# Dispensa 4: TRASFORMATA Z e Regione di CONVERGENZA (ROC)

**PARTE 1 - Trasformata Z**

**Esercizio 1**

Dato il filtro: $h(n) = \delta(n)$, si calcoli la sua funzione di trasferimento e la regione di convergenza.

*SVOLGIMENTO*

La funzione di trasferimento di un filtro è la trasformata della sua risposta impulsiva. Quindi, usando la definizione:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} = 1$$

$ROC = \mathbb{C}$, perché la sommatoria per il calcolo della trasformata $\mathbb{Z}$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$

**Esercizio 2**

Dato il sistema $y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$, calcolare

1. $H(\omega)$ e $H(z)$
2. modulo e fase di $H(\omega)$

*SVOLGIMENTO*

1. Innanzitutto calcolo la risposta impulsiva dall'equazione alle differenze, ponendo $x(n) = \delta(n)$:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

   Da questa calcolo la risposta in frequenza come $H(\omega) = FT[h(n)]$:

   $H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega}$

   e ricordando che $H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ posso concludere che:

   $H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1}$, con ROC $= \mathbb{C} \setminus \{z = 0\}$ (perché $H(0)$ non è definita)

2. Innanzitutto riscrivo la risposta in frequenza sfruttando le formule di Eulero:

$$H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(cos(-\omega) + jsin(-\omega)) = (\text{parità coseno e disparità seno}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(cos(\omega) - jsin(\omega))$$

Modulo: ricordando che $|H(\omega)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$:

$Re[H(\omega)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(\omega)$ , $Im[H(\omega)] = -\frac{1}{2}sin(\omega) \implies |H(\omega)| = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(\omega))^2 + (-\frac{1}{2}sin(\omega))^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(\omega)}$

Fase: applichiamo la definizione e otteniamo

$Arg(H(\omega)) = arctg\left(\frac{Im}{Re}\right) = arctg\left(\frac{-\frac{1}{2}sin(\omega)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos(\omega)}\right)$

**Esercizio 3**

Dato il sistema: $y(n) = 0.7y(n-1) - 0.3y(n-2) + 6x(n-1)$, calcolare la sua funzione di trasferimento e la sua risposta in frequenza (si supponga il sistema a riposo per n=0).

*SVOLGIMENTO*

Sfruttando le proprietà di linearità e di traslazione della trasformata $\mathbb{Z}$ ottengo dall'equazione alle differenze:

$$Y(z) = 0.7Y(z)z^{-1} - 0.3Y(z)z^{-2} + 6X(z)z^{-1} \implies Y(z)(1 - 0.7z^{-1} + 0.3z^{-2}) = 6X(z)z^{-1}$$

Dunque ricordando che per i sistemi convoluzionali $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6z^{-1}}{1 - 0.7z{-1} + 0.3z{-2}} = \frac{z^{-2}(6z)}{z^{-2}(z^2 - 0.7z + 0.3)} = \frac{6z}{z^2 - 0.7z + 0.3}$$

Da questa ottengo la sua risposta in frequenza come

$$H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{6e^{j\omega}}{e^{j2\omega} - 0.7e^{j\omega} + 0.3}$$

**PARTE 2 - Regione di Convergenza (ROC)**

Note di Ripasso: La regione di convergenza è la parte di piano complesso dove la serie che definisce la trasformata della funzione converge:

$$ROC = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \right| < \infty \right\}$$

L'analisi della ROC della funzione di trasferimento di un sistema permette di capire se esso è BIBO stabile e/o causale. In particolare:

- un sistema è BIBO stabile $\iff$ la ROC contiene la circonferenza di raggio unitario.
- un sistema è causale $\iff$ la ROC è la regione esterna ad un cerchio ($ROC = |z| > a$, con $a$ finito)

## Esercizio 4

Dato il filtro causale:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}}{1 + \frac{6}{5} z^{-1} + \frac{9}{2} z^{-2}}$$

Calcolare la ROC e verificarne la stabilità.

