

COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI

Ingegneria dell'Informazione

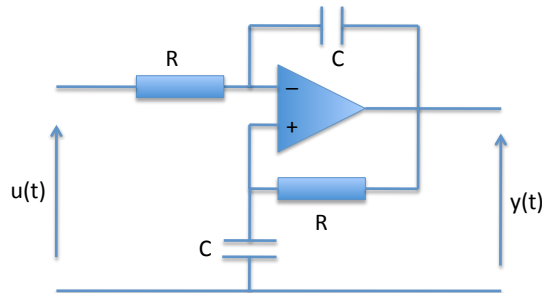
9 Luglio 2015

Esercizio 1. [11 punti] Dato il sistema continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s^2 + 1)(1 + s)}{s(1 - s)^2}$$

- se ne tracci il diagramma di Bode;
- se ne tracci il diagramma di Nyquist, individuando asintoti ed intersezioni con gli assi;
- si studi, al variare del parametro reale K , la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$, ricorrendo a Nyquist, in particolare calcolando il numero di poli a parte reale positiva in caso di instabilità, ed analizzando a parte i casi critici (passaggio per il punto critico -1).

Esercizio 2. [4 punti] Dato lo schema di figura



e assumendo:

- $RC = 1$;
- $Y(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$, con $G(s) = \frac{K}{(s + 1)^2}$, nel caso di amplificatore operativo quasi-ideale,

è richiesto di calcolare le funzioni di trasferimento dello schema complessivo nelle ipotesi di amplificatore operativo ideale e di amplificatore operativo quasi-ideale (indicate rispettivamente con $W_{id}(s)$ e $W_r(s)$), e di verificare che $W_r(s)$ tende a $W_{id}(s)$ per $K \rightarrow \infty$.

Esercizio 3. [4 punti] Dato il sistema continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s-1}{(s+1)^3}$$

se ne tracci il luogo negativo delle radici, determinando per quali $K < 0$ risulta che $W(s)$ è BIBO-stabile.

Esercizio 4. [7 punti] Dato il sistema a tempo continuo di funzione di trasferimento

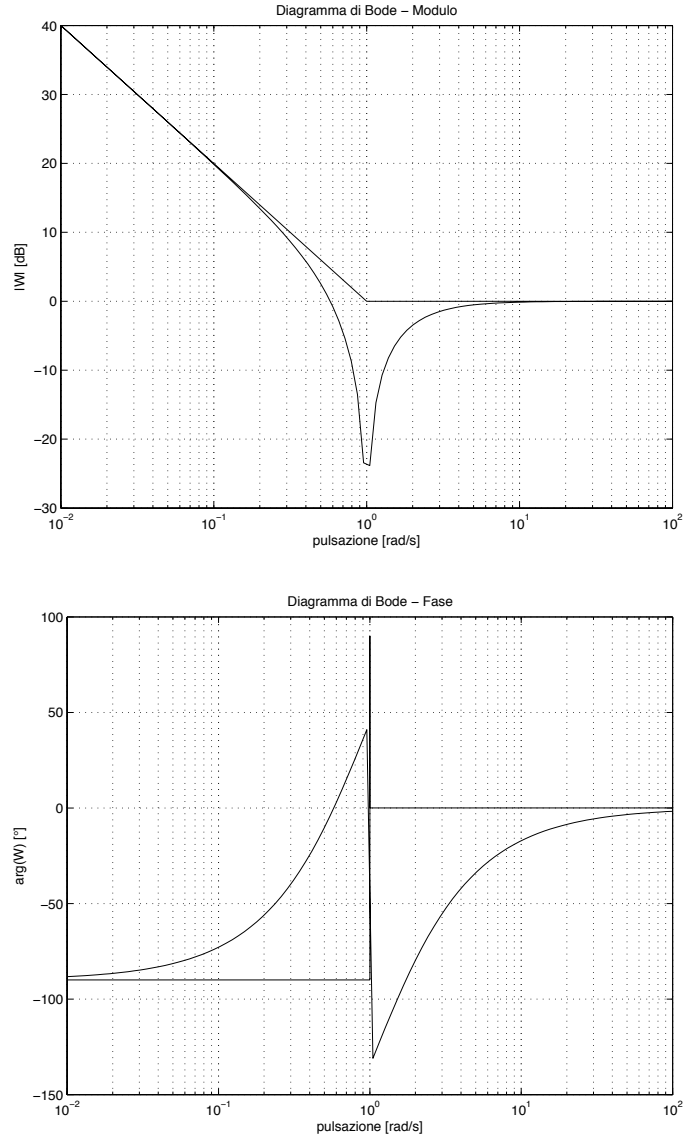
$$G(s) = \frac{10}{(1+s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}$$

