

## Modelli ai piccoli segnali

### Esercizio 1

DATI:

$$k_n = 1\text{mA}\cdot\text{V}^{-2}, V_{TN} = 1\text{V}, \lambda_n = 0.01\text{V}^{-1}$$

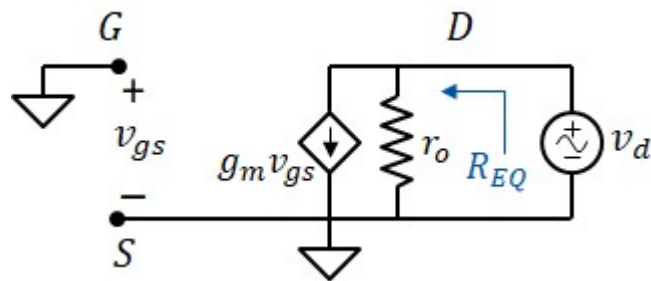
$$V_{REF} = 3\text{V}, V_D = 5\text{V}$$

#### 1) disegnare il modello ai piccoli segnali

Il MOSFET è in saturazione con:

$$V_{GS} = V_{REF} = 3\text{V} \quad V_{DS} = V_D = 5\text{V}$$

$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} \cdot (V_{GS} - V_{TN})^2 = 2\text{mA}$$

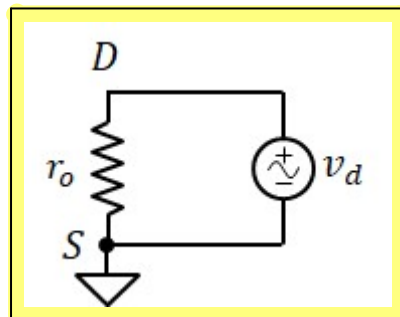


Nel disegnare il circuito ai piccoli segnali:

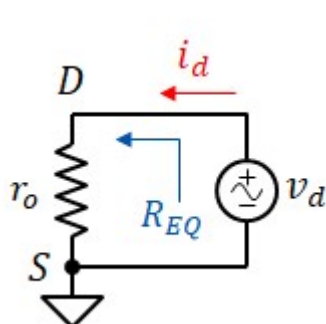
- si annullano i generatori costanti indipendenti
- si sostituisce il MOS con il suo modello equivalente al piccolo segnale

$$g_m = k_n \cdot (V_{GS} - V_{TN}) = 2\text{mS} \quad r_o = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS}} = 50\text{k}\Omega$$

$v_{gs} = 0$ , quindi il generatore pilotato coincide con un circuito aperto. è possibile eliminarlo dal circuito ai piccoli segnali



#### 2) calcolare la resistenza di piccolo segnale come indicato in figura



$$i_d = \frac{v_d}{r_o}$$

$$R_{EQ} = r_o = 50\text{k}\Omega$$

**Esercizio 2**

DATI:

$$k_n = 1\text{mA}\cdot\text{V}^{-2}, V_{TN} = 1\text{V}, \lambda_n = 0.01\text{V}^{-1}$$

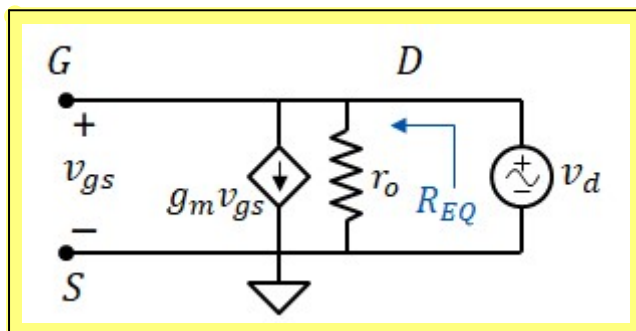
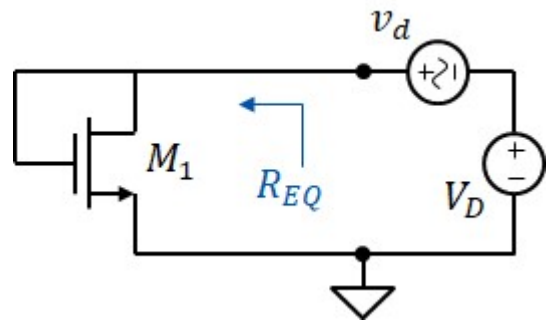
$$V_D = 3.5\text{V}$$

**1) disegnare il modello ai piccoli segnali**

Il MOSFET è in saturazione con:

$$V_{GS} = V_D = 3.5\text{V} \quad V_{DS} = V_D = 3.5\text{V}$$

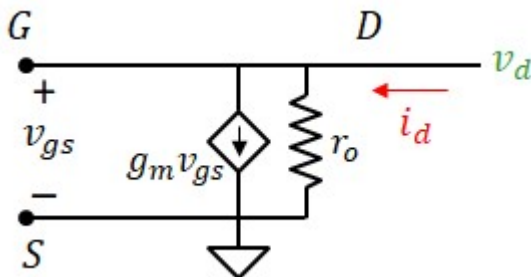
$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} \cdot (V_{GS} - V_{TN})^2 = 3.125\text{mA}$$



Nel disegnare il circuito ai piccoli segnali:

- si annullano i generatori costanti indipendenti
- si sostituisce il MOS con il suo modello equivalente al piccolo segnale

$$g_m = k_n \cdot (V_{GS} - V_{TN}) = 2.5\text{mS} \quad r_o = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS}} = 32\text{k}\Omega$$

