

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.09.2022

TEMA 1

Esercizio 1 [8 punti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right),$$

- (i) individuare il dominio naturale, studiarne la eventuale periodicità e l'eventuale simmetria, calcolarne il segno, calcolare i limiti agli estremi del dominio;
(ii) studiare la derivabilità di f sul suo dominio, calcolare la derivata prima, individuare gli intervalli di monotonia e i punti di minimo e di massimo, sia relativi che assoluti, ed eventuali estremo inferiore e superiore;
(iii) abbozzare il grafico di f .

SOLUZIONE

(i)

$$\text{Dominio naturale} = D := \{x : \sin x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Poiché \sin è periodica di 2π , anche f lo è. Inoltre \sin è dispari, così anche f lo è, cioè, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$. È dunque sufficiente studiare la funzione nel sottodominio $]0, \pi[$, per poi estenderla per antisimmetria e periodicità.

Si ha $f(x) \neq 0 \forall x \in D$, e

$$f(x) > 0 \quad (\& \ x \in]0, \pi[) \iff \frac{1}{\sin x} > 0 \quad (\& \ x \in]0, \pi[) \iff x \in]0, \pi[$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \arctan\left(\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) &= \arctan\left(\lim_{x \rightarrow \pi-} \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(ii) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) = -\frac{\cos x}{1 + \sin^2(x)} \quad \forall x \in D.$$

Pertanto la funzione è derivabile (e dunque continua) in ogni punto del dominio.

Poiché f (in $]0, \pi[$) ammette limiti destro in 0 e sinistro in π finiti, calcoliamo gli attacchi della derivata (in $]0, \pi[$), cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{\cos x}{1 + \sin^2(x)} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-} f'(x) = 1.$$

Da ciò si deduce che $\lim_{x \rightarrow 2n\pi+} f'(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow (2n+1)\pi-} f'(x) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

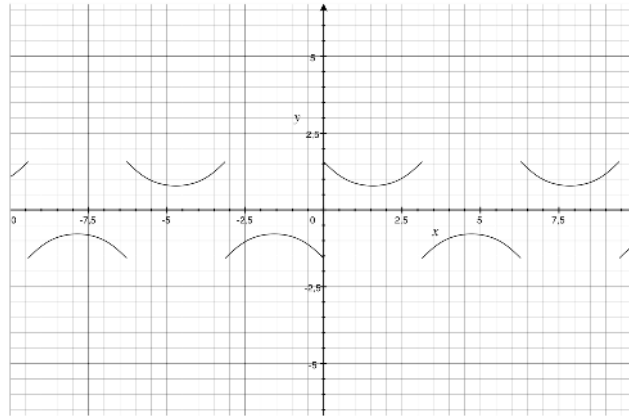
Da

$$f'(x) \geq 0, \quad (\& \ x \in]0, \pi[) \iff \cos(x) \leq 0 \quad (\& \ x \in]0, \pi[) \iff x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi[$$

e $f'(x) = 0$, ($\& x \in]0, \pi[$) $\iff x = \frac{\pi}{2}$, si ha che la funzione è strettamente decrescente negli intervalli $]0, \frac{1}{2}\pi] + 2n\pi =]2n\pi, (\frac{1}{2} + 2n)\pi]$, $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi[+ 2n\pi = [(\frac{3}{2} + 2n)\pi, 4n\pi[$ e strettamente crescente negli intervalli $[\frac{1}{2}\pi, \pi[+ 2n\pi = [(\frac{1}{2} + 2n)\pi, (1 + 2n)\pi[$, $]\pi, \frac{3}{2}\pi] + 2n\pi =](2n + 1)\pi, (\frac{3}{2} + 2n)\pi]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. In particolare, tutti i punti $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo relativo, con $f(x) = \pi/4$, mentre i punti $x = \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$, sono di massimo relativo con $f(x) = -\pi/4$.

Non ci sono punti di massimo assoluto perché dai limiti si deduce che $\sup_{x \in D} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\inf_{x \in D} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, e non ci sono punti del dominio in cui la funzione prende i valori $\pm \frac{\pi}{2}$.

