ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.02.2024

TEMA 1

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

Poiché $e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1 > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $f(x) = f(-x)$, cioè f è pari.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

$$\lim_{x\to+\infty} e^{|x|} + \frac{1}{2}|x| + 1 = +\infty \qquad \text{quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dato che f è pari vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x + \frac{1}{2}x + 1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{x} = 1$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$$

grazie alla gerarchia degli infiniti e la continuità della funzione log.

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x) + \log\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - x = 0$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. Poiché f è pari, $y = -x$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché somma e composizione di funzioni derivabili e per $x > 0$ vale

$$f'(x) = \frac{e^x + \frac{1}{2}}{e^x + \frac{1}{2}x + 1}.$$

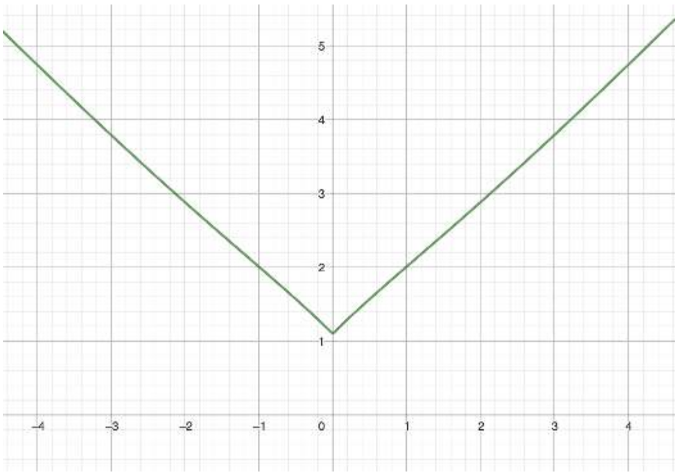

Figure 1: Grafico di f

Quindi grazie alla gerarchia degli infiniti $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, inoltre vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{4}.$$

Dato che f è pari, f' è dispari, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{4}.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ e più precisamente ha un punto angoloso in $x = 0$.

Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ la funzione f è crescente in $(0, +\infty)$. Essendo pari, f è quindi decrescente in $(-\infty, 0)$. Dato che f è continua in 0, deduciamo che f ha un punto di minimo globale in 0 con valore $f(0) = \log 2 = \inf f$. Grazie al teorema di Fermat concludiamo che non ci sono altri massimi e minimi relativi, infine $\sup f = +\infty$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f. Vedere Figura 1.

Esercizio 2 (punti 8) Determinare in campo complesso le soluzioni di

$$z^4 + (4i - 2\sqrt{3})z^2 - (4 + 4\sqrt{3}i) = 0,$$

scriverle in forma esponenziale o trigonometrica e disegnarle sul piano di Gauss.

Avendo un'equazione di quarto grado, otterremo 4 soluzioni contate con la loro molteplicità. Poniamo $w = z^2$: in questo modo w soddisfa l'equazione di secondo grado

$$w^2 + (4i - 2\sqrt{3})w - (4 + 4\sqrt{3}i) = 0$$

Le due soluzioni w_1 e w_2 di questa equazione sono date dalla nota formula

$$w_1 = \frac{-b + \xi_1}{2a}, \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{-b + \xi_2}{2a}$$

dove ξ_1 e $\xi_2 = -\xi_1$ sono le due soluzioni di $\xi^2 = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso abbiamo $a = 1, b = 4i - 2\sqrt{3}, c = -(4 + 4\sqrt{3}i)$ quindi

