



# TEORIA

# CLASSIFICAZIONE SEGNALI BIOMEDICI PER ORIGINE

Made by Davide Bosco  
@davidebosco  
Appunti non vendibili!

## • SEGNALI BIOELETTRICI

i segnali bioelettrici sono l'attività elettrica di un sistema biologico nella realizzazione di una certa funzione. Sono la sommatoria di molteplici sotto-sistemi (sovraposizione di numerosi PA)

### POTENZIALE D'AZIONE (PA)

il PA è un potenziale elettrico che si propaga lungo la membrana dell'assone delle cellule nervose causato da un flusso di ioni attraverso la membrana

è la componente fondamentale dei segnali biomedici

il PA è sempre uguale per una stessa cellula

durata da 1ms (nervi e muscoli) a 150-300ms (muscolo cardiaco)

valore di picco  $\sim +20\text{mV}$

membrana è polarizzata nel suo stato di riposo

(potenziale di riposo  $-60/-100\text{mV}$ )

e depolarizzata quando presenta un PA

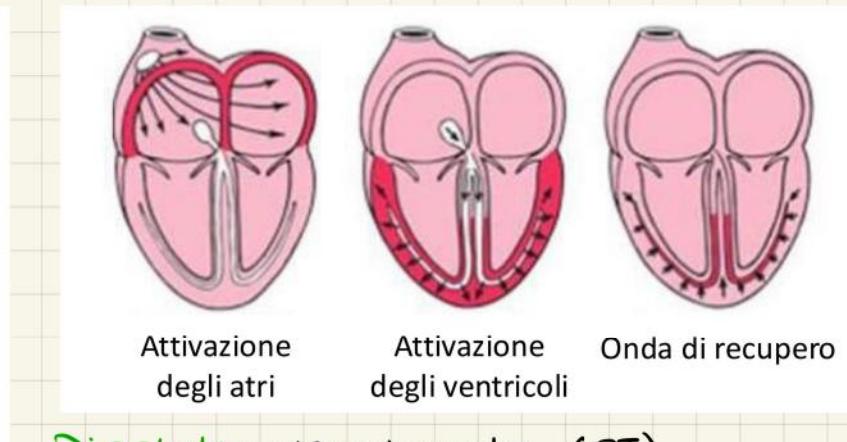
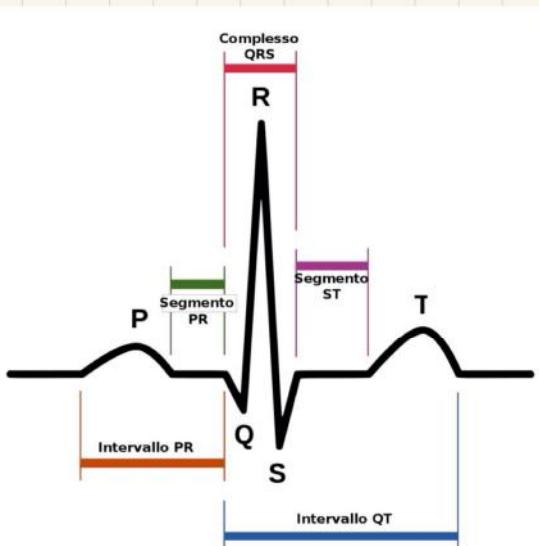
l'assone di un neurone può presentare una guaina mielinica che aumenta la velocità di conduzione del PA

## ELETROCARDIOGRAMMA (ECG)

manifestazione elettrica dell'attività contrattile del cuore

### • Ciclo cardiaco

- ① nodo seno-atriale (SA) si eccita è una cellula pace-maker
- ② PA si propaga lentamente agli atri depolarizzandoli (contrazione atri) → Onda P [0,1-0,2mV / 60-80ms]
- ③ ritardo di propagazione PA al nodo atrioventricolare (AV)  
→ segmento isoelettrico (segmento PR) [60-80ms]  
durante questa fase il sangue passa ai ventricoli
- ④ nodo AV si eccita
- ⑤ fibre specializzate di conduzione (fascio di His e sistema di Purkinje) propagano lo stimolo velocemente ai ventricoli
- ⑥ il PA si propaga dal basso verso l'alto depolarizzando i ventricoli (contrazione ventricoli) → onda QRS [1mV / 80ms]
- ⑦ durata PA cellule lunga [300-350ms]. il plateau del PA causa un segmento isoelettrico → segmento ST [100-120ms]
- ⑧ ripolarizzazione dei ventricoli (rilassamento ventricoli)  
→ onda T lenta [0,1-0,3mV / 120-160 ms]



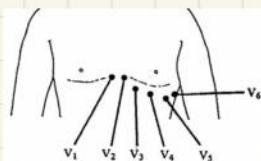
Diastole: riempimento (RT)

Sistole: svuotamento (TR)

## • MISURAZIONE

registrazione dei potenziali elettrici generati dall'attività cardiaca tramite elettrodo in posizioni determinate sulla cute del torace (derivazioni / leads)

### > derivazioni



- 6 derivazioni toraciche: esplora il piano trasversale in prossimità del cuore
- 6 derivazioni agli arti: essendo lontane dal cuore, possiamo approssimarla a un dipolo elettrico nel piano frontale

## • CARATTERISTICHE SEGNALE

banda 0,1 - 100 Hz

ampiezza qualche mV [QRS  $\sim$  2mV]

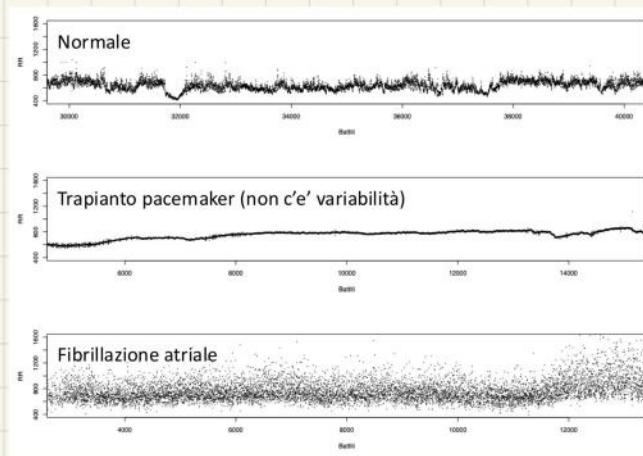
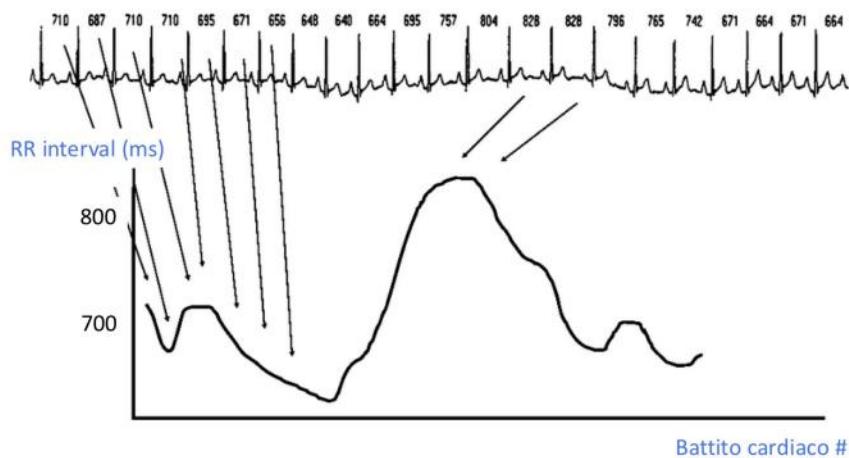
stazionario (stesse caratteristiche per tratti brevi)

