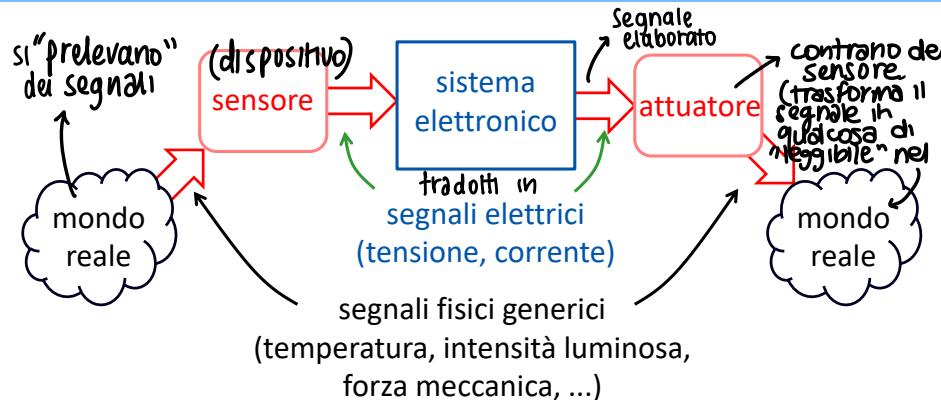


Introduzione all'elettronica

Jaeger 6°Ed: Cap. 1 p.1-9

- Segnali e informazione
- Trattamento del segnale: amplificazione e filtraggio
- Segnali analogici e digitali
- Esempi di circuito elettronici: amplificatori, filtro, circuiti digitali

Segnali e sistemi elettronici



- Un sistema in generale raccoglie informazioni dal mondo reale, le elabora, prende decisioni e compie (o comanda) azioni.
- L'elettronica studia e realizza i dispositivi e i circuiti

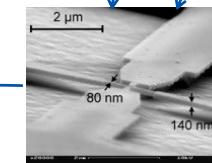
Elettronica: dai materiali ai sistemi



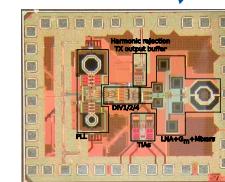
■ Materiali

- ◆ Silicio, GaN, InGaAs, ...

Tecnologie micro/nano elettroniche



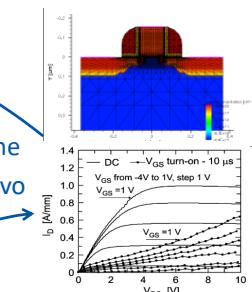
Progettazione circuitale



■ Circuiti integrati

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica

■ Modelli e misure



■ Dispositivi

- ◆ Transistor, LED, OLET

Progettazione di sistema

Che una parte importante (spesso preponderante) dell'hardware è fatta da dispositivi e circuiti elettronici

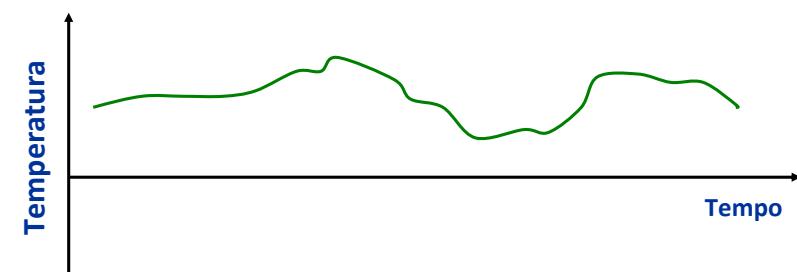
■ Sistema completo

17

Segnale

Segnale: supporto fisico di natura qualunque (elettrica, acustica, ottica, etc.) cui si associa una informazione allo scopo di poterla trasferire da una sorgente ad un utilizzatore.

Esempio: temperatura ambiente in un determinato periodo di tempo

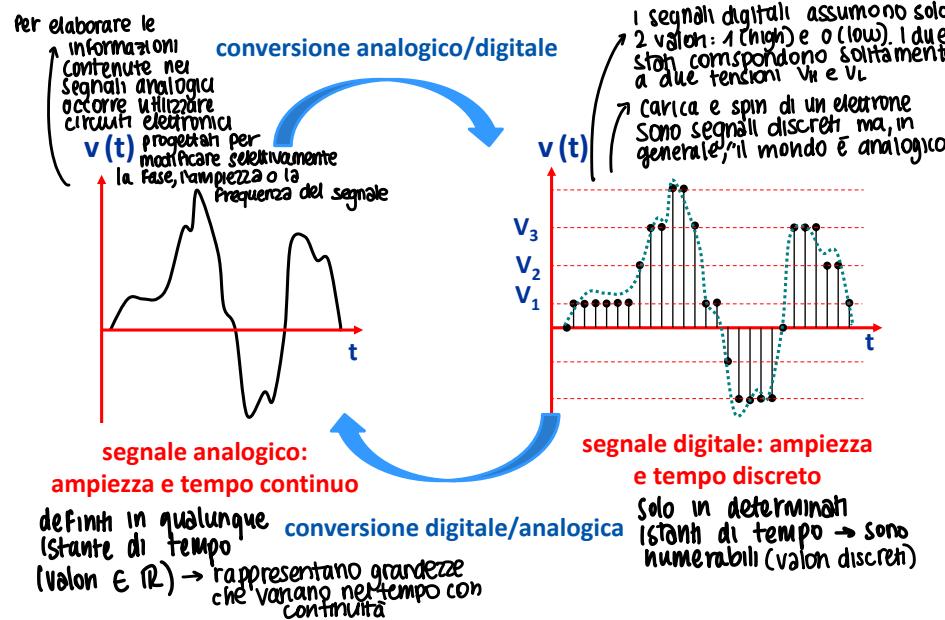


Altri esempi di segnali

- temperatura
- segnale luce proveniente da una fibra ottica
- onda acustica prodotta da un altoparlante
- luce emessa da un semaforo
- onde elettromagnetiche prodotte dal trasmettitore di un cellulare (trasmette audio, video ecc..)
-

Sensore = Dispositivo elettronico che converte il segnale esterno in una grandezza elettrica (corrente o tensione)

Segnali analogici e digitali



Sistemi e circuiti elettronici



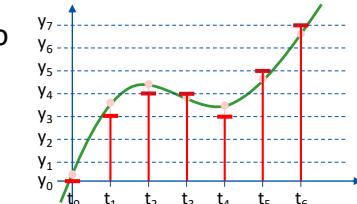
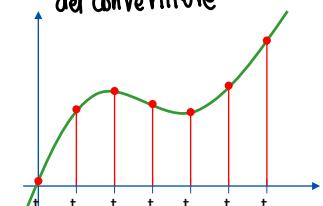
Circuito elettronico:

rete di componenti elettronici passivi (R, C, L) e attivi (diodi, transistor) per l'elaborazione di segnali elettrici (tensione e corrente)

Conversione analogico digitale (A/D) o ADC

- La conversione analogico-digitale è l'operazione che trasforma un segnale analogico nella sua approssimazione digitale (numero binario a n bit*)
- Consiste in due fasi principali
 - ◆ **campionamento**: lettura del segnale ad intervalli periodici di tempo (t_n)
 - ◆ **quantizzazione**: approssimazione del segnale ad un insieme discreto e finito di valori (y_n)
- Il segnale digitale è la rappresentazione numerica del segnale di partenza

* il numero binario a n-bit è una frazione binaria che rappresenta il rapporto fra la tensione di ingresso v_x e la tensione V_{fs} di fondo scala del convertitore

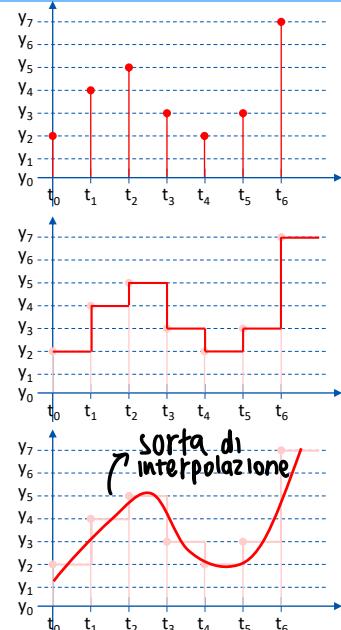


Conversione digitale-analogica(D/A o DAC)

- La Conversione digitale-analogica è l'operazione che ricostruisce il segnale analogico a partire dalla sua rappresentazione numerica (digitale)

- Consiste in due fasi principali

- ◆ Estensione del dominio nel tempo continuo (si ottiene una forma a scaletta)
- ◆ Amplificazione e filtraggio. Dal segnale a scaletta (quantizzato) viene interpolato il segnale di partenza



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

24

Architettura tipica di un sistema elettronico



- condizionamento del segnale
 - ◆ amplificazione, filtraggio
- conversione A/D e D/A
 - ◆ trasformazione del segnale da analogico a digitale (A/D) e viceversa (D/A)
- elaborazione numerica del segnale
 - ◆ sequenza di operazioni logiche e aritmetiche

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

25

Circuiti elettronici digitali più complessi

Microprocessori: formati da miliardi di porte logiche



GPU



Memorie a semiconduttore

Circuiti logici programmabili (FPGA, PLA, ...)



Hard disk allo stato solido

Elettronica analogica e digitale

- L'elettronica analogica studia i circuiti che realizzano le operazioni di elaborazione dei segnali analogici:

- ◆ amplificatori
- ◆ filtri
- ◆ circuiti per la generazione di segnali periodici
- ◆ Parte dei convertitori A/D e D/A

*argomenti
del corso*

- L'elettronica digitale studia l'elaborazione dei dati nella loro rappresentazione numerica binaria (cioè rappresentati come 0 e 1):

- ◆ Porte logiche
- ◆ Memorie
- ◆ Microprocessori
- ◆ Parte dei convertitori A/D e D/A

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

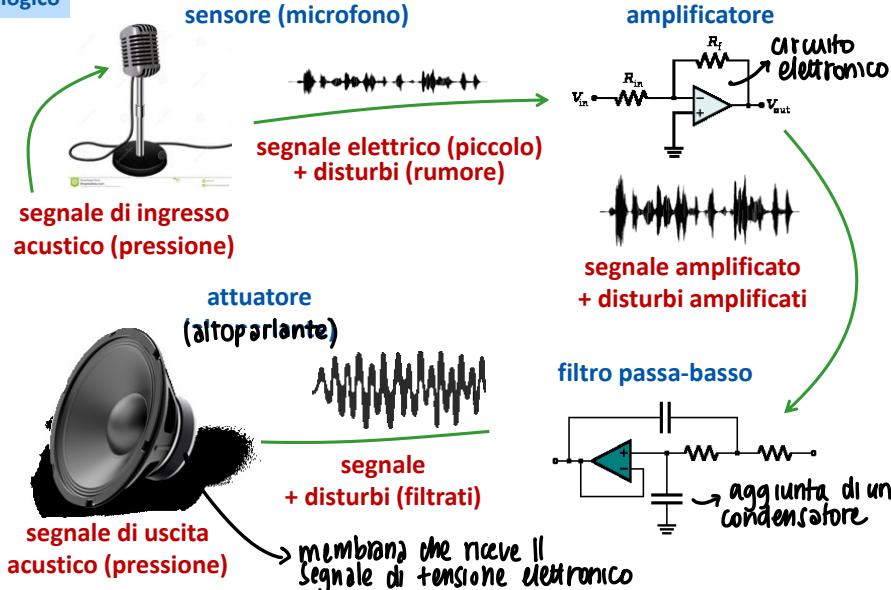
26

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

31

Esempio di sistema di elaborazione elettronico

Analogico



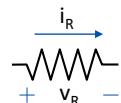
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

32

Componenti delle reti elettriche

■ Componenti passivi

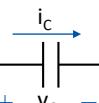
◆ Resistenza



$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$$

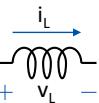
◆ Condensatore



$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt$$

◆ Induttanza



$$v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}(t)$$

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Jaeger 6°Ed: Cap. 1 p. 12-17

Richiami sulle reti elettriche

- Leggi di kirchhoff
- Componenti passivi e generatori
- Teoremi di Thévenin e Norton
- Partitore di tensione e di corrente
- Sovrapposizione degli effetti
- Tensione e potenziale di riferimento

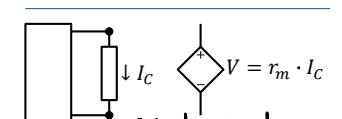
Componenti delle reti elettriche

■ Generatori pilotati (o controllati)

◆ di tensione

Eroga una tensione che dipende:

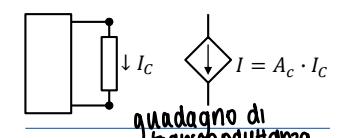
- o dalla corrente che passa in un altro ramo del circuito
(generatore di tensione controllato in corrente)
- o dalla tensione tra due nodi del circuito
(generatore di tensione controllato in tensione)



◆ di corrente

Eroga una corrente che dipende:

- o dalla corrente che passa in un altro ramo del circuito
(generatore di corrente controllato in corrente)
- o dalla tensione tra due nodi del circuito
(generatore di corrente controllato in tensione)



Importantissimi nello studio dei circuiti elettronici!

CALCOLO DELLA RESISTENZA EQUIVALENTE CON GENERATORI PILOTATI

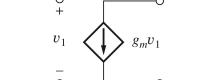
La resistenza equivalente sostituisce tutta la rete, una volta spenti tutti i generatori pilotati (sia di corrente che di tensione). Per calcolarla:

1. Rappresento il nuovo circuito senza generatori indipendenti;
2. Applico una tensione o una corrente di prova/test (V_t , I_t) / (V_t , I_t)

→ i due metodi sono intercambiabili. Tuttavia, nel caso in cui la resistenza risultata nulla significa che non si può impostare corrente, mentre se risulta infinita, non si può impostare tensione.

GENERATORI DIPENDENTI (O PILOTATI)

Voltage Controlled Current Source (VCCS/GCPT)

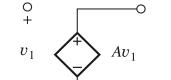


$$\begin{cases} i_1 = 0 \text{ (circ. aperto)} \\ i_2 = k_g v_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

→ rapp. controllata in tensione

Voltage Controlled Voltage Source (VCVS/GPPT)

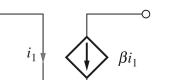


$$\begin{cases} i_1 = 0 \text{ (circ. aperto)} \\ V_2 = k_a v_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

→ 2a rapp. ibrida

Current Controlled Current Source (CCCS/GCPC)

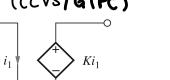


$$\begin{cases} V_4 = 0 \text{ (circ. aperto)} \\ i_2 = k_p i_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_4 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

→ 1a rapp. ibrida

Current Controlled Voltage Source (CCVS/GTPC)



$$\begin{cases} V_4 = 0 \text{ (circ. aperto)} \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_4 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

→ rapp. controllata in corrente

Current controlled voltage source (CCVS/GTPC)

$$\begin{cases} V_4 = 0 \text{ (circ. aperto)} \\ V_2 = k_r i_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_4 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

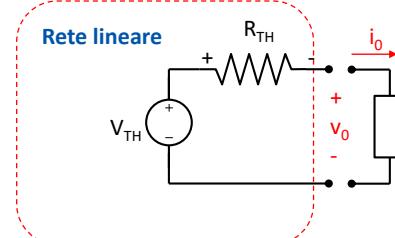
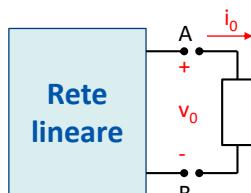
→ implementazione limitata nell'elettronica

VERIFICA NUMERICA DELLA RISOLUZIONE DI UN CIRCUITO:

1. Salvo poche eccezioni, i valori delle tensioni DC non possono superare le tensioni di alimentazione. L'ampiezza picco-picco di un segnale AC non può superare la differenza tra le due tensioni di alimentazione.
2. Le correnti nei rami del circuito possono variare da qualche microampere fino a qualche centinaio di milliampere.

Teorema di Thévenin

Una qualunque rete lineare vista da due nodi A e B può essere sostituita da un generatore di tensione V_{TH} in serie con la resistenza equivalente R_{TH} vista ai capi dei due nodi calcolata cortocircuitando i generatori di tensione (e aprendo eventuali generatori di corrente).

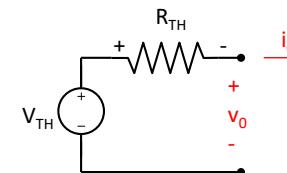


V_{TH} coincide con la differenza di potenziale tra i nodi A e B in assenza di carico esterno.

R_{TH} coincide con la resistenza calcolata tra i nodi A e B dopo aver sostituito tutti i generatori indipendenti di tensione con un cortocircuito e tutti i generatori indipendenti di corrente con un circuito aperto. In SERIE al generatore.

Sorgenti di tensione / corrente

Rappresentazione secondo Thévenin

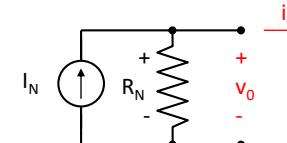


$$v_o = V_{TH} - R_{TH} \cdot i_o$$

V_{TH} = tensione di circuito aperto
o tensione a vuoto ($i_o = 0$)

Se $R_{TH} = 0$ abbiamo un generatore ideale di tensione

Rappresentazione secondo Norton



$$i_o = I_N - \frac{v_o}{R_N}$$

I_N = corrente di cortocircuito ($v_o = 0$)

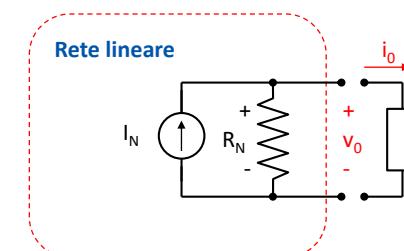
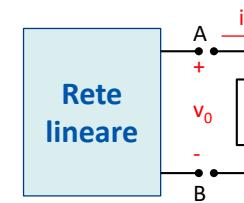
Se $R_{TH} = \infty$ abbiamo un generatore ideale di corrente

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

6

Teorema di Norton

Una qualunque rete lineare vista da due nodi A e B può essere sostituita da un generatore di corrente I_N in parallelo con la resistenza equivalente R_N vista ai capi dei due nodi calcolata cortocircuitando i generatori di tensione (e aprendo eventuali generatori di corrente).

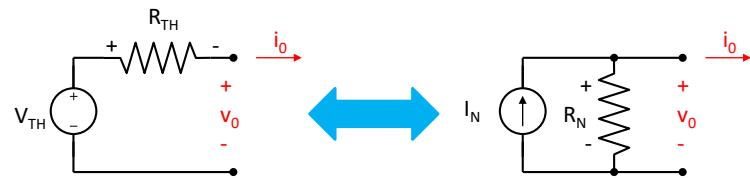


I_N coincide con la corrente di cortocircuito erogata dalla rete cortocircuitando i nodi A e B.
↳ a differenza di potenziale nullo

R_N coincide con la resistenza calcolata tra i nodi A e B dopo aver sostituito tutti i generatori indipendenti di tensione con un cortocircuito e tutti i generatori indipendenti di corrente con un circuito aperto. In PARALELO al generatore.

Equivalenza tra Thévenin e Norton

La rappresentazione secondo Thévenin e secondo Norton sono equivalenti



$$i_o = I_N - \frac{v_o}{R_N}$$

$$R_N \cdot i_o = R_N \cdot I_N - v_o$$

$$v_o = R_N \cdot I_N - R_N \cdot i_o$$

$$v_o = V_{TH} - R_{TH} \cdot i_o$$

$$V_{TH} = R_N \cdot I_N$$

$$R_{TH} = R_N = R_{EQ} = \frac{V_{TH}}{I_N}$$

La resistenza equivalente è la stessa nelle due rappresentazioni (la chiamiamo R_{EQ} senza distinzione).

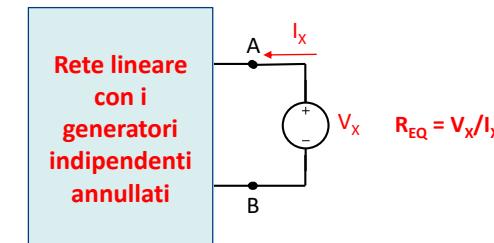
R_{EQ} è data dal rapporto tra tensione a vuoto e corrente di cortocircuito

L'equivalenza non sussiste se la resistenza equivalente è nulla o infinita!!

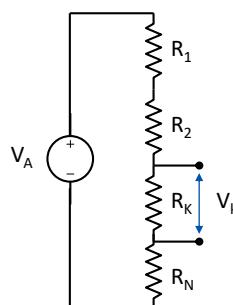
Calcolo della resistenza equivalente

Il calcolo della Resistenza equivalente ai morsetti:

- Banale se una volta annullati i generatori indipendenti si ottiene rete di sole resistenze (da sommare in serie / parallelo)
- Se invece la rete contiene dei generatori il calcolo potrebbe non essere ovvio, e allora ho due possibilità: (i generatori pilotati non possono essere spenti)
 1. Calcolo V_{TH} e I_N e $R_{EQ} = V_{TH}/I_N$ (devo però risolvere due circuiti)
 2. Applico un generatore V_x ai morsetti e Calcolo I_x (risolvo un solo circuito)



Partitore di tensione

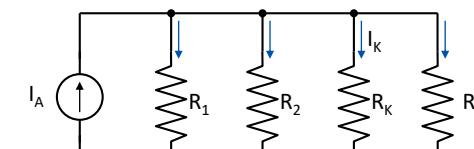
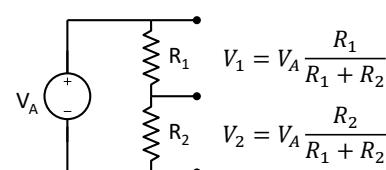


V_A = tensione applicata alla serie di N resistenze R_1, R_2, \dots, R_N

V_K = differenza di potenziale ai capi della resistenza R_K ($K = 1, 2, \dots, N$)

$$V_K = V_A \frac{R_K}{\sum_{i=1}^N R_i}$$

NB: la relazione utilizzata tramite il partitore di tensione può essere applicata solo quando la corrente nelle due resistenze è la stessa

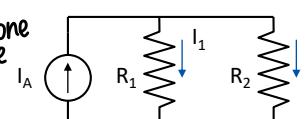


I_A = corrente totale che attraversa le N resistenze in parallelo R_1, R_2, \dots, R_N

I_K = corrente attraverso la resistenza R_K ($K = 1, 2, \dots, N$)

NB: la relazione utilizzata tramite il partitore di corrente può essere applicata solo quando la tensione ai capi delle due resistenze è la stessa

$$I_K = I_A \cdot \frac{\frac{1}{R_K}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}}$$

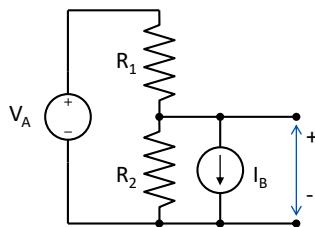


$$I_1 = I_A \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = I_A \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I_A \cdot \frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = I_A \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

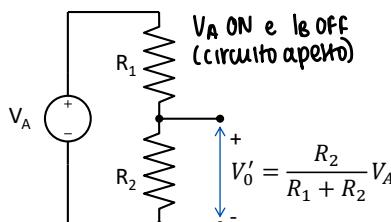
Sovrapposizione degli effetti

Esempio: circuito con generatori V_A e I_B



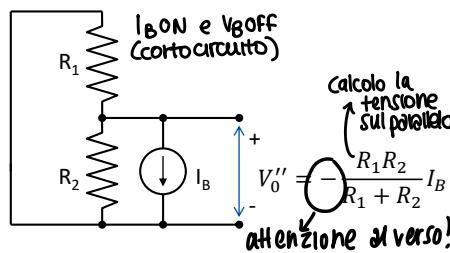
$$V_0 = V'_0 + V''_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_B$$

Solo V_A ($I_B = 0$):



V_A ON e I_B OFF
(circuit aperto)

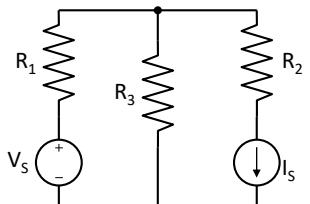
Solo I_B ($V_A=0$):



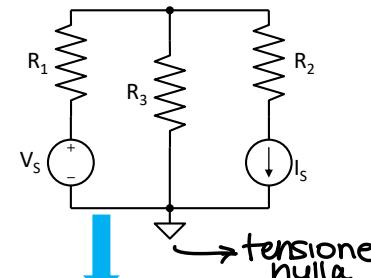
I_B ON e $V_{B\text{OFF}}$
(cortocircuito)

Rappresentazione "elettronica" di un circuito (notazione semplificata)

Consideriamo il seguente circuito



Identifichiamo un nodo di riferimento



Il nodo di riferimento (che chiameremo sempre massa) può essere ripetuto più volte, ma è sempre e solo uno!
(divisione grafica dei nodi)

Notazione usata SEMPRE negli schemi dei circuiti elettronici!

Notazione: riferimento, massa e terra



■ Potenziale di riferimento a cui sono riferite tutte le tensioni dei nodi. Il suo potenziale è 0V.



■ Simbolo di "massa". In molti apparati elettrici il nodo di riferimento viene connesso al telaio metallico (o massa) per questioni di sicurezza



■ Simbolo di "messa a terra".

◆ Per motivi di sicurezza, spesso la massa di un apparato elettronico viene collegata a un conduttore infisso nel terreno, detto messa a terra.

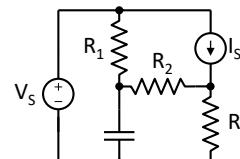
Spesso il nodo di riferimento coincide con la massa

◆ Il potenziale della messa a terra è praticamente indipendente dalle correnti che vengono iniettate o prelevate da essa da normali apparati elettronici domestici o a bassa potenza, quindi molto stabile.

ATTENZIONE: spesso negli schemi elettronici i simboli del nodo di riferimento, della massa e della messa a terra vengono usati impropriamente in modo intercambiabile

Rappresentazione "elettronica" di un circuito

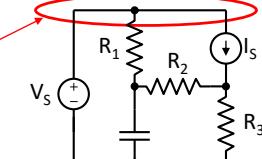
Consideriamo il seguente circuito



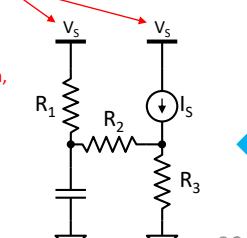
Identifichiamo un nodo di riferimento



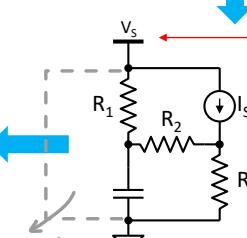
1) Questo nodo si trova ad un potenziale fisso rispetto al riferimento. La tensione è fissata a V_s dal generatore di tensione



3) Come per la massa, anche il nodo a potenziale costante (V_s) può essere replicato per comodità, ma il simbolo si riferisce sempre allo stesso nodo. In altre parole: indica una connessione al terminale positivo del generatore V_s (il cui terminale negativo è a massa)



2) Indichiamo con questo simbolo la tensione del nodo di uscita del generatore ideale, il cui potenziale è fissato.



3) maglia di KIRCHHOFF

Notazione usata SEMPRE negli schemi dei circuiti elettronici!

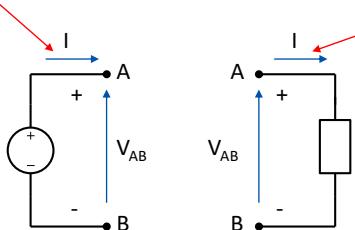
Potenza erogata e assorbita

$I > 0 \rightarrow$ uscente dal terminale + del generatore

$I < 0 \rightarrow$ entrante nel terminale + del generatore

$I > 0 \rightarrow$ entrante dal terminale + dell'utilizzatore

$I < 0 \rightarrow$ uscente dal terminale + dell'utilizzatore



$$\text{Tensione} = \text{differenza di potenziale}, V_{AB} = V_A - V_B$$

$$\text{Potenza: } P = V_{AB} \cdot I$$

Supponendo $V_{AB} > 0$:

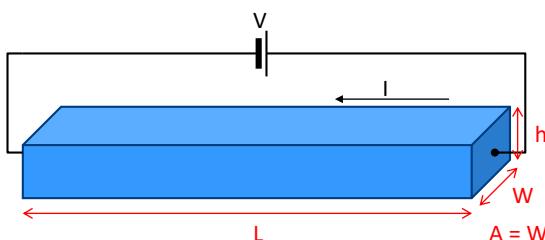
Se $I > 0 \rightarrow P > 0$: Per il generatore significa che sta erogando potenza

Per l'utilizzatore significa che sta assorbendo (consumando) potenza

Se $I < 0 \rightarrow P < 0$: Per il generatore significa che sta assorbendo potenza

Per l'utilizzatore significa che sta erogando potenza

Conduttori, isolanti, semiconduttori



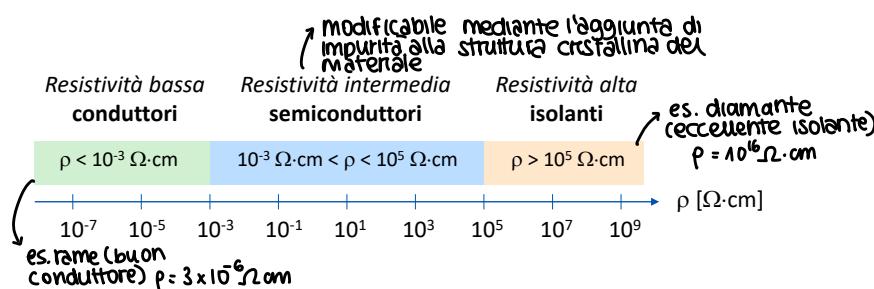
Legge di ohm:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{L \cdot \rho}{A}$$

resistività
Caratteristica
fisico-chimica
del materiale

In base alla resistività (ρ) i materiali si classificano in **isolanti, conduttori o semiconduttori**



Semiconduttori

- Materiali semiconduttori: elettroni, lacune
- Drogaggio e semiconduttori drogati: equilibrio termodinamico e legge di azione di massa
- Corrente elettrica: deriva e diffusione
- Gradiente di potenziale e di concentrazione di portatori

Materiali semiconduttori

Ci sono due tipi di semiconduttori:

Si e Ge hanno un comportamento simile (stessa configurazione di valenza)

■ Semiconduttore a elemento singolo: (semiconduttore perfetto/elementare)

- ◆ Formato da un solo elemento
- ◆ Esempi: silicio, germanio (IV gruppo)

■ Semiconduttore composto:

- ◆ Formato da due elementi: tipicamente da III e IV
- ◆ Esempi: arseniuro di gallio (GaAs), fosfuro di indio (InP), nitruro di gallio (GaN), tellururo di cadmio (CdTe), seleniuro di cadmio (CdSe), ...

- Un semiconduttore (a elemento singolo o composto) senza nessuna impurità è detto **semiconduttore intrinseco**

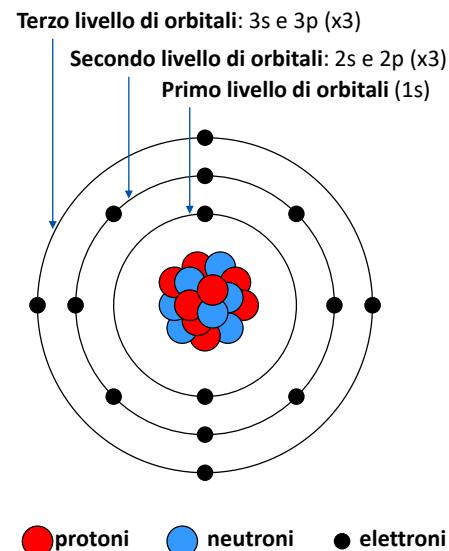
I materiali che lo compongono non presentano difetti o impurità

III	IV	V	VI
5 B Boro	6 C Carbonio	7 N Azoto	8 O Ossigeno
13 Al Alluminio	14 Si Silicio	15 P Fosforo	16 S Zolfo
30 Zn Zincio	31 Ga Gallio	32 Ge Germanio	33 As Arsenico
48 Cd Cadmio	49 In Gallio	50 Sn Germanio	51 Sb Arsenico
80 Hg Mercurio	81 Ti Titanio	82 Pb Piombo	83 Bi Bismuto
			84 Po Polonio

Il più importante e più usato di tutti i semiconduttori è il silicio (la Terra è fatta essenzialmente di Silicio) → il processo di ossidazione termica del Silicio porta alla formazione di un ossido stabile

Struttura dell'atomo di silicio

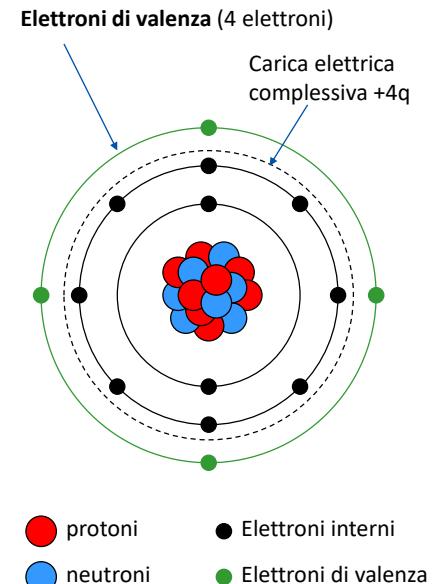
- Il silicio ha un nucleo con 14 protoni e 14 neutroni
- I 14 elettroni sono disposti in 7 orbitali raggruppati in tre livelli:
 - 2 nel livello più interno (1s) che ne può contenere massimo 2
 - 8 nel livello intermedio (2s e 2p) che ne può contenere massimo 8
 - 4 nel livello più esterno che ne può contenere massimo 8
- Ciascun orbitale è caratterizzato da un **livello di energia** che rappresenta l'energia che è necessario fornire all'elettrone per strapparlo dall'atomo e renderlo libero.
- Più l'orbitale è vicino al nucleo, maggiore è la sua energia.



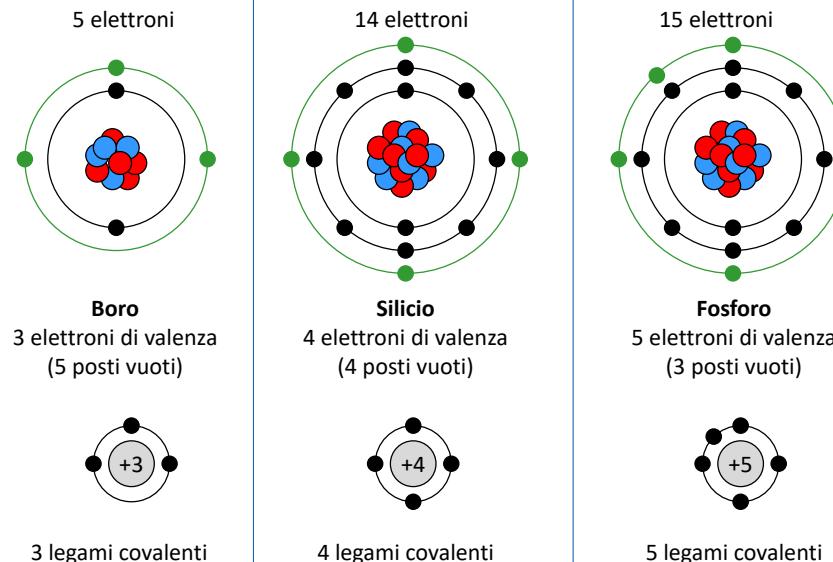
N.B.: aggiungendo una piccola percentuale di germanio (10%) al silicio, si ottiene una lega silicio-germanio (SiGe) con cui è possibile realizzare dispositivi compatibili con la tecnologia del Si

Elettroni di valenza

- Gli elettroni dello strato più esterno sono detti **elettroni di valenza**
- Gli elettroni di valenza sono l'**interfaccia** con il mondo esterno e determinano le proprietà chimo-fisiche dell'atomo
- Se ipoteticamente togliamo i 4 elettroni di valenza al silicio, rimane uno ione con carica netta $+4q$ (q = carica elementare)
- Il numero di elettroni di valenza indica il massimo numero di legami che un atomo può fare con altri atomi

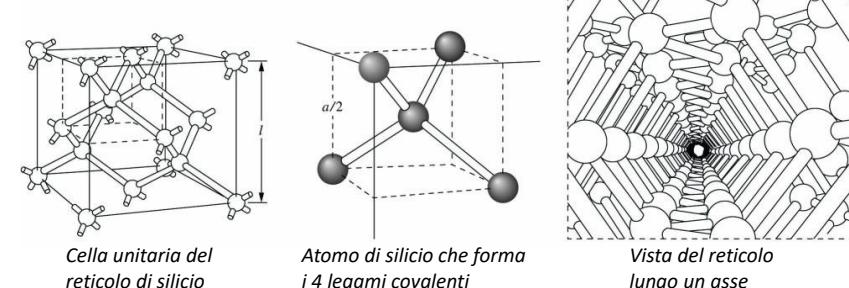


Elettroni di valenza

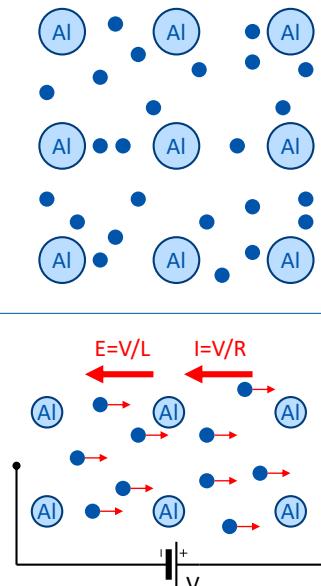


Reticolo cristallino del silicio

- Nei solidi, gli atomi formano un reticolo in cui ciascun atomo è legato con quelli vicini da legami chimici.
- Nel reticolo di silicio ciascun atomo forma **4 legami covalenti con altrettanti atomi di silicio**
- In ciascun legame covalente i due atomi di silicio condividono un elettrone ciascuno (**2 elettroni per legame**)
- I quattro legami sono disposti in modo **tetraedrico (solido regolare)**
- La struttura è **periodica**



Reticolo cristallino dei metalli



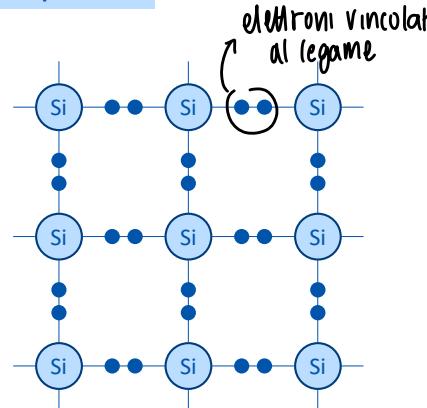
- Nei conduttori (metalli), gli elettroni di valenza sono condivisi tra molti atomi (**legame metallico**)
- Gli elettroni possono muoversi liberamente in tutto il reticolo (nuova elettronica)
- Se si applica una piccola differenza di potenziale ai capi del metallo, gli elettroni si muovono e si genera una corrente elettrica elevata → conducibilità data dal legame metallico

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

9

Reticolo cristallino di un semiconduttore

Esempio: Silicio



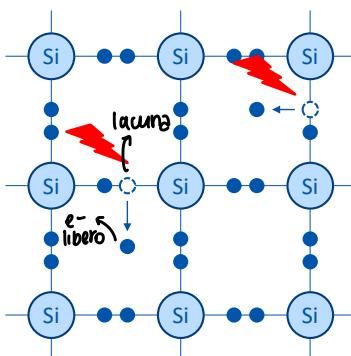
(Rappresentazione bidimensionale del reticolo tridimensionale con struttura tetraedrica)
→ nessun elettrone è disponibile per il processo di conduzione. Il materiale si comporta come un ISOLANTE

- I 4 elettroni di valenza sono condivisi con i 4 atomi vicini (4 legami covalenti)
- Ogni atomo completa tutti i suoi orbitali esterni
- A T=0K, tutti gli elettroni si trovano nel loro livello base (legati). Nessuno è libero.
- In un semiconduttore intrinseco, se si applica una differenza di potenziale (a 0K) non si ha corrente elettrica.

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

10

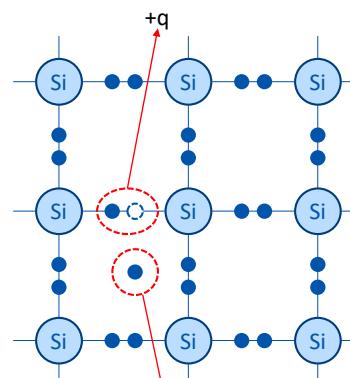
Cristallo di silicio (a T > 0K)



- Fornendo un energia adeguata è possibile rompere un legame covalente, creando un elettrone "libero" → si crea una **lacuna**
- Il livello energetico dell'elettrone libero è chiamato **banda di conduzione**
- Il livello energetico dell'elettrone legato è chiamato **banda di valenza**
- L'energia minima necessaria a rompere un legame covalente è data dalla differenza tra il livello energetico di conduzione e quello di valenza ed è un parametro caratteristico del semiconduttore.
 - ◆ Nel silicio questo valore di energia, detto "ampiezza della banda proibita" o "**Energy Gap**" è pari a 1.124 eV
 - ◆ Nel germanio 0.66eV

L'energia necessaria per rompere i vari legami può essere fornita, ad esempio, dalla temperatura

NB: conduttori migliori (come il Rame) hanno Energy Gap quasi nullo.



Principio di Heisenberg

→ potrebbe essere che gli elettroni degli altri legami coprano la rotura degli altri → trasferimento di carica → si muove la lacuna

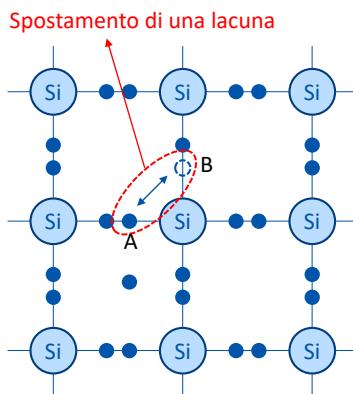
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

11

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

12

Cristallo di silicio (a T > 0K)



- Dopo che si è formata una lacuna (*nella posizione A*), la vacanza può essere colmata da un elettrone di valenza di un atomo vicino (*posizione B*).
- Tale atomo, spostandosi da B a A, lascia dietro di se una lacuna.
- Concettualmente è come pensare che la lacuna si sia spostata dalla posizione A alla posizione B
- La lacuna si comporta come una particella libera con carica +q
- Elettroni e lacune sono detti **portatori di carica**:
 - ◆ Negativa per gli elettroni
 - ◆ Positiva per le lacune

La densità degli elettroni di conduzione (e^- -liberi) è n (elettroni/ cm^3), e nel caso di un semiconduttore intrinseco è pari alla concentrazione intrinseca: $n = n_i$ (non contiene impurità)

Quando l'elettrone si allontana dall'atomo di Silicio, lascia nel cristallino una lacuna caratterizzata da una carica (opposta) +q. Un elettrone appartenente a un legame covalente adiacente può occupare il posto lasciato libero dal primo elettrone, creando una lacuna in un punto diverso del semiconduttore → la lacuna può muoversi all'interno del cristallo, dando luogo, in un certo senso, ad un moto di carica +q.

La concentrazione di lacune è indicata con il simbolo p (lacune/ cm^3).

La rottura di un legame covalente determina la formazione di due particelle cariche: una lacuna e un elettrone. Nel caso del Silicio intrinseco $n = n_i = p \rightarrow pn = n_i^2$, equazione conosciuta come LEGGE DELL'AZIONE DI MASSA. Può essere utilizzata per descrivere il prodotto pn per un conduttore solo se questo si trova in condizioni di equilibrio termodinamico.

All'equilibrio del materiale le proprietà meccaniche dipendono solo dalla temperatura. Se il semiconduttore è sottoposto a sollecitazioni esterne, come l'esposizione a una radiazione luminosa, l'applicazione di una tensione o di una corrente, l'espressione $np = n_i^2$ perde validità.

Concentrazione di elettroni e lacune

- Convenzionalmente:
 - ◆ la concentrazione di elettroni liberi si indica con n (**canche negative**)
 - ◆ quella delle lacune si indica con p . (**cariche positive**)
- In un semiconduttore intrinseco (senza impurità) ad ogni elettrone DEVE corrispondere una lacuna. Quindi:

$$n = p = n_i \rightarrow np = n_i^2$$

n_i è detta concentrazione di portatori intrinseci (cm^{-3})

L'energia necessaria a liberare un elettrone è indicata con E_G (Energy Gap) e coincide con la differenza di energia tra il livello di valenza e il primo livello energetico libero degli orbitali superiori.

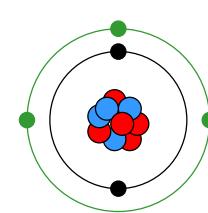
- Il numero di elettroni liberi dipende dalla temperatura e dal valore di Energy Gap:

$$n_i = BT^3 \exp\left(-\frac{E_G}{kT}\right) \quad (B = \text{costante}, E_G = \text{Energy Gap})$$

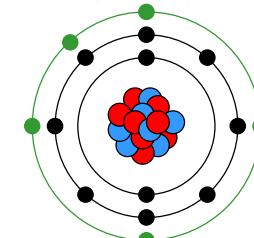
- ◆ Maggiore è la temperatura, maggiore è l'energia termica, maggiore è la concentrazione di elettroni e lacune libere.
- ◆ Nel silicio, a $T = 300\text{K}$, $n_i = 1.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ (per il Si, $B = 1.08 \times 10^{34} \text{ K}^{-34} \text{ cm}^{-6}$)
- ◆ N.B. Nel reticolo di silicio ci sono più di 10^{20} atomi/ cm^3 ($5 \cdot 10^{20}$ elettroni/ cm^3)
- ◆ A temperatura ambiente solo un elettrone su 35 miliardi è libero

Semiconduttori drogati

- Un semiconduttore si dice **drogato** o **estrinseco**, se agli atomi costituenti il cristallo vengono aggiunti atomi di altri elementi in piccole concentrazioni.
- Il meccanismo con cui ciò viene fatto è chiamato **drogaggio**.
- Il drogaggio non altera la struttura del reticolo, ma influenza molto le proprietà elettriche.
- Esistono due tipi di drogaggio per il silicio:
 - ◆ Atomi del III gruppo (ad esempio il Boro) detto drogaggio di tipo p
 - ◆ Atomi del V gruppo (ad esempio il fosforo) detto drogaggio di tipo n

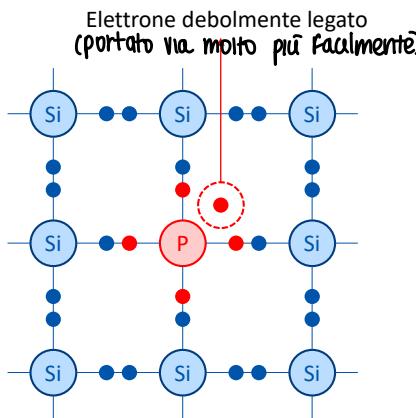


Boro (3 elettroni di valenza)



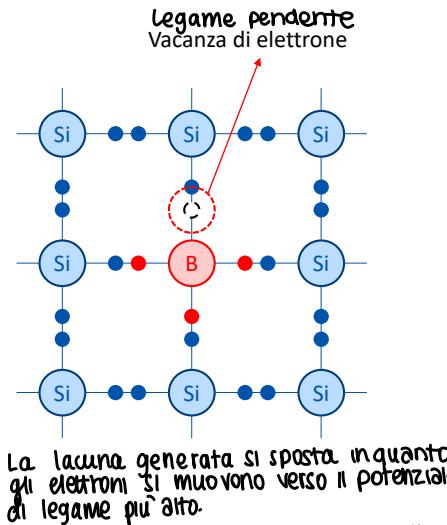
Fosforo (5 elettroni di valenza)

Drogaggio con atomi del V gruppo (tipo n)



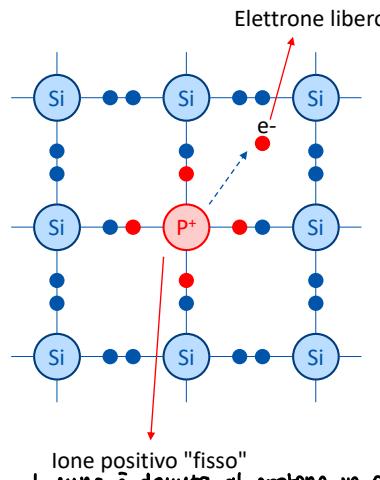
- Un atomo del V gruppo (P, As, Sb) ha 5 elettronini di valenza.
- Se inserito nel reticolo di silicio in piccole quantità, condivide 4 elettronini su 5.
- Il quinto elettrone non si lega e rimane "disponibile" come elettrone libero.
- Anche a bassa temperatura l'energia termica è sufficiente a staccare l'elettrone dall'atomo di appartenenza.
- A T = 300K tutti gli atomi droganti hanno perso il loro elettrone.

Drogaggio con atomi del III gruppo (tipo p)



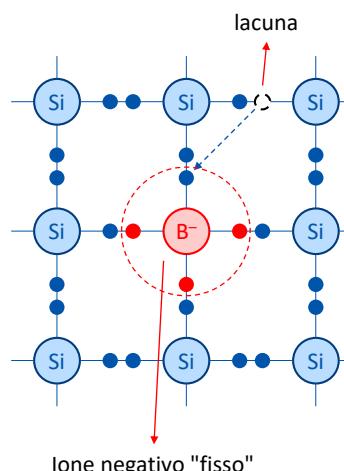
- Un atomo del III gruppo (B, Al, Ga) ha 3 elettronini di valenza, e può fare al massimo 3 legami
- Se inserito nel reticolo di silicio in piccole quantità, condivide tutti 3 gli elettronini.
- Uno dei 4 atomi di silicio vicini rimane con un solo elettrone, e si forma una lacuna (= assenza di elettrone in un legame)
- La vacanza di elettrone può ricevere un elettrone da un legame rompendo un legame. Perciò gli elementi del III gruppo sono detti **accettori**.

Drogaggio con atomi del V gruppo (tipo n)



- Quando l'atomo perde il suo elettrone rimane carico positivamente e forma una carica fissa in un vertice del reticolo
- Per ogni ione positivo esiste un elettrone (carica negativa) libero nel reticolo. La neutralità della carica è mantenuta.
- Gli elementi del V gruppo aumentano la concentrazione di elettronini liberi (senza introdurre lacune). Per questo sono chiamati **donatori**.
- Il drogaggio con elementi del V gruppo è detto **drogaggio di tipo n** → aumentano le canche negative

Drogaggio con atomi del III gruppo (tipo p)



- Quando l'atomo cattura un elettrone assume carica negativa formando una carica fissa in un vertice del reticolo
- Ogni ione negativo che si forma, lascia una lacuna libera (carica positiva). La neutralità della carica è mantenuta.
- Gli elementi del III gruppo aumentano la concentrazione di lacune (senza introdurre elettronini).
- Il drogaggio con elementi del III gruppo è detto **drogaggio di tipo p**.
- A T = 300K, praticamente tutti i droganti hanno catturato un elettrone.

Equilibrio termodinamico

- Un semiconduttore posto a temperatura costante T e senza ulteriori sollecitazione esterne (illuminazione, potenziale, ecc.) è detto in equilibrio.
- Un semiconduttore in equilibrio ha un numero di elettroni e lacune costante nel tempo.
- In un semiconduttore in equilibrio avvengono due fenomeni che si bilanciano, detti:
 - ◆ **Generazione:** rottura di legami → formazione di una coppia elettrone-lacuna ($e-h$) (*electron - hole*)
 - ◆ **Ricombinazione:** processo in cui un elettrone libero ritorna in un orbitale di valenza libero, "ricongiungendosi" con una lacuna.
- Questa condizione è definita anche **equilibrio termodinamico**

Equilibrio termodinamico

Ricombinazione

- La ricombinazione è il processo in cui un legame precedentemente rotto, si ripristina: l'elettrone "torna" al livello di valenza, occupando un "posto libero", cioè una lacuna.
- La ricombinazione implica la riduzione del numero di elettroni (n) e di lacune (p) della stessa quantità.
- La velocità del processo di ricombinazione (o **tasso di ricombinazione**, R) si misura in numero di elettroni che si ricombinano con una lacuna per unità di tempo e volume [$\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$].
- Il processo di ricombinazione richiede che un elettrone "incontri una lacuna" → R è proporzionale a n e a p :
$$R = n \cdot p \cdot f_2(T)$$

Equilibrio termodinamico

Generazione

- La rottura di un legame Si-Si implica sempre la generazione di un elettrone (che si libera dal legame) e di una lacuna (assenza dell'elettrone dal legame appena rotto).
- La velocità del processo di generazione (o **tasso di generazione**, G) si misura in numero di coppie $e-h$ generate per unità di tempo e volume [$\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$]
- In condizioni di equilibrio, la temperatura fornisce l'energia necessaria per rompere il legame:
- L'energia (o potenziale) termico dipende linearmente dalla temperatura assoluta T e vale kT ($k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ = costante di Boltzmann)
- La velocità di generazione è una funzione crescente della temperatura:

$$G = f_1(T)$$

La legge di azione di massa

- In condizioni di equilibrio il tasso di generazione **DEVE essere UGUALE** al tasso di ricombinazione.

$$\begin{aligned} f_1(T) &= \underbrace{n \cdot p \cdot f_2(T)}_{R} \\ n \cdot p &= \frac{f_1(T)}{f_2(T)} \end{aligned}$$

(valida per un semiconduttore sia intrinseco sia estrinseco)

- In un semiconduttore intrinseco $n=p=n_i$, quindi:

$$\frac{f_1(T)}{f_2(T)} = n \cdot p = n_i^2$$

describe quanto vale il rapporto, indipendentemente dalla quantità del dosaggio

Legge di azione di massa

$$n \cdot p = n_i^2$$

Semiconduttore di tipo n → tramite il drogaggio si può fare in modo che la resistività sia determinata dalla concentrazione di elettroni oppure di lacune

Numero di portatori in un semiconduttore drogato

- In un semiconduttore di tipo n, introducendo una quantità di drogante pari a N_D : si può dimostrare che aumenta la ricombinazione
 - Il numero di elettroni aumenta di N_D (che si aggiungono a quelli preesistenti)
 - Si creano N_D ioni fissi nel reticolo con carica +q

- In un semiconduttore in equilibrio la carica elettrica totale deve essere neutra:

$$-qn + qp + qN_D = 0$$

↓
impurità ionizzate che hanno inserito

Legge di azione di massa:
 $n \cdot p = n_i^2$

$$n - \frac{n_i^2}{n} - N_D = 0 \quad \rightarrow \quad n^2 - N_D n - n_i^2 = 0$$

$$n = \frac{N_D \pm \sqrt{N_D^2 + 4n_i^2}}{2} = N_D \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_D^2}}}{2}$$

termine molto piccolo trascurabile
Se $N_D \gg n_i$

$$n \approx N_D$$

Semiconduttore di tipo n

Attenzione: $n \gg p$

Solo la soluzione positiva è accettabile (quella con il +)

Principio di compensazione del drogaggio

Cosa succede se usiamo contemporaneamente N_D donatori e N_A accettori?

- Ogni donatore libera un elettrone e rimane carico positivamente.
- Ogni accettore libera una lacuna e rimane carico negativamente.

In un semiconduttore drogato la conc. di elettroni è diversa da quella delle lacune
Elettroni e lacune devono rispettare la legge di azione di massa:

$$n \cdot p = n_i^2 \rightarrow \text{relazione valida anche per un semiconduttore drogato all'equilibrio fermodinamico}$$

La carica totale del sistema deve essere nulla:
 $-qn + qp + qN_D - qN_A = 0$

Se $N_D > N_A$

$$n - \frac{n_i^2}{n} - (N_D - N_A) = 0$$

Si comporta come un semiconduttore di tipo n con drogaggio $N'_D = N_D - N_A$

Se $N_D - N_A \gg n_i$

$$n \approx N_D - N_A = N_D$$

$$p = \frac{n_i^2}{N_D - N_A}$$

Se $N_D < N_A$

$$-\frac{n_i^2}{p} + p - (N_A - N_D) = 0$$

Si comporta come un semiconduttore di tipo p con drogaggio $N'_A = N_A - N_D$

Se $N_A - N_D \gg n_i$

$$p \approx N_A - N_D = N_A$$

$$n = \frac{n_i^2}{N_A - N_D}$$

Semiconduttore di tipo p

- In un semiconduttore di tipo p, introducendo una quantità di drogante pari a N_A :
 - Il numero di lacune aumenta di N_A (che si aggiungono a quelle preesistenti)
 - Si creano N_A ioni fissi nel reticolo con carica -q
- In un semiconduttore in equilibrio la carica elettrica totale deve essere neutra:

$$N_A = \text{atomi accettori (atomi/cm}^3\text{)} \quad -qn + qp - qN_A = 0$$

$$N_D = \text{atomi donatori (atomi/cm}^3\text{)}$$

p (conc. di carica fissa (<0))

Legge di azione di massa:
 $n \cdot p = n_i^2$

$$-\frac{n_i^2}{p} + p - N_A = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 - N_A p - n_i^2 = 0$$

$$p = \frac{N_A \pm \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{2} = N_A \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}}}{2}$$

Se $N_A \gg n_i$

$$p \approx N_A$$

Semiconduttore di tipo p

Attenzione: $p \gg n$

Portatori maggioritari e minoritari

I portatori maggioritari sono responsabili del funzionamento dei transitori a effetto di campo e determinano la resistività del conduttore

- In un semiconduttore di tipo n in equilibrio:
 - La concentrazione di elettroni è elevata ed è definita dalla differenza $N_D - N_A$.
 - La concentrazione di elettroni è sempre maggiore di quella di lacune
 - Gli elettroni sono definiti **portatori maggioritari**, le lacune sono i **portatori minoritari**.
- In un semiconduttore di tipo p in equilibrio:
 - La concentrazione di lacune è elevata ed è definita dalla differenza $N_A - N_D$.
 - La concentrazione di lacune è sempre maggiore di quella di elettroni
 - Le lacune sono i **portatori maggioritari**, gli elettroni sono i **portatori minoritari**.
- I livelli di drogaggio sono tipicamente tra 10^{14} e 10^{19}cm^{-3}
- La densità di atomi nel silicio è dell'ordine di 10^{22}cm^{-3} .

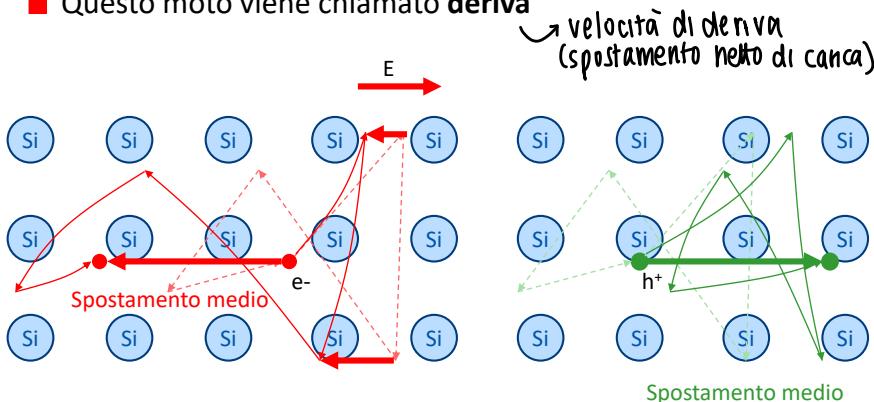
Corrente elettrica in un semiconduttore

- Quando i portatori di carica si muovono si legge una corrente elettrica.
- I meccanismi fisici che inducono lo spostamento di un portatore sono:
 - ◆ La **temperatura**: la temperatura fornisce energia cinetica ai portatori (come le molecole di un gas) e causa uno spostamento casuale a media nulla.
 - ◆ Il **campo elettrico**: sposta i portatori poiché sono elettricamente carichi (e^- in senso opposto, lacune stesso verso)
 - ◆ Il **gradiente di concentrazione (principio di diffusione)**: induce uno spostamento da un punto a maggior concentrazione a un punto a più bassa concentrazione *come per i gas*



Trasporto di carica nei semiconduttori

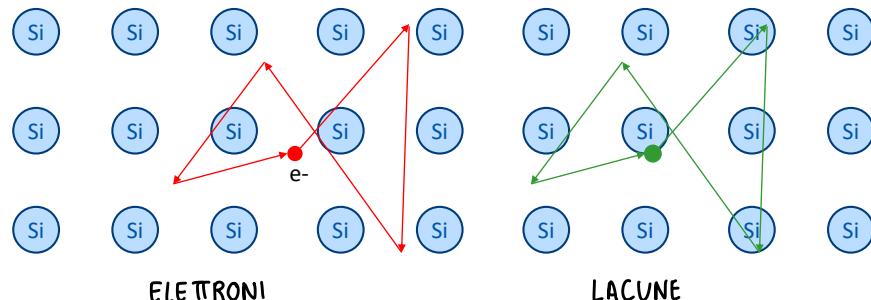
- In presenza di un campo elettrico esterno al moto casuale si sovrappone un moto ordinato in verso opposto al campo elettrico per l'elettrone (avendo carica negativa) e nello stesso verso del campo per le lacune (avendo carica positiva).
- Questo moto viene chiamato **deriva**



Trasporto di carica nei semiconduttori

- In assenza di potenziale esterno, elettroni e lacune in un semiconduttore in equilibrio si muovono in modo casuale in tutte le direzioni a causa dell'agitazione termica. **Lo spostamento medio è nullo.**

- Lo stesso accade per le lacune



Mobilità dei portatori

- La velocità media associata allo spostamento per deriva è detta **velocità di deriva** (sempre più maggiore, se aumenta E)
- In prima approssimazione, se il campo elettrico non è molto intenso, la velocità di deriva è proporzionale al campo elettrico:
 - ◆ $v_n = -\mu_n \cdot E$ (il segno meno è perché il verso è opposto al campo)
 - ◆ $v_p = \mu_p \cdot E$
- La costante di proporzionalità (μ_n e μ_p a seconda del portatore) è detta **mobilità** e si misura in cm^2/Vs .
- Sperimentalmente si osserva che la mobilità delle lacune è inferiore a quella degli elettroni ($\mu_n \approx 3\mu_p$). *nel Silicio*
- Se il campo elettrico è molto elevato la relazione lineare non è più valida → si osserva che per $E \rightarrow \infty$, la velocità si assesta ad un certo valore massimo

CORRENTE DI DERIVA

La resistività ρ , oppure la conducibilità σ (definita come il reciproco della resistività) è un parametro specifico del materiale, che caratterizza il flusso di corrente che si verifica nel materiale stesso in seguito all'applicazione di un campo elettrico.

La densità della corrente di deriva j è definita da $j = Qv \text{ (C/cm}^3\text{)(cm/s)} = A/\text{cm}^2$ dove:
 - j = densità di corrente → carica espressa in Coulomb che attraversa una sezione di area unitaria;
 - Q = densità di carica → contenuta nel volume unitario
 - v = velocità delle cariche dovuta all'applicazione del campo elettrico

In presenza di campo elettrico le particelle caricate si muovono (moto di deriva o di traslazamento). Le cariche positive si muovono nello stesso verso del campo elettrico mentre quelle negative in verso opposto.

Per bassi valori del campo, la velocità di deriva v (cm/s) è proporzionale al campo elettrico E (V/cm). La costante di proporzionalità è detta mobilità μ :

$$v_n = -\mu_n E \quad \text{e} \quad v_p = \mu_p E$$

dove v_n = velocità di deriva degli e-

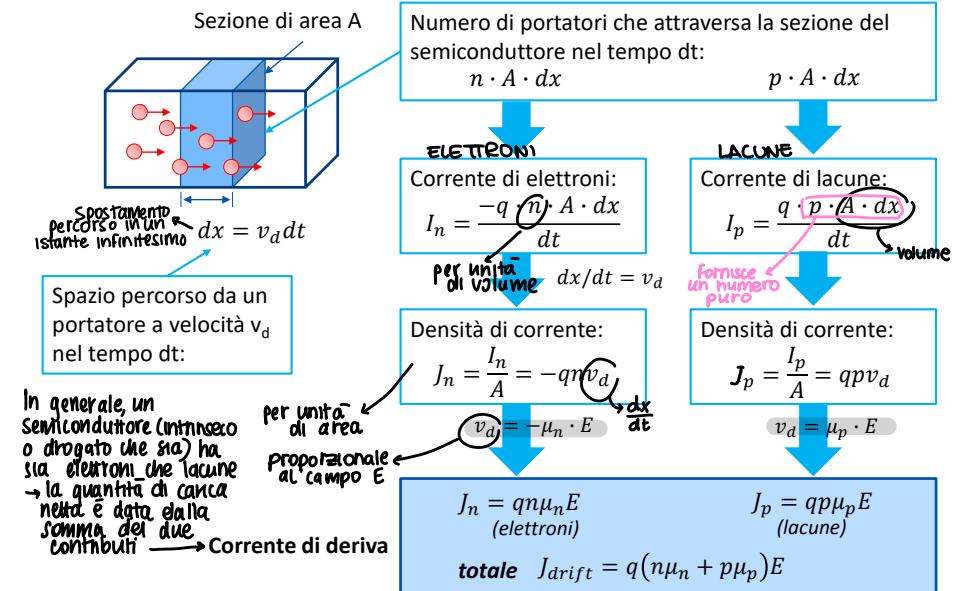
v_p = velocità di deriva delle lacune

μ_n = mobilità degli elettroni → $1420 \text{ cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ nel Silicio intrinseco;

μ_p = mobilità delle lacune → $470 \text{ cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$ nel Silicio intrinseco.

Possiamo aspettarci che la mobilità delle lacune sia inferiore, in quanto queste sono vincolate a muoversi tra i legami covalenti, mentre gli e- sono liberi di muoversi attraverso il cristallo.

Corrente di deriva (drift)



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

37

SATURAZIONE DELLA VELOCITÀ DI DERIVA

La velocità dei portatori non può essere arbitrariamente elevata, e non può superare la velocità della luce.

Nel Silicio, la relazione lineare tra velocità e campo elettrico risulta valida solo per valori del campo elettrico inferiori a circa 5000 V/cm ($0.5 \text{ V}/\mu\text{m}$).

Per valori superiori la velocità di deriva dei portatori tende a saturare. Per valori del campo elettrico superiori a circa $3 \times 10^4 \text{ V/cm}$, la velocità dei portatori del Silicio raggiunge un valore costante detto velocità di saturazione v_{SAT} .

Per elettroni e lacune del silicio, v_{SAT} è circa 10^7 cm/s .

MOBILITÀ E RESISTIVITÀ NEI SEMICONDUTTORI ESTRINSECI

La presenza di atomi di impurità in un semiconduttore provoca la riduzione della mobilità dei portatori rispetto ai valori relativi al semiconduttore intrinseco.

Gli atomi delle impurità presentano dimensioni diverse da quelle degli atomi di Silicio; pertanto, quando atomi di Silicio sono sostituiti da atomi di impurità, la perfetta periodicità del reticolo cristallino viene alterata.

Gli atomi delle impurità, inoltre, sono ionizzati, e interagiscono con gli elettroni e le lacune modificandone la traiettoria quando i portatori si trovano in prossimità dell'impurità.

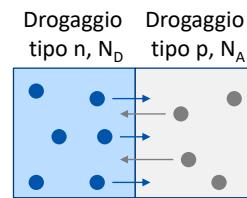
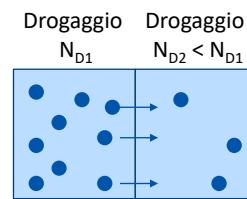
Entrambi i fenomeni determinano una riduzione della mobilità dei portatori.

La mobilità in un semiconduttore molto drogato può risultare anche dieci volte inferiore al valore assunto a basse concentrazioni di drogaggio. D'altra parte, l'incremento del drogaggio determina un incremento della concentrazione di portatori. Questo effetto prevale.

La conducibilità del semiconduttore aumenta all'aumentare del droggaggio.

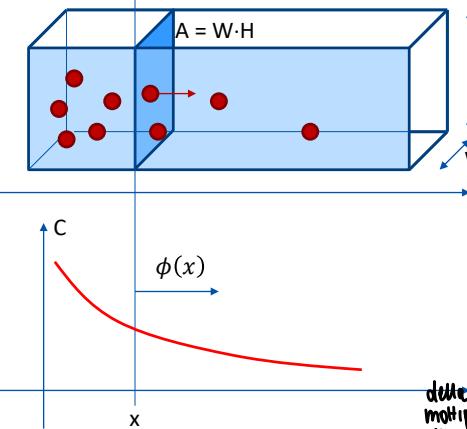
Corrente di diffusione

- Nei dispositivi elettronici, è abbastanza frequente usare gradienti di concentrazione di portatori:
 - ◆ variando la concentrazione del drogante e/o
 - ◆ il tipo di drogante all'interno di una parte del semiconduttore
- Ogni volta che la concentrazione di portatori non è costante si da origine ad una corrente di diffusione provocata dalla naturale tendenza dei portatori a spostarsi dalle zone a più alta concentrazione verso quelle a bassa concentrazione.
- Il principio di diffusione è lo stesso che si ha in un gas che si propaga in una stanza diffondendo in tutto il volume, finché non si raggiunge l'uniformità.



La legge di diffusione

Dove c'è spostamento di carica, c'è corrente elettrica



■ La diffusione è un fenomeno che si applica a tutte le particelle in natura purché siano libere di muoversi.

■ Consideriamo un contenitore rettangolare e fissiamo un piano al suo interno. Detta $A = WH$ la sua sezione, definiamo flusso il numero di particelle che attraversa la sezione A per unità di tempo e superficie.

■ Il flusso si misura in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ e superficie

■ Il principio di diffusione afferma che il flusso è proporzionale al gradiente di concentrazione:

$$\phi(x) = -D \frac{dC}{dx}(x)$$

di qualsiasi tipo

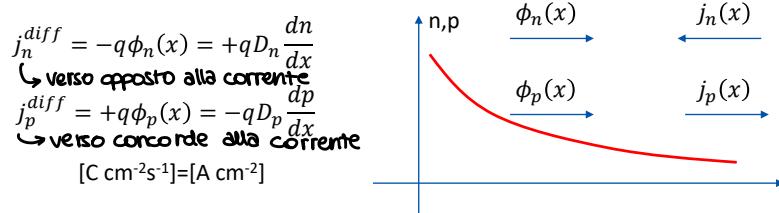
deriva dalla concentrazione multiplata per una costante D

$C(x)$ la concentrazione di particelle per unità di volume.

D è detta costante di diffusione ed è una caratteristica delle particelle e del mezzo che le contiene

Legge di diffusione

- In un semiconduttore dove $n(x)$ e $p(x)$ sono le concentrazioni di elettroni e lacune, si instaurano due flussi di portatori:
 - ◆ Elettri: $\phi_n(x) = -D_n \frac{dn}{dx}$ [$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$] D_n e D_p sono costanti di diffusione
 - ◆ Lacune: $\phi_p(x) = -D_p \frac{dp}{dx}$ [$\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$]
- Al flusso è associato uno spostamento di carica e quindi una corrente elettrica:



La corrente di elettroni ha lo stesso segno del gradiente di concentrazione

La corrente di lacune ha segno opposto al gradiente di concentrazione
La corrente è $p \cdot q$ o $n \cdot (-q)$!

CORRENTE DI DIFFUSIONE

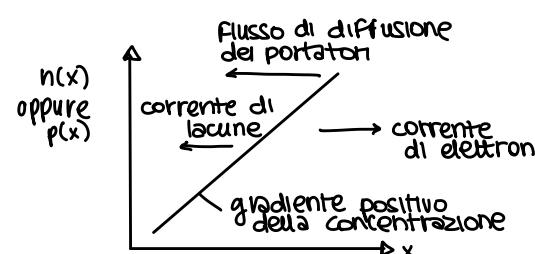
Nel dispositivo a stato solido le concentrazioni di impurità sono spesso caratterizzate da una distribuzione non uniforme, determinando una variazione spaziale delle concentrazioni dei portatori liberi.

La variazione delle concentrazioni di portatori è responsabile del fenomeno della diffusione → i portatori liberi tendono a muoversi da regioni a elevata concentrazione verso regioni a bassa concentrazione di portatori.

Le costanti di proporzionalità D_p e D_n prendono rispettivamente il nome di diffusività o coefficiente di diffusione degli elettroni e delle lacune, e sono espresse in cm^2/s . La diffusività è legata alla mobilità dalla relazione di Einstein:

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q} = \frac{D_p}{\mu_p} \quad \text{dove } \frac{kT}{q} = V_T \quad V_T \text{ è detto potenziale termico}$$

campo elettrico (gradiente di tensione)
 $j_n = q\mu_n \left(E_n + V_T \frac{dn}{dx} \right)$
 gradiente di concentrazione



$$j_p = q\mu_p \left(E_p - V_T \frac{dp}{dx} \right)$$

gradiente di concentrazione

Corrente totale di elettroni e lacune

- In un semiconduttore sono sempre presenti sia elettroni sia lacune (anche se in concentrazioni diverse) → spostamento come somma di due effetti = DERIVA + DIFFUSIONE
- Elettroni e lacune danno luogo a due correnti elettriche j_n e j_p , rispettivamente
- Ciascuna corrente è composta da due contributi:
 - Deriva, dovuta al gradiente di potenziale
 - Diffusione, dovuta al gradiente di concentrazione

Equazione di deriva e diffusione per elettroni e lacune

$$j_n = q\mu_n E n + qD_n \frac{dn}{dx}$$

$$j_p = q\mu_p E p - qD_p \frac{dp}{dx}$$

attenzione a questo segno!

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

43

Gradiente di potenziale e di concentrazione

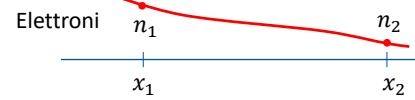
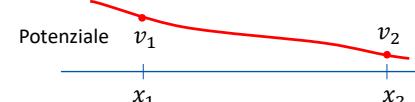
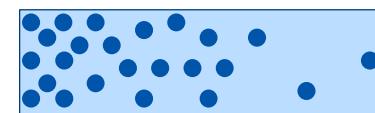
\triangleright termodinamico
Se in un semiconduttore in equilibrio esiste una differenza di potenziale $v_2 - v_1$ tra due punti, allora deve esserci un gradiente di concentrazione $n_2 - n_1$ e $p_2 - p_1$ tra gli stessi punti, tale che:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{p_1}{p_2} = \exp\left(\frac{v_2 - v_1}{V_T}\right)$$

$$h_2 p_2 = h_1 p_1 \rightarrow n_i^2 = n_i^2 \square$$

Viceversa, se in un semiconduttore in equilibrio esiste un gradiente di elettroni $n_2 - n_1$ (o equivalentemente di lacune $p_2 - p_1$) tra punti, allora deve esistere un gradiente di potenziale $v_2 - v_1$ tra gli stessi punti, tale che:

$$\frac{v_2 - v_1}{V_T} = \ln \frac{n_2}{n_1} = \ln \frac{p_1}{p_2}$$



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

48

Semiconduttore in equilibrio (QUIZ)

- In un semiconduttore in equilibrio:
 - La corrente totale di elettroni è nulla ($j_n = 0$)
 - La corrente totale di lacune è nulla ($j_p = 0$)

condizione importante di equilibrio

$$\begin{cases} j_n = q\mu_n E n + q\mu_n V_T \frac{dn}{dx} = 0 \\ j_p = q\mu_p E p - q\mu_p V_T \frac{dp}{dx} = 0 \end{cases}$$

imponiamo a zero i corrispondenti spostamenti

$$j_{TOT} = j_n + j_p = q\mu_n E n + q\mu_p E p + q\mu_n V_T \frac{dn}{dx} - q\mu_p V_T \frac{dp}{dx} = 0$$

deriva diffusione

In un semiconduttore in equilibrio la corrente di deriva e di diffusione sono uguali, ma hanno verso opposto.

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

47

Gradiente di potenziale e di concentrazione

Dimostrazione:

Semiconduttore in equilibrio:

$$j_n = q\mu_n E n + q\mu_n V_T \frac{dn}{dx} = 0 \quad j_p = q\mu_p E p - q\mu_p V_T \frac{dp}{dx} = 0$$

$$E = -\frac{dV}{dx}$$

LACUNE

$$-\frac{dV}{dx} p - V_T \frac{dp}{dx} = 0$$

Semplifichiamo:

$$-\frac{dV}{dx} n + V_T \frac{dn}{dx} = 0$$

$$\frac{dV}{V_T} = \frac{dn}{n}$$

Integriamo entrambi i membri tra il punto x_1 e il punto x_2

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V_T} = \int_{n_1}^{n_2} \frac{dn}{n}$$

$$\int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V_T} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}$$

Questa dimostrazione dimostra in altro modo la legge della reazione di massa

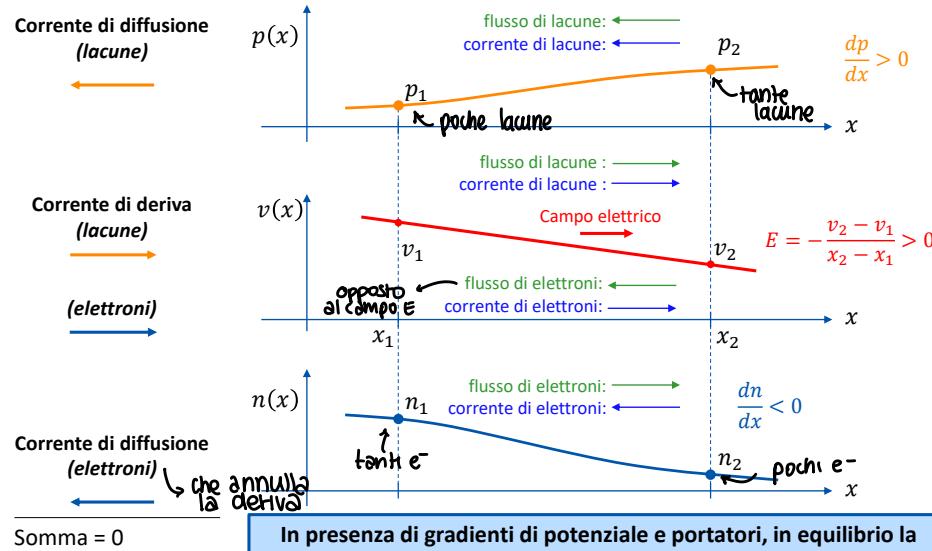
$$\frac{v_2 - v_1}{V_T} = \ln \frac{n_2}{n_1} = \ln \frac{p_1}{p_2} \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_1}{p_2} = \exp\left(\frac{v_2 - v_1}{V_T}\right)$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

49

Gradiente di potenziale e di concentrazione

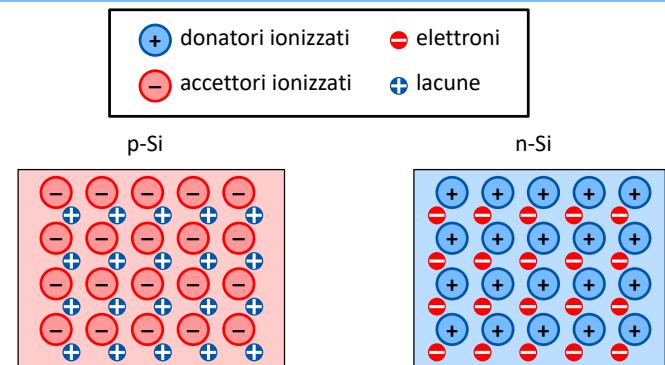
Esempio: $v_1 > v_2$, $n_1 > n_2$, $p_1 < p_2$



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

5

La giunzione pn



Concentrazione di accettori uniforme N_A

Concentrazione di lacune in equilibrio $p = N_A$

Concentrazione di elettroni in equilibrio $n = n_i^2 / N_A$

Concentrazione di donatori uniforme N

Concentrazione di elettroni in equilibrio $n=N_D$

Concentrazione di lacune in equilibrio $p = n_i^2/N_D$

Se i due blocchi di silicio sono isolati, ciascuno conserva un numero di portatori pari al drogante e uniformemente distribuiti nello spazio.

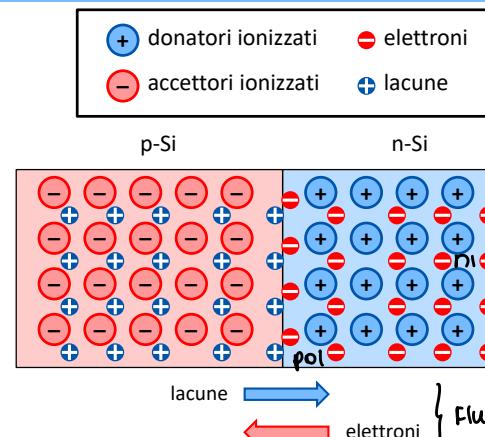
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Dispositivi a semiconduttore: il diodo

Jaeger 6°Ed: Cap. 3 p.53-70, p.106-108

- Giunzione pn
 - Polarizzazione diretta e inversa in una giunzione pn
 - Corrente attraverso la giunzione pn
 - Fenomeni di breakdown
 - Capacità di una giunzione pn

La giunzione pn



- Se i due blocchi sono messi a stretto contatto si ha un gradiente elevato di elettroni e di lacune.
 - La diffusione fa migrare:
 - ◆ gli elettroni dal n-Si al p-Si
 - ◆ Le lacune dal p-Si al n-Si

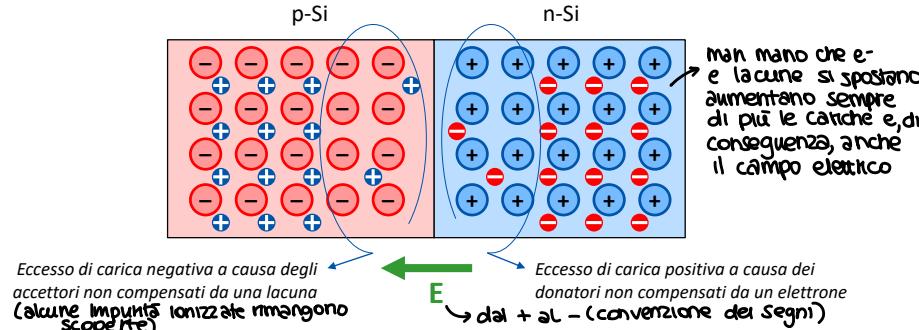
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

2

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

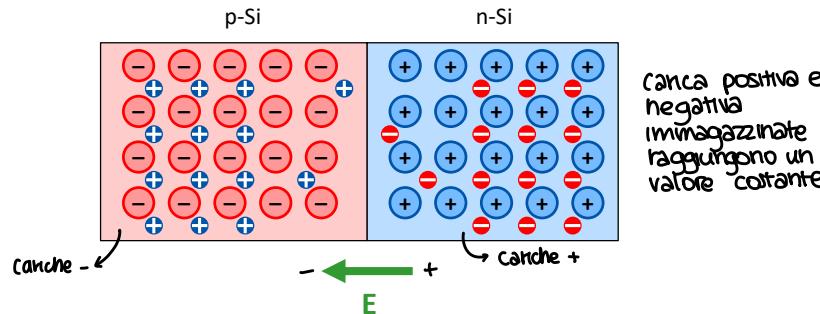
3

La giunzione pn



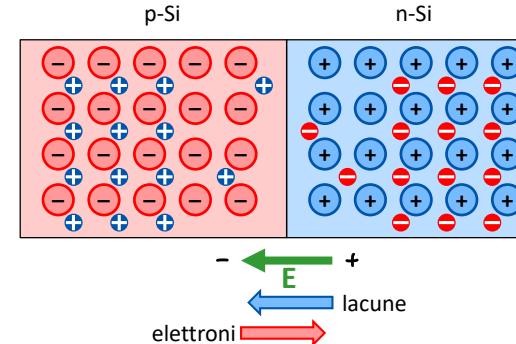
- Man mano che avviene la diffusione si crea un eccesso di carica:
 - ◆ Negativa nel p-Si
 - ◆ Positiva nel n-Si
- La carica è dovuta ai droganti che non sono più compensati da un portatore.
- Questa carica è "fissa" nel senso che è dovuta ai droganti ionizzati che non possono spostarsi, poiché legati al silicio
- Le due concentrazioni di carica elettrica danno luogo a un campo elettrico E orientato dalla regione drogata n (positiva) a quella drogata p (negativa)

La giunzione pn



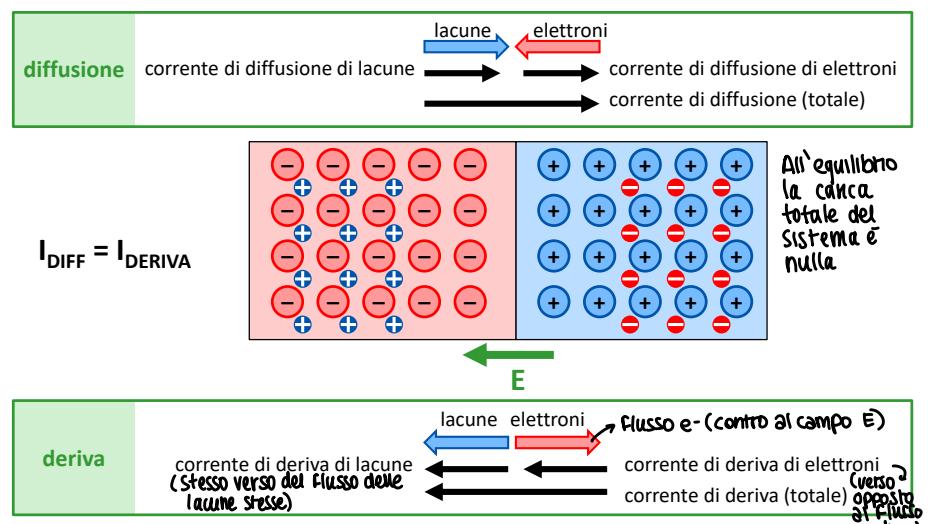
- All'aumentare del numero di portatori che si spostano per diffusione, aumenta la quantità di carica fissa non compensata.
- All'aumentare della carica fissa, aumenta il campo elettrico E
- All'aumentare del campo elettrico, aumenta la corrente di deriva (che si oppone alla diffusione)
- Si raggiunge un equilibrio quando la corrente di deriva uguaglia la corrente di diffusione

La giunzione pn



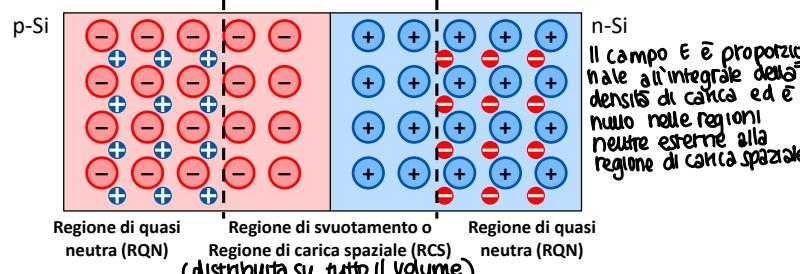
- Il campo elettrico però instaura una corrente di deriva che spinge:
 - ◆ Le lacune verso sinistra (zona p), cioè nello stesso verso del campo
 - ◆ Gli elettroni verso destra (zona n), cioè nel verso opposto del campo.
- La corrente di deriva ha verso opposto a quella di diffusione.
 - blocca il flusso netto
 - bilancia la corrente di diffusione

Giunzione pn in equilibrio termodinamico



In condizioni di **equilibrio termodinamico** il numero di elettroni che si sposta per diffusione da una regione all'altra è uguale al numero di elettroni che si spostano per deriva nel vero opposto (**corrente di elettroni totale nulla**). Lo stesso vale per le lacune

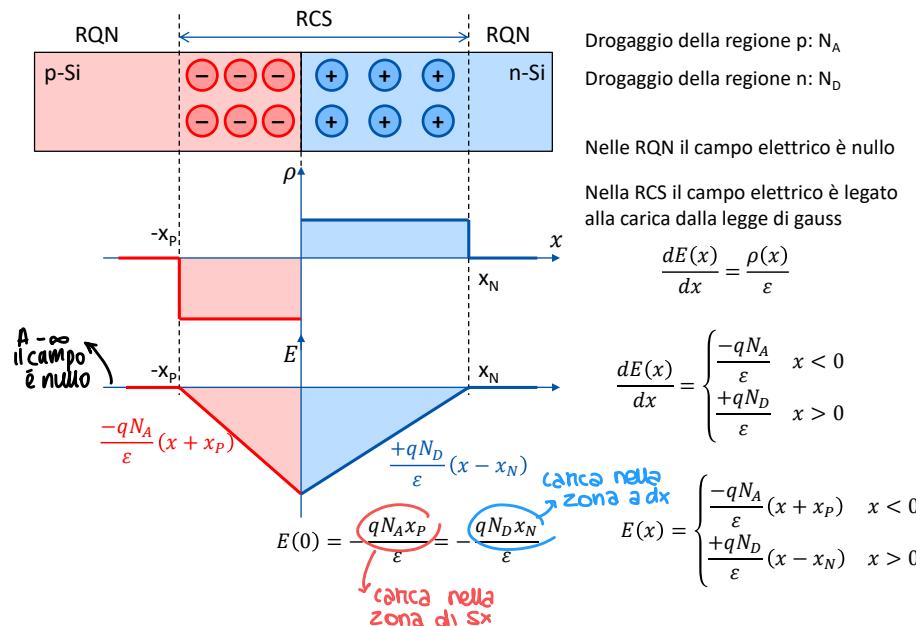
Giunzione pn in equilibrio termodinamico



- A regime, in equilibrio termodinamico, si formano nella giunzione tre regioni:

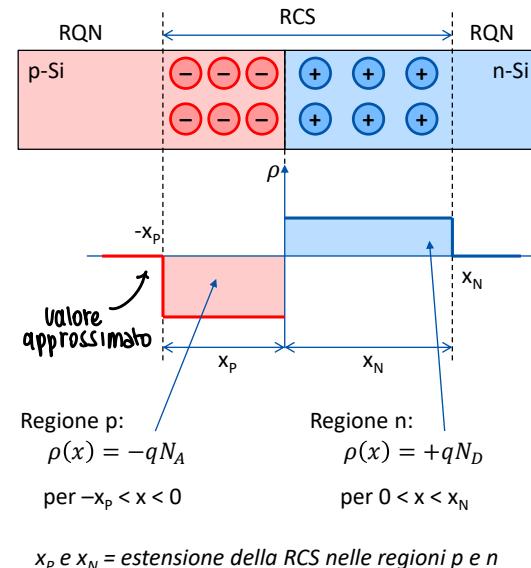
- Una regione intermedia pressoché svuotata di portatori, detta **regione di svuotamento o regione di carica spaziale (RCS)**.
- Due regioni laterali corrispondenti alle porzioni di n-Si e p-Si che non sono svuotate di portatori e che restano in condizioni di quasi neutralità. Le definiamo **regioni quasi neutre (RQN)**.
- In seguito faremo la seguente approssimazione (**ipotesi di completo svuotamento**): → si (potrà che il numero di portatori sia nullo (danno contributo minimo alla carica totale))
 - Nella RCS la concentrazione di portatori è nulla $n=p=0$
 - Nelle RQN la concentrazione di portatori è identica alla concentrazione di drogante ($n = N_D$ e $p = N_A$)

giunzione pn in equilibrio: campo elettrico



giunzione pn in equilibrio: carica elettrica

COSA SUCCIDE A LIVELLO ELETROSTATICO?
Drogaggio della regione p: N_A
Drogaggio della regione n: N_D

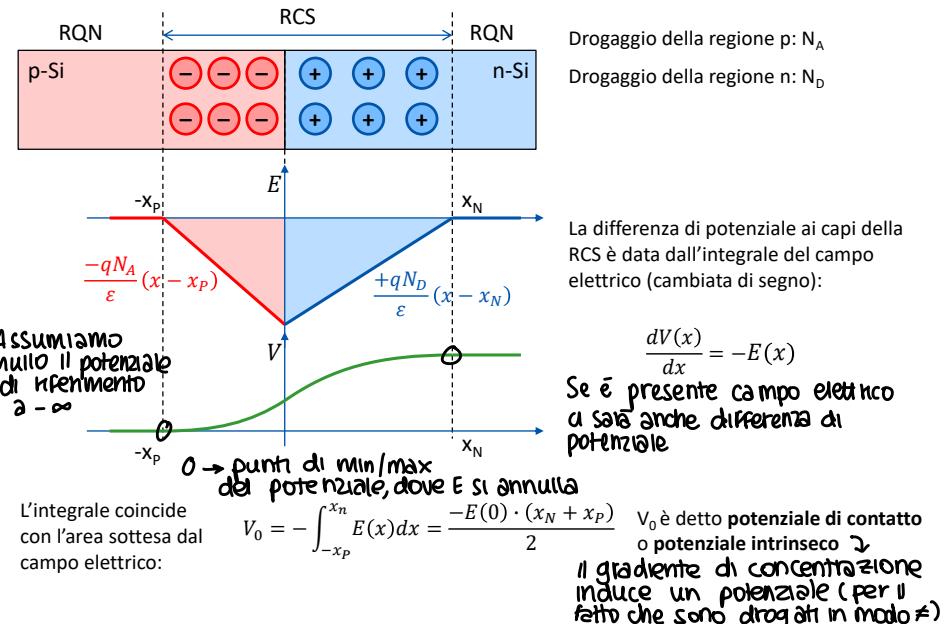


Poiché prima di formare la giunzione i due blocchi erano in equilibrio, la carica totale netta del sistema deve essere nulla:

$$qN_D x_N - qN_A x_P = 0$$

$$N_D x_N = N_A x_P$$

giunzione pn in equilibrio: potenziale



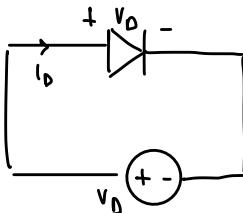
CARATTERISTICA i-v DEL DIODO

Il diodo svolge nei circuiti elettronici un'operazione analoga a quella di una valvola meccanica: permette alla corrente di fluire in una direzione mentre blocca il flusso nella direzione opposta.

La corrente in un diodo è dovuta alla tensione ad esso applicata. Le regioni neutre del diodo offrono una bassa resistenza, e praticamente tutta la tensione esterna applicata cade ai capi della regione di canica spaziale.

- una tensione positiva applicata al diodo riduce la barriera di potenziale per gli elettroni e le lacune, dando origine ad una corrente che attraversa la giunzione
- una tensione negativa produce un incremento della barriera di potenziale, tuttavia la corrente risultante dall'aumento della barriera è molto piccola.

La tensione necessaria affinché il diodo conduca in modo significativo è chiamata tensione di accensione (turn-on) o di soglia del diodo.

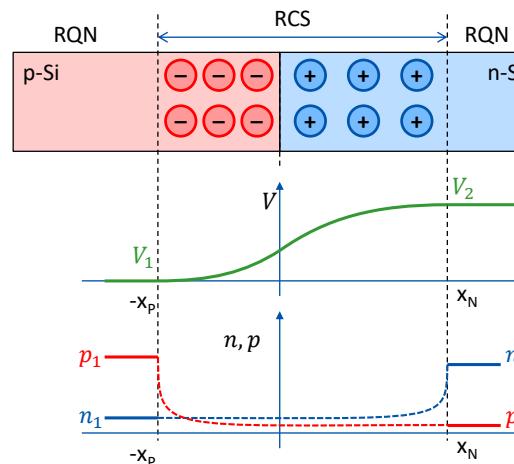


Equazione del diodo

$$i_D = I_S [\exp \left(\frac{qV_D}{nV_T} \right) - 1] = I_S [\exp \left(\frac{V_D}{nV_T} \right) - 1]$$

dove I_S è detta corrente di saturazione inversa del diodo.

Calcolo del potenziale di contatto



Drogaggio della regione p: N_A
Drogaggio della regione n: N_D

Definiamo:

$$V_1 = V(-x_p)$$

$$p_1 = p(-x_p) = N_A \frac{n_i^2}{N_A}$$

$$n_1 = n(-x_p) = \frac{n_i^2}{N_A}$$

$$V_2 = V(x_N)$$

$$n_2 = n(x_N) = N_D$$

$$p_2 = p(x_N) = \frac{n_i^2}{N_D}$$

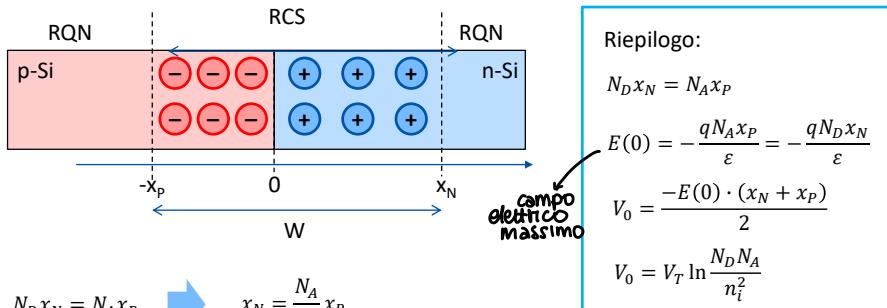
Il potenziale di contatto è: la ddp che si sviluppa tra due materiali diversi a causa del contatto tra di essi

$$V_0 = V_2 - V_1 = V_T \ln \frac{n_2}{n_1} = V_T \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

12

Aampiezza della regione di svuotamento



Riepilogo:

$$N_D x_N = N_A x_P$$

$$E(0) = -\frac{qN_A x_P}{\epsilon} = -\frac{qN_D x_N}{\epsilon}$$

$$V_0 = \frac{-E(0) \cdot (x_N + x_P)}{2}$$

$$V_0 = V_T \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2}$$

$$N_D x_N = N_A x_P \quad \Rightarrow \quad x_N = \frac{N_A}{N_D} x_P$$

$$W = x_P + x_N = \left(1 + \frac{N_A}{N_D}\right) x_P$$

$$W = \frac{-2V_0}{E(0)} = \frac{2V_0 \epsilon}{qN_A x_P}$$

$$x_P = W \frac{N_D}{N_A + N_D} \quad x_N = W \frac{N_A}{N_A + N_D}$$

W aumenta al diminuire del droggaggio

Regione di svuotamento della giunzione pn

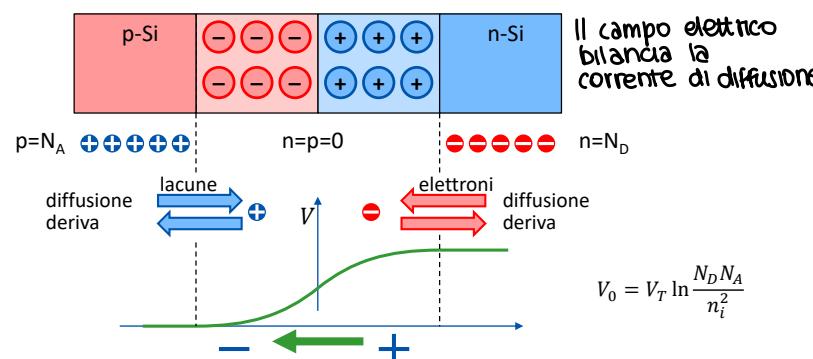
$$x_P = W \frac{N_D}{N_A + N_D}$$

$$x_N = W \frac{N_A}{N_A + N_D}$$

$N_A = N_D$	$x_P = \frac{W}{2}$ $x_N = \frac{W}{2}$	
$N_A > N_D$	$x_N > x_P$	
$N_D > N_A$	$x_P > x_N$	
$N_A \gg N_D$	$x_P \approx 0$ $x_N \approx W$	
$N_D \gg N_A$	$x_P \approx W$ $x_N \approx 0$	

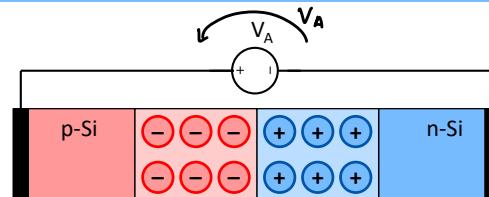
La RCS si estende maggiormente dove il droggaggio è minore

Potenziale di contatto e equilibrio termodinamico



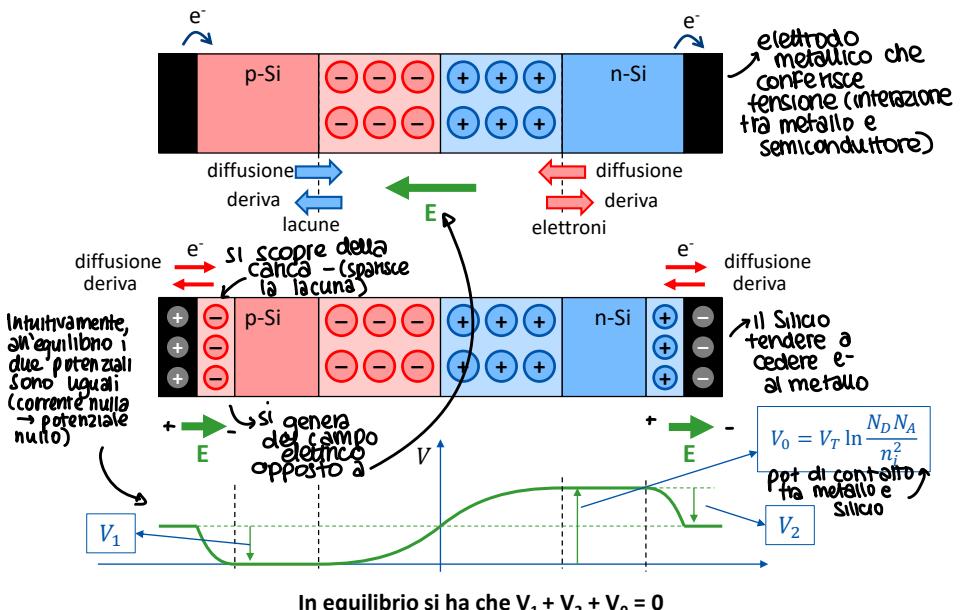
- Il potenziale di contatto è l'origine del campo elettrico che sposta lacune e elettroni per deriva.
- Maggiore è il droggaggio, maggiore è il gradiente di concentrazione di portatori, maggiore è la corrente di diffusione...
- ... e quindi, più grande deve essere il campo elettrico (e il potenziale di contatto) per fornire una corrente di deriva uguale e contraria alla corrente di diffusione.

Giunzione pn polarizzata

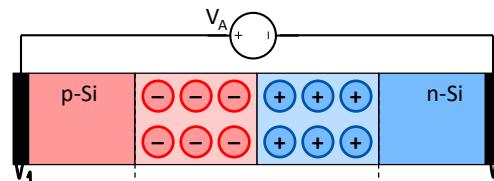


- Quando viene fornita una polarizzazione esterna, essa si sovrappone al potenziale intrinseco (di contatto) della giunzione.
- Poniamo il riferimento di tensione nella regione n.
- La regione p si trova polarizzata a una tensione V_A rispetto alla regione n
- Se la tensione V_A è positiva si definisce **polarizzazione diretta** e si dice che la giunzione è **polarizzata in diretta**
- Se la tensione V_A è negativa si definisce **polarizzazione inversa** e si dice che la giunzione è **polarizzata in inversa**
- IPOTESI:** la resistenza delle RQN è nulla → tutta la tensione cade ai capi della RCS

Potenziale di contatto: approfondimento



Giunzione pn polarizzata

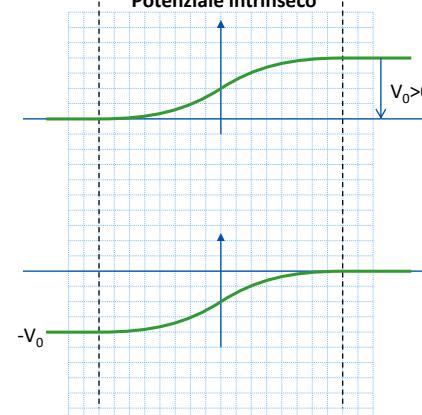


Le regioni V_1 e V_2 hanno resistenza nulla

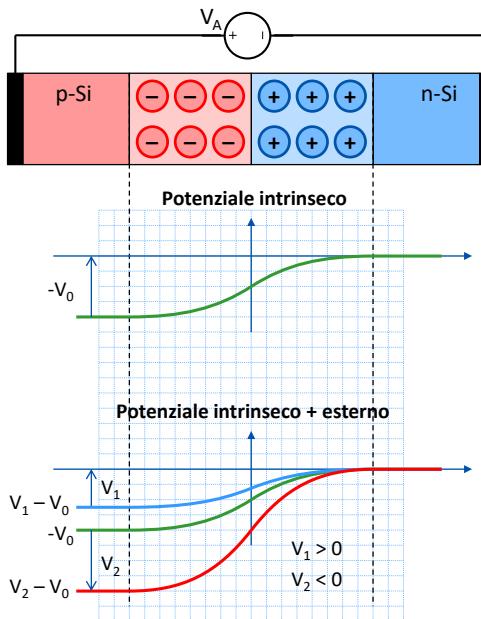
Per prima cosa cambiamo il riferimento del potenziale interno!