$$b^2 - 4ac = (4i - 2\sqrt{3})^2 + 4(4 + 4\sqrt{3}i) = 12.$$

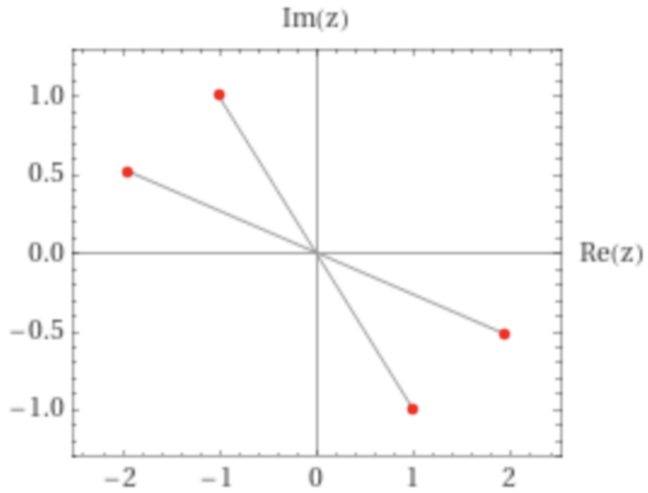

Figure 2: Soluzioni in $\mathbb{C}$

In particolare abbiamo $\xi_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e $\xi_2 = -2\sqrt{3}$, e quindi

$$w_1 = \frac{2\sqrt{3} - 4i + 2\sqrt{3}}{2} = 2(\sqrt{3} - i), \qquad w_2 = \frac{2\sqrt{3} - 4i - 2\sqrt{3}}{2} = -2i.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione saranno le due radici z_1 e z_2 di w_1 e le due radici z_3 e z_4 di w_2: per determinare le radici di w_1 osserviamo che

$$|w_1| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4 \qquad \text{e} \qquad \text{Arg}(w_1) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

quindi

$$z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad z_2 = -z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)\right).$$

Inoltre

$$|w_2| = 2 \qquad \text{e} \qquad \text{Arg}(w_2) = -\frac{\pi}{2},$$

quindi

$$z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 - i$$

e

$$z_4 = -z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -1 + i.$$

Tutte le radici hanno molteplicità 1.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^a\left(\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1\right)}{3\log n - \arctan n}.$$

Osserviamo che la serie ha termini definitivamente positivi, in particolare la convergenza e la convergenza assoluta sono equivalenti. Dallo sviluppo del coseno iperbolico abbiamo che

$$\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1 \sim \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{8n^2},$$

inoltre dato che $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$, il denominatore è asintotico a $3\log n$. Quindi

$$a_n = \frac{n^a\left(\cosh\left(\frac{1}{2n}\right) - 1\right)}{3\log n - \arctan n} \sim \frac{n^{a-2}}{24\log n}.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le serie campione deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $a-2 < -1$ cioè per $a < 1$ e diverge a $+\infty$ se $a - 2 \geq -1$ cioè se $a \geq 1$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+5}\,dx.$$

Poiché $f(x) = |x|\sqrt{x^2+5}$ è pari vale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$. Quindi, ponendo $y = x^2+5$ otteniamo

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+5}\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+5}\,dx = \int_5^6 \sqrt{y}\,dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=5}^{6} = \frac{2}{3}\left(6^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}}\right).$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_2^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right) \cdot \left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4} dx \quad \text{per } a \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right) \cdot \left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4}$ è continua in $[2, +\infty)$ quindi l'integrale è un integrale in senso improprio solo per $x \to +\infty$.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\left(\sqrt{x+5}\right)^{a-4} \sim x^{\frac{a-4}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Mentre

$$\arctan\left(\frac{1}{x^a}\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^a} & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

dove nel primo caso abbiamo usato il comportamento asintotico di $\arctan(y)$ per $y \to 0$. Quindi

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{\frac{a-4}{2}-a} & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4} \cdot x^{\frac{a-4}{2}} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot x^{\frac{a-4}{2}} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le funzioni campione deduciamo che

- se $a > 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{a-4}{2} - a < -1$ cioè se $a > -2$. Quindi l'integrale converge per ogni $a > 0$.
- se $a \leq 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{a-4}{2} < -1$ cioè se $a < 2$. Quindi l'integrale converge per ogni $a \leq 0$.

In conclusione l'integrale converge per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.02.2024

TEMA 2

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(2e^{|x|} + |x| + 1\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

Poiché $2e^{|x|} + |x| + 1 > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $f(x) = f(-x)$, cioè f è pari.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

$$\lim_{x\to+\infty} 2e^{|x|} + |x| + 1 = +\infty \qquad \text{quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dato che f è pari vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(2e^x + x + 1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(2 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(2 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{x} = 1\end{aligned}$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(2 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = \log 2$$

grazie alla gerarchia degli infiniti e la continuità della funzione log.