pseudo periodico

$$\text{bpm} = \frac{\text{Nbattiti}}{\text{tmin}} = \frac{\text{Nbattiti}}{\frac{\text{tsec}}{60}} = \frac{\text{Nbattiti}}{\text{tsec}} \cdot 60 = F \cdot 60 = \frac{1}{T} \cdot 60$$

## • SEGNALI DERIVATI

- Tacogramma serie temporale intervalli battito-battito (R-R)



## - Heart Rate Variability (HRV)

misura la variabilità della frequenza cardiaca

corpo sano a riposo → alta variabilità

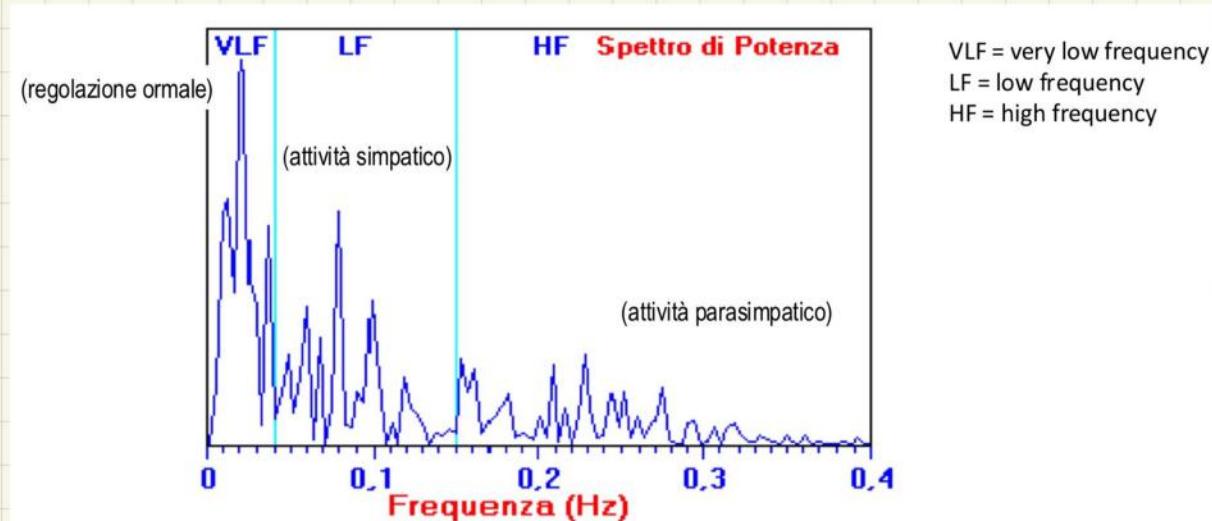
soggetto a stress cronico → bassa variabilità

### > analisi in frequenza

spettro di potenza del tacogramma

necessario per valutare il **bilanciamento** tra sistema

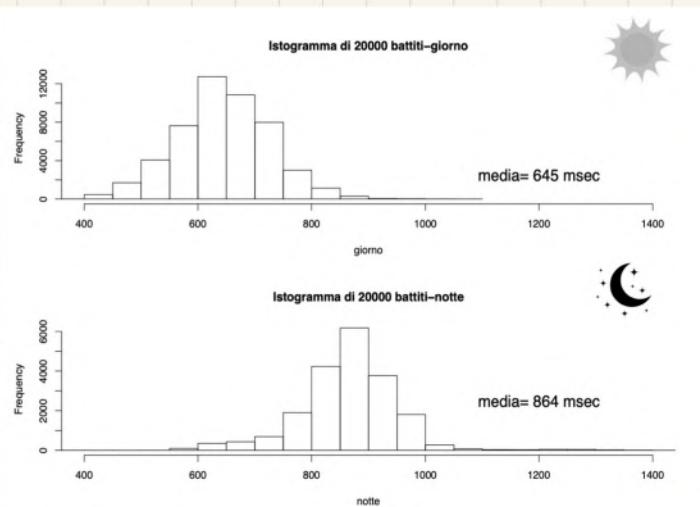
**simpatico e parasimpatico**



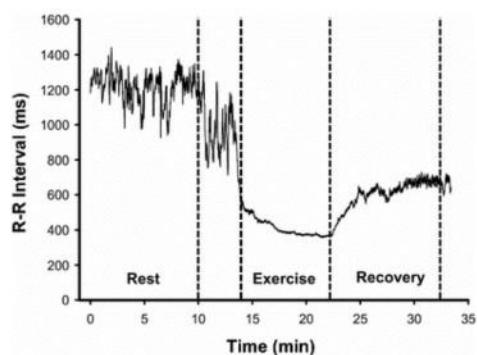
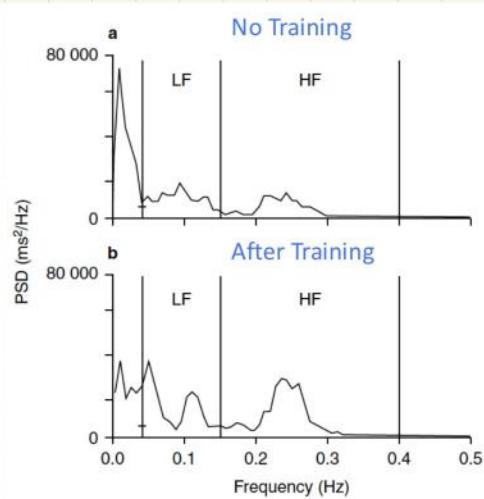
sistema **simpatico**: eccita

sistema **parasimpatico**: ristabilisce equilibrio

### > distribuzione nel tempo



- esempi



Time of RR recovery is a good parameter of "health"

