COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
13 Luglio 2012

Esercizio 1. (punti 12) Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1 + \frac{9}{5}s + 4s^2}{s(1-s)(1-4s)}.$$

È richiesto di:

1. Tracciare il diagramma di Bode di $G(s)$ (asintotico e reale) (**punti 3**);

2. Tracciare una bozza del diagramma di Nyquist (frequenze solo positive) basato esclusivamente sul diagramma di Bode di $G(s)$, individuando quante intersezioni esso deve avere con gli assi coordinati (**punti 2.5**);

3. Determinare il valore di asintoti ed intersezioni con gli assi del diagramma di Nyquist e conseguentemente affinare il tracciato precedente (**punti 3.5**);

4. Studiare come varia il numero di poli a parte reale positiva di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare del guadagno reale (e non nullo) K, ricorrendo al criterio di Nyquist, evitando lo studio dei casi critici in cui il diagramma passa per -1.
(**Nota.** Chi non fosse riuscito a determinare le intersezioni con gli assi, può comunque condurre tale analisi chiamando $A_1, A_2, \ldots$ tali intersezioni) (**punti 3**).

Esercizio 2. (punti 8.5) Data

$$G(s) = \frac{s^2+4}{(s-1)^2(s+8)},$$

è richiesto di:

1. Calcolare asintoti e punti doppi sia per il luogo positivo che per quello negativo, sfruttando il fatto che $s = -2$ soddisfa l'equazione dei punti doppi (**punti 3**);

2. Calcolare le intersezioni con l'asse immaginario di entrambi i luoghi, positivo e negativo (**punti 3**);

3. Tracciare i due luoghi e dedurre per quali valori reali di K il sistema ad anello chiuso è BIBO stabile (**punti 2.5**).

Esercizio 3. (punti 6) Data

$$G(s) = \frac{10}{1 + 0.1s + s^2}$$

1. Si progetti una rete a sella stabilizzante, in modo che l'errore a regime al gradino sia $e_{rp} \simeq 10^{-3}$, la pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10$ rad/s ed il margine di fase $m_\phi \simeq 90^o$ (**punti 3.5**);
2. Si progetti un PID stabilizzante, in modo che l'errore a regime alla rampa sia $e_{rp} \simeq 0.1$, la pulsazione di attraversamento $\omega_a \simeq 10$ rad/s ed il margine di fase $m_\phi \simeq 90^o$ (**punti 2.5**).

Teoria. (solo per 9 CFU) (punti 5) Si consideri un modello lineare e tempo-invariante descritto da un'equazione differenziale del tipo

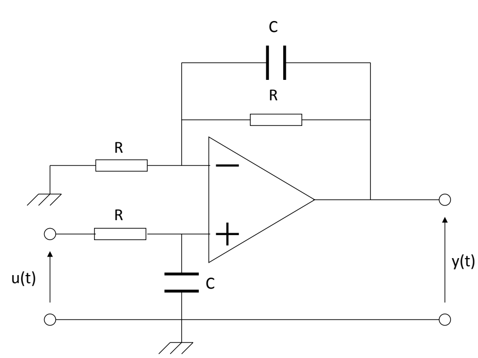
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \qquad t \geq 0,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_n, b_m \neq$ e $n \geq m$.

1. Si definisca la risposta in frequenza $W(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, del sistema e si dimostri che, nell'ipotesi di stabilità BIBO del sistema, essa è finita per ogni valore di $\omega \in \mathbb{R}$ (**punti 1.5**).
2. Si dimostri che, in corrispondenza a un segnale fasoriale causale $u(t) = e^{j\tilde{\omega}t}\delta_{-1}(t), \tilde{\omega} \in \mathbb{R}$, e in ipotesi di stabilità BIBO, la risposta **forzata** del sistema all'ingresso assegnato ha una componente di regime permanente ed una componente transitoria, e se ne determinino esplicitamente le espressioni, operando, a scelta, **o nel dominio del tempo oppure nel dominio delle trasformate** (**punti 3.5**).

Nota. È **facoltativo** dimostrare il precedente risultato sia nel dominio del tempo che nel dominio delle trasformate. Chi fornisce entrambe le dimostrazioni, prende (al massimo) **punti 1** in più (cioé tale esercizio teorico può arrivare fino a **punti 6**).

