Dispensa esercizi 2 – A.A. 2024/2025

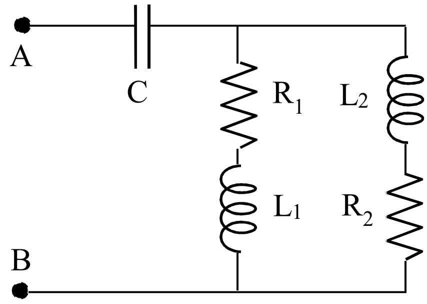
prof. Daniele Desideri

Padova, settembre 2024

Cap. 2 RETI DI BIPOLI IN REGIME SINUSOIDALE

Esercizio 1. *Impedenza equivalente*

Calcolare l'impedenza equivalente tra A e B della rete di figura a regime sinusoidale alla pulsazione ω. Della rete di figura sono noti i parametri R_1, R_2, L_1, L_2, C e il valore di ω.



Dati:

C = 25 μF; L_1 = 60 mH; L_2 = 20 mH; R_1 = 60 Ω; R_2 = 20 Ω; ω = 1000 rad/s

Risultato: $\dot{Z}_{AB} = 15 - j25$

Soluzione

Si calcolano le impedenze dei bipoli ideali passivi della rete.

$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 60; \dot{Z}_{R2} = R_2 = 20$;

$\dot{Z}_{L1} = j\omega L_1 = j60; \dot{Z}_{L2} = j\omega L_2 = j20$; $\dot{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j40.$

La serie del resistore ideale avente resistenza R_1 con l'induttore ideale avente induttanza L_1 equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_{L1} = 60(1 + j)$

La serie del resistore ideale avente resistenza R_2 con l'induttore ideale avente induttanza L_2 equivale a un bipolo la cui impedenza è: $\dot{Z}_2 = \dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{L2} = 20(1 + j)$

Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_2$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

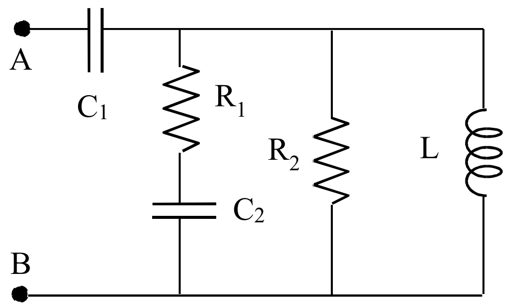
$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{60(1 + j)20(1 + j)}{80(1 + j)} = 15(1 + j)$$

Infine, la serie del condensatore ideale avente capacità C con il bipolo avente impedenza $\dot{Z}_3$ è un bipolo la cui impedenza è:

$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_C + \dot{Z}_3 = 15 + j15 - j40 = 15 - j25$

Esercizio 2. *Impedenza equivalente*

Calcolare l'impedenza equivalente tra A e B della rete di figura a regime sinusoidale alla pulsazione ω. Della rete di figura sono noti i parametri R_1, R_2, C_1, C_2, L e il valore di ω.



Dati:

C_1 = 20 μF; C_2 = 50 μF; L = 20 mH; R_1 = 10 Ω; R_2 = 40 Ω; ω = 2000 rad/s

Risultato: $\dot{Z}_{AB} = 12 - j29$

Soluzione

Si calcolano le impedenze dei bipoli ideali passivi della rete.

$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 10; \dot{Z}_{R2} = R_2 = 40$;

$\dot{Z}_{C1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j25; \dot{Z}_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j10$; $\dot{Z}_L = j\omega L = j40.$

La serie del resistore ideale avente resistenza R_1 con il condensatore ideale avente capacità C_2 equivale a un bipolo la cui impedenza e la cui ammettenza sono rispettivamente:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_{C2} = 10(1-j) \ ; \dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{10(1-j)}\frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{1+j}{20}$$

Il resistore ideale avente resistenza R_2 e l'induttore ideale avente induttanza L hanno rispettivamente ammettenza:

$$\dot{Y}_{R2} = \frac{1}{\dot{Z}_{R2}} = \frac{1}{40} \ ; \dot{Y}_L = \frac{1}{\dot{Z}_L} = \frac{1}{j40} = -j\frac{1}{40}$$

Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente ammettenza $\dot{Y}_1$, $\dot{Y}_{R2}$ e $\dot{Y}_L$ equivale a un bipolo la cui ammettenza è:

$$\dot{Y}_2 = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_{R2} + \dot{Y}_L = \frac{1+j}{20} + \frac{1}{40} - j\frac{1}{40} = \frac{2+j2+1-j}{40} = \frac{3+j}{40}$$

L'impedenza di tale bipolo equivalente è:

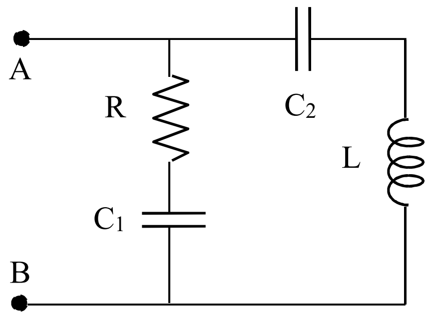
$$\dot{Z}_2 = \frac{1}{\dot{Y}_2} = \frac{40}{(3+j)}\frac{(3-j)}{(3-j)} = \frac{40(3-j)}{10} = 4(3-j)$$

Infine, la serie del condensatore ideale avente capacità C_1 con il bipolo avente impedenza $\dot{Z}_2$ è un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_{AB} = \dot{Z}_{C1} + \dot{Z}_2 = -j25 + 12 - j4 = 12 - j29$$

Esercizio 3. *Impedenza equivalente*

Calcolare l'impedenza equivalente tra A e B della rete di figura a regime sinusoidale alla pulsazione ω. Della rete di figura sono noti i parametri R, C_1, C_2, L e il valore di ω.



Dati:

$C_1 = 40\ \mu F$; $C_2 = 20\ \mu F$; $L = 100$ mH; $R = 50\ \Omega$; $\omega = 500$ rad/s

Risultato: $\dot{Z}_{AB} = 10 - j30$

Soluzione

Si calcolano le impedenze dei bipoli ideali passivi della rete.

$\dot{Z}_R = R = 50$;

$\dot{Z}_{C1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j50$; $\dot{Z}_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j100$; $\dot{Z}_L = j\omega L = j50$.

La serie del resistore ideale avente resistenza R con il condensatore ideale avente capacità C_1 equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_R + \dot{Z}_{C1} = 50(1 - j)$$

La serie del condensatore ideale avente capacità C_2 con l'induttore ideale avente induttanza L equivale a un bipolo la cui impedenza è:

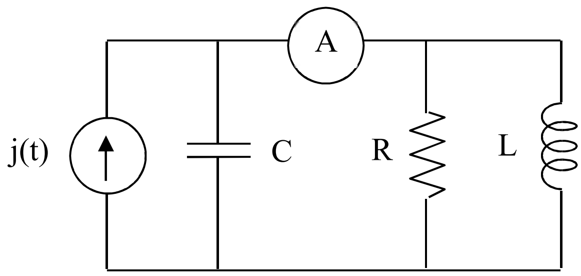
$$\dot{Z}_2 = \dot{Z}_{C2} + \dot{Z}_L = -j50$$

Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_2$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_{AB} = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{50(1-j)(-j50)}{50(1-j2)} = \frac{50(-1-j)}{(1-j2)}\frac{(1+j2)}{(1+j2)} = 10 - j30$$

Esercizio 4. *Amperometro ideale a valore efficace*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e la corrente sinusoidale impressa j(t) = $\sqrt{2}$ J sen(ωt+β). Calcolare il valore I_A misurato dall'amperometro ideale a valore efficace.



Dati:

J = 20 A; β = π/2 rad; R = 10 Ω; L = 20 mH; C = 100 μF; ω = 500 rad/s

Risultato: $I_A = 8\sqrt{10}$ A

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze impresse sinusoidali:

$\bar{J} = Je^{j\beta} = 20e^{j\frac{\pi}{2}} = 20\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j20$

Impedenze dei bipoli passivi:

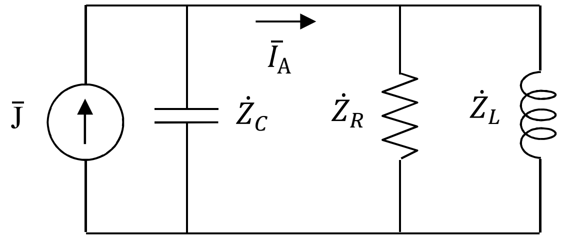
$\dot{Z}_R = R = 10$

$\dot{Z}_C = -j\dfrac{1}{\omega C} = -j20$

$\dot{Z}_L = j\omega L = j10$

L'amperometro ideale a valore efficace equivale a un cortocircuito. Misura il valore efficace della corrente del lato dove è inserito: pertanto è lo stesso scegliere per tale corrente un riferimento o il suo opposto, dato che il valore efficace della corrente non cambia quando si prende il riferimento opposto.

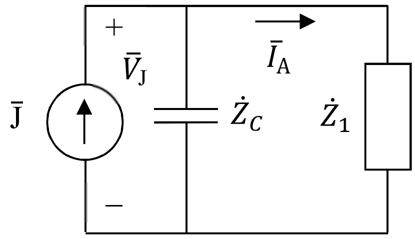
Si prende per il fasore $\bar{I}_A$ il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura.



Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_L$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_R\dot{Z}_L}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_L} = \frac{10\,j10}{10 + j10} = \frac{j10}{1 + j} = \frac{j10}{(1 + j)}\frac{(1 - j)}{(1 - j)} = 5(1 + j)$$

Si convenziona il generatore ideale simbolico di corrente con la convenzione dei generatori: si ha il riferimento per il fasore $\bar{V}_\mathrm{J}$ indicato in figura.



I bipoli che hanno rispettivamente impedenza $\dot{Z}_C$ e $\dot{Z}_1$ sono in parallelo e tale parallelo equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_C\dot{Z}_1}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_1} = \frac{-j20(1 + j)5}{5 - j15} = \frac{-j20(1 + j)}{(1 - j3)}\frac{(1 + j3)}{(1 + j3)} = 4(2 + j)$$

Il fasore $\bar{V}_\mathrm{J}$ è quindi:

$$\bar{V}_\mathrm{J} = \dot{Z}_2\bar{\mathrm{J}} = 4(2 + j)j20 = 80(-1 + j2)$$

Si calcola quindi il fasore $\bar{I}_A$:

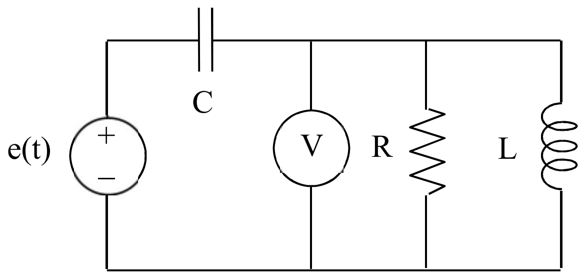
$$\bar{I}_A = \frac{\bar{V}_\mathrm{J}}{\dot{Z}_1} = \frac{80(-1 + j2)}{5(1 + j)} = 16\frac{(-1 + j2)}{(1 + j)}\frac{(1 - j)}{(1 - j)} = 8(1 + j3)$$

L'amperometro ideale a valore efficace misura il valore efficace della corrente del lato dove è inserito. Si calcola il modulo del fasore $\bar{I}_A$:

$$I_A = |\bar{I}_A| = 8\sqrt{10}\ \mathrm{A}$$

Esercizio 5. *Voltmetro ideale a valore efficace*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e la tensione sinusoidale impressa e(t) = $\sqrt{2}$ E sen(ωt+α). Calcolare il valore V_V misurato dal voltmetro ideale a valore efficace.



Dati:

E = 100 V; α = π/4 rad; R = 10 Ω; L = 20 mH; C = 100 μF; ω = 500 rad/s
Risultato: $V_V = 20\sqrt{5}$ V

Soluzione
Si calcola la rete simbolica.
Fasori delle grandezze impresse sinusoidali:

$$\bar{E} = \mathrm{E}e^{j\propto} = 100e^{j\frac{\pi}{4}} = 100\left(\cos\frac{\pi}{4} + jsen\frac{\pi}{4}\right) = 50\sqrt{2}(1+j)$$

Impedenze dei bipoli passivi:

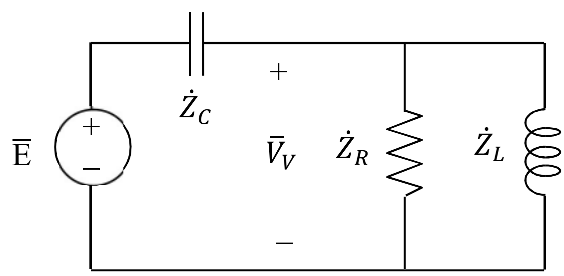
$$\dot{Z}_R = R = 10$$

$$\dot{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j20$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = j10$$

Il voltmetro ideale a valore efficace equivale a un circuito aperto. Misura il valore efficace della tensione tra i due nodi a cui è collegato: pertanto è lo stesso scegliere per tale tensione un riferimento o il suo opposto, dato che il valore efficace della tensione non cambia quando si prende il riferimento opposto.

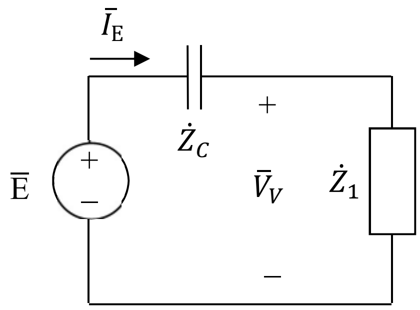
Si prende per il fasore $\bar{V}_V$ il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura.



Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_L$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_L}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_L} = \frac{10\,j10}{10 + j10} = \frac{j10}{1 + j} = \frac{j10}{(1 + j)}\frac{(1 - j)}{(1 - j)} = 5(1 + j)$$

Si convenziona il generatore ideale simbolico di tensione con la convenzione dei generatori: si ha il riferimento per il fasore $\bar{I}_E$ indicato in figura.



I bipoli che hanno impedenza rispettivamente $\dot{Z}_C$ e $\dot{Z}_1$ sono in serie e tale serie equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_S = \dot{Z}_C + \dot{Z}_1 = -j20 + 5(1 + j) = 5 - j15 = 5(1 - j3)$$

Il fasore $\bar{I}_E$ è quindi:

$$\bar{I}_{\mathrm{E}} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_S} = \frac{50\sqrt{2}(1 + j)}{5(1 - j3)} = \frac{10\sqrt{2}(1 + j)(1 + j3)}{(1 - j3)(1 + j3)} = 2\sqrt{2}(-1 + j2)$$

Si calcola quindi il fasore $\bar{V}_V$:

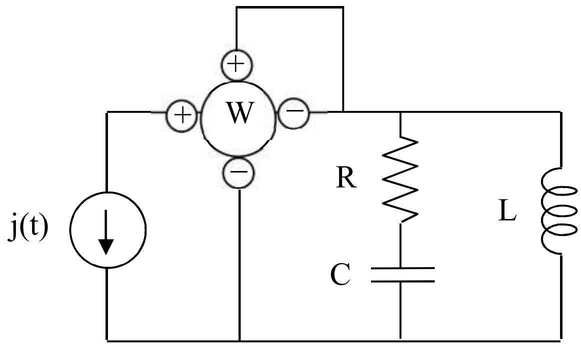
$$\bar{V}_V = \dot{Z}_1 \bar{I}_{\mathrm{E}} = 5(1 + j)2\sqrt{2}(-1 + j2) = 10\sqrt{2}(-3 + j)$$

Il voltmetro ideale a valore efficace misura il valore efficace della tensione tra i due nodi a cui è collegato. Si calcola il modulo del fasore $\bar{V}_V$:

$$V_V = |\bar{V}_V| = 20\sqrt{5} \quad \mathrm{V}$$

Esercizio 6. *Wattmetro ideale a valore medio*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e la corrente sinusoidale impressa $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t+\beta)$. Calcolare il valore P_W misurato dal wattmetro ideale a valore medio.



Dati:

$J = 5\sqrt{2}$ A; $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad; R = 10 Ω; L = 20 mH; C = 100 μF; ω = 1000 rad/s

Risultato: $P_W = 1000$ W

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasore della corrente sinusoidale impressa:

$$\bar{J} = Je^{j\beta} = 5\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + j sen\frac{\pi}{4}\right) = 5(1+j)$$

Impedenze dei bipoli passivi:

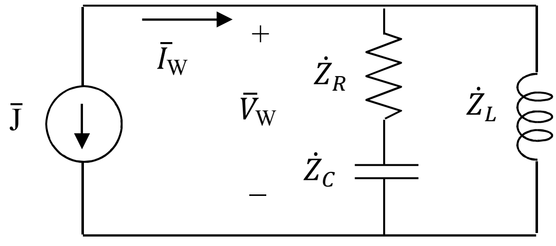
$$\dot{Z}_R = R = 10$$

$$\dot{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = j20$$

Per quanto riguarda il wattmetro ideale a valore medio, il tratto di circuito tra i morsetti amperometrici equivale a un cortocircuito mentre quello tra i morsetti voltmetrici equivale a un circuito aperto: nella rete simbolica di figura sono indicati i riferimenti dei morsetti voltmetrici e amperometrici del wattmetro.

La rete simbolica è:



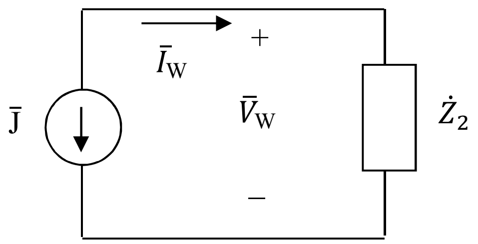
La serie dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_C$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_R + \dot{Z}_C = 10(1-j)$$

Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_1$ e $\dot{Z}_L$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_L}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_L} = \frac{10(1-j)(j20)}{10 - j10 + j20} = \frac{20(1+j)}{1+j} = 20$$

Si ottiene:



Si calcola quindi il fasore $\bar{V}_W$:

$$\bar{V}_W = -\dot{Z}_2 \bar{J} = -100(1+j)$$

Inoltre per il fasore $\bar{I}_W$ vale che:

$$\bar{I}_W = -\bar{J} = -5(1+j)$$

La potenza complessa alla porta del wattmetro, con i riferimenti del wattmetro, risulta quindi:

$$\dot{S}_W = \bar{V}_W \bar{I}_W^* = -100(1+j)(-5)(1-j) = 1000 + j0$$

Il wattmetro ideale a valore medio misura la potenza attiva, che è pari alla parte reale della potenza complessa calcolata con i riferimenti del wattmetro:

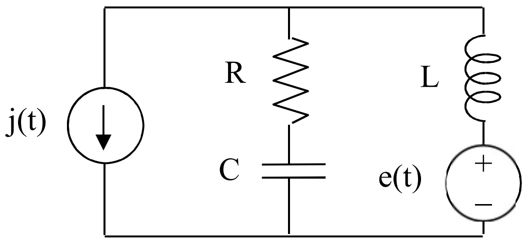
$$P_W = Re\{\dot{S}_W\} = 1000\ W$$

Esercizio 7. *Sovrapposizione degli effetti*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

e(t) = $\sqrt{2}\, E \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$; j(t) = $\sqrt{2}$ J $\operatorname{sen}(\omega t)$.

Calcolare la potenza reattiva Q_C entrante nel condensatore ideale avente capacità C.



Dati:

E = $100\sqrt{2}$ V; J = 4 A; R = 50 Ω; L = 200 mH; C = 40 μF; ω = 500 rad/s

Risultato: $Q_C = -1000$ VAR

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Si osserva che: e(t) = $\sqrt{2}\, E \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\, E \operatorname{sen}(\omega t + \frac{3\pi}{4})$.

Fasori delle grandezze sinusoidali impresse.

$$\bar{E} = \mathrm{E}e^{j\frac{3\pi}{4}} = 100\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + jsen\frac{3\pi}{4}\right) = 100\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100(-1+j)$$

$$\bar{J} = \mathrm{J}e^{j0} = 4 = 4 + j0$$

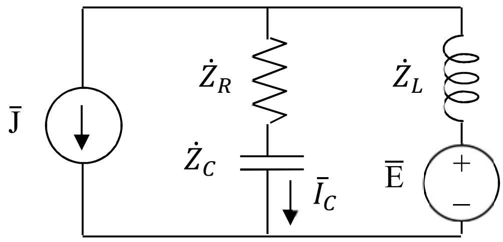
Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 50$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j50$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j100$$

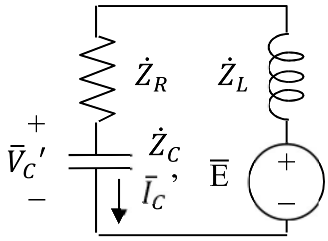
La rete simbolica è riportata di seguito.



Si calcola il fasore $\bar{I}_C$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura.

Si applica la sovrapposizione degli effetti.

Agisce il generatore ideale simbolico di tensione ed è spento il generatore ideale simbolico di corrente. Si ottiene la rete di figura.



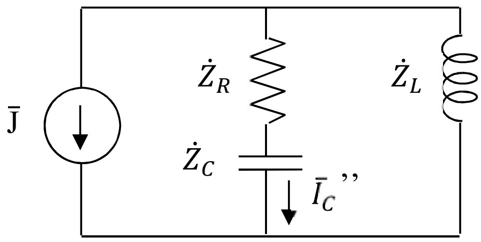
Si calcola quindi il fasore $\bar{V}_C$':

$\bar{V}_C' = \bar{E}\frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L+\dot{Z}_C} = 100$

Ne consegue che $\bar{I}_C$' è:

$\bar{I}_C' = \frac{\bar{V}_C'}{\dot{Z}_C} = j2$

Agisce il generatore ideale simbolico di corrente ed è spento il generatore ideale simbolico di tensione. Si ottiene la rete di figura.



Si calcola quindi il fasore $\bar{I}_C$'':

$\bar{I}_C'' = -\bar{J}\frac{\dot{Z}_L}{(\dot{Z}_R+\dot{Z}_C)+\dot{Z}_L} = -4\,(1+j)$

Ne consegue che $\bar{I}_C$ è:

$\bar{I}_C = \bar{I}_C' + \bar{I}_C'' = -4 - j\,2$

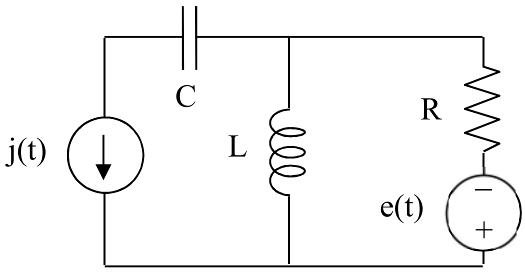
Il valore efficace è: $I_C = |\bar{I}_C| = 2\sqrt{5}$ A.
Si ha quindi: $Q_C = X_C I_C^2 = -1000$ VAR

Esercizio 8. *Sovrapposizione degli effetti*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

e(t) = $\sqrt{2}\,E\ \mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; j(t) = $\sqrt{2}$ J $\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.

Calcolare la potenza reattiva Q_L entrante nell'induttore ideale avente induttanza L.



Dati:

E = 50 V; α = $\frac{\pi}{2}$ rad; J = $2\sqrt{2}$ A; β = $-\frac{\pi}{4}$ rad; R = 10 Ω; L = 10 mH; C = 50 μF; ω = 2000 rad/s

Risultato: $Q_L = 52$ VAR

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze sinusoidali impresse.

$$\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\alpha} = 50e^{j\frac{\pi}{2}} = 50\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j50$$

$$\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{J}e^{j\beta} = 2\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + jsen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2(1-j)$$

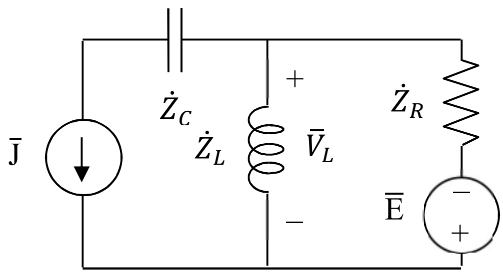
Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 10$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j20$$

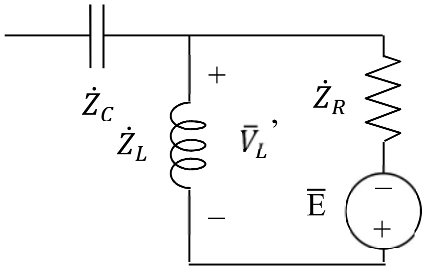
La rete simbolica è riportata di seguito.



Si calcola il fasore $\bar{V}_L$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura.

Si applica la sovrapposizione degli effetti.

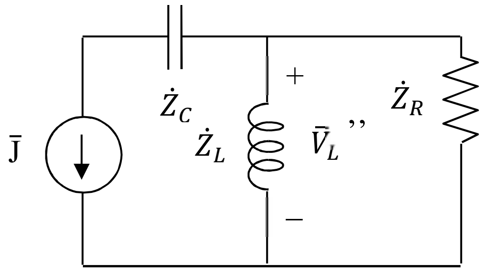
Agisce il generatore ideale simbolico di tensione ed è spento il generatore ideale simbolico di corrente. Si ottiene la rete di figura.



Si calcola quindi il fasore $\bar{V}_L$':

$\bar{V}_L' = -\bar{E}\frac{\dot{Z}_L}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L} = 20(1–j2)$

Agisce il generatore ideale simbolico di corrente ed è spento il generatore ideale simbolico di tensione. Si ottiene la rete di figura.



Si calcola quindi il fasore $\bar{V}_L$'':

$\bar{V}_L'' = -\bar{J}\frac{\dot{Z}_R\dot{Z}_L}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L} = 8(-3 + j)$

Ne consegue che $\bar{V}_L$ è:

$\bar{V}_L = \bar{V}_L' + \bar{V}_L'' = -4\,(1 + j\,8)$

Il valore efficace è: $V_L = |\bar{V}_L| = 4\sqrt{65}$ V.

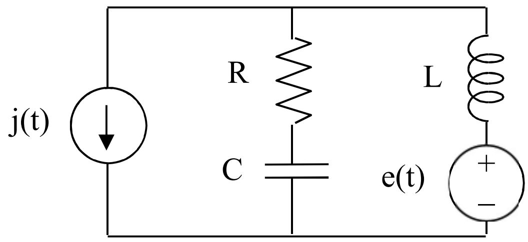
Si ha quindi: $Q_L = \frac{V_L^2}{X_L} = 52$ VAR

Esercizio 9. *Correnti di anello*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

e(t) = $\sqrt{2}\,E\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$; j(t) = $\sqrt{2}$ J $\mathrm{sen}(\omega t)$.

