Dispensa esercizi 1 – A.A. 2024/2025

prof. Daniele Desideri

Padova, settembre 2024

Cap. 1 RETI DI BIPOLI IN REGIME STAZIONARIO

Esercizio 1. *Leggi di Kirchhoff*

Esercizio 2. *Serie di due resistori ideali e casi particolari/limite*

Esercizio 3. *Parallelo di due resistori ideali e casi particolari/limite*

Esercizio 4. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*

Esercizio 5. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*

Esercizio 6. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*

Esercizio 7. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*

Esercizio 8. *Partitore di tensione resistivo*

Esercizio 9. *Partitore di corrente resistivo*

Esercizio 10. *Sovrapposizione degli effetti*

Esercizio 11. *Sovrapposizione degli effetti*

Esercizio 12. *Correnti di anello*

Esercizio 13. *Correnti di anello*

Esercizio 14. *Potenziali ai nodi*

Esercizio 15. *Potenziali ai nodi*

Esercizio 16. *Teorema di sostituzione*

Esercizio 17. *Teorema di sostituzione*

Esercizio 18. *Teorema di Thevenin*

Esercizio 19. *Teorema di Thevenin*

Esercizio 20. *Teorema di Norton*

Esercizio 21. *Teorema di Norton*

Esercizio 22. *Esercizio*

Esercizio 23. *Esercizio*

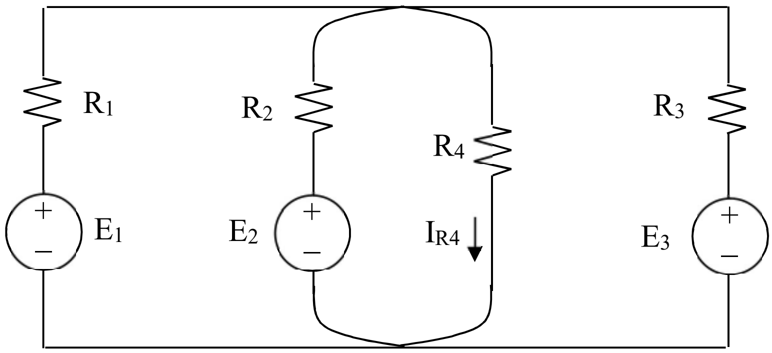
Esercizio 24. *Esercizio*

Esercizio 25. *Esercizio*

Cap. 1 RETI DI BIPOLI IN REGIME STAZIONARIO

Esercizio 1. *Leggi di Kirchhoff*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con E_1 = 20 V, E_2 = 40 V, E_3 = 80 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω, R_3 = 10 Ω, R_4 = 10 Ω.

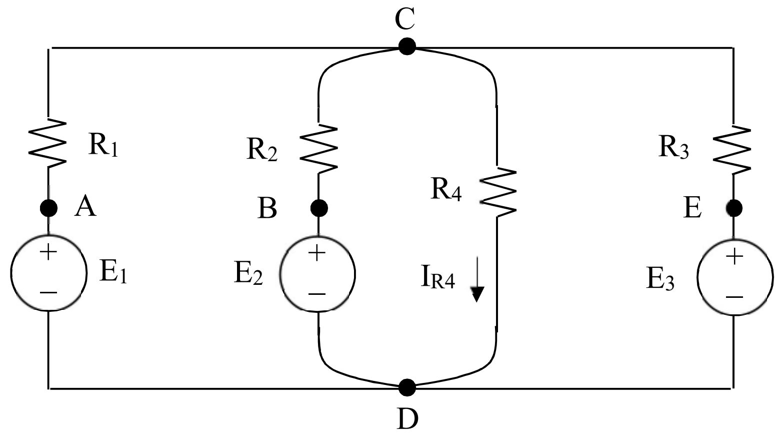


Calcolare la corrente I_{R4} indicata in figura.

Risultato: I_{R4} = 3,5 A.

Soluzione

La rete è una rete lineare a regime stazionario. È una rete che ha un grafo piano. Si risolve la rete scrivendo il sistema di 2ℓ equazioni in 2ℓ incognite. Con le leggi di Kirchhoff delle tensioni (LKT) e le leggi di Kirchhoff delle correnti (LKC) si scrivono le ℓ equazioni topologiche e a queste si aggiungono le ℓ equazioni tipologiche, cioè le equazioni dei bipoli presenti della rete. In merito al numero di tali equazioni, nella rete sono presenti 3 generatori ideali di tensione e 4 resistori ideali: sono 7 elementi a due morsetti (ℓ=7). Tali 7 bipoli sono collegati fra di loro in 5 nodi (n = 5), indicati con A, B, C, D ed E nella figura seguente. Considerando come incognite le tensioni e le correnti dei 7 bipoli, si ha un sistema di 2ℓ = 14 equazioni in 14 incognite. Con le LKC si scrivono n – 1 = 4 equazioni indipendenti; con le LKT si scrivono m = ℓ – n + 1 = 3 equazioni indipendenti; le equazioni dei bipoli sono le rimanenti ℓ = 7 equazioni indipendenti del sistema.



Si mettono i riferimenti.

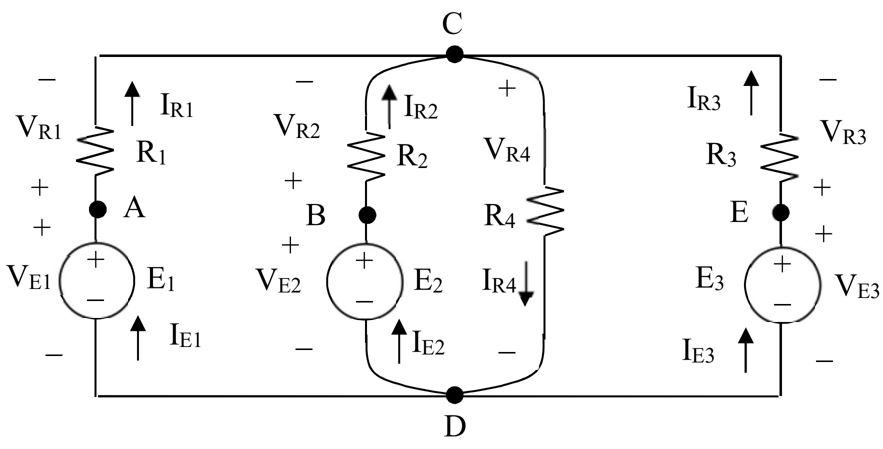
Per ciascun generatore ideale di tensione vale la relazione $V = E, \forall I$, con riferimento + della tensione sul terminale dalla parte del + del simbolo. Con i riferimenti delle tensioni V_{E1}, V_{E2}, V_{E3}, si sceglie di usare la convenzione dei generatori per i generatori ideali di tensione: si hanno così i riferimenti per le correnti I_{E1}, I_{E2}, I_{E3}. I riferimenti sono indicati nella figura seguente.

Il resistore ideale avente resistenza R_1 ha in comune con il generatore ideale di tensione avente tensione impressa E_1 il nodo A e nessun altro bipolo è collegato in A. Pertanto, per semplicità, si sceglie il riferimento di corrente per il resistore ideale avente resistenza R_1 (I_{R1}) in modo che, applicando la LKC al nodo A, risulta che sono uguali, con i riferimenti scelti, le correnti I_{R1} e I_{E1}. Il riferimento I_{R1} è indicato nella figura seguente. Si procede allo stesso modo per la scelta dei riferimenti delle correnti I_{R2} e I_{R3}.

Per il resistore ideale avente resistenza R_4 si tiene il riferimento di corrente di figura: I_{R4}.

Per tutti i resistori ideali, si adotta la convenzione degli utilizzatori. Si ottengono così i riferimenti per le tensioni dei 4 resistori ideali.

Nella figura seguente sono riportati i riferimenti così introdotti per le tensioni e correnti dei bipoli della rete.



È una rete avente grafo piano. Si scrivono le LKC su quattro dei cinque nodi: ad esempio, si scelgono i nodi A, B, C, E. Per le LKT, dato che la rete è piana, cioè ha grafo piano, si scrivono le LKT sugli anelli. Per l'identificazione degli anelli, si può passare al grafo della rete, ma per semplicità si lavora direttamente sulla rete e si dà tale grafo per sottointeso, disegnato con nodi e lati del grafo disposti in modo analogo a come sono disposti nodi e bipoli della rappresentazione usata per la rete. La rete ha tre anelli.

Con i riferimenti di figura si scrivono le seguenti equazioni.

LKC: $I_{E1} - I_{R1} = 0$

LKC: $I_{E2} - I_{R2} = 0$

LKC: $I_{R1} + I_{R2} - I_{R4} + I_{R3} = 0$

LKC: $I_{E3} - I_{R3} = 0$

LKT: $- V_{R2} + V_{E2} - V_{E1} + V_{R1} = 0$

LKT: $V_{R4} - V_{E2} + V_{R2} = 0$

LKT: $- V_{R3} + V_{E3} - V_{R4} = 0$

Infine si scrivono le equazioni dei 7 bipoli, con i riferimenti di figura.

$V_{R1} = R_1 I_{R1}$

$V_{R2} = R_2 I_{R2}$

$V_{R3} = R_3 I_{R3}$

$V_{R4} = R_4 I_{R4}$

$V_{E1} = E_1$

$V_{E2} = E_2$

$V_{E3} = E_3$

Soluzione del sistema.

Nelle equazioni LKT, si mettono le equazioni dei bipoli. Si ottiene:

$- R_2 I_{R2} + E_2 - E_1 + R_1 I_{R1} = 0$

$R_4 I_{R4} - E_2 + R_2 I_{R2} = 0$

$- R_3 I_{R3} + E_3 - R_4 I_{R4} = 0$

Da esse si ottiene:

$I_{R2} = (E_2 - E_1 + R_1 I_{R1}) / R_2$

$I_{R4} = (E_2 - R_2 I_{R2}) / R_4 = (E_1 - R_1 I_{R1}) / R_4$

$I_{R3} = (E_3 - R_4 I_{R4}) / R_3 = (E_3 - E_1 + R_1 I_{R1}) / R_3$

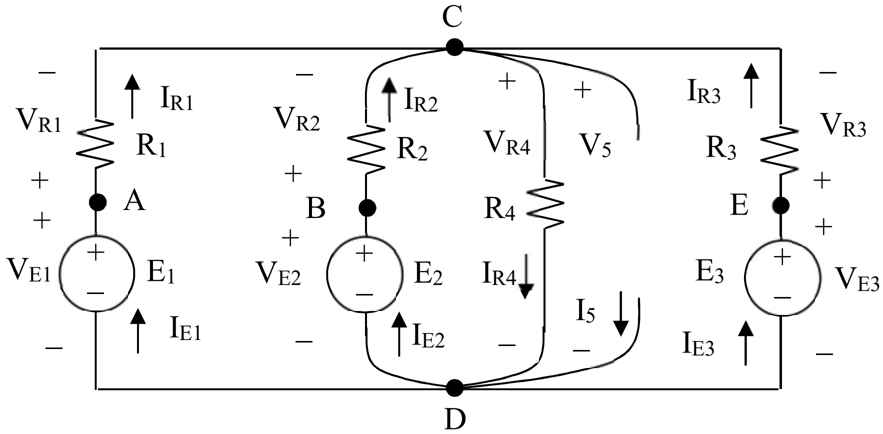
Dalla LKC: $I_{R1} + I_{R2} + I_{R3} - I_{R4} = 0$, utilizzando le relazioni di I_{R2}, I_{R3} e I_{R4} sopra trovate, si ottiene:

$I_{R1} + (E_2 - E_1 + R_1 I_{R1}) / R_2 + (E_3 - E_1 + R_1 I_{R1}) / R_3 - (E_1 - R_1 I_{R1}) / R_4 = 0$

Mettendo i valori, si ottiene: $I_{R1} = -1{,}5$ A.

Da cui: $I_{R2} = 0{,}5$ A; $I_{R3} = 4{,}5$ A; $I_{R4} = 3{,}5$ A.

Osservazione 1. Si modifica ora la rete nel modo seguente. Si aggiunge alla rete precedentemente analizzata un bipolo circuito aperto collegato fra i nodi C e D, come mostrato in figura. Per i bipoli si mantengono gli stessi riferimenti già utilizzati e si aggiungono i riferimenti del bipolo aggiunto (in figura indicati con V_5 e I_5).



Si può osservare che le LKT scritte precedentemente, cioè senza aggiungere il bipolo circuito aperto, si possono scrivere ancora, dato che le maglie che erano state individuate con la rete precedente, cioè senza il bipolo circuito aperto, sono maglie anche per la rete con aggiunto il bipolo circuito aperto. Avendo mantenuto gli stessi riferimenti, valgono le stesse LKT.

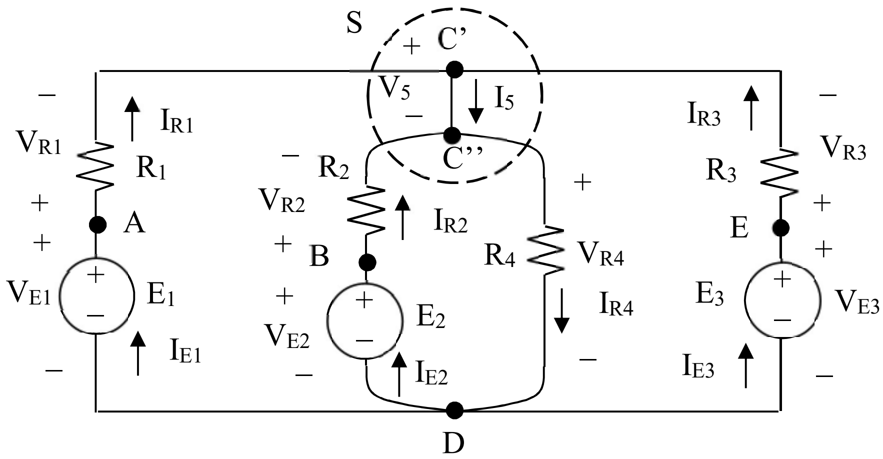
Anche le LKC scritte precedentemente, cioè senza il bipolo circuito aperto, valgono ancora, dato che il bipolo circuito aperto ha corrente nulla ($I_5 = 0$) e quindi aggiungere I_5 alle LKC scritte per la rete precedente non modifica la validità di tali equazioni.

I bipoli della rete precedente, cioè senza il circuito aperto, sono anche bipoli della rete con aggiunto il circuito aperto e quindi, con gli stessi riferimenti, valgono le stesse relazioni dei bipoli.

Pertanto le equazioni LKT, LKC ed equazioni dei bipoli della rete senza il circuito aperto costituiscono un sistema di equazioni che vale anche per la rete con aggiunto il bipolo circuito aperto. La soluzione di tale sistema fornisce la soluzione già indicata senza l'aggiunta del circuito aperto. L'aggiunta del bipolo circuito aperto non altera pertanto la soluzione già trovata della rete senza tale circuito aperto.

L'analisi è stata fatta considerando l'aggiungere un circuito aperto: si osserva che quanto illustrato si può esprimere anche considerando come rete di partenza la rete con il circuito aperto e considerando il togliere il circuito aperto.

Osservazione 2. Si modifica ora la rete nel modo seguente. Si considera la rete precedentemente analizzata (quella senza l'aggiunta alla rete di un circuito aperto collegato fra i nodi C e D) e al posto del nodo C si mette una coppia di nodi cortocircuitati tra di loro, che sono indicati con C' e C'' come mostrato in figura (C' è preso dove c'era C e C'' è vicino a C'). Quindi, al posto del nodo C si è cioè messo il bipolo cortocircuito di morsetti C’ e C’’ e i resistori ideali aventi resistenza R_1 e R_3 che avevano un morsetto in C ora lo hanno in C’ mentre i resistori ideali aventi resistenza R_2 e R_4 che avevano un morsetto in C ora lo hanno in C’’. Per i bipoli della rete si mantengono gli stessi riferimenti già utilizzati e si aggiungano i riferimenti del bipolo aggiunto che è il cortocircuito fra C’ e C’’ (in figura indicati con V_5 e I_5).



Si può osservare che le LKT scritte precedentemente, cioè con la rete in cui c’era il nodo C, si possono scrivere ancora, eventualmente aggiungendo, nei casi in cui è richiesto, la tensione V_5 del cortocircuito fra C’ e C’’, dato che le maglie che erano stato individuate con la rete precedente sono maglie anche per la rete modificata mettendo al posto del nodo C la coppia di nodi C’ e C’’ cortocircuitati tra di loro, eventualmente con l’aggiunta del bipolo cortocircuito. Dato che V_5 è pari a zero, aggiungere V_5 alle scritture LKT scritte per la rete precedente non modifica la validità di tali equazioni (si sono mantenuti gli stessi riferimenti).

Anche la LKC scritta precedentemente per il nodo C si può scrivere ancora con riferimento alla superficie S di figura, superficie che contiene C’ e C’’ e il bipolo cortocircuito di morsetti C’ e C’’. Le LKC relative agli altri nodi della rete restano invariate.

I bipoli della rete precedente, cioè della rete in cui c’era il nodo C, sono anche bipoli della rete con il cortocircuito fra C’ e C’’ e quindi, con gli stessi riferimenti, valgono le stesse relazioni dei bipoli.

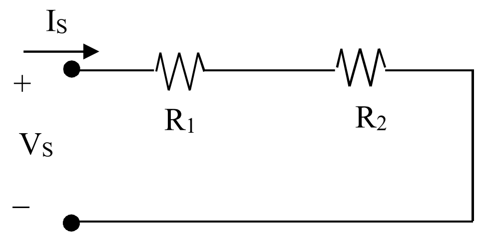
Pertanto le equazioni LKT, LKC ed equazioni dei bipoli della rete in cui c’era il nodo C costituiscono un sistema di equazioni che vale anche per la rete ottenuta nel modo mostrato, cioè mettendo al posto del nodo C la coppia di nodi C’ e C’’ cortocircuitati fra di loro. La soluzione di tale sistema fornisce la soluzione già indicata precedentemente per la rete in cui c’era il nodo C. La modifica indicata non altera pertanto la soluzione già trovata per la rete senza tale modifica.

