COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
18 Luglio 2014

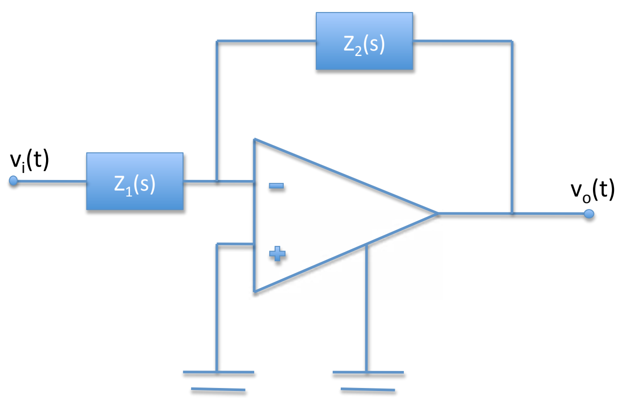
Esercizio 1. [9 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 10\frac{(s^2+1)(s-10)}{s(s+0.1)(s^2+2s+100)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, e a partire da esso si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$. Nel caso in cui il sistema non sia BIBO stabile se ne determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva.

Esercizio 2. [9 punti] Si consideri la seguente configurazione invertente dell'operazionale, utilizzata per costruire un integratore (si assuma $Z_1(s) = R$, $Z_2(s) = 1/(sC)$ e $RC = 1$),



e si assuma l'operazionale quasi-ideale e caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$G(s) = K\frac{1}{(1+s)^3},\ K > 0,$$

dove al solito $G(s)$ interviene nella formula $Y(s) = G(s)\,[V_+(s) - V_-(s)]$. È richiesto di

i) valutare la $W_r(s)$ corrispondente (oltre alla $W_{id}(s)$, in realtà già nota);

ii) valutare il rapporto $R(s) := \frac{W_r(s)}{W_{id}(s)}$, ed esprimere tale rapporto come il risultato di una retroazione unitaria negativa, cioé esprimere $R(s)$ nella forma:

$$R(s) = \frac{K\tilde{G}(s)}{1+K\tilde{G}(s)},$$

con $\tilde{G}(s)$ un'opportuna funzione di trasferimento da valutare;

iii) tracciare il luogo delle radici positivo di $\tilde{G}(s)$, individuandone asintoti, punti doppi, intersezioni con asse immaginario, ecc.;

iv) determinare per quali valori di $K > 0$ la funzione di trasferimento $R(s)$ è BIBO stabile.

Esercizio 3. [8 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1+s}{\left(1+\frac{s}{10}\right)^2\left(1+\frac{s}{1000}\right)},$$

i) si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$ tale che l'errore di regime permanente al gradino del risultante sistema retroazionato soddisfi $e_{rp}^{(1)} \simeq 0.1$, e la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia $\omega_a \simeq 100$ rad/s e $m_\phi \simeq 90°$;

ii) si progetti un compensatore stabilizzante di tipo PID $C_2(s)$ tale che l'errore di regime permanente alla rampa lineare del risultante sistema retroazionato soddisfi $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.1$, e la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ abbia $\omega_a \simeq 10^3$ rad/s e $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5 punti] Si definiscano i concetti di tipo ed errore di regime permanente di un sistema di funzione di trasferimento $W(s)$. Si dimostri analiticamente che nel caso di un sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa da un sistema di funzione di trasferimento razionale e propria $G(s)$, e quindi di funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)},$$

