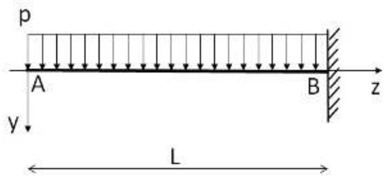
BIOMECCANICA A.A. 2024-25
CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI NEI SISTEMI DI TRAVI BIDIMENSIONALI ISOSTATICI

1. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DI INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la mensola indicata in figura, soggetta ad un carico uniformemente distribuito e agente perpendicolarmente all'asse della trave.



Dato il sistema di riferimento indicato in figura, con origine nel punto A, si provvede ad integrare l'equazione differenziale che esprime l'equilibrio dei momenti agenti su un concio di trave di lunghezza infinitesima dz:

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = -p$$

Integrando due volte si ottengono gli andamenti della sollecitazione tagliante T(z) e del momento flettente M(z), a meno delle costanti di integrazione.

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z) = -p \cdot z + C_1$$

$$M(z) = -p \cdot \frac{1}{2}z^2 + C_1 \cdot z + C_2$$

Osservando che nella sezione d'estremità libera A non sono applicate forze o momenti concentrati, le sollecitazioni T e M devono risultare nulle. Si può quindi scrivere:

$$\begin{cases} T(0) = -p \cdot 0 + C_1 = 0 \\ M(0) = -p \cdot \frac{1}{2}0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Si sono così determinati i valori delle costanti di integrazione sulla base delle condizioni al contorno. Considerando poi che non vi sono forze di alcun genere nella direzione dell'asse della trave, dall'equazione differenziale

$$\frac{dN(z)}{dz} = 0$$

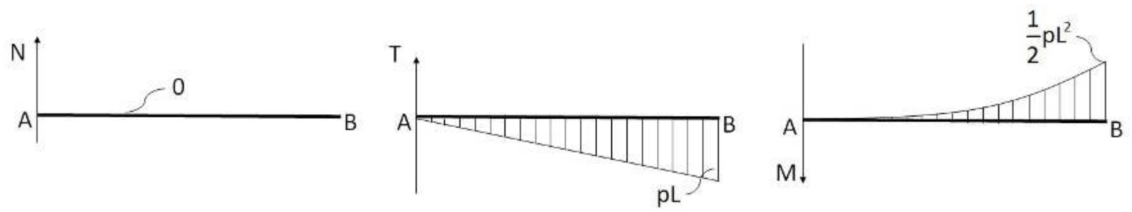
si deduce facilmente che il valore della sollecitazione assiale è costante e pari a 0 in ogni punto della trave. Le equazioni che forniscono le componenti di sollecitazione N, T, M in funzione della coordinata dell'asse della trave z sono pertanto:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -p \cdot z$$

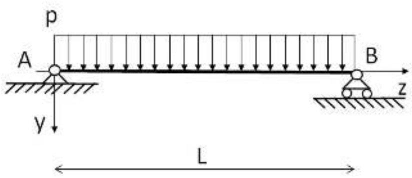
$$M(z) = -p \cdot \frac{1}{2}z^2$$

I diagrammi delle componenti di sollecitazione sono rappresentati nella seguente figura:



2. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DI INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la trave indicata in figura, vincolata agli estremi con cerniera e appoggio e soggetta ad un carico uniformemente distribuito agente in direzione perpendicolare all'asse della trave.