- si progetti un compensatore stabilizzante $C_1(s)$ tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0 con $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-5}$ (errore a regime al gradino), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_1(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento circa $\omega_a^* = 100$ rad/s e margine di fase circa $m_\phi^* = 45^\circ$;
- si progetti un compensatore stabilizzante di tipo PID (eventualmente un P, PI o PD) $C_2(s)$ tale che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1 con $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.1$ (errore a regime alla rampa lineare), mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento circa $\omega_a^* = 100$ rad/s e margine di fase circa $m_\phi^* = 90^\circ$.

Teoria. [4.5 punti] Dato un modello ingresso/uscita a tempo continuo, descritto dalla consueta equazione differenziale lineare a coefficienti costante causale, si dimostri, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, che nell'ipotesi di stabilità BIBO la risposta di regime permanente ad un segnale $u(t) = \sin(\omega t)\delta_{-1}(t)$ ha sempre la forma $y_{rp}(t) = A \sin(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$.

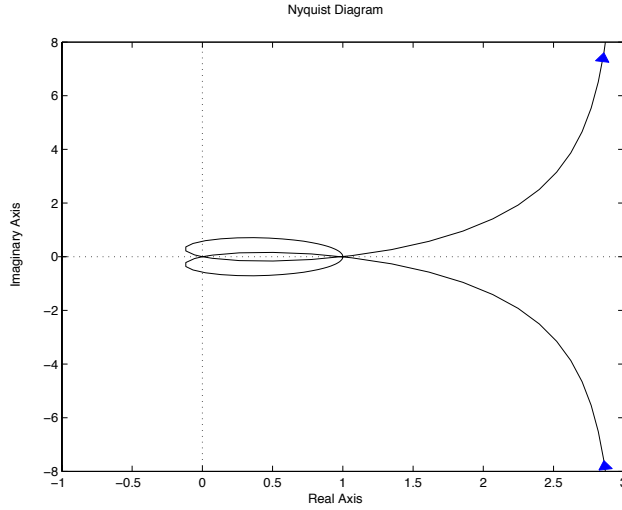
SOLUZIONI

Esercizio 1. Il diagramma di Bode è illustrato in figura



Il diagramma asintotico dei moduli prima scende con pendenza di -20 dB/decade e arriva nell'origine. Nell'origine il diagramma asintotico diventa orizzontale, mentre il modulo reale ha un picco di antirisonanza infinito per $\omega = 1$ rad/s. La fase va da -90° a $+45^\circ$, poi appare una discontinuità di fase, che riparte da -135° e termina a 0° .

Il diagramma di Nyquist è illustrato in figura



Esso arriva dal punto improprio nel quarto quadrante, con asintoto verticale in $s = 3$. Poi sale, attraversa l'asse reale in $s = 1$, entra nel primo quadrante ed attraversa l'origine con tangente la bisettrice del primo e del terzo quadrante. Dal terzo quadrante ruota in verso antiorario, attraversa l'asse immaginario, entra nel quarto quadrante e termina infine nel punto $s = 1$.

Dal punto di vista analitico si trova facilmente

$$G(j\omega) = \frac{(1 - \omega^2)(3 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2} + j \frac{(\omega^2 - 1)(1 - 3\omega^2)}{\omega(\omega^2 + 1)^2}$$

la cui parte reale si annulla per $\omega = 1$ (dove si annulla anche la parte immaginaria e si ha quindi il passaggio per l'origine) e per $\omega = \sqrt{3}$ (pulsazione in cui la parte immaginaria vale $-\frac{1}{\sqrt{3}}$). La parte immaginaria si annulla anche per $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (pulsazione in cui la parte reale vale 1), e si annulla anche asintoticamente, in quanto Nyquist tende a $s = 1$ per $\omega \rightarrow \infty$. L'asintoto è ovviamente verticale e passa per $s = 3$. Aggiungendo il semicerchio orario all'infinito (dovuto al polo nell'origine), tracciando il punto $-\frac{1}{K}$ (per valutare i giri al variare di K) e notando che $n_{G_+} = 2$, si ottengono i casi seguenti:

$$\begin{aligned} K > 0 & \Rightarrow N = 0, n_{W_+} = 2 - 0 = 2; \\ 0 > K > -1 & \Rightarrow N = -1, n_{W_+} = 2 + 1 = 3; \\ K < -1 & \Rightarrow N = +2, n_{W_+} = 2 - 2 = 0 \text{ (unico caso di stabilità BIBO)}. \end{aligned}$$