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x) + \log\left(2 + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - x = \log 2$$

quindi $y = x + \log 2$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. Poiché f è pari, $y = -x + \log 2$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché somma e composizione di funzioni derivabili e per $x > 0$ vale

$$f'(x) = \frac{2e^x + 1}{2e^x + x + 1}.$$

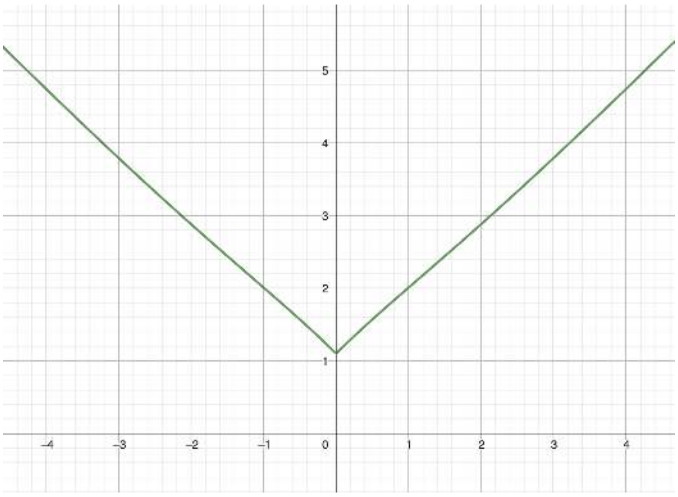

Figure 3: Grafico di f

Quindi grazie alla gerarchia degli infiniti $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, inoltre vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1.$$

Dato che f è pari, f' è dispari, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ e più precisamente ha un punto angoloso in $x = 0$. Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ la funzione f è crescente in $(0, +\infty)$. Essendo pari, f è quindi decrescente in $(-\infty, 0)$. Dato che f è continua in 0, deduciamo che f ha un punto di minimo globale in 0 con valore $f(0) = \log 3 = \inf f$. Grazie al teorema di Fermat concludiamo che non ci sono altri massimi e minimi relativi, infine $\sup f = +\infty$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 3.

Esercizio 2 (punti 8) Determinare in campo complesso le soluzioni di

$$z^4 + (2i - \sqrt{3})z^2 - (1 + i\sqrt{3}) = 0$$

scriverle in forma esponenziale o trigonometrica e e disegnarle sul piano di Gauss.

Avendo un'equazione di quarto grado, otterremo 4 soluzioni contate con la loro molteplicità. Poniamo $w = z^2$: in questo modo w soddisfa l'equazione di secondo grado

$$w^2 + (2i - \sqrt{3})w - (1 + i\sqrt{3}) = 0$$

Le due soluzioni w_1 e w_2 di questa equazione sono date dalla nota formula

$$w_1 = \frac{-b + \xi_1}{2a}, \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{-b + \xi_2}{2a}$$

dove ξ_1 e $\xi_2 = -\xi_1$ sono le due soluzioni di $\xi^2 = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso abbiamo $a = 1, b = 2i - \sqrt{3}, c = -1 - \sqrt{3}i$ quindi

