COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
6 Settembre 2013

Esercizio 1. [9.5 + 1 punti] Sia

$$G(s) = \frac{(s^2+1)(s+10)}{(s-0.1)(s^2+0.2s+100)}$$

la funzione di trasferimento di un modello ingresso/uscita, a tempo continuo, descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

i) Si tracci il diagramma di Bode (ampiezza e fase) della risposta in frequenza $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}_+$;

ii) a partire da esso si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega), \omega \in \mathbb{R}$, e si studi la stabilità BIBO del sistema di funzione di trasferimento $W(s)$, ottenuto per retroazione unitaria negativa da $G(s)$.

iii) FACOLTATIVO: sfruttando esclusivamente il diagramma di Nyquist, si determini l'eventuale numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.
[Suggerimento: si ricorra ad un percorso di Nyquist modificato, come accade nel caso in cui $G(s)$ abbia poli sull'asse immaginario].

Esercizio 2. [10 punti] Data la funzione di trasferimento in catena aperta

$$G(s) = \frac{s+\frac{16}{31}}{(s+1)^2\left(s-\frac{8}{5}\right)}$$

si consideri la corrispondente funzione di trasferimento in catena chiusa (con retroazione unitaria negativa e controllo puramente proporzionale $C(s) = k$) $W(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$. È richiesto di:

i) studiare la stabilità BIBO di $W(s)$ ricorrendo al criterio di Routh;

ii) tracciare il luogo positivo delle radici di $G(s)$, individuando asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, ed infine discutere la stabilità BIBO di $W(s)$ per $k > 0$ basandosi sul luogo positivo;

iii) tracciare il luogo negativo delle radici di $G(s)$, individuando asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, ed infine discutere la stabilità BIBO di $W(s)$ per $k < 0$ basandosi sul luogo negativo.

[SUGGERIMENTO: il calcolo dei punti doppi risulta complicato e quindi non è richiesto, ma da esso si deduce che l'unico punto doppio del luogo è in -1].

Esercizio 3. [6 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)^2}$$

è richiesto di progettare

i) una rete a sella stabilizzante $C_1(s)$ che garantisca $e_{rp} \simeq 10^{-4}$ al gradino, $\omega_a \simeq 10$ rad/s e $m_\psi \simeq 90°$;

ii) un PID stabilizzante $C_2(s)$ che garantisca $e_{rp} \simeq 0.1$ alla rampa, $\omega_a \simeq 10$ rad/s e $m_\psi \simeq 90°$.

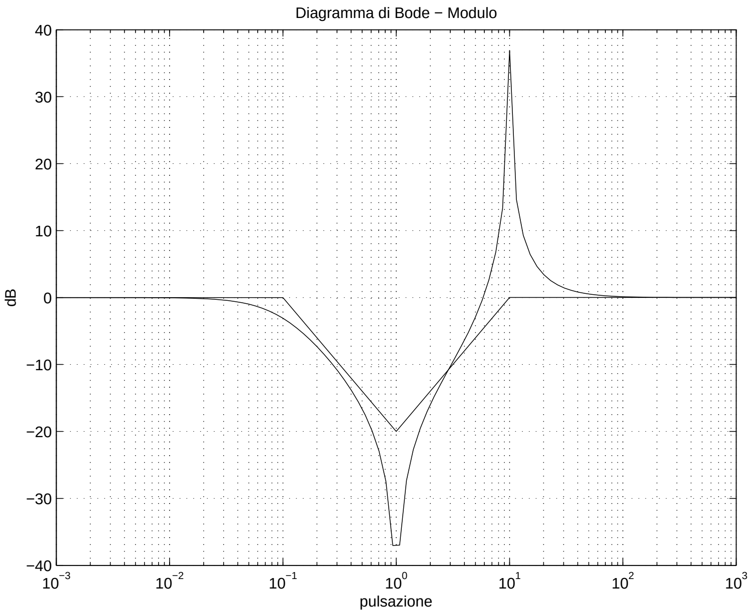
Teoria. [5 punti] Si discutano le proprietà della trasformazione bilineare e si spieghi come essa può essere utilizzata per derivare un Criterio di Routh applicabile ai sistemi discreti. Di tale Criterio sono richiesti enunciato e dimostrazione.

