancel{A} \cancel{e^{st}}$$

$$\rightarrow RC \cdot s = -1 \rightarrow s = -\frac{1}{RC}$$

TERMINE COSTANTE E: SOLUZIONE PARTICOLARE

TERMINE ESPONENZIALE: $Ae^{-\frac{t}{T}}$ SOLUZIONE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

5. ORA MI RIMANE DA TROVARE A: IMPONGO CHE $\lim_{t\to 0^+} V_c(t) = 0$

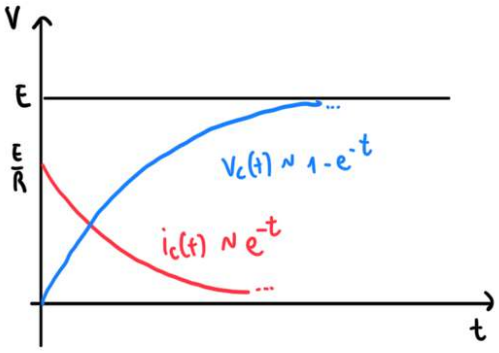
$$0 = V_c(0^+) = \lim_{t\to 0^+} V_c(t) = \lim_{t\to 0^+} Ae^{-\frac{t}{T}} + E = A + E \rightarrow A = -E$$

$$\Rightarrow V_c(t) = Ae^{st} + K \Big|_{\substack{K=E \\ S=-\frac{1}{RC} \\ A=-E}} = -Ee^{-\frac{t}{RC}} + E = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)} \quad , T = RC$$

$$\boxed{i_c(t) = C\frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{CE}{T}e^{-\frac{t}{T}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{T}}}$$

derivo $V_c(t)$ $\qquad$ $T = RC$



2) TRANSITORIO DI SCARICA DEL CONDENSATORE

IN $t=0$ APRO L'INTERRUTTORE $1 \rightarrow 2$. DETERMINARE PER $t>0$ TENSIONE E CORRENTE DEL CONDENSATORE

SOL. 1. $t<0$: RETE A REGIME STAZIONARIO. LA RETE EQUIVALE A UN CIRCUITO APERTO

$t=0$: VALE LA CONTINUITÀ DELLA TENSIONE: $V_c(0^+) = V_c(0^-) = E$

$t>0$: COMMUTATORE S È IN POSIZIONE 2. SI SCRIVONO LE LKC, LKT E LE EQUAZIONI DEI BIPOLI:

$$\text{I} \begin{cases} V_R(t) + V_c(t) = 0 \\ i_R(t) = i_c(t) \\ V_R(t) = Ri_R(t) \\ i_c(t) = C\dfrac{dV_c(t)}{dt} \end{cases}$$

2. È CONVENIENTE RISOLVERE IL SISTEMA RISPETTO A UNA VARIABILE DI STATO. IN QUESTO CASO SCEGLIAMO $V_c(t)$ (È UGUALE A PRIMA, SOLO CHE $V_E = E = 0$)

$$\Rightarrow RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = 0$$

3. LA SOLUZIONE HA LA FORMA: $\boxed{V_c(t) = Ae^{-\frac{t}{T}}}$ CON $T = RC$

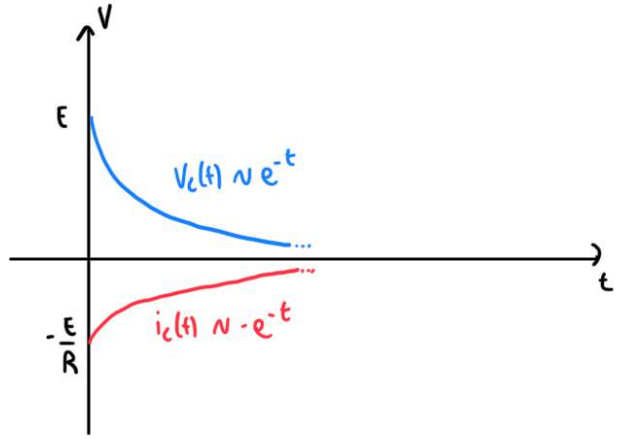
4. PER TROVARE A: $(V_c(0^+) = E)$: $E = V_c(0^+) = \lim_{t \to 0^+} V_c(t) = \lim_{t \to 0^+} A e^{-\frac{t}{T}} = A$

SI OTTIENE $A = E$

$$\Rightarrow \boxed{V_c(t) = E e^{-\frac{t}{T}}}$$

PER OTTENERE LA CORRENTE:

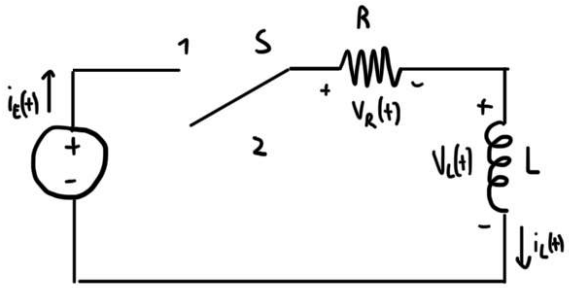
$$\boxed{i_c(t) = C \frac{dV_c(t)}{dt} = -\frac{CE}{T} e^{-\frac{t}{T}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}}}$$



5. GENERATORE DI TENSIONE COSTANTE CON CARICO OHMICO - INDUTTIVO (RL)

- TRANSITORIO DI CARICA DELL'INDUTTORE
- TRANSITORIO DI SCARICA DELL'INDUTTORE

1) TRANSITORIO DI CARICA DELL'INDUTTORE



CONSIDERO LA RETE RL IN FIGURA.

PER $t<0$ LA RETE È A REGIME STAZIONARIO, S È IN POSIZIONE 2

IN $t=0$ S COMMUTA DA 2 A 1

DETERMINIAMO PER $t>0$ TENSIONE E CORRENTE DELL'INDUTTORE

SOL. 1. $t<0$: RETE A REGIME STAZIONARIO. L'INDUTTORE EQUIVALE AD UN CORTO CIRCUITO. NON CIRCOLA CORRENTE, QUINDI $i_L(0^-)=0$

$t=0$: VALE LA CONTINUITÀ DELLA CORRENTE PER L'INDUTTORE: $i_L(0^-)=i_L(0^+)=0$

$t>0$: COMMUTATORE S È IN POSIZIONE 1. SI SCRIVONO LE LKC, LKT E LE EQUAZIONI DEI BIPOLI:

$$\begin{cases} V_R(t)+V_L(t)-V_E(t)=0 & \text{(I)} \\ i_R(t)=i_L(t)=i_E(t) \\ V_E(t)=E \\ V_R(t)=R\,i_R(t) & \text{(IV)} \\ V_L(t)=L\dfrac{di_L(t)}{dt} & \text{(V)} \end{cases}$$

2. È CONVENIENTE RISOLVERE IL SISTEMA RISPETTO A UNA VARIABILE DI STATO. IN QUESTO CASO SCEGLIAMO $i_L(t)$

- SOSTITUISCO $i_R(t)=i_L(t)$ IN (IV): $V_R(t)=R\,i_L(t)$

- SOSTITUISCO $V_R(t)$ COSÌ OTTENUTA IN (I): $R\,i_L(t)+V_L(t)-E=0$

- SOSTITUISCO (V) IN (I): $\boxed{R\,i_L(t)+L\dfrac{di_L(t)}{dt}-E=0}$

È UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PRIMO ORDINE, A COEFFICIENTI COSTANTI. LA SOLUZIONE GENERALE È DATA DA

$$\boxed{i_L(t)=Ae^{st}+K}$$

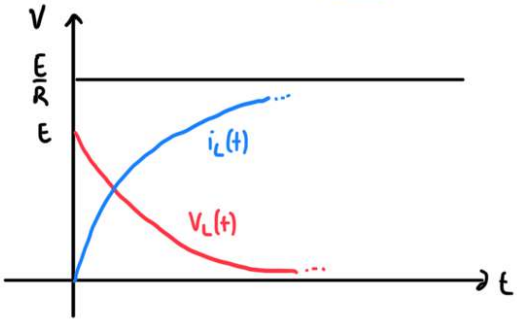
3. DEVO DETERMINARE LE COSTANTI A, S, K. PER FARLO INSERISCO QUESTA SOLUZIONE NELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE:

$$R(Ae^{st}+K) + L(Ase^{st}) = E \rightarrow RAe^{st} + KR + LAse^{st} - E = 0$$

PER AVERE UN'UGUAGLIANZA: $\begin{cases} KR - E = 0 \\ RAe^{st} + LAse^{st} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = \frac{E}{R} \\ R\cancel{A}\cancel{e^{st}} = -L\cancel{A}s\cancel{e^{st}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = \frac{E}{R} \\ S = -\frac{R}{L} \end{cases}$

PER TROVARE A: $\lim_{t\to 0^+} i_L(t) = 0 \rightarrow \lim_{t\to 0^+} Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = 0 \rightarrow A + \frac{E}{R} = 0 \rightarrow A = -\frac{E}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)} \quad , \quad T = \frac{L}{R}$$



$$V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{E}{RT}e^{-\frac{t}{T}} = Ee^{-\frac{t}{T}}$$

$$\rightarrow \boxed{V_L(t) = Ee^{-\frac{t}{T}}}$$

2) TRANSITORIO DI SCARICA DELL'INDUTTORE

IN $t=0$ L'INTERRUTTORE VIENE RIAPERTO ($1 \rightarrow 2$). TROVARE LE ESPRESSIONI DI TENSIONE E CORRENTE

SOL. 1. $t<0$: RETE A REGIME STAZIONARIO. L'INDUTTORE EQUIVALE AD UN CORTO CIRCUITO. IL CIRCUITO È EQUIVALENTE A UN CIRCUITO PURAMENTE RESISTIVO