$$b^2 - 4ac = (2i - \sqrt{3})^2 + 4(1 + \sqrt{3}i) = 3.$$

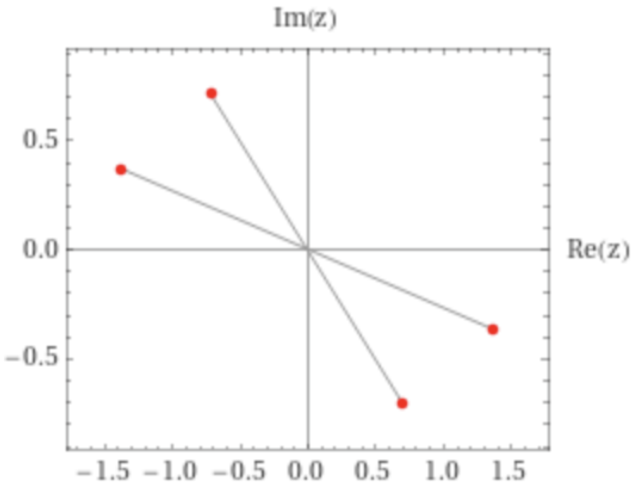

Figure 4: Soluzioni in $\mathbb{C}$

In particolare abbiamo $\xi_1 = \sqrt{3}$ e $\xi_2 = -\sqrt{3}$, e quindi

$$w_1 = \frac{\sqrt{3} - 2i + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - i, \qquad w_2 = \frac{\sqrt{3} - 2i - \sqrt{3}}{2} = -i.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione saranno le due radici z_1 e z_2 di w_1 e le due radici z_3 e z_4 di w_2: per determinare le radici di w_1 osserviamo che

$$|w_1| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(w_1) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

quindi

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right) \text{ e } z_2 = -z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)\right).$$

Inoltre

$$|w_2| = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(w_2) = -\frac{\pi}{2},$$

quindi

$$z_3 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

e

$$z_4 = -z_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i).$$

Tutte le radici hanno molteplicità 1.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a\left(1 - \cos\left(\frac{1}{3n}\right)\right)}{2\log n + \arctan n}.$$

Osserviamo che la serie ha termini definitivamente positivi, in particolare la convergenza e la convergenza assoluta sono equivalenti. Dallo sviluppo del coseno abbiamo che

$$1 - \cos\left(\frac{1}{3n}\right) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(3n)^2} = \frac{1}{18n^2},$$

inoltre dato che $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$, il denominatore è asintotico a $2\log n$. Quindi

$$a_n = \frac{n^a\left(1 - \cos\left(\frac{1}{3n}\right)\right)}{2\log n + \arctan n} \sim \frac{n^{a-2}}{36\log n}.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le serie campione deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $a - 2 < -1$ cioè per $a < 1$ e diverge a $+\infty$ se $a - 2 \geq -1$ cioè se $a \geq 1$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{2} |x|\sqrt{x^2+4}\,dx.$$

Poiché $f(x) = |x|\sqrt{x^2+4}$ è pari vale $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 2\int_0^2 f(x)\,dx$. Quindi, ponendo $y = x^2+4$ otteniamo

$$\int_{-2}^{2} |x|\sqrt{x^2+4}\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{x^2+4}\,dx = \int_4^8 \sqrt{y}\,dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=4}^{8} = \frac{2}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right).$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_2^{+\infty} \arctan\left(x^a\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}\right)^{-a-3}\,dx \quad \text{per } a \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f(x) = \arctan\left(x^a\right)\cdot\left(\sqrt{x+4}\right)^{-a-3}$ è continua in $[2, +\infty)$ quindi l'integrale è un integrale in senso improprio solo per $x \to +\infty$.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^{-a-3} \sim x^{\frac{-a-3}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Mentre

$$\arctan\left(x^a\right) \sim \begin{cases} x^a & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

dove nel primo caso abbiamo usato il comportamento asintotico di $\arctan(y)$ per $y \to 0$. Quindi

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{\frac{-a-3}{2}+a} & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4}\cdot x^{\frac{-a-3}{2}} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2}\cdot x^{\frac{-a-3}{2}} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le funzioni campione deduciamo che

- se $a > 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{-a-3}{2} + a < -1$ cioè se $a < 1$. Quindi l'integrale converge per $a \in (0, 1)$ e diverge a $+\infty$ se $a \geq 1$.
- se $a \leq 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{-a-3}{2} < -1$ cioè se $a > -1$. Quindi l'integrale converge per $a \in (-1, 0]$ e diverge a $+\infty$ se $a \leq -1$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.02.2024

TEMA 3

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(e^{|x|} + 2|x| + 1\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

Poiché $e^{|x|} + 2|x| + 1 > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $f(x) = f(-x)$, cioè f è pari.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

$$\lim_{x\to+\infty} e^{|x|} + 2|x| + 1 = +\infty \qquad \text{quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dato che f è pari vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x + 2x + 1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{x} = 1\end{aligned}$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$$

grazie alla gerarchia degli infiniti e la continuità della funzione log.