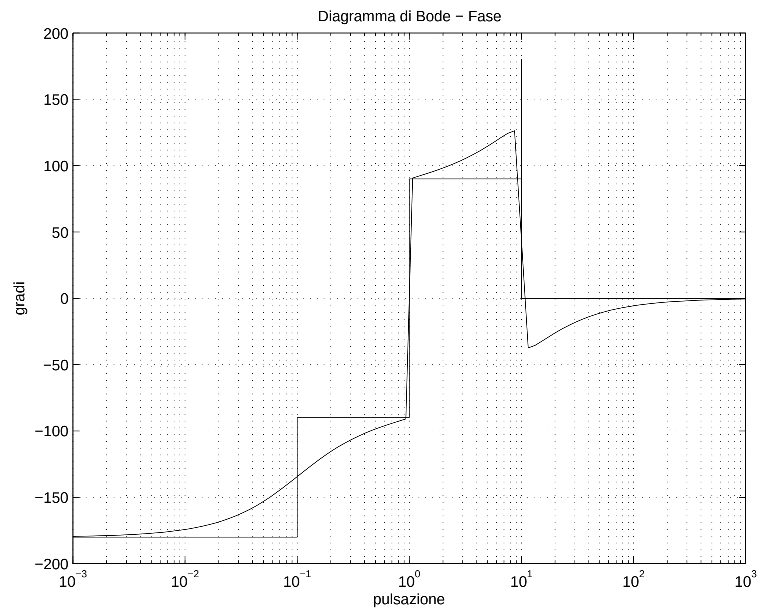
COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione
6 Settembre 2013 - Soluzioni

Esercizio 1. i) [4.5 punti] È immediato verificare che la funzione di trasferimento ha la seguente forma di Bode:

$$G(s) = \frac{(s^2+1)(s+10)}{(s-0.1)(s^2+0.2s+100)} = -\frac{(s^2+1)\left(1+\frac{s}{10}\right)}{\left(1-\frac{s}{0.1}\right)\left(1+2\cdot 0.01\frac{s}{10}+\frac{s^2}{10^2}\right)}.$$

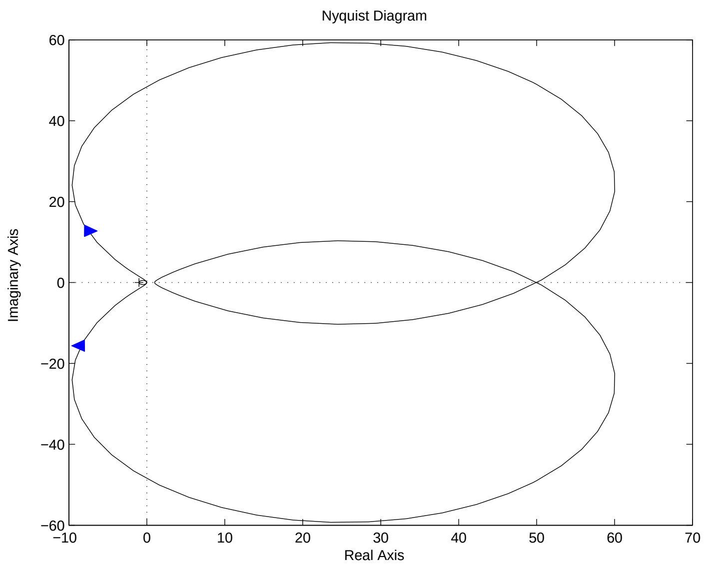
Pertanto $K_B = -1$ e la risposta in frequenza presenta uno zero reale negativo semplice in -10 ($1/T' = 10$ e $\mu' = 1$), una coppia di zeri immaginari coniugati (ovvero un termine trinomio al numeratore con $\xi' = 0$) di molteplicità unitaria e pulsazione naturale $\omega_n' = 1$ rad/s, un polo reale positivo semplice in 0.1 ($1/T = -0.1$ e $\mu = 1$), un termine trinomio al denominatore corrispondente a due poli complessi coniugati di molteplicità unitaria con pulsazione naturale $\omega_n = 10$ e smorzamento $\xi = 0.01$. Sulla base di tali considerazioni e dei diagrammi di Bode, sia asintotici che effettivi, dei termini elementari, è immediato determinare i diagrammi di Bode della preassegnata risposta in frequenza, riportati nelle figure che seguono.