**2) calcolare la resistenza di piccolo segnale come indicato in figura**
 $v_{gs} = v_{ds}$ , quindi il generatore pilotato eroga la corrente  $i_{ds} = g_m \cdot v_d$ .
Calcoliamo la corrente  $i_d$ :

$$i_d = g_m \cdot v_d + \frac{v_d}{r_o} = \left( g_m + \frac{1}{r_o} \right) \cdot v_d$$

$$R_{EQ} = \frac{r_o}{1 + g_m \cdot r_o} = 395.1\Omega$$

**Esercizio 3**

DATI:

$$k_p = 1\text{mA}\cdot\text{V}^{-2}, V_{TP} = -1\text{V}, \lambda_p = 0.01\text{V}^{-1}$$

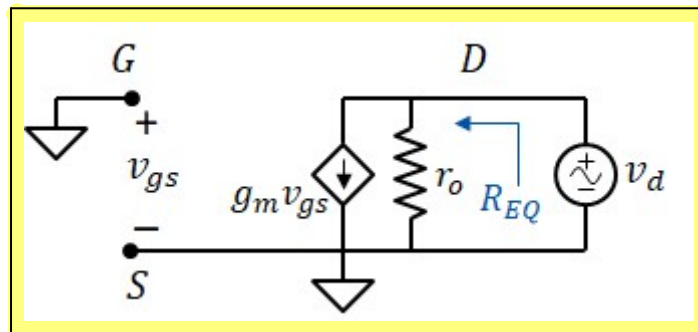
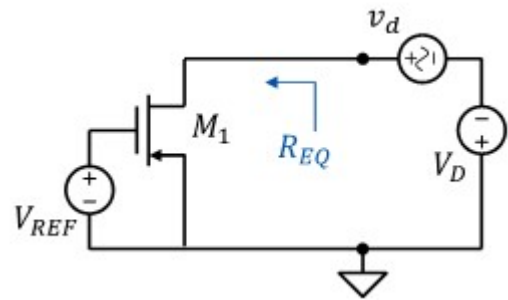
$$V_{REF} = -2\text{V}, V_D = 5\text{V}$$

**1) disegnare il modello ai piccoli segnali**

Il MOSFET è in saturazione con:

$$V_{GS} = V_{REF} - 0 = -2\text{V} \quad V_{DS} = 0 - V_D = -5\text{V}$$

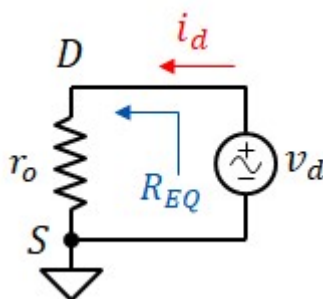
$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} \cdot (V_{GS} - V_{TP})^2 = 0.5\text{mA}$$



Nel disegnare il circuito ai piccoli segnali:

- si annullano i generatori costanti indipendenti
- si sostituisce il MOS con il suo modello equivalente al piccolo segnale

$$g_m = -k_p \cdot (V_{GS} - V_{TP}) = 1\text{mS} \quad r_o = \frac{1}{\lambda_p \cdot I_{DS}} = 200\text{k}\Omega$$

**2) calcolare la resistenza di piccolo segnale come indicato in figura** $v_{gs} = 0$ , quindi il generatore pilotato coincide con un circuito aperto.

$$i_d = \frac{v_d}{r_o}$$

$$R_{EQ} = r_o = 200\text{k}\Omega$$

**Esercizio 4**

DATI:

$$k_p = 1\text{mA}\cdot\text{V}^{-2}, V_{TP} = -1\text{V}, \lambda_p = 0.01\text{V}^{-1}$$

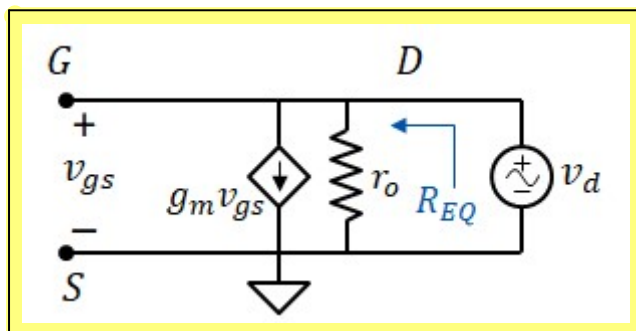
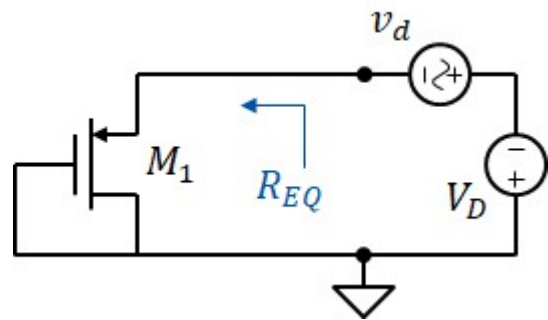
$$V_D = -3\text{V}$$

**1) disegnare il modello ai piccoli segnali**

Il MOSFET è in saturazione con:

$$V_{GS} = V_D = -3\text{V} \quad V_{DS} = V_D = -3\text{V}$$

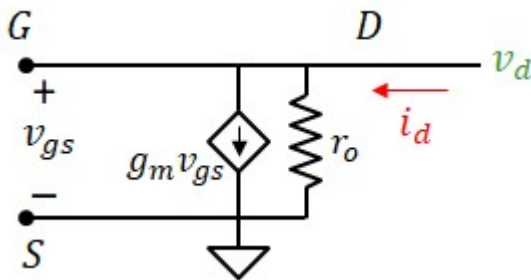
$$I_{DS} = \frac{k_p}{2} \cdot (V_{GS} - V_{TP})^2 = 2\text{mA}$$



Nel disegnare il circuito ai piccoli segnali:

- si annullano i generatori costanti indipendenti
- si sostituisce il MOS con il suo modello equivalente al piccolo segnale

$$g_m = -k_p \cdot (V_{GS} - V_{TP}) = 2\text{mS} \quad r_o = \frac{1}{\lambda_p \cdot I_{DS}} = 50\text{k}\Omega$$