## ELETTROMIOGRAMMA (EMG)

registrazione dei potenziali elettrici che si formano in un muscolo durante la contrazione volontaria

i potenziali sono generati dalla depolarizzazione delle fibre muscolari

- ripasso contrazione muscolare

PA va da corteccia a terminali innervati nel muscolo

si libera un mediatore chimico (acetilcolina)  $\Rightarrow$  altera la permeabilità della membrana  $\Rightarrow$  PA muscolare  $\Rightarrow$  rilascio ioni  $\text{Ca}^{2+}$   
 $\Rightarrow$  contrazione muscolare

Al crescere dello sforzo muscolare aumenta il numero di unità motorie reclutate

- caratteristiche segnale

banda 5Hz - 10kHz

ampiezza 100mV - qualche volt

- misurazione

misurato tramite agoelettrodo o elettrodo di superficie

## - elettrodi di superficie

> **monopolar** elettrodo sopra al muscolo + elettrodo fuori della zona elettricamente attiva

> **bipolari** amplificatore differenziale per rilevare segnale tra due punti sullo stesso muscolo

## - effetti di posizionamento

più fibre sono coinvolte maggiore è l'ampiezza del segnale

## - effetti di attenuazione della profondità

strati di lipidi attenuano il segnale

## - effetti di filtraggio

i tessuti effettuano un filtraggio sul segnale originale, quindi ampiezza e frequenza misurati sono alterati

## • unità motoria (UM)

motoneurone + fibre muscolari innervate

**motoneurone**: cellula nervosa che mette in comunicazione sistema nervoso con il muscolo

il numero di fibre muscolari di un UM varia da  $10^1$ - $10^3$

La **forza di contrazione** è modulata

da due parametri indipendenti

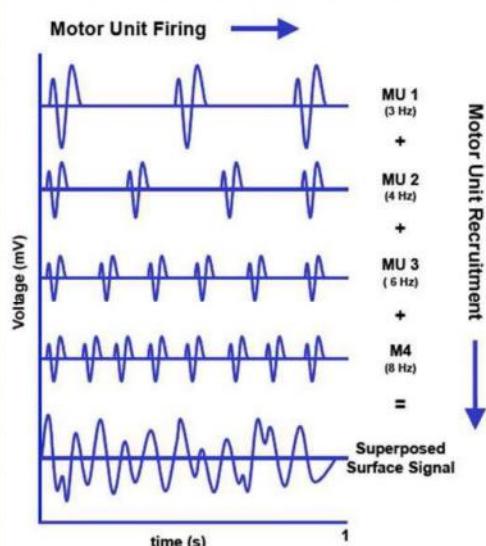
- **reclutamento**: numero UM attivate

- **frequenza**: frequenza di attivazione

## • utilizzo

distinguere tra una malattia muscolare

e una del sistema nervoso periferico



## ELETTRONEUROGRAMMA

misura delle velocità di conduzione di un nervo

### • MISURAZIONE

si applica uno stimolo elettrico al nervo periferico e si misura l'attività in due punti a distanza nota D lungo il percorso del nervo.  
si misura il tempo che lo stimolo impiega per passare da un punto all'altro

### • CARATTERISTICHE SEGNALE

stimolo 100V, 100-300μs

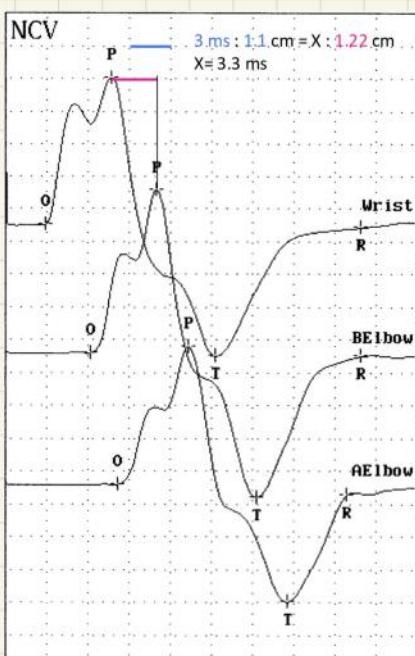
banda 10-10000 Hz

ampiezza 10mV

guadagno amplificatore 2000

### • VELOCITÀ DI CONDUZIONE TIPICHE

- 45/70  $\frac{m}{s}$  nelle fibre nervose mieliniche
- 0.2 - 0.4  $\frac{m}{s}$  nel muscolo cardiaco
- 0.03 - 0.05  $\frac{m}{s}$  nelle fibre tra atri e ventricoli



#### Legenda:

- The grid boxes represent 3 ms in width and 2  $\mu$ V in height.
- AEElbow: above the elbow.
- BELbow: below the elbow.
- O: onset.
- P: peak.
- T: trough.
- R: recovery of base-line.

#### Risultato:

- Velocità da polso al gomito = 3.3 ms
- Distanza gomito polso ~ 20 cm
- ENG =  $200 \text{ mm} / 3.3 \text{ ms} = 60.6 \text{ m/s.}$
- Condizione del nervo normale

## ELETRO-OCULOGRAMMA (EOG)

registrazione del potenziale tra cornea e retina

- utilizzo monitorare i movimenti dell'occhio
- misurazione 2 elettrodi ai lati dell'occhio
- caratteristiche segnale Ampiezza 10mV - 5mV

## ELETRORETINOGRAMMA (ERG)

registrazione del potenziale generato dalla retina in risposta ad uno stimolo luminoso (flash)

- misurazione elettrodi su lente a contatto
- caratteristiche segnale

Ampiezza 0,5mV - 1mV

Banda richiesta per elaborazione 0,2 - 200Hz

## ELETROENCEFALOGRAMMA (EEG)

espressione dei processi sinaptici sviluppati dai neuroni

piramidali

- principi fisiologici

i neuroni corticali costituiscono le unità funzionali elementari della corteccia cerebrale. sono organizzati in ammassi colonnari perpendicolari alla superficie

L'ECG misura i potenziali associati a correnti interne all'encefalo che fluiscono perpendicolarmente allo scalpo