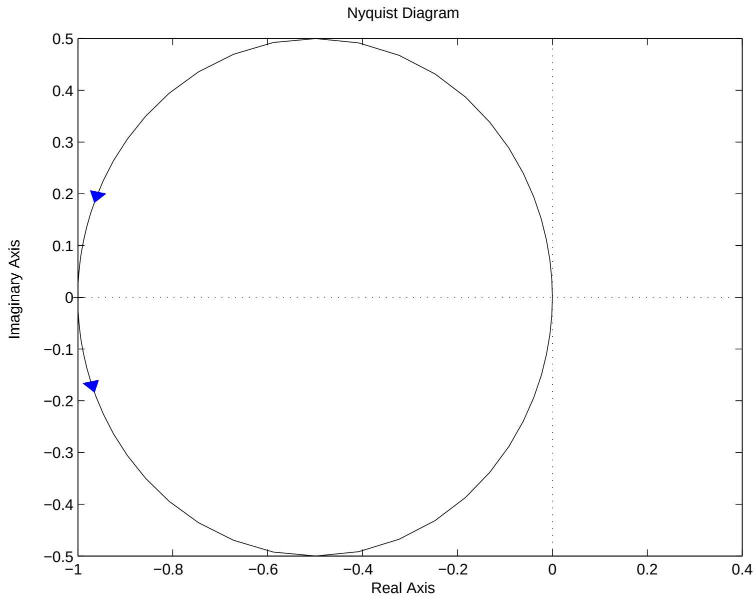


Si noti che, nel diagramma delle ampiezze, il primo picco (verso il basso) è infinito mentre il secondo (verso l'alto) è finito.

ii) [5 punti] Il diagramma di Nyquist, per $\omega \in \mathbb{R}$, della risposta in frequenza di cui abbiamo tracciato il diagramma di Bode al punto precedente è:



Un dettaglio del diagramma di Nyquist in un intorno dell'origine è:



Si noti che il diagramma passa, per $\omega = 0$, per il punto critico $-1 + j0$. Ciò significa che la $W(s)$ ha un polo nell'origine e quindi non è BIBO stabile. Si noti, infine, che il diagramma passa, per $\omega = \pm\infty$, per il punto $1 + j0$.

iii) [1 punto] L'adozione di un percorso di Nyquist modificato, in un intorno della pulsazione nulla (ovvero la sostituzione di $s = j\omega$ con $s = \varepsilon e^{j\theta}, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ed $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, in un intorno di $s = 0$), porta ad un archetto che circonda il punto critico in verso antiorario, inglobandolo all'interno del grafico. Di conseguenza, per il grafico modificato, $N = 1$, ed avendo $G(s)$ un polo a parte reale positiva, ovvero $n_{G+} = 1$, ne consegue che $n_{W+} = 0$ ovvero $W(s)$ non ha poli a parte reale positiva. Pertanto il sistema retroazionato non è BIBO stabile, in quanto ha un polo semplice in 0, ma non ha poli a parte reale positiva (una verifica diretta porterebbe ad un denominatore di $W(s)$ della forma $s(100.98 + 10.1s + 2s^2)$, ed il polinomio di secondo grado è Hurwitz, per la regola dei segni di Cartesio).

Esercizio 2. i) [3 punti] Posto $d(s) = (s+1)^2\left(s - \frac{8}{5}\right)$ e $n(s) = \left(s + \frac{16}{31}\right)$, il polinomio al denominatore della $W(s)$ è:

$$d(s) + kn(s) = (s+1)^2\left(s - \frac{8}{5}\right) + k\left(s + \frac{16}{31}\right) = s^3 + \frac{2}{5}s^2 + \left(k - \frac{11}{5}\right)s + \left(\frac{16}{31}k - \frac{8}{5}\right)$$

la cui tabella di Routh è:

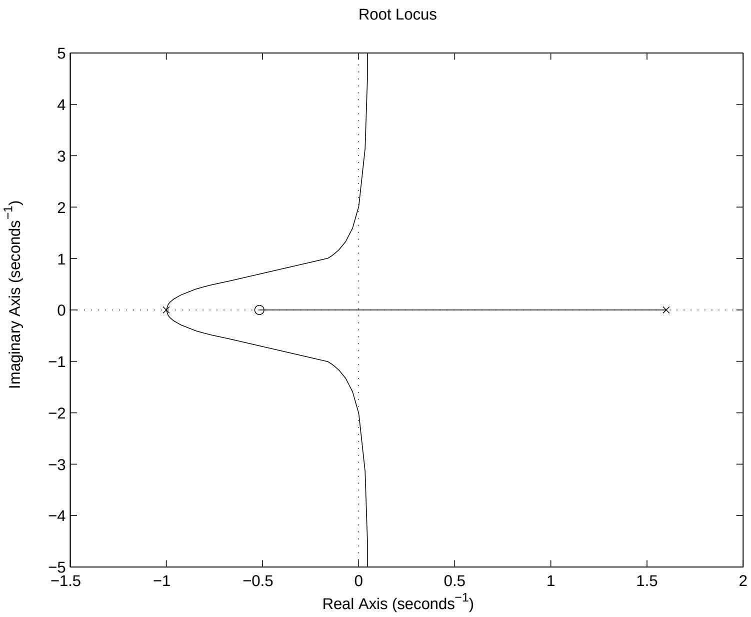
$$\begin{array}{c|cc}
3 & 1 & k - \frac{11}{5} \\
2 & \frac{2}{5} & \frac{16}{31}k - \frac{8}{5} \\
1 & \frac{9}{31}\left(\frac{31}{5} - k\right) & 0 \\
0 & \frac{16}{31}\left(k - \frac{31}{10}\right) & 0
\end{array}$$

Il polinomio risulta essere di Hurwitz (e conseguentemente $W(s)$ risulta BIBO stabile) se e solo se $\frac{31}{10} < k < \frac{31}{5}$.

ii) [5 punti] Per quanto concerne il luogo delle radici positivo, fanno parte del luogo i punti dell'asse reale compresi tra $-16/31$ e $8/5$ (oltre, ovviamente, al polo doppio in -1). Poiché $n = 3$ e $m = 1$ ci sono due asintoti a cui tendono due dei tre rami del luogo, e tali asintoti hanno pendenze $\pi/2$ e $-\pi/2$. Il calcolo del baricentro fornisce

$$x_B = \frac{-1 - 1 + 8/5 + 16/31}{3 - 1} = \frac{9}{155},$$

e ciò significa che due dei rami tendono alla zona instabile del piano. Come scritto nel suggerimento, non esistono punti doppi nel luogo a parte il polo doppio in -1 e quindi i due rami che partono da -1 necessariamente si avvicinano ai due asintoti, mentre il ramo che parte dal polo in $\frac{8}{5}$ tende allo zero in $-\frac{16}{31}$ muovendosi lungo l'asse reale. Pertanto il tracciamento qualitativo del luogo è immediato.



Restano da studiare le intersezioni con l'asse immaginario del luogo positivo (e quindi la stabilità BIBO per $k > 0$). Si tratta quindi di determinare per quale valore di $k > 0$ il luogo passa per l'origine e per quali valori di $k > 0$ il polinomio $d(s) + kn(s)$ ha due radici immaginarie coniugate. Ponendo $s = i\omega$ e imponendo $d(i\omega) + kn(i\omega) = 0$, si trova