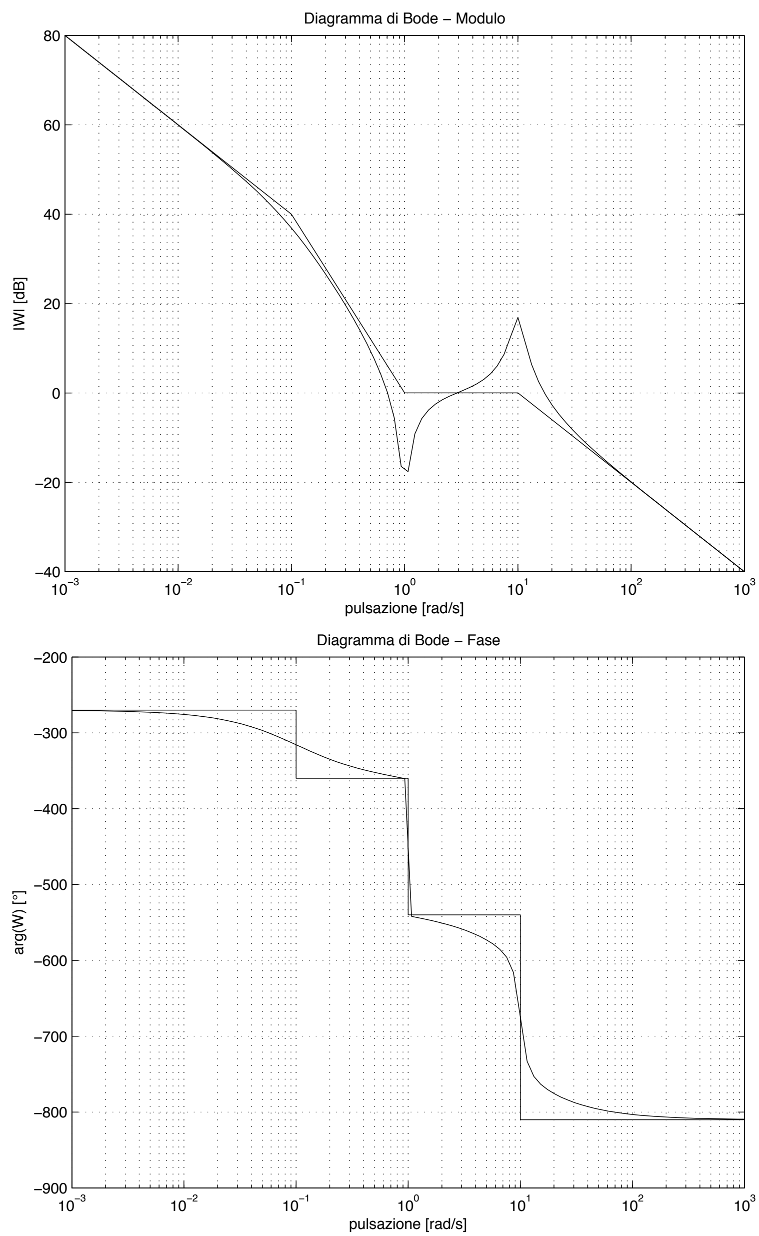
il tipo k coincide con la molteplicità del polo nell'origine di $G(s)$ e l'errore di regime permanente $e_{rp}^{(k+1)} \neq 0$ che corrisponde al tipo è esprimibile in funzione del guadagno di Bode K_B della $G(s)$.

SOLUZIONI

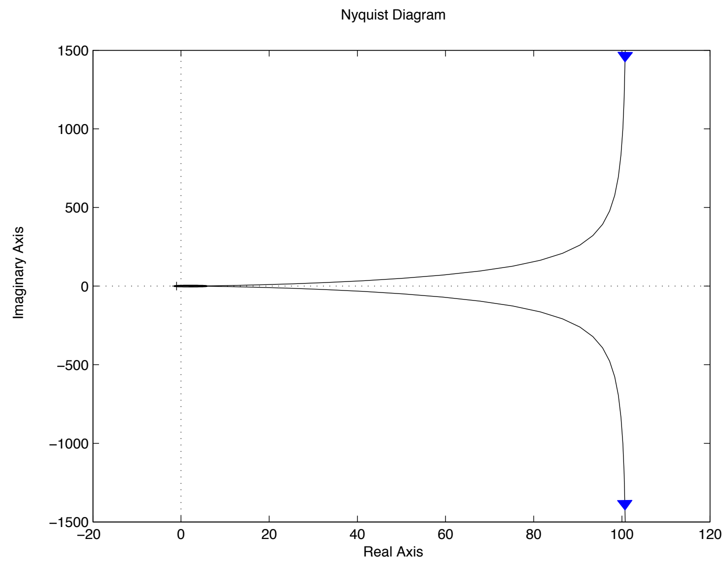
Esercizio 1. i) [4 punti] La funzione di trasferimento ha forma di Bode:

$$G(s) = 10\frac{(s^2+1)(s-10)}{s(s+0.1)(s^2+2s+100)} = (-10)\frac{(1+s^2)\left(1-\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+\frac{s}{10^{-1}}\right)\left(1+2\cdot 0.1\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

