BIOMECCANICA A.A. 2024-25
VALUTAZIONE DI STATI DEFORMATIVI E TENSIONALI

1. VALUTAZIONE DELLA VARIAZIONE DI VOLUME

Si calcoli il volume in configurazione deformata di un elemento cubico di lato iniziale L_0 che subisca una deformazione omogenea data dal tensore di deformazione indicato:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 \end{bmatrix}$$

La variazione relativa di volume è data dal primo invariante della deformazione:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = I_1$$

essendo V il volume deformato e V_0 quello indeformato. Calcolato quindi:

$$I_1 = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii} = 0.02 + 0.01 + 0.015 = 0.045$$

il volume deformato si ottiene come

$$V = \left(1 + I_1\right) V_0 = 1.045 \cdot L_0^3$$

2. VALUTAZIONE DELLO STATO DEFORMATIVO DEVIATORICO

Si calcoli la parte deviatorica del tensore di deformazione proposto nell'esercizio precedente.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 \end{bmatrix}$$

A partire dal valore del primo invariante già calcolato nel precedente esercizio I_1=0.015, il tensore deviatorico è dato da:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{I_1}{3}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.02 - 0.015 & .02 & 0 \\ .02 & 0.01 - 0.015 & 0 \\ 0 & 0 & 0.015 - 0.015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 & .02 & 0 \\ .02 & -0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti come il primo invariante della parte deviatorica del tensore di deformazione risulta (giustamente) nullo.

3. CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE

Dato il tensore di deformazione piano seguente, calcolarne le deformazioni principali e le direzioni principali di deformazione.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

È un problema agli autovalori, risolvibile trovando le radici del polinomio caratteristico, di terzo grado, derivabile imponendo l'annullamento del seguente determinante:

$$\det(\boldsymbol{\varepsilon}-\varepsilon_\alpha \mathbf{I})=\det\begin{bmatrix} -\varepsilon_\alpha & 0.02 & 0 \\ 0.02 & -\varepsilon_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_\alpha \end{bmatrix}=0$$

ottenendo quindi:

$$-\varepsilon_\alpha\left[-\varepsilon_\alpha(-\varepsilon_\alpha)-0.02\cdot 0.02\right]=0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_\alpha\left[\varepsilon_\alpha^2-0.02^2\right]=0$$

Le radici del polinomio forniscono i valori delle deformazioni principali:

$$\varepsilon_1=0.02 \quad \varepsilon_2=0 \quad \varepsilon_3=-0.02$$

La direzione principale associata a ε_α è data dalla soluzione del sistema omogeneo

$$(\boldsymbol{\varepsilon}-\varepsilon_\alpha \mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{0}$$

essendo u un vettore incognito.
Secondo tale procedimento per la deformazione principale $\varepsilon_1=0.02$ si ottiene

$$\begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui le ∞^1 soluzioni

$$\begin{bmatrix} u_1=\bar{u} \\ u_2=\bar{u} \\ u_3=0 \end{bmatrix}$$

essendo $\bar{u}$ un parametro arbitratrio. La direzione principale è quindi data dal versore $\mathbf{n}_1=\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0\right)$, ottenuto normalizzando il precedente vettore. Per la deformazione principale $\varepsilon_2=-0.02$ si ricava

$$\begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui le ∞^1 soluzioni

$$\begin{bmatrix} u_1=\bar{u} \\ u_2=-\bar{u} \\ u_3=0 \end{bmatrix}$$

essendo $\bar{u}$ un parametro arbitratrio. La direzione principale associata a $\varepsilon_2=-0.02$ è quindi data dal versore $\mathbf{n}_2=\left(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,0\right)$. Infine, per la deformazione principale $\varepsilon_3=0$ il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.02 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

porge le ∞^1 soluzioni

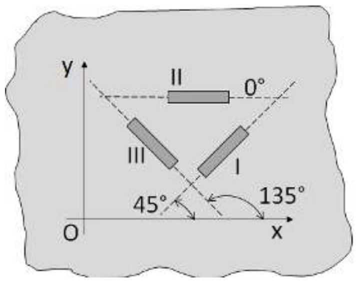
$$\begin{bmatrix} u_1=0 \\ u_2=0 \\ u_3=\bar{u} \end{bmatrix}$$

da cui il versore $\mathbf{n}_3 = (0,0,1)$ come direzione principale associata. È facile verificare che le direzioni principali sono mutuamente ortogonali. Descrivendo il tensore di deformazione rispetto al sistema di riferimento dato da $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ si ottiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. CALCOLO DELLO STATO DEFORMATIVO ATTRAVERSO ESTENSIMETRI

Lo stato deformativo piano agente su un corpo è misurato dai 3 estensimetri indicati in figura, i quali forniscono le componenti di dilatazione nelle direzioni indicate, rispetto al sistema di coordinate generico (x,y)



Dagli estensimetri si leggono i valori $\varepsilon_{I} = 110 \times 10^{-6}, \varepsilon_{II} = 212.5 \times 10^{-6}, \varepsilon_{III} = 240 \times 10^{-6}$ (NB: i valori letti non si riferiscono a direzioni principali, ma a quelle di orientamento degli estensimetri). Si calcolino le deformazioni principali e il massimo scorrimento angolare nel piano (x,y).