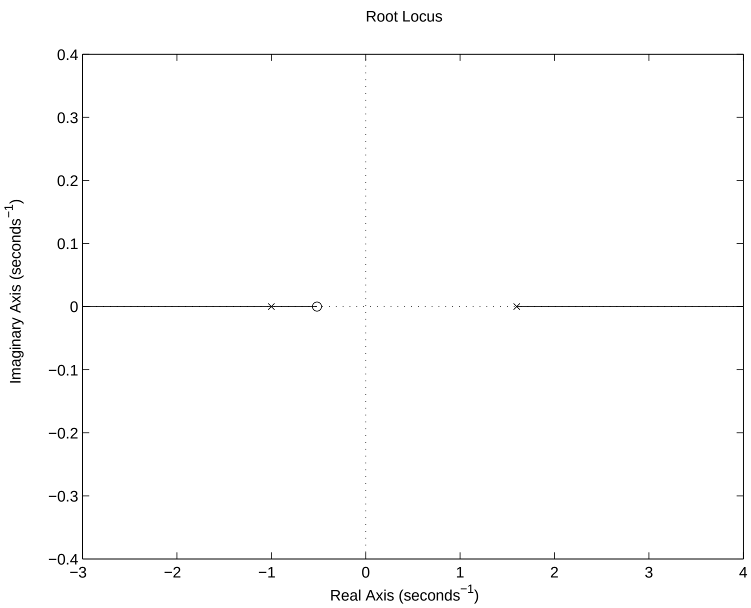
$$i\omega \left(k - \frac{11}{5} - \omega^2 \right) + \left(\frac{16}{31}k - \frac{8}{5} - \frac{2}{5}\omega^2 \right) = 0$$

la cui parte immaginaria si annulla per $\omega = 0$ oppure per $k = \omega^2 + \frac{11}{5}$. Sostituendo tali espressioni (una alla volta) in quella della parte reale ed imponendone l'annullamento, si trovano le soluzioni

$$s = 0, k = \frac{31}{10} \quad \text{e} \quad s = \pm 2i, k = \frac{31}{5}$$

entrambe appartenenti al luogo positivo. Quindi un ramo si dirige dal polo $\frac{8}{5}$ verso lo zero $-\frac{16}{31}$, attraversando l'asse immaginario per $k = \frac{31}{10}$, mentre gli altri due rami sono complessi e si dirigono dal polo doppio -1 verso i due asintoti, attraversando l'asse immaginario in $s = \pm 2i$ per $k = \frac{31}{5}$, da cui la conferma della stabilità BIBO di $W(s)$ per $\frac{31}{10} < k < \frac{31}{5}$.

iii) [2 punti] Nel luogo negativo i rami si muovono sempre sull'asse reale (un ramo parte dal polo $\frac{8}{5}$ e va verso $+\infty$; due rami partono dal polo doppio -1 e vanno l'uno verso lo zero $-\frac{16}{31}$ e l'altro verso $-\infty$), pertanto i due asintoti sono i due semiassi reali. Inoltre dal luogo negativo si deduce che, per $k < 0$, la $W(s)$ ha sempre uno (ed uno solo) polo reale positivo, e pertanto non è mai BIBO stabile.