Esercizio 4. (solo per 7 CFU) (punti 6) Dato lo schema di figura (resistenze e condensatori tutti uguali, di valore R e C rispettivamente, con $RC = 1$)

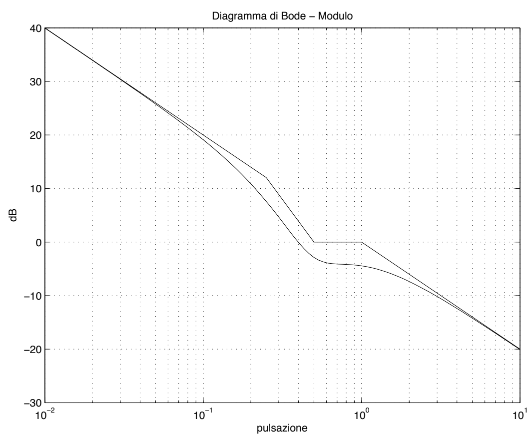


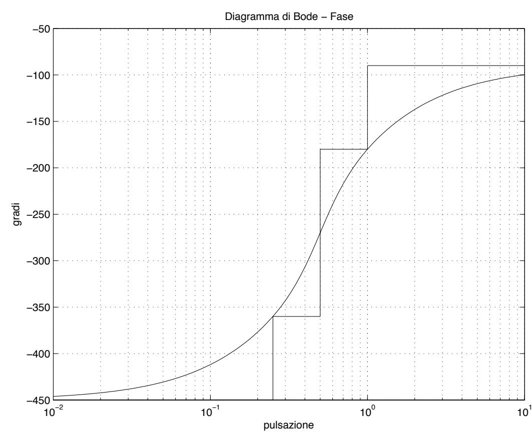
è richiesto di:

1. Calcolare la funzione di trasferimento (sia $W_{id}(s)$) tra $u(t)$ e $y(t)$ nell'ipotesi di operazionale ideale (**punti 2**);
2. Calcolare la funzione di trasferimento (sia $W_r(s)$) tra $u(t)$ e $y(t)$ nell'ipotesi di operazionale quasi-ideale, caratterizzato da $G(s) = \frac{K}{(s+1)^2}$, con $K > 0$ (**punti 2.5**);
3. Discutere la BIBO stabilità di $W_r(s)$ al variare di $K > 0$ (**punti 1.5**).

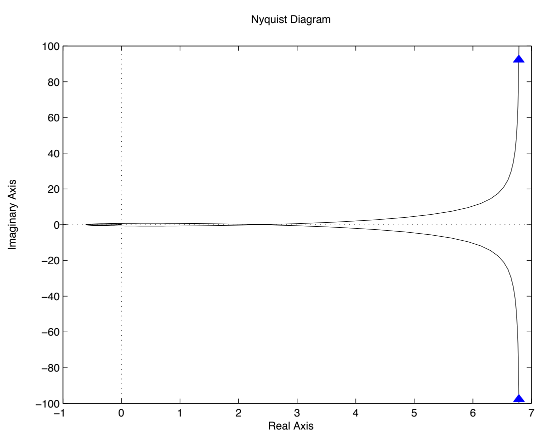
SOLUZIONI

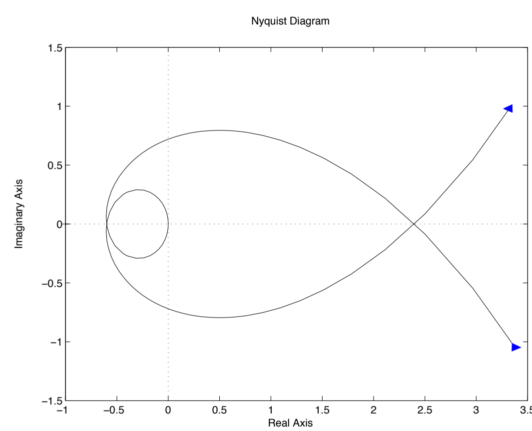
Esercizio 1. (punti 12) Ci sono due poli reali instabili in $s = \frac{1}{4}, 1$ (oltre al polo nell'origine) e due zeri complessi caratterizzati da $\omega_n = \frac{1}{2}, \xi = \frac{9}{20}$. In termini di diagramma di Bode, i punti di spezzamento sono equispaziati (polo in $-2\log 2$, doppio zero in $\log 2$, con un piccolo picco di antirisonanza, polo in 0), e la fase sale monotonicamente da -90^o a $+270^o$ (ogni termine elementare, eccetto l'integratore, comporta un contributo di fase positivo). Per quel che riguarda Nyquist, esso arriva dall'infinito con fase di -90^o, attraversa una prima volta l'asse reale in un punto positivo (fase nulla), poi l'asse immaginario in un punto positivo (fase $+90^o$), una seconda volta l'asse reale in un punto negativo (fase $+180^o$) ed infine tende a zero con tangente verticale (fase $+270^o = -90^o$). Bode è in figura





Le prossime figure esibiscono Nyquist assieme ad un suo dettaglio in prossimità del cerchio unitario.