L'unico caso critico si ha per $K = -1$, caso in cui Nyquist arriva asintoticamente nel punto $1 = -\frac{1}{K}$ (oltre a passarci per $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$), che corrisponde pertanto ad una $W(s)$ impropria e con due poli immaginari puri in $\pm \frac{j}{\sqrt{3}}$. Per $K = -1$ risulta infatti $W(s) = -\frac{(s^2+1)(s+1)}{3s^2+1}$, che è instabile sia per i poli immaginari puri, sia per il fatto che è impropria.

Esercizio 2. Il bilancio di correnti sui nodi $+$ e $-$ dell'operazionale conduce facilmente a

$$V_+(s) = \frac{1}{1+s}Y(s), \quad V_-(s) = \frac{1}{1+s}U(s) + \frac{s}{1+s}Y(s).$$

Nel caso ideale, ponendo $V_+(s) = V_-(s)$, si ricava facilmente

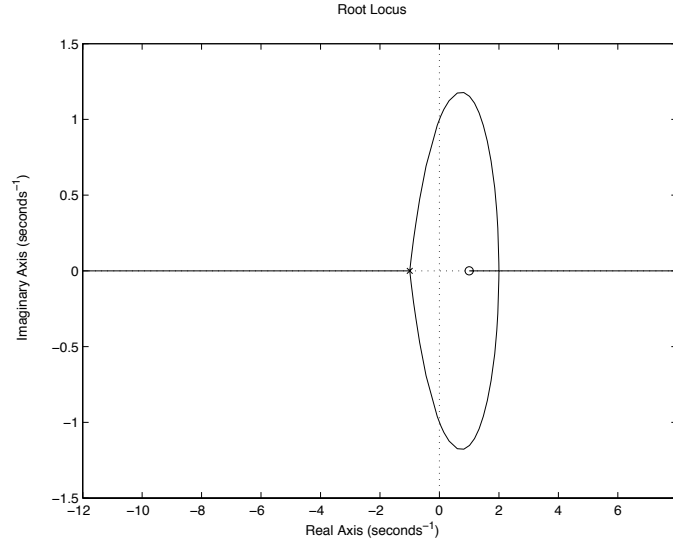
$$Y(s) = \frac{1}{1-s}U(s) \Rightarrow W_{id}(s) = \frac{1}{1-s}.$$

Nel caso quasi-ideale, ponendo $Y(s) = G(s)[V_+(s) - V_-(s)]$ con la $G(s)$ assegnata, si ottiene