$t=0$: VALE LA CONTINUITÀ DELLA CORRENTE PER L'INDUTTORE: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R}$

$t>0$: COMMUTATORE S È IN POSIZIONE 2. SI SCRIVONO LE LKC, LKT E LE EQUAZIONI DEI BIPOLI:

$$\begin{cases} V_R(t) + V_L(t) = 0 & \text{(I)} \\ i_R(t) = i_L(t) & \text{(II)} \\ V_R(t) = Ri_R(t) & \text{(III)} \\ V_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} & \text{(IV)} \end{cases}$$

(COME NEL TRANSITORIO DI CARICA, MA, POICHÉ ABBIAMO APERTO L'INTERRUTTORE, LA TENSIONE $V_E(t)$ È NULLA: $V_E(t) = E = 0$)

2. È CONVENIENTE RISOLVERE IL SISTEMA RISPETTO A UNA VARIABILE DI STATO. IN QUESTO CASO SCEGLIAMO $i_L(t)$

- SOSTITUISCO (II) IN (III): $V_R(t) = Ri_L(t)$

- SOSTITUISCO (IV) IN (I): $Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = 0$

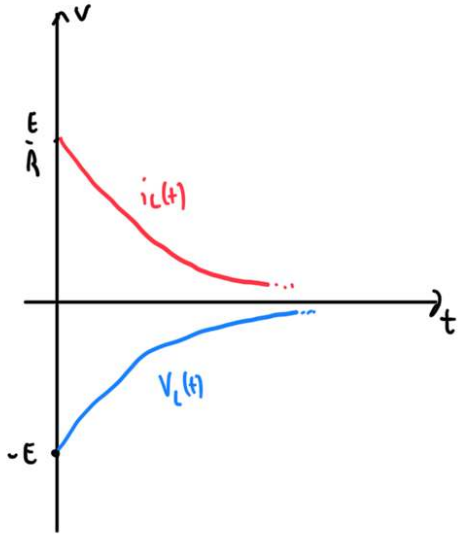
3. LA SOLUZIONE GENERALE È: $\boxed{i_L(t) = A e^{-\frac{t}{T}}}$

PER DETERMINARE A: $\lim_{t \to 0^+} i_L(t) = \frac{E}{R} \rightarrow \lim_{t \to 0^+} A e^{-\frac{t}{T}} = \frac{E}{R} \rightarrow A = \frac{E}{R}$

4. SI OTTIENE $\boxed{i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{T}}}$, $T = \frac{L}{R}$

5. PER TROVARE $V_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow V_L(t) = -L \frac{E}{RT} e^{-\frac{t}{T}}$

$\Rightarrow \boxed{V(t) = -E e^{-\frac{t}{T}}}$



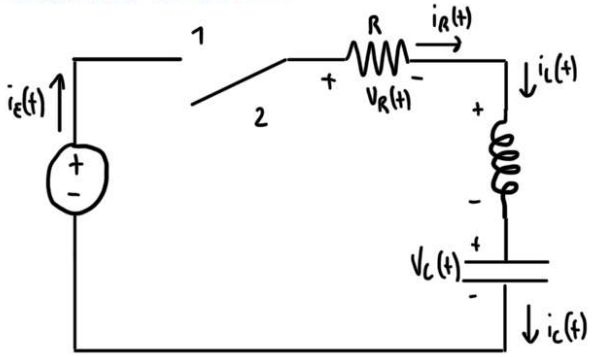
6. GENERATORE DI TENSIONE COSTANTE CON CARICO OHMICO - INDUTTIVO - CAPACITIVO

CONSIDERO IL CIRCUITO IN FIGURA, CON R, L, C COSTANTI > 0

PER $t < 0$, LA RETE È A REGIME STAZIONARIO.

IN $t = 0$: S: $2 \rightarrow 1$

DETERMINARE PER $t > 0$ $i_L(t)$ E $V_C(t)$



SOL. 1. $t < 0$: RETE È A REGIME STAZIONARIO. $i_L(t) = 0$, $V_C(t) = 0$

$t = 0$: PER CONTINUITÀ NELL'ISTANTE CRITICO, $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$
$V_C(0^-) = V_C(0^+) = 0$

$t > 0$: IL COMMUTATORE S È IN POSIZIONE 1. SI SCRIVONO LE LKC, LKT E LE EQ. DEI BIPOLI:

$$\begin{cases} V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V_E(t) & \text{(I)} \\ i_E(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) & \text{(II)} \\ V_E(t) = E & \text{(III)} \\ V_R(t) = R\, i_R(t) & \text{(IV)} \\ i_C(t) = C \dfrac{dV_C(t)}{dt} & \text{(V)} \\ V_L(t) = L \dfrac{di_L(t)}{dt} & \text{(VI)} \end{cases}$$