Calcolare la potenza reattiva Q_C entrante nel condensatore ideale avente capacità C.



Dati:

E = 100$\sqrt{2}$ V; J = 4 A; R = 50 Ω; L = 200 mH; C = 40 μF; ω = 500 rad/s
Risultato: $Q_C = -1000$ VAR

Soluzione
Si tratta dell'esercizio che era già stato risolto con la sovrapposizione degli effetti e che ora viene risolto con il metodo delle correnti di anello.
Si calcola la rete simbolica.
Si osserva che: e(t) = $\sqrt{2}\,E\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \frac{3\pi}{4})$.
Fasori delle grandezze sinusoidali impresse.

$$\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\frac{3\pi}{4}} = 100\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + jsen\frac{3\pi}{4}\right) = 100\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100(-1+j)$$

$$\overline{\mathrm{J}} = \mathrm{J}e^{j0} = 4 = 4 + j0$$

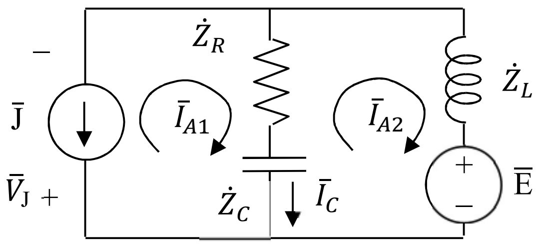
Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 50$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j50$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j100$$

La rete simbolica è riportata di seguito. Si calcola il fasore $\overline{I_C}$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura. Si applica il metodo delle correnti di anello. Si orientano le due correnti di anello allo stesso modo: per esempio in verso orario.



Si ha:

$$\begin{cases} (\dot{Z}_R + \dot{Z}_C)\bar{I}_{A1} - (\dot{Z}_R + \dot{Z}_C)\bar{I}_{A2} = -\bar{V}_{\mathrm{J}} \\ (\dot{Z}_R + \dot{Z}_C + \dot{Z}_L)\bar{I}_{A2} - (\dot{Z}_R + \dot{Z}_C)\bar{I}_{A1} = -\bar{E} \\ \bar{I}_{A1} = -\bar{\mathrm{J}} \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\bar{I}_{A1} = -\bar{\mathrm{J}} = -4$$

$$\bar{I}_{A2} = \frac{(\dot{Z}_R + \dot{Z}_C)\bar{I}_{A1} - \bar{E}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_C + \dot{Z}_L} = \frac{-200(1-j) + 100(1-j)}{50(1+j)} = -2\frac{(1-j)}{(1+j)}\frac{(1-j)}{(1-j)} = j2$$

Si ha:

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{A1} - \bar{I}_{A2} = -4 - j2$$

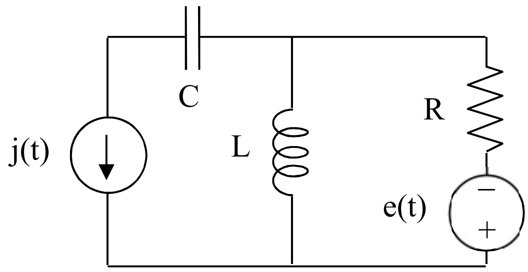
Il valore efficace è: $I_C = |\bar{I}_C| = 2\sqrt{5}$ A.
Si ha quindi: $Q_C = X_C I_C^2 = -1000$ VAR

Esercizio 10. *Correnti di anello*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

e(t) = $\sqrt{2}\,E\ \text{sen}(\omega t + \alpha)$; j(t) = $\sqrt{2}$ J $\text{sen}(\omega t + \beta)$.

Calcolare la potenza reattiva Q_L entrante nell'induttore ideale avente induttanza L.



Dati:

E = 50 V; α = $\frac{\pi}{2}$ rad; J = $2\sqrt{2}$ A; β = $-\frac{\pi}{4}$ rad; R = 10 Ω; L = 10 mH; C = 50 μF; ω = 2000 rad/s

Risultato: $Q_L = 52$ VAR

Soluzione

Si tratta dell'esercizio che era già stato risolto con la sovrapposizione degli effetti e che ora viene risolto con il metodo delle correnti di anello.
Si calcola la rete simbolica.
Fasori delle grandezze sinusoidali impresse.

$$\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\alpha} = 50e^{j\frac{\pi}{2}} = 50\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j50$$

$$\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{J}e^{j\beta} = 2\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + jsen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2(1-j)$$

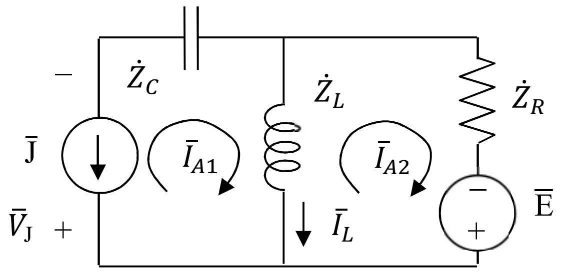
Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 10$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j20$$

La rete simbolica è riportata di seguito. Si calcola il fasore $\bar{I}_L$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura. Si applica il metodo delle correnti di anello. Si orientano le due correnti di anello allo stesso modo: per esempio in verso orario.



Si ha:

$$\begin{cases}(\dot{Z}_L+\dot{Z}_C)\bar{I}_{A1}-\dot{Z}_L\bar{I}_{A2}=-\bar{V}_{\mathrm{J}}\\(\dot{Z}_R+\dot{Z}_L)\bar{I}_{A2}-\dot{Z}_L\bar{I}_{A1}=\bar{E}\\\bar{I}_{A1}=-\bar{\mathrm{J}}\end{cases}$$

Si ottiene:

$$\bar{I}_{A1}=-\bar{\mathrm{J}}=-2(1-j)$$

$$\bar{I}_{A2}=\frac{\dot{Z}_L\bar{I}_{A1}+\bar{E}}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L}=\frac{-j40(1-j)+j50}{10(1+j2)}=\frac{(-4+j)}{(1+j2)}\frac{(1-j2)}{(1-j2)}=\frac{-2+j9}{5}$$

Si ha:

$$\bar{I}_L=\bar{I}_{A1}-\bar{I}_{A2}=\frac{-8+j}{5}$$

Il valore efficace è: $I_L=|\bar{I}_L|=\frac{\sqrt{65}}{5}$ A.

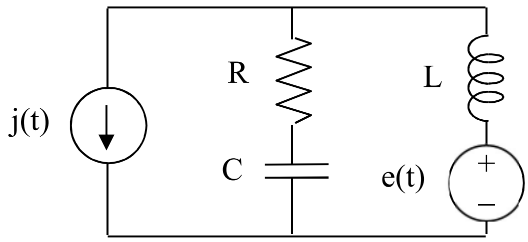
Si ha quindi: $Q_L=X_LI_L^2=52$ VAR

Esercizio 11. *Potenziali ai nodi*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

e(t) = $\sqrt{2}\,E\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$; j(t) = $\sqrt{2}$ J $\text{sen}(\omega t)$.

Calcolare la potenza reattiva Q_C entrante nel condensatore ideale avente capacità C.



Dati:

E = 100$\sqrt{2}$ V; J = 4 A; R = 50 Ω; L = 200 mH; C = 40 μF; ω = 500 rad/s
Risultato: $Q_C = -1000$ VAR

Soluzione
Si tratta dell'esercizio che era già stato risolto con la sovrapposizione degli effetti e con il metodo delle correnti di anello e che ora viene risolto con il metodo dei potenziali ai nodi.
Si calcola la rete simbolica.
Si osserva che: e(t) = $\sqrt{2}\,E\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,E\,\text{sen}(\omega t + \frac{3\pi}{4})$.
Fasori delle grandezze sinusoidali impresse.

$$\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\frac{3\pi}{4}} = 100\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + jsen\frac{3\pi}{4}\right) = 100\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 100(-1+j)$$

$$\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{J}e^{j0} = 4 = 4 + j0$$

Impedenze e ammettenze dei bipoli passivi.

$\dot{Z}_R = R = 50$; $\dot{Y}_R = G = \frac{1}{R} = \frac{1}{50}$

$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j50$; $\dot{Y}_C = jB_C = j\omega C = j\frac{1}{50}$

$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j100$; $\dot{Y}_L = jB_L = -j\frac{1}{\omega L} = -j\frac{1}{100}$

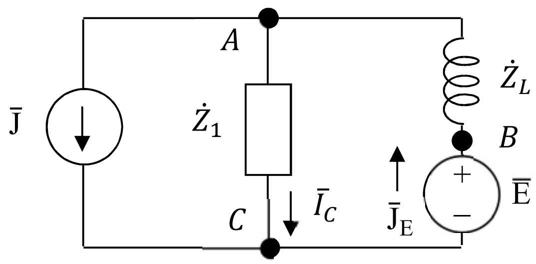
La serie dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_C$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_R + \dot{Z}_C = 50(1-j)$$

L'ammettenza di tale bipolo equivalente è:

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{50(1-j)}\frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{1+j}{100}$$

La rete simbolica è riportata di seguito. Si calcola il fasore $\bar{I}_C$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura. Si applica il metodo dei potenziali ai nodi.



Si assegna a un nodo, ad esempio al nodo C, potenziale simbolico nullo. Si ha: $\bar{V}_C = 0$.

Si scrive:

$$\begin{cases} (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_L)\bar{V}_A - \dot{Y}_L\bar{V}_B = -\bar{J} \\ \dot{Y}_L\bar{V}_B - \dot{Y}_L\bar{V}_A = \bar{J}_E \\ \bar{V}_B = \bar{E} \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\bar{V}_B = \bar{E} = 100(-1 + j)$$

$$\bar{V}_A = \frac{\dot{Y}_L\bar{V}_B - \bar{J}}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_L} = \frac{-j(-1 + j) - 4}{\frac{1}{100}} = 100(-3 + j)$$

Si ha:

$$\bar{V}_{AC} = \bar{V}_A - \bar{V}_C = \bar{V}_A = 100(-3 + j)$$

Si ha:

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{V}_{AC}}{\dot{Z}_1} = \frac{100(-3 + j)}{50(1 - j)} = \frac{2(-3 + j)}{(1 - j)}\frac{(1 + j)}{(1 + j)} = -4 - j2$$

Il valore efficace è: $I_C = |\bar{I}_C| = 2\sqrt{5}$ A.

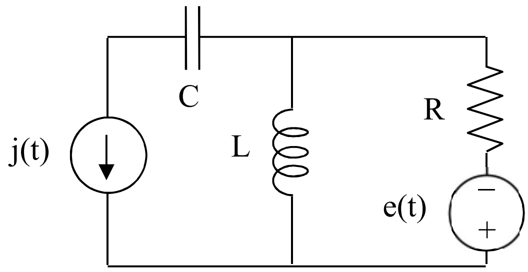
Si ha quindi: $Q_C = X_C I_C^2 = -1000$ VAR

Esercizio 12. *Potenziali ai nodi*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

e(t) = $\sqrt{2}\, E\ \mathrm{sen}(\omega t+\alpha)$; j(t) = $\sqrt{2}$ J $\mathrm{sen}(\omega t+\beta)$.

Calcolare la potenza reattiva Q_L entrante nell'induttore ideale avente induttanza L.



Dati:

E = 50 V; α = $\frac{\pi}{2}$ rad; J = $2\sqrt{2}$ A; β = $-\frac{\pi}{4}$ rad; R = 10 Ω; L = 10 mH; C = 50 μF; ω = 2000 rad/s
Risultato: $Q_L = 52$ VAR

Soluzione

Si tratta dell'esercizio che era già stato risolto con la sovrapposizione degli effetti e con il metodo delle correnti di anello e che ora viene risolto con il metodo dei potenziali ai nodi.
Si calcola la rete simbolica.
Fasori delle grandezze sinusoidali impresse.

$$\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{E}e^{j\alpha} = 50e^{j\frac{\pi}{2}} = 50\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j50$$

$$\bar{\mathrm{J}} = \mathrm{J}e^{j\beta} = 2\sqrt{2}\,e^{-j\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + jsen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2(1-j)$$

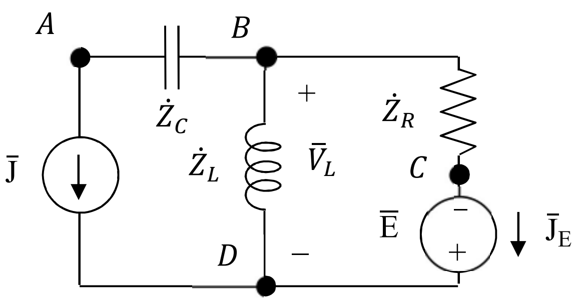
Impedenze e ammettenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 10 : \dot{Y}_R = G = \frac{1}{R} = \frac{1}{10}$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10\ ; \dot{Y}_C = jB_C = j\omega C = j\frac{1}{10}$$

$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j20\ ; \dot{Y}_L = jB_L = -j\frac{1}{\omega L} = -j\frac{1}{20}$$

La rete simbolica è riportata di seguito. Si calcola il fasore $\bar{V}_L$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura. Si applica il metodo dei potenziali ai nodi.



Si assegna a un nodo, ad esempio al nodo D, potenziale simbolico nullo. Si ha: $\bar{V}_D = 0$.

