A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

3º appello — 4 settembre 2018

Esercizio 1. Dimostrare che il valore assoluto del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è uguale all'area del parallelogramma determinato dai vettori $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$.

Esercizio 2. Sia $f : V \to V$ una funzione lineare tale che $f \circ f = f$. Dimostrare che il nucleo di f e l'immagine di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, consideriamo i sottospazi

$$U : x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \qquad W : 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0.$$

(a) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(b) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $(U \cap W)^\perp$.

(c) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (3x - 2y + z,\ x + 3y - 2z)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base $\{v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (0, 1, 2),\ v_3 = (2, -1, 0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$.

(c) Trovare il nucleo di f prima utilizzando la matrice A e poi utilizzando la matrice B. Spiegare come mai si ottengono risultati diversi.

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(b) Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli determinare l'equazione del sottospazio formato dai vettori $B = (a, b, c)$ per i quali il sistema $AX = B$ ammette soluzioni.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il piano

$$\pi_\alpha : \alpha x - 3\alpha y - z - 1 = 0, \quad \text{e la retta} \quad r_\alpha : \begin{cases} x - \alpha y - 2 = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per cui r_α e π_α sono incidenti.

(b) Per quali valori di α la retta r_α è parallela al piano π_α? Per quali valori di α la retta r_α è perpendicolare al piano π_α?

(c) Dopo aver posto $\alpha = 1$, determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = (1, -1, -3)$, parallela al piano π_α e ortogonale alla retta r_α.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

3º appello — 4 settembre 2018

Esercizio 1. Dimostrare che il valore assoluto del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è uguale all'area del parallelogramma determinato dai vettori $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$.

Esercizio 2. Sia $f : V \to V$ una funzione lineare tale che $f \circ f = f$. Dimostrare che il nucleo di f e l'immagine di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, consideriamo i sottospazi

$$U : 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \qquad W : 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0.$$

(a) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(b) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $(U \cap W)^\perp$.

(c) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (2x + y - z,\ x - 2y - 3z)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base $\{v_1 = (0, 1, 2),\ v_2 = (2, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$.

(c) Trovare il nucleo di f prima utilizzando la matrice A e poi utilizzando la matrice B. Spiegare come mai si ottengono risultati diversi.

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(b) Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli determinare l'equazione del sottospazio formato dai vettori $B = (a, b, c)$ per i quali il sistema $AX = B$ ammette soluzioni.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il piano

$$\pi_\alpha : 2\alpha x - 3\alpha y + z + 2 = 0, \quad \text{e la retta} \quad r_\alpha : \begin{cases} y + \alpha z + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per cui r_α e π_α sono incidenti.

(b) Per quali valori di α la retta r_α è parallela al piano π_α? Per quali valori di α la retta r_α è perpendicolare al piano π_α?

(c) Dopo aver posto $\alpha = 2$, determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = (3, 1, -1)$, parallela al piano π_α e ortogonale alla retta r_α.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, M. IMBESI, S. DI RUZZA

3° appello — 4 settembre 2018

Esercizio 1. Dimostrare che il valore assoluto del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è uguale all'area del parallelogramma determinato dai vettori $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$.

Esercizio 2. Sia $f\colon V \to V$ una funzione lineare tale che $f \circ f = f$. Dimostrare che il nucleo di f e l'immagine di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, consideriamo i sottospazi

$$U : 3x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \qquad W : x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0.$$

(a) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(b) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $(U \cap W)^\perp$.

(c) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2y - 2z,\ 3x - y + z)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base $\{v_1 = (2, -1, 0),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (0, 1, 2)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$.

(c) Trovare il nucleo di f prima utilizzando la matrice A e poi utilizzando la matrice B. Spiegare come mai si ottengono risultati diversi.

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \\ 8 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(b) Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli determinare l'equazione del sottospazio formato dai vettori $B = (a, b, c)$ per i quali il sistema $AX = B$ ammette soluzioni.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il piano

$$\pi_\alpha : 5\alpha x + \alpha y + 4z = 0, \quad \text{e la retta} \quad r_\alpha : \begin{cases} 2x + \alpha z - 2 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per cui r_α e π_α sono incidenti.

(b) Per quali valori di α la retta r_α è parallela al piano π_α? Per quali valori di α la retta r_α è perpendicolare al piano π_α?

(c) Dopo aver posto $\alpha = 1$, determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = (1, -4, 0)$, parallela al piano π_α e ortogonale alla retta r_α.

D

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, M. Imbesi, S. Di Ruzza

3° appello — 4 settembre 2018

Esercizio 1. Dimostrare che il valore assoluto del determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è uguale all'area del parallelogramma determinato dai vettori $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$.

Esercizio 2. Sia $f : V \to V$ una funzione lineare tale che $f \circ f = f$. Dimostrare che il nucleo di f e l'immagine di f sono in somma diretta.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale, consideriamo i sottospazi

$$U : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \qquad W : 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0.$$

(a) Dire se è possibile trovare un sottospazio vettoriale non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ che sia in somma diretta con U e anche con $U^\perp$. Se tale L esiste, trovarne una base.

(b) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $(U \cap W)^\perp$.

(c) Trovare una base ortogonale di $U^\perp + W^\perp$.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (-2x + 3y + z,\ 2x - y - z)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^2$. Scrivere la matrice B di f rispetto alla base $\{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (2, 1, 0),\ v_3 = (0, 1, 2)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(b) Scrivere la matrice P di cambiamento di base, tale che $B = AP$.

(c) Trovare il nucleo di f prima utilizzando la matrice A e poi utilizzando la matrice B. Spiegare come mai si ottengono risultati diversi.

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare gli autovalori e gli autospazi di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

(b) Utilizzando il teorema di Rouché-Capelli determinare l'equazione del sottospazio formato dai vettori $B = (a, b, c)$ per i quali il sistema $AX = B$ ammette soluzioni.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il piano

$$\pi_\alpha : 2x + y + 2\alpha z - \alpha = 0, \quad \text{e la retta} \quad r_\alpha : \begin{cases} x + \alpha z - 2 = 0 \\ \alpha x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per cui r_α e π_α sono incidenti.

(b) Per quali valori di α la retta r_α è parallela al piano π_α? Per quali valori di α la retta r_α è perpendicolare al piano π_α?

(c) Dopo aver posto $\alpha = -2$, determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = (0, -5, -1)$, parallela al piano π_α e ortogonale alla retta r_α.