**2) calcolare la resistenza di piccolo segnale come indicato in figura**
 $v_{gs} = v_{ds}$ , quindi il generatore pilotato eroga la corrente  $i_{ds} = g_m \cdot v_d$ .
Calcoliamo la corrente  $i_d$ :

$$i_d = g_m \cdot v_d + \frac{v_d}{r_o} = \left( g_m + \frac{1}{r_o} \right) \cdot v_d$$

$$R_{EQ} = \frac{r_o}{1 + g_m \cdot r_o} = 495\ \Omega$$

**Esercizio 5**

DATI:

$$k_n = 2\text{mA} \cdot \text{V}^{-2}, V_{TN} = 1\text{V}, \lambda_n = 0.01\text{V}^{-1}$$

$$V_D = 5\text{V}, V_{REF} = 3\text{V}$$

1) Calcolare il punto di polarizzazione di  $M_1$  e il valore di  $R_1$  sapendo che  $I_{DS} = 1\text{mA}$

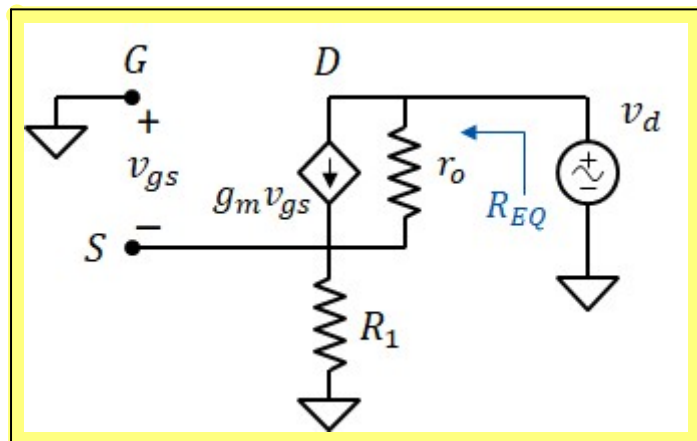
$$V_{GS} = V_{TN} + \sqrt{\frac{2 \cdot I_{DS}}{k_n}} = 2\text{V} \quad V_{R1} = V_{REF} - V_{GS} = 1\text{V}$$

$$V_{DS} = V_D - V_{R1} = 4\text{V}$$

Resistenza  $R_1$ :

$$R_1 = \frac{V_{R1}}{I_{DS}} = 1 \cdot \text{k}\Omega$$

2) disegnare il modello ai piccoli segnali

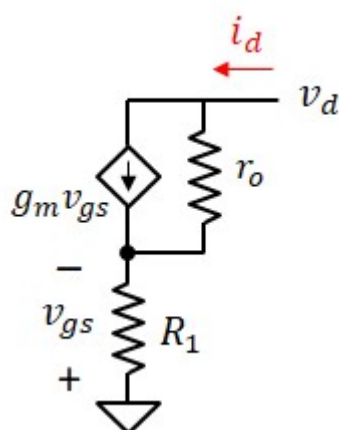


Nel disegnare il circuito ai piccoli segnali:

- si annullano i generatori costanti indipendenti
- si sostituisce il MOS con il suo modello equivalente al piccolo segnale

$$g_m = k_n \cdot (V_{GS} - V_{TN}) = 2 \cdot \text{mS} \quad r_o = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS}} = 100 \cdot \text{k}\Omega$$

3) calcolare la resistenza di piccolo segnale come indicato in figura

Fissata  $v_d$ , calcoliamo  $i_d$ :

$$i_d = g_m \cdot v_{gs} + \frac{v_d - (-v_{gs})}{r_o} = \frac{-v_{gs}}{R_1}$$

$$v_{gs} = \frac{-v_d}{r_o \cdot \left( g_m + \frac{1}{r_o} + \frac{1}{R_1} \right)}$$

$$i_d = \frac{v_d}{r_o \cdot R_1 \cdot \left( g_m + \frac{1}{r_o} + \frac{1}{R_1} \right)} = \frac{v_d}{g_m \cdot (r_o \cdot R_1) + r_o + R_1}$$

$$R_{EQ} = (g_m \cdot R_1 + 1) \cdot r_o + R_1 = 301 \cdot \text{k}\Omega$$

$$g_m \cdot R_1 + 1 = 3$$

**Esercizio 6**DATI:  $V_{REF} = 2V$ ,  $V_D = 6V$ 

$$k_n = 1mA \cdot V^{-2}, V_{TN} = 1V, \lambda_n = 0.01V^{-1}$$

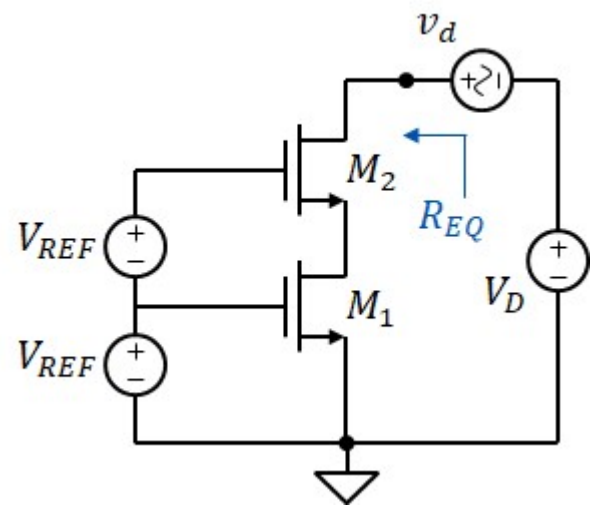
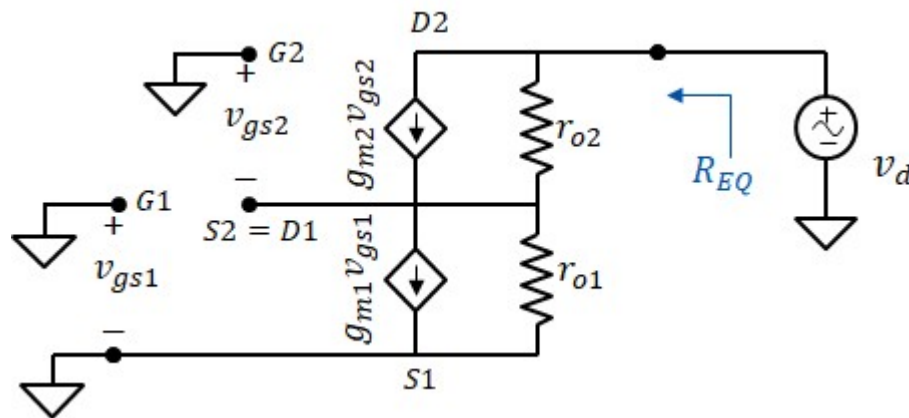
**1) Trovare il punto di polarizzazione di M1 e M2**

