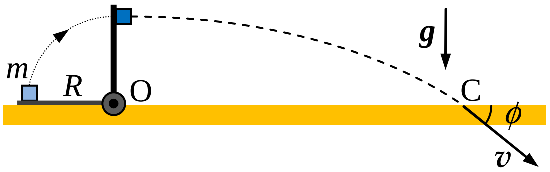
Corsi di Laurea in Ingegneria Biomedica, dell'Informazione, Elettronica e Informatica
Canale 3 (Prof. G. Naletto)
Prima Prova in Itinere di Fisica Generale 1 - Padova, 16 Aprile 2016

Cognome .... Nome .... Matricola ....

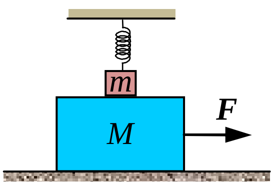
Problema 1



Una catapulta con il suo braccio imperniato in O è inizialmente bloccata sul piano orizzontale; a distanza $R = 1.6$ m da O, viene appoggiato sul braccio un corpo di dimensioni trascurabili e massa $m = 20$ kg. Ad un certo istante si sblocca la catapulta la quale, grazie ad un meccanismo interno, si mette in rotazione attorno al perno fisso in O applicando una accelerazione angolare di modulo $\alpha = k\theta$ al corpo, dove θ è l'angolo di rotazione del braccio rispetto all'asse orizzontale (inizialmente uguale a zero) e k una costante. Il braccio si blocca istantaneamente quando è in posizione verticale ($\theta = \pi/2$) ed il corpo, che non si è mosso relativamente al braccio e che in quell'istante ha una velocità angolare di modulo $\omega_d = 20$ rad/s, si distacca dal braccio. Determinare:

a) la distanza d del punto di contatto C del corpo con il suolo rispetto ad O;
b) l'angolo ϕ che la velocità del corpo in C forma con il piano orizzontale;
c) il valore della costante k;
d) il modulo a_d dell'accelerazione del corpo un istante prima del distacco dal braccio della catapulta;
e) (facoltativo) la distanza ℓ di cui il corpo penetra nel suolo lungo la direzione del moto a seguito dell'impatto, assumendo che il suolo opponga una forza resistiva costante di modulo $F_S = 5 \cdot 10^4$ N (si assuma per semplicità la traiettoria come rettilinea nel verso della velocità del corpo in C);

Problema 2



Un corpo di massa $M = 12$ kg è appoggiato su un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito statico e dinamico uguali e pari a $\mu = 0.2$. Sulla superficie superiore di M, orizzontale e liscia, è appoggiato un altro corpo di dimensioni trascurabili e massa $m = 1.5$ kg. Questo secondo corpo è premuto sul primo da una molla verticale di costante elastica $k = 280$ N/m vincolata all'estremo superiore e compressa di $\Delta z = 0.08$ m (si assume l'asse z verticale orientato verso l'alto). Inizialmente il sistema è in quiete. Ad un certo istante, si applica su M una forza orizzontale di modulo $F = 50$ N ed il corpo si mette in movimento. Quando M si è spostato di una quantità $d = 0.3$ m, i due corpi non sono più in contatto ed il corpo di massa m inizia un moto oscillatorio lungo la verticale; in quello stesso istante si toglie la forza $\boldsymbol{F}$ al corpo di massa M. Determinare:

a) il modulo F_{min} della forza minima che sarebbe sufficiente per spostare il corpo di massa M;
b) il modulo v della velocità di M dopo che ha percorso la distanza d;
c) il lavoro W_{att} fatto complessivamente dalle forze di attrito sul corpo di massa M da quando inizia l'azione di $\boldsymbol{F}$ a quando si ferma sul piano;
d) la coordinata z_{min} del punto più basso dell'oscillazione di m (si assuma l'origine dell'asse z nel punto in cui si trova m quando la molla è alla sua lunghezza di riposo);
e) (facoltativo) la legge $z(t)$ del moto oscillatorio di m.