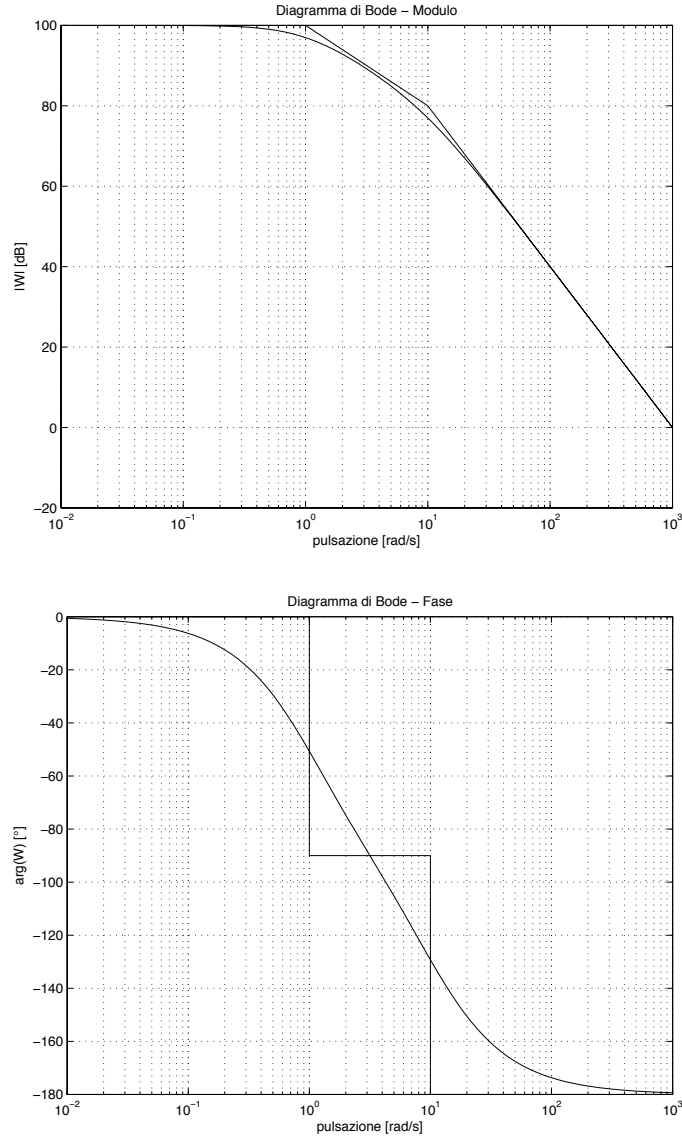
$$Y(s) = -\frac{K}{(s+1)^3 + K(s-1)}U(s) \Rightarrow W_r(s) = -\frac{K}{(s+1)^3 + K(s-1)} = \frac{1}{1-s - \frac{(s+1)^3}{K}}$$

da cui risulta evidente la convergenza di $W_r(s)$ a $W_{id}(s)$ per $K \rightarrow \infty$.

Esercizio 3. L'equazione dei punti doppi è $(s+1)^2(s-2) = 0$, da cui il punto (triplo e banale) $s = -1$ per $K = 0$, ed il punto doppio $s = 2$ per $K = -27$ (quindi nel luogo negativo). Il centro-stella asintoti è in $s = -2$ (centro inutile in quanto i due asintoti sono i due semiassi reali positivo e negativo), mentre le intersezioni del luogo con l'asse immaginario forniscono $j\omega(3 + K - \omega^2) + (1 - K - 3\omega^2) = 0$. Annullando la parte immaginaria si trova $\omega = 0$ oppure $\omega^2 = 3 + K$ che, sostituite nella parte reale, conducono alle soluzioni $\omega = 0$ ($K = 1$) e $\omega = \pm 1$ ($K = -2$). Pertanto il luogo negativo ha un ramo che si muove sull'asse reale da $s = -1$ verso $-\infty$, mentre gli altri due rami escono sul piano complesso, attraversano l'asse immaginario in $s = \pm j$ per $K = -2$, e poi per $K = -27$ si congiungono nel punto doppio $s = 2$, dopodiché i due rami si muovono sull'asse reale, uno verso lo zero in $s = 1$ e l'altro verso $+\infty$. Quindi si ha stabilità BIBO della $W(s)$ per $-2 < K \leq 0$. Il luogo negativo è illustrato nella figura seguente:



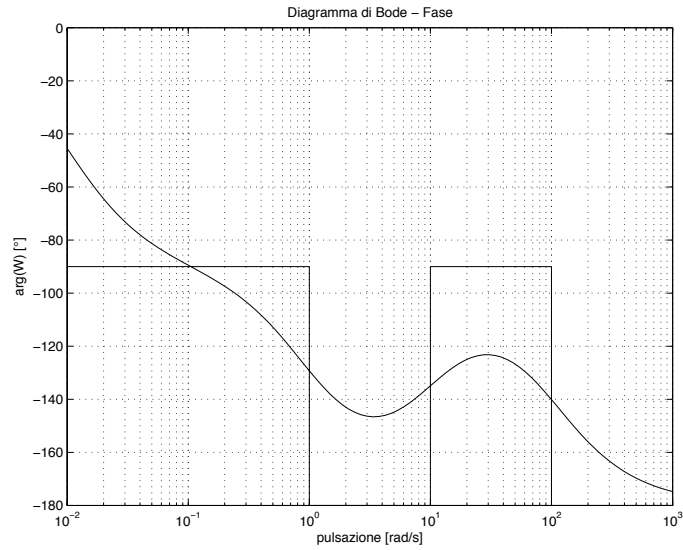
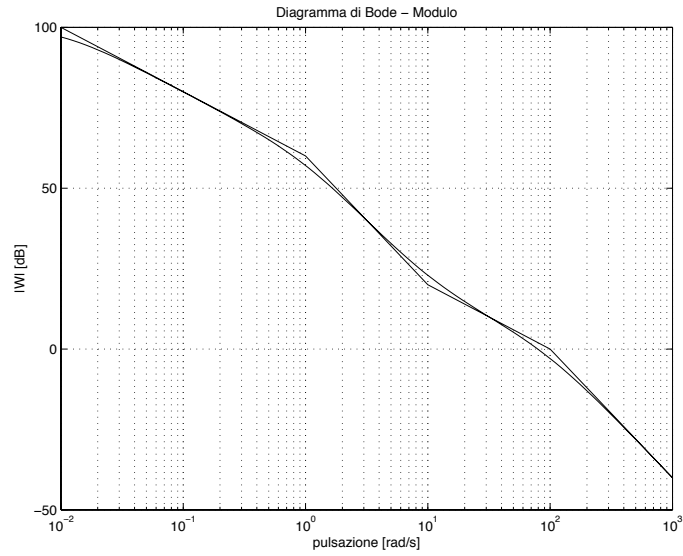
Esercizio 4. Nel primo caso, tipo ed errore a regime sono sistemati da $C'(s) = 10^4$, dopodiché il diagramma di Bode di $10^4 G(s)$ evidenzia $\omega_a \simeq 1000$ e m_ϕ di pochi gradi.



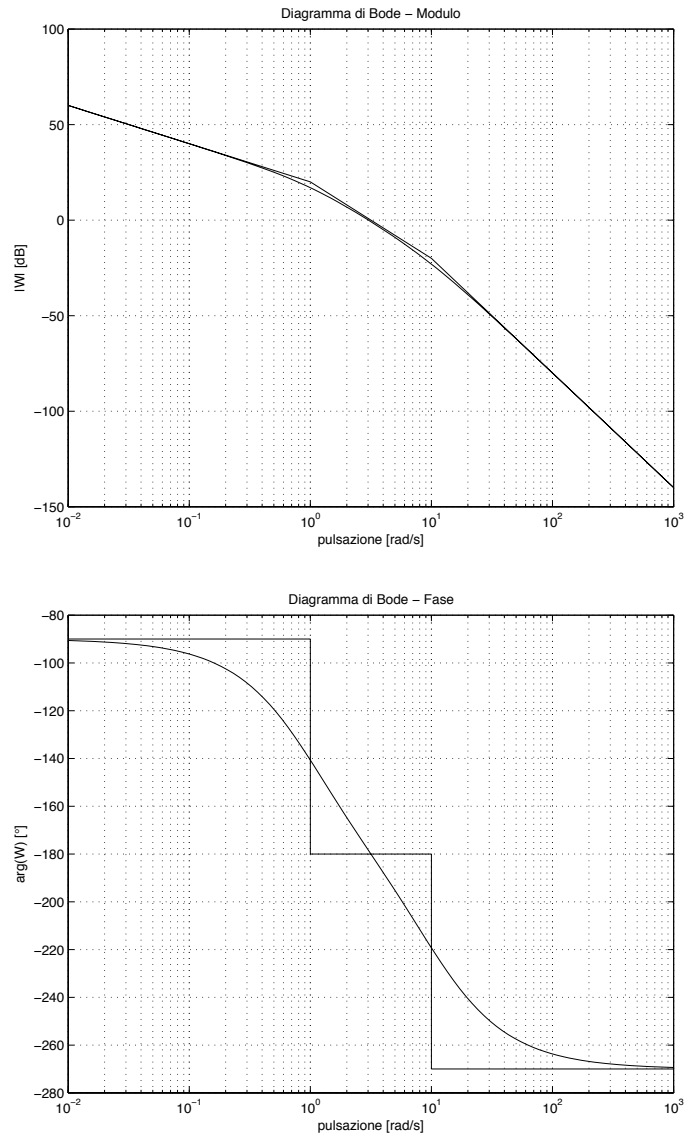
Quindi occorre abbassare ω_a (abbassando il modulo di 40 dB) ed alzare m_ϕ , il che richiede una rete a sella, ad esempio con polo 3 decadi prima di due zeri coincidenti (per scendere di 60 dB) ed un polo 1 decade dopo gli zeri (e coincidente con la ω_a richiesta, per il requisito sul margine di fase), che permette una risalita di 20 dB (discesa totale di $60 - 20 = 40$ dB). Quindi ad esempio una soluzione è