$$V_{GS1} = V_{REF} = 2V \quad I_{DS1} = \frac{k_n}{2} (V_{REF} - V_{TN})^2 = 0.5 \cdot mA$$

$$I_{DS2} = I_{DS1}$$

$$V_{GS2} = V_{TN} + \sqrt{\frac{2 \cdot I_{DS2}}{k_n}} = 2V \quad V_{DS1} = 2 \cdot V_{REF} - V_{GS2} = 2V$$

$$V_{DS2} = V_D - V_{DS1} = 4V$$

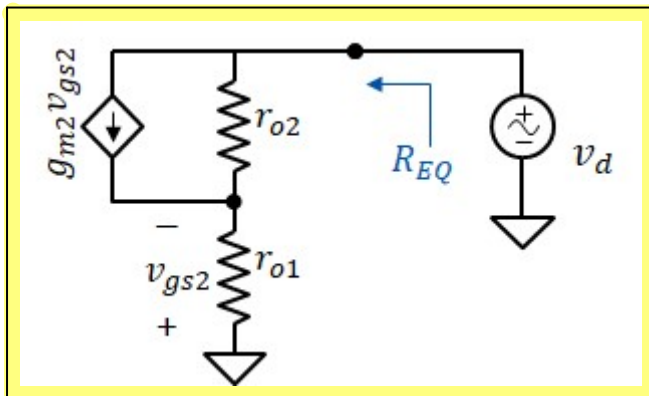
**2) Disegnare il circuito ai piccoli segnali**

$$g_{m1} = k_n \cdot (V_{GS1} - V_{TN}) = 1 \cdot mS$$

$$g_{m2} = k_n \cdot (V_{GS2} - V_{TN}) = 1 \cdot mS$$

$$r_{o1} = \frac{1}{I_{DS1} \cdot \lambda_n} = 200 \cdot k\Omega$$

$$r_{o2} = \frac{1}{I_{DS2} \cdot \lambda_n} = 200 \cdot k\Omega$$

Circuito semplificato tenendo conto che  $v_{gs1} = 0$ **3) Calcolare la resistenza equivalente come indicato in figura**Fissata  $v_d$ , calcoliamo  $i_d$ :

$$i_d = g_{m2} \cdot v_{gs2} + \frac{v_d - (-v_{gs2})}{r_{o2}} = \frac{-v_{gs2}}{r_{o1}}$$

$$v_{gs} = \frac{-v_d}{r_{o2} \cdot \left( g_{m2} + \frac{1}{r_{o2}} + \frac{1}{r_{o1}} \right)}$$

$$i_d = \frac{v_d}{g_{m2} \cdot (r_{o2} \cdot r_{o1}) + r_{o2} + r_{o1}}$$

$$R_{EQ} = (g_{m2} \cdot r_{o1} + 1) \cdot r_{o2} + r_{o1} = 40.4 \cdot M\Omega$$

$$g_{m2} \cdot r_{o1} + 1 = 201$$

**Esercizio 7**

DATI:  $V_{DD} = 10V$ ,  $V_S = 6V$

$k_n = 2mA \cdot V^{-2}$ ,  $V_{TN} = 1.5V$ ,  $\lambda_n = 0.01V^{-1}$

$R_2 = 10k\Omega$

1) sapendo che la caduta di tensione su  $R_1$  è  $V_{R1} = 8V$ , calcolare il punto di polarizzazione dei MOS.

