ESERCIZI 3° TUTORATO

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ y+z \end{pmatrix}$.
   - Dimostrare che sia lineare.
   - Determinare una base di $ker(f)$ e stabilire se f è iniettiva.

2. Siano $V := \mathbb{R}^4$, $W := \mathbb{R}^3$.
   - Verificare che i vettori
   $$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}), v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   formano una base B di V .
   - Siano
   $$w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Verificare che $C := (w_1, w_2, w_3)$ è una base di W.
   - Esiste un'unica applicazione lineare f: V $\to$ W tale che
   $$f(v_1) := w_1 + w_3, f(v_2) := -w_1 + w_2, f(v_3) := w_3, f(v_4) := 3w_1 + 2w_2 - w_3.$$
   Determinare la matrice associata a tale applicazione lineare (rispetto alle basi sopra descritte!).

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+z \\ -y+t \\ x-z \\ y-t \end{pmatrix}$. Determinare una base e la dimensione di $ker(f)$ e $Im(f)$.

4. . Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ z \end{pmatrix}$.
   (a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.
   (b) Determinare Ker(f) e Im(f).
   (c) Mostrare che l'insieme
   $$B = \{b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
   e una base di $\mathbb{R}^3$

   (d) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base B nel codominio

5. Sia $V =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= \mathbb{R}^3$ e $W =< 1, x, x^2, x^3, x^4 >$ (spazio dei polinomi di $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a 4).
   Sia $f : V \to W$, $f : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a+2c)x^3 + (a+2b-3c)x^4$, un' applicazione lineare.
   Calcolare la matrice associata (nelle basi indicate).