Si scrive il sistema:

$$\begin{cases} \dot{Y}_C\bar{V}_A - \dot{Y}_C\bar{V}_B = -\bar{J} \\ (\dot{Y}_C + \dot{Y}_L + \dot{Y}_R)\bar{V}_B - \dot{Y}_C\bar{V}_A - \dot{Y}_R\bar{V}_C = 0 \\ \dot{Y}_R\bar{V}_C - \dot{Y}_R\bar{V}_B = -\bar{J}_E \\ \bar{V}_C = -\bar{E} \end{cases}$$

Si ottiene:

$\bar{V}_C = -\bar{E} = -j50$

Sommando le prime due relazioni del sistema e mettendo i valori, si ha:

$$\bar{V}_B = \frac{\dot{Y}_R\bar{V}_C - \bar{J}}{\dot{Y}_L + \dot{Y}_R} = \frac{-j5 - 2 + j2}{\frac{1}{10} - j\frac{1}{20}} = 20\frac{(-2 - j3)}{(2 - j)}\frac{(2 + j)}{(2 + j)} = -4(1 + j8)$$

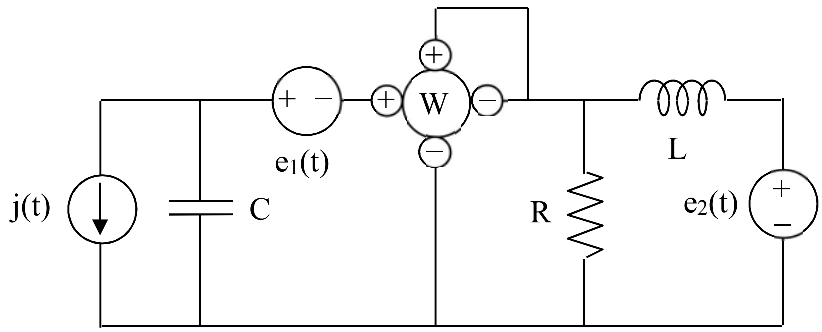
Si ha:

$\bar{V}_L = \bar{V}_{BD} = \bar{V}_B - \bar{V}_D = \bar{V}_B = -4(1 + j8)$

Il valore efficace è: $V_L = |\bar{V}_L| = 4\sqrt{65}$ V.

Si ha quindi: $Q_L = \frac{V_L^2}{X_L} = 52$ VAR

Esercizio 13. *Teorema di Thevenin simbolico*
La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:
$e_1(t) = \sqrt{2}\,E_1\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; $e_2(t) = \sqrt{2}\,E_2\cos(\omega t + \gamma)$; $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.
Determinare:
-) il valore P_W misurato dal wattmetro ideale a valore medio;



E_1 = 15 V; $\alpha = \pi/2$ rad; $E_2 = 5\sqrt{2}$ V; $\gamma = \pi/4$ rad; J = 4 A; $\beta = \pi/2$ rad; R = 10 Ω; L = 10 mH; C = 200 μF; ω = 1000 rad/s

Risultati: P_W = 140 W

Soluzione

Si esprimono tutte le funzioni sinusoidali allo stesso modo: $e_2(t) = \sqrt{2}E_2 sen\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right)$
Si calcola la rete simbolica.
Fasori delle grandezze sinusoidali impresse:

$$\bar{E}_1 = E_1 e^{j\alpha} = 15e^{j\frac{\pi}{2}} = 15\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j15$$

$$\bar{E}_2 = E_2 e^{j(\gamma+\frac{\pi}{2})} = 5\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + jsen\frac{3\pi}{4}\right) = 5(-1+j)$$

$$\bar{J} = Je^{j\beta} = 4e^{j\frac{\pi}{2}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j4$$

Impedenze dei bipoli passivi:

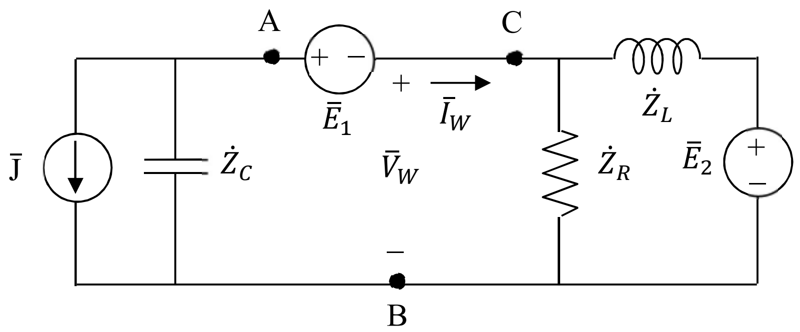
$$\dot{Z}_R = R = 10$$

$$\dot{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j5$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = j10$$

Per quanto riguarda il wattmetro ideale, il tratto di circuito tra i morsetti amperometrici equivale a un cortocircuito mentre quello tra i morsetti voltmetrici equivale a un circuito aperto: nella rete simbolica di figura sono indicati i riferimenti dei morsetti voltmetrici e amperometrici del wattmetro.

La rete simbolica è:

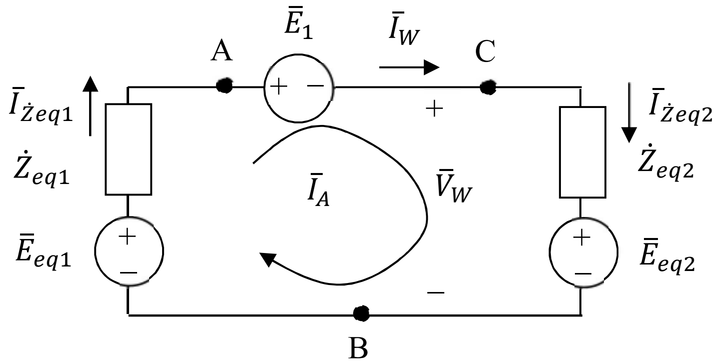


Si applica il Teorema di Thevenin simbolico alla rete simbolica a sinistra della porta AB.
Si ha:
$\dot{Z}_{eq1} = \dot{Z}_C = -j5$
$\bar{E}_{eq1} = -\dot{Z}_C\bar{J} = -20$

Si applica il Teorema di Thevenin simbolico alla rete simbolica a destra della porta CB.
Si ha:
$\dot{Z}_{eq2} = \frac{\dot{Z}_R\dot{Z}_L}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L} = 5(1+j)$

$\bar{E}_{eq2} = \bar{E}_2\frac{\dot{Z}_R}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L} = j5$

Si ottiene così:



Si prende per la corrente dell'anello il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura (fasore $\bar{I}_A$).
Per semplicità, si scelgono i riferimenti per le correnti dei bipoli $\dot{Z}_{eq1}$ e $\dot{Z}_{eq2}$ come indicato in figura (fasore $\bar{I}_{\dot{Z}eq1}$ e fasore $\bar{I}_{\dot{Z}eq2}$) in modo che si ha:
$\bar{I}_A = \bar{I}_{\dot{Z}eq1} = \bar{I}_{\dot{Z}eq2}$.
Si ha:

$$\bar{E}_1 + (\dot{Z}_{eq1} + \dot{Z}_{eq2})\bar{I}_A + \bar{E}_{eq2} - \bar{E}_{eq1} = 0$$

Si ottiene:

$\bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{A}} = \frac{\bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{eq1}} - \bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{eq2}} - \bar{\mathrm{E}}_{1}}{\dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq1}} + \dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq2}}} = -4\ (1+\mathrm{j})$

Si hanno quindi:
$\bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{W}} = \bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{A}} = -4(1 + \mathrm{j})$

$\bar{V}_{W} = \dot{\mathrm{Z}}_{\mathrm{eq2}} \bar{\mathrm{I}}_{\mathrm{A}} + \bar{\mathrm{E}}_{\mathrm{eq2}} = -\mathrm{j}\ 35$

La potenza complessa alla porta del wattmetro, con i riferimenti del wattmetro, risulta quindi:
$\dot{S}_{W} = \bar{V}_{W} \bar{I}_{W}^{*} = -j35(-4 + j4) = 140(1 + j)$
Il wattmetro ideale a valore medio misura la potenza attiva, che è pari alla parte reale della potenza complessa calcolata con i riferimenti del wattmetro:
$P_{W} = Re\{\dot{S}_{W}\} = 140\ W$

Esercizio 14. *Teorema di Thevenin simbolico*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R_1, R_2, R_3, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

$e(t) = \sqrt{2}\, E\, sen(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\, J\, sen(\omega t + \beta)$.

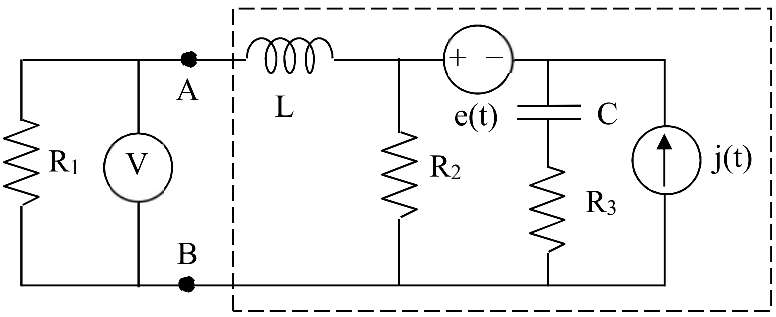
1) Della rete simbolica associata alla rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato) determinare:

-) il valore dell'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{ABeq\_dx}$);

-) il valore del fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($\bar{V}_{AB0\_dx}$).

2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Determinare:

-) il valore V_V misurato dal voltmetro ideale a valore efficace.



Dati: R_1= 10 Ω; R_2= 20 Ω; R_3= 20 Ω; L = 30 mH; C = 25 μF; E = 100 V; α = π/2 rad;

J = = 5 A; β = π/2 rad; ω = 1000 rad/s

Risultati: $\dot{Z}_{ABeq\_dx}$ = 15 + j25 ; $\bar{V}_{AB0\_dx}$ = j100 ; $V_V = 20\sqrt{2}$ V.

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze sinusoidali impresse:

$$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = 100e^{j\frac{\pi}{2}} = 100\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j100$$

$$\bar{J} = Je^{j\beta} = 5\, e^{j\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j5$$

Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 10$$

$$\dot{Z}_{R2} = R_2 = 20$$

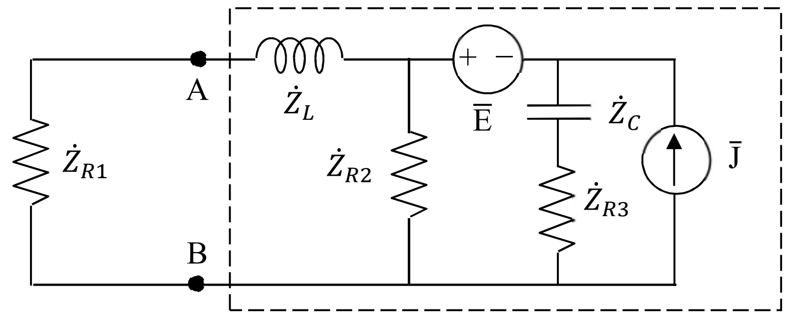
$$\dot{Z}_{R3} = R_3 = 20$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j40$$

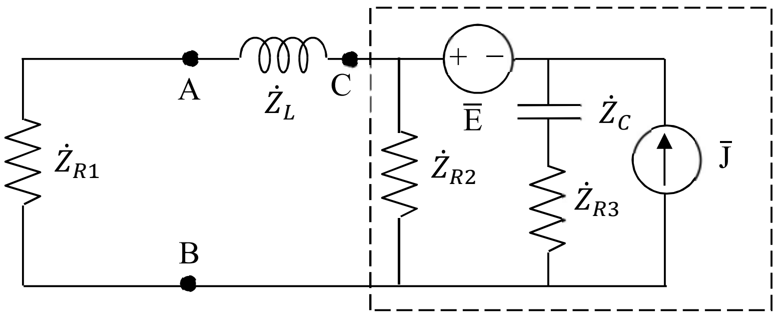
$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j30$$

Il voltmetro ideale a valore efficace equivale a un circuito aperto. Misura il valore efficace della tensione tra i due nodi a cui è collegato, cioè fra i nodi A e B.

La rete simbolica è:



Si applica il teorema di Thevenin simbolico alla rete simbolica a destra della porta AB. Si procede con due analisi successive. Si specifica il nodo C come mostrato in figura.
Si applica prima il teorema di Thevenin simbolico alla rete a destra della porta CB (evidenziata in figura nel riquadro tratteggiato) e poi si procede nell'analisi della rete a destra della porta AB.