$$V_{DS1} = V_{DD} - V_{R1} = 2V$$

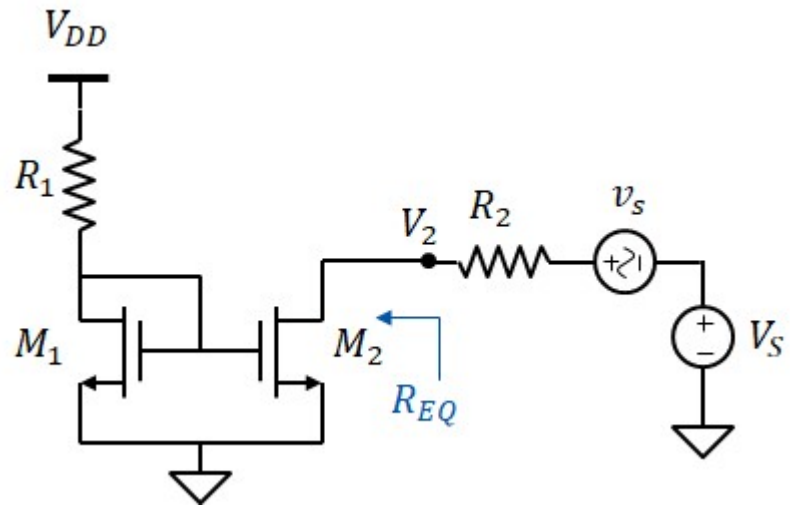
$$V_{GS1} = V_{DS1} = 2V$$

$$I_{DS1} = \frac{k_n}{2} \cdot (V_{GS1} - V_{TN})^2 = 0.25mA$$

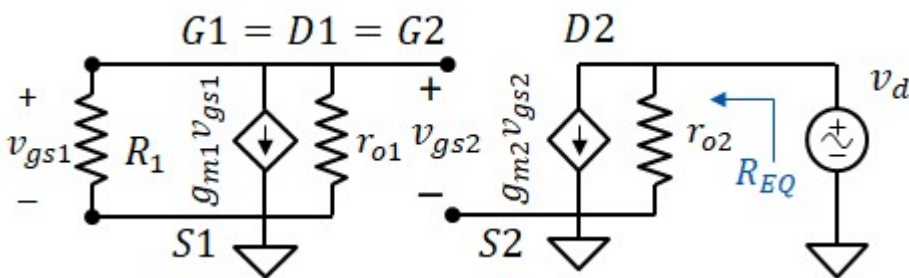
$$V_{GS2} = V_{GS1} = 2V$$

$$I_{DS2} = \frac{k_n}{2} \cdot (V_{GS2} - V_{TN})^2 = 0.25mA$$

$$V_{DS2} = V_S - R_2 \cdot I_{DS2} = 3.5V$$



2) disegnare il modello ai piccoli segnali



$$g_{m1} = k_n \cdot (V_{GS1} - V_{TN}) = 1mA/V$$

$$g_{m2} = k_n \cdot (V_{GS2} - V_{TN}) = 1mA/V$$

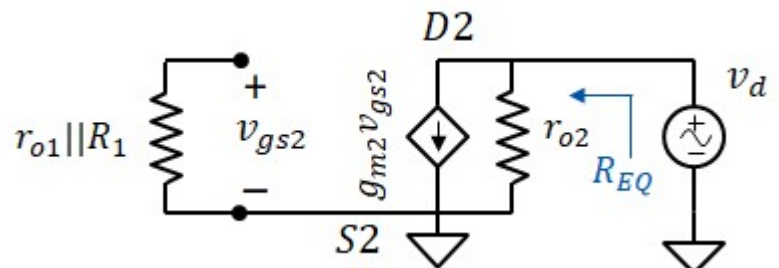
$$r_{o1} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS1}} = 400k\Omega$$

$$r_{o2} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS2}} = 400k\Omega$$

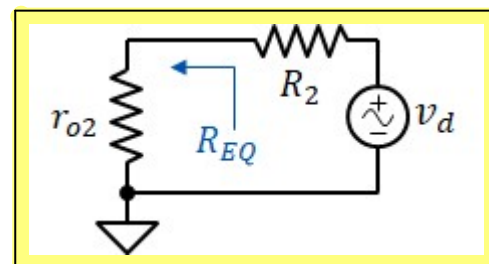
Consideriamo M1:

$$g_{m1} \cdot v_{gs1} + \frac{v_{gs1}}{R_1} + \frac{v_{gs1}}{r_{o1}} = 0 \quad v_{gs1} = 0$$

il generatore pilotato equivale a un circuito aperto



il parallelo  $r_{o1} || R_1$  è un circuito aperto, Non passa corrente e quindi la caduta di tensione è nulla ( $v_{gs2}=0$ ). Anche il secondo generatore di corrente si annulla.



3) Resistenza equivalente:

$$R_{EQ} = r_{o2} = 400k\Omega$$

**Esercizio 8**

DATI:  $V_{DD} = 10V$ ,  $V_S = 6V$

$k_p = 0.4mA \cdot V^{-2}$ ,  $V_{TP} = -1V$ ,  $\lambda_p = 0.01V^{-1}$

$R_2 = 15k\Omega$

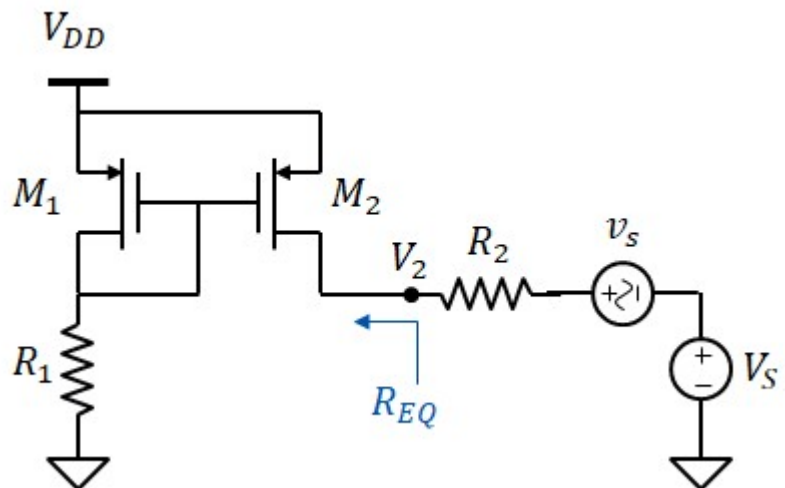
**1) trovare il valore di  $R_1$  in modo tale che  $I_{DS2} = 0.2mA$ .**

$$I_{DS1} = I_{DS2} = 0.2mA$$

$$V_{GS1} = V_{TP} - \sqrt{\frac{2 \cdot I_{DS1}}{k_p}} = -2V$$

$$V_{R1} = V_{DD} - (-V_{GS1}) = 8V$$

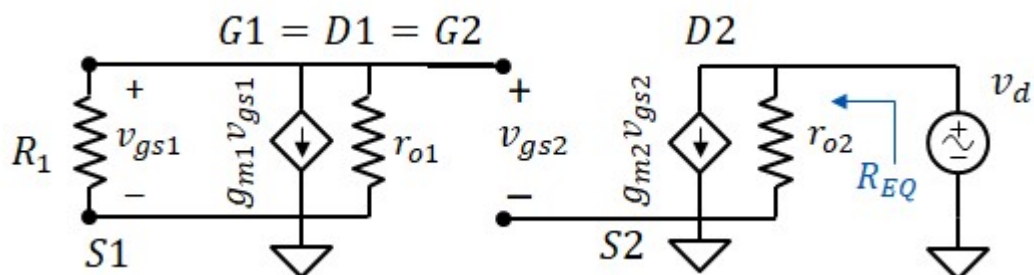
$$R_1 = \frac{V_{R1}}{I_{DS1}} = 40 \cdot k\Omega$$



