A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1º Appello — 14 giugno 2016

Esercizio 1. Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, con $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$. Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U_2 \oplus W = \mathbb{R}^4$ (*la risposta deve essere adeguatamente motivata*).

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili (*spiegando perché non sono simili*).

Esercizio 3. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli tali che $v_i \cdot v_j = 0$, per ogni $i \neq j$. Dimostrare che i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base di U.

(b) Determinare le coordinate del vettore $u = (1, -2, 4, 2) \in U$ rispetto alla base di U trovata nel punto precedente.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (3, 0, -1, 2)$, $w_2 = (-1, 2, 3, 1)$, $w_3 = (t, 2, 1, 5)$. Determinare per quale valore di t la dimensione di W è 2.

Esercizio 5. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ e sia $f \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione lineare definita ponendo $f(X) = AX$, ove $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la matrice F della funzione f, rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di F e dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (2, -1, 0, 1)$ e $u_2 = (1, 3, -1, 2)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $v = (6, 2, 1, 3)$ su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (2, 0, 1)$, $B = (4, 1, -1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1° Appello — 14 giugno 2016

Esercizio 1. Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, con $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$. Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U_2 \oplus W = \mathbb{R}^4$ (*la risposta deve essere adeguatamente motivata*).

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili (*spiegando perché non sono simili*).

Esercizio 3. Siano $v_1, v_2, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli tali che $v_i \cdot v_j = 0$, per ogni $i \neq j$. Dimostrare che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base di U.

(b) Determinare le coordinate del vettore $u = (-3, 2, 4, 3) \in U$ rispetto alla base di U trovata nel punto precedente.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2, -1, 0, 1)$, $w_2 = (1, 2, 2, 1)$, $w_3 = (4, t, -4, 1)$. Determinare per quale valore di t la dimensione di W è 2.

Esercizio 5. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} -4 & 8 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ e sia $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione lineare definita ponendo $f(X) = AX$, ove $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la matrice F della funzione f, rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di F e dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 2, -2)$ e $u_2 = (2, 1, -3, -1)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $v = (5, 2, 0, -1)$ su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (1, 1, 2)$, $B = (3, 4, 3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, G. GEROTTO, R. KLOOSTERMAN

1o Appello — 14 giugno 2016

Esercizio 1. Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, con $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$. Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U_2 \oplus W = \mathbb{R}^4$ (*la risposta deve essere adeguatamente motivata*).

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili (*spiegando perché non sono simili*).

Esercizio 3. Siano $v_1, v_2, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli tali che $v_i \cdot v_j = 0$, per ogni $i \neq j$. Dimostrare che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base di U.

(b) Determinare le coordinate del vettore $u = (5, 2, -2, -2) \in U$ rispetto alla base di U trovata nel punto precedente.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (0, 3, -1, 1)$, $w_2 = (2, -1, 3, 1)$, $w_3 = (8, 2, t, 6)$. Determinare per quale valore di t la dimensione di W è 2.

Esercizio 5. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ e sia $f\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione lineare definita ponendo $f(X) = AX$, ove $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la matrice F della funzione f, rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di F e dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (0, 2, -1, 1)$ e $u_2 = (3, 1, -1, 2)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $v = (5, 0, 4, -3)$ su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (3, -1, 0)$, $B = (1, 3, 1)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - 3z - 7 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.

D

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, G. Gerotto, R. Kloosterman

1$^{\text{o}}$ Appello — 14 giugno 2016

Esercizio 1. Siano U_1, U_2 due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$, con $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$, tali che $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$. Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U_1 \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U_2 \oplus W = \mathbb{R}^4$ (*la risposta deve essere adeguatamente motivata*).

Esercizio 2. Si dimostri che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Si dia poi un esempio esplicito di due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili (*spiegando perché non sono simili*).

Esercizio 3. Siano $v_1, v_2, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli tali che $v_i \cdot v_j = 0$, per ogni $i \neq j$. Dimostrare che i vettori $v_1, v_2, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$U : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare una base di U.

(b) Determinare le coordinate del vettore $u = (4, 4, -2, 2) \in U$ rispetto alla base di U trovata nel punto precedente.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2, -1, 3, 0)$, $w_2 = (1, 1, 3, -2)$, $w_3 = (4, t, 3, 4)$. Determinare per quale valore di t la dimensione di W è 2.

Esercizio 5. Indichiamo con $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti reali. Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ e sia $f \colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ la funzione lineare definita ponendo $f(X) = AX$, ove $X \in M_2(\mathbb{R})$.

(a) Scrivere la matrice F della funzione f, rispetto alla base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(c) Determinare gli autovalori e gli autospazi di F e dire se F è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 1, 0)$ e $u_2 = (2, -1, -1, 3)$.

(a) Determinare una base ortogonale di U.

(b) Determinare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale del vettore $v = (2, -4, 5, -3)$ su U.

Esercizio 7. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (-1, 2, 1)$, $B = (3, 1, 3)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x - 4y + z - 1 = 0 \\ 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare il punto $H \in r$ di minima distanza dal punto A.

(b) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente i punti A, B e parallelo alla retta r.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per A, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per i punti A e B.