Della rete a destra della porta CB, si calcola l'impedenza equivalente alla porta CB. Si spengono i generatori ideali simbolici di tensione e di corrente. Si ottiene che l'impedenza equivalente alla porta CB ($\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}}$) è pari al parallelo tra l'impedenza $\dot{Z}_{R2}$ e la serie delle impedenze $\dot{Z}_C$ e $\dot{Z}_{R3}$:

$$\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}} = \frac{\dot{Z}_{R2}(\dot{Z}_{R3}+\dot{Z}_C)}{\dot{Z}_{R2}+(\dot{Z}_{R3}+\dot{Z}_C)} = 15 - j5$$

Della rete a destra della porta CB, si calcola il fasore della tensione a vuoto alla porta CB con segno + della tensione in C ($\bar{V}_{\text{CB0\_dx}}$), utilizzando ad esempio il metodo della sovrapposizione degli effetti. Si ottiene:

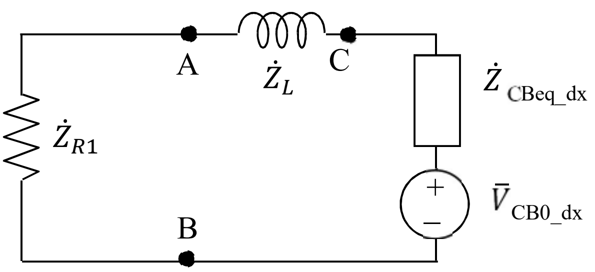
$$\bar{V}_{\text{CB0\_dx}}' = \bar{E}\frac{\dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_{R2}+\dot{Z}_{R3}+\dot{Z}_C} = 25(-1+j)$$

$$\bar{V}_{\text{CB0\_dx}}'' = \bar{J}\frac{\dot{Z}_{R2}(\dot{Z}_{R3}+\dot{Z}_C)}{\dot{Z}_{R2}+(\dot{Z}_{R3}+\dot{Z}_C)} = 25(1+j3)$$

Si ottiene:

$$\bar{V}_{\text{CB0\_dx}} = \bar{V}_{\text{CB0\_dx}}' + \bar{V}_{\text{CB0\_dx}}'' = j100$$

Si ritorna alla rete simbolica complessiva, con lo schema equivalente alla rete simbolica a destra della porta CB ottenuto con il teorema di Thevenin simbolico.



Della rete a destra della porta AB, si calcolano l'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}}$) e il fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($V_{\text{AB0\_dx}}$).

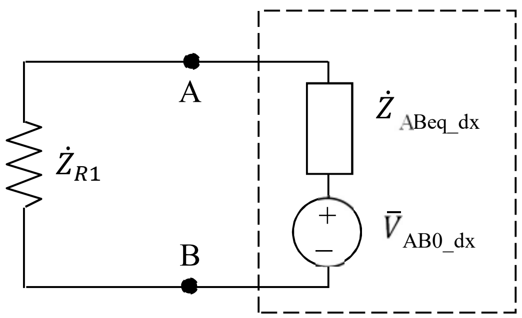
Si considera la sola parte di rete a destra della porta AB e si spegne il generatore ideale simbolico di tensione. Si ottiene che l'impedenza equivalente tra i morsetti A e B è data dalla serie delle impedenze $\dot{Z}_L$ e $\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}}$. Si ha quindi:

$\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = \dot{Z}_L + \dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}} = 15 + j25$

Si considera la sola parte di rete a destra della porta AB e si calcola il fasore della tensione a vuoto alla porta AB, cioè per fasore di corrente alla porta AB pari a zero. Per fasore di corrente alla porta AB pari a zero, sono pari a zero i fasori delle correnti delle impedenze $\dot{Z}_L$ e $\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}}$ e sono quindi pari a zero anche i fasori delle tensioni delle impedenze $\dot{Z}_L$ e $\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}}$. Si ha quindi che:

$\bar{V}_{\text{AB0\_dx}} = \bar{V}_{\text{CB0\_dx}} = j100$

Si ottiene:



Si ha che:

$$\bar{V}_{\text{AB}} = \bar{V}_{\text{AB0\_dx}} \frac{\dot{Z}_{R1}}{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_{ABeq\_dx}} = 20\,(\,1 + j\,)$$

Il voltmetro ideale a valore efficace misura il modulo di $\bar{V}_{AB}$. Si ottiene:

$V_V = |\bar{V}_{AB}| = 20\sqrt{2}\ V$

Esercizio 15. *Teorema di Thevenin simbolico*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R_1, R_2, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

$e(t) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.

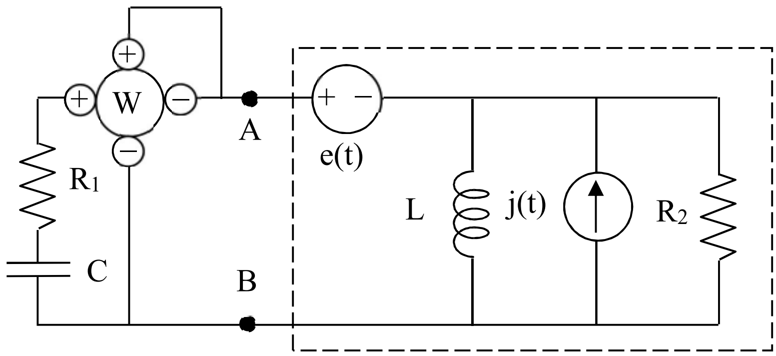
1) Della rete simbolica associata alla rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato) determinare:

-) il valore dell'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{ABeq\_dx}$);

-) il valore del fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($\bar{V}_{AB0\_dx}$).

2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Determinare:

-) il valore P_W misurato dal wattmetro ideale a valore medio.



Dati: R_1= 10 Ω; R_2= 20 Ω; L = 20 mH; C = 100 μF; E = 200 V; α = –π/2 rad;

J = = $5\sqrt{2}$ A; β = π/4 rad; ω = 1000 rad/s

Risultati: $\dot{Z}_{ABeq\_dx}$ = 10 + j10 ; $\bar{V}_{AB0\_dx}$ = – j100 ; P_W = – 250 W.

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze sinusoidali impresse:

$$\bar{E} = Ee^{j\propto} = 200e^{-j\frac{\pi}{2}} = 200\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + jsen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -j200$$

$$\bar{J} = Je^{j\beta} = 5\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}} = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + jsen\frac{\pi}{4}\right) = 5(1+j)$$

Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 10$$

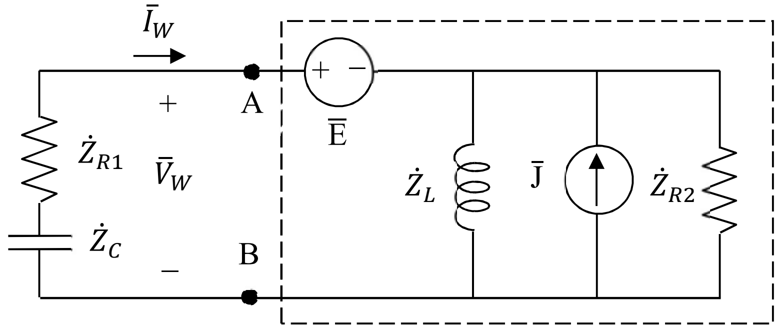
$$\dot{Z}_{R2} = R_2 = 20$$

$$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10$$

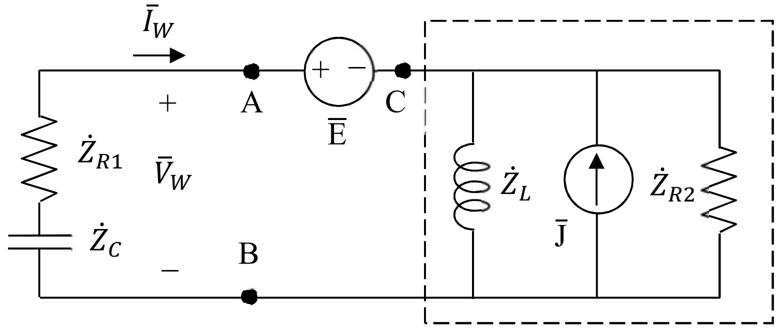
$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j20$$

Per quanto riguarda il wattmetro ideale a valore medio, il tratto di circuito tra i morsetti amperometrici equivale a un cortocircuito mentre quello tra i morsetti voltmetrici equivale a un circuito aperto: nella rete simbolica di figura sono indicati i riferimenti dei morsetti voltmetrici e amperometrici del wattmetro.

La rete simbolica è:



Si applica il teorema di Thevenin simbolico alla rete simbolica a destra della porta AB. Si procede con due analisi successive. Si specifica il nodo C come mostrato in figura.
Si applica prima il teorema di Thevenin simbolico alla rete a destra della porta CB (evidenziata in figura nel riquadro tratteggiato) e poi si procede nell'analisi della rete a destra della porta AB.



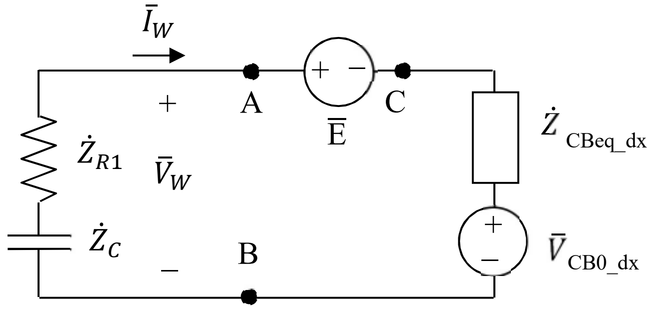
Della rete a destra della porta CB, si calcola l'impedenza equivalente alla porta CB. Si spegne il generatore ideale simbolico di corrente. Si ottiene che l'impedenza equivalente alla porta CB ($\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}}$) è pari al parallelo tra l'impedenza $\dot{Z}_L$ e l'impedenza $\dot{Z}_{R2}$.

$\dot{Z}_{\text{CBeq\_dx}} = \frac{\dot{Z}_L \dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_{R2}} = 10 + j\ 10$

Della rete a destra della porta CB, si calcola il fasore della tensione a vuoto alla porta CB con segno + della tensione in C ($\bar{V}_{\text{CB0\_dx}}$). Si ottiene:

$\bar{V}_{\text{CB0\_dx}} = \bar{J} \frac{\dot{Z}_L \dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_L + \dot{Z}_{R2}} = j100$

Si ritorna alla rete simbolica complessiva, con lo schema equivalente alla rete simbolica a destra della porta CB ottenuto con il teorema di Thevenin simbolico.

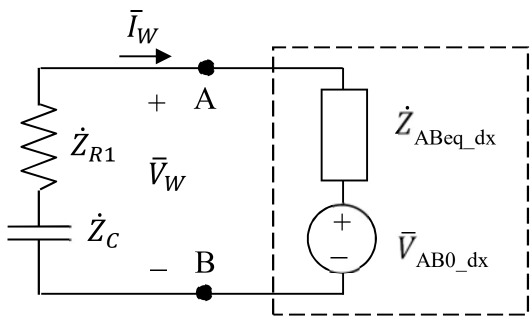


Della rete a destra della porta AB, si calcolano l'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{ABeq\_dx}$) e il fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A (V_{AB0_dx}).

Si considera la sola parte di rete a destra della porta AB e si spengono i generatori ideali simbolici di tensione. Si ottiene che l'impedenza equivalente tra i morsetti A e B è:
$\dot{Z}_{ABeq\_dx} = \dot{Z}_{CBeq\_dx} = 10 + j\ 10$

Si considera la sola parte di rete a destra della porta AB e si calcola il fasore della tensione a vuoto alla porta AB, cioè per fasore di corrente alla porta AB pari a zero. Per fasore di corrente alla porta AB pari a zero, è pari a zero il fasore della corrente dell'impedenza $\dot{Z}_{CBeq\_dx}$ ed è quindi pari a zero anche il fasore della tensione dell'impedenza $\dot{Z}_{CBeq\_dx}$. Si ha quindi che:
$\bar{V}_{AB0\_dx} = \bar{E} + \bar{V}_{CB0\_dx} = -j100$

Si ottiene:



Si ha che:
$\bar{V}_W = \bar{V}_{AB} = \bar{V}_{AB0\_dx} \dfrac{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_C}{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_C+\dot{Z}_{ABeq\_dx}} = 50(-1-j)$
$\bar{I}_W = -\dfrac{\bar{V}_{AB}}{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_C} = j5$
La potenza complessa alla porta del wattmetro, con i riferimenti del wattmetro, risulta quindi:
$\dot{S}_W = \bar{V}_W \bar{I}_W^* = 50(-1-j)(-j5) = 250(-1+j)$
Il wattmetro ideale a valore medio misura la potenza attiva, che è pari alla parte reale della potenza complessa calcolata con i riferimenti del wattmetro:
$P_W = Re\{\dot{S}_W\} = -250\ W$

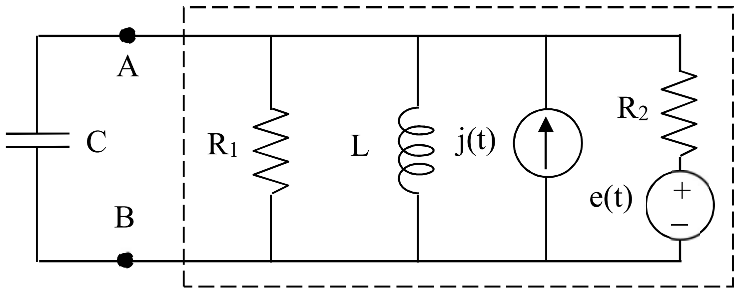
Esercizio 16. *Teorema di Norton simbolico*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R_1, R_2, L, C e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

$e(t) = \sqrt{2}\, E\, sen(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\, J\, sen(\omega t + \beta)$.

Applicare alla rete simbolica associata alla rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato) il teorema di Norton simbolico.

Si considera quindi la rete mostrata in figura nel suo complesso. Calcolare il valore della potenza reattiva Q_C entrante nel condensatore ideale avente capacità C.



Dati: R_1= 10 Ω; R_2= 20 Ω; L = 10 mH; C = 50 μF; E = 100 V; α = –π/2 rad;

J = = 5 A; β = 0 rad; ω = 2000 rad/s

Risultati: Q_C = – 200 VAR.