L’analisi è stata fatta considerando il mettere al posto di un nodo una coppia di nodi cortocircuitati tra di loro: si osserva che quanto illustrato si può esprimere anche prendendo come rete di partenza la rete con i due nodi cortocircuitati tra di loro e considerando il mettere un solo nodo al posto di tale coppia di nodi cortocircuitati tra di loro.

Esercizio 2. *Serie di due resistori ideali e casi particolari/limite*

Esercizio 2a. *Serie di due resistori ideali*

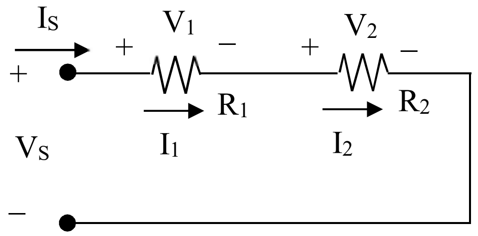
Si considera la serie di due resistori ideali.



Determinare il bipolo equivalente alla serie di due resistori ideali.

Soluzione

Si procede nel modo mostrato nella parte di teoria per la serie di resistori ideali. Si mettono i riferimenti per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli).



Con i riferimenti indicati si hanno le seguenti relazioni.

LKC: $I_S = I_1 = I_2$
LKT: $V_S = V_1 + V_2$
Equazioni dei bipoli: $V_1 = R_1\, I_1$; $V_2 = R_2\, I_2$.

Si ottiene: $I_1 = I_2 = I_S$; $V_S = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2)\, I_S = R_S\, I_S$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente alla serie è $V_S = (R_1 + R_2)\, I_S = R_S\, I_S$. Il bipolo equivalente è un resistore ideale avente resistenza $R_S = R_1 + R_2$.

Esercizio 2b. *Serie di un cortocircuito e un resistore ideale*

Determinare il bipolo equivalente alla serie di un cortocircuito e un resistore ideale.

Soluzione

Si ricorda che il cortocircuito si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con resistenza nulla. Si considera ancora la serie di due resistori ideali: il bipolo resistore 1 è un cortocircuito. Si mettono gli stessi riferimenti del caso precedente per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli). Restano invariate le relazioni relative alla LKC e LKT e la relazione del bipolo resistore 2. Si ha:

LKC: $I_S = I_1 = I_2$
LKT: $V_S = V_1 + V_2$

Equazioni dei bipoli: $V_1 = 0 \;\; \forall I_1$; $V_2 = R_2 I_2$

Si ottiene: $I_1 = I_2 = I_S$; $V_1 = 0$; $V_S = V_2$; $V_S = R_2 I_S = R_S I_S$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente alla serie è $V_S = R_2 I_S = R_S I_S$. Il bipolo equivalente è un resistore ideale avente resistenza $R_S = R_2$.

Esercizio 2c. *Serie di un cortocircuito e un circuito aperto*

Determinare il bipolo equivalente alla serie di un cortocircuito e un circuito aperto.

Soluzione

Si ricorda che il cortocircuito si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con resistenza nulla e il circuito aperto si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con conduttanza nulla. Si considera ancora la serie di due resistori ideali: il bipolo resistore 1 è un cortocircuito e il bipolo resistore 2 è un circuito aperto. Si mettono gli stessi riferimenti del caso iniziale, cioè della serie di due resistori ideali, per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli). Restano invariate le relazioni relative alla LKC e LKT. Si ha:

LKC: $I_S = I_1 = I_2$
LKT: $V_S = V_1 + V_2$
Equazioni dei bipoli: $V_1 = 0 \;\; \forall I_1$; $I_2 = 0 \;\; \forall V_2$.

Si ottiene: $I_1 = I_2 = I_S = 0$; $V_1 = 0$; $V_S = V_2$; $I_S = 0 \;\; \forall V_S$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente alla serie è $I_S = 0$, $\forall V_S$. Tale relazione è quella di un circuito aperto e quindi il bipolo equivalente è un circuito aperto.

Esercizio 2d. *Serie di un resistore ideale e un circuito aperto*

Determinare il bipolo equivalente alla serie di un resistore ideale e un circuito aperto.

Soluzione

Si ricorda che il circuito aperto si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con conduttanza nulla. Si considera ancora la serie di due resistori ideali: il bipolo resistore 2 è un circuito aperto. Si mettono gli stessi riferimenti del caso iniziale, cioè della serie di due resistori ideali, per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli). Restano invariate le relazioni relative alla LKC e LKT e la relazione del bipolo resistore 1. Si ha:
LKC: $I_S = I_1 = I_2$
LKT: $V_S = V_1 + V_2$
Equazioni dei bipoli: $V_1 = R_1 I_1$; $I_2 = 0 \;\; \forall V_2$.

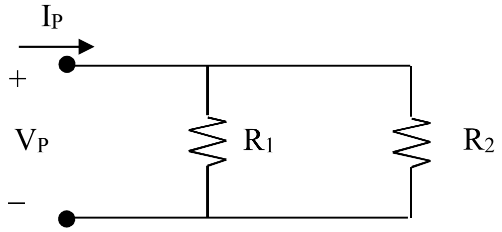
Si ottiene: $I_1 = I_2 = I_S = 0$; $V_1 = 0$; $V_S = V_2$; $I_S = 0 \;\; \forall V_S$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente alla serie è $I_S = 0$, $\forall V_S$. Tale relazione è quella di un circuito aperto e quindi il bipolo equivalente è un circuito aperto.

Esercizio 3. *Parallelo di due resistori ideali e casi particolari/limite*

Esercizio 3a. *Parallelo di due resistori ideali*

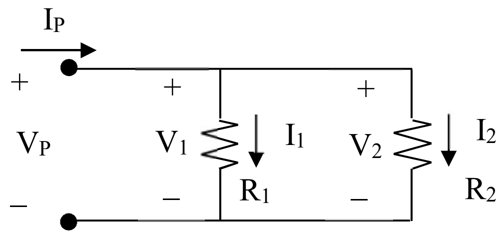
Si considera il parallelo di due resistori ideali.



Determinare il bipolo equivalente al parallelo di due resistori ideali.

Soluzione

Si procede nel modo mostrato nella parte di teoria per il parallelo di resistori ideali. Si mettono i riferimenti per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli).



Con i riferimenti indicati si hanno le seguenti relazioni.

LKC: $I_P = I_1 + I_2$
LKT: $V_P = V_1 = V_2$
Equazioni dei bipoli: $I_1 = G_1 V_1$; $I_2 = G_2 V_2$.

Si ottiene: $V_1 = V_2 = V_P$; $I_P = I_1 + I_2 = (G_1 + G_2) V_P = G_P V_P$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente al parallelo è $I_P = (G_1 + G_2) V_P = G_P V_P$. Il bipolo equivalente è un resistore ideale avente conduttanza $G_P = G_1 + G_2$.

Esercizio 3b. *Parallelo di un circuito aperto e un resistore ideale*

Determinare il bipolo equivalente al parallelo di un circuito aperto e un resistore ideale.

Soluzione

Si ricorda che il circuito aperto si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con conduttanza nulla. Si considera ancora il parallelo di due resistori ideali: il bipolo resistore 1 è un circuito aperto. Si mettono gli stessi riferimenti del caso precedente per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli). Restano invariate le relazioni relative alla LKC e LKT e la relazione del bipolo resistore 2. Si ha:

LKC: $I_P = I_1 + I_2$
LKT: $V_P = V_1 = V_2$

Equazioni dei bipoli: $I_1 = 0 \ \ \forall V_1$; $I_2 = G_2 V_2$.

Si ottiene: $V_1 = V_2 = V_P$; $I_1 = 0$; $I_P = I_2 = G_2 V_P = G_P V_P$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente al parallelo è $I_P = G_2 V_P = G_P V_P$. Il bipolo equivalente è un resistore ideale avente conduttanza $G_P = G_2$.

Esercizio 3c. *Parallelo di un circuito aperto e un cortocircuito*

Determinare il bipolo equivalente al parallelo di un circuito aperto e un cortocircuito.

Soluzione

Si ricorda che il circuito aperto si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con conduttanza nulla e il cortocircuito si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con resistenza nulla. Si considera ancora il parallelo di due resistori ideali: il bipolo resistore 1 è un circuito aperto e il bipolo resistore 2 è un cortocircuito. Si mettono gli stessi riferimenti del caso iniziale, cioè del parallelo di due resistori ideali, per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli). Restano invariate le relazioni relative alla LKC e LKT. Si ha:

LKC: $I_P = I_1 + I_2$
LKT: $V_P = V_1 = V_2$
Equazioni dei bipoli: $I_1 = 0 \ \ \forall V_1$; $V_2 = 0 \ \ \forall I_2$.

Si ottiene: $V_1 = V_2 = V_P = 0$; $I_1 = 0$; $I_P = I_2$; $V_P = 0 \ \ \forall I_P$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente al parallelo è $V_P = 0$, $\forall I_P$. Tale relazione è quella di un cortocircuito e quindi il bipolo equivalente è un cortocircuito.

Esercizio 3d. *Parallelo di un resistore ideale e un cortocircuito*

Determinare il bipolo equivalente al parallelo di un resistore ideale e un cortocircuito.

Soluzione

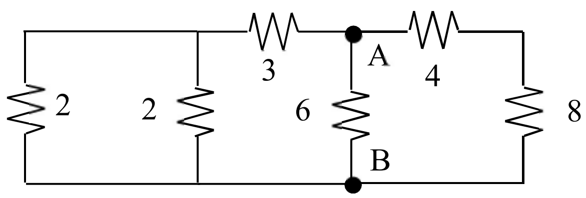
Si ricorda che il cortocircuito si può ottenere come caso particolare/limite di resistore ideale con resistenza nulla. Si considera ancora il parallelo di due resistori ideali: il bipolo resistore 2 è un cortocircuito. Si mettono gli stessi riferimenti del caso iniziale, cioè del parallelo di due resistori ideali, per le tensioni e le correnti e si scrivono le relazioni (LKT, LKC ed equazioni dei bipoli). Restano invariate le relazioni relative alla LKC e LKT e la relazione del bipolo resistore 1. Si ha:

LKC: $I_P = I_1 + I_2$
LKT: $V_P = V_1 = V_2$
Equazioni dei bipoli: $I_1 = G_1 V_1$; $V_2 = 0 \ \ \forall I_2$.

Si ottiene: $V_1 = V_2 = V_P = 0$; $I_1 = 0$; $I_P = I_2$; $V_P = 0 \ \ \forall I_P$.

Pertanto la relazione tensione-corrente del bipolo equivalente al parallelo è $V_P = 0$, $\forall I_P$. Tale relazione è quella di un cortocircuito e quindi il bipolo equivalente è un cortocircuito.

Esercizio 4. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*



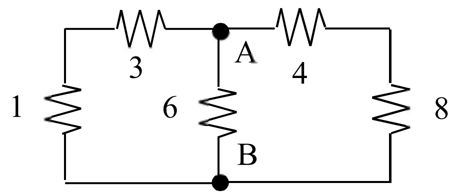
In figura sono indicati i valori delle singole resistenze in ohm. Calcolare la resistenza equivalente tra A e B.

Risultato: la resistenza equivalente è di 2 Ω.

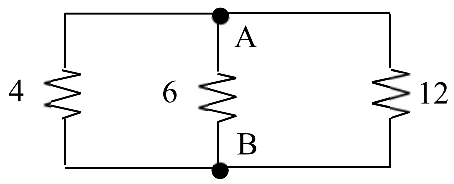
Soluzione

Si procede utilizzando operazioni di serie e parallelo di resistori ideali, fino ad avere una resistenza equivalente finale fra A e B.

Osservando la rete si vede che i due resistori ideali aventi entrambi resistenza pari a 2 Ω sono in parallelo e quindi equivalgono ad un resistore ideale avente resistenza pari a $\frac{2 \cdot 2}{2+2}$ = 1 Ω. Si ottiene la seguente rete.

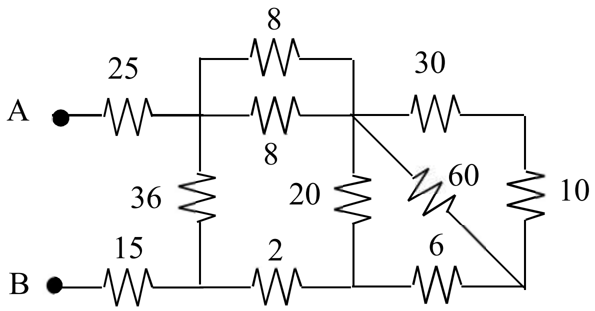


Sono in serie i due resistori ideali aventi rispettivamente resistenza pari a 4 Ω e 8 Ω: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 4+8= 12 Ω. Sono in serie i due resistori ideali aventi rispettivamente resistenza pari a 3 Ω e 1 Ω: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 3+1= 4 Ω. Si ottiene la seguente rete.



Si hanno così infine tre resistori ideali (aventi resistenza rispettivamente pari a 4 Ω, 6 Ω e 12 Ω) che sono in parallelo e poggiano tutti e tre sui nodi A e B. Si ottiene: $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = 2\ \Omega$.

Esercizio 5. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*



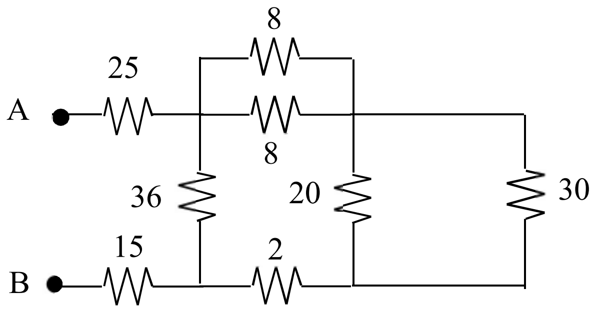
In figura sono indicati i valori delle singole resistenze in ohm. Calcolare la resistenza equivalente tra A e B.

Risultato: la resistenza equivalente è di 52 Ω.

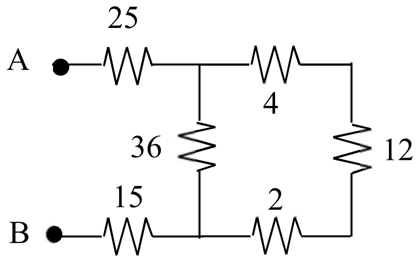
Soluzione

Si procede utilizzando operazioni di serie e parallelo di resistori ideali, fino ad avere una resistenza equivalente finale tra A e B.

I due resistori ideali aventi resistenza rispettivamente pari a 30 Ω e 10 Ω sono in serie e quindi equivalgono ad un resistore ideale avente resistenza pari a R_1 = 30+10 = 40 Ω. Il resistore ideale avente resistenza R_1 è in parallelo al resistore ideale avente resistenza pari a 60 Ω: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a $R_2 = \frac{40 \cdot 60}{40+60}$ = 24 Ω. Il resistore ideale avente resistenza R_2 è in serie al resistore ideale avente resistenza pari a 6 Ω: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a R_3 = 6+24 = 30 Ω. Si ottiene la seguente rete:



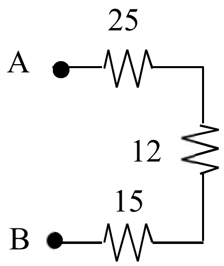
Il resistore ideale avente resistenza R_3 = 30 Ω è in parallelo al resistore ideale avente resistenza pari a 20 Ω: Si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a $R_4 = \frac{20 \cdot 30}{20+30} = 12$ Ω. Inoltre i due resistori ideali aventi entrambi resistenza pari a 8 Ω sono in parallelo: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a $R_5 = \frac{8 \cdot 8}{8+8} = 4$ Ω. Si ottiene la seguente rete:



Il resistore ideale avente resistenza $R_5 = 4\ \Omega$, il resistore ideale avente resistenza $R_4 = 12\ \Omega$ e il resistore ideale avente resistenza pari a $2\ \Omega$ sono tre resistori ideali in serie: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a $R_6 = 4+12+2 = 18\ \Omega$.

Si hanno così due resistori ideali (aventi resistenza rispettivamente pari a 18 Ω e 36 Ω) che sono in parallelo: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a $R_7 = \frac{18 \cdot 36}{18+36} = 12$ Ω.

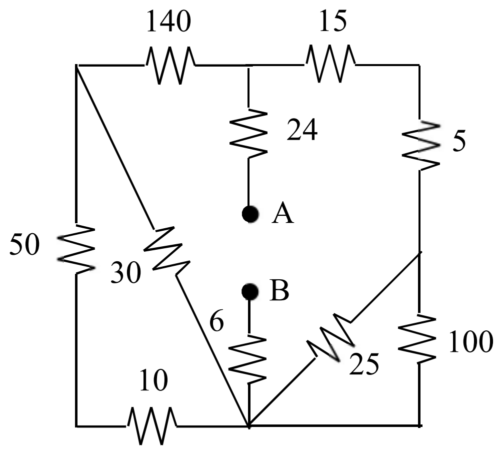
Si ottiene la seguente rete.



Si hanno così infine tre resistori ideali (aventi resistenza rispettivamente pari a 25 Ω, 12 Ω e 15 Ω) che sono in serie. Si ottiene una resistenza equivalente tra A e B pari a:

$R_{eq} = 25 + 12 + 15 = 52\ \Omega$.

