Università Degli Studi di Padova
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione (DEI)
Corsi di laurea in Ingegneria

Studente: Federico Simioni
Email: federico.simioni@studenti.unipd.it
Disciplina: Fisica Generale 1

Lezione 2

1. Un pallone da football lanciato su un campo orizzontale percorre una distanza L = 17.0 m prima di toccare terra. Il punto di lancio è a livello del suolo e l'angolo di lancio è θ = 16.0° (rispetto all'orizzontale). Determinare il modulo della velocità con la quale è stato lanciato il pallone.

2. Un arciere vuole colpire con una freccia una mela su un albero a un'altezza h = 12.00 m rispetto all'arciere. La distanza in linea d'aria tra arciere e bersaglio sia s = 35.0 m. L'angolo di mira dell'arciere (l'angolo con cui l'arciere scaglia la freccia) sia α = 30.0° rispetto all'orizzontale. Si determini:

    1. Con quale velocità (in modulo) deve essere scoccata la freccia affinchè colpisca il bersaglio;
    2. In quanto tempo la freccia raggiunge il bersaglio;
    3. l'altezza massima raggiunta dalla freccia.

    Se la velocità massima con cui l'arciere è in grado di scoccare la freccia è v_{max} = 45.0 m/s, si determini:

    4. Il valore minimo dell'angolo di mira (rispetto all'orizzontale) che consente all'arciere di colpire il bersaglio.

    Infine, si supponga che all'istante t = 0 la mela si stacchi dal ramo e cada mentre l'arciere sta mirando in direzione della mela ad un angolo di 17.0° rispetto all'orizzontale. Dato un tempo di reazione dell'arciere pari a Δt = 0.200 s, si determini:

    5. con quale velocità l'arciere deve scagliare la freccia per colpire in volo la mela.

3. Un corpo puntiforme è lasciato cadere da un'altezza h = 39 m rispetto al suolo, mentre soffia un vento che produce su di esso un'accelerazione orizzontale costante di modulo a = 1.2 m/s^2. Mostrare che la traiettoria del corpo, dal punto di lancio fino a terra, è un segmento di retta e determinare l'equazione cartesiana in un opportuno riferimento. Determinare inoltre la durata del volo e la velocità con cui il corpo arriva al suolo.

4. Si considerino i moti circolari uniformi elencati nel seguito e si proceda al calcolo delle grandezze richieste.

    1. Calcolare la velocità angolare (in giri/minuto) con la quale deve ruotare una piattaforma circolare di raggio r = 3.00 m affinchè un punto sul bordo sia sottoposto a un'accelerazione a = 10 · g = 98.1 m/s^2.
    2. Davide rotea la sua fionda, di lunghezza l = 1.00 m, alla velocità di 2.00 giri/s. Con quale velocità si muove il sasso verso la fronte di Golia nel momento in cui viene lasciato andare?
    3. Una palla legata ad una funicella si muove su una circonferenza orizzontale di raggio R = 2.00 m, compiendo 1 giro in 3.00 s. Si trovi la sua accelerazione.
    4. Qual è il modulo dell'accelerazione di un granello di polvere sul bordo di un disco che gira a 33.0 giri/min e ha un diametro D = 30.0 cm?

5 Un satellite si muove intorno alla Terra a una distanza h = 550 km dalla superficie con un periodo di rivoluzione T = 1 h 35 m 12 s.

1. Calcolare l'accelerazione centripeta e la velocità del satellite;
2. Esprimere inoltre la velocità e l'accelerazione del satellite in forma vettoriale.

6 All'istante t = 0 un'auto si mette in movimento su una pista circolare di raggio R = 300 m. Fino all'istante t_1 = 10.0 s l'accelerazione tangenziale ha valore costante a_t e lo spazio percorso è Δs = 150 m. Si determini il modulo e la direzione dell'accelerazione totale dell'auto all'istante t_1.