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x) + \log\left(1 + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - x = 0$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. Poiché f è pari, $y = -x$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché somma e composizione di funzioni derivabili e per $x > 0$ vale

$$f'(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 2x + 1}.$$

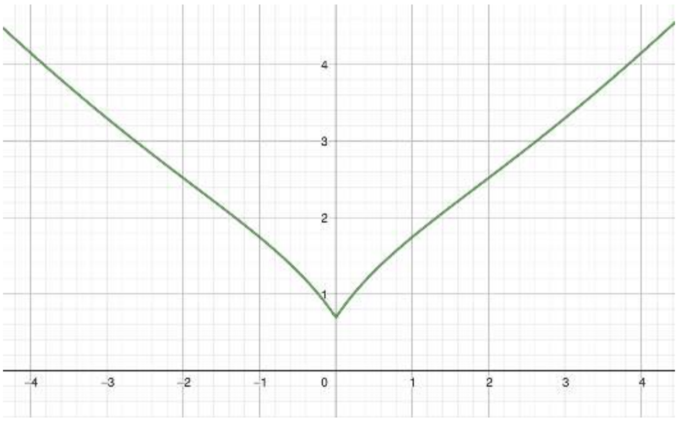

Figure 5: Grafico di f

Quindi grazie alla gerarchia degli infiniti $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, inoltre vale

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

Dato che f è pari, f' è dispari, quindi

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ e più precisamente ha un punto angoloso in $x = 0$. Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ la funzione f è crescente in $(0, +\infty)$. Essendo pari, f è quindi decrescente in $(-\infty, 0)$. Dato che f è continua in 0, deduciamo che f ha un punto di minimo globale in 0 con valore $f(0) = \log 2 = \inf f$. Grazie al teorema di Fermat concludiamo che non ci sono altri massimi e minimi relativi, infine $\sup f = +\infty$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 5.

Esercizio 2 (punti 8) Determinare in campo complesso le soluzioni di

$$z^4 + (2\sqrt{3} - 4i)z^2 - (4\sqrt{3}i + 4) = 0$$

scriverle in forma esponenziale o trigonometrica e e disegnarle sul piano di Gauss.

Avendo un'equazione di quarto grado, otterremo 4 soluzioni contate con la loro molteplicità. Poniamo $w = z^2$: in questo modo w soddisfa l'equazione di secondo grado

$$w^2 + (2\sqrt{3} - 4i)w - (4 + 4\sqrt{3}i) = 0$$

Le due soluzioni w_1 e w_2 di questa equazione sono date dalla nota formula

$$w_1 = \frac{-b + \xi_1}{2a}, \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{-b + \xi_2}{2a}$$

dove ξ_1 e $\xi_2 = -\xi_1$ sono le due soluzioni di $\xi^2 = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso abbiamo $a = 1, b = 2\sqrt{3} - 4i, c = -(4 + 4\sqrt{3}i)$ quindi

$$b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} - 4i)^2 + 4(4 + 4\sqrt{3}i) = 12.$$

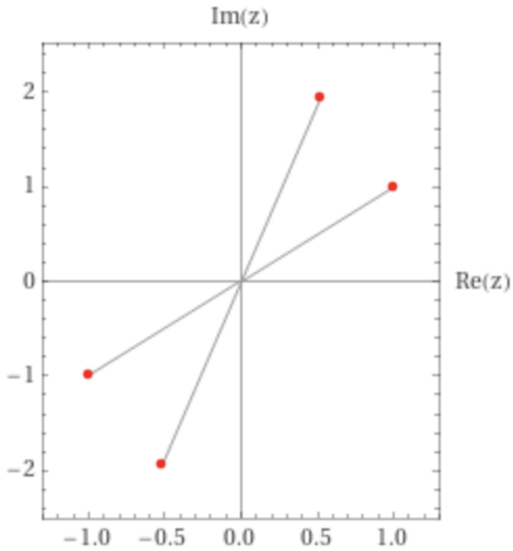

Figure 6: Soluzioni in $\mathbb{C}$

In particolare abbiamo $\xi_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e $\xi_2 = -2\sqrt{3}$, e quindi

$$w_1 = \frac{4i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 2i, \qquad w_2 = \frac{4i - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} = 2(i - \sqrt{3}).$$