Le intersezioni con gli assi richiedono il calcolo di $G(i\omega)$ e di isolarne parte reale ed immaginaria

$$
\begin{aligned}
G(i\omega) &= \frac{\left[(1-4\omega^2)+\frac{9}{5}i\omega\right](1+4i\omega)(1+i\omega)}{i\omega(1+16\omega^2)(1+\omega^2)} \\
&= \frac{\left[(1-4\omega^2)^2-9\omega^2\right]+i\frac{34}{5}\omega(1-4\omega^2)}{i\omega(1+16\omega^2)(1+\omega^2)} \\
&= \frac{(1-16\omega^2)(1-\omega^2)+i\frac{34}{5}\omega(1-4\omega^2)}{i\omega(1+16\omega^2)(1+\omega^2)} \\
&= \frac{34}{5}\frac{(1-4\omega^2)}{(1+16\omega^2)(1+\omega^2)} - i\frac{(1-16\omega^2)(1-\omega^2)}{\omega(1+16\omega^2)(1+\omega^2)}
\end{aligned}
$$

dove la fattorizzazione del termine di IV grado è immediata conseguenza della soluzione di un'equazione di II grado in ω^2.

Si vede chiaramente che la parte reale si annulla per $\omega = \frac{1}{2}$, e che vale $G\left(i\frac{1}{2}\right) = \frac{18}{25}i = 0.72i$, mentre quella immaginaria si annulla per $\omega = \frac{1}{4}$ (dove $G\left(i\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{5} = 2.4$) e per $\omega = 1$ (dove $G(i) = -\frac{3}{5} = -0.6$). L'asintoto in $s = \frac{34}{5} = 6.8$ si vede osservando la parte reale per $s = 0$. In alternativa, l'asintoto pò essere valutato da

$$G(s) \simeq \frac{1}{s}\frac{1+\frac{9}{5}s}{1-5s} \simeq \frac{1}{s}\left(1+\frac{34}{5}s\right) \simeq \frac{1}{s}+\frac{34}{5}, \text{ per } |s| \text{ piccolo}$$

Per quel che riguarda l'analisi di n_{W_+} al variare di K (non nullo), basta aggiungere il semicerchio orario all'infinito dovuto all'integratore, ed analizzare le posizioni reciproche dei due punti $2.4, -0.6$ rispetto al punto $-\frac{1}{K}$, per scoprire che (si noti che $n_{G_+} = 2$)

$$
\begin{array}{lcl}
K < -\frac{5}{12} & \Leftrightarrow & N = +1,\ W_+ = 1 \\
-\frac{5}{12} < K < 0 & \Leftrightarrow & N = -1,\ W_+ = 3 \\
0 < K < \frac{5}{3} & \Leftrightarrow & N = 0,\ W_+ = 2 \\
K > \frac{5}{3} & \Leftrightarrow & N = +2,\ W_+ = 0
\end{array}
$$

per cui si ha stabilità solo per $K > \frac{5}{3}$.

Lo studio (non richiesto) del caso limite $K = -\frac{5}{12}$ (passaggio per $s = -1$ per $\omega = \frac{1}{4}$) condurrebbe a $d(s) - \frac{5}{12}n(s)$ che deve essere divisibile per $s^2 + \frac{1}{16}$, ed infatti $d(s) - \frac{5}{12}n(s) = \left(s^2+\frac{1}{16}\right)\left(s-\frac{5}{4}\right)$ (poli in $\pm\frac{i}{4}, \frac{5}{4}$), mentre nel caso limite $K = \frac{5}{3}$ (passaggio per $s = -1$ per $\omega = 1$) $d(s) + \frac{5}{3}n(s)$ deve essere divisibile per s^2+1, ed infatti $d(s)+\frac{5}{3}n(s) = (s^2+1)\left(s+\frac{5}{12}\right)$ (poli in $s = \pm i, -\frac{5}{12}$).

