A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4º appello — 7 febbraio 2023

Esercizio 1. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini se la matrice A è invertibile.

(b) Sia $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = f(v_1)$ e $v_3 = f(v_2)$. Si dimostri che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Sia $v_4 = f(v_3)$. Si scriva v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3.

(d) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (b).

(e) Dato che A e B sono matrici simili, esiste una matrice invertibile P tale che $A = P\,B\,P^{-1}$. Si trovi una tale matrice P.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori di A e mostrare che per $t \neq 0$, $t \neq 5$ la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Consideriamo ora i due casi $t = 0$, $t = 5$. Per ciascuno di questi casi calcolare gli autovettori di A e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esistono dei valori di t per i quali A sia simile a una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare la dimensione e una base di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$ e scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (1, 1, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se W esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale W non può esistere.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sia r la retta passante per $A = (0, 2, -1)$ e $B = (4, 0, 1)$ e sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

(a) Determinare un punto C sulla retta s tale che il vettore $\vec{AC}$ sia ortogonale al vettore $\vec{AB}$ e calcolare l'area del triangolo ABC.

(b) Verificare che le rette r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s.

(c) Determinare per quale valore di t esistono delle rette passanti per il punto $P = (1, t, 0)$ che intersecano sia r che s.

(d) Dato il punto $Q = (6, -6, -9)$ determinare il punto Q' simmetrico di Q rispetto al piano π.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4^{o} appello — 7 febbraio 2023

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini se la matrice A è invertibile.

(b) Sia $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = f(v_1)$ e $v_3 = f(v_2)$. Si dimostri che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Sia $v_4 = f(v_3)$. Si scriva v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3.

(d) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (b).

(e) Dato che A e B sono matrici simili, esiste una matrice invertibile P tale che $A = P\,B\,P^{-1}$. Si trovi una tale matrice P.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori di A e mostrare che per $t \neq 0$, $t \neq 4$ la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Consideriamo ora i due casi $t = 0$, $t = 4$. Per ciascuno di questi casi calcolare gli autovettori di A e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esistono dei valori di t per i quali A sia simile a una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare la dimensione e una base di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$ e scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (3, -1, -1, 3) \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se W esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale W non può esistere.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sia r la retta passante per $A = (1, 0, -2)$ e $B = (3, -4, 0)$ e sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare un punto C sulla retta s tale che il vettore $\vec{AC}$ sia ortogonale al vettore $\vec{AB}$ e calcolare l'area del triangolo ABC.

(b) Verificare che le rette r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s.

(c) Determinare per quale valore di t esistono delle rette passanti per il punto $P = (2, -1, t)$ che intersecano sia r che s.

(d) Dato il punto $Q = (3, -2, 4)$ determinare il punto Q' simmetrico di Q rispetto al piano π.

C

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4^{o} appello — 7 febbraio 2023

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini se la matrice A è invertibile.

(b) Sia $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = f(v_1)$ e $v_3 = f(v_2)$. Si dimostri che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Sia $v_4 = f(v_3)$. Si scriva v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3.

(d) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (b).

(e) Dato che A e B sono matrici simili, esiste una matrice invertibile P tale che $A = P\,B\,P^{-1}$. Si trovi una tale matrice P.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 7 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori di A e mostrare che per $t \neq 0$, $t \neq -7$ la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Consideriamo ora i due casi $t = 0$, $t = -7$. Per ciascuno di questi casi calcolare gli autovettori di A e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esistono dei valori di t per i quali A sia simile a una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$U : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare la dimensione e una base di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$ e scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (2, 3, 5, 0) \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se W esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale W non può esistere.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sia r la retta passante per $A = (0, 1, 3)$ e $B = (2, 3, -3)$ e sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} 3y + z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

(a) Determinare un punto C sulla retta s tale che il vettore $\vec{AC}$ sia ortogonale al vettore $\vec{AB}$ e calcolare l'area del triangolo ABC.

(b) Verificare che le rette r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s.

(c) Determinare per quale valore di t esistono delle rette passanti per il punto $P = (1, 3, t)$ che intersecano sia r che s.

(d) Dato il punto $Q = (-2, -3, -1)$ determinare il punto Q' simmetrico di Q rispetto al piano π.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4^{o} appello — 7 febbraio 2023

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini se la matrice A è invertibile.

(b) Sia $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = f(v_1)$ e $v_3 = f(v_2)$. Si dimostri che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Sia $v_4 = f(v_3)$. Si scriva v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3.

(d) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (b).

(e) Dato che A e B sono matrici simili, esiste una matrice invertibile P tale che $A = P\,B\,P^{-1}$. Si trovi una tale matrice P.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori di A e mostrare che per $t \neq 0$, $t \neq 5$ la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Consideriamo ora i due casi $t = 0$, $t = 5$. Per ciascuno di questi casi calcolare gli autovettori di A e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esistono dei valori di t per i quali A sia simile a una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$U : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare la dimensione e una base di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$ e scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia $U^\perp$.

(c) Dato il vettore $v = (3, -1, 1, -2) \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se W esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale W non può esistere.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ sia r la retta passante per $A = (1, -1, 2)$ e $B = (3, 3, 0)$ e sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

(a) Determinare un punto C sulla retta s tale che il vettore $\vec{AC}$ sia ortogonale al vettore $\vec{AB}$ e calcolare l'area del triangolo ABC.

(b) Verificare che le rette r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s.

(c) Determinare per quale valore di t esistono delle rette passanti per il punto $P = (2, t, 2)$ che intersecano sia r che s.

(d) Dato il punto $Q = (-7, 1, -2)$ determinare il punto Q' simmetrico di Q rispetto al piano π.