- misurazione

elettrodi in posizioni standard sullo scalpo

- utilizzzi

individuare e quantificare deficit dell'attività E/I dell'encefalo  
(es: epilessia)

monitoraggio stato di coscienza durante anestesia

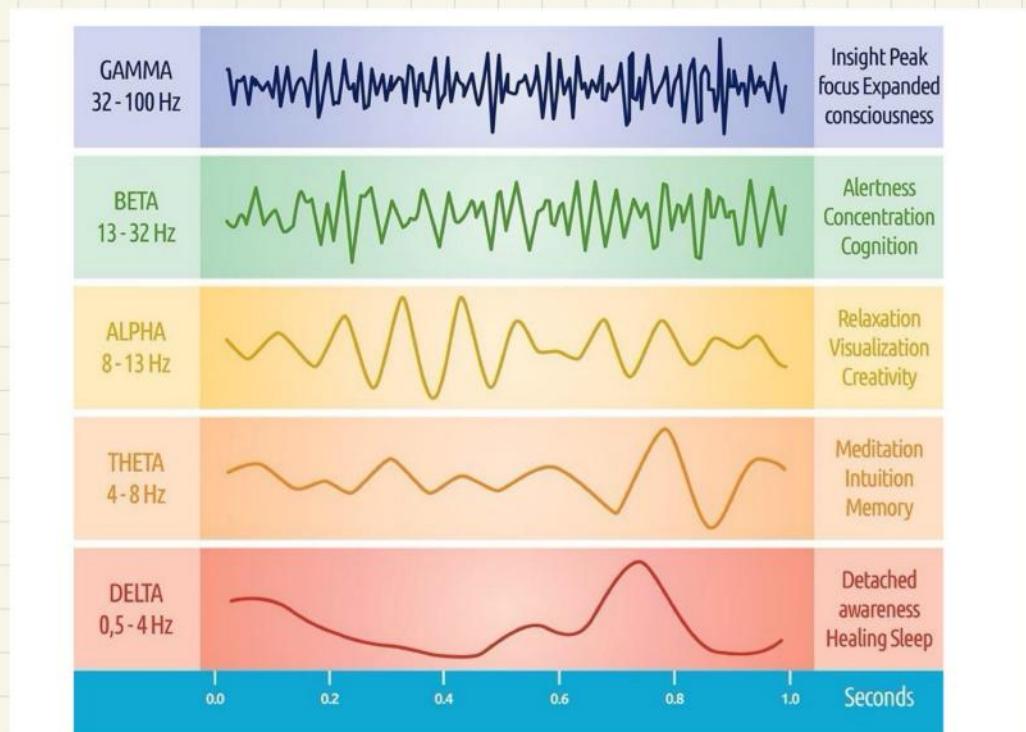
- caratteristiche segnale

Ampiezza decine di  $\mu$ V

Banda 0.1-50 Hz

Stazionario a tratti

non periodico ma ha un ritmo prevalente



## RIASSUNTO

(ampiezza massima (p-p) / magnitudine del segnale (min-max) / range spettrale):

### NEURONALE (RICONDUCIBILI AL SISTEMA NERVOSO CENTRALE)

EEG Elettroencefalogramma (200 µV (p-p) / 30-100 µV (min-max) / 0.01 - 100 Hz)  
ECG Electrocorticogramma (1000 µV (p-p) / 50-200 µV (min-max) / 0.01 - 500 Hz)  
ENG Elettroneurogramma (100 µV (p-p) / 5 µV - 20 µV (min-max) / 100 - 3000 Hz)  
ERG Elettroretinogramma (0.5 µV - 1 mV / 0.2 - 200 Hz)

### MOTORIO (RICONDUCIBILI AD AZIONI MUSCOLARI)

EMG Elettromiogramma (sEMG: 5 mV (p-p) / 500 µV -2000 µV (min-max) / 5-500Hz)  
ECG Elettrocardiogramma (5 mV (p-p) / 500 µV -2000 µV (min-max) / 0.05 - 150 Hz)

### ALTRO

EOG Elettrooculogramma (5 mV (p-p) / 500 µV -2000 µV (min-max)/ 0 - 100Hz)  
GSR Risposta Galvanica della Pelle (50 µS (p-p) / 1 µS - 10 µS (min-max) / 0 - 10 Hz)

## • SEGNALI BIOMAGNETICI

misurazione del campo magnetico prodotto dagli organi

i segnali biomagnetici hanno ampiezza estremamente bassa  
( $10^{-15}$  T vs  $10^{-5}$  T del campo magnetico terrestre)

### MAGNETOENCELOGRAFIA (MEG)

permette di misurare le correnti che fuiscono parallelamente allo  
scalpo  $\Rightarrow$  complementare all'EEG

consente l'estrazione di segnali relativamente non distorti

## • SEGNALI BIOACUSTICI

### SUONI RESPIATORI

registrazione dei suoni prodotti dall'aria che entra negli alveoli e passa  
poi nei bronchi e nella trachea, misurati con microfoni in posizioni  
diverse del torace

- 4 tipi di segnale

VBS: suono respiro entrante negli alveoli

BVBS: suono respiro bronco-alveolare

BBS: suono respiro bronchiale

TBS: suono respiro tracheale

- caratteristiche segnale

Segnale pseudoperiodico

frequenza 20Hz - 2kHz

## SUONI DI KOROTKOV

usato nello sfigomanometro per misurare la pressione arteriosa

- utilizzo

- Senza fascia => nessun suono
- Fascia occlude passaggio sangue => nessun suono
- Si rilascia finché con lo Stetoscopio (o microfono) si sente un suono ripetitivo e turbolento (I suoni di Korotkov => pressione sistolica)
- I suoni continuano finché c'è occlusione parziale, quando smettono (V suono di Korotkov) si misura la pressione diastolica

- caratteristiche segnale

frequenza 150-500 Hz

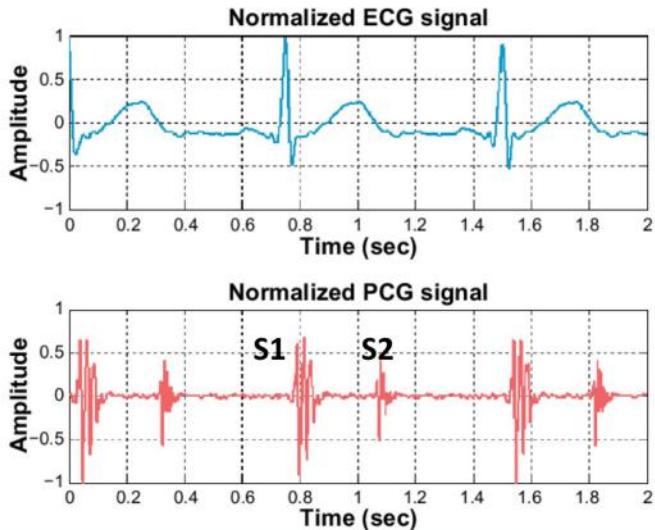
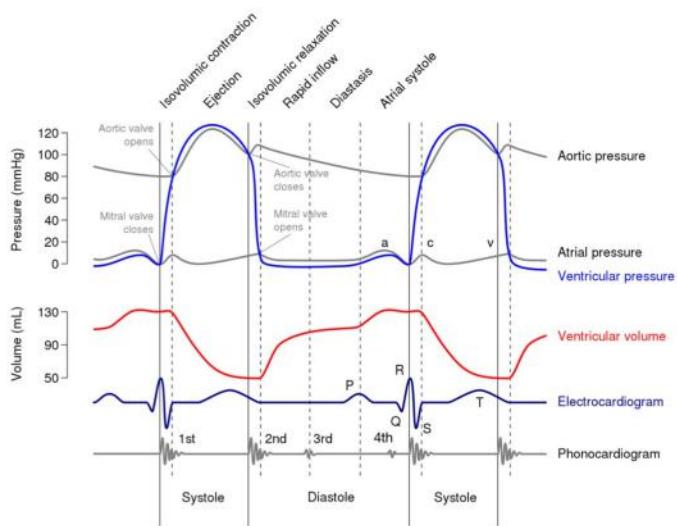
Ampiezza ~100 mVpp (voltage peak-to-peak)

