Question **1**

Partially correct

Flag question

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il trapezoide

$$D = \{x \in [0,8] : 0 \le y \le 4\sqrt{\log(x+1)}\}.$$

attorno all'asse delle x.

[Per qualcuno potrà essere utile ricordare che $\int \log x \, dx = x \log x - x + \text{cost}$.

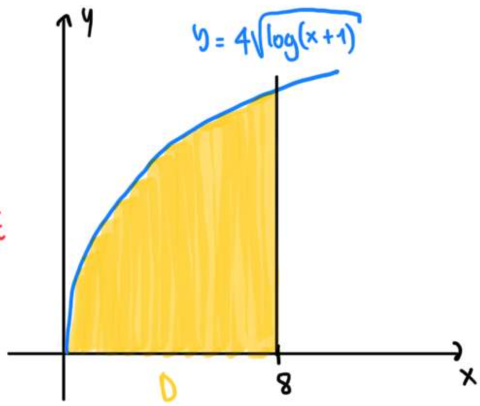
Answer: 29.5652 ✖

The correct answer is: 591.8771

Comment:
Formula iniziale parzialmente corretta

$D = \{ x \in [0,8] , 0 \le y \le 4\sqrt{\log(x+1)}$

CALCOLARE VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE X



SOL. USO LA FORMULA PER IL VOLUME DI SOLIDI DI ROTAZIONE (PAPPO - GULDINO):

$$\boxed{\begin{aligned} Vol(\Omega) &= 2\pi \cdot x_0 \cdot Area(D) \\ &= 2\pi \frac{\int_D y \, dy \, dx}{Area(D)} Area(D) = 2\pi \int_D y \, dy \, dx \end{aligned}}$$

$$2\pi \int_0^8 \int_0^{4\sqrt{\log(x+1)}} y \, dy \, dx = 2\pi \int_0^8 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{4\sqrt{\log(x+1)}} dx = 2\pi \int_0^8 \frac{1}{2} \cdot 16 \log(x+1) \, dx$$

$$= \pi \int_0^8 16 \log(x+1) \, dx = 16\pi \left[(x+1)\log(x+1) - x\right]_0^8 = 16\pi \left[9 \log 9 - 8 - 0\right]$$

$$= 16\pi \left[9 \log 9 - 8\right] = 591.8771$$ ✓

Question **2**
Partially correct
Flag question

Sia

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{|y|}}{x^4 + y\sqrt{|y|}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare, se esiste, la derivata direzionale di f in $(0,0)$ rispetto al vettore $u = (1,3)$.

Esprimere il risultato troncando a 4 decimali. [Se non esiste scrivere -1000]

Answer: 1 ✖

Facciamo ad esempio la derivata direzionale rispetto al vettore $(1,2)$.

$D_{(1,2)}f(0,0) := \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t(1,2)) - f(0,0)}{t}$.

Si ha

$$\frac{f(t(1,2)) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{\sqrt{2}t^2\sqrt{|t|}}{t^4 + 2\sqrt{2}t\sqrt{|t|}} \sim_0 \frac{t\sqrt{|t|}}{2t\sqrt{|t|}} \to \frac{1}{2}.$$

The correct answer is: 0.3333

Comment:
Formula iniziale corretta

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt{y}}{x^4 + y\sqrt{|y|}} & \text{SE } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{SE } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CALCOLARE $D_v F(0,0)$, $v = (1,3)$

SOL. USO LA DEFINIZIONE DI DERIVATA DIREZIONALE

$$\boxed{D_v F(P) = \lim_{t\to 0} \frac{F(P+tv) - F(P)}{t}}$$

SOST. $(v_1, v_2) = (1,3)$

RACCOLGO t^2

$$\lim_{t\to 0} \frac{F((0,0) + t(v_1,v_2)) - F(0,0)}{t} = \frac{t^2 v_1^2 \sqrt{|t v_2|}}{t^5 v_1^5 + t^2 v_2 \sqrt{|t v_2|}} = \frac{t^2 1 \cdot \sqrt{3t}}{t^5 \cdot 1 + t^2\, 3\sqrt{3t}} = \frac{\sqrt{3t}}{t^3 + 3\sqrt{3t}}$$

TOLGO IL MODULO PERCHÉ L'ARGOMENTO DELLA RADICE È SEMPRE ≥ 0

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{t^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{\frac{1}{2}}\sqrt{3}}{t^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{t^{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

V

Question 3
Correct
Flag question

Sia $f(x,y) = (4/3)x^3 + 2x^2y - (1/2)x^2 + 1y^2 + 11$.