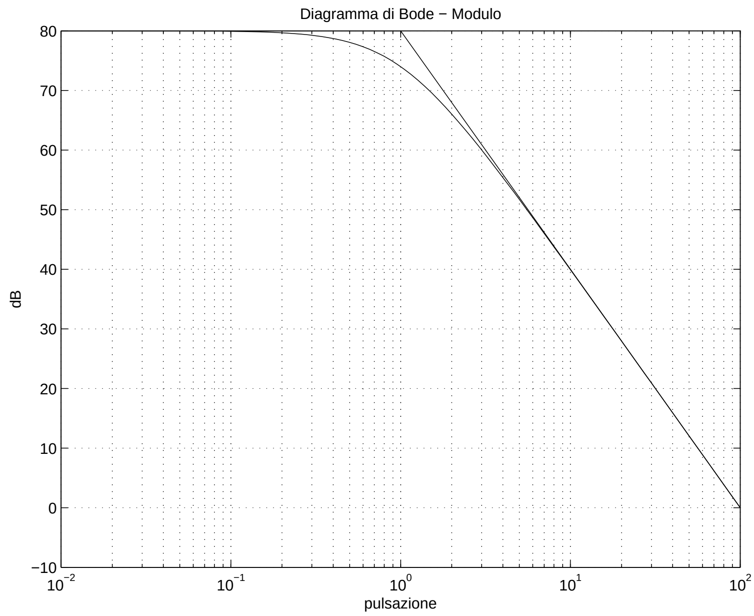


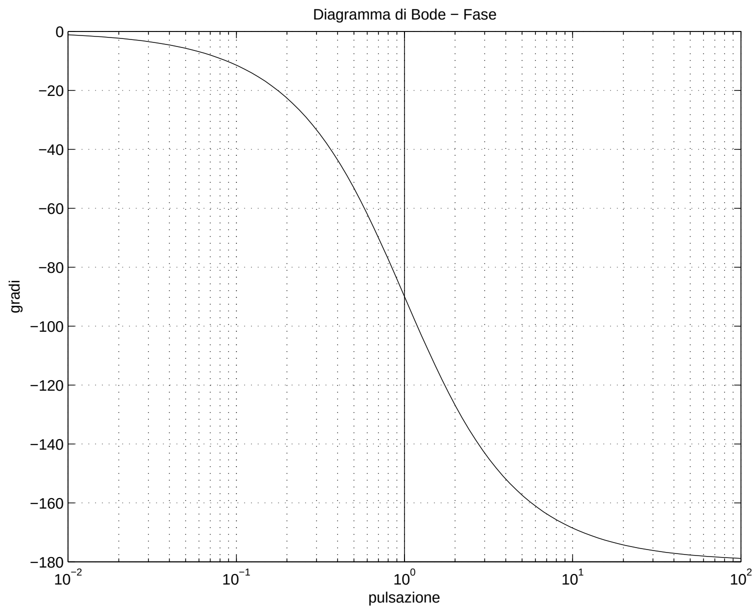
Si noti che il calcolo dei punti doppi porgerebbe, dopo conti molto laboriosi

$$(s + 1)(155s^2 - 4s + 36) = 0$$

con due punti doppi complessi (da scartare, in quanto il grado del polinomio al denominatore di $G(s)$ è solo 3) ed il punto doppio banale $s = -1$ (corrispondente a $k = 0$, cioé al punto di partenza del luogo).

Esercizio 3. i) [4 punti] Il requisito sull'errore a regime al gradino impone (tipo 0 e) $C'(s) = 1000$. Il diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$ taglia l'asse a 0 dB in $\omega_a \simeq 100$ rad/s, con margine di fase di pochi gradi alla pulsazione desiderata $\omega_a \simeq 10$ rad/s.