- misurazione microfono piezoelettrico

## FONOCARDIOGRAMMA (PCG)

registrazione dei suoni generati dall'attività contrattile del cuore

- da informazioni su ritmo cardiaco, contrattilità cardiaca, contributi delle singole valvole, eventuale presenza di patologie o anomalie al sistema cardiovascolare, funzionalità di protesi artificiali



- Componenti

- Suono S1

> vibrazioni iniziali: prime contrazioni miocardiche (ventricolari)  
 => sangue va da ventricoli ad atri  
 chiusura valvola mitralica e tricuspidale

> II componente: valvole aortica e polmonare si aprono  
 sangue espulso dai ventricoli

> III componente: oscillazione del sangue fra la radice dell'aorta e le pareti ventricolari

> IV componente: turbolenza nel flusso di sangue in uscita

- Suono S2

> I componente: chiusura valvola aortica (A2)

> II componente: chiusura valvola polmonare (P2)

valvola aortica si chiude pochi millisecondi prima di quella polmonare. condizioni patologiche possono aumentare il gap o invertire l'ordine

- Suono S3: termine fase riempimento ventricolare

- Suono S4: contrazioni atriali che spostano il sangue nei ventricoli

# • SEGNALI BIOMECCANICI

originano da funzioni di natura meccanica del sistema biologico

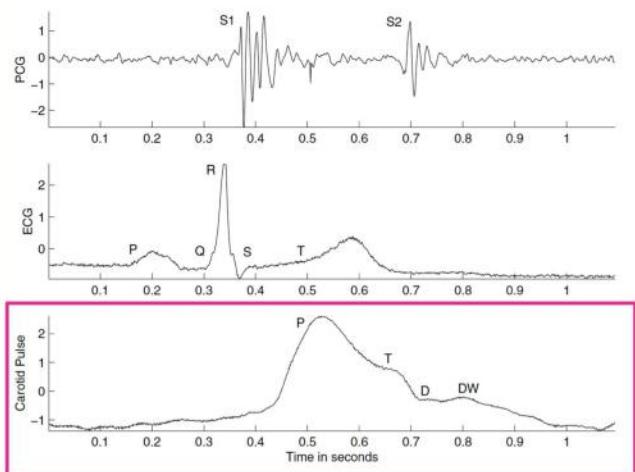
## POLSO CAROTIDEO

indica le variazioni di pressione sanguigna nell'aorta

- **misurazione** trasduttore banda passante di 0-100Hz
- **caratteristiche del segnale**
  - brusco aumento in corrispondenza del passaggio di sangue dal ventricolo sx all'aorta

- picco: onda di percussione (P)
- plateau o onda secondaria (T) dovuta al ritorno del battito

- chiusura della valvola aortica (D)
- dicrotic wave (DW): battito riflesso dalla parte inferiore del corpo



# • SEGNALI BIOCHIMICI

fluttuazione temporale di grandezze chimiche

misurati generalmente su campioni di sangue o aria espirata

# • SEGNALI TERMICI

informazioni circa temperatura corporea o distribuzione di temperatura su una superficie o tessuto

la temperatura riflette processi fisici e biochimici in atto nell'organismo (es: stati infiammatori)

# CLASSIFICAZIONE MATEMATICA DEI SEGNALI BIOMEDICI

## CONCETTO DI PERIODICITÀ

periodico  $x(t) = x(t+kT) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$  ripetizione indefinita di una certa curva

periodo ( $T$ ) distanza tra due ripetizioni

frequenza ( $f$ ) inverso del periodo  $f = \frac{1}{T}$

quasiperiodicità somma di funzioni armoniche a diversa frequenza ma il rapporto tra le frequenze delle singole armoniche è irrazionale

## GRANDEZZE DETERMINISTICHE E STOCASTICHE

### grandezze deterministiche

- note con elevata precisione
- rappresentabili in modo univoco
- una singola osservazione è rappresentativa del fenomeno

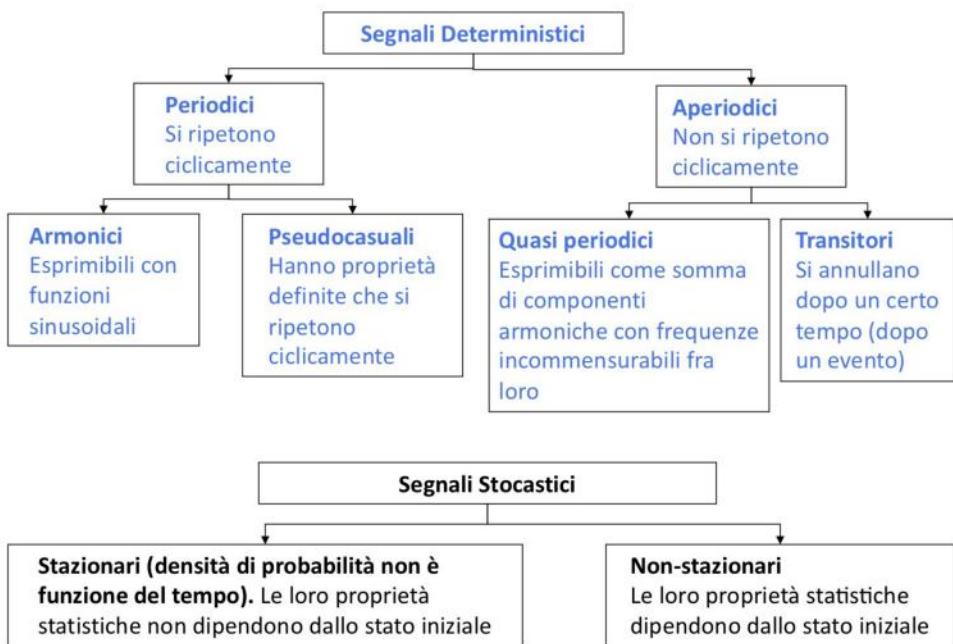
### grandezze causali / aleatorie / stocastiche