Riferiamo anche il potenziale interno alla regione n

Ciò significa che in equilibrio la regione p ha intrinsecamente un potenziale $-V_0$ rispetto alla parte n

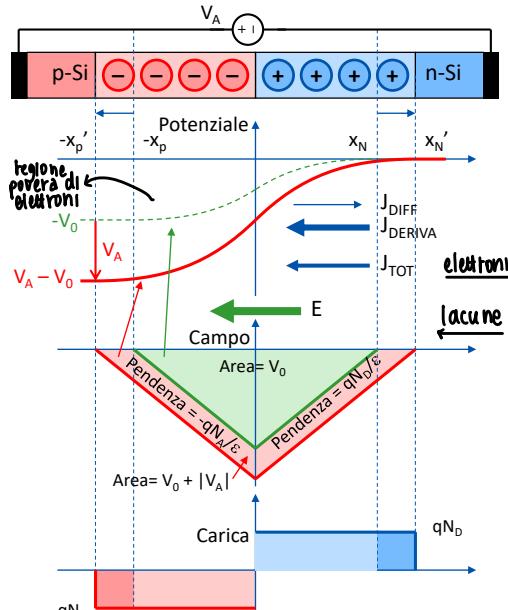


Giunzione pn polarizzata



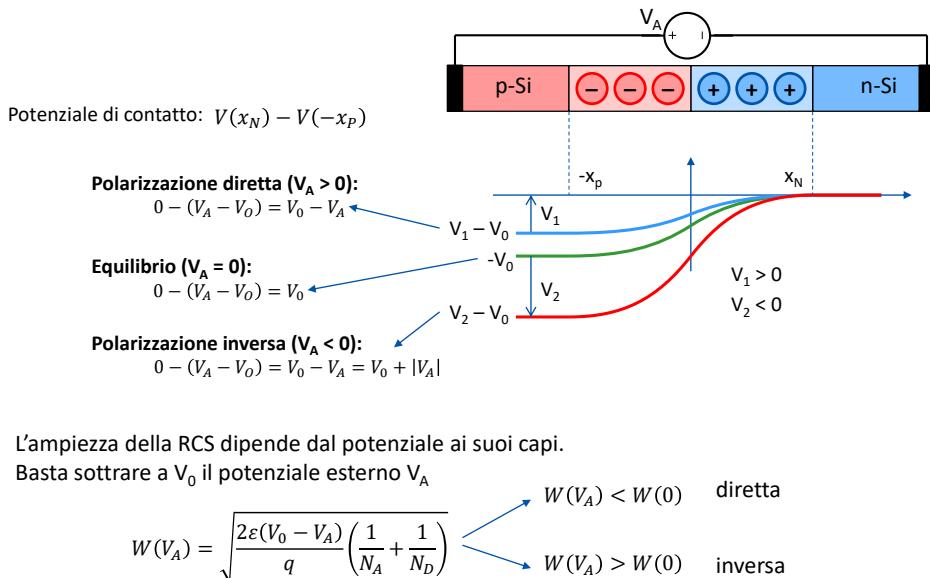
- La polarizzazione esterna V_A si somma a quella interna.
- Avendo usato la regione n come riferimento per entrambe, il potenziale alla regione n è sempre 0
- Il potenziale della regione p invece diventa $V_A - V_0$
- Se $V_A > 0$ (V_1 in fig.) il potenziale di contatto diminuisce
- Se $V_A < 0$ (V_2 in fig.) il potenziale di contatto aumenta

Giunzione pn: polarizzazione inversa

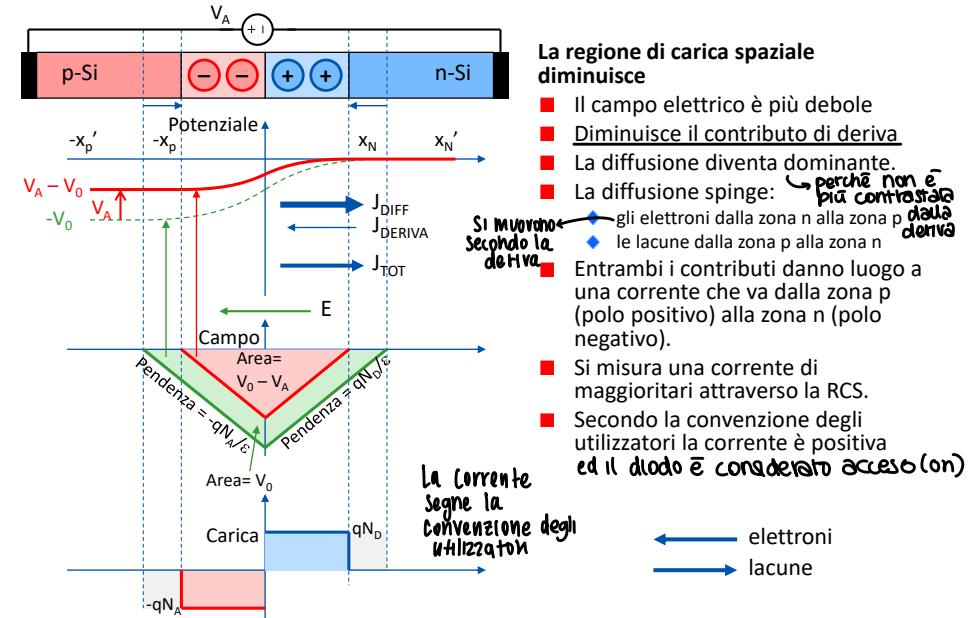


- La regione di carica spaziale aumenta
- Il campo elettrico è più forte (dappertutto)
- Aumenta il contributo di deriva, che domina sulla diffusione.
- Il campo elettrico spinge:
 - gli elettroni dalla zona p alla zona n
 - le lacune dalla zona n alla zona p
- Entrambi i contributi danno luogo a una corrente che va dalla zona n (polo negativo) alla zona p (polo positivo).
- Si misura una debole corrente di deriva dovuta ai pochissimi portatori minoritari nella RCS.
- Secondo la convenzione degli utilizzatori la corrente è negativa **ed è talmente piccola che si ritiene che il diodo non conduca, ovvero che sia spento (off)**.

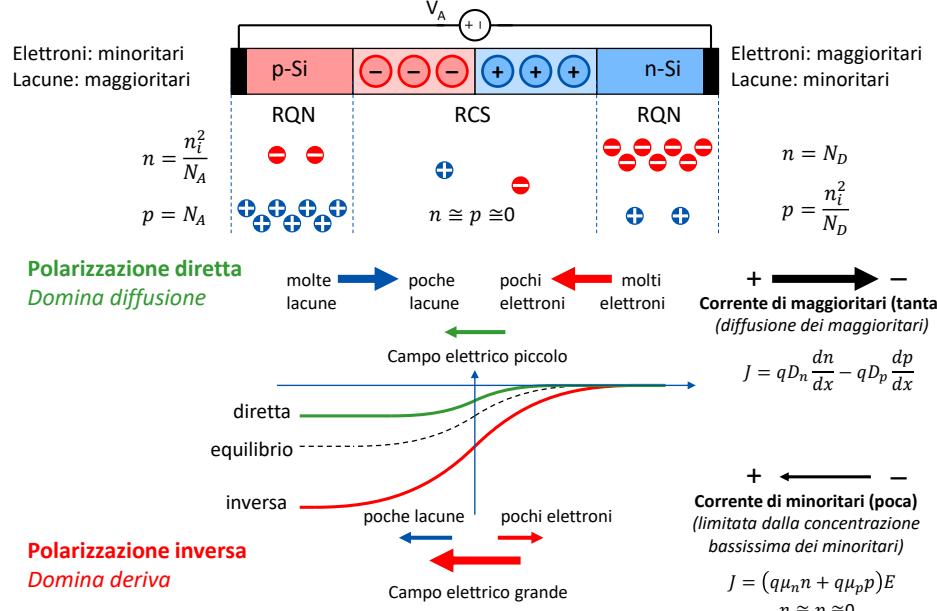
Effetto della polarizzazione sulla carica della RCS



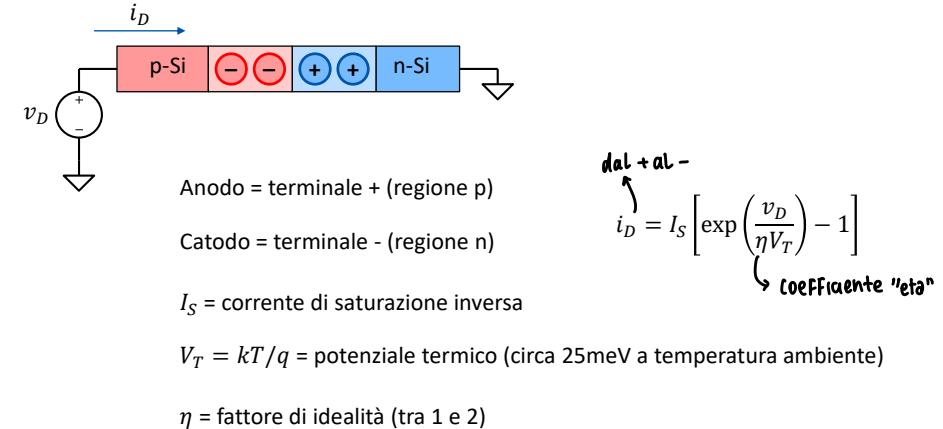
Giunzione pn: polarizzazione diretta



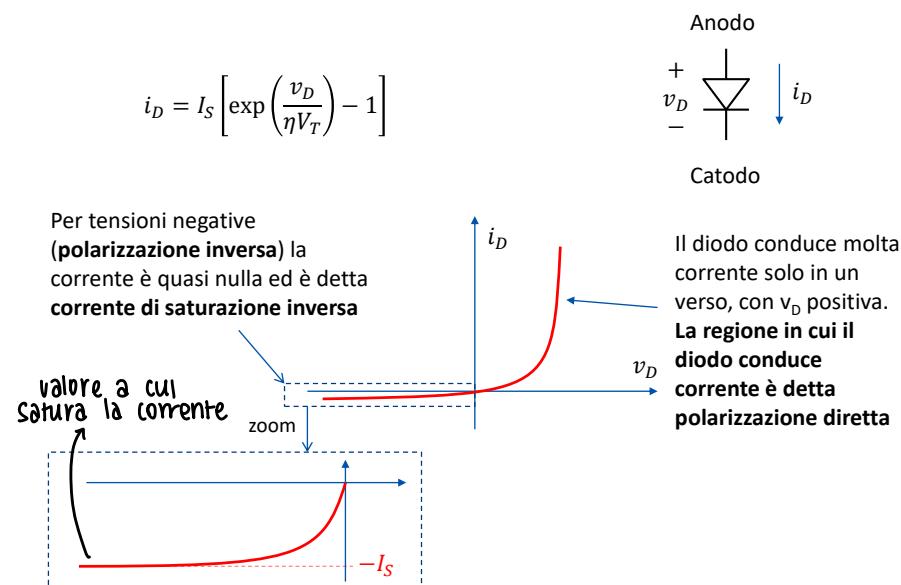
Corrente diretta e inversa



Relazione tensione-corrente



Relazione tensione-corrente per un DIODO IDEALE

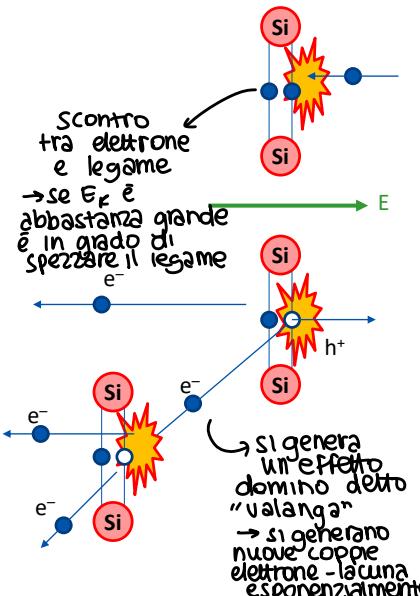


Fenomeni di non idealità: breakdown

La tensione inversa applicata ad un diodo ha un limite

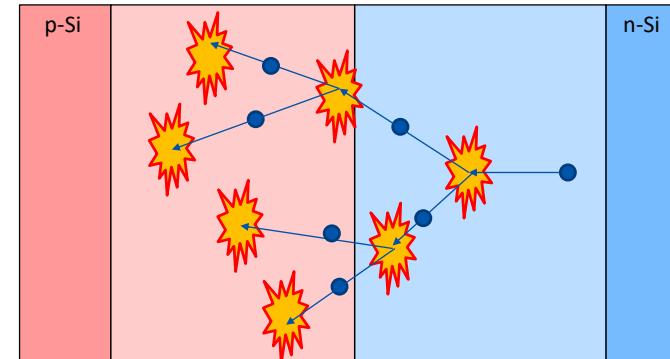
- L'aumento della tensione inversa può portare il diodo in quella che viene definita regione di rottura (breakdown).
- In breakdown la corrente del diodo aumenta rapidamente
- La tensione in cui avviene la rottura è detta tensione di rottura, V_Z .
- Esistono due modi in cui la giunzione va in breakdown:
 - ◆ Breakdown a valanga
 - ◆ Breakdown Zener

Fenomeni di non idealità: breakdown a valanga



- Se il campo elettrico è molto alto, la velocità massima raggiunta dagli elettroni aumenta ($v = \mu E$)
- Maggiore è la velocità maggiore è l'energia cinetica ($\frac{1}{2}mv^2$) ↗ sia di elettroni che per le lacune
- Quando un elettrone molto energetico "urta" contro un legame può romperlo
- Ciò genera una nuova coppia elettrone-lacuna.
- Il nuovo elettrone può urtare un secondo legame dando luogo ad un terzo elettrone, e così via.

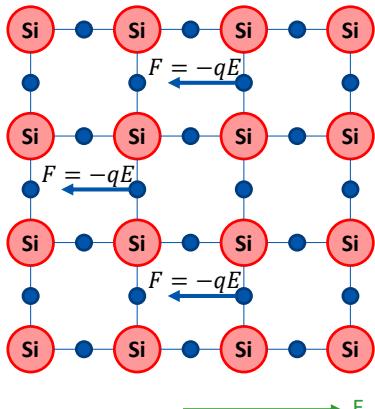
Fenomeni di non idealità: breakdown a valanga



- Un elettrone può generare molti altri elettroni "a valanga".
- Si crea rapidamente una corrente elevata nella RCS dovuta a queste cariche generate dagli impatti.
- La corrente diverge rapidamente a valori molto negativi
- Requisito: RCS abbastanza grande → droggaggio basso

Questo meccanismo è INDESIDERATO perché aumenta potenza, voltaggio e corrente, quindi si surriscalda il sistema

Fenomeni di non idealità: Breakdown Zener



- Il campo elettrico esercita una forza coulombiana sugli elettroni di legame.
- Se il campo è abbastanza intenso, la forza esercitata sugli elettroni è alta a sufficienza per "strappare" direttamente l'elettrone (anche quelli legati sentono del campo E)
- Una volta strappato l'elettrone è libero.
- Ciò permette l'istaurarsi di un corrente elevata anche all'interno della RCS (svuotata)

Questo effetto non porta necessariamente alla rottura del dispositivo, perché avviene a tensione più bassa.

Quanto vale campo elettrico massimo?

$$V_0 = \frac{-E(0) \cdot (x_N + x_P)}{2} \quad \text{↗ } |E(0)| = \frac{2V_0}{W}$$

$$n_i = 1.45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$V_T = 25 \text{ mV}$$

$$N_A = 10 N_D$$

$N_A = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$	$N_D = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$	$V_0 = 0.384V$	$W = 7.4\mu\text{m}$	$ E = 1.0 \text{ kV/cm}$
$N_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	$N_D = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$	$V_0 = 0.500V$	$W = 2.7\mu\text{m}$	$ E = 3.7 \text{ kV/cm}$
$N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$	$N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	$V_0 = 0.615V$	$W = 0.94\mu\text{m}$	$ E = 13 \text{ kV/cm}$
$N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$	$N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$	$V_0 = 0.730V$	$W = 0.32\mu\text{m}$	$ E = 45 \text{ kV/cm}$
$N_A = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$	$N_D = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$	$V_0 = 0.845V$	$W = 0.11\mu\text{m}$	$ E = 154 \text{ kV/cm}$

Requisito per il breakdown Zener è un elevato campo elettrico → droggaggio elevato

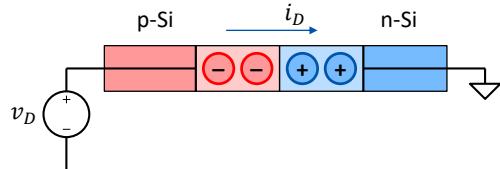
calo molto aumenta tantissimo

situazione più controllabile perché la tensione è bassa

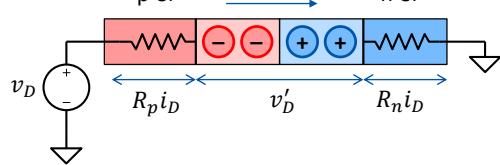
"esplosione" in condiz. di raggio piccole

il campo E

Fenomeni di non idealità: resistenza delle RQN



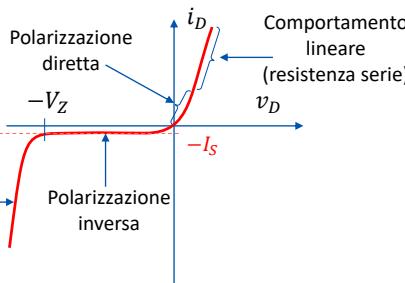
- Dette R_n e R_p le resistenze delle due RQN, esse generano una caduta di tensione proporzionale alla corrente del diodo
- La tensione effettiva che cade ai capi della RCS è $v'_d < v_d$.



Se i_D è molto grande $v'_d \ll v_d$

$$i_D \approx \frac{v_d - v'_d}{R_s}$$

$$R_s = R_n + R_p$$

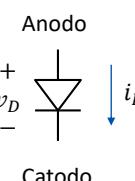


Relazione tensione-corrente

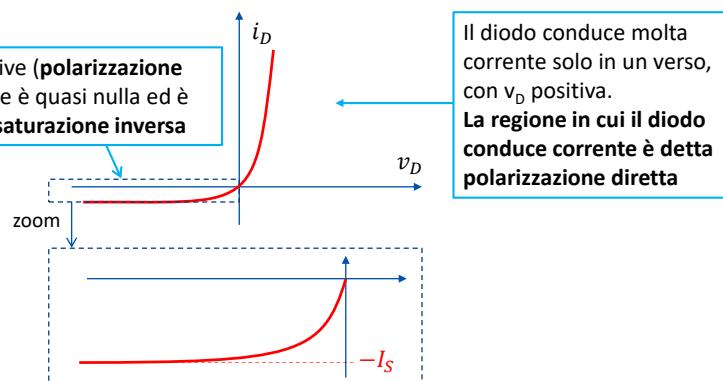
Il Diodo è un componente non lineare in grado di condurre corrente in un solo verso

- Anodo = terminale +
- Catodo = terminale -
- I_S = corrente di saturazione inversa
- $V_T = kT/q$ = potenziale termico (circa 25 mV a temperatura ambiente)
- η = fattore di idealità (tra 1 e 2)

$$i_D = I_S \left[\exp\left(\frac{v_D}{\eta V_T}\right) - 1 \right]$$

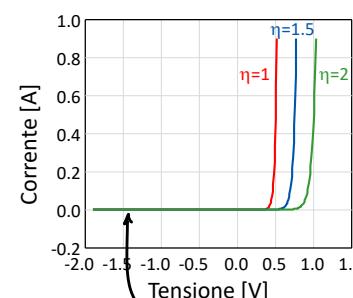


Per tensioni negative (polarizzazione inversa) la corrente è quasi nulla ed è detta corrente di saturazione inversa



Il diodo conduce molta corrente solo in un verso, con v_D positiva.
La regione in cui il diodo conduce corrente è detta polarizzazione diretta

Il coefficiente di idealità



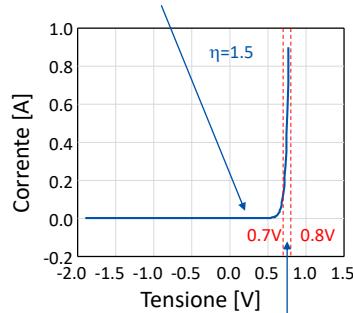
Il tratto si mimetizza con l'asse x ovvero viene prodotta una corrente piccola e trascurabile

- Il coefficiente di idealità η dipende dalla quantità di corrente erogata.
- A basse correnti η è vicino a 1
- A alte correnti η si avvicina a 2
- L'effetto del coefficiente di idealità è una traslazione della curva

Il diodo e le sue applicazioni

Modello semplificato del diodo

In questa scala la corrente nel diodo è quasi nulla fino a circa 0.7-0.8 V.



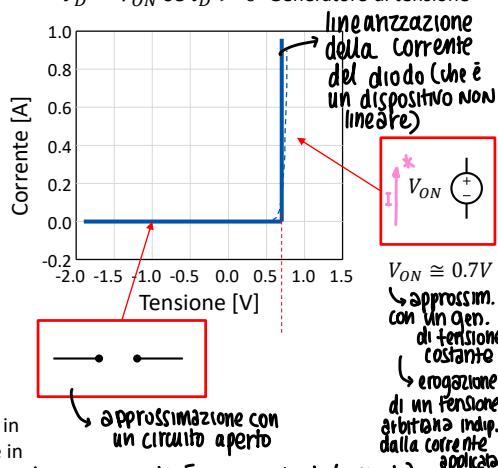
* In questo caso si utilizza la CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI + e - della corrente corrispondono con + e - del generatore (il diodo è PASSIVO)

La tensione di accensione (Turn-on) definisce il punto in cui il diodo inizia a condurre in maniera significativa. La corrente esponenziale è quasi costante (verticale). Si può dire che il diodo è "quasi" un generatore di tensione

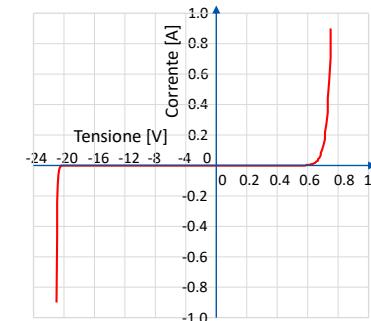
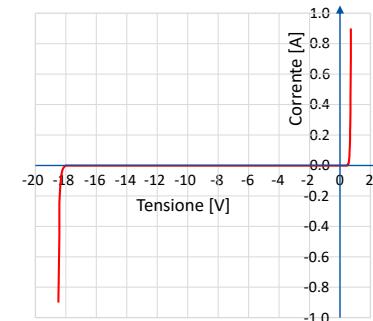
Caratteristica semplificata:

$$i_D = 0 \text{ se } v_D < V_{ON} \text{ Circuito aperto}$$

$$v_D = V_{ON} \text{ se } i_D > 0 \text{ Generatore di tensione}$$

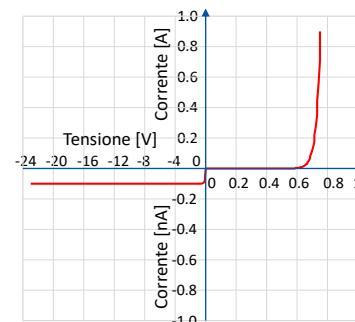
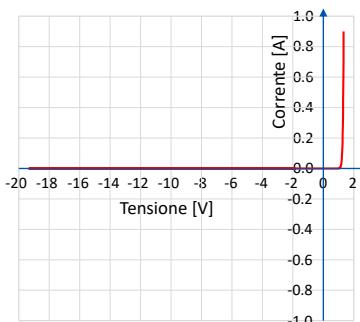


Rappresentazione della caratteristica del diodo



- Il diodo ha una caratteristica I-V che si estende in tensione molto nel semiasse negativo e poco in quello positivo
- Spesso rappresenteremo la curva I-V "non in scala".
 - ◆ Useremo una scala espansa nel semiasse positivo, dove piccole variazioni di tensioni producono enormi variazioni di corrente. (**scala asimmetrica**)
 - ◆ Useremo una scala compressa nel semiasse negativo delle tensioni, dove spesso è possibile applicare tensioni molto elevate prima del breakdown

Rappresentazione della caratteristica del diodo



- Lo stesso concetto si applica alla scala delle correnti: la corrente inversa è di pochi nA o μ A, la corrente diretta arriva a centinaia di mA o, talvolta, a qualche A.
 - ◆ Useremo una scala espansa nel semiasse negativo, dove la corrente è molto piccola
 - ◆ Useremo una scala compressa nel semiasse positivo della corrente dove i valori sono elevati.

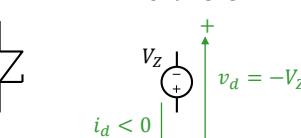
Modello semplificato del diodo: breakdown

- ↑ Il breakdown da valanga è da evitare in ogni caso, mentre quello Zener è reversibile.
- Il breakdown è spesso un fenomeno distruttivo per il dispositivo, perché la corrente molto elevata e la tensione inversa elevata portano a una dissipazione di potenza e un riscaldamento eccessivo.
- In alcuni casi è possibile con degli accorgimenti tecnologici mantenere il fenomeno di breakdown sotto controllo, permettendo una certa corrente attraverso il dispositivo.
- Questi dispositivi sono detti **diodi zener** e la tensione V_Z è detta **tensione zener**

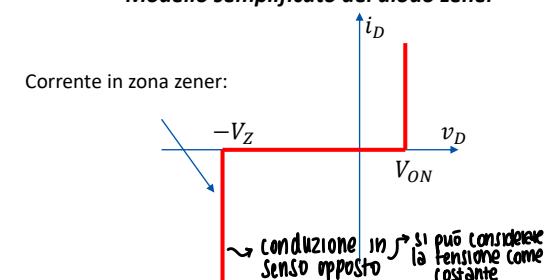
Simbolo del diodo Zener



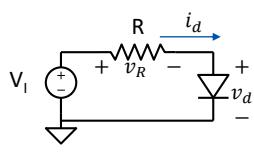
Modello elettrico della zona Zener



Modello semplificato del diodo zener



Circuiti con diodi (Analisi)



Esempio:

$$\begin{aligned} I_S &= 10^{-13} A & R &= 100\Omega \\ V_T &= 25mV & V_I &= 8V \\ \eta &= 1 \end{aligned}$$

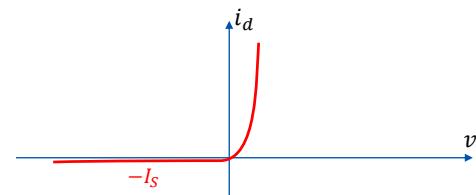
In un circuito elettronico, si definisce transcaratteristica o caratteristica di trasferimento la relazione tra due grandezze elettriche (tensione o corrente).

Il segnale che viene usato come ingresso viene messo nell'asse x

Il segnale che viene preso come uscita viene messo nell'asse y

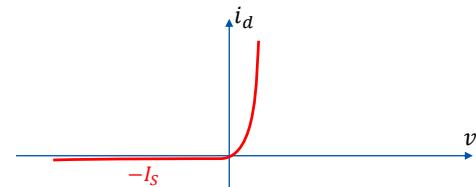
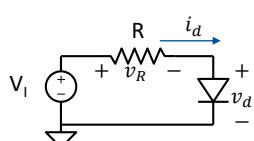
In generale ingresso e uscita possono essere sia una tensione sia una corrente

Ingresso e uscita si riferiscono a due parti diverse del circuito (da qui il nome transcaratteristica o caratteristica di trasferimento).



Circuiti con diodi

Metodo analitico



$$V_I = v_R + v_d$$

$$v_R = Ri_d$$

$$i_d = I_S \left[\exp \left(\frac{v_d}{\eta V_T} \right) - 1 \right] \rightarrow v_d = \eta V_T \ln \left(\frac{i_d}{I_S} + 1 \right)$$

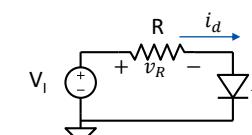
$$V_I = Ri_d + \eta V_T \ln \left(\frac{i_d}{I_S} + 1 \right)$$

L'equazione non può essere risolta in modo analitico

Possiamo usare un semplice metodo numerico iterativo

Circuiti con diodi

Metodo grafico



$$V_I = v_R + v_d$$

Lavoriamo nel piano i_d - v_d

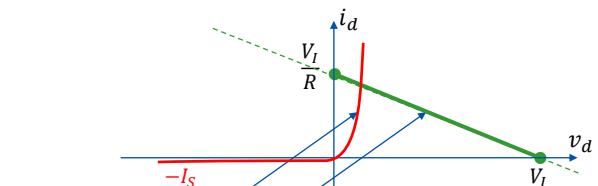
In funzione di v_d esprimiamo la corrente attraverso il diodo:

$$i_d = I_S \left[\exp \left(\frac{v_d}{\eta V_T} \right) - 1 \right]$$

e attraverso la resistenza

$$i_d = \frac{V_I - v_d}{R}$$

è la stessa corrente che attraversa il diodo



La legge di kirchoff ci dice che le due correnti devono coincidere essendo i componenti in serie

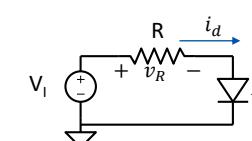
La soluzione è l'intersezione tra la curva del diodo e la retta.

La retta verde è definita retta di carico (o più in generale curva di carico)

Da idea in modo semplice del punto di lavoro, ma è difficile il calcolo esatto della polarizzazione

Circuiti con diodi

Metodo analitico



$$\begin{aligned} I_S &= 10^{-13} A \\ V_T &= 25mV \\ \eta &= 1 \\ R &= 100\Omega \\ V_I &= 8V \end{aligned}$$

3) Calcolare la corrente attraverso la resistenza

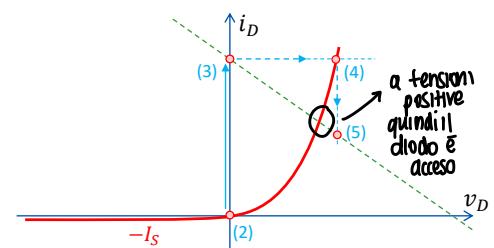
$$i_D = \frac{V_I - 0}{R} = 80mA$$

4) Calcolare la tensione ai capi del diodo con il valore di i_D

$$v_D = \eta V_T \ln \left(\frac{i_D}{I_S} + 1 \right) = 0.685V$$

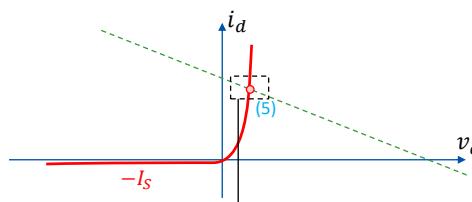
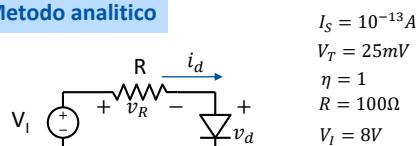
5) A partire dalla nuova v_d , ricalcoliamo la corrente i_d attraverso la resistenza

$$i_D = \frac{V_I - v_d}{R} = 73.15mA$$



Circuiti con diodi

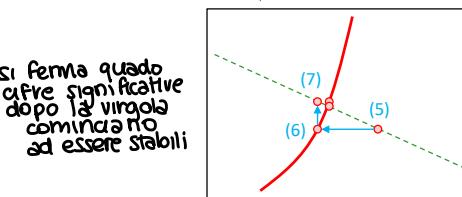
Metodo analitico



6) Continuiamo a ricalcolare v_d ... $v_d = \eta V_T \ln \left(\frac{i_d}{I_S} + 1 \right) = 0.683V$

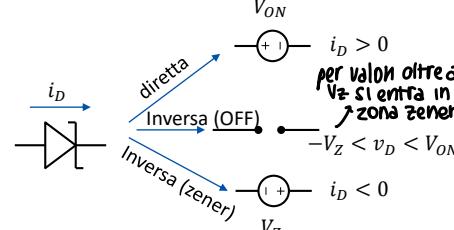
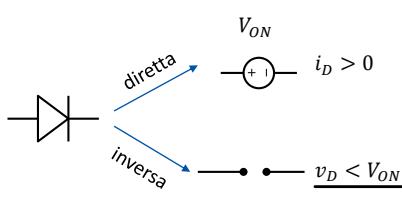
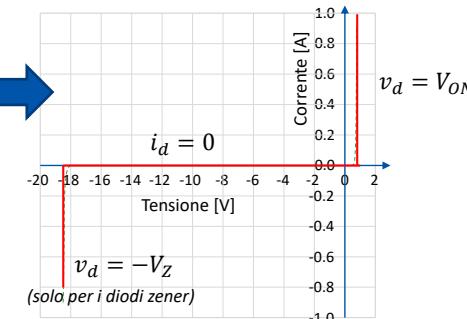
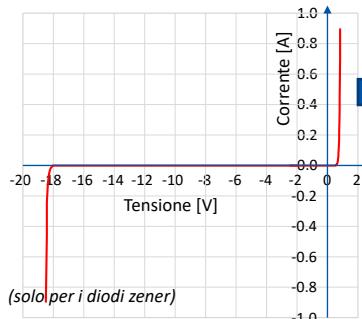
7) ... e i_d $i_d = \frac{V_I - v_d}{R} = 73.17mA$

Dopo alcune iterazioni si arriva a convergenza



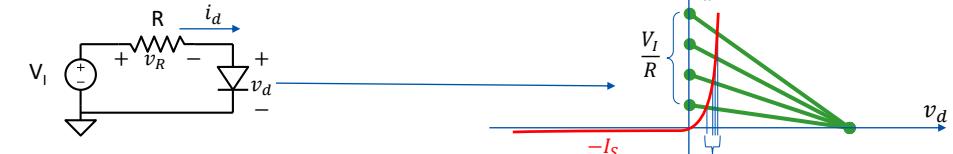
Questo procedimento è utile quando viene richiesto un calcolo molto preciso. Tuttavia, diventa scomodo quando siamo in presenza di 20 più diodi.

Modello lineare a tratti di un diodo

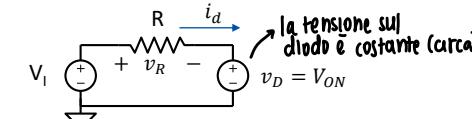


Circuiti con diodi

Modello lineare a tratti



Il punto di lavoro è sempre molto vicino alla tensione V_{ON}



$$i_d = \frac{V_I - V_{ON}}{R} = 73mA$$

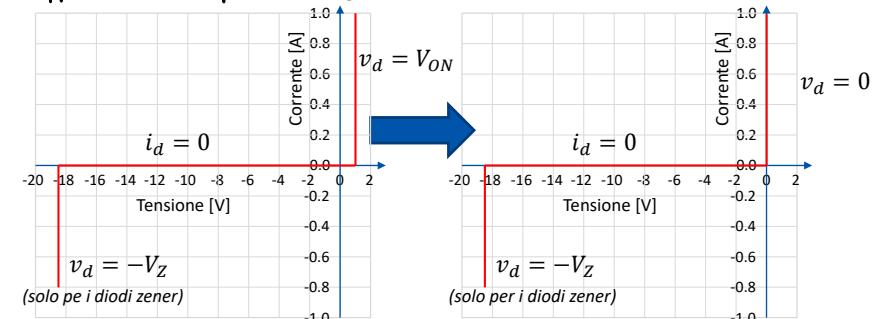
Se il diodo è in diretta è approssimabile con un generatore di tensione costante, pari a V_{ON}
È consuetudine approssimare:

$$V_{ON} = 0.7V$$

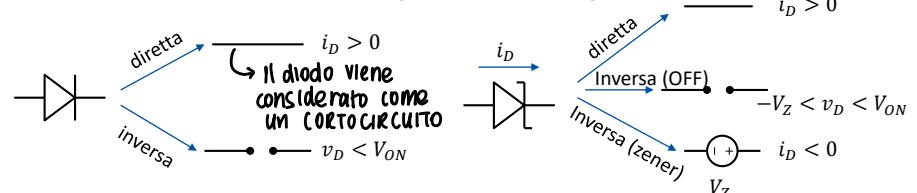
(in questo caso)

Modello lineare a tratti IDEALE di un diodo

Approssimazione per un DIODO IDEALE



In molti casi se le tensioni in gioco nel circuito sono grandi (molto maggiori di V_{ON}) si approssima $V_{ON} = 0V$



Procedura di risoluzione

Per risolvere un circuito con un diodo è consigliabile procedere in uno dei seguenti modi:

■ Supporre il diodo OFF:

- ◆ Sostituirlo con un circuito aperto e risolvere la rete
- ◆ Verificare che la tensione ai capi del diodo sia inferiore a V_{ON} (e superiore a V_z , se è un diodo zener).
- ◆ Se l'ipotesi non è verificata è necessario supporlo acceso (o in zona zener, se è un diodo zener) e ripetere il conto

Oppure

■ Supporre il diodo ON:

- ◆ Sostituirlo con un generatore di tensione V_{ON} (tipicamente di circa 0.7V) e risolvere il circuito
- ◆ Verificare che la corrente sia positiva
- ◆ Se l'ipotesi non è verificata è necessario ripetere il conto supponendolo spento (o in zona zener, se è un diodo zener)

Oppure (se è un diodo zener)

■ Supporre il diodo in zona zener:

- ◆ Sostituirlo con un generatore di tensione V_z e risolvere il circuito
- ◆ Verificare che la corrente sia negativa
- ◆ Se l'ipotesi non è verificata è necessario ripetere il conto supponendolo in diretta o OFF

Procedura di risoluzione

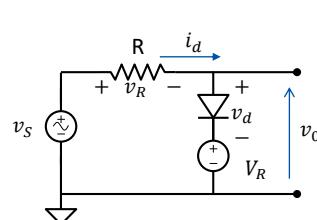
Quale delle due strade conviene provare prima?

■ Spesso osservando il circuito è possibile stimare con buona probabilità quale dei due elettrodi ha il potenziale più alto. In tal caso è possibile orientare la scelta (ma alla fine bisogna sempre verificarne la correttezza).

■ Il metodo grafico può dare utili indizi

■ Se non ci sono indizi, conviene assumerlo aperto. Il circuito è tipicamente più semplice (considerarlo OFF)

Applicazione: circuito tosatore (presente in qualsiasi apparecchiatura elettronica)



$$v_s = V_s \sin \omega t$$

$V_R < V_S$
valore reale costante
Supponiamo il diodo spento

$$i_d = 0$$

$$v_0 = v_s - Ri_d = v_s$$

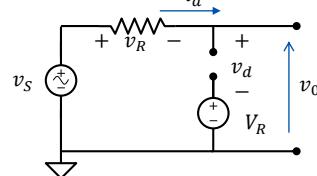
Valida se: $v_d < V_{ON}$

$$v_d = v_s - Ri_d - V_R = v_s - V_R$$

$$v_s - V_R < V_{ON}$$

$$v_s < V_R + V_{ON}$$

La caratteristica del diodo deve essere continua



$$v_s = V_s \sin \omega t$$

$V_R < V_S$
Supponiamo il diodo acceso

$$i_d = 0$$

$$v_s = V_s \sin \omega t$$

$$V_R < V_S$$

Supponiamo il diodo acceso

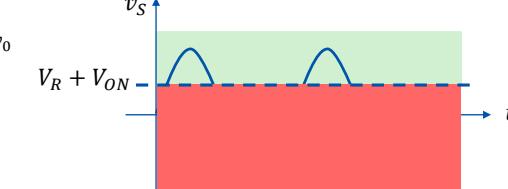
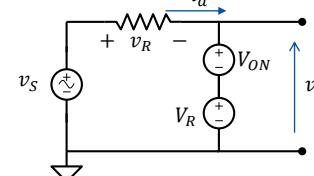
$$v_d = V_{ON}$$

$$v_0 = V_R + V_{ON}$$

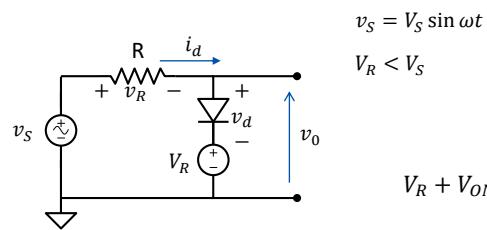
Valida se: $i_d > 0$

$$i_d = \frac{v_s - V_R - V_{ON}}{R} \rightarrow v_s > V_R + V_{ON}$$

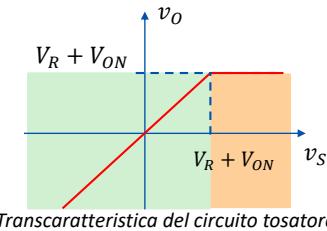
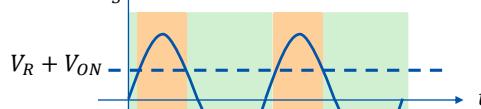
corrente sulla resistenza



Applicazione: circuito tosatore



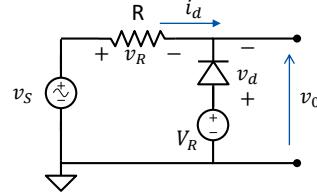
*Circuito "tosatore"
In un certo senso "taglia" tutto
quello che è troppo alto*



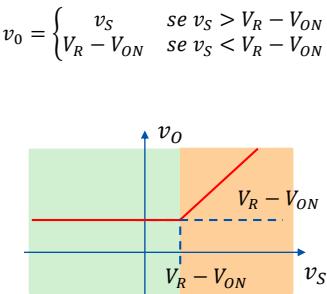
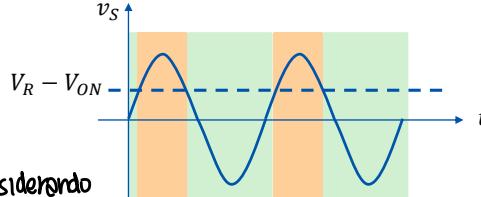
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

31

Applicazione: circuito tosatore



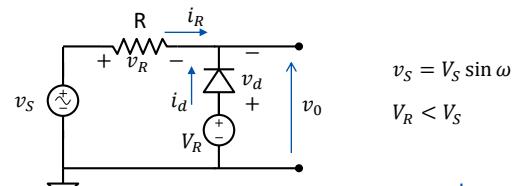
*"Tosatura" al contrario
Taglia tutto ciò che è troppo basso*



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

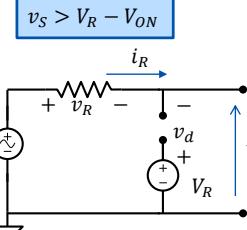
33

Applicazione: circuito tosatore (invertiamo il senso del diodo)



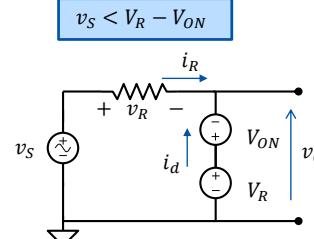
Diodo spento: $i_d = 0$ $v_0 = v_s - Ri_d = v_s$

Valida se: $v_d > 0$
 $v_d = V_R - (v_s - Ri_d) = V_R - v_s$



Diodo acceso: $i_d = V_{ON}$ $v_0 = V_R - V_{ON}$

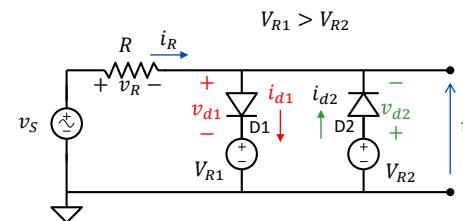
Valida se: $i_d > 0$
 $i_d = -i_R = -\frac{v_s - (V_R - V_{ON})}{R}$



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

32

Applicazione: circuito tosatore a due diodi (ON ON OFF OFF)



D1 ON, D2 OFF

$$v_{d1} = V_{ON} \quad i_{d2} = 0$$

$$v_0 = V_{R1} + V_{ON}$$

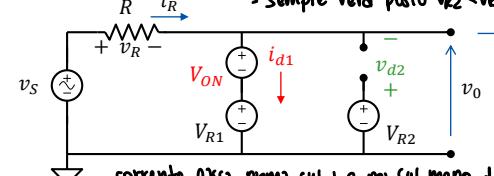
$$i_{d1} = \frac{v_s - (V_{R1} + V_{ON})}{R} > 0$$

Validità: $\begin{cases} i_{d1} > 0 \\ v_{d2} < V_{ON} \end{cases} \rightarrow v_s > V_{R1} + V_{ON}$

$$V_{R2} - V_{ON} - V_{R1} < V_{ON}$$

$$V_{R2} - V_{ON} < V_{R1} + V_{ON}$$

(Sempre vera) \hookrightarrow sempre vera posto $V_{R2} < V_{R1}$

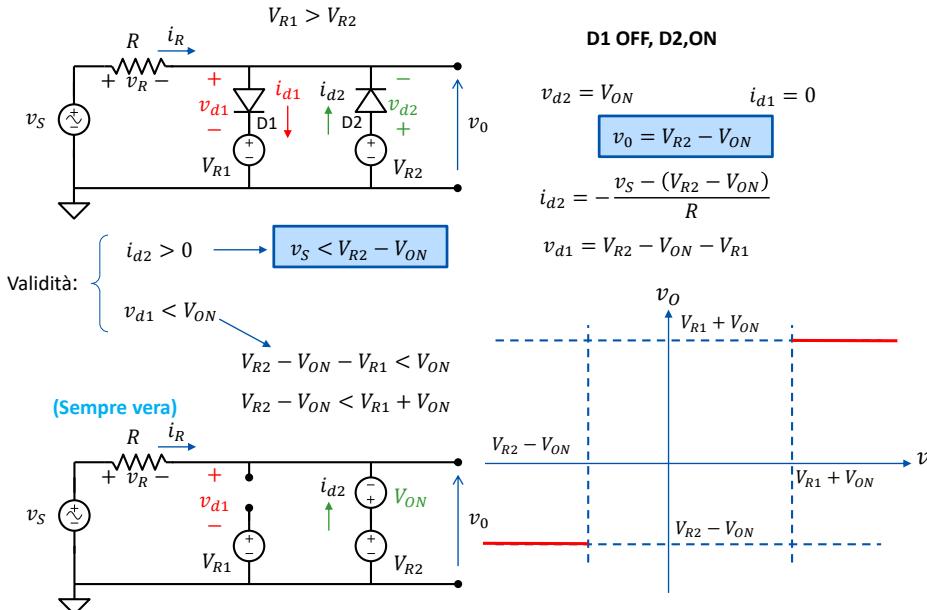


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

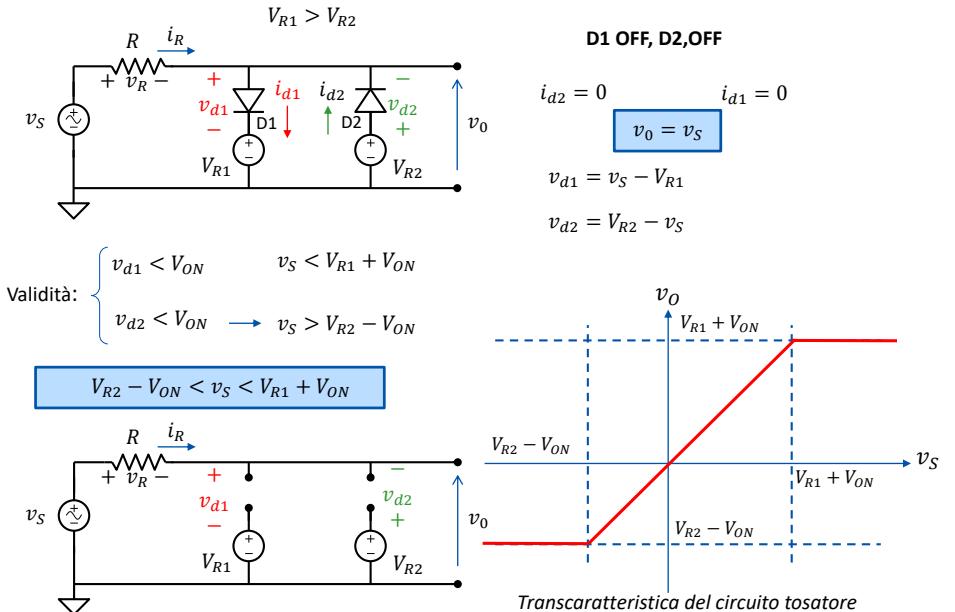
34

corrente passa prima sul + e poi sul meno del generatore che schematizza il diodo

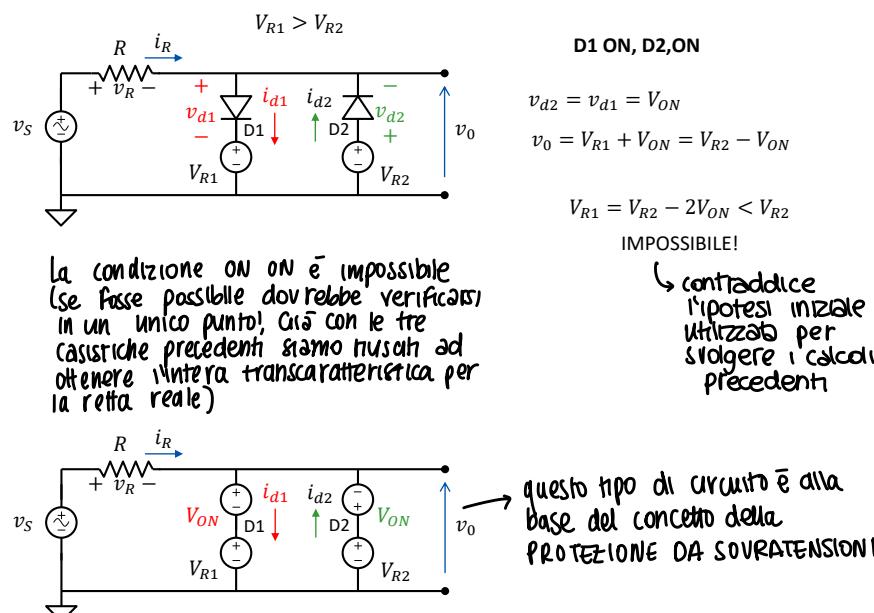
Applicazione: circuito tosatore



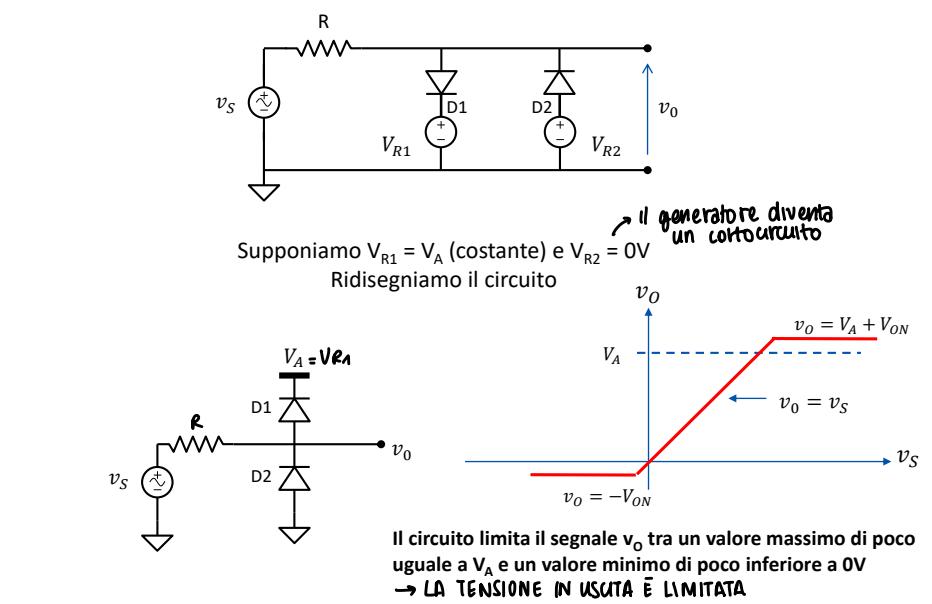
Applicazione: circuito tosatore



Applicazione: circuito tosatore



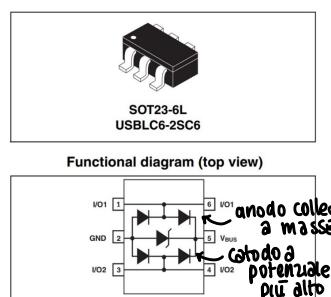
Protezione da sovratensioni



Esempio: circuito di protezione per porta USB

La porta USB dei nostri PC ha 4 cavi:
(massa, alimentazione, 2 linee dati)

Le linee dati (D+ e D-) sono segnali bidirezionali collegati a un circuito elettronico che tollera una tensione massima di 5V rispetto a massa.

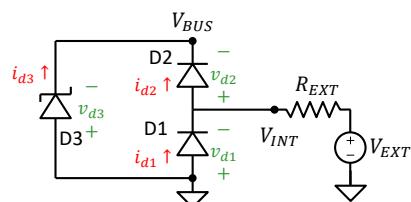


Pin	Signal	Color	Description
1	VCC	Red	+5V
2	D-	White	Data -
3	D+	Green	Data +
4	GND	Black	Ground

Per proteggere il sistema da sovratensioni si usa un circuito a base di diodi e diodi zener!

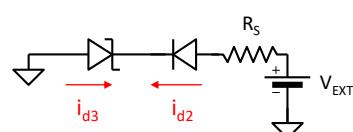
viene sempre trasmesso un segnale ed il suo opposto (se per qualche motivo si ottiene lo stesso segnale significa che la trasmissione non è andata a buon fine).

Esempio: circuito di protezione per porta USB



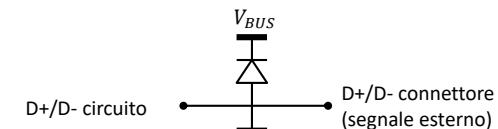
Calcolare le tensioni V_{BUS} e V_{INT} in funzione di V_{EXT}
Ci sono 12 possibili configurazioni
Diodi D1 e D2 (ON o OFF)
Diodo D3 (ON, OFF o ZENER)

D1 OFF - D2 OFF - D3 OFF	D1 OFF - D2 OFF - D3 ON	D1 OFF - D2 OFF - D3 ZENER
D1 OFF - D2 ON - D3 OFF	D1 OFF - D2 ON - D3 ON	D1 OFF - D2 ON - D3 ZENER
D1 ON - D2 OFF - D3 OFF	D1 ON - D2 OFF - D3 ON	D1 ON - D2 OFF - D3 ZENER
D1 ON - D2 ON - D3 OFF	D1 ON - D2 ON - D3 ON	D1 ON - D2 ON - D3 ZENER



Se D2 e D3 sono in serie ($i_{d2} = -i_{d3}$)
Se D2 è OFF allora anche D3 è OFF
Se D2 è ON allora D3 è in ZENER
(→ otteniamo 4 configurazioni
(8 le escludiamo))

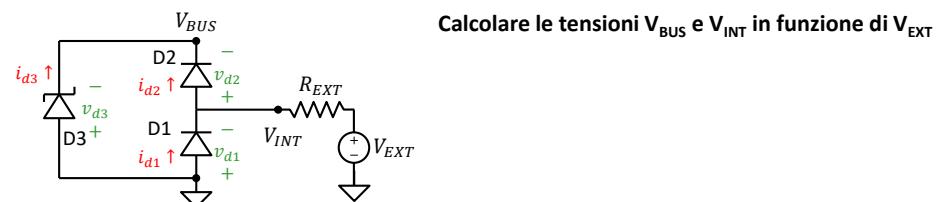
Esempio: circuito di protezione per porta USB



USB 2.0 port application diagram

Circuito alimentato a 5V
(ha una tolleranza di circa 10/20 %)

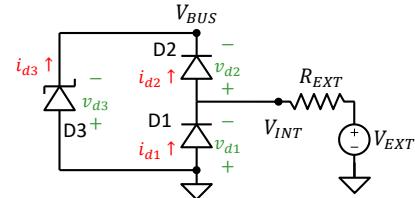
Esempio: circuito di protezione per porta USB



Calcolare le tensioni V_{BUS} e V_{INT} in funzione di V_{EXT}

D1 OFF - D2 OFF - D3 OFF	D1 OFF - D2 OFF - D3 ON	D1 OFF - D2 OFF - D3 ZENER
D1 OFF - D2 ON - D3 OFF	D1 OFF - D2 ON - D3 ON	D1 OFF - D2 ON - D3 ZENER
D1 ON - D2 OFF - D3 OFF	D1 ON - D2 OFF - D3 ON	D1 ON - D2 OFF - D3 ZENER
D1 ON - D2 ON - D3 OFF	D1 ON - D2 ON - D3 ON	D1 ON - D2 ON - D3 ZENER

Esempio: circuito di protezione per porta USB



Calcolare le tensioni V_{BUS} e V_{INT} in funzione di V_{EXT}

Ipotesi D1, D2, D3 OFF

$$V_{INT} = V_{EXT}$$

Lo stesso segnale di ingresso passa in uscita

Verifica della polarizzazione:

$$v_{d1} = -V_{EXT} < V_{ON}$$

$$V_{EXT} > -V_{ON}$$

$$V_{EXT} = v_{d2} - v_{d3}$$

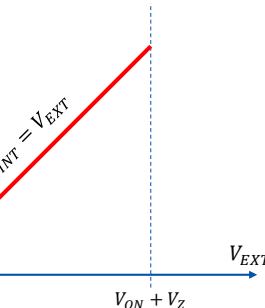
$$-V_Z < v_{d3} < V_{ON}$$

$$\begin{aligned} -\infty &< v_{d2} < V_{ON} \\ -V_{ON} &< -v_{d3} < V_Z \end{aligned}$$

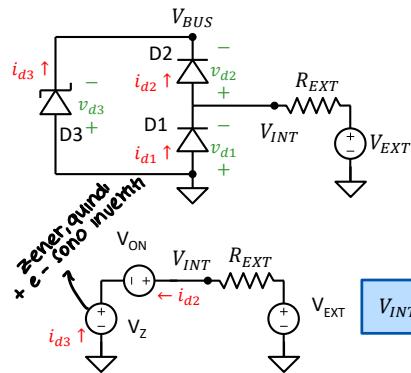
$$-V_{ON} < -v_{d3} < V_Z$$

$$\begin{aligned} -\infty &< v_{d2} - v_{d3} < V_{ON} + V_Z \\ V_{EXT} &< V_{ON} + V_Z \end{aligned}$$

$$V_{EXT} < V_{ON} + V_Z$$



Esempio: circuito di protezione per porta USB



Calcolare le tensioni V_{BUS} e V_{INT} in funzione di V_{EXT}

Ipotesi D1 OFF, D2 ON, D3 zener

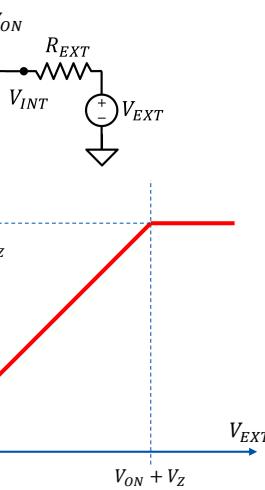
$$V_{INT} = V_{ON} + V_Z$$

Verifica della polarizzazione:

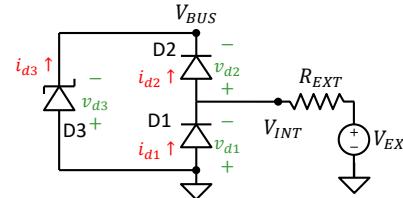
$$v_{d1} = -V_{INT} = -V_{ON} - V_Z < V_{ON}$$

$$i_{d2} = -i_{d3} > 0 \quad i_{d2} = \frac{V_{EXT} - (V_Z + V_{ON})}{R_S} > 0$$

$$V_{EXT} > V_Z + V_{ON}$$



Esempio: circuito di protezione per porta USB



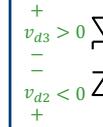
Calcolare le tensioni V_{BUS} e V_{INT} in funzione di V_{EXT}

Ipotesi D1 ON

$$V_{INT} = -V_{ON}$$

Verifica della polarizzazione:

La tensione V_{ON} si ripartisce tra D₃ e D₂



$$\begin{aligned} v_{d3} &> 0 \\ v_{d2} &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v_{d3}| &\leq V_{ON} \\ |v_{d2}| &\leq V_{ON} \end{aligned}$$

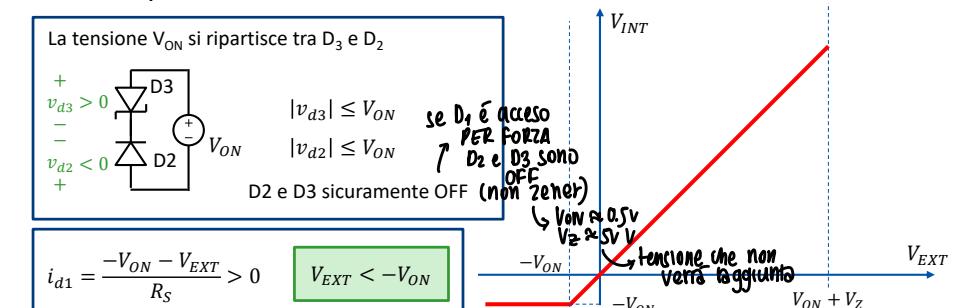
D₂ e D₃ sicuramente OFF (non zener)

se D₁ è acceso PER FORZA D₂ e D₃ SONO OFF (non zener)

$\hookrightarrow V_{ON} \approx 0.5V$

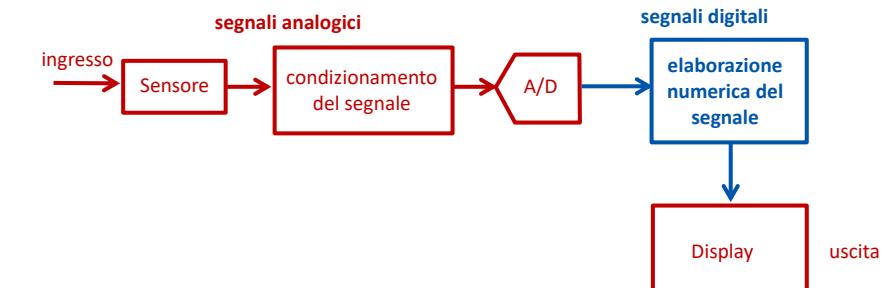
$V_Z \approx 5V$

tensione che non viene raggiunta



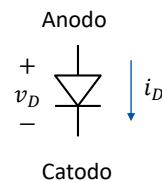
Esempio di sistema elettronico: termometro digitale

SENSORE DI TEMPERATURA



Esempio: il diodo come sensore di temperatura

Caratteristica del diodo (non linearizzata) → esponenziale



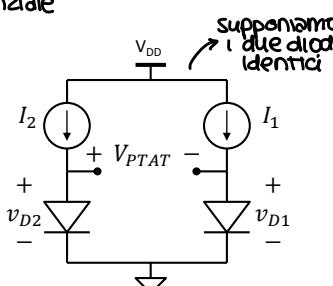
$$i_D = I_S \left[\exp\left(\frac{v_D}{\eta V_T}\right) - 1 \right]$$

$$v_D = V_T \cdot \ln\left(\frac{i_D}{I_S} + 1\right)$$

$$\text{Se } I_1, I_2 \gg I_S \quad v_{D1} = \eta V_T \cdot \ln\left(\frac{I_1}{I_S} + 1\right) \cong \eta V_T \cdot \ln \frac{I_1}{I_S}$$

$$v_{D2} = \eta V_T \cdot \ln\left(\frac{I_2}{I_S} + 1\right) \cong \eta V_T \cdot \ln \frac{I_2}{I_S}$$

$$V_{PTAT} = v_{D2} - v_{D1} = \eta V_T \cdot \ln \frac{I_2}{I_S} - \eta V_T \cdot \ln \frac{I_1}{I_S} = \eta \frac{kT}{q} \cdot \ln \frac{I_2}{I_1}$$



La differenza di potenziale V_{PTAT} fornisce un segnale di tensione proporzionale alla temperatura assoluta

PTAT = Proportional To Absolute Temperature visualizzata poi in °Celsius

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

51

Il condensatore MOS ideale

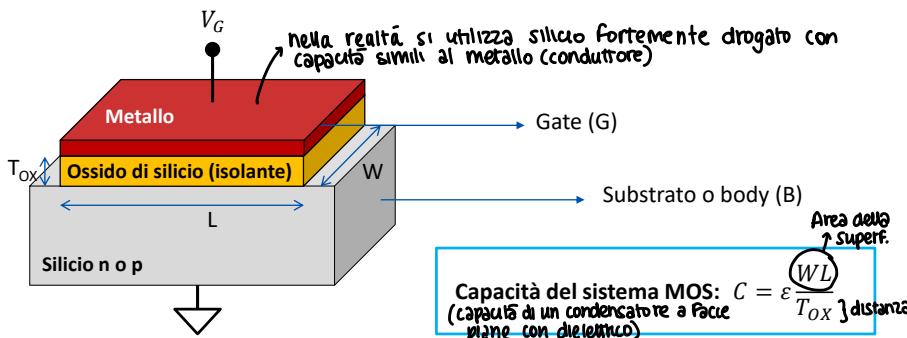
■ **MOS = Metal – Oxide – Semiconductor**

■ Condensatore a facce piane e parallele:

- ◆ Elettrodo superiore (gate) → metallo
- ◆ Elettrodo inferiore (substrato o body) → semiconduttore drogato n o p

■ Assumiamo:

- ◆ Il gate mantenuto a un potenziale V_G (V_{GATE})
- ◆ Il substrato mantenuto al potenziale di riferimento (massa)



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

3

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

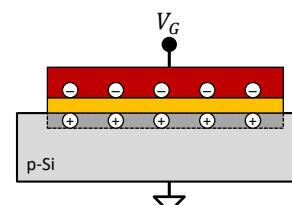
Dispositivi a semiconduttore: il transistor ad effetto di campo MOSFET

Jaeger 6°Ed: Cap. 4 p.163-186

- Struttura e funzionamento del MOSFET
- Relazione tensione-corrente
- Modulazione della lunghezza di canale
- Capacità parassite

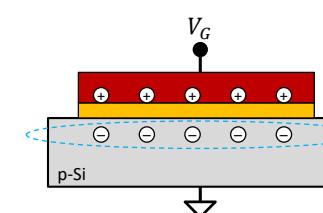
Il condensatore MOS ideale

Substrato di tipo p



ha ruolo di accumulazione di carica

- Se $V_G < 0$:
 - ◆ Il gate si carica negativamente (gli elettroni tendono verso un potenziale più basso)
 - ◆ Il substrato ha carica positiva
- La carica positiva è formata da lacune in eccesso
- Le lacune si accumulano alla superficie in prossimità del dielettrico, formando uno stato sottile
- Questa condizione di polarizzazione è detta **regione di accumulazione** → nel semiconduttore si accumulano lacune in eccesso rispetto alla condizione di equilibrio (gli elettroni tendono verso il gate)
- Se $V_G > 0$:
 - ◆ Il gate si carica positivamente
 - ◆ Il substrato ha carica negativa
- La carica negativa può avere due contributi
 - ◆ Elettroni liberi
 - ◆ Drogante (accettore) non compensato da lacune (come nella RCS dei diodi)
- Quale contributo prevale? Dipende dal valore di V_G

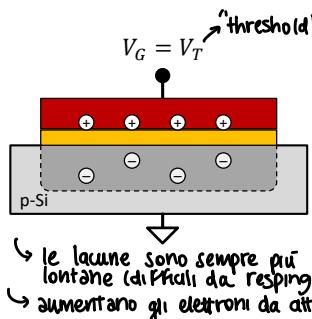
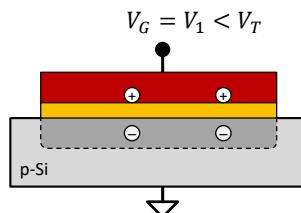


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

4

Il condensatore MOS ideale

Substrato di tipo p



RCS = COMMUTAZIONE DELLA CORRENTE INVERSA

- Se V_G è inferiore a un valore critico V_T :
 - ◆ Le lacune (positive) sono respinte lontano dalla superficie e si forma una regione svuotata di portatori
 - ◆ La regione svuotata ha la carica negativa del drogante ionizzato, ma non compensata dalle lacune
- Aumentando V_G da 0 a V_T la RCS si espande fino a un valore massimo,
- Questa condizione di polarizzazione è detta **regione di svuotamento**, perché il substrato è svuotato dai portatori → **formazione di cattiva spaziale**
- Il valore V_T è detto **tensione di soglia**
A questo valore di tensione si inverte il "trend"

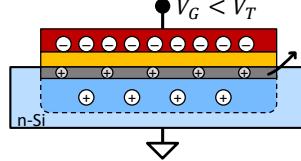
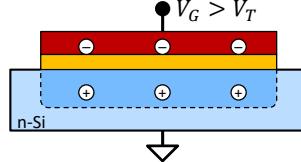
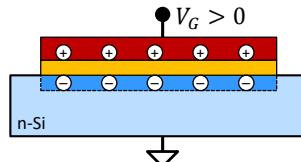
Carica elettrica nel condensatore: $Q = C \cdot V_G$
(approssimativamente)

Carica elettrica massima in
regione di svuotamento
(drogante ionizzato):

$$Q = C \cdot V_T$$

Condensatore MOS ideale

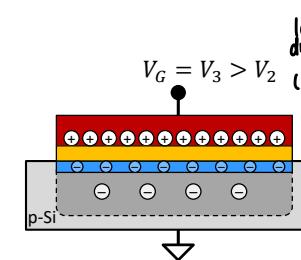
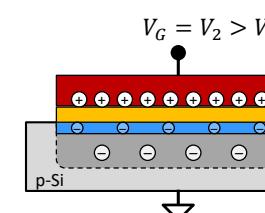
Substrato di tipo n



- $V_G > 0$: carica positiva al gate, negativa nel substrato (protoni tendono verso un potenziale maggiore)
 - ◆ Sottile strato di elettroni accumulati alla superficie del substrato (tipo n) → elettroni in eccedenza rispetto allo stato di equilibrio
 - ◆ **Regione di accumulazione**
- $V_G < 0$: carica negativa al gate, positiva nel substrato. Due casi:
 - ◆ Se $V_G > V_T$:
 - Gli elettroni sono respinti lasciando il droggaggio (carico positivamente) scoperto.
 - Si forma una RCS di carica positiva
 - **Regione di svuotamento**
 - ◆ Se $V_G < V_T$ (più negativa di un valore di soglia)
 - La RCS raggiunge un valore massimo
 - Si forma un sottile strato di lacune alla superficie
 - **Regione di inversione**

Il condensatore MOS ideale

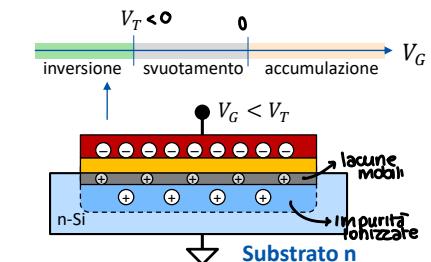
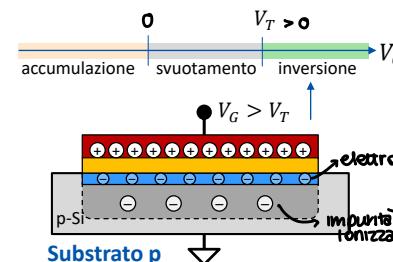
Substrato di tipo p



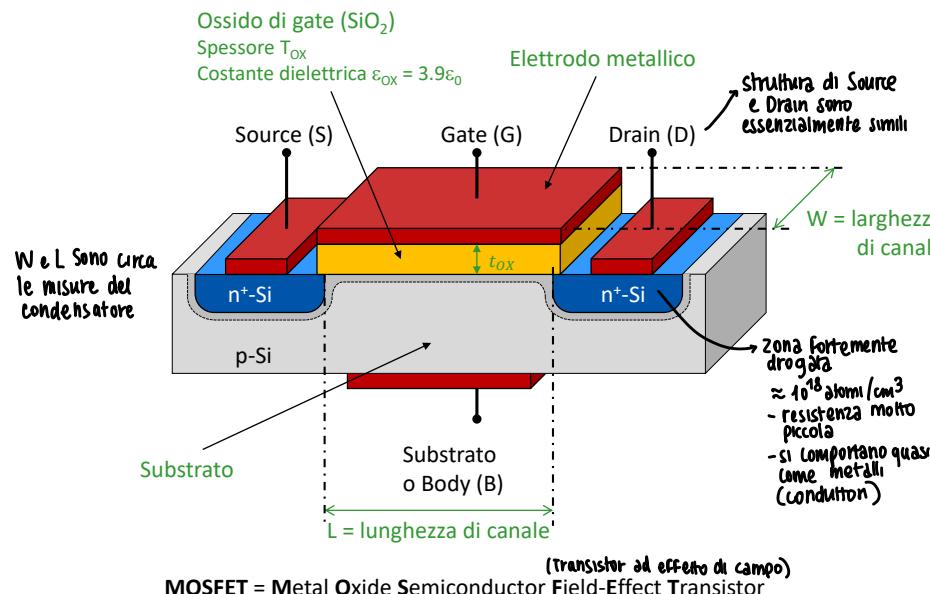
Condensatore MOS: substrato n vs substrato p

- Stesso comportamento ma con polarità invertita
- La regione di inversione si ha per:
 - ◆ V_G maggiore della tensione di soglia, se il substrato è di tipo p
 - ◆ V_G minore della tensione di soglia, se il substrato è di tipo n
- La tensione di soglia è determinata da:
 - ◆ Il livello di droggaggio del substrato.
 - ◆ Il materiale usato per realizzare il gate.
 - ◆ Lo spessore del dielettrico.
- Con un opportuna scelta dei precedenti parametri è possibile creare una carica elettrica nel substrato anche con $V_G = 0$ (come la RCS dei diodi). Ciò permette di realizzare anche NMOS con $V_T < 0$ e PMOS con $V_T > 0$

* utilizzando un silicio fortemente drogato si ottiene una spesa di potenziale intrinseco e la tensione di soglia può cambiare di segno (ed il valore soglia tra regione di svuotamento ed accumulazione diventa diverso da 0)



Struttura di un MOSFET a canale n (n-MOSFET)

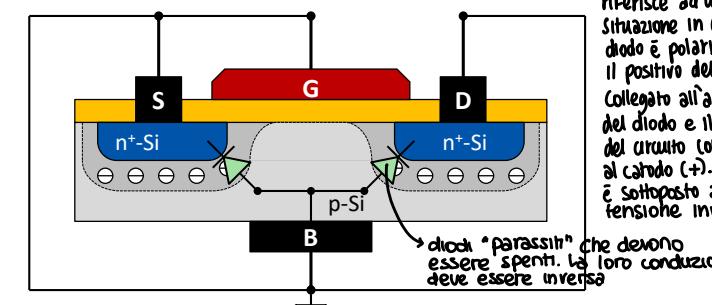


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

10

MOSFET in equilibrio (polarizzazione nulla)

- Il terminale B è l'anodo comune di due diodi uno tra B e S e l'altro tra B e D.
- Si forma una RCS nelle due giunzioni pn.
- Tra il gate e il substrato c'è uno strato di SiO_2 (isolante), perciò il gate è isolato dal resto del sistema e non conduce corrente in condizioni stazionarie.
- Il gate forma con il resto del sistema un condensatore a facce piane e parallele.



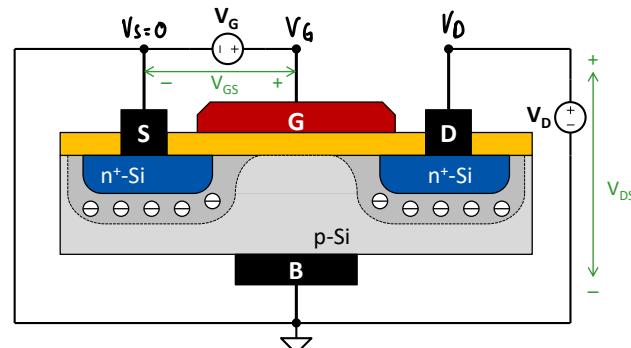
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

11

MOSFET: polarizzazione

Per convenzione consideriamo:

- ◆ Il source come elettrodo di riferimento per le tensioni (il potenziale del nodo S è $V_S = 0$).
- ◆ Il drain collegato a un generatore di tensione V_D . Definiamo V_{DS} la tensione tra il nodo D e il nodo S ($V_{DS} = V_D - V_S = V_D$).
- ◆ Il gate collegato a un generatore di tensione V_G . Definiamo V_{GS} la tensione tra il nodo G e il nodo S ($V_{GS} = V_G - V_S = V_G$).
- ◆ Per il momento il terminale B è cortocircuitato con il terminale S.



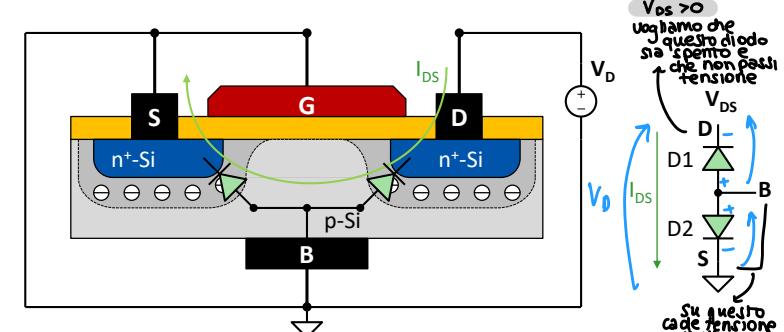
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

12

Consideriamo i terminali S e B a massa ($V_S = V_B = 0$) e applichiamo le tensioni $V_{GS} = 0$ al gate e $V_{DS} = V_D - V_S > 0$ al drain (rispetto al source):

- ◆ La tensione V_D deve essere positiva altrimenti il diodo D1 (tra B e D) sarebbe in polarizzazione diretta e la corrente elevatissima potrebbe danneggiare il dispositivo.
- ◆ Il diodo D1 è in inversa e il diodo D2 è in (debole) diretta. Tuttavia non passa corrente poiché è bloccata da D1.

- Definiamo I_{DS} la corrente che scorre tra D e S.
- La corrente I_{DS} è nulla per qualsiasi $V_{DS} > 0$

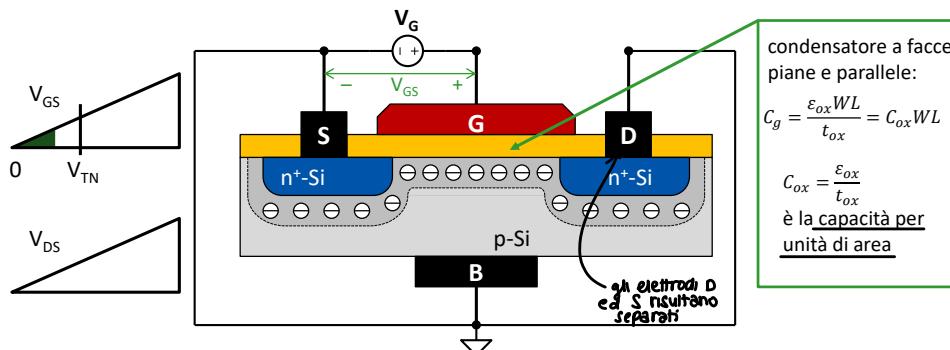


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

13

MOSFET: effetto della tensione gate-source (V_{GS})

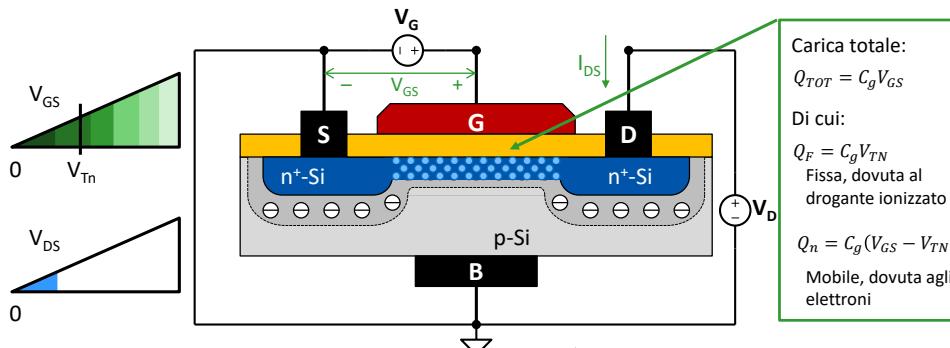
- Se $V_{GS} \neq 0$ e $V_{DS} = 0$ il sistema si comporta come un condensatore MOS: Il gate si carica positivamente, il substrato negativamente.
- Da dove proviene la carica negativa nel substrato? Due contributi:
 - Lacune che "se ne vanno", lasciando drogante non ionizzato scoperto.
 - Elettroni richiamati dal contatto di substrato (B) che si accumulano all'interfaccia con l'ossido.
- Se $V_{GS} < V_{TN}$ prevale il primo contributo e si forma la RCS sotto il gate
- Anche se applichiamo $V_{DS} > 0$ non si legge corrente.
- Il MOSFET si dice spento o interdetto (risulta tutto essere un circuito aperto)



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

14

MOSFET: effetto della tensione gate-source (V_{GS})



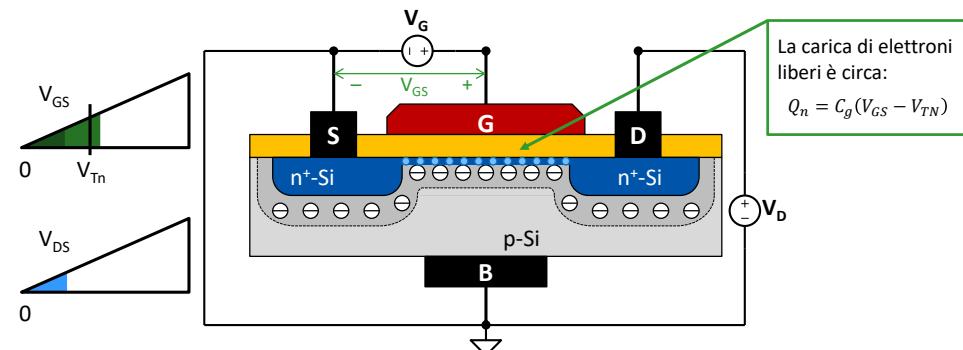
- Il canale si comporta come una resistenza variabile.
- La corrente di drain dipende dalla resistività del canale (ossia dal numero di elettroni liberi nel canale)
- Aumentando V_{GS} aumenta la quantità di elettroni nel canale e la resistenza diminuisce.
- Se V_{DS} è molto piccola l'andamento di I_{DS} in funzione di V_{DS} è circa lineare. *(la corrente da S a D)*
- Se $V_{DS} > 0$ i diodi sono spenti → gli elettroni vanno da S a D (source emette gli elettroni il "canale di scolo", drain li raccoglie).

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

16

MOSFET: effetto della tensione gate-source (V_{GS})

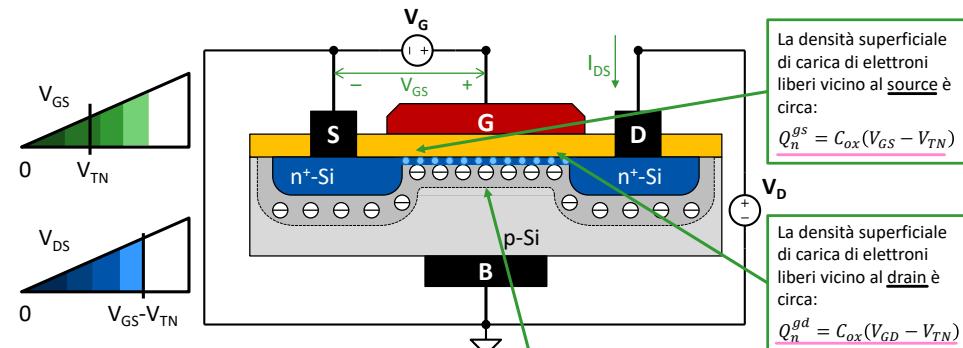
- Se $V_{GS} > V_{TN}$ si forma lo strato di elettroni alla superficie del semiconduttore detto canale.
- Gli elettroni sono liberi e il canale collega elettricamente il source e il drain.
- V_{TN} è detta anche **tensione di soglia** del transistor
- Applicando una tensione V_{DS} si osserva una corrente $I_{DS} > 0$.
- In queste condizioni di polarizzazione si dice che il MOSFET è **acceso**.



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

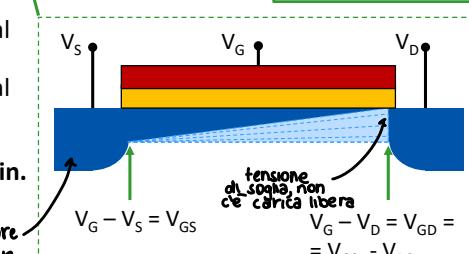
15

MOSFET: effetto della tensione drain-source (V_{DS})



- La tensione tra gate e canale vicino al source è $V_G - V_S = V_{GS}$
- La tensione tra gate e canale vicino al drain è $V_G - V_D = V_{GD} = V_{GS} - V_{DS}$
- La densità del canale elettronico tende a ridursi in prossimità del drain.
- Se $V_{GD} = V_{TN}$, il canale si annulla.

$V_{DS} = 0 \rightarrow$ tutto uniforme
 $V_{DS} > 0 \rightarrow$ si riduce la quantità di e- verso il drain

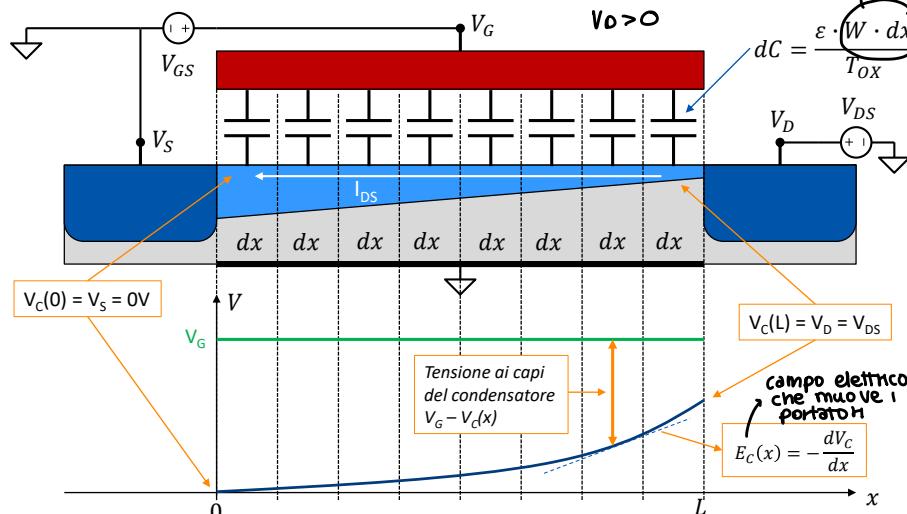


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

17

MOSFET: corrente drain-source

- Il canale del MOSFET è assimilabile a tanti piccoli condensatori MOS in sequenza.
- La tensione ai capi di ciascun piccolo condensatore è $V_G - V_C(x)$
- V_C dipende da x e vale $V_S = 0$ al source ($x = 0$) e $V_D = V_{DS}$ al drain ($x = L$)

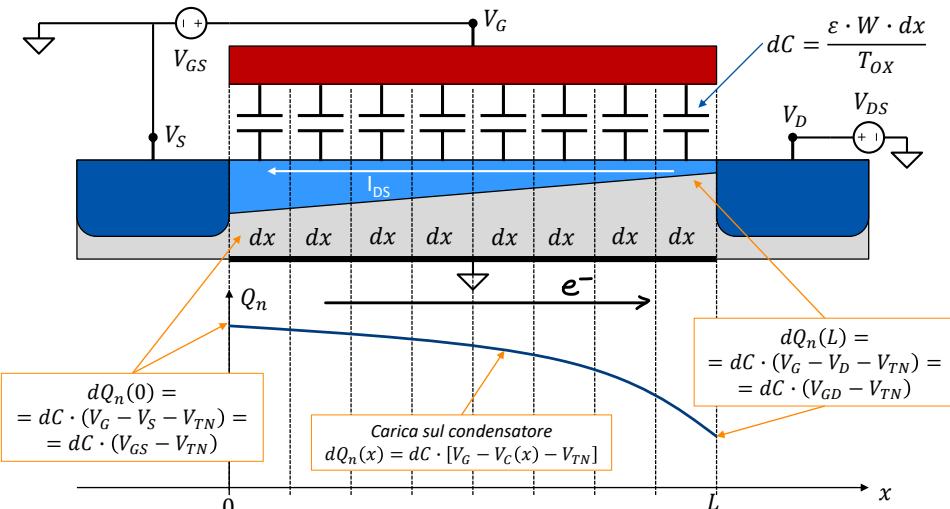


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

18

MOSFET: corrente drain-source

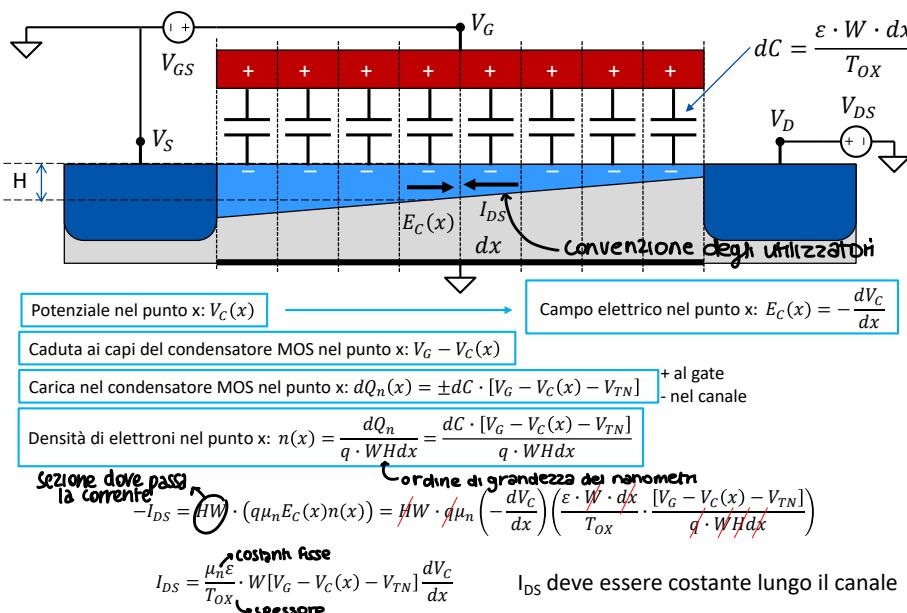
- La densità del canale si riduce spostandosi dal source ($x=0$) al drain ($x=L$):
 - $dQ_n(0) = dC \cdot (V_{GS} - V_{TN})$ al source
 - $dQ_n(L) = dC \cdot (V_{GD} - V_{TN})$ al drain



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

19

MOSFET: corrente drain-source



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

20

MOSFET: corrente drain-source

$$I_{DS} = \frac{\mu_n \epsilon}{T_{ox}} \cdot W [V_G - V_C(x) - V_{TN}] \frac{dV_C}{dx} \quad I_{DS} \text{ deve essere costante lungo il canale in condizioni stazionarie}$$

Integriamo entrambi i membri da 0 a L

$$\int_0^L I_{DS} dx = \int_0^L \frac{\mu_n \epsilon}{T_{ox}} \cdot W [V_G - V_C(x) - V_{TN}] \frac{dV_C}{dx} dx$$

I_{DS} è costante

$$I_{DS} L = \int_{V_S}^{V_D} \frac{\mu_n \epsilon}{T_{ox}} \cdot W [V_G - V_C - V_{TN}] dV_C = \frac{\mu_n \epsilon}{T_{ox}} \cdot W \left[-\frac{1}{2} (V_G - V_C - V_{TN})^2 \right]_{V_S}^{V_D} \quad V_G - V_D = V_{GS} - V_{DS}$$

$$I_{DS} = \frac{\mu_n \epsilon \cdot W}{T_{ox} \cdot L} \left[\frac{(V_G - V_S - V_{TN})^2}{2} - \frac{(V_G - V_D - V_{TN})^2}{2} \right]_{V_S}^{V_D}$$

Struttura del transistor
Accorpiamo tutte le costanti e definiamo:

$$k_n = \frac{\mu_n \epsilon \cdot W}{T_{ox} \cdot L}$$

per noi sarà sempre un parametro noto

$$I_{DS} = k_n \left[(V_{GS} - V_{TN}) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

V_G e V_D non appaiono più esplicitamente

$\frac{dI_{DS}}{dV_{DS}} = k_n [(V_{GS} - V_{TN}) - V_{DS}] = 0$

nel punto di massima $V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$

Concavità verso il basso

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

21

MOSFET: corrente drain-source

- Il procedimento è valido se esiste il canale conduttivo tra il source e il drain:
 - $V_{GS} > V_{TN}$
 - $V_{GD} > V_{TN}$

- La seconda condizione si riscrive:

$$V_G - V_D > V_{TN}$$

$$V_D < V_G - V_{TN}$$

$$V_D - V_S < V_G - V_S - V_{TN}$$

$$V_{DS} < V_{GS} - V_{TN} \rightarrow \text{condizione di validità}$$

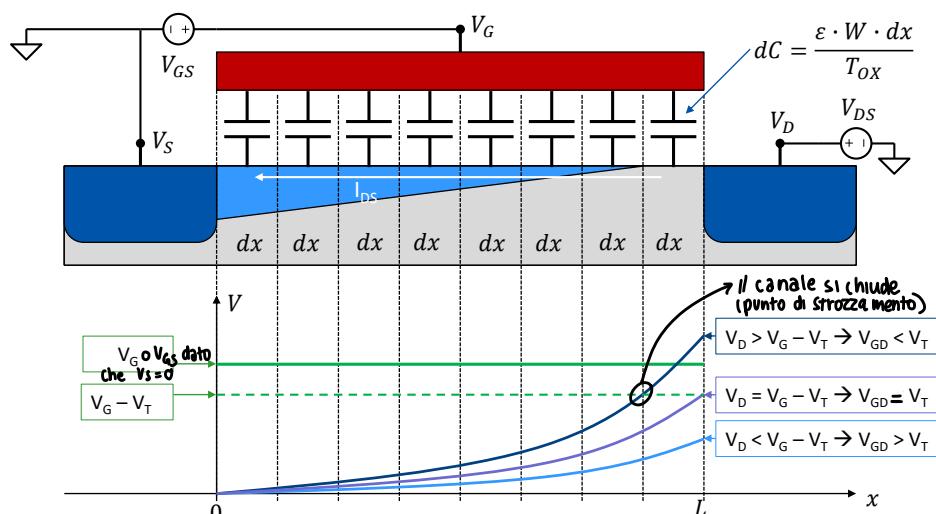
- Questa condizione ($V_{GS} > V_{TN}$ e $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$) è chiamata **regione lineare o regione triodo**

- Per $V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$ la corrente raggiunge il massimo della parabola:

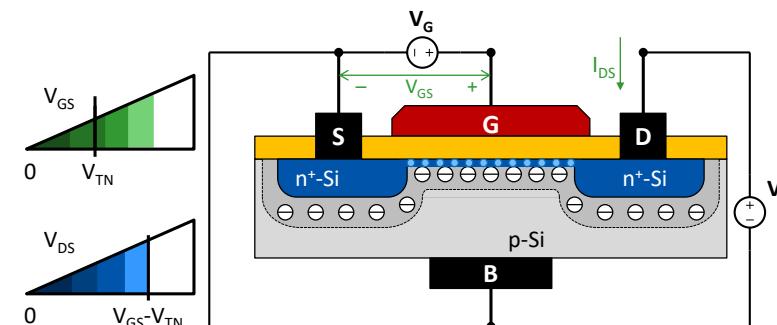
$$I_{DS} = k_n \left[(V_{GS} - V_{TN})(V_{GS} - V_{TN}) - \frac{(V_{GS} - V_{TN})^2}{2} \right] = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2$$

MOSFET: corrente I_{DS} in funzione di V_{DS}

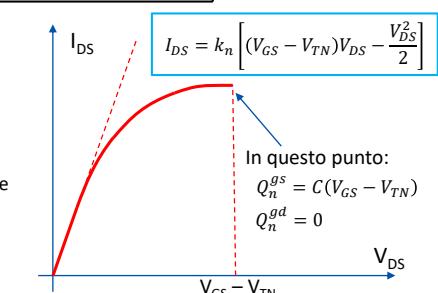
- Per $V_{GD} > V_{TN}$ ($V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$) il canale è formato ovunque
- Per $V_{GD} = V_{TN}$ ($V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$) il canale si annulla al drain ($x = L$)
- Per $V_{GD} < V_{TN}$ ($V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$) il canale si annulla prima di raggiungere il drain ($x < L$)



MOSFET: corrente I_{DS} in funzione di V_{DS}

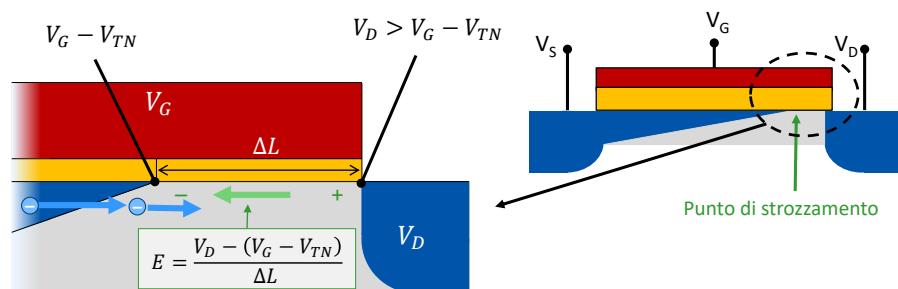


- La progressiva riduzione della carica elettronica in prossimità del drain fa aumentare la resistenza del canale
- A basse V_{DS} l'effetto è trascurabile e I_{DS} è circa lineare
- All'aumentare di V_{DS} , l'effetto è sempre più marcato e la pendenza della curva cala.
- Quando $V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$ ($V_{GD} = V_{GS} - V_{DS} = V_{TN}$), il canale si chiude al drain e la corrente raggiunge il massimo della parabola.
- E poi?

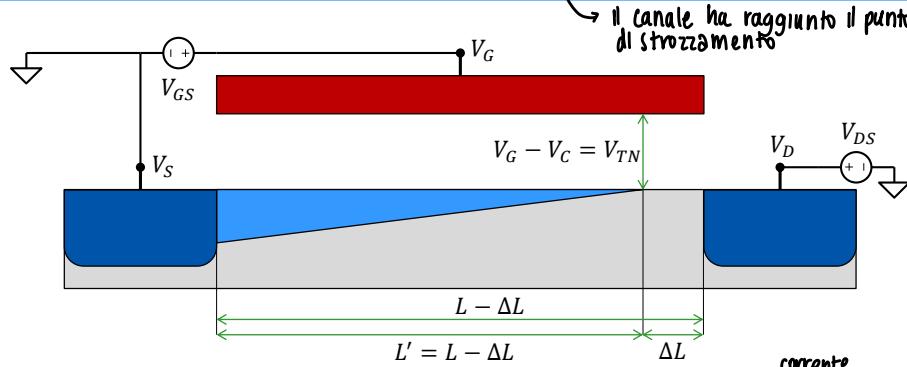


MOSFET: corrente I_{DS} per $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$

- Gli elettroni che arrivano dal canale entrano nella RCS
- Nella RCS il campo elettrico è orientato dal drain al punto di strozzamento (la corrente è orientata in verso opposto)
- Il campo elettrico spinge gli elettroni verso il drain (potenziale maggiore) → gli elettroni si muovono controcampo
- Approssimativamente: la corrente I_{DS} rimane costante



MOSFET: corrente I_{DS} per $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$

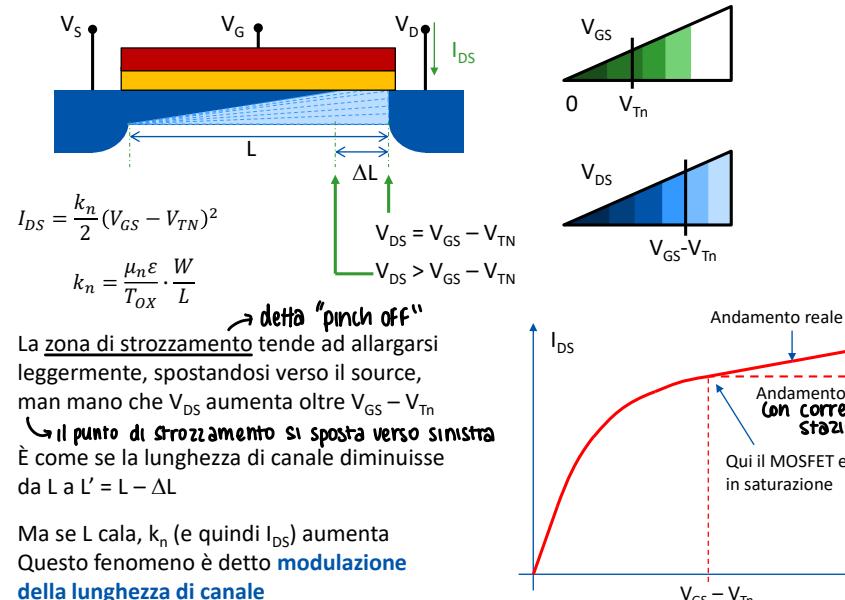


Idealmente, I_{DS} si calcola come in un MOSFET con polarizzazione V_{GS} e $V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$

$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2$$

Questa regime di funzionamento è definito **regione di saturazione**

Regione di saturazione più in dettaglio



Modulazione della lunghezza di canale in saturazione

$$\text{Prefattore di corrente: } k_n = \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{T_{ox}} \frac{W}{L}$$

$$\text{Sostituendo } L \text{ con } L - \Delta L: \quad \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{T_{ox}} \frac{W}{L - \Delta L} = \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{T_{ox}} \frac{W}{L \left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right)} = k_n \cdot \left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right)^{-1}$$

$$\text{Generalmente } \Delta L \ll L. \text{ Sviluppiamo in serie di Taylor al primo ordine: } \left(1 - \frac{\Delta L}{L}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{\Delta L}{L}$$

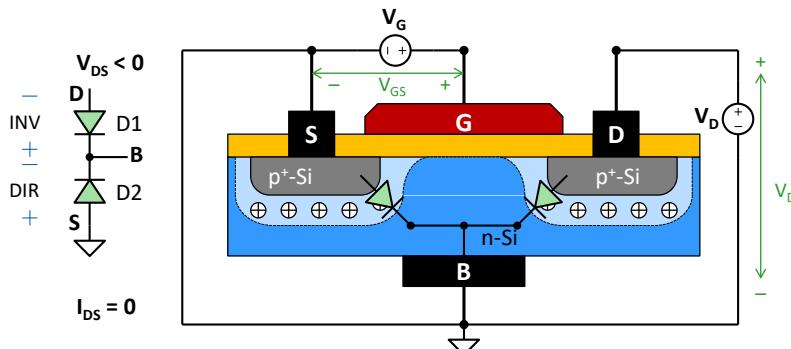
$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)$$

$$\text{Assumendo lineare la variazione percentuale di } L \text{ in funzione di } V_{DS}: \quad \frac{\Delta L}{L} = \lambda V_{DS}$$

$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda V_{DS}) \quad \text{Valida se } V_{DS} \gg V_{GS} - V_{TN}$$

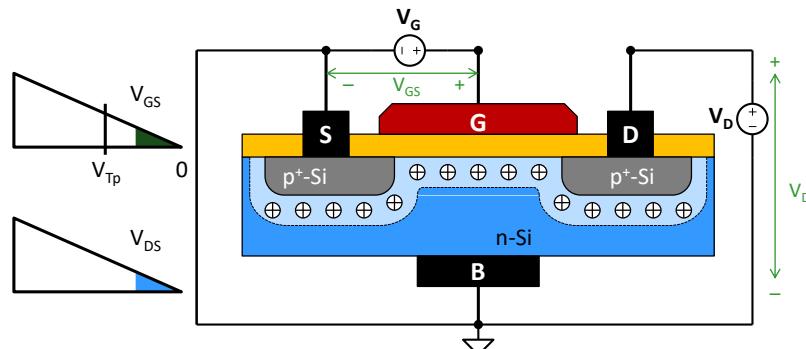
$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 \quad k_n = \frac{\mu_n \epsilon}{T_{ox}} \cdot \frac{W}{L} \quad \text{Valida altrimenti}$$

PMOSFET: polarizzazione



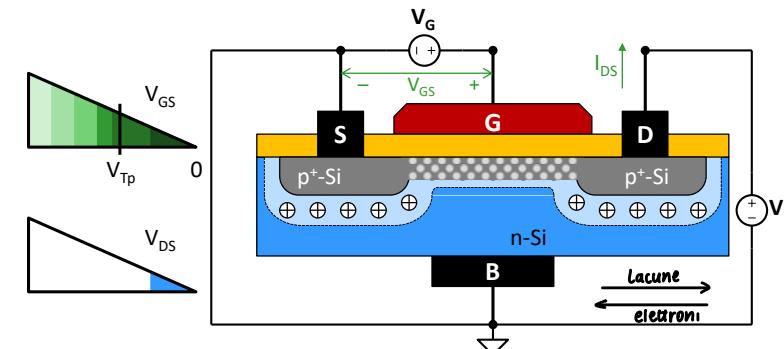
- Assumiamo il source come elettrodo di riferimento ($V_S=0$), B cortocircuitato con S, gate e drain collegati ai due generatori V_G e V_D .
- B è il **catodo comune** di due diodi: uno tra B e S e l'altro tra B e D.
- ◆ V_D deve essere negativa per mantenere in inversa il diodo tra D e B.
- ◆ Si forma una RCS nelle due giunzioni pn.
- Se $V_{GS} = 0$, il diodo D1 è in diretta, ma D2 è in inversa. Non passa corrente. Il MOSFET è spento (zona di interdizione)

PMOSFET: polarizzazione

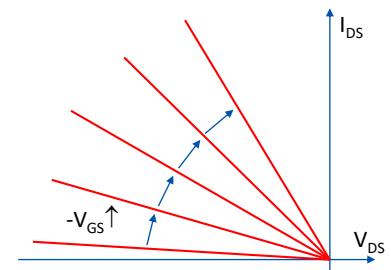


- Il sistema gate-ossido-substrato si comporta in modo analogo a un NMOSFET, ma con i segni invertiti.
- Se $V_{GS} < 0$ e $V_{DS} = 0$, il gate si carica negativamente, il substrato positivamente. La carica positiva proviene da:
 - elettroni che "se ne vanno", lasciando drogante donatore non ionizzato scoperto.
 - lacune richiamate dal contatto di substrato (B) che si accumulano all'interfaccia con l'ossido.
- Se $-V_{GS}$ è inferiore a un valore critico (**tensione di soglia**, V_{Tp}) prevale il primo contributo e si forma una RCS sotto il gate, fatta da donatori ionizzati. **Il MOSFET rimane spento**

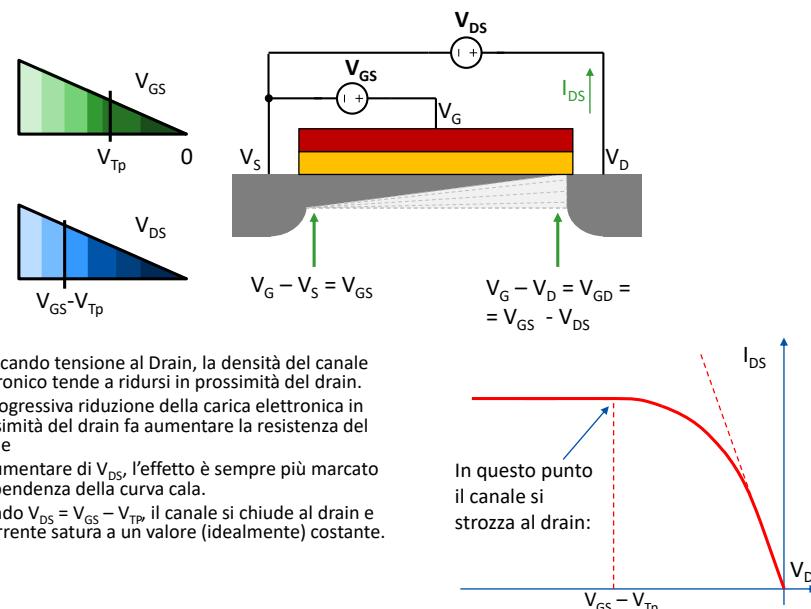
PMOSFET: tensione di gate



- Se $V_{GS} < V_{Tp}$ si forma un canale di lacune libere sotto l'ossido.
- Aumentando V_{GS} aumenta la quantità di lacune nel canale e la resistenza diminuisce.
- Se $V_{DS} (< 0)$ è molto piccola l'andamento di I_{DS} in funzione di V_{DS} è circa lineare.
- Le lacune si spostano dal source al drain (la corrente esce dal drain!)** (gli e- vanno, invece, dal drain al source)



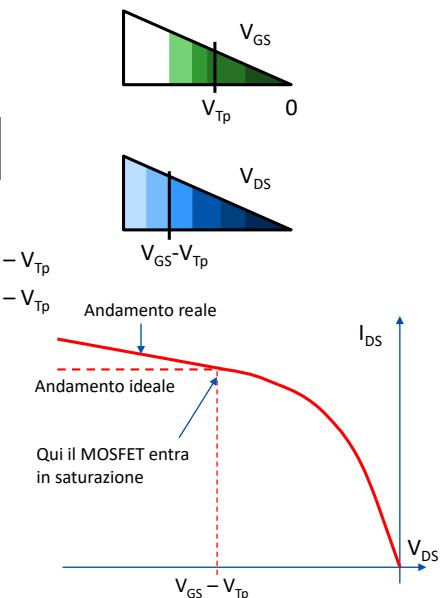
PMOSFET: tensione di gate



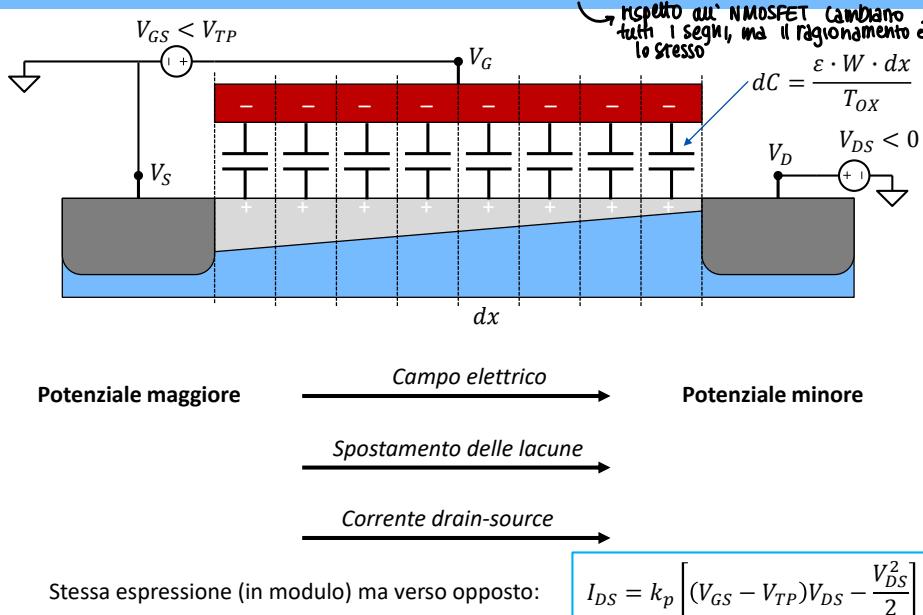
- Applicando tensione al Drain, la densità del canale elettronico tende a ridursi in prossimità del drain.
- La progressiva riduzione della carica elettronica in prossimità del drain fa aumentare la resistenza del canale
- All'aumentare di V_{DS} , l'effetto è sempre più marcato e la pendenza della curva cala.
- Quando $V_{DS} = V_{GS} - V_{Tp}$ il canale si chiude al drain e la corrente satura a un valore (idealemente) costante.

