Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 1 (<u>Soluzioni</u>)

07/03/2024

Esercizio 1

Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione

Poiché i vettori sono <u>due</u> possiamo dire che sono linearmente indipendenti perché non sono uno multiplo dell'altro.

In alternativa possiamo utilizzare la definizione con la combinazione lineare, ossia cercando $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ 5\alpha - \beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = 5\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -5\alpha \\ \beta = 5\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} 6\alpha = 0 \\ \beta = 5\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto 0 per <u>entrambi</u> i coefficienti α e β, di conseguenza i vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2

Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione

Procedendo allo stesso modo dell'esercizio 1 possiamo stabilire che i due vettori sono dipendenti (infatti $v_2 = -2v_1$).

Esercizio 3

Esibire un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ linearmente dipendente dal vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzione

Basta scegliere un qualsiasi multiplo del vettore w, ad esempio $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 45 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4

Stabilire se i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti.

Take-home message: In generale, cosa si può dire sulla lineare indipendenza del seguente insieme di vettori?

$$\left\{ v_1, v_2, v_3, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n \right\}, \quad (v_i \in \mathbb{R}^3 \ \forall \ i = 1, 2, \dots, n)$$

Soluzione

Se in un insieme di vettori compare il vettore nullo, possiamo subito dire che quei vettori sono tra loro linearmente dipendenti.
Infatti possiamo trovare una combinazione lineare che dia il vettore nullo usando almeno un coefficiente non nullo (qui k):

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \mathbf{k} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

Esercizio 5 (*più difficile*)

Siano $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ tre vettori linearmente indipendenti. Si può concludere che anche i vettori $\{v_1,\ v_1 + v_2,\ v_1 + v_2 + v_3\}$ sono linearmente indipendenti?

Soluzione

Consideriamo la combinazione lineare: $a \cdot v_1 + b \cdot (v_1 + v_2) + c \cdot (v_1 + v_2 + v_3) = 0$
(Se troviamo $a = b = c = 0$ possiamo affermare che i vettori $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ sono linearmente indipendenti.)

La scrittura precedente equivale alla seguente: $\underbrace{(a+b+c)}_{=0} \cdot v_1 \; + \; \underbrace{(b+c)}_{=0} \cdot v_2 \; + \; \underbrace{c}_{=0} \cdot v_3 = 0$

I coefficienti segnati sono 0 perché $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ sono indipendenti per ipotesi. Risolviamo dunque il sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c=0 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a+b+0=0 \\ b+0=0 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a+b=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a+0=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto $a=b=c=0$, pertanto possiamo dire che i vettori $\{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3\}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6

Nello spazio vettoriale delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, si considerino le funzioni

$$f_1(x) = \sin x,\ \ f_2(x) = \sin 2x,\ \ f_3(x) = \sin 3x$$

Si dica se esse sono linearmente indipendenti.

Soluzione
Consideriamo una combinazione lineare $a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3$ delle tre funzioni f_1, f_2 e f_3. Supponiamo che tale combinazione lineare sia nulla (cioè sia la *funzione identicamente nulla*).
Si ha quindi:

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x = 0, \qquad \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

Dato che l'uguaglianza precedente deve verificarsi per ogni valore di x, attribuendo ad x dei valori particolari otteniamo (per esempio):

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2}: &\quad a_1 - a_3 = 0 \\ x = \frac{\pi}{3}: &\quad \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 = 0 \\ x = \frac{\pi}{4}: &\quad \frac{\sqrt{2}}{2}a_1 + a_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}a_3 = 0 \end{aligned}$$

L'unica soluzione di tali equazioni è $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Ciò dimostra che le tre funzioni date sono linearmente indipendenti.

Esercizio 7

Verificare se il seguente insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 \cdot x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

Soluzione

Visto che nella definizione di V compare un prodotto tra componenti, possiamo già affermare che non si tratta di un sottospazio.

Per verificarlo consideriamo un vettore **di V**, ad esempio $v_1 = (0, 2, 3, 6)$. Prendiamo adesso un altro vettore **di V**, il cui prodotto della seconda e terza componente sia ancora 6 (come per il vettore v_1). Scegliamo ad esempio $v_2 = (5, -1, -6, 11)$. Verifichiamo se V è *chiuso* per l'operazione di somma, ossia se $v_1 + v_2 \in V$. Si ha:

$$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Il vettore $(5, 1, -3, 17)$ però non appartiene a V, perché $5 + 1 \cdot (-3) - 17 \neq 0$. Questo controesempio dimostra che V non è chiuso rispetto all'operazione somma, di conseguenza non è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 8

Verificare se il seguente insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -3x + z = 2x + y = 0 \right\}$$

Soluzione

V è dato dai vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che: $\begin{cases} -3x + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ ossia tali che $\begin{cases} z = 3x \\ y = -2x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Trattasi dunque dei vettori del tipo $\begin{pmatrix} k \\ -2k \\ 3k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Controlliamo se si verificano le seguenti tre condizioni:

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{V}$ Sì, basta prendere $k = 0$

- $v_1 + v_2 \overset{?}{\in} \mathrm{V}, \quad \forall\ v_1, v_2 \in \mathrm{V}$

  Sì, infatti $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = (k_1 + k_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{V}$

- $\lambda v \overset{?}{\in} \mathrm{V}, \quad \forall\ \lambda \in \mathrm{K},\ \forall v \in \mathrm{V}$

  Sì, infatti $\lambda \begin{pmatrix} k \\ -2k \\ 3k \end{pmatrix} = (\lambda \cdot k) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{V}$