- non assumono valori unici
- una singola osservazione NON è rappresentativa del fenomeno

segnaletico deterministico può essere espresso da una funzione matematica

segnaletico stocastico può essere espresso solo in termini probabilistici

SEGNALE REALE  $R(s) = \underbrace{s(t)}_{\text{segnaletico utile}} + \underbrace{e(t)}_{\text{errore}} \quad (\text{distribuzione normale})$



## SEGNALI CORRELATI

concurrent / simultaneo stesso istante di tempo

coupled / accoppiato trasferimento di energia tra un segnale e l'altro

correlated / correlati condivisione di informazioni

## • CROSS-CORRELAZIONE E AUTOCORRELAZIONE

### • Funzione di cross-correlazione

fornisce la misura di quanto due segnali hanno proprietà comuni in funzione di un ritardo reciproco nel tempo

→ complesso coniugato

$$R_{XY}(m) = E\{X_{n+m} Y_n^*\} = E\{X_n Y_{n+m}^*\} \quad n \in (-\infty, +\infty)$$

Se numero campioni N limitato e campioni reali

$$R_{XY}(m) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-m-1} (X_{n+m} Y_n^*) & m \geq 0 \\ R_{XY}^*(-m) & m < 0 \end{cases}$$

`xcorr(x,y, 'coeff')`

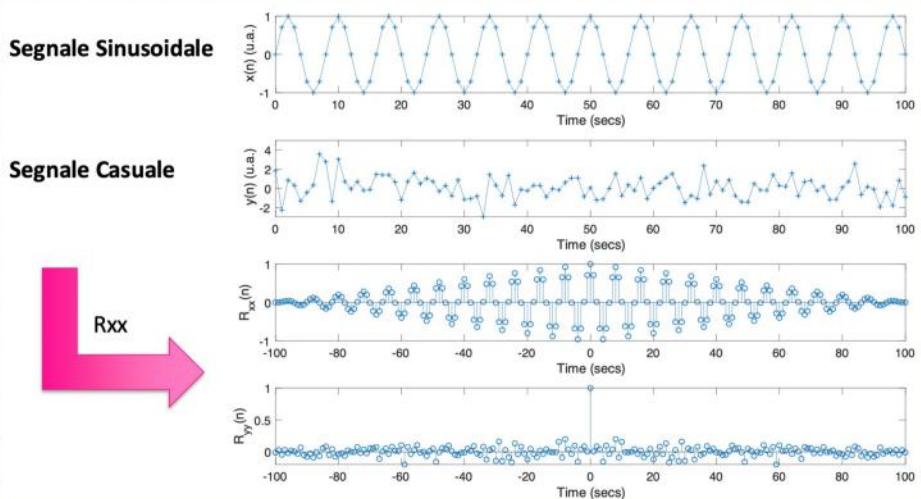
## • Funzione di autocorrelazione

fornisce la misura di quanto un segnale si assomigli  
in funzione di un ritardo nel tempo

$$R_{xx}(m) = R_{xy}(m) \text{ con } y(t) = x(t)$$

## • OSS

se segnali quasi-periodici  $\Rightarrow$  cross-correlazione quasi-periodica  
autocorrelazione segnale quasi-periodico è quasi-periodica  
segnali random hanno autocorrelazione quasi nulla per  $t \neq 0$



# CONVERSIONE ANALOGICO/DIGITALE

la digitalizzazione è conveniente per: elaborazione,  
memorizzazione, trasmissione

il processo di conversione A/D viene eseguito in fase di  
acquisizione del segnale e consiste in

- campionamento
- quantizzazione
- codifica

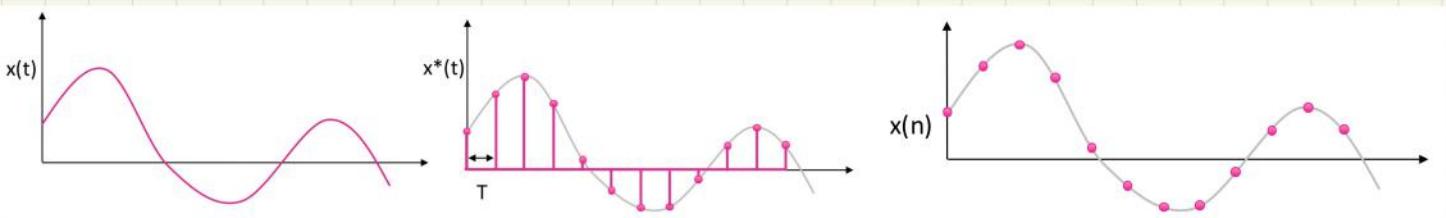


# CAMPIONAMENTO

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT) \quad T = \text{periodo di campionamento}$$

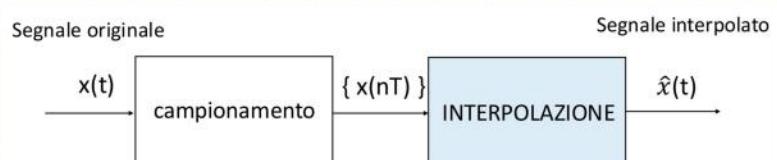
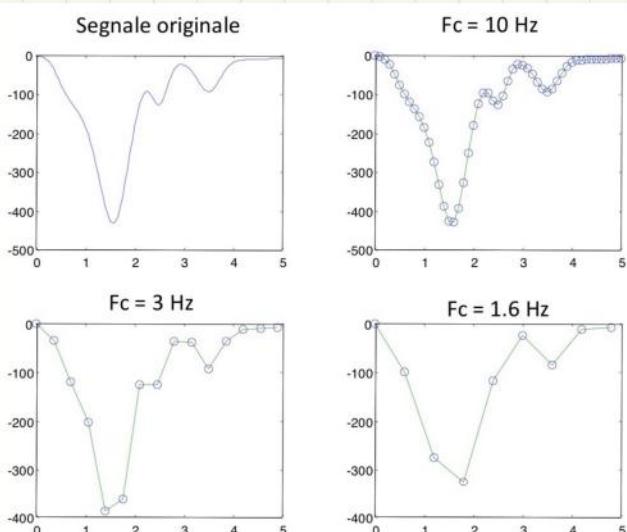
→ per ottenere il segnale continuo campionato  $x^*(t)$ , applico un treno di impulsi  $\delta(t - nT)$