La zona di strozzamento tende ad allargarsi leggermente, spostandosi verso il source, man mano che $|V_{DS}|$ aumenta oltre $|V_{GS} - V_{Tp}|$. Il conto è analogo all'NMOSFET

$$I_{DS} = \frac{1}{2} k_p (V_{GS} - V_{Tp})^2 (1 + \lambda |V_{DS}|)$$



PMOSFET: corrente drain-source



Classificazione dei MOSFET

- Il transistor NMOSFET:
 - ◆ si basa sul condensatore MOS a **substrato p**.
 - ◆ forma il canale di **elettroni** se la tensione tra gate è abbastanza **alta**: $V_{GS} > V_{TN}$.
 - ◆ Lavora con $V_{DS} > 0$
- Normalmente $V_{TN} > 0$, quindi $I_{DS} (V_{GS} = 0) = 0$.
- Con particolari accorgimenti tecnologici (droggaggio del substrato, spessore del dielettrico, materiale dell'elettrodo di gate) è possibile realizzare NMOS con $V_{TN} < 0$. Quindi $I_{DS} (V_{GS} = 0) > 0$.
- In base al segno di V_{TN} distinguiamo due sotto tipi di NMOSFET:
 - ◆ **NMOSFET ad arricchimento** (Enhancement NMOSFET).
Acronimo: E-NMOSFET
Tensione di soglia: $V_{TN} > 0$
Se $V_{GS} = 0$, il MOSFET è spento
 - ◆ **NMOSFET a svuotamento** (Depletion NMOSFET)
Acronimo: D-NMOSFET
Tensione di soglia: $V_{TN} < 0$
Se $V_{GS} = 0$, il MOSFET è acceso
- Il funzionamento dei MOSFET ad arricchimento e svuotamento è identico!
Cambia solo il segno di V_{TN}

Classificazione dei MOSFET

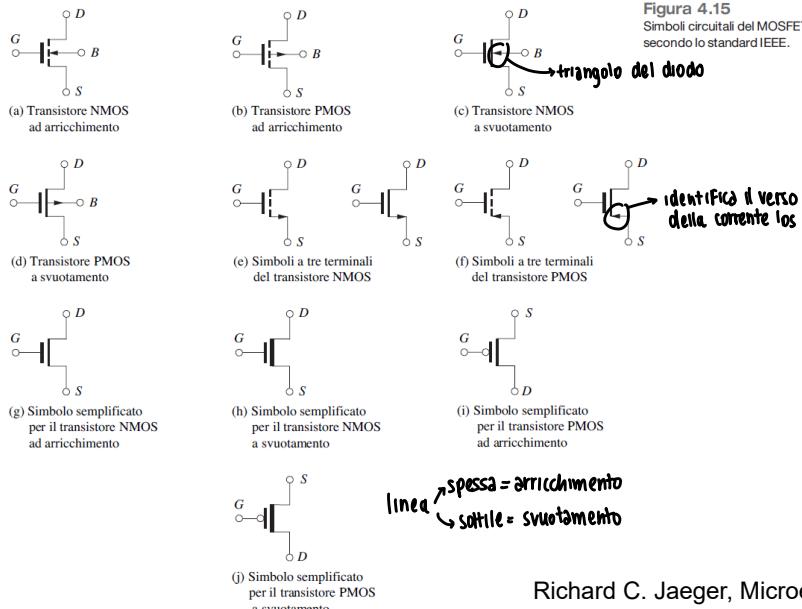
RIASSUNTO CARATTERISTICHE P-MOSFET ED N-MOSFET:

- Esistono due tipi di MOSFET.
 - ◆ **NMOSFET** (detto anche **MOSFET a canale n** o **MOSFET di tipo n**), se lavora a tensioni positive (spesso abbreviato in NMOS o nMOS)
 - ◆ **PMOSFET** (detto anche **MOSFET a canale p** o **MOSFET di tipo p**), se lavora a tensioni negative (spesso abbreviato in PMOS o pMOS).
- Il funzionamento di NMOSFET e PMOSFET è identico, cambia solo il tipo di portatore nel canale, la polarità delle tensioni applicate e il verso della corrente.

Classificazione dei MOSFET

- Il transistor PMOSFET:
 - ◆ si basa sul condensatore MOS a **substrato n**.
 - ◆ forma il canale di **lacune** se la tensione tra gate è abbastanza **bassa**: $V_{GS} < V_{TP}$.
 - ◆ Lavora con $V_{DS} < 0$
- Normalmente $V_{TP} < 0$, quindi $I_{DS} (V_{GS} = 0) = 0$.
- Con particolari accorgimenti tecnologici (droggaggio del substrato, spessore del dielettrico, materiale dell'elettrodo di gate) è possibile realizzare NMOS con $V_{TP} > 0$. Quindi $I_{DS} (V_{GS} = 0) > 0$.
- In base al segno di V_{TP} distinguiamo due sotto tipi di PMOSFET:
 - ◆ **PMOSFET ad arricchimento** (Enhancement PMOSFET).
Acronimo: E-PMOSFET
Tensione di soglia: $V_{TP} < 0$
Se $V_{GS} = 0$, il MOSFET è spento
 - ◆ **PMOSFET a svuotamento** (Depletion PMOSFET)
Acronimo: D-PMOSFET
Tensione di soglia: $V_{TP} > 0$
Se $V_{GS} = 0$, il MOSFET è acceso
- Il funzionamento dei MOSFET ad arricchimento e svuotamento è identico!
Cambia solo il segno di V_{TP}

Simboli



Richard C. Jaeger, Microelettronica

Simboli usati nelle slide

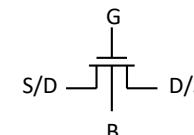
	NMOSFET	PMOSFET
Simbolo a 3 terminali		
ARRICHIIMENTO	$V_{TN} > 0$	$V_{TP} < 0$
SVUOTAMENTO	$V_{TN} < 0$	$V_{TP} > 0$

Nelle slide se non è rilevante il tipo di MOSFET (arricchimento e svuotamento) sarà usato il simbolo del MOSFET ad arricchimento (ed in caso indicheremo la tensione di soglia dei MOSFET).

	NMOSFET	PMOSFET
Simbolo a 3 terminali		

Se invece, è indispensabile indicare il tipo di MOSFET (arricchimento e svuotamento) useremo questo simbolo per il MOSFET a svuotamento

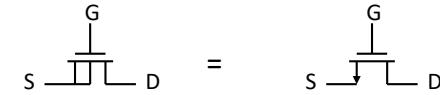
Alcune precisazioni sul simbolo del MOSFET



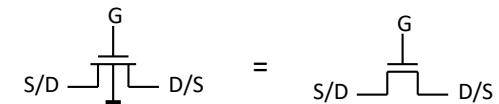
Il MOSFET è un dispositivo a 4 terminali.

In linea di principio il S e i D sono due terminali identici e intercambiabili

Se B e S sono cortocircuitati internamente allora il MOSFET diventa a 3 terminali e il source diventa il terminale cortocircuitato con il substrato



Se B è collegato ad un potenziale di riferimento allora il MOSFET si comporta come se avesse 3 terminali liberi, e S e D sono intercambiabili. Questa situazione è tipica dei circuiti digitali.



Corrente di drain-source (NMOS) - curva tensione/corrente

Zona di interdizione o cut-off

$$V_{GS} < V_{TN} \quad I_{DS} = 0$$

MOSFET spento → source e drain sono un circuito aperto

Zona lineare o triodo

Source e drain sono collegati da un canale conduttivo. La conducibilità dipende sia dalla tensione V_{GS} sia dalla tensione V_{DS} .

$$V_{GS} > V_{TN} \quad V_{DS} < V_{GS} - V_{TN} \quad I_{DS} = k_n \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS}$$

$$k_n = \frac{\mu_n \epsilon_{ox} W}{T_{ox} L} = k'_n Z_n$$

$$V_{DS} \geq 0$$

$$k'_n = \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{T_{ox}} \quad Z_n = \frac{W}{L} \quad Z_n \text{ è detto fattore di forma}$$

Zona di saturazione

Source e drain sono collegati da un canale conduttivo. La conducibilità dipende solo dalla tensione V_{GS}

$$V_{GS} > V_{TN} \quad V_{DS} > V_{GS} - V_{TN} \quad I_{DS} = \frac{1}{2} k_n (V_{GS} - V_{TN})^2$$

$$I_{DS} = \frac{1}{2} k_n (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS}) \quad V_{DS} \geq 0$$

(Includendo la modulazione della lunghezza di canale)

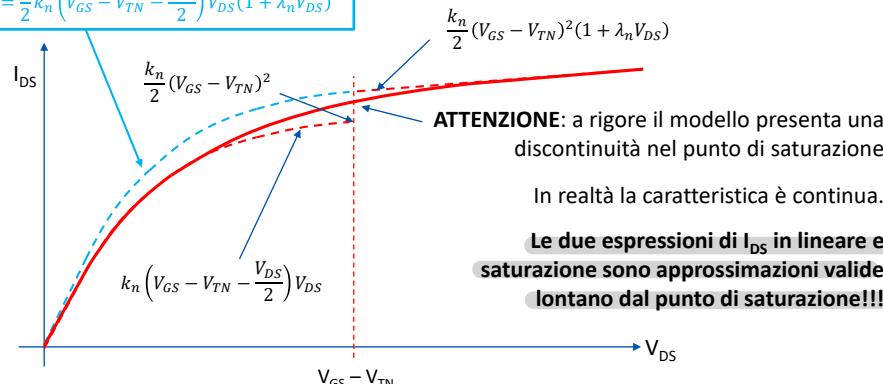
Modulazione della lunghezza di canale in saturazione

Corrente in lineare: $I_{DS} = k_n \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS}$ Valida se $V_{DS} \ll V_{GS} - V_{TN}$

Corrente in saturazione: $I_{DS} = \frac{1}{2} k_n (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS})$ Valida se $V_{DS} \gg V_{GS} - V_{TN}$

In molti casi, per risolvere il problema della non continuità si usa il termine di modulazione della lunghezza di canale anche in lineare

$$I_{DS} = \frac{1}{2} k_n \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS} (1 + \lambda_n V_{DS})$$



Caratteristiche tensione corrente di un NMOSFET

- La corrente di drain di un MOSFET dipende da due tensioni:

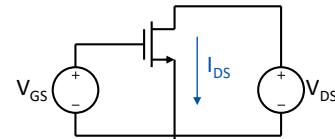
- La tensione V_{GS} che modula la conducibilità tra source e drain
- La tensione V_{DS} che determina quanta corrente passa nel canale in modo analogo a una resistenza, seppure non lineare.

- Per tracciare la relazione tensione-corrente, è necessario usare due famiglie di curve:

- La **caratteristica di uscita**, detta $I_{DS}-V_{DS}$, che mostra la corrente di drain (asse y) in funzione della tensione drain-source (asse x), usando V_{GS} come parametro
- La **caratteristica di trasferimento** (o **transcaratteristica**), detta $I_{DS}-V_{GS}$, che mostra la corrente di drain (asse y) in funzione della tensione gate-source (asse x), usando V_{DS} come parametro.

Caratteristiche tensione corrente di un NMOSFET

Caratteristica di uscita

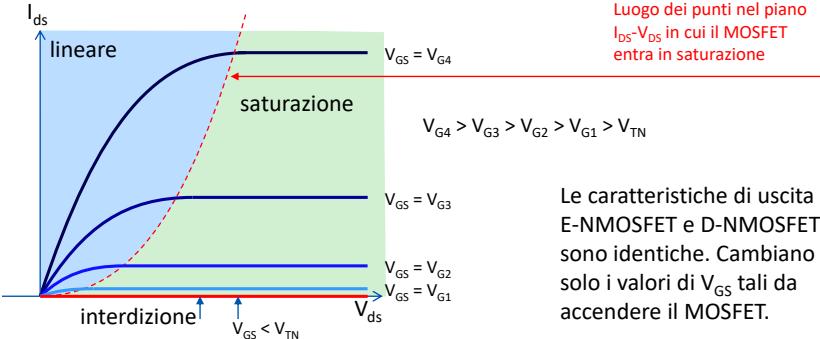


Il punto in cui il MOSFET passa dalla zona lineare e la saturazione è $V_{DS} = V_{GS} - V_{TN}$

La corrente in questo punto è:

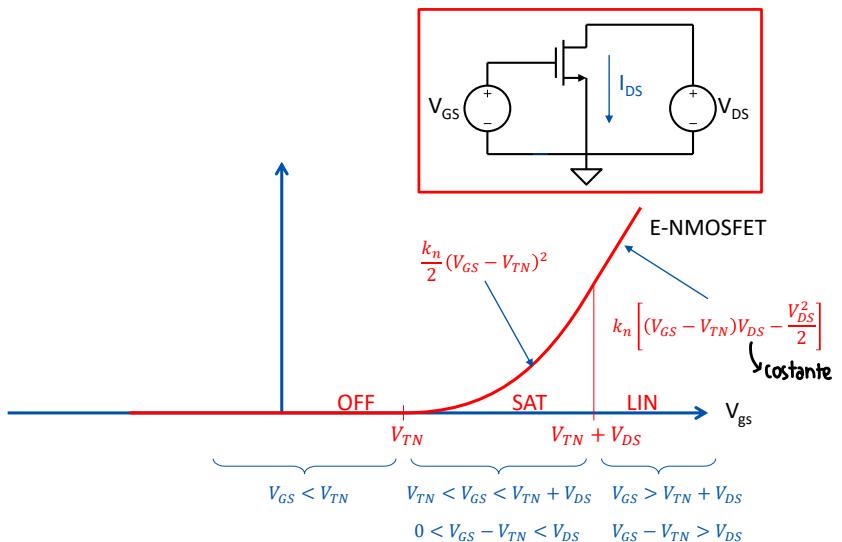
$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 = \frac{k_n}{2} V_{DS}^2$$

Luogo dei punti nel piano $I_{DS}-V_{DS}$ in cui il MOSFET entra in saturazione



Le caratteristiche di uscita di E-NMOSFET e D-NMOSFET sono identiche. Cambiano solo i valori di V_{GS} tali da accendere il MOSFET.

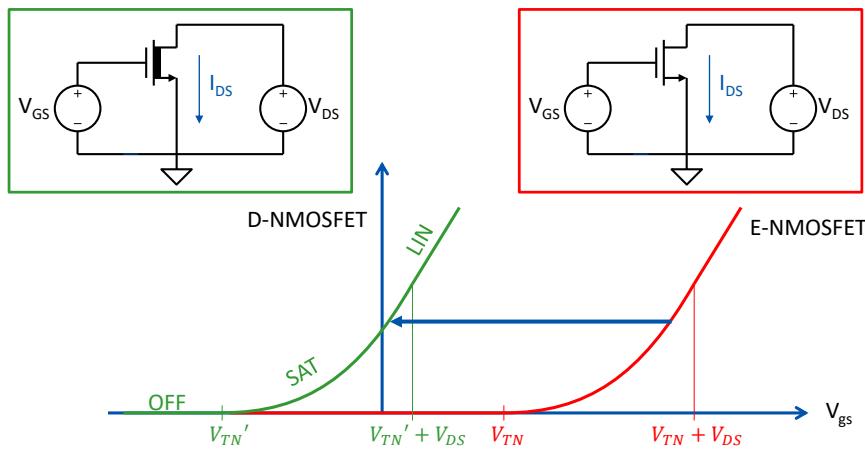
Transcaratteristica MOSFET ad acciappamento



Caratteristiche tensione corrente di un NMOSFET

Transcaratteristica

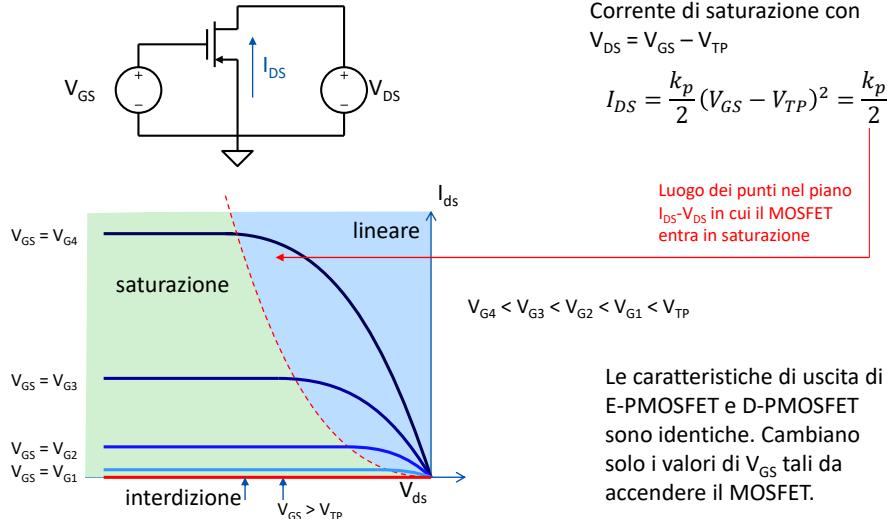
MOSFET a svuotamento



La forma della transcaratteristica di un D-NMOSFET è la stessa di un E-NMOSFET, ma è traslata a tensioni più negative: $V'_TN < 0 < V_{TN}$

Caratteristiche tensione corrente di un PMOSFET

Caratteristica di uscita



Corrente di saturazione con $V_{DS} = V_{GS} - V_{TP}$

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2 = \frac{k_p}{2} V_{DS}^2$$

Luogo dei punti nel piano $I_{DS}V_{DS}$ in cui il MOSFET entra in saturazione

Le caratteristiche di uscita di E-PMOSFET e D-PMOSFET sono identiche. Cambiano solo i valori di V_{GS} tali da accendere il MOSFET.

Corrente di drain-source (PMOS)

Modelli elettrici tensione-corrente del P-MOSFET

Zona di interdizione o cut-off

MOSFET spento → source e drain sono un circuito aperto

$$V_{GS} > V_{TP} \quad I_{DS} = 0$$

Zona lineare o triodo

Source e drain sono collegati da un canale conduttivo. La conducibilità dipende sia dalla tensione V_{GS} sia dalla tensione V_{DS} .

$$V_{GS} < V_{TP} \quad V_{DS} > V_{GS} - V_{TP} \quad I_{DS} = k_p \left(V_{GS} - V_{TP} - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS}$$

$$k_p = \frac{\mu_p \epsilon_{ox}}{T_{OX}} \frac{W}{L} = k'_p Z_p$$

$$k'_p = \frac{\mu_p \epsilon_{ox}}{T_{OX}} \quad Z_p = \frac{W}{L} \quad Z_p \text{ è detto fattore di forma}$$

Zona di saturazione

Source e drain sono collegati da un canale conduttivo. La conducibilità dipende solo dalla tensione V_{GS}

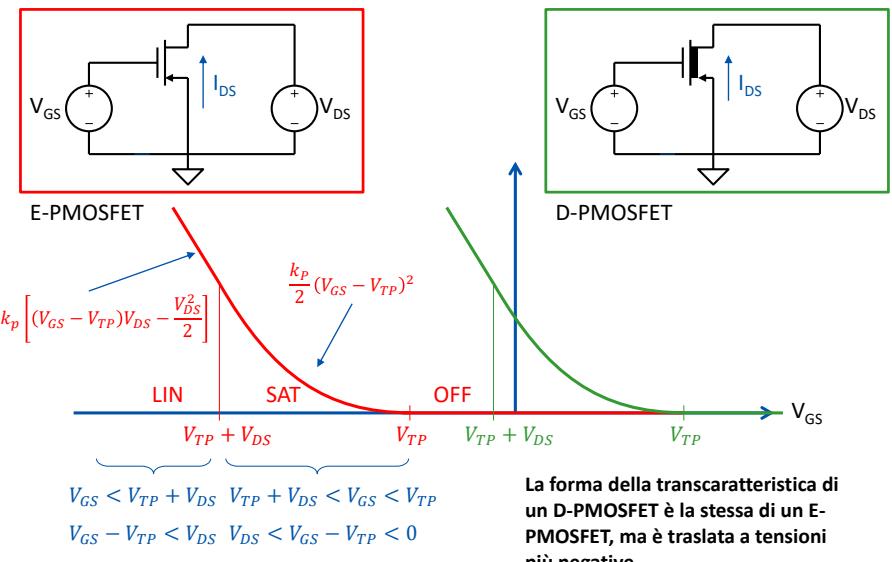
$$V_{GS} < V_{TP} \quad V_{DS} < V_{GS} - V_{TP} \quad I_{DS} = \frac{1}{2} k_p (V_{GS} - V_{TP})^2$$

$$I_{DS} = \frac{1}{2} k_p (V_{GS} - V_{TP})^2 (1 - \lambda_p V_{DS}) \quad V_{DS} \leq 0$$

(Includendo la modulazione della lunghezza di canale)

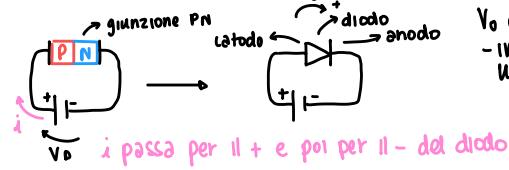
Caratteristiche tensione corrente di un PMOSFET

Transcaratteristica



La forma della transcaratteristica di un D-PMOSFET è la stessa di un E-PMOSFET, ma è traslata a tensioni più negative

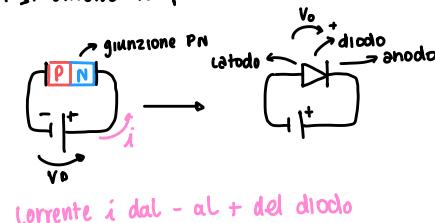
BREVE RIPASSO: diodo in polarizzazione diretta e inversa



V_D è diretta con il + sulla regione N
- impedisce ai portatori di passare da una parte all'altra

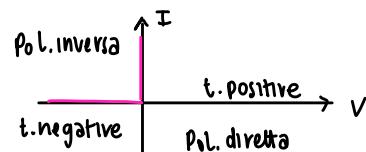
Riducendo lo spazio del D.L. i portatori sono più facilitati nel diffondersi da una regione all'altra e quindi riescono a far scorrere la corrente (polarizzazione diretta)

Invertendo il verso del generatore...
... si ottiene la polarizzazione inversa



Corrente i dal - al + del diodo

In questo modo allarghiamo il depletion layer, quindi la circolazione di corrente (minima) è molto stretta



con la tensione applicata si restringe
regione dove c- e i+ si annullano reciprocamente creando un'area priva di cariche libere

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Polarizzazione del MOSFET

Jaeger 6°Ed: Cap. 6 p.199-213 e Cap. 17 p.853-856

■ Polarizzazione di un NMOSFET con:

- ◆ Resistenza al drain
- ◆ Resistenza al source
- ◆ Resistenza al source e al drain

■ Polarizzazione del PMOSFET

- Esempio di circuito a transistor: specchio di corrente
- Polarizzazione del MOSFET con generatore di corrente

Relazione tensione corrente: nMOSFET

Se $V_{GS} < V_{TN}$ nMOSFET spento

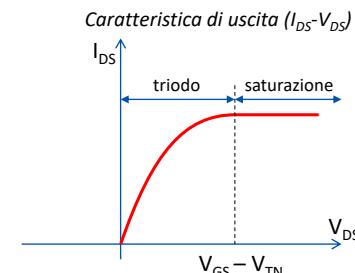
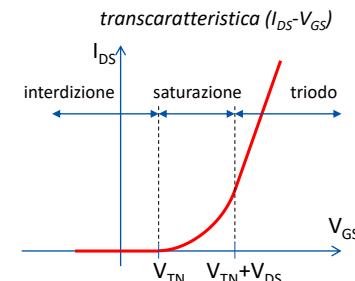
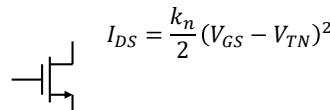
$I_{DS} = 0$ Zona di interdizione

Se $V_{GS} > V_{TN}$ nMOSFET acceso

Se $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$ Zona di triodo o lineare

$$I_{DS} = k_n \left[(V_{GS} - V_{TN})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

Se $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$ Zona di saturazione



Relazione tensione corrente: PMOSFET

Se $V_{GS} > V_{TP}$ pMOSFET spento

$I_{DS} = 0$ Zona di interdizione

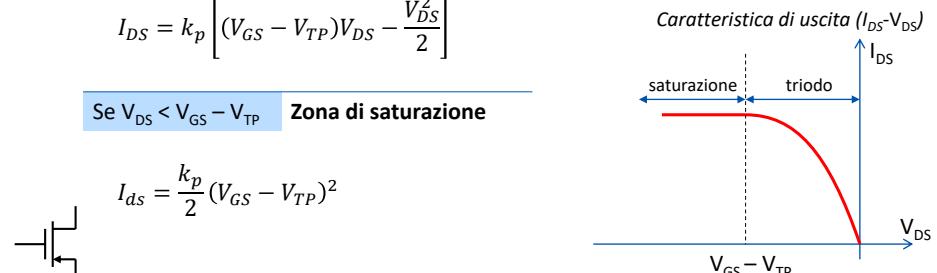
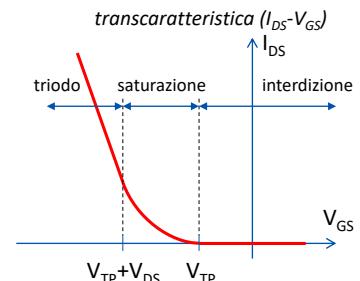
Se $V_{GS} < V_{TP}$ pMOSFET acceso

Se $V_{DS} > V_{GS} - V_{TP}$ Zona di triodo o lineare

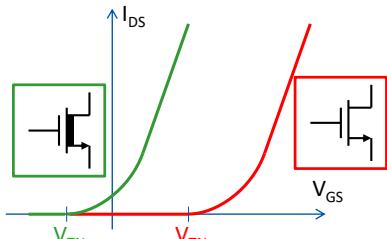
$$I_{DS} = k_p \left[(V_{GS} - V_{TP})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

Se $V_{DS} < V_{GS} - V_{TP}$ Zona di saturazione

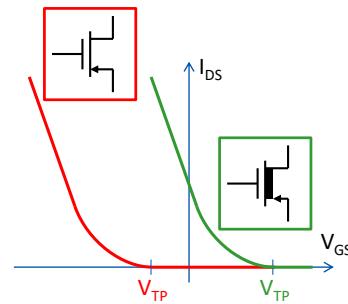
$$I_{ds} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2$$



MOSFET ad arricchimento e svuotamento



$V_{TN} > 0 \rightarrow$ il MOS è spento se $V_{GS} = 0$
nMOSFET ad arricchimento



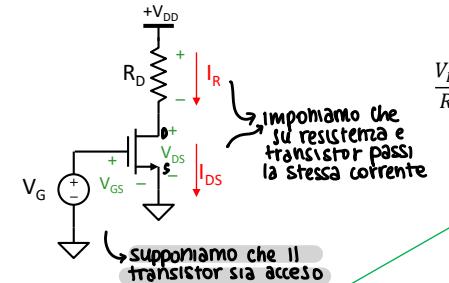
$V_{TP} < 0 \rightarrow$ il MOS è spento se $V_{GS} = 0$
pMOSFET ad arricchimento

$V_{TN} < 0 \rightarrow$ il MOS è acceso se $V_{GS} = 0$
nMOSFET ad svuotamento

$V_{TP} > 0 \rightarrow$ il MOS è acceso se $V_{GS} = 0$
pMOSFET ad svuotamento

NMOSFET con resistenza al drain

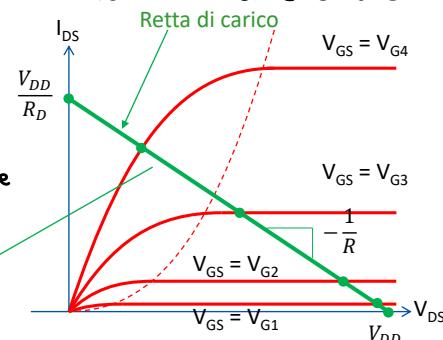
Polarizzazione di un nmosfet con resistenza al drain



$$I_R = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D} = \frac{V_{DD}}{R_D} - \frac{V_{DS}}{R_D}$$

$$I_{DS} = \begin{cases} k_n \left[(V_{GS} - V_{TN})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right] & \text{lin} \\ \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 & \text{sat} \end{cases}$$

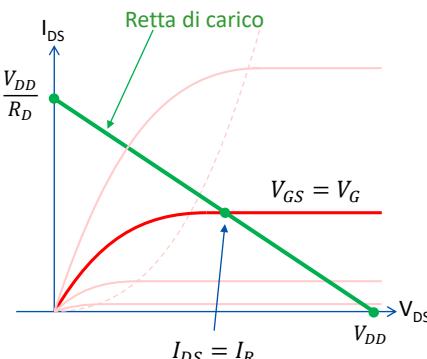
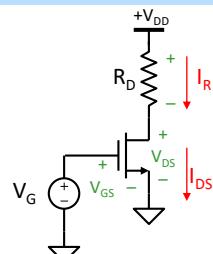
solo 1 delle due sono valide
per semplicità trascuriamo λ



L'intersezione tra la caratteristica del MOSFET e la retta di carico determina la polarizzazione del MOSFET (detto punto di lavoro)

NMOSFET con resistenza al drain

MOSFET in Saturazione



Se il MOSFET è in saturazione la corrente è determinata solo da V_{GS}

$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2$$

$$V_{DS} \text{ è determinata da } R_D$$

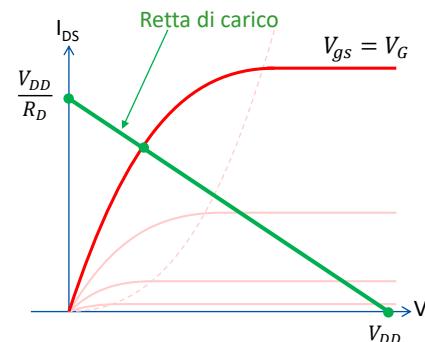
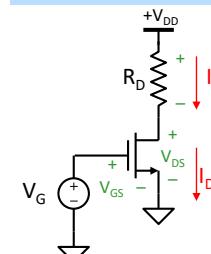
$$I_R = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D}$$

$$V_{DS} = V_{DD} - R_D \cdot I_{DS}$$

La soluzione esiste sempre ed è unica

$$V_{DD} = V_{DS} + R_D I_{DS}$$

MOSFET in lineare



Se il MOSFET è in lineare è necessario risolvere l'equazione:

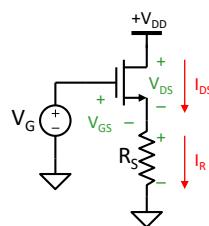
$$\frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D} = k_n \left[(V_G - V_{TN})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

In generale una delle due equazioni non sarà accettabile (se a risultano entrambe valide abbiano fatto errori nei conti...)

Se V_G è fissata, otteniamo un'equazione di secondo grado nell'incognita V_{DS}

La soluzione esiste sempre ed è unica

NMOSFET con resistenza al source (Polarizzazione)



Note V_G e V_{DD} stabilisano subito se il MOSFET è in lineare o saturazione

Il MOSFET è in saturazione se: $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$

$$V_{DD} - V_S > V_G - V_S - V_{TN}$$

$$V_{DD} > V_G - V_{TN}$$

Se il Transistor fosse spento allora $V_{GS} < V_{TN}$
ovvero $V_G - V_S < V_{TN}$
 $V_S > V_G - V_{TN}$
ed $I_{DS}=0$, allora $V_S=0$

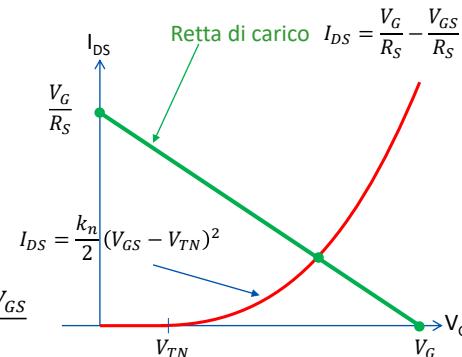
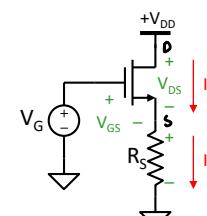
Il MOSFET è in lineare se: $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$

$$V_{DD} - V_S > V_G - V_S - V_{TN}$$

$$V_{DD} < V_G - V_{TN}$$

NMOSFET con resistenza al source

MOSFET in Saturazione



L'intersezione tra la transcaratteristica del MOSFET e la retta di carico determina la polarizzazione del gate del MOSFET

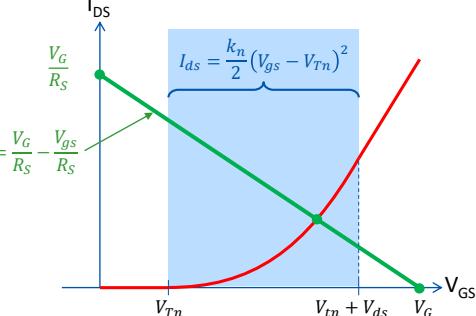
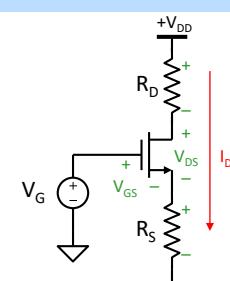
Poi si calcola:

$$V_{DS} = V_{DD} - I_{DS}R_S$$

La soluzione esiste sempre ed è unica

NMOSFET con resistenza al source e al drain

MOSFET in Saturazione



Per prima cosa troviamo il punto di lavoro nella transcaratteristica:

$$\text{Corrente in regime di Saturazione} \quad \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 = \frac{V_G - V_{GS}}{R_S}$$

$$\text{Poniamo: } x = V_{GS} - V_{TN} \rightarrow \frac{k_n}{2} x^2 = \frac{V_G - V_{TN} - x}{R_S}$$

Si fa in modo analogo del MOSFET con resistenza al source!

NMOSFET con resistenza al source

MOSFET in Saturazione

↗ cambio di variabile per semplificare i calcoli

$$x = V_{GS} - V_{TN}$$

$$\frac{k_n}{2} x^2 = \frac{V_G - V_{TN} - x}{R_S}$$

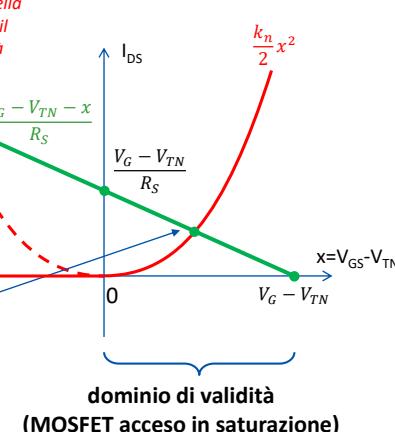
Osservazione:

Affinché l'NMOS sia acceso:
 $x = V_{GS} - V_{TN} > 0$

L'equazione ha due soluzioni:

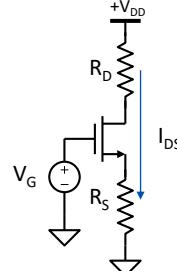
- Una negativa $\rightarrow x < 0 \rightarrow V_{GS} < V_{TN}$
- Una positiva $\rightarrow x > 0 \rightarrow V_{GS} > V_{TN}$

Solo la soluzione positiva è accettabile



NMOSFET con resistenza al source e al drain

MOSFET in Saturazione



Nota V_{GS} , conosciamo la caratteristica di uscita e la corrente:

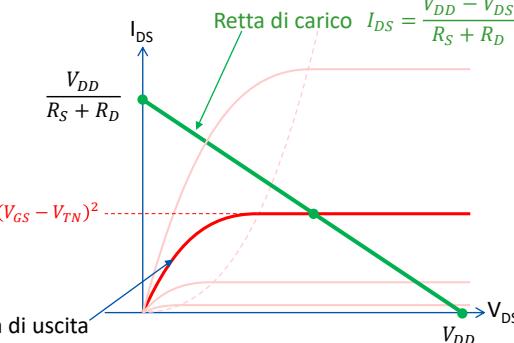
$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2$$

V_{DS} è determinata da R_S e R_D :

$$V_{DS} = V_{DD} - R_S I_{DS} - R_D I_{DS} = V_{DD} - (R_S + R_D) I_{DS}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_S + R_D}$$

La soluzione esiste sempre ed è unica

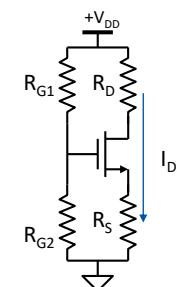


ATTENZIONE: alla fine dei conti, bisogna SEMPRE verificare che l'ipotesi fatta sulla zona di funzionamento del MOSFET sia giusta:

$$\begin{aligned} V_{GS} &> V_{TN} \\ V_{DS} &> V_{GS} - V_{TN} \end{aligned}$$

NMOSFET: circuito di polarizzazione a 4 resistenze

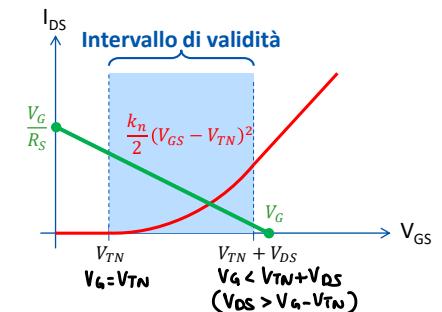
MOSFET in Saturazione



La polarizzazione del gate è scelta mediante un partitore di tensione

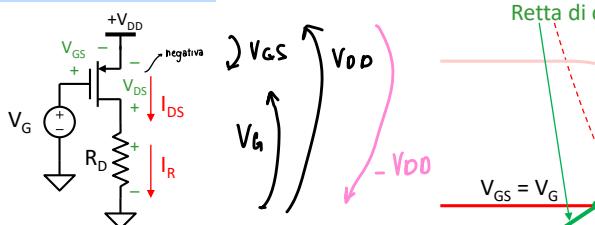
$$V_G = V_{DD} \frac{R_{G2}}{R_{G1} + R_{G2}}$$

In questo modo usiamo solo un generatore di tensione



PMOSFET con resistenza al drain

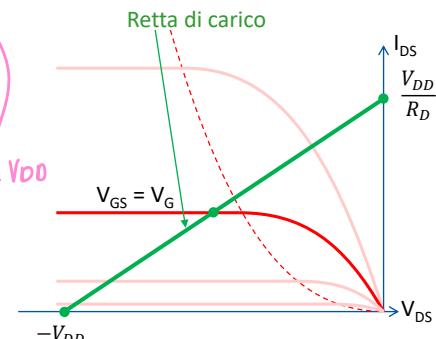
MOSFET in Saturazione



Se il MOSFET è in saturazione la corrente è determinata solo da V_{GS}

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2$$

$$V_{GS} = V_G - V_{DD}$$

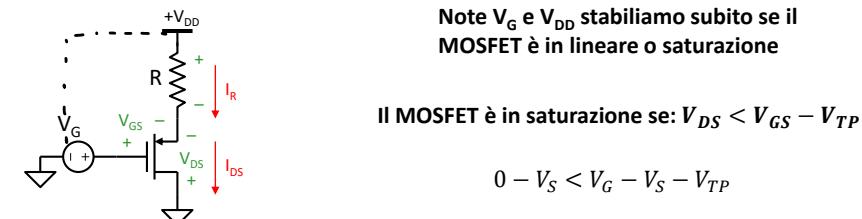


V_{DS} è determinata da R_D

$$I_R = \frac{V_{DS} + V_{DD}}{R_D} = I_{DS}$$

$$V_{DS} = R_D \cdot I_{DS} - V_{DD}$$

MOSFET in Saturazione



Note V_G e V_{DD} stabilisano subito se il MOSFET è in lineare o saturazione

Il MOSFET è in saturazione se: $V_{DS} < V_{GS} - V_{TP}$

$$0 - V_S < V_G - V_S - V_{TP}$$

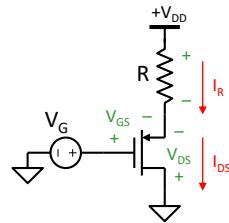
$$V_G > V_{TP}$$

Il MOSFET è in lineare se: $V_{DS} > V_{GS} - V_{TP}$

$$V_G > V_{TP}$$

PMOSFET con resistenza al source

MOSFET in Saturazione

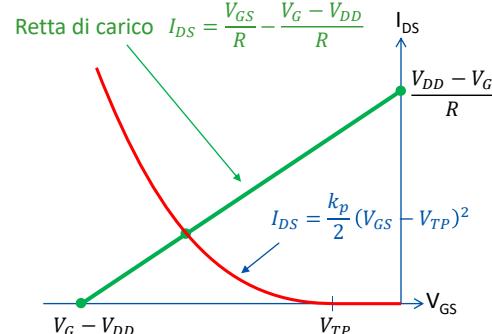


$$V_G - V_{GS} + RI_{DS} = V_{DD}$$

$$I_{DS} = \frac{V_{DD} - V_G + V_{GS}}{R}$$

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2$$

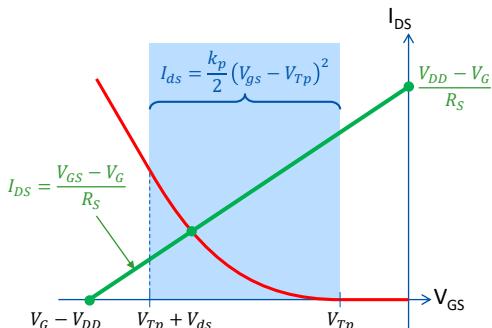
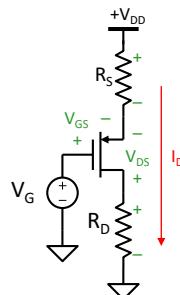
$$\frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2 = \frac{V_{DD} - V_G + V_{GS}}{R}$$



L'intersezione tra la transcaratteristica del MOSFET e la retta di carico determina la polarizzazione del gate del MOSFET

PMOSFET con resistenza al source e al drain

MOSFET in Saturazione



Per prima cosa troviamo il punto di lavoro nella transcaratteristica:

$$\frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2 = \frac{V_{DD} - V_G + V_{GS}}{R}$$

$$\text{Poniamo: } x = V_{GS} - V_{TP} \rightarrow \frac{k_p}{2} x^2 = \frac{x + V_{TP} - V_G}{R_S}$$

PMOSFET con resistenza al source e al drain

MOSFET in Saturazione

$$x = V_{GS} - V_{TP}$$

$$\frac{k_p}{2} x^2 = \frac{V_{DD} - V_G + x + V_{TP}}{R_S}$$

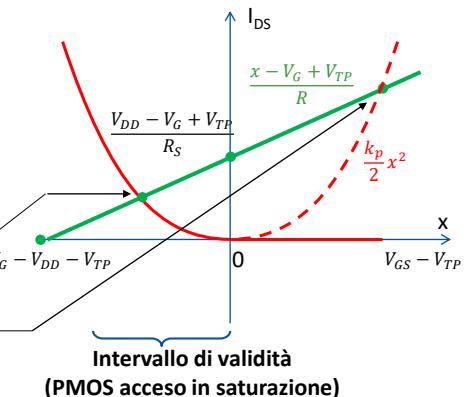
Osservazione:

Affinché il PMOS sia acceso $x = V_{GS} - V_{TP} < 0$

L'equazione ha due soluzioni:

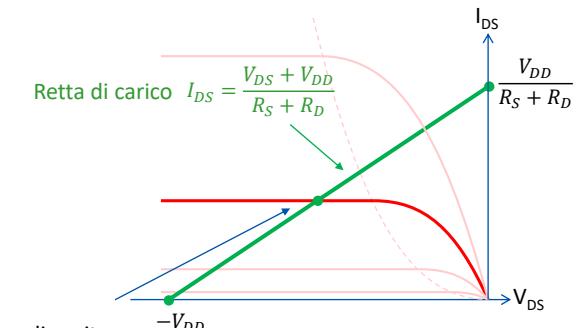
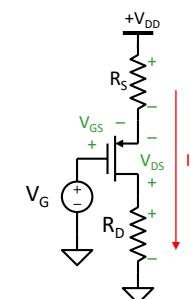
- Una negativa $\rightarrow x < 0 \rightarrow V_{GS} < V_{TP}$
- Una positiva $\rightarrow x > 0 \rightarrow V_{GS} > V_{TP}$

Solo la prima soluzione è accettabile



PMOSFET con resistenza al source e al drain

MOSFET in Saturazione



Nota V_{GS} conosciamo la caratteristica di uscita e la corrente:

$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2$$

V_{DS} è determinata da R_S e R_D :

$$V_{DD} - R_S I_{DS} - R_D I_{DS} + V_{DS} = 0$$

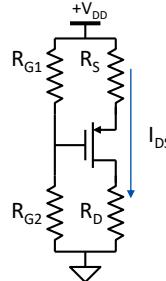
$$V_{DS} = (R_S + R_D) I_{DS} - V_{DD}$$

ATTENZIONE: alla fine dei conti, bisogna SEMPRE verificare che l'ipotesi fatta sulla zona di funzionamento del MOSFET sia giusta:

$$\begin{aligned} V_{GS} &< V_{TP} \\ V_{DS} &< V_{GS} - V_{TP} \end{aligned}$$

PMOSFET: circuito di polarizzazione a 4 resistenze

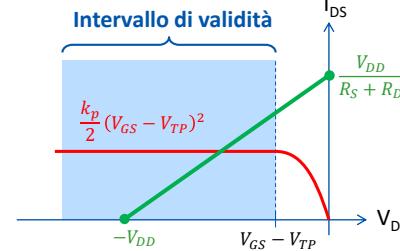
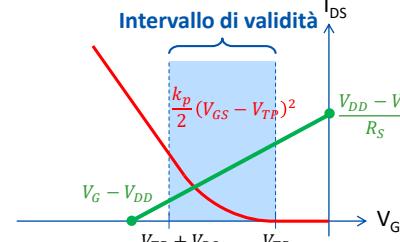
MOSFET in Saturazione



La polarizzazione del gate è scelta mediante un partitore di tensione

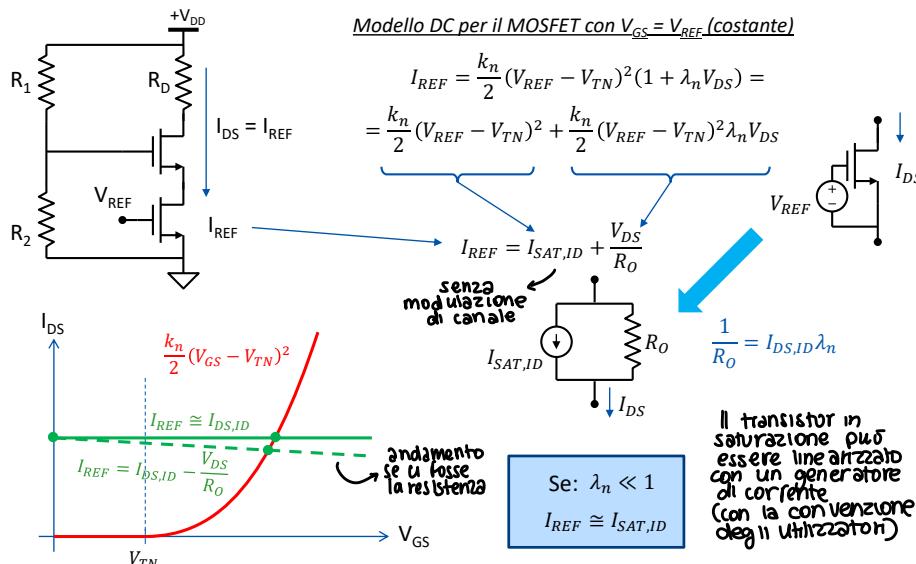
$$V_G = V_{DD} \frac{R_{G2}}{R_{G1} + R_{G2}}$$

In questo modo usiamo solo un generatore di tensione



Polarizzazione in corrente costante

... un MOSFET in saturazione è una buona approssimazione del generatore di corrente



Polarizzazione in corrente costante

Il potenziale del gate è fissato dal partitore tra R_1 e R_2

$$V_G = V_{DD} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

La tensione V_{GS} del MOSFET è determinata dalla corrente I_{REF}
(Supponiamo il MOSFET in saturazione e trascurando la modulazione della lunghezza di canale)

$$I_{REF} = I_{DS} = \frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_{TN})^2$$

Se conosciamo R_D sappiamo anche V_G e V_{GS}
generatore di corrente costante
ideale al posto della resistenza al source

$$\text{Note } I_{REF} \text{ e } R_D: \quad V_D = V_{DD} - R_D I_{REF}$$

$$\text{Note } V_G \text{ e } V_{GS}: \quad V_S = V_G - V_{GS}$$

... ed è nota anche V_{DS} .

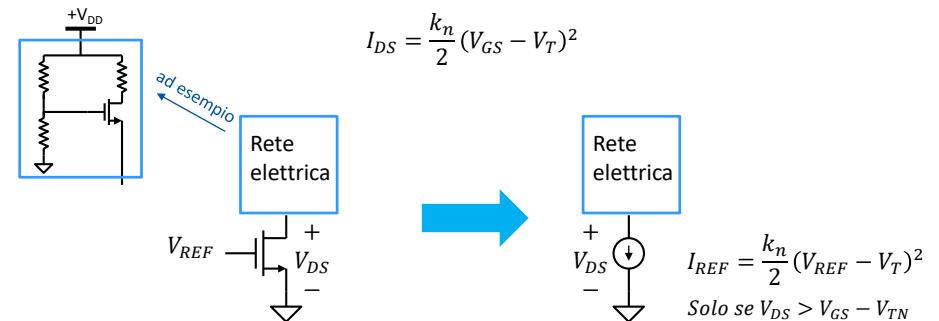
$$V_{GS} = V_{TN} + \sqrt{\frac{2 I_{DS}}{k_n}}$$

N.B. Bisogna sempre verificare che le condizioni di saturazione siano soddisfatte

Il MOSFET come generatore di corrente

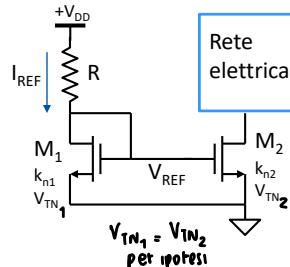
■ Trascurando la modulazione della lunghezza di canale il MOSFET in saturazione è un generatore di corrente ideale controllato dalla tensione di gate, purché la sua tensione V_{DS} sia maggiore di $V_{GS} - V_{TN}$.

■ Supponiamo di fissare la tensione V_{GS} :



Come generare la tensione V_{REF} (il modo più semplice)

Come polarizzare il MOSFET da generatore di corrente?



Ipotesi:

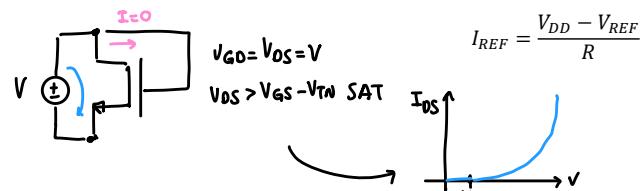
- M_1 e M_2 hanno la stessa tensione di soglia (>0)
- M_2 lavora in saturazione
- Trascuriamo λ

M_1 è sicuramente in saturazione

La tensione V_{REF} può essere calcolata dalla legge di kirchhoff:

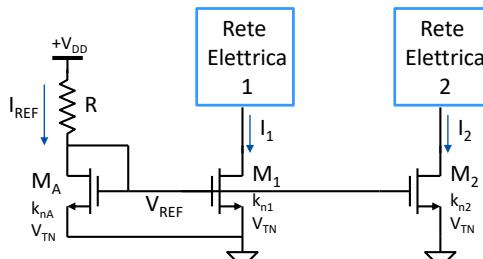
$$\frac{V_{DD} - V_{REF}}{R} = \frac{k_{n1}}{2} (V_{REF} - V_{TN})^2$$

Nota V_{REF} è nota anche I_{REF}



Specchio di corrente con più reti

■ Lo specchio di corrente permette di polarizzare più reti con correnti che stanno in un rapporto noto tra loro.



$$I_1 = \frac{k_{n1}}{k_{nA}} I_{REF}$$

$$I_2 = \frac{k_{n2}}{k_{nA}} I_{REF}$$

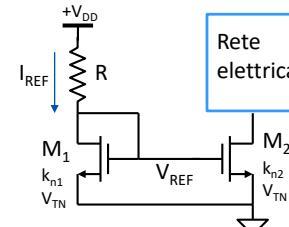
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{k_{n2}}{k_{n1}}$$

Indipendentemente da I_{REF}

Specchio di corrente

Ipotesi:

- M_1 e M_2 hanno la stessa tensione di soglia (>0)
- M_2 lavora in saturazione
- Trascuriamo λ



M_2 ha la stessa tensione V_{GS} di M_1 . Se lavora in saturazione:

$$I_{DS1} = I_{REF} = \frac{k_{n1}}{2} (V_{REF} - V_{TN})^2$$

$$I_{DS2} = \frac{k_{n2}}{2} (V_{REF} - V_{TN})^2 \quad (\text{se è in saturazione})$$

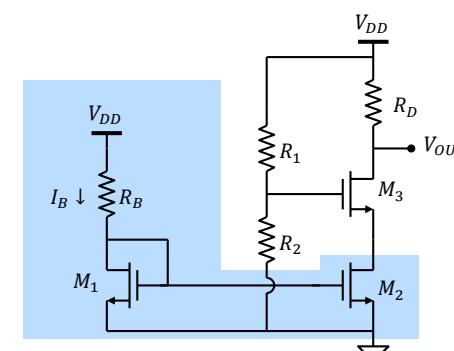
Il rapporto tra le correnti di M_1 e M_2 dipende solo dal rapporto dei k .

$$\frac{I_{DS2}}{I_{DS1}} = \frac{k_{n2}}{k_{n1}}$$

Da ciò deriva il nome specchio di corrente

M_1 stabilisce una certa corrente di I_{REF} , M_2 fornisce una corrente esattamente in rapporto $\frac{k_{n2}}{k_{n1}}$.

Polarizzazione mediante specchio di corrente



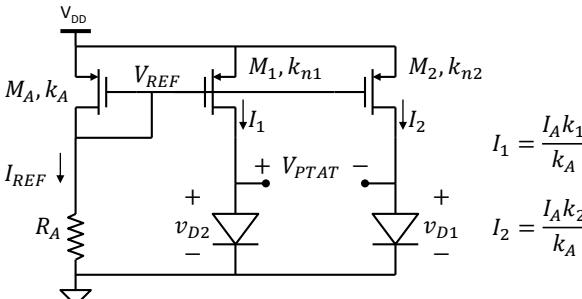
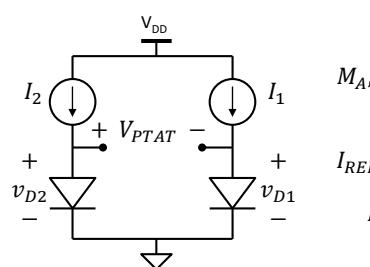
Sostituendo, ad esempio la resistenza R_S con un MOSFET usato come generatore di corrente è possibile polarizzare M_3 imponendo direttamente la corrente voluta.

$$I_{DS3} = I_{DS2} = \frac{k_{n2}}{k_{n1}} I_B$$

Esempio: sensore di temperatura

- Ad esempio, possiamo usare lo specchio di corrente per polarizzare i due diodi del sensore di temperatura
- La tensione V_{PTAT} dipende solo dal rapporto tra I_2 e I_1 e non dal loro valore assoluto:

$$V_{PTAT} = \eta \frac{kT}{q} \cdot \ln \frac{I_2}{I_1} = \eta \frac{kT}{q} \cdot \ln \frac{k_2}{k_1}$$



Introduzione agli amplificatori in regime lineare

- Definizione di amplificatore
- Tipi di amplificatore
- Parametri di un amplificatore
- Linearizzazione di un amplificatore non lineare

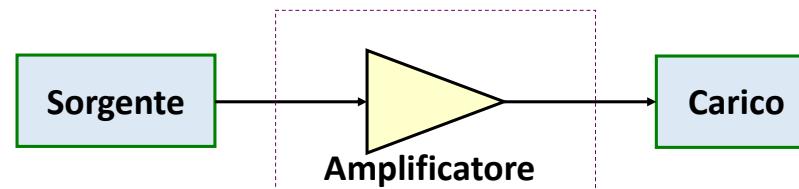
Approssimazione

La modulazione della lunghezza di canale ha un impatto modesto sulla corrente di polarizzazione del MOSFET

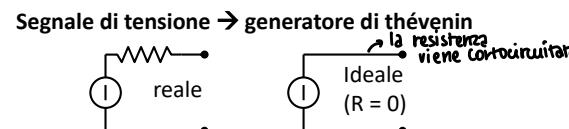
D'ora in poi trascureremo la modulazione della lunghezza di canale nel calcolo della polarizzazione del MOSFET in condizioni di corrente continua (regime DC) (*)

(*) DOMANDA: è sempre possibile ????

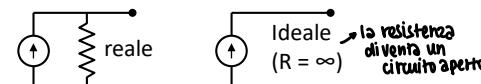
Amplificatore



La sorgente può essere:



Segnale di corrente → generatore di norton



Il carico è schematizzabile come una resistenza



Definizione di Amplificatore

- L'amplificatore è un dispositivo con un ingresso e una uscita il cui valore dipende linearmente dall'ingresso secondo la relazione

$$s_o = A \cdot s_i$$

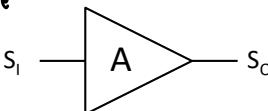
- A è detto **guadagno** → definito dalla tensione di ingresso e di uscita

s_i è il segnale di ingresso

s_o è il segnale di uscita

- I segnali di ingresso e uscita sono grandezze elettriche (tensione o corrente)

il segnale di ingresso può essere sia aumentato che diminuito



Se l'amplificatore è lineare, possiamo applicare il metodo della sovrapposizione degli effetti, cosicché ciascuna componente i-esima del segnale viene amplificata indipendentemente dalle altre, e il segnale complessivo in uscita si ottiene sommando i diversi contributi.

Alcune precisazioni ...

- Sebbene il termine amplificatore suggerisca che l'ampiezza dell'uscita sia maggiore di quella dell'ingresso, il guadagno di un amplificatore può assumere qualunque valore, anche negativo

• Se $|A| < 1$ il segnale di uscita è attenuato rispetto all'ingresso

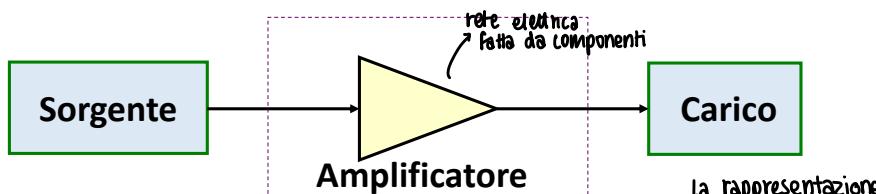
• Se $|A| > 1$ il segnale di uscita è amplificato

- In base al segno del guadagno, l'amplificatore è definito:

• Non invertente, se $A > 0$

• Invertente, se $A < 0$

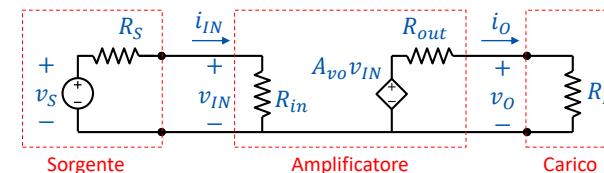
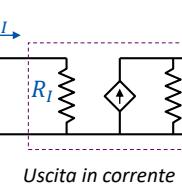
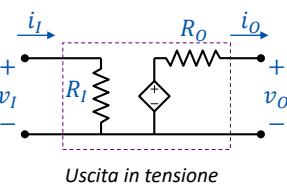
Amplificatore: rappresentazione elettrica



L'amplificatore si rappresenta con un doppio bipolo formato da

- Una resistenza di ingresso R_i
- Un generatore di pilotato + una resistenza all'uscita.
 - Il generatore può essere di tensione o di corrente (modello thévenin o norton)
 - La grandezza che pilota il generatore è la tensione o la corrente di ingresso

La rappresentazione a doppio bipolo di un circuito complesso è valida solo in condizioni di funzionamento in piccolo segnale



■ Ingresso: segnale di tensione (v_{IN})

■ Uscita: segnale di tensione (v_o)

■ Sorgente: rappresentata come un generatore di thevenin

■ Definiamo: *trovando il carico non passa corrente in uscita*

• Guadagno di tensione a vuoto: rapporto tra tensione di uscita (v_o) e tensione di ingresso (v_{IN}) in assenza di carico esterno

• Guadagno di tensione: rapporto tra tensione di uscita (v_o) e tensione di ingresso ideale della sorgente (v_s)

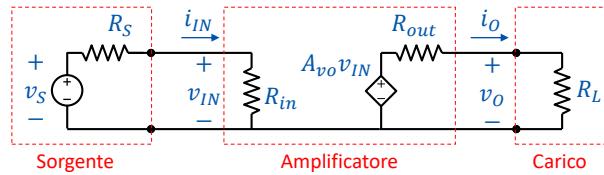
$$A_{vo} = \frac{v_o}{v_{IN}} \Big|_{R_L=\infty}$$

in presenza del carico

$$A_v = \frac{v_o}{v_s} \Big|_{R_L=0}$$

a vuoto
non è la tensione della sorgente!

Amplificatore di tensione



Differenza tra A_{vo} e A_v :

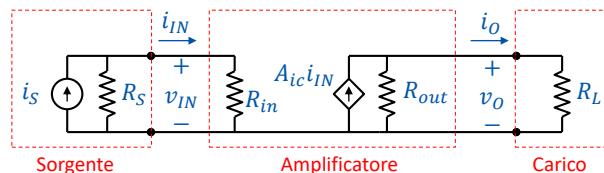
- A_{vo} è un parametro intrinseco dell'amplificatore e non tiene conto delle resistenze della sorgente e del carico in uscita
- A_v è un parametro che ingloba tutti gli effetti resistivi di carico e sorgente (**effetto di carico**)

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{IN} = \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} v_S \\ v_O = \frac{R_L}{R_{out} + R_L} A_{vo} v_{IN} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad v_O = \frac{R_L}{R_{out} + R_L} A_{vo} \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} v_S$$

massima tensione erogata idealmente

$$A_v = \frac{R_L}{R_{out} + R_L} A_{vo} \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} < A_{vo}$$

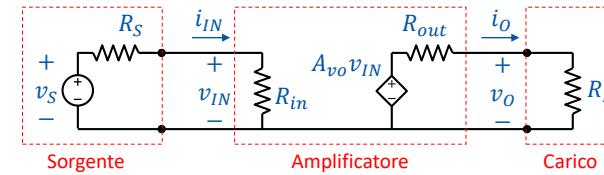
Amplificatore di corrente



- Ingresso: segnale di corrente (i_{IN})
- Uscita: segnale di corrente (i_O)
- Sorgente: rappresentata come un generatore di Norton
- Definiamo:

- Guadagno di corrente in cortocircuito: rapporto tra corrente erogata con uscita cortocircuitata ($R_L = 0$) e corrente entrante all'ingresso (i_{IN})
 - Guadagno di corrente: rapporto tra corrente erogata al carico R_L e corrente idealmente fornita dalla sorgente (i_S)
- $$A_{ic} = \frac{i_O}{i_{IN}} \Big|_{R_L=0}$$
- $$A_i = \frac{i_O}{i_S}$$

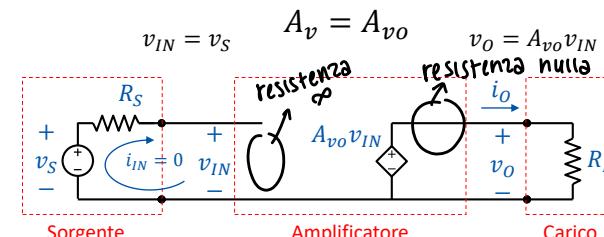
Amplificatore di tensione ideale



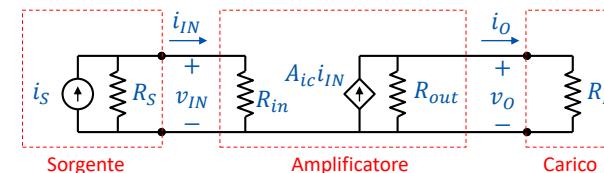
Un amplificatore di tensione ideale ha:

- Resistenza di ingresso infinita: $R_{in} = \infty \rightarrow \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} = 1$
- Resistenza di uscita nulla: $R_{out} = 0 \rightarrow \frac{R_L}{R_L + R_{out}} = 1 \rightarrow \frac{1}{1+0} = 1$

$\infty = 1$
 ∞ (e si diventa trascurabile)



Amplificatore di corrente



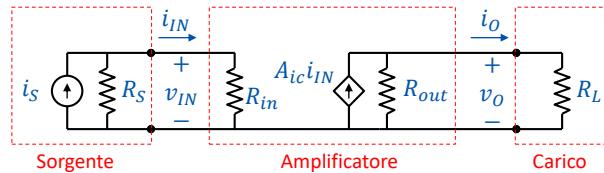
- ### Differenza tra A_{ic} e A_i :
- A_{ic} è un parametro intrinseco dell'amplificatore e non tiene conto delle resistenze della sorgente e del carico in uscita
 - A_i è un parametro che ingloba tutti gli effetti resistivi di carico e sorgente (**effetto di carico**)

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{IN} = \frac{R_S}{R_S + R_{in}} i_S \\ i_O = \frac{R_{out}}{R_{out} + R_L} A_{ic} i_{IN} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad i_O = \frac{R_{out}}{R_{out} + R_L} A_{ic} \frac{R_S}{R_S + R_{in}} i_S$$

<1 <1

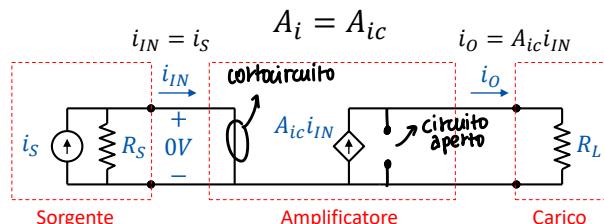
$$A_i = \frac{R_{out}}{R_{out} + R_L} A_{ic} \frac{R_S}{R_S + R_{in}} < A_{ic}$$

Amplificatore di corrente ideale

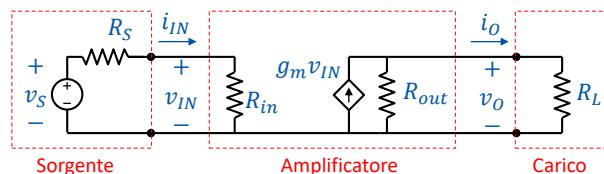


■ Un amplificatore di corrente ideale ha:

- ◆ Resistenza di ingresso nulla: $R_{in} = 0 \rightarrow \frac{R_S}{R_S + R_{in}} = 1$
- ◆ Resistenza di uscita infinita: $R_{out} = \infty \rightarrow \frac{R_{out}}{R_L + R_{out}} = 1$



Amplificatore di transconduttanza: effetto di carico

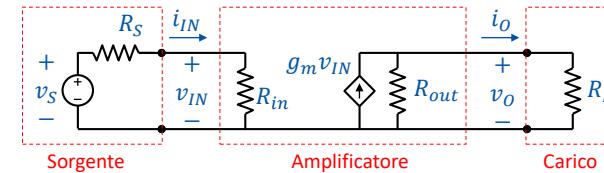


■ Effetto di carico:

- ◆ g_m rappresenta il guadagno di transconduttanza in cortocircuito (analogo di A_{vo} e A_{ic}).
- ◆ Tenendo conto delle resistenze non nulle di carico e sorgente:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{IN} = \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} v_S \\ i_O = \frac{R_{out}}{R_{out} + R_L} g_m v_{IN} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} i_O &= \frac{R_{out}}{R_{out} + R_L} g_m \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} v_S \\ &\quad <1 &<1 \\ A_g &= \frac{i_O}{v_S} = \frac{R_{out}}{R_{out} + R_L} g_m \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} < g_m \end{aligned}$$

Amplificatore di transconduttanza



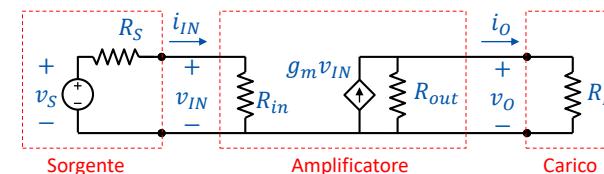
■ Ingresso: segnale di tensione (v_{IN})

- Uscita: segnale di corrente (i_O)
- Sorgente: rappresentata come un generatore di Thevenin
- Guadagno in cortocircuito: rapporto tra corrente erogata con uscita cortocircuitata ($R_L = 0$) e tensione effettivamente applicata all'ingresso (v_{IN}).
- Definiamo inoltre il guadagno A_g come il rapporto tra la corrente effettivamente erogata al carico e la tensione v_S .
- Il guadagno si misura in Siemens come la conduttanza. Essendo il rapporto tra una corrente e una tensione, ma non riferite allo stesso ramo del circuito, è definito **guadagno di transconduttanza**

$$g_m = \frac{i_O}{v_{IN}} \Big|_{R_L=0}$$

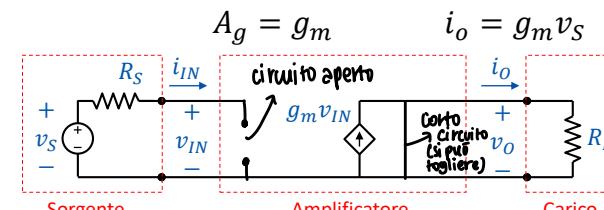
$$A_g = \frac{i_O}{v_S}$$

Amplificatore di transconduttanza ideale



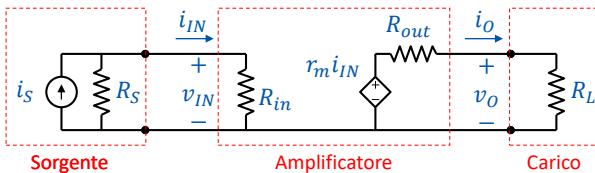
■ Un amplificatore di transconduttanza ideale ha:

- ◆ Resistenza di ingresso infinita: $R_{in} = \infty \rightarrow \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}} = 1$
- ◆ Resistenza di uscita nulla: $R_{out} = \infty \rightarrow \frac{R_{out}}{R_L + R_{out}} = 1$

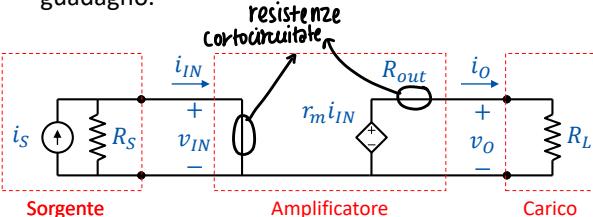


Amplificatore di transresistenza

- Ingresso: segnale di corrente (i_{IN})
- Uscita: segnale di tensione (v_o)



- Guadagno: rapporto tra tensione di uscita e corrente di ingresso
- Il guadagno è il rapporto tra una tensione e una corrente (ma non riferite allo stesso componente) → **transresistenza**
- L'effetto di carico all'ingresso riduce il guadagno.



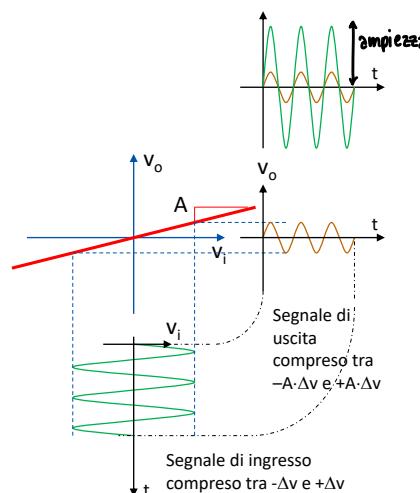
$$r_m = \frac{v_o}{i_{IN}} \Big|_{R_L=\infty}$$

$$i_{IN} = \frac{R_S}{R_S + R_{in}} i_S \rightarrow A_r = \frac{v_o}{i_S} = r_m \frac{R_S}{R_S + R_{in}}$$

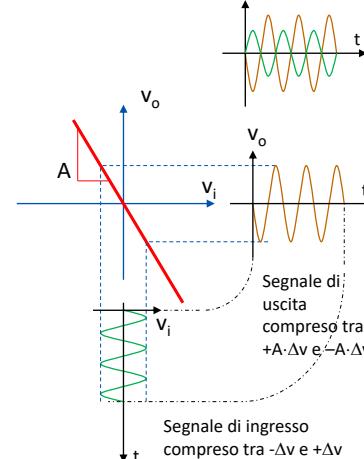
Amplificatore di transresistenza ideale:
 $R_{in} = 0$ $A_r = r_m$
 $R_{out} = 0$

Amplificazione

Se $0 < A < 1$ il segnale di uscita è ridotto in ampiezza rispetto all'ingresso

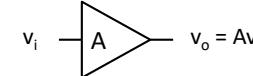


Se $A < 0$ il segnale di uscita ha la stessa forma (amplificato o attenuato) ma con il segno invertito.



Guadagno (LINEARITÀ DI UN AMPLIFICATORE)

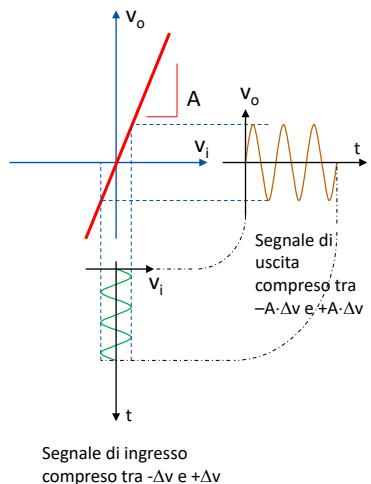
In un circuito amplificatore, abbiamo definito **guadagno** il rapporto tra il segnale di ingresso e di uscita



$$A = \frac{v_o}{v_i}$$

Se A è costante e non dipende da v_i , l'amplificatore si dice **lineare**

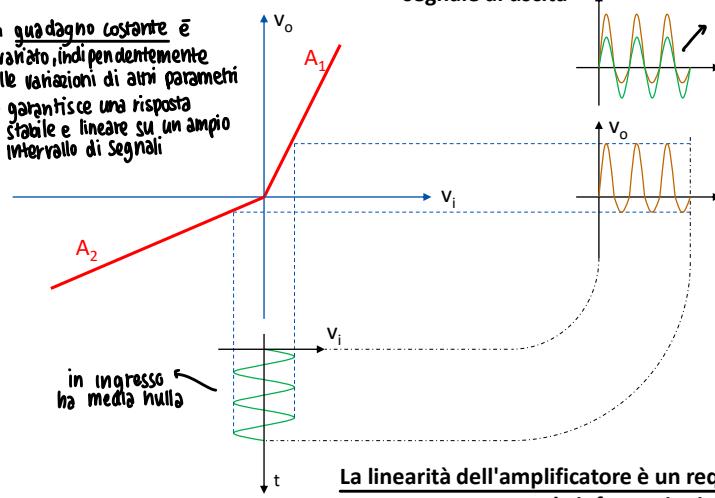
Esempio: $A > 0$



Guadagno non costante: distorsione

$$\text{Esempio: } A(v) = \begin{cases} A_1 & \text{se } v < 0 \\ A_2 & \text{se } v > 0 \end{cases}$$

un guadagno costante è inviolato, indipendentemente dalle variazioni di altri parametri
→ garantisce una risposta stabile e lineare su un ampio intervallo di segnali

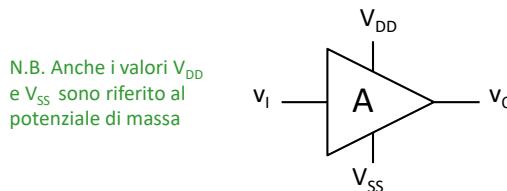


Ingresso e uscita non hanno la stessa forma:
L'amplificatore introduce una distorsione nel segnale di uscita

La linearità dell'amplificatore è un requisito necessario per preservare le informazioni sul segnale!

Esempio: Saturazione della tensione di uscita

- L'amplificatore è un componente elettronico complesso e richiede che vengano fornite due tensioni di "alimentazione".
- Le tensioni di alimentazione V_{DD} e V_{SS} sono essenziali all'amplificatore per funzionare (il motivo sarà chiaro a breve).
 - Per convenzione assumiamo $V_{DD} > V_{SS}$
 - Una delle due può coincidere con il potenziale di riferimento (massa)
- Le tensioni di alimentazione vengono rappresentate con due terminali aggiuntivi nel simboli di amplificatore (spesso vengono omesse per semplicità).
- V_{DD} e V_{SS} forniscono un limite superiore e inferiore a v_o .



Simbolo usato per l'amplificatore in cui sono inclusi i terminali di alimentazione.

Notazione sui segnali (linearizzazione di un sistema non lineare)

- | | |
|----------|---|
| $v_A(t)$ | <ul style="list-style-type: none"> Grandezze totali istantanee rappresentate da variabili minuscole con pedici maiuscoli |
| V_A | <ul style="list-style-type: none"> Valori continui e medi rappresentati da variabili maiuscole con pedici maiuscoli |
| $v_a(t)$ | <ul style="list-style-type: none"> Grandezze variabili nel tempo <u>a valore medio nullo</u> rappresentate da variabili minuscole con pedici minuscoli |
| V_a | <ul style="list-style-type: none"> Valori di picco di grandezze sinusoidali, fasori, rappresentate da variabili maiuscole con pedici minuscoli |

Esempi:

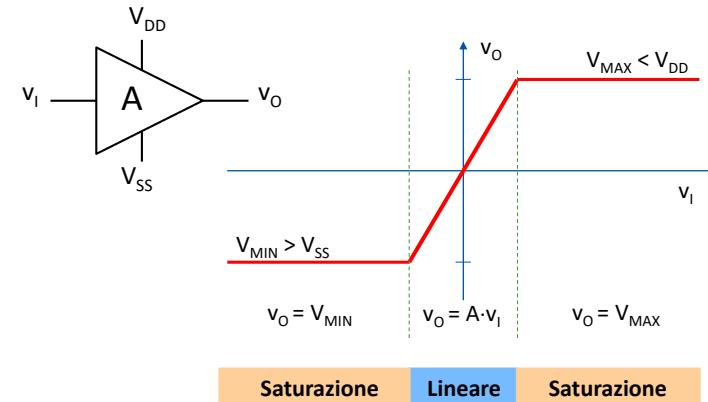
$$v_a(t) = V_a \sin \omega t$$

$$i_a(t) = I_a \sin \omega t$$

$$v_A(t) = V_A + V_a \sin \omega t$$

$$i_A(t) = I_A + I_a \sin \omega t$$

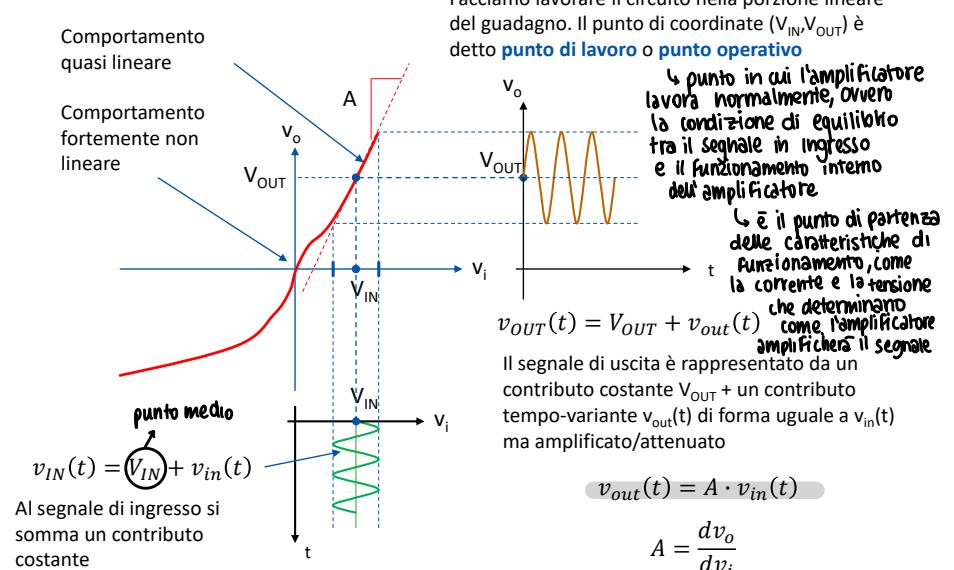
Esempio: Saturazione della tensione di uscita



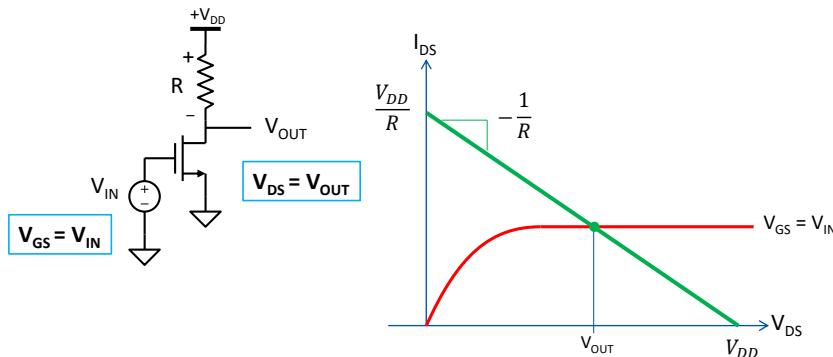
- Valori del segnale di ingresso troppo elevati causano la saturazione della tensione di uscita che viene limitata a V_{MIN} e V_{MAX} :

$$V_{SS} < V_{MIN} \leq v_o \leq V_{MAX} < V_{DD}$$

Linearizzazione: punto operativo



Esempio: NMOS con resistenza al drain



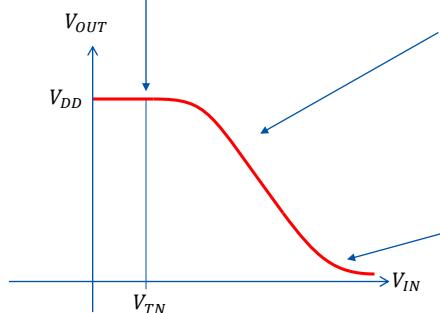
- Applicando un segnale costante al gate, il potenziale del drain del transistor si porta a un valore costante.
- Il punto di lavoro è definito dall'intersezione della caratteristica del MOSFET e la retta di carico e dipende da:
 - La tensione V_G
 - La resistenza R

Esempio: NMOS con resistenza al drain

NMOS in INTERDIZIONE:

Se $V_{GS} < V_{TN} \rightarrow I_{DS} = 0$

$$V_{OUT} = V_{DD} - RI_{DS} = V_{DD}$$



La regione in cui il circuito ha una migliore linearità è quella centrale (in cui il MOSFET è in saturazione)

NMOS in zona di SATURAZIONE:

Se $V_{GS} > V_{TN}$ e $V_{DS} > V_{GS} - V_{TN}$

$$V_{OUT} = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2}(V_{GS} - V_{TN})^2$$

NMOS in zola LINEARE:

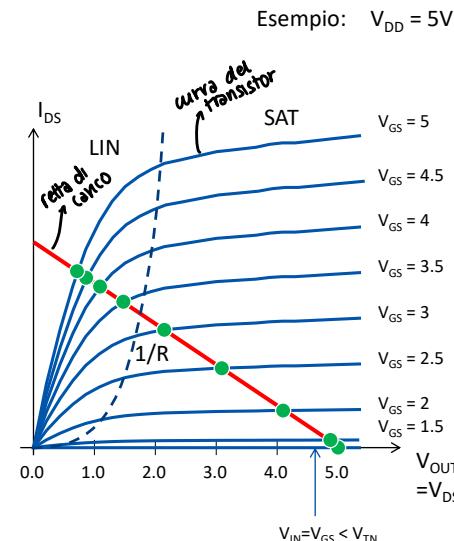
Se $V_{GS} > V_{TN}$ e $V_{DS} < V_{GS} - V_{TN}$

$$V_{OUT} = V_{DS} = V_{DD} - Rk_n \left[(V_{GS} - V_{TN})V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

V_{OUT} si ricava risolvendo l'equazione di secondo grado

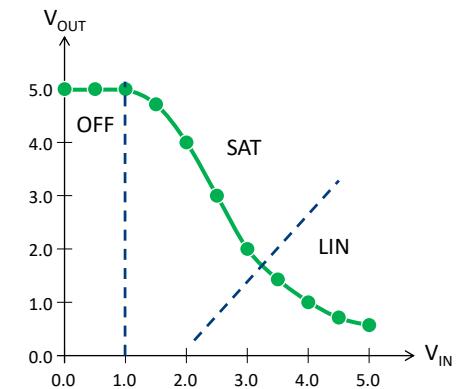
Esempio: NMOS con resistenza al drain

Disegniamo per via grafica la transcaratteristica $V_{OUT}-V_{IN}$

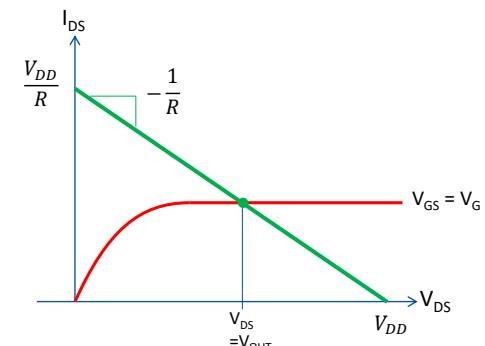
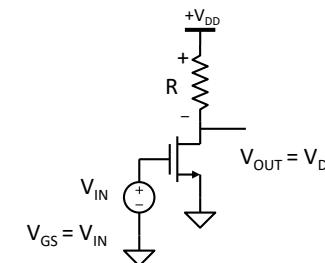


Esempio: $V_{DD} = 5V$

$V_{TN} = 1V$



Esempio: NMOS con resistenza al drain



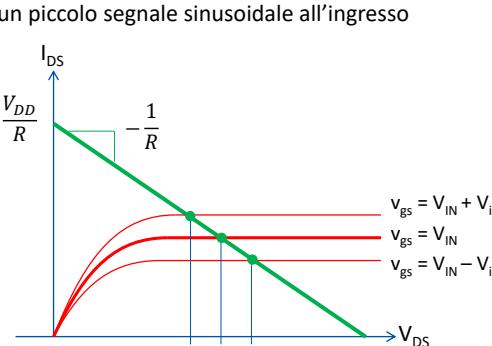
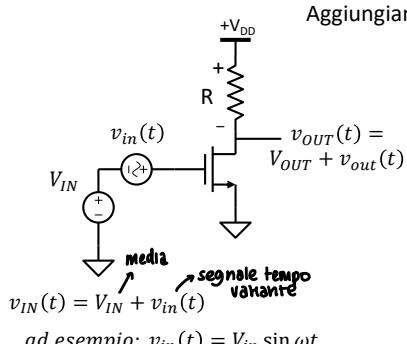
Supponiamo che la polarizzazione del MOSFET sia tale da mantenerlo in saturazione:

$$V_{DS} = V_{DD} - RI_{DS} = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2}(V_{GS} - V_{TN})^2$$

$$V_{OUT} = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2}(V_{IN} - V_{TN})^2$$

V_{OUT} dipende in modo NON lineare da V_{IN}

Esempio: NMOS con resistenza al drain



$$v_{GS}(t) = V_{IN} + v_{in}(t)$$

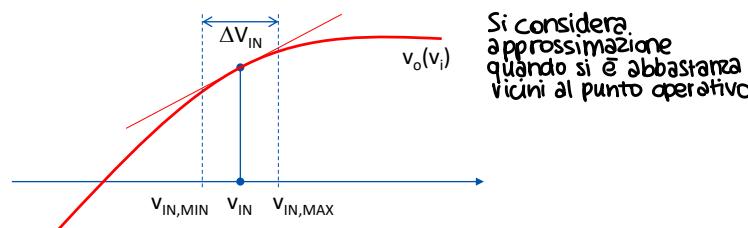
$$v_{GS} + v_{gs}(t)$$

$$V_{IN} - V_{in} < v_{GS}(t) < V_{IN} + V_{in}$$

$$v_{OUT}(t) = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2} [v_{GS}(t) - V_{TN}]^2$$

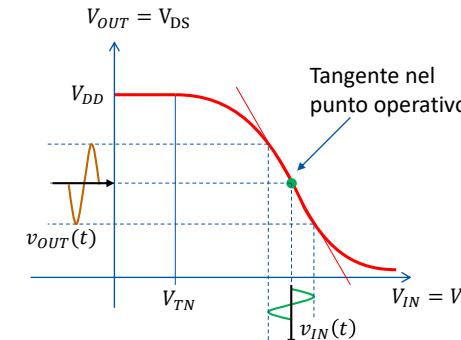
$$v_{OUT}(t) = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2} [V_{GS} + v_{gs}(t) - V_{TN}]^2$$

Limiti della linearizzazione



- In ogni punto della curva per piccole variazioni del segnale il circuito può essere linearizzato in un intorno ΔV_{IN} del punto V_{IN}
- Se ΔV_{IN} è abbastanza piccolo:
 - ◆ la tangente (derivata) nel punto approssima la curva.
 - ◆ possiamo usare la retta tangente (lineare) invece della funzione originale in tutti i conti.
- ATTENZIONE: l'approssimazione vale SOLO SE V_{IN} è compresa nell'intervallo tra $V_{IN,MIN}$ e $V_{IN,MAX}$.

Esempio: NMOS con resistenza al drain



$$v_{OUT} = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2} (v_{IN} - V_{TN})^2$$

NON è lineare

Approssimazione al primo ordine in un intorno di V_{IN} :

$$v_{IN} = V_{IN} + v_{in}$$

$$v_{OUT} = V_{OUT} + \frac{dv_{OUT}}{dv_{IN}} \Big|_{v_{IN}=V_{IN}} v_{in}(t)$$

$$\frac{dv_{OUT}}{dv_{IN}} \Big|_{V_{IN}} = -Rk_n(V_{IN} - V_{TN})$$

Il segnale di uscita è composto da due contributi:

Una costante: $V_{OUT} = V_{DD} - \frac{Rk_n}{2} (V_{IN} - V_{TN})^2$ è la soluzione del circuito in regime DC

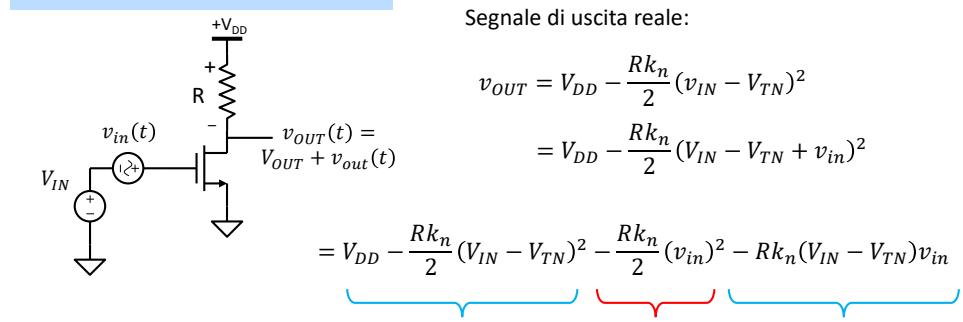
Un segnale sinusoide: $v_{out} = \frac{dv_{OUT}}{dv_{IN}} \Big|_{V_{IN}} v_{in} = -Rk_n(V_{IN} - V_{TN})v_{in}$

Il segnale sinusoide di ingresso è amplificato di una quantità: $A = -Rk_n(V_{IN} - V_{TN})$

L'amplificazione è funzione del punto operativo in DC

Esempio: NMOS con resistenza al drain

Calcolo dell'errore di linearizzazione



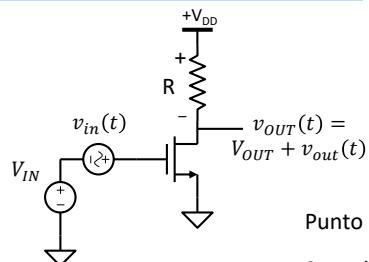
Segnale di ingresso amplificato (linearizzato)

$$\epsilon = |v_{OUT}^{REAL} - v_{OUT}^{LIN}| = \frac{Rk_n}{2} v_{in}^2$$

L'errore rimane contenuto finché il segnale tempo-variante v_{in} è piccolo!

Esempio: NMOS con resistenza al drain

Calcolo dell'errore di linearizzazione



Ma quanto piccolo deve essere il segnale di ingresso tempo-variante?

Risposta: Dipende dalla precisione desiderata.

Punto di polarizzazione: V_{OUT}

Segnale tempo variante: $v_{out} = -Rk_n(V_{IN} - V_{TN}) \cdot v_{in}$

$$\text{Errore: } \varepsilon = \frac{Rk_n}{2} v_{in}^2$$

Errore normalizzato al segnale utile (percentuale): $\frac{\varepsilon}{v_{out}} = \frac{|v_{in}|}{2(V_{IN} - V_{TN})}$

Esempio:

$V_{IN} = 2.5V$, $V_{TN} = 0.5V$
Precisione richiesta 1%

$$\left| \frac{\varepsilon}{v_{out}} \right| = \frac{|v_{in}|}{2(V_{IN} - V_{TN})} < 0.01 \rightarrow |v_{in}| < 0.04V$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

36

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Grande e piccolo segnale

Jaeger 6^aEd.: Cap. 10 p.389-401, p.416-422, p.606-611^(*)

- Concetto di grande e piccolo segnale
- Linearizzazione del MOSFET in saturazione
- Modelli ai piccoli segnali

Definizione di grande e piccolo segnale

- In generale abbiamo visto che la relazione tra ingresso e uscita di un circuito a transistor non è lineare in tutto il dominio
- Tuttavia è possibile identificare una porzione del dominio in cui la relazione è lineare o quasi lineare.
 - ◆ Definiamo $V_{IN,MIN}$ e $V_{IN,MAX}$ gli estremi inferiore e superiore della tensione di ingresso v_{in} in cui la caratteristica è lineare.
 - ◆ Definiamo V_{IN} il punto centrale dell'intervallo:

$$V_{IN} = \frac{V_{IN,MAX} + V_{IN,MIN}}{2}$$

- ◆ Definiamo ΔV_{IN} l'ampiezza dell'intervallo:

$$\Delta V_{IN} = V_{IN,MAX} - V_{IN,MIN}$$

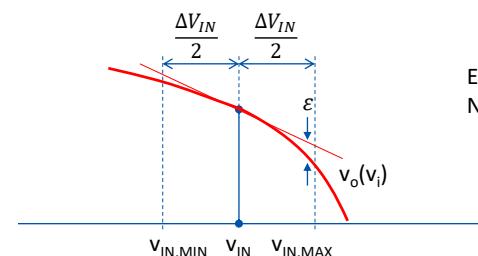
Definizione di grande e piccolo segnale

- La tensione di ingresso viene espressa come la somma di un contributo costante pari a V_{IN} (valore centrale dell'intervallo) e di un termine tempo-variante $v_{in}(t)$, che assumiamo sinusoidale per semplicità:

$$v_{IN}(t) = V_{IN} + v_{in}(t) = V_{IN} + V_{in} \sin \omega t$$
- L'ampiezza massima del segnale sinusoidale deve essere tale da mantenere il sistema nell'intervallo lineare:

$$|V_{in}| < \frac{\Delta V_{IN}}{2}$$

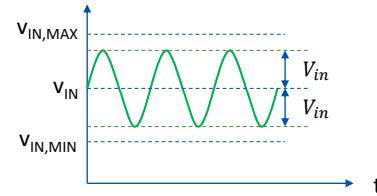
- **L'ampiezza ΔV_{IN} dipende dalla precisione desiderata:** maggiore è ΔV_{IN} più grande è l'errore (ε) commesso nell'approssimazione lineare



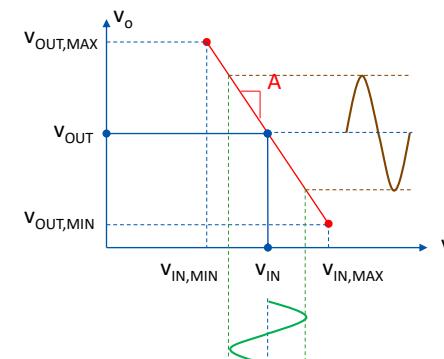
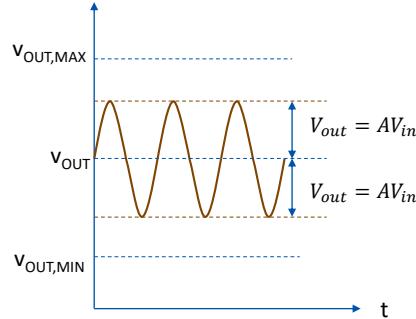
Esempio:
NMOS con resistenza al Drain:

$$\varepsilon = \frac{Rk_n}{2} V_{in}^2$$

Piccolo segnale



- Il segnale sinusoidale sovrapposto alla costante viene detto "piccolo segnale"
- La pendenza A della curva è detto **guadagno di piccolo segnale**

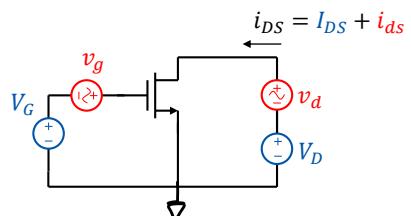


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

6

Esempio: NMOS in saturazione

Linearizzazione della corrente i_{DS} del transistor in saturazione



$$i_{DS} = I_{DS} + i_{ds}$$

$$v_{GS} = V_G + v_g = V_{GS} + v_{gs}$$

$$v_{DS} = V_D + v_d = V_{DS} + v_{ds}$$

Supponiamo:

$$v_{GS} > V_{TN} \quad v_{DS} > v_{GS} - V_{TN}$$

$$i_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} + v_{gs} - V_{TN})^2 [1 + \lambda_n (V_{DS} + v_{ds})]$$

$$i_{DS} = i_{DS}(V_{GS}, V_{DS}) + \left. \frac{\partial i_{DS}}{\partial V_{GS}} \right|_{V_{GS}, V_{DS}} v_{gs} + \left. \frac{\partial i_{DS}}{\partial V_{DS}} \right|_{V_{GS}, V_{DS}} v_{ds}$$

linearizzazione in serie di Taylor con il gradiente (derivate parziali)

$$\left. \frac{\partial i_{DS}}{\partial V_{GS}} \right|_{V_{GS}, V_{DS}} = k_n (V_{GS} - V_{TN})(1 + \lambda_n V_{DS})$$

$$\cong k_n (V_{GS} - V_{TN}) = \sqrt{2k_n I_{DS}}$$

(trascurando λ)

$$\left. \frac{\partial i_{DS}}{\partial V_{DS}} \right|_{V_{GS}, V_{DS}} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n$$

$$i_{DS} = I_{DS} + i_{ds}$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

8

Notazione sul nome di correnti e tensioni

Notazione per indicare il grande e il piccolo segnale:

- Il grande segnale è indicato con la lettera maiuscola e pedice maiuscolo
- Il piccolo segnale è indicato con la lettera minuscola e il pedice minuscolo. Per semplicità si ommitterà la dipendenza dal tempo (t).
- Il segnale globale (somma di grande e piccolo segnale) è indicato con lettera minuscola e pedice maiuscolo

$$v_{IN}(t) = V_{IN} + v_{in}(t)$$

Segnale totale
grande + piccolo
segnale

Grande segnale
Punto operativo del circuito
Costante nel tempo

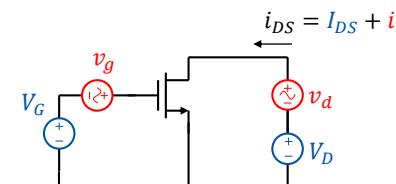
Piccolo segnale
Perturbazione in un intorno
del punto operativo
Variabile nel tempo

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

7

Esempio: NMOS in saturazione

Linearizzazione della corrente i_{DS} del transistor in saturazione



Esempio:

- DATI:

- $k_n = 2\text{mA/V}^2$
- $V_{TN} = 2\text{V}$
- $\lambda_n = 0.01\text{V}^{-1}$
- $V_G = 3\text{V}$
- $V_D = 5\text{V}$

- Calcolare la corrente linearizzata e l'errore massimo con:

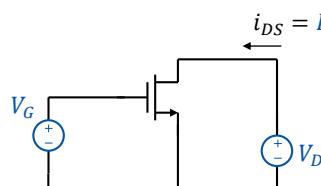
- $v_g = 0.05\text{V}$ e $v_d = 0\text{V}$
- $v_g = 0\text{V}$ e $v_d = 0.5\text{V}$
- $v_g = 0.05\text{V}$ e $v_d = 0.5\text{V}$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

9

Esempio: NMOS in saturazione

1) Calcolare il punto operativo in regime DC



(spengo i valori
tempo-varianti)

$$i_{DS} = I_{DS}$$

DATI: $k_n = 2 \text{ mA/V}^2$; $V_{TN} = 2 \text{ V}$; $\lambda_n = 0.01 \text{ V}^{-1}$
 $V_G = 3 \text{ V}$, $V_D = 5 \text{ V}$

Usiamo solo i generatori DC.

ATTENZIONE: il MOSFET è un componente non lineare. Non è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti tra V_G e V_D .

I maiuscola e pedice maiuscolo perché si tratta di una corrente costante (DC) che passa per il MOSFET in seguito alla polarizzazione costante V_{GS} , V_{DS}

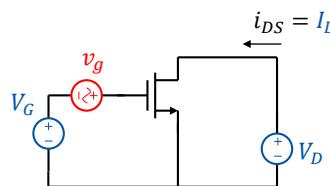
$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS}) = 1.05 \text{ mA}$$

1mA (se trascuriamo λ)

V maiuscola e pedice maiuscolo perché si tratta di una polarizzazione costante (DC)

Esempio: NMOS in saturazione

3) Aggiungiamo il segnale $v_g = 0.05 \text{ V}$ (con $v_d = 0$)



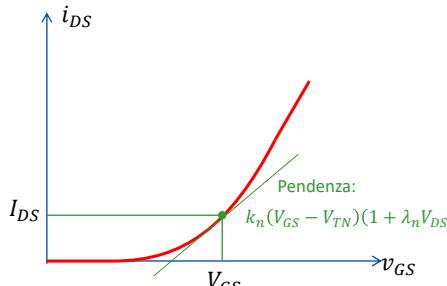
$$i_{DS} = I_{DS} + i_{ds}$$

Sovrapponiamo alla polarizzazione costante
Solo un piccolo segnale al gate ($v_d = 0$):

$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs} = V_G + v_g$$

$$v_{DS} = V_{DS} = V_D$$

$$i_{DS} = \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS})$$



$$i_{DS} = I_{DS} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} v_{gs}$$

$$1.155 \text{ mA}$$

$$2.1 \text{ mS}$$

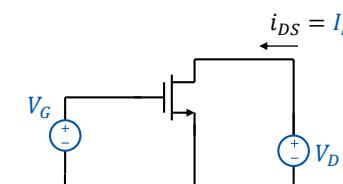
$$0.05 \text{ V}$$

$$1.05 \text{ mA} + 0.105 \text{ mA}$$

Segnale totale
Piccolo segnale
Grande segnale

Esempio: NMOS in saturazione

2) Calcoliamo le derivate parziali



I valori delle derivate dipendono dalla polarizzazione DC del MOSFET

Dopo aver linearizzato il sistema è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti.