Dato un tensore di deformazione di tipo piano generico:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la componente di dilatazione della deformazione nella direzione di un versore generico $\mathbf{n}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ è data da:

$$\varepsilon_\theta = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \cos\theta \cos\theta$$

Calcolando l'espressione precedente per i 3 angoli di orientamento si ottiene il sistema di 3 equazioni e 3 incognite

$$\begin{cases} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy} = 220 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_x = 212.5 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_x + \varepsilon_y - \gamma_{xy} = 480 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Ricavando:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 212.5 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_y = 137.5 \times 10^{-6} \\ \gamma_{xy} = -130 \times 10^{-6} \end{cases}$$

Le deformazioni principali nel piano (x,y) si ottengono dall'equazione di secondo grado che scaturisce dall'annullamento del determinante

$$\det \begin{bmatrix} 212.5 \times 10^{-6} - \varepsilon_\alpha & -65 \times 10^{-6} \\ -65 \times 10^{-6} & 137.5 \times 10^{-6} - \varepsilon_\alpha \end{bmatrix} = 0$$

ottenendo

$$\varepsilon_1 = 250.0 \times 10^{-6} \quad \varepsilon_2 = 100.0 \times 10^{-6}$$

La direzione principale associata alla componente massima di dilatazione sarà un vettore nel piano (x,y) che si ricava dal sistema:

$$\begin{bmatrix} 212.5 - 250 & -65 \\ -65 & 137.5 - 250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

che porge la soluzione:

$$\begin{bmatrix} u_1 = \bar{u} \\ u_2 = -0.577\bar{u} \end{bmatrix}$$

Ciò corrisponde ad una direzione orientata di un angolo pari a

$$\varphi = \operatorname{arctg}(0.577) \cong 30^\circ$$

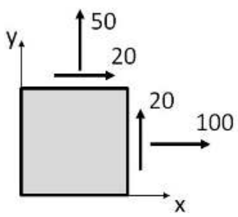
orario rispetto all'asse x. La massima deformazione tagliante in modulo è pari a:

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 150.0 \times 10^{-6}$$

Il posizionamento degli estensimetri dovrà essere sufficientemente ravvicinato, in modo tale che lo stato deformativo misurato possa considerarsi sufficientemente omogeneo nell'aerea considerata.

5. CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Dato lo stato tensionale piano agente nell'intorno del punto materiale indicato in figura, si calcolino le tensioni principali e le direzioni principali di tensione mediante la valutazione degli autovalori e degli autovettori del tensore di tensione associato. I valori di tensione indicati in figura sono espressi in MPa.



Secondo le convenzioni di segno per le componenti di tensione dirette e di taglio, il tensore di tensione rispetto al sistema di riferimento indicato è dato da:

$$\sigma=\begin{bmatrix}100 & 20 & 0\\ 20 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Le tensioni principali si ottengono come autovalori del tensore, cioè come radici della equazione di terzo corrispondente all'annullamento del determinante:

$$\det(\sigma - s\mathbf{I}) = 0 \quad\rightarrow\quad \det\begin{bmatrix}100-s & 20 & 0\\ 20 & 50-s & 0\\ 0 & 0 & -s\end{bmatrix}=0$$

da cui si ricava

$$-s\left[(100-s)(50-s)-20\cdot 20\right]=0$$
$$s\left[s^2-150s+4600\right]$$

Le tensioni principali sono quindi

$$s_{1,2}=\frac{150\pm\sqrt{150^2-4\cdot 4600}}{2}=\begin{cases}107.0\,\text{MPa}\\ 43.0\,\text{MPa}\end{cases}$$
$$s_3=0$$

Le direzioni principali di tensione si ottengono come soluzione dei sistemi omogenei:

$$\begin{bmatrix}100-s_i & 20 & 0\\ 20 & 50-s_i & 0\\ 0 & 0 & -s_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad (i=1,2,3)$$

