A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

3^o appello — 18 settembre 2024

Esercizio 1. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1, 3)$, $u_3 = (1, 2, 1, 3)$.

(a) Verificare che $\dim U = 2$ e trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Sia $L \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $\ell = (2, -1, -3, 2)$. Dato $v = (-1, 3, 4, 0) \in \mathbb{R}^4$ trovare un vettore $w \in L$ in modo che esista $u \in U$ tale che $v = u + w$.

(d) Trovare una base di un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim W = 2$, tale che $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$. Sarebbe possibile trovare un sottospazio $\widetilde{W} \subset \mathbb{R}^4$ con $\dim \widetilde{W} = 2$, tale che $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$? [*la risposta deve essere giustificata*]

Soluzione. (a) Scriviamo i vettori u_1, u_2, u_3 sotto forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Riducendo la matrice in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha rango 2, il che conferma che $\dim U = 2$. Una base di U è quindi data dai vettori u_1 e u_2. Utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt si trova $u_1' = u_1$ e $u_2' = u_2 + \alpha u_1$. Imponendo che sia $u_1' \cdot u_2' = 0$ si trova $\alpha = -2$ e quindi $u_2' = u_2 - 2u_1 = (0, 1, 1, 1)$. Una base ortogonale di U è formata dai vettori u_1' e u_2'.

(b) Poniamo $\tilde{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Ponendo $u_1' \cdot \tilde{u} = 0$ e $u_2' \cdot \tilde{u} = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \end{cases}$$

quindi una base di $U^\perp$ è formata dai due vettori $\tilde{u}_1 = (1, -1, 1, 0)$ e $\tilde{u}_2 = (-1, -1, 0, 1)$.

(c) $w \in L$, quindi $w = a\ell = (2a, -a, -3a, 2a)$. Dato che $v = u + w$ si ha $u = v - w = (-1 - 2a, 3 + a, 4 + 3a, -2a)$. Richiedere che $u \in U$ equivale a richiedere che $\tilde{u}_1 \cdot u = 0$ e $\tilde{u}_2 \cdot u = 0$. Da queste equazioni si ricava $a = -2$ e quindi $w = -2\ell = (-4, 2, 6, -4)$ e quindi $u = v - w = (3, 1, -2, 4)$.

(d) Per ottenere $\dim(U \cap W) = 1$ e $\dim(U^\perp \cap W) = 1$ basta prendere come vettori della base di W i vettori $u_1 \in U$ e $\tilde{u}_1 \in U^\perp$.
Per ottenere $\dim(U \cap \widetilde{W}) = 0$ e $\dim(U^\perp \cap \widetilde{W}) = 0$ bisogna prendere come vettori della base di $\widetilde{W}$ due vettori $\tilde{w}_1$ e $\tilde{w}_2$ tali che i vettori $u_1, u_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ siano linearmente indipendenti e anche i vettori $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2$ siano linearmente indipendenti.
Una possibile scelta è $\tilde{w}_1 = (0, 0, 1, 0)$ e $\tilde{w}_2 = (0, 0, 0, 1)$.

Esercizio 2. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che $f(1, 0, 1) = (5, 1, 2, 1)$, $f(0, 1, -1) = (-2, 1, 0, -1)$, $f(1, 0, -1) = (-1, -3, -2, 1)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$.

(b) Scrivere basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Sia $w_\alpha = (3, \alpha, -2, 3)$. Trovare il valore di α per cui $w_\alpha \in \operatorname{Im} f$ e per tale α trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w_\alpha$.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice è la trasposta della matrice di f trovata al punto (a). Scrivere la matrice della funzione composta $g \circ f$ (rispetto alle basi canoniche) e stabilire se $g \circ f$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Soluzione. (a) Si ha:

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= \frac{1}{2}\big((5,1,2,1) + (-1,-3,-2,1)\big) = (2,-1,0,1) \\
f(0,0,1) &= \frac{1}{2}\big((5,1,2,1) - (-1,-3,-2,1)\big) = (3,2,2,0) \\
f(0,1,0) &= (-2,1,0,-1) + f(0,0,1) = (1,3,2,-1)
\end{aligned}$$

quindi la matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Riducendo A in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 e quindi $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$. Una base dell'immagine di f è data dalle prime due colonne della matrice A.

Per trovare il nucleo di f bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

quindi una base di $\operatorname{Ker} f$ è data dal vettore $(-1,-1,1)$.