Soluzioni

Problema 1
Si considera un sistema di riferimento avente origine in O, asse *x* orizzontale orientato verso destra e asse *y* verticale verso l'alto.

a) $\vec{v}_d = \omega_d R \vec{u}_x; \quad y(t) = R - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad y(t_C) = 0 = R - \frac{1}{2}gt_C^2 \quad \Rightarrow \quad t_C = \sqrt{\frac{2R}{g}} = 0.57\,\text{s}$

$$x(t) = v_{ox}t = v_d t = \omega_d R t \quad \Rightarrow \quad d = x(t_C) = v_d t_C = \omega_d R\sqrt{\frac{2R}{g}} = 18.3\,\text{m}$$

b) $v_y(t) = -gt \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t_C)}{v_x(t_C)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2gR}}{v_d}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega_d}\sqrt{\frac{2g}{R}}\right) = -9.93° = -0.173\,\text{rad}$

c) $\omega^2(\theta) = \omega_o^2 + 2\int_0^\theta \alpha(\theta)d\theta \quad \Rightarrow \quad \omega_d^2 = \omega^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} k\theta d\theta = k\frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4\omega_d^2}{\pi^2} = 162\,\text{s}^{-2}$

d) $a_d = \sqrt{a_{d,T}^2 + a_{d,N}^2} = \sqrt{(\alpha_d R)^2 + (\omega_d^2 R)^2} = R\sqrt{\left(k\frac{\pi}{2}\right)^2 + \omega_d^4} = 759\,\text{m/s}^2$

e) $v_C = \sqrt{v_{C,x}^2 + v_{C,y}^2} = \sqrt{v_d^2 + 2gR} = \sqrt{\omega_d^2 R^2 + 2gR} = 32.5\,\text{m/s}$

$$\Delta E_m = W_{nc} \quad \Rightarrow \quad 0 - \left(\frac{1}{2}mv_C^2 + mg\ell\sin\phi\right) = -F_S\ell \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{mv_C^2}{2(F_S - mg\sin\phi)} = 0.21\,\text{m}$$

Problema 2

a) La condizione di staticità è $F = f_{as}$. Quindi, per mettere in moto il sistema deve essere:

$$F \ge f_{as,\max} = \mu N; \quad \vec{N} = [(M+m)g + k\Delta z]\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad F_{\min} = \mu[(M+m)g + k\Delta z] = 31\,\text{N}$$

b) $F - f_{ad} = Ma \quad \Rightarrow \quad F - \mu[(M+m)g + k\Delta z] = Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F - \mu[(M+m)g + k\Delta z]}{M} = 1.59\,\text{m/s}^2$

$$v^2(x) = v_o^2 + 2a\Delta x \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2ad} = 0.98\,\text{m/s}$$

c) $\Delta E_k = W_{TOT} \quad \Rightarrow \quad 0 = W_F + W_{att} \quad \Rightarrow \quad W_{att} = -W_F = -Fd = -15\,\text{J}$ oppure

$$-f'_{ad} = Ma' \quad \Rightarrow \quad -\mu Mg = Ma' \quad \Rightarrow \quad a' = -\mu g; \quad 0 = v^2 + 2a'd' \quad \Rightarrow \quad d' = -\frac{v^2}{2a'} = \frac{v^2}{2\mu g}$$

$$W_{att} = W_{att,1} + W_{att,2} = -f_{ad}d - f'_{ad}d' = -(F - Ma)d - \mu Mg\frac{v^2}{2\mu g} = -Fd + Mad - M\frac{2ad}{2} = -Fd$$

d) $E_m = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}k\Delta z^2 + mg\Delta z = \frac{1}{2}kz_{\min}^2 + mgz_{\min} \quad \Rightarrow \quad z_{\min}^2 + \frac{2mg}{k}z_{\min} - \left(\Delta z^2 + \frac{2mg}{k}\Delta z\right) = 0$

$$\Rightarrow \quad z_{\min} = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\Delta z^2 + \frac{2mg}{k}\Delta z\right)} = -\frac{mg}{k} \pm \left(\frac{mg}{k} + \Delta z\right) = \begin{cases} \Delta z \\ -\left(\frac{2mg}{k} + \Delta z\right) = -0.185\,\text{m} \end{cases}$$

e) $-mg - kz = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k}{m}z + g = 0; \quad z' = z + \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{k}{m}z' = 0 \quad \Rightarrow$

$$z'(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \Phi\right) \quad \Rightarrow \quad z(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \Phi\right) - \frac{mg}{k}; \quad v(t) = \frac{dz}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \Phi\right)$$

$$v(0) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\pi}{2}; \quad z(0) = A\sin\Phi - \frac{mg}{k} = \Delta z; \quad \Rightarrow \quad A = \Delta z + \frac{mg}{k} = 0.133\,\text{m}$$

$$\Rightarrow \quad z(t) = \left(\Delta z + \frac{mg}{k}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg}{k} = (0.133\cos(13.7t) - 0.053)\,\text{m}$$