Le quattro soluzioni dell'equazione saranno le due radici z_1 e z_2 di w_1 e le due radici z_3 e z_4 di w_2: per determinare le radici di w_1 osserviamo che

$$|w_1| = 2 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(w_1) = \frac{\pi}{2},$$

quindi

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$$

e

$$z_2 = -z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = -1 - i.$$

Inoltre

$$|w_2| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = 4 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Arg}(w_2) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{5\pi}{6},$$

quindi

$$z_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

e

$$z_4 = -z_3 = 2e^{-i\frac{7\pi}{12}} = 2\left(-\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Tutte le radici hanno molteplicità 1.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a\left(1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)}{3\log n - \arctan n}.$$

Osserviamo che la serie ha termini definitivamente positivi, in particolare la convergenza e la convergenza assoluta sono equivalenti. Dallo sviluppo del coseno abbiamo che

$$1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{8n^2},$$

inoltre dato che $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$, il denominatore è asintotico a $3\log n$. Quindi

$$a_n = \frac{n^a\left(1-\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)}{3\log n - \arctan n} \sim \frac{n^{a-2}}{24\log n}.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le serie campione deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $a-2<-1$ cioè per $a<1$ e diverge a $+\infty$ se $a-2\geq -1$ cioè se $a \geq 1$.

Esercizio 4 (punti 8)

(a) Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+3}\,dx.$$

Poiché $f(x) = |x|\sqrt{x^2+3}$ è pari vale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$. Quindi, ponendo $y = x^2+3$ otteniamo

$$\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{x^2+3}\,dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int_3^4 \sqrt{y}\,dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=3}^{4} = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}\right).$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_2^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}\right)^{a-4}\,dx \quad \text{per } a \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^a}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}\right)^{a-4}$ è continua in $[2,+\infty)$ quindi l'integrale è un integrale in senso improprio solo per $x \to +\infty$.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^{a-4} \sim x^{\frac{a-4}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Mentre

$$\arctan\left(\frac{1}{x^a}\right) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^a} & \text{if } a>0,\\ \frac{\pi}{4} & \text{if } a=0,\\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a<0,\end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

dove nel primo caso abbiamo usato il comportamento asintotico di $\arctan(y)$ per $y \to 0$. Quindi

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{\frac{a-4}{2}-a} & \text{if } a>0,\\ \frac{\pi}{4}\cdot x^{\frac{a-4}{2}} & \text{if } a=0,\\ \frac{\pi}{2}\cdot x^{\frac{a-4}{2}} & \text{if } a<0,\end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le funzioni campione deduciamo che

- se $a>0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{a-4}{2} - a < -1$ cioè se $a > -2$. Quindi l'integrale converge per ogni $a > 0$.
- se $a \leq 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{a-4}{2} < -1$ cioè se $a < 2$. Quindi l'integrale converge per ogni $a \leq 0$.

In conclusione l'integrale converge per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 12.02.2024

TEMA 4

Esercizio 1 (punti 8) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{1}{2}\,e^{|x|} + |x| + 1\right)$$

(a) determinarne il dominio, il segno ed eventuali simmetrie;

Poiché $\frac{1}{2}\,e^{|x|} + |x| + 1 > 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $f(x) = f(-x)$, cioè f è pari.

(b) calcolare i limiti ed eventuali asintoti agli estremi del dominio;

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\,e^{|x|} + |x| + 1 = +\infty \qquad \text{quindi} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dato che f è pari vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{1}{2}\,e^x + x + 1\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^x\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x) + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)}{x} = 1$$

poiché

$$\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

grazie alla gerarchia degli infiniti e la continuità della funzione log.

Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \log(e^x) + \log\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) - x = -\log 2$$

quindi $y = x - \log 2$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$. Poiché f è pari, $y = -x - \log 2$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

(c) calcolare la derivata e discutere la derivabilità di f (compresi i limiti della derivata ove necessario); discutere la monotonia di f e determinare l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f ed eventuali punti di minimo e massimo relativo ed assoluto;

La funzione f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché somma e composizione di funzioni derivabili e per $x > 0$ vale

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\,e^x + 1}{\frac{1}{2}\,e^x + x + 1}.$$

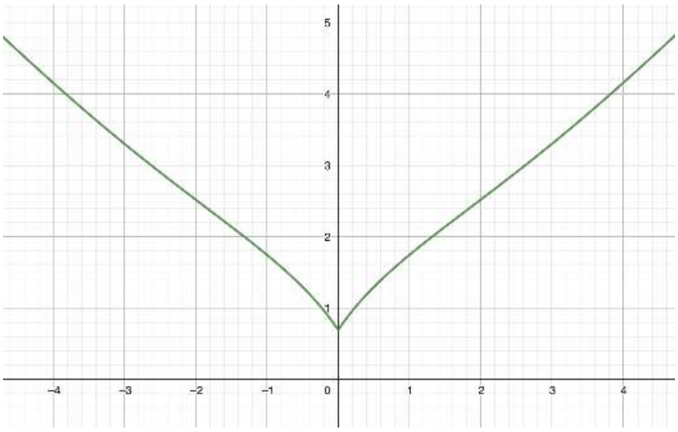

Figure 7: Grafico di f

Quindi grazie alla gerarchia degli infiniti $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$, inoltre vale

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{3}{2}.$$

Dato che f è pari, f' è dispari, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Quindi f non è derivabile in $x = 0$ e più precisamente ha un punto angoloso in $x = 0$. Dato che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$ la funzione f è crescente in $(0, +\infty)$. Essendo pari, f è quindi decrescente in $(-\infty, 0)$. Dato che f è continua in 0, deduciamo che f ha un punto di minimo globale in 0 con valore $f(0) = \log\frac{3}{2} = \inf f$. Grazie al teorema di Fermat concludiamo che non ci sono altri massimi e minimi relativi, infine $\sup f = +\infty$ perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(d) fare un abbozzo qualitativo del grafico di f.

Vedere Figura 7.

Esercizio 2 (punti 8) Determinare in campo complesso le soluzioni di

$$z^4 + (\sqrt{3} - 2i)z^2 - (i\sqrt{3} + 1) = 0$$

scriverle in forma esponenziale o trigonometrica e e disegnarle sul piano di Gauss.

Avendo un'equazione di quarto grado, otterremo 4 soluzioni contate con la loro molteplicità. Poniamo $w = z^2$: in questo modo w soddisfa l'equazione di secondo grado

$$w^2 + (\sqrt{3} - 2i)w - (1 + i\sqrt{3}) = 0$$

Le due soluzioni w_1 e w_2 di questa equazione sono date dalla nota formula

$$w_1 = \frac{-b + \xi_1}{2a}, \qquad \text{e} \qquad w_2 = \frac{-b + \xi_2}{2a}$$

dove ξ_1 e $\xi_2 = -\xi_1$ sono le due soluzioni di $\xi^2 = b^2 - 4ac$. Nel nostro caso abbiamo $a = 1, b = \sqrt{3} - 2i, c = -1 - \sqrt{3}i$ quindi

$$b^2 - 4ac = (\sqrt{3} - 2i)^2 + 4(1 + \sqrt{3}i) = 3.$$

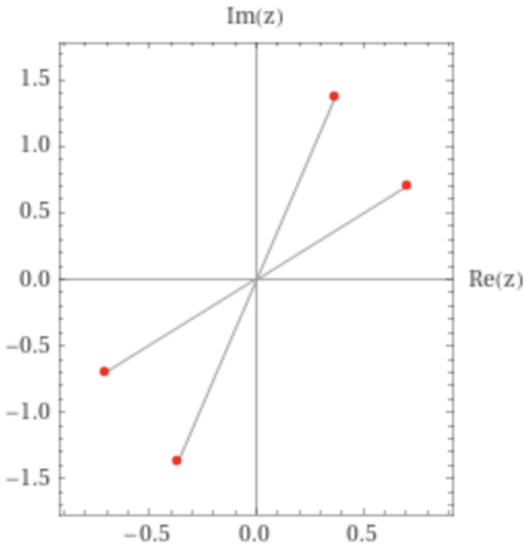

Figure 8: Soluzioni in $\mathbb{C}$

In particolare abbiamo $\xi_1 = \sqrt{3}$ e $\xi_2 = -\sqrt{3}$, e quindi

$$w_1 = \frac{2i - \sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = i, \qquad w_2 = \frac{2i - \sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = i - \sqrt{3}.$$