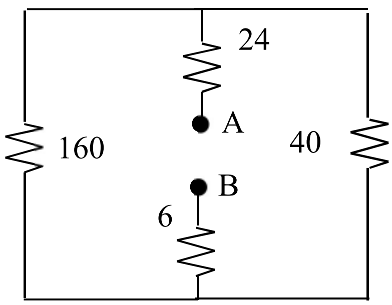
Esercizio 6. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*



In figura sono indicati i valori delle singole resistenze in ohm. Calcolare la resistenza equivalente tra A e B.

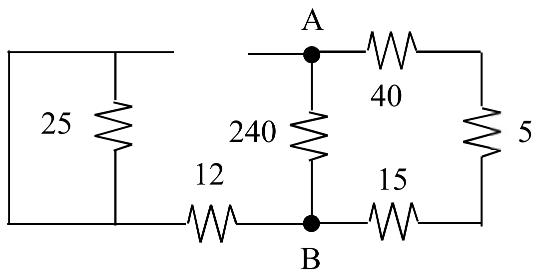
Risultato: la resistenza equivalente è di 62 Ω.

Soluzione
Si procede utilizzando operazioni di serie e parallelo di resistori ideali, fino ad avere una resistenza equivalente finale fra A e B.
Si calcola il parallelo fra i resistori ideali aventi resistenza rispettivamente pari a 25 Ω e 100 Ω, ottenendo un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 20 Ω. Si hanno così tre resistori ideali (aventi resistenza rispettivamente pari a 20 Ω, 5 Ω e 15 Ω) che sono in serie: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 40 Ω. Inoltre i due resistori ideali aventi resistenza rispettivamente pari a 50 Ω e 10 Ω sono in serie: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 60 Ω. Questo resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 60 Ω è in parallelo con il resistore ideale avente resistenza pari a 30 Ω presente nella rete: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 20 Ω. Quest'ultimo resistore ideale è in serie con il resistore ideale da 140 Ω: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 160 Ω. Si ottiene la seguente rete.



Si calcola quindi il parallelo fra i due resistori ideali aventi resistenza rispettivamente pari a 160 Ω e 40 Ω: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 32 Ω.
Si hanno così infine tre resistori ideali (aventi resistenza rispettivamente pari a 24 Ω, 32 Ω e 6 Ω) che sono in serie: si ottiene una resistenza equivalente tra A e B pari a 62 Ω.

Esercizio 7. *Resistenza equivalente di una rete di resistori*



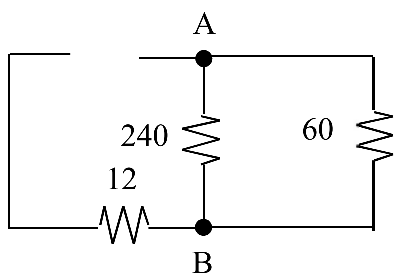
In figura sono indicati i valori delle singole resistenze in ohm. Calcolare la resistenza equivalente tra A e B.

Risultato: la resistenza equivalente è di 48 Ω.

Soluzione

I tre resistori ideali aventi resistenza rispettivamente pari a 40 Ω, 5 Ω e 15 Ω sono in serie: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a 60 Ω.

Il resistore ideale avente resistenza da 25 Ω ha in parallelo un cortocircuito: il bipolo equivalente al parallelo di un resistore ideale e un cortocircuito è un cortocircuito. Si ottiene la seguente rete.



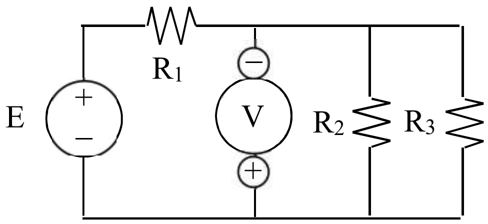
I due resistori ideali aventi resistenza rispettivamente pari a 240 Ω e 60 Ω sono in parallelo: si ottiene un resistore ideale equivalente avente resistenza pari a $\frac{60 \cdot 240}{60+} = 48\ \Omega$.

Si ha la serie di un cortocircuito e un resistore ideale avente resistenza 12 Ω e il bipolo equivalente è un resistore ideale avente resistenza 12 Ω. Inoltre, il bipolo equivalente alla serie di un circuito aperto e un resistore ideale avente resistenza pari a 12 Ω è un circuito aperto.

Si ha così il parallelo di un circuito aperto e un resistore ideale avente resistenza 48 Ω: si ottiene una resistenza equivalente tra A e B pari a 48 Ω.

Esercizio 8. *Partitore di tensione resistivo*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con E = 30 V, R_1 = 5 Ω, R_2 = 20 Ω, R_3 = 20 Ω.

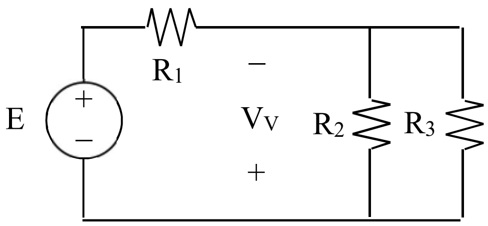


Calcolare il valore (V_V) misurato dal voltmetro ideale.

Risultato: V_V = – 20 V.

Soluzione

Il voltmetro ideale equivale a un circuito aperto e misura la tensione con il riferimento dal + al –. Si ottiene la seguente rete.



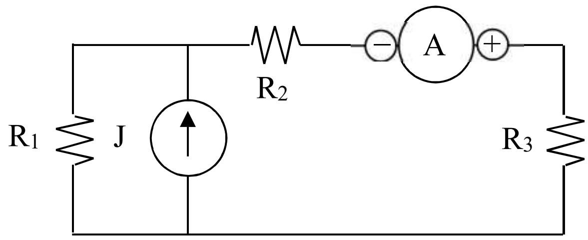
Le resistenze R_2 e R_3 sono in parallelo: si ottiene una resistenza equivalente pari a $R_A = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3}$ = 10 Ω.

Le resistenze R_1 e R_A sono in serie: la tensione ai capi della serie è quella del generatore ideale di tensione ed è quindi pari a E = 30 V. Applicando la formula del partitore di tensione resistivo, si ottiene la tensione ai capi del resistore ideale avente resistenza R_A: tale tensione è pari a $E\frac{R_A}{R_1+R_A}$ = 20 V, con riferimento che è quello connesso alla relazione del partitore di tensione resistivo e quindi in questo caso è opposto a quello misurato dal voltmetro ideale.

Si ha pertanto che V_V = – 20 V.

Esercizio 9. *Partitore di corrente resistivo*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con J = 6 A, R_1 = 5 Ω, R_2 = 5 Ω, R_3 = 5 Ω.

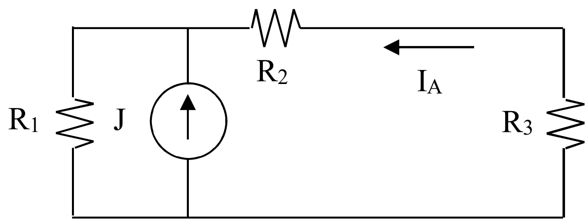


Calcolare il valore (I_A) misurato dall'amperometro ideale.

Risultato: I_A = – 2 A.

Soluzione

L'amperometro ideale equivale a un cortocircuito e misura la corrente con il riferimento dal + al –. Si ottiene la seguente rete:



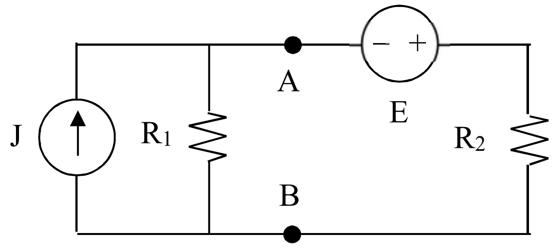
Le resistenze R_2 e R_3 sono in serie: si ottiene una resistenza equivalente pari a $R_A = R_2 + R_3 = 10\ \Omega$.

Le resistenze R_1 e R_A sono in parallelo: la corrente del parallelo è quella del generatore ideale di corrente ed è quindi pari a J = 6 A. Applicando la formula del partitore di corrente resistivo, si ottiene che la corrente che passa per il resistore ideale avente resistenza R_A, cioè per i resistori ideali aventi resistenza R_2 e R_3 che sono in serie, è pari a $J\frac{R_1}{R_1+R_A} = 2$ A, con riferimento che è quello connesso alla relazione del partitore di corrente resistivo e quindi in questo caso è opposto a quello misurato dall'amperometro ideale.

Si ha pertanto che I_A = – 2 A.

Esercizio 10. *Sovrapposizione degli effetti*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con J = 4 A, E = 20 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω.

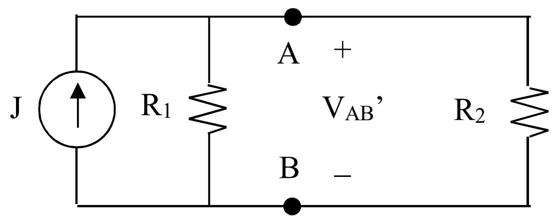


Calcolare la tensione V_{AB}.

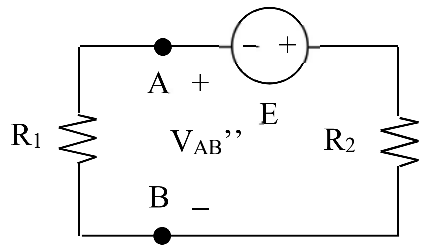
Risultato: V_{AB} = 10 V.

Soluzione

Si può calcolare la soluzione utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti.
Spegnendo il generatore ideale di tensione (significa sostituire il generatore ideale di tensione con un cortocircuito) e facendo agire il generatore ideale di corrente, si ottiene la seguente rete:



Le due resistenze R_1 e R_2 sono in parallelo: si ottiene una resistenza equivalente pari a $R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ = 5 Ω. La tensione V_{AB}' è: J R_A = 20 V.
Spegnendo ora il generatore ideale di corrente (significa sostituire il generatore ideale di corrente con un circuito aperto) e facendo agire il generatore ideale di tensione, si ottiene:

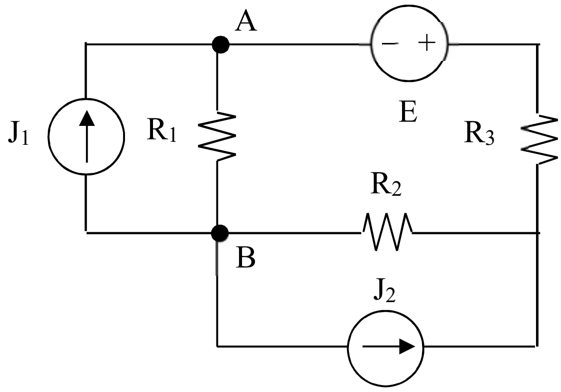


Le resistenze R_1 e R_2 sono in serie: la tensione ai capi della serie è quella del generatore ideale di tensione. Applicando la formula del partitore di tensione resistivo, si ottiene che la tensione ai capi del resistore ideale avente resistenza R_1 è: $E\frac{R_1}{R_1+R_2}$ = 10 V, con riferimento che è quello connesso alla relazione del partitore di tensione resistivo e quindi in questo caso è opposto a V_{AB}''. Si ha: V_{AB}'' = – 10 V.

Si ha quindi che V_{AB} = V_{AB}' + V_{AB}'' = 10 V.

Esercizio 11. *Sovrapposizione degli effetti*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con J_1 = 2 A, J_2 = 10 A, E = 40 V, R_1 = 60 Ω, R_2 = 20 Ω, R_3 = 40 Ω.



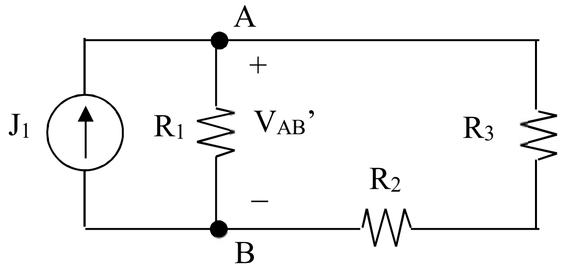
Calcolare la tensione V_{AB}.

Risultato: V_{AB} = 140 V.

Soluzione

Si può calcolare la soluzione utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti.

Facendo agire solo il generatore ideale di corrente J_1 e spegnendo il generatore ideale di tensione E e il generatore ideale di corrente J_2 (si ricorda che spegnere un generatore ideale di tensione significa sostituirlo con un cortocircuito mentre spegnere un generatore ideale di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto), si ottiene la seguente rete.

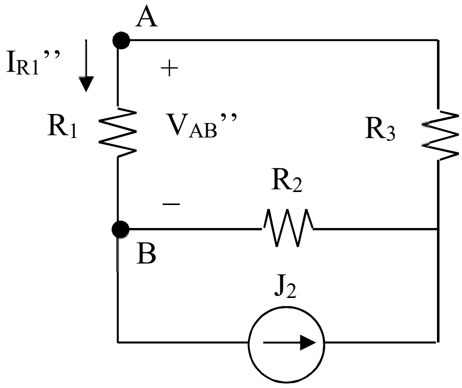


Le resistenze R_2 e R_3 sono in serie: si ottiene una resistenza equivalente $R_A = R_2 + R_3$ = 60 Ω.

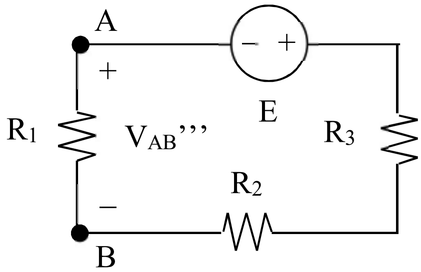
Le due resistenze R_A e R_1 sono in parallelo: si ottiene una resistenza equivalente $R_B = \frac{R_1 R_A}{R_1 + R_A}$ = 30 Ω.

La tensione V_{AB}' risulta pari a: $J_1 R_B$ = 60 V.

Facendo ora agire solo il generatore ideale di corrente J_2 e spegnendo il generatore ideale di tensione E e il generatore ideale di corrente J_1, si ottiene la seguente rete.



Le due resistenze R_1 e R_3 sono in serie: si ottiene una resistenza equivalente $R_C = R_1 + R_3 = 100\ \Omega$. Le due resistenze R_C e R_2 sono in parallelo: applicando la formula del partitore di corrente resistivo si ottiene la corrente sul resistore ideale avente resistenza R_C che è quindi la corrente sul resistore ideale avente resistenza R_1. Tale corrente è pari a $J_2 \frac{R_2}{R_2+R_C} = \frac{5}{3}$ A, con riferimento che è quello connesso alla relazione del partitore di corrente resistivo: si ha pertanto $I_{R1}'' = \frac{5}{3}$ A (il riferimento di I_{R1}'' è indicato in figura). Pertanto risulta $V_{AB}'' = R_1\, I_{R1}'' = 100$ V.
Facendo ora agire solo il generatore ideale di tensione E e spegnendo il generatore ideale di corrente J_1 e il generatore ideale di corrente J_2, si ottiene la seguente rete.

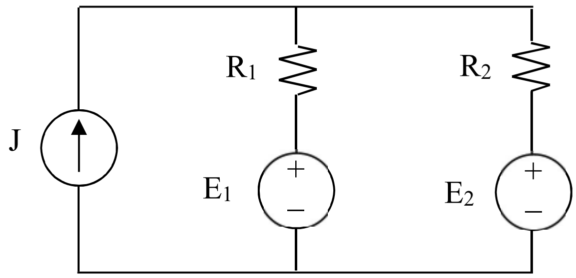


Per il calcolo della tensione V_{AB}''', la formula del partitore di tensione resistivo permette di calcolare la tensione ai capi del resistore ideale avente resistenza R_1. Tale tensione è pari a $E\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3} = 20$ V, con riferimento che è quello connesso alla relazione del partitore di tensione resistivo: si ha pertanto $V_{AB}''' = -\,20$ V.

Si ha quindi che $V_{AB} = V_{AB}' + V_{AB}'' + V_{AB}''' = 60 + 100 - 20 = 140$ V .

Esercizio 12. *Correnti di anello*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con J = 4 A, E_1 = 50 V, E_2 = 30 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω.

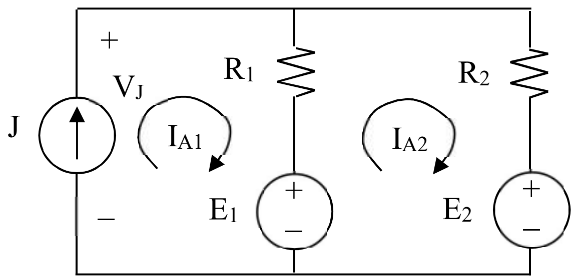


Calcolare la potenza P_{E1} uscente dal generatore ideale di tensione E_1, la potenza P_{E2} uscente dal generatore ideale di tensione E_2 e la potenza P_J uscente dal generatore ideale di corrente J.

Risultati: P_{E1} = – 50 W; P_{E2} = - 90 W; P_J = 240 W.

Soluzione

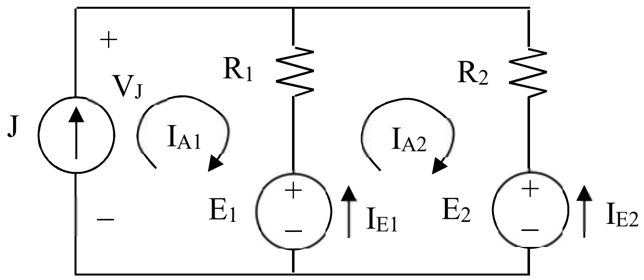
Uno dei modi possibili per ricavare la soluzione consiste nell'applicare il metodo delle correnti di anello, sulla rete piana. Si considera il generatore ideale di corrente J come un lato "anomalo" rispetto al metodo delle correnti di anello e si introduce la tensione ai suoi capi V_J. Si hanno due anelli, con correnti I_{A1} e I_{A2} rispettivamente. Si orientano le due correnti di anello allo stesso modo. Per esempio, in verso orario.