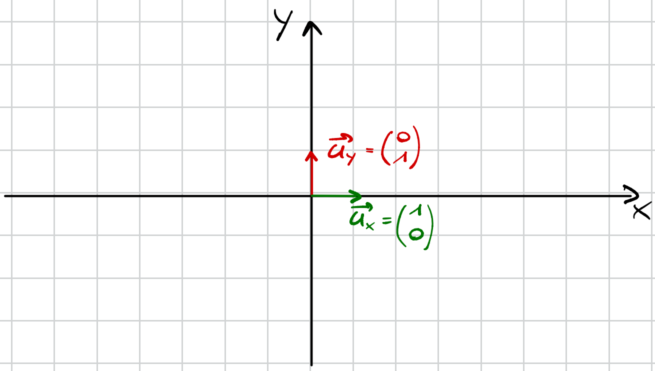
Prima di vedere gli esercizi, facciamo un breve ripasso per quanto riguarda le operazioni tra vettori.
Dati due vettori:

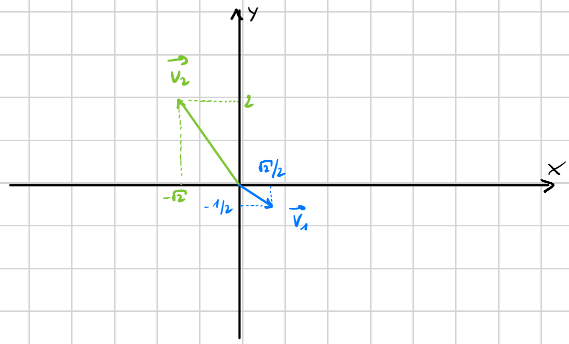
$$\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_x - \frac{1}{2}\vec{a}_y \qquad \vec{v}_2 = -\sqrt{2}\,\vec{a}_x + 2\vec{a}_y$$

Si calcolino:
1) Il vettore somma $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$
2) Il prodotto scalare $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$
3) Il prodotto vettoriale $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
4) La componente del vettore $\vec{w} = 3\vec{a}_x - 2\vec{a}_y$ nella direzione e verso del vettore somma determinato in 1)

Anzitutto sappiamo che

$$\vec{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_x - \frac{1}{2}\vec{a}_y = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = -\sqrt{2}\,\vec{a}_x + 2\vec{a}_y = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ +2 \end{pmatrix}$$





Per quanto riguarda il punto 1), la somma di due vettori è data dalla somma delle medesime componenti

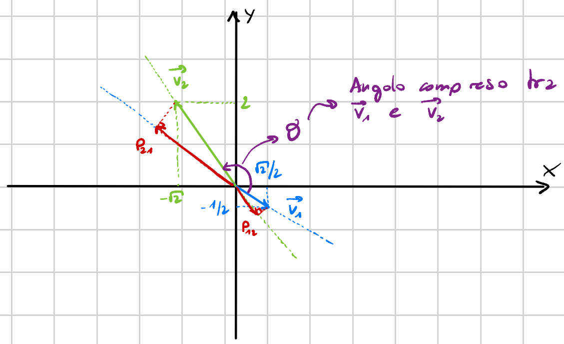
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\vec{a}_x + \left(-\frac{1}{2} + 2\right)\vec{a}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_x + \frac{3}{2}\vec{a}_y$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ +3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ +3 \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare, invece, può essere definito come

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} = -1 - 1 + 0 = -2$$

Oppure, in alternativa, considerando le proiezioni



$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \underbrace{-\left|\overrightarrow{P_{21}O}\right|}\cdot|\vec{v}_1| = \underbrace{-\left|\overrightarrow{P_{12}O}\right|}\cdot|\vec{v}_2|$$

$$= |\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|\cdot\cos(\theta)$$

Da cui $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}\right) \simeq 160.53^\circ$

$$\rightarrow -\left|\overrightarrow{P_{21}O}\right|\cdot|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|\cdot\cos(\theta)\cdot|\vec{v}_1| \simeq -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0.94\cdot\sqrt{2}\sqrt{3} \simeq -2$$

Per quanto riguarda il prodotto vettoriale:

METODO DI LAPLACE

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \sqrt{2}/2 & -1/2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{\begin{vmatrix} -1/2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} \vec{u}_x + \cancel{\begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}} \vec{u}_y + \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & -1/2 \\ -\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} \vec{u}_z$$

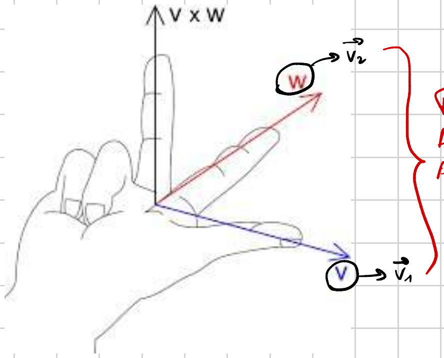
$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)\right] \vec{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{u}_z$$