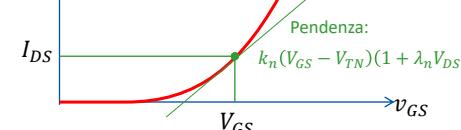
DATI: $k_n = 2 \text{ mA/V}^2$; $V_{TN} = 2 \text{ V}$; $\lambda_n = 0.01 \text{ V}^{-1}$
 $V_G = 3 \text{ V}$, $V_D = 5 \text{ V}$

Dalla transcaratteristica:

$$\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} = k_n (V_{GS} - V_{TN}) (1 + \lambda_n V_{DS})$$

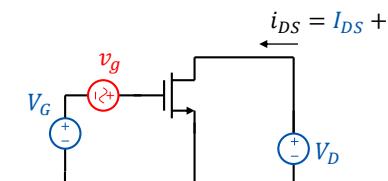
$$2.1 \text{ mS}$$

$$2 \text{ mS} \text{ (se trascuriamo } \lambda \text{)}$$



Esempio: NMOS in saturazione

3) Aggiungiamo il segnale $v_g = 0.05 \text{ V}$ (con $v_d = 0$)



$$i_{DS} = I_{DS} + i_{ds}$$

Sovrapponiamo alla polarizzazione costante
Solo un piccolo segnale al gate ($v_d = 0$):

$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs} = V_G + v_g$$

$$v_{DS} = V_{DS} = V_D$$

$$i_{DS}^{REALE} = \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS})$$

$$i_{DS}^{LIN} = I_{DS} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} v_{gs} = 1.155 \text{ mA}$$

$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs} = 3 \text{ V} + 0.05 \text{ V} = 3.05 \text{ V} \quad \rightarrow \quad i_{DS}^{REALE} = \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS}) = 1.1576 \text{ mA}$$

$$\varepsilon = 1.1576 \text{ mA} - 1.155 \text{ mA} = 0.0026 \text{ mA} = 0.22\%$$

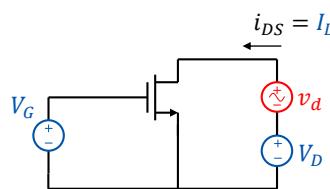
$$\text{Se } v_{gs} = 0.5 \text{ mA} \quad \rightarrow \quad v_{GS} = 3.5 \text{ V} \quad \rightarrow \quad i_{DS}^{REALE} = 2.3625 \text{ mA}$$

$$\varepsilon = 0.2625 \text{ (11\%)}$$

$$i_{DS}^{LIN} = I_{DS} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} v_{gs} = 2.1 \text{ mA}$$

Esempio: NMOS in saturazione

4) Aggiungiamo il segnale $v_d = 0.5V$ (con $v_g = 0$)

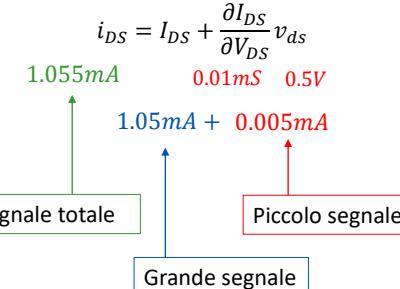
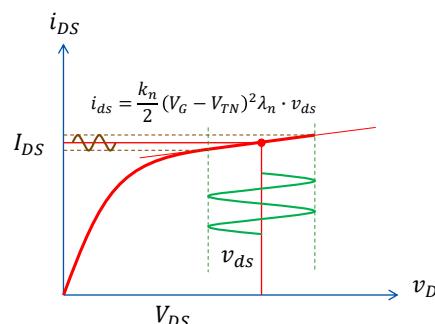


Sovrapponiamo alla polarizzazione costante
Solo un piccolo segnale al drain ($v_g = 0$):

$$v_{GS} = V_{GS} = V_G$$

$$v_{DS} = V_{DS} + v_{ds} = V_D + v_d$$

$$i_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n v_{DS})$$

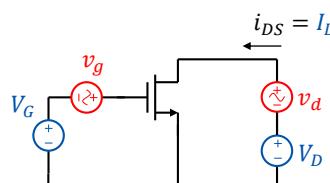


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

14

Esempio: NMOS in saturazione

5) Aggiungiamo il segnale $v_d = 0.5V + v_g = 0.05$



Sovrapponiamo alla polarizzazione costante
un piccolo segnale al gate e al drain:

$$v_{GS} = V_G + v_{gs}$$

$$v_{DS} = V_D + v_{ds}$$

$$\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} = k_n (V_{GS} - V_{TN})(1 + \lambda_n V_{DS}) = 2.1mS$$

$$\frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n = 0.01mS$$

$$i_{DS} = I_{DS}(V_{GS}, V_{DS}) + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} v_{gs} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} v_{ds} = 1.16mA$$

$\underbrace{1.05mA}_{\text{Punto operativo}}$ $\underbrace{0.05mV}_{2.1mS}$ $\underbrace{0.5mV}_{0.01mS}$

$$i_{ds} = \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{GS}} v_{gs} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} v_{ds} = 0.11mA$$

$\underbrace{0.105mA}_{0.105mA}$ $\underbrace{0.005mA}_{0.005mA}$

Piccolo segnale

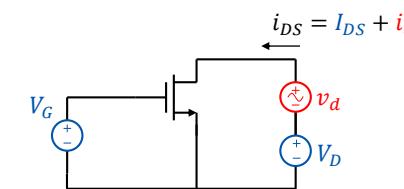
Vale la sovrapposizione degli effetti. La rete approssimata è lineare
La sovrapposizione vale solo se è lineare

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

16

Esempio: NMOS in saturazione

4) Aggiungiamo il segnale $v_d = 0.5V$ (con $v_g = 0$)



Sovrapponiamo alla polarizzazione costante
Solo un piccolo segnale al drain ($v_g = 0$):

$$v_{GS} = V_{GS} = V_G$$

$$v_{DS} = V_{DS} + v_{ds} = V_D + v_d$$

$$i_{DS}^{REALE} = \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS})$$

$$i_{DS}^{LIN} = I_{DS} + \frac{\partial I_{DS}}{\partial V_{DS}} v_{gs} = 1.055mA$$

$$v_{DS} = V_{DS} + v_{ds} = 5V + 0.5V = 5.5V \quad \rightarrow \quad i_{DS}^{REALE} = \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS}) = 1.055mA$$

$e = 0$

In saturazione la corrente dipende linearmente da V_{DS}

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

15

Modello ai piccoli segnali

■ Per modello ai piccoli segnali di un dispositivo (o un circuito) non lineare si intende un circuito equivalente costituito da componenti elementari lineare che ha la stessa relazione tra tensione e corrente del dispositivo di partenza limitatamente al piccolo segnale AC

■ Il circuito equivalente può contenere:

- ◆ Resistenze, condensatori, induttanze
- ◆ Generatori **AC** di tensione o corrente (NO generatori DC)
- ◆ Generatori pilotati di tensione o corrente.

■ Il modello ai piccoli segnali ha lo scopo di semplificare la rete e risolvere il sistema linearizzato. La soluzione ottenuta va sommata a quella della polarizzazione DC

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

18

Generatori

		In DC:	In AC:
Generatori di Tensione:	x V_A y	x V_A y	x v_a y
Generatori di Corrente:	x I_B y	x i_b y	x I_B y
Generatori costanti	x V_A y	x V_A y	x y
Alimentazioni = generatori costanti			
	N.B. In generale i generatori pilotati non vengono mai spenti (perché dipendono dalla grandezza che li pilota)		

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

19

Esempio: resistenza (dispositivo già lineare di suo)

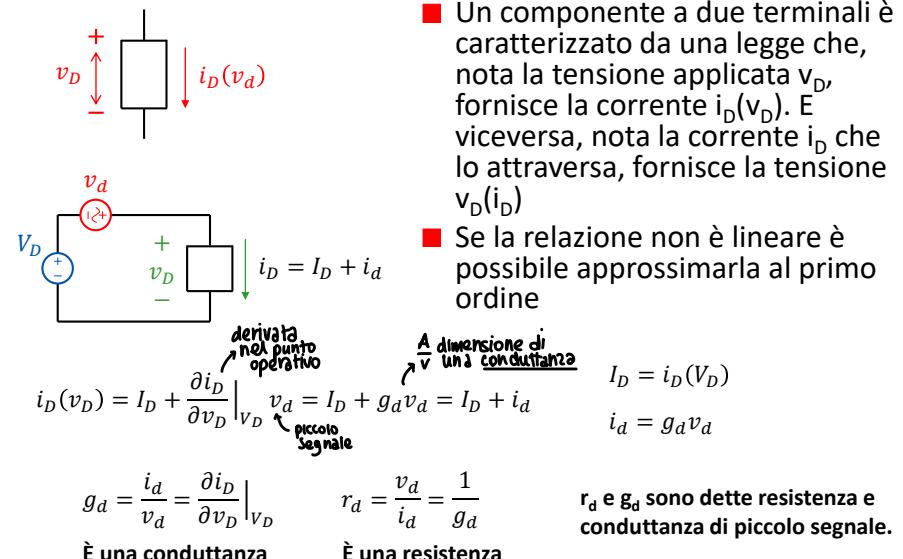
$$\begin{aligned}
 & + \xrightarrow{\text{v}_R} R \downarrow i_R \quad i_R = \frac{v_R}{R} \\
 & v_R = V_R + v_r \quad \rightarrow \quad i_R = \frac{V_R + v_r}{R} = \frac{V_R}{R} + \frac{v_r}{R} \\
 & \qquad \qquad \qquad I_R + i_r \\
 & \text{V}_R \quad \text{v}_r \quad + \xrightarrow{\text{v}_R} R \downarrow i_R \quad g = \frac{\partial i_R}{\partial v_R} = \frac{1}{R} \quad r = \frac{\partial i_R}{\partial v_R} = R
 \end{aligned}$$

Il modello ai piccoli segnali di una resistenza di valore R è una resistenza $r = R$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

21

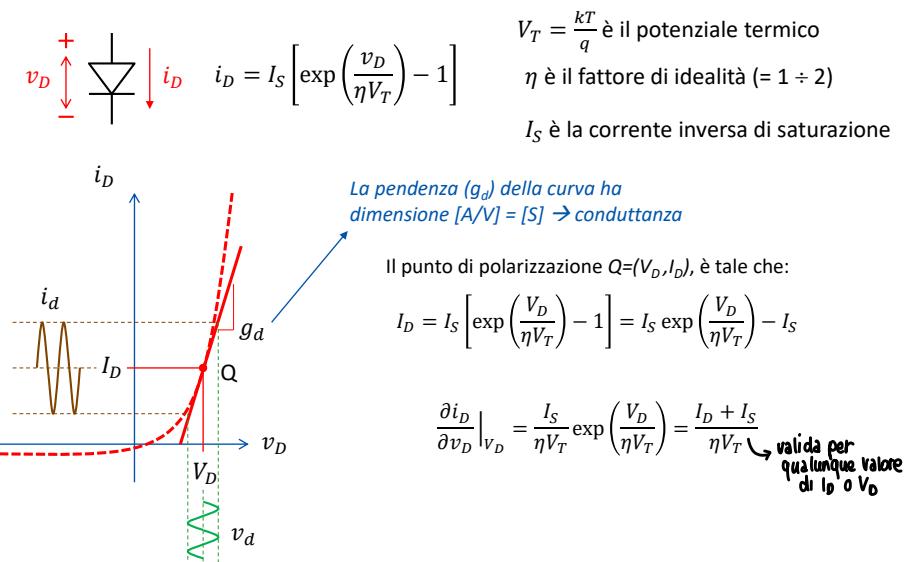
Componenti a 2 terminali (trattazione generale valida per qualunque dispositivo)



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

20

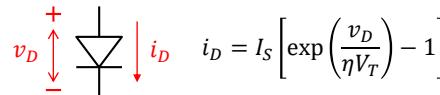
Esempio: diodo



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

22

DIODO



$$i_D = I_S \left[\exp\left(\frac{v_D}{\eta V_T}\right) - 1 \right]$$

$$g_d = \frac{I_D + I_S}{\eta V_T}$$

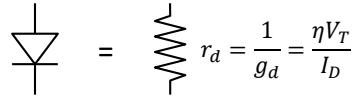
Modello ai piccoli segnali – polarizzazione diretta

$$v_D \cong V_{ON}$$

↪ resistenza molto piccola (che andrebbe in serie al generatore di V_{ON})

$$I_D \gg I_S$$

$$g_d \cong \frac{I_D}{\eta V_T} \rightarrow \text{trascurriamo } I_S (I_D \gg I_S)$$



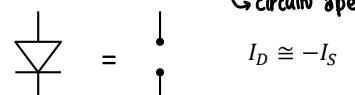
$$r_d = \frac{1}{g_d} = \frac{\eta V_T}{I_D}$$

$$v_d = r_d i_d$$

Se I_D è grande r_d è piccola
quindi anche v_d è piccola

Modello ai piccoli segnali – polarizzazione inversa

↪ circuito aperto



$$I_D \cong -I_S$$

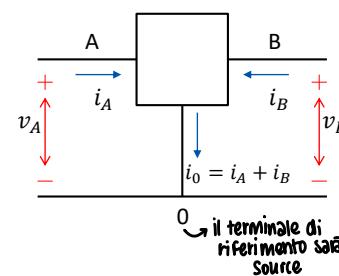
$$g_d \cong 0$$

$$r_d = \frac{1}{g_d} = \infty$$

$$i_d = 0$$

circuito aperto

Componente a 3 terminali



$$i_A = f_A(v_A, v_B)$$

$$i_B = f_B(v_A, v_B)$$

Per la Legge di Kirchhoff $i_0 = i_A + i_B$

Definiamo 0, A, B i tre terminali del dispositivo

Usiamo il terminale 0 come riferimento delle tensioni.

Indichiamo con:

- ♦ v_A il potenziale del nodo A riferito al nodo 0

- ♦ v_B il potenziale del nodo B riferito al nodo 0

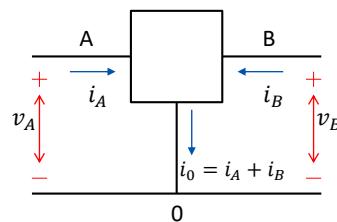
- ♦ i_A la corrente del nodo A

- ♦ i_B la corrente del nodo B

i_A e i_B possono essere prese con verso entrante o uscente (in figura sono assunte con verso entrante)

Usiamo le tensioni come variabile indipendente e calcoliamo le correnti in funzione della tensione

Componente a 3 terminali



- Linearizziamo il componente a tre terminali, in un intorno del punto operativo $Q = (V_A, V_B)$.
- Usiamo la solita convenzione dei pedici per distinguere il grande e piccolo segnale.
- Usiamo le derivate parziali per linearizzare le correnti.

- Esprimiamo i segnali di ingresso come somma di polarizzazione costante e piccolo segnale:

$$v_A = V_A + v_a$$

$$v_B = V_B + v_b$$

- Linearizziamo le due correnti:

$$i_A = f_A(V_A + v_a, V_B + v_b) = f_A(V_A, V_B) + \frac{\partial f_A}{\partial v_A} \Big|_Q v_a + \frac{\partial f_A}{\partial v_B} \Big|_Q v_b$$

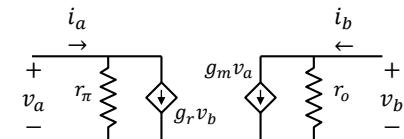
$$i_B = f_B(V_A + v_a, V_B + v_b) = f_B(V_A, V_B) + \frac{\partial f_B}{\partial v_A} \Big|_Q v_a + \frac{\partial f_B}{\partial v_B} \Big|_Q v_b$$

termine costante Grande segnale

Componente a 3 terminali

$$i_a = \frac{\partial f_A}{\partial v_A} \Big|_Q v_a + \frac{\partial f_A}{\partial v_B} \Big|_Q v_b = g_\pi v_a + g_r v_b$$

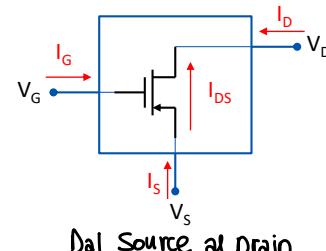
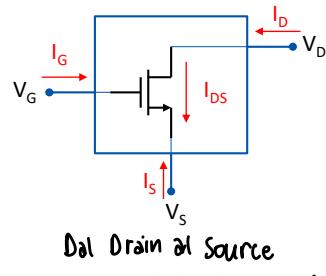
$$i_b = \frac{\partial f_B}{\partial v_A} \Big|_Q v_a + \frac{\partial f_B}{\partial v_B} \Big|_Q v_b = g_m v_a + g_o v_b$$



Le derivate parziali di f_A e f_B rispetto alle tensioni v_A e v_B rappresentano delle conduttanze e hanno il Siemens come unità di misura

Nome	Definizione	Come si calcola
Conduttanza (resistenza) di ingresso	$g_\pi = \frac{\partial f_A}{\partial v_A} \Big _Q \quad r_\pi = \frac{1}{g_\pi}$	$g_\pi = \frac{i_a}{v_a} \Big _{v_b=0} \quad r_\pi = \frac{v_a}{i_a} \Big _{v_b=0}$
Transconduttanza	$g_m = \frac{\partial f_B}{\partial v_A} \Big _Q$	$g_m = \frac{i_b}{v_a} \Big _{v_b=0}$
Transconduttanza inversa	$g_r = \frac{\partial f_A}{\partial v_B} \Big _Q$	$g_r = \frac{i_a}{v_b} \Big _{v_a=0}$
Conduttanza (resistenza) di uscita	$g_o = \frac{\partial f_B}{\partial v_B} \Big _Q \quad r_o = \frac{1}{g_o}$	$g_o = \frac{i_b}{v_b} \Big _{v_a=0} \quad r_o = \frac{v_b}{i_b} \Big _{v_a=0}$

Convenzione dei segni delle correnti ai grandi segnali



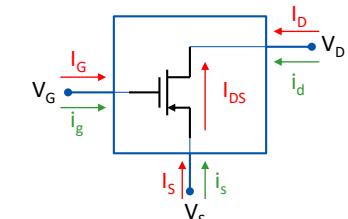
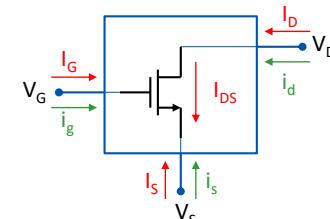
■ In un NMOS ai grandi segnali:

- ◆ $I_D = I_{DS}$
- ◆ $I_S = -I_{DS}$

■ In un PMOS ai grandi segnali:

- ◆ $I_D = -I_{DS}$
- ◆ $I_S = I_{DS}$

Convenzione dei segni delle correnti ai piccoli segnali



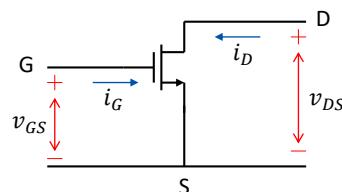
■ Per entrambi i tipi di MOSFET assumiamo che le correnti di piccolo segnale i_d , i_s e i_g abbiano lo stesso verso dei corrispondenti contributi di grande segnale:

- ◆ positiva se entrante
- ◆ negativa se uscente

Transistor NMOS (Modello ai piccoli segnali di un nMOSFET)

$$\begin{array}{lll} A \rightarrow G & B \rightarrow D & 0 \rightarrow S \text{ (riferimento)} \\ v_A \rightarrow v_{GS} & v_B \rightarrow v_{DS} & i_A \rightarrow i_G \quad i_B \rightarrow i_D = i_{DS} \end{array}$$

Transistor NMOS



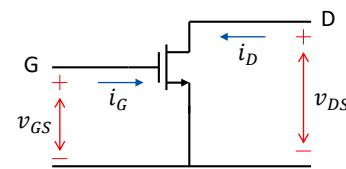
$$i_G = 0$$

$$i_D = i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n \left[(v_{GS} - V_{TN})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare i parametri del modello a doppio bipolo:

$$g_r, r_\pi, g_m, r_o$$

Transistor NMOS: corrente di gate



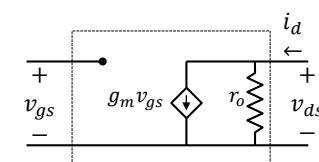
$$i_G = 0$$

$$i_D = i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n \left[(v_{GS} - V_{TN})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

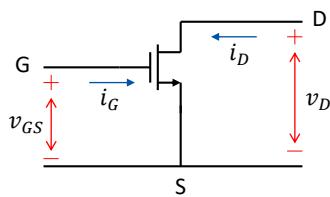
Il gate è un circuito aperto, quindi ha sempre resistenza di ingresso infinita indipendentemente dalla regione di funzionamento

$$g_\pi = \frac{\partial i_G}{\partial v_{GS}} \Big|_Q = 0$$

$$g_r = \frac{\partial i_G}{\partial v_{DS}} \Big|_Q = 0$$



Transistor NMOS: corrente di drain



$$i_G = 0$$

$$i_D = i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n \left[(v_{GS} - V_{TN})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

Tensioni totali ai terminali di gate e drain: $v_{GS} = V_{GS} + v_{gs}$ $v_{DS} = V_{DS} + v_{ds}$
 (somma di grande e piccolo segnale)
 $Q = (V_{GS}, V_{DS})$ = punto operativo

$$i_D(V_{GS} + v_{gs}, V_{DS} + v_{ds}) = i_D(V_{GS}, V_{DS}) + \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \Big|_Q v_{gs} + \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_Q v_{ds}$$

$$i_D(V_{GS} + v_{gs}, V_{DS} + v_{ds}) = I_{DS} + g_m v_{gs} + \frac{v_{ds}}{r_o} = I_{DS} + i_{ds}$$

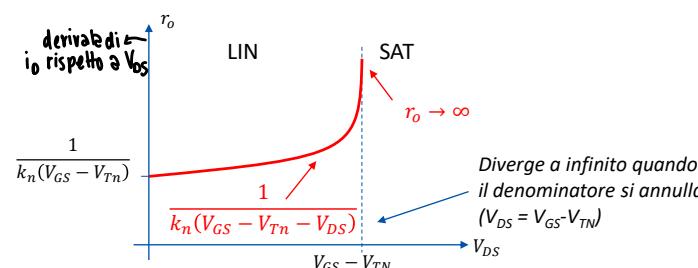
Definiamo:
 $i_{ds} = i_d = g_m v_{gs} + \frac{v_{ds}}{r_o}$
 Stesso verso di I_{DS}
 Stesso verso di i_D

$$I_{DS} = i_D(V_{GS}, V_{DS}) \quad g_m = \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \Big|_Q \quad \frac{1}{r_o} = \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_Q$$

Transistor NMOS: resistenza di uscita, r_o

$$i_D = i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n \left[(v_{GS} - V_{TN})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

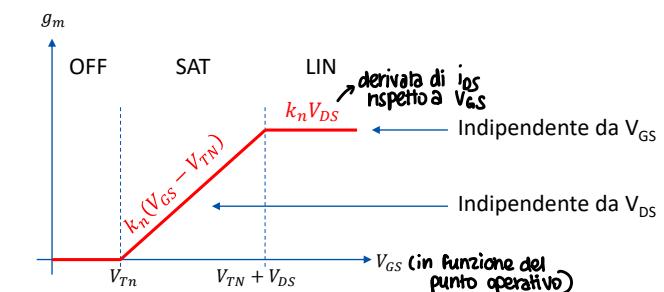
$$g_o = \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_{v_{GS}=V_{GS}} = \begin{cases} k_n(V_{GS} - V_{TN} - V_{DS}) & \text{interdizione} \\ 0 & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 & \text{saturazione} \end{cases} \quad r_o = \frac{1}{g_o}$$



Transistor NMOS: transconduttanza, g_m

$$i_D = i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n \left[(v_{GS} - V_{TN})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

$$g_m = \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \Big|_{v_{DS}=V_{GS}} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n V_{DS} & \text{lineare} \\ k_n (V_{GS} - V_{TN}) & \text{saturazione} \end{cases}$$

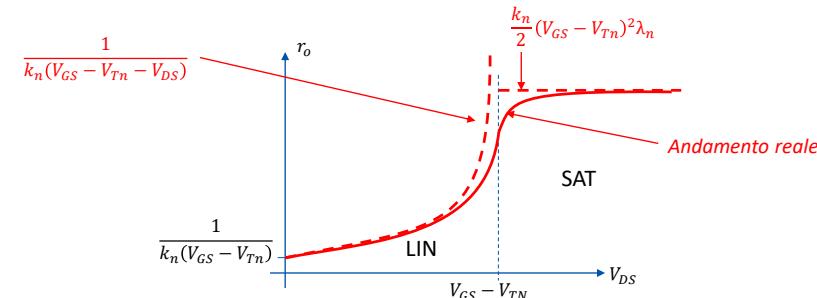


Transistor NMOS: resistenza di uscita, r_o

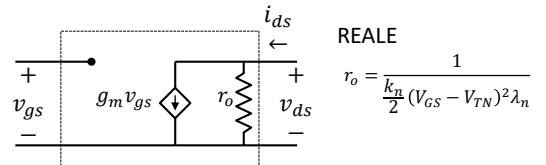
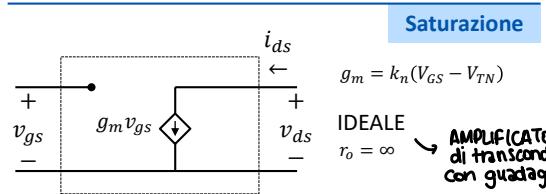
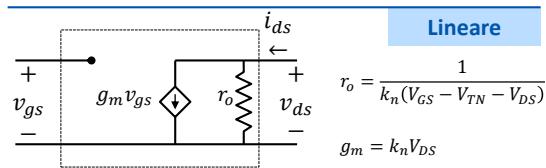
Con modulazione della lunghezza di canale

$$i_D = i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ k_n \left[(v_{GS} - V_{TN})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ \frac{k_n}{2} (v_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n v_{DS}) & \text{saturazione} \end{cases}$$

$$g_o = \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_{v_{GS}=V_{GS}} = \begin{cases} k_n(V_{GS} - V_{TN} - V_{DS}) & \text{interdizione} \\ \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n & \text{lineare} \\ 0 & \text{saturazione} \end{cases} \quad r_o = \frac{1}{g_o}$$



Transistor NMOS: in sintesi



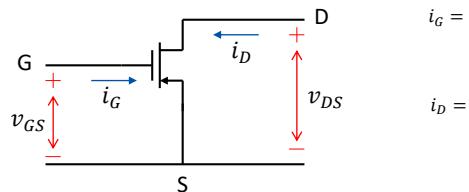
■ ATTENZIONE: il modello ai piccoli segnali approssima il MOSFET come un generatore di NORTON

■ Nell'ottica di pilotare un carico resistivo, un generatore dovrebbe avere:

- ◆ Resistenza nulla nello schema di Thévenin oppure:
- ◆ Resistenza infinita nello schema di Norton

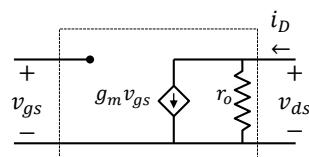
■ Il miglior modo di polarizzare il MOSFET è in saturazione!

Transistor PMOS: corrente di gate



$$i_D = -i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p \left[(v_{GS} - V_{TP})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ -\frac{k_p}{2}(v_{GS} - V_{TP})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

Il gate è un circuito aperto, quindi ha sempre resistenza di ingresso infinita indipendentemente dalla regione di funzionamento



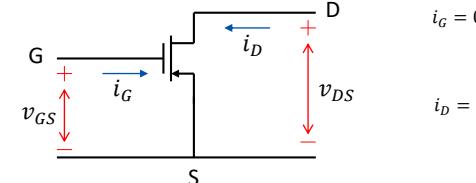
$$g_\pi = \frac{\partial i_G}{\partial v_{GS}} \Big|_Q = 0$$

$$g_r = \frac{\partial i_G}{\partial v_{DS}} \Big|_Q = 0$$

Transistor PMOS (modello a piccoli segnali di un pMOSFET)

$A \rightarrow G$	$B \rightarrow D$	$0 \rightarrow S$ (riferimento)
$v_A \rightarrow v_{GS}$	$v_B \rightarrow v_{DS}$	$i_A \rightarrow i_G$ $i_B \rightarrow i_D = -i_{DS}$

Transistor PMOS i_G e i_D considerate positive se entranti

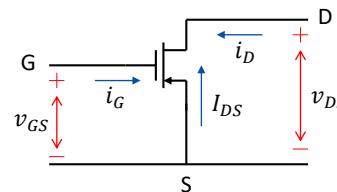


$$i_D = -i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p \left[(v_{GS} - V_{TP})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ -\frac{k_p}{2}(v_{GS} - V_{TP})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare i parametri del modello a doppio bipolo:

$$g_r, r_\pi, g_m, r_o$$

Transistor PMOS: corrente di drain



$$i_D = -i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p \left[(v_{GS} - V_{TP})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ -\frac{k_p}{2}(v_{GS} - V_{TP})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

Tensioni totali ai terminali di gate e drain:
 $v_{GS} = v_{GS} + v_{gs}$ $v_{DS} = v_{DS} + v_{ds}$
(somma di grande e piccolo segnale)

$$Q = (v_{GS}, v_{DS}) = \text{punto operativo}$$

$$i_D(v_{GS} + v_{gs}, v_{DS} + v_{ds}) = i_D(v_{GS}, v_{DS}) + \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \Big|_Q v_{gs} + \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_Q v_{ds}$$

$$i_D(v_{GS} + v_{gs}, v_{DS} + v_{ds}) = -I_{DS} + g_m v_{gs} + \frac{v_{ds}}{r_o}$$

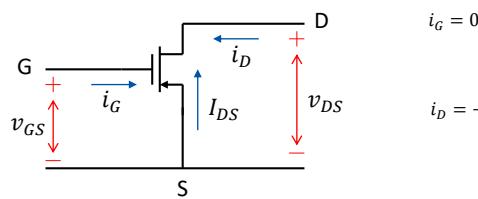
Attenzione ai segni!

$$I_{DS} = -i_D(v_{GS}, v_{DS})$$

$$g_m = \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \Big|_Q = -\frac{\partial i_{DS}}{\partial v_{GS}} \Big|_Q$$

$$\frac{1}{r_o} = \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_Q = -\frac{\partial i_{DS}}{\partial v_{DS}} \Big|_Q$$

Transistor PMOS: corrente di drain



$$i_D(v_{GS} + v_{gs}, v_{DS} + v_{ds}) = -I_{DS} + g_m v_{gs} + \frac{v_{ds}}{r_o}$$

$$i_D = -I_{DS} + i_{ds}$$

$$i_{DS} = -i_D = I_{DS} - i_{ds}$$

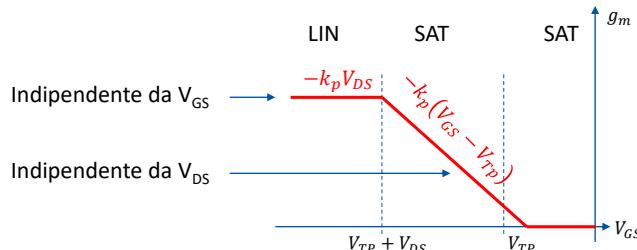
Verso opposto a I_{DS}
Stesso verso di i_d

In un pMOSFET la corrente i_{ds} di piccolo segnale è opposta alla corrente I_{DS} di grande segnale.
 i_{ds} viene assunta positiva se entrante al drain.
 I_{DS} viene assunta positiva se uscente al drain.

Transistor PMOS: transconduttanza, g_m

$$i_D = -i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p \left[(v_{GS} - V_{TP}) v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ -\frac{k_p}{2} (v_{GS} - V_{TP})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

$$g_m = \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \Big|_{v_{DS}=V_{DS}} = -\frac{\partial i_{DS}}{\partial v_{GS}} \Big|_{v_{DS}=V_{DS}} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p v_{DS} & \text{lineare} \\ -k_p (V_{GS} - V_{TP}) & \text{saturazione} \end{cases}$$



Osservazione

In un nMOSFET, fissato il punto operativo $Q=(V_{GS}, V_{DS}, I_{DS})$:

Un piccolo segnale positivo v_{gs} fa aumentare la tensione totale $v_{GS} = V_{GS} + v_{gs}$ e a sua volta aumenta la corrente totale $i_{DS} = I_{DS} + i_{ds}$

Ciò equivale a dire che: se $v_{gs} > 0$, allora $i_{ds} > 0$

Attenzione:
 $V_{GS} < 0; V_{DS} < 0$

In un pMOSFET, fissato il punto operativo $Q=(V_{GS}, V_{DS}, I_{DS})$:

Un piccolo segnale $v_{gs} > 0$ fa aumentare (in modulo e segno) la tensione $v_{GS} = V_{GS} + v_{gs}$ → Il modulo di v_{GS} diminuisce

A sua volta la corrente totale $i_{DS} = I_{DS} + i_{ds}$ diminuisce

Ciò equivale a dire che: se $v_{gs} > 0$, allora $i_{ds} < 0$

↳ v_{gs} è negativa nel pmos

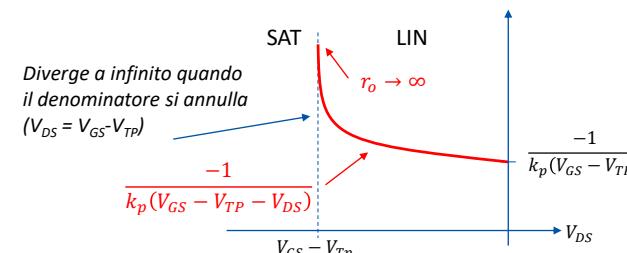
Ciò equivale a considerare $i_{ds} > 0$, ma cambiare il verso di i_{ds} rispetto a I_{DS} !

Assumiamo I_{DS} positiva se uscente, i_{ds} positiva se entrante (come in un nMOSFET)

Transistor PMOS: resistenza di uscita, r_o

$$i_D = -i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p \left[(v_{GS} - V_{TP}) v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ -\frac{k_p}{2} (v_{GS} - V_{TP})^2 & \text{saturazione} \end{cases}$$

$$g_o = \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_{v_{GS}=V_{GS}} = -\frac{\partial i_{DS}}{\partial v_{DS}} \Big|_{v_{GS}=V_{GS}} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ 0 & \text{lineare} \\ \frac{-1}{k_p(V_{GS} - V_{TP} - V_{DS})} & \text{saturazione} \end{cases} \quad r_o = \frac{1}{g_o}$$



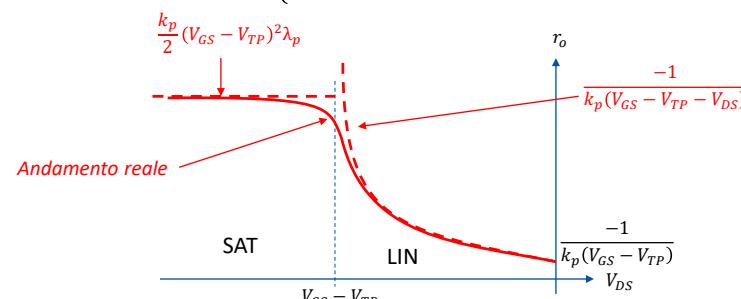
Transistor PMOS: resistenza di uscita, r_o

Con modulazione della lunghezza di canale

$$i_D = -i_{DS} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p \left[(V_{GS} - V_{TP})v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right] & \text{lineare} \\ -\frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2 (1 - \lambda_p v_{DS}) & \text{saturazione} \end{cases}$$

$$g_o = \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \Big|_{v_{DS}=V_{GS}} = -\frac{\partial i_{DS}}{\partial v_{DS}} \Big|_{v_{DS}=V_{GS}} = \begin{cases} 0 & \text{interdizione} \\ -k_p (V_{GS} - V_{TP} - V_{DS}) & \text{lineare} \\ \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{TP})^2 \lambda_p & \text{saturazione} \end{cases}$$

$$r_o = \frac{1}{g_o}$$

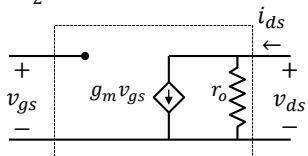


Esempio 1: zona lineare vs. saturazione

NMOS con: $k_n = 1 \text{ mA/V}^2$, $V_{TN} = 1 \text{ V}$, $\lambda_n = 0.01 \text{ V}^{-1}$,

$V_{GS} = 2 \text{ V}$, $V_{DS} = 4 \text{ V}$
(saturazione)

$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda_n V_{DS}) = 0.52 \text{ mA}$$



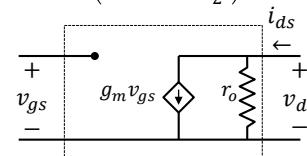
$$g_m = k_n (V_{GS} - V_{TN}) = 1 \text{ mS}$$

$$r_o = \frac{2}{k_n (V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n} = 200 \text{ k}\Omega$$

Resistenza di uscita molto alta

$V_{GS} = 3 \text{ V}$, $V_{DS} = 1 \text{ V}$
(lineare)

$$I_{DS} = k_n \left(V_{GS} - V_{TN} - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS} = 1.5 \text{ mA}$$



$$g_m = k_n V_{DS} = 1 \text{ mS}$$

$$r_o = \frac{1}{k_n (V_{GS} - V_{TN} - V_{DS})} = 1 \text{ k}\Omega$$

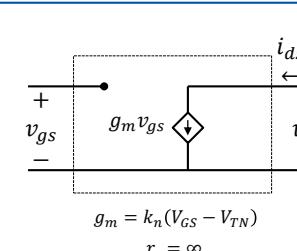
Resistenza di uscita bassa

All'esame è
necessario
sempre fare
la verifica della
saturazione!

Il MOSFET si comporta (al piccolo segnale) come un amplificatore di transconduttanza.
La regione di saturazione è quella che garantisce la maggior idealità

Transistor PMOS vs. NMOS

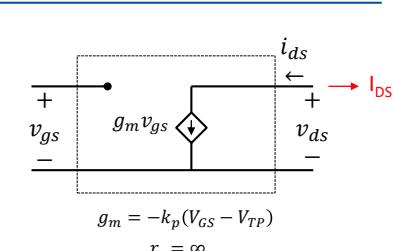
NMOS



$$g_m = k_n (V_{GS} - V_{TN})$$

$$r_o = \infty$$

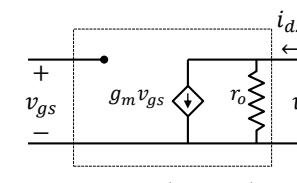
Ideale



$$g_m = -k_p (V_{GS} - V_{TP})$$

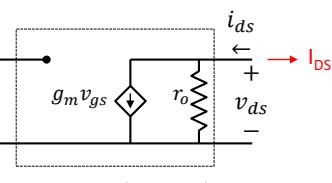
$$r_o = \infty$$

Reale



$$g_m = k_n (V_{GS} - V_{TN})$$

$$r_o = \frac{2}{k_n (V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n}$$



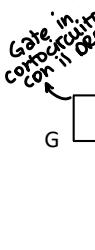
$$g_m = -k_p (V_{GS} - V_{TP})$$

$$r_o = \frac{2}{k_p (V_{GS} - V_{TP})^2 \lambda_p}$$

Esempio 2: MOS connesso a diodo

Disegnare il modello ai piccoli segnali di un transistor NMOS con $v_{GS} = v_{DS} = V_A + v_a$

È un transistor ad arricchimento, dato che la soglia è positiva

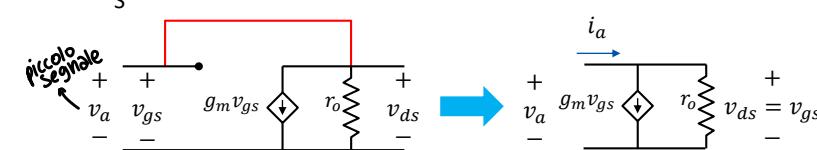


Dati:

- $V_A = 2 \text{ V}$
- $V_{TN} = 1 \text{ V}$
- $k_n = 1 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2}$
- $\lambda_n = 0.02 \text{ V}^{-1}$

$$g_m = k_n (V_{GS} - V_{TN}) = 1 \text{ mS}$$

$$r_o = \frac{2}{k_n (V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n} = 100 \text{ k}\Omega$$



Calcoliamo la resistenza equivalente vista dal generatore v_a

conduttanza

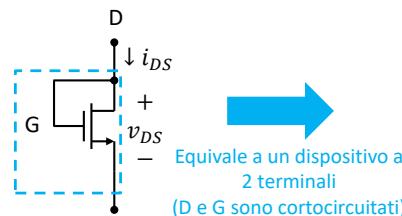
$$i_a = \frac{v_a}{r_o} + g_m v_a = v_a \left(\frac{1 + g_m r_o}{r_o} \right)$$

$$r_{eq} = \frac{r_o}{1 + g_m r_o} \approx \frac{1}{g_m}$$

se $g_m r_o \gg 1$
resistenza equivalente

Esempio 2: MOS connesso a diodo

Vediamo il problema da un altro punto di vista:



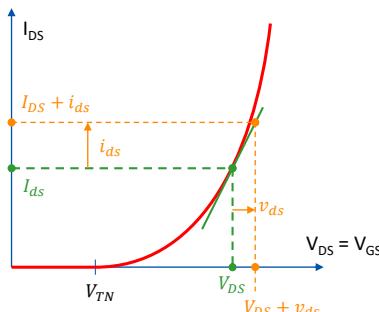
$$I_{DS} = \frac{k}{2}(V_{DS} - V_{TN})^2 \quad \text{IDEALE}$$

$$i_{DS}(V_{DS} + v_{ds}) = i_{DS}(V_{DS}) + \frac{\partial i_{DS}}{\partial v_{DS}}|_{V_{DS}} v_{ds}$$

$$k(V_{DS} - V_{TN}) = g_m$$

$$i_{DS} = I_{DS} + g_m v_{ds}$$

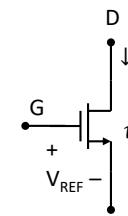
$$\text{Resistenza pari a } 1/g_m \quad i_{ds} = g_m v_{ds}$$



Esempio 3: MOS con V_{GS} costante

Disegnare il modello ai piccoli segnali di un NMOS con: $V_{GS} = V_{REF}$ (costante)

$$V_{DS} = V_A + v_a$$

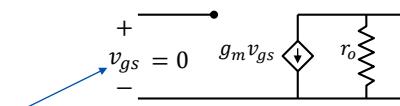


Dati:

- $V_A = 2 \text{ V}$
- $V_{TN} = 1 \text{ V}$
- $k_n = 0.1 \frac{\text{mA}}{\text{V}^2}$
- $\lambda_n = 0.02 \text{ V}^{-1}$

$$g_m = k_n(V_{GS} - V_{TN})$$

$$r_o = \frac{2}{k_n(V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n}$$



Il gate è a potenziale costante rispetto al source $\Rightarrow v_{gs} = 0$

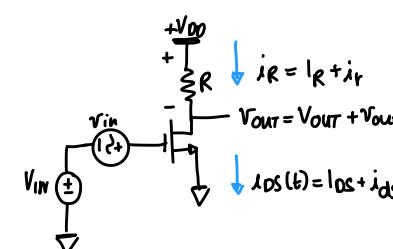
Se v_g è costante, il circuito si semplifica * con un'unica resistenza

$$g_m v_{gs} = 0$$

Procedura per studiare un circuito elementare

Come fare l'analisi di un circuito in presenza di componenti non lineari:

- Usando solo i generatori e gli ingressi in regime DC (costanti nel tempo), risolviamo il circuito e troviamo il punto di lavoro.
 - Linearizziamo il circuito sostituendo ai componenti non lineari, l'approssimazione lineare (valida SOLO in un intorno del punto operativo)
 - Spegniamo tutti i generatori e ingressi costanti (cortocircuitare i generatori/ingressi di tensione e aprire i generatori/ingressi di corrente)
 - Risolviamo il circuito linearizzato con i soli generatori e ingressi AC SOLO IN QUESTO PUNTO POSSO UTILIZZARE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI
 - Sommiamo i risultati DC + AC
- Quero, tutti i componenti devono essere linearizzati prima di applicarlo!



$$\begin{aligned} &+V_{DD} \\ &\downarrow R \quad i_R = i_R + i_D \\ &v_{in} \quad | \\ &- \quad \downarrow \quad v_{out} = v_{out} + v_{out} \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ &i_{DS}(t) = i_{DS} + i_{DS} \end{aligned}$$

$$\frac{V_{DD} - V_{out}}{R} + -\frac{v_{out}}{R} = i_{DS} + g_m v_{gs} + \frac{v_{ds}}{r_o}$$

$$\begin{aligned} &\text{Soluzione del punto operativo (DC)} \\ &\frac{V_{DD} - V_{out}}{R} + -\frac{V_{out}}{R} = i_{DS}(V_{GS}, V_{DS}) \end{aligned}$$

Equivale a:

- trovate il punto di lavoro del MOSFET a cond. stazionaria
- Annullare tutti i generatori tempo-invarianti a media nulla

Esempio: La tensione V_{out} viene calcolata mediante la legge di Kirchhoff al nodo di uscita

$$i_R(t) = i_{DS}(t)$$

Uguagliare $i_R(t)$ è $i_{DS}(t)$ equivale a uguagliare simultaneamente sia i valori medi sia i valori temporali varianti a media nulla

$$\begin{aligned} &\text{Soluzione del circuito ai piccoli segnali (AC)} \\ &g_m v_{gs} + \frac{v_{ds}}{r_o} + \frac{V_{DS}}{R} \quad (V_{DS} = V_{out}) \end{aligned}$$

Equivale a:

- Usate il modello ai piccoli segnali di R ed del MOSFET
- Annullare i gen. costanti (V_{DD})

→ È NECESSARIO CONOSCERE IL PUNTO OPERATIVO!

Amplificatori a MOSFET: stadi elementari

Jaeger 6°Ed.: Cap. 10 p.425-434(*), Cap.11 p.439-494(*)

- Circuito di polarizzazione AC e DC: condensatori di accoppiamento e bypass
- Configurazioni elementari degli amplificatori a transistor:
 - ◆ Source comune o amplificatore invertente
 - ◆ Drain comune o inseguitore di source
 - ◆ Gate comune o amplificatore non invertente

(*) il libro tratta parallelamente il MOS e il transistor BJT. Il BJT non è trattato a lezioni, ma i concetti esposti sono validi anche per il MOSFET

2

Obiettivo

■ **Obiettivo:** costruire un amplificatore con un singolo transistor

■ **Requisiti:**

- ◆ Il transistor deve essere polarizzato in un punto in cui il comportamento sia lineare
- ◆ Il segnale di ingresso (da amplificare) non deve alterare il punto di polarizzazione

■ Esistono due strategie per "sommare" il grande e il piccolo segnale:

- ◆ Accoppiamento in DC
- ◆ Accoppiamento in AC

■ In entrambi i casi è necessario "separare" gli effetti del grande segnale (realizzato mediante la rete di polarizzazione già studiata) dal piccolo segnale a frequenza f che è sovrapposto.

Accoppiamento in DC: sorgente

Accoppiamento in DC = collegamento diretto tra sorgente e ingresso

Ingresso accoppiato in DC in Direct Current ovvero corrente continua
→ associamo la sorgente direttamente all'ingresso

$$\frac{v_i - v_G}{R_i} + \frac{V_{SS} - v_G}{R_1} + \frac{V_{DD} - v_G}{R_2} = 0 \quad \text{Correnti al nodo G}$$

$$v_G = \frac{\frac{v_i}{R_i} + \frac{V_{SS}}{R_1} + \frac{V_{DD}}{R_2}}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

↳ formula della STELLA per il calcolo delle resistenze

Prendiamo Gate come Ingresso e Drain per l'uscita, ad esempio

La sorgente incide sul punto operativo ... MALE!
Cambiando la tensione V_{GS} si potrebbe spostare il transistor dalla saturazione

Dipende dalla sorgente a meno che R_1 e R_2 siano tali che:

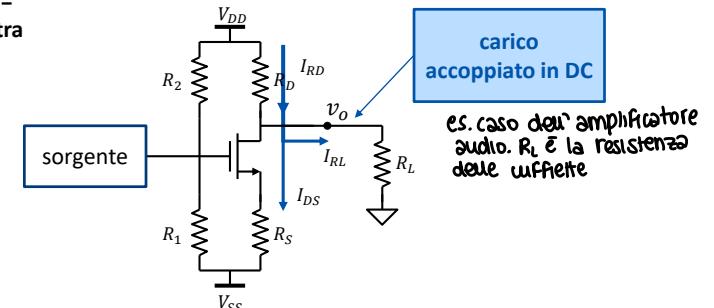
$$\frac{V_{SS}}{R_1} + \frac{V_{DD}}{R_2} = 0$$

Effetto della polarizzazione DC: $v_i = 0$ $V_{DD} \neq 0$ $V_G = \frac{V_{SS} + V_{DD}}{R_1 + R_2}$

Effetto del segnale AC: $v_i \neq 0$ $V_{DD} = 0$ $v_g = \frac{v_i}{1 + \frac{R_i}{R_1} + \frac{R_i}{R_2}}$
annulliamo $v_i \neq 0$ $V_{SS} = 0$

Accoppiamento in DC: carico

Accoppiamento in DC = collegamento diretto tra carico e uscita



I_{DS} è definita da R_S (polarizzazione del MOS con resistenza al drain)

Fissate I_{DS} (in saturazione), V_o è determinata dalla legge di kirchhoff

$$V_o = V_{DD} - R_D(I_{DS} + I_{RL}) = V_{DD} - R_D I_{DS} - \frac{R_D V_o}{R_L}$$

$$V_o = \frac{V_{DD} - R_D I_{DS}}{1 + \frac{R_D}{R_L}}$$

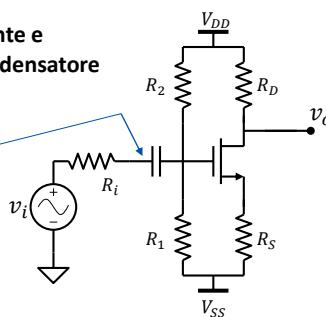
ATTENZIONE: $V_{DS} = V_o - V_S$

Se v_o diminuisce il MOS potrebbe uscire dalla saturazione!

Accoppiamento in AC: sorgente

Accoppiamento in AC = collegamento tra sorgente e ingresso tramite un condensatore

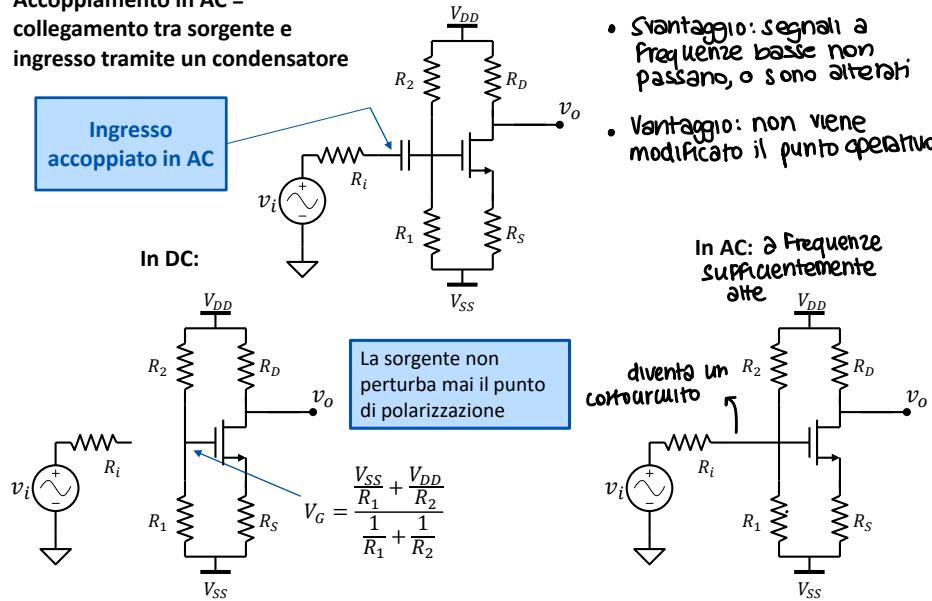
Ingresso accoppiato in AC



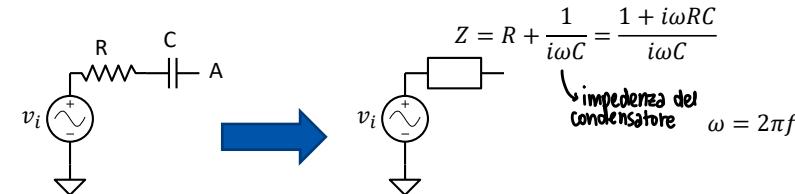
Accoppiamento in AC: sorgente

Accoppiamento in AC = collegamento tra sorgente e ingresso tramite un condensatore

Ingresso accoppiato in AC



Condensatore di accoppiamento o di blocco



In DC ($\omega = 0$):
condizioni stazionarie

Z = ∞
costante di tempo
il segnale passa a frequenze sufficiente alte

$$Z = R$$

In AC (se $\omega \gg 1/RC$):
Il condensatore fa passare v_i
Si usa dire che il segnale v_i è accoppiato in AC al nodo A

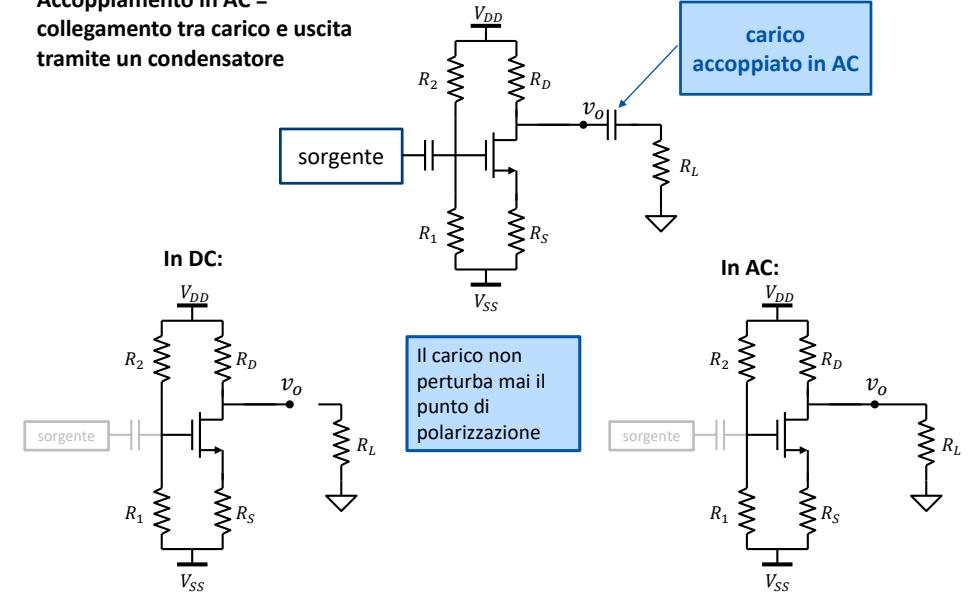
Il condensatore C è detto condensatore di blocco o condensatore di accoppiamento

blocca i segnali continui

Accoppiamento in AC: carico

Accoppiamento in AC = collegamento tra carico e uscita tramite un condensatore

carico accoppiato in AC

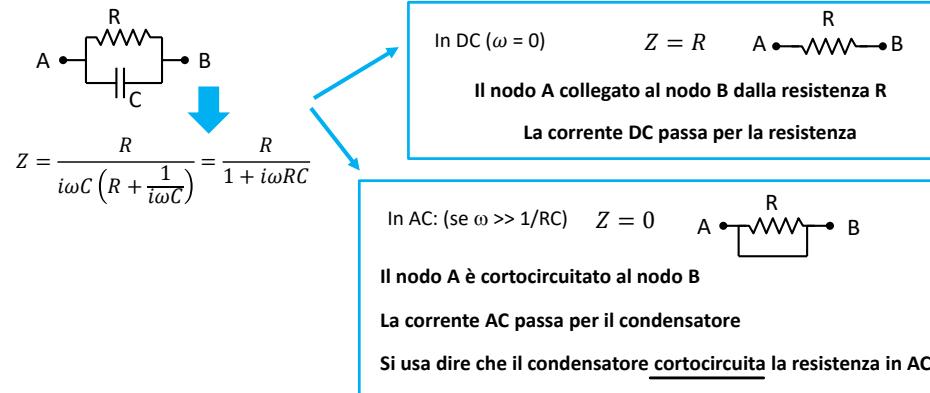


Condensatore di bypass

Un condensatore C può essere usato anche per cambiare il valore equivalente di una resistenza in un ramo del circuito. Ad esempio per ottenere due diversi valori di resistenza in condizioni DC e AC.

Il condensatore C è detto **condensatore bypass**

Esempio



Regole per l'analisi in DC e in AC

Per analizzare un circuito in cui sono presenti sia generatori DC sia generatori AC, componenti non lineari, e in presenza di condensatori di bypass e di accoppiamento è necessario usare questa procedura:

- **Analisi DC:**
 - ◆ Si aprono tutti i condensatori (circuiti aperti)
 - ◆ Si annullano i generatori AC
 - ◆ Si calcola il punto di lavoro (che per un MOSFET deve essere in saturazione)
- **Si calcolano i parametri del modello a piccolo segnale (g_m e r_o , ...)**
- **Analisi AC:**
 - ◆ Si cortocircuitano tutti i condensatori (in base all'ipotesi che $\omega \gg 1/RC$)
 - ◆ Si annullano tutti i generatori DC
 - ◆ Si sostituisce il MOSFET e ogni altro componente con il relativo modello ai piccoli segnali
 - ◆ Si risolve la rete linearizzata
- **Al termine si sommano le uscite (sovraposizione degli effetti)**

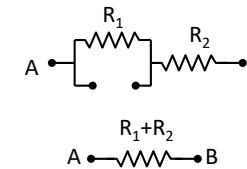
Condensatore di bypass

Esempio

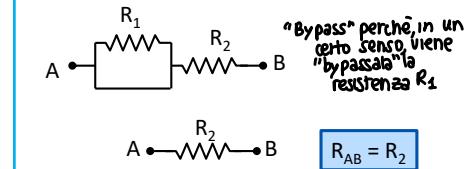
Calcolare la resistenza del ramo tra i nodi A e B in condizioni DC e AC

$$Z = \frac{R_1}{1 + i\omega R_1 C_1} + R_2$$

A basse frequenze: In DC ($\omega = 0$)



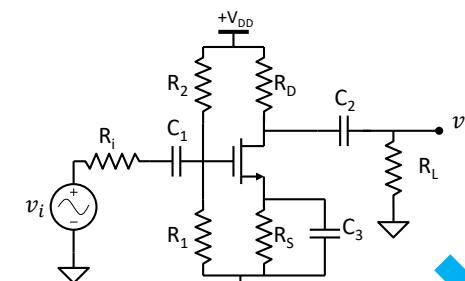
A frequenze sufficientemente alte: In AC: (se $\omega \gg 1/RC$)



Da adesso in poi definiremo (non affronteremo frequenze intermedie):

- **Condizione DC:** frequenza nulla (o talmente bassa da poter approssimare tutti i condensatori come circuiti aperti) $\omega = 0$
- **Condizione AC:** frequenza sufficientemente alta da poter approssimare tutti i condensatori come cortocircuiti $\omega \gg 1/RC$

Esempio

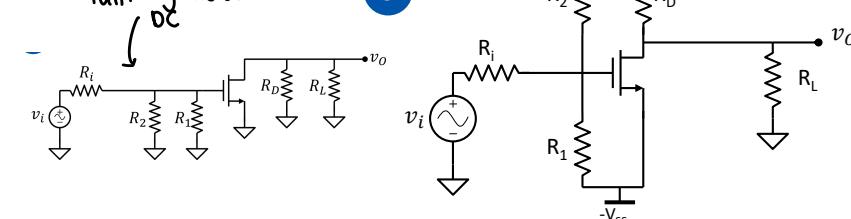


Analisi AC:

- ◆ Si cortocircuitano tutti i condensatori
- ◆ Si annullano tutti i generatori DC
- ◆ Si sostituisce il MOSFET e ogni altro componente con il relativo modello ai piccoli segnali
- ◆ Si risolve la rete linearizzata

Si annullano tutti i generatori DC

3



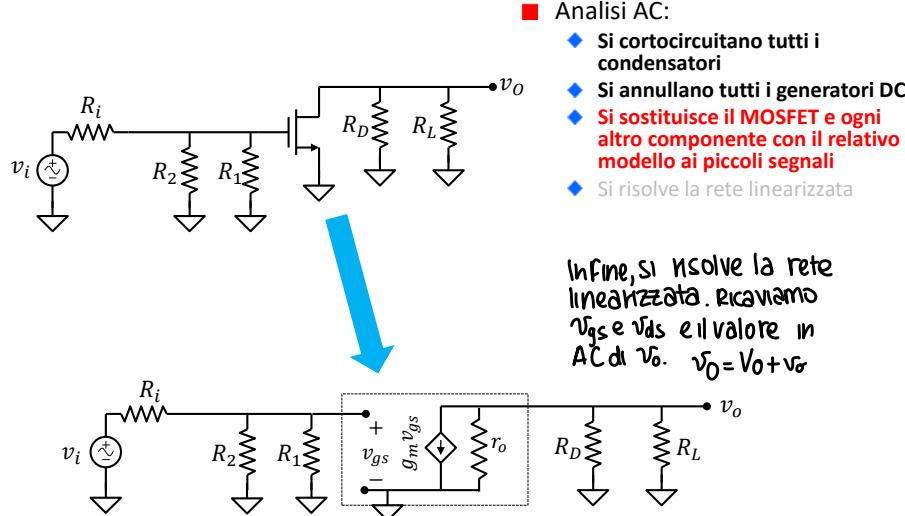
Generatori di tensione e corrente

Generatori indipendenti

		In DC:	In AC:
Generatori di Tensione:	x  y	x  y	x  y
Generatori di Corrente:	x  y	x  y	x  y
Generatori costanti	x  y x  y	x  y x  y	x  y x  y
Alimentazioni = generatori costanti	V_{DD}  V_{DD}	V_{DD} 	

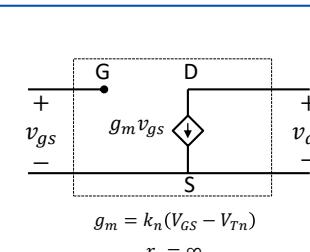
N.B. In generale i generatori pilotati non vengono mai spenti (perché dipendono dalla grandezza che li pilota)

Esempio



Transistor PMOS vs. NMOS

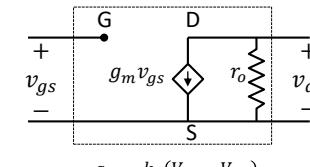
NMOS



Ideale

$$g_m = k_n(V_{GS} - V_{TN})$$

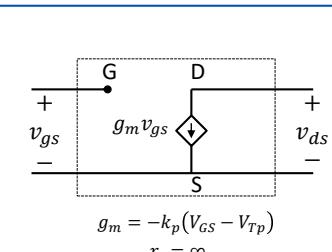
$$r_o = \infty$$



$$g_m = k_n(V_{GS} - V_{TN})$$

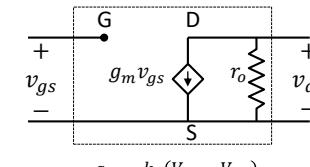
$$r_o = \frac{2}{k_n(V_{GS} - V_{TN})^2 \lambda_n}$$

PMOS



$$g_m = -k_p(V_{GS} - V_{TP})$$

$$r_o = \infty$$

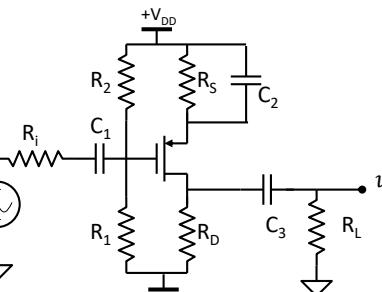


$$g_m = -k_p(V_{GS} - V_{TP})$$

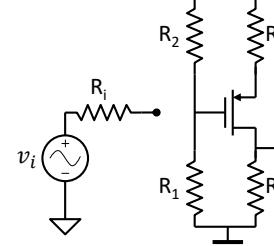
$$r_o = \frac{2}{k_p(V_{GS} - V_{TP})^2 \lambda_p}$$

Esempio: stesso circuito con PMOS

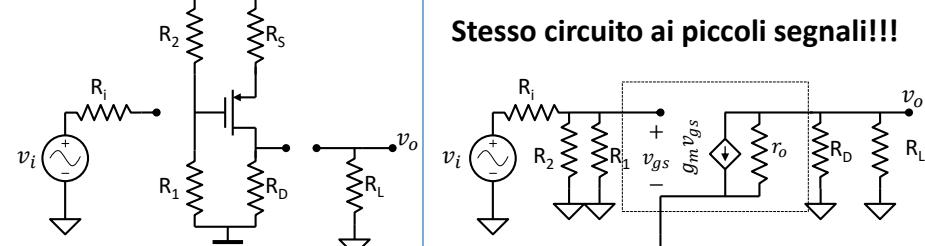
È possibile usare anche un pMOSFET invece che un nMOSFET



In DC:

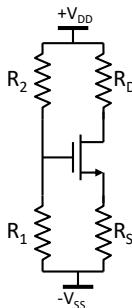


In AC:



Stadi amplificatori elementari a MOSFET

- Esistono tre tipi di configurazioni elementari di amplificatore a MOSFET, dette:
 - ◆ Amplificatore a source comune (CS, common source)
 - ◆ Amplificatore a drain comune (CD, common drain)
 - ◆ Amplificatore a gate comune (CG, common gate)
- La differenza tra le configurazioni sta sull'elettrodo preso come riferimento del piccolo segnale, l'elettrodo in cui viene applicato il piccolo segnale e l'elettrodo in cui viene prelevato il piccolo segnale di uscita.
- Nel seguito analizzeremo tutte tre le configurazioni, assumendo:
 - ◆ Di aver già fatto l'analisi DC (del circuito in figura) e conoscere V_{GS} e V_{DS} .
 - ◆ Che il MOSFET sia in saturazione
- Dal circuito AC, calcoleremo:
 - ◆ Il guadagno di tensione
 - ◆ (Il guadagno di corrente, transresistenza o transconduttanza)
 - ◆ La resistenza di ingresso
 - ◆ La resistenza di uscita



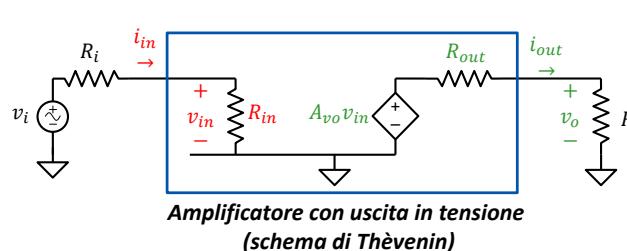
Associazione dei terminali con i segnali

Il gate è il terminale che controlla la corrente (non ne eroga)

Configurazione	Ingresso	Uscita	Riferimento
Source comune (CS)	Gate	Drain	Source
Drain comune (CD)	Gate	Source	Drain
Gate comune (CG)	Source	Drain	Gate

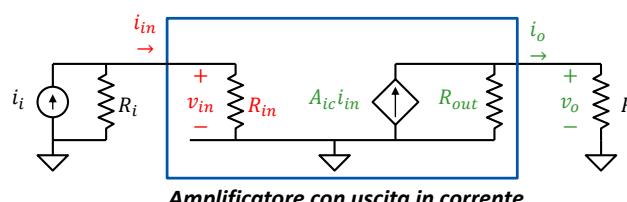
La corrente ideale all'uscita del transistor è governata dalla tensione di gate
Se applichiamo tensione tra Gate e Source è più facile modificare la corrente (applicata al drain non avrebbe senso).

Ricordiamo gli schemi degli amplificatori



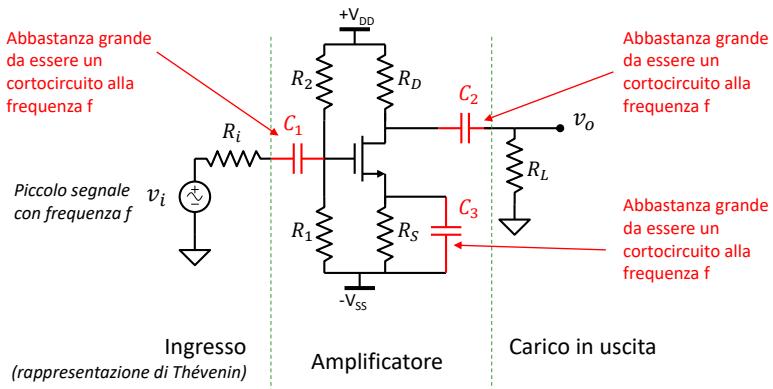
guadagno di tensione a vuoto

$$\begin{aligned} \blacksquare A_{vo} &= \frac{v_o}{v_{in}} \Big|_{R_L=\infty} \\ \blacksquare A_v &= \frac{v_o}{v_i} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \blacksquare A_{ic} &= \frac{i_o}{i_{in}} \Big|_{R_L=0} \\ \blacksquare A_i &= \frac{i_o}{i_i} \end{aligned}$$

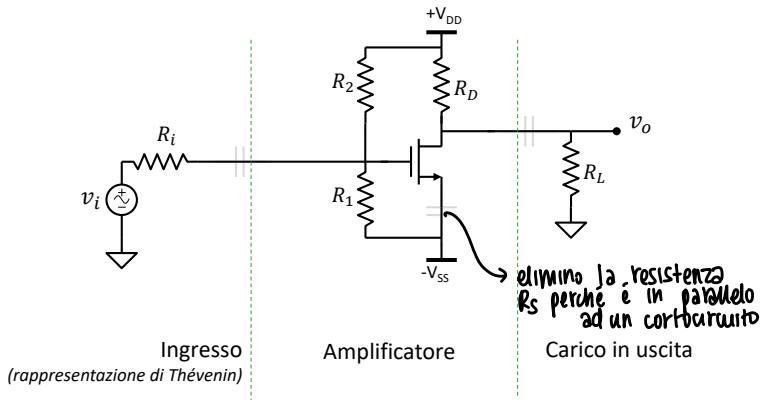
Amplificatore a source comune



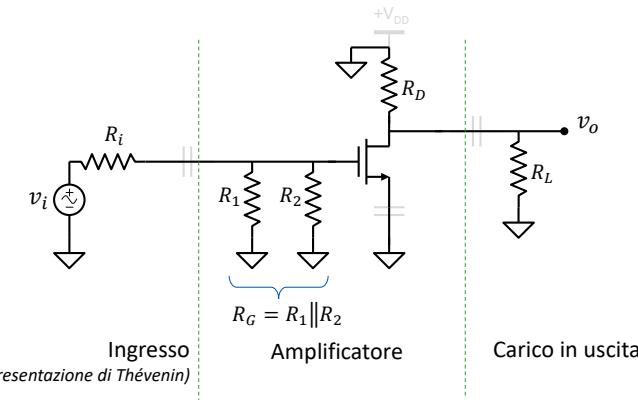
Il valore di C è abbastanza grande tale che $\omega \gg 1/RC$

Nota la polarizzazione calcoliamo i parametri del MOSFET ai piccoli segnali

Amplificatore a source comune



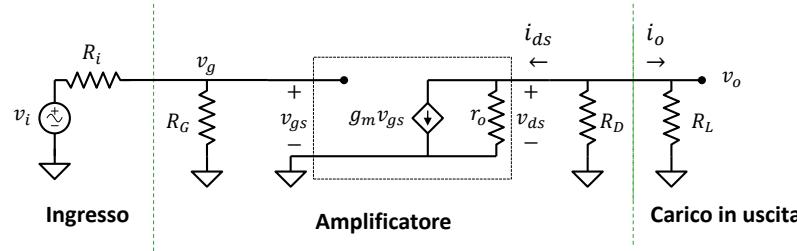
Amplificatore a source comune



Passaggio al piccolo segnale:

- Cortocircuitare tutte le capacità
- Annullare i generatori costanti
- Sostituire il MOSFET con il modello ai piccoli segnali

Amplificatore a source comune



Passaggio al piccolo segnale:

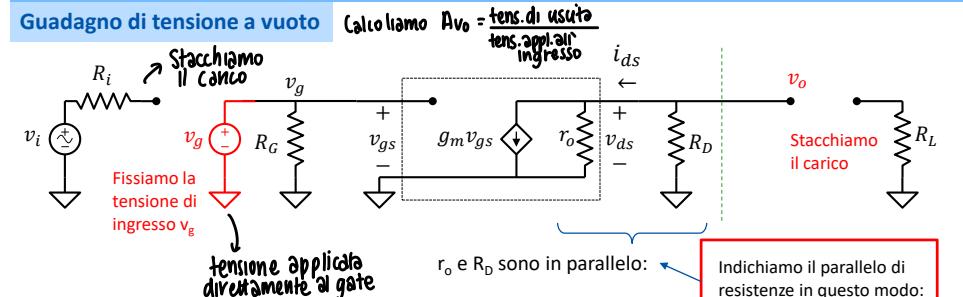
- Cortocircuitare tutte le capacità
- Annullare i generatori costanti
- Sostituire il MOSFET con il modello ai piccoli segnali

Passaggio al piccolo segnale:

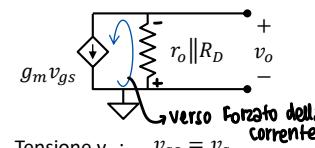
- Cortocircuitare tutte le capacità
- Annullare i generatori costanti
- Sostituire il MOSFET con il modello ai piccoli segnali

Amplificatore a source comune

Guadagno di tensione a vuoto



$$\text{Tensione di uscita (legge di Ohm): } v_o = -g_m v_{gs} (r_o \parallel R_D)$$



Guadagno negativo:
Questa configurazione è chiamata $A_{vo} \cong -g_m R_D$ se $r_o \gg R_D$
anche **amplificatore invertente**

$$A_{vo} = \frac{v_o}{v_g} = g_m (r_o \parallel R_D)$$

otteniamo un numero puro

il + della resistenza è opposto rispetto a v_o

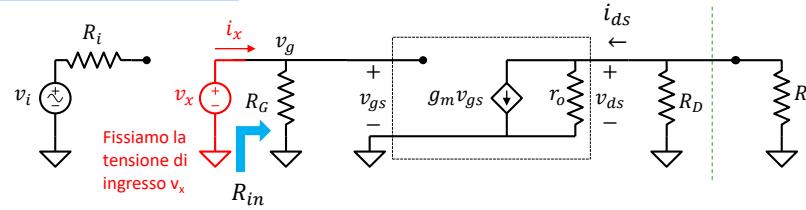
valore molto probabilmente circa uguale a R_D

siemens

$(\Omega) (\Omega^{-1}) = \text{numero puro}$

Amplificatore a source comune

Resistenza di ingresso

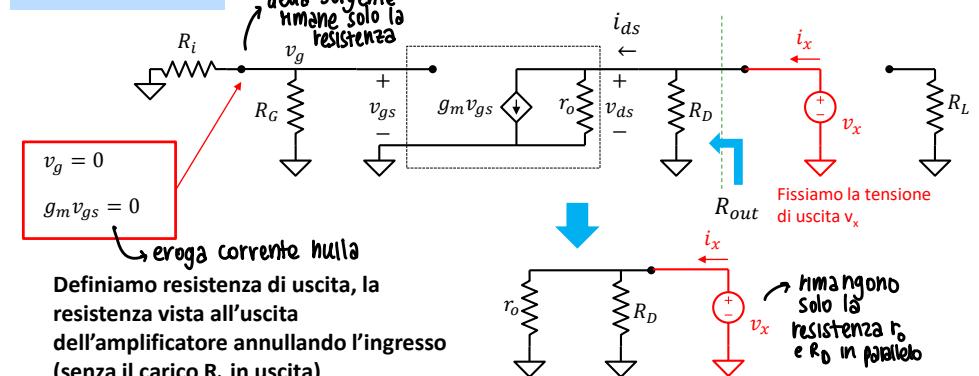


Definiamo resistenza di ingresso, la resistenza vista dal generatore esterno dovuta ai soli componenti dell'amplificatore + il carico
Calcolo della Resistenza di ingresso:
■ Sostituendo il segnale di ingresso con un generatore di test: v_x
■ Calcoliamo la corrente erogata dal generatore (= entrante nel circuito): $i_x = \frac{v_x}{R_G}$
■ La resistenza di ingresso è definita come: $R_{IN} = \frac{v_x}{i_x}$

resistenza di ingresso di un amplificatore di corrente è ∞)
corrente assorbita dal circuito

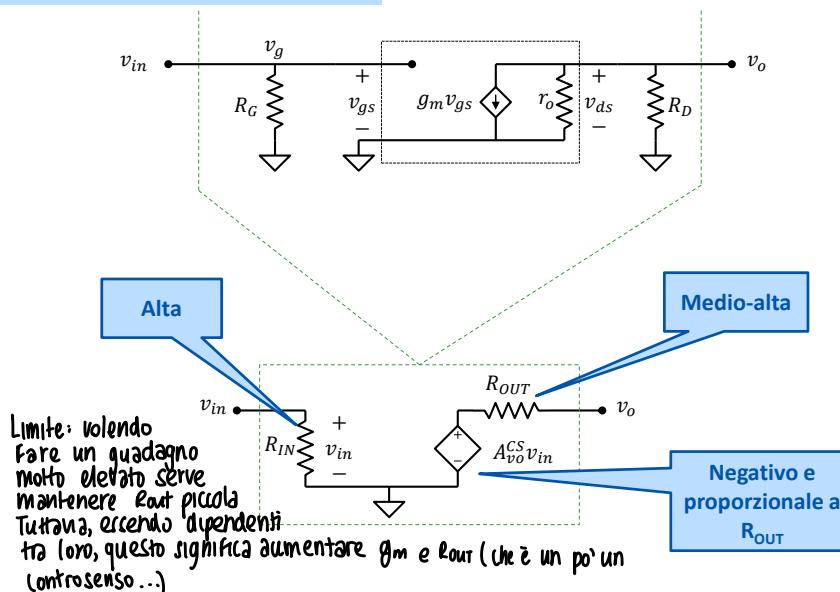
Amplificatore a source comune

Resistenza di uscita



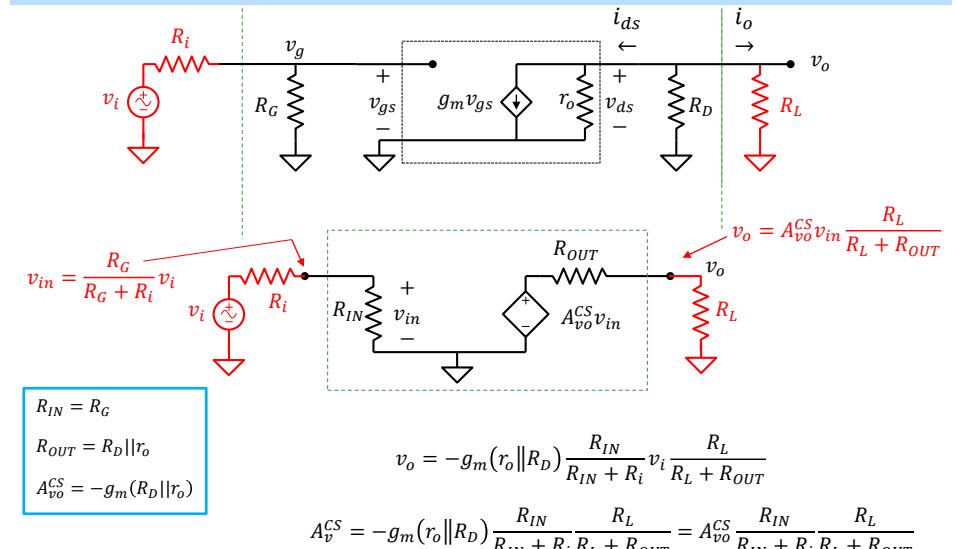
Amplificatore a source comune

Modello equivalente a doppio bipolo



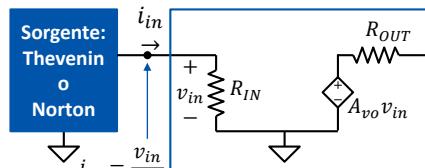
Amplificatore a source comune

Guadagno di tensione: effetto del carico di uscita e della resistenza della sorgente di segnale



Modelli elettrici di un amplificatore

$$R_{IN} = R_G \quad R_{OUT} = R_D || r_o \quad A_{vo} = -g_m(R_D || r_o)$$

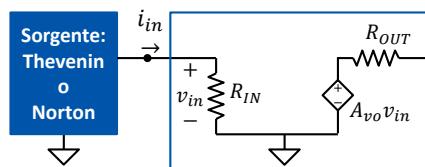


Guadagno di tensione

$$A_{vo} = -g_m(r_o || R_D)$$

Guadagno di transresistenza

$$R_m = -g_m(r_o || R_D) R_G$$

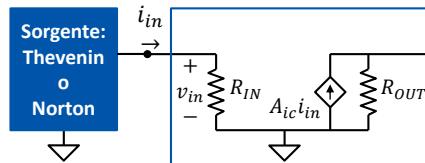


$$i_o = \frac{A_{vo}^CS v_{in}}{R_{OUT}} = \frac{-g_m(R_D || r_o) v_{in}}{R_D || r_o} = -g_m v_{in}$$

$$i_o = -g_m v_{in} = -g_m R_G i_{in}$$

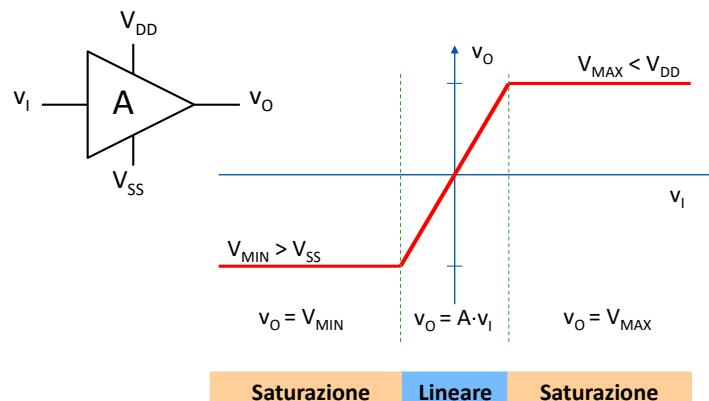
G_m = -g_m
Guadagno di transconduttanza

A_{ic} = -g_mR_G
Guadagno di corrente



I teoremi di Thevenin e Norton ci permettono di schematizzare l'amplificatore nel modo più opportuno

Saturazione della tensione di uscita



- Valori del segnale di ingresso troppo elevati causano la saturazione della tensione di uscita che viene limitata a V_{MIN} e V_{MAX} :

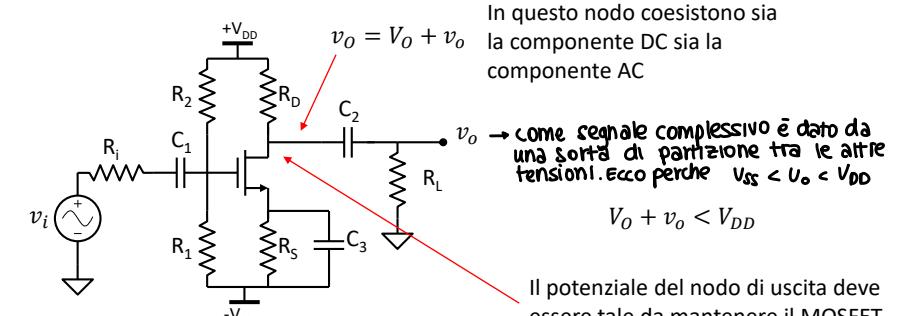
$$V_{SS} < V_{MIN} \leq v_o \leq V_{MAX} < V_{DD}$$

Amplificatore a source comune: riepilogo

Parametro	Formula	Note
Guadagno di tensione a vuoto	$A_{vo}^{CS} = -g_m(r_o R_D)$	Tendenzialmente 10 - 20 Molto alto perché g_m grande
Resistenza di ingresso	$R_{IN} = R_G = R_1 R_2$	Alta se R_G grande R_G è il parallelo di R_1 e R_2 , che possono essere scelte abbastanza grandi
Resistenza di uscita	$R_{OUT} = R_D r_o$	Essendo r_o molto alta, R_{out} è circa uguale a R_D (determinata dal circuito di polarizzazione)

- Il guadagno è negativo, quindi la configurazione CS è detto **amplificatore invertente**
- R_{in} molto alta → **basso effetto di carico all'ingresso**
- R_{out} non troppo bassa → **problemi nel pilotare carichi con resistenza R_L piccola**
- Alto guadagno → alta resistenza di uscita**
- La g_m dei MOSFET è un parametro noto con scarsa precisione.
A_{vo} non è accurato (altro limite)

Saturazione della tensione di uscita



In questo nodo coesistono sia la componente DC sia la componente AC

→ come segnale complessivo è dato da una sorta di partizione tra le altre tensioni. Ecco perché $V_{ss} < v_o < V_{dd}$

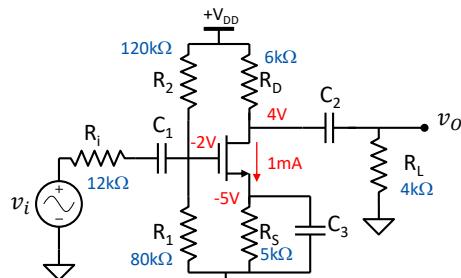
$$V_o + v_o < V_{dd}$$

Il potenziale del nodo di uscita deve essere tale da mantenere il MOSFET in saturazione e comunque superiore al potenziale del source

$$v_o > V_s > -V_{ss}$$

Ecco spiegato il motivo per cui il segnale di uscita satura sia verso l'alto che verso il basso

Esempio



DATI:
 $k_n = 2 \text{ mA/V}^2$
 $V_{TN} = 2 \text{ V}$
 $\lambda_n = 0$
 $V_{DD} = V_{SS} = 10 \text{ V}$

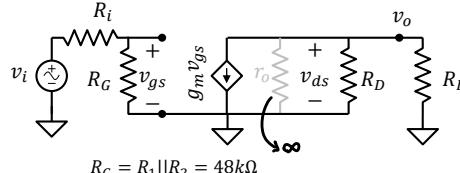
1) Calcoliamo la polarizzazione DC

2) Calcoliamo i parametri ai piccoli segnali

$$g_m = k_n(V_{GS} - V_{TN}) = 2 \text{ mA}$$

$$r_o = \infty \quad \text{trasureremo sempre } \lambda \text{ nel calcolo di } g_m$$

3) Disegniamo il circuito ai piccoli segnali



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

40

4) Risolviamo il circuito

$$A_{vo}^{CS} = -g_m R_D = -12$$

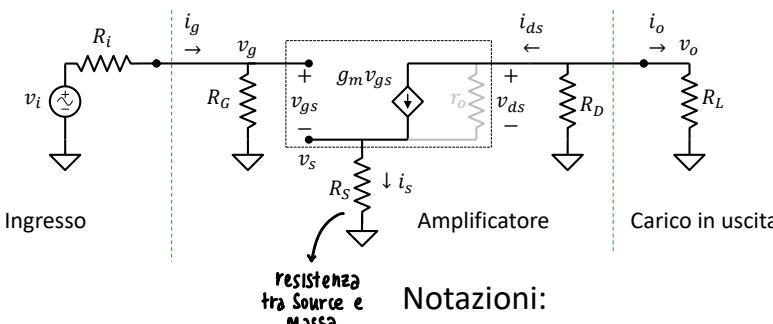
$$R_{IN} = R_G = 48 \text{ k}\Omega$$

$$R_{OUT} = R_D = 6 \text{ k}\Omega$$

Effetto di carico:

$$A_v^{CS} = A_{vo}^{CS} \frac{0.8}{R_{IN} + R_i} \frac{0.4}{R_L} = -3.84$$

Amplificatore a source comune con resistenza al source



Notazioni:

■ $R_G = R_1 \parallel R_2$

Ipotesi:

■ $r_o = \infty$ (molto grande)

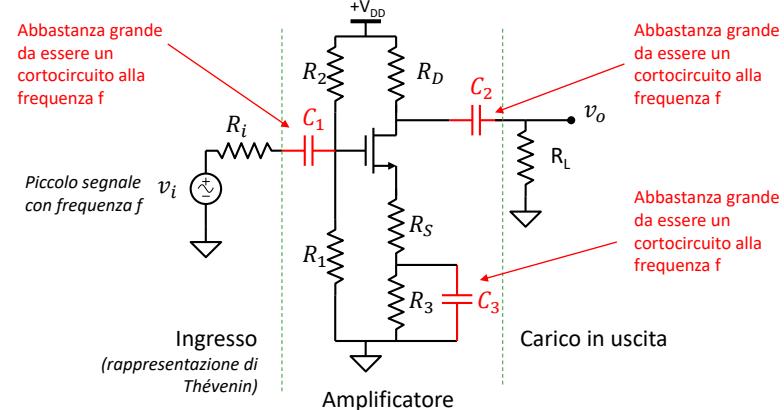
Passaggio al piccolo segnale:

- Cortocircuitare tutte le capacità
- Annullare i generatori costanti
- Sostituire il MOSFET con il modello ai piccoli segnali

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

44

Amplificatore a source comune con resistenza al source



Nota la polarizzazione costruiamo il modello a piccoli segnali

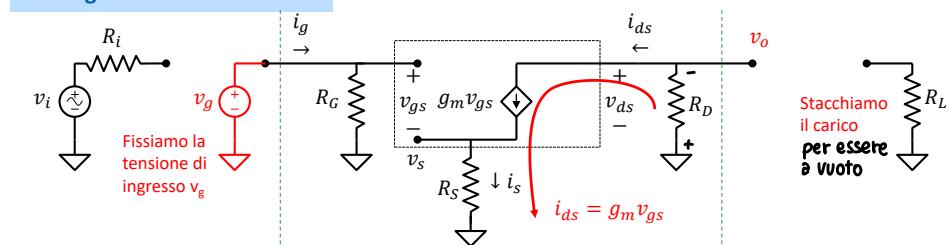
OSSERVAZIONE: Simile allo stadio a Source Comune, ma viene lasciata parte della resistenza di polarizzazione connessa al terminale di Source (se $R_S = 0$, ritroviamo il caso precedente)

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

43

Amplificatore a source comune con resistenza al source

Guadagno di tensione a vuoto



Legge di ohm su R_D : $v_o = -R_D i_{ds} = -R_D g_m v_{gs}$

Legge di kirchoff al source: $i_{ds} = g_m v_{gs} = \frac{v_s}{R_S} = i_s$ corrente sulla resistenza

$$g_m R_S v_{gs} = v_g - v_{gs}$$

$$v_{gs} = \frac{v_g}{1 + g_m R_S}$$

se R_S fosse nulla, come nel caso precedente, troveremmo $v_{gs} = v_g$

Guadagno di tensione a vuoto

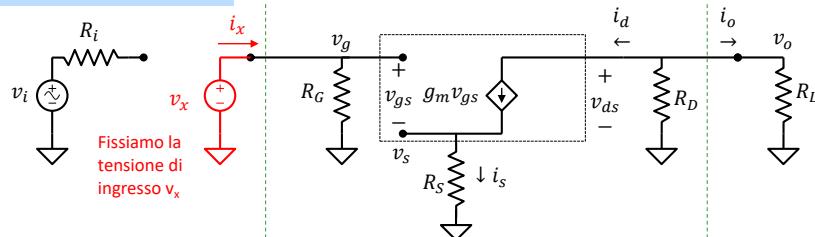
$$A_{vo}^{CS} = -\frac{g_m R_D}{1 + g_m R_S}$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

45

Amplificatore a source comune con resistenza al source

Resistenza di ingresso



Definiamo resistenza di ingresso, la resistenza vista dal generatore esterno dovuta ai soli componenti dell'amplificatore + il carico

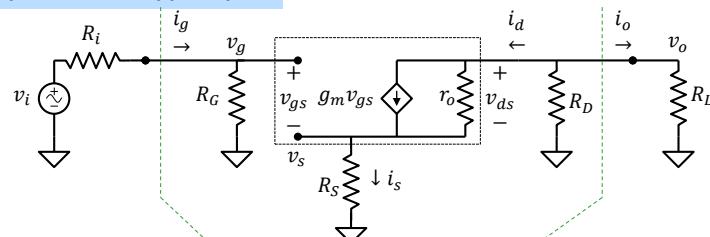
Calcolo della Resistenza di ingresso:

- Sostituiamo il segnale di ingresso con un generatore di test: v_x
- Calcoliamo la corrente erogata dal generatore (= entrante nel circuito): $i_x = \frac{v_x}{R_G}$
- La resistenza di ingresso è definita come: $R_{IN} = \frac{v_x}{i_x}$

$$R_{IN} = R_G = R_1 \parallel R_2$$

Amplificatore a source comune con resistenza al source

Modello equivalente a doppio bipolo



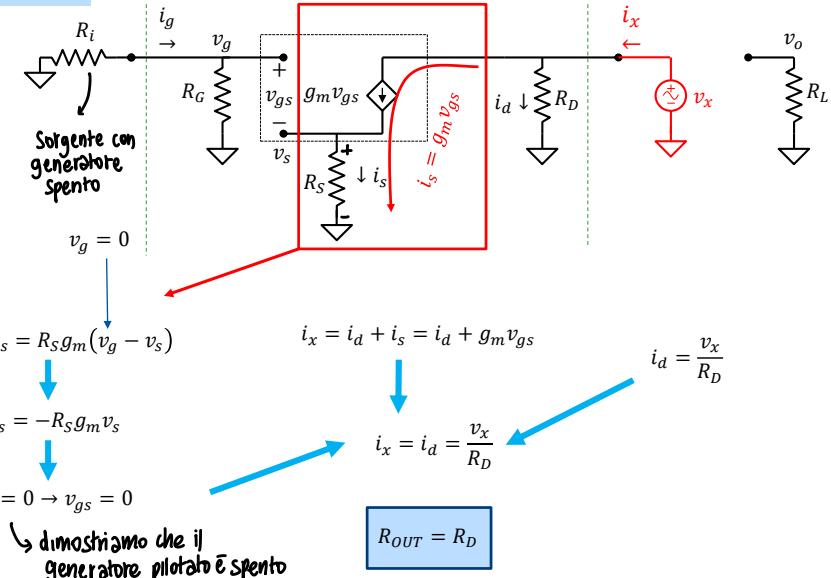
Alta

Medio-alta

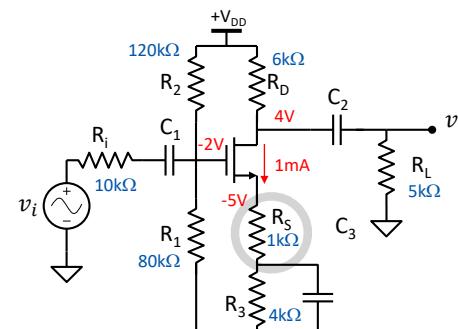
Negativo e proporzionale a R_{OUT}

Amplificatore a source comune con resistenza al source

Resistenza di uscita



Esempio

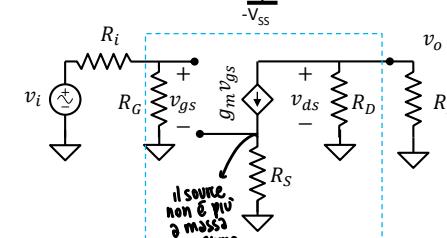


DATI (uguali all'esempio precedente)
 $k_n = 2\text{mA/V}^2$
 $V_{TN} = 2\text{V}$
 $\lambda_n = 0$
 $V_{DD} = V_{SS} = 10\text{V}$
Nota la polarizzazione DC (riportata nel circuito), calcoliamo:

$$g_m = k_n(V_{GS} - V_{TN}) = 2\text{mS}$$

$$R_G = R_1 \parallel R_2 = 48\text{k}\Omega$$

$$1 + g_m R_S = 3$$



Effetto di carico:

$$A_{vo}^{CS} = A_{vo}^{CS} \frac{R_{IN}}{R_{IN} + R_i} \frac{R_L}{R_L + R_{OUT} + R_L} = -1.28$$

0.8 0.4

Dipendenza dai parametri del MOSFET

Configurazione CS senza R_s Con R_s il guadagno diventa meno sensibile al guadagno di g_m

- I parametri tecnologici dei MOSFET (k , V_T , λ) sono spesso noti con scarsa precisione e possono cambiare da un componente all'altro.
- Generalmente si conosce un valore medio e il margine di errore.
- Facciamo un esempio

$$k = 2mA/V^2 \rightarrow (+20\%) \rightarrow 2.4mA/V^2$$

$$V_T = 2V \rightarrow (-20\%) \rightarrow 1.6V$$

Il punto operativo cambia? SI.

Ricalcolo di V_{GS} :

$$V_G - (-V_{SS}) = V_{GS} + \frac{R_S k}{2} (V_{GS} - V_T)^2 \quad (\text{legge di kirchhoff alla maglia di ingresso})$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado

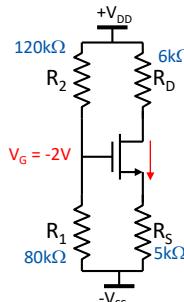
$$V_{GS} = 2.52V \quad (3V)$$

$$I_{DS} = 1.096mA \quad (1mA)$$

Piccola variazione



$g_m = 2.21mS \quad (2mS)$
circa 10% di variazione



Dipendenza dai parametri del MOSFET

Configurazione CS senza R_s

- I parametri tecnologici dei MOSFET (k , V_T , λ) sono spesso noti con scarsa precisione e possono cambiare da un componente all'altro.
- Generalmente si conosce un valore medio e il margine di errore.
- Facciamo un esempio

$$k = 2mA/V^2 \rightarrow (+20\%) \rightarrow 2.4mA/V^2$$

$$V_T = 2V \rightarrow (-20\%) \rightarrow 1.6V$$

$g_m = 2mS \rightarrow 2.21mS$

E sull'amplificatore?

$$R_{OUT} = R_D = 6k\Omega \quad \text{Nessuna variazione}$$

$$R_{IN} = R_G = 48k\Omega \quad \text{Nessuna variazione}$$

$$A_{vo}^{CS} = -g_m R_D = -13.3 \quad (-12) \quad \text{Circa +10\%} \quad A_v^{CS} = A_{vo}^{CS} \frac{R_{IN}}{R_{IN} + R_i} \frac{R_L}{R_{OUT} + R_L} = -4.26 \quad (-3.8)$$

Dipendenza dai parametri del MOSFET

Configurazione CS con R_s

- I parametri tecnologici dei MOSFET (k , V_T , λ) sono spesso noti con scarsa precisione e possono cambiare da un componente all'altro.
- Generalmente si conosce un valore medio e il margine di errore.
- Facciamo un esempio

$$k = 2mA \rightarrow (+20\%) \rightarrow 2.4mA$$

$$V_T = 2V \rightarrow (-20\%) \rightarrow 1.6V$$



Il punto operativo cambia? SI.

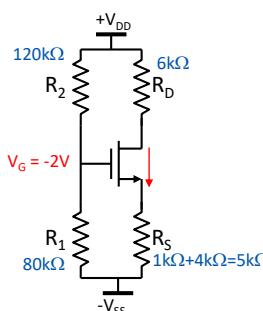
Ricalcolo di V_{GS} :

Come esempio precedente!

$$V_{GS} = 2.52V$$

$$I_{DS} = 1.096mA$$

$$g_m = 2.21mS \quad (2mS)$$



Dipendenza dai parametri del MOSFET

Configurazione CS con R_s

- I parametri tecnologici dei MOSFET (k , V_T , λ) sono spesso noti con scarsa precisione e possono cambiare da un componente all'altro.
- Generalmente si conosce un valore medio e il margine di errore.
- Facciamo un esempio

$$k = 2mA/V^2 \rightarrow (+20\%) \rightarrow 2.4mA/V^2$$

$$V_T = 2V \rightarrow (-20\%) \rightarrow 1.6V$$

$g_m = 2mS \rightarrow 2.21mS$

$$1 + g_m R_S = 3 \rightarrow 3.21mS$$

E sull'amplificatore?

$$R_{out} = R_D = 6k\Omega$$

Nessuna variazione

$$R_{in} = R_G = 48k\Omega$$

Nonostante i parametri del transistor non siano ben noti, otteniamo un guadagno più STABILE (anche se minore rispetto al caso senza resistenza al source)

$$A_{vo}^{CS} = -\frac{g_m R_D}{1 + g_m R_S} = -4.13 \quad (-4) \quad \text{Circa +3\%} \quad A_v^{CS} = A_{vo}^{CS} \frac{R_{in}}{R_{in} + R_i} \frac{R_L}{R_{out} + R_L} = -1.32 \quad (-1.28)$$

Amplificatore CS con resistenza al source: riepilogo

Parametro	Formula	Note
Guadagno di tensione a vuoto	$A_{vo}^{CS} = -\frac{g_m R_D}{1 + g_m R_S}$	Moderatamente alta ma noto con precisione
Resistenza di ingresso	$R_{in} = R_G = R_1 \parallel R_2$	Alta se R_G grande R_G è il parallelo di R_1 e R_2 che possono essere scelte abbastanza grandi
Resistenza di uscita	$R_{out} = R_D$	Essendo r_o molto alta, R_{out} è circa uguale a R_D (determinata dal circuito di polarizzazione)

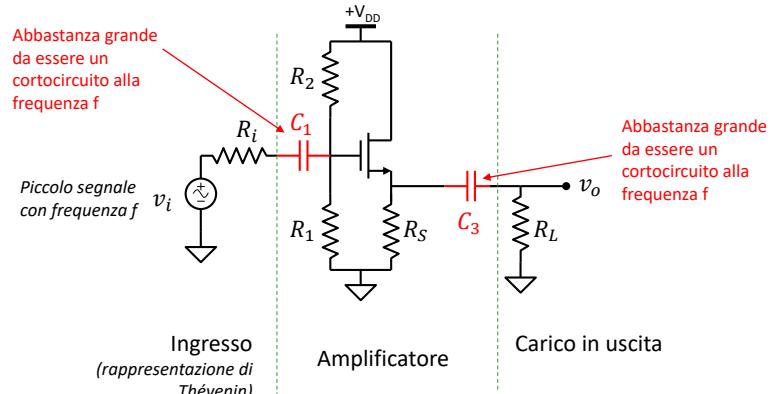
■ Rispetto al CS con $R_S = 0$ ha:

- ◆ minor guadagno
- ◆ ma meno dipendente dai parametri del MOSFET

■ Stessa R_{IN} e R_{OUT} → stessi pro e contro in termini di effetto di carico

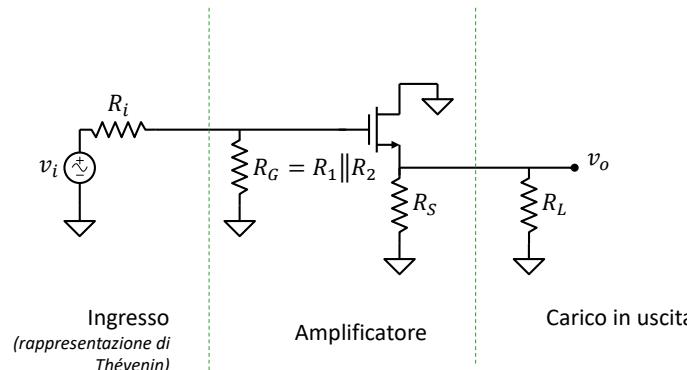
■ Il guadagno è proporzionale a R_{OUT}

Amplificatore a drain comune



Nota la polarizzazione costruiamo il modello a piccoli segnali

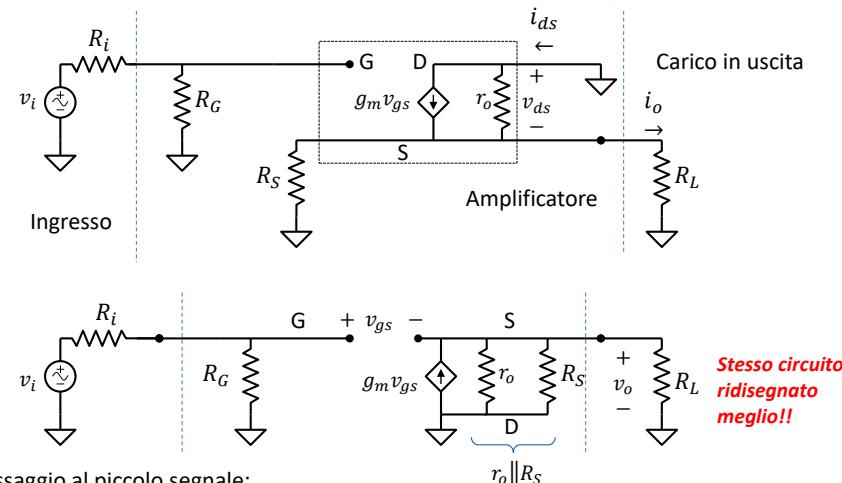
Amplificatore a drain comune



Passaggio al piccolo segnale:

- Cortocircuitare tutte le capacità
- Annullare i generatori costanti

Amplificatore a drain comune

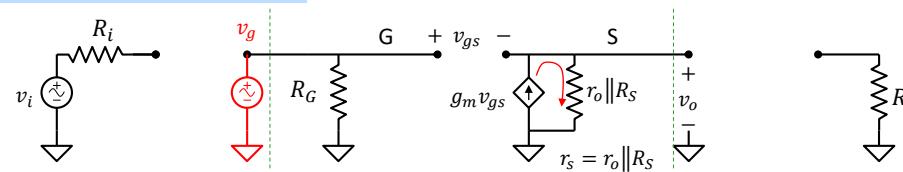


Passaggio al piccolo segnale:

- Cortocircuitare tutte le capacità
- Annullare i generatori costanti
- Sostituire il MOSFET con il modello ai piccoli segnali

Amplificatore a drain comune

Guadagno di tensione a vuoto



$$\text{Tensione a vuoto: } v_o = (r_o \parallel R_S) i_{ds}$$

$$\text{Corrente di drain: } i_{ds} = g_m v_{gs}$$

$$\text{Tensione } v_{gs}: \quad v_{gs} = v_g - v_o$$

$$\text{Sostituendo: } v_o = (r_o \parallel R_S) g_m v_{gs} = (r_o \parallel R_S) g_m (v_g - v_o)$$

$$v_o + (r_o \parallel R_S) g_m v_o = (r_o \parallel R_S) g_m v_g \quad v_o = \frac{(r_o \parallel R_S) g_m}{1 + (r_o \parallel R_S) g_m} v_g$$

Guadagno di tensione a vuoto:

$$A_{vo}^{CD} = \frac{v_o}{v_g} = \frac{(r_o \parallel R_S) g_m}{1 + (r_o \parallel R_S) g_m}$$

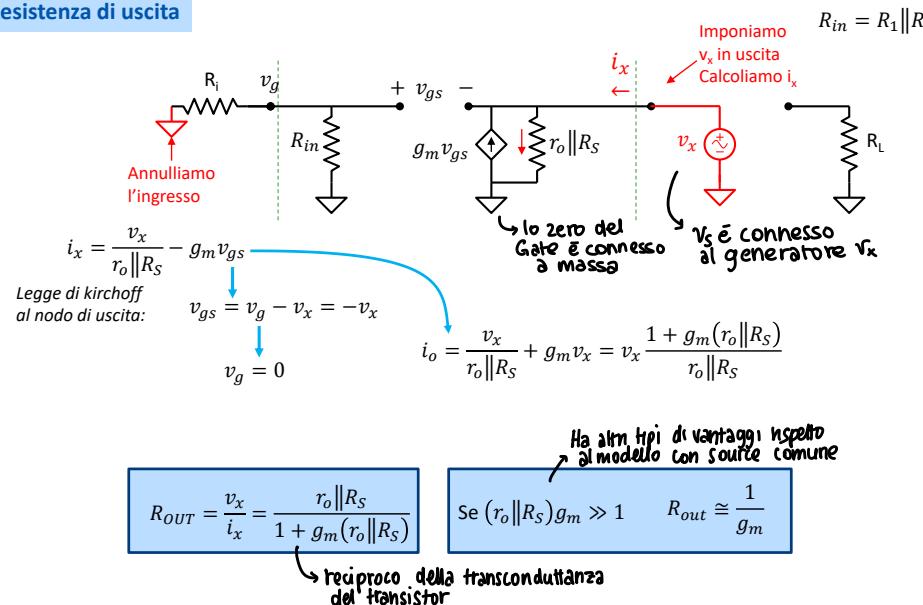
ci sono alcuni casi in cui il guadagno vale 1, tendenzialmente tende a 1: quindi a cosa serve?

Se $(r_o \parallel R_S) g_m \gg 1 \quad A_{vo}^{CD} \approx 1$

La configurazione CD è chiamata anche inseguitore di source.

