TURNO 2 - 16/01/2024

QUESITO 1

$$\left(\phi(y) + \frac{y^2}{1+x^2y^4},\ x + \frac{2xy}{1+x^2y^4}\right) \qquad \phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : C^1$$

DETERMINARE ϕ TALE CHE $\phi(0) = 4$, PER LA QUALE IL CAMPO È CONSERVATIVO.
CALCOLARE $\phi(4)$

SOL. PER IL TEOREMA 5.2 (Pag. 101), SE

> D È UN APERTO SEMPLICEMENTE CONNESSO DI $\mathbb{R}^n$
> $F: D \to \mathbb{R}^n$ È UN CAMPO C^1 IRROTAZIONALE
> $\Rightarrow$ ALLORA F È CONSERVATIVO

NEL NOSTRO CASO:
- ϕ VA DA $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^1

SE RIESCO A DIMOSTRARE CHE F È IRROTAZIONALE, ALLORA F È CONSERVATIVO.

PER DEFINIZIONE DI CAMPO IRROTAZIONALE:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial y} F_1}$$

FACCIO IL TEST DELLE DERIVATE MISTE:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x + \frac{2xy}{1+x^2y^4}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(y) + \frac{y^2}{1+x^2y^4}\right]$$

1 $$\frac{\partial}{\partial x}\left[x + \frac{2xy}{1+x^2y^4}\right] = 1 + \frac{2y(1+x^2y^4) - 2xy(2xy^4)}{(1+x^2y^4)^2}$$

2 $$\frac{\partial}{\partial y}\left[\Phi(y) + \frac{y^2}{1+x^2y^4}\right] = \frac{d\Phi(y)}{dy} + \frac{2y(1+x^2y^4) - y^2(x^2 4y^3)}{(1+x^2y^4)^2}$$

1 = 2 $$\to 1 + \frac{\cancel{2y(1+x^2y^4)} - 2xy(2xy^4)}{\cancel{(1+x^2y^4)^2}} = \frac{d\Phi(y)}{dy} + \frac{\cancel{2y(1+x^2y^4)} - y^2(x^2 4y^3)}{\cancel{(1+x^2y^4)^2}}$$

$$\to 1 - 4x^2y^5 = \frac{d\Phi(y)}{dy} - 4y^5x^2$$

$\Rightarrow$ OTTENGO CHE $\dfrac{d\Phi(y)}{dy} = 1$, QUINDI $\Phi(y) = y + K$

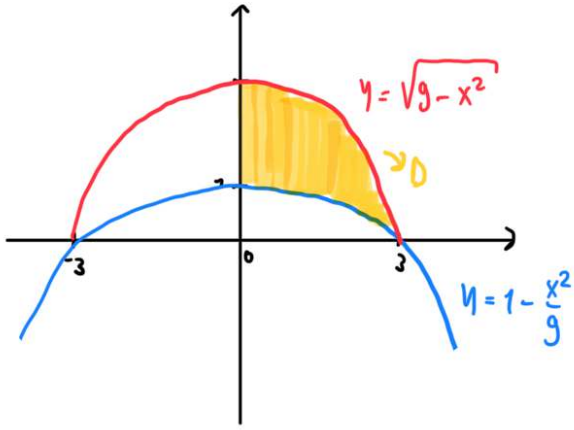
SE $\Phi(0) = 4 \rightarrow 0 + K = 4$

QUINDI, $\Phi(y) = y + 4$

INFINE, $\Phi(4) = 4 + 4 = 8$ ✓

QUESITO 2

$$\int_D 4x \, dx\, dy \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ \ 1 - \frac{x^2}{9} < y < \sqrt{9-x^2} \right\}$$



Sol. IL DOMINIO E': $0 \le x \le 3$

$$1 - \frac{x^2}{9} \le y \le \sqrt{9-x^2}$$

$$\int_0^3 \int_{1-\frac{x^2}{9}}^{\sqrt{9-x^2}} 4x \, dy\, dx = \int_0^3 \left[4xy \right]_{1-\frac{1}{9}x^2}^{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$= \int_0^3 4x\sqrt{9-x^2} - \left(4x\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\right) dx = \int_0^3 4x\sqrt{9-x^2} - 4x + \frac{4}{9}x^3 \, dx$$

$$= \int_0^3 4x\sqrt{9-x^2}\, dx - \int_0^3 4x\, dx + \int_0^3 \frac{4}{9}x^3\, dx = \int_0^3 4x\sqrt{9-x^2}\, dx - \left[4\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{4}{9}\frac{x^4}{4}\right]_0^3$$

$$= \int_0^3 4x\sqrt{9-x^2}\, dx - 18 + 9 = \int_0^3 4x\sqrt{9-x^2}\, dx - 9$$

ORA GIOCO UN PO' CON LE DERIVATE: $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ $\quad \left[\frac{d}{dx}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(-2x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$

$$\rightarrow -\frac{2}{3}\cdot 2 \int_0^3 \frac{3}{2}(-2x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx - 9 = -\frac{4}{3}\left[(9-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 - 9 = -\frac{4}{3}\left[(9-9)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right] - 9$$

$$= -\frac{4}{3}\left(-9^{\frac{3}{2}}\right) - 9 = -\frac{4}{3}(-27) - 9 = 36 - 9 = 27$$

QUESITO 3

1 OGNI 100 MILIONI DI ANNI

ULTIMO: 66 MILIONI DI ANNI FA

CALCOLARE PROBABILITÀ CHE NEI PROSSIMI 5 MLN DI ANNI CADA ALMENO UN METEORITE

SOL. IL PROBLEMA SI DESCRIVE TRAMITE UN PROCESSO DI POISSON

X = # METEORITI CHE CADONO NELL'INTERVALLO [0,100]

VALORE MEDIO DI METEORITI CHE CADONO IN 1 MLN DI ANNI: $\frac{1}{100} = 0.01$

Y = # DI METEORITI CHE CADONO IN 5 MLN DI ANNI

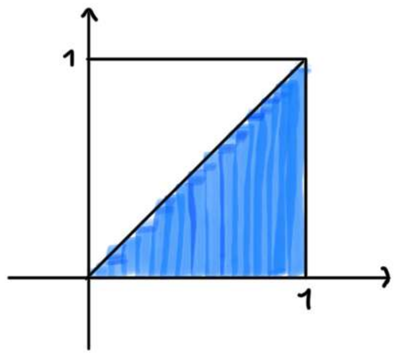
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0)$$

$$\lambda \cdot t = 0.01 \cdot 5 = 0.05$$

$$P(Y=0) = e^{-0.05} \cdot \frac{0.05^0}{0!} = e^{-0.05}$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-0.05} = 0.0487$$

QUESITO 4



V.A X,Y: $[0,1] \times [0,1]$ $\qquad f_{X,Y} = 4xy$

$P(y \leq x)$

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

$$\int_0^1 \int_0^x 4xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[4x \frac{y^2}{2}\right]_0^x = \int_0^1 2x^3 =$$

$$\int_0^1 \int_{-1}^x 4xy \, dy \, dx = \int_0^1 \left[4x \frac{y^2}{2}\right]_0^x = \int_0^1 2x^3 = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$