Anche in questo caso, non essendoci forze esterne nella direzione dell'asse della trave, l'integrazione dell'equazione differenziale

$$\frac{dN(z)}{dz}=0$$

fornisce un valore nullo della sollecitazione assiale in ogni sezione della struttura. L'integrazione doppia dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2}=-p$$

consente di ricavare:

$$\frac{dM(z)}{dz}=T(z)=-p\cdot z+C_1$$

$$M(z)=-p\cdot\frac{1}{2}z^2+C_1\cdot z+C_2$$

Le costanti di integrazione si possono ottenere osservando che nelle sezioni della trave in corrispondenza delle cerniere deve risultare nullo il momento flettente:

$$\begin{cases} M(0)=-p\cdot\frac{1}{2}0^2+C_1\cdot 0+C_2=0 \\ M(L)=-p\cdot\frac{1}{2}L^2+C_1\cdot L+C_2=0 \end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} C_1=\frac{pL}{2} \\ C_2=0 \end{cases}$$

Gli andamenti del taglio e del momento flettente sono quindi dati da:

$$T(z)=-p\cdot z+\frac{pL}{2}$$

$$M(z)=-p\cdot\frac{1}{2}z^2+\frac{pL}{2}\cdot z$$

Si osserva che la funzione del taglio ammette uno zero nel punto di mezzeria:

$$T(\overline{z})=-p\cdot\overline{z}+\frac{pL}{2}=0 \quad\rightarrow\quad \overline{z}=\frac{L}{2}$$

In tale punto la funzione del momento flettente ha il suo massimo, che vale:

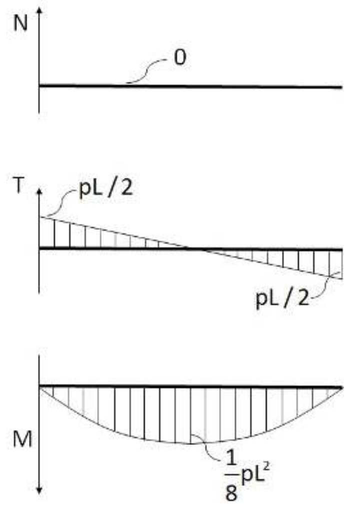
$$M\left(\frac{L}{2}\right)=-p\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2+\frac{pL}{2}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)=-p\cdot\frac{L^2}{8}+p\cdot\frac{L^2}{4}=\frac{pL^2}{8}$$

La pendenza della funzione di momento nelle sezioni A e B risulta pari a:

$$T(0) = -p \cdot 0 + \frac{pL}{2} = \frac{pL}{2}$$

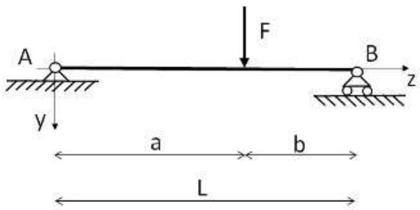
$$T(L) = -p \cdot L + \frac{pL}{2} = -\frac{pL}{2}$$

I diagrammi delle sollecitazioni sono riportati nella figura seguente.

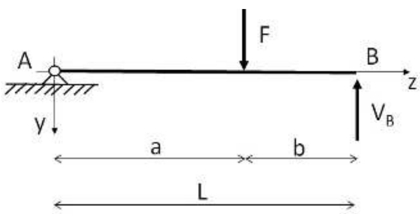


3. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la trave indicata in figura, vincolata agli estremi con cerniera e appoggio e soggetta ad una forza concentrata in una sezione generica intermedia.

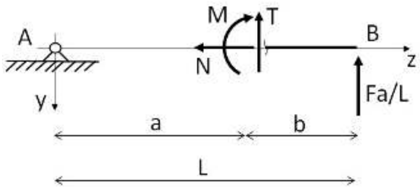


Sostituito il vincolo del punto B con la componente statica esplicata V_B, si determina quest'ultima considerando l'equazione di equilibrio dei momenti rispetto al punto A:



$$V_B \cdot L - F \cdot a = 0 \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{Fa}{L}$$

Si provvede poi ad isolare in forma ideale la porzione di destra della struttura con una sezione generica di ascissa a < z < L. Nella sezione individuata si considerano le componenti di sollecitazione con il loro verso positivo sulla base della usuale convenzione dei segni e del sistema di riferimento considerato.