Esercizio 2. (punti 8.5) L'equazione dei punti doppi porge, dopo alcuni calcoli

$$(s-1)[s^3+s^2+28s+60] = 0$$

Essendo soddisfatta per $s = -2$, in tale equazione il polinomio di III grado è divisibile per $s+2$, da cui la riscrittura

$$0 = (s-1)(s^3+s^2+28s+60) = (s-1)(s+2)(s^2-s+30) = 0$$

I punti doppi corrispondenti al termine di II grado non sono accettabili, in quanto complessi (discriminante negativo) e $G(s)$ di grado inferiore a 4 (che non può quindi avere punti doppi complessi). Punti doppi del luogo sono quindi

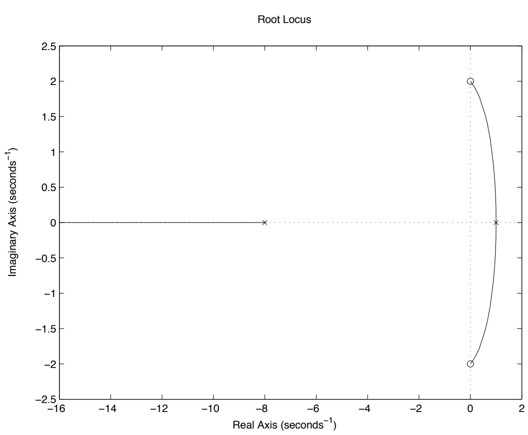
- $s = 1$, corrispondente a $K = -\frac{d(1)}{n(1)} = 0$ (punto doppio iniziale del luogo);
- $s = -2$, corrispondente a $K = -\frac{d(-2)}{n(-2)} = -\frac{27}{4}$ (appartenente quindi al luogo negativo).

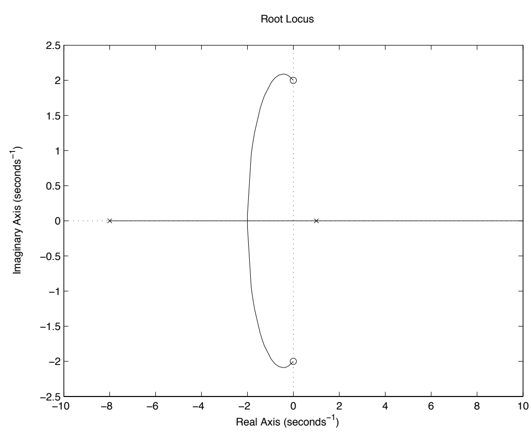
Studiando l'intersezione del luogo con l'asse immaginario si trova

$$d(i\omega) + Kn(i\omega) = [(8 - 6\omega^2) + K(4 - \omega^2)] - i\omega(\omega^2 + 15) = 0$$

e per annullare la parte immaginaria è necessario che sia $\omega = 0$, il che annulla la parte reale solo per $K = -2$. L'unica intersezione con l'asse immaginario si ha quindi nell'origine e nel luogo negativo (per $K = -2$).

Facile ora tracciare i due luoghi. Quello positivo ha come tratto dell'asse reale (e unico asintoto) solo il ramo che dal polo in $s = -8$ va verso $-\infty$, mentre i due rami che escono dal polo doppio in $s = 1$ si muovono fuori dell'asse reale, dirigendosi verso gli zeri in $s = \pm 2i$, senza mai attraversare l'asse immaginario. Quello negativo ha un ramo che uscendo dal polo doppio va verso $+\infty$ sull'asse reale, ramo che coincide con l'asintoto, ed un altro che sempre muovendosi sull'asse reale attraversa l'origine per $K = -2$, quindi incontra il ramo proveniente dal polo in $s = -8$ nel punto doppio in $s = -2$ per $K = -\frac{27}{4} = -6.25$, infine tali 2 rami escono dall'asse reale per dirigersi verso i due zeri complessi, senza attraversare l'asse immaginario. Di conseguenza non si ha mai stabilità: nel luogo positivo ci sono 2 rami sempre nel semipiano complesso positivo, nel luogo negativo almeno un ramo reale sempre positivo. In figura i 2 luoghi.