Riportare la somma delle coordinate dei punti critici moltiplicata per 1, troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. Se ad esempio i punti critici trovati fossero $(3.2, 1), (-2, 2), (-3, 0)$ nello spazio della risposta si scrive 1.2.

Answer: 0.25 ✖

The correct answer is: 0.5000

Comment:
ok!

$$F(x,y) = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2y - \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 11$$

SOL. 1. CALCOLO IL GRADIENTE

$$-\ \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2y - \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 11\right) = 4x^2 + 4xy - x$$

$$-\ \frac{d}{dy}\left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2y - \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 11\right) = 2x^2 + 2y$$

$$\Rightarrow \nabla F(x,y) = \left(4x^2 + 4xy - x,\ 2x^2 + 2y\right)$$

PER $x \neq 0$: $(0,0)$ E' OVVIAMENTE UN PUNTO CRITICO

$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy - x = 0 \\ 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x^3 - x = 0 \\ y = -x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(4x - 4x^2 - 1) = 0 \\ y = -x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x - 4x^2 - 1 = 0 \\ y = -x^2 \end{cases}$$

$$-4x^2 + 4x - 1 = 0 \qquad \Delta = 16 - 16 = 0 \qquad \rightarrow \text{SOL}: -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

PER $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ PUNTI CRITICI: $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

RISPOSTA: $0 + 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ √

Question 4
Correct
Flag question

Nell'esercizio precedente, qual è la natura dell'unico punto critico la cui somma delle due coordinate è uguale a 0?

Attenzione: si perde il 25% del punteggio di questo esercizio con risposta errata.

Select one:
- massimo locale
- minimo locale
- sella ✔
- Non voglio rispondere

Your answer is correct.

The correct answer is: sella

$$\nabla f(x,y) = \left(4x^2 + 4xy - x,\ 2x^2 + 2y\right)$$

Sol. DETERMINO LA MATRICE HESSIANA

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla f_1(x,y) = 8x + 4y - 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \nabla f_1(x,y) = 4x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla f_2(x,y) = 4x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \nabla f_2(x,y) = 2$$

$$\Rightarrow \text{Hess } f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x+4y-1 & 4x \\ 4x & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \text{Hess } f(0,0) = -2$$

POICHÉ $\det \text{Hess } f(0,0) = -2 < 0$, $(0,0)$ È UN PUNTO DI SELLA √

Question 5
Correct
Flag question

Una persona è dispersa durante una gita sui colli; il percorso si è svolto per il 71% in collina coperta da boschi e per il 29% in collina priva di alta vegetazione. Un drone, utilizzato per le ricerche, riesce ad individuare una persona su una zona coperta da alberi con probabilità del 30%, in una zona priva di boscaglia con probabilità del 69%.

1) Qual è la probabilità che la persona venga individuata? Nello spazio della risposta riportare il valore ottenuto troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. il Risultato va espresso come un numero tra 0 e 1 non in percentuale (es. 0.26 e non 26%).

Answer: 0.4131 ✔

The correct answer is: 0.4131

B = "boschi" $\qquad P(B) = 0.71$

R = "radura" (cioè zona priva di alta vegetazione) $\qquad P(R) = 0.29$

T = "la persona viene trovata" $\qquad P(T|B) = 0.3$

$P(T|R) = 0.69$

$P(T)$?

Sol. $P(T) = P(T|B)P(B) + P(T|R)\,P(R)$

$$= 0.3 \times 0.71 + 0.69 \times 0.29 = 0.4131$$ √

Question **6**
Correct
Flag question

Una persona è dispersa durante una gita sui colli; il percorso si è svolto per il 71% in collina coperta da boschi e per il 29% in collina priva di alta vegetazione. Un drone, utilizzato per le ricerche, riesce ad individuare una persona su una zona coperta da alberi con probabilità del 30%, in una zona priva di boscaglia con probabilità del 69%.