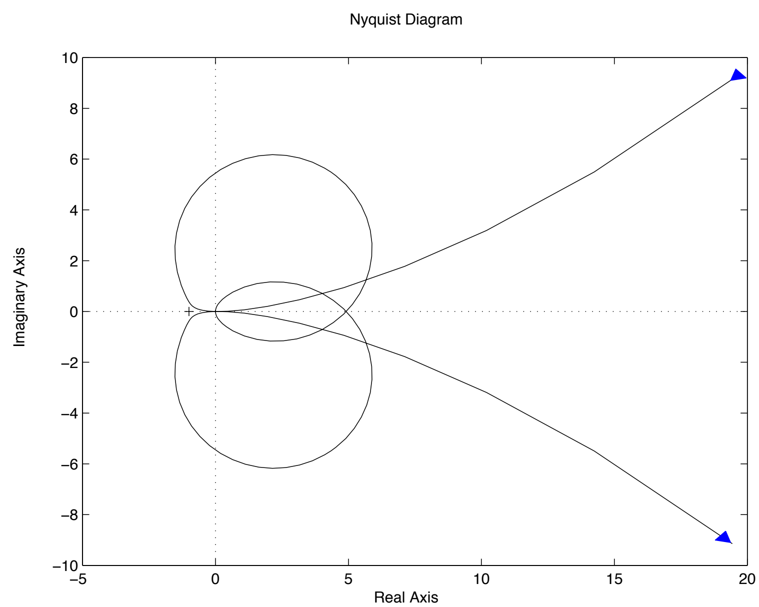
I diagrammi di Bode sono i seguenti. Si noti che il diagramma di Bode delle ampiezze presenta un picco di antirisonanza infinito alla pulsazione $\omega = 10^0$ rad/s (che nel grafico appare di ampiezza finita per motivi numerici).



ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ può essere tracciato in modo approssimativo a partire dai precedenti diagrammi di Bode.



Nella figura seguente un dettaglio del comportamento del diagramma in un intorno dell'origine:



Se ora vogliamo studiare la stabilità BIBO della funzione di trasferimento $W(s)$, per prima cosa riportiamo il diagramma al finito attraverso un semicerchio descritto in verso orario che parte dal ramo basso (parallelo al semiasse immaginario negativo) e va verso l'alto (raggiungendo il ramo parallelo al semiasse immaginario positivo). Poiché $n_{G_+} = 0$ e $N = -1$, si trova $n_{W_+} = n_{G_+} - N = 1$, e quindi il sistema retroazionato non è BIBO stabile ed ha un polo reale positivo.

Esercizio 2. i) e ii) Dalle relazioni

$$\frac{U(s) - V_-(s)}{R} = \frac{V_-(s) - Y(s)}{\frac{1}{sC}}, \; V_+(s) = 0, \; RC = 1$$

si ricava facilmente che nel caso ideale ($G(s) = \infty$ e quindi) $0 = V_+(s) = V_-(s)$, da cui