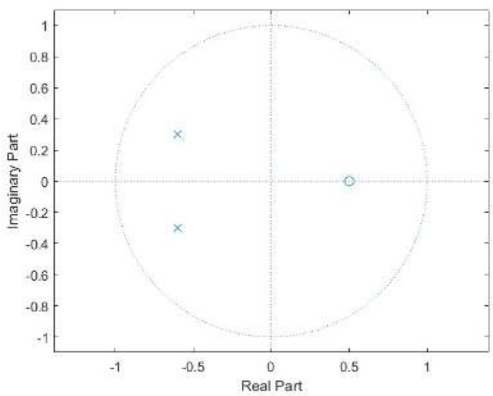
*SVOLGIMENTO*

Per calcolare la ROC è necessario conoscere zeri e poli della funzione di trasferimento. Per trovarli è necessario esplicitare $H(z)$ in funzione di $z$ (non $z^{-1}$), in modo da effettuare eventuali semplificazioni.

$H(z) = \frac{z^{-2}(z - \frac{1}{2})}{z^{-2}(z^2 + \frac{6}{5} z + \frac{9}{2})} = \frac{z - \frac{1}{2}}{(z + 0.6 - j0.3)(7 + 0.6 + j0.3)}$

Il filtro ha uno solo zero per $z = 1/2$. I poli sono invece $p_{1,2} = 0.6 \pm j0.3$

Ricordo che un filtro causale è stabile quando ogni suo polo ha modulo $< 1$. Considerando che i due poli hanno lo stesso modulo (in quando complessi coniugati) pari a $|p| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \sqrt{0.6^2 + 0.3^2} = \frac{3\sqrt{5}}{10} < 1$, possiamo concludere che il filtro è stabile. La $ROC$ è definita per $z > |p| = \frac{3\sqrt{5}}{10}$



## Esercizio 5

Dato il filtro causale:

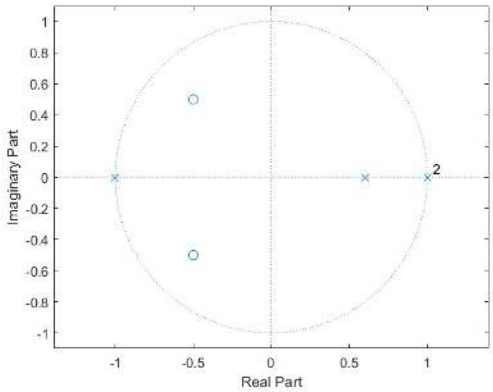
$$H(z) = \frac{(z+0.5+j0.5)(z+0.5-j0.5)}{(z-1)^2(z+1)(z-0.6)}$$

Discuterne la stabilità e definire la ROC.

*SVOLGIMENTO*

Per definire la stabilità di un filtro è necessario verificare che la sua ROC contenga la circonferenza di raggio unitario. In questo caso il filtro non può essere stabile in quanto (almeno) un polo giace sulla circonferenza di raggio unitario e i poli definiscono i limiti (non inclusi) della ROC.

Siccome il filtro è causale la ROC è la regione esterna ad un cerchio. Considerando quanto appena detto sui poli, possiamo concludere che $ROC = |z| > 1$




**Esercizio 6**

Dato il filtro: $h(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

dove $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$

1. Calcolare la sua funzione di trasferimento e la ROC
2. Discuterne stabilità e causalità.

*SVOLGIMENTO*

Innanzitutto calcolo la sua funzione di trasferimento come

$$H(z) = ZT[h(n)] = ZT[\delta(n)] + ZT\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right] = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$ converge a $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ se e solo se $|\frac{1}{2}z^{-1}| < 1$. Quindi, ottengo:

$$H(z) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2z - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}}$$

Da qui posso definire la ROC come l'insieme $z$ per cui

$$|\frac{1}{2}z^{-1}| < 1 \implies |z| > \frac{1}{2}$$

Essendo la ROC la regione esterna ad un cerchio, posso concludere che il filtro è causale (si poteva vedere anche dal fatto che $h(n) = 0 \ \forall n < 0$). Inoltre, in quanto la ROC contiene la circonferenza di raggio unitario, posso concludere che il filtro è stabile.