Si scrivono le due equazioni del metodo delle correnti di anello, più l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè che J = I_{A1}. Si ha quindi:

$$\begin{cases} R_1 I_{A1} - R_1 I_{A2} = V_J - E_1 \\ (R_1 + R_2) I_{A2} - R_1 I_{A1} = E_1 - E_2 \\ I_{A1} = J \end{cases}$$

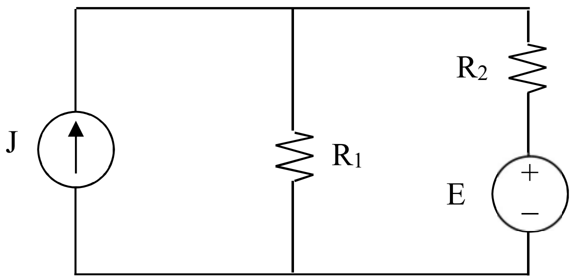
La terza relazione fornisce: I_{A1} = 4 A.
Con questa informazione, dalla seconda relazione, si ha:
I_{A2} = 3 A.
Dalla prima relazione si ottiene: V_J = 60 V.
Per il generatore ideale di tensione E_1, si utilizza la convenzione dei generatori e si calcola la potenza P_{E1} uscente.



Con i riferimenti indicati, si ha che:
$I_{E1} = – I_{A1} + I_{A2} = – 1$
Si ottiene:
$P_{E1} = E_1\ I_{E1} = – 50$ W.
Analogamente, per il generatore ideale di tensione E_2, si utilizza la convenzione dei generatori e si calcola la potenza P_{E2} uscente.
Con i riferimenti indicati, si ha che:
$I_{E2} = – I_{A2} = – 3$ A
Si ottiene:
$P_{E2} = E_2\ I_{E2} = – 90$ W.
Per il generatore ideale di corrente J, si utilizza la convenzione dei generatori e si calcola la potenza P_J uscente. La tensione V_J era già stata calcolata. Si ottiene:
$P_J = V_J\ J = 240$ W.

Esercizio 13. *Correnti di anello*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario, con J = 4 A, E = 30 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω.



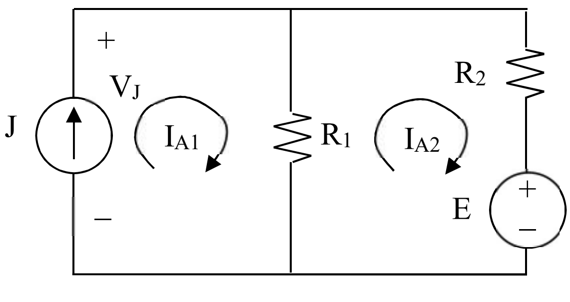
Calcolare la potenza P_J uscente dal generatore ideale di corrente J.

Risultato: P_J = 140 W.

Soluzione

Uno dei modi possibili per ricavare la soluzione consiste nell'applicare il metodo delle correnti di anello, sulla rete piana. Si può considerare il parallelo del generatore ideale di corrente J con il resistore ideale avente resistenza R_1 e trasformarlo nella corrispondente serie di un generatore ideale di tensione e un resistore ideale e quindi calcolare, sull'unica maglia rimasta, la corrente. Si calcola quindi la tensione ai capi del resistore ideale avente resistenza R_2 e, con la LKT, si ottiene la tensione ai capi del generatore ideale di corrente J. I calcoli relativi a questo procedimento non sono svolti.

Si considera invece il seguente procedimento. Si considera il generatore ideale di corrente come un lato "anomalo" rispetto al metodo delle correnti di anello e si introduce la tensione ai suoi capi V_J. Si hanno due anelli, con correnti I_{A1} e I_{A2} rispettivamente. Si orientano le due correnti di anello allo stesso modo. Per esempio, in verso orario.



Si scrivono le due equazioni del metodo delle correnti di anello, più l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè che J = I_{A1}. Si ha quindi:

$$\begin{cases} R_1 I_{A1} - R_1 I_{A2} = V_J \\ (R_1 + R_2) I_{A2} - R_1 I_{A1} = -E \\ I_{A1} = \mathrm{J} \end{cases}$$

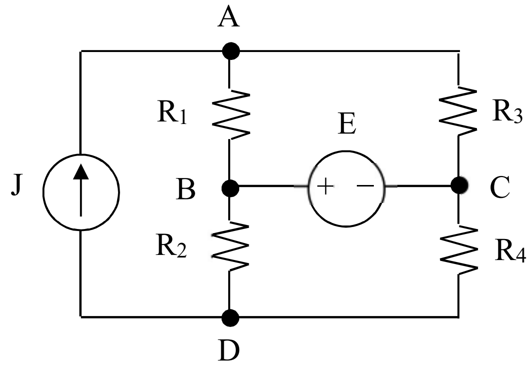
La terza relazione fornisce: I_{A1} = 4 A. Con questa informazione, dalla seconda relazione, si ha: I_{A2} = 0,5 A. Dalla prima relazione si ottiene: V_J = 35 V.

Si calcola la potenza uscente dal generatore ideale di corrente. Si utilizza la convenzione dei generatori e si ottiene: $P_J = V_J$ J = 140 W.

Esercizio 14. *Potenziali ai nodi*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

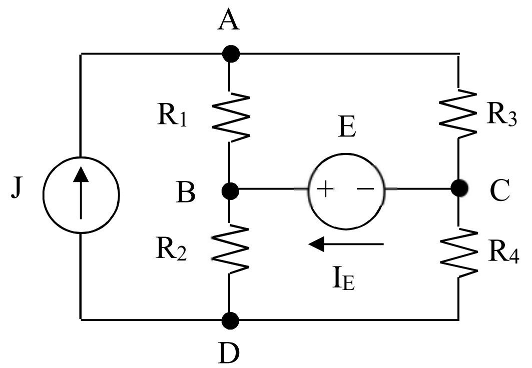
Dati dell'esercizio: J = 1 A, E = 100 V, R_1 = 50 Ω, R_2 = 50 Ω, R_3 = 50 Ω, R_4 = 50 Ω.



Calcolare la potenza P_E uscente dal generatore ideale di tensione E.

Risultato: P_E = 200 W.

Soluzione
Uno dei modi possibili per ricavare la soluzione consiste nell'applicare il metodo dei potenziali ai nodi. Il generatore ideale di tensione E è un lato "anomalo" rispetto al metodo dei potenziali ai nodi e si introduce la corrente che lo percorre I_E.



Si prende ora un nodo come nodo di massa. Per esempio, si prende il nodo B come nodo di massa e quindi si pone pari a zero il suo potenziale:
$V_B = 0$
Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sugli altri tre nodi (A, C e D), più l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè che $E = V_B - V_C = - V_C$, essendo B il nodo di massa ($V_B = 0$). Si ha quindi:

26

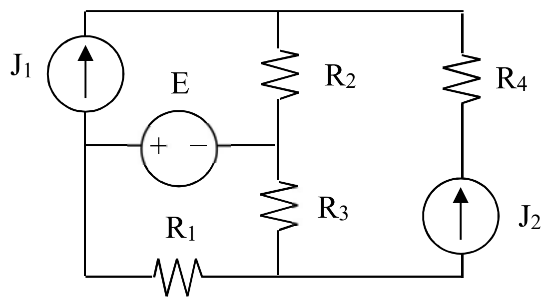
$$\begin{cases} (G_1 + G_3)V_A - G_3V_C = \mathrm{J} \\ (G_3 + G_4)V_C - G_3V_A - G_4V_D = -I_E \\ (G_2 + G_4)V_D - G_4V_C = -\mathrm{J} \\ -V_C = E \end{cases}$$

La quarta relazione fornisce: $V_C = -100$ V.
Con questa informazione, dalla terza relazione, si ha:
$V_D = -75$ V
Dalla prima relazione si ottiene:
$V_A = -25$ V
Dalla seconda si ricava quindi:
$I_E = 2$ A
Si calcola la potenza uscente dal generatore ideale di tensione. Con la convenzione dei generatori, si ottiene:
$P_E = E\ I_E = 200$ W

Esercizio 15. *Potenziali ai nodi*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

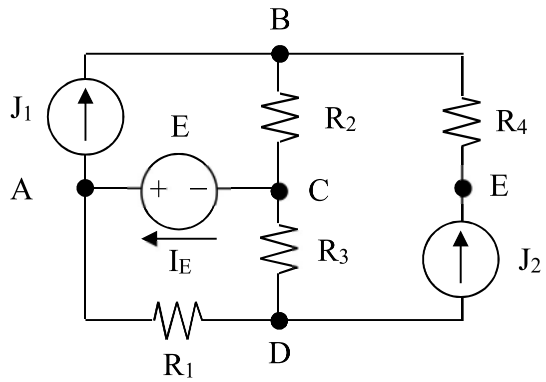
Dati dell'esercizio: J_1 = 6 A, J_2 = 3 A, E = 100 V, R_1 = 20 Ω, R_2 = 20 Ω, R_3 = 20 Ω, R_4 = 40 Ω.



Calcolare la potenza P_E uscente dal generatore ideale di tensione E.

Risultato: P_E = 1000 W.

Soluzione
Uno dei modi possibili per ricavare la soluzione consiste nell'applicare il metodo dei potenziali ai nodi. Il generatore ideale di tensione E è un lato "anomalo" rispetto al metodo dei potenziali ai nodi e si introduce la corrente che lo percorre I_E. Si evidenziano i nodi: sono 5.



Si prende ora un nodo come nodo di massa. Per esempio, si prende il nodo C come nodo di massa e quindi si pone pari a zero il suo potenziale:
$V_C = 0$
Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sugli altri quattro nodi (A, B, D ed E), più l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè che $E = V_A - V_C = V_A$, essendo C il nodo di massa ($V_C = 0$). Si ha quindi:

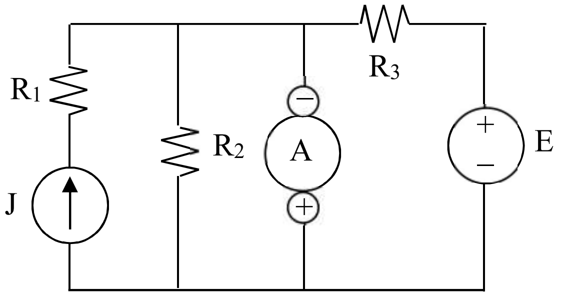
$$\begin{cases} G_1V_A - G_1V_D = -J_1 + I_E \\ (G_2 + G_4)V_B - G_4V_E = J_1 \\ (G_1 + G_3)V_D - G_1V_A = -J_2 \\ G_4V_E - G_4V_B = J_2 \\ V_A = E \end{cases}$$

La quinta relazione fornisce: $V_A = 100$ V.
Con questa informazione, dalla terza relazione, si ottiene:
$V_D = 20$ V
Utilizzando ora la prima relazione, si ottiene:
$I_E = 10$ A
Si calcola la potenza uscente dal generatore ideale di tensione. Con la convenzione dei generatori, si ottiene:
$P_E = E\ I_E = 1000$ W
Nota. Con riferimento al sistema di equazioni scritto per l'analisi della rete con il metodo dei potenziali ai nodi, sommando la seconda relazione con la quarta relazione si ottiene:
$V_B = 180$ V
Dalla quarta si ricava infine:
$V_E = 300$ V

Esercizio 16. *Teorema di sostituzione*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: J = 4 A, E = 60 V, R_1 = 20 Ω, R_2 = 40 Ω, R_3 = 20 Ω, R_4 = 40 Ω.

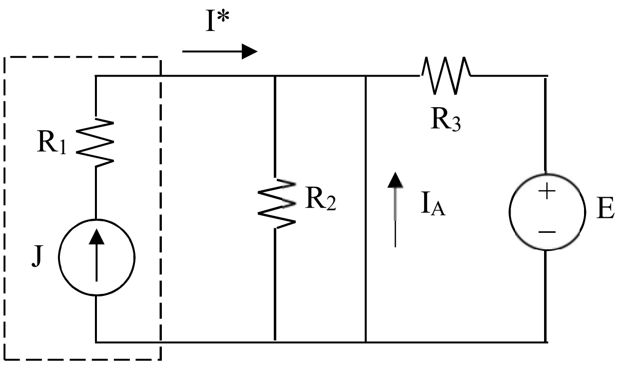


Calcolare il valore (I_A) misurato dall'amperometro ideale e la potenza P_J uscente dal generatore ideale di corrente J.

Risultati: I_A = – 7 A; P_J = 320 W.

Soluzione

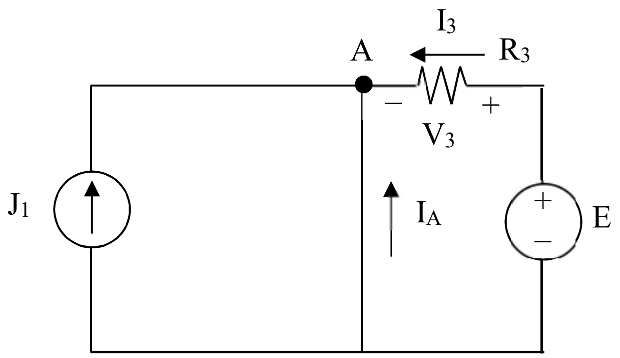
L'amperometro ideale equivale ad un cortocircuito e misura la corrente con il riferimento dal + al –. Si ottiene la seguente rete:



La serie del generatore ideale di corrente J con il resistore ideale avente resistenza R_1 è, presa nel suo complesso, un bipolo (evidenziato in figura con un riquadro tratteggiato) di cui è nota la corrente I* mostrata in figura: I* = J. Per il teorema di sostituzione si può sostituire tale bipolo con un generatore ideale di corrente avente corrente impressa J_1 = I*. Si ha: J_1 = 4 A.

Inoltre il resistore ideale avente resistenza R_2 è cortocircuitato: ha tensione nulla ai suoi capi e quindi, dato che per un resistore ideale vale la relazione V = R I con la convenzione degli utilizzatori, è interessato da corrente nulla. Per il teorema di sostituzione, si può sostituire il resistore ideale avente resistenza R_2 con un generatore ideale di corrente avente corrente impressa nulla, cioè con un circuito aperto, che si può togliere dalla rete (le tensioni e le correnti dei bipoli della rete senza tale circuito aperto sono le stesse di quando è presente tale circuito aperto).

30
Si ottiene la seguente rete.



Si mettono i riferimenti di tensione e corrente (convenzione degli utilizzatori) per il resistore ideale avente resistenza R_3. Si ha:

$V_3 = E = 60$ V

Si ottiene:

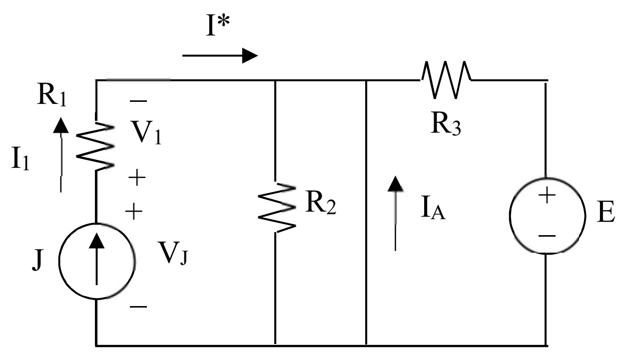
$I_3 = V_3/R_3 = 3$ A.

Scrivendo la LKC relativamente al nodo A, con i riferimenti di figura, si ottiene:

$J_1 + I_3 + I_A = 0$

Da cui: $I_A = -7$ A.

Per il calcolo della potenza uscente dal generatore ideale di corrente J, si fa il calcolo tornando alla rete prima di applicare il teorema di sostituzione relativamente alla serie del generatore ideale di corrente e il resistore ideale avente resistenza R_1, in modo da avere il generatore ideale di corrente di cui è richiesto il calcolo della potenza uscente. Si mette il riferimento per la V_J (con la convenzione dei generatori). Si mettono inoltre i riferimenti per la tensione e corrente del resistore ideale avente resistenza R_1. Si ottiene la rete di figura.



Con i riferimenti di figura, $I_1 = J = 4$ A; $V_1 = R_1 I_1 = 80$ V; $V_J = V_1 = 80$ V.

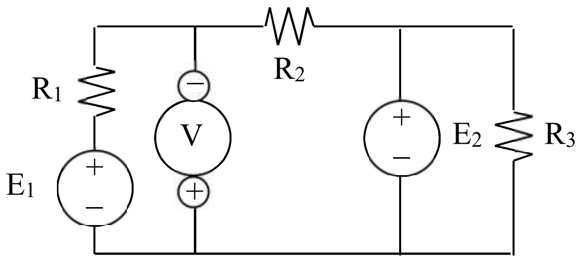
La potenza uscente dal generatore ideale di corrente avente corrente impressa pari a J della rete di partenza è quindi:

$P_J = V_J J = 320$ W

Esercizio 17. *Teorema di sostituzione*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

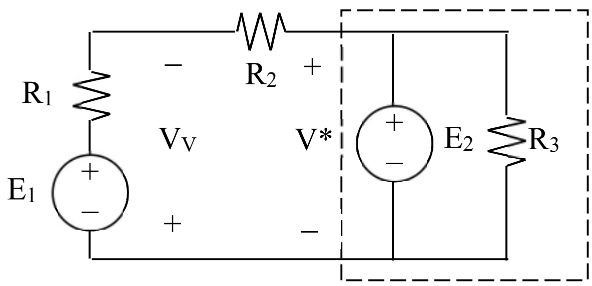
Dati dell'esercizio: $E_1 = 60$ V, $E_2 = 120$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$.



Calcolare il valore (V_V) misurato dal voltmetro ideale e la potenza P_{E2} uscente dal generatore ideale di tensione E_2.