$$W_{id}(s) = -\frac{1}{s}.$$

Invece nel caso quasi-ideale si trova

$$Y(s) = W_r(s)U(s) = -\frac{G(s)}{(1+s) + sG(s)}U(s).$$

Dalla relazione

$$W_r(s) = R(s)W_{id}(s) = -\frac{1}{s}R(s)$$

si trova

$$R(s) = \frac{sG(s)}{(1+s) + sG(s)} = \frac{Ks}{Ks + (1+s)^4}$$

e imponendo

$$R(s) = \frac{K\tilde{G}(s)}{1 + K\tilde{G}(s)}$$

si trova

$$\tilde{G}(s) = \frac{s}{(1+s)^4}.$$

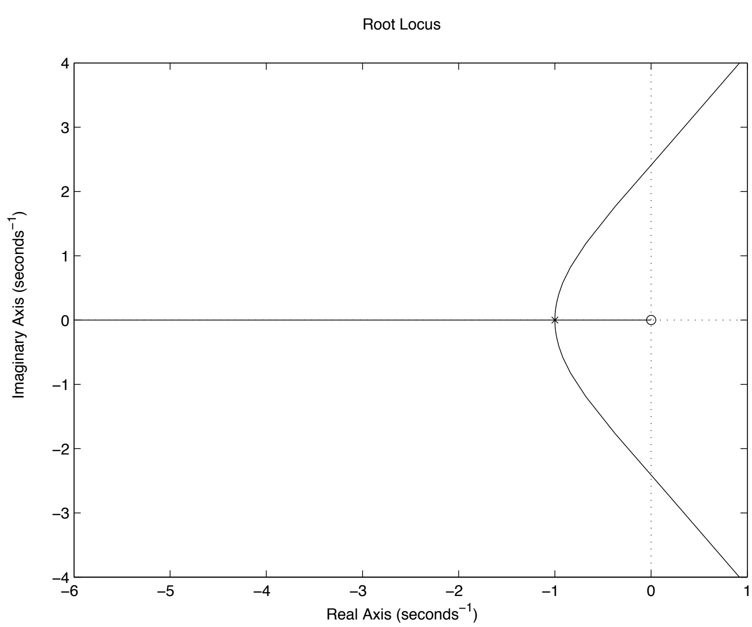
iii) Il luogo delle radici di $\tilde{G}(s)$ ha $n - m = 4 - 1 = 3$ asintoti, centro-stella in $C = -\frac{4}{3}$. Dall'equazione dei punti doppi

$$(s+1)^3[s + 1 - 4s] = 0$$

si trova $s = -1$ (ovviamente un punto quadruplo iniziale del luogo, per $K = 0$) ed $s = \frac{1}{3}$ (che appartiene al luogo negativo e qui non interessa), mentre le intersezioni con l'asse immaginario si trovano risolvendo

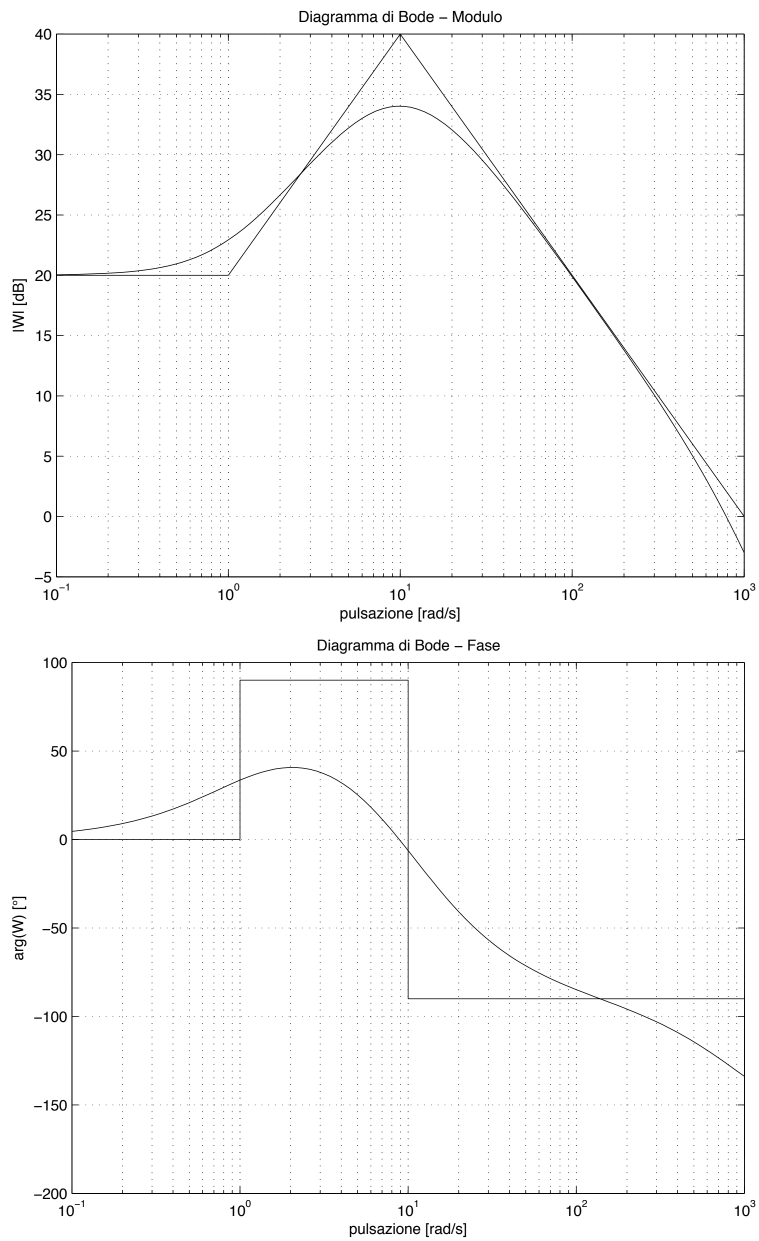
$$(1+j\omega)^4 + Kj\omega = 0 \;\Rightarrow\; (\omega^4 - 6\omega^2 + 1) + j\omega(4 - 4\omega^2 + K) = 0, \;\Rightarrow\; \omega^4 - 6\omega^2 + 1 = 0, \; K = 4(\omega^2 - 1)$$