Il metodo più utilizzato, per i nostri scopi, è il seguente:

- MODULO PRODOTTO VETTORE: $\|v_1\| \cdot \|v_2\| \sin(\theta)$ → θ angolo tra i due vettori, già definito prima

E DIREZIONE

- VERSO PRODOTTO VETTORE: regola della mano destra



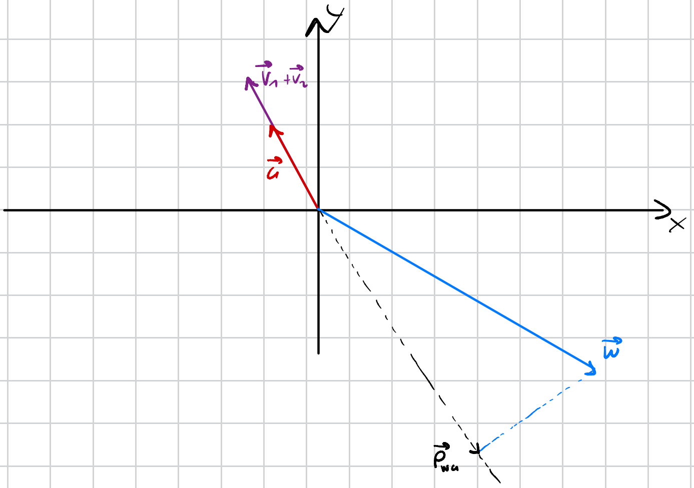
Per quanto riguarda l'ultimo punto, direzione e verso di un vettore generico $\vec{v}$ sono uguali a $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

$$\rightarrow \vec{u} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x + \frac{3}{2}\vec{u}_y}{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{u}_x + \frac{3}{2}\vec{u}_y}{\frac{\sqrt{11}}{2}} = -\sqrt{\frac{2}{11}}\,\vec{u}_x + \frac{3}{\sqrt{11}}\vec{u}_y$$

$$= -|\vec{w}_u| \cdot |\vec{u}|$$

$$-|w_u| = \vec{w} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{11}}\left(-\sqrt{2}(3) + 3(-2)\right) \approx -3.09$$

Il vettore w_u è quello che va da O a P_{wu}



$\boxed{\text{ES. 1}}$ (ES. 1.5 GIORDANI)

Definiamo con v_0 il modulo della velocità iniziale del pallone. Negli istanti successivi al lancio le coordinate della sua posizione e le componenti della sua velocità saranno dati dalle seguenti:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 \cos(\theta)\cdot t \\ y = v_0 \sin(\theta)\cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Dove gli assi x e y hanno origine nel punto di lancio e sono diretti nel modo usuale

Quando il pallone ricade al suolo dovrà necessariamente essere $y=0$, e l'istante in cui ciò accade potrà essere ricavato come segue

$$y=0 \longrightarrow 0 = v_0 \sin(\theta)\cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Raccogliendo t a fattore comune

$$\left(gt - 2v_0 \sin(\theta)\right) t = 0$$

$$\downarrow$$

$$t_{1,2} = \begin{cases} 0 \\ \boxed{\dfrac{2v_0 \sin(\theta)}{g}} \end{cases}$$

Questo è l'istante di nostro interesse

Considerando la soluzione appena trovata, otteniamo che la gittata sarà definita da

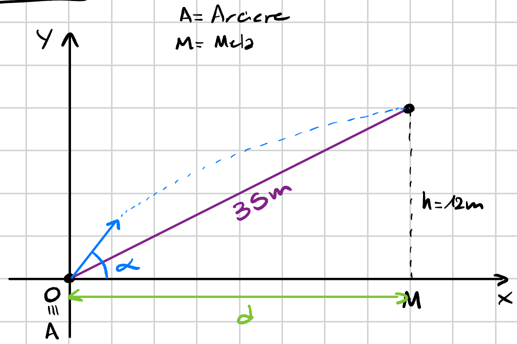
$2\sin\theta\cos\theta = \sin(2\theta)$

$$x_g = x(t_2) = v_0 \cos(\theta)\cdot \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

Dato che nel nostro caso la gittata è un valore dato dal problema, e $x_g = L$, conoscendo l'angolo di lancio θ otteniamo

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x_g}{\sin(2\theta)}} = \sqrt{\frac{gL}{\sin(2\theta)}} = 17,7 \text{ m/s}$$