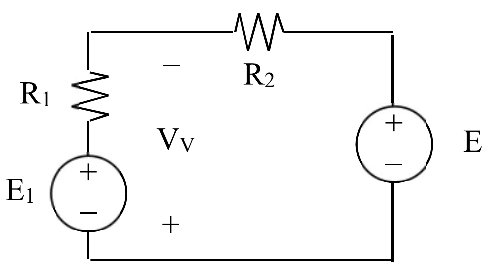
Risultati: $V_V = -80$ V; $P_{E2} = 360$ W.

Soluzione
Il voltmetro ideale equivale ad un circuito aperto e misura la tensione con il riferimento dal + al –. Si ottiene la seguente rete.



Il parallelo del generatore ideale di tensione E_2 con il resistore ideale avente resistenza R_3 è, preso nel suo complesso, un bipolo (evidenziato in figura con un riquadro tratteggiato) di cui è nota la tensione V^* mostrata in figura: $V^* = E_2$. Per il teorema di sostituzione si può sostituire tale bipolo con un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $E = V^*$. Si ha: $E = 120$ V.

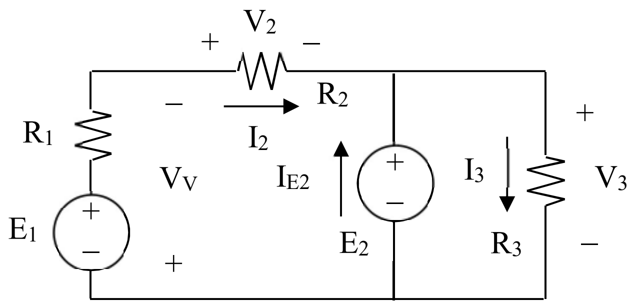
Si ottiene la seguente rete.



Per il calcolo della tensione V_V, si applica ora, ad esempio, la sovrapposizione degli effetti e, per ciascuna delle due reti che così si ottengono, si utilizza la formula del partitore di tensione resistivo. Si ottiene:

$$V_V = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = -80\,V$$

Per il calcolo della potenza uscente dal generatore ideale di tensione E_2, si fa il calcolo tornando alla rete prima di applicare il teorema di sostituzione relativamente al parallelo del generatore ideale di tensione e il resistore ideale di resistenza R_3, in modo da avere il generatore ideale di tensione di cui è richiesto il calcolo della potenza uscente. Si mette il riferimento per la I_{E2} (con la convenzione dei generatori). Si mettono inoltre i riferimenti per la tensione e corrente dei resistori ideali aventi resistenza R_2 e R_3. Si ottiene la rete di figura.



Con i riferimenti di figura, $-E_2 - V_V = V_2 = -40$ V; $I_2 = V_2 / R_2 = -1$ A; $V_3 = E_2 = 120$ V; $I_3 = V_3 / R_3 = 2$ A; $I_{E2} = I_3 - I_2 = 3$ A

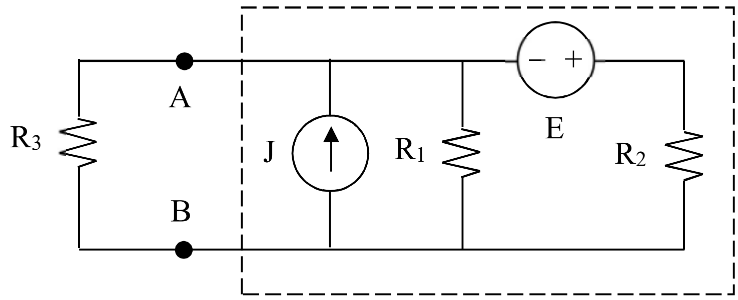
La potenza uscente dal generatore ideale di tensione E_2 della rete di partenza è quindi:

$P_{E2} = E_2\, I_{E2} = 360$ W

Esercizio 18. *Teorema di Thevenin*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: J = 4 A, E = 20 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω, R_3 = 5 Ω.



Della rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare:

-) il valore della resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_dx});

-) il valore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_dx}).

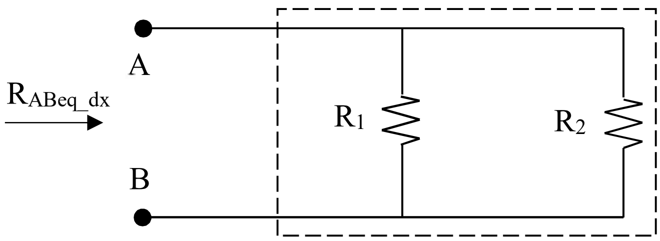
Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Determinare:

-) il valore della tensione V_{AB}.

Risultati: R_{ABeq_dx} = 5 Ω ; V_{AB0_dx} = 10 V ; V_{AB} = 5 V.

Soluzione

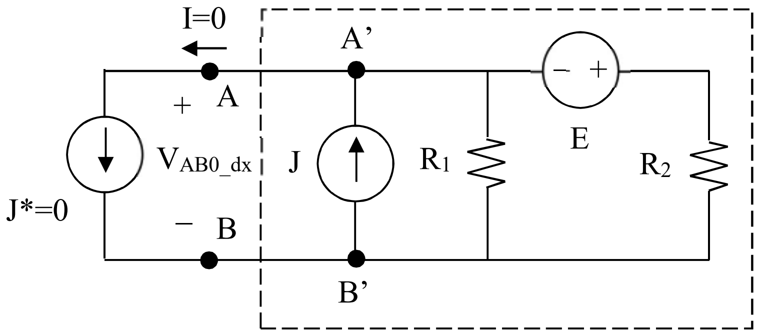
Della rete a destra della porta AB, si calcola la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_dx}). Si considera la sola parte di rete a destra della porta AB e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto). Si ottiene la seguente rete.



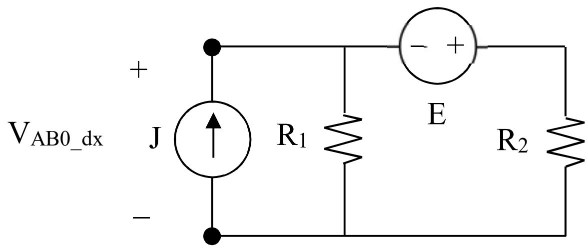
La resistenza equivalente tra i morsetti A e B è data dal parallelo delle resistenze R_1 e R_2. Si ha:

$R_{ABeq\_dx} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = 5\ \Omega$.

Della rete a destra della porta AB, si calcola la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_dx}). Si effettua il calcolo mettendo al posto della parte a sinistra della porta AB un generatore ideale di corrente avente corrente impressa J* pari a zero (comportamento a vuoto per la parte di destra). La rete da analizzare è quindi la seguente (in cui si sono messi in evidenza i nodi A' e B') e si calcola la tensione fra A e B, con il riferimento positivo della tensione su A.



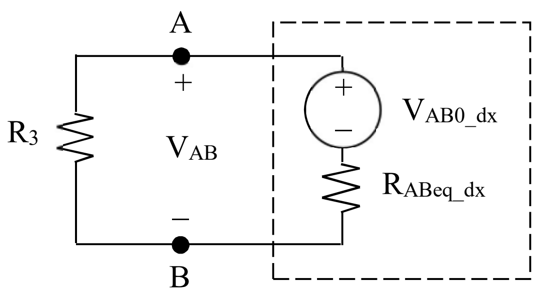
Si osserva che la tensione V_{AB0_dx} è anche la tensione fra i nodi A’ e B’, con il riferimento positivo della tensione su A’. Si toglie il riquadro tratteggiato. Il generatore ideale di corrente avente corrente impressa pari a zero (J* = 0) è un circuito aperto. Come già evidenziato, se si mette un nodo al posto di due nodi cortocircuitati oppure si toglie dalla rete un circuito aperto, la soluzione per i bipoli della rete così ottenuta coincide con la soluzione per gli stessi bipoli della rete senza tali modifiche. Si applicano tali modifiche alla rete, con riferimento ai nodi A e A’ cortocircuitati, ai nodi B e B’ cortocircuitati e al generatore ideale di corrente J* con J*=0 che è un circuito aperto. Si ottiene la rete di seguito riportata.



La tensione V_{AB0_dx} della rete si può calcolare con la sovrapposizione degli effetti, ottenendo:

$V_{AB0\_dx} = J\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} - E\frac{R_1}{R_1+R_2} = 10$ V.

Si considera infine la rete di partenza nel suo complesso e si calcola la tensione V_{AB}. La rete a destra della porta AB, per il teorema di Thevenin, è equivalente alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_dx} = 10$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_dx} = 5\ \Omega$. La rete da analizzare diventa quindi la seguente.



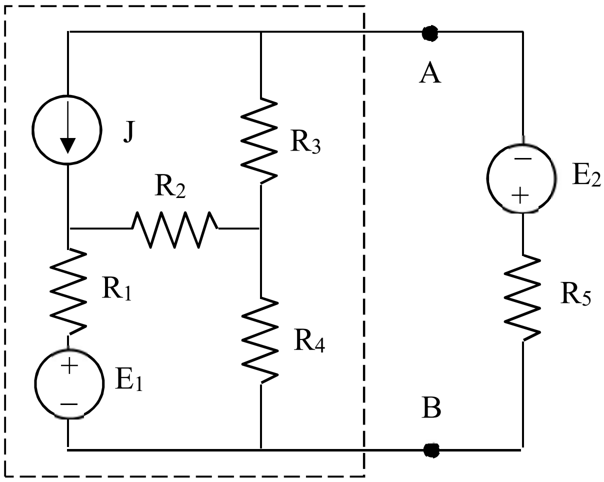
La tensione V_{AB} si calcola applicando il partitore di tensione resistivo.

$V_{AB} = V_{AB0\_dx}\ \frac{R_3}{R_{ABeq\_dx}+R_3} = 5$ V.

Esercizio 19. *Teorema di Thevenin*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: $J = 10$ A, $E_1 = 320$ V, $E_2 = 180$ V, $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 30\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$.



1) Della rete a sinistra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare:

-) la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx});

-) la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

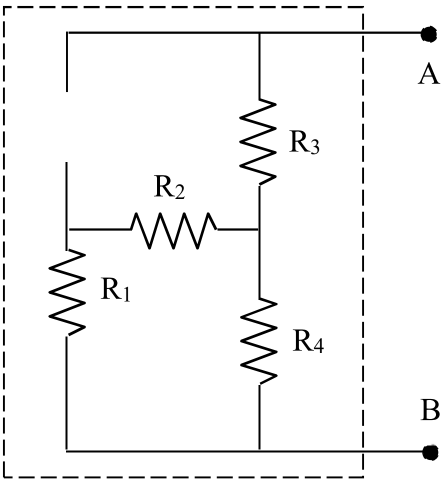
2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Determinare:

-) il valore della tensione V_{AB}.

Risultati: $R_{ABeq\_sx} = 18\ \Omega$; $V_{AB0\_sx} = 60$ V ; $V_{AB} = -156$ V.

Soluzione

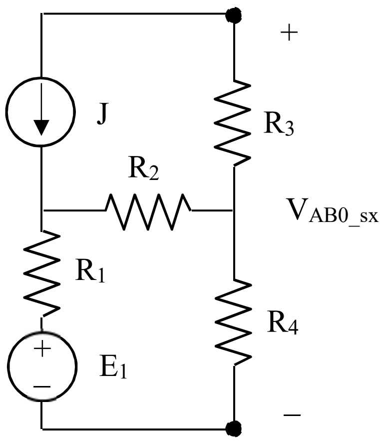
Della rete a sinistra della porta AB, si calcola la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx}). Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto). Si ottiene la seguente rete.



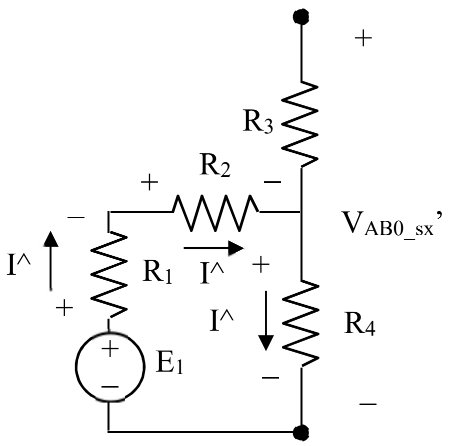
Si ricorda che il calcolo della resistenza equivalente alla porta AB si ottiene applicando alla porta AB un generatore ideale (di tensione o di corrente) e la resistenza equivalente deriva dal rapporto fra la tensione e la corrente alla porta AB, utilizzando per la rete di resistori la convenzione degli utilizzatori alla porta AB. Come già evidenziato, se si tolgono dalla rete i circuiti aperti la soluzione non cambia per i bipoli della rete così ottenuta.
La resistenza equivalente tra i morsetti A e B è data quindi dalla serie della resistenza R_3 con il parallelo fra la resistenza R_4 e la serie delle resistenze R_1 e R_2. Si ha quindi:

$$R_{ABeq\_sx} = R_3 + \frac{(R_1+R_2)R_4}{R_1+R_2+R_4} = 18\ \Omega.$$

Della rete a sinistra della porta AB, si calcola la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}). Si analizza la rete seguente.



Si utilizza, ad esempio, il metodo della sovrapposizione degli effetti.
Si spegne il generatore ideale di corrente. Si ha la rete seguente per il calcolo di V_{AB0_sx}’.

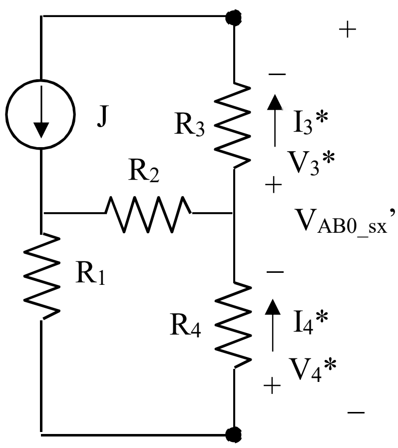


Il resistore ideale avente resistenza R_3 è percorso da corrente nulla e quindi ha tensione nulla ai suoi capi.
Per i resistori ideali aventi resistenza R_1, R_2 e R_4 si mettono i riferimenti di corrente indicati in figura: dalle LKC si ottiene che i valori di tali correnti sono uguali. Si indichi tale valore comune di corrente con I^. Per le tensioni ai capi dei resistori ideali si adotta la convenzione degli utilizzatori. Dalla LKT, si ha:

$$(R_1 + R_2 + R_4)I^\wedge - E_1 = 0$$

Si ottiene: I^ = 6,4 A
Si calcola quindi la tensione ai capi del resistore ideale avente resistenza R_4 con il riferimento indicato in figura e tale tensione è anche la V_{AB0_sx}' (come già evidenziato, è nulla la tensione ai capi del resistore ideale avente resistenza R_3):

$V_{AB0\_sx}' = R_4 I^\wedge = 192$ V
Si spegne ora il generatore ideale di tensione. Si ha la rete seguente per il calcolo di V_{AB0_sx}''.



Il resistore ideale avente resistenza R_3 è percorso da corrente $I_3^* = J$ (il riferimento è mostrato in figura) e, con la convenzione degli utilizzatori, si ottiene: $V_3^* = R_3 J$ (il riferimento è mostrato in figura).

Il resistore ideale avente resistenza R_4 è percorso da corrente I_4* il cui valore si ottiene applicando il partitore di corrente resistivo (il riferimento è mostrato in figura) e, con la convenzione degli utilizzatori, si ottiene: V_4* = R_4 I_4* (il riferimento è mostrato in figura).

Si ha:
I_3* = J = 10 A
V_3* = R_3 J = 60 V

$$I_4^* = \mathrm{J}\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_4} = 2{,}4\ A$$

V_4* = R_4 I_4* = 72 V

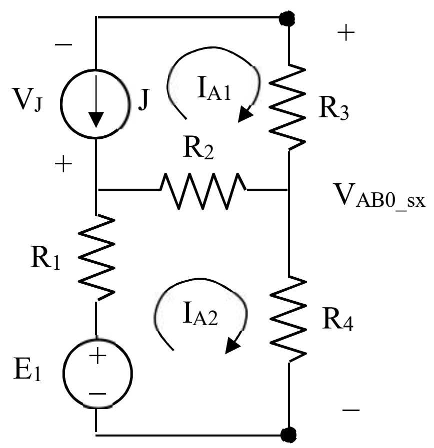
Si ottiene così:

V_{AB0_sx}'' = – V_3* – V_4* = – 132 V.

Si ottiene così:

V_{AB0_sx} = V_{AB0_sx}' + V_{AB0_sx}'' = 60 V.

Soluzione alternativa.
Della rete a sinistra della porta AB, si calcola la tensione a vuoto alla porta AB (V_{AB0_sx}), ad esempio utilizzando il metodo delle correnti di anello, sulla rete piana.
Il generatore ideale di corrente J è un lato "anomalo" rispetto al metodo delle correnti di anello e si introduce la tensione ai suoi capi V_J. Si hanno due anelli, con correnti I_{A1} e I_{A2} rispettivamente. Si orientano le due correnti di anello allo stesso modo: per esempio, in verso orario. Si ha quindi la seguente situazione.



Si scrivono le due equazioni del metodo delle correnti di anello, più l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè: I_{A1} = – J. Si ha quindi.

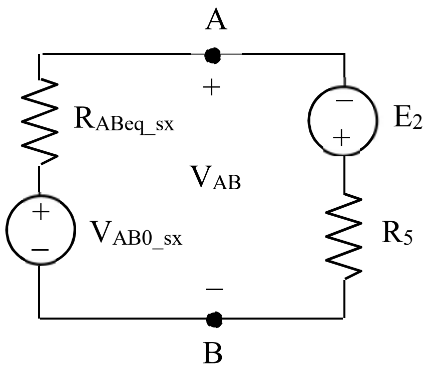
$$\begin{cases} (R_2 + R_3)I_{A1} - R_2 I_{A2} = -V_J \\ (R_1 + R_2 + R_4)I_{A2} - R_2 I_{A1} = E_1 \\ I_{A1} = -\mathrm{J} \end{cases}$$

La terza relazione fornisce: I_{A1} = – 10 A. Con questo valore, dalla seconda relazione, si ha: I_{A2} = 4 A. Dalla prima relazione si ottiene: V_J = 228 V.