Delle varie soluzioni, solo $\omega^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ corrisponde ad un valore positivo di K ($K = 8(1+\sqrt{2})$), per cui le intersezioni del luogo positivo con l'asse immaginario si hanno in $s = \pm j\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ per $K = 8(1+\sqrt{2})$.



iv) Dall'analisi del luogo, in figura, si conclude facilmente che la stabilità BIBO della funzione di trasferimento $R(s)$, per $K > 0$, si ha solo se e solo se $K < 8(1 + \sqrt{2})$.

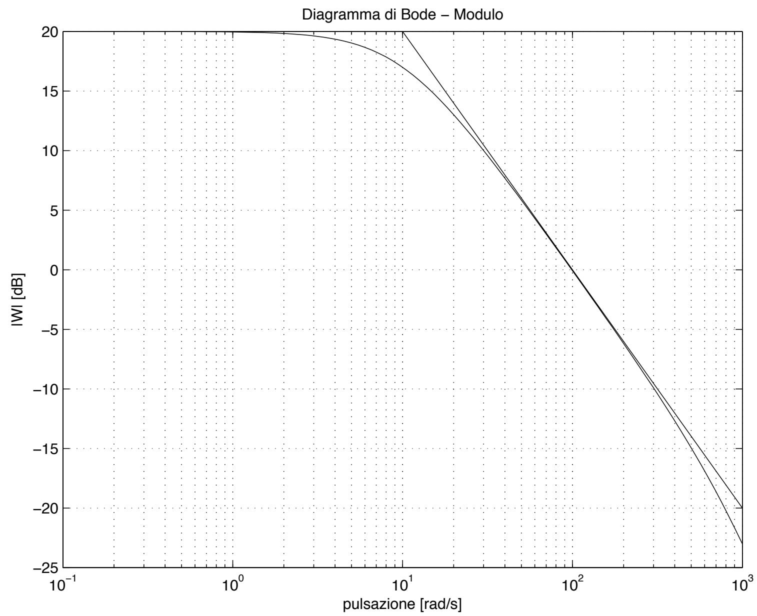
Esercizio 3. i) Il guadagno $K_B \simeq 10$ sistema l'errore a regime. Dal diagramma di Bode per $10 \cdot G(s)$ si vede che, essendo $100 = \omega_a^{DES} < \omega_a \approx 1000$ rad/s e $90^\circ = m_\phi^{DES} \simeq m_\phi(\omega_a^{DES})$, è necessaria una rete ritardatrice che abbassi il guadagno di 20 dB.