Per la tensione principale s_3=0 si ricava:

$$\begin{bmatrix}100 & 20 & 0\\ 20 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}u_1=0\\ u_2=0\\ u_3=\bar{u}\end{cases}$$

dove il termine $\bar{u}$ rappresenta un valore arbitrario. Procedendo con la normalizzazione del vettore, la direzione principale associata alla tensione principale s_3=0 è data quindi dal versore $(0,0,1)$. Per la tensione principale s_1=107 MPa si ricava:

$$\begin{bmatrix}100-107 & 20 & 0\\ 20 & 50-107 & 0\\ 0 & 0 & -107\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}u_1=\dfrac{57}{20}\bar{u}\\ u_2=\bar{u}\\ u_3=0\end{cases}$$

La direzione principale è quindi data dal versore $(0.944, 0.331, 0)$, che rappresenta un asse ruotato di un angolo antiorario

$$\varphi=\text{arctg}\left(\frac{0.331}{0.944}\right)\cong 19^\circ.3$$

rispetto l'asse x. Infine, per la tensione principale s_2=43 MPa si ricava:

$$\begin{bmatrix} 100-43 & 20 & 0 \\ 20 & 50-43 & 0 \\ 0 & 0 & -43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1 = -\dfrac{7}{20}\overline{u} \\ u_2 = \overline{u} \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

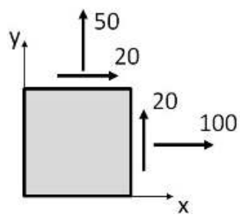
La direzione principale è quindi data dal versore $(-0.331, 0.944, 0)$, che rappresenta un asse ruotato di un angolo orario

$$\varphi = \text{arctg}\left(\frac{0.944}{-0.331}\right) \cong -70^\circ.7$$

rispetto all'asse x. Come previsto, le direzioni principali sono mutuamente perpendicolari.

6. CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Dato lo stato tensionale piano agente nell'intorno del punto materiale indicato in figura (uguale a quello dell'esercizio precedente), si calcolino le tensioni principali e le direzioni principali di tensione mediante l'utilizzo della costruzione grafica dei circoli di Mohr. I valori di tensione indicati in figura sono espressi in MPa.



Sulla base delle ipotesi del problema risulta identificato l'asse z come direzione principale delle tensioni associata ad una tensione principale nulla. Secondo le convenzioni di segno per le componenti di tensione dirette e di taglio, si ricavano i punti:

$$P(\sigma_x, -\tau_{xy}) = P(100, -20)$$
$$Q(\sigma_y, -\tau_{xy}) = Q(50, 20)$$

che disegnati nel piano delle tensioni (σ,τ) consentono di indentificare il cerchio di Mohr associato alla giacitura x,y. Il centro della circonferenza sull'asse delle ascisse è dato da:

$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100+50}{2} = 75$$

Il raggio della circonferenza si ricava come:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{100-50}{2}\right)^2 + 20^2} = 32.0$$

Le tensioni principali relative alle direzioni principali giacenti nel piano (x,y) risultano quindi:

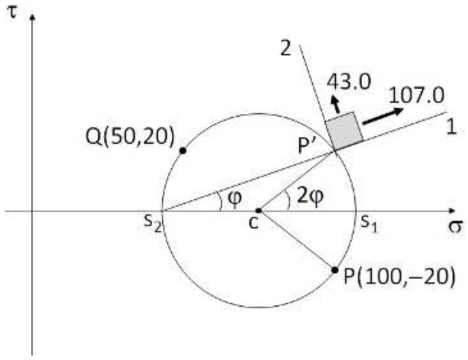
$$s_1 = c + R = 75 + 32 = 107.0\,\text{MPa}$$
$$s_2 = c - R = 75 - 32 = 43.0\,\text{MPa}$$

L'angolo compreso tra direzione principale associata a s_1 e asse x è dato da

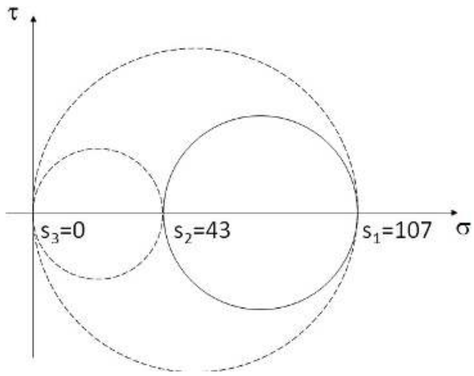
$$\varphi = \frac{1}{2}\text{arctg}\left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right| = \frac{1}{2}\text{arctg}\left|\frac{2 \cdot 20}{100 - 50}\right| \cong 19°.3$$

La costruzione grafica per la determinazione della direzione della direzione principale 1 e, di conseguenza, della direzione principale 2 è indicata nella figura seguente. Per la determinazione della direzione principale 1 si procede come indicato:

- si ruota il segmento (c,P) in senso antiorario attorno a c, essendo c il centro della circonferenza, sino a sovrapporlo all'asse σ;
- si ruota l'asse (c, σ) di una pari quantità, in senso antiorario, attorno a c; determinando quindi per intersezione il punto P'sulla circonferenza;
- il segmento (s_2,P') identifica la direzione principale 1.