Le quattro soluzioni dell'equazione saranno le due radici z_1 e z_2 di w_1 e le due radici z_3 e z_4 di w_2: per determinare le radici di w_1 osserviamo che

$$|w_1| = 1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Arg}(w_1) = \frac{\pi}{2},$$

quindi

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \text{ e } z_2 = -z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i).$$

Inoltre

$$|w_2| = \sqrt{3+1} = 2 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Arg}(w_2) = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = \frac{5\pi}{6},$$

quindi

$$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

e

$$z_4 = -z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

Tutte le radici hanno molteplicità 1.

Esercizio 3 (punti 8) Studiare la convergenza della seguente serie al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a\left(\cosh\left(\frac{1}{3n}\right) - 1\right)}{2\log n + \arctan n}.$$

Osserviamo che la serie ha termini positivi, in particolare la convergenza e la convergenza assoluta sono equivalenti. Dallo sviluppo del coseno iperbolico abbiamo che

$$\cosh\left(\frac{1}{3n}\right) - 1 \sim \frac{1}{2}\frac{1}{(3n)^2} = \frac{1}{18n^2},$$

inoltre dato che $\arctan n \to \frac{\pi}{2}$, il denominatore è asintotico a $2\log n$. Quindi

$$a_n = \frac{n^a\left(\cosh\left(\frac{1}{3n}\right) - 1\right)}{2\log n + \arctan n} \sim \frac{n^{a-2}}{36\log n}.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le serie campione deduciamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $a-2 < -1$ cioè per $a < 1$ e diverge a $+\infty$ se $a - 2 \geq -1$ cioè se $a \geq 1$.

Esercizio 4 (punti 8)
(a) Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{2} |x|\sqrt{x^2+2}\, dx.$$

Poiché $f(x) = |x|\sqrt{x^2+2}$ è pari vale $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 2\int_0^2 f(x)\, dx$. Quindi, ponendo $y = x^2+2$ otteniamo

$$\int_{-2}^{2} |x|\sqrt{x^2+2}\, dx = 2\int_0^2 x\sqrt{x^2+2}\, dx = \int_2^6 \sqrt{y}\, dy = \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_{y=2}^{6} = \frac{2}{3}\left(6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right).$$

(b) Studiare la convergenza di

$$\int_2^{+\infty} \arctan(x^a) \cdot \left(\sqrt{x+2}\right)^{-a-4} dx \quad \text{per } a \in \mathbb{R}.$$

La funzione $f(x) = \arctan(x^a) \cdot \left(\sqrt{x+2}\right)^{-a-4}$ è continua in $[2, +\infty)$ quindi l'integrale è un integrale in senso improprio solo per $x \to +\infty$.

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^{-a-4} \sim x^{\frac{-a-4}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Mentre

$$\arctan(x^a) \sim \begin{cases} x^a & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

dove nel primo caso abbiamo usato il comportamento asintotico di $\arctan(y)$ per $y \to 0$. Quindi

$$f(x) \sim \begin{cases} x^{\frac{-a-4}{2}+a} & \text{if } a > 0, \\ \frac{\pi}{4} \cdot x^{\frac{-a-4}{2}} & \text{if } a = 0, \\ \frac{\pi}{2} \cdot x^{\frac{-a-4}{2}} & \text{if } a < 0, \end{cases} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dal teorema del confronto asintotico con le funzioni campione deduciamo che

- se $a > 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{-a-4}{2} + a < -1$ cioè se $a < 2$. Quindi l'integrale converge per $a \in (0, 2)$ e diverge a $+\infty$ se $a \geq 2$.

- se $a \leq 0$ l'integrale converge se inoltre $\frac{-a-4}{2} < -1$ cioè se $a > -2$. Quindi l'integrale converge per $a \in (-2, 0]$ e diverge a $+\infty$ se $a \leq -2$.

Tempo: due ore e mezza (comprensive di domande di teoria). Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Alcuni sviluppi di Mac Laurin.

$$\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4),$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5).$$