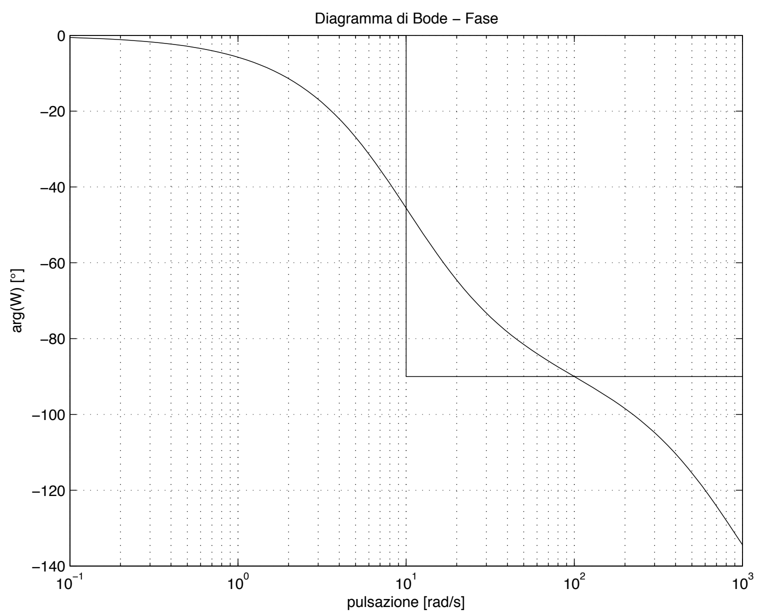


Una semplice soluzione è quindi

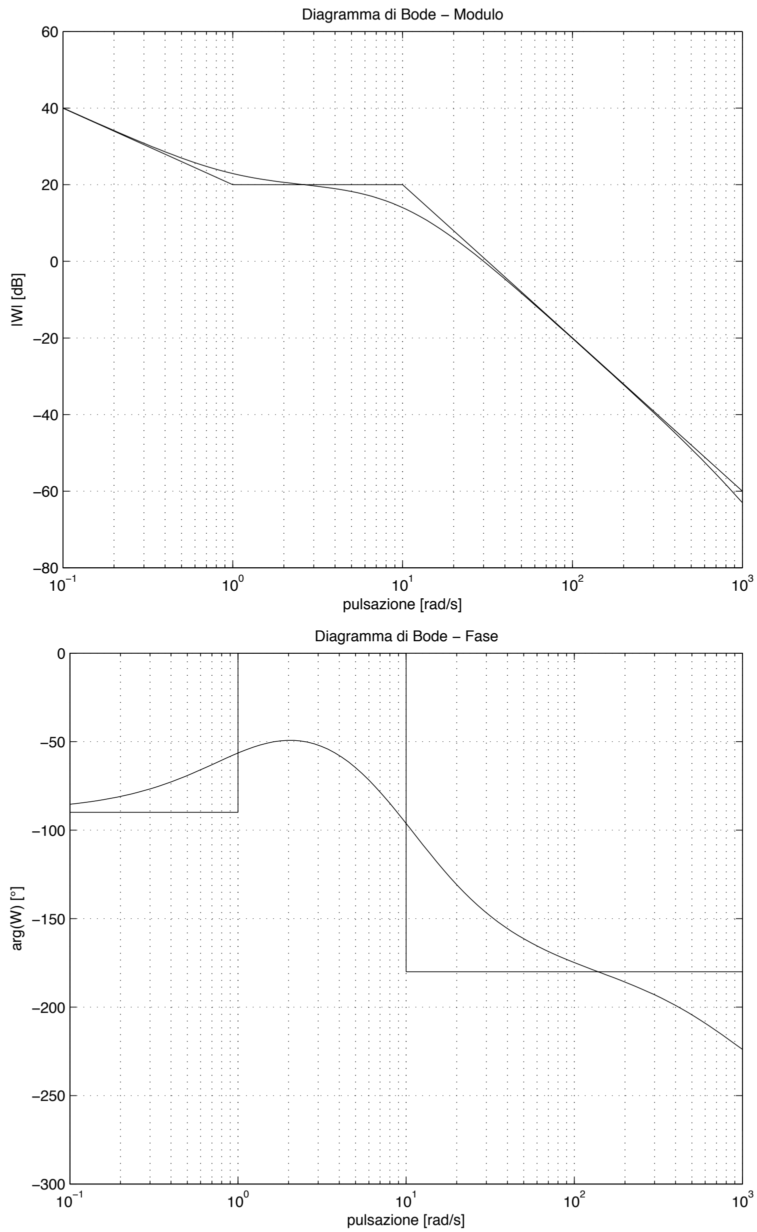
$$C_1(s) = 10\frac{1 + \frac{s}{10}}{1 + s}$$

che, introducendo una doppia cancellazione zero-polo ammissibile, rende soddisfatti tutti i requisiti (stabilità BIBO compresa, per il Criterio di Bode).