I risultati sono ovviamente coincidenti con quelli ottenuti con la procedura alternativa nel precedente esercizio. È possibile anche determinare i cerchi di Mohr relativi alle altre due giaciture di interesse. Essi sono indicati in linea tratteggiata nella seguente figura:



Si noti come la massima tensione tangenziale agente sul punto materiale considerato si trova su una giacitura differente da quella dello stato piano di tensione. Tale valore si trova immediatamente come:

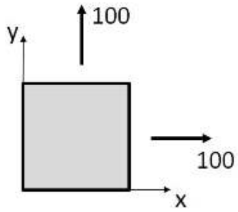
$$\tau_{max} = \frac{s_1 - s_3}{2} = \frac{107.0 - 0}{2} = 53.5\,\text{MPa}$$

La tensione tangenziale massima per le giaciture con normale appartenente al piano (x,y) è invece:

$$\tau_{max} = \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{107.0 - 43.0}{2} = 32.0\,\text{MPa}$$

7. CALCOLO DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Dato lo stato tensionale piano agente nell'intorno del punto materiale indicato in figura, con valori di tensione espressi in MPa, si determinino le direzioni principali di tensione relative alle giaciture di normale appartenente al piano (x,y).



Per il calcolo delle tensioni principali relative al piano in esame basta risolvere l'equazione derivante da:

$$\det\begin{bmatrix} 100-s & 0 \\ 0 & 100-s \end{bmatrix} = 0$$

facendo quindi riferimento ad una forma ridotta del tensore di tensione. Si ricava immediatamente:

$$(100-s)^2 = 0$$

Le tensioni s_1 e s_2 sono pertanto coincidenti e pari a 100 MPa. Le direzioni principali di tensione si ottengono dalla soluzione del sistema omogeneo:

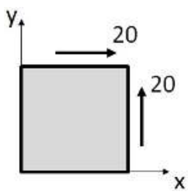
$$\begin{bmatrix} 100-100 & 0 \\ 0 & 100-100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistema che ammette ∞^2 soluzioni. Ogni direzione nel piano (x,y) rappresenta pertanto una direzione principale di tensione. Per qualsiasi giacitura di normale appartenente a (x,y) lo stato di tensione avrà la sola componente normale, pari a 100 MPa.

La rappresentazione attraverso i circoli di Mohr fornirebbe un cerchio di raggio nullo, centrato nel punto (100,0) nel piano delle tensioni (σ,τ).

8. CALCOLO DELLE TENSIONI PRINCIPALI E DELLE DIREZIONI PRINCIPALI DI TENSIONE

Calcolare le direzioni principali di tensione e le relative tensioni principali per lo stato di tensione piano indicato in figura (con valori di tensione espressi in MPa).



Le tensioni principali relative al piano in esame sono le radici dell'equazione derivante da:

$$\det\begin{bmatrix} -s & 20 \\ 20 & -s \end{bmatrix} = 0$$

facendo quindi riferimento, come nel caso precedente ad una forma ridotta del tensore di tensione. Si ricava immediatamente:

$$s^2 - 20^2 = 0$$

$$s_{1,2} = \begin{cases} 20\,\text{MPa} \\ -20\,\text{MPa} \end{cases}$$

essendo $s_3 = 0$. La direzione principale associata a quest'ultima è il versore (0,0,1). La direzione principale di tensione relativa a s_1 si ottiene dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} -20 & 20 \\ 20 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avendo già identificato la terza componente, necessariamente nulla. La direzione principale è identificata da vettori (u,u,0), ed è quindi la bisettrice del I-III quadrante. La direzione principale associata a s2 si ottiene da:

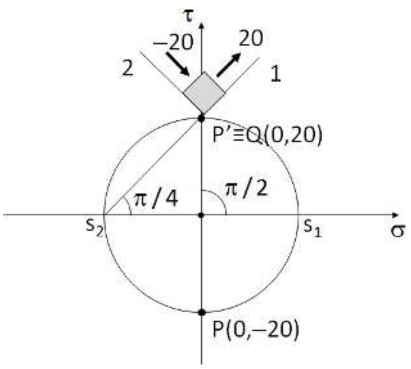
$$\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ed è quindi identificata da vettori del tipo (u,-u,0); essa coincide con la bisettrice del II-IV quadrante. Normalizzando i vettori, come d'uso, le direzioni principali relative alle tensioni non nulle sono quindi:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procedendo con il metodo grafico dei circoli di Mohr, si deve partire dal posizionamento dei punti:

$$P\left(\sigma_x, -\tau_{xy}\right) = P\left(0, -20\right)$$
$$Q\left(\sigma_y, -\tau_{xy}\right) = Q\left(0, 20\right)$$



Ricavando facilmente $s_1 = -s_2 = 20$ MPa e direzioni principali come in figura. La determinazione della direzione principale relativa alla tensione principale s_1 avviene come nell'esercizio 1:

- si ruota il segmento (c,P) in senso antiorario attorno a c, essendo c il centro della circonferenza, sino a sovrapporlo all'asse σ;
- si ruota l'asse (c, σ) di una pari quantità, in senso antiorario, attorno a c; determinando quindi per intersezione un punto P' sulla circonferenza che, in questo caso particolare, coincide con Q;
- il segmento (s_2,P') identifica la direzione principale 1.

9. VALUTAZIONE DI STATI DI TENSIONE

Dimostrare che lo stato di tensione descritto dal tensore (in MPa) seguente è di tipo mono-assiale. Calcolare quindi il valore della tensione principale non nulla e la sua direzione. Calcolare, infine, la componente idrostatica della tensione

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tensioni principali si ottengono come radici della equazione di terzo grado che si ottiene imponendo l'annullarsi del seguente determinante:

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - s\mathbf{I}) = 0 \quad \rightarrow \quad \det\begin{bmatrix} 1-s & 1 & 1 \\ 1 & 1-s & 1 \\ 1 & 1 & 1-s \end{bmatrix} = 0$$

ottenendo quindi

$$(1-s)\left[(1-s)^2 - 1\right] - 1(1-s-1) + 1(1-1+s) = 0$$
$$s^2(3-s) = 0$$

e tensioni principali

$$s_1 = 3\,\text{MPa}$$
$$s_{2,3} = 0$$

Ciò dimostra che lo stato di tensione è di tipo monoassiale. La direzione principale associata alla tensione principale non nulla è data dalla soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 1 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & 1-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \bar{u} \\ u_2 = \bar{u} \\ u_3 = \bar{u} \end{cases}$$

Normalizzando il vettore si trova

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Per definizione la pressione idrostatica è pari a

$$p = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} s_i = 1\,\text{MPa}$$

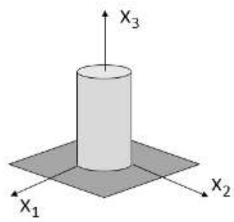
Il tensore che rappresenta la parte idrostatica della tensione è quindi

$$p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con componenti espresse in MPa.

10. SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

Trovare una soluzione di tensioni equilibrate per un cilindro di altezza H, appoggiato al piano identificato da x_3=0 e soggetto al solo peso proprio, agente nella direzione $-x_3$.



Si deve trovare una soluzione che soddisfi le equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni al contorno. Indicata con γ la forza peso per unità di volume, le equazioni indefinite di equilibrio si scrivono come:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{31}}{\partial x_3}=0$$
$$\frac{\partial\tau_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\tau_{32}}{\partial x_3}=0$$
$$\frac{\partial\tau_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\tau_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}-\gamma=0$$

Una soluzione della precedente prevede che siano nulle tutte le componenti di tensione a meno della componente σ_{33}, per la quale dovrà risultare:

$$\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}-\gamma=0 \quad\rightarrow\quad \sigma_{33}=\gamma\cdot x_3+C$$

essendo C una costante. Le condizioni al contorno nella superficie libera in x_3=H (tensione nulla) consentono di determinare C e, quindi, definire il valore della tensione in ogni punto:

$$\sigma_{33}=\gamma\cdot\left(x_3-H\right)$$

Le condizioni al contorno sul piano di appoggio prevedono tensioni nella sola direzione x_3, non potendo esserci componenti tangenziali in virtù della condizione di appoggio ipotizzata. La reazione vincolare si determina dalle condizioni al contorno $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{r}$ dove n è il versore che orienta la superficie del corpo nella parte vincolata e **r** la reazione.
Notando che la normale alla base inferiore è (0,0,–1), la reazione vincolare sarà data da:

$$r_3=\gamma\cdot H$$

Si noti che la reazione vincolare è orientata nel verso positivo dell'asse x_3, quindi giustamente opposta al verso di azione della forza peso.