$\boxed{ES.\ 2}$ (ES. 1.16 GIORDANI)



Partiamo considerando la distanza lungo l'asse x tra l'arciere e la mela.
La distanza tra i due é s, ed h é la differenza di quota é h
→ La distanza d orizzontale sará

$$d = \sqrt{s^2 - h^2} = 32.9\ m$$

Le leggi orarie per la freccia (considerata un punto materiale) saranno quelle di un moto uniforme lungo l'asse x e uniformemente accelerato lungo l'asse y

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

→ Giá a questo livello possiamo imporre le condizioni $x(t_f) = d$ e $y(t_f) = h$, riconducendoci ad un sistema di due equazioni con due incognite (owero t_f e v_0)
→ Di seguito viene proposta una maniera leggermente diversa, ma equivalente

Dove α é l'angolo di mira rispetto all'orizzontale e v_0 é il modulo incognito della velocitá iniziale della freccia
→ v_0 possiamo ricavarlo dalla prima equazione e sostituirlo nella seconda, ottenendo:

$$v_0 = \frac{x(t)}{t \cos\alpha} \longrightarrow y(t) = \frac{x(t)}{\cancel{t} \cos\alpha} \cancel{t} \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = x(t) \tan\alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Nell'istante t_f in cui la freccia colpisce la mela si ha che $x(t_f) = d$ e $y(t_f) = h$ per cui l'equazione precedente ci permette di ricavare t_f e di conseguenza v_0

$$h = d \tan\alpha - \frac{1}{2} g t_f^2 \longrightarrow t_f = \sqrt{\frac{2}{g}(d \tan\alpha - h)} = 1.19\,s$$

$$\longrightarrow v_0 = \frac{d}{t_f \cos\alpha} = 31.8\ m/s$$

Per trovare l'istante di massima quota per la freccia basta annullare la componente verticale della velocitá

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin\alpha - g t_m = 0 \longrightarrow t_m = \frac{v_0}{g} \sin\alpha = 1.62\,s$$

Come possiamo vedere $t_m > t_f$ → la freccia colpisce la mela quando é ancora nella fase di salita
⇓
l'altezza massima raggiunta dalla freccia é h

Per rispondere al punto 4) bisogna ricavare la traiettoria dalle leggi orarie (eliminando il tempo) e considerare l'equazione risultante come funzione dell'angolo. L'angolo minimo lo si ottiene quando $v_0 = v_{max}$, da cui:

$$v_0 = \frac{d}{t_f \cos\alpha} \longrightarrow t_f = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} = \frac{d}{v_{max} \cos\alpha}$$

$$h = d\tan\alpha - \frac{1}{2} g\, t_f^2 = d\tan\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_{max}\cos\alpha}\right)^2$$

$$\underbrace{-\frac{g d^2}{2v_{max}^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}} \quad \underbrace{-\frac{g d^2}{2v_{max}^2}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \quad \underbrace{-\frac{g d^2}{2v_{max}^2}\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)} \quad -\frac{g d^2}{2v_{max}^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

Dato che siamo interessati a trovare α (e considerando che al primo elemento del secondo membro compare $\tan\alpha$), ci conviene cercare di riscrivere $1/\cos^2\alpha$ in funzione di $\tan(\alpha)$, in maniera tale da poter risolvere in maniera agevole l'equazione

$$\rightarrow h = d\tan\alpha - \frac{g d^2}{2v_{max}^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)$$

Questa è un'equazione di secondo grado in $\tan\alpha$ le cui soluzioni sono:

$$-\frac{g d^2}{2v_{max}^2}\tan^2(\alpha) + d\tan(\alpha) - \frac{g d^2}{2v_{max}^2} - h$$

$$\Delta = d^2 - \frac{2 g d^2}{v_{max}^2}\left(\frac{g d^2}{2v_{max}^2}+h\right)$$

$$\tan(\alpha)_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - \frac{2 g d^2}{v_{max}^2}\left(\frac{g d^2}{2v_{max}^2}+h\right)}}{-\cancel{2}\,\frac{g d^2}{\cancel{2} v_{max}^2}} = \frac{+\cancel{d} \pm \cancel{d}\sqrt{1-\frac{2g}{v_{max}^2}\left(\frac{g d^2}{2v_{max}^2}+h\right)}}{\frac{g d^{\cancel{2}}}{v_{max}^2}}$$

$$= \frac{1}{g d}\left(v_{max}^2 \pm \underbrace{\sqrt{v_{max}^4 - 2 h g\, v_{max}^2 - g^2 d^2}}\right) \begin{cases} 12.09 \\ \boxed{0.462} \rightarrow \alpha_{min} = 24.8° \end{cases}$$