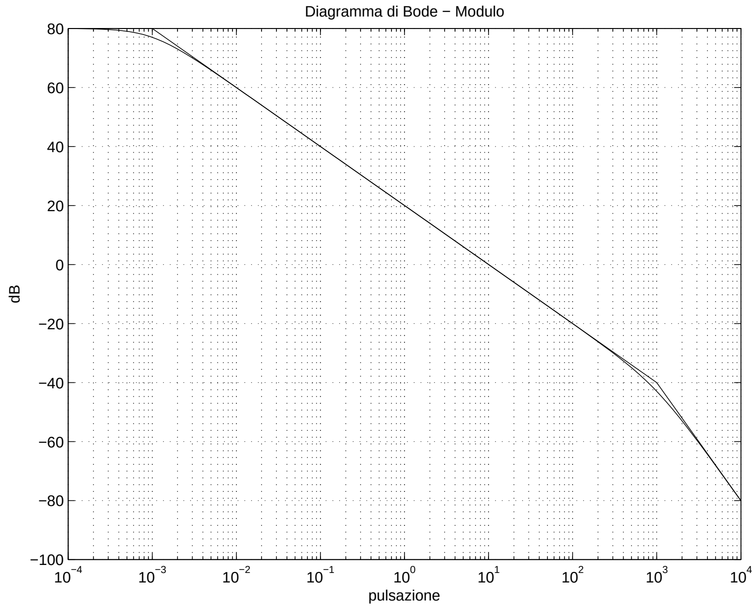


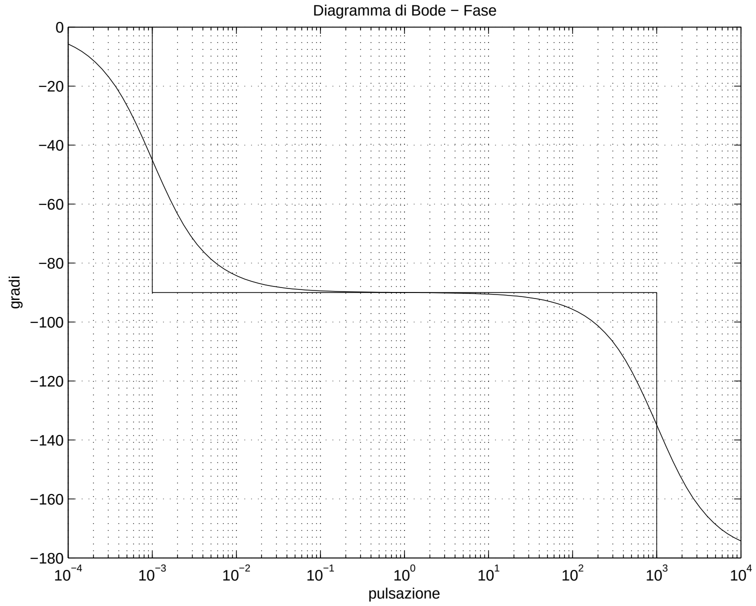


È necessario quindi da un lato abbassare il modulo (con una rete ritardatrice), scendendo in totale di 40 dB, e dall'altro alzare la fase (con una rete anticipatrice). Ciò si ottiene ad esempio abbassando il modulo di 60 dB con la ritardatrice ed alzando di 20 dB con la anticipatrice. Quindi piazzando un polo 3 decadi prima del primo zero, ed il secondo zero 1 decade prima di $\omega_a \simeq 10$ rad/s (oltre ad un polo in alta frequenza) si ottiene quanto desiderato. Ad esempio, la scelta più semplice è quella di introdurre una doppia cancellazione zero-polo con i due zeri coincidenti

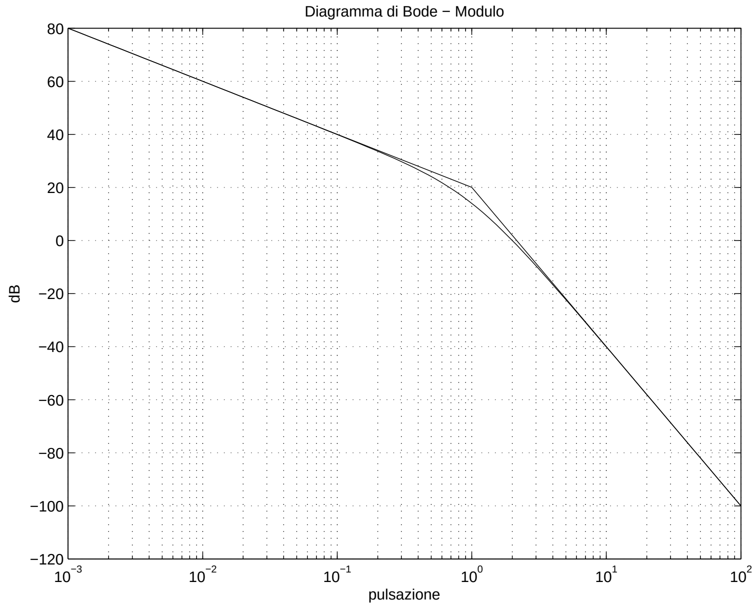
$$C_1(s) = 1000\frac{(1+s)^2}{(1+1000s)\left(1+\frac{s}{p}\right)}, \qquad p \gg 10,$$

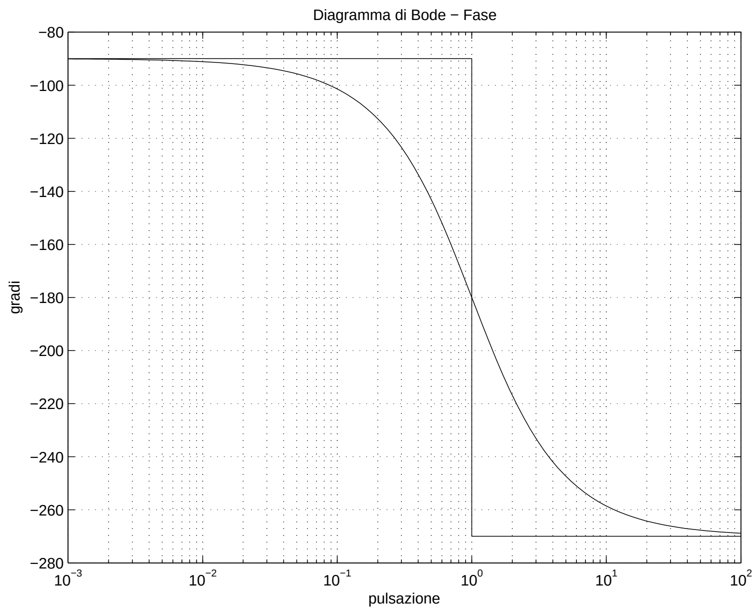
che rispetta tutti i requisiti (la stabilità BIBO del sistema retroazionato è garantita dal Criterio di Bode). In figura il diagramma di Bode di $C_1(s)G(s)$ per $p = 1000$.