Si ottiene così la tensione a vuoto: $V_{AB0\_sx} = R_3\, I_{A1} + R_4\, I_{A2}$ = 60 V.

Calcolo della tensione V_{AB}.

La rete a sinistra della porta AB, per il teorema di Thevenin, è equivalente alla porta AB alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa V_{AB0_sx} = 60 V con un resistore ideale avente resistenza R_{ABeq_sx} = 18 Ω. La rete da analizzare diventa quindi la seguente.



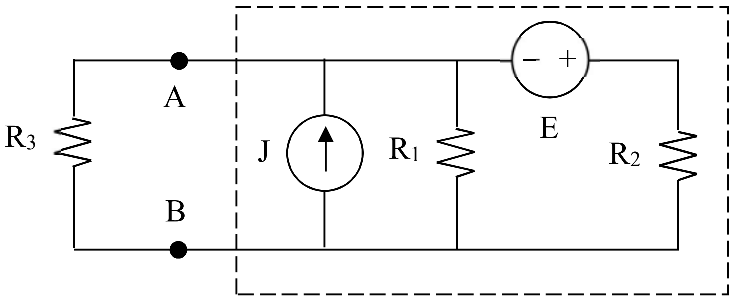
Per il calcolo della tensione V_{AB}, si applica ora, ad esempio, la sovrapposizione degli effetti e, per ciascuna delle due reti che così si ottengono, si utilizza la formula del partitore di tensione resistivo. Si ottiene:

$$V_{AB} = \frac{R_5}{R_{ABeq\_sx}+R_5}\, V_{AB0\_sx} - \frac{R_{ABeq\_sx}}{R_{ABeq\_sx}+R_5}\, E_2 = -\, 156 \text{ V}$$

Esercizio 20. *Teorema di Norton*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: J = 4 A, E = 20 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 10 Ω, R_3 = 5 Ω.



Della rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare lo schema equivalente secondo il teorema di Norton.

Considerando la rete nel suo complesso, calcolare la tensione V_{AB}.

Risultato: V_{AB} = 5 V.

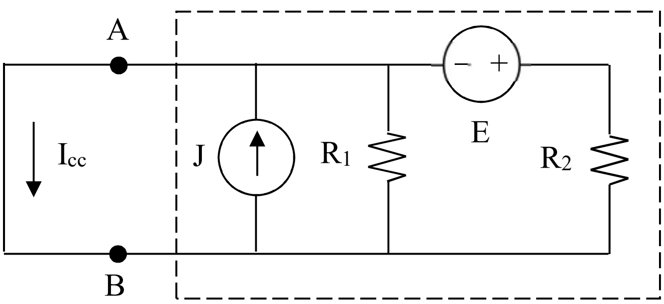
Soluzione

Della rete a destra della porta AB, si calcola la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_dx}). È il caso illustrato in un esercizio precedente (Teorema di Thevenin), a cui si rimanda. Si era già ottenuto:

$R_{ABeq\_dx} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ = 5 Ω.

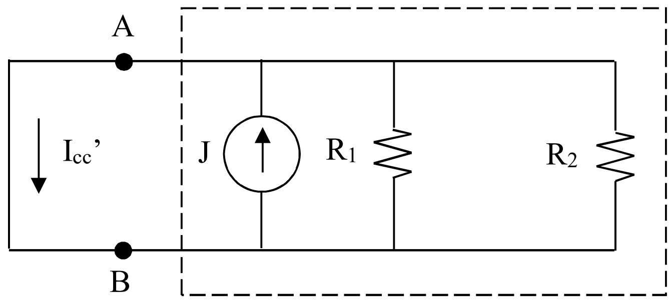
Calcolo della corrente di cortocircuito alla porta AB della rete a destra di AB.

Si considera la sola parte di rete a destra della porta AB: si cortocircuita la porta AB. Per la corrente di cortocircuito è scelto (a piacere) un riferimento fra i due possibili per fare il calcolo: il valore che si calcola è associato al riferimento di corrente scelto. In figura è indicata la corrente di cortocircuito I_{cc} con il riferimento scelto.



Si utilizza, ad esempio, la sovrapposizione degli effetti.

Si spegne il generatore ideale di tensione. Si ottiene la seguente rete.

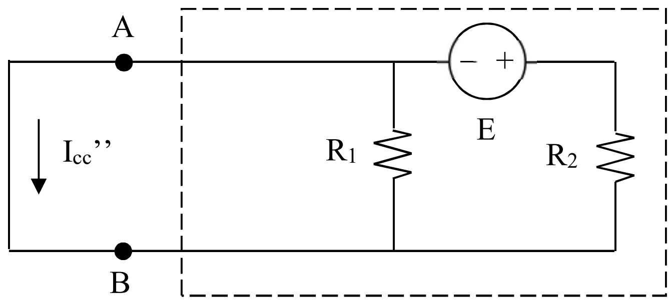


Si osserva che il resistore ideale avente resistenza R_1 è cortocircuitato e quindi ha tensione nulla e, dalla relazione del resistore, ha anche corrente nulla. Lo stesso vale per il resistore ideale avente resistenza R_2.

Si ha pertanto che, con il riferimento scelto, la I_{cc}' è pari a:

$I_{cc}' = J = 4$ A.

Si spegne ora il generatore ideale di corrente. Si ottiene la seguente rete.



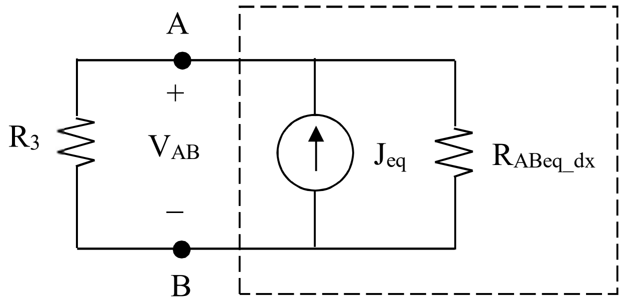
Si osserva che il resistore ideale avente resistenza R_1 è cortocircuitato: ha tensione nulla e, dalla relazione del resistore ideale, ha anche corrente nulla. Si ha allora:

$I_{cc}'' = -E/R_2 = -2$ A

Si ha quindi:

$I_{cc} = I_{cc}' + I_{cc}'' = 2$ A

La rete a destra della porta AB, per il teorema di Norton, è equivalente alla porta AB al parallelo di un generatore ideale di corrente con corrente impressa $J_{eq} = I_{cc} = 2$ A con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_dx} = 5\ \Omega$. Il riferimento della corrente di J_{eq} è legato a quello di I_{cc}: J_{eq} deve essere orientato in modo che, cortocircuitando la porta come si è fatto per calcolare I_{cc}, si ottiene proprio $J_{eq} = I_{cc}$. Si ha pertanto la seguente rete.



Infatti, se si considera la sola parte di rete a destra di AB e la si cortocircuita e si calcola la I_{cc} con il riferimento già utilizzato, si ha la relazione

$J_{eq} = I_{cc}$.

Soluzione alternativa.

L'esercizio, come indicato, è già stato analizzato in un caso precedente, utilizzando il teorema di Thevenin. Si era trovato che la rete a destra della porta AB, per il teorema di Thevenin, è equivalente alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_dx} = 10$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_dx} = 5\ \Omega$. Si può passare al corrispondente schema equivalente dato dal parallelo di un generatore ideale di corrente e un resistore ideale, ottenendo così quanto richiesto.

Calcolo della tensione V_{AB}.

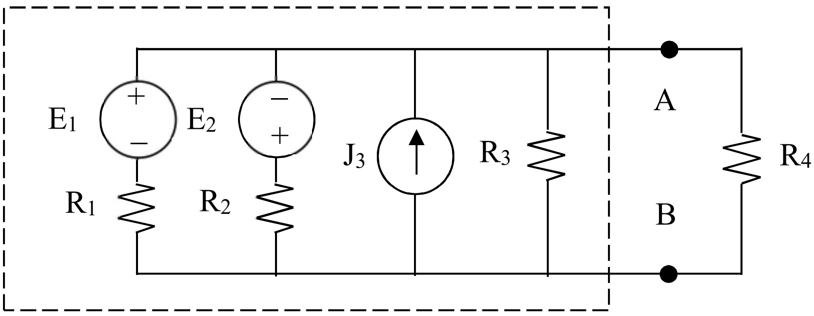
La tensione V_{AB} si calcola con la relazione:

$$V_{AB} = J_{eq}\ \frac{R_3\ R_{ABeq\_dx}}{R_3 + R_{ABeq\_dx}} = 5 \text{ V}$$

Esercizio 21. *Teorema di Norton*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: $E_1 = 60$ V, $E_2 = 150$ V, $J_3 = 4$ A, $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$.



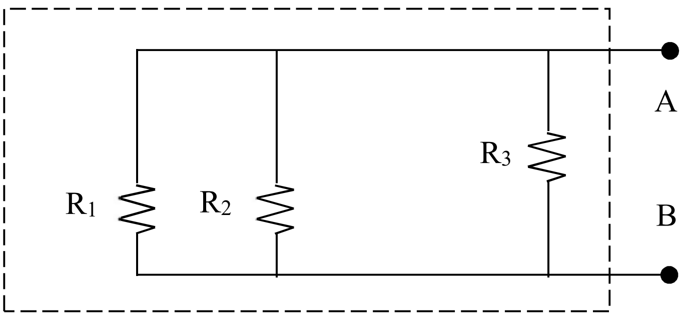
Della rete a sinistra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare lo schema equivalente secondo il teorema di Norton.

Considerando la rete nel suo complesso, calcolare la potenza (P_{R4}) entrante nel resistore ideale avente resistenza R_4.

Risultato: $P_{R4} = 2{,}5$ W.

Soluzione

Della rete a sinistra della porta AB, si calcola la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_dx}). Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto).
Si ottiene la seguente rete.

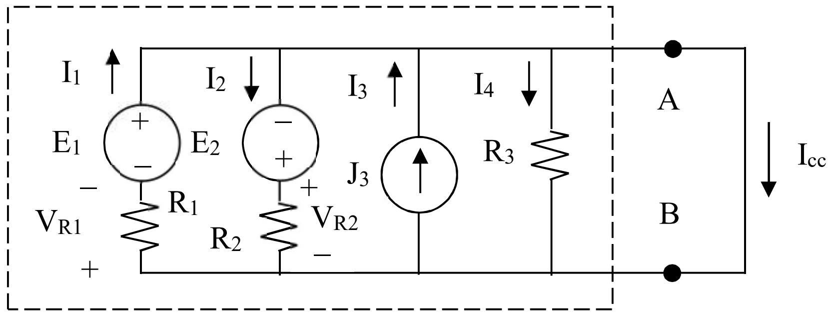


La resistenza equivalente tra i morsetti A e B è data dal parallelo delle resistenze R_1, R_2 e R_3. Si ha quindi:

$G_{ABeq\_sx} = G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{10}$ S.

$R_{ABeq\_sx} = 10\ \Omega$
Calcolo della corrente di cortocircuito alla porta AB della rete a sinistra di AB.

Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB: si cortocircuita la porta AB. Per la corrente di cortocircuito è scelto (a piacere) un riferimento fra i due possibili per fare il calcolo: il valore che si calcola è associato al riferimento di corrente scelto. In figura è indicata la corrente di cortocircuito I_{cc} con il riferimento scelto.



Si mettono i riferimenti di corrente. Per i generatori ideali di tensione si sceglie la convenzione dei generatori; il riferimento di I_3 è il riferimento di corrente presente nel simbolo del generatore ideale di corrente; il riferimento di I_4 è scelto a piacere. Il riferimento per la corrente del resistore ideale avente resistenza R_1 è scelto in modo che tale corrente è pari a I_1. Analogamente il riferimento per la corrente del resistore ideale avente resistenza R_2 è scelto in modo che tale corrente è pari a I_2.

Si osserva che il resistore ideale avente resistenza R_3 è cortocircuitato e quindi ha tensione nulla e, dalla relazione del resistore ideale, ha anche corrente nulla: $I_4 = 0$.

Si convenzionano con la convenzione degli utilizzatori i resistori ideali aventi resistenza R_1 e R_2: i riferimenti per le tensioni V_{R1} e V_{R2} sono indicati in figura.

Il valore della tensione V_{R1} si ottiene dalla relazione:

$V_{R1} – E_1 = 0$

Con l’equazione del resistore ideale, si ottiene:

$I_1 = V_{R1} / R_1 = E_1 / R_1 = 2$ A

In modo analogo, si ottiene il valore della corrente I_2:

$I_2 = V_{R2} / R_2 = E_2 / R_2 = 5$ A

Si ha inoltre:

$I_3 = J_3 = 4$ A

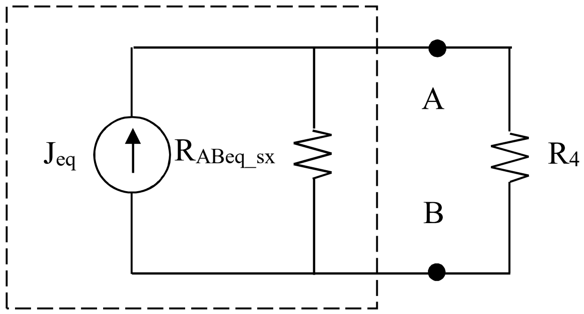
Si scrive quindi la relazione:

$I_1 – I_2 + I_3 – I_4 – I_{cc} = 0$

Si ottiene:

$I_{cc} = 1$ A

La rete a sinistra della porta AB, per il teorema di Norton, è equivalente alla porta AB al parallelo di un generatore ideale di corrente avente corrente impressa $J_{eq} = I_{cc} = 1$ A con un resistore ideale avente resistenza R_{ABeq_sx} = 10 Ω. Il riferimento della corrente di J_{eq} è legato a quello di I_{cc}: J_{eq} deve essere orientato in modo che, cortocircuitando la porta come si è fatto per calcolare I_{cc}, si ottiene proprio $J_{eq} = I_{cc}$. Si ha pertanto la seguente rete.



Infatti, se si considera la sola parte di rete a sinistra di AB e la si cortocircuita e si calcola la I_{cc} con il riferimento già utilizzato, si ha la relazione:

$J_{eq} = I_{cc}$.

Calcolo della potenza P_{R4}.

La tensione V_{AB} si calcola con la relazione:

$$V_{AB} = J_{eq} \frac{R_4 R_{ABeq\_sx}}{R_4 + R_{ABeq\_sx}} = 5 \text{ V}$$

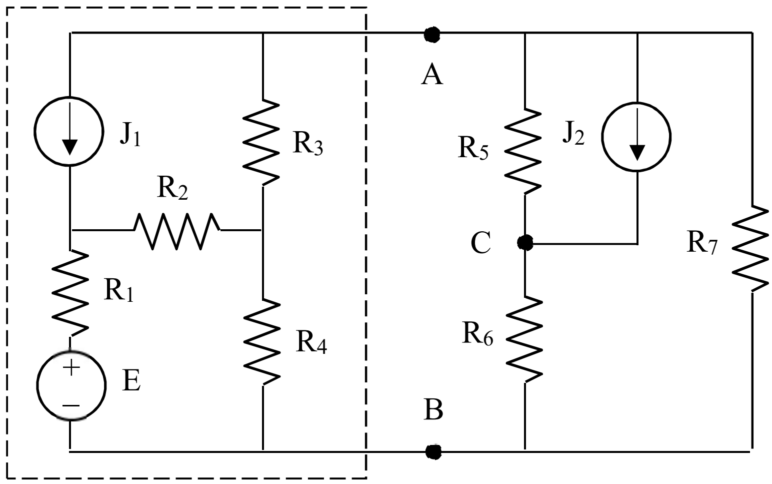
La potenza entrante nel resistore ideale avente resistenza R_4 è pari a:

$$P_{R4} = \frac{V_{AB}^2}{R_4} = 2{,}5 \text{ W}$$

Esercizio 22. *Esercizio*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: $J_1 = J_2 = 10$ A, $E = 320$ V, $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 12\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 30\ \Omega$, $R_5 = 2\ \Omega$, $R_6 = 2\ \Omega$, $R_7 = 4\ \Omega$.



1) Della rete a sinistra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare:

-) la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx});

-) la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Prendendo il nodo B come nodo di massa, determinare:

-) il valore del potenziale del nodo A (V_A) e il valore del potenziale del nodo C (V_C).

Risultati: $R_{ABeq\_sx} = 18\ \Omega$; $V_{AB0\_sx} = 60$ V ; $V_A = -3$ V; $V_C = 8{,}5$ V.

Soluzione

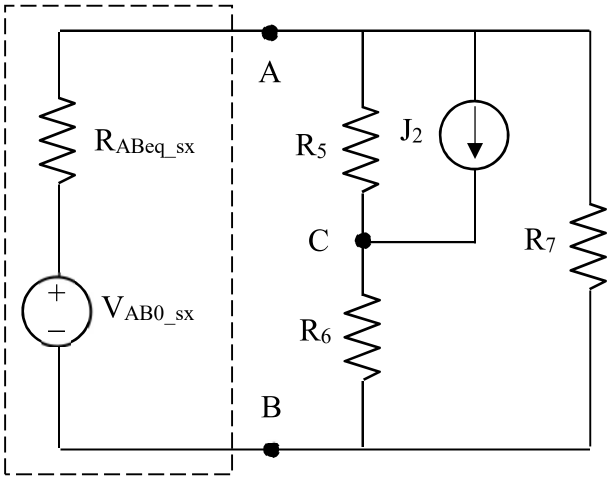
La rete a sinistra della porta AB è già stata analizzata in un esercizio precedente (Teorema di Thevenin). Pertanto si procede nel modo già illustrato e si ottengono i valori già trovati, di seguito riportati:

$R_{ABeq\_sx} = 18\ \Omega$.