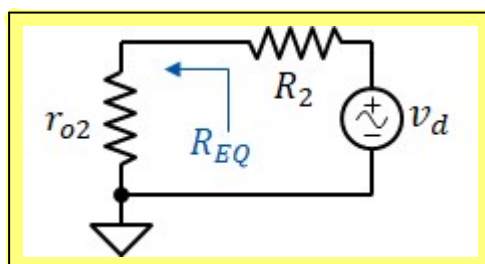
$V_{DS1} = V_{GS1} = -2V$  M1 è in saturazione

$V_{GS2} = V_{GS1} = -2V$   $V_{DS2} = -(V_{DD} - R_2 \cdot I_{DS2}) = -7V$  M2 è in saturazione

**2) disegnare il modello ai piccoli segnali**



Che si semplifica nel seguente:



$$r_{o2} = \frac{1}{\lambda_p \cdot I_{DS2}} = 500 \cdot k\Omega$$

**3) Resistenza equivalente:**

$$R_{EQ} = r_{o2} = 500 \cdot k\Omega$$



**Esercizio 9**

DATI:  $I_{REF} = 2\text{mA}$ ,  $V_{SS} = -12\text{V}$ ,  $R_L = 2\text{k}\Omega$

$k_n = 1\text{mA}\cdot\text{V}^{-2}$ ,  $V_{TN} = 1\text{V}$ ,  $\lambda_n = 0.01\text{V}^{-1}$

**1) calcolare la polarizzazione di tutti i MOS**

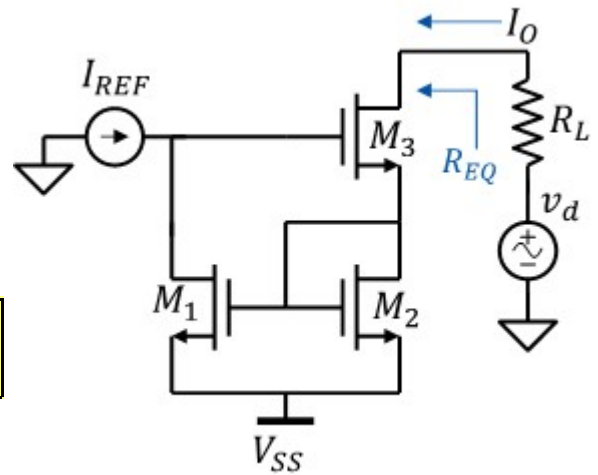
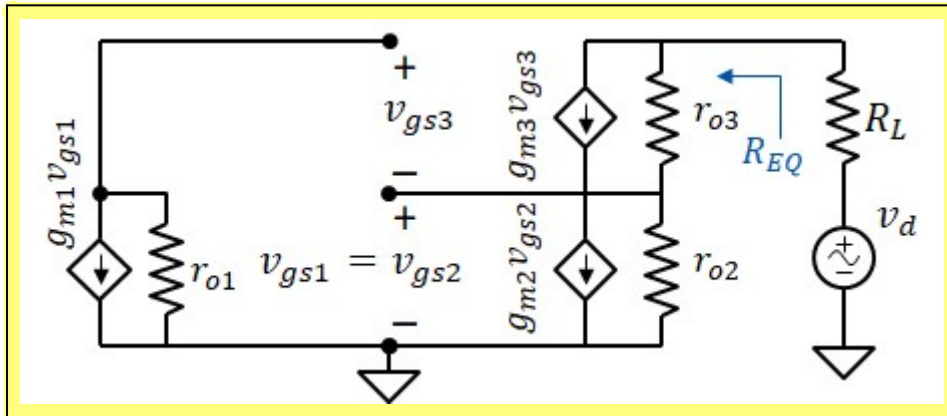
$$V_{GS1} = V_{TN} + \sqrt{\frac{2 \cdot I_{REF}}{k_n}} = 3\text{V} \quad \boxed{V_{GS2} = V_{GS1} = 3\text{V}}$$

$$\boxed{V_{DS2} = V_{GS2} = 3\text{V}}$$

$$V_{GS3} = V_{TN} + \sqrt{\frac{2 \cdot I_{REF}}{k_n}} = 3\text{V}$$

$$\boxed{V_{DS1} = V_{GS2} + V_{GS3} = 6\text{V}}$$

$$\boxed{V_{DS3} = 0 - V_{SS} - V_{DS2} - R_L \cdot I_{REF} = 5\text{V}}$$

**2) disegnare il circuito ai piccoli segnali**

$$g_{m1} = k_n \cdot (V_{GS1} - V_{TN}) = 2\text{mS}$$

$$g_{m2} = k_n \cdot (V_{GS2} - V_{TN}) = 2\text{mS}$$

$$g_{m3} = k_n \cdot (V_{GS3} - V_{TN}) = 2\text{mS}$$

$$r_{o1} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{REF}} = 50\text{k}\Omega$$

$$r_{o2} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{REF}} = 50\text{k}\Omega$$

$$r_{o3} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{REF}} = 50\text{k}\Omega$$