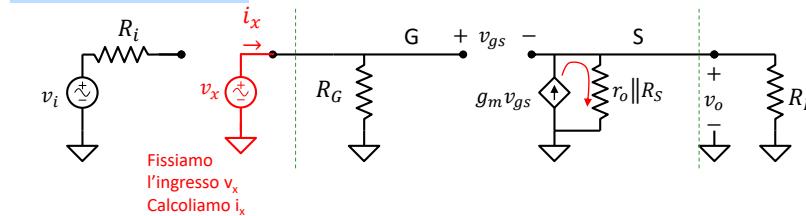
Amplificatore a drain comune

Resistenza di uscita



Amplificatore a drain comune

Resistenza di ingresso



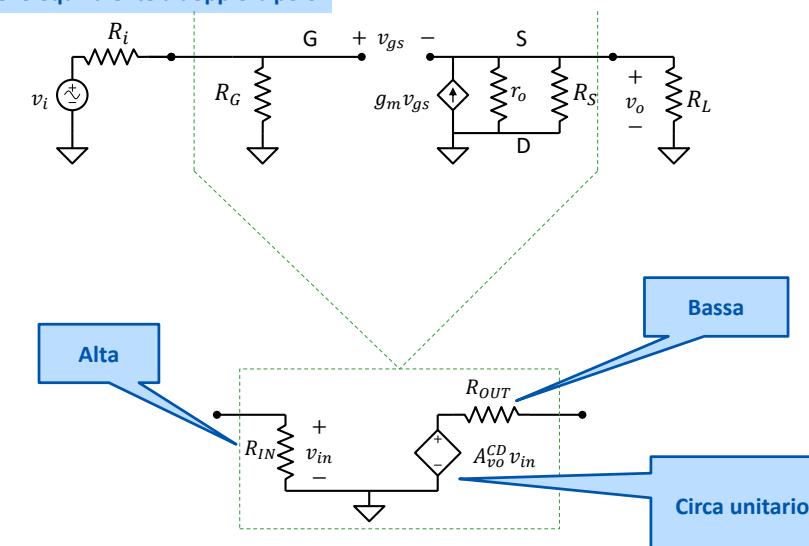
$$\text{Corrente assorbita dall'ingresso: } i_x = \frac{v_x}{R_G}$$

Resistenza di ingresso:

$$R_{IN} = \frac{v_x}{i_x} = R_G = R_1 \parallel R_2$$

Amplificatore a drain comune

Modello equivalente a doppio bipolo



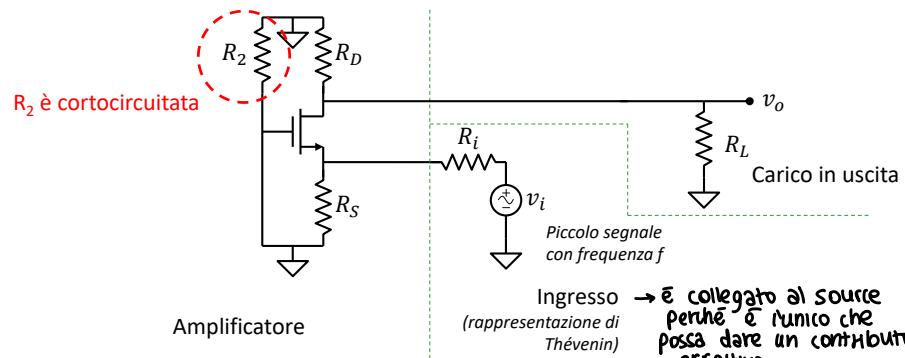
Amplificatore a drain comune: riepilogo

* approssimazioni valide se $r_o \parallel R_S \gg 1$

Parametro	Formula	Note
Guadagno di tensione a vuoto	$A_{vo}^{CD} = \frac{(r_o \parallel R_S) g_m}{1 + (r_o \parallel R_S) g_m} \cong 1^{(*)}$	Circa 1 se g_m è grande
Resistenza di ingresso	$R_{in} = R_G = R_1 \parallel R_2$	Alta se R_G grande R_G è il parallelo di R_1 e R_2 che possono essere scelte abbastanza grandi
Resistenza di uscita	$R_{out} = \frac{r_o \parallel R_S}{1 + g_m(r_o \parallel R_S)} \cong \frac{1}{g_m}$	Bassa

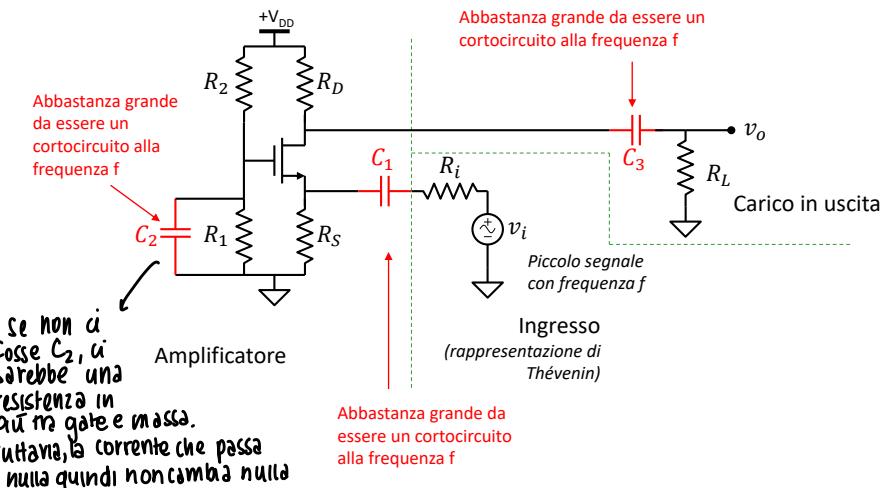
- Il guadagno di tensione è circa 1 (non modificabile), quindi $v_o = v_i$. **Non è adatto a amplificare/attenuare un segnale**
- R_{IN} alta → **basso effetto di carico all'ingresso**
- R_{OUT} bassa → **adatto a pilotare carichi con resistenza R_L piccola**

Amplificatore a gate comune



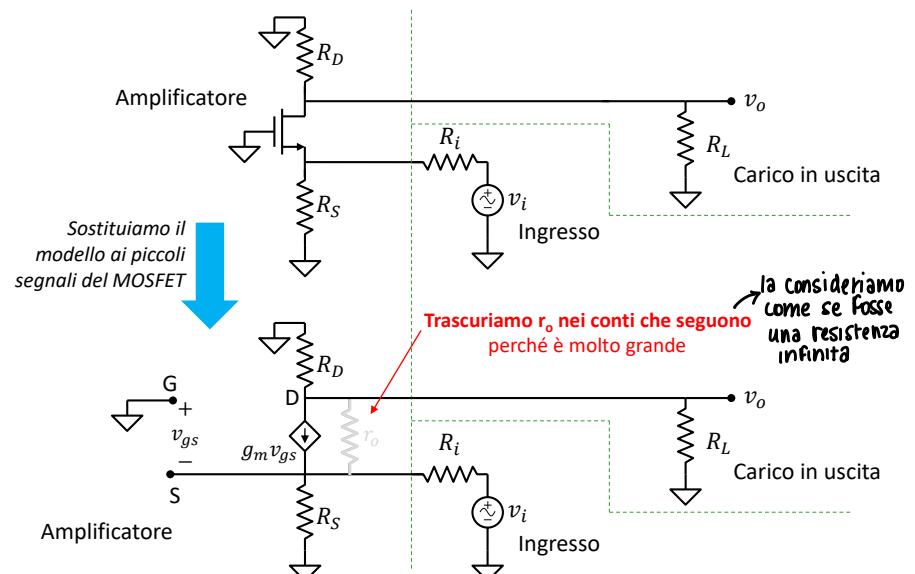
- $v_o = v_i$ → è collegato al source perché è l'unico che possa dare un contributo effettivo

Amplificatore a gate comune

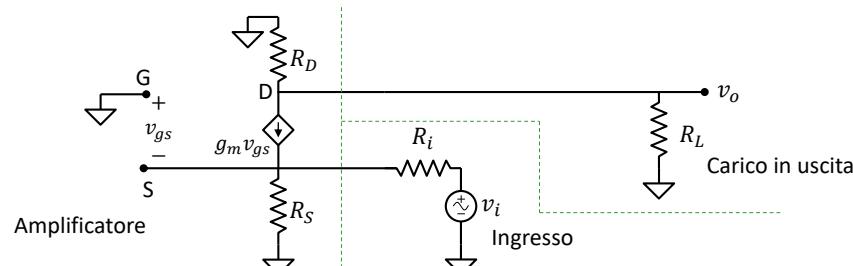


Nota la polarizzazione costruiamo il modello a piccoli segnali

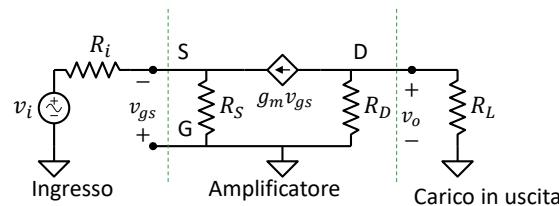
Amplificatore a gate comune



Amplificatore a gate comune

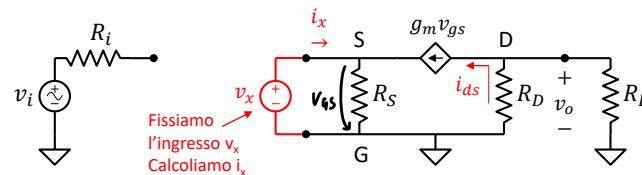


Stesso circuito
ridisegnato
meglio!!



Amplificatore a gate comune

Resistenza di ingresso



$$i_x = \frac{v_x}{R_S} - g_m v_{gs}$$

$$v_{gs} = 0 - v_x = -v_x$$

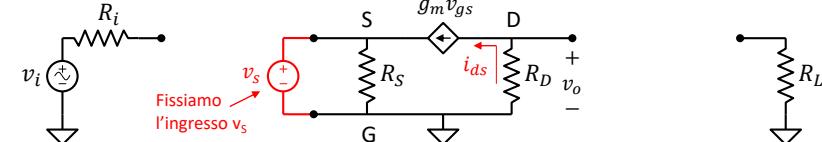
$$i_x = \frac{v_x}{R_S} + g_m v_x = v_x \left(\frac{1 + g_m R_S}{R_S} \right)$$

$$R_{IN} = \frac{v_x}{i_x} = \frac{R_S}{1 + g_m R_S}$$

$$\text{Se } g_m R_S \gg 1 \quad R_{in} \cong \frac{1}{g_m}$$

Amplificatore a gate comune

Guadagno di tensione a vuoto



$$\text{Tensione di uscita a vuoto: } v_o = R_D (-i_{ds}) = -R_D g_m v_{gs}$$

$$\begin{aligned} \text{Tensione gate-source: } v_{gs} &= v_g - v_s = -v_s \\ v_g &= 0 \\ v_o &= R_D g_m v_s \end{aligned}$$

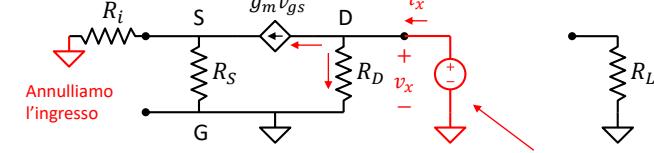
Guadagno di tensione a vuoto:

$$A_{vo}^{CG} = \frac{v_o}{v_s} = g_m R_D$$

Guadagno positivo:
Questa configurazione è chiamata anche amplificatore non invertente

Amplificatore a gate comune

Resistenza di uscita

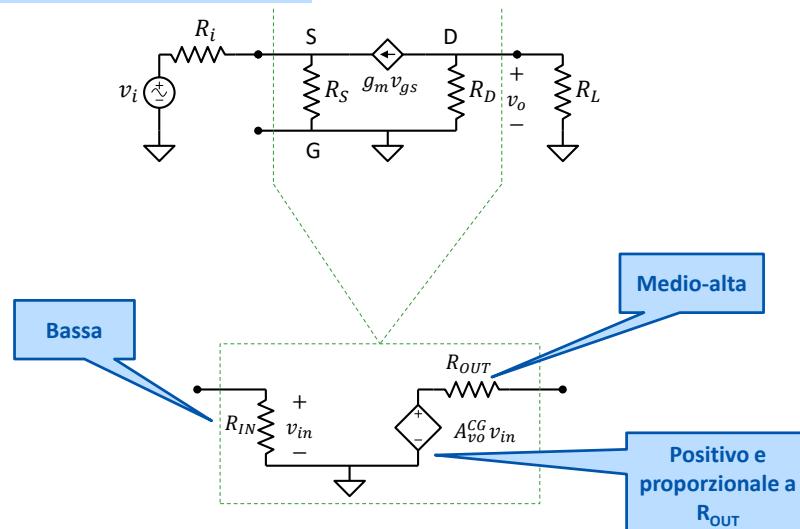


$$\begin{aligned} i_x &= \frac{v_x}{R_D} + g_m v_{gs} \\ v_{gs} &= -g_m v_{gs} (R_i || R_S) \\ v_{gs} &= 0 \\ i_x &= \frac{v_x}{R_D} \end{aligned}$$

$$R_{OUT} = \frac{v_o}{i_0} = R_D$$

Amplificatore a gate comune

Modello equivalente a doppio bipolo



Confronto tra le configurazioni

Nelle formula è stato assunto $r_o = \infty$

* approssimazioni valide se $g_m R_S \gg 1$

	CS	CS (+R source)	CD	CG
Guadagno di tensione a vuoto	$-g_m R_D$ REGOLABILE ma POCO ACCURATO	$-\frac{g_m R_D}{1 + g_m R_S}$ REGOLABILE, più basso del CS ma PIU' ACCURATO	$\frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S} \cong 1^{(*)}$ NON REGOLABILE CIRCA UNITARIO	$g_m R_D$ REGOLABILE ma POCO ACCURATO
Resistenza di ingresso	$R_1 \parallel R_2$ MEDIO-ALTA	$R_1 \parallel R_2$ MEDIO-ALTA	$R_1 \parallel R_2$ MEDIO-ALTA	$\frac{R_S}{1 + g_m R_S} = \frac{1}{g_m}$ BASSA
Resistenza di uscita	R_D MEDIA e VINCOLATA AL GUADAGNO	R_D MEDIA e VINCOLATA AL GUADAGNO	$\frac{R_S}{1 + g_m R_S} \cong \frac{1}{g_m}$ BASSA e INDIPENDENTE DAL GUADAGNO	R_D MEDIA e VINCOLATA AL GUADAGNO

- CS → Ottimo per amplificare tensione, alta R_{in} . R_{out} Medio-Alta. Non pilota carichi R_L bassi
- CD → Non amplifica la tensione, ma fornisce una R_{out} molto bassa → ottimo per pilotare carichi in tensione
- CG → Ottimo per amplificare tensione, ma R_{in} molto bassa → ok solo se la sorgente fornisce corrente. R_{out} Medio-Alta. Non pilota carichi R_L bassi

Amplificatore a gate comune: riepilogo

R_{IN} NON dipende MAI dalla SORGENTE
 R_{OUT} NON dipende MAI dal CARICO

* approssimazioni valide se $g_m R_S \gg 1$

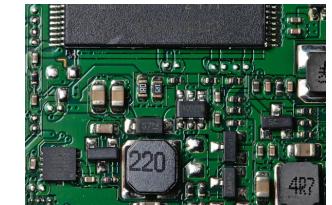
Parametro	Formula	Note
Guadagno di tensione a vuoto	$A_{vo}^{CG} = g_m R_D$	Alto ma non preciso
Resistenza di ingresso	$R_{IN} = \frac{R_S}{1 + g_m R_S} = \frac{1}{g_m}^{(*)}$	Bassa
Resistenza di uscita	$R_{OUT} = R_D$	media

- R_{IN} bassa → la configurazione CG. Ottimo per essere pilotato da una sorgente di corrente (Norton).
- R_{OUT} non bassa → **problemi nel pilotare carichi bassi**
- Il guadagno di tensione regolabile con R_D (stessi pro e contro della configurazione CS)
- La configurazione CG è detto **amplificatore non invertente** (guadagno positivo)

Introduzione: concetto di circuito integrato

CARICO ATTIVO

- **Circuito a elementi discreti** = circuito in cui i componenti sono costruiti separatamente e poi montati e interconnessi tra loro mediante una scheda



- **Circuito integrato (IC, Integrated Circuit)** = Circuito in cui tutti i componenti (attivi e passivi) sono costruiti (integriti) in un unico pezzo di silicio



pezzo di silicio
sul quale vengono
costruiti i transistor
(la lunghezza del
canale tipica è circa
10 nanometri)

Vantaggi di un IC:

- ◆ Compatto in termini di spazio
- ◆ Maggiori funzionalità (possibilità di integrare molti più componenti)
- ◆ Maggiore riproducibilità dei dispositivi

Introduzione: tolleranza dei parametri in un IC

- Le tecnologie dei circuiti integrati permettono la realizzazione di molti transistor nello stesso chip
- I parametri (k , V_T , λ) di due MOSFET, nominalmente identici, realizzati in due chip diversi, possono differire anche del 30%. È impossibile pensare di ottenere una precisione assoluta
- All'interno dello stesso circuito integrato:
 - I valori assoluti dei parametri dei MOSFET sono noti con un'accuratezza del 30%, ma...
 - Due dispositivi (specialmente se vicini) differiscono di per meno dell'1%.

	Tolleranza assoluta	Differenza relativa (tra due dispositivi, stesso IC)
MOSFET (V_T)	15%	<1%
MOSFET (k, λ)	30%	<1%
Resistenze	5%-30%	< 1-2%

Varianabilità tipica (non è il massimo assoluto, circa 2-3 σ dalla curva gaussiana)

la varianabilità si riduce molto i transistor hanno una tolleranza relativa molto inferiore ai valori di tolleranza assoluta

Esempio: effetto della tolleranza dei parametri su g_m

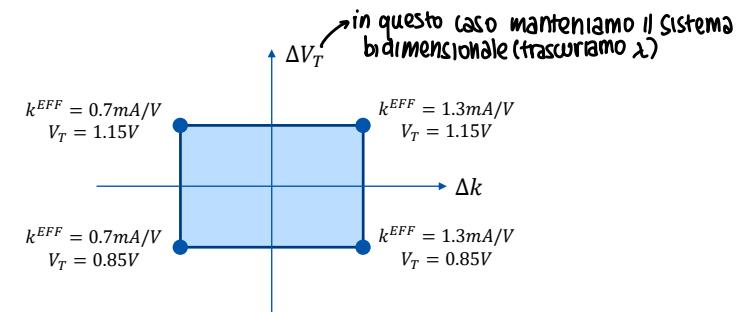
Supponiamo che il valore nominale dei parametri del MOSFET M1 siano:
 $k^{NOM} = 1mA/V^2$ e $V_T^{NOM} = 1V$

$NOM (= nominale) = \text{valori tipici/voluti}$

I valori assoluti effettivamente ottenuti al termine del ciclo di produzione tra due chip diversi sono:

$$k^{EFF} = k^{NOM} \pm 30\% = 0.7 \div 1.3 \frac{mA}{V^2} \quad \text{Variazione: } \pm 30\%$$

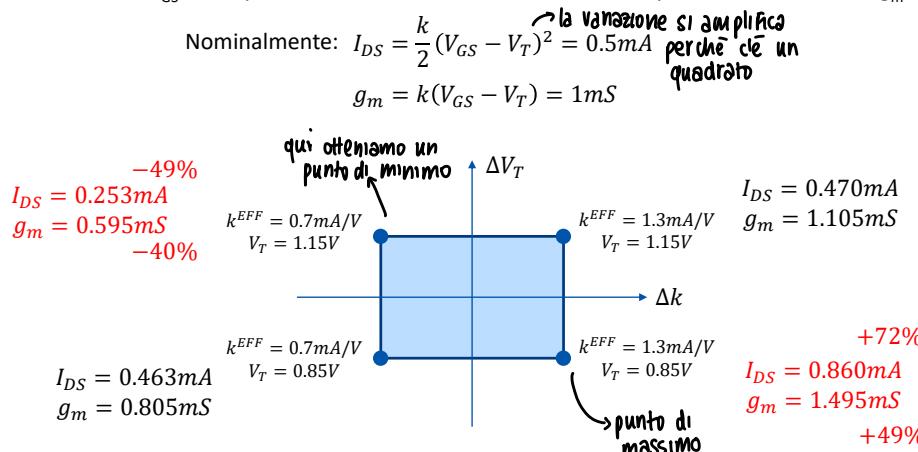
$$V_T^{EFF} = V_T^{NOM} \pm 15\% = 0.85 \div 1.15V \quad \pm 15\%$$



Esempio: effetto della tolleranza dei parametri su g_m

Esempio Supponiamo che il valore nominale dei parametri del MOSFET M1 siano:
 $k^{NOM} = 1mA/V^2$ e $V_T^{NOM} = 1V$

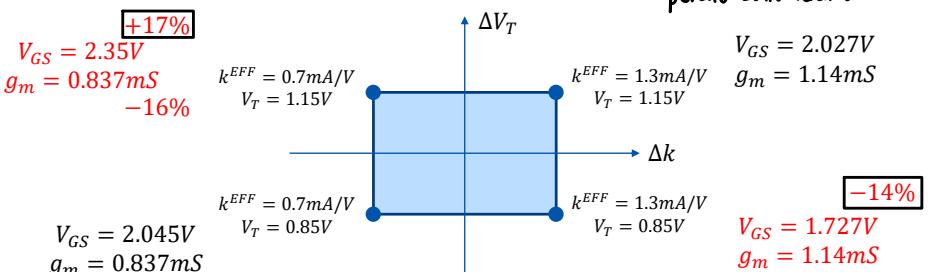
Assumiamo $V_{GS} = 2V$, quanto vale la corrente di saturazione nei quattro casi estremi? e g_m ?



Esempio Supponiamo che il valore nominale dei parametri del MOSFET M1 siano:
 $k^{NOM} = 1mA/V^2$ e $V_T^{NOM} = 1V$

Assumiamo $I_{DS} = 0.5mA$ (in saturazione), quanto valgono V_{GS} e g_m nei quattro casi estremi?

$$\text{Nominalmente: } V_{GS} = V_T + \sqrt{\frac{2I_{DS}}{k}} = 2V \quad g_m = \sqrt{2I_{DS}k} = 1mS$$



In questo caso, le oscillazioni dall'idealità sono molto più ridotte

Esempio: effetto della tolleranza dei parametri su g_m

Esempio

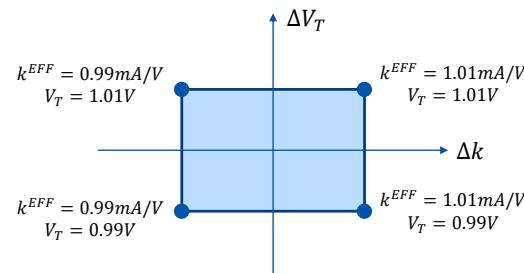
Supponiamo che il valore nominale dei parametri del MOSFET M1 siano:
 $k^{NOM} = 1mA/V^2$ e $V_T^{NOM} = 1V$ 

I valori assoluti effettivamente ottenuti al termine del ciclo di produzione tra **due dispositivi (identici) dello stesso chip**:

$$k^{EFF} = k^{NOM} \pm 1\% = 0.99 \div 1.01 \frac{mA}{V^2}$$

$$V_T^{EFF} = V_T^{NOM} \pm 1\% = 0.99 \div 1.01V$$

Variazione: $\pm 1\%$



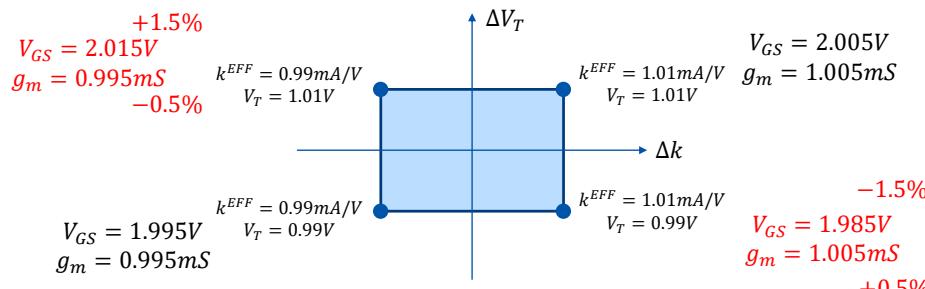
Esempio: effetto della tolleranza dei parametri su g_m

Esempio

Supponiamo che il valore nominale dei parametri del MOSFET M1 siano:
 $k^{NOM} = 1mA/V^2$ e $V_T^{NOM} = 1V$

Assumiamo $I_{DS} = 0.5mA$ (in saturazione), quanto valgono V_{GS} e g_m nei quattro casi estremi?

$$\text{Nominalmente: } V_{GS} = V_T + \sqrt{\frac{2I_{DS}}{k}} = 2V \quad g_m = \sqrt{2I_{DS}k} = 1mS$$



Esempio: effetto della tolleranza dei parametri su g_m

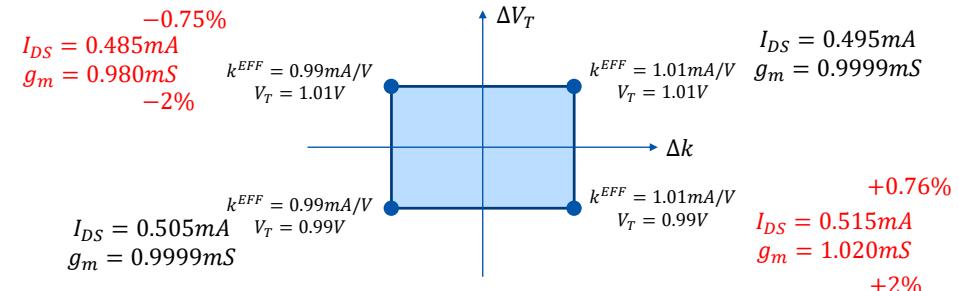
Esempio

Supponiamo che il valore nominale dei parametri del MOSFET M1 siano:
 $k^{NOM} = 1mA/V^2$ e $V_T^{NOM} = 1V$

Assumiamo $V_{GS} = 2V$, quanto vale la corrente di saturazione nei quattro casi estremi? e g_m ?

$$\text{Nominalmente: } I_{DS} = \frac{k}{2}(V_{GS} - V_T)^2 = 0.5mA$$

$$g_m = k(V_{GS} - V_T) = 1mS$$



Esempio: effetto della tolleranza dei parametri su g_m

	per ottenere una variazione contenuta è meglio fissare la corrente MOSFET su chip diversi	che si imponeva corrente o tensione, la variazione rimane contenuta MOSFET nello stesso chip
Fissata V_{GS}	$g_m = 0.595 \div 1.495mS$ -40% \div +49%	$g_m = 0.980 \div 1.020mS$ -2% \div +2%
Fissata I_{DS}	$g_m = 0.837 \div 1.14mS$ -16% \div +14%	$g_m = 0.995 \div 1.005mS$ -0.5% \div +0.5%

■ Due MOSFET nello stesso IC garantiscono un accuratezza molto maggiore rispetto a MOSFET in chip diversi

■ Fissare la corrente (ad esempio mediante uno specchio di corrente) è un approccio migliore rispetto a fissare la tensione V_{GS}

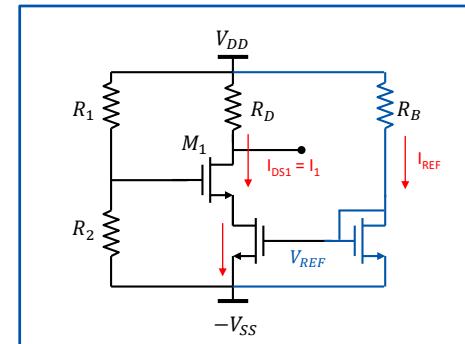
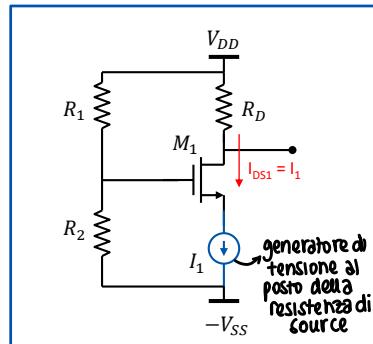
Carico attivo

- Per carico attivo in un amplificatore si intende l'impiego di MOSFET al posto delle resistenze in serie al source (o drain).
- Si usa nei circuiti integrati sfruttando la maggior riproducibilità dei MOSFET
- In certe condizioni consente di ottenere resistenze equivalenti molto elevate (sfruttando la resistenza di uscita del MOSFET)

Si potrebbe implementare anche ad un circuito ad elementi discreti, ma non ci sarebbero grandi guadagni

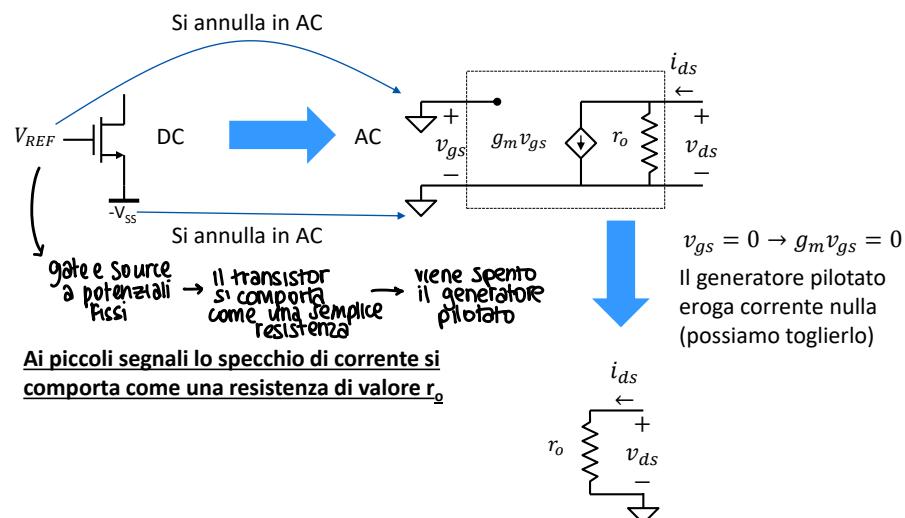
Il rapporto di specchio è indipendente dalla tolleranza (è un rapporto di K che va bene entrambi).

Stadio elementare con polarizzazione in corrente

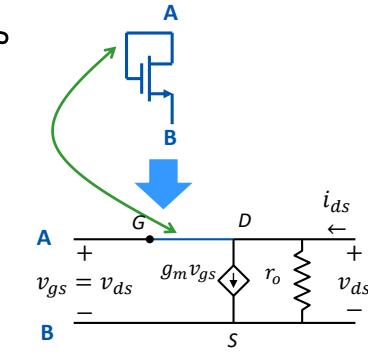
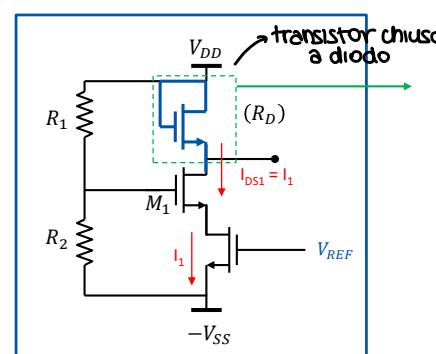


- La corrente I_{DS} (e quindi la tensione V_{GS}) è imposta dal generatore di corrente.
- Il generatore di corrente può essere realizzato mediante uno specchio di corrente

Stadio elementare con polarizzazione in corrente



Stadi elementari con carico a MOSFET



Un MOSFET in saturazione con $v_{gs} = v_{ds}$ si comporta ai piccoli segnali come una resistenza:

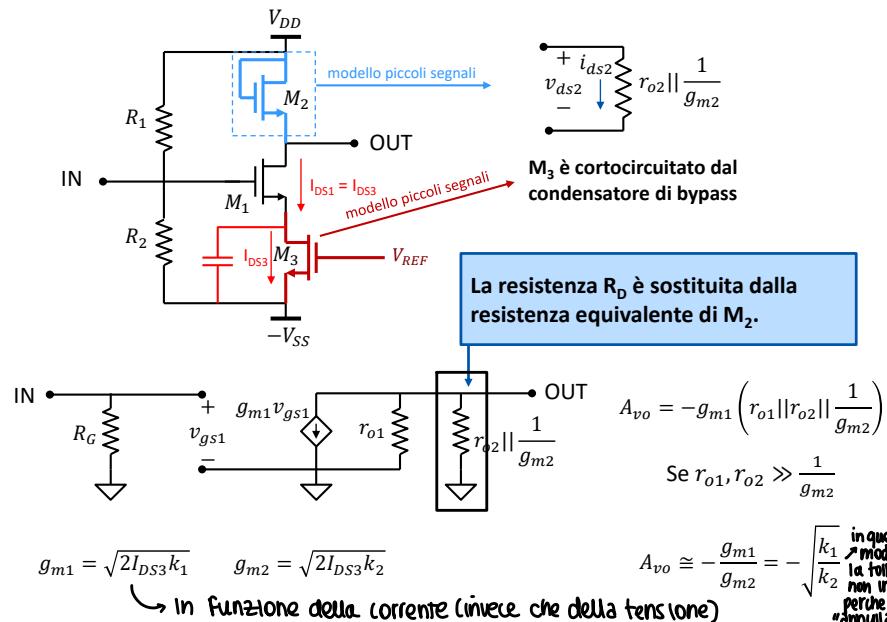
$$r_o \parallel \frac{1}{g_m} \approx \frac{1}{g_m}$$

$se r_o \gg 1/g_m$

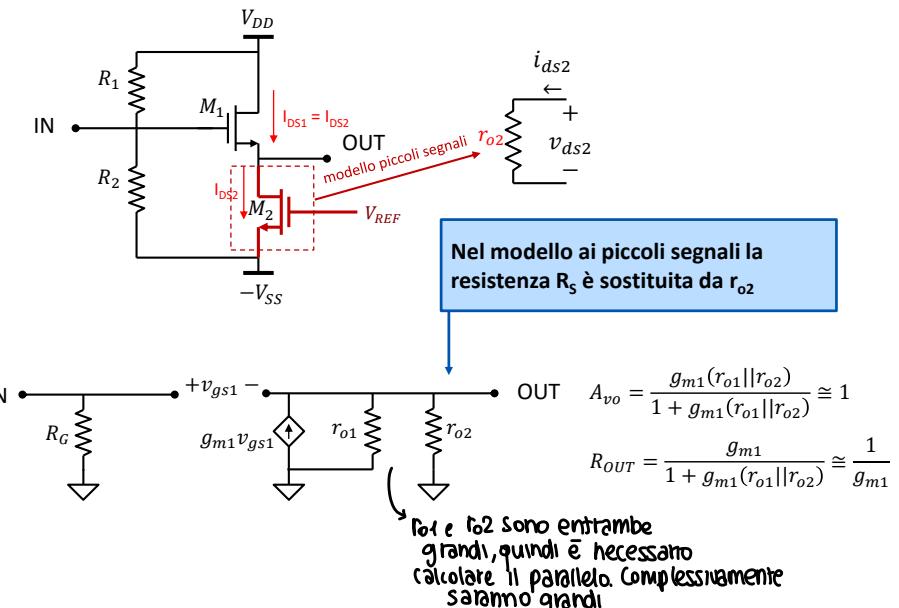
$$i_{ds} = \frac{v_{ds}}{r_o} + g_m v_{ds} = v_{ds} \left(\frac{1}{r_o} + g_m \right) = \frac{v_{ds}}{r_o \parallel \frac{1}{g_m}}$$

se r_o è abbastanza grande equivale circa a $\frac{1}{g_m}$

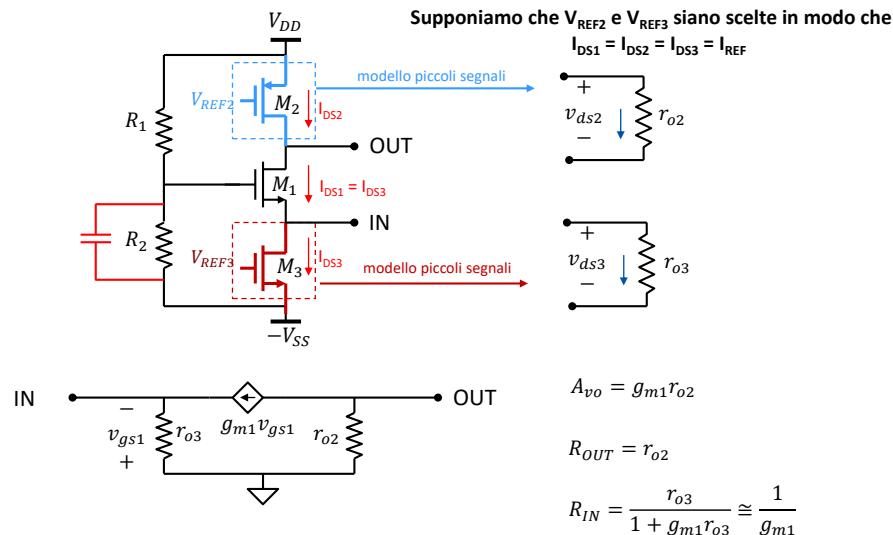
Esempio: configurazione CS



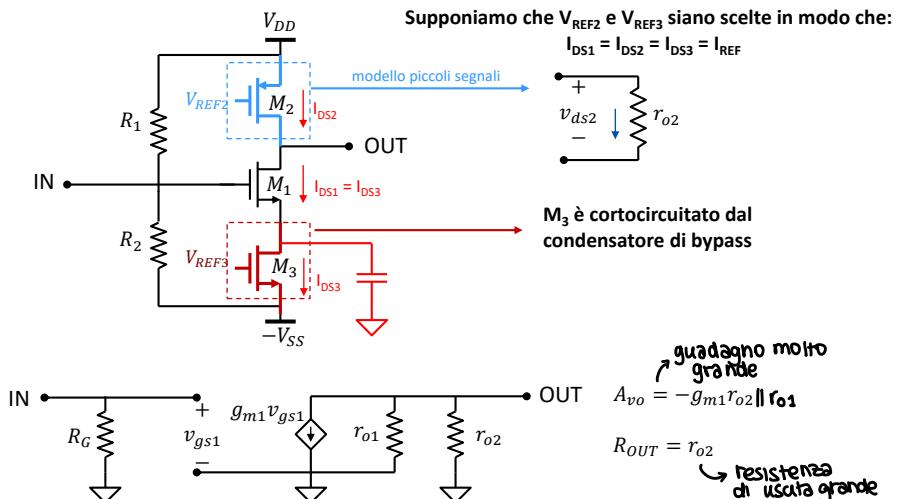
Esempio: configurazione CD (common drain)



Esempio: configurazione CG (common gate)



Esempio: configurazione CS (common source)



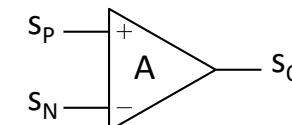
Stadio differenziale

Jaeger 6°Ed.: Cap. 16 p.793-816

- Stadio differenziale
- MOSFET in Configurazione differenziale
- Modo differenziale e modo comune
- Rapporto di reiezione del modo comune (CMRR)

Definizione di Amplificatore Differenziale

- L'amplificatore differenziale è un dispositivo con due ingressi e una uscita il cui valore dipende dalla differenza degli ingressi.
- Il morsetto indicato dal segno + a cui è collegato il segnale s_p è detto **ingresso non invertente**.
- Il morsetto indicato dal segno - a cui è collegato il segnale s_n è detto **ingresso invertente**.
- All'**uscita** dell'amplificatore troviamo il segnale s_o dato da:
$$s_o = A \cdot (s_p - s_n)$$
- A è l'amplificazione, detta anche **guadagno di modo differenziale**

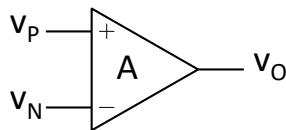


Simbolo usato per l'amplificatore differenziale

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

2

Amplificatore differenziale IDEALI e REALE



Amplificatore differenziale REALE (in prima approssimazione)

Principali non idealità:

R_o = resistenza di uscita

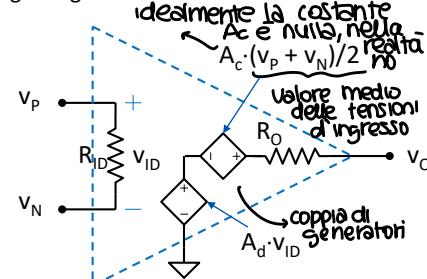
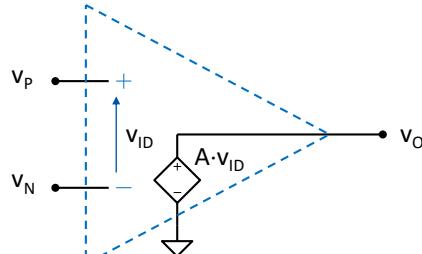
R_{ID} = resistenza differenziale di ingresso

v_{ID} = tensione differenziale di ingresso

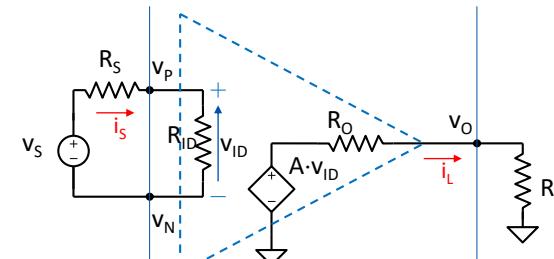
A_d = guadagno di tensione di modo differenziale

A_c = guadagno di tensione di modo comune

Amplificatore differenziale IDEALE



Effetto del carico sull'amplificazione



$$v_P - v_N = v_S \frac{R_{ID}}{R_{ID} + R_S}$$

$$v_O = A v_{ID} \frac{R_L}{R_o + R_L}$$

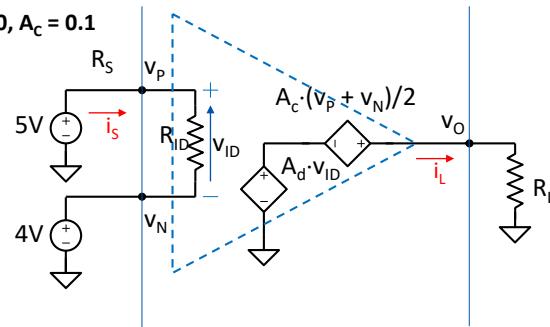
$$v_O = v_S \frac{R_{ID}}{R_{ID} + R_S} A \frac{R_L}{R_o + R_L}$$

effetto di carico in uscita

$$\text{Guadagno di tensione con carico: } A_v = \frac{v_O}{v_S} = \frac{R_{ID}}{R_{ID} + R_S} A \frac{R_L}{R_o + R_L} < A$$

Effetto del modo comune

Esempio: $A_D = 10, A_C = 0.1$



$$v_P - v_N = v_{ID} = 1V$$

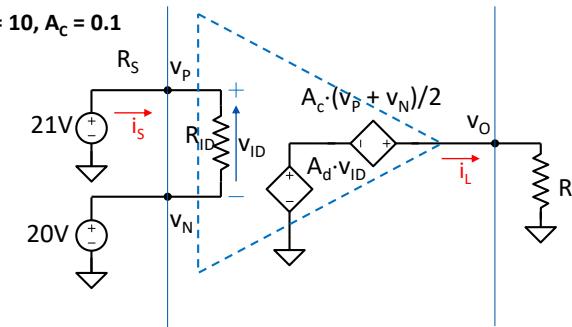
$$v_O = A_D v_{ID} + A_C \frac{v_P + v_N}{2} = 10.45$$

$$\frac{v_P + v_N}{2} = 4.5V$$

$$\begin{matrix} 10 \cdot 1V \\ 10V \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0.1 \cdot 4.5V \\ 0.45 \end{matrix}$$

Effetto del modo comune

Esempio: $A_D = 10, A_C = 0.1$

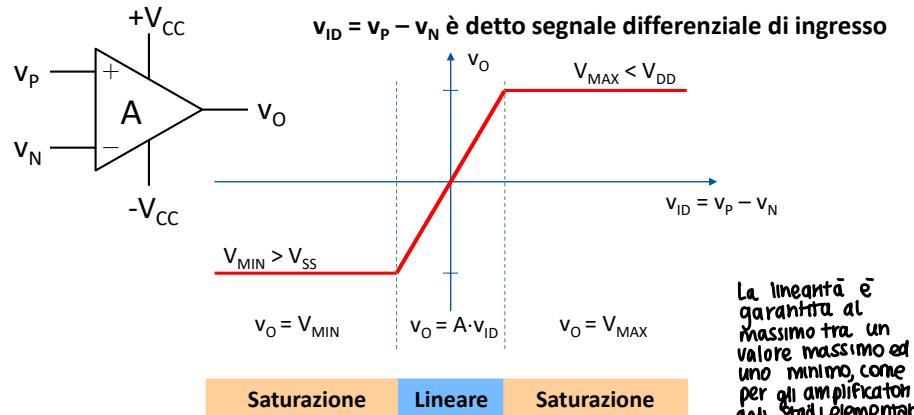


$$v_P - v_N = v_{ID} = 1V$$

$$v_O = A_D v_{ID} + A_C \frac{v_P + v_N}{2} = 12.05$$

$$\begin{matrix} 10 \cdot 1V \\ 10V \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0.1 \cdot 20.5V \\ 2.05 \end{matrix}$$

Saturazione della tensione di uscita

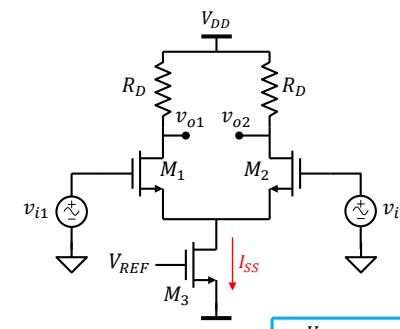


- Valori del segnale differenziale di ingresso troppo elevati causano la saturazione della tensione di uscita che viene limitata a V_{MIN} e V_{MAX} :

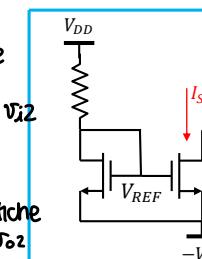
$$V_{SS} < V_{MIN} \leq v_O \leq V_{MAX} < V_{DD}$$

Configurazione differenziale

Amplificatore accoppiato in DC



- circuito a Source comune
- 2 ingressi applicati ai gate dei transistor v_{i1} e v_{i2}
- si assume che i due transistor siano identici
- ai drain sono collegate due resistenze R_D identiche
- preleviamo 2 uscite: v_{o1} e v_{o2}



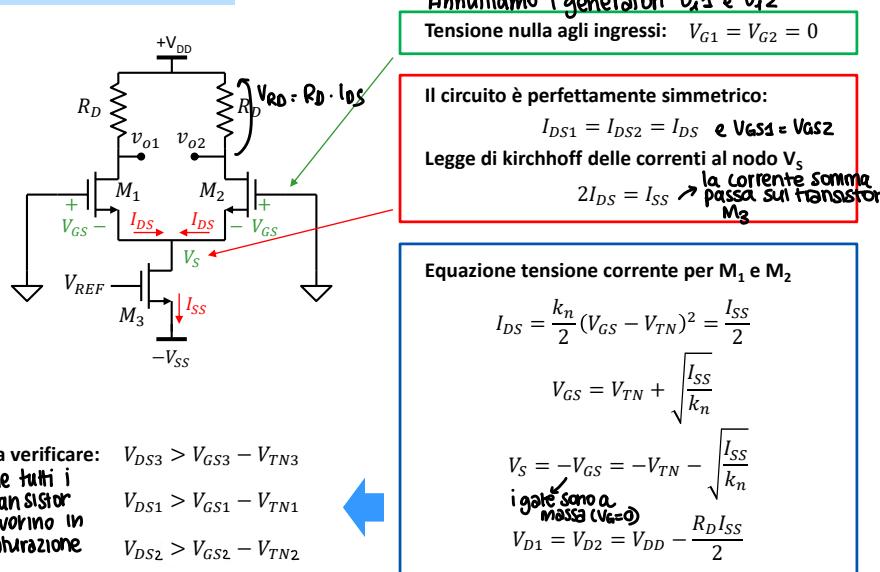
Ipotesi di lavoro:

- $M_1 = M_2$ (stessi parametri)
 - $k_{n1} = k_{n2} = k_n$
 - $V_{TN1} = V_{TN2} = V_{TN}$
- M_1 e M_2 stesso punto di lavoro (saturazione)
- Il circuito è simmetrico
- M_3 DEVE lavorare in saturazione (impone la corrente I_{SS})

ad esempio V_{REF} può essere fornita tramite uno specchio di corrente)
ampliamento della configurazione a source comune

Configurazione differenziale (STADIO DIFFERENZIALE ELEMENTARE)

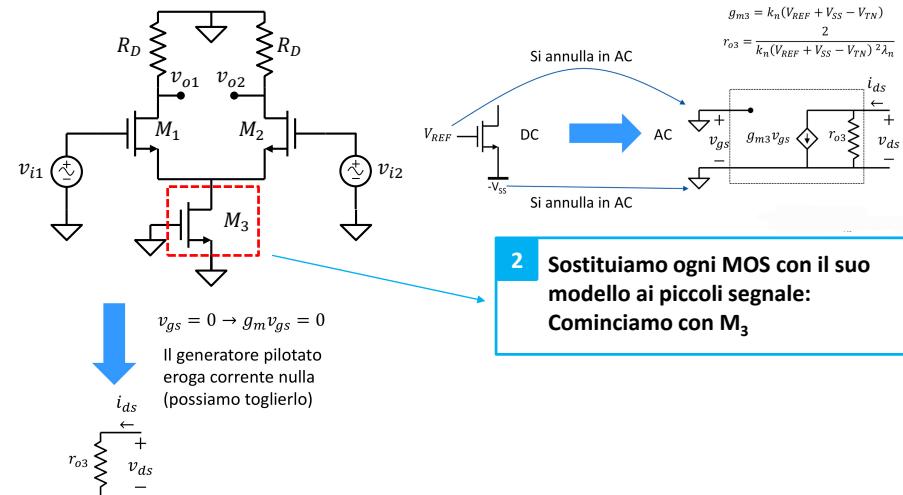
Punto di lavoro (Analisi DC)



Circuito ai piccoli segnali

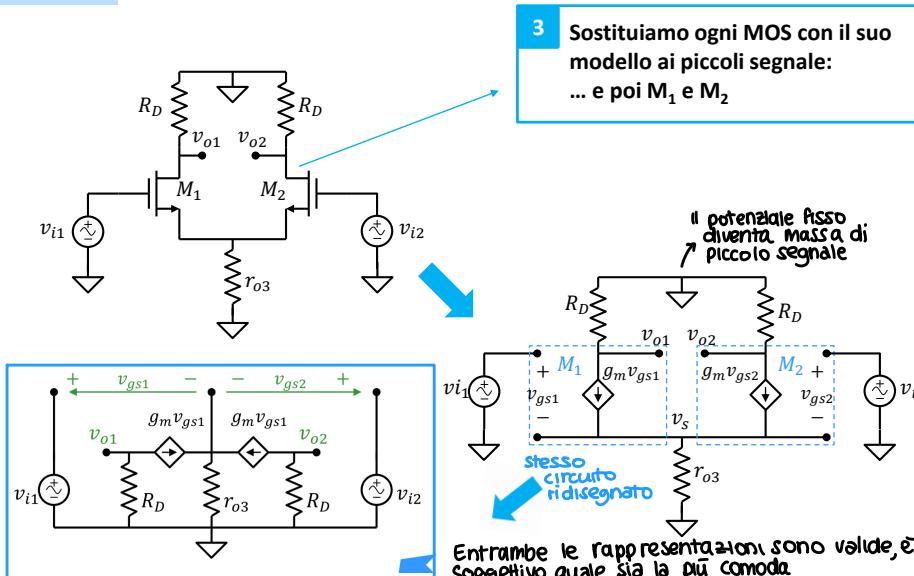
Analisi AC

1 Generatori costanti \rightarrow diventano massa (potenziale nullo)



Circuito ai piccoli segnali

Analisi AC



■ Dati due generici segnali v_1 e v_2 , definiamo:

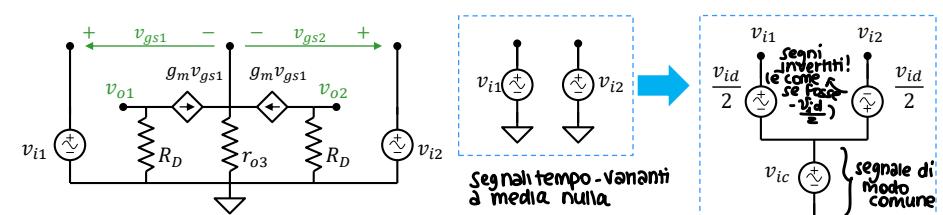
- Segnale di **modo differenziale** la differenza $v_d = v_1 - v_2$
- Segnale di **modo comune** la media: $v_c = \frac{v_1 + v_2}{2}$

■ I segnali v_1 e v_2 possono essere espressi in funzione del modo differenziale e modo comune:

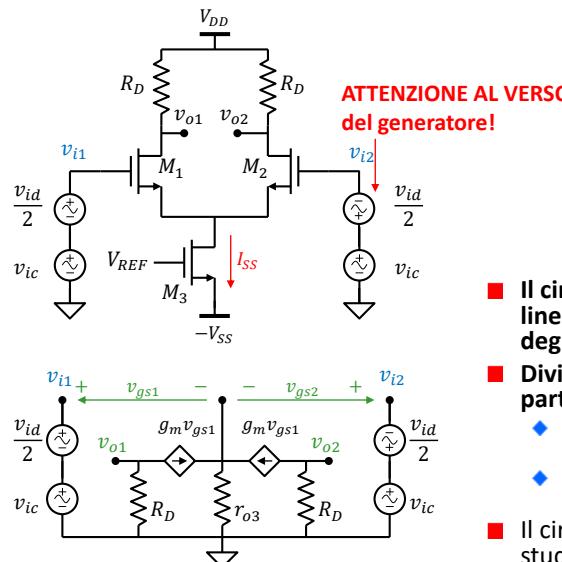
$$v_1 = v_c + \frac{v_d}{2} \quad \text{e} \quad v_2 = v_c - \frac{v_d}{2}$$

media \swarrow modo differenziale \searrow

Sostituendo i generatori v_{i1} e v_{i2} come sovrapposizione di modo differenziale (v_{id}) e modo comune (v_{ic})

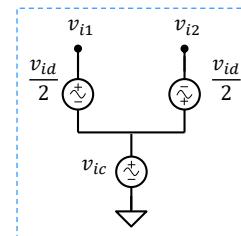


Modo differenziale e modo comune



- Il circuito ai piccoli segnali è lineare e vale la sovrapposizione degli effetti
- Dividiamo l'analisi AC in due parti:
 - ◆ Analisi di modo differenziale (solo v_{id})
 - ◆ Analisi di modo comune (solo v_{ic})
- Il circuito ha due uscite. Per ora, le studiamo separatamente

Nella sovrapposizione degli effetti questi generatori si spengono e accendono a coppie



Ingresso di modo differenziale

Tensione di uscita a vuoto

Spegniamo v_{ic} e accendiamo v_{id}

Come per il C.Source: $v_{o1} = -R_D g_m v_{gs1}$

Tensione di uscita v_{o1} : $v_{o1} = -R_D g_m v_{gs2}$

$$\begin{cases} v_{gs1} = \frac{v_{id}}{2} - v_s \\ v_{gs2} = -\frac{v_{id}}{2} - v_s \end{cases}$$

Si applica una coppia d'ingresso a media nulla (stesso modulo con segno inverso) → PURO MODO DIFFERENZIALE.

Rispetto all'ingresso di modo differenziale, le uscite v_{o1} e v_{o2} sono amplificate (in modulo) della stessa quantità ma con segno opposto.

In base al guadagno che si vuole ottenere si considerino guadagno di modo differenziale:

$$A_d = \frac{R_D g_m}{2}$$

Tensione di uscita v_s :

$$v_s = r_{o3}(g_m v_{gs1} + g_m v_{gs2}) = r_{o3} g_m (v_{gs1} + v_{gs2})$$

$$v_{gs1} + v_{gs2} = -2v_s$$

$$v_s = -2r_{o3} g_m v_s$$

$$v_{gs1} = \frac{v_{id}}{2}$$

$$v_{gs2} = -\frac{v_{id}}{2}$$

$$v_{o2} = +R_D g_m \frac{v_{id}}{2} = A_d v_{id}$$

$$v_{o1} = -R_D g_m \frac{v_{id}}{2} = -A_d v_{id}$$

Ingresso di modo comune

Tensione di uscita a vuoto Segniamo v_{id} e accendiamo v_{ic}

Tensione di uscita v_{o1} : $v_{o1} = -R_D g_m v_{gs1}$

Tensione di uscita v_{o2} : $v_{o2} = -R_D g_m v_{gs2}$

$$\begin{cases} v_{gs1} = v_{ic} - v_s \\ v_{gs2} = v_{ic} - v_s \end{cases}$$

Cambierà la corrente che passa sulle resistenze

$$\text{Tensione di uscita } v_s: v_s = r_{o3}(g_m v_{gs1} + g_m v_{gs2}) = 2r_{o3} g_m (v_{ic} - v_s) \rightarrow v_s = \frac{2r_{o3} g_m}{1 + 2r_{o3} g_m} v_{ic}$$

$$v_{gs1} = v_{gs2} = v_{ic} - \frac{2r_{o3} g_m}{1 + 2r_{o3} g_m} v_{ic} = \frac{v_{ic}}{1 + 2r_{o3} g_m}$$

$$v_{o1} = v_{o2} = -\frac{R_D g_m}{1 + 2r_{o3} g_m} v_{ic}$$

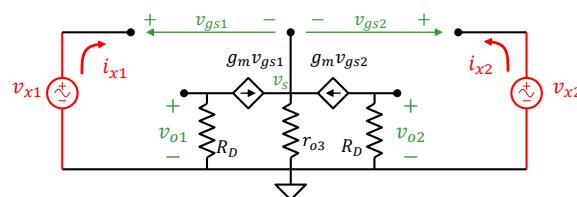
$$A_c = -\frac{R_D g_m}{1 + 2r_{o3} g_m}$$

Rispetto all'ingresso di modo comune, le uscite v_{o1} e v_{o2} sono uguali e amplificate della stessa quantità

$$\begin{aligned} v_{i1} &= \frac{v_{id}}{2} \\ v_{i2} &= -\frac{v_{id}}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} v_{o2} &= +R_D g_m \frac{v_{id}}{2} = A_d v_{id} \\ v_{o1} &= -R_D g_m \frac{v_{id}}{2} = -A_d v_{id} \end{aligned}$$

A_d deve essere grande, A_c deve essere piccolo (idealemente $A_c = 0$)

Resistenza di ingresso

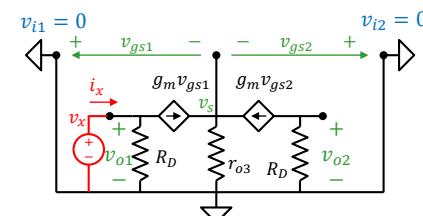


- Applichiamo una tensione v_{x1} (o v_{x2}) all'ingresso 1 (o 2)
- Misuriamo la corrente i_{x1} (o i_{x2})
- Gli ingressi (simmetrici) sono circuiti aperti: $i_{x1} (= i_{x2}) = 0$
- La resistenza di ciascun ingresso è:

$$R_{in} = \frac{v_{x1,2}}{i_{x1,2}} = \infty$$

ci sono due ingressi quindi ci sarà una resistenza per ciascun ingresso

Resistenza di uscita



Annullo tutti i generatori indipendenti

- 1) Cortocircuitiamo gli ingressi
- 2) Applichiamo una tensione v_x a una delle uscite
- 3) Misuriamo la corrente i_x erogata dal generatore

Corrente i_x : $i_x = \frac{v_x}{R_D} + g_m v_{gs1}$

$v_{gs1} = -v_s$

Legge di Kirchhoff al nodo v_s

$$\frac{v_s}{r_{o3}} = g_m v_{gs1} + g_m v_{gs2} = -2g_m v_s \rightarrow v_s = 0$$

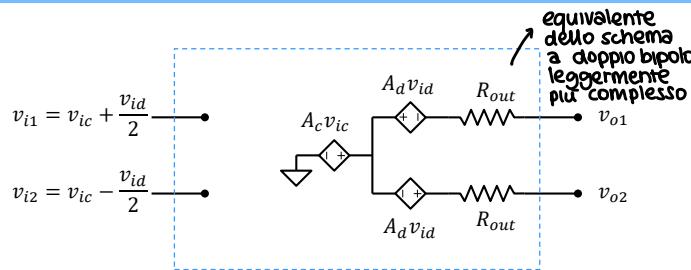
$$i_x = \frac{v_x}{R_D}$$

$$R_{out1} = \frac{v_x}{i_x} = R_D$$

$$R_{out2} = \frac{v_x}{i_x} = R_D$$

Uscita 2 simmetrica all'uscita 1:

Modello elettrico equivalente



$$R_{in1} = R_{in2} = \infty$$

$$A_d = \frac{R_D g_m}{2}$$

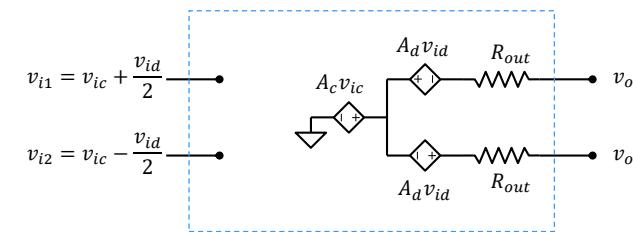
$$R_{out} = R_D$$

$$A_c = \frac{-g_m R_D}{1 + 2g_m r_{o3}}$$

Le uscite v_{o1} e v_{o2} hanno la stessa amplificazione di modo comune.

L'amplificazione di modo differenziale ha lo stesso modulo, ma segno opposto

Modello elettrico equivalente (uscita differenziale)



Le uscite v_{o1} e v_{o2} possono essere viste come una coppia di segnali con:

Modo differenziale: $v_{od} = v_{o1} - v_{o2} = A_c v_{ic} - A_d v_{id} - A_c v_{ic} - A_d v_{id} = -2A_d v_{id} = -R_D g_m v_{id}$

N.B.: II + e II - vengono scelti arbitrariamente

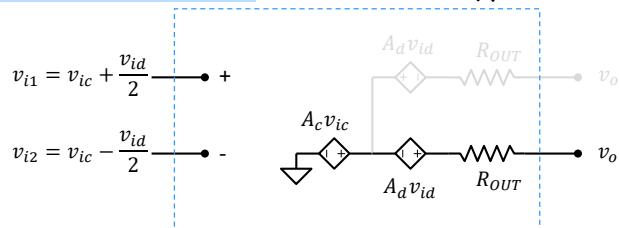
Modo comune: $v_{oc} = \frac{v_{o1} + v_{o2}}{2} = \frac{A_c v_{ic} - A_d v_{id} + A_c v_{ic} + A_d v_{id}}{2} = A_c v_{ic} = \frac{-g_m R_D}{1 + 2g_m r_{o3}} v_{ic}$

media delle due uscite

Modello elettrico equivalente (uscita singola)

Amplificatore differenziale invertente

Il carico viene applicato ad 1 sola uscita



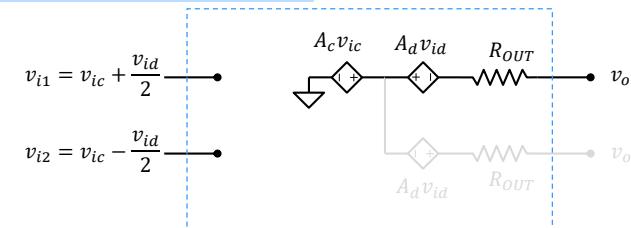
$$R_{IN1} = R_{IN2} = \infty \quad A_d = \frac{R_D g_m}{2} \quad \text{Guadagno di modo differenziale positivo}$$

$$R_{OUT} = R_D \quad A_c = \frac{-g_m R_D}{1 + 2g_m r_{o3}} \quad \text{Guadagno di modo comune negativo}$$

Usiamo solo l'uscita v_{o2} e otteniamo un guadagno di modo differenziale positivo (amplificatore differenziale non invertente)

Modello elettrico equivalente (uscita singola)

Amplificatore differenziale non invertente



$$R_{IN1} = R_{IN2} = \infty \quad A_d = -\frac{R_D g_m}{2} \quad \text{Guadagno di modo differenziale negativo}$$

$$R_{OUT} = R_D \quad A_c = \frac{-g_m R_D}{1 + 2g_m r_{o3}} \quad \text{Guadagno di modo comune negativo}$$

Usiamo solo l'uscita v_{o1} e otteniamo un guadagno di modo differenziale negativo (amplificatore differenziale invertente)

Rapporto di reiezione del modo comune

Idealmente un amplificatore differenziale dovrebbe produrre in uscita un segnale puramente differenziale, cioè la componente di modo comune all'ingresso dovrebbe essere eliminata (idealmente dovrebbe essere prodotta solo la differenza). In realtà ciò non accade mai!

Definiamo il rapporto di reiezione del modo comune:

$$CMRR = \frac{|A_d|}{|A_c|}$$

IDEALMENTE $|A_c| \rightarrow 0$
quindi $CMRR \rightarrow \infty$

$$A_d = \frac{R_D g_m}{2}$$

$$A_c = \frac{-g_m R_D}{1 + 2g_m r_{o3}}$$

bisogna aumentare
il denominatore, quindi
ottenere r_{o3} molto
grande

$$CMRR = \frac{1 + 2g_m r_{o3}}{2}$$

$$\text{Se } g_m r_{o3} \gg 1 \quad CMRR \cong g_m r_{o3}$$

Un amplificatore differenziale ideale, dovrebbe avere un modo comune nullo ($CMRR=\infty$)

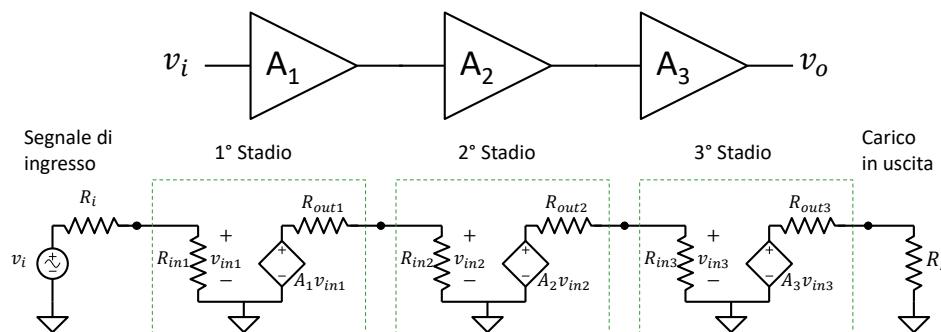
Amplificatori multistadio

- Come mettere in cascata gli amplificatori
- Esempi di amplificatori multistadio accoppiato in AC
- Esempio di amplificatore multistadio accoppiato in DC
- L'amplificatore operazionale elementare

Mettiamo in cascata gli amplificatori

Quando mettiamo in cascata gli amplificatori:

- Il generatore di segnale pilota il primo stadio \rightarrow la resistenza di ingresso coincide con quella del primo stadio.
- Ciascuno stadio di amplificatore è pilotato dal circuito di uscita del precedente. Quindi la sua resistenza di ingresso è la resistenza di carico dello stadio precedente.
- L'ultimo stadio pilota il carico esterno \rightarrow la resistenza di uscita è quella dell'ultimo stadio.



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

2

Amplificatore di tensione

	CS	CD	CG	Differenziale
Guadagno di tensione a vuoto	$-g_m R_D$ NEGATIVO, REGOLABILE	$\frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S} \cong 1$ BASSO	$g_m R_D$ REGOLABILE	$A_d = \pm \frac{g_m R_D}{2}$ REGOLABILE $A_c = -\frac{g_m R_D}{1 + 2g_m R_S}$ BASSO
Resistenza di ingresso	$R_1 \parallel R_2$ MEDIO-ALTA	$R_1 \parallel R_2$ MEDIO-ALTA	$\frac{g_m}{1 + g_m R_S} \cong \frac{1}{g_m}$ BASSA	∞ ALTA perché negli esempi fatti abbiamo usato collegamenti in DC.
Resistenza di uscita	R_D MEDIA	$\frac{g_m}{1 + g_m R_S} \cong \frac{1}{g_m}$ BASSA	R_D MEDIA	R_D MEDIA

- Per realizzare un amplificatore di tensione è richiesto:

- Alto guadagno di tensione
- Bassa resistenza di uscita
- Alta resistenza di ingresso

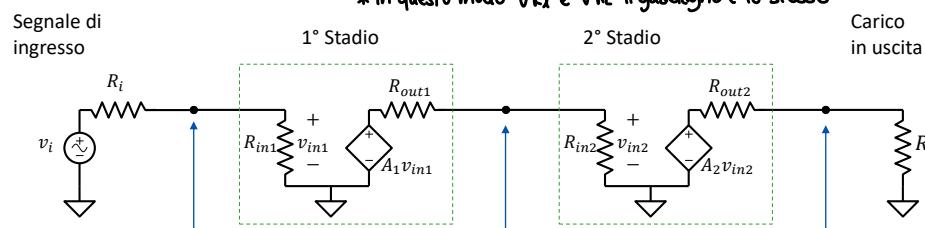
■ Nessuna configurazione possiede tutte queste caratteristiche.

■ Soluzione: Combiniamo assieme più stadi elementari

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

3

Amplificatore di tensione a due stadi



* in questo modo V_{Ri} e V_{RL} il guadagno è lo stesso

Segnale di ingresso

1° Stadio

2° Stadio

Carico in uscita

Tensione effettiva all'ingresso:

$$v_{in1} = v_i \frac{R_{in1}}{R_{in1} + R_i}$$

Requisito: $R_{in1} \gg R_i$
idealemente infinita *

Tensione di uscita del 1° stadio

$$A_1 v_{in1} \frac{R_{in2}}{R_{in2} + R_{out1}}$$

Requisiti: $R_{in2} \gg R_{out1}$
 A_1 elevato

Tensione di uscita finale

$$A_2 v_{in2} \frac{R_L}{R_L + R_{out2}}$$

Requisito: $R_{out2} \ll R_L$
idealemente zero *

CS, CD OK

CG NO (perché R_{in} troppo bassa)

CS-CD o CS-CS OK

(finanziari
 R_{out} medio-basse)

CS, CG NO

CD OK (dato che il
guadagno è circa
unitario lo
accoppiamo ad
un 'CS')

Almeno uno dei due stadi deve avere un guadagno regolabile:
accoppiiamo ad un 'CS'
Usiamo uno stadio CS seguito da uno stadio CD

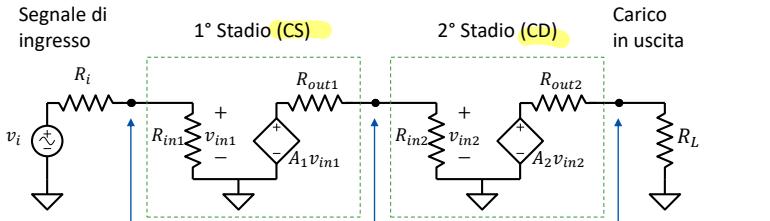
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

4

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

5

Amplificatore di tensione a due stadi



Segnale di ingresso

1° Stadio (CS)

2° Stadio (CD)

Carico in uscita

$$v_{in1} = \frac{R_{in1}}{R_i + R_{in1}} v_i$$

$$v_{in2} = \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} A_1 v_{in1}$$

$$v_o = \frac{R_L}{R_{out2} + R_L} A_2 v_{in2}$$

ATTENZIONE:

$$A = \frac{v_o}{v_i} = A_2 A_1 \frac{R_L}{R_{out2} + R_L} \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} \frac{R_{in1}}{R_i + R_{in1}}$$

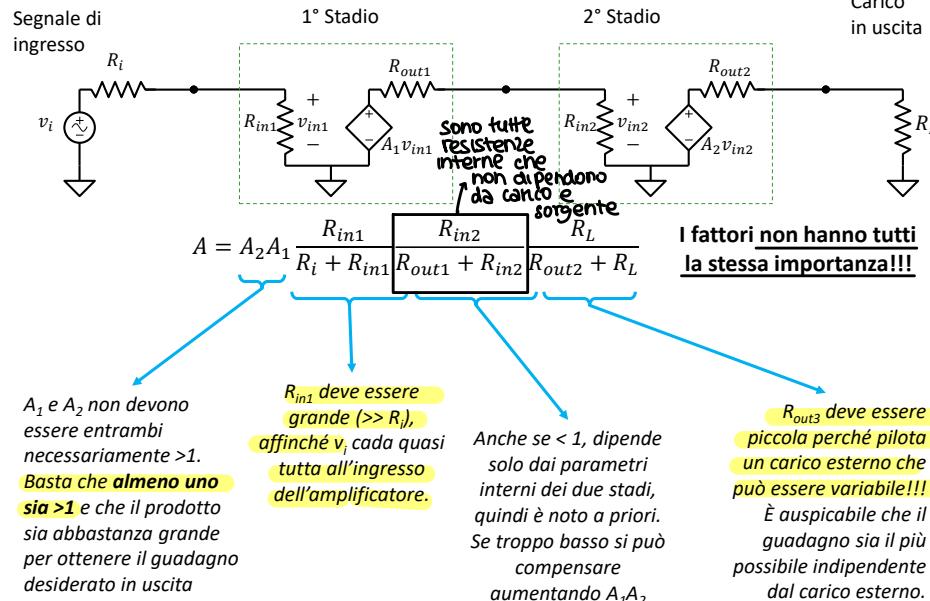
Ciascuno di questi fattori deve essere il più possibile vicino a 1 per non perdere benefici, ma attenzione

$$0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.72$$

$$0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.51$$

$$v_o = \frac{R_L}{R_{out2} + R_L} A_2 \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} A_1 \frac{R_{in1}}{R_i + R_{in1}} v_i$$

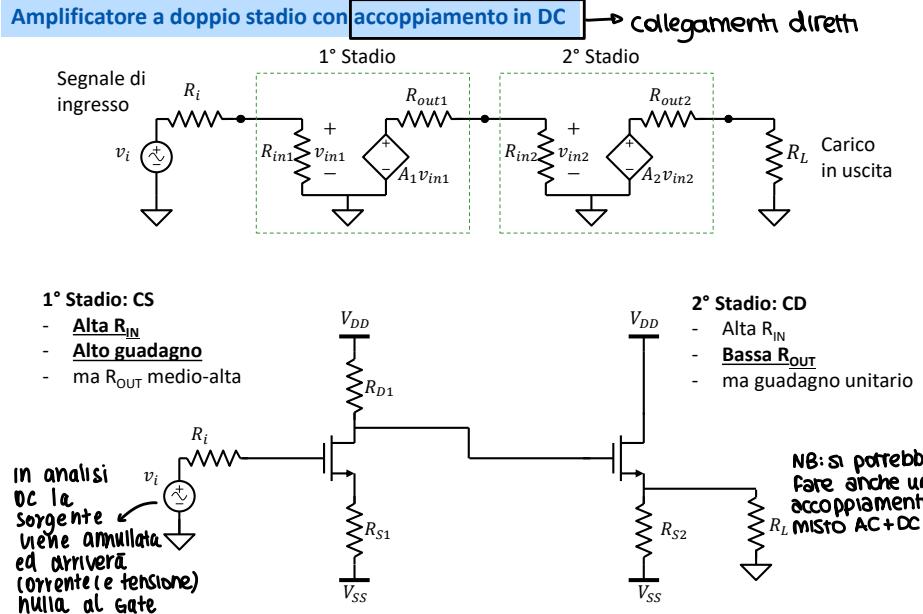
Amplificatore di tensione a due stadi



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

7

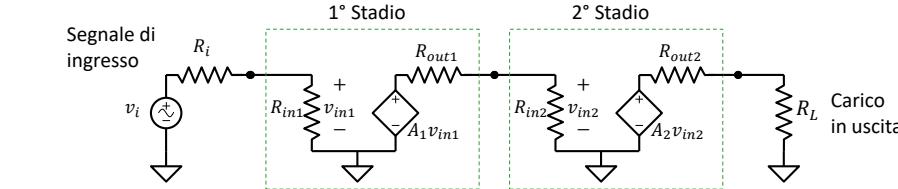
Amplificatore di tensione a due stadi



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

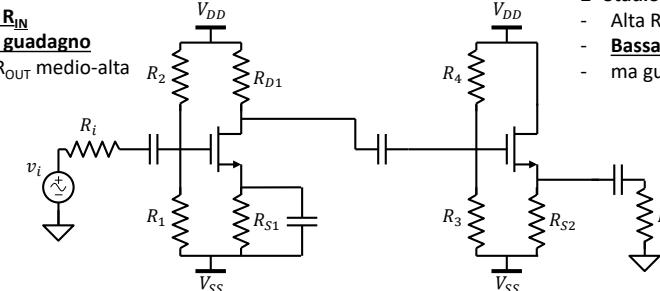
Amplificatore di tensione a due stadi

Amplificatore a doppio stadio con accoppiamento in AC



1° Stadio: CS

- Alta R_{IN}
- Alto guadagno
- ma R_{OUT} medio-alta

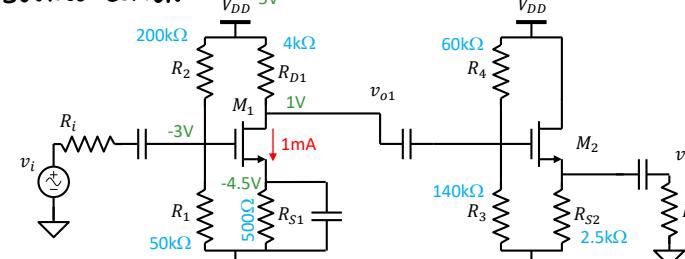


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

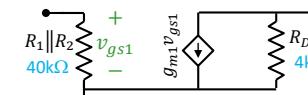
8

Esempio numerico: amplificatore di tensione (acc. AC)

SOURCE COMUNE



Primo stadio

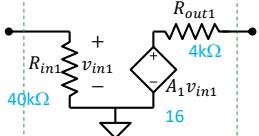


$$g_m = k_n(V_{GS1} - V_{TN}) = 4mS$$

$$r_{o1} = \infty \text{ (dato } \lambda=0\text{)}$$

$$\begin{aligned} k_{n1} &= 8mA/V^2 \\ k_{n2} &= 2mA/V^2 \\ V_{TN} &= 1V \\ \lambda &= 0 \\ V_{DD} &= 5V \\ V_{SS} &= -5V \end{aligned}$$

MODELLO A DOPPIO BIPOLARE



$$A_1 = -g_m R_{D1} = -16$$

$$R_{in1} = R_1 || R_2 = 40k\Omega$$

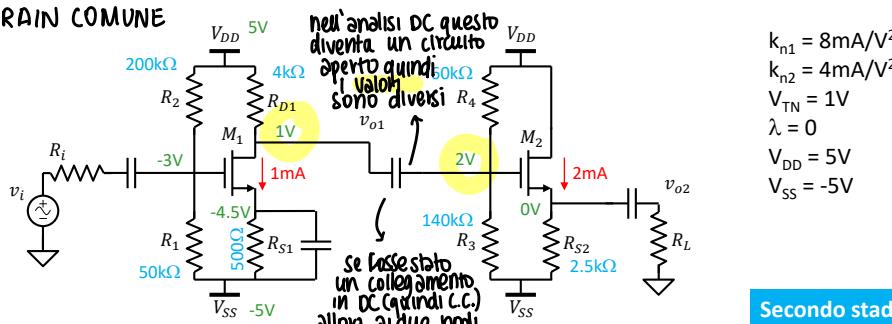
$$R_{out1} = R_{D1} = 4k\Omega$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

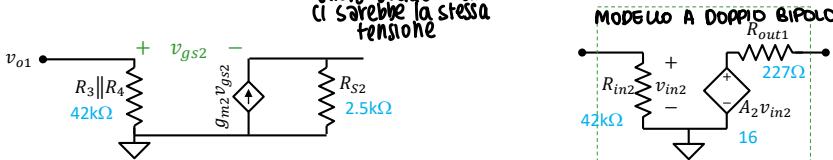
11

Esempio numerico: amplificatore di tensione (acc. AC)

DRAIN COMUNE



Secondo stadio



$$g_{m2} = k_{n2}(V_{GS2} - V_{TN}) = 4\text{mS}$$

$$r_{o2} = \infty$$

$$A_2 = \frac{g_{m2} R_{S2}}{1 + g_{m2} R_{S2}} = 0.91 \approx 1$$

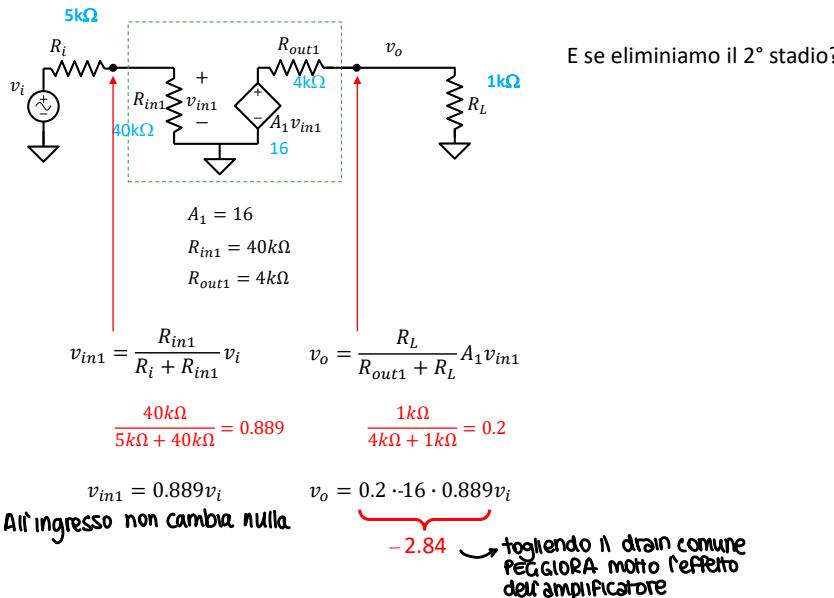
$$R_{in2} = R_3 || R_4 = 42\text{k}\Omega$$

$$R_{out2} = \frac{R_{S2}}{1 + g_{m2} R_{S2}} = 227\Omega$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

12

Esempio numerico: amplificatore di tensione (acc. AC)

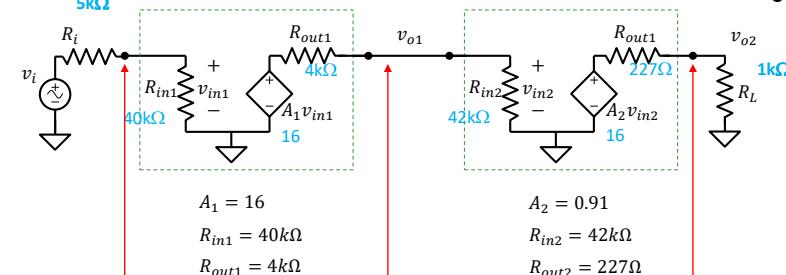


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

14

Esempio numerico: amplificatore di tensione (acc. AC)

Uniamo i modelli a doppio bipolo e a partire da qui calcoliamo il guadagno



$$v_{in1} = \frac{R_{in1}}{R_i + R_{in1}} v_i$$

$$\frac{40\text{k}\Omega}{5\text{k}\Omega + 40\text{k}\Omega} = 0.889$$

$$v_{in1} = 0.889 v_i$$

$$v_{in2} = \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} A_1 v_{in1}$$

$$\frac{42\text{k}\Omega}{4\text{k}\Omega + 42\text{k}\Omega} = 0.913$$

$$v_{in2} = 0.913 \cdot 16 \cdot 0.889 v_i$$

$$v_o = \frac{R_L}{R_{out2} + R_L} A_2 v_{in2}$$

$$\frac{1\text{k}\Omega}{1\text{k}\Omega + 227\Omega} = 0.815$$

$$v_o = 0.815 \cdot 0.91 \cdot 13 v_i$$

Il guadagno a vuoto include gli effetti di carico tra gli amplificatori:
 $A_1 A_2 \cdot \frac{R_{in2}}{R_{out1} + R_{in2}} \neq A_2 \text{ (amplificazione)}$

(valore effettivo di amplificazione)

Attenzione: $A_1 A_2 = -14.6$ (guadagno ideale se tutti gli effetti di carico valestero 1)

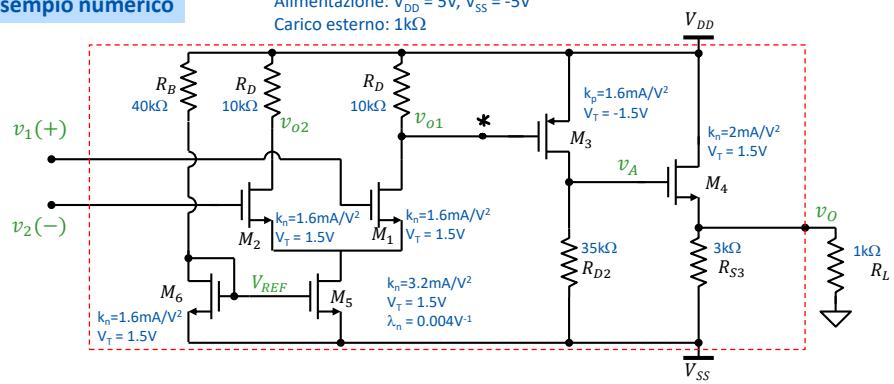
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

13

Amplificatore Differenziale a 3 stadi con accoppiamento DC

Esempio numerico

Alimentazione: $V_{DD} = 5\text{V}$, $V_{SS} = -5\text{V}$
Carico esterno: $1\text{k}\Omega$



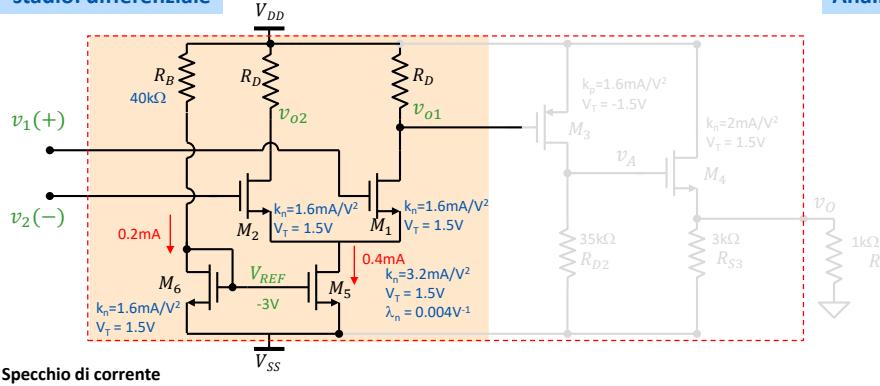
* la polarizzazione di M3 è data dalla polarità dello stadio precedente tramite il collegamento in DC

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

18

Amplificatore Differenziale

1° stadio: differenziale



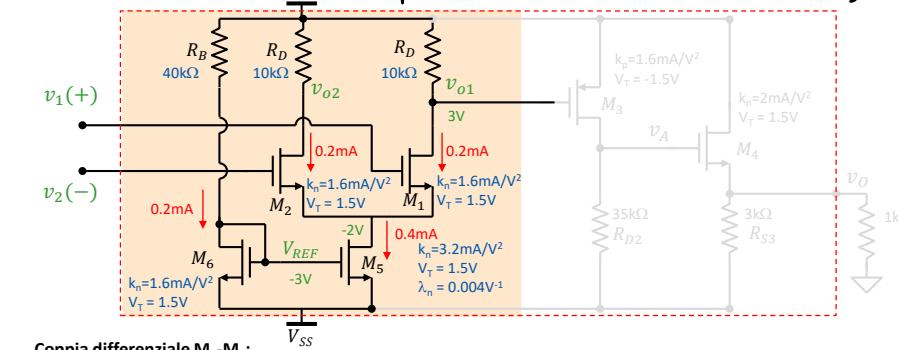
Analisi DC

Amplificatore Differenziale

1° stadio: differenziale

PUNTO OPERATIVO DEL 1° STADIO (dato che non c'è alcun partitore in uscita è come se lavorasse a vuoto)

Analisi DC



Specchio di corrente

$$I_{DS6} = \frac{k_n}{2} [(V_{REF} - V_{SS}) - V_{TN}]^2 = \frac{V_{DD} - V_{REF}}{R_B}$$

Equazione di secondo grado in V_{REF}
 $V_{REF} = -4.03V \rightarrow V_{GS6} = V_{REF} - V_{SS} = 0.968V < V_{TN}$ Non accettabile
 $V_{REF} = -3V \rightarrow V_{GS6} = 2V > V_{TN}$ OK $\rightarrow I_{DS6} = 0.2mA$

Dal rapporto di specchio: $I_{DS5} = \frac{k_n}{k_n} I_{DS6} = 2I_{DS6} = 0.4mA$

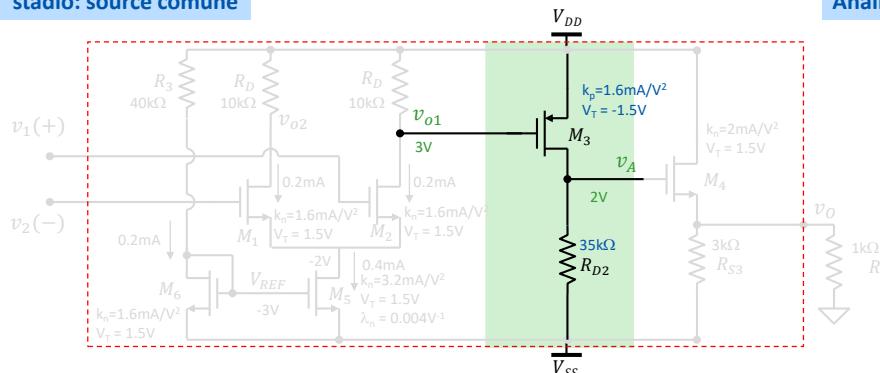
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

19

Amplificatore Differenziale

2° stadio: source comune

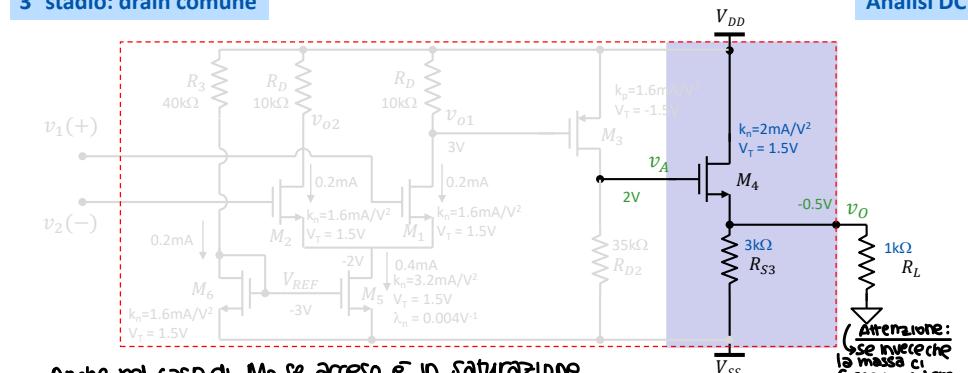
Analisi DC



Amplificatore Differenziale

3° stadio: drain comune

Analisi DC



Anche nel caso di M3, se acceso è in saturazione

$$I_{DS4} = \frac{k_n}{2} (V_{GS4} - V_{TN})^2 = \frac{V_O - V_{SS}}{R_{S3}} + \frac{V_O}{R_L} \quad \rightarrow \quad \frac{k_n}{2} (V_A - V_O - V_{TN})^2 = \frac{V_O - V_{SS}}{R_{S3}} + \frac{V_O}{R_L}$$

Equazione di secondo grado in V_O
 $V_O = 2.83V \rightarrow V_{GS4} = V_A - V_O = -0.83V < V_{TN}$ Non accettabile
 $V_O = -0.5V \rightarrow V_{GS4} = 2.5V > V_{TN}$ OK $\rightarrow I_{DS4} = 1mA$

A questo punto otteniamo l'analisi completa della polarizzazione in DC

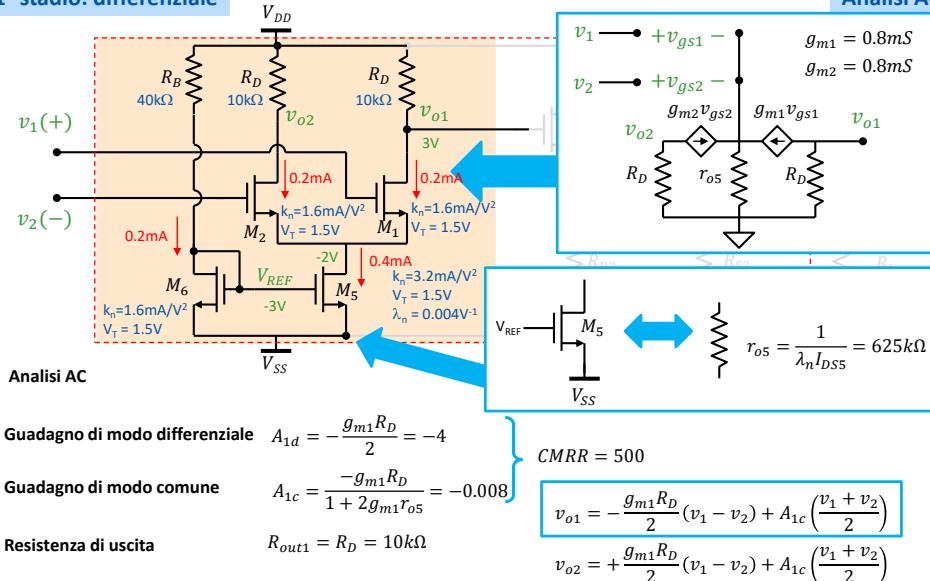
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

22

Amplificatore Differenziale

1° stadio: differenziale

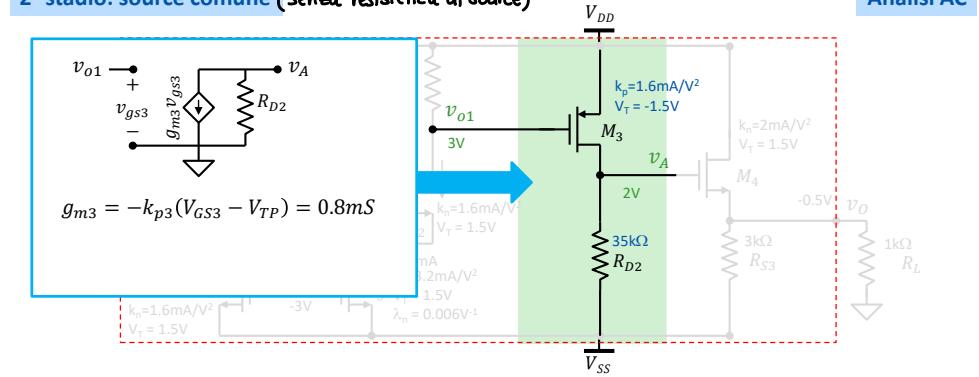


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Analisi AC

Amplificatore Differenziale

2° stadio: source comune (senza resistenza al source)



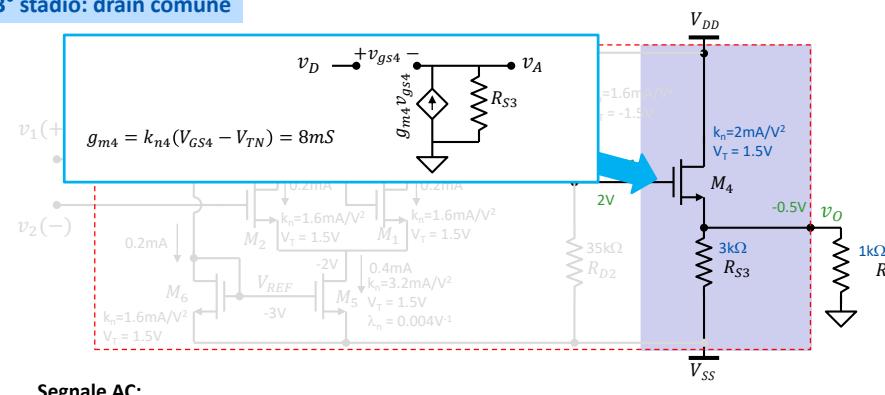
23

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

24

Amplificatore Differenziale

3° stadio: drain comune



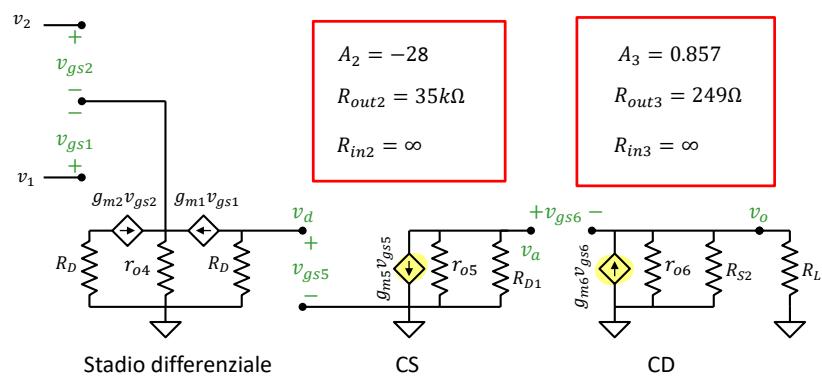
$R_{in3} = \infty$

Nessun effetto di carico sullo stadio a source comune, sebbene lo stadio CS abbia resistenza di uscita molto elevata

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Amplificatore Differenziale

Modello ai piccoli segnali



$$A_{1d} = -4 \text{ (all'uscita invertente)}$$

$$A_{1c} = 0.008$$

$$R_{out1} = 10k\Omega$$

$$R_{in1} = \infty$$

In realtà r_{o5} e r_{o6} sono infinite, in quanto il λ non è indicato nei dati

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

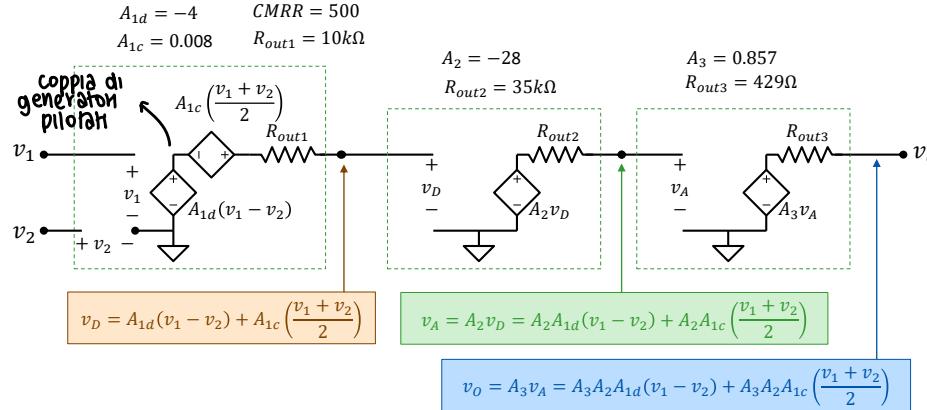
25

26

Amplificatore Differenziale

Sintesi segnale AC

→ Schema a DOPPIO BIPOLo equivalente



Guadagno (complessivo di modo differenziale)

$$Ad = A_3 A_2 A_{1d} = 96 \rightarrow \text{non ci sono gli effetti di catadio perché in questo esempio sono ideal! (verranno volgono 1)}$$

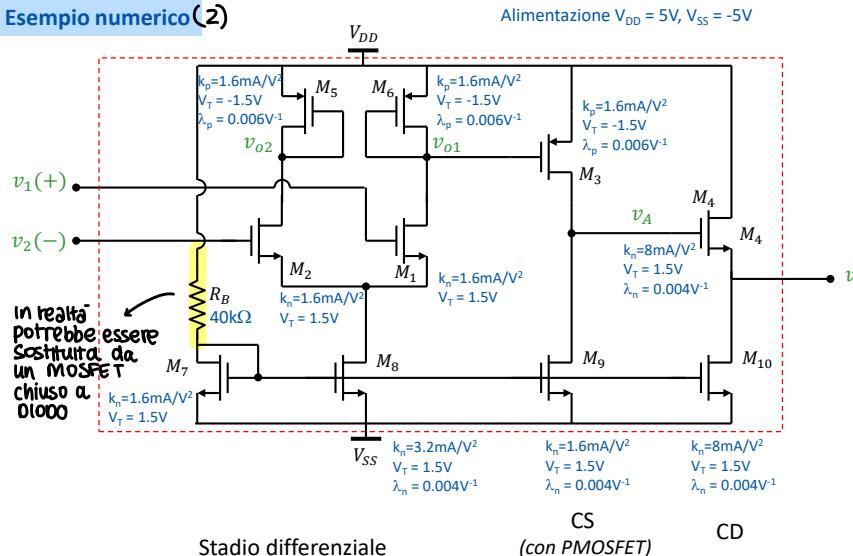
Guadagno (complessivo di modo comune)

$$Ac = A_3 A_2 A_{1c} = 0.192$$

$$CMRR = \left| \frac{A_3 A_2 A_{1d}}{A_3 A_2 A_{1c}} \right| = \left| \frac{A_{1d}}{A_{1c}} \right| = 500$$

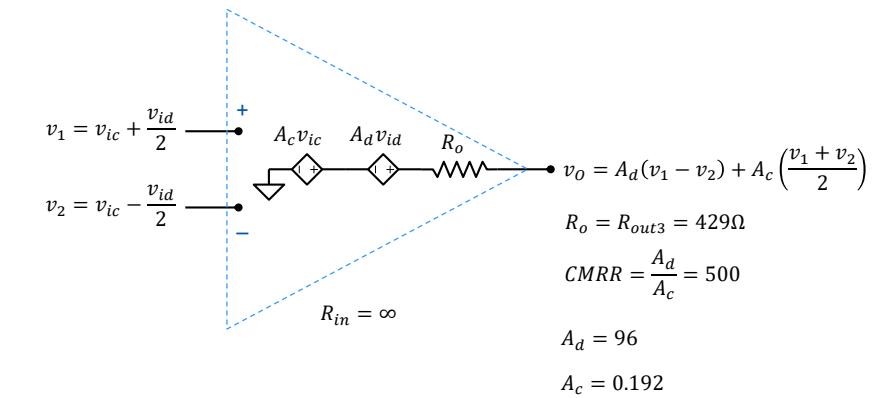
AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE con (quasi) solo MOSFET - POLARIZZAZIONE IN CORRENTE

Esempio numerico (2)



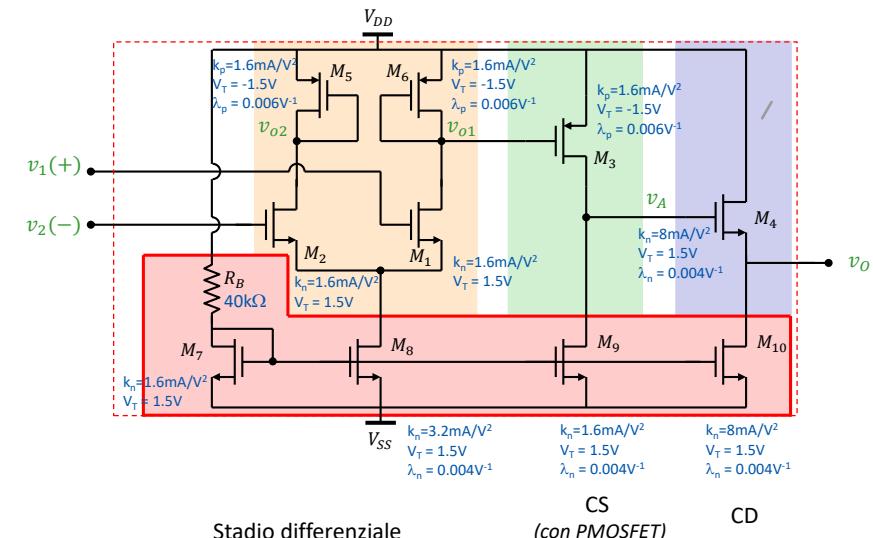
Amplificatore Differenziale

Modello circuitale equivalente



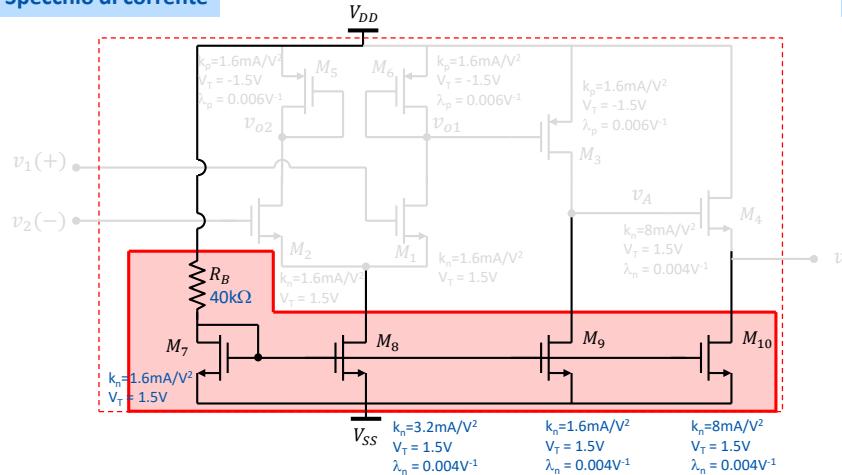
$$v_O = A_d(v_1 - v_2) + A_c\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)$$

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET



Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

Specchio di corrente



$$\text{Polarizzazione di } M_7 \quad I_{DS7} = \frac{k_n}{2} (V_{GS7} - V_{TN})^2$$

$$V_{DD} - V_{SS} = V_{GS7} + R_B I_{DS7} = V_{GS7} + R_B \frac{k_n}{2} (V_{GS7} - V_{TN})^2$$

$$I_{DS7} = 0.2mA$$

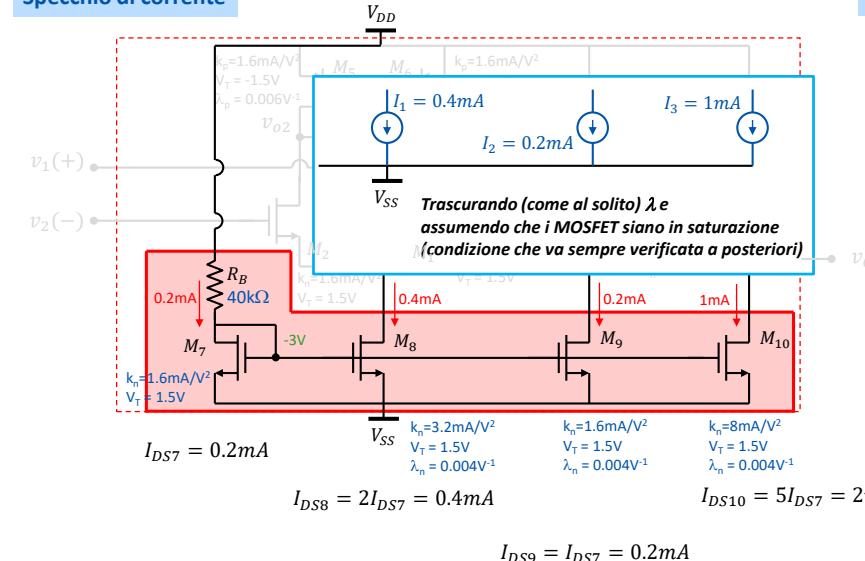
$$V_{GS7} = 2V$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

33

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

Specchio di corrente



$$I_{DS7} = 0.2mA$$

$$I_{DS8} = 2I_{DS7} = 0.4mA$$

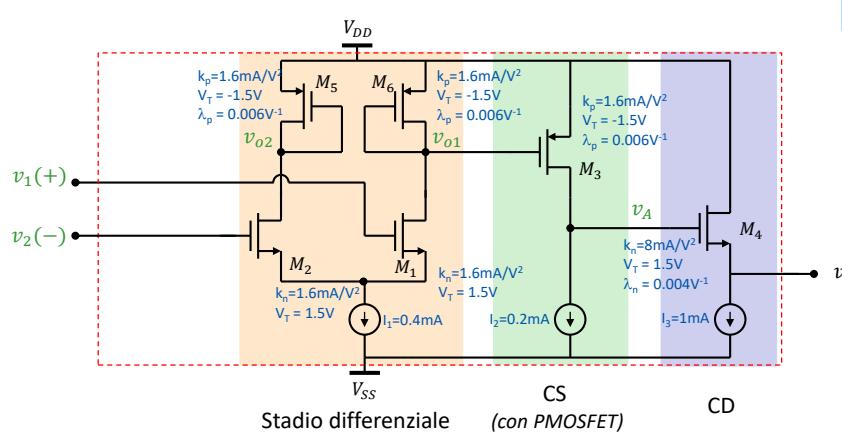
$$I_{DS10} = 5I_{DS7} = 2mA$$

$$I_{DS9} = I_{DS7} = 0.2mA$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

34

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

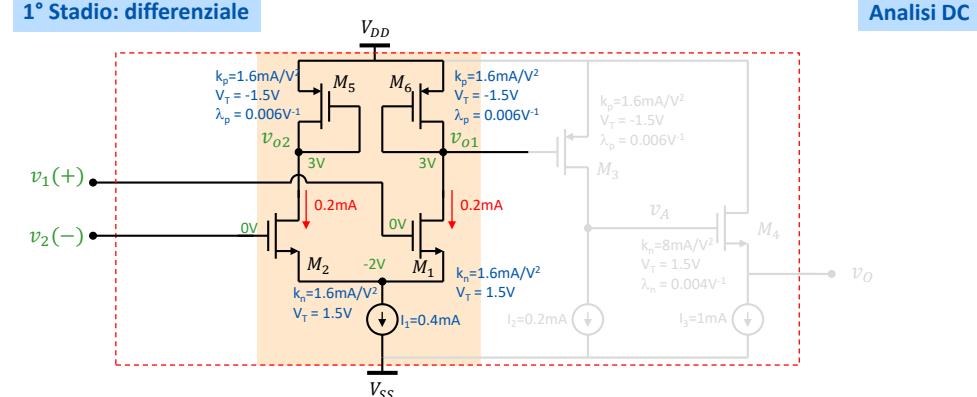


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

35

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

1° Stadio: differenziale



Polarizzazione DC:

$$I_{DS1} = I_{DS2} = I_{DS5} = I_{DS6} = \frac{I_1}{2} = 0.2mA$$

$$V_{GS5} = V_{GS6} = V_{TP} - \sqrt{\frac{2I_{DS5}}{k_{p5}}} = -2V$$

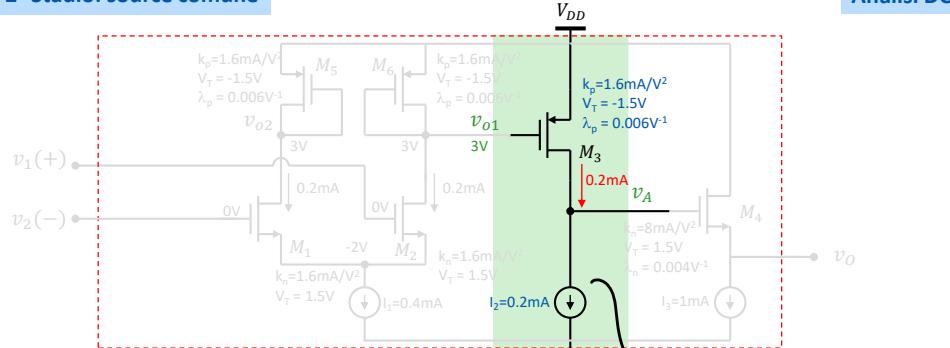
$$V_{GS1} = V_{GS2} = V_{TN} - \sqrt{\frac{2I_{DS1}}{k_{n1}}} = 2V$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

36

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

2° Stadio: source comune



Polarizzazione DC:

$$I_{DS3} = I_2 = 0.2mA$$

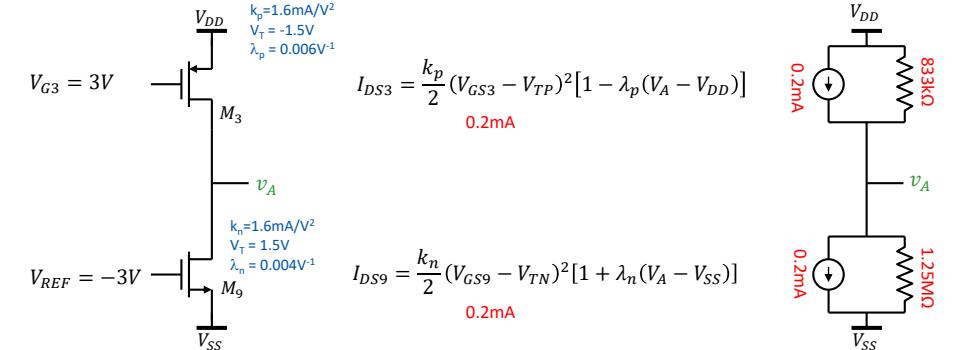
$$V_{GS3} = V_{TP} - \sqrt{\frac{2I_{DS3}}{k_{p3}}} = -2V$$

Per calcolare v_A è necessario includere la modulazione della lunghezza di canale!
Ciò è possibile SE E SOLO SE hanno la stessa corrente!