2) Il drone ritrova la persona. Qual è la probabilità che sia stata ritrovata nella zona boscosa? Nello spazio della risposta riportare il valore ottenuto troncando il numero trovato a 4 cifre dopo la virgola. il Risultato va espresso come un numero tra 0 e 1 non in percentuale (es. 0.26 e non 26%).

Answer: 0.5156 ✔

The correct answer is: 0.5156

$P(B|T)$?

Sol. USO LA FORMULA DI INVERSIONE

$$\boxed{P(B|T) = \frac{P(T|B)\cdot P(B)}{P(T)}}$$

V

$$P(B|T) = \frac{P(T|B)P(B)}{P(T)} = \frac{0.3 \times 0.71}{0.5156} = 0.5156$$

Question **7**
Correct
Flag question

Si suppone che la densità di popolazione in un paese di forma quadrata, che assumiamo coincidente con $[0,1]\times[0,1]$, l'unità di misura essendo in chilometri, sia una variabile congiunta (X,Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) \text{ se } (x,y)\in[0,1]\times[0,1], \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

1) Calcolare la probabilità $P(X \leq Y^2)$. Troncare il risultato a 4 decimali dopo la virgola.

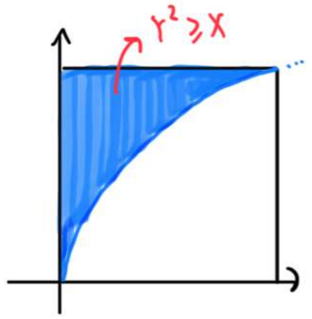
Answer: 0.1214 ✔

The correct answer is: 0.1214

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) & \text{se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$P(X \leq Y^2)$?

Sol. 1, DISEGNO IL DOMINIO



$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y^2 , y \in [0,1]\}$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{6}{5}x^2(3-y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{6}{5}\frac{x^3}{3}(3-y)\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \left[\frac{2}{5}x^3(3-y)\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \frac{2}{5}y^6(3-y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{6}{5}y^6 - \frac{2}{5}y^7\, dy = \left[\frac{6}{5}\frac{y^7}{7} - \frac{2}{5}\frac{y^8}{8}\right]_0^1 = \left[\frac{6}{35}y^7 - \frac{1}{20}y^8\right]_0^1 = \frac{6}{35} - \frac{1}{20} = \frac{17}{140} = 0.1214$$

V

Question 8
Correct
Flag question

Si suppone che la densità di popolazione in un paese di forma quadrata, che assumiamo coincidente con $[0,1] \times [0,1]$, l'unità di misura essendo in chilometri, sia una variabile congiunta (X,Y) di densità

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) \text{ se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ 0 \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

2) Sia f_Y la densità marginale di Y. Calcolare $f_Y(1/8)$.

Answer: 1.15 ✔

The correct answer is: 1.1500

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}x^2(3-y) & \text{se } (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0 \end{cases}$$

2) SIA f_Y LA DENSITÀ MARGINALE. CALCOLARE $f_Y\left(\frac{1}{8}\right)$

SOL. LA DENSITÀ MARGINALE È DATA DA: (PROP. 9.21 p. 119)

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx}$$

POICHÉ $f_{X,Y}$ È NULLA OVUNQUE ECCETTO $[0,1] \times [0,1]$, CALCOLO L'INTEGRALE IN dx SU $[0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{6}{5}x^2(3-y)\,dx = (3-y)\left[\frac{6}{5}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = (3-y)\left(\frac{2}{5}x^3\right)_0^1 = (3-y)\frac{2}{5}$$

$$f_Y\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{5}\left(3-\frac{1}{8}\right) = 1.15$$

V

Question **9**
Incorrect
Flag question

Si lancia una moneta che dà Testa con probabilità 0.4 per 601 volte. Usando una opportuna variabile continua, approssimare la probabilità che la moneta dia Testa per al massimo 228 volte (cioè da 0 a 228 volte).