$$r_2 = \frac{r_{o2}}{1 + r_{o2} \cdot g_{m2}} = 495.05\Omega$$

**3) calcolare la resistenza equivalente**

Fissiamo  $i_d$  
$$v_d = v_3 + v_{gs1} = r_{o3} \cdot (i_d - g_{m3} \cdot v_{gs3}) + v_{gs1}$$

$$v_{gs3} = v_1 - v_{gs1}$$

$$v_{gs2} = v_{gs1} = r_2 \cdot i_d$$

$$v_1 = -g_{m1} \cdot r_{o1} \cdot v_{gs1}$$

$$v_d = r_{o3} \cdot i_d + g_{m3} \cdot r_{o3} \cdot (g_{m1} \cdot r_{o1} + 1) \cdot (r_2 \cdot i_d) + r_2 \cdot i_d$$

$$\boxed{R_{EQ} = r_{o3} + g_{m3} \cdot r_{o3} \cdot (g_{m1} \cdot r_{o1} + 1) \cdot r_2 + r_2 = 5.05\text{M}\Omega}$$

**Esercizio 10**

DATI:

$$k_n = 2\text{mA}\cdot\text{V}^{-2}, V_{TN} = 0.5\text{V}, \lambda_n = 0.01\text{V}^{-1}$$

$$V_{DD} = 5\text{V}, R_L = 10\text{k}\Omega$$

**1) calcolare la resistenza R1 affinché  $I_L = 0.25\text{mA}$** 

$$I_{DS1} = I_L \quad I_{DS2} = I_L \quad I_{DS3} = I_L \quad I_{DS4} = I_L$$

$$V_{GS1} = V_{TN} + \sqrt{\frac{2 \cdot I_L}{k_n}} = 1\text{V} \quad V_{DS1} = V_{GS1} = 1\text{V}$$

$$V_{GS3} = V_{GS1} \quad V_{DS3} = V_{GS3} = 1\text{V}$$

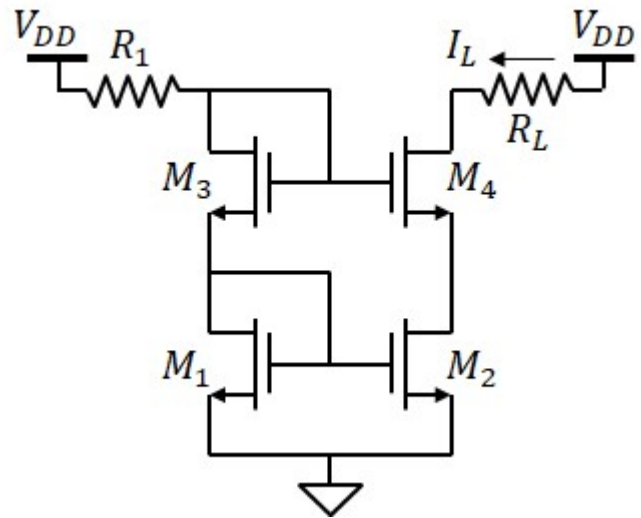
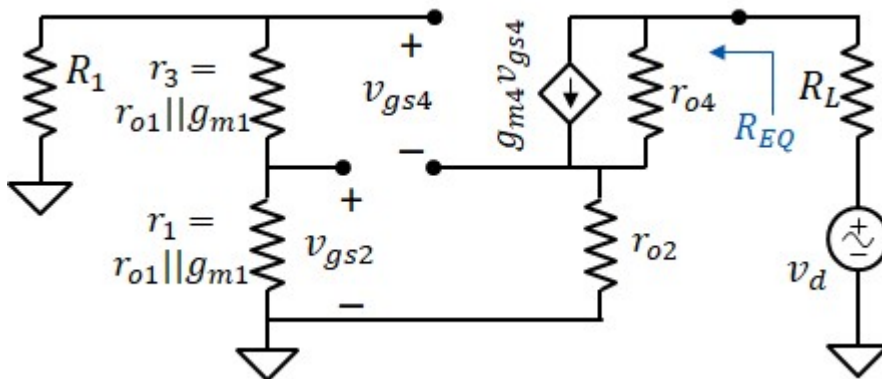
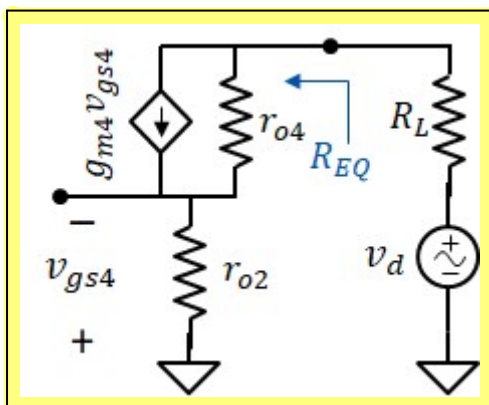
$$V_{GS2} = V_{GS1} \quad V_{GS4} = V_{GS1}$$

$$V_{DS2} = V_{GS1} + V_{GS3} - V_{GS4} = 1\text{V}$$

$$V_{DS4} = V_{DD} - R_L \cdot I_L - V_{DS2} = 1.5\text{V}$$

$$V_{R1} = V_{DD} - V_{DS1} - V_{DS3} = 3\text{V}$$

$$R_1 = \frac{V_{R1}}{I_{DS1}} = 12\text{k}\Omega$$

**2) disegnare il circuito ai piccoli segnali**per la serie  $R_1, r_3, r_1$  non passa corrente. Il circuito si semplifica in:

$$g_{m4} = k_n \cdot (V_{GS4} - V_{TN}) = 1\text{mS}$$

$$r_{o4} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS4}} = 400\text{k}\Omega$$

$$r_{o2} = \frac{1}{\lambda_n \cdot I_{DS2}} = 400\text{k}\Omega$$

**3) calcolare la resistenza equivalente**

$$\text{fissata } i_d: v_{gs4} = -r_{o2} \cdot i_d$$

$$v_d = v_4 + v_2 = r_{o4} \cdot (i_d - g_{m4} \cdot v_{gs4}) + r_{o2} \cdot i_d = r_{o4} \cdot (i_d + g_{m4} \cdot r_{o2} \cdot i_d) + r_{o2} \cdot i_d = [r_{o4} \cdot (1 + g_{m4} \cdot r_{o2}) + r_{o2}] \cdot i_d$$

$$R_{EQ} = r_{o4} \cdot (1 + g_{m4} \cdot r_{o2}) + r_{o2} = 160.8\text{M}\Omega$$