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze sinusoidali impresse:

$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = -j100$

$\bar{J} = Je^{j\beta} = 5$

Impedenze e ammettenze dei bipoli passivi:

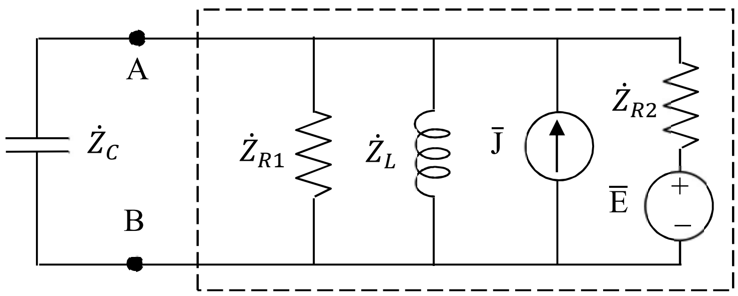
$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 10$; $\dot{Y}_{R1} = G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10}$

$\dot{Z}_{R2} = R_2 = 20$; $\dot{Y}_{R2} = G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20}$

$\dot{Z}_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j10$; $\dot{Y}_C = jB_C = j\omega C = j\frac{1}{10}$

$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j20$; $\dot{Y}_L = jB_L = -j\frac{1}{\omega L} = -j\frac{1}{20}$

La rete simbolica è:



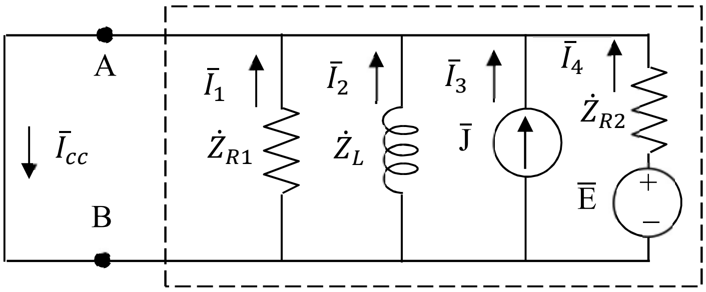
Si applica il teorema di Norton simbolico alla rete simbolica a destra della porta AB.
Si spengono i generatori ideali simbolici di tensione e di corrente. Si ottiene che l'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}}$) è data dal parallelo delle impedenze $\dot{Z}_{R1}$, $\dot{Z}_L$ e $\dot{Z}_{R2}$. Si ha:

$\dot{Y}_{\text{ABeq\_dx}} = \dot{Y}_{\text{R1}} + \dot{Y}_{\text{L}} + \dot{Y}_{\text{R2}} = \frac{1}{10} - j\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = = \frac{3-j}{20}$

L'impedenza equivalente alla porta AB è:

$\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = \frac{1}{\dot{Y}_{ABeq\_dx}} = \frac{20}{3-j} = 2\ (\ 3 + \text{j}\ )$

Si cortocircuita la porta AB. Per la corrente di cortocircuito è scelto (a piacere) un riferimento fra i due possibili per fare il calcolo: il valore che si calcola è associato al riferimento di corrente scelto. In figura è indicato il fasore della corrente di cortocircuito $\bar{I}_{cc}$ con il riferimento scelto.



Si calcolano le correnti $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$, $\bar{I}_4$, con i riferimenti indicati in figura.

Si osserva che il bipolo passivo d'impedenza $\dot{Z}_{R1}$ è cortocircuitato e quindi: $\bar{I}_1 = 0$.

Anche il bipolo passivo d'impedenza $\dot{Z}_L$ è cortocircuitato e quindi: $\bar{I}_2 = 0$.

Si ha che: $\bar{I}_3 = \bar{\text{J}} = 5$.

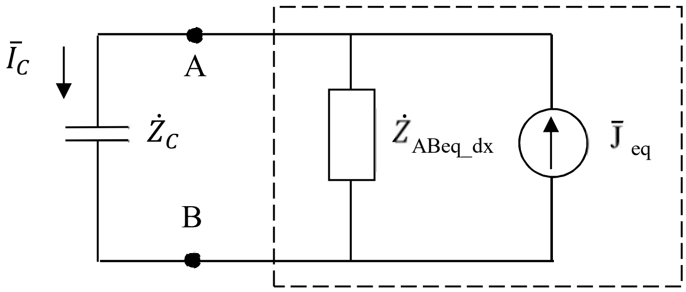
Con i riferimenti di figura, si ha la relazione: $-\dot{Z}_{R2}\bar{I}_4 + \bar{E} = 0$. Si ottiene: $\bar{I}_4 = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{R2}} = -\text{j}\ 5$.

Dalla LKC si ottiene:

$\bar{I}_{cc} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 + \bar{I}_4 = 5\ (\ 1 - \text{j}\ )$.

La rete a destra della porta AB, per il teorema di Norton simbolico, è quindi equivalente al parallelo di un generatore ideale simbolico di corrente e un'impedenza, indicati in figura, con:

$\bar{\text{J}}_{eq} = \bar{I}_{cc} = 5\ (\ 1 - \text{j}\ )$ e $\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = 2\ (\ 3 + \text{j}\ )$.



Si ottiene: $\bar{I}_{\text{C}} = \bar{\text{J}}_{eq} \frac{\dot{Z}_{ABeq\_dx}}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_{ABeq\_dx}} = 2\ (\ 2 + \text{j}\ )$

Il valore efficace è: $I_C = |\bar{I}_C| = 2\sqrt{5}$ A.

Si ha quindi: $Q_C = X_C I_C^2 = -200$ VAR

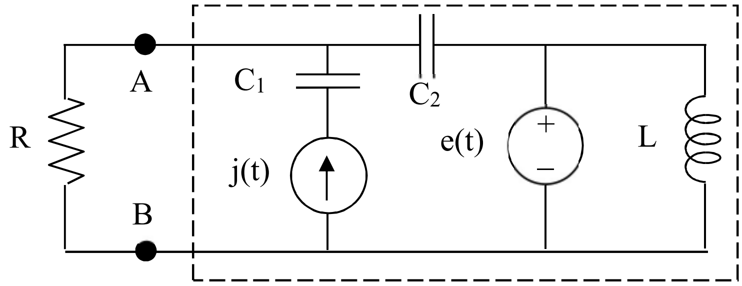
Esercizio 17. *Teorema di Norton simbolico*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C_1, C_2 e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

$e(t) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.

Applicare alla rete simbolica associata alla rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato) il teorema di Norton simbolico.

Si considera quindi la rete mostrata in figura nel suo complesso. Calcolare il valore della potenza attiva P_R entrante nel resistore ideale avente resistenza R.



Dati: R= 20 Ω; L = 10 mH; C_1 = 20 μF; C_2 = 25 μF; E = 200 V; α = 0 rad; J = = 5 A; $\beta = \frac{\pi}{2}$ rad; ω = 2000 rad/s

Risultati: P_R = 2250 W.

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze sinusoidali impresse:

$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = 200$

$\bar{J} = Je^{j\beta} = j5$

Impedenze dei bipoli passivi:

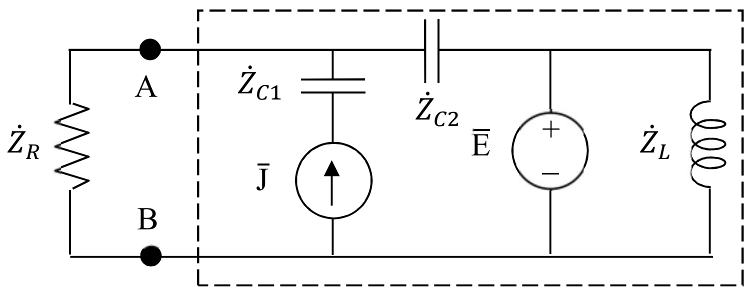
$\dot{Z}_R = R = 20$

$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j20$

$$\dot{Z}_{C1} = jX_{C1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j25$$

$$\dot{Z}_{C2} = jX_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j20$$

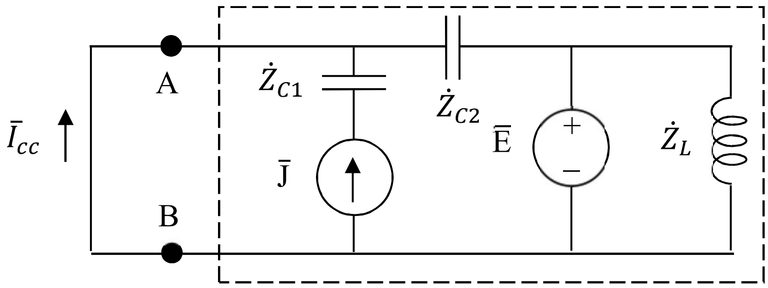
La rete simbolica è riportata di seguito.



Si applica il teorema di Norton simbolico alla rete simbolica a destra della porta AB.
Si spengono i generatori ideali simbolici di tensione e di corrente. Si ottiene che l'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}}$) è pari all'impedenza $\dot{Z}_{C2}$:

$\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = \dot{Z}_{C2} = -\text{j }20$

Si cortocircuita la porta AB. Per la corrente di cortocircuito è scelto (a piacere) un riferimento fra i due possibili per fare il calcolo: il valore che si calcola è associato al riferimento di corrente scelto. In figura è indicato il fasore della corrente di cortocircuito $\bar{I}_{cc}$ con il riferimento scelto.



Per il calcolo si utilizza, ad esempio, il metodo della sovrapposizione degli effetti. Si ottiene:

$\bar{I}_{cc}' = -\frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{C2}} = -j10$

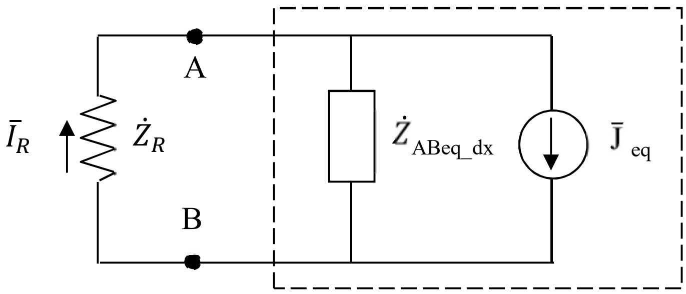
$\bar{I}_{cc}'' = -\bar{J} = -j5$

Si ottiene:

$\bar{I}_{cc} = \bar{I}_{cc}' + \bar{I}_{cc}'' = -\text{j}15$

La rete a destra della porta AB, per il teorema di Norton simbolico è quindi equivalente al parallelo di un generatore ideale simbolico di corrente e un'impedenza, indicati in figura, con:

$\bar{J}_{eq} = \bar{I}_{cc} = -\text{j }15$ e $\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = -\text{j }20$.



Si calcola il fasore $\bar{I}_R$ con il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura.
Si ottiene:

$\bar{I}_R = \bar{J}_{eq} \frac{\dot{Z}_{ABeq\_dx}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{ABeq\_dx}} = -\frac{15}{2}(1+j)$

Il valore efficace è: $I_R = |\bar{I}_R| = \frac{15}{2}\sqrt{2}$ A.

Si ha quindi: $P_R = RI_R^2 = 2250$ W

Esercizio 18. *Risonanza serie*

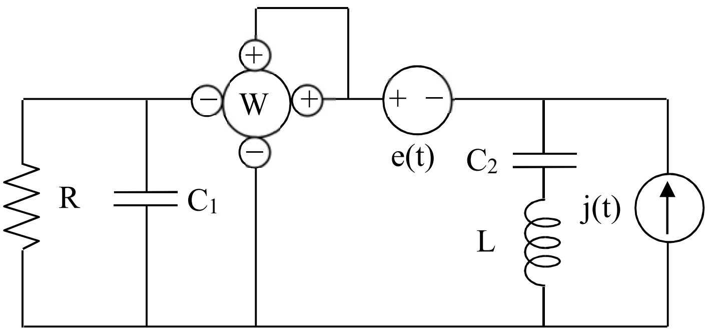
La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C_1, C_2 e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

$e(t) = \sqrt{2}\, E\, \text{sen}(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\, J \cos(\omega t + \beta)$.

Determinare:

-) il valore P_W misurato dal wattmetro ideale a valore medio;

-) il valore della potenza reattiva Q_{C2} entrante nel condensatore ideale avente capacità C_2.



Dati:

R= 5 Ω; L = 10 mH; C_1 = 100 μF; C_2 = 100 μF; E = $20\sqrt{2}$ V; α = π/4 rad; J = 4 A; β = – π/2 rad; ω = 1000 rad/s

Risultati: P_W = 160 W; Q_{C2} = – 400 VAR

Soluzione

Si esprimono tutte le funzioni sinusoidali allo stesso modo: $j(t) = \sqrt{2} J sen\left(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right)$

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze impresse sinusoidali:

$$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = 20\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = 20\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + jsen\frac{\pi}{4}\right) = 20(1 + j)$$

$$\bar{J} = Je^{j(\beta+\frac{\pi}{2})} = 4e^{j0} = 4(\cos 0 + jsen0) = 4$$

Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 5$$

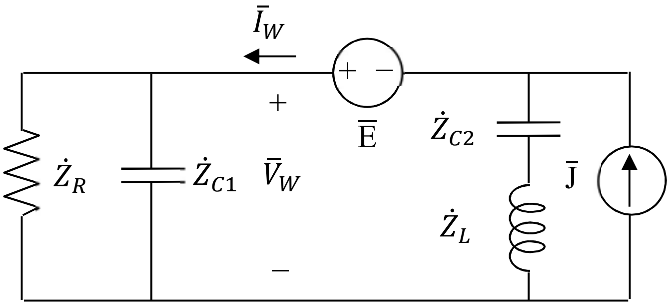
$$\dot{Z}_{C1} = jX_{C1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j10$$

$$\dot{Z}_{C2} = jX_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j10$$

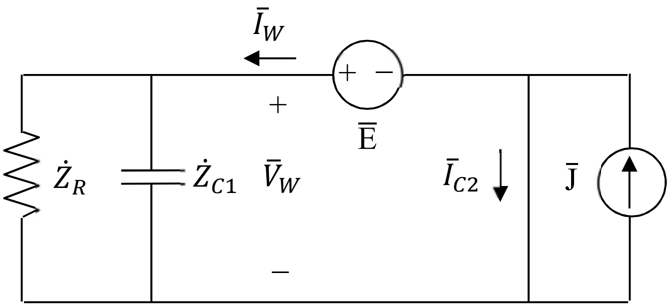
$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j10$$

Per quanto riguarda il wattmetro ideale a valore medio, il tratto di circuito tra i morsetti amperometrici equivale a un cortocircuito mentre quello tra i morsetti voltmetrici equivale a un circuito aperto: nella rete simbolica di figura sono indicati i riferimenti dei morsetti voltmetrici e amperometrici del wattmetro.