Scrivere la formula sul foglio in funzione di $\Phi(y)$ per un opportuno $y \geq 0$. Approssimare (non troncare) y con un numero a due decimali dopo la virgola e usare la tabella qui sotto. Troncare il risultato a 4 decimali.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0,1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0,2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0,3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0,4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0,5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0,6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0,7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0,8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0,9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1,0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85.314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1,1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1,2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1,3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1,4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1,5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1,6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1,7	0.95543	0.95637	0.95.728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1,8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1,9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2,0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2,1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2,2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2,3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2,4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2,5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2,6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2,7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2,8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2,9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3,0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3,1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3,2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3,3	0.99952	0199953	0.99957	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3,4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976

Answer: 0.4180

The correct answer is: 0.1509

$P(T) = 0.4$

$n = 601$

$a \leq 228$

Sol. USIAMO UNA V.A BINOMIALE: $B(601, 0.4)$

$$\sum_{k=0}^{228} \binom{601}{k} (0.4)^k (0.6)^{601-k}$$

APPROSSIMIAMO LA BINOMIALE IN DISTRIBUZIONE:

$$\boxed{P(B(n,p) \leq X) \approx P(N(np, np(1-p)) \leq X)}$$

$N = np = 240.4$

$\sigma^2 = np(1-p) = 144.24$

$$P(240.4 + \sqrt{144.24}\, Z \leq 228)$$

$$P\left(Z \leq \frac{228 - 240.24}{\sqrt{144.24}}\right) = \Phi\left(\frac{228-240.24}{\sqrt{144.24}}\right) = \Phi(-1.02) = 1 - \Phi(1.02)$$

$= 0.1539$ V

Question **10**

Correct

Flag question

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con

$f(0,1) = 0$, $\partial_x f(0,1) = 2$, $\partial_y f(0,1) = -5$.

Determinare l'ordinata z nel punto $(0.1, 0.9)$ del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, f(0,1))$

Select one:

- a. 0.7 ✔
- b. 0.6
- c. 0.23
- d. 0.83
- e. altro
- f. non voglio rispondere

Your answer is correct.

$f(0,1) + \partial_x f(0,1) \times (0.1-0) + \partial_y f(0,1) \times (0.9-1) = 2(0.1) - 5(-0.1) = 0.7$

The correct answer is: 0.7

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad C^1$

$F(0,1) = 0$
$\partial_x F(0,1) = 2$
$\partial_y F(0,1) = -5$

DETERMINARE ORDINATA Z NEL PUNTO $(0.1, 0.9)$

SOL. APPLICO LA LINEARIZZAZIONE DI F IN P:

$$\boxed{L(x) = F(P) + \nabla F(P)\big((x,y) - P\big)}$$

$$L(0.1, 0.9) = F(0,1) + \nabla F(0,1)\big((0.1, 0.9) - (0,1)\big)$$

$$= 0 + (2,-5)\begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix} = 2 \times 0.1 + (-5) \times (-0.1) = 0.7$$

V

Question 11
Not answered
Flag question

Sia X variabile aleatoria di valore atteso 50 e varianza 25. Calcolare il valore atteso di $(X-55)^2$.

Answer:

The correct answer is: 50

$E[X] = 50$

$\sigma^2 = 25$

$E[(X-55)^2] = ?$

SOL. 1. MANIPOLO L'ESPRESSIONE DEL VALORE ATTESO $E[(X-55)^2]$

$$E[(X-55)^2] = E[X^2 - 110X + 3025]$$

LINEARITÀ DEL VALORE ATTESO

$$= E[X^2] - 110\,E[X] + 3025$$

2. MI RESTA DA CALCOLARE $E[X^2]$

SO CHE $\sigma^2 = E[X^2] - E^2[X] = 25$

$E[X^2] - 50^2 = 25 \rightarrow E[X^2] = 25 + 50^2 = 2525$

$\Rightarrow E[X^2 - 110X + 3025] = 2525 - 110 \cdot 50 + 3025 = 50$ V