Analisi DC

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

2° Stadio: source comune



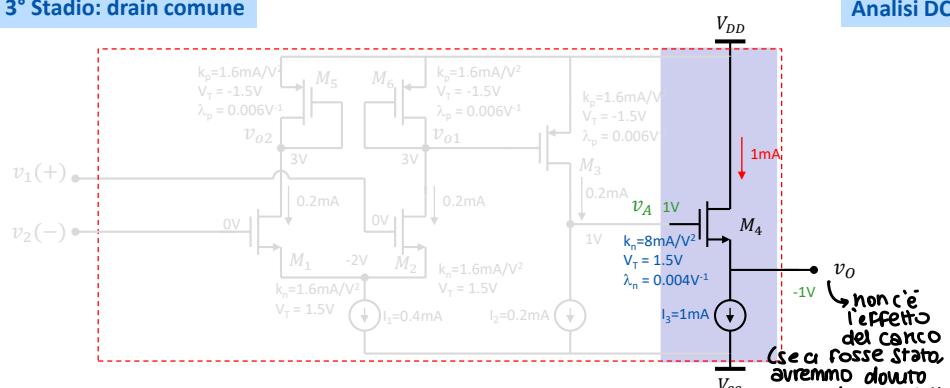
$$I_{DS3} = I_{DS9} \rightarrow -\lambda_p(V_A - V_{DD}) = \lambda_n(V_A - V_{SS})$$

$$-\lambda_p V_A - \lambda_n V_A = -\lambda_n V_{SS} - \lambda_p V_{DD}$$

$$V_A = \frac{\lambda_n V_{SS} + \lambda_p V_{DD}}{\lambda_n + \lambda_p} = 1V$$

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

3° Stadio: drain comune



Polarizzazione DC:

$$I_{DS4} = I_3 = 1mA$$

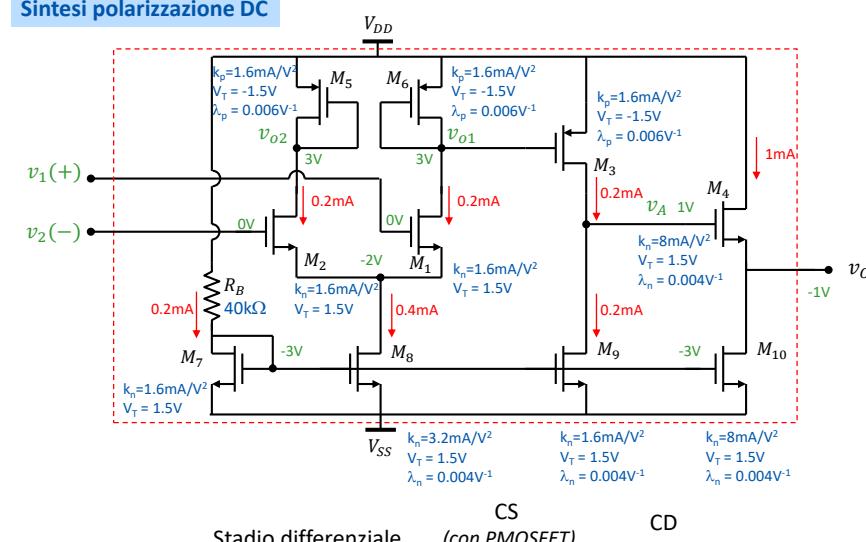
$$V_{GS4} = V_{TP4} - \sqrt{\frac{2I_{DS4}}{k_{n4}}} = 2V$$

$$V_O = V_A - V_{GS4} = -1V$$

Analisi DC

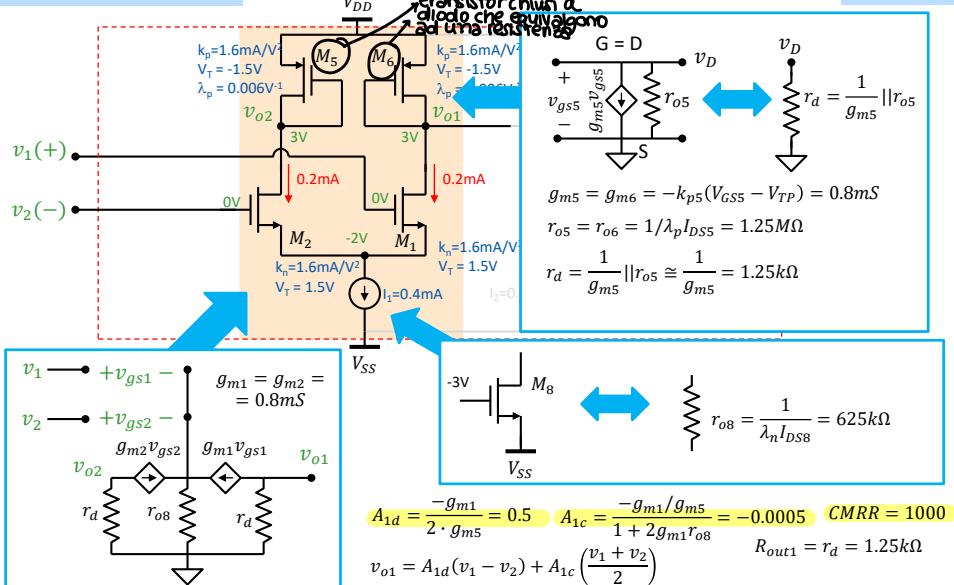
Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

Sintesi polarizzazione DC



Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

1° Stadio: differenziale

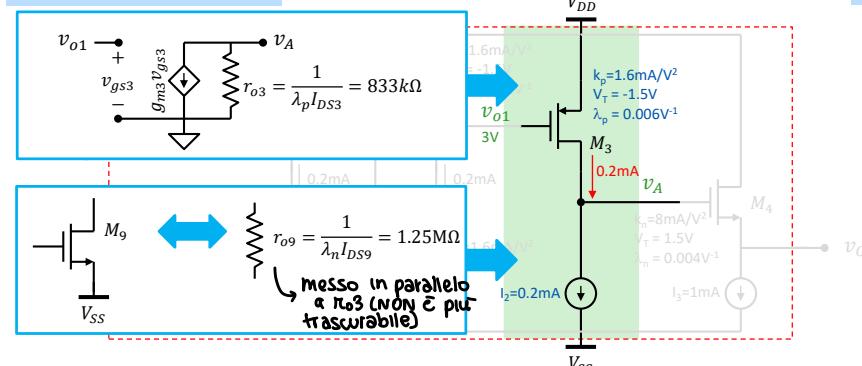


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Analisi AC

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

2° Stadio: source comune

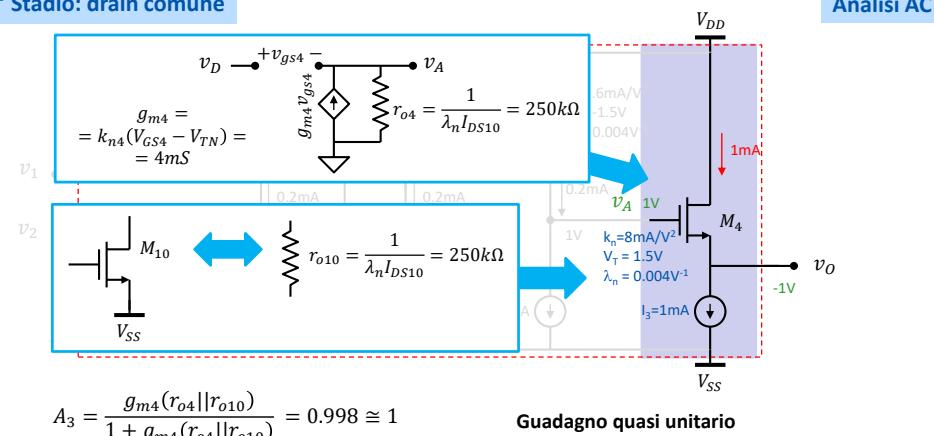


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Analisi AC

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

3° Stadio: drain comune

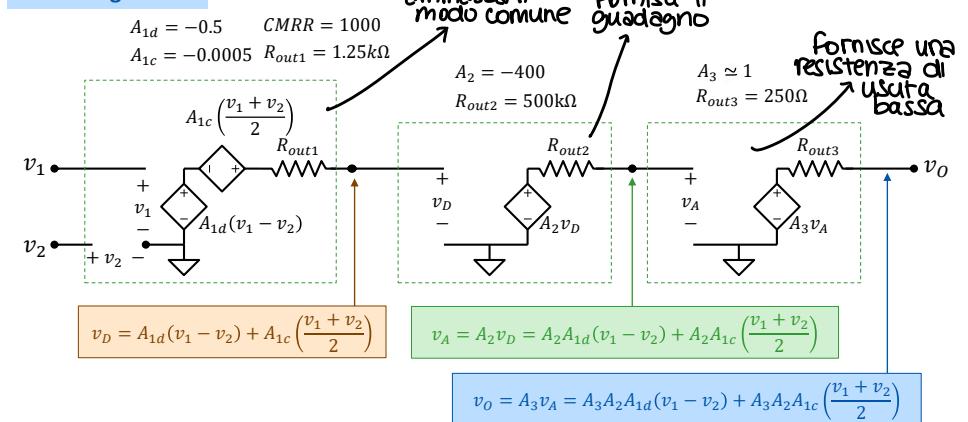


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

43

Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

Sintesi segnale AC

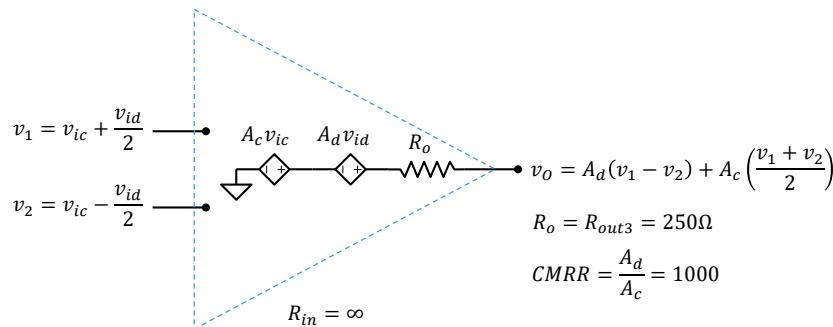


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

44

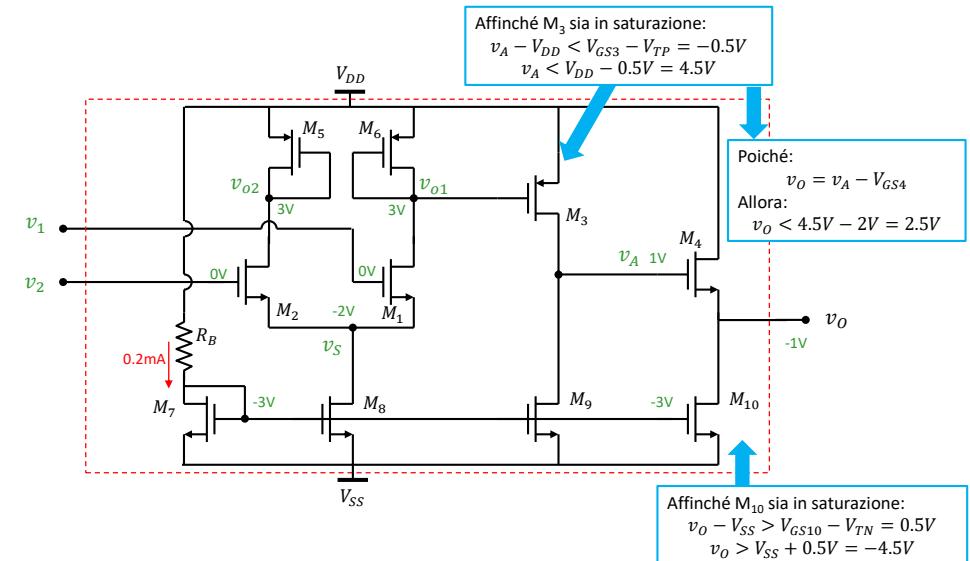
Amplificatore differenziale con (quasi) solo MOSFET

Modello circuitale equivalente



$$v_o = A_d(v_1 - v_2) + A_c \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right)$$

Limiti alla tensione di uscita



Limiti alla tensione di uscita (supponiamo che in questo range l'andamento sia LINEARE)

(tralasciamo il modo comune)
dato che è molto piccolo

$$v_o = V_o + v_o = v_{o,DC} + A_d \cdot v_{id}$$

$$\Delta v_{id,MAX} = \frac{\Delta v_{o,MAX}}{A_d} = \frac{3.5V}{200} = 17.5mV$$

Questo ragionamento
è tutto A VUOTO

$$\Delta v_{o,MIN} = -4.5V - (-1V) = -3.5V$$

$$v_{o,MIN} = -4.5V$$

$$\Delta v_{id,MIN} = \frac{\Delta v_{o,MIN}}{A_d} = \frac{-3.5V}{200} = -17.5mV$$

$$\Delta v_{o,MAX} = 2.5V - (-1V) = 3.5V$$

$$v_{id} = v_1 - v_2$$

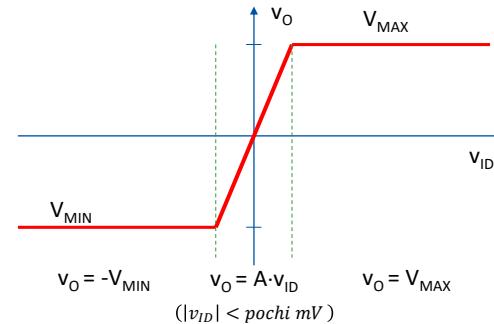
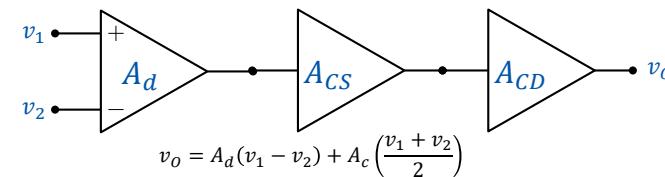
$$v_{o,DC} = -1V$$

Attenzione:
(sempre trascurando il modo comune)

$$v_{id} = -\frac{v_{o,DC}}{A_d} = 5mV$$

(questa è una non idealità che approfondiremo)

Transcaratteristica dell'amplificatore differenziale



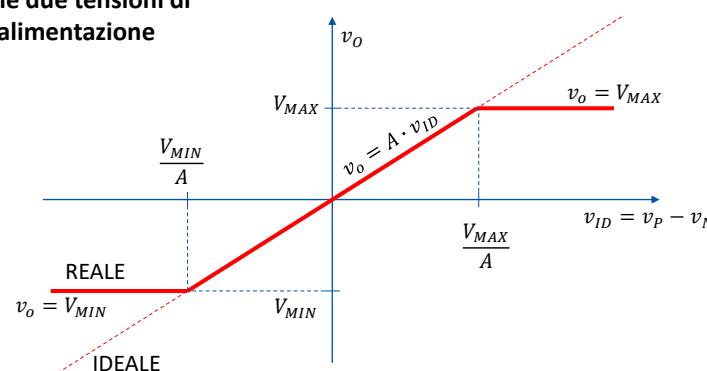
L'amplificatore operazionale ideale

Jaeger 6°Ed.: Cap. 13 p.613-629

- L'amplificatore e l'amplificatore differenziale
- Amplificatore operazionale (AO)
- Sistemi di amplificatori e retroazione
- Circuiti elementari con AO ideali

Tensione di alimentazione e segnale di uscita

Il segnale di uscita deve essere
sempre strettamente compreso
tra le due tensioni di
alimentazione



Se l'amplificatore è alimentato
tra V_{SS} e V_{DD} :
 $V_{SS} < V_{MIN} < v_o < V_{MAX} < V_{DD}$

Definizione di Amplificatore Differenziale

■ L'amplificatore differenziale è un dispositivo con due ingressi e una uscita il cui valore dipende dalla differenza di potenziale degli ingressi.

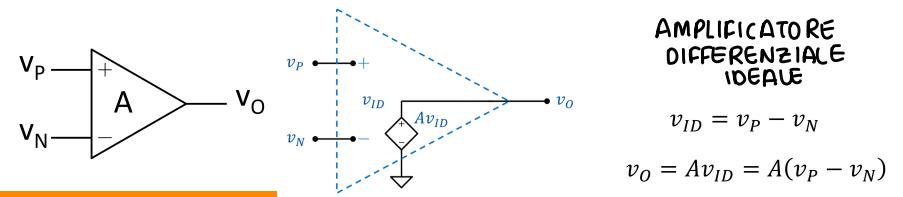
- ◆ Il morsetto indicato dal segno + a cui è applicata la tensione v_p è detto **ingresso non invertente**.
- ◆ Il morsetto indicato dal segno - a cui è applicata la tensione v_n è detto **ingresso invertente**.
- ◆ Definiamo **tensione differenziale di ingresso** v_{ID} la differenza tra v_p e v_n

$$v_{ID} = v_p - v_n$$

■ L'**uscita** dell'amplificatore si trova alla tensione v_0 data da:

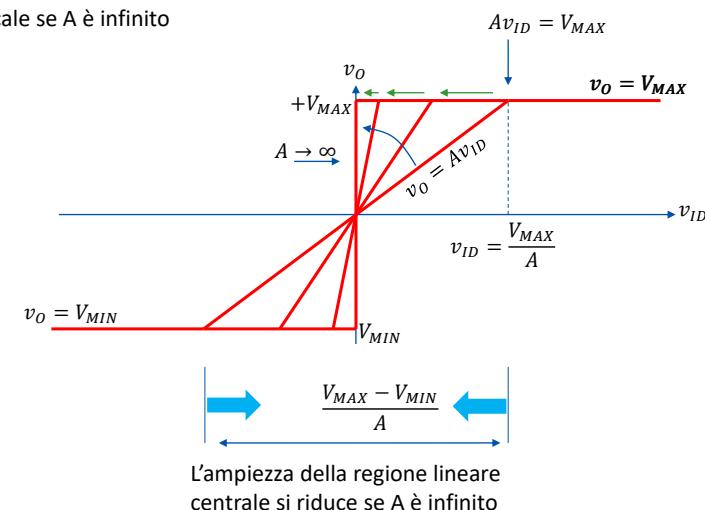
$$v_0 = A \cdot (v_p - v_n)$$

■ A è l'amplificazione o **guadagno**

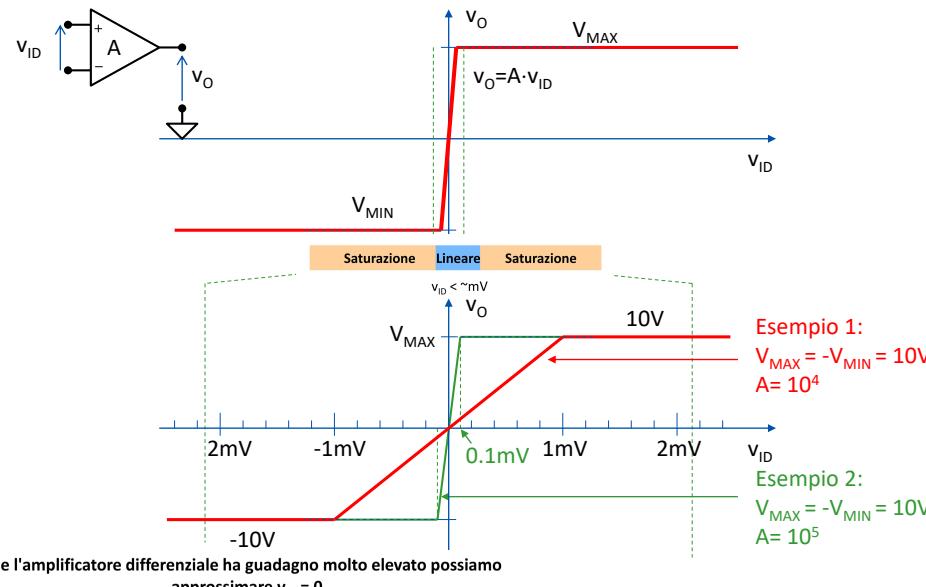


Amplificatore differenziale ad alto guadagno

La pendenza della parte
centrale aumenta e diventa
verticale se A è infinito

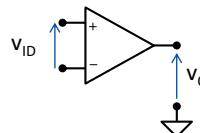


Amplificatore differenziale ad alto guadagno



6

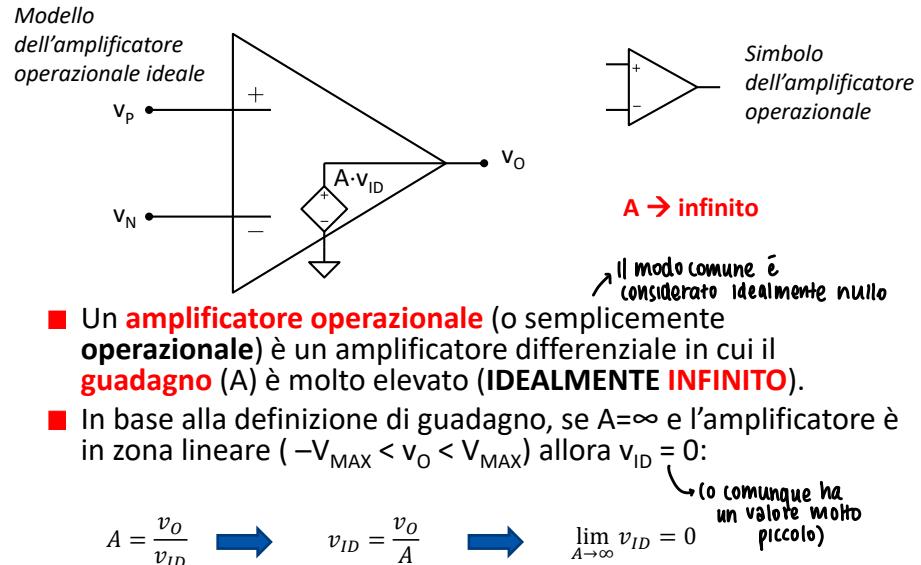
Cortocircuito virtuale



- Dato un operazionale IDEALE (con $A \gg 1$, idealmente ∞). Se opera in zona lineare, allora $v_{ID} \approx 0$.
- Poiché $v_{ID} = v_P - v_N$, allora $v_P = v_N$. → due nodi allo stesso potenziale è come se fossero cortocircuitati
- Concetto di cortocircuito virtuale:**
 - I terminali di ingresso hanno lo stesso potenziale, anche se non c'è un collegamento diretto tra i nodi.
 - Poiché la resistenza di ingresso è infinita, non circola corrente tra i due terminali.
 - È come se fossero cortocircuitati, ma senza passaggio di corrente (da qui l'aggettivo **virtuale**)

10

Amplificatore operazionale (AO) IDEALE

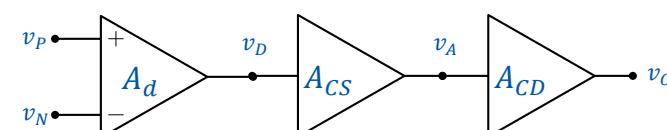


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

9

Struttura di un amplificatore operazionale

- Un AO è composto principalmente da tre stadi di amplificazione:
 - Stadio differenziale con guadagno A_d : ha lo scopo di ottenere un segnale proporzionale alla differenza tra v_P e v_N .
 - Alto CMRR
 - Guadagno $A_d = -g_m r_o / 2$, alto ma non preciso poiché dipende da parametri del MOSFET difficili da controllare con il processo di fabbricazione
 - Stadio a source comune, con guadagno A_{CS} . → **senza resistenza al source (guadagno non preciso, ma grande)**
 - $A_{CS} = g_m r_o$, è alto ma non preciso
 - Però la resistenza di uscita è alta
 - Stadio a drain comune, con guadagno A_{CD} circa unitario ma bassa resistenza di uscita ($1/g_m$). → **per avvicinarsi alla condizione di idealità**
- Il guadagno complessivo è $A_d A_{CS} A_{CD}$ (alto ma non preciso).
- La resistenza di ingresso è quella dello stadio differenziale (gate dei MOSFET), quindi molto alta
- La resistenza di uscita è data dal CD, quindi bassa



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

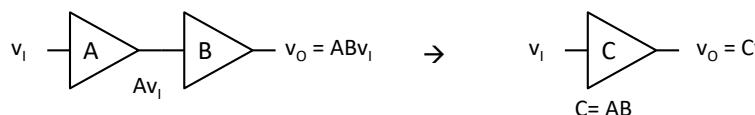
11

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

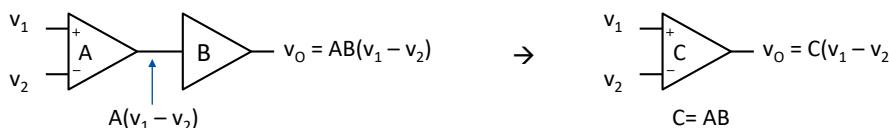
Connessione in serie

SISTEMI DI AMPLIFICATORI E RETROAZIONE

Esempio: 2 amplificatori a ingresso singolo in cascata

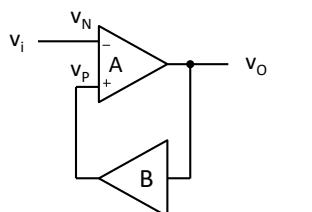


Esempio: amplificatore differenziale e singolo in cascata



- Sistemi di amplificatori **ideali** ($R_{IN} = \infty$ e $R_{OUT} = 0$) connessi in **cascata** (o in **serie**): l'uscita del primo è l'ingresso del secondo.
- Il guadagno complessivo si ricava moltiplicando i guadagni dei due amplificatori.

Amplificatore differenziale in retroazione positiva



$$\begin{aligned} v_p &= B \cdot v_o & v_N &= v_i \\ v_o &= A \cdot (v_p - v_N) & \text{Sostituiamo} \\ v_o &= A \cdot (B \cdot v_o - v_i) = AB \cdot v_o - A \cdot v_i & \\ && \text{Risolviamo in } v_o \\ v_o &= \frac{-A}{1 - AB} \cdot v_i \end{aligned}$$

Definiamo il guadagno di tensione del sistema:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-A}{1 - AB}$$

Connessione in retroazione

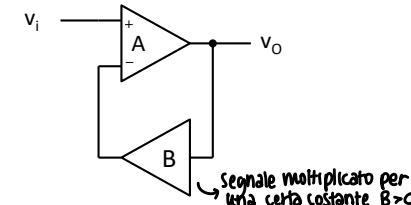
■ Due sistemi si dicono connessi in retroazione quando l'uscita del primo (A) è l'ingresso del secondo, mentre l'uscita del secondo (B) si somma o si sottrae ad un ingresso del primo sistema

- ◆ nel caso in cui A sia un amplificatore differenziale ciò significa che l'uscita del secondo è collegata ad uno dei due terminali di ingresso.

■ Si hanno due possibili schemi di connessione:

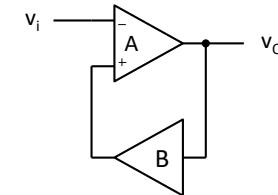
Retroazione negativa

L'uscita del secondo entra nell'ingresso invertente

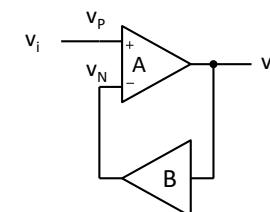


Retroazione positiva

L'uscita del secondo entra nell'ingresso non invertente



Amplificatore differenziale in retroazione negativa



$$\begin{aligned} v_p &= v_i & v_N &= B \cdot v_o \\ v_o &= A \cdot (v_i - B \cdot v_o) = A \cdot v_i - AB \cdot v_o & \text{Sostituiamo} \\ && \text{Risolviamo in } v_o \\ v_o &= \frac{A}{1 + AB} \cdot v_i \end{aligned}$$

Definiamo il guadagno di tensione del sistema:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + AB}$$

Alcune definizioni

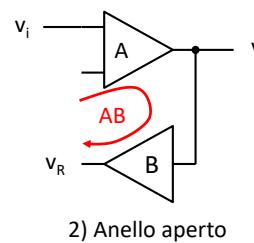
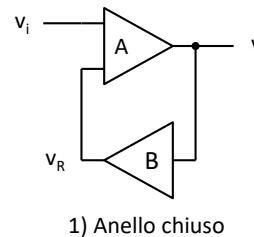
- Amplificatore differenziale è detto **rete di andata** o **percorso diretto**.
 - ◆ Il suo guadagno A è detto **funzione di trasferimento del percorso diretto**.
- L'amplificatore B è detto **rete (o percorso) di retroazione**, e ha il compito di riportare il segnale di uscita (moltiplicato per B) all'ingresso del sistema.
 - ◆ Il suo guadagno B è detto **funzione di trasferimento del percorso di retroazione**.
- Il sistema in configurazione di retroazione (figura 1) si definisce "**ad anello chiuso**"
- Rimuovendo il collegamento tra il nodo v_R e l'ingresso di A (figura 2), il sistema si definisce "**ad anello aperto**"
- Il prodotto A·B si definisce **guadagno di anello aperto** per distinguerlo dal guadagno A_v che viene detto anche **guadagno ad anello chiuso**:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + AB}$$

Retroazione negativa

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-A}{1 - AB}$$

Retroazione positiva



Comportamento di un sistema a retroazione negativa

Assumiamo B > 0

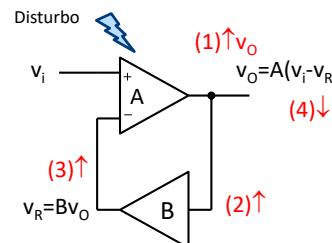
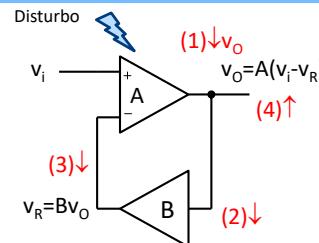
- Se v_i un disturbo fa **diminuire** v_o (1):
 - ◆ L'ingresso di B diminuisce (2)
 - ◆ v_R diminuisce con guadagno B (3)
 - ◆ essendo v_R il terminale non invertente v_o **aumenta** (4) contrastando il disturbo (1)

Il ciclo si ripete all'infinito e l'amplificatore converge a un valore stabile.

- Se v_i un disturbo fa **aumentare** v_o (1):
 - ◆ L'ingresso di B aumenta (2)
 - ◆ v_R aumenta con guadagno B (3)
 - ◆ v_o **diminuisce** (4) contrastando il disturbo (1)

Il ciclo si ripete all'infinito e l'amplificatore converge a un valore stabile.

- Il sistema con retroazione negativa è **stabile**
 - ◆ L'effetto della retroazione si somma con stesso opposto in uscita.
 - ◆ L'amplificatore tende a mantenere un v_o a un valore stabile



Comportamento di un sistema a retroazione positiva

Assumiamo B > 0

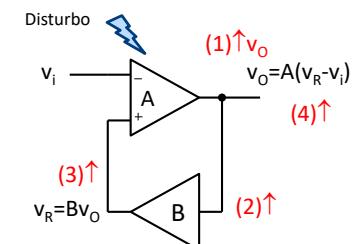
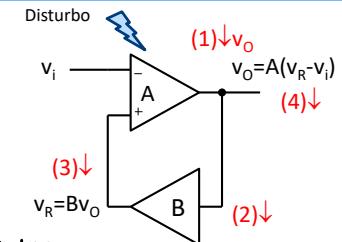
- Se un disturbo fa **diminuire** v_o (1):
 - ◆ L'ingresso di B diminuisce (2)
 - ◆ v_R diminuisce con guadagno B (3)
 - ◆ v_o **diminuisce** ulteriormente (4), poiché v_R è il terminale non invertente

Il ciclo si ripete all'infinito e l'amplificatore **satura** a V_{MIN} → se il disturbo dura per un tempo **sufficientemente lungo**

- Se un disturbo fa **aumentare** (1):
 - ◆ L'ingresso di B aumenta (2)
 - ◆ v_R aumenta con guadagno B (3)
 - ◆ v_o **aumenta** ulteriormente (4)

Il ciclo si ripete all'infinito e l'amplificatore **satura** a V_{MAX} .

- Il sistema con retroazione positiva **non è stabile**
 - ◆ L'effetto della retroazione si somma con lo stesso segno in uscita.
 - ◆ L'amplificatore va in saturazione a V_{MAX} o V_{MIN} .



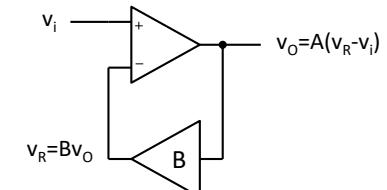
Sistemi in retroazione negativa con operazionali

Un operazionale ha $A \gg 1$ (idealemente infinito). Quindi:

- Il guadagno ad anello aperto è elevatissimo (idealemente infinito)
- Il guadagno ad anello chiuso

$$A_v = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{1 + AB} = \frac{1}{B}$$

non dipende da A!!!



$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + AB} = \frac{1}{B}$$

$A = \text{infinito}$

- **IMPORTANTE:** anche se A non è noto con precisione, il guadagno ad anello chiuso è noto, purché:
 - ◆ B sia noto con precisione
 - ◆ A sia grande.

Sistemi in retroazione negativa con operazionali

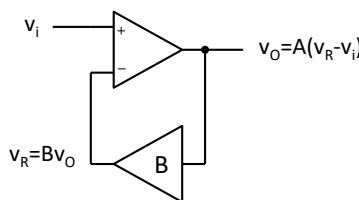
Calcoliamo la tensione differenziale di ingresso

$$v_{ID} = v_P - v_N = v_i - v_R$$

$$= v_i - Bv_O = v_i - \frac{BA}{1+AB} v_i$$

$$v_{ID} = \frac{v_i}{1+AB}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} v_{ID} = 0$$



$$A_v = \frac{v_O}{v_i} = \frac{A}{1+AB}$$

vale se A è molto grande ed il valore dell'ingresso v_i è entro il range massimo e minimo

Principio del cortocircuito virtuale: La tensione differenziale di ingresso in un operazionale in retroazione negativa è inversamente proporzionale al guadagno e tende a 0 in un AO ideale ($A=\infty$)

Configurazione non invertente

Guadagno di tensione

AO IN CONFIGURAZIONE NON INVERTENTE
Supponiamo A grande ma finito

Tensioni di ingresso all'AO

$$v_P = v_S$$

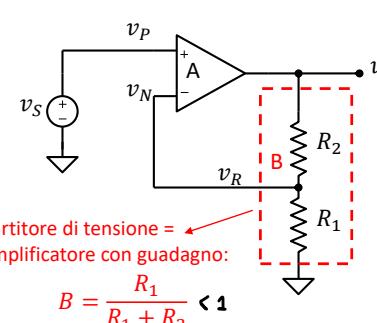
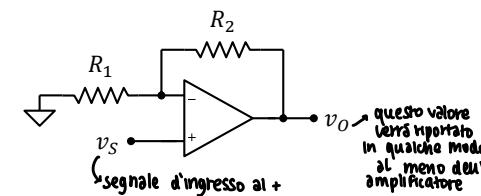
$$v_N = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_O$$

Tensioni di uscita all'AO

$$v_O = A \cdot \left(v_S - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_O \right)$$

$$v_O \left(1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = A \cdot v_S$$

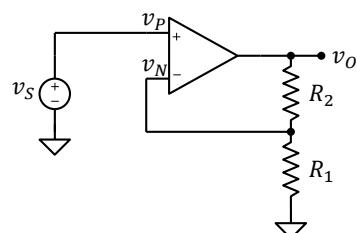
$$v_O = \frac{A}{\left(1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)} \cdot v_S$$



$$v_O = \frac{A}{(1+AB)} \cdot v_S$$

Configurazione non invertente

Tensione differenziale di ingresso



$$v_{ID} = v_P - v_N = v_S - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_O$$

$$v_{ID} = v_S - \frac{R_1}{R_1 + R_2} A v_{ID}$$

$$v_{ID} \left(1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A \right) = v_S$$

$$\text{Guadagno di anello aperto: } A \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_{ID} = \frac{v_S}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A}$$

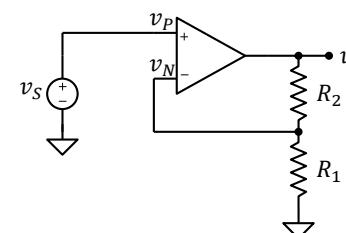
Guadagno del sistema in retroazione:

$$A_v = \frac{v_O}{v_S} = \frac{A}{1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Tensione differenziale di ingresso

$$v_{ID} = \frac{v_S}{1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Amplificatore operazionale con guadagno infinito



Tensione differenziale di ingresso:

$$v_{ID} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{v_S}{1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} A} = 0$$

Guadagno di anello aperto:

$$A \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \infty$$

Guadagno di anello chiuso:

$$A_v = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{\left(1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

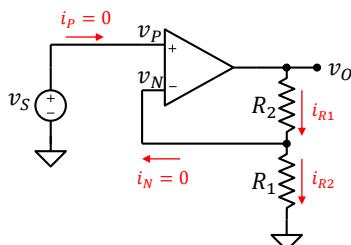
Il guadagno dipende solo dal rapporto di R_2 e R_1 , sarà noto con la precisione con cui conosciamo R_1 e R_2 . Non dai parametri del transistor

I terminali di ingresso hanno lo stesso potenziale, ma non sono collegati elettricamente l'uno all'altro. Come se fossero cortocircuitati, ma non assorbono corrente.

Questa condizione è il cortocircuito virtuale

Configurazione non invertente

Lo stesso risultato si raggiunge a partire dal modello elettronico dell'amplificatore operazionale e risolvendo la corrispondente rete elettrica, applicando il principio del cortocircuito virtuale.



Dal principio del cortocircuito virtuale:

$$v_N = v_P = v_S$$

Legge di kirchhoff al nodo v_N ($i_{R1} = i_{R2}$):

$$\frac{v_O - v_S}{R_2} = \frac{v_S - 0}{R_1}$$

$$v_O - v_S = v_S \frac{R_2}{R_1}$$

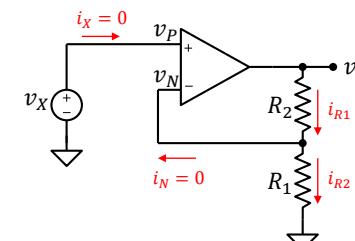
$$v_O = v_S \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- Il circuito si comporta come un amplificatore di tensione con guadagno di tensione A_v .
- Il guadagno dipende solo dal rapporto delle resistenze R_2 e R_1 .
- A_v è sempre maggiore o uguale a 1
- Il segnale di uscita ha lo stesso segno di quello di ingresso.
- Da ciò il nome di **configurazione non invertente**

Configurazione non invertente

Resistenza di ingresso



- La corrente i_X è nulla poiché l'ingresso dell'AO non assorbe corrente:

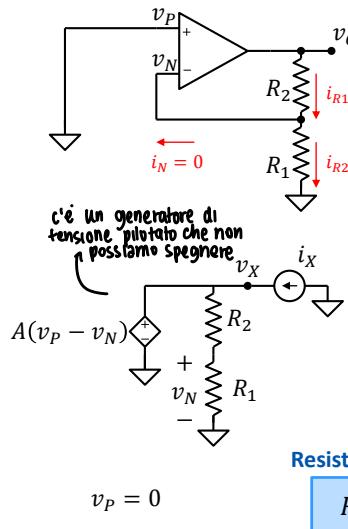
$$R_{IN} = \frac{v_X}{i_X} = \infty$$

Resistenza di ingresso

$$R_{IN} = \infty$$

Configurazione non invertente

Resistenza di ingresso e di uscita



- Non è possibile imporre tensione all'uscita: imponiamo i_X e calcoliamo v_X

$$v_N = v_X \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

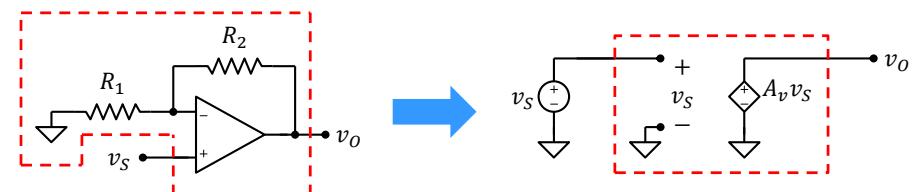
$$v_X = -Av_N = -Av_X \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\text{Soluzione: } v_X = 0$$

$$R_{OUT} = \frac{v_X}{i_X}$$

$$R_{OUT} = 0$$

Configurazione non invertente: in sintesi



AO ideale in configurazione non invertente

Guadagno ad anello chiuso

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Resistenza di uscita

$$0$$

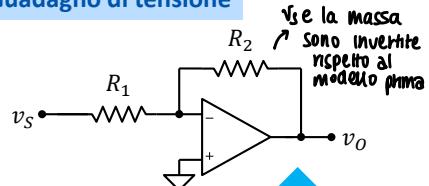
Resistenza di ingresso

$$\infty$$

- Il guadagno è sempre positivo e maggiore o uguale a 1.
- Con questa configurazione elementare non è possibile realizzare amplificatori con guadagno < 1

Configurazione invertente

Guadagno di tensione



Ridisegniamo il circuito in questo modo

$$1 \quad v_N = v_S + \frac{R_1}{R_1 + R_2} (v_O - v_S)$$

Definiamo: $B = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$$v_N = B v_O - (B - 1) v_S$$

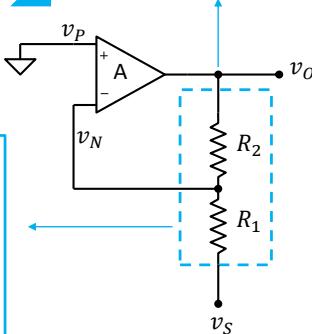
AO IN CONFIGURAZIONE INVERTENTE

2 Supponiamo A grande ma finito

$$v_O = -Av_N = -ABv_O + A(B - 1)v_S$$

$$v_O + ABv_O = A(B - 1)v_S$$

$$A_v = \frac{A(B - 1)}{1 + AB}$$



3 Se A è infinito

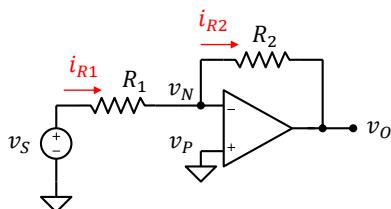
$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A(B - 1)}{1 + AB} = \frac{B - 1}{B}$$

$$= \frac{-R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\text{Guadagno: } A_v = -\frac{R_2}{R_1}$$

Configurazione invertente

Lo stesso risultato si raggiunge a partire dal modello elettrico dell'amplificatore operazionale e risolvendo la corrispondente rete elettrica, applicando il principio del cortocircuito virtuale.



Per il principio del cortocircuito virtuale:

$v_N = v_P = 0$ in questo caso si dice che n è a massa virtuale

Legge di kirchhoff al nodo v_N :

$$\frac{v_S - v_N}{R_1} = \frac{v_N - v_O}{R_2}$$

Risolviamo in v_O (mettendo $v_N = 0$):

$$v_O = -\frac{R_2}{R_1} v_S$$

Guadagno di tensione

$$A_v = \frac{v_O}{v_S} = -\frac{R_2}{R_1}$$

- Il circuito si comporta come un amplificatore di tensione con guadagno di tensione A_v
- Il guadagno dipende solo dal rapporto delle resistenze R_2 e R_1
- A_v è sempre negativo.
- Il segnale di uscita ha segno opposto a quello di ingresso. Da ciò il nome di **configurazione invertente**

Configurazione invertente

Tensione differenziale di ingresso

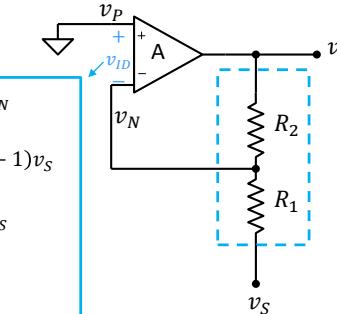
1 Supponiamo A grande ma finito

$$v_O = \frac{A(B - 1)}{1 + AB} v_S \quad B = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_N = B v_O - (B - 1) v_S$$

$$v_P = 0$$

Ridisegniamo il circuito in questo modo



2 $v_{ID} = v_P - v_N = -v_N$

$$= -B \frac{A(B - 1)}{1 + AB} v_S + (B - 1) v_S$$

$$= \left[1 - \frac{AB}{1 + AB} \right] (B - 1) v_S$$

$$v_{ID} = \frac{(B - 1) v_S}{1 + AB}$$

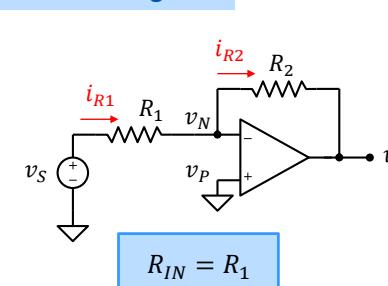
3 Se A è infinito

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(B - 1) v_S}{1 + AB} = 0$$

Si conferma il principio del cortocircuito virtuale

Configurazione invertente

Resistenza di ingresso



$$R_{IN} = R_1$$

■ Il nodo v_N è a 0 massa virtuale
(cortocircuito virtuale)

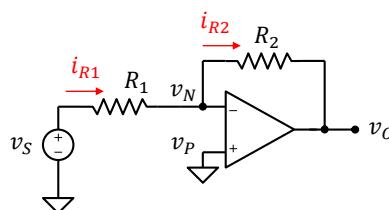
■ Il generatore v_S eroga una corrente:
 $i_S = \frac{v_S - v_N}{R_1} = \frac{v_S}{R_1}$

■ La resistenza di ingresso è:

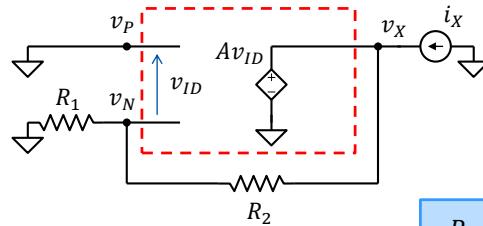
$$R_{IN} = \frac{v_S}{i_S} = R_1$$

Configurazione invertente

Resistenza di uscita



- Non è possibile imporre tensione all'uscita: imponiamo i_x e calcoliamo v_x



$$v_x = A v_{ID} = A(0 - v_N) = -A v_x \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Soluzione: $v_x = 0$

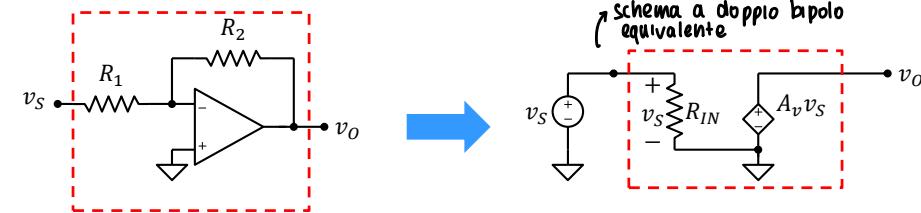
$$R_{OUT} = \frac{v_x}{i_x}$$

$$R_{OUT} = 0$$

Configurazione invertente vs non invertente

	invertente	non invertente
Schema circuitale		
Modello elettrico equivalente		
Guadagno di tensione	$A_v = -\frac{R_2}{R_1}$	$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$
Resistenza di ingresso	$R_{IN} = R_1$	$R_{IN} = \infty$
Resistenza di uscita	$R_{OUT} = 0$	$R_{OUT} = 0$

Configurazione non invertente: in sintesi



AO ideale in configurazione invertente

Guadagno ad anello chiuso

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1}$$

Resistenza di uscita

$$0$$

Resistenza di ingresso

$$R_{IN} = R_1$$

- Il guadagno è sempre negativo (<0)

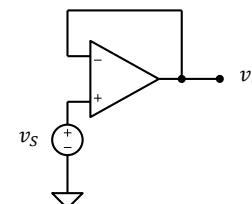
- La resistenza di ingresso non può essere bassa

Inseguitore di tensione

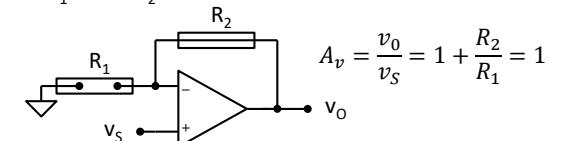
CIRCUITI ELEMENTARI CON AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

Per il principio del cortocircuito virtuale:

$$v_O = v_P = v_N$$



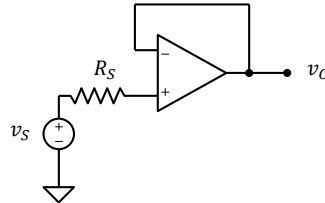
Equivalent alla configurazione non invertente con $R_1 = \infty$ e $R_2 = 0$



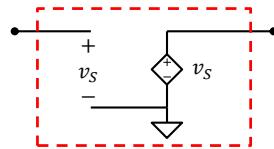
$$v_O = v_S \quad R_{IN} = \infty \quad R_{OUT} = 0$$

- La tensione di uscita coincide con quella di ingresso
- La resistenza di ingresso è elevatissima (idealmente infinita)
- La resistenza di uscita è idealmente nulla

Inseguitore di tensione

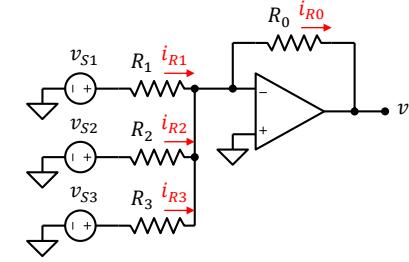


$$v_O = v_S \quad R_{IN} = \infty \quad R_{OUT} = 0$$



- Anche se il generatore di ingresso ha una resistenza serie molto grande, la corrente assorbita all'ingresso dell'AO è nulla
- La tensione al terminale non invertente rimane v_S

Sommatore invertente



$$i_{R0} = i_{R1} + i_{R2} + i_{R3} = \frac{v_{S1}}{R_1} + \frac{v_{S2}}{R_2} + \frac{v_{S3}}{R_3}$$

$$v_O = -R_0 i_{R0} = -\left(\frac{R_0}{R_1} v_{S1} + \frac{R_0}{R_2} v_{S2} + \frac{R_0}{R_3} v_{S3}\right)$$

Se $R_1=R_2=R_3$

$$v_O = -\frac{R_0}{R_1} (v_{S1} + v_{S2} + v_{S3})$$

Se $R_0=R_1=R_2=R_3$

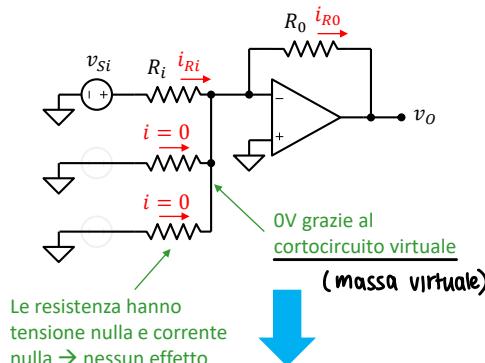
$$v_O = -(v_{S1} + v_{S2} + v_{S3})$$

- Il segnale di uscita è la somma pesata dei segnali di ingresso e cambiata di segno.
- I pesi sono definiti dal rapporto delle resistenze.
- Se tutte le resistenze sono uguali, allora v_O è la somma di tutti gli ingressi (cambiata di segno)

Sommatore non invertente

Sommatore invertente

Metodo alternativo: sovrapposizione degli effetti (valida se tutto è lineare)



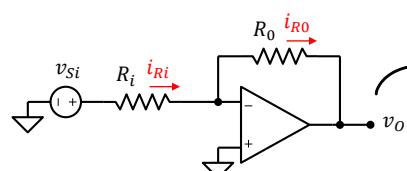
Accendiamo solo il generatore i-esimo:

Otteniamo la configurazione invertente:

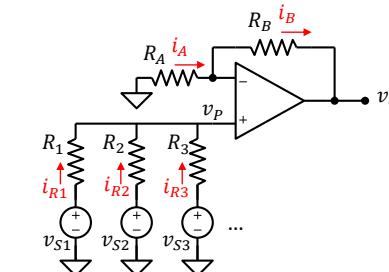
$$v_{Oi} = -\frac{R_0}{R_i} v_{Si}$$

Sommiamo gli effetti:

$$v_O = -\frac{R_0}{R_1} v_{S1} - \frac{R_0}{R_2} v_{S2} - \frac{R_0}{R_3} v_{S3}$$



Sommatore non invertente



$$\begin{aligned} v_O &= \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) v_P \\ \frac{v_P - v_1}{R_1} + \frac{v_P - v_2}{R_2} + \frac{v_P - v_3}{R_3} &= 0 \\ v_P &= \left(\frac{v_{S1}}{R_1} + \frac{v_{S2}}{R_2} + \frac{v_{S3}}{R_3}\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$$v_O = \frac{1 + \frac{R_B}{R_A}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \left(\frac{v_{S1}}{R_1} + \frac{v_{S2}}{R_2} + \frac{v_{S3}}{R_3}\right)$$

Se $R_1=R_2=R_3=R$

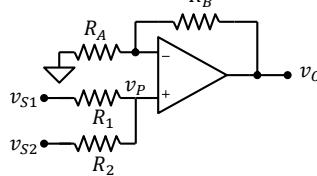
$$v_O = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \left(\frac{v_{S1} + v_{S2} + v_{S3}}{3}\right)$$

Se inoltre $R_B=2R_A$

$$v_O = v_{S1} + v_{S2} + v_{S3}$$

Sommatore non invertente

Metodo alternativo: sovrapposizione degli effetti



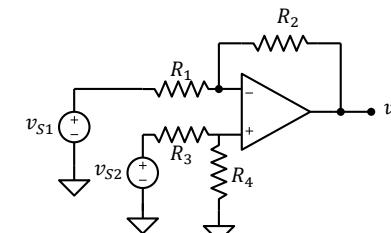
$$v_O = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{R_2 v_{S1} + R_1 v_{S2}}{R_1 + R_2}$$

$$v_O = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \left(\frac{v_{S1} + v_{S2}}{2}\right)$$

$$\text{Se } R_A = R_B \text{ e } R_1 = R_2$$

$$v_O = v_{S1} + v_{S2}$$

Configurazione differenziale o sottrattore



$$v_P = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{S2} \quad 1) \text{ Partitore di tensione}$$

$$v_N = v_P \quad 2) \text{ Cortocircuito virtuale}$$

$$\frac{v_N - v_{S1}}{R_1} = \frac{v_O - v_N}{R_2} \quad 3) \text{ Legge di kirchhoff}$$

$$(2) + (3) \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} v_P - \frac{R_2}{R_1} v_{S1} = v_O - v_P$$

Risolviamo il circuito usando:

- Il partitore di tensione
- Il concetto di cortocircuito virtuale
- La legge di kirchhoff

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_P - \frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

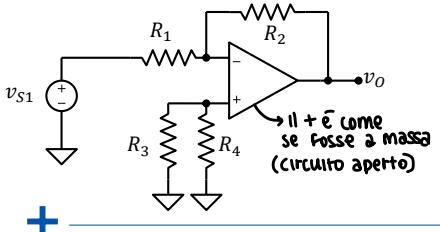
Sostituiamo v_P (da Eq.1)

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{S2} - \frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

Allo stesso risultato si arriva con la sovrapposizione degli effetti!

Configurazione differenziale o sottrattore

Metodo alternativo: sovrapposizione degli effetti

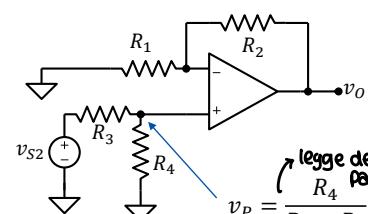


Solo il generatore v_{S1}

$v_P = 0$ Non passa corrente nelle resistenze. Quindi è come avere il terminale positivo direttamente a massa.

Troviamo l'AO in configurazione invertente

$$v_O = -\frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$



Solo il generatore v_{S2}

$v_P = \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{S2}$ Partitore di tensione. (non entra corrente nel terminale dell'AO)

Troviamo l'AO in configurazione non invertente

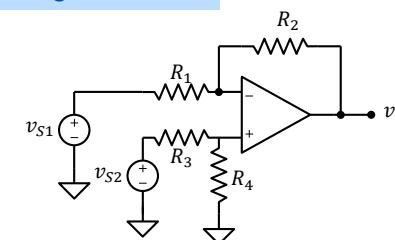
legge del partitore

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{S2}$$

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{S2} - \frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

Configurazione differenziale o sottrattore

Guadagno di tensione



$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3 + R_4} v_{S2} - \frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

Se $R_2/R_1 = R_4/R_3$

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\frac{R_4}{R_3}}{1 + \frac{R_4}{R_3}} v_{S2} - \frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

$$v_O = \frac{R_4}{R_3} v_{S2} - \frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

Guadagno differenziale:

$$v_O = \frac{R_2}{R_1} (v_{S2} - v_{S1}) > 0$$

$$\frac{v_O}{v_{S2} - v_{S1}} = \frac{R_2}{R_1}$$

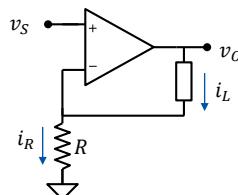
l'importante è che $R_1=R_2$ e $R_3=R_4$

$$v_O = v_{S2} - v_{S1}$$

Amplificatore di transconduttanza (g_m)

L'amplificatore operazionale può essere usato anche per rendere "ideale" un segnale

Per il principio del cortocircuito virtuale:

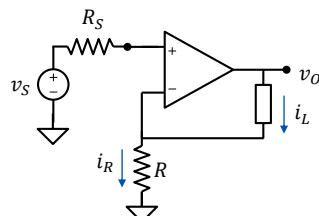


$$i_L = I_R = \frac{v_S}{R}$$

Guadagno di transconduttanza :

$$G_m = \frac{i_L}{v_S} = \frac{1}{R}$$

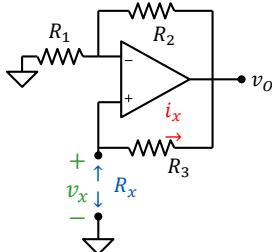
corrente che passa per il carico



Se il generatore di ingresso fosse reale, la corrente attraverso la resistenza R_S sarebbe nulla, poiché l'AO ha resistenza di ingresso infinita

$$R_{IN} = \infty$$

Esempio: resistenza equivalente negativa



Fissata v_x

tensione al terminale dell'operazionale

$$v_O = v_x \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$i_x = \frac{v_x - v_O}{R_3} = \frac{v_x - v_x \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)}{R_3} = -\frac{R_2}{R_1 R_3} v_x$$

circuito utilizzato per ottenere resistenza equivalente (non fisica) negativa

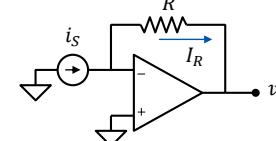
invece che assorbire corrente, il sistema la fornisce indietro

$$R_x = \frac{v_x}{i_x} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}$$

Amplificatore di transresistenza

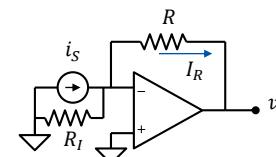
Legge di kirchhoff al nodo v_N

$$i_S = I_R = -\frac{v_O}{R}$$



Guadagno di transresistenza :

$$R_m = \frac{v_O}{i_S} = -R$$



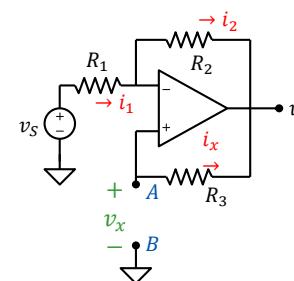
Se il generatore di ingresso fosse reale, la resistenza R_I sarebbe cortocircuitata e non assorbirebbe corrente.

La tensione del nodo di ingresso (v_N) è sempre nulla, quindi la resistenza di ingresso è:

$$R_{IN} = \frac{v_N (= 0)}{i_S} = 0$$

Esempio: resistenza equivalente negativa

Disegnare il modello equivalente secondo Thevenin tra i punti A e B

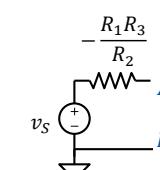


Tensione di circuito aperto:

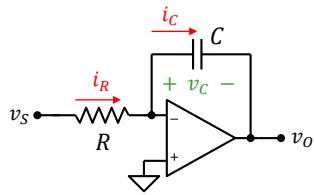
$$\begin{aligned} v_P &= v_O \\ i_1 &= v_S - v_P = v_S - v_O \\ i_2 &= i_1 = v_P - v_O = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} v_O = v_S \\ \end{array} \right\}$$

Annullando v_S si procede come l'esempio precedente

$$R_{EQ} = \frac{v_x}{i_x} = -\frac{R_1 R_3}{R_2}$$



Integratore



Relazione $v_o - v_s$

$$\text{Principio del cortocircuito virtuale: } i_R(t) = \frac{v_s(t)}{R}$$

$$\text{Legge di kirchhoff al nodo } v_N: \quad i_C(t) = i_R(t) = \frac{v_s(t)}{R}$$

Relazione i-v ai capi del condensatore:

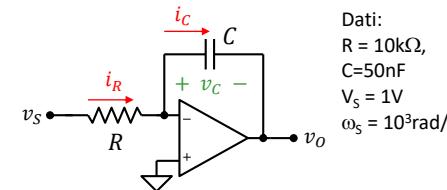
$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t \frac{v_s(t)}{R} dt$$

Tensione di uscita: $v_o(t) = -v_C(t)$

$$v_o(t) = -v_C(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt$$

La tensione di uscita è proporzionale all'integrale dell'ingresso

Integratore: ingresso sinusoidale



Dati:
 $R = 10\text{k}\Omega$,
 $C = 50\text{nF}$,
 $V_s = 1\text{V}$,
 $\omega_s = 10^3\text{rad/s}$

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_s(t) dt$$

$$RC = 0.5\text{ms}$$

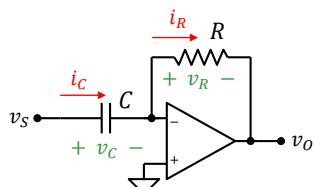
$$v_s(t) = V_s \sin \omega_s t$$

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t A \sin \omega_s t dt = \frac{V_s}{RC \omega_s} \cos \omega_s t$$

$$v_o(t) = \frac{V_s}{RC \omega_s} \sin \left(\omega_s t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{V_s}{RC \omega_s} = \frac{1\text{V}}{0.5\text{ms} \cdot 10^3 \text{s}^{-1}} = 2\text{V}$$

Derivatore



Relazione $v_o - v_s$

$$\text{Principio del cortocircuito virtuale: } v_C(t) = v_s(t)$$

Relazione i-v ai capi del condensatore:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{dv_s}{dt}$$

$$\text{Legge di kirchhoff al nodo } v_N: \quad i_R(t) = i_C(t) = C \frac{dv_s}{dt}(t)$$

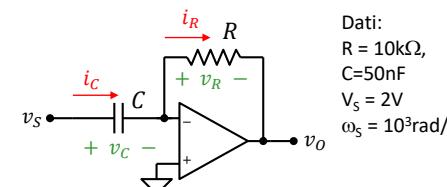
Tensione di uscita:

$$v_o(t) = -v_R(t) = -Ri_R(t) = -RC \frac{dv_s}{dt}(t)$$

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_s}{dt}(t)$$

La tensione di uscita è proporzionale alla derivata dell'ingresso

Derivatore: ingresso onda sinusoidale



Dati:
 $R = 10\text{k}\Omega$,
 $C = 50\text{nF}$,
 $V_s = 2\text{V}$,
 $\omega_s = 10^3\text{rad/s}$

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_s}{dt}$$

$$RC = 0.5\text{ms}$$

$$v_s(t) = V_s \sin \omega_s t$$

$$v_o(t) = -RC \frac{dv_s}{dt} = -RC \omega_s V_s \cos \omega_s t$$

$$v_o(t) = RC \omega_s V_s \sin \left(\omega_s t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$RC \omega_s V_s = 2\text{V} \cdot 0.5\text{ms} \cdot 10^3 \text{s}^{-1} = 1\text{V}$$

L'amplificatore operazionale reale

Jaeger 6^aEd.: Cap. 14 p.639-653, p.680-694, Cap.15 p.734-735

- Non idealità dell'amplificatore operazionale: modello elettrico equivalente
- Effetto delle non idealità:
 - ◆ Configurazione invertente
 - ◆ Configurazione non invertente
 - ◆ Configurazione differenziale
- Amplificatore per strumentazione con AO ideali e reali
- Confronto tra configurazione differenziale e amplificatore per strumentazione

Non idealità dell'amplificatore operazionale

Un AO ideale ha:

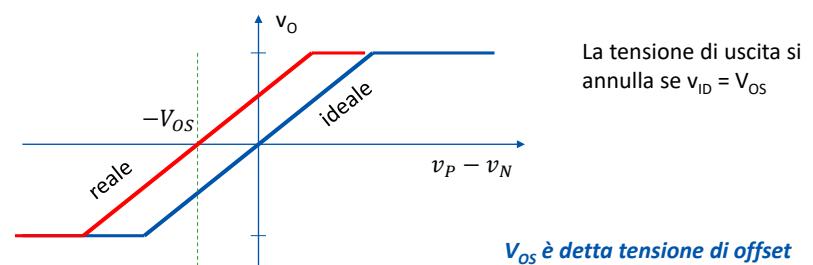
- Resistenza di ingresso infinita (non assorbe corrente all'ingresso) $R_{in} = \infty$
- Tensione di uscita che dipende SOLO dalla differenza di potenziale degli ingressi (v_{ID})
- Guadagno infinito. Se usato in retroazione negativa comporta tensione differenziale di ingresso (v_{ID}) nulla.
- Uscita assimilabile a un generatore ideale di tensione (pilotato da v_{ID}):
 - ◆ Può fornire qualsiasi tensione
 - ◆ Può erogare corrente infinita
 - ◆ Ha Resistenza di uscita nulla

In un AO reale nessuna di queste ipotesi è verificata

Tensione di offset

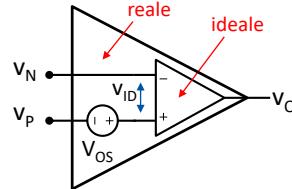
- Se le tensioni applicate agli ingressi di un amplificatore operazionale sono nulle, anche la tensione di uscita dovrebbe essere nulla
- In realtà, a causa di non idealità dei processi di fabbricazione anche con tensione nulla applicata si ottiene in uscita una tensione diversa da zero.
- La tensione di uscita reale vale:

$$v_o = A \cdot (v_{ID} + V_{OS})$$



Tensione di offset

- L'amplificatore operazionale si comporta come se internamente fosse presente un generatore di tensione V_{OS}
- I valori tipici di V_{OS} vanno da qualche μV a qualche mV



$$v_{ID} = v_P + V_{OS} - v_N = v_P - v_N + V_{OS}$$

Se $A = \infty$ nell'AO ideale: $v_{ID} = 0$

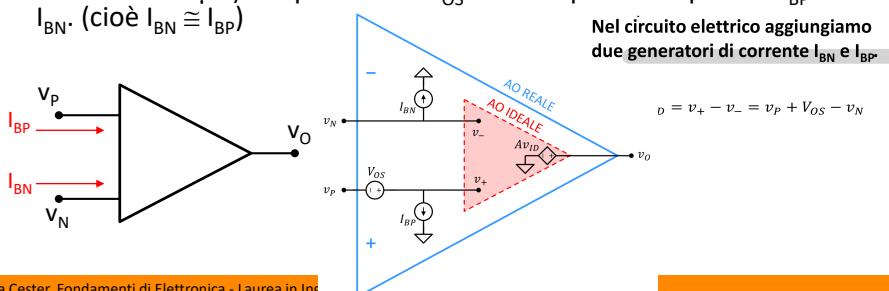
$$v_P - v_N = -V_{OS}$$

Corrente di bias e corrente di offset

- Anche con tensione nulla applicata i terminali di ingresso dell'AO assorbono corrente. (I_{BP} e I_{BN})
- Le correnti sono rappresentabili da due generatori di corrente costante I_{BP} e I_{BN} , simili ma non identici
- I_{BP} e I_{BN} sono dette **corrente di polarizzazione o corrente di bias**
- La differenza tra I_{BP} e I_{BN} è definita corrente di offset.

$$I_{OS} = I_{BP} - I_{BN}$$

- Un buon AO ha I_{BP} e I_{BN} molto piccole (<100pA). Esistono operazionali che hanno I_{BN} e I_{BP} relativamente grandi (decine di nA o anche oltre il μA). In questo caso I_{OS} è molto piccola rispetto a I_{BP} e I_{BN} . (cioè $I_{BN} \approx I_{BP}$)



Tensione di offset

In seguito usiamo la seguente notazione:

- v_N e v_P sono le tensioni ai terminali invertente e non invertente dell'AO reale
- v_- e v_+ sono le tensioni ai terminali invertente e non invertente dell'AO ideale

Includiamo un generatore di tensione ideale V_{OS} al terminale + per tenere conto della tensione di offset:

$$v_+ = v_P + V_{OS}$$

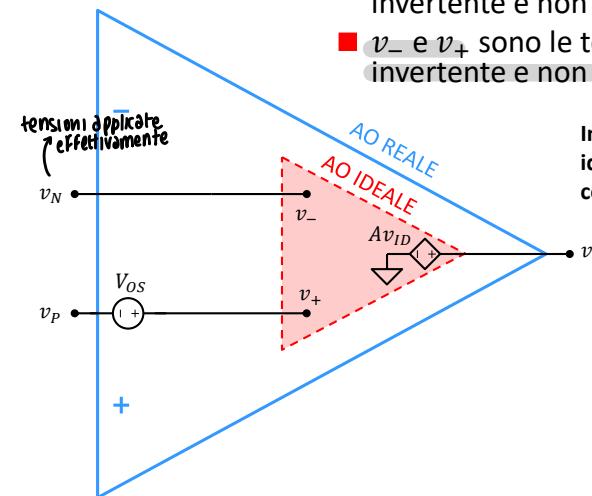
$$v_{ID} = v_+ - v_- = v_P + V_{OS} - v_N$$

$$v_O = A(v_+ - v_-) = A(v_P + V_{OS} - v_N)$$

$$v_P + V_{OS} - v_N = \frac{v_O}{A}$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} (v_P + V_{OS} - v_N) = 0$$

$$v_P - v_N = -V_{OS}$$



Guadagno di modo comune

- In un AO reale l'amplificazione non dipende solo dalla differenza tra i terminali di ingresso, ma anche dal loro valore medio (anche se solo debolmente)
- In prima approssimazione possiamo scrivere l'uscita con la somma di due contributi:

$$v_O = A v_{ID} + A_c v_{IC}$$

con:

$$v_{IC} = \frac{v_P + v_N}{2} \quad e \quad v_{ID} = v_P - v_N$$

- In un amplificatore operazionale reale $A_c \ll A$.

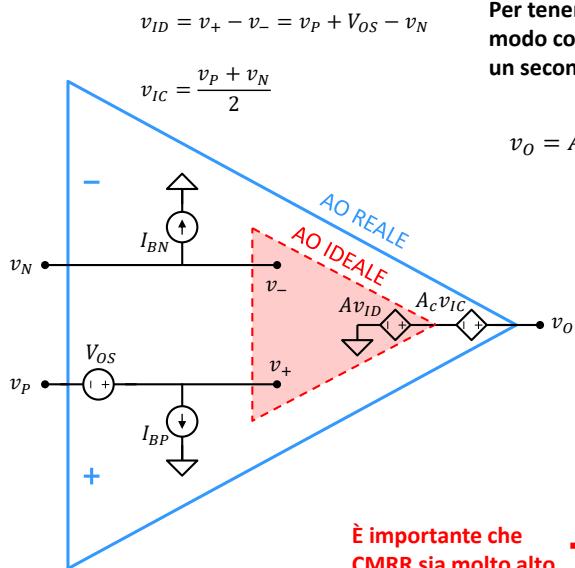
- A_c è detta **amplificazione di modo comune**
- A è l'**amplificazione differenziale**

- Rapporto di Reiezione del Modo Comune (**CMRR = Common Mode Rejection Ratio**) è il rapporto tra A e A_c :

$$CMRR = \frac{A}{A_c}$$

- Maggiore è il CMRR più ideale è il comportamento dell'AO

Guadagno di modo comune



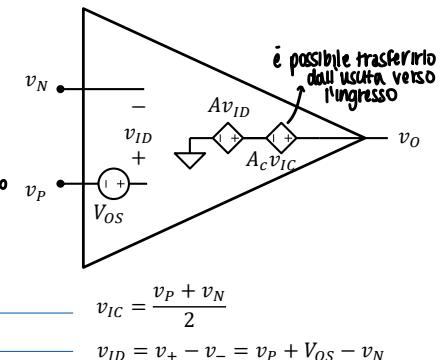
Effetto combinato di V_{OS} e guadagno di modo comune

Tensione di uscita di un AO
(offset + modo comune)

$$v_O = Av_{ID} + A_c v_{IC}$$

considerare modo comune e corrente di offset trascurando momentaneamente il resto

$$v_O = A(v_+ - v_-) + A_c \frac{v_p + v_N}{2}$$



$$v_O = A \left(v_p + V_{OS} - v_N + \frac{A_c}{A} \frac{v_p + v_N}{2} \right) = A \left(v_p + V_{OS} - v_N + \frac{v_p + v_N}{2CMRR} \right)$$

$$v_p + V_{OS} - v_N + \frac{v_p + v_N}{2CMRR} = \frac{v_O}{A}$$

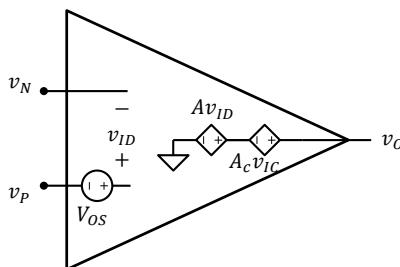
Se $A \rightarrow \infty$ e v_O è finito allora:
 $v_p + V_{OS} - v_N + \frac{v_p + v_N}{2CMRR} = 0$

Effetto combinato di V_{OS} e guadagno di modo comune

(...continua)

$$v_p + V_{OS} - v_N + \frac{v_p + v_N}{2CMRR} = 0$$

$$v_p \left(1 + \frac{1}{2CMRR} \right) - v_N \left(1 - \frac{1}{2CMRR} \right) + V_{OS} = 0$$



$$v_N \left(1 - \frac{1}{2CMRR} \right) = v_p \left(1 + \frac{1}{2CMRR} \right) + V_{OS}$$

$$v_N = v_p \frac{1 + \frac{1}{2CMRR} + V_{OS}}{1 - \frac{1}{2CMRR}}$$

(...continua)

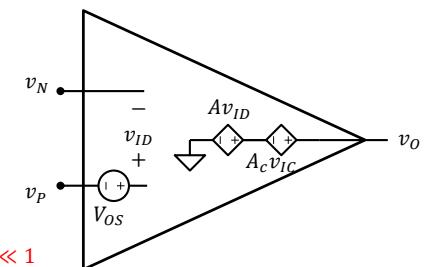
$$v_N = v_p \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{2CMRR}} + V_{OS}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2CMRR}}} + V_{OS}$$

se $CMRR \gg 1 \Rightarrow \frac{1}{2CMRR} \ll 1$

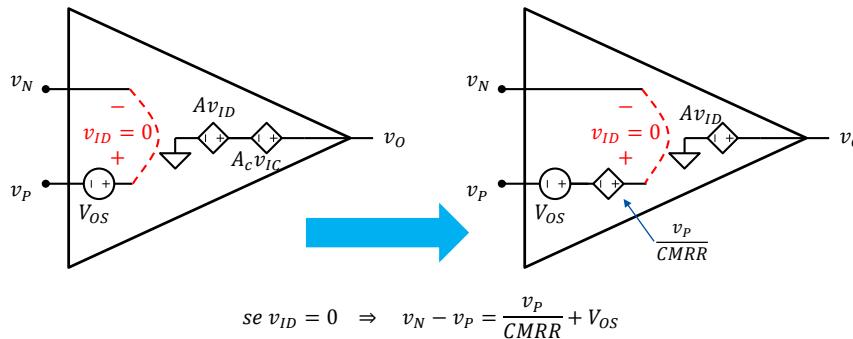
$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2CMRR}} \cong \left(1 + \frac{1}{2CMRR} \right) \left(1 + \frac{1}{2CMRR} \right) = \left(1 + \frac{1}{2CMRR} \right)^2 \cong 1 + \frac{1}{CMRR}$$

$$v_N \cong v_p \left(1 + \frac{1}{CMRR} \right) + V_{OS}$$

$$v_N - v_p \cong \frac{v_p}{CMRR} + V_{OS}$$



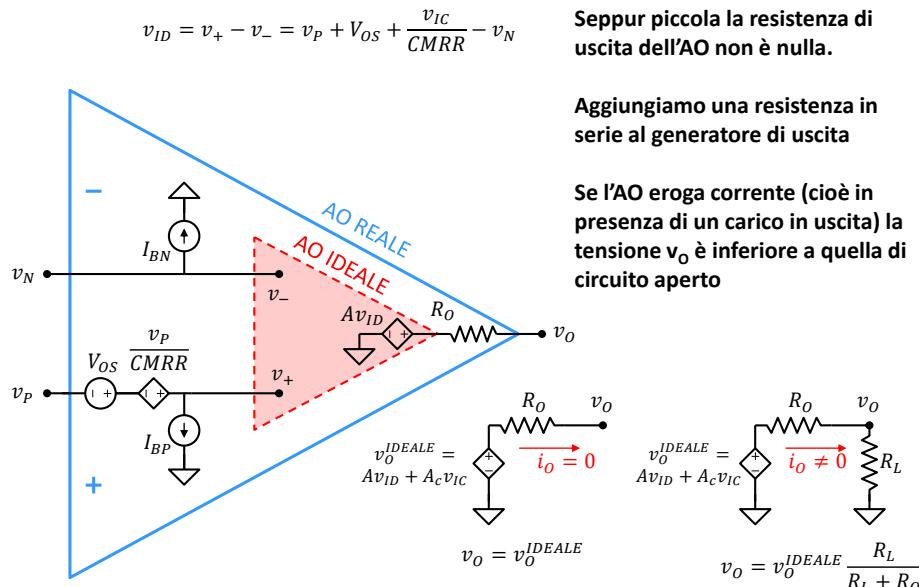
Effetto combinato di V_{OS} e guadagno di modo comune



Per semplicità, è possibile approssimare il modo comune all'ingresso dell'operazionale con un generatore pilotato da v_p in serie a V_{OS}

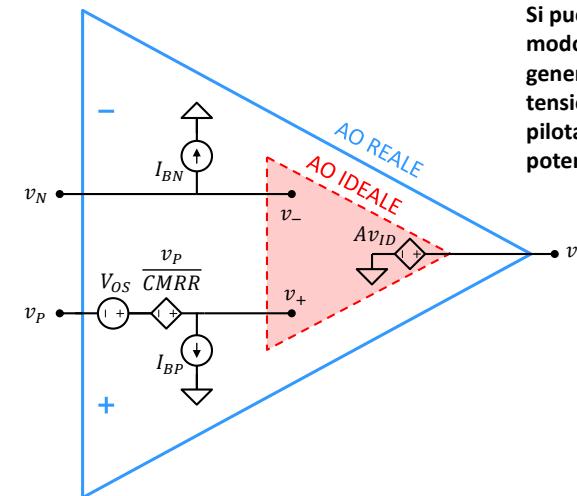
$$V_{OS} \quad \frac{v_p}{CMRR}$$

Resistenza di uscita



Guadagno di modo comune

$$v_{ID} = v_+ - v_- = v_p + V_{OS} + \frac{v_p}{CMRR} - v_N$$

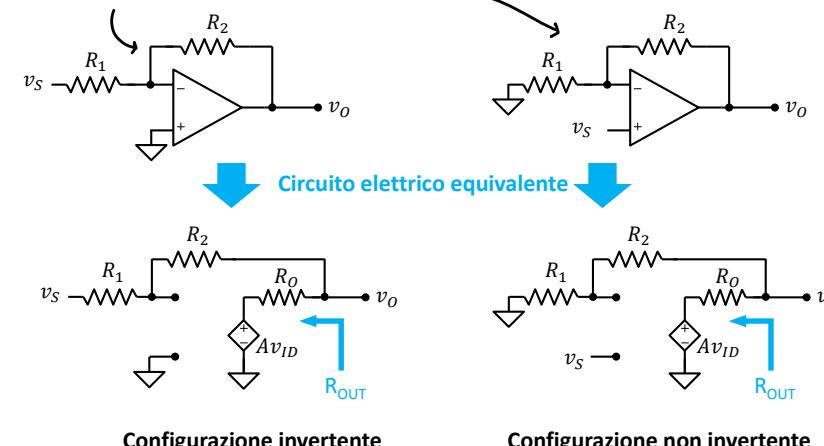


Si può tenere conto del guadagno di modo comune aggiungendo un generatore di tensione pilotato in tensione in serie a V_{OS} . La tensione che pilota il generatore è (circa) uguale al potenziale v_p :

$$\frac{v_p}{CMRR}$$

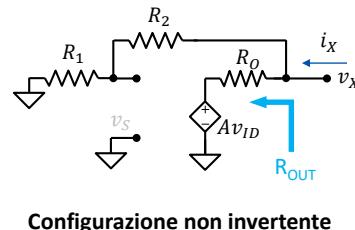
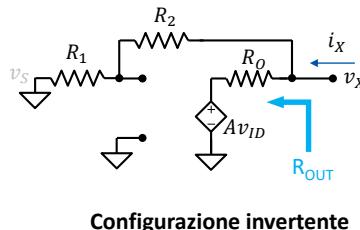
Resistenza di uscita e retroazione negativa

Dato un AO con resistenza di uscita R_o , calcolare la resistenza di uscita di un amplificatore in configurazione invertente e non invertente.



Resistenza di uscita e retroazione negativa

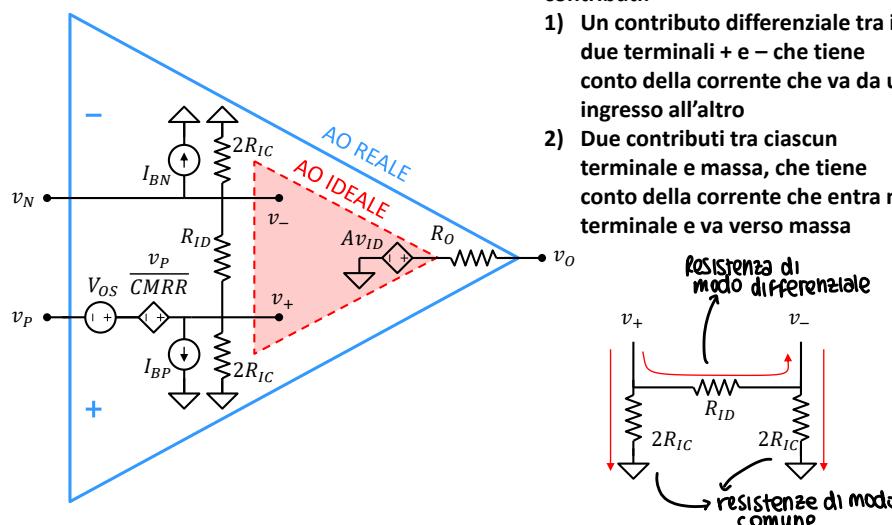
- Annulliamo i generatori indipendenti (v_S)
- Imponiamo una tensione v_X al nodo di uscita
- Calcoliamo la corrente i_X erogata dal generatore
- Calcoliamo: $R_{OUT} = v_X / i_X$



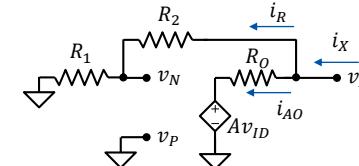
Entrambe le configurazioni conducono allo stesso circuito da analizzare

Resistenza di ingresso

$$v_{ID} = v_+ - v_- = v_P + V_{OS} - v_N$$



Resistenza di uscita e retroazione negativa



$$\begin{aligned} i_X &= i_R + i_{AO} \\ \frac{v_X}{R_1 + R_2} + \frac{v_X - Av_{ID}}{R_O} &\rightarrow v_{ID} = v_P - v_N = 0 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_X \\ i_X &= \frac{v_X}{R_1 + R_2} + \frac{v_X + A \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_X}{R_O} = \\ &= v_X \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}{R_O} \right) \approx v_X \left(A \frac{R_1}{R_O} \right) \end{aligned}$$

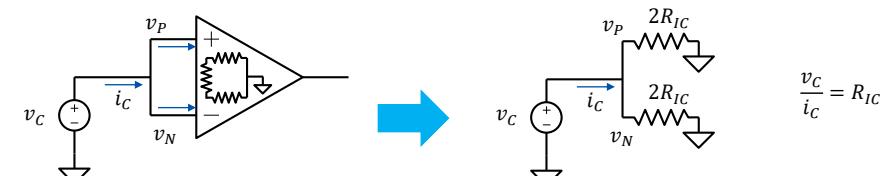
Se $A \gg 1$
il termine dominerà
la frazione

$R_{OUT} \approx \frac{R_O}{A \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$ $\lim_{A \rightarrow \infty} R_{OUT} = 0$

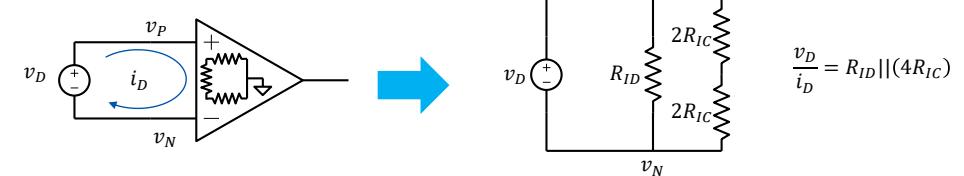
Resistenza di ingresso

Misura della resistenza di ingresso

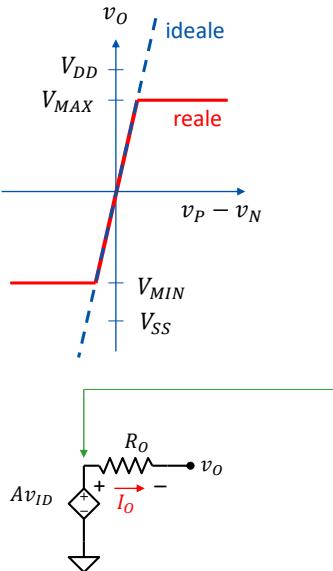
Resistenza di ingresso di modo comune



Resistenza di ingresso di modo differenziale



Massima tensione di uscita



- Un AO può erogare una tensione limitata all'uscita anche in condizione di circuito aperto ($I_o = 0$).
- Se un AO è alimentato tra V_{DD} e V_{SS} (con $V_{DD} > V_{SS}$), la sua tensione di uscita è sempre compresa tra:
 - ♦ un valore minimo: $V_{MIN} > V_{SS}$
 - ♦ e un valore massimo: $V_{MAX} < V_{DD}$
- Nel migliore dei casi: $V_{MAX} \approx V_{DD}$ e $V_{MIN} \approx V_{SS}$. In questo caso si dice che l'AO ha uscita rail-to-rail. (hanno una piena escursione)
- I valori V_{MIN} e V_{MAX} si riferiscono alla tensione di uscita del generatore pilotato: se l'AO sta erogando una corrente I_o la tensione effettiva del nodo di uscita è:

$$v_{o,MAX} = V_{MAX} - R_o I_o$$

a vuoto caduta sull'operazionale

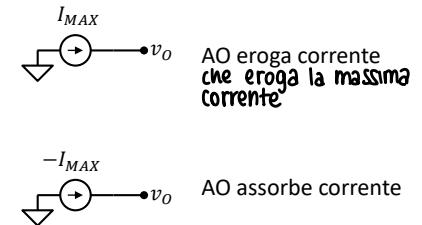
Massima corrente di uscita

Gli amplificatori operazionali disponibili sul mercato contengono circuiti che limitano la massima corrente al terminale di uscita, per limitare la dissipazione di potenza e per proteggere l'amplificatore nel caso possano accidentalmente verificarsi cortocircuiti (per evitare il surriscaldamento e quindi rottura del dispositivo)

Se la corrente richiesta ai generatori di tensione è
 $|I_o| < I_{MAX}$

$$|I_o| < I_{MAX}$$

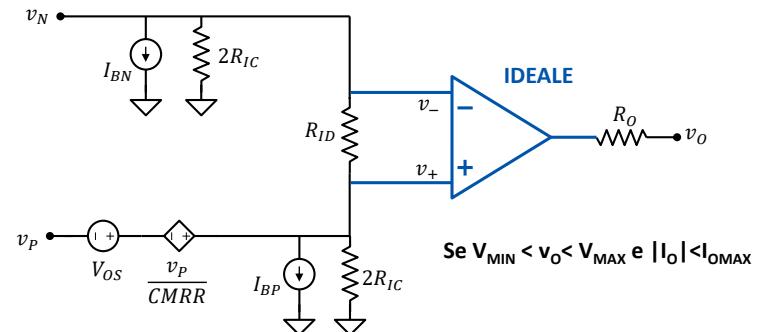
Se la corrente richiesta ai generatori di tensione è
 $|I_o| > I_{MAX}$



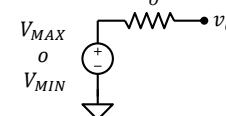
AO ideale e reale a confronto

	Ideale	Reale	
Tensione di offset	$v_{OS} = 0$	$v_{OS} \neq 0$	Generatore di tensione costante in serie al terminale +
Corrente di bias	$I_{BIAS} = 0$	$I_{BN} \neq I_{BP} \neq 0$ $I_{OS} = I_{BP} - I_{BN} \neq 0$, ma $ I_{OS} \ll I_{BN}, I_{BP} $	Coppia di generatori di corrente costante tra i terminali +/- e la massa
Guadagno di modo comune	$A_c = 0$	$A_c > 0$	Generatore di tensione pilotato in tensione in serie al terminale +
Resistenza di uscita	$R_o = 0$	$R_o > 0$	Resistenza in serie al generatore di uscita
Resistenza di ingresso	infinita	$R_{IC} > 0$ $R_{ID} > 0$	Resistenza R_{ID} tra + e – Resistenza R_{IC} tra +/- e massa
Tensione di uscita	$-\infty < v_o < +\infty$	$v_{SS} < v_{MIN} < v_o < v_{MAX} < V_{DD}$	Uscita schematizzabile come un generatore di tensione costante: $v_o = V_{MIN} \circ v_o = V_{MAX}$
Corrente di uscita	$-\infty < I_o < +\infty$	$ I_o < I_{MAX}$	Uscita schematizzabile come un generatore di corrente costante: $I_o = I_{MAX} \circ I_o = -I_{MAX}$

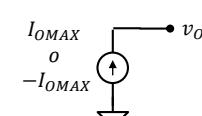
Circuito equivalente di un AO reale



Se $v_o < V_{MIN}$ o $v_o > V_{MAX}$ e $|I_o| < I_{OMAX}$



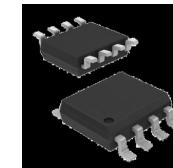
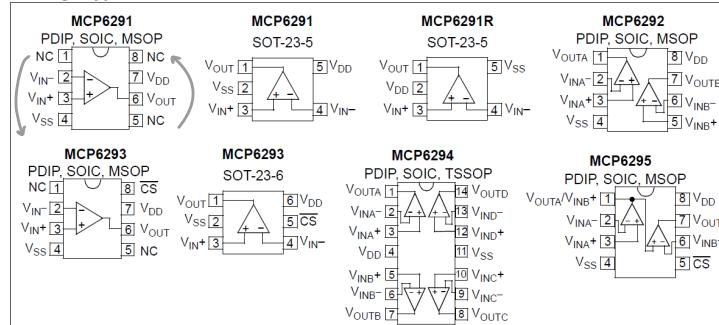
Se $V_{MIN} < v_o < V_{MAX}$ e $|I_o| > I_{OMAX}$



MCP629X

- Gli AO sono disponibili in vari package (contenitori).
- Ciascun package può contenere uno o più AO indipendenti e quasi identici.
- Le sigle cominciano tutte con la stessa stringa alfanumerica (MCP629- in questo caso)
- La parte terminale variabile (-1, -1R, -2, -3, -4, -5) indica il numero di AO e il formato del package contenitore

Package Types



MSOP-8
Mini Small Outline
Package



SOT-23-6
Small Outline Transistor
Transistor
Integrated Circuit

MCP629X

Electrical Characteristics: Unless otherwise indicated, $T_A = +25^\circ\text{C}$, $V_{DD} = +2.4\text{V}$ to $+5.5\text{V}$, $V_{SS} = \text{GND}$, $V_{OUT} \approx V_{DD}/2$, $V_{CM} = V_{DD}/2$, $V_L = V_{DD}/2$, $R_L = 10\text{k}\Omega$ to V_L and CS is tied low (refer to Figure 1-2 and Figure 1-3).

Parameters	Sym.	Min.	Typ.	Max.	Units	Conditions
Input Offset						
Input Offset Voltage	V_{OS}	-3.0	—	+3.0	mV	$V_{CM} = V_{SS}$ (Note 1)
Input Offset Voltage (High Temperature)	V_{OS}	-6.0	—	+5.0	mV	$T_A = -40^\circ\text{C}$ to $+150^\circ\text{C}$, $V_{CM} = V_{SS}$ (Note 6)
Input Bias, Input Offset Current and Impedance						
Input Bias Current	I_B	—	± 1.0	—	pA	Note 2
At Temperature	I_B	—	15	25	nA	$T_A = +150^\circ\text{C}$ (Note 6)
Input Offset Current	I_{OS}	—	± 1.0	—	pA	Note 3
At Temperature	I_{OS}	-3.5	± 1.0	+3.5	nA	$T_A = +150^\circ\text{C}$ (Note 6)
Common-mode Input Impedance	Z_{CM}	—	$10^{13}[6]$	—	ΩpF	Note 3
Differential Input Impedance	Z_{DIFF}	—	$10^{13}[3]$	—	ΩpF	Note 3
<i>ordine di grandezza dei tempi, estremamente elevato</i>						
Common-mode (Note 4)						
Common-mode Input Range	V_{CMR}	$V_{SS} - 0.3$	—	$V_{DD} + 0.3$	V	$V_{CM} = -0.3\text{V}$ to 2.5V , $V_{DD} = 5\text{V}$
Common-mode Rejection Ratio	CMRR	70	85	—	dB	$V_{CM} = -0.3\text{V}$ to 5.3V , $V_{DD} = 5\text{V}$
Open-Loop Gain						
DC Open-Loop Gain (Large Signal)	A_{OL}	90	110	—	dB	$V_{OUT} = 0.2\text{V}$ to $V_{DD} - 0.2\text{V}$, $V_{CM} = V_{SS}$ (Note 1)
Output						
Maximum Output Voltage Swing	V_{OL}, V_{OH}	$V_{SS} + 15$	—	$V_{DD} - 15$	mV	0.5V Input Overdrive
Output Short Circuit Current	I_{SC}	—	± 25	—	mA	
<i>massima corrente erogabile</i>						
Power Supply						
Supply Voltage	V_{DD}	2.4	—	6.0	V	$T_A = -40^\circ\text{C}$ to $+125^\circ\text{C}$ (Note 5)

Espressione del guadagno e del CMRR in decibel

- È consuetudine esprimere il guadagno e il CMRR di un amplificatore in decibel (dB):
 - Il guadagno è un rapporto tra segnale di uscita e segnale di ingresso.
 - Il CMRR può essere inteso come rapporto tra componente di modo comune e componente di modo differenziale
- Il Decibel è usato in generale per esprimere il rapporto (adimensionale) di due grandezze fisiche che rappresentano la potenza o l'energia di un segnale.
- Il Decibel è definito come:

$$A[\text{dB}] = 10 \log_{10} |A|$$
 - A è il rapporto tra le potenze di due segnali
 - $A[\text{dB}]$ indica lo stesso rapporto espresso in dB

utilizzato anche per i filtri

- La definizione di dB assume implicitamente che A sia un rapporto di potenze
- Quando esprimiamo A come rapporto di tensioni ($A = v_O / v_I$) è necessario convertire i segnali in potenze.
- Convenzionalmente la conversione viene fatta supponendo di applicare i segnali v_O e v_I alla stessa resistenza R.

$$P_I = \frac{v_I^2}{R} \quad P_O = \frac{v_O^2}{R}$$

- Esprimiamo il guadagno tra le potenze in dB:

$$A[\text{dB}] = 10 \log \left| \frac{P_O}{P_I} \right| = 10 \log \left| \frac{v_O^2}{v_I^2} \right| = 20 \log \left| \frac{v_O}{v_I} \right| = 20 \log \left| \frac{v_O}{v_i} \right|$$

- Lo stesso ragionamento si applica al guadagno di corrente o al CMRR

Espressione del guadagno in decibel:

- Il dB è quindi definito come:

$$A[\text{dB}] = 10 \log|A| \quad \text{se } A \text{ è un rapporto di energie o di potenze}$$

oppure

$$A[\text{dB}] = 20 \log|A| \quad \text{se } A \text{ è un rapporto di tensioni o di correnti}$$

Attenzione:

- Esprimendo il guadagno in dB si perde informazione sul segno
- Il segno del rapporto espresso in decibel non ha nulla a che fare con il segno del rapporto A:
 - $A[\text{dB}] > 0 \rightarrow A > 1$ oppure $A < -1$
 - $A[\text{dB}] = 0 \rightarrow A = 1$ oppure $A = -1$
 - $A[\text{dB}] < 0 \rightarrow -1 < A < 1$ ($\log(1)$)
(NON SIGNIFICA CHE IL GUADAGNO SIA NEGATIVO)

MCP629X

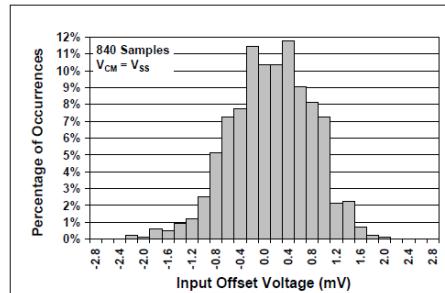


FIGURE 2-1: Input Offset Voltage.

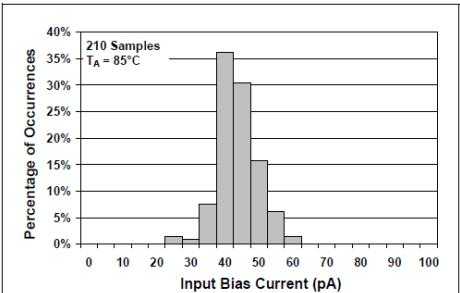


FIGURE 2-2: Input Bias Current at

- I parametri di un AO non sono noti mai con precisione
- Generalmente viene fornito un valore massimo, un valore minimo e un valore nominale medio
- Spesso è fornito anche un grafico di dispersione in cui è riportata la distribuzione statistica dei parametri
- La dispersione statistica tra i parametri è inferiore tra AO costruiti dentro lo stesso package

MCP629X

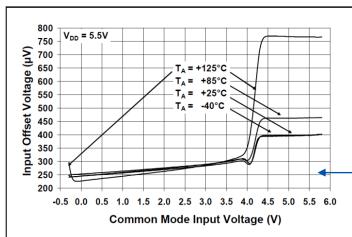


FIGURE 2-6: Input Offset Voltage vs. Common-mode Input Voltage at $V_{DD} = 5.5\text{V}$.

- A volte è riportato anche la variazione di alcuni parametri in funzione della polarizzazione del dispositivo.
- Ad esempio:
 - V_{OS} , I_{BIAS} e I_{OS} in funzione della tensione di modo comune all'ingresso
 - Massima corrente di uscita in funzione della temperatura e della tensione di alimentazione

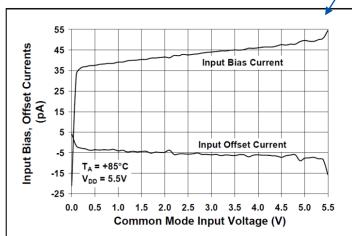


FIGURE 2-9: Input Bias, Offset Currents vs. Common-mode Input Voltage at $T_A = +85^\circ\text{C}$.

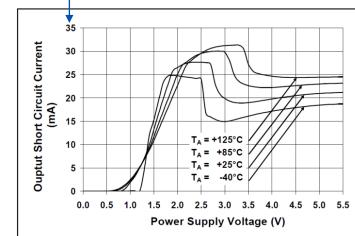


FIGURE 2-20: Output Short Circuit Current vs. Power Supply Voltage.

LMP2021

Unless otherwise specified, all limits are ensured for $T_A = 25^\circ\text{C}$, $V^+ = 5\text{V}$, $V^- = 0\text{V}$, $V_{CM} = V^+/2$, $R_L > 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$.