(iii) Grafico di f :



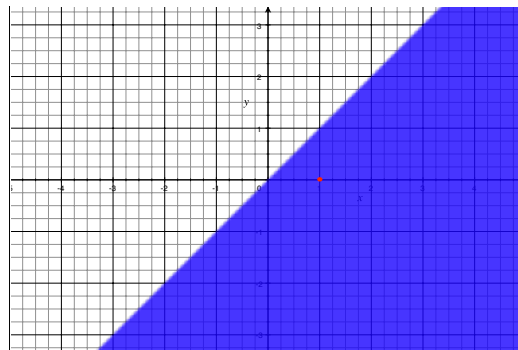
Esercizio 2 [8 punti] Si trovino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della disequazione

$$\left| \frac{z - i}{z - 1} \right| \geq 1$$

e le si disegnino nel piano complesso.

SOLUZIONE Ponendo $z = x + iy$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - i}{z - 1} \right| \geq 1 &\iff \frac{|z - i|}{|z - 1|} \geq 1, \quad z \neq 1 \iff |z - i| \geq |z - 1|, \quad z \neq 1 \\ &\iff \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \geq \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (1, 0) \\ &\iff -2y \geq -2x \quad (x, y) \neq (1, 0) \iff y \leq x \quad (x, y) \neq (1, 0). \end{aligned}$$



Esercizio 3 [8 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONE: Esaminiamo il numeratore e il denominatore

$$Num := \sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3 = (1 - \alpha)x + \frac{1}{6}(\alpha - 1)x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$Denom := \arctan(x^2 + 4x^3) = x^2 + 4x^3 + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

Perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x + \frac{1}{6}(\alpha - 1)x^3 + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x^2 + o(x^2)}$$

Dunque, utilizzando il Principio di Sostituzione degli Infinitesimi,

se $\alpha = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^5}{5!}}{x^2} = 0,$$

se $\alpha > 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x}{x^2} = -\infty,$$

se $\alpha < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \alpha x + \frac{1}{6}\alpha x^3}{\arctan(x^2 + 4x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \alpha)x}{x^2} = +\infty$$

Esercizio 4 [8 punti] (a) Calcolare l'integrale definito:

$$\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^x - 1)} dx$$

(b) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare la convergenza di

$$\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^x - 2)^\alpha (e^x - 1)} dx.$$

SOLUZIONE

(a) Calcoliamo l'integrale indefinito con sostituzione $y = e^x \implies dy = e^x dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^x - 1)} dx &= \int \frac{dy}{(y - 2)(y - 1)} = \int \left(\frac{1}{y - 2} - \frac{1}{y - 1} \right) dy = \log |y - 2| - \log |y - 1| + cost = \\ &= \log \left(\frac{|y - 2|}{|y - 1|} \right) + cost = \log \left(\frac{|e^x - 2|}{|e^x - 1|} \right) + cost \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio si ottiene risolvendo il sistema in A, B

$$\frac{1}{(y - 2)(y - 1)} = \frac{A}{y - 2} + \frac{B}{y - 1}, \quad y \in \mathbb{R},$$

che dà $A = 1$ e $B = -1$. Dunque

$$\int_{\log 4}^{\log 6} \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^x - 1)} dx = \left[\log \left(\frac{|e^x - 2|}{|e^x - 1|} \right) \right]_{\log 4}^{\log 6} = \log \left(\frac{4}{5} \right) - \log \left(\frac{2}{3} \right) = \log \left(\frac{6}{5} \right) = \log 6 - \log 5$$

(b) Da

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x - 2)^\alpha (e^x - 1)} \sim \frac{e^x}{e^{\alpha x + 1}} = \frac{1}{e^{\alpha x}}$$

si deduce che la funzione integranda f è definitivamente positiva e che, se $\alpha \leq 0$, l'integrale diverge (perchè il limite di f a $+\infty$ esiste ma non è nullo¹). Mentre se $\alpha > 0$ si ha che l'integrale converge, in quanto $f(x) = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ per ogni $\beta > 1$ per $x \rightarrow +\infty$ e $\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{dx}{x^\beta}$ converge. Infatti, per $\alpha > 0$, dalla gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{-\beta}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\beta \frac{1}{e^{\alpha x}} = 0$$

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

¹Attenzione, potrebbe convergere se il limite di f a $+\infty$ non esistesse