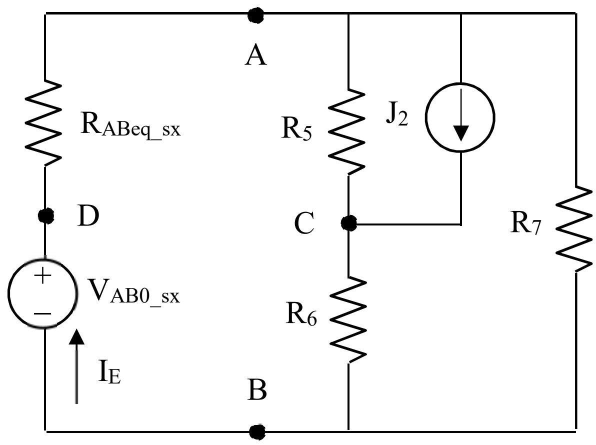
$V_{AB0\_sx} = 60$ V.

La rete a sinistra della porta AB, per il teorema di Thevenin, è equivalente alla porta AB alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_sx} = 60$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_sx} = 18\ \Omega$.

Considerando la rete nel suo complesso, la rete da analizzare diventa quindi la seguente.



Si utilizza il metodo dei potenziali ai nodi. Come nodo di massa si prende il nodo B.
I bipoli generatore ideale di tensione avente tensione impressa V_{AB0_sx} e il resistore ideale avente resistenza R_{ABeq_sx} si considerano ciascuno per conto suo e quindi si considera il nodo di connessione tra V_{AB0_sx} e R_{ABeq_sx}: lo si indica come nodo D. In questo modo il generatore ideale di tensione V_{AB0_sx} è un lato anomalo rispetto al metodo dei potenziali ai nodi e si introduce la corrente I_E che lo percorre.
Si ha quindi la seguente situazione.



I nodi della rete sono A, B, C, D. Avendo preso il nodo B come nodo di massa, si pone quindi pari a zero il potenziale del nodo B: V_B=0.
Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sui nodi A, C, D, più l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo.
Per il nodo A: $\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_7}\right)V_A-\frac{1}{R_5}V_C-\frac{1}{R_{ABeq\_sx}}V_D=-\mathrm{J}_2$
Per il nodo C: $\left(\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)V_C-\frac{1}{R_5}V_A=\mathrm{J}_2$
Per il nodo D: $\frac{1}{R_{ABeq\_sx}}V_D-\frac{1}{R_{ABeq\_sx}}V_A=\mathrm{I}_E$
Lato anomalo: $V_D=V_{AB0\_sx}$

Si calcolano i potenziali dei nodi A e C.
Si inserisce l'equazione del lato anomalo nell'equazione del nodo A e si mettono i valori.

$$\frac{29}{36}V_A - \frac{1}{2}V_C = -\frac{20}{3}$$

Si mettono i valori nell'equazione del nodo C.

$$V_C - \frac{1}{2}V_A = 10$$

Combinando le due equazioni così ottenute, si ha:

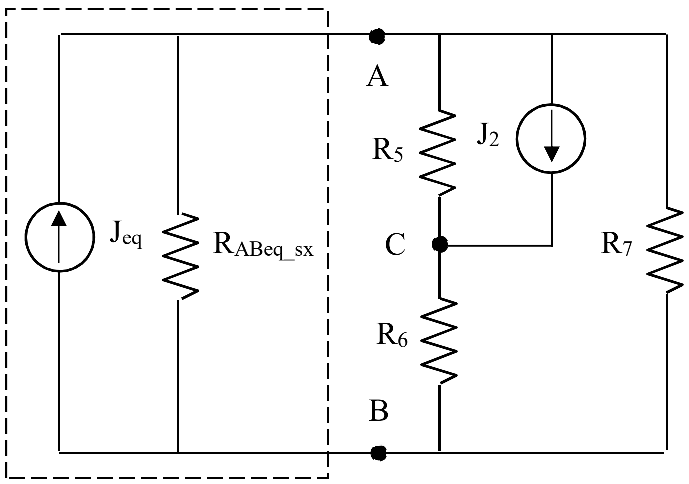
$$\frac{5}{9}V_A = -\frac{5}{3}$$

Si ottiene: $V_A = -3$ V; $V_C = 8{,}5$ V.

Soluzione alternativa

Della rete a sinistra della porta AB è stato calcolato lo schema equivalente applicando il teorema di Thevenin e si è trovato che è equivalente alla porta AB alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_sx} = 60$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_sx} = 18\ \Omega$. Da tale schema equivalente, si calcola lo schema equivalente dato dal parallelo di un generatore ideale di corrente e un resistore ideale.

Si ottiene la rete seguente.



Con il riferimento indicato in figura per J_{eq}, si ha che:
$J_{eq} = \frac{V_{AB0\_sx}}{R_{ABeq\_sx}} = \frac{10}{3}$ A
I nodi della rete sono A, B, C. Avendo preso il nodo B come nodo di massa, si pone quindi pari a zero il potenziale del nodo B: $V_B=0$.
Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sui nodi A e C.
Per il nodo A: $\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7}\right)V_A - \frac{1}{R_5}V_C = J_{eq} - J_2$
Per il nodo C: $\left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_C - \frac{1}{R_5}V_A = J_2$

Si mettono i valori nell'equazione del nodo A:

$$\frac{29}{36}V_A - \frac{1}{2}V_C = -\frac{20}{3}$$

Si mettono i valori nell'equazione del nodo C:

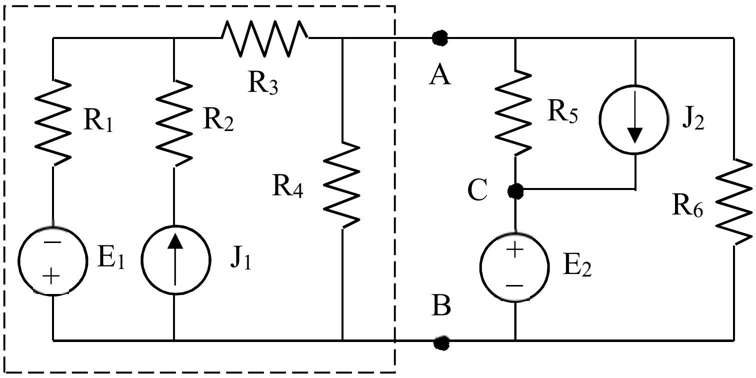
$$V_C - \frac{1}{2}V_A = 10$$

Si ritrovano le due equazioni precedentemente ottenute, che danno come soluzione:
$V_A = -3$ V; $V_C = 8{,}5$ V.

Esercizio 23. *Esercizio*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6 e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: J_1 = 6 A, J_2 = 7 A, E_1 = 270 V, E_2 = 120 V, R_1 = 20 Ω, R_2 = 30 Ω, R_3 = 10 Ω, R_4 = 60 Ω, R_5 = 40 Ω, R_6 = 40 Ω.



1) Della rete a sinistra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare:

-) la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx});

-) la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

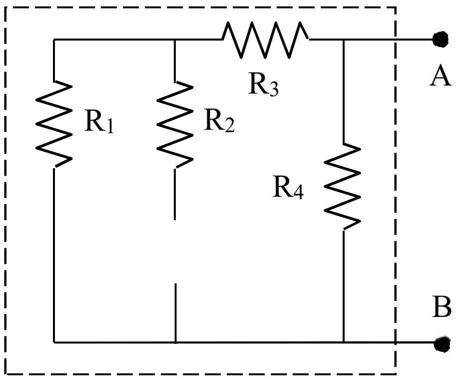
2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Prendendo il nodo B come nodo di massa, determinare:

-) il valore del potenziale del nodo A (V_A) e il valore del potenziale del nodo C (V_C).

Risultati: R_{ABeq_sx} = 20 Ω ; V_{AB0_sx} = – 100 V ; V_A = – 90 V; V_C = 120 V.

Soluzione

Della rete a sinistra della porta AB, si calcola la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx}). Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto).
Si ottiene la seguente rete.

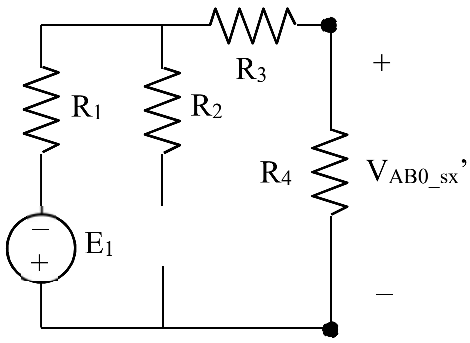


La resistenza equivalente tra i morsetti A e B è data dal parallelo della resistenza R_4 e la serie delle resistenze R_1 e R_3. Si ha quindi:

$R_{ABeq\_sx} = \frac{(R_1+R_3)R_4}{R_1+R_3+R_4} = 20\ \Omega.$

Della rete a sinistra della porta AB, si calcola la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}), utilizzando, ad esempio, il metodo della sovrapposizione degli effetti.

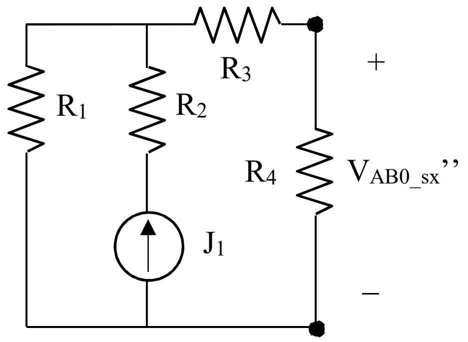
Si spegne il generatore ideale di corrente. Si ha la rete seguente per il calcolo di V_{AB0_sx}'.



Applicando la formula del partitore di tensione resistivo e tenendo conto dei riferimenti, si ottiene:

$V_{AB0\_sx}' = -E_1 \frac{R_4}{R_1+R_3+R_4} = -180\ \text{V}.$

Si spegne il generatore ideale di tensione. Si ha la rete seguente per il calcolo di V_{AB0_sx}''.

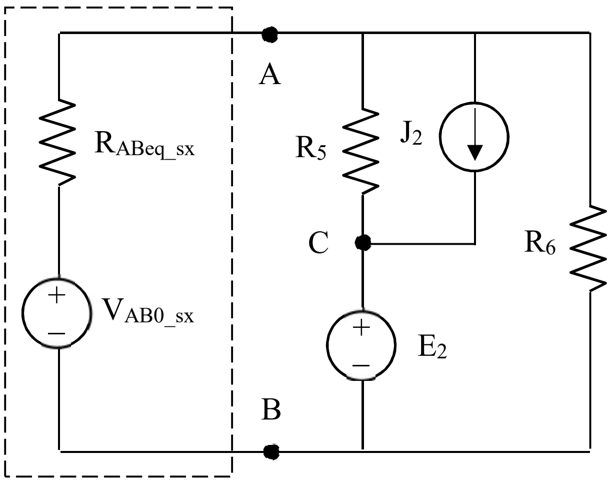


Si applica la formula del partitore di corrente resistivo per il calcolo della corrente che passa per il resistore ideale R_4 e quindi si calcola la tensione. Con i riferimenti indicati, si ottiene:

$V_{AB0\_sx}'' = J_1 \frac{R_1}{R_1+R_3+R_4} R_4 = 80$ V.

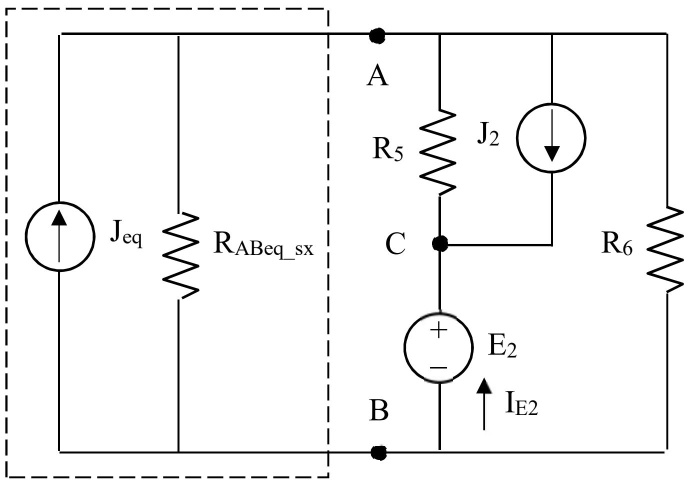
Si ha quindi:

$V_{AB0\_sx} = V_{AB0\_sx}' + V_{AB0\_sx}'' = -100$ V



Della rete a sinistra della porta AB è stato calcolato lo schema equivalente applicando il teorema di Thevenin e si è trovato che è equivalente alla porta AB alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_sx} = -100$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_sx} = 20\ \Omega$. Da tale schema equivalente, si calcola lo schema equivalente dato dal parallelo di un generatore ideale di corrente e un resistore ideale.

Si ottiene la rete seguente.



Con il riferimento indicato in figura per J_{eq}, si ha che:

$J_{eq} = \frac{V_{AB0\_sx}}{R_{ABeq\_sx}} = -5$ A

I nodi della rete sono A, B, C. Avendo preso il nodo B come nodo di massa, si pone quindi pari a zero il potenziale del nodo B: V_B=0.

Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sui nodi A e C.

Per il nodo A: $\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) V_A - \frac{1}{R_5} V_C = J_{eq} - J_2$

Per il nodo C: $\frac{1}{R_5} V_C - \frac{1}{R_5} V_A = J_2 + I_{E2}$

Si scrive l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè:

$$E_2 = V_C - V_B = V_C$$

essendo B il nodo di massa (V_B = 0). Da quest'ultima equazione, si ha:

V_C = 120 V.

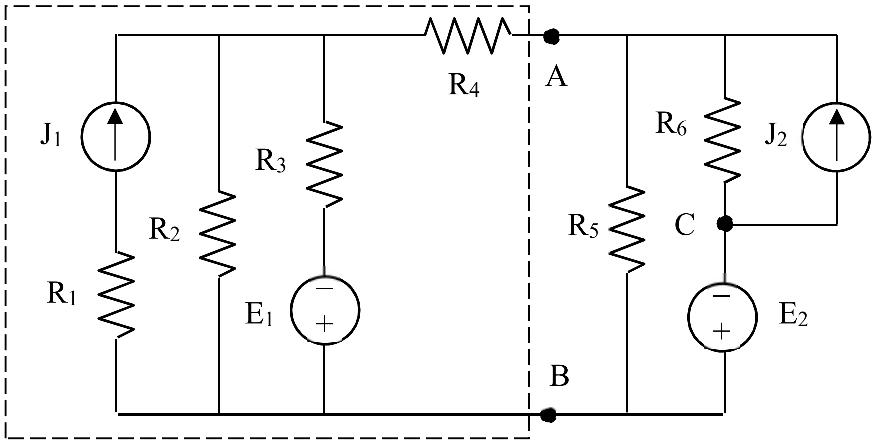
Si mettono i valori nell'equazione del nodo A e si ottiene:

V_A = – 90 V.

Esercizio 24. *Esercizio*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori delle resistenze dei resistori ideali e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: $J_1 = 8$ A, $J_2 = 8$ A, $E_1 = 200$ V, $E_2 = 120$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 24\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$, $R_6 = 10\ \Omega$.



1) Della rete a sinistra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare:

-) il valore della resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx});

-) il valore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

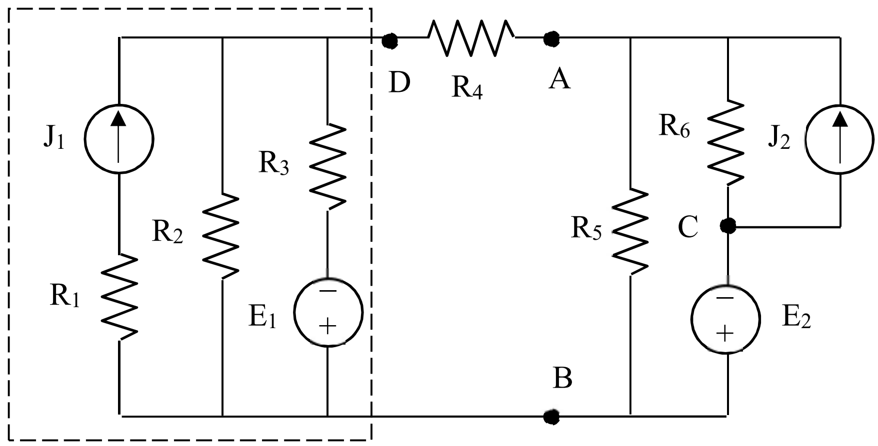
2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Prendendo il nodo C come nodo di massa, determinare:

-) il valore del potenziale del nodo A (V_A) e il valore del potenziale del nodo B (V_B).

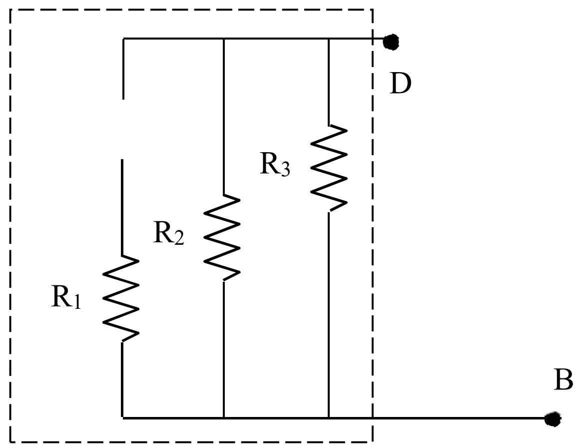
Risultati: $R_{ABeq\_sx} = 20\ \Omega$; $V_{AB0\_sx} = 45$ V ; $V_A = 110$ V; $V_B = 120$ V.