(c) Risolvendo il sistema $f(v) = w_\alpha$ si trova che tale sistema ha soluzione se e solo se $\alpha = -5$. Per tale valore di α si trova

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 2 \\ x_2 = -x_3 - 1 \end{cases}$$

quindi tutte le soluzioni di $f(v) = w_\alpha$ sono date da

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0) + x_3\,(-1,-1,1)$$

(d) La matrice di g è

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di $g \circ f$ è il prodotto

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -2 & 15 & 13 \\ 4 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che questa matrice ha rango 2 (perché A ha rango 2), quindi non è invertibile, e quindi $g \circ f$ non è isomorfismo.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-2y + 2z, -x + y - 2z, -x + 2y - 3z)$$

(a) La funzione f è iniettiva? è suriettiva?

(b) Determinare tutti i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali esistono dei vettori $v \neq \vec{0}$ tali che $f(v) = av$.

(c) Si dica se esiste una base $\{w_1, w_2, w_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale.

(d) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una funzione lineare qualunque e sia G la sua matrice rispetto alla base canonica. Senza conoscere la matrice G è possibile stabilire se la matrice $A = GG^T$ è diagonalizzabile? [*la risposta deve essere giustificata*]

Soluzione. (a) La matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che f ha rango 2, quindi $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Pertanto f non è iniettiva, né suriettiva.

(b) I numeri a richiesti sono gli autovalori della matrice F. Il polinomio caratteristico di F è $-\lambda(\lambda + 1)^2$, quindi gli autovalori sono $\lambda = 0$ (con molteplicità 1) e $\lambda = -1$ (con molteplicità 2).

(c) Per l'autovalore 0 si trova l'autovettore $w_1 = (-1, 1, 1)$. L'autospazio corrispondente all'autovalore -1 è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x - 2y + 2z = 0$, quindi ha dimensione 2 ed è generato dai vettori $w_2 = (2, 1, 0)$ e $w_3 = (-2, 0, 1)$. I vettori w_1, w_2, w_3 sono una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice di f è diagonale (con gli autovalori sulla diagonale).

(d) La matrice $A = GG^T$ è simmetrica, infatti $A^T = (GG^T)^T = GG^T = A$. Dalla teoria sappiamo che ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati il punto $P = (1, 2, 2)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P.

(b) Sia σ il piano di equazione $2x + z - 2 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ.

(c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (3, 2, 6)$ sul piano σ. Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\mathrm{dist}(B, H) = 2\,\mathrm{dist}(A, H)$.

(d) Consideriamo i piani di equazione $(\alpha+\beta)x + (\alpha+2\gamma)y + (2\alpha-\beta+\gamma)z = 2\beta+\gamma$, per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, non tutti nulli. Verificare che per ogni α, β, γ tutti questi piani passano per lo stesso punto e trovare le coordinate di tale punto.

Soluzione. (a) Il fascio di piani di asse r è dato da

$$\lambda(2x + z - 3) + \mu(x - 2y + 1) = 0.$$

Imponendo la condizione di passaggio per P si trova $\lambda - 2\mu = 0$, quindi possiamo prendere $\mu = 1$ e $\lambda = 2$. In questo modo si ottiene la seguente equazione del piano π:

$$\pi : 5x - 2y + 2z - 5 = 0.$$

(b) Le equazioni cartesiane della retta $s = \pi \cap \sigma$ sono

$$s : \begin{cases} 5x - 2y + 2z - 5 = 0 \\ 2x + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Due punti di s sono $S_1 = (1, 0, 0)$ e $S_2 = (3, 1, -4)$ quindi il vettore direttore è $v_s = S_2 - S_1 = (2, 1, -4)$. Le equazioni parametriche di s sono quindi

$$s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 0 - 4t \end{cases}$$

(c) Un vettore ortogonale al piano σ è $n_\sigma = (2, 0, 1)$. Consideriamo la retta

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 6 + t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con il piano σ si trova il punto $H = (-1, 2, 4)$. Il punto B è dato da $B = H + 2(H - A) = (-9, 2, 0)$.

(d) Per $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = 0$ si ottiene il piano di equazione $x + y + 2z = 0$.
Per $\beta = 1$ e $\alpha = \gamma = 0$ si ottiene il piano di equazione $x - z = 2$.
Per $\gamma = 1$ e $\alpha = \beta = 0$ si ottiene il piano di equazione $2y + z = 1$.
Mettendo a sistema queste tre equazioni si trova il punto $R = (1, 1, -1)$. Per verificare che tutti i piani passano per questo punto basta sostituire le coordinate di R nell'equazione dei piani. Si ottiene l'identità $2\beta + \gamma = 2\beta + \gamma$ il che conferma che l'equazione è verificata per ogni α, β, γ.