Per valori sufficientemente piccoli di v_{max} non esistono soluzioni ($\equiv$ la freccia non è in grado di arrivare all'altezza della mela)

$\rightarrow$ Chiaramente la soluzione che cerchiamo è quella con la tangente più piccola

Per rispondere all'ultimo punto 5) scriviamo le equazioni orarie per la freccia $(x_F(t), y_F(t))$, analoghe a prima ma traslate temporalmente di Δt, e anche per la mela $(x_m(t), y_m(t))$, che ora ha un moto di caduta libera:

$$\begin{cases} x_F(t) = v_0 (t-\Delta t)\cos\alpha \\ y_F(t) = v_0(t-\Delta t)\sin\alpha - \frac{1}{2} g (t-\Delta t)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_m(t) = d \\ y_m(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Per risolvere poniamo $x_F(t_f) = x_m(t_f)$, che ci permette di trovare l'istante di impatto

$$d = v_0(t_f - \Delta t)\cos\alpha \rightarrow t_f = \Delta t + \frac{d}{v_0\cos\alpha}$$

Sostituendo per t_F nell'ulteriore vincolo $y_F(t_F) = y_M(t_F)$ si ottiene la seguente equazione

$$h - \frac{1}{2} g \left(\Delta t + \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 = v_0 \sin\alpha \frac{d}{v_0 \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0 \cos\alpha} \right)^2$$

$$h - \frac{1}{2} g \left(\Delta t^2 + \cancel{\frac{d^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}} + 2 \Delta t \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \right) = \cancel{v_0} \sin\alpha \frac{d}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \cancel{\frac{1}{2} g \left(\frac{d}{v_0 \cos\alpha} \right)^2}$$

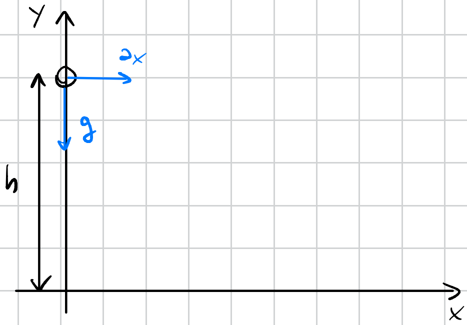
$$-\frac{1}{\cancel{2}} g \frac{\cancel{2} \Delta t\, d}{v_0 \cos\alpha} = d \tan(\alpha) - h + \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$v_0 = \frac{-g \Delta t\, d}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{d \tan\alpha - h + \frac{1}{2} g \Delta t^2} = 38.5 \text{ m/s}$$

Verifichiamo infine che l'altezza avviene il contatto è maggiore di zero

$$y_M(t_F) = h - \frac{1}{2} g \left(\Delta t + \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 = 6.14 \text{m}$$

$\boxed{\text{ES. 3}}$ (DAGHERO 1.12)



Il moto avviene in un piano, quindi può essere studiato in un sistema bidimensionale di coordinate

→ Conviene scegliere due assi cartesiani, di cui uno (x), orizzontale nel verso del vento, e l'altro (y), verticale e orientato verso l'alto, passante per la posizione iniziale del corpo e avente lo zero (origine) a terra

Il moto del corpo è uniformemente accelerato, con accelerazione

$$\vec{a} = \underbrace{a_x}_{1.2 m/s^2} \vec{u}_x - \underbrace{g}_{9.8 m/s^2} \vec{u}_y$$

Adesso possiamo tenere due approcci leggermente diversi, ma del tutto equivalenti.
Nel primo scomponiamo sin da subito il moto lungo le due direzioni x e y (entrambi uniformemente accelerati), trattandole in maniera indipendente e ottenendo quindi il seguente sistema

↳ sin da subito

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Nel secondo approccio invece partiamo da una formulazione vettoriale e poi proiettiamo in x e y.
Supponendo che il corpo venga lasciato cadere all'istante $t=0$, la legge vettoriale del moto è

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Il senso fisico termina al punto di impatto con il terreno