Esercizio 3. (punti 6) Occorre $C'(s) = 99,9 \simeq 100$ per sistemare l'errore al gradino, dopodiché Bode per $100G(s)$ taglia in $\omega = 10\sqrt{10}$. Occorre quindi abbassare ω_a, ed al contempo migliorare il margine di fase che, attualmente, è di pochi gradi in $\omega = 10$. Per tagliare in $\omega = 10$ è sufficiente abbassare il modulo di 20db, il che si ottiene ad esempio dall'azione combinata di una coppia polo-zero in bassa frequenza (ad esempio polo in -10^{-2} e zero in -1) distante due decadi, e da una coppia zero-polo con lo zero posizionato una decade prima di ω_a (quindi in $s = -1$) e di un polo oltre ω_a (in alta frequenza). Una possibile soluzione è quindi

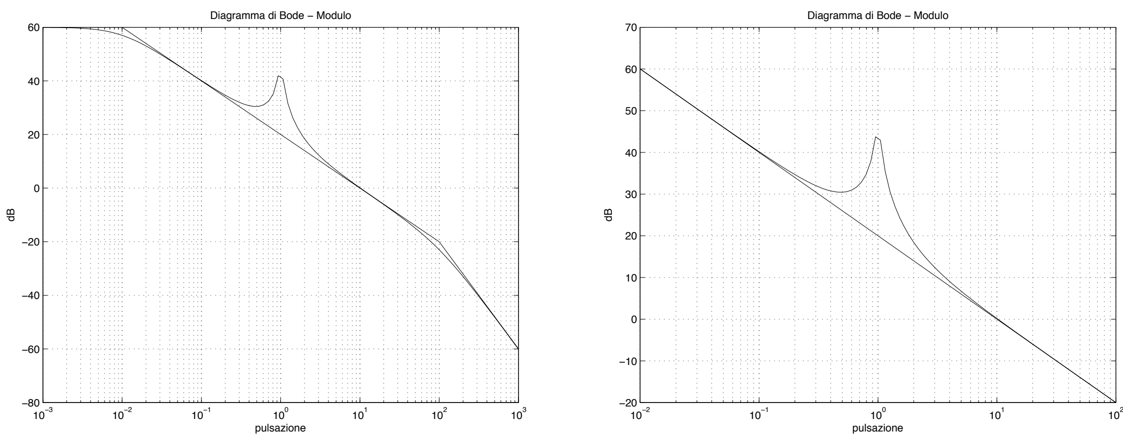
$$C_1(s) = 100 \frac{(1+s)^2}{(1+100s)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

che introduce una quasi doppia cancellazione zero-polo (la cancellazione in realtà si verifica solo per i diagrammi asintotici di modulo e fase). Si sottolinea che questa non è affatto l'unica soluzione possibile.

Per il PID, occorre anzitutto $C'(s) = \frac{1}{s}$ per sistemare l'errore alla rampa, per cui rimane da determinare la posizione di due zeri ($C_2(s) = \frac{1}{s}(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)$) che soddisfino le specifiche su ω_a e m_ϕ. La soluzione più semplice (non certo l'unica!) è introdurre di nuovo una quasi doppia cancellazione zero-polo, inserendo uno zero doppio in -1, che rende $C_2(s)G(s) = \frac{10(1+s^2)}{s(1+0.1s+s^2)}$. Quindi

$$C_2(s) = \frac{(1+s)^2}{s} = \frac{1}{s} + 2 + s$$

è un PID che va bene. In figura Bode per $C_1(s)G(s)$ e per $C_2(s)G(s)$ (solo il modulo, la fase è lasciata al lettore). La verifica del soddisfacimento dei requisiti in entrambi i casi (la stabilità è garantita dal Criterio di Bode) è immediata.



Teoria. (solo per 9 CFU) (punti 5) Si veda il Libro di testo, pp. 89-90-91.

Esercizio 4. (solo per 7 CFU) (punti 6) L'analisi dello schema conduce facilmente a

$$V_+(s) = \frac{1}{s+1}U(s), \ V_-(s) = \frac{s+1}{s+2}Y(s)$$

da cui, nel caso ideale ($V_+(s) = V_-(s)$), si ricava

$$Y(s) = \frac{2+s}{(1+s)^2}U(s) \ \Rightarrow \ W_{id}(s) = \frac{2+s}{(1+s)^2}$$

mentre nel caso quasi-ideale, ponendo $Y(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, si trova

$$W_r(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)^2[K + (s+1)(s+2)]}$$

I poli sono gli stessi della $W_{id}(s)$, oltre ai due poli associati al polinomio $K + (s+1)(s+2)$, che è chiaramente stabile per ogni $K > 0$, quindi $W_r(s)$ è sempre stabile.