La rete simbolica è:



In questo caso, per la serie tra l'induttore ideale avente induttanza L e il condensatore ideale avente capacità C_2, vale la condizione di risonanza serie: $X_L = - X_{C2}$. Pertanto la serie di tali due bipoli equivale a un cortocircuito: si ottiene la rete di seguito riportata in figura.



Si ha che:
$\bar{V}_W = \bar{E} = 20(1 + j)$

Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_{C1}$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{C1}} = \frac{5(-j10)}{5 - j10} = \frac{-j10(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = -j2(1 + j2) = 2(2 - j)$$

Si ha che:

$$\bar{I}_W = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_1} = \frac{20(1 + j)}{2(2 - j)} = 10\frac{(1 + j)(2 + j)}{(2 - j)(2 + j)} = 2(1 + j3)$$

La potenza complessa alla porta del wattmetro, con i riferimenti del wattmetro, risulta quindi:

$$\dot{S}_W = \bar{V}_W \bar{I}_W^* = 20(1 + j)2(1 - j3) = 40(4 - j2)$$

Il wattmetro ideale a valore medio misura la potenza attiva, che è pari alla parte reale della potenza complessa calcolata con i riferimenti del wattmetro:

$$P_W = Re\{\dot{S}_W\} = 160\ W$$

Per il calcolo della potenza reattiva entrante nel condensatore ideale avente capacità C_2, si calcola il fasore $\bar{I}_{C2}$ indicato in figura, utilizzando la LKC in forma simbolica. Si ha:
$\bar{I}_W + \bar{I}_{C2} - \bar{J} = 0$

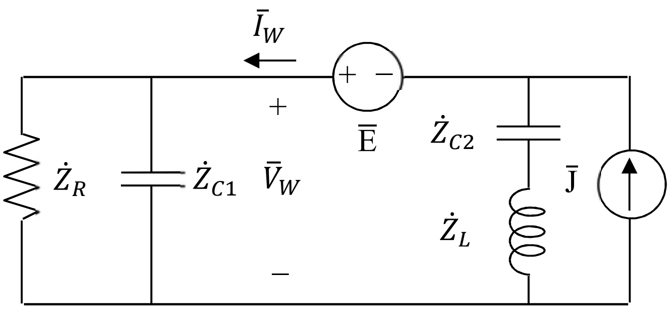
Pertanto:
$\bar{I}_{C2} = \bar{J} - \bar{I}_W = 4 - 2(1 + j3) = 2 - j6$

Il valore efficace è:
$I_{C2} = |\bar{I}_{C2}| = 2\sqrt{10}$ A

Si ha quindi:
$Q_{C2} = X_{C2} I_{C2}^2 = -400$ VAR

Soluzione alternativa.

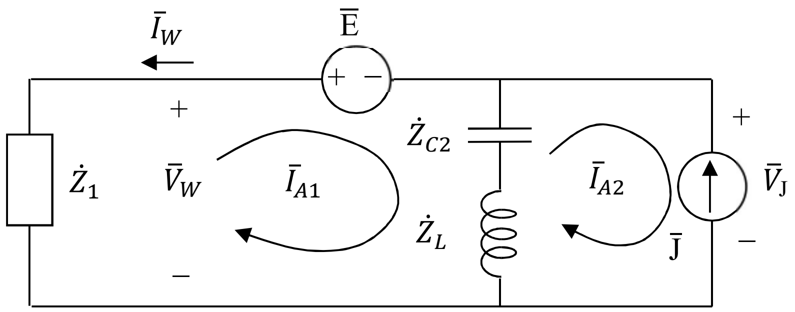
Si riparte dalla rete simbolica, riportata di seguito.



Si calcola, come sopra, l'impedenza del bipolo equivalente al parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_{C1}$:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_R \dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{C1}} = \frac{5(-j10)}{5 - j10} = \frac{-j10(1 + j2)}{(1 - j2)(1 + j2)} = -j2(1 + j2) = 2(2 - j)$$

Si ottiene così:



Si considerano le due correnti di anello orientate allo stesso modo: per esempio in verso orario. Le correnti di anello sono indicate in figura. Si ha:

$$\begin{cases}(\dot{Z}_1+\dot{Z}_L+\dot{Z}_{C2})\bar{I}_{A1}-(\dot{Z}_L+\dot{Z}_{C2})\bar{I}_{A2}=-\bar{E}\\ (\dot{Z}_L+\dot{Z}_{C2})\bar{I}_{A2}-(\dot{Z}_L+\dot{Z}_{C2})\bar{I}_{A1}=-\bar{V}_{\mathrm{J}}\\ \bar{I}_{A2}=-\bar{\mathrm{J}}\end{cases}$$

Con $\dot{Z}_{C2}+\dot{Z}_L=0$ si ottiene:

$$\begin{cases}\dot{Z}_1\bar{I}_{A1}-0\,\bar{I}_{A2}=-\bar{E}\\ 0\,\bar{I}_{A2}-0\,\bar{I}_{A1}=-\bar{V}_{\mathrm{J}}\\ \bar{I}_{A2}=-\bar{\mathrm{J}}\end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$\bar{I}_{A1}=-\frac{\bar{E}}{\dot{Z}_1}$$

$$\bar{I}_{A2}=-\bar{\mathrm{J}}$$

$$\bar{V}_{\mathrm{J}}=0$$

e quindi

$$\bar{I}_W=-\bar{I}_{A1}=\frac{\bar{E}}{\dot{Z}_1}=\frac{20(1+j)}{2(2-j)}=10\frac{(1+j)(2+j)}{(2-j)(2+j)}=2(1+j3)$$

Osservando che:

$$\bar{V}_W=-\dot{Z}_1\,\bar{I}_{A1}=20(1+j)$$

si procede come sopra per il calcolo della P_W e della Q_{C2}.

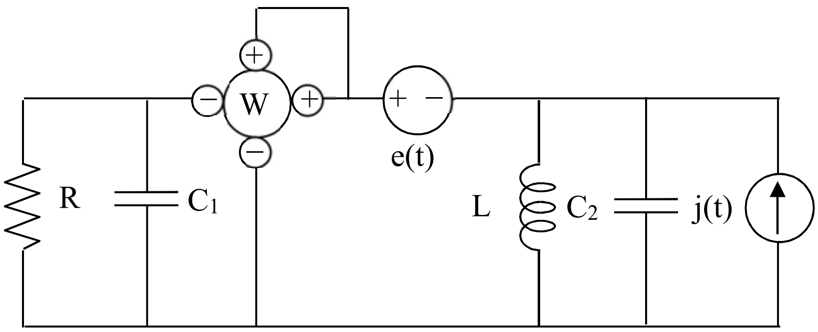
Esercizio 19. *Risonanza parallelo*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R, L, C_1, C_2 e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

$e(t) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.

Determinare:

- il valore P_W misurato dal wattmetro ideale a valore medio;
- il valore della potenza reattiva Q_{C2} entrante nel condensatore ideale avente capacità C_2.



Dati:

R= 5 Ω; L = 10 mH; C_1 = 100 μF; C_2 = 100 μF; E = 20 V; α = π/4 rad; J = 4 A; β = π/4 rad; ω = 1000 rad/s

Risultati: P_W = 64 W; Q_{C2} = – 8 VAR

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze impresse sinusoidali:

$$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = 20e^{j\frac{\pi}{4}} = 20\left(\cos\frac{\pi}{4} + jsen\frac{\pi}{4}\right) = 10\sqrt{2}(1+j)$$

$$\bar{J} = Je^{j\beta} = 4e^{j\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + jsen\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}(1+j)$$

Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_R = R = 5$$

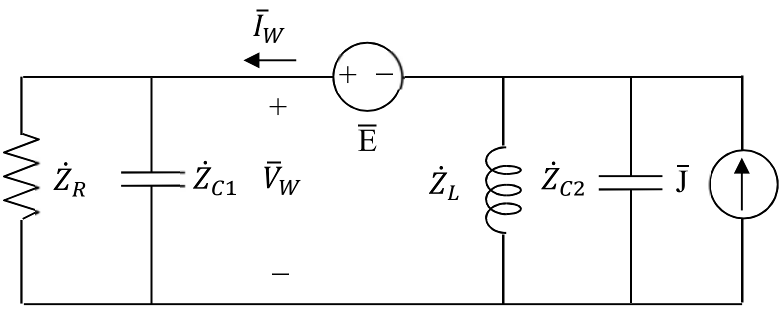
$$\dot{Z}_{C1} = jX_{C1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j10$$

$$\dot{Z}_{C2} = jX_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j10$$

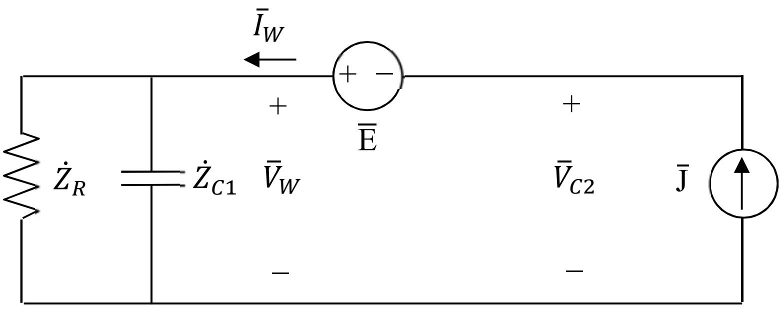
$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j10$$

Per quanto riguarda il wattmetro ideale a valore medio, il tratto di circuito tra i morsetti amperometrici equivale a un cortocircuito mentre quello tra i morsetti voltmetrici equivale a un circuito aperto: nella rete simbolica di figura sono indicati i riferimenti dei morsetti voltmetrici e amperometrici del wattmetro.

La rete simbolica è:



In questo caso, per il parallelo tra l'induttore ideale avente induttanza L e il condensatore ideale avente capacità C_2, vale la condizione di risonanza parallelo: $X_L = -X_{C2}$. Pertanto il parallelo di tali due bipoli equivale a un circuito aperto: si ottiene la rete di seguito riportata in figura.



Si ha che: $\bar{I}_W = \bar{J} = 2\sqrt{2}(1+j)$

Il parallelo dei bipoli aventi rispettivamente impedenza $\dot{Z}_R$ e $\dot{Z}_{C1}$ equivale a un bipolo la cui impedenza è:

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_R\dot{Z}_{C1}}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_{C1}} = \frac{5(-j10)}{5-j10} = \frac{-j10(1+j2)}{(1-j2)(1+j2)} = -j2(1+j2) = 2(2-j)$$

Si ha che:

$$\bar{V}_W = \dot{Z}_1\bar{I}_W = 2(2-j)2\sqrt{2}(1+j) = 4\sqrt{2}(3+j)$$

La potenza complessa alla porta del wattmetro, con i riferimenti del wattmetro, risulta quindi:

$$\dot{S}_W = \bar{V}_W\bar{I}_W^* = 4\sqrt{2}(3+j)2\sqrt{2}(1-j) = 32(2-j)$$

Il wattmetro ideale a valore medio misura la potenza attiva, che è pari alla parte reale della potenza complessa calcolata con i riferimenti del wattmetro:

$$P_W = Re\{\dot{S}_W\} = 64\ W$$

Per il calcolo della potenza reattiva entrante nel condensatore ideale avente capacità C_2, si calcola il fasore $\bar{V}_{C2}$ indicato in figura, utilizzando la LKT in forma simbolica. Si ha:

$$\bar{E} + \bar{V}_{C2} - \bar{V}_W = 0$$

Pertanto: $\bar{V}_{C2} = \bar{V}_W - \bar{E} = 4\sqrt{2}(3+j) - 10\sqrt{2}(1+j) = 2\sqrt{2}(1-j3)$

Il valore efficace è: $V_{C2} = |\bar{V}_{C2}| = 4\sqrt{5}$ V.

Si ha quindi: $Q_{C2} = \frac{V_{C2}^2}{X_{C2}} = \frac{80}{-10} = -8$ VAR

Esercizio 20. *Esercizio*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R_1, R_2, L, C_1, C_2 e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

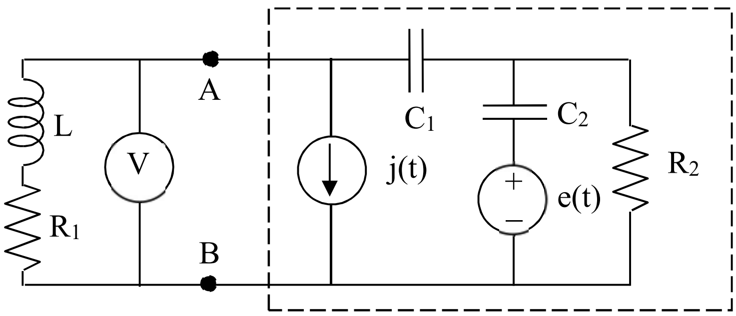
$e(t) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.