$$x(n) = x(nT) \rightarrow x(n) \text{ non ha informazioni su } T$$



# INTERPOLAZIONE

approssimazione del percorso tra due campioni con funzioni matematiche plausibili per il segnale di interesse



l'errore di approssimazione dipende  
fortemente dalla frequenza di  
campionamento

la stessa sequenza di  
campioni può essere  
interpolata da  $\infty$  segnali

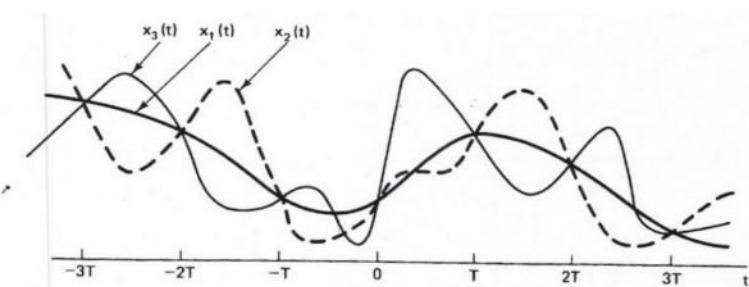


Figure 8.1 Three continuous-time signals with identical values at integer multiples of  $T$ .

## TEOREMA DI SHANNON - NYQUIST

Se il segnale è a banda limitata ( $B$ ) e la frequenza di campionamento ( $F_c$ ) è maggiore di  $2B$ , allora con tecniche di interpolazione opportune è possibile ricostruire il segnale originale con buona approssimazione.

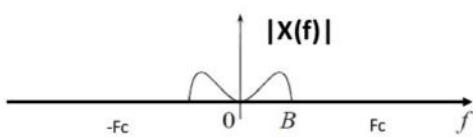
$$f_N = 2B \text{ Frequenza di Nyquist}$$

### RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

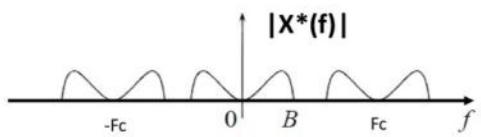


Segnale  $x(t)$  e campioni  $\{x(nT)\}$  dove  $T=1/F_c$

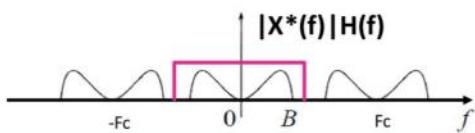
Spettro  $|X(f)|$  di  $x(t)$



Spettro  $|X^*(f)|$  di  $\{x^*(t)\}$



Posso ottenere lo spettro originario di  $X(f)$  con un filtro  $H(f)$  passa basso  $[0, F_c/2]$



$\Rightarrow$  se Shannon è rispettato  $F_c > 2B$  basta filtrare il segnale campionato con un passa basso ideale  $[0, \frac{F_c}{2}]$

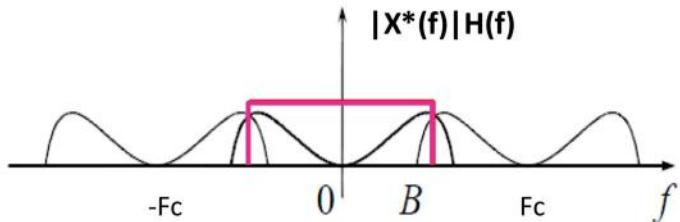
Nel dominio del tempo si traduce nell'interpolazione Whittaker-Shannon

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \operatorname{sinc}\left(2\frac{t-nT}{T}\right) \quad x^*(t) * \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

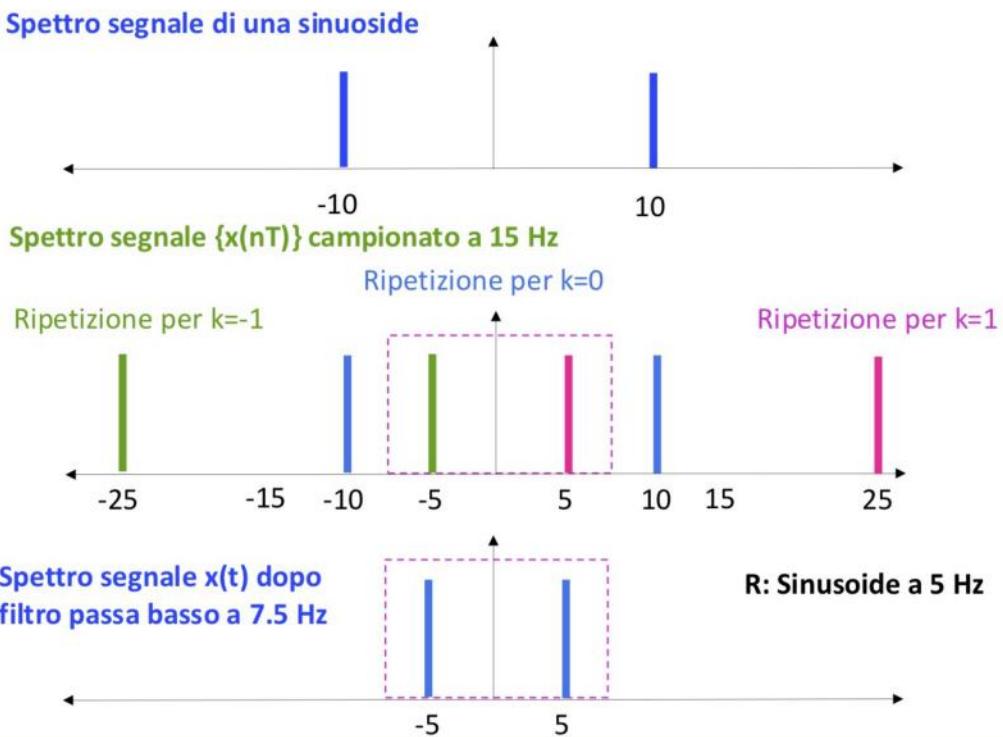
↳ problema mi servono  $\infty$  campioni

## • Aliasing

se Shannon non è rispettato, le frequenze del segnale originario vengono distorte a causa della sovrapposizione dello spettro del segnale utile con le sue ripetizioni

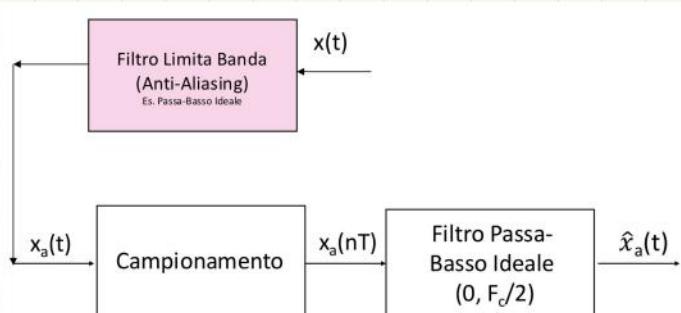


D: Qual è il risultato di una sinusode a 10 Hz campionata a 15 Hz? Perché, dopo l'interpolazione con sinc (passa-basso ideale a 7.5Hz), ci troviamo una sinusode a 5Hz?