Soluzione

Per l'analisi della rete a sinistra della porta AB, si procede con due analisi successive.
Si specifica il nodo D come mostrato in figura.
Si applica prima il teorema di Thevenin alla rete a sinistra della porta DB (evidenziata in figura nel riquadro tratteggiato) e poi si procede nell'analisi della rete a sinistra della porta AB.



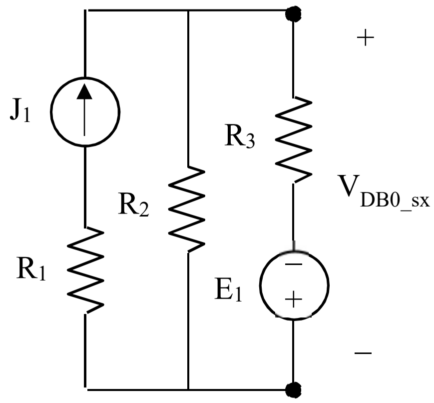
Della rete a sinistra della porta DB, si calcola la resistenza equivalente alla porta DB (R_{DBeq_sx}). Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta DB e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto).
Si ottiene la seguente rete.



La resistenza equivalente tra i morsetti D e B è data dal parallelo tra le resistenze R_2 e R_3. Si ha quindi:

$R_{ABeq\_sx} = \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} = 15\ \Omega$.

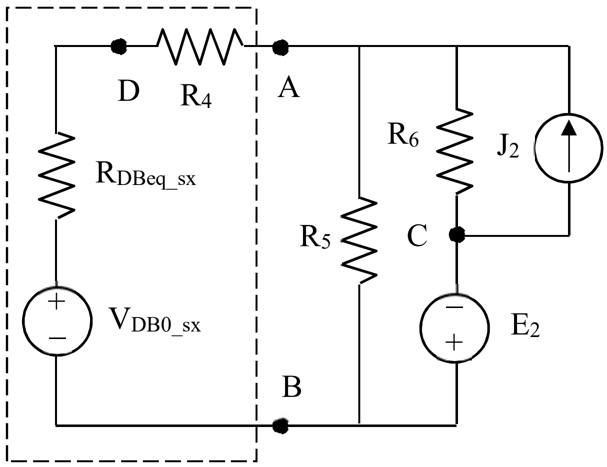
Della rete a sinistra della porta DB, si calcola la tensione a vuoto alla porta DB con segno + della tensione in D (V_{DB0_sx}), utilizzando, ad esempio, il metodo della sovrapposizione degli effetti.
Si ha la rete seguente per il calcolo di V_{DB0_sx}.



Applicando la formula del partitore di tensione resistivo e tenendo conto dei riferimenti, si ottiene:

$V_{DB0\_sx} = -E_1 \frac{R_2}{R_2+R_3} + J_1 \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3} = 45$ V.

Si torna alla rete complessiva, con lo schema equivalente alla rete a sinistra della porta DB. Si ottiene la rete di figura.

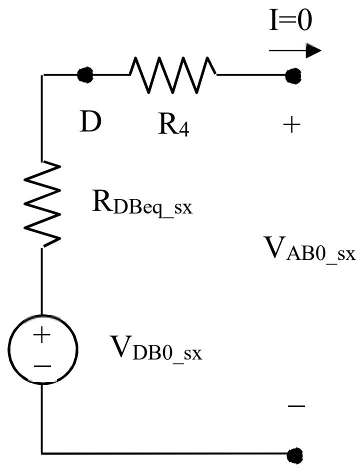


Della rete a sinistra della porta AB, si calcolano la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx}) e la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si spegne il generatore ideale di tensione. Si ottiene che la resistenza equivalente tra i morsetti A e B è data dalla serie delle resistenze R_4 e R_{DB0_sx}. Si ha quindi:

$R_{ABeq\_sx} = R_4 + R_{DB0\_sx} = 20\ \Omega$.

Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si calcola la tensione a vuoto alla porta AB, cioè per corrente alla porta AB pari a zero. Si ha



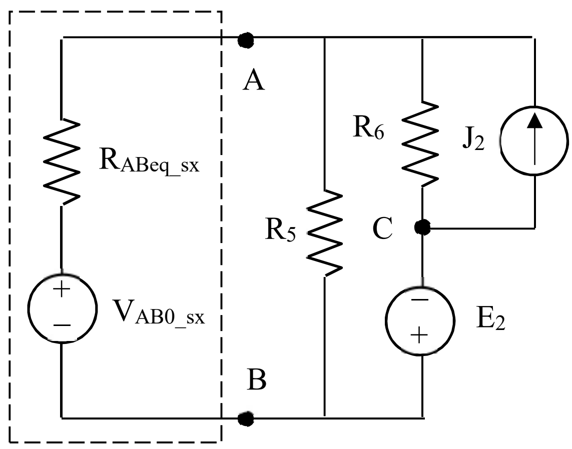
Per corrente alla porta AB pari a zero, sono pari a zero le correnti (e quindi anche le tensioni) dei resistori ideali aventi resistenza R_{DBeq_sx} e R_4 rispettivamente. Si ha quindi che:

$V_{AB0\_sx} = V_{DB0\_sx} = 45$ V.

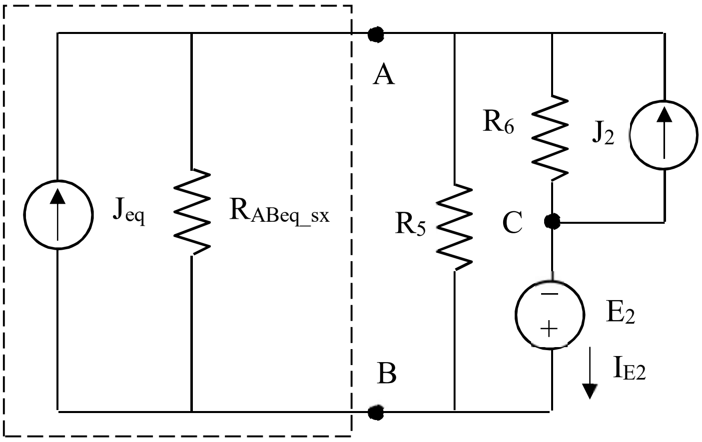
Soluzione alternativa.

Dopo essere tornati alla rete complessiva con lo schema equivalente alla rete a sinistra della porta DB, si poteva osservare che le resistenze R_4 e R_{DB0_sx} sono in serie. Si calcola quindi la resistenza equivalente serie pari a $R_4 + R_{DB0\_sx}$ e a sinistra della porta AB si ottiene la serie del generatore ideale di tensione avente tensione impressa V_{DB0_sx} con un resistore ideale avente resistenza $R_4 + R_{DB0\_sx}$. Tale serie costituisce lo schema equivalente della rete a sinistra della porta AB, con $R_{ABeq\_sx} = R_4 + R_{DB0\_sx} = 20\ \Omega$ e $V_{AB0\_sx} = V_{DB0\_sx} = 45$ V.

Della rete a sinistra della porta AB è stato calcolato lo schema equivalente applicando il teorema di Thevenin e si è trovato che è equivalente alla porta AB alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_sx} = 45$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_sx} = 20\ \Omega$. Si ottiene la rete seguente.



Della rete a sinistra della porta AB, si calcola lo schema equivalente dato dal parallelo di un generatore ideale di corrente e un resistore ideale.



Con il riferimento indicato in figura per J_{eq}, si ha che:

$J_{eq} = \frac{V_{AB0\_sx}}{R_{ABeq\_sx}} = \frac{9}{4}$ A

I nodi della rete sono A, B, C. Avendo preso il nodo C come nodo di massa, si pone quindi pari a zero il potenziale del nodo C: $V_C=0$.

Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sui nodi A e B.

Per il nodo A: $\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right) V_A - \left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_5}\right) V_B = J_{eq} + J_2$

Per il nodo B: $\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_5}\right) V_B - \left(\frac{1}{R_{ABeqsx}} + \frac{1}{R_5}\right) V_A = -J_{eq} + I_{E2}$

Si scrive l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè:

$$E_2 = V_B - V_C = V_B$$

essendo C il nodo di massa ($V_C = 0$). Da quest'ultima equazione, si ha:

$V_B = 120$ V.

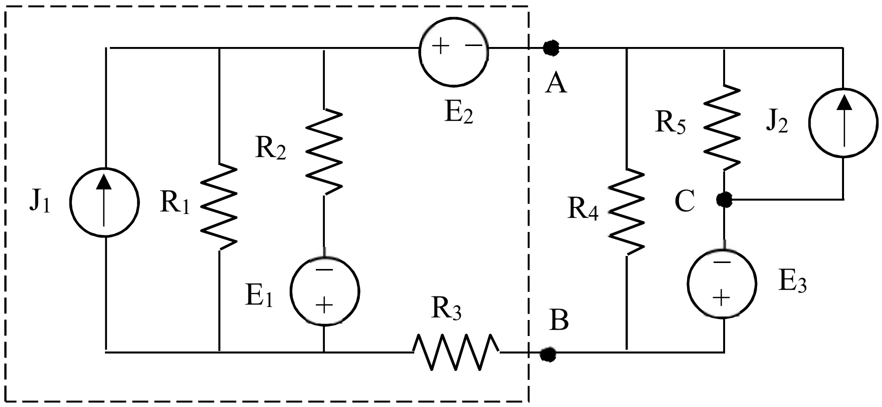
Si mettono i valori nell'equazione del nodo A e si ottiene:

$V_A = 110$ V.

Esercizio 25. *Esercizio*

La rete mostrata in figura è a regime stazionario. Sono noti i valori delle resistenze dei resistori ideali e le grandezze impresse dai generatori ideali di tensione e di corrente.

Dati dell'esercizio: $J_1 = 8$ A, $J_2 = 6$ A, $E_1 = 200$ V, $E_2 = 150$ V, $E_3 = 200$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$.



1) Della rete a sinistra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato), determinare:

-) il valore della resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx});

-) il valore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

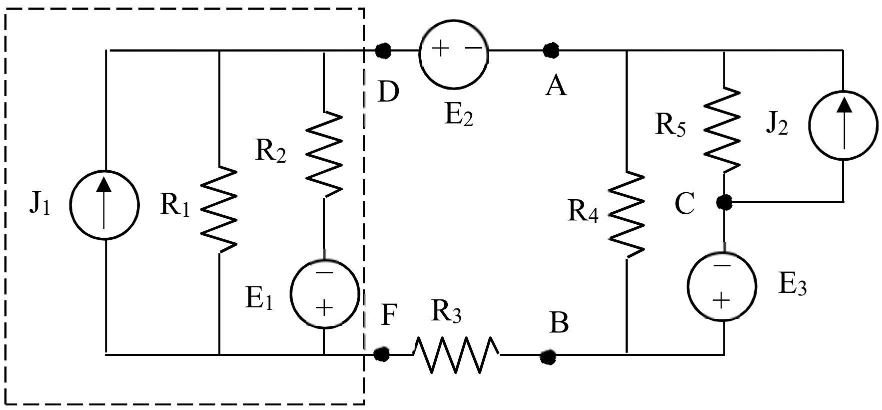
2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Prendendo il nodo A come nodo di massa, determinare:

-) il valore del potenziale del nodo B (V_B) e il valore del potenziale del nodo C (V_C).

Risultati: $R_{ABeq\_sx} = 20\ \Omega$; $V_{AB0\_sx} = -80$ V ; $V_B = 24$ V; $V_C = -176$ V.

Soluzione

Per l'analisi della rete a sinistra della porta AB, si procede con due analisi successive.
Si specificano i nodi D e F come mostrato in figura.
Si applica prima il teorema di Thevenin alla rete a sinistra della porta DF (evidenziata in figura nel riquadro tratteggiato) e poi si procede nell'analisi della rete a sinistra della porta AB.



Della rete a sinistra della porta DF, si calcola la resistenza equivalente alla porta DF (R_{DFeq_sx}). Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta DF e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto).
La resistenza equivalente tra i morsetti D e F è data dal parallelo delle resistenze R_1 e R_2. Si ha quindi:

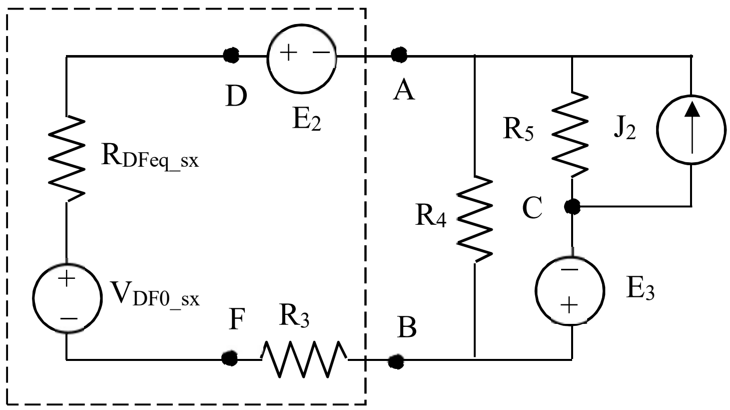
$R_{DFeq\_sx} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = 15\ \Omega.$

Della rete a sinistra della porta DF, si calcola la tensione a vuoto alla porta DF con segno + della tensione in D (V_{DF0_sx}), utilizzando, ad esempio, il metodo della sovrapposizione degli effetti.

Si ottiene:

$V_{DF0\_sx} = -E_1 \frac{R_2}{R_2+R_3} + J_1 \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} = 70\ \text{V}.$

Si torna alla rete complessiva, con lo schema equivalente alla rete a sinistra della porta DF. Si ottiene la rete di figura.



Della rete a sinistra della porta AB, si calcolano la resistenza equivalente alla porta AB (R_{ABeq_sx}) e la tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_sx}).

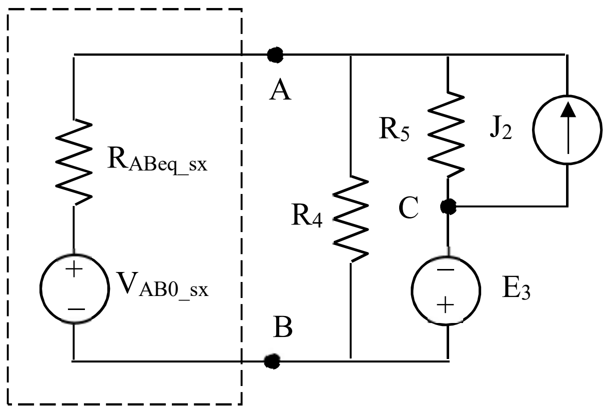
Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si spengono i generatori ideali di tensione (ciascuno sostituito con un cortocircuito) e quelli di corrente (ciascuno sostituito con un circuito aperto). Si ottiene che la resistenza equivalente tra i morsetti A e B è data dalla serie delle resistenze R_3 e R_{DF0_sx}. Si ha quindi:

$R_{ABeq\_sx} = R_3 + R_{DF0\_sx} = 20\ \Omega$.

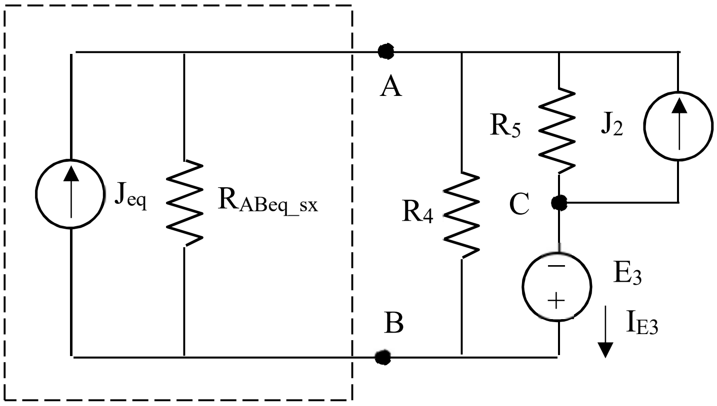
Si considera la sola parte di rete a sinistra della porta AB e si calcola la tensione a vuoto alla porta AB, cioè per corrente alla porta AB pari a zero. Per corrente alla porta AB pari a zero, sono pari a zero le correnti (e quindi le tensioni) dei resistori ideali aventi resistenza R_{DFeq_sx} e R_3 rispettivamente. Si ha quindi che:

$V_{AB0\_sx} = -E_2 + V_{DB0\_sx} = -80$ V.

Della rete a sinistra della porta AB è stato calcolato lo schema equivalente applicando il teorema di Thevenin e si è trovato che è equivalente alla porta AB alla serie di un generatore ideale di tensione avente tensione impressa $V_{AB0\_sx} = -80$ V con un resistore ideale avente resistenza $R_{ABeq\_sx} = 20\ \Omega$. Si ottiene la rete seguente.



Della rete a sinistra della porta AB, si calcola lo schema equivalente dato dal parallelo di un generatore ideale di corrente e un resistore ideale.



Con il riferimento indicato in figura per J_{eq}, si ha che:

$J_{eq} = \frac{V_{AB\ \_sx}}{R_{ABeq\_sx}} = -4$ A

I nodi della rete sono A, B, C. Avendo preso il nodo A come nodo di massa, si pone quindi pari a zero il potenziale del nodo A: $V_A=0$.

Si scrivono le equazioni del metodo dei potenziali ai nodi sui nodi B e C.

Per il nodo B: $\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_4}\right) V_B = -J_{eq} + I_{E3}$

Per il nodo C: $\frac{1}{R_5} V_C = -J_2 - I_{E3}$

Si scrive l'equazione del lato anomalo rispetto al metodo, cioè:

$$E_3 = V_B - V_C$$

Risolvendo il sistema, si ottiene:

$$\left(\frac{1}{R_{ABeq\_sx}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) V_B = \frac{E_3}{R_5} - J_{eq} - J_2$$

Si mettono i valori e si ottiene:

$V_B = 24$ V.

$V_C = -176$ V.