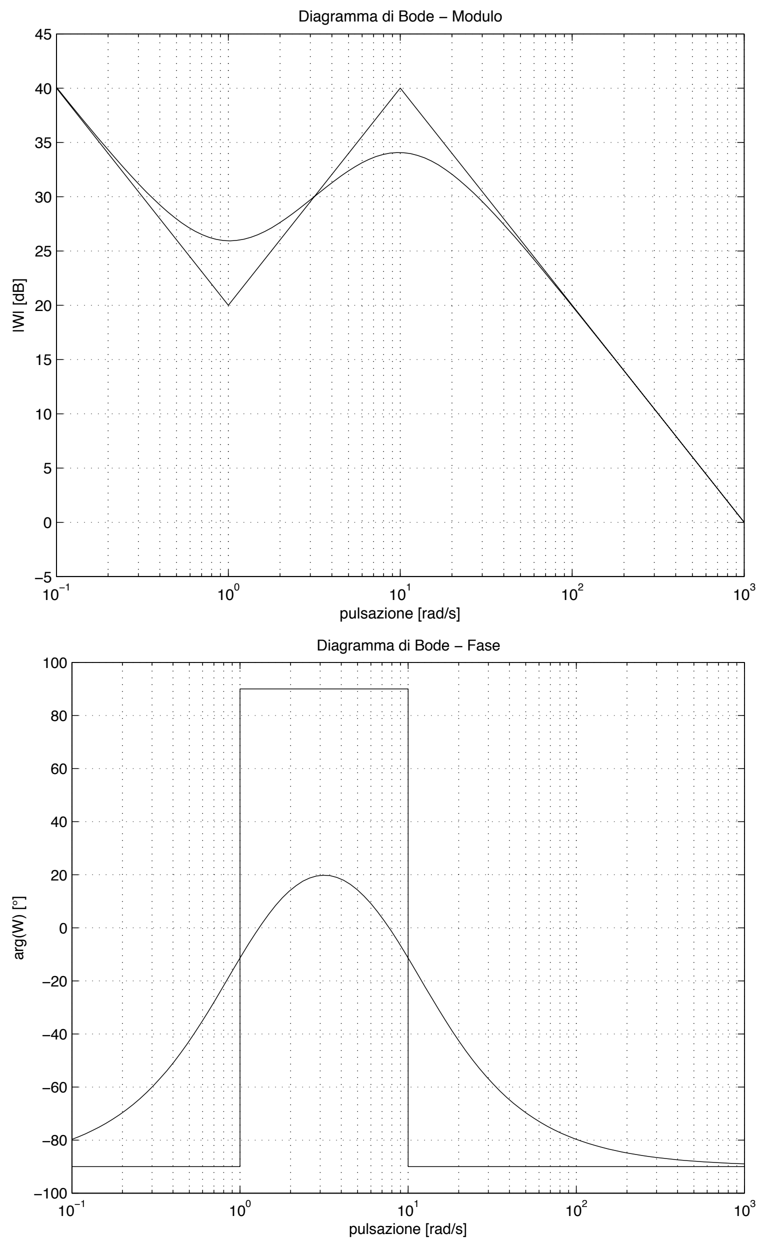


ii) Il precompensatore $C_2'(s) = \frac{10}{s}$ è necessario per sistemare l'errore a regime, dopodiché dai diagrammi di Bode di $C_2'(s)G(s)$ si vede che ω_a è inferiore a 10^3 rad/s e il margine di fase addirittura negativo.



Tuttavia, posizionando ad esempio i due zeri del PID in -1000 (in modo da indurre una cancellazione zero-polo ammissibile, che è necessaria per sistemare la fase alla pulsazione di attraversamento) ed in -1 (per alzare il modulo e far tagliare proprio in ω_a^{DES}), si ottiene quanto desiderato (stabilità BIBO compresa, per il Criterio di Bode). Quindi

$$C_2(s) = \frac{10}{s}\left(1 + \frac{s}{1000}\right)(1+s) = \frac{10}{s} + \frac{1001}{100} + \frac{s}{100}.$$



Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 9, pp. 243-244, del Libro di testo.