Si considerano poi le condizioni di equilibrio delle forze in direzione z, y e dei momenti rispetto alla sezione z:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) + \frac{Fa}{L} = 0$$

$$M(z) - \frac{Fa}{L} \cdot (L - z) = 0$$

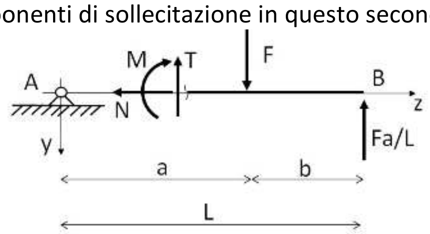
ricavando l'andamento delle componenti di sollecitazione in funzione di z:

$$N(z) = 0$$

$$T(z) = -\frac{Fa}{L}$$

$$M(z) = \frac{Fa}{L} \cdot (L - z)$$

Analogamente, si considera l'equilibrio della parte di destra della struttura per una sezione generica 0 < z < a, ottenendo l'andamento delle componenti di sollecitazione in questo secondo tratto:



$$N(z) = 0$$

$$T(z) - F + \frac{Fa}{L} = 0$$

$$M(z) + F \cdot (a - z) - \frac{Fa}{L} \cdot (L - z) = 0$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene

$$N(z) = 0$$

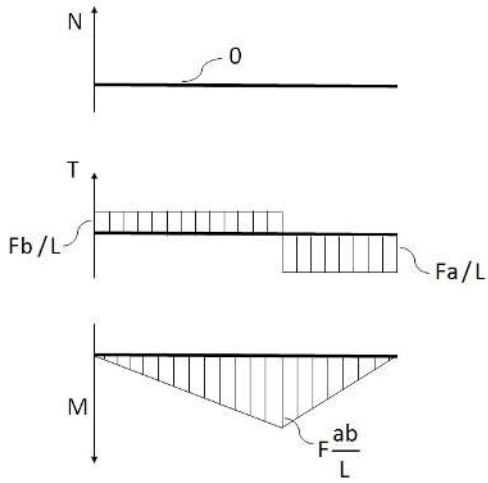
$$T(z) = \frac{Fb}{L}$$

$$M(z) = \frac{Fbz}{L}$$

Si noti che nel punto di applicazione della forza F il momento flettente è pari a

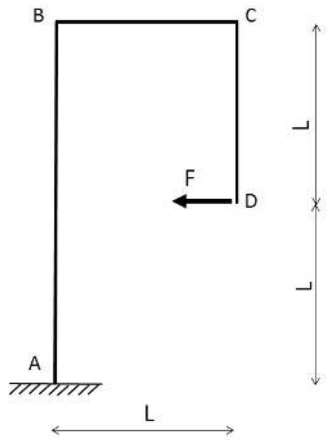
$$M(a) = \frac{Fab}{L}$$

Questo valore si ottiene considerando in modo del tutto equivalente le due equazioni ricavate per il momento flettente, dato che la funzione è continua nel punto considerato. La funzione che descrive l'andamento della sollecitazione tagliante presenta invece, nel medesimo punto, una discontinuità pari a F. In forma coerente, la funzione del momento flettente presenta nell'ascissa z = a un punto angoloso. I diagrammi di sollecitazione sono riportati nella figura seguente.

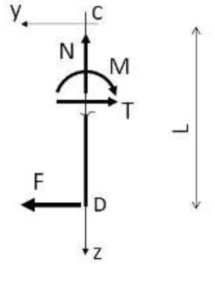


4. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la struttura indicata in figura.



Si considera una sezione intermedia nel tratto C-D e si impone l'equilibrio della porzione inferiore di struttura soggetta alle forze esterne e alle componenti di sollecitazione. Si utilizza il sistema di riferimento locale indicato in figura, rispetto al quale i versi delle componenti di sollecitazione indicate sono convenzionalmente positivi.