ii) [2 punti] Per il PID, l'errore a regime (alla rampa) impone tipo 1 e guadagno di Bode in catena aperta pari a 10. Pertanto scegliamo $C'(s) = \frac{1}{s}$.

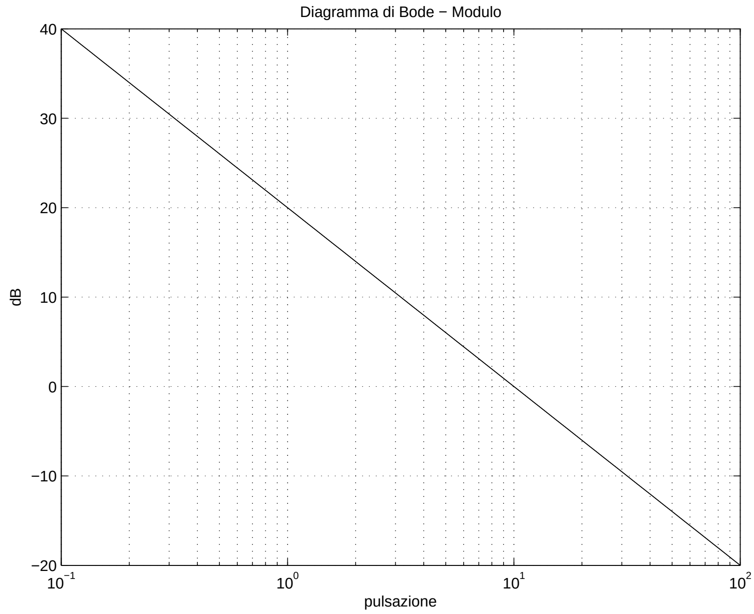


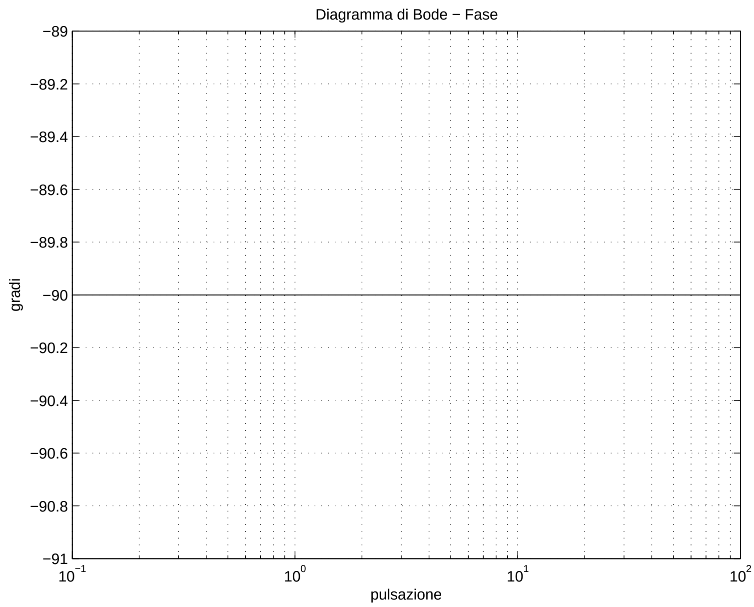


Ora occorre posizionare due zeri in modo da soddisfare gli altri due requisiti. È immediato rendersi conto che la cancellazione del doppio polo in -1, ovvero il controllore

$$C_2(s) = \frac{(1+s)^2}{s} = \frac{1}{s} + 2 + s,$$

permette il soddisfacimento di tutti i requisiti (compresa la stabilità per il Criterio di Bode). In figura Bode per $C_2(s)G(s)$.





Teoria. [5 punti] Vedi libro, pp. 342 - 344.