Dove la posizione iniziale è $\vec{r}(0) = h \vec{u}_y$, con $h = 39$m.
Questa è l'equazione parametrica di una semiretta che parte dal punto $\vec{r}(0)$ ed è diretta lungo il vettore $\vec{a}$

Per determinare l'equazione cartesiana nel piano (x, y), si deve scomporre il vettore posizione $\vec{r}(t)$ nelle sue componenti lungo gli assi. Formalmente, questo equivale a moltiplicare scalarmente $\vec{r}(t)$ per i versori degli assi, cioè:

$$x(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{u}_x = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$y(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{u}_y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Riottenendo quindi le stesse equazioni ricavate con il primo approccio

$$t^2 = \frac{2x(t)}{a_x}$$

Ricavando il parametro t (tempo) dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, si ottiene

$$y = h - \frac{g}{a_x} x$$

che è l'equazione di una retta con coefficiente angolare pari a $-\frac{g}{a_x} = -8.2$ e passante per il punto $(0, h)$ m

Il tempo t_{volo} che il corpo impiega ad arrivare a terra è definito dalla condizione $y(t_{volo}) = 0$, da cui, attraverso l'espressione per $y(t)$, si ricava

$$t_{volo} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2.8 s$$

La durata del volo non dipende dall'accelerazione dovuta al vento, quindi è uguale a quella che si avrebbe per un oggetto in caduta libera

Per quanto riguarda la velocità, ad un generico istante si ha $\vec{v}(t) = \vec{a}\, t$

→ All'istante di arrivo si avrà

$$\vec{v}(t_{volo}) = \vec{a}\, t_{volo} = \overbrace{a_x \sqrt{\frac{2h}{g}}}^{v_x(t_{volo}) = a_x \cdot t_{volo}} \vec{u}_x - \overbrace{\sqrt{2gh}}^{v_y(t_{volo}) = -g \cdot t_{volo}} \vec{u}_y = (3.38\, \vec{u}_x - 27.65\, \vec{u}_y)\ m/s$$

Da cui $v(t_{volo}) = |\vec{v}(t_{volo})| = \sqrt{2gh\left[1 + \left(\frac{a_x}{g}\right)^2\right]} = 27.8\ m/s$

$|\vec{v}(t_{volo})|$ è la radice della somma quadratica di $v_x(t_{volo})$ e $v_y(t_{volo})$

→ Equivalente quindi alla velocità che si avrebbe per un corpo in caduta libera ($\sqrt{2gh}$) aumentata di un fattore che dipende dall'accelerazione causata dal vento

$\boxed{\text{ES. 4}}$ (GIORDANI 1.15)

1) Per una piattaforma che gira x volte al minuto, la velocità angolare è:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi x}{60} \text{ rad/s}$$

Essendo l'accelerazione definita come

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Con $a = 10 \cdot g$ si avrà:

$$a = \frac{4\pi^2 x^2}{3600} r \longrightarrow x = \sqrt{\frac{3600 \cdot 10}{4\pi^2 r} g} = 84.6 \text{ giri/min}$$

2) La velocità con la quale il sasso lascia la circonferenza è:

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} \cdot \ell = 12.6 \text{ m/s}$$

Sapendo che percorre 2 giri al secondo, il periodo T (definito come il tempo impiegato a percorrere un giro) sarà 0.5 secondi

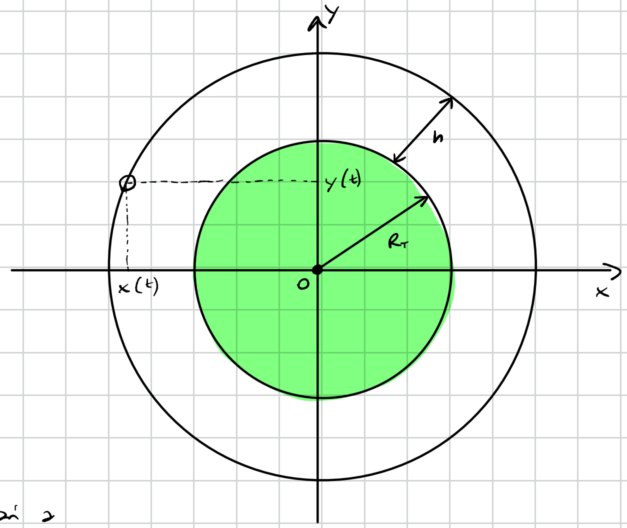
3) La velocità angolare è $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2.09$ rad/s. L'accelerazione cercata, quindi, è pari a

$$a_c = \omega^2 R = 8.77 \text{ m/s}^2$$

4) Essendo il periodo pari a $T = \frac{60}{33}$ s $= 1.82$ s, il granello di polvere ruota con una velocità angolare $\omega = \frac{2\pi}{T} = 3.45$ rad/s. Quindi l'accelerazione del granello è

$$a = \omega^2 r = \omega^2 \frac{D}{2} = \frac{2\pi^2 D}{T^2} = 1.79 \text{ m/s}^2$$