Per 0 < z < L si ottiene:

$N(z)=0$

$T(z)-F=0$

$M(z)+F\cdot(L-z)=0$

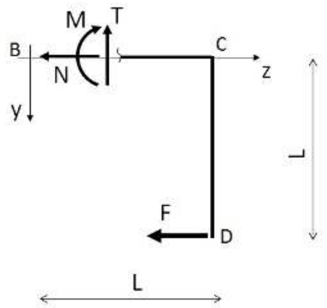
ricavando l'andamento delle componenti di sollecitazione:

$N(z)=0$

$T(z)=F$

$M(z)=F(z-L)$

Per il calcolo delle componenti di sollecitazione nel tratto B-C si procede con metodo analogo, considerando però il sistema di riferimento locale indicato nella figura seguente:



Le equazioni di equilibrio della porzione di struttura compresa tra la sezione generica z e il punto D risultano essere:

$N(z)+F=0$

$T(z)=0$

$M(z)+F\cdot L=0$

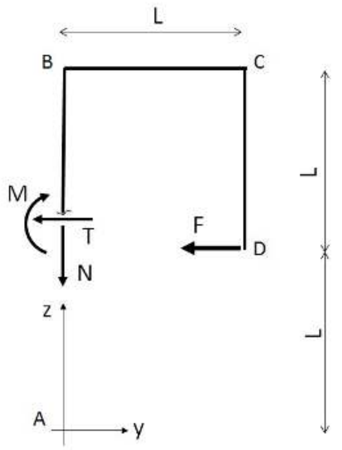
da cui si ricava

$N(z)=-F$

$T(z)=0$

$M(z)=-FL$

Si procede, infine, considerando una sezione intermedia nel tratto A-B e l'equilibrio della porzione di struttura compresa tra questa e la sezione D.



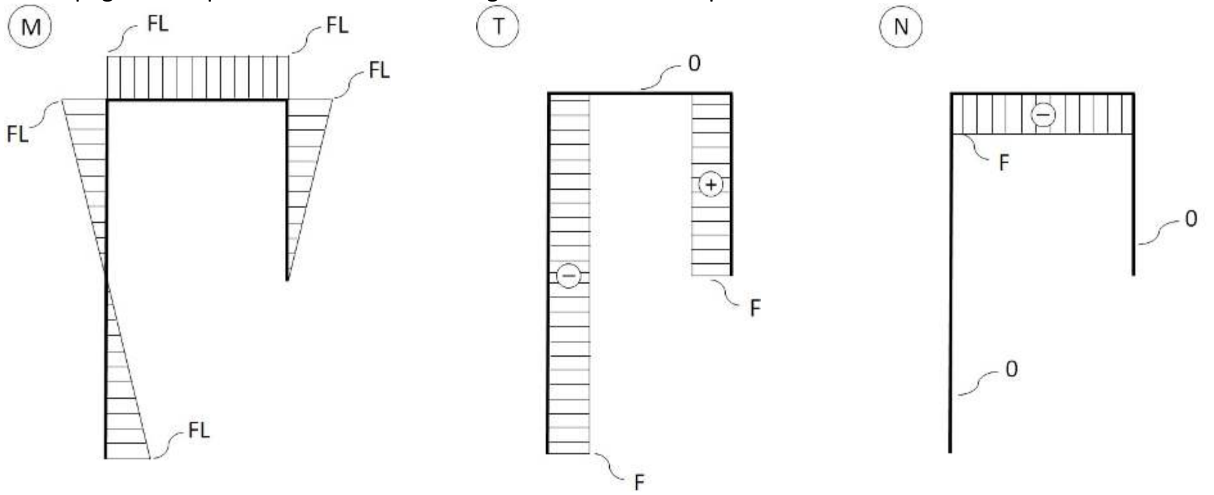
Le equazioni di equilibrio sono date da

$$N(z) = 0$$
$$T(z) + F = 0$$
$$M(z) + F \cdot (z - L) = 0$$

da cui si ricava

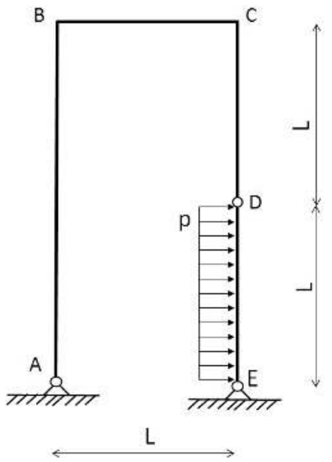
$$N(z) = 0$$
$$T(z) = -F$$
$$M(z) = F(L - z)$$