RISOLVO IL SISTEMA RISPETTO A UNA VARIABILE DI STATO: $V_C(t)$

- SOSTITUISCO $i_C(t)$ IN (IV) E IN (VI): $V_R(t) = R\, i_C(t)$
$V_L(t) = L \dfrac{di_C(t)}{dt}$

- SOSTITUISCO TUTTO IN (I): $\begin{cases} R\, i_C(t) + L \dfrac{di_C(t)}{dt} + V_C(t) = E \\ i_C(t) = C \dfrac{dV_C(t)}{dt} \end{cases}$

METTO ASSIEME LE 2 EQUAZIONI: $\boxed{LC \dfrac{d^2 V_C}{dt} + RC \dfrac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = E}$

È UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE DEL 2° ORDINE. INTRODUCO I PARAMETRI

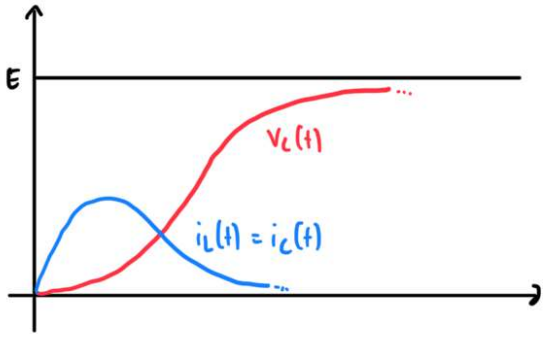
$$T = \frac{2L}{R} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

SOSTITUISCO: $\dfrac{d^2 V_C(t)}{dt} + \dfrac{2}{T} \dfrac{dV_C(t)}{dt} + \omega_0^2 V_C(t) = \dfrac{E}{LC}$

NON NE CALCOLIAMO LA SOLUZIONE ANALITICAMENTE. TUTTAVIA VEDIAMO LE SOLUZIONI PER VIA GRAFICA. SI DISTINGUONO 3 CASI:

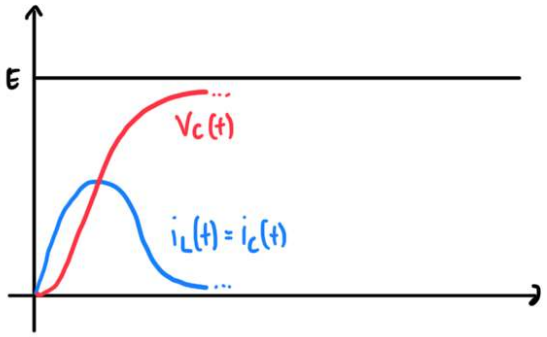
1. CASO SOVRASMORZATO: $\frac{1}{\omega_0 T} > 1$
2. CASO CRITICAMENTE SMORZATO $\frac{1}{\omega_0 T} = 1$
3. CASO SOTTOSMORZATO $\frac{1}{\omega_0 T} < 1$

1) CASO SOVRASMORZATO

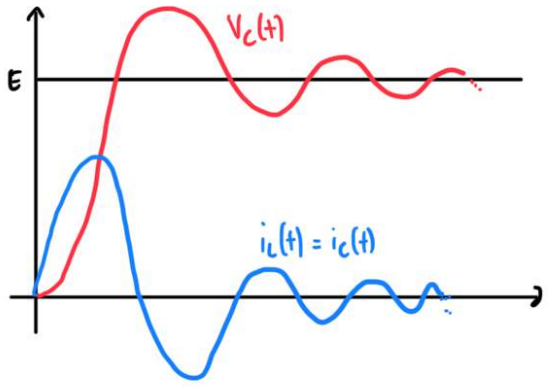


2) CASO CRITICAMENTE SMORZATO $\left(\frac{1}{\omega_0 T} = 1\right)$

LA SOLUZIONE ANALITICA E' DIVERSA DAGLI ALTRI 2 CASI. TUTTAVIA IL GRAFICO E' SIMILE A QUELLO DEGLI ALTRI 2 CASI



3) CASO SOTTOSMORZATO: $\left(0 < \frac{1}{\omega_0 T} < 1\right)$



LA TENSIONE DEL CONDENSATORE IDEALE PARTE DA 0, SUPERA E E POI TENDE AL VALORE FINALE E MEDIANTE OSCILLAZIONI SMORZATE INTORNO AD E

LA CORRENTE E' MASSIMA NEI PUNTI DI FLESSO DELLA TENSIONE ED E' NULLA NEI PUNTI DI MAX/MIN DELLA TENSIONE