1) Della rete simbolica associata alla rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato) determinare:

- il valore dell'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{ABeq\_dx}$);
- il fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($\bar{V}_{AB0\_dx}$).

2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Determinare:

- il valore V_V misurato dal voltmetro ideale a valore efficace.



Dati: R_1= 10 Ω; R_2= 20 Ω; L = 10 mH; C_1 = 100 μF; C_2 = 50 μF; E = 160 V; α = π/2 rad; J = = $3\sqrt{2}$ A; β = π/4 rad; ω = 1000 rad/s

Risultati: $\dot{Z}_{ABeq\_dx} = 10 - j20$; $\bar{V}_{AB0\_dx} = -170 + j110$; $V_V = 20\sqrt{41}$ V.

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze impresse sinusoidali:

$$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = 160e^{j\frac{\pi}{2}} = 160\left(\cos\frac{\pi}{2} + jsen\frac{\pi}{2}\right) = j160$$

$$\bar{J} = Je^{j\beta} = 3\sqrt{2}\,e^{j\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + jsen\frac{\pi}{4}\right) = 3(1 + j)$$

Impedenze dei bipoli passivi:

$$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 10$$

$$\dot{Z}_{R2} = R_2 = 20$$

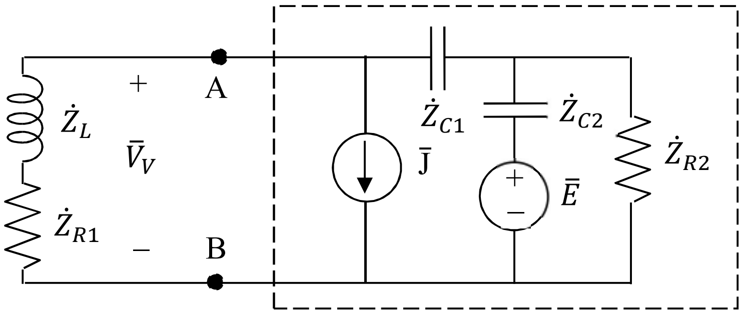
$$\dot{Z}_{C1} = jX_{C1} = -j\frac{1}{\omega C_1} = -j10$$

$$\dot{Z}_{C2} = jX_{C2} = -j\frac{1}{\omega C_2} = -j20$$

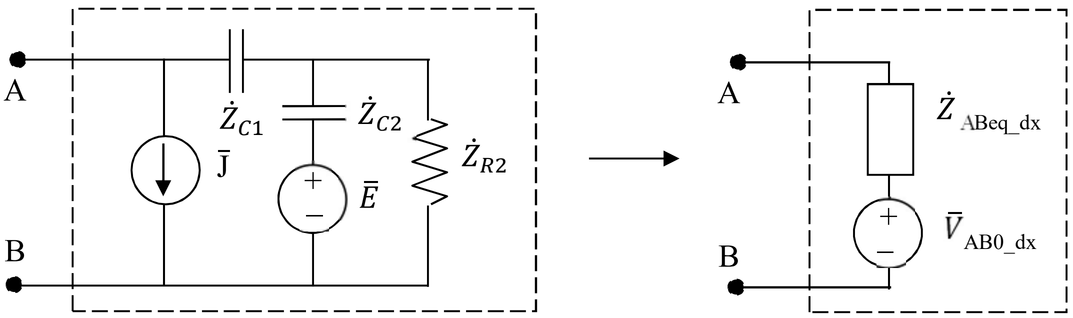
$$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j10$$

Il voltmetro ideale a valore efficace equivale a un circuito aperto. Misura il valore efficace della tensione tra i due nodi a cui è collegato: pertanto è lo stesso scegliere per tale tensione un riferimento o il suo opposto, dato che il valore efficace della tensione non cambia quando si prende il riferimento opposto.

La rete simbolica è:



Si applica il teorema di Thevenin simbolico alla rete simbolica a destra della porta AB. Si ottiene:



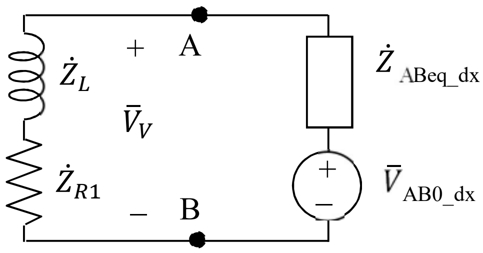
Il fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($\bar{V}_{\text{AB0\_dx}}$) si può calcolare applicando la sovrapposizione degli effetti e analizzando le due reti simboliche risultanti. Si ottiene:

$$\bar{V}_{\text{AB0\_dx}} = \bar{E}\,\frac{\dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_{R2}+\dot{Z}_{C2}} - \bar{J}\left(\dot{Z}_{C1} + \frac{\dot{Z}_{R2}\dot{Z}_{C2}}{\dot{Z}_{R2}+\dot{Z}_{C2}}\right) = -170 + j110$$

Si spengono i generatori ideali simbolici di tensione e di corrente. Si ottiene che l'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}}$) è data dalla serie dell'impedenza $\dot{Z}_{C1}$ con il parallelo delle impedenze $\dot{Z}_{C2}$ e $\dot{Z}_{R2}$:

$$\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = \dot{Z}_{C1} + \frac{\dot{Z}_{R2}\dot{Z}_{C2}}{\dot{Z}_{R2}+\dot{Z}_{C2}} = 10 - j20$$

Si ottiene:



Si ha che:

$\bar{V}_{\text{V}} = \bar{V}_{\text{AB0\_dx}} \dfrac{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_L}{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_L+\dot{Z}_{ABeq\_dx}} = -100 - j80 = -20(5 + j4)$

Il voltmetro ideale a valore efficace misura il modulo di $\bar{V}_V$. Si ottiene:

$V_V = |\bar{V}_V| = 20\sqrt{41}\, V$

Esercizio 21. *Esercizio*

La rete mostrata in figura è a regime sinusoidale. Sono noti i parametri R_1, R_2, L, C_1, C_2 e le grandezze sinusoidali impresse dai generatori ideali:

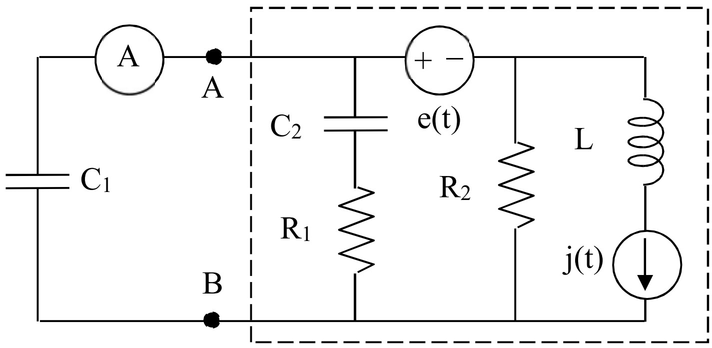
$e(t) = \sqrt{2}\,E\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$; $j(t) = \sqrt{2}\,J\,\mathrm{sen}(\omega t + \beta)$.

1) Della rete simbolica associata alla rete a destra della porta AB (racchiusa nel riquadro tratteggiato) determinare:

- il valore dell'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{ABeq\_dx}$);
- il fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($\bar{V}_{AB0\_dx}$).

2) Si considera la rete mostrata in figura nel suo complesso. Determinare:

- il valore I_A misurato dall'amperometro ideale a valore efficace.



Dati: R_1= 10 Ω; R_2= 10 Ω; L = 40 mH; C_1 = 100 μF; C_2 = 100 μF; E = 100 V; α = – π/2 rad; J = 5 A; β = π/2 rad; ω = 1000 rad/s

Risultati: $\dot{Z}_{ABeq\_dx} = 6 - j2$; $\bar{V}_{AB0\_dx} = -30 - j90$; $I_A = 5\sqrt{2}$ A.

Soluzione

Si calcola la rete simbolica.

Fasori delle grandezze impresse sinusoidali:

$\bar{E} = Ee^{j\alpha} = -j100$

$\bar{J} = Je^{j\beta} = j5$

Impedenze dei bipoli passivi:

$\dot{Z}_{R1} = R_1 = 10$

$\dot{Z}_{R2} = R_2 = 10$

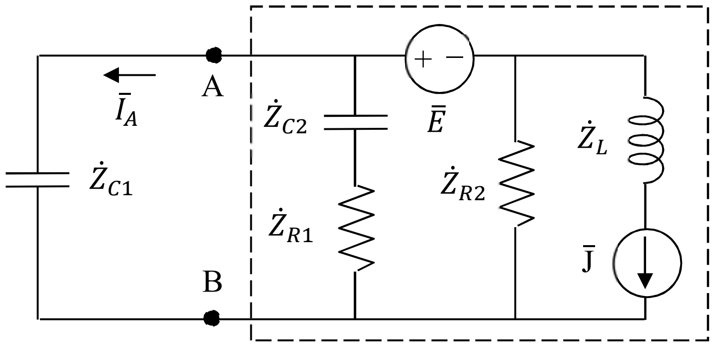
$\dot{Z}_{C1} = jX_{C1} = -j\dfrac{1}{\omega C_1} = -j10$

$\dot{Z}_{C2} = jX_{C2} = -j\dfrac{1}{\omega C_2} = -j10$

$\dot{Z}_L = jX_L = j\omega L = j40$

L'amperometro ideale a valore efficace equivale a un cortocircuito. Misura il valore efficace della corrente del lato dove è inserito: pertanto è lo stesso scegliere per tale corrente un riferimento o il suo opposto, dato che il valore efficace della corrente non cambia quando si prende il riferimento opposto.

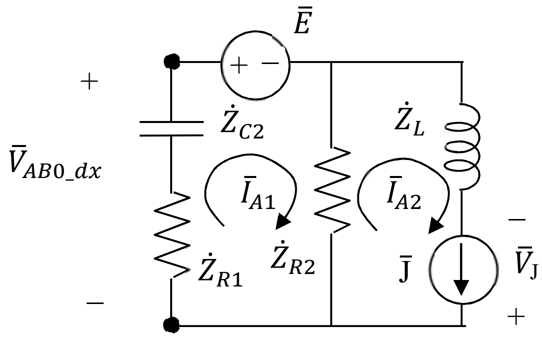
Si prende per il fasore $\bar{I}_A$ il riferimento (scelto a piacere) indicato in figura.



Si applica il teorema di Thevenin simbolico alla rete simbolica a destra della porta AB. Si spengono i generatori ideali simbolici di tensione e di corrente. Si ottiene che l'impedenza equivalente alla porta AB ($\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}}$) è data dal parallelo dell'impedenza $\dot{Z}_{R2}$ con la serie delle impedenze $\dot{Z}_{C2}$ e $\dot{Z}_{R1}$:

$\dot{Z}_{\text{ABeq\_dx}} = \frac{(\dot{Z}_{C2}+\dot{Z}_{R1})\dot{Z}_{R2}}{\dot{Z}_{C2}+\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_{R2}} = 6 - j\,2$

Il fasore della tensione a vuoto alla porta AB con segno + della tensione in A ($\bar{V}_{\text{AB0\_dx}}$) si può calcolare, ad esempio, applicando il metodo delle correnti di anello. Si considerano le due correnti di anello orientate allo stesso modo: per esempio in verso orario. Le correnti di anello sono indicate in figura. Si ottiene:



Si ha:

$$\begin{cases} (\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_{C2}+\dot{Z}_{R2})\bar{I}_{A1} - \dot{Z}_{R2}\bar{I}_{A2} = -\bar{E} \\ (\dot{Z}_{R2}+\dot{Z}_L)\bar{I}_{A2} - \dot{Z}_{R2}\bar{I}_{A1} = \bar{V}_J \\ \bar{I}_{A2} = \bar{J} \end{cases}$$

Si ottiene:

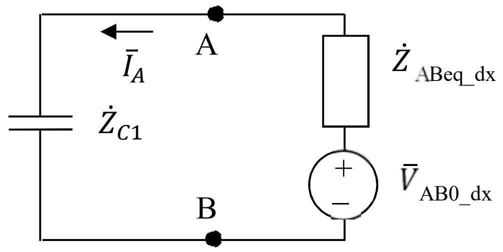
$\bar{I}_{A2} = \bar{J} = j\,5$

$$\bar{I}_{A1} = \frac{\dot{Z}_{R2}\bar{I}_{A2} - \bar{E}}{\dot{Z}_{R1}+\dot{Z}_{C2}+\dot{Z}_{R2}} = \frac{j50 + j100}{10(2-j)} = \frac{j15\,(2+j)}{5} = 3(-1+j2)$$

Si ottiene:

$\overline{V}_{AB0\_dx} = -(\dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_{C2})\overline{I}_{A1} = -30 - j\,90$

Si ha quindi:



Si ha che:

$\overline{I}_A = \overline{V}_{AB0\_dx} \dfrac{1}{\dot{Z}_{C1} + \dot{Z}_{ABeq\_dx}} = 5(1 - j)$

L'amperometro ideale a valore efficace misura il modulo di $\overline{I}_A$. Si ottiene:
$I_A = |\overline{I}_A| = 5\sqrt{2}\ A$