

Foglio di esercizi 12

06 giugno 2022

In vista dell'esame, provare a svolgere alcuni temi d'esame passati e vi consiglio di partire da quelli più recenti. Ad esempio, vi allego il tema del primo appello dell'anno scorso (esame del 15 giugno 2021).

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 15 giugno 2021

Esercizio 1. Sia $M(2, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Data $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, sia $U \subset M(2, \mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che commutano con A :

$$U = \{B \in M(2, \mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

- (a) Determinare la dimensione e una base di U .
- (b) Sia $W \subset M(2, \mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che contengono il vettore $(3, -2)$ nel loro nucleo. Determinare la dimensione e una base di W .
- (c) Determinare $U \cap W$ e $U + W$.
- (d) Stabilire se U contiene qualche matrice con rango < 2 e diversa dalla matrice nulla.

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare per quale valore di t la funzione f **non** è suriettiva.
- (b) Per il valore di t trovato determinare delle basi del nucleo e dell'immagine di f .
- (c) Poniamo ora $t = 0$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (-1, 2, 0, 3)$. Scrivere la matrice della funzione $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, definita ponendo $\tilde{f}(u) = f(u)$, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U e alla base canonica di \mathbb{R}^3 .
- (d) Verificare che $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

Esercizio 3. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1, 0, 0) = (2, -2, -2)$, $f(0, 1, 0) = (-2, 5, -1)$ e tale che $v = (1, -1, -1)$ sia un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 6$.

- (a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.
- (b) Determinare gli autovalori e autovettori di f e dire se A è diagonalizzabile.
- (c) Stabilire se esiste una base **ortonormale** di \mathbb{R}^3 formata da autovettori di f e, se esiste, trovarla.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sono dati i punti $A = (0, 3, 3)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (2, 2, 1)$.

- (a) Verificare che l'angolo \widehat{ABC} è retto e trovare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.
- (b) Trovare il punto E , intersezione delle diagonali del rettangolo $ABCD$.
- (c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene il rettangolo $ABCD$.