È così possibile disegnare i diagrammi di sollecitazione, riportati nella figura seguente. Si noti come i diagrammi sono riportati con riferimento agli assi della struttura. Il diagramma di momento flettente non necessita dell'indicazione del segno, ma deve essere comunque riportato dal lato corretto, rispetto al sistema di riferimento locale utilizzato. I diagrammi di sollecitazione tagliante e di sollecitazione assiale devono essere accompagnati sempre dall'indicazione del segno assunto dalle rispettive sollecitazioni.

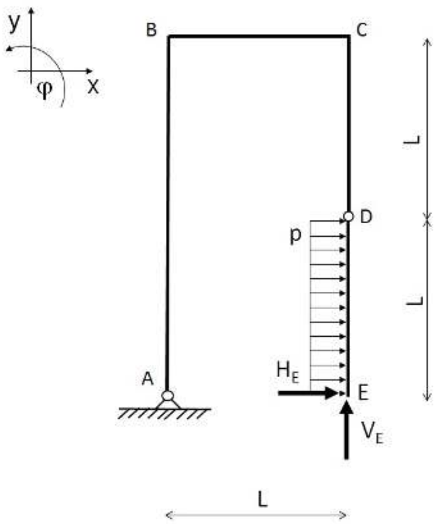


5. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la struttura indicata in figura.



Per la determinazione dell'andamento delle sollecitazioni M, T nel tratto D-E si possono utilizzare i risultati ottenuti nello svolgimento dell'esercizio 2, essendo i regimi flessionale e tagliante dei due casi identici. Eliminando il vincolo in E e introducendo le componenti statiche, queste si possono determinare con due equazioni di equilibrio di momento rispetto ai punti D e A, rispettivamente:



$$pL \cdot \frac{L}{2} + H_E \cdot L = 0$$

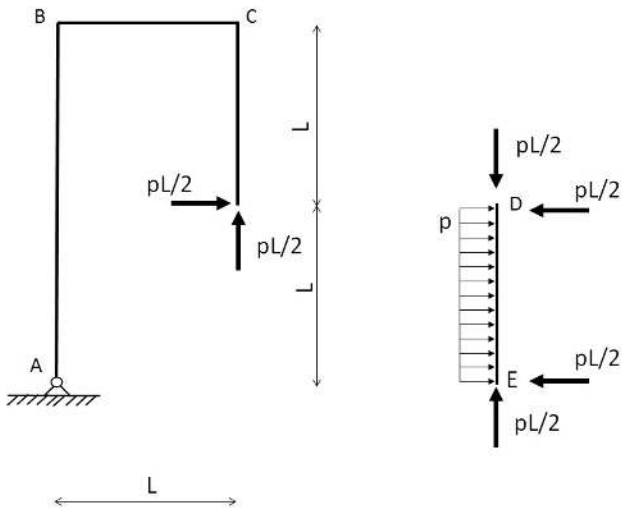
$$-pL \cdot \frac{L}{2} + V_E \cdot L = 0$$

da cui si ricava:

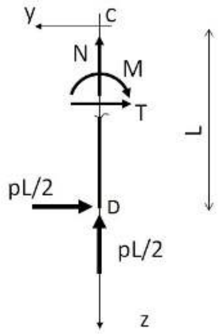
$$H_E = -\frac{pL}{2}$$

$$V_E = \frac{pL}{2}$$

Considerando le mutue reazioni scambiate attraverso la cerniera interna D, le condizioni di equilibrio per la sottostruttura D-E consentono di determinare le azioni che questa esercita sulla rimanente parte di struttura.