**Esercizio 11**

DATI:

$$k_p = 6 \text{ mA} \cdot \text{V}^{-2}, V_{TP} = -1 \text{ V}, \lambda_p = 0.01 \text{ V}^{-1}$$

$$V_{DD} = 9 \text{ V}, R_L = 5 \text{ k}\Omega, R_1 = 8 \text{ k}\Omega$$

**1) trovare la polarizzazione di tutti i MOS e la corrente  $I_L$** 

$$V_{GS1} = V_{GS3} \quad \frac{k_p}{2} \cdot (V_{GS1} - V_{TP})^2 = \frac{V_{DD} + 2 \cdot V_{GS1}}{R_1}$$

$$x = V_{GS1} - V_{TP} \quad x^2 = 2 \cdot \frac{V_{DD} + 2 \cdot V_{TP} + 2 \cdot x}{k_p \cdot R_1}$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{2 \cdot x}{k_p \cdot R_1} - 2 \cdot \frac{V_{DD} + 2 \cdot V_{TP}}{k_p \cdot R_1} = 0$$

$$b = -2 \cdot \frac{2}{k_p \cdot R_1} = -0.083 \text{ V} \quad c = -\left(2 \cdot \frac{V_{DD} + 2 \cdot V_{TP}}{k_p \cdot R_1}\right) = -0.292 \text{ V}^2$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = 0.583 \text{ V}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -0.5 \text{ V}$$

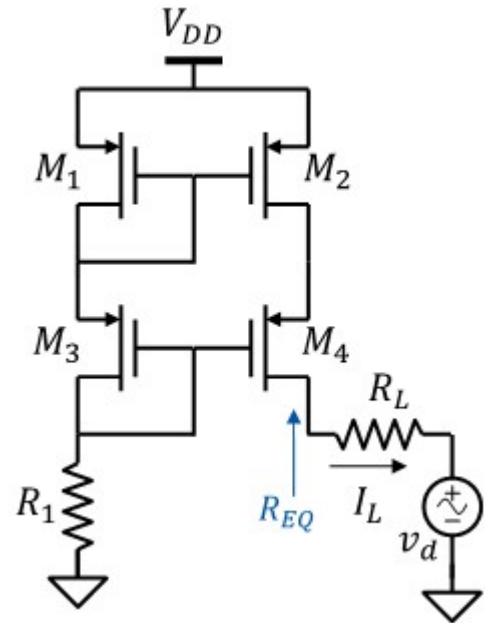
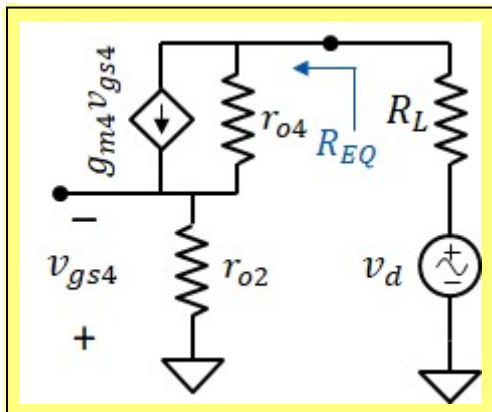
$$V_{GS1} = V_{TP} + x_2 = -1.5 \text{ V}$$

$$I_{DS1} = \frac{k_p}{2} \cdot (V_{GS1} - V_{TP})^2 = 0.75 \text{ mA}$$

$$I_{DS3} = I_{DS1} \quad V_{GS3} = V_{GS1} \quad V_{DS1} = V_{GS1} \quad V_{DS3} = V_{GS3}$$

$$V_{GS2} = V_{GS1} = -1.5 \text{ V} \quad V_{GS4} = V_{GS2} = -1.5 \text{ V} \quad I_L = I_{DS1} = 0.75 \text{ mA}$$

$$V_{DS2} = V_{GS1} + V_{GS3} - V_{GS4} = -1.5 \text{ V} \quad V_{DS4} = -(V_{DD} + V_{DS2} - R_L \cdot I_L) = -3.75 \text{ V}$$

**2) disegnare il circuito ai piccoli segnali**per la serie  $R_1, r_3, r_1$  non passa corrente. Il circuito si semplifica in:

$$g_{m4} = -k_p \cdot (V_{GS4} - V_{TP}) = 3 \text{ mS}$$

$$r_{o4} = \frac{1}{\lambda_p \cdot I_{DS4}} = 400 \text{ k}\Omega$$

$$r_{o2} = \frac{1}{\lambda_p \cdot I_{DS2}} = 400 \text{ k}\Omega$$

**3) calcolare la resistenza equivalente**

$$\text{fissata } i_d: v_{gs4} = -r_{o2} \cdot i_d$$

$$v_d = v_4 + v_2 = r_{o4} \cdot (i_d - g_{m4} \cdot v_{gs4}) + r_{o2} \cdot i_d = r_{o4} \cdot (i_d + g_{m4} \cdot r_{o2} \cdot i_d) + r_{o2} \cdot i_d = [r_{o4} \cdot (1 + g_{m4} \cdot r_{o2}) + r_{o2}] \cdot i_d$$

$$R_{EQ} = r_{o4} \cdot (1 + g_{m4} \cdot r_{o2}) + r_{o2} = 480.8 \text{ M}\Omega$$