Es. 5 (GIORDANI 1.14)



Il periodo di rivoluzione è pari a

$$T = \underbrace{3600\,s}_{1h} + \underbrace{(35 \cdot 60)\,s}_{35min} + 12\,s = 5{,}71 \cdot 10^3\,s$$

Il raggio della traiettoria sarà dato dal raggio della Terra + distanza dalla superficie

$$r = R_T + h = 6{,}92 \cdot 10^6\,m$$

Di conseguenza, la velocità angolare e la velocità lineare di rotazione sono

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1.10 \cdot 10^{-3}\,rad/s \;; \qquad v = \omega r = 7.67 \cdot 10^3\,m/s$$

mentre l'accelerazione centripeta è $a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 8.49\,m/s^2$

Prendendo un riferimento con l'origine nel centro della Terra (O), la traiettoria del satellite è una circonferenza di raggio r. In tale sistema di riferimento le equazioni orarie delle coordinate del satellite sono

$$\begin{cases} x(t) = r\cos(\omega t) \\ y(t) = r\sin(\omega t) \end{cases}$$

Quindi il vettore posizione può essere espresso come segue

$$\vec{r} = \vec{OP} = r\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + r\sin(\omega t)\,\vec{u}_y$$

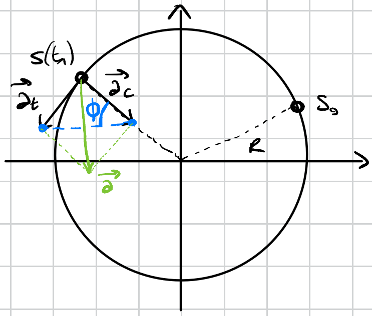
Mentre, per quanto riguarda i vettori velocità e accelerazione, dovendo essere $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, varrà

$$\vec{v} = \underbrace{v}_{\text{v = ωr, dove ω compare derivando cos(ωt) e sin(ωt) di } \vec{r}}\left[-\sin(\omega t)\,\vec{u}_x + \cos(\omega t)\,\vec{u}_y\right] ; \qquad \vec{a} = -\underbrace{a}_{\omega^2 r}\left[\cos(\omega t)\,\vec{u}_x + \sin(\omega t)\,\vec{u}_y\right]$$

→ $\vec{v}$ ed $\vec{a}$ sono perpendicolari

→ $\vec{a}$ è parallelo ad $\vec{OP}$, ma diretto verso l'origine

ES. 6 (GIORDANI 1.11)



Il moto lungo la traiettoria ha un'accelerazione tangenziale costante, quindi vale la relazione

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

Ponendo $v_0 = 0$, si ricava che

$$\Delta s = s(t_1) - s_0 = s_0 + \frac{1}{2} a_t t^2 - s_0 = \frac{1}{2} a_t t^2 \longrightarrow a_t = \frac{2\Delta s}{t_1^2} = 3.00\ m/s^2$$

Di conseguenza, la velocità dell'auto all'istante t_1 ha modulo $v(t_1) = a_t t_1 = 30.0\ m/s$ e, dato che l'auto si muove lungo una traiettoria circolare, la sua accelerazione centripeta all'istante t_1 avrà modulo

$$|\vec{a}_c| = a_c = a_c(t_1) = \frac{v^2(t_1)}{R} = 3.00\ m/s^2$$

con $\vec{a}_c$ diretto lungo il raggio, verso il centro.
L'accelerazione totale $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$ forma con il raggio passante per la posizione dell'auto all'istante t_1 un angolo ϕ, tale che

$$\tan\phi = \frac{a_t}{a_c} = 1$$

Per cui $\phi = 45°$ e il modulo dell'accelerazione totale è pari a

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{2} \cdot a_t = 4.24\ m/s^2$$