Il metodo diretto di calcolo delle componenti M, T, N sul tratto C-D si ottiene considerando la seguente sottostruttura, dalla quale si ricava:



$$N(z)+\frac{pL}{2}=0$$
$$T(z)+\frac{pL}{2}=0$$
$$M(z)-\frac{pL}{2}\cdot(L-z)=0$$

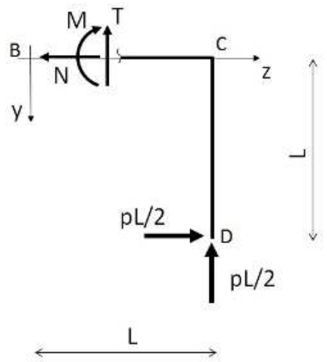
ottenendo, di conseguenza:

$$N(z)=-\frac{pL}{2}$$
$$T(z)=-\frac{pL}{2}$$
$$M(z)=\frac{pL}{2}\cdot(L-z)$$

In particolare, in corrispondenza della sezione adiacente a C il momento flettente è pari a:

$$M(0)=\frac{pL^2}{2}$$

In modo del tutto similare si ottiene l'andamento delle sollecitazioni nel tratto B-C, considerando l'equilibrio della sottostruttura indicata nella figura seguente.



Le relazioni di equilibrio, in questo caso, risultano:

$$N(z)-\frac{pL}{2}=0$$
$$T(z)+\frac{pL}{2}=0$$
$$M(z)-\frac{pL}{2}\cdot L-\frac{pL}{2}\cdot(L-z)=0$$

ricavando le seguenti relazioni

$$N(z) = \frac{pL}{2}$$

$$T(z) = -\frac{pL}{2}$$

$$M(z) = \frac{pL}{2} \cdot L + \frac{pL}{2} \cdot (L - z) = 0$$

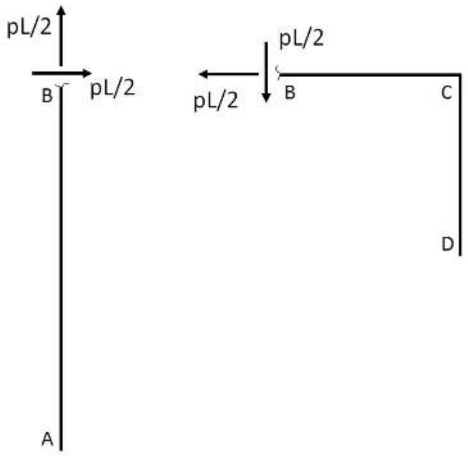
Il momento in corrispondenza della sezione adiacente al punto B è pari a:

$$M(0) = pL^2$$

Il diagramma di momento nel tratto A-B si può ricostruire immediatamente partendo da quest'ultimo valore, notando che esso deve avere andamento lineare e valore nullo nella sezione adiacente alla cerniera in A. Considerando che l'andamento conseguente è decrescente, il valore del taglio sarà pari a:

$$T(z) = -\frac{pL^2}{2L} = -\frac{pL}{2}$$

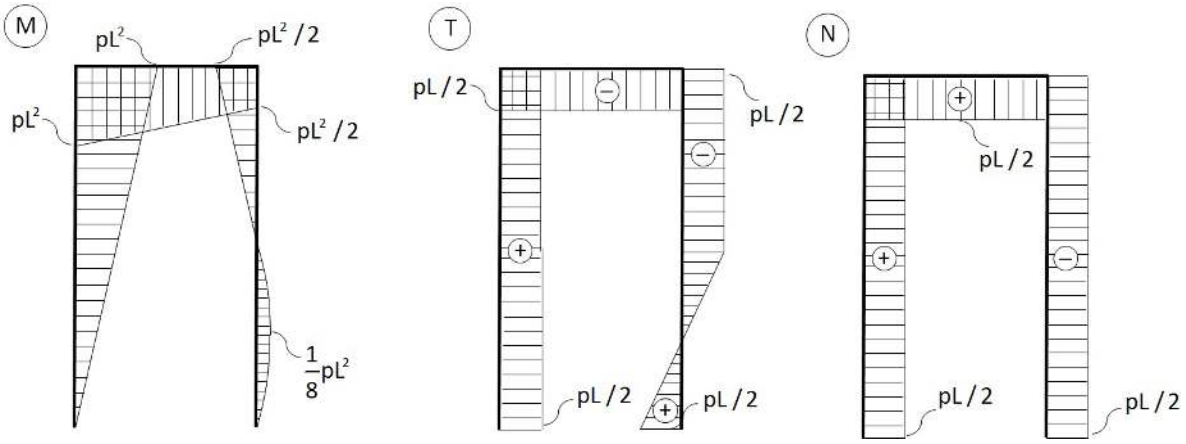
Il valore dello sforzo normale si può dedurre da quello del taglio agente nel tratto B-C in corrispondenza della sezione adiacente a B, secondo lo schema logico che considera l'equilibrio nel punto B:



Si nota come lo sforzo assiale agente sul tratto A-B è costante e pari a:

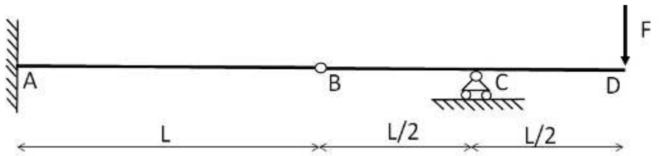
$$N(z) = \frac{pL}{2}$$

I risultati ottenuti con tali ragionamenti sono ovviamente coerenti con quelli deducibili dal metodo di calcolo diretto I diagrammi di sollecitazione sono riportati di seguito:

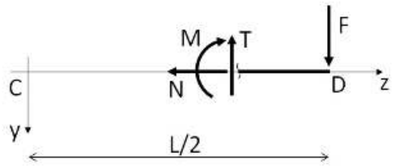


6. CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI CON METODO DIRETTO

Determinare le componenti di sollecitazione N, T, M per la struttura indicata in figura.



Considerata una sezione intermedia del tratto C-D l'equilibrio della sottostruttura rappresentata nella figura seguente consente di ricavare l'andamento delle componenti di sollecitazione:



$$N(z)=0$$
$$T(z)-F=0$$
$$M(z)+F\cdot\left(\frac{L}{2}-z\right)=0$$

ottenendo

$$N(z)=0$$
$$T(z)=F$$
$$M(z)=F\cdot\left(z-\frac{L}{2}\right)$$

La determinazione del diagramma di sollecitazione assiale rappresenta un problema elementare, essendo nullo in tutte le sezioni della struttura. Per quanto riguarda la determinazione del diagramma di momento flettente, si osserva che dovendo avere andamento lineare nel tratto A-C, il valore ricavato dalla relazione precedente per la sezione in C:

$$M=-\frac{FL}{2}$$

e il valore necessariamente nullo nella cerniera interna presente in B, consentono di tracciare il diagramma e di trovare il valore nella sezione adiacente all'incastro con una semplice proporzione:

$$M=\frac{FL}{2}\cdot\frac{L}{L/2}=FL$$

Il diagramma di taglio si può ottenere per derivazione da quello di momento, nel tratto A-B e B-C

$$T=-\frac{FL}{L}=-\frac{FL/2}{L/2}=-F$$

e nel tratto C-D

$$T=\frac{FL/2}{L/2}=F$$

Si noti come la discontinuità nel diagramma della sollecitazione di taglio presente in corrispondenza della sezione C (pari a 2F) è determinata dal valore della reazione verticale. I diagrammi del momento flettente e della sollecitazione tagliante sono riportati di seguito, omettendo il diagramma dello sforzo assiale che risulta nullo in ogni sezione della struttura.