A

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° Compitino — 9 aprile 2022

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & t & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$ mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

(b) Sia $t = 5$ e sia $u = (-1, \alpha, 0)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ammette soluzioni.

(c) Sia $t = 5$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = v$, con $v = (1, 1, 2)$.

(d) Esiste un valore di t tale che il sistema $AX = \vec{0}$ abbia come **unica** soluzione $X = \vec{0}$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $W = \{(a + 2b, -a + b, -2b + c, a + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determinare una base di U e una base di W.

(b) Scrivere un'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio W.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

(d) Esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la somma $U + L$ sia diretta e anche la somma $W + L$ sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio L.

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y + 3z, 2y - 2z, -x + 2y - 4z).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare il valore di t tale che $v = (1, t, 7) \in \operatorname{Im} f$. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora i vettori $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$. Scrivere la matrice di f prendendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 9 aprile 2022

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & t & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$ mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

(b) Sia $t = -3$ e sia $u = (2, \alpha, 0)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ammette soluzioni.

(c) Sia $t = -3$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = v$, con $v = (1, 2, -1)$.

(d) Esiste un valore di t tale che il sistema $AX = \vec{0}$ abbia come **unica** soluzione $X = \vec{0}$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $W = \{(a + 2b, -b, -2a + c, a + 2b + 2c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determinare una base di U e una base di W.

(b) Scrivere un'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio W.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

(d) Esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la somma $U + L$ sia diretta e anche la somma $W + L$ sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio L.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3z, -3x + 4y - z, 2x - y + 4z).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare il valore di t tale che $v = (t, -2, 3) \in \operatorname{Im} f$. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora i vettori $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$. Scrivere la matrice di f prendendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.

C

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1^o Compitino — 9 aprile 2022

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & t & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$ mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

(b) Sia $t = -4$ e sia $u = (1, \alpha, 0)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ammette soluzioni.

(c) Sia $t = -4$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = v$, con $v = (1, 4, -1)$.

(d) Esiste un valore di t tale che il sistema $AX = \vec{0}$ abbia come **unica** soluzione $X = \vec{0}$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $W = \{(2a + b, -a + 2b, -b + 2c, a + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determinare una base di U e una base di W.

(b) Scrivere un'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio W.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

(d) Esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la somma $U + L$ sia diretta e anche la somma $W + L$ sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio L.

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (3x + y + 3z, x + 2y - 4z, -y + 3z).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare il valore di t tale che $v = (7, -1, t) \in \operatorname{Im} f$. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora i vettori $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$. Scrivere la matrice di f prendendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ___________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1$^{\text{o}}$ Compitino — 9 aprile 2022

Esercizio 1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & t & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$ mediante l'algoritmo di eliminazione di Gauss.

(b) Sia $t = -5$ e sia $u = (-2, \alpha, 0)$. Determinare per quale valore di α il sistema $AX = u$ ammette soluzioni.

(c) Sia $t = -5$. Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = v$, con $v = (1, 3, -2)$.

(d) Esiste un valore di t tale che il sistema $AX = \vec{0}$ abbia come **unica** soluzione $X = \vec{0}$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

e sia $W = \{(2a + b, a - b, 2a + c, 2b - c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determinare una base di U e una base di W.

(b) Scrivere un'equazione nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia il sottospazio W.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$ e di $U + W$.

(d) Esiste un sottospazio non nullo $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la somma $U + L$ sia diretta e anche la somma $W + L$ sia diretta? Se la risposta è NO si spieghi perché, altrimenti si trovi una base di un tale sottospazio L.

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (2x + y + 5z, -x - 3z, 2x + 3y + 3z).$$

(a) Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare una base del nucleo di f e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare il valore di t tale che $v = (2, -2, t) \in \operatorname{Im} f$. Per tale valore di t determinare $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora i vettori $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$. Scrivere la matrice di f prendendo $\{u_1, u_2, u_3\}$ come base del **dominio** e la base canonica come base del **codominio**.