PARAMETER	TEST CONDITIONS	MIN ⁽²⁾	TYP ⁽³⁾	MAX ⁽²⁾	UNIT
V_{OS}	Input Offset Voltage	-5	-0.4	5	μV
	$-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	-10		10	
I_B	Input Bias Current	-100	± 25	100	pA
	$-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	-300		300	
I_{OS}	Input Offset Current	-200	± 48	200	pA
	$-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	-250		250	
CMRR	Common Mode Rejection Ratio	120	139		dB
	$-0.2\text{V} \leq V_{CM} \leq 4.2\text{V}$, $0\text{V} \leq V_{CM} \leq 4.0\text{V}$, $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	115			
A_{VOL}	Large Signal Voltage Gain	125	160	$\approx 10^3$	dB
	$R_L = 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $V_{OUT} = 0.5\text{V}$ to 4.5V	120			
	$R_L = 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $V_{OUT} = 0.5\text{V}$ to 4.5V , $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	123	160		
	$R_L = 2\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $V_{OUT} = 0.5\text{V}$ to 4.5V , $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	118			
V_{OUT}	Output Swing High	$R_L = 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$	83	135	mV from either rail
	$R_L = 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	170			
	$R_L = 2\text{k}\Omega$ to $V^+/2$	120	160		
	$R_L = 2\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	204			
I_{OUT}	Output Swing Low	$R_L = 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$	65	80	mA
	$R_L = 10\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	105			
	$R_L = 2\text{k}\Omega$ to $V^+/2$	103	125		
	$R_L = 2\text{k}\Omega$ to $V^+/2$, $-40^\circ\text{C} \leq T_J \leq 125^\circ\text{C}$	158			
$I_{SOURCING}$	Linear Output Current	Sourcing, $V_{OUT} = 4.5\text{V}$	30	50	mA
	Sinking, $V_{OUT} = 0.5\text{V}$	30	50		

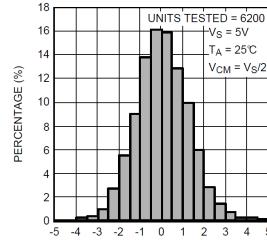
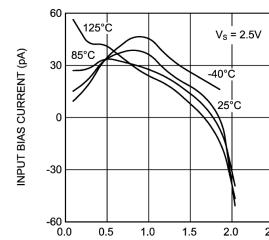
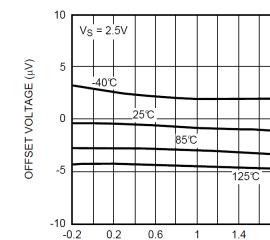


Figure 3. Offset Voltage Distribution

Figure 7. Input Bias Current vs. V_{CM} Figure 9. Offset Voltage vs. V_{CM}

■ Sono sempre riportati alcuni esempi di:

- ◆ Dispersione statistica dei parametri (ad esempio V_{OS})
- ◆ Variazione dei parametri con la polarizzazione, ad esempio:
 - I_{BIAS} in funzione del modo comune
 - V_{OS} in funzione del modo comune

Modello reale semplificato (ALCUNI ESEMPI...)

■ Per semplicità consideriamo solo le seguenti non idealità:

- ◆ Tensione di offset
- ◆ Correnti di bias
- ◆ Amplificazione di modo comune

■ Consideriamo inoltre A abbastanza grande che valga il cortocircuito virtuale tra v_+ e v_- :

$$v_p - v_n + V_{OS} + \frac{v_{IC}}{CMRR} = 0$$

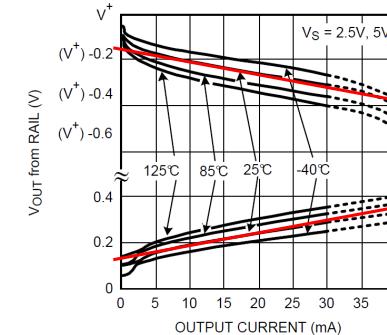
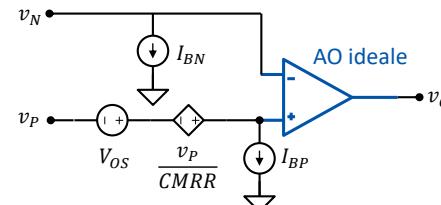
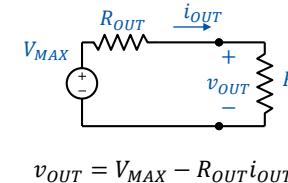


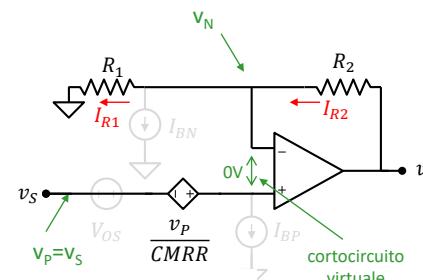
Figure 33. Output Voltage vs. Output Current



$$Graficamente a 25^\circ C, \quad V_{MAX} = V^+ - 0.15V = 2.35V \\ V^+ = 2.5V, V^- = -2.5V :$$

$$R_{OUT} = -\frac{\Delta v_{OUT}}{\Delta i_{OUT}} = \frac{0.22V}{0.04A} = 5.5\Omega$$

Non idealità: configurazione non invertente



■ Sovrapposizione degli effetti:
(il generatore pilotato non deve essere mai spento)

◆ v_s ON (tutto il resto è OFF)

$$v_+ = v_- = v_N = v_S + \frac{v_p}{CMRR} = v_S \left(1 + \frac{1}{CMRR} \right)$$

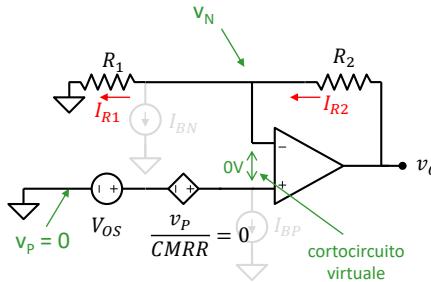
Il CMRR fornisce una debole amplificazione del segnale utile

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_+ = A_v \left(1 + \frac{1}{CMRR} \right) v_S$$

$$A_v = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = \text{guadagno di tensione ideale}$$

$$v_O = A_v \left(1 + \frac{1}{CMRR} \right) v_S$$

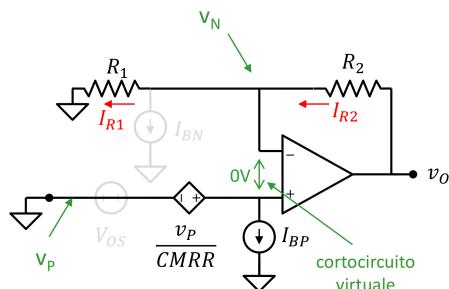
Non idealità: configurazione non invertente



V_{OS} ON (il resto è OFF)

$$v_+ = v_- = v_N = V_{OS} + \frac{v_p}{CMRR} = V_{OS}$$

$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS}$$



I_{BP} ON (il resto è OFF)

Modo comune:

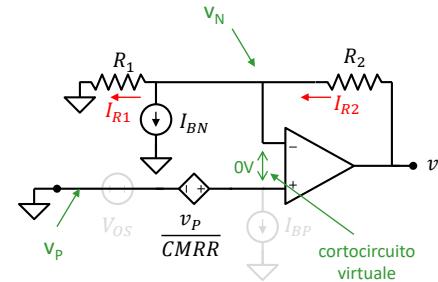
$$v_{IC} = v_p = 0$$

$$v_+ = v_- = v_N = 0V$$

Le corrente attraverso R₁ è nulla
Le corrente attraverso R₂ è nulla

$$v_o = 0$$

Non idealità: configurazione non invertente



■ Sovrapposizione degli effetti:
(il generatore pilotato non deve essere mai spento)

- ◆ v_S OFF
- ◆ V_{OS} OFF
- ◆ I_{BP} OFF
- ◆ I_{BN} ON

Modo comune:

$$v_{IC} = v_p = 0$$

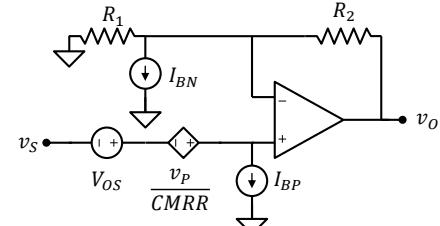
$$v_+ = v_- = v_N = 0V$$

Le corrente attraverso R₁ è nulla

Le corrente attraverso R₂ è I_{R2} = I_{BN}

$$v_o = R_2 I_{BN}$$

Non idealità: configurazione non invertente



$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) v_s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS} + R_2 I_{BN}$$

(segnale utile)

debole dipendenza dal CMRR

* non è più una retta che
passa per l'origine, ma sarà
una retta con un certo offset

$$V_{OS} + I_{BN}$$

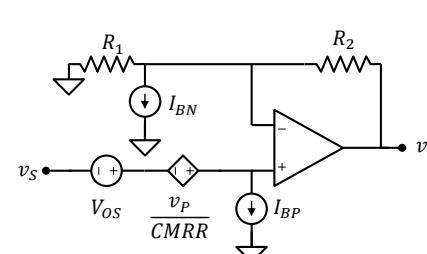
■ La tensione di offset è moltiplicata per il **guadagno di tensione** (come il segnale v_s)

■ La corrente di bias del terminale non invertente (I_{BP}) non da nessun contributo

■ La corrente di bias del terminale invertente da un contributo da un contributo proporzionale alla resistenza R₂.

■ Da R₂ dipende il guadagno dell'amplificatore. Maggiore è il guadagno richiesto, maggiore deve essere R₂. Ciò amplifica sia V_{OS} sia I_{BN}

Non idealità: configurazione non invertente



$$v_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_s + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS} + R_2 I_{BN}$$

(segnale utile)

(non idealità)

$$\left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) = 1.0001 \cong 1$$

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) = 21.0021 \cong 21$$

Esempio 1: sia V_{OS} = 1mV e I_{BN} = 100nA

$$R_1 = 1k\Omega, R_2 = 20k\Omega, CMRR = 10^4$$

$$\text{Guadagno: } A_v = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 21$$

$$\text{Contributo di } V_{OS}: A_v V_{OS} = 21mV$$

$$\text{Contributo di } I_{BN}: R_2 I_{BN} = 2mV$$

$$\text{Se } v_s = 0.1V \quad v_o \text{ dovrebbe essere } 2.1V$$

a causa di V_{OS} e I_{BN} abbiamo v_o = 2.123V

Esempio 2: e se R₂ = 200kΩ cosa cambia?

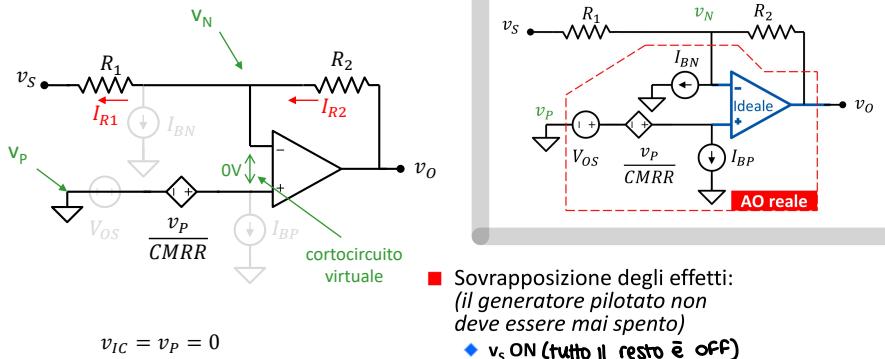
$$A_v = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 201 \quad A_v V_{OS} = 201mV$$

$$R_2 I_{BN} = 20mV$$

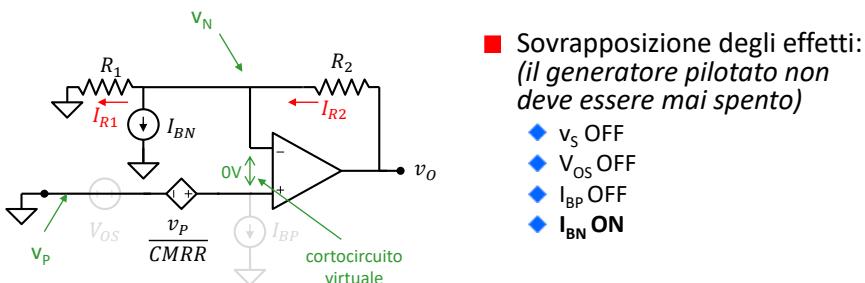
$$\text{Se } v_s = 0.01V \quad v_o \text{ dovrebbe essere } 2.1V$$

a causa di V_{OS} e I_{BN} abbiamo v_o = 2.321V

Non idealità: configurazione invertente



Non idealità: configurazione invertente



Modo comune:

$$v_{IC} = v_P = 0$$

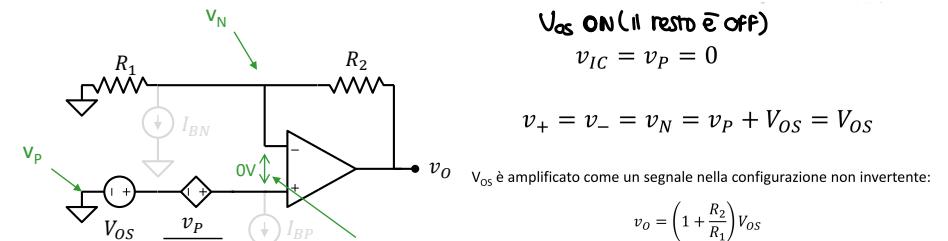
$$v_+ = v_- = v_N = 0V$$

Le corrente attraverso R_1 è nulla

Le corrente attraverso R_2 è $I_{R2} = I_{BN}$

$$v_O = R_2 I_{BN}$$

Non idealità: configurazione invertente



I_{BP} ON (il resto è OFF)

Modo comune:

$$v_{IC} = v_P = 0$$

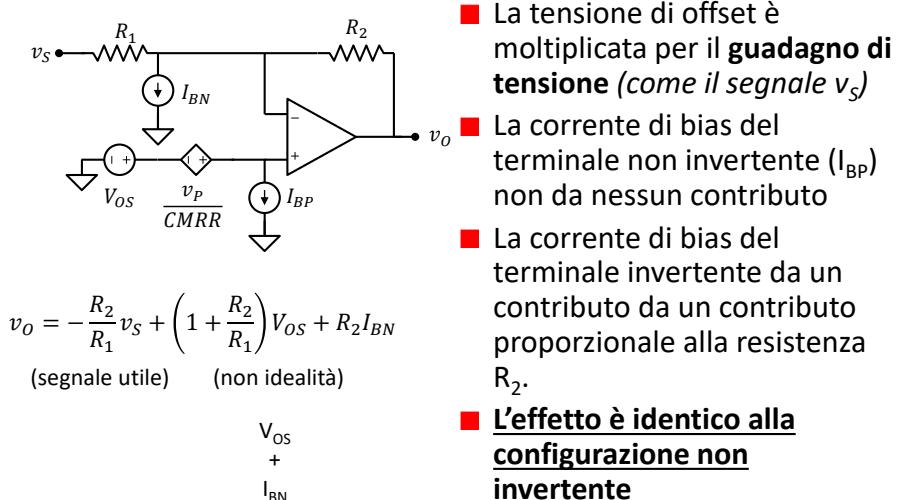
$$v_+ = v_- = v_N = 0V$$

Le corrente attraverso R_1 è nulla

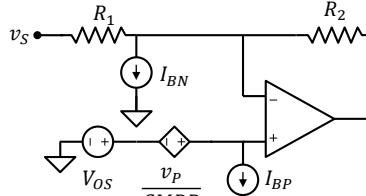
Le corrente attraverso R_2 è nulla

$$v_O = 0$$

Non idealità: configurazione invertente



Non idealità: configurazione invertente



Esempio: sia $V_{OS} = 0.1\text{mV}$ e $I_{BN} = 1\text{nA}$
Vogliamo realizzare un amplificatore con
guadagno $|A_v| = 10$, mantenendo il contributo di
offset dovuto a I_{BN} entro il 10% di quello dovuto a
 V_{OS} .

- 1) Calcolare R_1 e R_2 .
- 2) Quanto vale la resistenza di ingresso?
- 3) È possibile realizzare $R_{IN} > 100\text{k}\Omega$

1 Guadagno: $A_v = -\frac{R_2}{R_1} = -10 \rightarrow R_2 = 10R_1$

Contributo di V_{OS} : $\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)V_{OS} = 1.1\text{mV}$

Contributo di I_{BN} : $R_2 I_{BN} < 0.1 \cdot 1.1\text{mV} = 0.11\text{mV}$

$R_2 < \frac{0.11\text{mV}}{1\text{nA}} = 110\text{k}\Omega$

$R_1 = 11\text{k}\Omega$
 $R_2 = 110\text{k}\Omega$

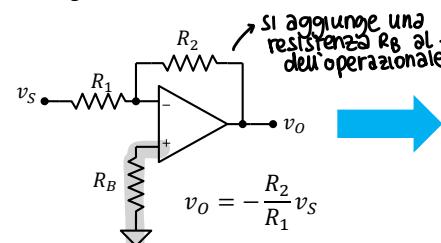
2 $R_{IN} = 11\text{k}\Omega$

3 $R_{IN} = R_1 = 100\text{k}\Omega \rightarrow R_2 = 1\text{M}\Omega \rightarrow R_2 I_{BN} = 1\text{mV} = 90\% \text{ del contributo di } V_{OS}$

No! Non è possibile

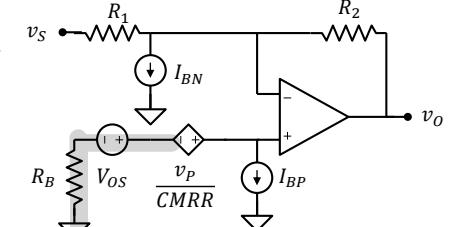
Come ridurre l'effetto della corrente di bias

Configurazione invertente

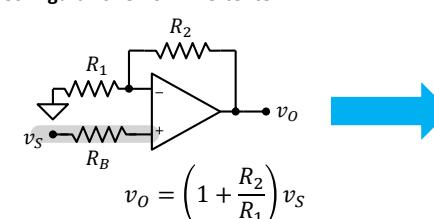


$$v_O = -\frac{R_2}{R_1} v_S$$

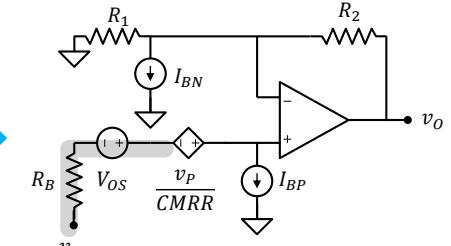
Annullando v_s e accendendo solo i generatori V_{OS} , I_{BN} e I_{BP} il circuito è lo stesso per entrambe le configurazioni



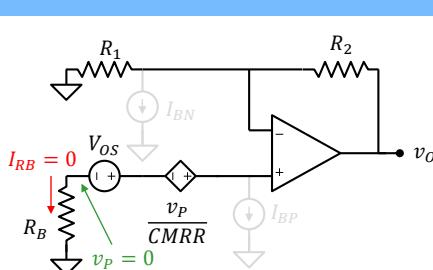
Configurazione non invertente



$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_S$$



Come ridurre l'effetto della corrente di bias



$V_{OS} \rightarrow \text{ON}$

$I_{BN} \rightarrow \text{OFF}$

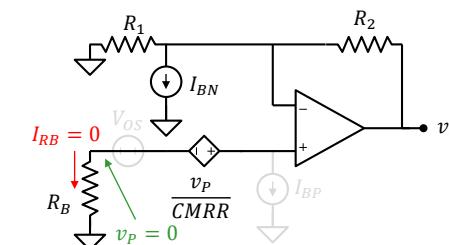
$I_{BP} \rightarrow \text{OFF}$

Annullando v_s i due circuiti sono riconducibili allo stesso modello
La corrente attraverso R_B è nulla. → anche la tensione su R_B è nulla

È come se la resistenza R_B non ci fosse.

Identico al caso già studiato per entrambe le configurazioni

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS}$$



$V_{OS} \rightarrow \text{OFF}$

$I_{BN} \rightarrow \text{ON}$

$I_{BP} \rightarrow \text{OFF}$

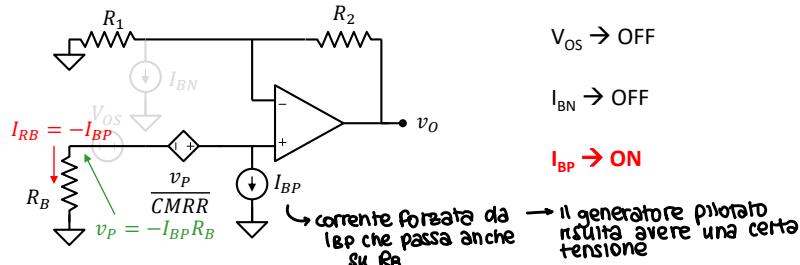
La corrente attraverso R_B è nulla. → anche la tensione su R_B è nulla

È come se la resistenza R_B non ci fosse.

Identico al caso già studiato per entrambe le configurazioni

$$v_O = R_2 I_{BN}$$

Come ridurre l'effetto della corrente di bias



La corrente attraverso R_B è $-I_{BP}$ → La tensione su R_B è $V_R = -I_{BP}R_B$

$$v_+ = v_- = v_N = -R_B I_{BP} + \frac{-R_B I_{BP}}{CMRR} = -R_B \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) I_{BP} \cong -R_B I_{BP}$$

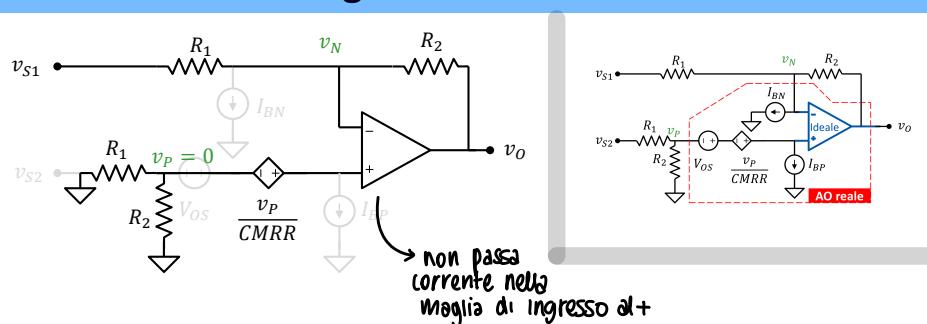
Se $CMRR \gg 1$:

La resistenza R_B è assimilabile a un generatore di tensione di offset pari a $-I_{BP}R_B$

$$v_O = -R_B I_{BP} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) \cong -R_B I_{BP} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Se $CMRR \gg 1$:

Non idealità: configurazione differenziale



Come nella configurazione invertente:

Corrente attraverso $R_1 || R_2$ nulla

Tensione ai capi di $R_1 || R_2$ nulla

Modo comune $v_{IC} = v_P 0$

$$v_O = -\frac{R_2}{R_1} v_{S1}$$

$v_{S1} \rightarrow \text{ON}$

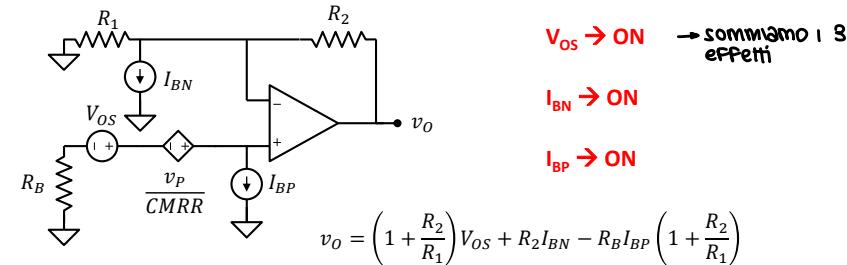
$v_{S2} \rightarrow \text{OFF}$

$v_{OS} \rightarrow \text{OFF}$

$I_{BP} \rightarrow \text{OFF}$

$I_{BN} \rightarrow \text{OFF}$

Come ridurre l'effetto della corrente di bias



Per definizione di corrente di offset: $I_{BN} = I_{BP} - I_{OS}$

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS} + R_2 I_{BP} - R_2 I_{OS} - R_B I_{BP} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Tipicamente $I_{OS} \ll I_{BN}, I_{BP}$

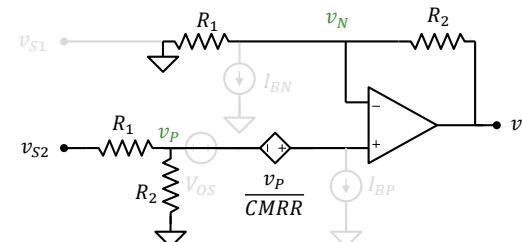
Il contributo della corrente di bias quasi si annulla se:

$$R_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} R_B \rightarrow R_B = R_1 || R_2$$

$R_2 I_{BP} = R_B I_{BP} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$ questo termine permette di abbattere il contributo

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS} - R_2 I_{OS}$$

Non idealità: configurazione differenziale



$v_{S1} \rightarrow \text{OFF}$

$v_{S2} \rightarrow \text{ON}$

$v_{OS} \rightarrow \text{OFF}$

$I_{BP} \rightarrow \text{OFF}$

$I_{BN} \rightarrow \text{OFF}$

$$\text{Tensione del nodo } v_P: \quad v_P = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{S2}$$

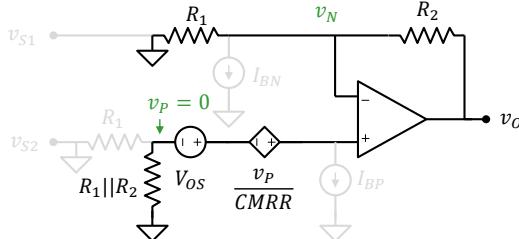
$$\text{Tensione del nodo } v_N \text{ e } v_+: \quad v_+ = v_N = v_P + \frac{v_P}{CMRR} = v_P \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) = \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{S2}$$

AO in configurazione non invertente:

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) v_{S2} = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) v_{S2}$$

Per ora non trascuriamo $1/CMRR$

Non idealità: configurazione differenziale



$v_{S1} \rightarrow \text{OFF}$
 $v_{S2} \rightarrow \text{OFF}$
 $V_{OS} \rightarrow \text{ON}$
 $I_{BP} \rightarrow \text{OFF}$
 $I_{BN} \rightarrow \text{OFF}$

Come nella configurazione invertente e non invertente con resistenza per compensazione della corrente di bias:

Definiamo $R_B = R_1 || R_2$ nulla

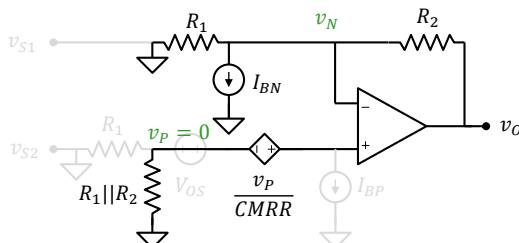
Corrente attraverso R_B nulla

Tensione ai capi di R_B nulla

$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS}$$

Modo comune $v_{IC} = v_p = 0$

Non idealità: configurazione differenziale



$v_{S1} \rightarrow \text{OFF}$
 $v_{S2} \rightarrow \text{OFF}$
 $V_{OS} \rightarrow \text{OFF}$
 $I_{BP} \rightarrow \text{OFF}$
 $I_{BN} \rightarrow \text{ON}$

Come nella configurazione invertente e non invertente con resistenza per compensazione della corrente di bias:

Definiamo $R_B = R_1 || R_2$ nulla

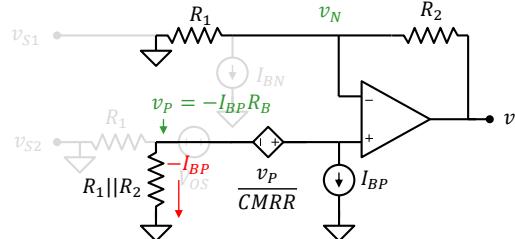
Corrente attraverso R_B nulla

Tensione ai capi di R_B nulla

$$v_O = R_2 I_{BN}$$

Modo comune $v_{IC} = 0$

Non idealità: configurazione differenziale



$v_{S1} \rightarrow \text{OFF}$
 $v_{S2} \rightarrow \text{OFF}$
 $V_{OS} \rightarrow \text{OFF}$
 $I_{BP} \rightarrow \text{ON}$
 $I_{BN} \rightarrow \text{OFF}$

Come nella configurazione invertente e non invertente con resistenza per compensazione della corrente di bias:

Definiamo $R_B = R_1 || R_2$ nulla

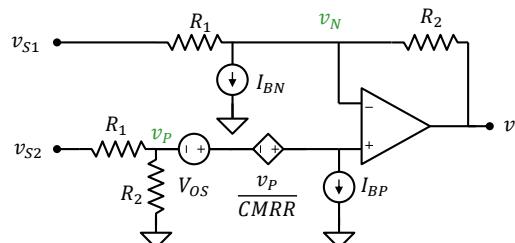
La corrente attraverso R_B è $-I_{BP}$ → La tensione su R_B è $V_R = -I_{BP}R_B$

La resistenza R_B è assimilabile a un generatore di tensione di offset pari a $-I_{BP}R_B$

$$v_O \cong -R_B I_{BP} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_{BP} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = -R_2 I_{BP}$$

(Valida se $CMRR \gg 1$)

Non idealità: configurazione differenziale



$v_{S1} \rightarrow \text{ON}$
 $v_{S2} \rightarrow \text{ON}$
 $V_{OS} \rightarrow \text{ON}$
 $I_{BP} \rightarrow \text{ON}$
 $I_{BN} \rightarrow \text{ON}$

$$v_O = \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) v_{S2} - \frac{R_2}{R_1} v_{S1} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS} + R_2 I_{BN} - R_2 I_{BP}$$

$$I_{OS} = I_{BP} - I_{BN}$$

$$v_O = \frac{R_2}{R_1} (v_{S2} - v_{S1}) + \frac{1}{CMRR} \frac{R_2}{R_1} v_{S2} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_{OS} - R_2 I_{OS}$$

Segnale utile

Disturbo indotto dal CMRR

Corrente di offset

Tensione di offset

Non idealità: configurazione differenziale

$$v_o = A_v(v_{S2} - v_{S1}) + \frac{A_v}{CMRR}v_{S2} + (1 + A_v)V_{OS} - R_2I_{OS}$$

$$A_v = \frac{R_2}{R_1}$$

Riscriviamo v_{S1} e v_{S2} in termini di modo comune e modo differenziale:

$$v_{SD} = v_{S2} - v_{S1}$$

$$v_{SC} = \frac{v_{S2} + v_{S1}}{2}$$

$$\rightarrow v_{S2} = v_{SC} + \frac{v_{SD}}{2}$$

$$v_o = A_v v_{SD} + \frac{A_v}{CMRR} \left(v_{SC} + \frac{v_{SD}}{2} \right) + (1 + A_v)V_{OS} - R_2I_{OS}$$

$$v_o = A_v \left(1 + \frac{1}{2 \cdot CMRR} \right) v_{SD} + \frac{A_v}{CMRR} v_{SC} + (1 + A_v)V_{OS} - R_2I_{OS}$$

Segnale utile di modo differenziale
Guadagno circa uguale a A_v
se $CMRR \gg 1$

Segnale di modo comune dovuto agli ingressi.
Guadagno: $A_v/CMRR$

Contributo di I_{OS}
Proporzionale a R_2
Guadagno: $1 + A_v$

Non idealità: configurazione differenziale

Esempio:

Vogliamo amplificare di $A_v=100$ la differenza di due segnali: $v_{S1} = 4.99V$ $v_{S2} = 5.01V$

Usiamo un amplificatore operazionale con $V_{OS} = 0.3mV$, $CMRR = 10^4$, $I_{OS}=100pA$

Usiamo $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 100k\Omega$

$$\text{Modo differenziale: } v_{SD} = v_{S2} - v_{S1} = 0.02V$$

$$\text{Modo comune: } v_{SC} = \frac{v_{S2} + v_{S1}}{2} = 5V$$

$$v_o = A_v \left(1 + \frac{1}{2 \cdot CMRR} \right) v_{SD} + \frac{A_v}{CMRR} v_{SC} + (1 + A_v)V_{OS} - R_2I_{OS}$$

$$100 \left(1 + \frac{1}{20000} \right) \approx 100 \quad 0.02V \quad \frac{100}{10000} = 0.01 \quad 5V \quad 101 \quad 0.3mV \quad 100k\Omega \cdot 10^{-10}A$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2V \quad 0.05V \quad 30.3mV \quad 0.01mV$$

$$2.08031V \quad \text{errore del 4\%}$$

Non idealità: configurazione differenziale

Esempio:

Vogliamo amplificare di $A_v=100$ la differenza di due segnali: $v_{S1} = 0.99V$ $v_{S2} = 1.01V$

Usiamo un amplificatore operazionale con $V_{OS} = 0.3mV$, $CMRR = 10^4$, $I_{OS}=100pA$

Usiamo $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 100k\Omega$

$$\text{Modo differenziale: } v_{SD} = v_{S2} - v_{S1} = 0.02V$$

$$\text{Modo comune: } v_{SC} = \frac{v_{S2} + v_{S1}}{2} = 1V$$

$$v_o = A_v \left(1 + \frac{1}{2 \cdot CMRR} \right) v_{SD} + \frac{A_v}{CMRR} v_{SC} + (1 + A_v)V_{OS} - R_2I_{OS}$$

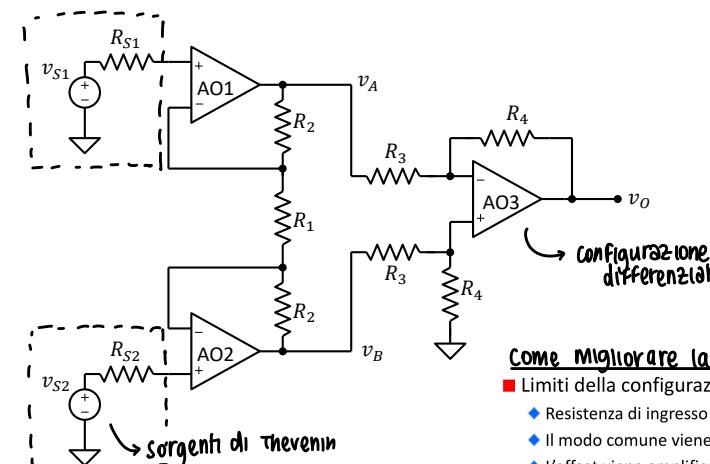
$$100 \left(1 + \frac{1}{20000} \right) = 100.005 \cong 100 \quad 0.02V \quad \frac{100}{10000} = 0.01 \quad 1V \quad 101 \quad 0.3mV \quad 100k\Omega \cdot 10^{-10}A$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$2V \quad 10mV \quad 30.3mV \quad 0.01mV$$

$$2.04031V \quad \text{errore del 2\%}$$

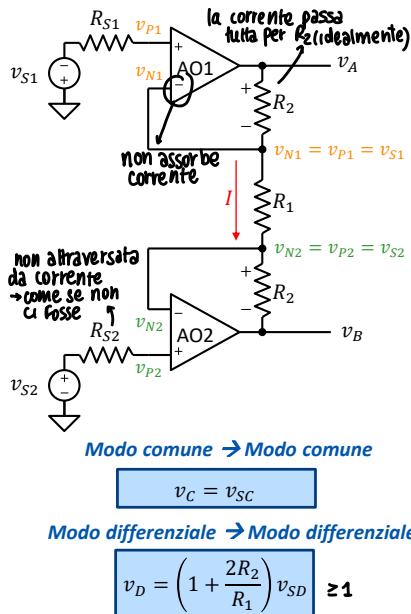
Amplificatore da strumentazione: AO IDEALI



Come migliorare la conf. diff.?

- Limiti della configurazione differenziale:
 - ◆ Resistenza di ingresso bassa
 - ◆ Il modo comune viene amplificato
 - ◆ L'offset viene amplificato
- Obiettivo
 - ◆ Ottenerne alta la resistenza di ingresso
 - ◆ Ridurre l'amplificazione del modo comune
 - ◆ Ridurre il contributo dell'offset.

Amplificatore da strumentazione: AO IDEALI



Primo Stadio

Corrente attraverso la serie $R_2-R_1-R_2$

$$I = \frac{v_{S1} - v_{S2}}{R_1}$$

Potenziale v_A e v_B

$$v_A = v_{S1} + R_2 I$$

$$v_B = v_{S2} - R_2 I$$

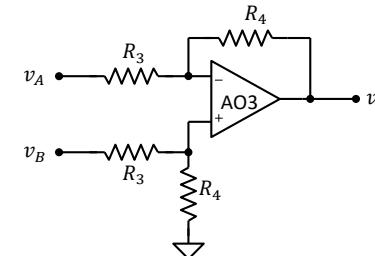
Modo comune:

$$v_C = \frac{v_B + v_A}{2} = \frac{v_{S1} + v_{S2}}{2}$$

Modo differenziale ($v_B - v_A$):

$$\begin{aligned} v_D &= v_B - v_A = v_{S2} - v_{S1} - 2R_2 I = \\ &= v_{S2} - v_{S1} + 2R_2 \frac{v_{S2} - v_{S1}}{R_1} \\ v_D &= (v_{S2} - v_{S1}) \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

Amplificatore da strumentazione: AO IDEALI



Secondo Stadio

Configurazione differenziale con ingressi v_A e v_B

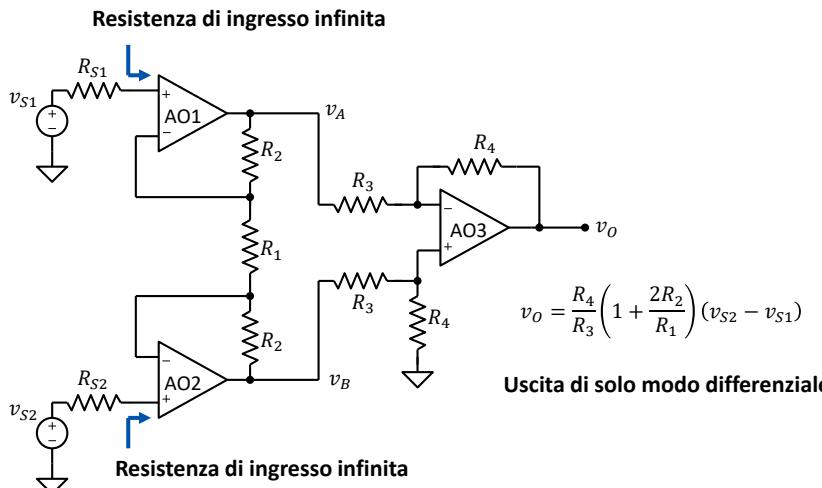
$$v_O = \frac{R_4}{R_3} (v_B - v_A)$$

$$v_B - v_A = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) (v_{S2} - v_{S1})$$

$$v_O = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) (v_{S2} - v_{S1})$$

- I segnali v_A e v_B sono forniti dalle uscite dei due AO dello stadio precedente.
- Idealmente gli AO hanno resistenza di uscita nulla e non risentono della resistenza di ingresso della configurazione differenziale
- Il guadagno di modo differenziale viene aumentato
- Il modo comune tra v_A e v_B viene idealmente soppresso

Amplificatore da strumentazione: AO IDEALI



Primo stadio (v_{S1}, v_{S2}) → (v_A, v_B):

$$\text{Guadagno di modo differenziale: } 1 + \frac{2R_2}{R_1}$$

$$\text{Guadagno di modo comune: } 1$$

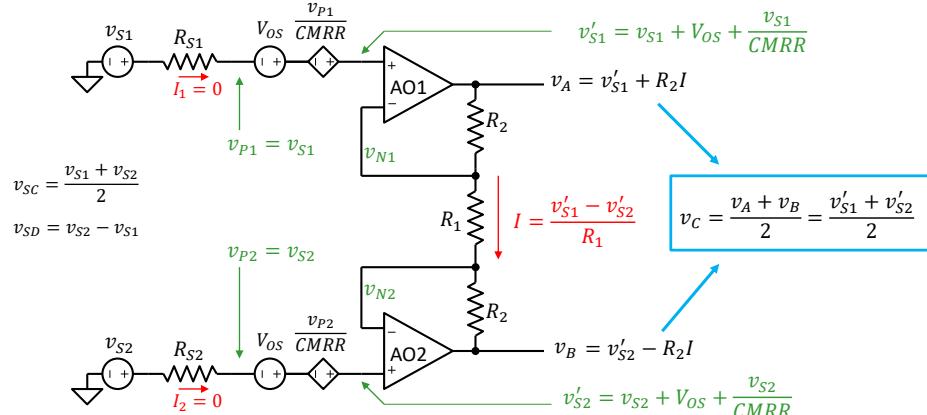
Secondo stadio (v_A, v_B) → v_O :

$$\text{Guadagno di modo differenziale: } \frac{R_4}{R_3}$$

$$\text{Guadagno di modo comune: } 0$$

- Introduciamo le seguenti non idealità: ■ Ipotesi: tutti gli operazionali sono identici:
 - ◆ CMRR finito
 - ◆ Tensione di offset
- Trascuriamo: corrente di bias, resistenze di ingresso, resistenza di uscita, limiti alle tensioni/correnti di uscita degli AO

Non idealità nel primo stadio



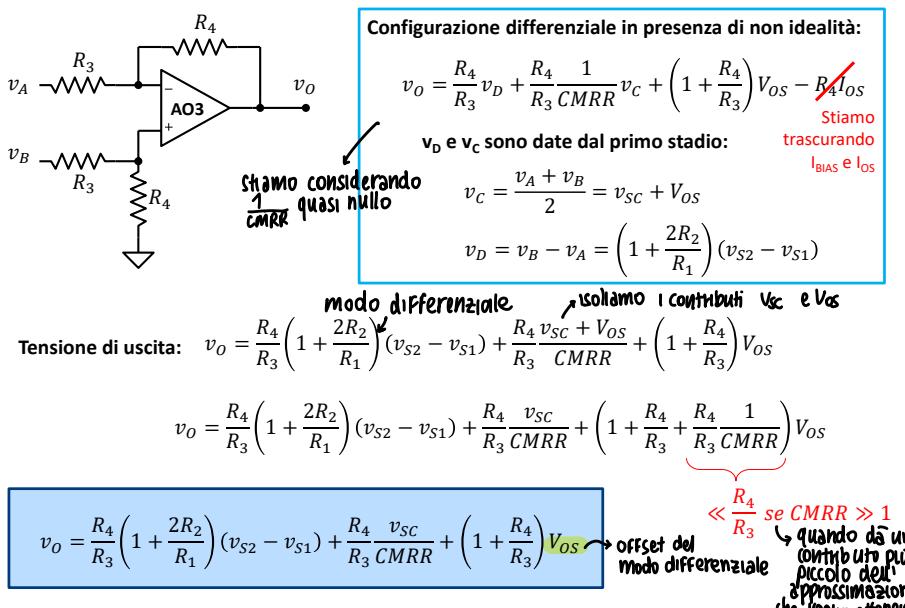
Modo comune

$$v_C = \frac{v_{S1} + V_{OS} + \frac{v_{S1}}{CMRR} + v_{S2} + V_{OS} + \frac{v_{S2}}{CMRR}}{2} = v_{SC} \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) + V_{OS} \quad \text{≈ 1 se } CMRR \gg 1$$

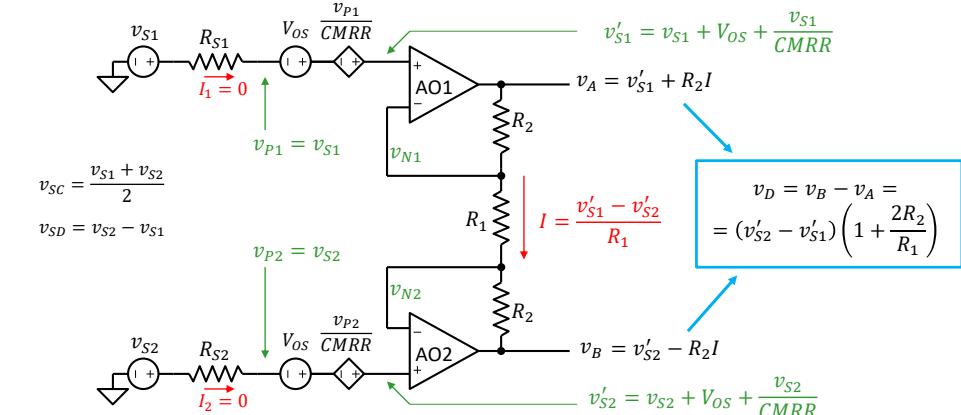
→ peggiora leggermente

Il modo comune aumenta di una quantità V_{OS} (ma non amplificato)

Non idealità nel secondo stadio



Non idealità nel primo stadio



Modo differenziale: l'offset non impatta sul modo differenziale

$$v_D = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \left(v_{S2} + V_{OS} + \frac{v_{S2}}{CMRR} - v_{S1} - V_{OS} - \frac{v_{S1}}{CMRR}\right) = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{1}{CMRR}\right) v_{SD}$$

→ guadagno ideale

Il modo differenziale rimane circa invariato

Alcune considerazioni

$$v_o = \frac{R_4}{R_3} \underbrace{\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)}_{\text{Guadagno MD}} (v_{S2} - v_{S1}) + \frac{R_4}{R_3} \underbrace{\frac{1}{CMRR} \left(\frac{v_{S2} + v_{S1}}{2}\right)}_{\text{Guadagno MC}} + \underbrace{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) V_{OS}}_{\text{Offset costante}}$$

■ L'uscita si compone di tre contributi:

- ♦ Segnale differenziale, il cui guadagno è il prodotto del guadagno del primo e secondo stadio
- ♦ Segnale di modo comune, il cui guadagno dipende dal guadagno del secondo stadio (R_4/R_3), ma è inversamente proporzionale al CMRR
- ♦ Segnale di offset costante (moltiplicato per il guadagno del secondo stadio)

■ È possibile ottenere un guadagno differenziale molto elevato mantenendo basso il modo comune e l'offset, usando ad esempio:

- ♦ $R_3 = R_4$ per ridurre il contributo di modo comune e dell'offset
- ♦ R_2 e R_1 scelte in modo da ottenere il guadagno desiderato.

$$v_o = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) (v_{S2} - v_{S1}) + \frac{1}{CMRR} \left(\frac{v_{S2} + v_{S1}}{2}\right) + 2V_{OS}$$

Esempio: amplificatore differenziale con guadagno 100

Configurazione differenziale



Supponiamo:
 $V_{OS} = 1\text{mV}$
 $CMRR = 10^4$

$$v_0 = \frac{R_2}{R_1}(v_1 - v_2) + \frac{R_2}{R_1 CMRR} \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{OS}$$

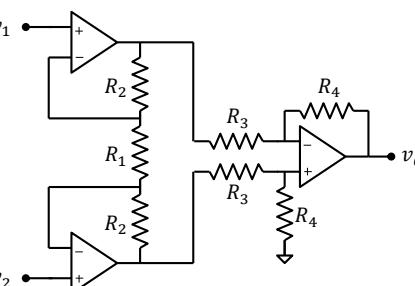
$$R_2 = 100\text{k}\Omega \quad \rightarrow \quad A_{vd} = \frac{R_2}{R_1} = 100$$

$$A_{vc} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{CMRR} = \frac{100}{10^4} = 0.01$$

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{OS} = 101\text{mV}$$

$$A_{vc} = \frac{R_3}{R_4 CMRR} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$$

Amplificatore per strumentazione



$$v_0 = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) (v_1 - v_2) + \frac{R_4}{R_3 CMRR} \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) + \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) V_{OS}$$

$$R_3 = 1\text{k}\Omega \quad R_4 = 1\text{k}\Omega \quad \rightarrow \quad \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) V_{OS} = 2\text{mV}$$

$$R_1 = 1\text{k}\Omega \quad R_2 = 49.5\text{k}\Omega \quad \rightarrow \quad A_{vd} = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) = 100$$

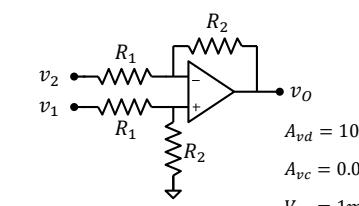
$$A_{vc} = \frac{R_3}{R_4 CMRR} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$$

Esempio: amplificatore differenziale con guadagno 100

Supponiamo $v_2 = 1.01\text{V}$, $v_1 = 0.99\text{V} \rightarrow v_c = 1\text{V}$, $v_d = 0.02\text{V}$

IDEALMENTE: $v_o = 100 \times 0.02\text{V} = 2\text{V}$

Configurazione differenziale



$$A_{vd} = 100 \quad A_{vc} = 0.01 \quad V_{OS} = 1\text{mV}$$

$$v_0 = A_{vd} v_d + A_{vc} v_c + (1 + A_{vd}) V_{OS}$$

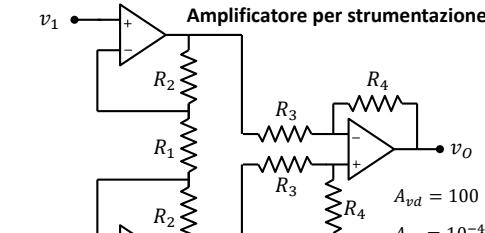
$$100 \cdot 0.02\text{V} \quad 10^{-2} \cdot 1\text{V} \quad 0.101\text{V}$$

$$2\text{V} \quad 0.01\text{V} \quad 0.101\text{V}$$

$$2.111\text{V}$$

$$\text{Totale}$$

$$\text{Errore} = 5.5\%$$



$$A_{vd} = 100 \quad A_{vc} = 10^{-4} \quad V_{OS} = 1\text{mV}$$

$$v_0 = A_{vd} v_d + A_{vc} v_c + 2V_{OS}$$

$$100 \cdot 0.02\text{V} \quad 10^{-4} \cdot 1\text{V} \quad 0.0001\text{V}$$

$$2\text{V} \quad 0.0001\text{V} \quad 0.002\text{V}$$

$$2.0021\text{V}$$

$$\text{Totale}$$

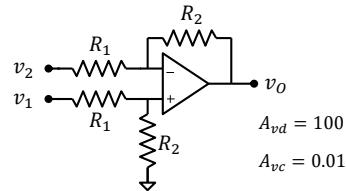
$$\text{Errore} = 0.1\%$$

Esempio: amplificatore differenziale con guadagno 100

Supponiamo $v_2 = 1.001\text{V}$, $v_1 = 0.999\text{V} \rightarrow v_c = 1\text{V}$, $v_d = 0.002\text{V}$

IDEALMENTE: $v_o = 100 \times 0.002\text{V} = 0.2\text{V}$

Configurazione differenziale



$$A_{vd} = 100$$

$$A_{vc} = 0.01$$

$$V_{OS} = 1\text{mV}$$

$$v_0 = A_{vd} v_d + A_{vc} v_c + (1 + A_{vd}) V_{OS}$$

$$100 \cdot 0.002\text{V} \quad 10^{-2} \cdot 1\text{V}$$

$$0.2\text{V} \quad 0.01\text{V}$$

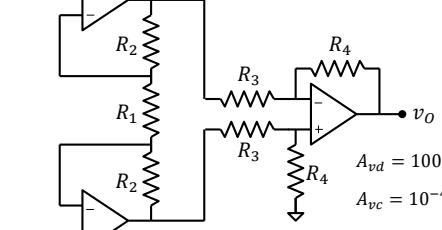
$$0.101\text{V}$$

$$\text{Totale}$$

$$0.311\text{V}$$

$$\text{Errore} = 55\%$$

Amplificatore per strumentazione



$$A_{vd} = 100 \quad A_{vc} = 10^{-4} \quad V_{OS} = 1\text{mV}$$

$$v_0 = A_{vd} v_d + A_{vc} v_c + 2V_{OS}$$

$$100 \cdot 0.002\text{V} \quad 10^{-4} \cdot 1\text{V}$$

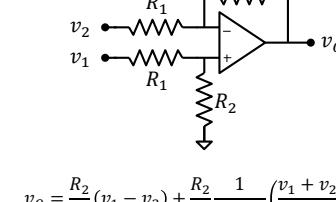
$$0.2\text{V} \quad 0.0001\text{V}$$

$$0.2021\text{V}$$

Esempio: amplificatore differenziale con guadagno 10³

Configurazione differenziale

Supponiamo:
 $V_{OS} = 1\text{mV}$
 $CMRR = 10^4$



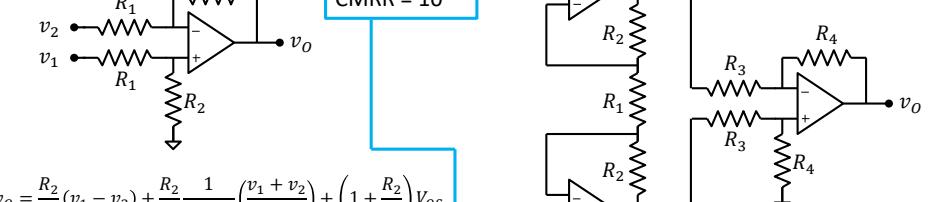
$$v_0 = \frac{R_2}{R_1} (v_1 - v_2) + \frac{R_2}{R_1 CMRR} \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) + \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{OS}$$

$$R_2 = 1\text{M}\Omega \quad \rightarrow \quad A_{vd} = \frac{R_2}{R_1} = 1000$$

$$A_{vc} = \frac{R_2}{R_1 CMRR} = \frac{1000}{10^4} = 0.1$$

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{OS} = 1.01\text{V}$$

$$\text{x10!}$$



$$v_0 = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) (v_1 - v_2) + \frac{R_4}{R_3 CMRR} \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \right) + \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) V_{OS}$$

$$R_3 = 1\text{k}\Omega \quad R_4 = 1\text{k}\Omega \quad \rightarrow \quad \left(1 + \frac{R_4}{R_3} \right) V_{OS} = 2\text{mV}$$

$$\text{Invariato!}$$

$$R_1 = 1\text{k}\Omega \quad R_2 = 495\text{k}\Omega \quad \rightarrow \quad A_{vd} = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right) = 100$$

$$A_{vc} = \frac{R_3}{R_4 CMRR} = \frac{1}{10^4} = 0.0001$$

$$\text{Invariato!}$$

Rappresentazione grafica mediante i diagrammi di bode

- Forma canonica di Bode
- Diagrammi di Bode
- Rappresentazione asintotica della funzione di trasferimento mediante i diagrammi di Bode

Espressione della funzione di trasferimento di un filtro

FORMA CANONICA DI BODE

- In generale la funzione di trasferimento di un filtro può essere scritta come il rapporto di due polinomi complessi nella variabile $i\omega$, $P(\omega)$ e $Q(\omega)$:

$$W(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$$

- Assumendo $s = i\omega$ la funzione di trasferimento può essere riscritta:

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- $P(s)$ e $Q(s)$ hanno coefficienti reali.

Espressione della funzione di trasferimento di un filtro

- Un generico polinomio a coefficienti reali si può scrivere nel modo seguente:

$$P(s) = C \cdot s^m \cdot (s - x_1)(s - x_2) \dots (s^2 + b_1s + c_1)(s^2 + b_2s + c_2)$$

- ◆ m indica la molteplicità dell'eventuale radice in $s=0$.
 - Se il polinomio non ha radici nell'origine (cioè $P(0) \neq 0$) allora $m=0$.
- ◆ x_1, x_2 , sono le radici reali non nulle del polinomio.
- ◆ I trinomi $s^2 + b_i s + c_i$ rappresentano le radici complesse coniugate
- ◆ C è una costante reale (coincidente con il coefficiente di grado massimo)

- Raccogliendo il termine noto di ciascun binomio/trinomio, è possibile riscrivere il polinomio:

$$P(s) = P_0 \cdot s^m \cdot \left(1 + \frac{s}{x_1}\right) \left(1 + \frac{s}{x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{b_1 s}{c_1} + \frac{s^2}{c_1}\right) \left(1 + \frac{b_2 s}{c_2} + \frac{s^2}{c_2}\right)$$

Espressione della funzione di trasferimento di un filtro

Data $W(s=i\omega)$ scriviamo usando come incognita $s = i\omega$ il numeratore e il denominatore:

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \\ &= \frac{P_0 s^n \left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z'_1} + \left(\frac{s}{z'_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z'_2} + \left(\frac{s}{z'_2}\right)^2\right]}{Q_0 s^m \left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p'_1} + \left(\frac{s}{p'_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p'_2} + \left(\frac{s}{p'_2}\right)^2\right]} \end{aligned}$$

$$\text{Definiamo: } A = \frac{P_0}{Q_0} \quad k = n - m$$

Forma canonica di Bode

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z'_1} + \left(\frac{s}{z'_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z'_2} + \left(\frac{s}{z'_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p'_1} + \left(\frac{s}{p'_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p'_2} + \left(\frac{s}{p'_2}\right)^2\right]}$$

Forma canonica di bode: definizioni

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z_2} + \left(\frac{s}{z_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p_2} + \left(\frac{s}{p_2}\right)^2\right]}$$

La funzione di trasferimento è formata da:

- Una costante reale A.
- Il fattore s^k con k numero intero positivo, negativo o nullo.

Se $k > 0$, allora $W(0) = 0$. La funzione ha uno **zero nell'origine di ordine k**

$$W(0) = A \cdot 0 = 0$$

Se $k < 0$, allora $W(0) = \infty$. La funzione ha un **polo nell'origine di ordine |k|**

$$W(0) = \frac{A}{0} = \infty$$

Se $k = 0$, la funzione è finita e non nulla per $\omega=0$. La funzione non ha né poli né zeri nell'origine

$$W(0) = A$$

Forma canonica di bode: definizioni

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z_2} + \left(\frac{s}{z_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p_2} + \left(\frac{s}{p_2}\right)^2\right]}$$

- Trinomi $[1 + 2\delta(s/z) + (s/z)^2]$ al numeratore con $z > 0, |\delta| < 1$.

- ◆ Radici: $s_{1,2} = -\delta z \pm iz\sqrt{1 - \delta^2}$
- ◆ Se $|\delta| < 1 \rightarrow$ Radici complesse coniugate:
 - $\delta > 0 \rightarrow \text{Re}(s_{1,2}) < 0 \rightarrow$ coppia di zeri complessi coniugati a parte reale negativa
 - $\delta < 0 \rightarrow \text{Re}(s_{1,2}) > 0 \rightarrow$ coppia di zeri complessi coniugati a parte reale positiva
 - $\delta = 0 \rightarrow \text{Re}(s_{1,2}) > 0$ e $s_{1,2} = \pm iz \rightarrow$ coppia di zeri complessi coniugati a parte reale nulla
- ◆ Se $|\delta| \geq 1$ l'equazione ha due radici reali ed equivale a prodotto di due binomi (rientra nel caso precedente)

Forma canonica di bode: definizioni

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z_2} + \left(\frac{s}{z_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p_2} + \left(\frac{s}{p_2}\right)^2\right]}$$

■ Binomi $\left(1 + \frac{s}{z}\right)$ al numeratore

- ◆ $s = -z$ è una radice reale del numeratore.
- ◆ $W(-z) = 0$. I coefficienti z sono detti **zeri reali della funzione di trasferimento**
 - Se $z > 0$ allora la radice è negativa e si definisce **zero reale negativo**
 - Se $z < 0$ allora la radice è positiva e si definisce **zero reale positivo**

Forma canonica di bode: definizioni

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z_2} + \left(\frac{s}{z_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p_2} + \left(\frac{s}{p_2}\right)^2\right]}$$

■ Binomi $\left(1 + \frac{s}{p}\right)$ al denominatore

- ◆ $s = -p$ è una radice reale del denominatore.
- ◆ $W(-p) = \infty$. I coefficienti p sono detti **poli reali della funzione di trasferimento**
 - Se $p > 0$ allora la radice è negativa e si definisce **polo reale negativo**
 - Se $p < 0$ allora la radice è positiva e si definisce **polo reale positivo**

Forma canonica di bode: definizioni

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z_2} + \left(\frac{s}{z_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p_2} + \left(\frac{s}{p_2}\right)^2\right]}$$

- Trinomi $[1 + 2\delta(s/p) + (s/p)^2]$ al denominatore con $p > 0, |\delta| < 1$.

- ◆ Radici: $s_{1,2} = -\delta p \pm ip\sqrt{1 - \delta^2}$
- ◆ Se $|\delta| < 1 \rightarrow$ Radici complesse coniugate:
 - $\delta > 0 \rightarrow \text{Re}(s_{1,2}) < 0 \rightarrow$ coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa
 - $\delta < 0 \rightarrow \text{Re}(s_{1,2}) > 0 \rightarrow$ coppia di poli complessi coniugati a parte reale positiva
 - $\delta = 0 \rightarrow \text{Re}(s_{1,2}) > 0$ e $s_{1,2} = \pm ip \rightarrow$ coppia di poli complessi coniugati a parte reale nulla
- ◆ Se $|\delta| \geq 1$ l'equazione ha due radici reali ed equivale a prodotto di due binomi (rientra nel caso precedente)

Diagrammi di Bode: asse x

- Nell'asse x c'è la pulsazione espressa in **decadi**, ovvero il logaritmo in base 10 di ω , normalizzato alla sua unità di misura:

$$\log_{10} \frac{\omega}{1 \text{rad/s}}$$

- Per le proprietà dei logaritmi, moltiplicare ω per 10 equivale ad aumentare di una decade, dividere ω per 10 equivale a diminuire di una decade:

$$\log_{10} \frac{(10\omega)}{1 \text{rad/s}} = \log_{10} \frac{\omega}{1 \text{rad/s}} + \log_{10} 10 = \log_{10} \frac{\omega}{1 \text{rad/s}} + 1$$

$$\log_{10} \frac{\left(\frac{\omega}{10}\right)}{1 \text{rad/s}} = \log_{10} \frac{\omega}{1 \text{rad/s}} + \log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{\omega}{1 \text{rad/s}} - 1$$

- Nel seguito per semplificare la notazione scriveremo semplicemente $\log \omega$, sottintendendo la base 10 per il logaritmo e la divisione per l'unità di misura.

Esempi di conversione pulsazione-decadi

Pulsazione	Decade
0.1 rad/s	-1
1 rad/s	0
2 rad/s	0.3
3 rad/s	0.5
4 rad/s	0.6
5 rad/s	0.7
10 rad/s	1
20 rad/s	1.3
50 rad/s	1.7
100 rad/s	2
10^3 rad/s	3
10^4 rad/s	4
10^5 rad/s	5

Come rappresentare una funzione a valori complessi

- W è una funzione complessa \rightarrow è necessario trasformarla in funzioni reali.

- Ci sono due modi per esprimere W con funzioni reali:

- ◆ Parte reale + parte immaginaria:

$$W(s) = W_R(s) + i W_I(s)$$

$$W_R = \text{Re}(W) \text{ e } W_I = \text{Im}(W)$$

- ◆ Modulo e fase

$$W(s) = A(\omega) e^{i\phi(\omega)}$$

$$A = |W| \text{ e } \phi = \angle W$$

Diagrammi di Bode:

- Il diagramma di bode rappresenta modulo e fase della funzione di trasferimento in funzione della pulsazione.

$$\omega \text{ o della frequenza } f = \frac{\omega}{2\pi}$$

(Ricordiamo che $s = i\omega$)

- **Diagramma di Bode del modulo:** rappresenta il modulo della funzione di trasferimento $|W(i\omega)|$ in funzione della pulsazione o della frequenza (noi useremo la pulsazione)

- **Diagramma di Bode della fase:** rappresenta la fase della funzione di trasferimento $\angle W(i\omega)$ in funzione della pulsazione o della frequenza

Diagrammi di Bode: asse x

- Graficamente possiamo rappresentare l'asse delle x in due modi:

- ◆ Riportando ω espressa in rad/s con spaziatura logaritmica



- ◆ Riportando $\log \omega$ e indicando il numero della decade



- Le due rappresentazioni sono equivalenti: il numero di decade nella seconda rappresentazione coincide con la potenza di 10 della prima.

Diagrammi di Bode: modulo

- Il **modulo del guadagno** è espresso in decibel (dB):
- Il Decibel è usato in generale per esprimere il rapporto (adimensionale) di due grandezze fisiche che rappresentano **la potenza o l'energia di un segnale**.
- Il Decibel è definito come:

$$A[\text{dB}] = 10 \log_{10} |A|$$

- ◆ A è il rapporto tra le potenze di due segnali
- ◆ A[dB] indica lo stesso rapporto espresso in dB

Diagrammi di Bode: modulo

- Nell'asse y del **diagramma di Bode del modulo** mettiamo il modulo del guadagno espresso così:

$$|W(i\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(|W(i\omega)|)$$

- Attenzione:

- ◆ Esprimendo il guadagno in dB si perde informazione sul segno
- ◆ Il segno del rapporto espresso in decibel non ha nulla a che fare con il segno del rapporto A:
 - $A[\text{dB}] > 0 \rightarrow A > 1$ oppure $A < -1$
 - $A[\text{dB}] = 0 \rightarrow A = 1$ oppure $A = -1$
 - $A[\text{dB}] < 0 \rightarrow -1 < A < 1$
(NON SIGNIFICA CHE IL GUADAGNO SIA NEGATIVO)

Espressione del guadagno in decibel

- La definizione di dB assume implicitamente che A sia un **rapporto di potenze**
- Quando esprimiamo A come rapporto di tensioni ($A = v_o / v_i$) è necessario convertire i segnali in potenze.
- Convenzionalmente la conversione viene fatta supponendo di applicare i segnali v_o e v_i alla stessa resistenza R.

$$P_I = \frac{v_I^2}{R} \quad P_O = \frac{v_O^2}{R}$$

- Esprimiamo il guadagno tra le potenze in dB:

$$A[\text{dB}] = 10 \log \left| \frac{P_O}{P_I} \right| = 10 \log \left| \frac{v_O^2}{v_I^2} \right| = 20 \log \left| \frac{v_O}{v_I} \right|$$

- Il dB è quindi definito come:

$A[\text{dB}] = 10 \log |A| \quad \text{se } A \text{ è un rapporto di energie o di potenze}$
oppure

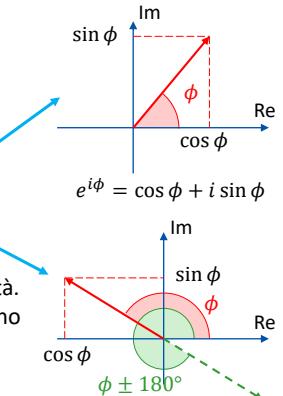
$A[\text{dB}] = 20 \log |A| \quad \text{se } A \text{ è un rapporto di tensioni o di correnti}$

Diagrammi di Bode: fase

- Il diagramma di Bode della fase riporta in asse y la fase espressa in gradi o in radienti
- La fase ha una periodicità di 360° o 2π radienti.
- La fase è definita dalla formula seguente:

$$\angle W(i\omega) = \begin{cases} \text{atan} \left[\frac{\text{Im}(W)}{\text{Re}(W)} \right] & \text{Re}(W) \geq 0 \\ \text{atan} \left[\frac{\text{Im}(W)}{\text{Re}(W)} \right] \pm 180^\circ & \text{Re}(W) < 0 \end{cases}$$

- In seguito esprimeremo sempre la fase in gradi per comodità.
- La fase fornisce anche le informazioni sul segno del guadagno (informazione persa nel diagramma di bode del modulo).



Identico per entrambi

Esempio: Guadagno $W = 100 \quad |W|_{\text{dB}} = 20 \log |100| = 40 \text{dB}$
Guadagno $W = -100 \quad |W|_{\text{dB}} = 20 \log |-100| = 40 \text{dB}$

Guadagno $W = 100 \quad \angle W = 0^\circ$
Guadagno $W = -100 = 100e^{j\pi} \quad \angle W = 180^\circ$ o -180°

Diversa a seconda del segno

Proprietà del diagramma di bode

Date due funzioni $f_1(\omega)$ e $f_2(\omega)$ allora:

$$|f_1 f_2|_{dB} = |f_1|_{dB} + |f_2|_{dB}$$

$$\angle(f_1 \cdot f_2) = \angle f_1 + \angle f_2$$

Dimostrazione

$$|f_1 f_2|_{dB} = 20 \log|f_1 f_2| = 20 \log(|f_1| \cdot |f_2|) = 20 \log|f_1| + 20 \log|f_2| = |f_1|_{dB} + |f_2|_{dB}$$

$$\angle(f_1 f_2) = \angle(|f_1| e^{i\angle f_1} |f_2| e^{i\angle f_2}) = \angle(|f_1| |f_2| e^{i(\angle f_1 + \angle f_2)}) = \angle f_1 + \angle f_2$$

Il modulo (in dB) del prodotto è pari alla somma dei moduli (in dB)

La fase del prodotto è pari alla somma delle fasi

Proprietà del diagramma di bode

$$W(s) = A \cdot s^k \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{z2} \frac{s}{z_2} + \left(\frac{s}{z_2}\right)^2\right]}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right] \left[1 + 2\delta_{p2} \frac{s}{p_2} + \left(\frac{s}{p_2}\right)^2\right]}$$

$$W(s) = A \cdot s^k \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right]}_{\text{costante}} \underbrace{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)^{-1} \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right]^{-1}}_{\text{poli reali}} \dots \underbrace{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right]}_{\text{zeri reali}} \underbrace{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)^{-1} \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right]^{-1}}_{\text{zeri complessi coniugati}} \underbrace{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \dots \left[1 + 2\delta_{z1} \frac{s}{z_1} + \left(\frac{s}{z_1}\right)^2\right]}_{\text{zeri complessi coniugati}} \underbrace{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)^{-1} \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)^{-1} \dots \left[1 + 2\delta_{p1} \frac{s}{p_1} + \left(\frac{s}{p_1}\right)^2\right]^{-1}}_{\text{poli complessi coniugati}}$$

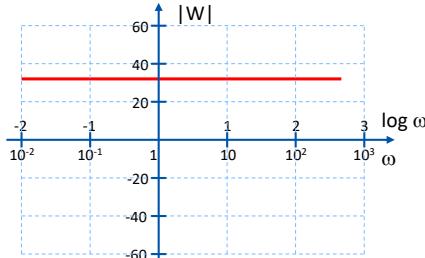
La funzione di trasferimento è data dal prodotto di termini elementari:

- costante: A
- Poli/zeri nell'origine: s^k
- Zeri reali : $1 + s/z$
- Zeri complessi coniugati: $1 + 2\delta(s/z) + (s/z)^2$
- Poli reali: $(1 + s/p)^{-1}$
- Poli complessi coniugati: $[1 + 2\delta(s/p) + (s/p)^2]^{-1}$

I diagrammi di Bode di modulo e fase si costruiscono come somma di termini elementari

Costante

Diagramma di Bode del modulo



DIAGRAMMI DI BODE DEI TERMINI ELEMENTARI

$$|A|_{dB} = 20 \log|A|$$

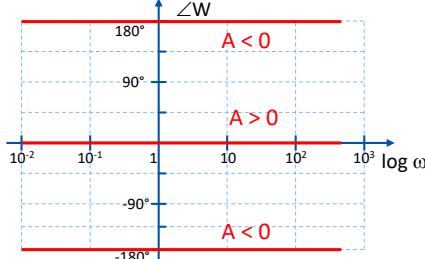
costante

$$\text{se } |A| < 1 \rightarrow |A|_{dB} < 0$$

$$\text{se } |A| = 1 \rightarrow |A|_{dB} = 0$$

$$\text{se } |A| > 1 \rightarrow |A|_{dB} > 0$$

Diagramma di Bode della fase



Solo due casi:

$$\text{Se } A > 0 \quad A = Ae^{i \cdot 0} \quad \angle A = 0^\circ$$

$$\text{Se } A < 0 \quad A = |A|e^{-i \cdot \pi} \quad \angle A = -180^\circ$$

$$\begin{cases} A = |A|e^{i \cdot \pi} & \text{oppure} \\ A = |A|e^{i \cdot \pi} & \angle A = +180^\circ \end{cases}$$

Ricordiamo che la fase è periodica di 360° (2π radianti)

Zeri e poli nell'origine

Diagramma di Bode del modulo

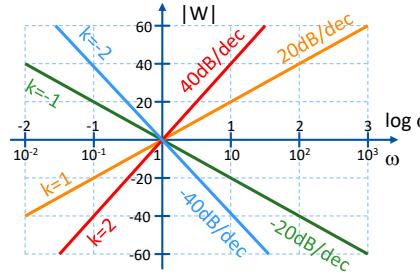
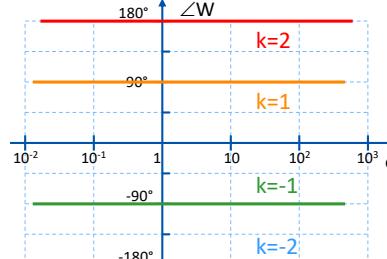


Diagramma di Bode della fase



Zeri e poli nell'origine sono identificati dal termine $(i\omega)^k$

$$|(i\omega)^k|_{dB} = 20 \log(\omega^k) = 20k \cdot \log \omega$$

Retta di pendenza 20k dB/dec

- Pendenza positiva se zero
- Pendenza negativa se polo
- Nulla se non ci sono zeri/poli nell'origine

Aumentando ω di un fattore 10 (1 decade), il modulo aumenta/diminuisce di 20k dB

$$\angle(i\omega)^k = \angle\left(\omega e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^k = \angle e^{i\frac{\pi}{2}k} = k \frac{\pi}{2}$$

$$\angle(i\omega)^k = k \cdot 90^\circ$$

fase costante di $90^\circ \cdot k$

- Positiva se zero
- Negativa se polo
- Nulla se non ci sono zeri/poli nell'origine

Binomi

Un binomio al numeratore introduce uno zero reale in $s = -\omega_0$

Un binomio al denominatore introduce un polo reale $s = -\omega_0$

$1 + \frac{s}{\omega_0}$ Se $\omega_0 > 0$, zero/polo negativo

$$1 + \frac{s}{\omega_0}$$

Se $\omega_0 < 0$, zero/polo positivo

$$1 - \frac{s}{-\omega_0} = 1 - \frac{s}{\omega'_0}$$

$$\omega'_0 = |\omega_0|$$

Riscriviamo il binomio in questo modo:

$$1 \pm \frac{s}{\omega_0}$$

con ω_0 sempre positivo

"+ se polo reale negativo
"- se polo reale positivo

Zero reale: fase

$$\angle \left(1 \pm \frac{i\omega}{\omega_z} \right) = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}W}{\text{Re}W} \right) = \pm \text{atan} \frac{\omega}{\omega_z}$$

"+ se zero reale negativo
"- se zero reale positivo

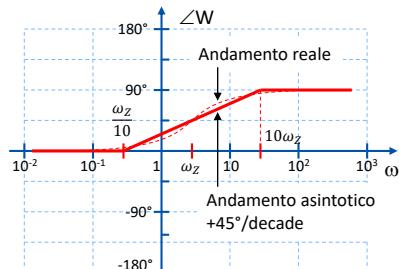
Andamento asintotico:

$$\text{Se } \omega \ll \omega_z \rightarrow \pm \text{atan} \frac{\omega}{\omega_z} \rightarrow 0$$

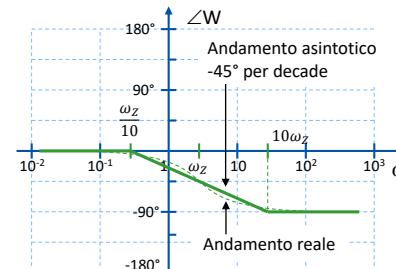
$$\text{Se } \omega \gg \omega_z \rightarrow \pm \text{atan} \frac{\omega}{\omega_z} \rightarrow \pm 90^\circ$$

+90°, se zero reale negativo
-90°, se zero reale positivo

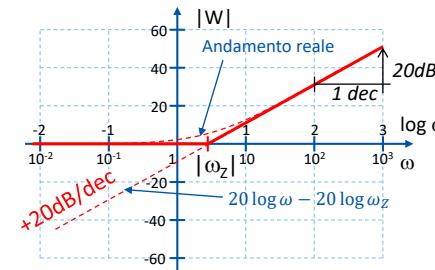
$$\text{Zero reale negativo } 1 + \frac{i\omega}{\omega_z}$$



$$\text{Zero reale positivo } 1 - \frac{i\omega}{\omega_z}$$



Zero reale: modulo



+" se polo reale negativo

$$\left| 1 \pm \frac{i\omega}{\omega_z} \right|_{dB} = 20 \log \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}} \right)$$

"- se polo reale positivo

Andamento asintotico:

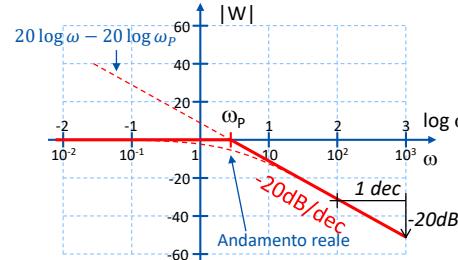
$$\text{Se } \omega \ll \omega_z \rightarrow |W|_{dB} \cong 20 \log(\sqrt{1}) = 0dB \quad \text{costante}$$

$$\text{Se } \omega \gg \omega_z \rightarrow |W|_{dB} \cong 20 \log \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_z^2}} \right) = 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_z} \right) = 20 \log \omega - 20 \log \omega_z$$

Retta con pendenza 20dB/dec e passante per $\log \omega_z$

Il comportamento è indipendente dal segno dello zero

Polo reale: modulo



+" se zero reale negativo

$$20 \log \frac{1}{\left| 1 \pm \frac{i\omega}{\omega_p} \right|} = -20 \log \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}} \right)$$

"- se zero reale positivo

Andamento asintotico:

$$\text{Se } \omega \ll \omega_p \rightarrow |W|_{dB} \cong -20 \log(\sqrt{1}) = 0dB \quad \text{costante}$$

$$\text{Se } \omega \gg \omega_p \rightarrow |W|_{dB} \cong -20 \log \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_p^2}} \right) = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right) = -20 \log \omega + 20 \log \omega_p$$

Retta con pendenza 20dB/dec e passante per $\log \omega_p$

Il comportamento è indipendente dal segno del polo

Polo reale: fase

$$\angle \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\omega_p}} = \angle 1 \mp \frac{i\omega}{\omega_p} = \mp \operatorname{atan} \frac{\omega}{\omega_p} = \mp \operatorname{atan} \frac{\omega}{\omega_p}$$

se polo reale negativo

se polo reale positivo

Andamento asintotico:

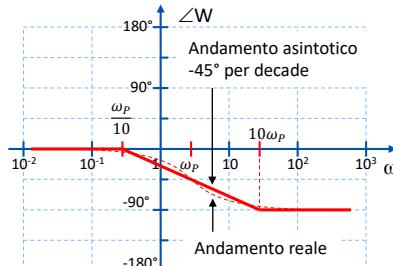
$$\text{Se } \omega \ll \omega_p \rightarrow \mp \operatorname{atan} \frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow 0$$

$$\text{Se } \omega \gg \omega_p \rightarrow \mp \operatorname{atan} \frac{\omega}{\omega_p} \rightarrow \mp 90^\circ$$

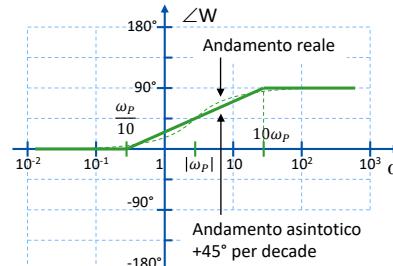
-90° se polo reale negativo

+90° se polo reale positivo

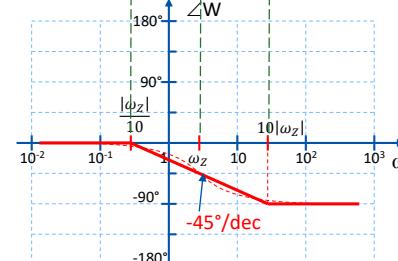
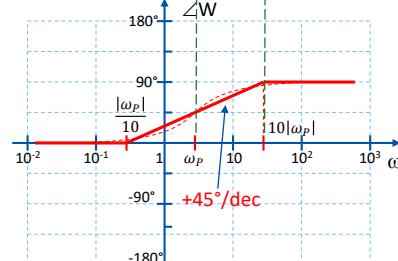
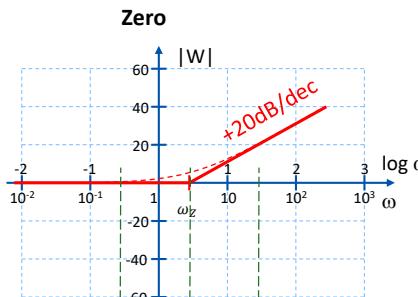
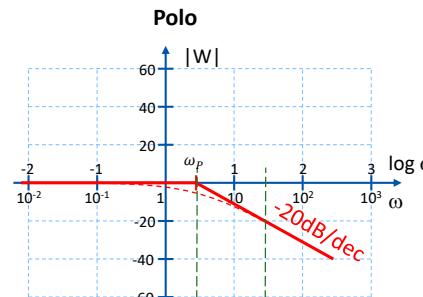
$$\text{Polo reale negativo } (1 + \frac{i\omega}{\omega_p})^{-1}$$



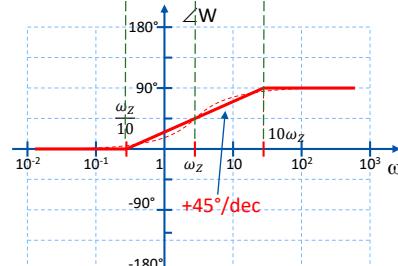
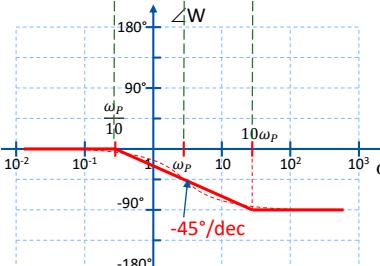
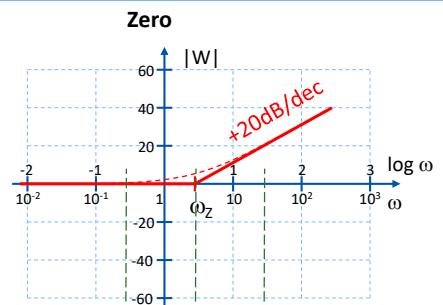
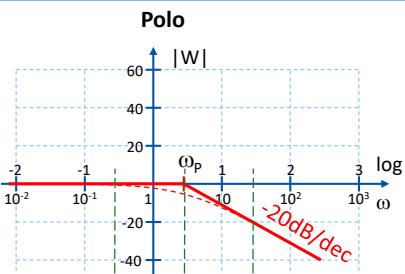
$$\text{Polo reale positivo } (1 - \frac{i\omega}{\omega_p})^{-1}$$



Polo vs zero (reali positivi)



Polo vs zero (reali negativi)



Trinomi

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$

radici

$$(\omega_0 > 0) \quad \frac{s}{\omega_0} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1} \quad \rightarrow \quad s = -\delta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Se $\delta^2 - 1 > 0$ → Le radici sono reali e il trinomio equivale al prodotto di due monomi (coppia di poli reali o zeri reali)

Se $\delta^2 - 1 < 0$ → Le radici sono complesse coniugate:

$$-1 < \delta < 1 \quad s = -\delta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1 - \delta^2}$$

a parte reale positiva se $\delta < 0$

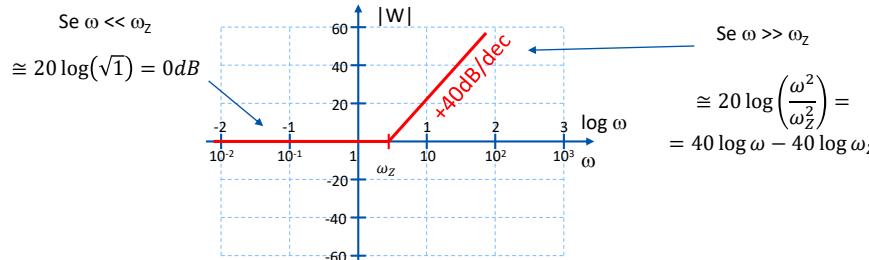
a parte reale negativa se $\delta > 0$

Coppia di zeri complessi coniugati: modulo

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_z} + \left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2 = 1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_z} + \left(\frac{i\omega}{\omega_z}\right)^2 = 1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}_{\text{Parte reale}} + i2\delta \frac{\omega}{\omega_z} \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}_{\text{Parte immaginaria}}$$

Modulo: $\left|1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_z} + \left(\frac{i\omega}{\omega_z}\right)^2\right|_{dB} = 20 \log \left(\sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^4 + 4\delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} \right)$

Andamento asintotico (indipendente dal segno di δ)



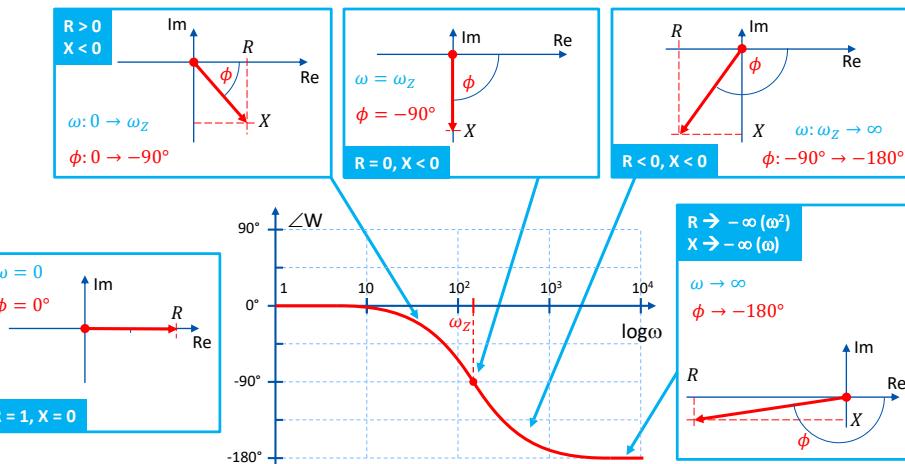
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

33

Coppia di zeri complessi coniugati: fase

caso $-1 < \delta < 0$
parte reale positiva

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_z} + \left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2 = 1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_z} + \left(\frac{i\omega}{\omega_z}\right)^2 = 1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}_{\text{Parte reale (R)}} + i \cdot 2\delta \frac{\omega}{\omega_z} \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}_{\text{Parte immaginaria (X)}}$$



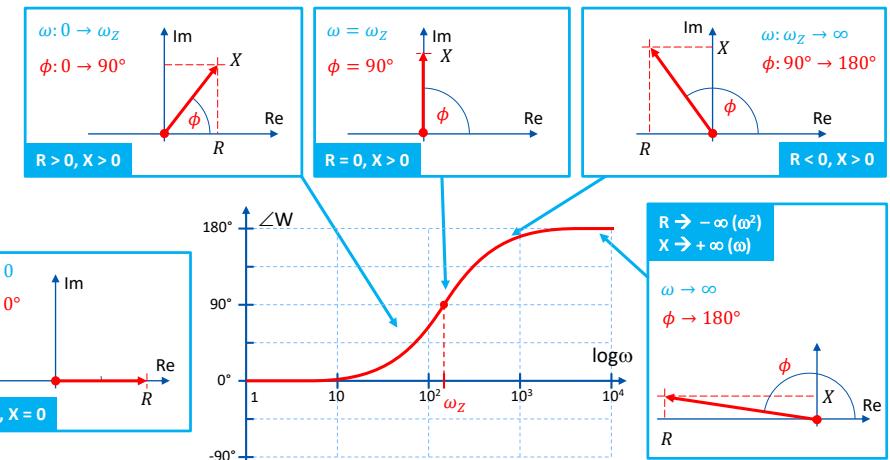
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

36

Coppia di zeri complessi coniugati: fase

caso $0 < \delta < 1$:
parte reale negativa

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_z} + \left(\frac{s}{\omega_z}\right)^2 = 1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_z} + \left(\frac{i\omega}{\omega_z}\right)^2 = 1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}_{\text{Parte reale (R)}} + i \cdot 2\delta \frac{\omega}{\omega_z} \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}_{\text{Parte immaginaria (X)}}$$



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

35

Coppia di zeri complessi coniugati: fase

Approssimazione asintotica

Lo sfasamento avviene nell'intervallo:

$$\omega_1 = \frac{\omega_z}{10^{|\delta|}} \quad \omega_2 = \omega_z 10^{|\delta|}$$

$\delta > 0 \rightarrow$ sfasamento complessivo 180°

Pendenza:

$$\frac{+180^\circ}{\log \omega_z 10^\delta - \log \frac{\omega_z}{10^\delta}} = \frac{+180^\circ}{\log \frac{10^\delta \omega_z 10^\delta}{\omega_z}} = \frac{90^\circ}{\delta}$$

$\delta < 0 \rightarrow$ sfasamento complessivo -180°

Pendenza:

$$\frac{-180^\circ}{\log \omega_z 10^{-\delta} - \log \frac{\omega_z}{10^{-\delta}}} = \frac{-180^\circ * \frac{90^\circ}{\delta}}{\log \frac{10^{-\delta} \omega_z 10^{-\delta}}{\omega_z}} = \frac{90^\circ}{\delta}$$

Lo sfasamento avviene tra: $\frac{\omega_z}{10^{|\delta|}}$ e $\omega_z 10^{|\delta|}$ con pendenza: $\frac{90^\circ}{\delta} / \text{dec}$:

- Positiva se $\delta > 0$
- Negativa se $\delta < 0$
- Infinita se $\delta = 0$

$|\delta|$ è l'ampiezza in decadi dell'intervallo ($\log \omega_z \pm \delta$) in cui avviene lo sfasamento di $\pm 180^\circ$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

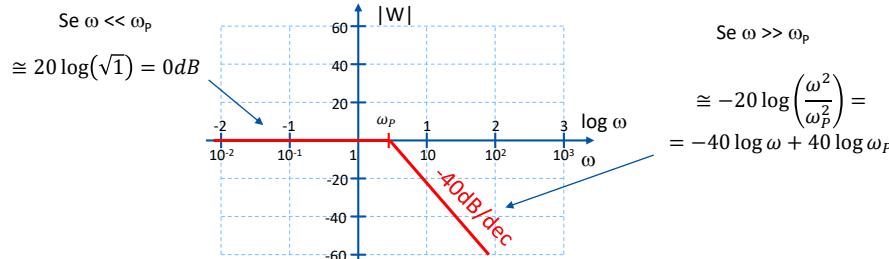
38

Coppia di poli complessi coniugati: modulo

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 = 1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_p} + \left(\frac{i\omega}{\omega_p}\right)^2 = 1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}_{\text{Parte reale}} + i2\delta \frac{\omega}{\omega_p} \underbrace{\left(\frac{i\omega}{\omega_p}\right)^2}_{\text{Parte immaginaria}}$$

Modulo: $\left| \frac{1}{1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_p} + \left(\frac{i\omega}{\omega_p}\right)^2} \right|_{dB} = -20 \log \left(\sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^4 + 4\delta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \right)$

Andamento asintotico (indipendente dal segno di δ)

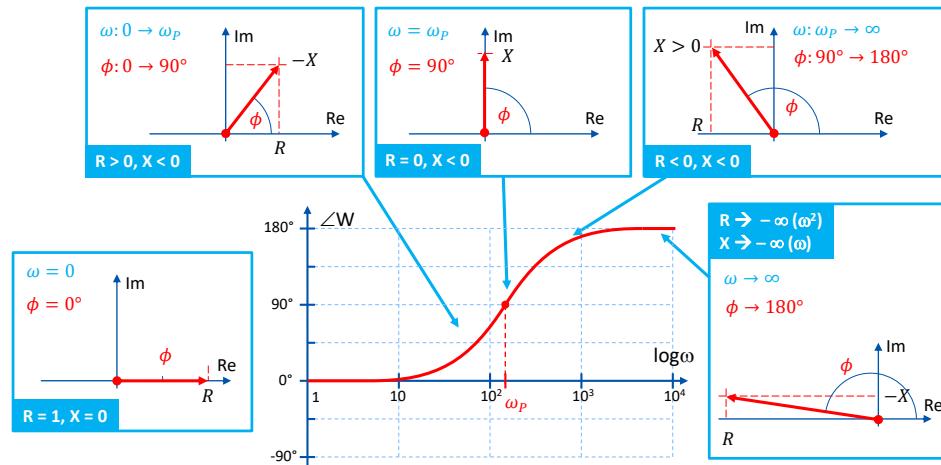


Coppia di poli complessi coniugati: fase

caso $-1 < \delta < 0$:
 parte reale negativa

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 = 1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_p} + \left(\frac{i\omega}{\omega_p}\right)^2 = 1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}_{\text{Parte reale (R)}} + i \cdot \underbrace{2\delta \frac{\omega}{\omega_p}}_{\text{Parte immaginaria (X)}}$$

$$\angle \frac{1}{R+iX} = \angle(R-iX)$$



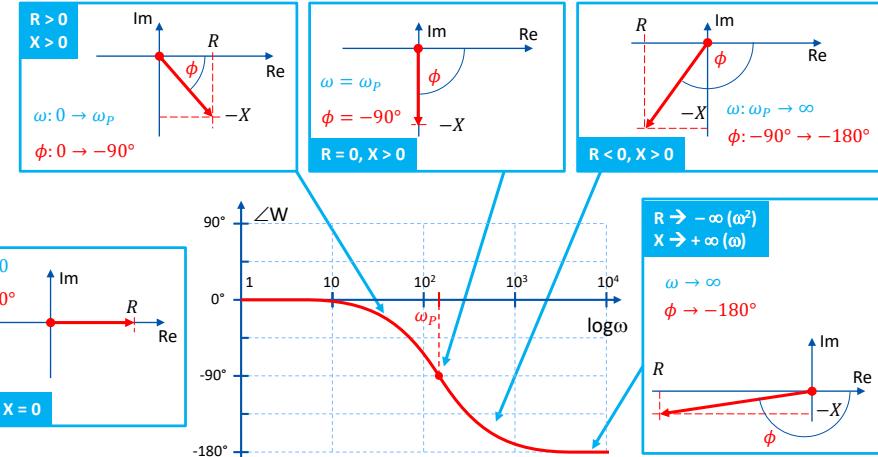
Coppia di poli complessi coniugati: fase

caso $0 < \delta < 1$

parte reale negativa

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 = 1 + 2\delta \frac{i\omega}{\omega_p} + \left(\frac{i\omega}{\omega_p}\right)^2 = 1 - \underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}_{\text{Parte reale (R)}} + i \cdot \underbrace{2\delta \frac{\omega}{\omega_p}}_{\text{Parte immaginaria (X)}}$$

$$\angle \frac{1}{R+iX} = \angle(R-iX)$$



Coppia di poli complessi coniugati: fase

Approssimazione asintotica

Lo sfasamento avviene nell'intervallo:

$$\omega_1 = \frac{\omega_p}{10^{|\delta|}} \quad \omega_2 = \omega_p 10^{|\delta|}$$

$\delta > 0 \rightarrow$ sfasamento complessivo -180°

Pendenza:

$$\frac{-180^\circ}{\log \omega_p 10^\delta - \log \frac{\omega_p}{10^\delta}} = \frac{-180^\circ}{\log \frac{10^\delta \omega_p 10^\delta}{\omega_p}} = \frac{-180^\circ}{\log 10^\delta} = -\frac{180^\circ}{\delta}$$

$\delta < 0 \rightarrow$ sfasamento complessivo 180°

Pendenza:

$$\frac{180^\circ}{\log \omega_p 10^{-\delta} - \log \frac{\omega_p}{10^{-\delta}}} = \frac{180^\circ}{\log \frac{10^{-\delta} \omega_p 10^{-\delta}}{\omega_p}} = \frac{180^\circ}{\log 10^{-\delta}} = \frac{180^\circ}{-\delta}$$

Lo sfasamento avviene tra: $\frac{\omega_p}{10^{|\delta|}}$ e $\omega_p 10^{|\delta|}$ con pendenza: $\frac{-90^\circ}{\delta}/\text{dec}$:

- Negativa se $\delta > 0$
- Positiva se $\delta < 0$
- Infinita se $\delta = 0$

$|\delta|$ è l'ampiezza in decadi dell'intervallo $(\log \omega_p \pm \delta)$ in cui avviene lo sfasamento di $\pm 180^\circ$

PROCEDIMENTO PER TRACCIARE IL DIAGRAMMA DI BODE

$$W(s) = Bs^2 \frac{5 + \tau_3 s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(as^2 + bs + c)}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 10^{-1} & a &= 10^{-8} \\ \tau_2 &= 10^{-2} & b &= 10^{-4} \\ \tau_3 &= 2.5 \cdot 10^{-5} & c &= 4 \\ && B &= -8 \end{aligned}$$

1) Scriviamo la funzione in forma canonica di Bode calcolando le pulsazioni di zeri e poli:

$$W(s) = -8s^2 \frac{\frac{5}{\omega_{Z1}} \left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)(as^2 + bs + c)}$$

$\omega_{P1} = \frac{1}{\tau_1} = 10^1$

$\omega_{P2} = \frac{1}{\tau_2} = 10^2$

in questo modo
otteniamo l'informazione
sulla pulsazione

N.B. I valori delle costanti di tempo sono in secondi e le pulsazioni in rad/secondo

Procedimento

$$W(s) = Bs^2 \frac{5 + \tau_3 s}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)(as^2 + bs + c)}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 10^{-1} & a &= 10^{-8} \\ \tau_2 &= 10^{-2} & b &= 2 \cdot 10^{-4} \\ \tau_3 &= 2.5 \cdot 10^{-5} & c &= 4 \\ && B &= -8 \end{aligned}$$

1) Scriviamo la funzione in forma canonica di Bode calcolando le pulsazioni di zeri e poli:

$$W(s) = -8s^2 \frac{5 \left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)(as^2 + bs + c)}$$

Scrivere nella forma: $1 + 2\delta \frac{s}{\omega_{P3}} + \left(\frac{s}{\omega_{P3}}\right)^2$

Raccogliamo c per avere termine noto 1

coff. grado 1 = $\frac{2\delta}{\omega_{P3}}$

coff. grado 2 = $\frac{1}{\omega_{P3}^2}$

$\delta = \frac{1}{2} \frac{b}{4} \omega_{P3} = 0.5$

$\omega_{P3} = \sqrt{4/a} = 2 \cdot 10^4$

$A = B \cdot \frac{5}{4} = -10$

In caso contrario si hanno due poli reali

$$W(s) = -8s^2 \frac{5 \left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)4 \left[1 + 2\delta \frac{s}{\omega_{P3}} + \left(\frac{s}{\omega_{P3}}\right)^2\right]}$$

N.B. I valori delle costanti di tempo sono in secondi e le pulsazioni in rad/secondo

Procedimento

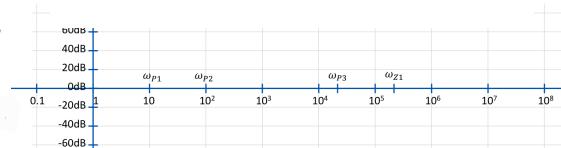
$$W(s) = As^2 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)\left[1 + 2\delta \frac{s}{\omega_{P3}} + \left(\frac{s}{\omega_{P3}}\right)^2\right]}$$

2) Disegniamo l'asse x partendo da almeno 2 decadi prima del minimo tra poli e zeri fino a almeno 2 decadi oltre il più grande tra poli e zeri e mettiamo nell'asse x i valori di poli e zeri

$$\text{Minimo} = \omega_{P1} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\text{Massimo} = \omega_{Z1} = 2 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$$

Partiamo da 0.1 rad/s e arriviamo a 10^8 rad/s



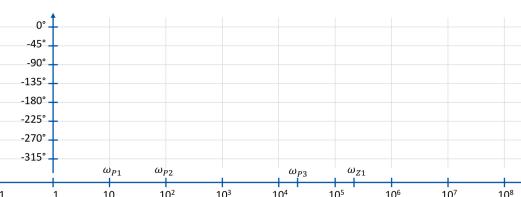
3) Segniamo i poli e gli zeri nell'asse x in decadi:

$$\log \omega_{Z1} = 5.3$$

$$\log \omega_{P1} = 1$$

$$\log \omega_{P2} = 2$$

$$\log \omega_{P3} = 4.3$$



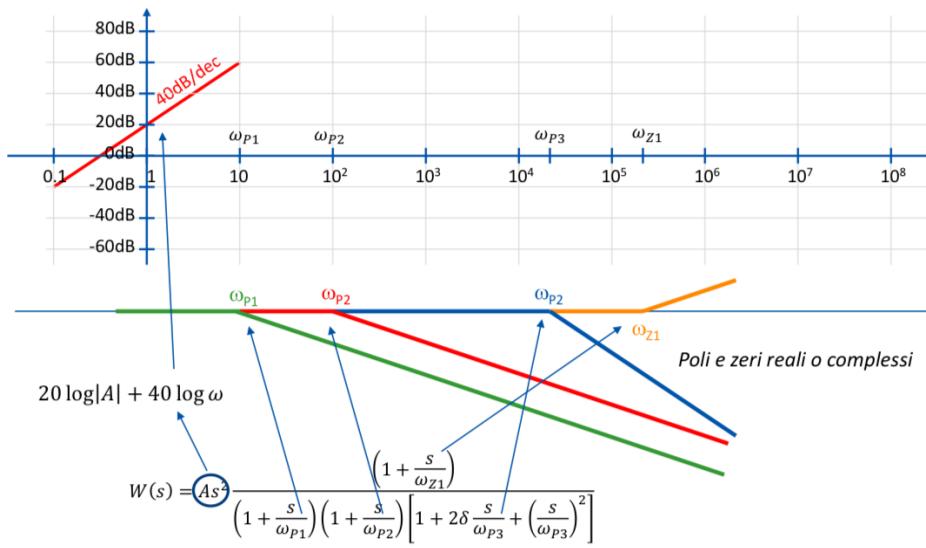
6a) Calcoliamo la pendenza iniziale del modulo e tracciamo il grafico del modulo fino a ω_0

$$W(s) = As^2 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)\left[1 + 2\delta \frac{s}{\omega_{P3}} + \left(\frac{s}{\omega_{P3}}\right)^2\right]}$$

Zero doppio nell'origine ($k = 2$)

Pendenza per $\omega < \omega_{P1} = +40 \text{ dB/dec}$ ($2 \times 20 \text{ dB/dec}$)

Diagramma di bode del modulo



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

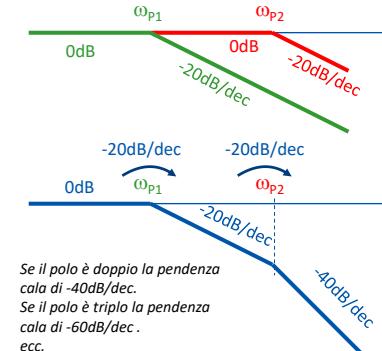
51

Procedimento: per il modulo

7a) Procediamo lungo l'asse delle x tracciando i segmenti che approssimano il modulo della funzione di trasferimento da un polo/zero al successivo. La pendenza cambia ogni volta che troviamo un polo o uno zero:

N.B. i diagrammi asintotici di Bode sono spezzate di rette: sommare due rette significa sommare la loro pendenza.

Ogni volta che incontriamo un polo la pendenza cala di -20dB/dec



Ogni volta che incontriamo uno zero la pendenza aumenta di $+20\text{dB/dec}$

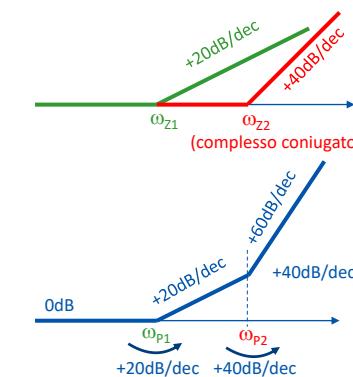
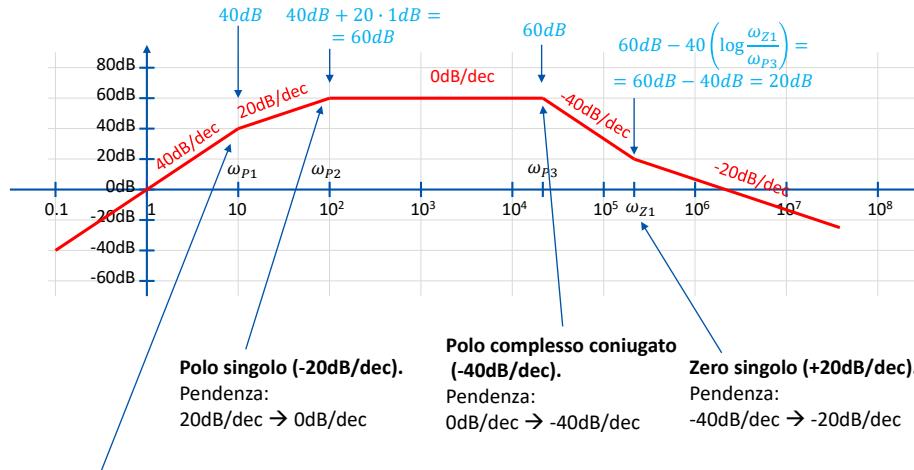


Diagramma di bode del modulo



Polo singolo (-20dB/dec).
Pendenza:
 $40\text{dB/dec} \rightarrow 20\text{dB/dec}$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

53

Procedimento: per la fase

4b) Calcoliamo la fase iniziale

Se la costante moltiplicativa è positiva partiamo da 0°

Se la costante moltiplicativa è negativa partiamo da -180° o 180°

Nel nostro esempio:

$$W(\omega) = As^2 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)\left[1 + 2\delta \frac{s}{\omega_{p3}} + \left(\frac{s}{\omega_{p3}}\right)^2\right]}$$

$$A = -10s^2$$

Negativa \rightarrow prendiamo come fase iniziale -180°

Polo doppio ($k=2$) \rightarrow $+90$ gradi per ciascun polo:

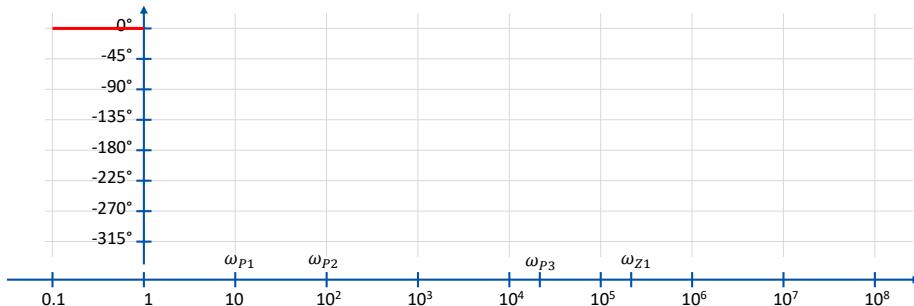
$$\text{Fase iniziale: } -180^\circ + 2 \times 90^\circ = 0^\circ$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

54

Procedimento: per la fase



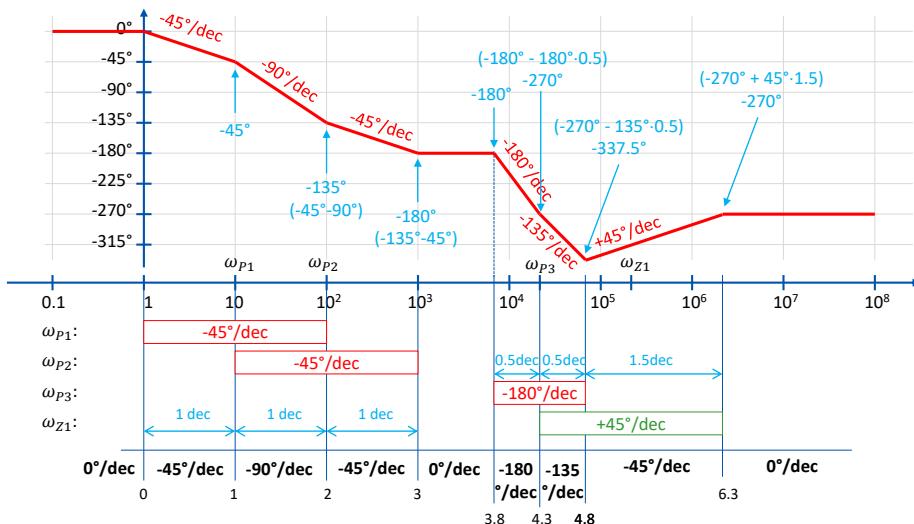
5b) Per ciascun polo e zero identifichiamo l'intervallo intorno al polo o zero in cui avviene lo sfasamento:

$$\text{Polo/zero reale: } \log \frac{\omega_0}{10} = \log \omega_0 - 1 \quad \log 10\omega_0 = \log \omega_0 + 1$$

$$\text{Polo/zero complesso: } \log \frac{\omega_0}{10^{|\delta|}} = \log \omega_0 - |\delta| \quad \log 10^{|\delta|}\omega_0 = \log \omega_0 + |\delta|$$

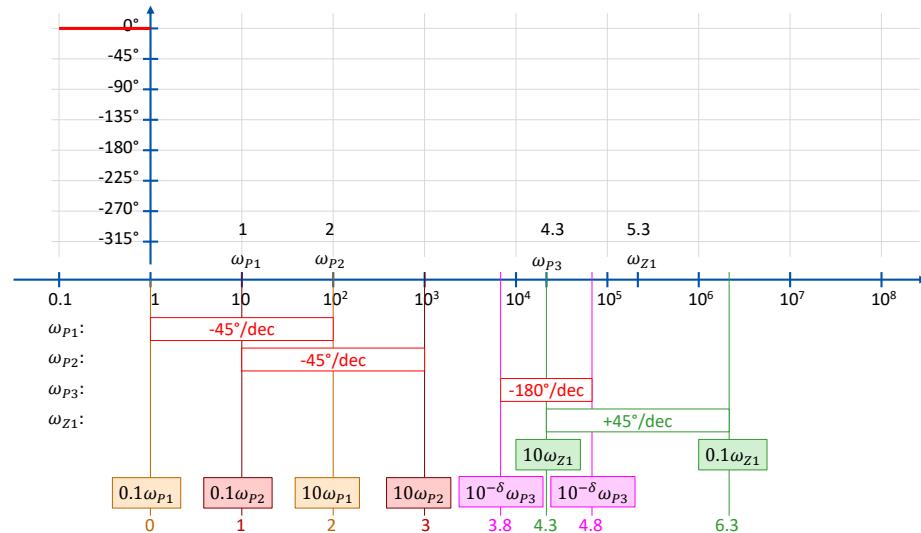
In questo caso abbiamo una sola coppia di poli complessi con $\delta = 0.5$ (metà decade) $\frac{-90^\circ}{\delta} = -180^\circ/\text{dec}$

Procedimento: per la fase



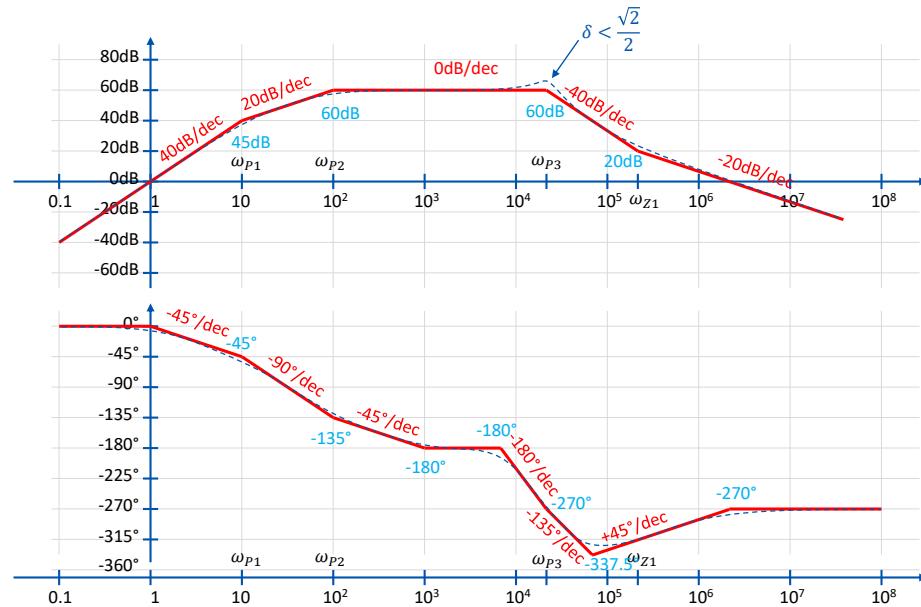
7b) in ciascun segmento sommiamo lo sfasamento iniziale e quello indotto dal polo/zero e tracciamo il grafico con le pendenze calcolate.

