

## ESERCIZI TUTORATO

1. Nello spazio vettoriale  $V = \mathbb{R}^4$  si consideri la forma bilineare simmetrica  $g$  la cui

matrice, rispetto alla base canonica, è 
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che  $g$  è non degenere e si determini una base ortogonale di  $V$ . Si determinino inoltre una matrice diagonale  $D$  e una matrice invertibile  $P$  tali che  $D = P^T G P$ .

2. Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  si consideri la forma bilineare simmetrica  $g$  definita da

$$g(v, w) = x_1 y_1 - x_1 y_2 + 2x_1 y_3 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 + 2x_3 y_1 - x_3 y_2 + 4x_3 y_3;$$

ove  $v = (x_1, x_2, x_3)$  e  $w = (y_1, y_2, y_3)$ .

- Si scriva la matrice di  $g$  rispetto alla base canonica.
  - Si dica se  $g$  è non degenere e se essa è definita positiva, negativa o indefinita.
  - Si determini una base ortogonale.
  - Si stabilisca se esistono vettori isotropi e, in caso affermativo, se ne determini almeno uno.
3. Siano assegnati i seguenti vettori di  $\mathbb{R}^4$   $v = (2, -1, 0, 1)^T$ ,  $w = (-1, 2, 0, 2)^T$
- Si calcoli l'angolo tra i due vettori.
  - Si determini la proiezione ortogonale di  $v$  su  $w$ .
  - Si scriva  $v$  come somma di un vettore  $v_1$  multiplo di  $w$  e di un vettore  $v_2$  ortogonale a  $w$ .