$$C_1(s) = \frac{10^4 \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}{\left(1 + \frac{s}{100}\right) (1 + 100s)}$$

che introduce una cancellazione zero-polo ammissibile, e soddisfa tutti i requisiti compresa la stabilizzazione per il Criterio di Bode.



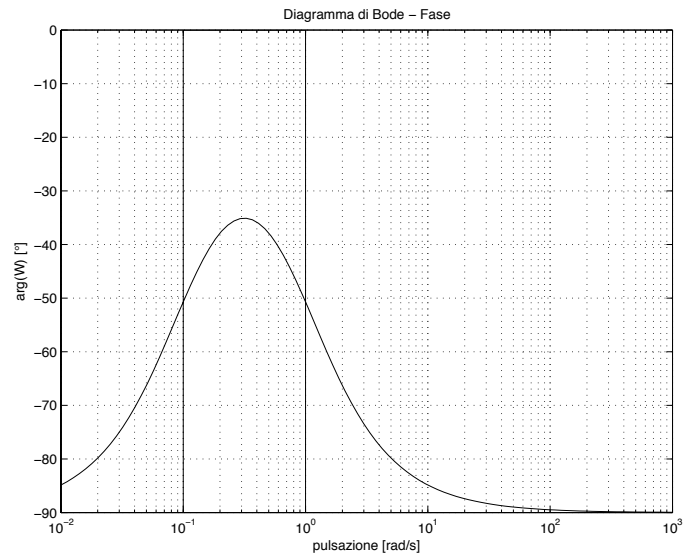
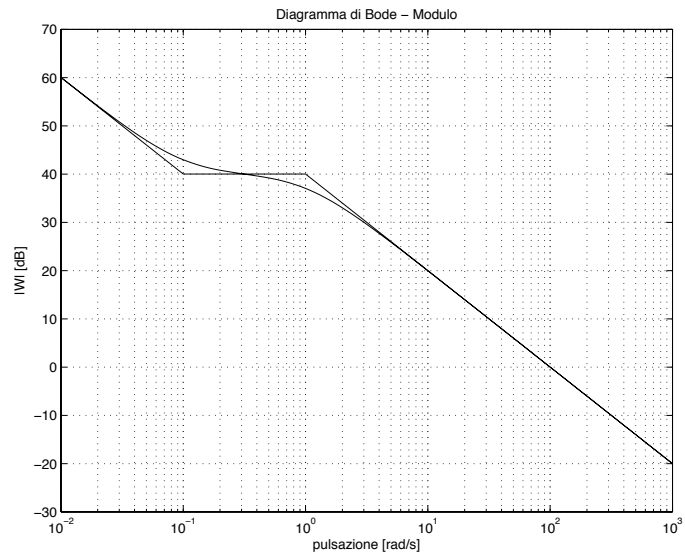
Nel secondo caso, $C'(s) = \frac{1}{s}$ sistema tipo ed errore a regime, dopodiché il diagramma di Bode di $\frac{1}{s}G(s)$ evidenzia $\omega_a \simeq \sqrt{10}$ rad/s ed un margine di fase addirittura negativo (quasi -90°)



Pertanto è necessario introdurre due zeri per sistemare il margine di fase e per alzare il modulo dei necessari 80 dB. Se ad esempio decidiamo di piazzare uno zero per cancellare il polo dominante di $G(s)$ (salita del modulo di 20 dB), dobbiamo piazzare l'altro zero tre decadi prima di ω_a (salita di altri 60 dB), da cui ad esempio la soluzione (PID)

$$C_2(s) = \frac{(1 + 10s) \left(1 + \frac{s}{10}\right)}{s} = \frac{1}{s} + \frac{101}{10} + s$$

che soddisfa tutti i requisiti compresa la stabilizzazione per il Criterio di Bode.



Teoria. Si dimostra con una minima modifica dello studio del caso di segnale fasoriale che compare nel Libro di Testo (II Edizione), a pag. 90-91.