Procedimento: per la fase



6b) Per intervallo riportiamo la pendenza della fase (es. $-45^\circ/\text{dec}$ per un polo reale negativo, $-90^\circ/\text{dec}$ per un polo complesso a parte reale negativa, ecc.)

Diagramma di bode del modulo e fase



In regime di corrente continua (DC):



In regime di corrente alternata (AC) o di transitorio (segnali tempo-varianti):

$$\text{Capacitor symbol} \rightarrow i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$$

$$\text{Inductor symbol} \rightarrow v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Breve ripasso: fasori

In regime di corrente alternata (AC), tensione e corrente sono sinusoidali:

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi) \quad V_0 = \text{modulo}, \phi = \text{fase}$$

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad I_0 = \text{modulo}, \phi = \text{fase}$$



Il seno (e il coseno) possono essere espressi come combinazione lineare di esponenziali complessi:

$$\sin(\omega t + \phi) = \frac{e^{i(\omega t + \phi)} - e^{-i(\omega t + \phi)}}{2i}$$

Grazie alla sovrapposizione degli effetti è possibile studiare le reti sinusoidali mediante segnali esponenziali complessi:

$$v(t) = V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$i(t) = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Breve ripasso: fasori

In regime di corrente alternata (AC), tensione e corrente possono essere espresse mediante un fasore:

$$v(t) = V_0 e^{i(\omega t + \phi)} = V_0 e^{i\phi} e^{i\omega t} \quad V_0 = \text{modulo}, \phi = \text{fase}$$

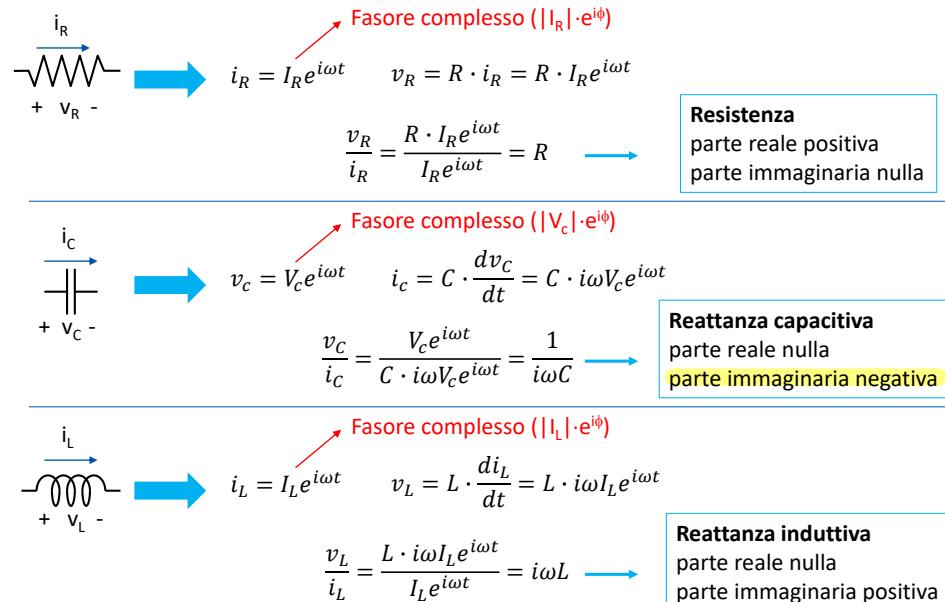
$$i(t) = I_0 e^{i(\omega t + \phi)} = I_0 e^{i\phi} e^{i\omega t} \quad I_0 = \text{modulo}, \phi = \text{fase}$$



Rappresentiamo in questo modo:

$$\begin{aligned} v(t) &= V e^{i\omega t} & V &= V_0 e^{i\phi} & V \text{ e } I \text{ sono numeri complessi,} \\ i(t) &= I e^{i\omega t} & I &= I_0 e^{i\phi} & \text{detti fasori che identificano il} \\ & & & & \text{modulo e la fase del segnale} \\ & & & & \text{sinusoidale.} \end{aligned}$$

Breve ripasso: fasori e legge di ohm

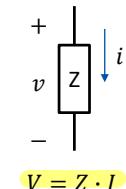


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

6

Dalla resistenza all'impedenza

- Reattanza (X) e Resistenza (R) sono unificate nel concetto di impedenza ($Z = R + iX$)
- L'impedenza generalizza la legge di Ohm estendendola ai circuiti in regime di corrente alternata
- In regime di corrente continua l'impedenza equivale alla resistenza
- In regime di corrente alternata l'impedenza è:
 - ◆ R per le resistenze
 - ◆ $i\omega L$ per gli induttori
 - ◆ $\frac{1}{i\omega C}$ per i condensatori
- Il reciproco dell'impedenza è l'ammettenza (Y)

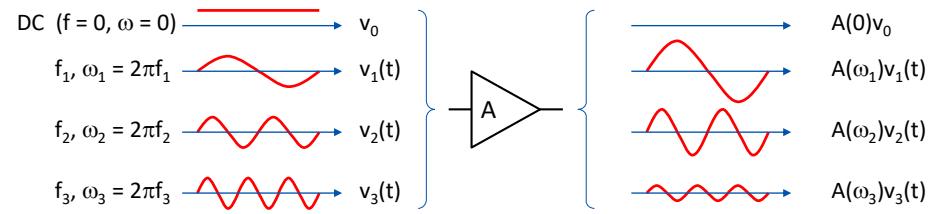


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

7

Filtro

FILTRO E FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN SISTEMA



- Un filtro è un amplificatore il cui guadagno dipende dalla frequenza (o equivalentemente dalla pulsazione, $\omega=2\pi f$) del segnale di ingresso.
- In generale il guadagno può essere:
 - ◆ Maggiore di 1 → il segnale di uscita ha un'ampiezza maggiore dell'ingresso
 - ◆ Minore di 1 → il segnale di uscita ha un'ampiezza minore dell'ingresso

Serie e paralleli di impedenze

$$\begin{array}{ll} \text{---} \text{---} \text{---} & Z = R \\ \text{---} \text{---} \text{---} & Z = i\omega L \\ \text{---} \text{---} \text{---} & Z = \frac{1}{i\omega C} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{---} \text{---} \text{---} & Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \\ \text{---} \text{---} \text{---} & \end{array}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} + \frac{1}{i\omega C}$$

$$\begin{array}{ll} \text{---} \text{---} \text{---} & Z = R + i\omega L \\ \text{---} \text{---} \text{---} & Z = R + \frac{1}{i\omega C} \\ \text{---} \text{---} \text{---} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{---} \text{---} \text{---} & Z = R + \frac{1}{i\omega C} \\ \text{---} \text{---} \text{---} & Z = \frac{1 + i\omega RC}{i\omega C} \\ \text{---} \text{---} \text{---} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{---} \text{---} \text{---} & Z = i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega C} \\ \text{---} \text{---} \text{---} & Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \\ \text{---} \text{---} \text{---} & \end{array}$$

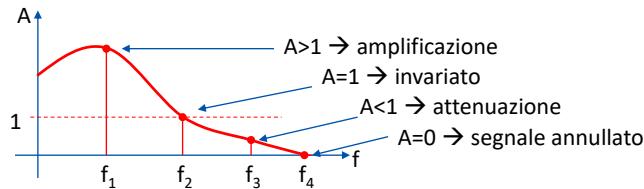
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

8

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

10

Filtro: amplificazione/attenuazione

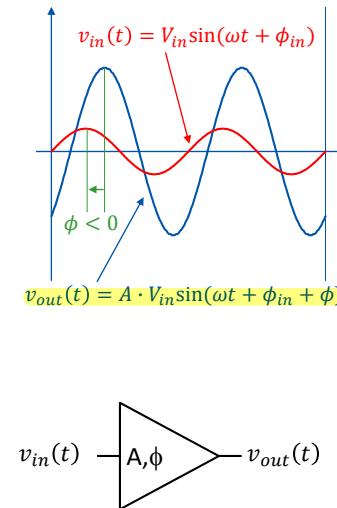


Il guadagno non è più una costante ma una certa funzione in funzione di frequenza o pulsazione

■ Un filtro con guadagno come in figura:

- ◆ Amplifica un segnale sinusoidale a frequenza f_1 (poiché $A > 1$)
- ◆ Trasmette invariato un segnale sinusoidale a frequenza f_2 (poiché $A = 1$)
- ◆ Attenua un segnale sinusoidale a frequenza f_3 (poiché $A < 1$)
- ◆ Non trasmette (cioè azzera) un segnale a frequenza f_4 (perché $A = 0$)

Filtro: sfasamento



■ Un filtro, oltre ad amplificare (o attenuare) l'ampiezza del segnale di ingresso introduce uno sfasamento tra ingresso e uscita.

■ Se all'ingresso c'è il segnale $v_{in}(t)$ sinusoidale, il segnale di uscita $v_{out}(t)$ è una sinusoida:

- ◆ Con ampiezza moltiplicata per il guadagno A
 - Se $A > 1$, v_{out} è amplificato rispetto a v_{in}
 - Se $A < 1$, v_{out} è attenuato rispetto a v_{in}
- ◆ Sfasata di un angolo ϕ rispetto all'ingresso
 - Se $\phi > 0$, v_{out} è in anticipo rispetto a v_{in}
 - Se $\phi < 0$, v_{out} è in ritardo rispetto a v_{in}

■ Come il guadagno, anche lo sfasamento dipende dalla frequenza del segnale.

Il concetto di filtro... in termini di fasori

Segnale di ingresso

Esprimiamo il segnale di ingresso con un esponenziale di frequenza f e pulsazione $\omega = 2\pi f$:

$$v_{in}(t) = |V_{in}| e^{i(\omega t + \phi_{in})} \quad \text{a cui corrisponde il fasore: } V_{IN} = |V_{in}| e^{i\phi_{in}}$$

Segnale di uscita

Il filtro produce in uscita un'onda esponenziale di frequenza f e pulsazione $\omega = 2\pi f$, ampiezza $|V_{OUT}|$ e fase ϕ_{OUT} :

$$v_{out}(t) = |V_{out}| e^{i(\omega t + \phi_{out})} \quad \text{a cui corrisponde il fasore: } V_{OUT} = |V_{out}| e^{i\phi_{out}}$$

Guadagno (come per l'amplificatore)

Definiamo il guadagno (numero complesso) del filtro data la pulsazione ω :

$$W(\omega) = \frac{v_{out}(t)}{v_{in}(t)} = \frac{|V_{out}| e^{i(\omega t + \phi_{out})}}{|V_{in}| e^{i(\omega t + \phi_{in})}} = \frac{|V_{out}| e^{i\phi_{out}}}{|V_{in}| e^{i\phi_{in}}} = \frac{|V_{out}|}{|V_{in}|} e^{i(\phi_{out} - \phi_{in})}$$

$W(\omega)$ viene detta **funzione di trasferimento** del filtro.

↳ estensione del concetto di guadagno

Funzione di trasferimento di un filtro

Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento di un filtro è definita dal rapporto tra il fasori del segnale di uscita e quello del segnale di ingresso data la pulsazione ω :

$$W(\omega) = \frac{|V_{out}|}{|V_{in}|} e^{i(\phi_{out} - \phi_{in})} \quad * \text{spesso la variabile è } S = i\omega$$

Modulo della funzione di trasferimento

$$|W(\omega)| = \frac{|V_{out}|}{|V_{in}|} \quad \text{Nota } W(\omega) \text{ è il segnale di ingresso, il modulo del segnale di uscita è:}$$

$$|V_{out}| = |W(\omega)| \cdot |V_{in}|$$

nessuna informazione sul segnale (o sulla fase)

Fase della funzione di trasferimento

$$\angle W(\omega) = \phi_{out} - \phi_{in} \quad \text{Nota } W(\omega) \text{ è il segnale di ingresso, la fase del segnale di uscita è:}$$

$$\phi_{out} = \phi_{in} + \angle W(\omega)$$

Segnale di uscita in termini di esponenziale complesso

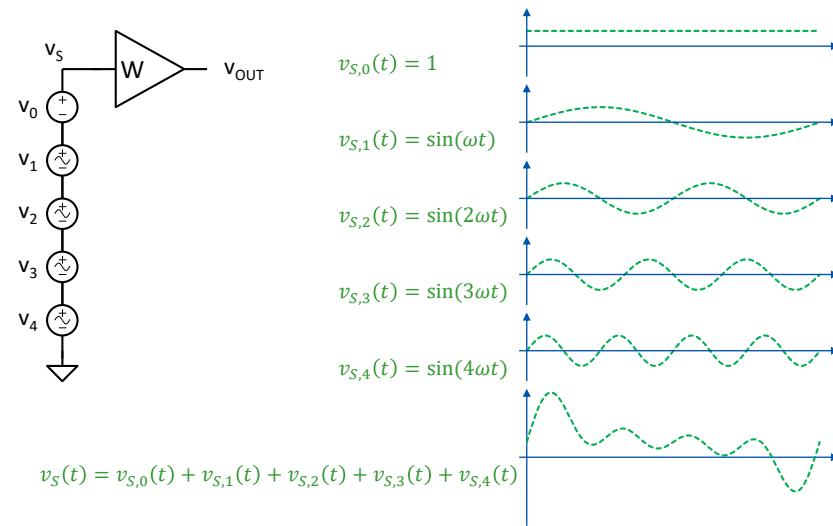
$$v_{out}(t) = |V_{out}| e^{i(\omega t + \phi_{out})} = |W(\omega)| \cdot |V_{in}| e^{i(\omega t + \phi_{in} + \angle W(\omega))}$$

Oppure usando il seno (o coseno) in termini di seno e coseno

$$v_{out}(t) = |V_{out}| \sin(\omega t + \phi_{out}) = |W(\omega)| \cdot |V_{in}| \sin(\omega t + \phi_{in} + \angle W(\omega))$$

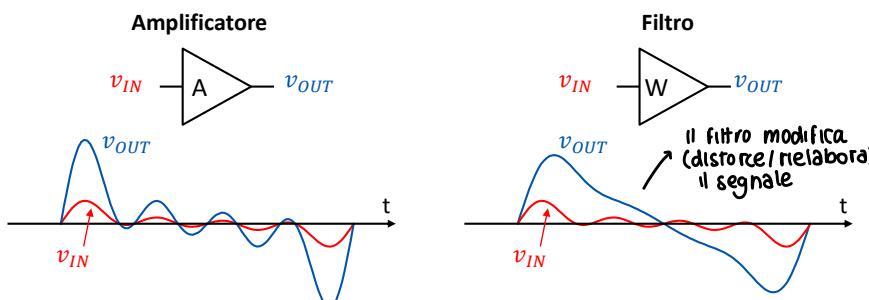
Filtro lineare

Cosa succede se all'ingresso di un filtro c'è un segnale dato dalla somma di più sinusoidi?



Dall'amplificatore al filtro

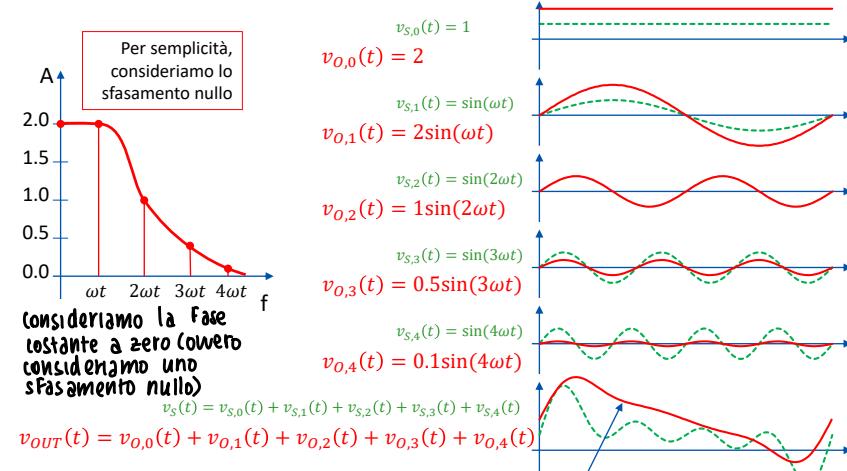
- Analizzando i segnali tempo-varianti, il concetto di **amplificatore** viene esteso al concetto di **filtro**
- Un **amplificatore** si limita a riprodurre all'uscita una versione "riscalata" dell'ingresso
- Un **filtro "rielabora"** il segnale di ingresso amplificando (o attenuandolo) e sfasando ciascuna componente sinusoidale di una quantità che è funzione della frequenza.



Filtro lineare

Cosa succede se all'ingresso di un filtro c'è un segnale dato dalla somma di più sinusoidi?

Se il filtro è realizzato mediante una rete elettrica lineare, applichiamo la sovrapposizione degli effetti



L'uscita è "elaborata" rispetto all'ingresso, perché ciascun termine del segnale ha un guadagno diverso

Generalizzazione a segnali arbitrari

- L'esempio si è limitato a pochi segnali sinusoidali sovrapposti.
- A parte la tensione alternata di rete, quasi tutti gli altri segnali fisici non hanno andamento sinusoidale e non sono periodici.
- Domande:
 - Possiamo estenderla a un segnale periodico qualunque?
 - Possiamo estenderla a un segnale arbitrario (anche non periodico).
- Risposta: SI ad entrambe le domande.
- La possibilità è offerta dal **Teorema di Fourier**

Rappresentazione dei segnali tempo-varianti

Trasformata di Fourier

- Dato un segnale $v(t)$ e la sua trasformata di Fourier $V(f)$

$$\text{antrasformata} \quad v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{i2\pi f t} df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i\omega t} dt$$

- Cosa significa? La trasformata di Fourier consente di scomporre un segnale in componenti sinusoidali, che sommate tra loro, danno origine al segnale di partenza.
- Cosa rappresenta la trasformata $V(f)$? \hookrightarrow composizione in frequenza di un segnale
- Il suo modulo $A(f) = |V(f)|$ è l'ampiezza della componente sinusoidale di frequenza f (cioè pulsazione $\omega = 2\pi f$)
- La fase di $\phi = \angle V(f)$ è la fase della componente alla frequenza f ($\omega = 2\pi f$)

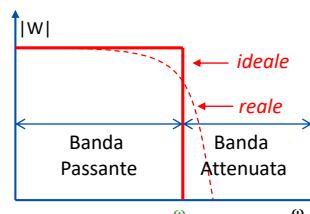
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

19

CLASSIFICAZIONE GENERALE DEI FILTRI

Filtro Passa-Basso (LP, Low-Pass)

lascia passare le componenti del segnale al di sotto di una certa pulsazione (ω_T) e taglia quelle superiori.



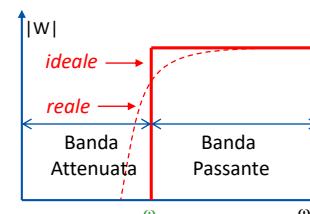
Banda Passante insieme delle frequenze in cui il guadagno è alto abbastanza per far passare il segnale

Banda Attenuata insieme delle frequenze in cui il guadagno è abbastanza basso da attenuare il segnale

Pulsazione (frequenza) di taglio Pulsazione (frequenza) che separa la banda passante da quella attenuata

Filtro Passa-Alto (HP, High-Pass)

lascia passare le componenti del segnale al di sopra di una certa pulsazione (ω_T) e taglia quelle inferiori.



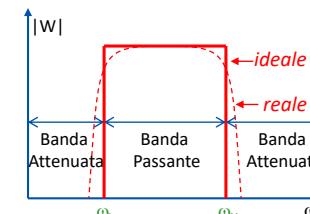
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

20

Classificazione generale dei filtri

Filtro Passa-Banda (BP, Band-Pass)

lascia passare le componenti del segnale comprese tra due valori di pulsazione ω_L e ω_H , attenuando quelle all'esterno dell'intervallo

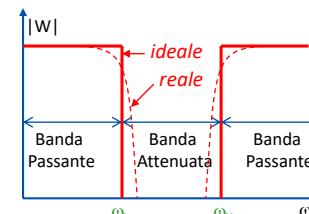


ω_L è detta frequenza di taglio inferiore

ω_H è detta frequenza di taglio superiore

Filtro Elimina-Banda (BS, Band-Stop)

lascia passare le componenti del segnale esterne all'intervallo di pulsazioni comprese tra due i valori ω_L e ω_H , attenuando quelle all'interno



Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

22

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

23

Risposta in frequenza di un filtro

- Supponiamo di avere all'ingresso di un filtro con funzione di trasferimento $W(\omega)$ il segnale ($\omega = 2\pi f$):

$$v_S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

- Il contributo infinitesimo di pulsazione ω all'ingresso:

$$dv_S(t, \omega) = e^{i\omega t} \frac{V(\omega)}{2\pi} d\omega$$

- produrrà in uscita un segnale infinitesimo:

$$dv_O(t, \omega) = W(\omega) e^{i\omega t} \frac{V(\omega)}{2\pi} d\omega$$

- In virtù della sovrapposizione degli effetti, l'uscita sarà:

$$v_O(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega t} \frac{V(\omega)}{2\pi} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [W(\omega)V(\omega)] e^{i\omega t} d\omega$$

- $W(\omega)V(\omega)$ è la trasformata di Fourier del segnale di uscita

Classificazione generale dei filtri

Filtro Passa-Tutto (AP, All-Pass)

lascia passare le componenti del segnale al di sotto di una certa pulsazione (ω_t) e taglia quelle superiori.

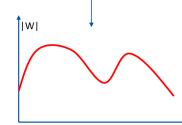


In un filtro passa-tutto il guadagno ha modulo costante, e la banda passante va da 0 a ∞

N.B. "passa-tutto" si riferisce al modulo del guadagno. In generale, la fase del guadagno è variabile

Tuttavia:

- La classificazione dei filtri appena fatta non è esaustiva. Ci sono molti filtri che non rientrano tra i tipi definiti.
- Esempi:
 - ◆ Filtro integratore (o semplicemente integratore)
 - ◆ Filtro derivatore (o semplicemente derivatore)
- In generale, in un filtro sia il modulo sia la fase del guadagno può variare in modo arbitrario. Si parla in questo caso di **filtro equalizzatore**.



Alcune formule ricorrenti

Serie R-C $Z = \frac{1 + i\omega RC}{i\omega C}$

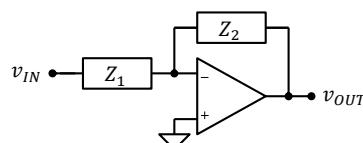
Parallelo R-C $Z = \frac{R}{1 + i\omega RC}$

Partitore R-C $V_C = \frac{1}{1 + i\omega RC} V_A$

FILTRI ELEMENTARI CON AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

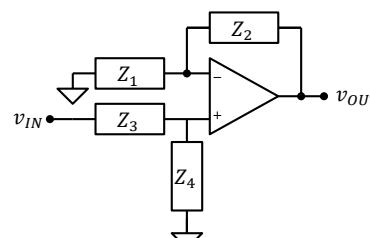
Filtri con operazionali

Configurazione invertente



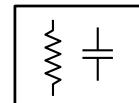
$$W(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Configurazione non invertente



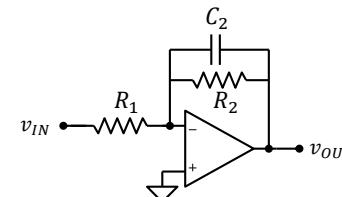
$$W(\omega) = \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}$$

Le impedenze Z_1 , Z_2 , Z_3 e Z_4 sono reti RC opportune:
(resistenze + condensatori)



Filtro passa-basso invertente

↳ ci sarà sempre un meno davanti



$$Z_1 = R_1 \quad \text{RC ha come dimensione il secondo [s]}$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C_2} \quad (R_2 \parallel C_2)$$

$$W(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + i\omega R_2 C_2}$$

costante binomio
 $W(\omega) = \frac{A_0}{1 + (\frac{\omega}{\omega_T})^2}$
in forma canonica di Bode

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1} \quad \text{Guadagno a bassa frequenza (negativo)}$$

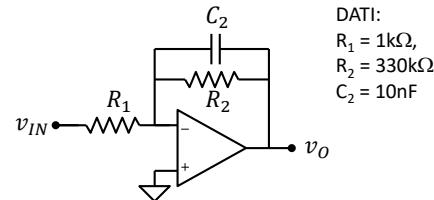
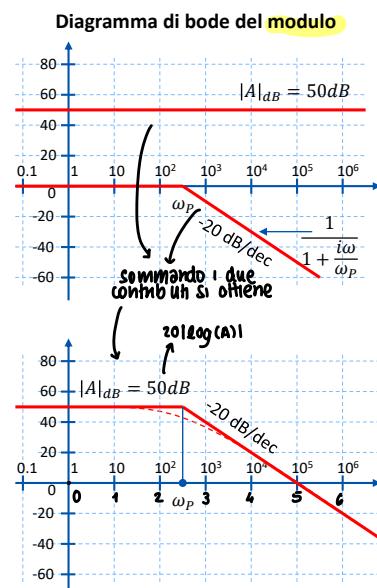
$$\omega_T = \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{Pulsazione di taglio}$$

$W(\omega \ll \omega_T) \cong A_0$ Bassa frequenza → guadagno costante

$W(\omega \gg \omega_T) \cong A_0 \frac{\omega_T}{i\omega} \rightarrow 0$ Alta frequenza → guadagno tende a 0
↳ domina la parte immaginaria

Il filtro trasmette solo segnali con pulsazione inferiore alla pulsazione di taglio

Filtro passa-basso invertente: Diagramma di Bode



Funzione di trasferimento

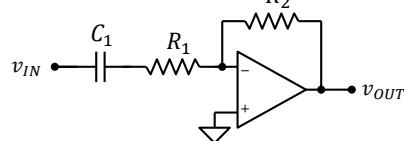
$$W(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sR_2C_2} = A \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

costante $A = -\frac{R_2}{R_1} = -330$ $|A|_{dB} = 50dB$

Polo reale negativo $\omega_p = \frac{1}{R_2C_2} = 300 \text{ rad/s}$ $\log \omega_p = 2.5$

Filtro passa-alto invertente

Non si può costruire un filtro senza capacità!



$$Z_1 = \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega C_1} = R_1 \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega R_1 C_1}$$

$$Z_2 = R_2$$

$$W(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1}$$

$$W(\omega) = A_\infty \frac{\frac{i\omega}{\omega_T}}{1 + \frac{i\omega}{\omega_T}}$$

$A_\infty = -\frac{R_2}{R_1}$ Guadagno in alta frequenza (negativo)

$$\omega_T = \frac{1}{R_1 C_1}$$

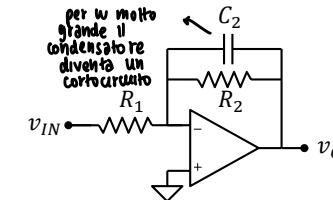
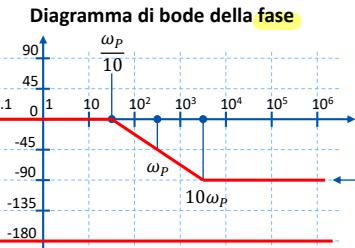
Pulsazione di taglio del polo al denominatore

$W(\omega \ll \omega_T) \cong A_\infty \frac{i\omega}{\omega_T} \rightarrow 0$ Bassa frequenza \rightarrow guadagno tende a 0 a frequenze basse (a tali frequenze i condensatori sono circuiti aperti)

$W(\omega \gg \omega_T) \cong A_\infty$ Alta frequenza \rightarrow guadagno costante a frequenze molto alte

Il filtro trasmette solo segnali con pulsazione superiore alla pulsazione di taglio

Filtro passa-basso invertente: Diagramma di Bode



Funzione di trasferimento

$$W(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sR_2C_2} = A \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

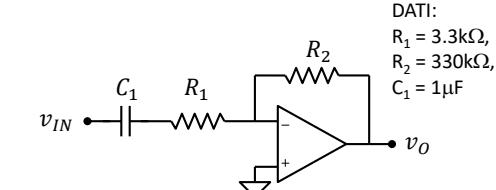
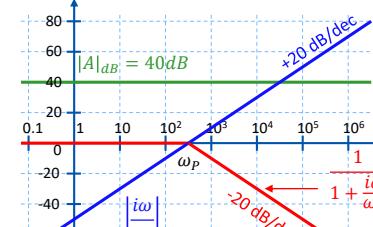
costante $A = -\frac{R_2}{R_1} = -330$ $\angle A = -180^\circ$

Polo reale negativo $\omega_p = \frac{1}{R_2C_2} = 300 \text{ rad/s}$

Lo sfasamento $-45^\circ/\text{dec}$ da: $\frac{\omega_p}{10} = 30 \text{ rad/s}$

a: $10\omega_p = 3000 \text{ rad/s}$

Filtro passa-alto invertente: Diagramma di Bode



Funzione di trasferimento

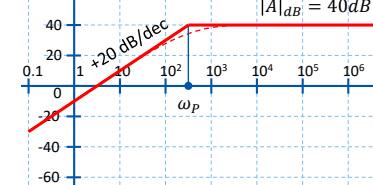
$$W(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1} = A \frac{\frac{s}{\omega_p}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

quasi in forma canonica di Bode

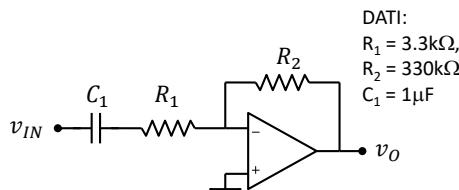
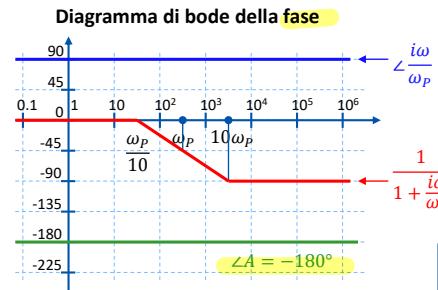
costante $A = -\frac{R_2}{R_1} = -100$ $|A|_{dB} = 40dB$

Zero nell'origine $\left| \frac{i\omega}{\omega_p} \right| = 20 \log \omega - 20 \log \omega_p$

Polo reale negativo $\omega_p = \frac{1}{R_1 C_1} = 300 \text{ rad/s}$ $\log \omega_p = 2.5$



Filtro passa-alto invertente: Diagramma di Bode



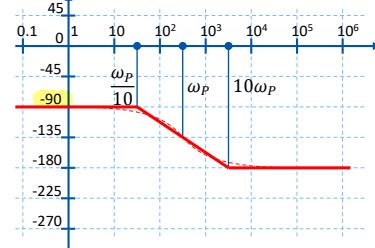
Funzione di trasferimento

$$W(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1} = A \frac{\frac{s}{\omega_p}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

costante $A = -\frac{R_2}{R_1} = -100$ $\angle A = -180^\circ$

Zero nell'origine $\frac{i\omega}{\omega_p} = \angle i\omega = 90^\circ$ (un polo nell'origine fornisce una fase iniziale di -90°)

Polo reale negativo $-45^\circ/\text{dec}$ da: $\frac{\omega_p}{10} = 30 \text{ rad/s}$
 a: $10\omega_p = 3000 \text{ rad/s}$

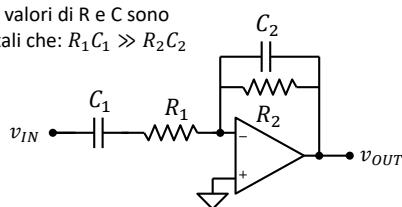


Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

34

Filtro passa-banda invertente

I valori di R e C sono tali che: $R_1 C_1 \gg R_2 C_2$



$$W(\omega) = A \frac{\frac{i\omega}{\omega_L}}{\left(1 + \frac{i\omega}{\omega_H}\right)\left(1 + \frac{i\omega}{\omega_L}\right)}$$

$W(\omega \ll \omega_L \ll \omega_H) = A \frac{i\omega/\omega_L}{(1 + i\omega/\omega_L)(1 + i\omega/\omega_H)} \cong A \frac{i\omega}{\omega_L} \rightarrow 0$ Bassa frequenza: guadagno $\ll A$
 $\omega \omega_L \omega_H$

$W(\omega_L \ll \omega \ll \omega_H) = A \frac{i\omega/\omega_L}{(1 + i\omega/\omega_L)(1 + i\omega/\omega_H)} \cong A$ Frequenze intermedie: passano quasi inalterati i valori compresi tra ω_L e ω_H

$W(\omega_H \ll \omega) = A \frac{i\omega/\omega_L}{(1 + i\omega/\omega_L)(1 + i\omega/\omega_H)} \cong A \frac{\omega_H}{i\omega} \rightarrow 0$ Alta frequenza: guadagno $\ll A$
 $\omega \omega_L \omega_H \omega$

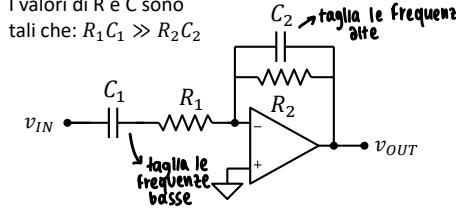
Il filtro trasmette solo segnali a valori di pulsazione compresi tra ω_L e ω_H

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

36

Filtro passa-banda invertente (una specie di mix tra passa-basso e alto)

I valori di R e C sono tali che: $R_1 C_1 \gg R_2 C_2$



$$Z_1 = \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega R_1 C_1} = R_1 \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega R_1 C_1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C_2}$$

$$W(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{i\omega R_1 C_1}{(1 + i\omega R_2 C_2)(1 + i\omega R_1 C_1)}$$

$$\omega_L = \frac{1}{R_1 C_1} \ll \frac{1}{R_2 C_2} = \omega_H$$

$A = -\frac{R_2}{R_1}$ Guadagno in banda

$\omega_L = \frac{1}{R_1 C_1}$ Pulsazione di taglio inferiore

$\omega_H = \frac{1}{R_2 C_2}$ Pulsazione di taglio superiore

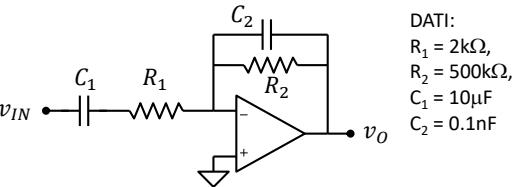
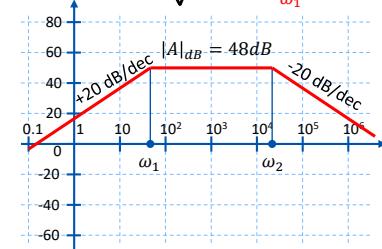
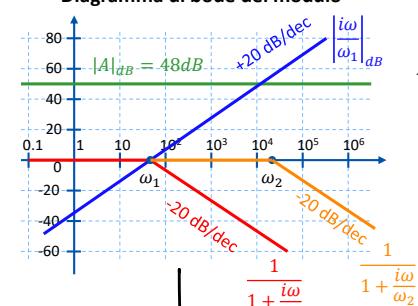
$\omega_L \ll \omega_H$ dato
 $R_1 C_1 \gg R_2 C_2$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

35

Filtro passa-banda invertente: Diagramma di Bode

Diagramma di bode del modulo



Funzione di trasferimento

$$W(s) = A \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

costante $A = -R_2/R_1 = -250$ $|A|_{dB} = 48dB$

Zero nell'origine $\left|\frac{i\omega}{\omega_1}\right|_{dB} = 20 \log \omega - 20 \log \omega_1 + 20\text{dB}/\text{dec}$

2 poli reali negativi

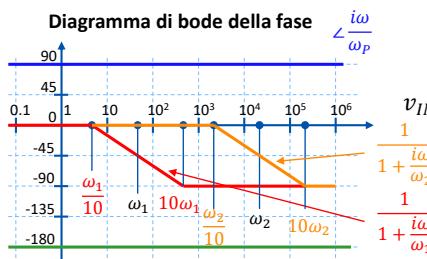
$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} = 50 \text{ rad/s} \quad -20\text{dB}/\text{dec} (\text{per } \omega > \omega_1)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} = 2 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \quad -20\text{dB}/\text{dec} (\text{per } \omega > \omega_2)$$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

37

Filtro passa-banda invertente: Diagramma di Bode



Funzione di trasferimento

$$W(s) = A \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

costante $A = -R_2/R_1 = -250 \quad \angle A = -180^\circ$

Zero nell'origine $\angle \frac{i\omega}{\omega_p} = \angle i\omega = 90^\circ$

2 poli reali negativi

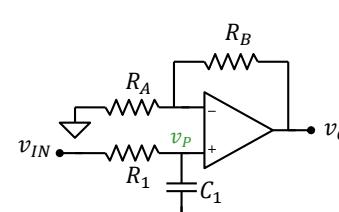
$\omega_1 = 50 \text{ rad/s} \quad -90^\circ \text{ da } 5 \text{ rad/s a } 500 \text{ rad/s}$

$\omega_2 = 2 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \quad -90^\circ \text{ da } 2 \cdot 10^3 \text{ rad/s a } 2 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$

DATI:
 $R_1 = 2 \text{k}\Omega$,
 $R_2 = 500 \text{k}\Omega$,
 $C_1 = 10 \mu\text{F}$
 $C_2 = 0.1 \text{nF}$

v_p

Filtro Passa-Basso non invertente



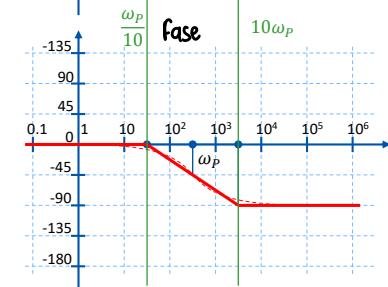
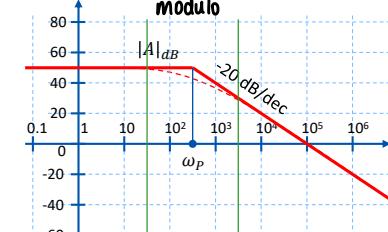
$$v_p = \frac{1}{1 + i\omega R_1 C_1} v_{IN}$$

$$v_o = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{1}{1 + i\omega R_1 C_1} v_{IN}$$

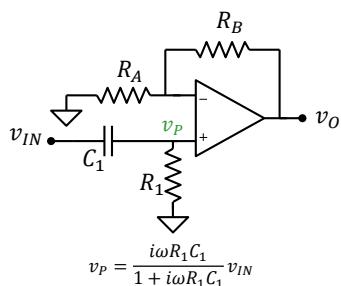
$$A = 1 + \frac{R_B}{R_A} > 0 \quad \omega_p = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$W(s) = A \frac{\frac{s}{\omega_p}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right)}$$

Diagrammi di bode
modulo



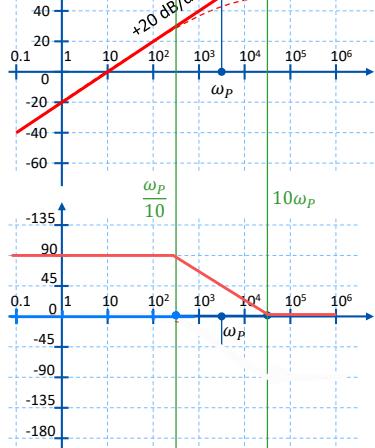
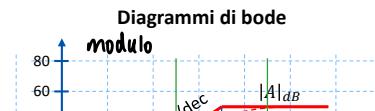
Filtro Passa-Alto non invertente



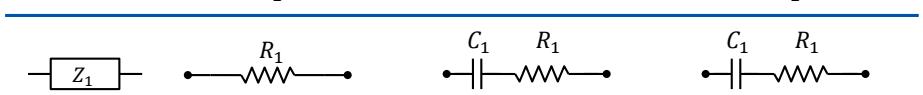
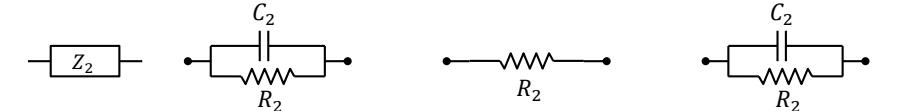
$$v_p = \frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1} v_{IN}$$

$$A = 1 + \frac{R_B}{R_A} > 0 \quad \omega_p = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$W(s) = A \frac{\frac{s}{\omega_p}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_p}\right)}$$

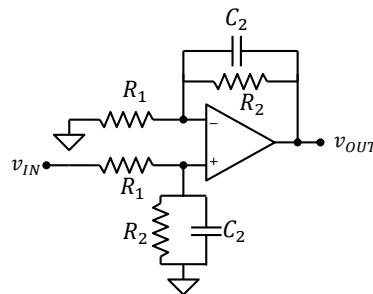


Passa-Basso **Passa-Alto** **Passa-Banda**



$$W(\omega) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + i\omega R_2 C_2} \quad \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{i\omega C_1 R_1}{1 + i\omega R_1 C_1} \quad \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{i\omega C_1 R_1}{(1 + i\omega R_2 C_2)(1 + i\omega R_1 C_1)}$$

Filtro Passa-Basso non invertente

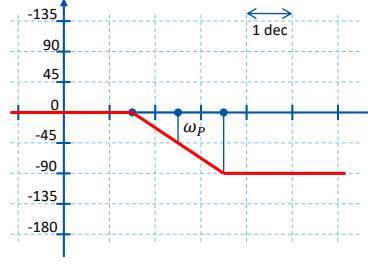
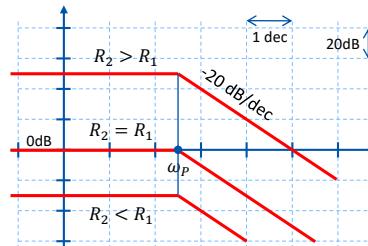


$$Z_2(\omega) = \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C_2}$$

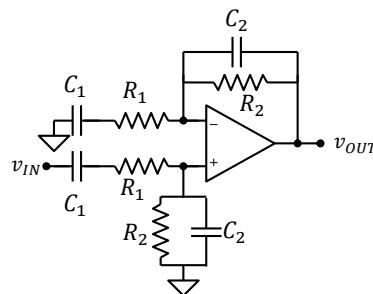
$$Z_1(\omega) = R_1$$

$$W(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$W(\omega) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + i\omega R_2 C_2}$$



Filtro Passa-Banda non invertente

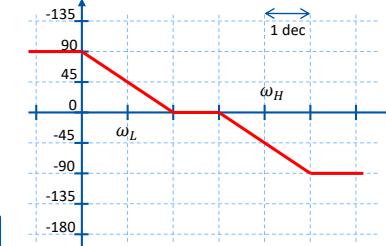
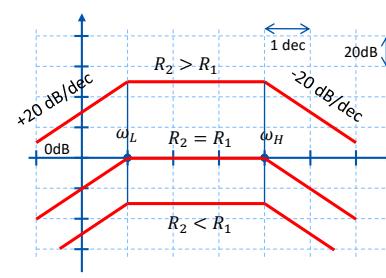


$$Z_2(\omega) = \frac{R_2}{1 + i\omega R_2 C_2}$$

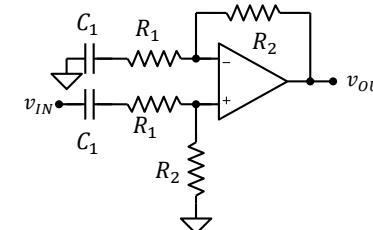
$$Z_1(\omega) = \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega C_1}$$

$$W(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$W(\omega) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{i\omega C_1 R_1}{(1 + i\omega R_2 C_2)(1 + i\omega R_1 C_1)}$$



Filtro Passa-Alto non invertente

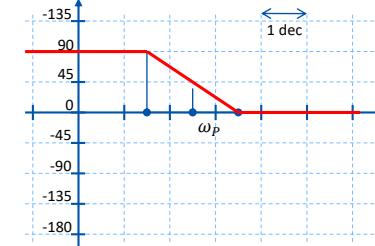
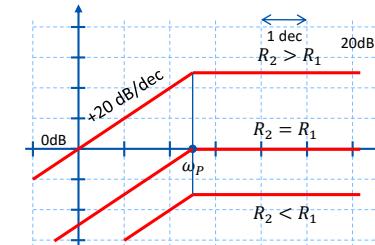


$$Z_2(\omega) = R_2$$

$$Z_1(\omega) = \frac{1 + i\omega R_1 C_1}{i\omega C_1}$$

$$W(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$W(\omega) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1}$$



Alcune osservazioni

■ Per identificare il tipo di filtro LP, HP, BP, AP è possibile:

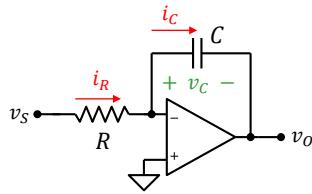
- ◆ Calcolare il guadagno a bassa frequenza (W_L) sostituendo i condensatori con circuiti aperti
- ◆ Calcolare il guadagno in alta frequenza (W_H) sostituendo i condensatori con cortocircuiti.

■ In base a W_L e W_H abbiamo

- ◆ Se $W_L = 0$ e $W_H \neq 0 \rightarrow$ Filtro passa alto
- ◆ Se $W_L \neq 0$ e $W_H = 0 \rightarrow$ Filtro passa basso
- ◆ Se $W_L = 0$ e $W_H = 0 \rightarrow$ Filtro passa banda
- ◆ Se $W_L \neq 0$ e $W_H \neq 0 \rightarrow$ Filtro passa tutto o elimina banda

$\omega=0$ significa che tutti i condensatori sono circuiti aperti $\omega=\infty$ significa che tutti i condensatori sono assimilabili a cortocircuiti

Integratore



Funzione di trasferimento

$$Z_1 = R$$

$$Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$$

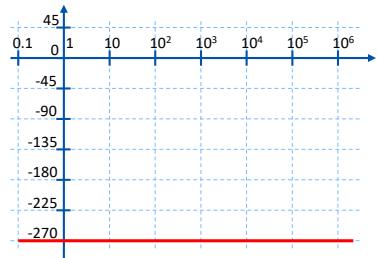
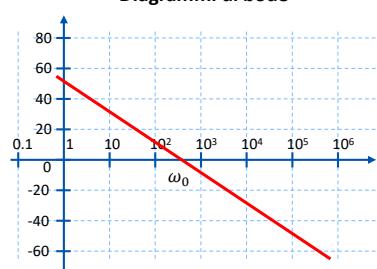
Configurazione invertente:

$$W(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{-1}{i\omega RC}$$

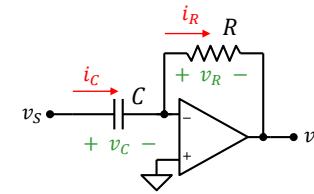
$$W(s) = -\frac{\omega_0}{s} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

ALTRI FILTRI

Diagrammi di bode



Derivatore



Funzione di trasferimento

$$Z_1 = \frac{1}{i\omega C}$$

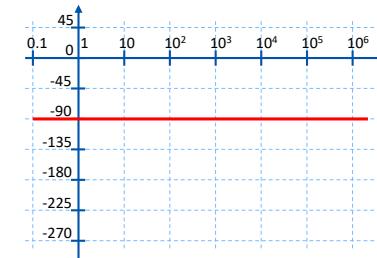
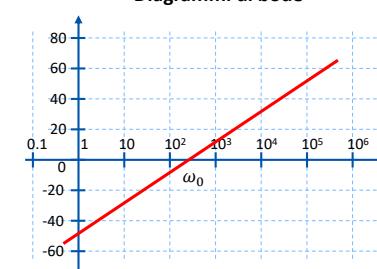
$$Z_2 = R$$

Configurazione invertente:

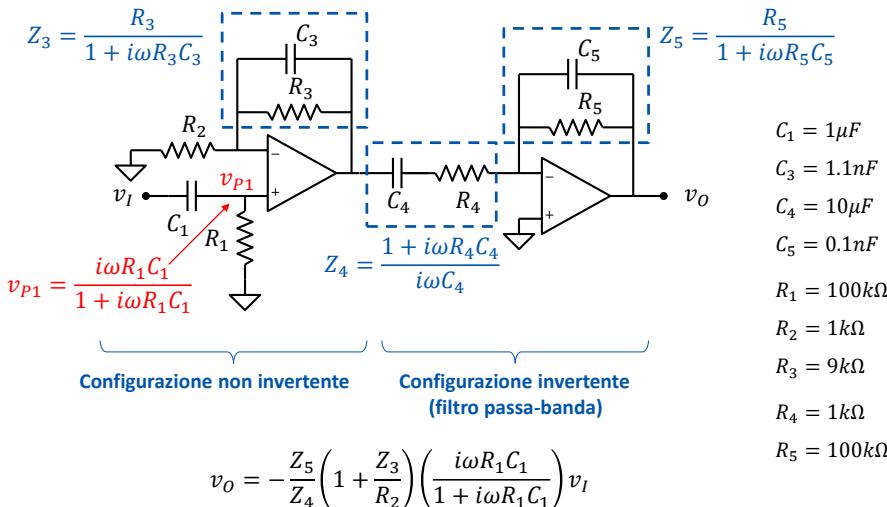
$$W(\omega) = -i\omega RC$$

$$W(s) = -\frac{s}{\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Diagrammi di bode



Filtro con funzione di trasferimento arbitraria



Configurazione non invertente

Configurazione invertente
(filtro passa-banda)

Filtro con funzione di trasferimento arbitraria

$$W(\omega) = -\frac{Z_5}{Z_4} \left(1 + \frac{Z_3}{R_2}\right) \left(\frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1}\right)$$

$$Z_5 = \frac{R_5}{1 + i\omega R_5 C_5}$$

$$Z_4 = \frac{1 + i\omega R_4 C_4}{i\omega C_4}$$

$$Z_3 = \frac{R_3}{1 + i\omega R_3 C_3}$$

$$-\frac{R_5 i\omega C_4}{(1 + i\omega R_5 C_5)(1 + i\omega R_4 C_4)}$$

$$1 + \frac{R_3}{R_2} \frac{1}{1 + i\omega R_3 C_3}$$

$$= \frac{R_3 + R_2}{R_2} \cdot \frac{1 + i\omega(R_2 || R_3)C_3}{1 + i\omega R_3 C_3}$$

$$W(\omega) = \left(-\frac{R_5 i\omega C_4}{(1 + i\omega R_5 C_5)(1 + i\omega R_4 C_4)}\right) \left(\frac{R_3 + R_2}{R_2} \frac{1 + i\omega(R_2 || R_3)C_3}{1 + i\omega R_3 C_3}\right) \left(\frac{i\omega R_1 C_1}{1 + i\omega R_1 C_1}\right)$$

$$Z_3 = \frac{R_3}{1 + i\omega R_3 C_3}$$

$$Z_4 = \frac{1 + i\omega R_4 C_4}{i\omega C_4}$$

$$Z_5 = \frac{R_5}{1 + i\omega R_5 C_5}$$

$$W(\omega) = -\frac{R_3 + R_2}{R_2} (R_5 C_4 R_1 C_1) (i\omega)^2 \frac{1 + i\omega(R_2 || R_3)C_3}{(1 + i\omega R_5 C_5)(1 + i\omega R_4 C_4)(1 + i\omega R_3 C_3)(1 + i\omega R_1 C_1)}$$

Filtro arbitrario: diagramma di Bode

$$W(\omega) = -\frac{R_3 + R_2}{R_2} (R_5 C_4 R_1 C_1) (i\omega)^2 \frac{1 + i\omega(R_2||R_3)C_3}{(1 + i\omega R_5 C_5)(1 + i\omega R_4 C_4)(1 + i\omega R_3 C_3)(1 + i\omega R_1 C_1)}$$

Forma canonica di Bode

Poli: $\omega_{P1} = (R_1 C_1)^{-1} = 10^1 \text{ rad/s}$ Zeri: $\omega_{Z1} = [(R_3 || R_2) C_3]^{-1} = 10^6 \text{ rad/s}$

$$\omega_{P2} = (R_4 C_4)^{-1} = 10^2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{P3} = (R_5 C_5)^{-1} = 10^5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{P4} = (R_3 C_3)^{-1} = 10^5 \text{ rad/s}$$

$$A = -\frac{R_3 + R_2}{R_2} (R_5 C_4 R_1 C_1)$$

$$W(s) = A s^2 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P3}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P4}}\right)}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1\mu F \\ C_3 &= 1.11nF \\ C_4 &= 10\mu F \\ C_5 &= 0.1nF \\ R_1 &= 100k\Omega \\ R_2 &= 1k\Omega \\ R_3 &= 9k\Omega \\ R_4 &= 1k\Omega \\ R_5 &= 100k\Omega \end{aligned}$$

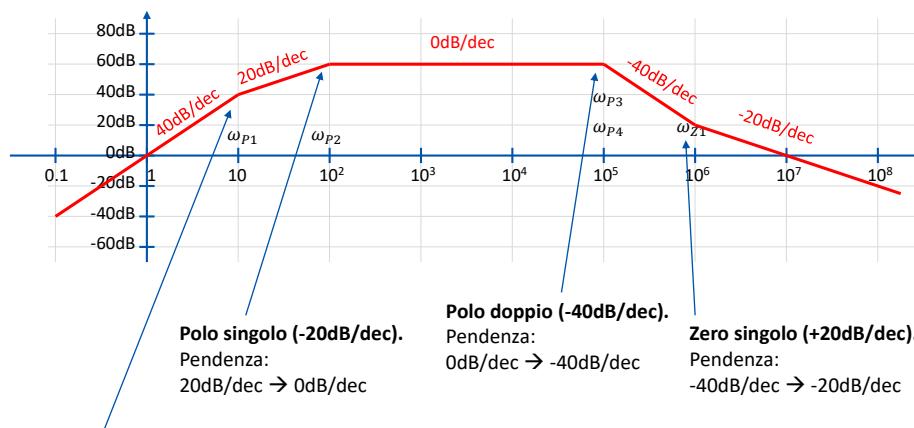
Intervallo di decadi da considerare

Minimo = ω_{P1}

Massimo = ω_{Z1}

Partiamo da 0.1 rad/s e arriviamo a 10^8 rad/s

Filtro arbitrario: diagramma di Bode (modulo)



Polo singolo (-20dB/dec).

Pendenza:
40dB/dec → 20dB/dec

Filtro arbitrario: diagramma di Bode (modulo)

Punto e pendenza iniziale del modulo

Primo zero/polo: $\omega_{P1} = (R_1 C_1)^{-1} = 10^1 \text{ rad/s}$

$$W(i\omega_{P1}) = -\frac{R_3 + R_2}{R_2} (R_5 C_4 R_1 C_1) \cdot (i\omega_{P1})^2 = -\frac{R_3 + R_2}{R_2} (R_5 C_4 R_1 C_1) \cdot \frac{1}{R_1^2 C_1^2} (i)^2 = \frac{R_3 + R_2}{R_2} \left(\frac{R_5 C_4}{R_1 C_1} \right)$$

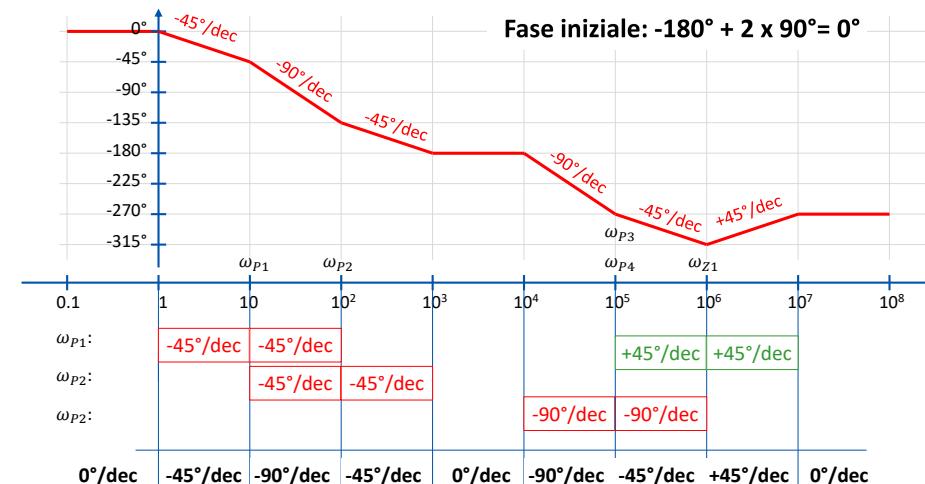
$$|W(i\omega_{P1})|_{dB} = \left| \frac{R_3 + R_2}{R_2} \left(\frac{R_5 C_4}{R_1 C_1} \right) \right|_{dB} = |100|_{dB} = 40dB$$

$$W(\omega) = A \cdot s^2 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P3}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P4}}\right)}$$

Zero doppio nell'origine ($k = 2$)

Pendenza per $\omega < \omega_{P1} = +40 \text{ dB/dec}$ (2 x 20 dB/dec)

Filtro arbitrario: diagramma di Bode (fase)



Polo singolo (-20dB/dec).

Pendenza:
40dB/dec → 20dB/dec

$$A = -\frac{R_3 + R_2}{R_2} (R_5 C_4 R_1 C_1)$$

Negativa → prendiamo come fase iniziale -180°

Polo doppio ($k=2$) → $+90$ gradi per ciascun polo:

$$W(\omega) = A \cdot s^2 \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{Z1}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P3}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P4}}\right)}$$

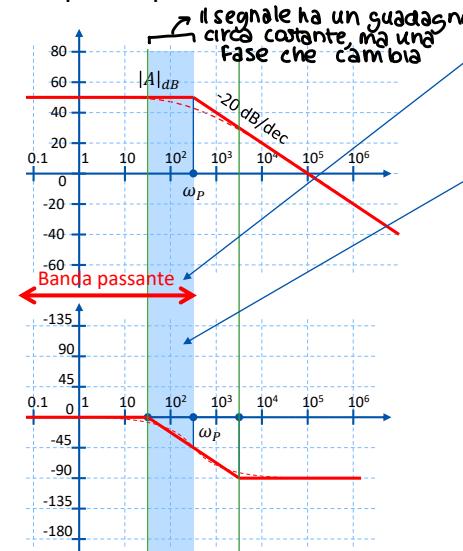
Filtri del secondo ordine

Jaeger 6^aEd.: Cap.15 p.736-743

- Configurazione invertente (filtri a retroazione multipla)
- Configurazione non-invertente (filtri Sallen-Key)

Obiettivo

Esempio: filtro passa basso non invertente



- Conventionalmente la banda passante è definita dal punto in cui l'attenuazione è 3dB.
- Nell'ultima decade della banda passante il segnale non è attenuato sensibilmente, ma subisce una variazione di fase fino a -90° → distorsione
- Per attenuare sensibilmente il segnale (ad esempio di 10 volte) è necessario arrivare a una pulsazione pari a circa 10ω_P.
- Obiettivo: realizzare un filtro in cui:
 - ◆ il passaggio tra banda passante e banda attenuata sia più netto;
 - ◆ la fase in banda passante sia più costante possibile

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

2

Filtri del secondo ordine

- Un filtro del secondo ordine ha al denominatore un equazione di 2° grado.
- Esempi di filtri elementari: *il numeratore è al più un polinomio di secondo grado*
 - ◆ Filtro passa-basso: $W(s) = \frac{A}{1+2\delta\frac{s}{\omega_p}+\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$
 - ◆ Filtro passa-alto: $W(s) = \frac{A\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}{1+2\delta\frac{s}{\omega_p}+\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$
 - ◆ Filtro passa-banda: $W(s) = \frac{A\frac{s}{\omega_p}}{1+2\delta\frac{s}{\omega_p}+\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$
- Le radici del denominatore sono: $s_{1,2} = -\omega_p\delta \pm \omega_p\sqrt{\delta^2 - 1}$
- I poli sono (a seconda dei valori di δ)
 - ◆ complessi coniugati, se $|\delta| < 1 \rightarrow s_{1,2} = -\omega_p\delta \pm i\omega_p\sqrt{1 - \delta^2}$
 - ◆ reali e distinti se $|\delta| > 1 \rightarrow s_{1,2} = -\omega_p\delta \pm \omega_p\sqrt{\delta^2 - 1}$
 - ◆ reali e coincidenti se $|\delta| = 1 \rightarrow s_{1,2} = -\omega_p\delta$

Filtro del secondo ordine a retroazione multipla

Guadagno della configurazione invertente da v_A a v_o :

$$v_o = -\frac{Z_4}{Z_3}v_A \quad \rightarrow \quad v_A = -\frac{Z_3}{Z_4}v_o$$

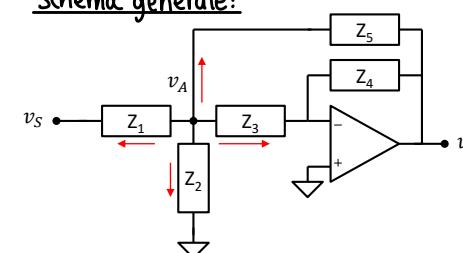
Legge di kirchhoff al nodo v_A :

$$\frac{v_A - v_S}{Z_1} + \frac{v_A}{Z_2} + \frac{v_A - v_O}{Z_5} = 0$$

$$v_A \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5} \right) = \frac{v_S}{Z_1} + \frac{v_O}{Z_5}$$

■ Filtro a retroazione multipla

- Configurazione invertente
- Doppia retroazione dall'uscita al terminale invertente
* retroazione al terminale - e al nodo v_A

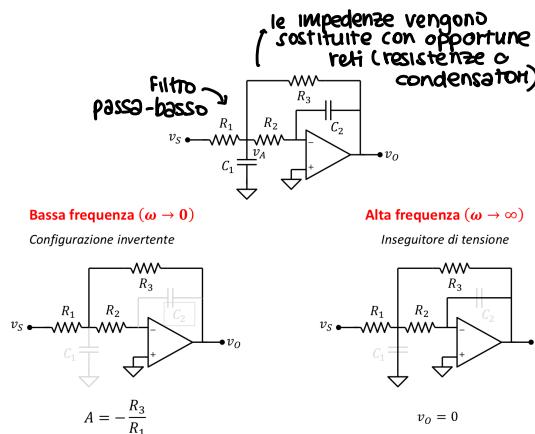
Schema generale:

$$v_o = -\frac{v_S}{Z_1 \left[Z_3 \left(\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5} \right) + \frac{1}{Z_5} \right]}$$

■ Guadagno negativo

- Serve una scelta opportuna delle impedenze

Filtro passa-basso a retroazione multipla



→ Basta risolvere il circuito prima a bassissima e poi altissima frequenza, per comprendere se sia un filtro passa-basso o passa-alto

$$W(s) = \frac{v_o}{v_s} = \frac{A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -\frac{R_3}{R_1} < 0$$

Calcolo la funzione di trasferimento:

$$v_o = -\frac{1}{sC_2R_2}v_A \rightarrow v_A = -sC_2R_2v_o$$

$$+ \quad \frac{v_A - v_s}{R_1} + sC_1v_A + \frac{v_A}{R_2} + \frac{v_A - v_o}{R_3} = 0$$

$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + sC_1 \right) = \frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_3}$$

$$-v_o \left[sC_2R_2 \left(\frac{1}{R_p} + sC_1 \right) + \frac{1}{R_3} \right] = \frac{v_s}{R_1}$$

$$v_o = -\frac{\frac{v_s}{R_1}}{s^2C_2R_2R_1C_1 + sC_2R_2\frac{R_1R_3}{R_p} + 1}$$

Polinomio di secondo grado: $a^2 + bs + c$
con $a, b, c > 0 \rightarrow$ due poli reali negativi o due poli complessi coniugati a parte reale negativa

Filtro passa-basso a retroazione multipla

Esempio 2: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 100k\Omega$ $C_1 = 250nF$, $C_2 = 1.6nF$

$$v_o = -\frac{v_s}{s^2C_2R_2R_1C_1 + sC_2R_2\frac{R_1}{R_p} + \frac{R_1}{R_3}}$$

Raccogliamo il termine noto

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \frac{v_s}{s^2C_2R_2R_3C_1 + sC_2\frac{R_2R_3}{R_p} + 1}$$

$$\text{poniamo } \omega_p^2 = \frac{1}{C_2R_2R_3C_1}$$

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \frac{v_s}{\left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + 1}$$

$$W(s) = \frac{A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -\frac{R_3}{R_1} = -100$$

$$\omega_p = 5000rad/s$$

$$\delta = 0.8$$

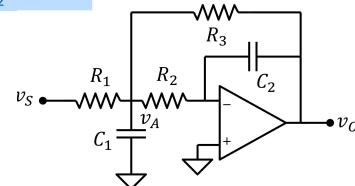


Diagramma di bode del modulo

$$\delta = 0.8 > 0.707$$

Diagramma di bode della fase

Pendenza media intorno al polo:

$$-\frac{90^\circ}{\delta} = 112^\circ/\text{dec}$$

$$\frac{\omega_p}{10^\delta} = 785rad/s$$

$$10^\delta \omega_p = 31800rad/s$$

Filtro passa-basso a retroazione multipla

Esempio 1: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 100k\Omega$ $C_1 = 800nF$, $C_2 = 0.5nF$

$$v_o = -\frac{v_s}{s^2C_2R_2R_1C_1 + sC_2R_2\frac{R_1}{R_p} + \frac{R_1}{R_3}}$$

Raccogliamo il termine noto

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \frac{v_s}{s^2C_2R_2R_3C_1 + sC_2\frac{R_2R_3}{R_p} + 1}$$

$$\text{poniamo } \omega_p^2 = \frac{1}{C_2R_2R_3C_1}$$

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + \frac{s}{\omega_p} \omega_p C_2 \frac{R_2R_3}{R_p} + 1$$

$$\text{poniamo } 2\delta = \omega_p C_2 \frac{R_2R_3}{R_p}$$

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + 1$$

$$W(s) = \frac{A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -\frac{R_3}{R_1} = -100$$

$$\omega_p = 5000rad/s$$

$$\delta = 0.251$$

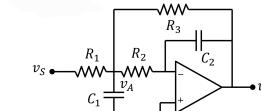
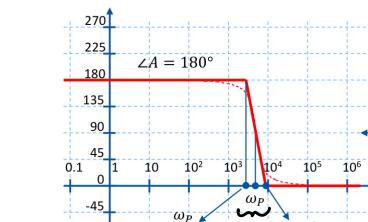
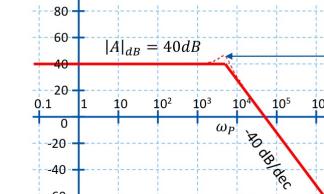


Diagramma di bode del modulo
 $\delta = 0.251 < 0.707$



distribuito su decadi prima e su decadi dopo
in questo caso lo sfasamento avviene nell'arco di mezza decade

Diagramma di bode della fase
Pendenza media intorno al polo:

$$-\frac{90^\circ}{\delta} = 360^\circ/\text{dec}$$

$$\frac{\omega_p}{10^\delta} = 2800rad/s$$

$$10^\delta \omega_p = 8900rad/s$$

Filtro passa-basso a retroazione multipla

Esempio 3: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 100k\Omega$ $C_1 = 10nF$, $C_2 = 40nF$

$$v_o = -\frac{v_s}{s^2C_2R_2R_1C_1 + sC_2R_2\frac{R_1}{R_p} + \frac{R_1}{R_3}}$$

Raccogliamo il termine noto

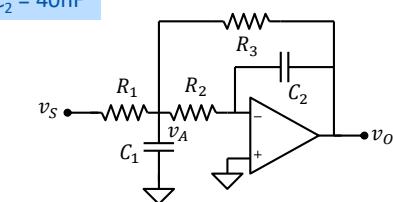
$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \frac{v_s}{s^2C_2R_2R_3C_1 + sC_2\frac{R_2R_3}{R_p} + 1}$$

$$\text{poniamo } \omega_p^2 = \frac{1}{C_2R_2R_3C_1}$$

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + \frac{s}{\omega_p} \omega_p C_2 \frac{R_2R_3}{R_p} + 1$$

$$\text{poniamo } 2\delta = \omega_p C_2 \frac{R_2R_3}{R_p}$$

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} \left(\frac{s}{\omega_p} \right)^2 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + 1$$



$$W(s) = \frac{A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -\frac{R_3}{R_1} = -100$$

$$\omega_p = 5000rad/s$$

$$\delta = 5 > 1 \quad \text{Abbiamo due poli reali:}$$

$$s_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} -502 & \omega_{p1} = 502rad/s \\ -4.97 \cdot 10^4 & \omega_{p2} = 4.97 \cdot 10^4rad/s \end{cases}$$

Filtro passa-basso a retroazione multipla

Esempio 2: $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\text{k}\Omega$, $R_3 = 100\text{k}\Omega$, $C_1 = 10\text{nF}$, $C_2 = 40\text{nF}$

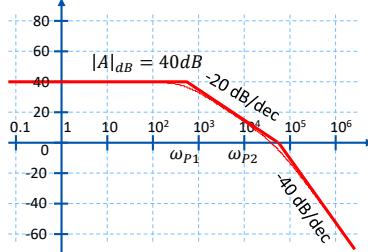


Diagramma di bode del modulo

$$W(s) = \frac{A}{(1 + \frac{s}{\omega_{p1}})(1 + \frac{s}{\omega_{p2}})}$$

$$A = -100$$

$$\omega_{p1} = 502\text{rad/s}$$

$$\omega_{p2} = 4.97 \cdot 10^4\text{rad/s}$$

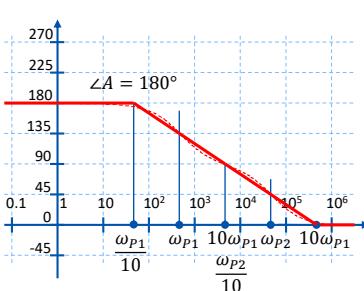


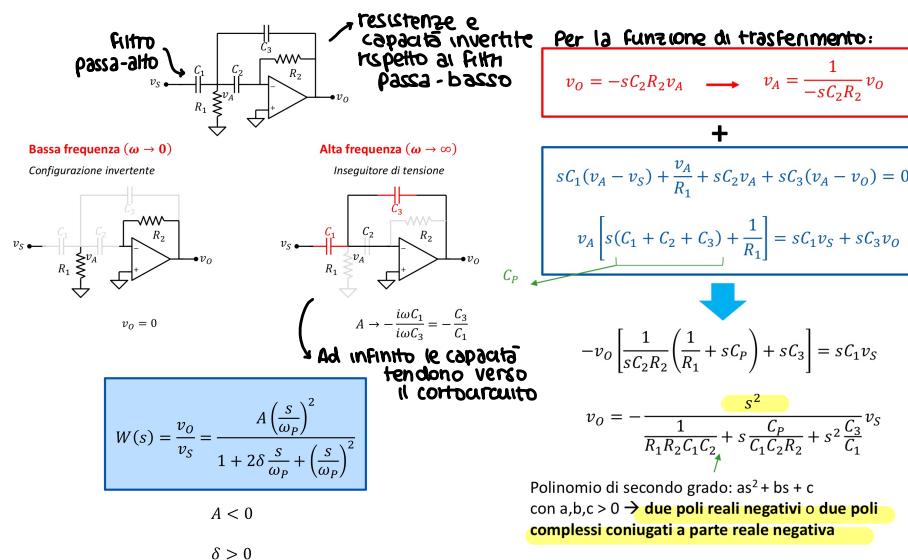
Diagramma di bode della fase

-45°/dec una decade prima e dopo ciascun polo

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

14

Filtro passa-alto a retroazione multipla



Fattore di smorzamento e fattore di risonanza

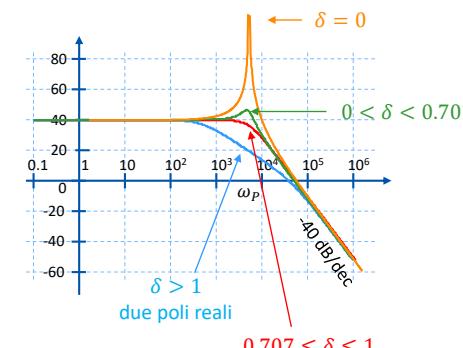
$$W(s) = \frac{A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

Nei filtri di secondo ordine il coefficiente δ si definisce **fattore di smorzamento**.

Si definisce inoltre **fattore di risonanza o fattore di merito (Q)**:

$$Q = \frac{1}{2\delta}$$

$$W(s) = \frac{A}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$



$\delta = 0$	$Q = \infty$	$ W $ ha un picco di risonanza infinito per $\omega \rightarrow \omega_p$
$0 < \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$	$ W $ ha un picco di risonanza finito in un intorno di ω_p
$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \delta \leq 1$	$\frac{1}{2} \leq Q \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$	$ W $ non presenta picchi di risonanza

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

15

Filtro passa-alto a retroazione multipla

Esempio 1: $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 250\text{k}\Omega$, $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 1\mu\text{F}$, $C_3 = 200\text{nF}$

$$v_o = -\frac{s^2}{\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} + s\frac{C_p}{C_1C_2R_2} + s^2\frac{C_3}{C_1}} v_s$$

Raccogliamo il termine noto

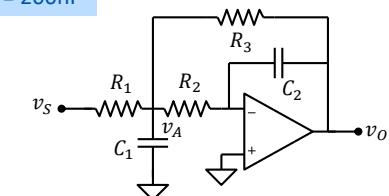
$$v_o = -\frac{R_1R_2C_1C_2s^2}{1 + sR_1C_p + s^2R_1R_2C_3C_2} v_s$$

poniamo $\omega_p^2 = \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}$

$$v_o = -\frac{C_1}{C_3} \frac{\frac{s^2}{\omega_p^2}}{1 + \frac{s}{\omega_p} R_1C_p\omega_p + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2} v_s$$

poniamo $2\delta = \omega_p C_p R_1$

$$v_o = -\frac{C_1}{C_3} \frac{\frac{s^2}{\omega_p^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2} v_s$$



$$W(s) = \frac{A \frac{s^2}{\omega_p^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -\frac{C_1}{C_3} = -10$$

$$\omega_p = 100\text{rad/s}$$

$$\delta = 0.32$$

Due poli complessi coniugati a parte reale negativa

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

18

Filtro passa-alto a retroazione multipla

Esempio 1: $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 250\text{k}\Omega$, $C_1 = 2\mu\text{F}$, $C_2 = 1\mu\text{F}$, $C_3 = 200\text{nF}$

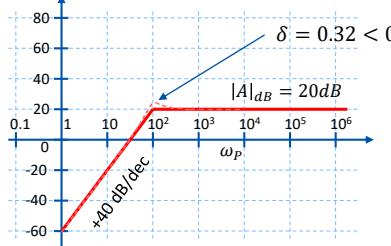


Diagramma di bode del modulo

$$W(s) = \frac{A \frac{s^2}{\omega_p^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -10$$

$$\omega_p = 100\text{rad/s}$$

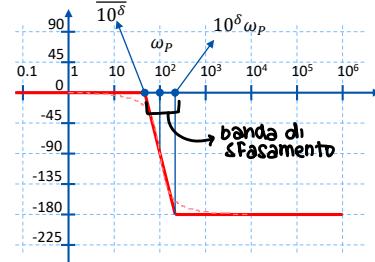


Diagramma di bode della fase

Pendenza media intorno al polo:

$$-\frac{90^\circ}{\delta} = 281^\circ/\text{dec}$$

$$\frac{\omega_p}{10^\delta} = 48\text{rad/s}$$

$$10^\delta \omega_p = 209\text{rad/s}$$

Filtro passa-banda a banda stretta

Esempio 1: $R_1 = R_2 = R = 1\text{k}\Omega$, $C_1 = C_2 = C = 250\text{nF}$, $R_3 = 32\text{k}\Omega$

$$v_o = -\frac{s}{R_3C + R_3 s + s^2RC} v_s$$

Raccogliamo il termine noto

$$v_o = -\frac{s R_3 C}{2} \frac{1 + RCs + s^2 \frac{R_3 C^2}{2}}{v_s}$$

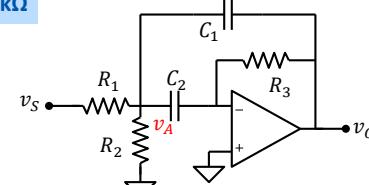
$$\text{poniamo } \omega_p^2 = \frac{2}{R_3 C^2}$$

$$v_o = -\frac{R_3 C \omega_p}{2} \frac{\omega_p}{1 + R C \omega_p \frac{s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}} v_s$$

$$2\delta = RC \sqrt{\frac{2}{R_3 C^2}} = \sqrt{\frac{2R}{R_3}}$$

$$e A = -\frac{R_3 C \omega_p}{2} = -\sqrt{\frac{R_3}{2R}} \frac{s}{\omega_p}$$

$$v_o = A \frac{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}{s} v_s$$



$$W(s) = \frac{A \frac{s}{\omega_p}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -4$$

$$\omega_p = 1000\text{rad/s}$$

$$\delta = 0.125$$

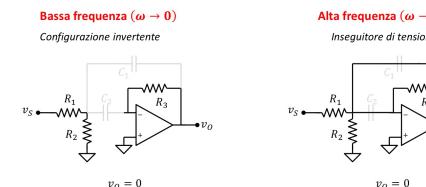
Due poli complessi coniugati a parte reale negativa

Filtro passa-banda a retroazione multipla

Per la funzione di trasferimento:

$$v_o = -s C_2 R_3 v_A \rightarrow v_A = -\frac{1}{s C_2 R_3} v_o$$

+



$$\frac{v_A - v_S}{R_1} + \frac{v_A}{R_2} + s C_2 v_A + s C_1 (v_A - v_o) = 0$$

$$v_A \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + s(C_1 + C_2) \right] = \frac{v_S}{R_1} + s C_1 v_o$$

$$-\frac{1}{R_P} v_o \left[\frac{1}{s C_2 R_3} \left(\frac{1}{R_P} + s C_P \right) + s C_1 \right] = \frac{v_S}{R_1}$$

$$v_o = -\frac{s}{\frac{R_1}{C_2 R_3 R_P} + \frac{R_1 C_P}{R_3 C_2} s + s^2 R_1 C_1} v_S$$

$$A < 0$$

$$\delta > 0$$

Polinomio di secondo grado: $as^2 + bs + c$
con $a, b, c > 0 \rightarrow$ due poli reali negativi o due poli complessi coniugati a parte reale negativa

Filtro passa-banda a banda stretta

Esempio 1: $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\text{k}\Omega$, $C_1 = 250\text{nF}$, $C_2 = 250\text{nF}$, $R_3 = 32\text{k}\Omega$

più il δ è stretto più si avvicina al δ di Dirac (che isola una singola frequenza)

$$W(s) = \frac{A \frac{s}{\omega_p}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2}$$

$$A = -4$$

$$\omega_p = 1000\text{rad/s}$$

$$\delta = 0.125$$

Diagramma di bode del modulo punto di massimo che corrisponde ad ω_p

$$|W(\omega_p)|_{dB} = \frac{|A|}{2\delta} = \frac{16}{2\delta} = 24dB$$

$$|A|_{dB} = 20dB$$

modulo

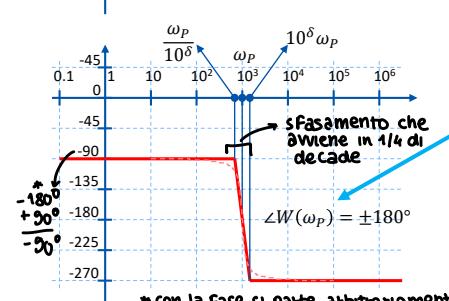
$$W(\omega_p) = \frac{i \cdot A}{1 + 2\delta \cdot i - 1} = \frac{A}{2\delta}$$

Diagramma di bode della fase
fase iniziale: $\angle W = -90^\circ$

$$\text{Pendenza intorno al polo: } -\frac{90^\circ}{\delta} = 720^\circ/\text{dec}$$

$$\frac{\omega_p}{10^\delta} = 750\text{rad/s}$$

$$10^\delta \omega_p = 1330\text{rad/s}$$



Filtro passa-banda a poli reali

Esempio 2: $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = 0.4\text{nF}$, $C_2 = 2\mu\text{F}$, $R_3 = 250\text{k}\Omega$

$$v_o = -\frac{s}{\frac{R_1}{C_2 R_3 R_p} + \frac{R_1 C_p}{R_3 C_2} s + s^2 R_1 C_1} v_s$$

Raccogliamo il termine noto

$$v_o = -\frac{s C_2 R_3 R_p}{1 + R_p C_p s + s^2 R_3 R_p C_1 C_2} v_s$$

$$\text{poniamo } \omega_p^2 = \frac{1}{R_3 R_p C_1 C_2}$$

$$v_o = -\frac{C_2 R_3 R_p \omega_p}{R_1} \frac{\frac{s}{\omega_p}}{1 + R_p C_p s + s^2 R_3 R_p C_1 C_2}$$

$$\text{poniamo } 2\delta = \omega_p C_p R_1$$

$$\text{e } A = -\frac{\omega_p C_2 R_3 R_p}{R_1} = -\frac{\sqrt{R_3 R_p C_2}}{R_1 \sqrt{C_1}}$$

$$v_o = A \frac{\frac{s}{\omega_p}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2} v_s$$

$$W(s) = \frac{A \omega_1}{\omega_p} \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}$$

Due poli reali negativi

$$1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \left(\frac{s}{\omega_p}\right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} s_1 &= -101\text{rad/s} \\ \omega_1 &= 101\text{rad/s} \\ s_2 &= -9900\text{rad/s} \\ \omega_2 &= 9900\text{rad/s} \end{aligned}$$

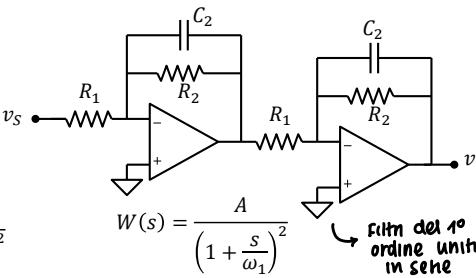
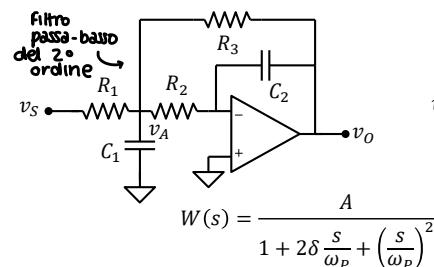


$$\begin{aligned} A &= -250 \\ \omega_p &= 1000\text{rad/s} \\ \delta &= 5 \end{aligned}$$

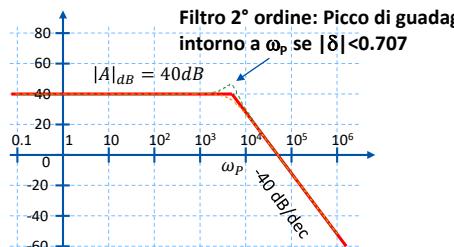
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

24

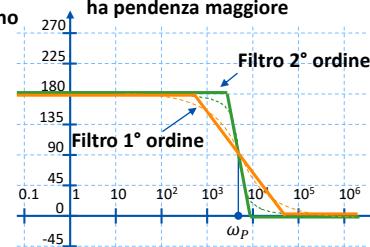
Osservazione (può essere reinterpretata anche per un filtro passa-alto)



Stesso diagramma asintotico del modulo



Filtro 2° ordine: Picco di guadagno intorno a ω_p se $|\delta| < 0.707$



Il filtro del secondo ordine mantiene una fase costante in una porzione maggiore della banda passante

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

26

Filtro passa-banda a poli reali

Esempio 2: $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $R_2 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = 0.4\text{nF}$, $C_2 = 2\mu\text{F}$, $R_3 = 250\text{k}\Omega$

$$W(s) = \frac{B \frac{s}{\omega_1}}{(1 + \frac{s}{\omega_1})(1 + \frac{s}{\omega_2})}$$

$$B = -25.2$$

$$\omega_1 = 101\text{rad/s}$$

$$\omega_2 = 9900\text{rad/s}$$

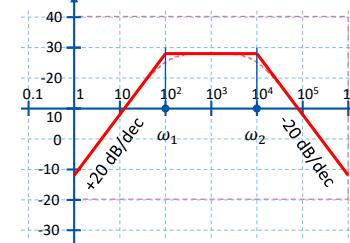


Diagramma di bode del modulo

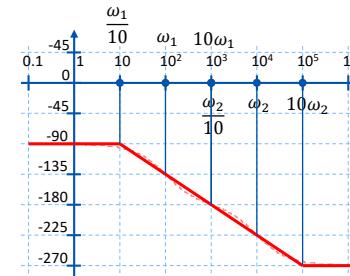


Diagramma di bode della fase

fase iniziale: $\angle W = -90^\circ$

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

25

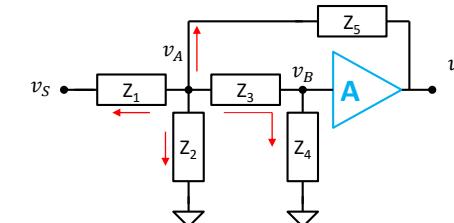
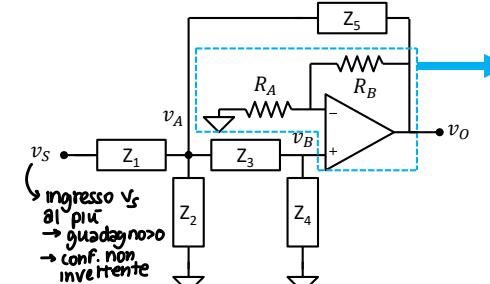
Filtro del secondo ordine Sallen-Key

5 impedenze + 2 resistenze

$$A = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

Configurazione invertente
Guadagno costante

Resistenza di ingresso infinita
Resistenza di uscita nulla



■ Filtro di Sallen-Key o VCVS (voltage controlled voltage source)

- Configurazione non invertente
- Retroazione positiva con AO in configurazione non-invertente

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

28

Filtro del secondo ordine Sallen-Key

Guadagno da v_A a v_o : v_A in funzione di v_o

$$v_o = A \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4} v_A \rightarrow v_A = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_4 A} v_o$$

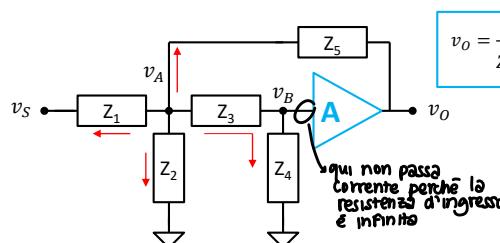
$\hookrightarrow v_o$ in funzione di v_A

Legge di kirchhoff al nodo v_A : *si procede come per i filtri a retroazione multipla*

$$\frac{v_A - v_S}{Z_1} + \frac{v_A}{Z_2} + \frac{v_A}{Z_3 + Z_4} + \frac{v_A - v_o}{Z_5} = 0$$

$$v_A \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right) = \frac{v_S}{Z_1} + \frac{v_o}{Z_5}$$

$$\frac{Z_3 + Z_4}{Z_4 A} v_o \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right) = \frac{v_S}{Z_1} + \frac{v_o}{Z_5}$$



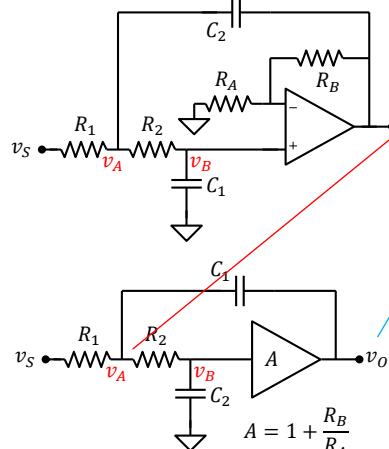
$$v_o = \frac{Av_S}{Z_1 [Z_3 + Z_4 (\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_4} + \frac{1}{Z_5}) - A]}$$

- Guadagno positivo
- Serve una scelta opportuna delle impedenze

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

29

Filtro Sallen-Key passa-basso



$$v_A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{sC_2}{1 + sR_2C_2} + sC_1 \right) = \frac{v_S}{R_1} + sC_1 v_o$$

$$v_o = A \frac{1}{1 + sR_2C_2} v_A \rightarrow v_A = \frac{1 + sR_2C_2}{A} v_o$$

$$\frac{(1 + sR_2C_2)}{A} v_o \left(\frac{1}{R_1} + \frac{sC_2}{1 + sR_2C_2} + sC_1 \right) = \frac{v_S}{R_1} + sC_1 v_o$$

Troviamo v_o in funzione di v_s

$$v_o = \frac{Av_S}{1 + sR_2C_2 + sR_1C_2 + sR_1C_1 - sR_1C_1A + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

Funzione di trasferimento

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{A}{1 + s[R_2C_2 + R_1C_2 + R_1C_1(1 - A)] + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

Polinomio di secondo grado!

Il segno del coef. di primo grado dipende da A

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

30

Filtro Sallen-Key passa-basso

$$W(s) = \frac{A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

Esempio: $R_1 = R_2 = R$ $C_1 = C_2 = C$

$$v_o = \frac{A}{1 + s[RC + RC(1 - A) + s^2R^2C^2]v_s}$$

$$W(s) = \frac{A}{1 + sRC(3 - A) + s^2(RC)^2}$$

$$\delta = \frac{1}{2}(3 - A) \quad \omega_p = \frac{1}{RC}$$

$$-1 < \delta < 1 \rightarrow 1 < A < 5$$

$$\delta > 0 \rightarrow A < 3$$

Esistono dei limiti al valore del guadagno

poli complessi p. reale negativa	poli complessi p. reale positiva	poli reali positivi
1 $0 < \delta < 1$	3 $-1 < \delta < 0$	5 $\delta < -1$

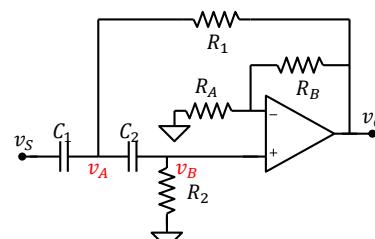
Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

32

Andrea Cester, Fondamenti di Elettronica - Laurea in Ingegneria Biomedica

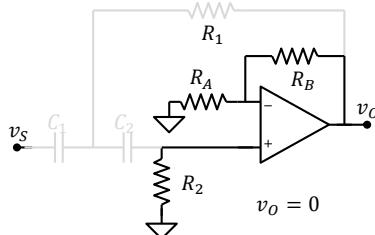
31

Filtro Sallen-Key passa-alto



Bassa frequenza ($\omega \rightarrow 0$)

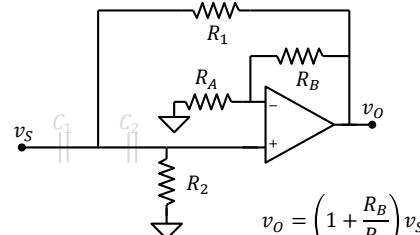
Configurazione non invertente (ingresso nullo)



$$A = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

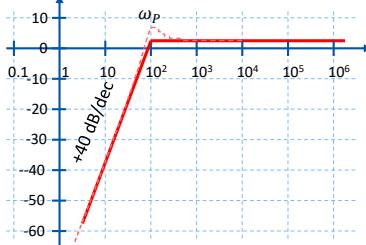
Alta frequenza ($\omega \rightarrow \infty$)

Configurazione non invertente



$$v_O = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) v_S$$

Filtro Sallen-Key passa-alto



$$W(s) = \frac{A \frac{s^2}{\omega_p^2}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_p} + \frac{s^2}{\omega_p^2}}$$

$$\text{Esempio: } R_1 = R_2 = R \quad C_1 = C_2 = C$$

$$v_O = \frac{As^2 R^2 C^2}{1 + s[RC + RC(1 - A)] + s^2 R^2 C^2} v_S$$

$$W(s) = \frac{As(RC)^2}{1 + sRC(3 - A) + s^2(RC)^2}$$

$$\delta = \frac{1}{2}(3 - A) \quad \omega_p = \frac{1}{RC}$$

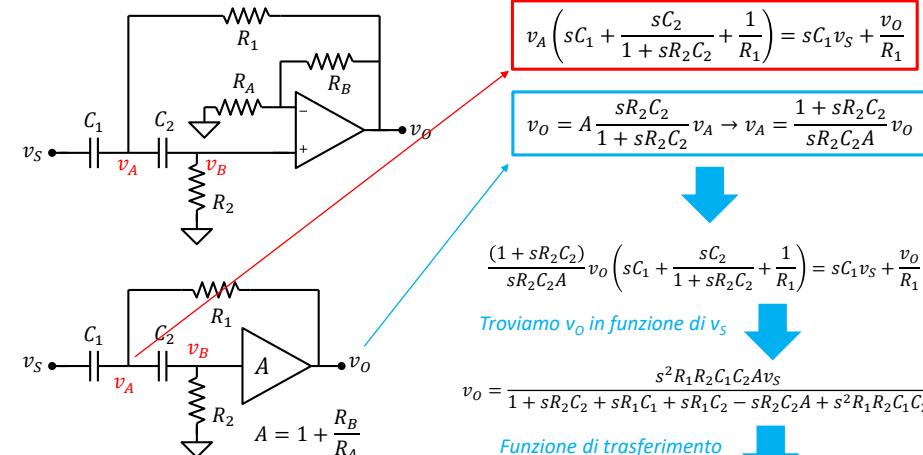
Esistono dei limiti al valore del guadagno

poli complessi p. reale negativa	poli complessi p. reale positiva	poli reali positivi
1	0 < δ < 1	3

$$-1 < \delta < 1 \rightarrow 1 < A < 5$$

$$\delta > 0 \rightarrow A < 3$$

Filtro Sallen-Key passa-alto



Troviamo v_O in funzione di v_S

$$v_O = \frac{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 A v_S}{1 + sR_2 C_2 + sR_1 C_1 + sR_1 C_2 - sR_2 C_2(1-A) + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

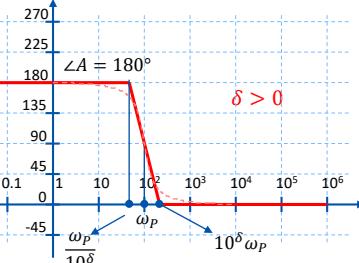
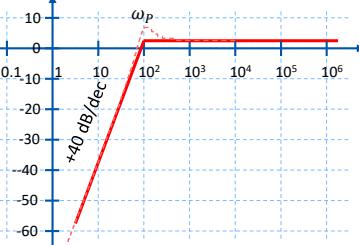
Funzione di trasferimento

$$v_O = \frac{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 A v_S}{1 + s[R_1 C_1 + R_1 C_2 - R_2 C_2(1-A)] + s^2 R_1 R_2 C_1 C_2}$$

Polinomio di secondo grado!

Il segno del coef. di primo grado dipende da A

Filtro Sallen-Key passa-banda



$$\angle A = 180^\circ$$

$$\delta > 0$$

$$\delta = \frac{1}{2}(3 - A)$$

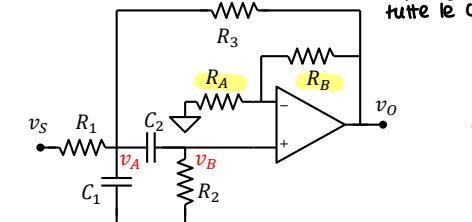
$$\omega_p = \frac{1}{RC}$$

$$-1 < \delta < 1 \rightarrow 1 < A < 5$$

$$\delta > 0 \rightarrow A < 3$$

$$\text{Esistono dei limiti al valore del guadagno}$$

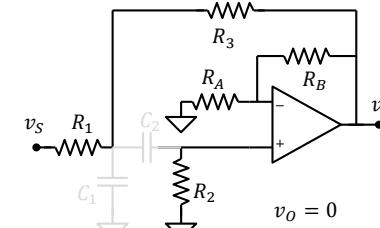
R_A e R_B sono le stesse in tutte le configurazioni!



$$A = 1 + \frac{R_B}{R_A}$$

Bassa frequenza ($\omega \rightarrow 0$)

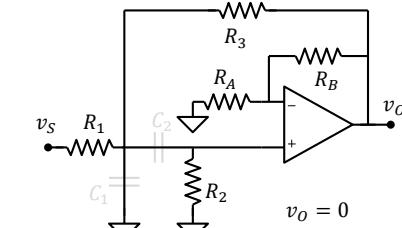
Configurazione non invertente (ingresso nullo)



$$v_O = 0$$

Alta frequenza ($\omega \rightarrow \infty$)

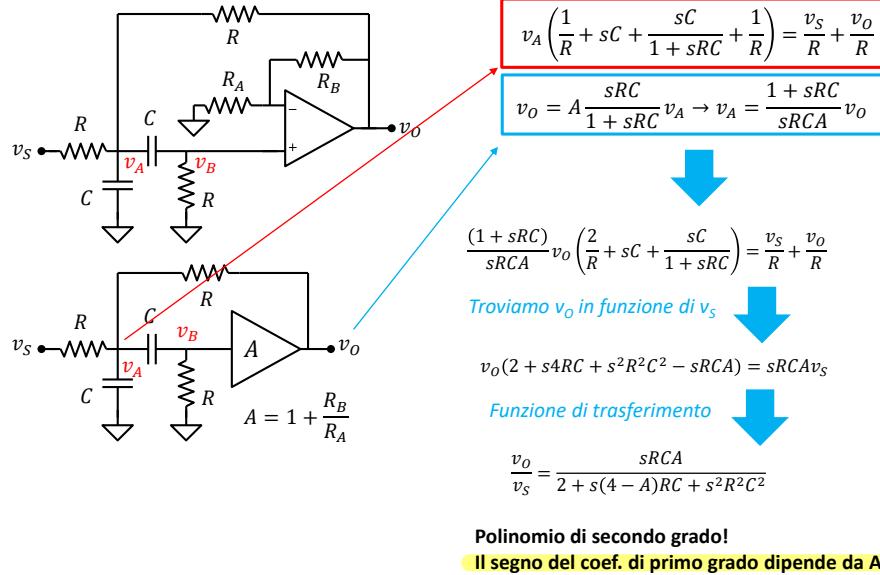
Configurazione non invertente (ingresso nullo)



$$v_O = 0$$

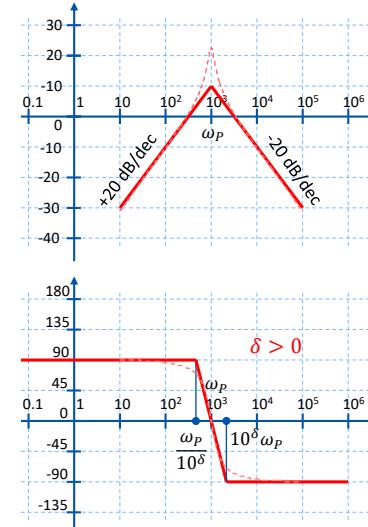
Filtro Sallen-Key passa-banda

Esempio 1: assumiamo per semplicità $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C_2=C$



Filtro Sallen-Key passa-banda

Esempio 1: assumiamo per semplicità $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C_2=C$



$$\frac{v_O}{v_S} = \frac{s \frac{RCA}{2}}{1 + s \left(2 - \frac{A}{2} \right) RC + s^2 \frac{R^2 C^2}{2}}$$

$$\frac{v_O}{v_S} = \frac{\frac{s}{\omega_P} \frac{A}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{s}{\omega_P} (4 - A) \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{s}{\omega_P} \right)^2}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{2}}{4} (4 - A)$$

$$W(s) = \frac{\frac{s}{\omega_P} \frac{A}{\sqrt{2}}}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_P} + \frac{s^2}{\omega_P^2}}$$

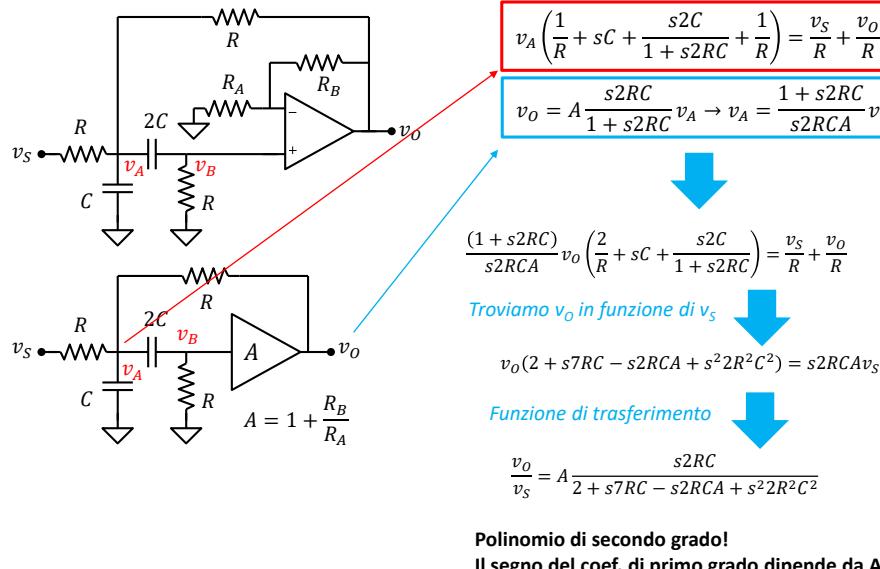
$-1 < \delta < 1 \rightarrow 1.17 < A < 6.83$
 $\delta > 0 \rightarrow A < 4$

Esistono dei limiti al valore del guadagno

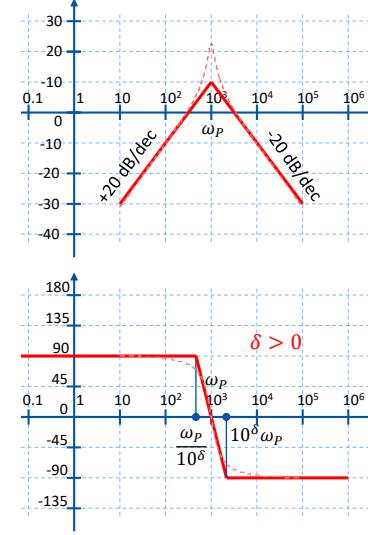
poli reali negativi	poli complessi p. reale negativa	poli complessi p. reale positiva	poli reali positivi
A: 1 $\delta > 1$ 1.17	$0 < \delta < 1$ 4	$-1 < \delta < 0$ 6.83	$\delta < -1$

Filtro Sallen-Key passa-banda

Esempio 2: assumiamo per semplicità $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C$, $C_2=2C$



Esempio 2: assumiamo per semplicità $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C$, $C_2=2C$



$$\frac{v_O}{v_S} = A \frac{sRC}{1 + sRC \left(\frac{7}{2} - A \right) + s^2 R^2 C^2}$$

$$\frac{v_O}{v_S} = A \frac{\frac{s}{\omega_P}}{1 + \frac{s}{\omega_P} \left(\frac{7}{2} - A \right) + \left(\frac{s}{\omega_P} \right)^2}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} - A \right)$$

$$W(s) = \frac{\frac{s}{\omega_P} A}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_P} + \frac{s^2}{\omega_P^2}}$$

$-1 < \delta < 1 \rightarrow 10 < A < 18$
 $\delta > 0 \rightarrow A < 14$

Esistono dei limiti al valore del guadagno

poli reali negativi	poli complessi p. reale negativa	poli complessi p. reale positiva	poli reali positivi
A: 1 $\delta > 1$	$0 < \delta < 1$ 10	$-1 < \delta < 0$ 14	$\delta < -1$ 18