## > soluzione

sacrifichiamo delle alte frequenze del segnale mediante un pre-filtraggio analogico con un passa basso ideale



il pre filtraggio è sempre fatto perché non conosciamo le caratteristiche del rumore

# • QUANTIZZAZIONE

possiamo rappresentare il segnale con un numero finito di valori

definito dalla codifica (quanti bit abbiamo a disposizione)

⇒ dividendo l'ampiezza del segnale in tanti livelli quanti sono i valori rappresentabili. L'ampiezza di questi livelli è detta passo di quantizzazione ( $q$ ) = range / n. livelli

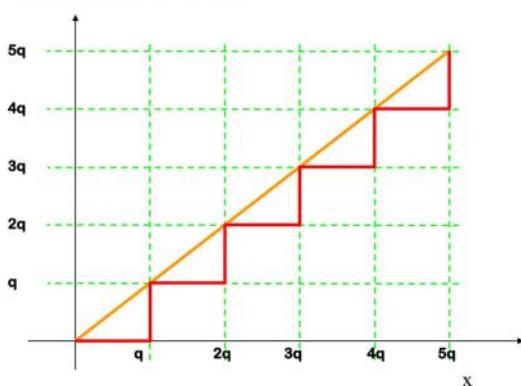
Errore di quantizzazione = differenza tra segnale vero e quantizzato

$$e_q(n) = x(n) - x_q(n)$$

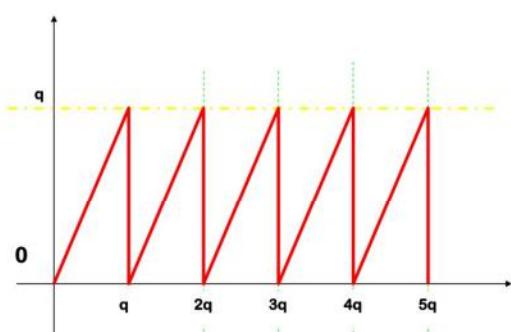
- quantizzazione per troncamento

- quantizzazione per arrotondamento

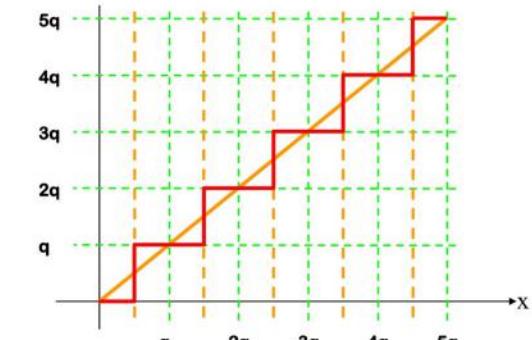
QUANTIZZAZIONE



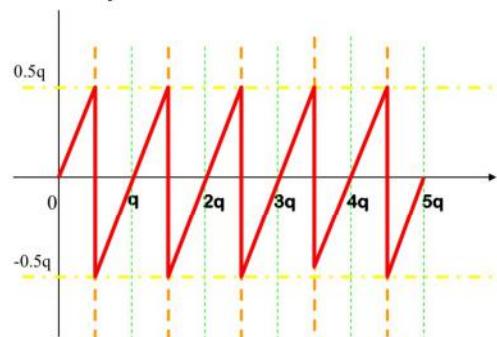
Errore di quantizzazione



QUANTIZZAZIONE



Errore di quantizzazione



$$\text{Range: } 0 < e_q < q$$

$$|e_{q \max}| < q$$

$$y_{trunc} = q \cdot \text{sign}(y) \cdot \min \left\{ \left| \text{fix} \left( \frac{y}{q} \right) \right|, \frac{N_{\text{livelli}} - 1}{2} \right\}$$

$$\text{Range: } -\frac{1}{2}q < e_q < \frac{1}{2}q$$

$$|e_{q \max}| < \frac{1}{2}q$$

$$y_{arr} = q \cdot \text{sign}(y) \cdot \min \left\{ \left| \text{round} \left( \frac{y}{q} \right) \right|, \frac{N_{\text{livelli}} - 1}{2} \right\}$$

# CODIFICA

definisce il numero di livelli di quantizzazione in base ai bit a disposizione.

La codifica assegna una sequenza binaria ad ogni livello.

- Codifica senza segno**

$$N \text{ livelli} = 2^{n_{\text{bit}}}$$

- Codifica con segno**

$$N \text{ livelli} = 2^{n_{\text{bit}}} - 1$$

$(2^{n_{\text{bit}}-1}-1 \text{ per segno} + 1 \text{ per lo zero})$

$\hookrightarrow -0=0$  quindi un livello è inutilizzato

Q: si identifichi una codifica per un segnale con range [-140, 140] mV e 3 bit di informazione

Soluzione

- Serve codifica con segno  $\rightarrow N \text{ livelli} = 2^3-1$
- $q = \text{passo di quantizzazione} = \text{Range segnale} / N \text{ livelli} = 280 \text{ mV} / 7 = 40 \text{ mV}$
- Errore (arrotondamento) è  $q/2 = 20 \text{ mV}$

INTERVALLO DI QUANTIZZAZIONE			QUANTIZZAZIONE	CODIFICA
-20	$\leq x <$	20	$x_q=0$	000
20	$\leq x <$	60	$x_q=40$	001
60	$\leq x <$	100	$x_q=80$	010
	$x \geq$	100	$x_q=120$	011
-60	$\leq x <$	-20	$x_q=-40$	101
-100	$\leq x <$	-60	$x_q=-80$	110
	$x <$	-100	$x_q=-120$	111

**BIT-RATE** è il flusso di bit  $\text{bit-rate} = \frac{n_{\text{bit}}}{\text{tempo}} = n_{\text{bit}} \cdot F_c$

Esempio (formato HI-FI, no compressione)

Frequenza usata: 44.1 KHz

Quantizzatore: 16 bit

Numero di segnali (stereo) = 2

Bit-rate  $\sim 1400 \text{ Kb/s}$   
 (max mp3 = 320 Kb/s ; max Spotify = 160 Kb/s)

Ingombro di 80 minuti:

$$16 \cdot 44100 \cdot 2 \cdot 60 \cdot 80 = 6.7738e+009 \cong 800 \text{ MB}$$

16 bit per campione

$F_c = 44.1 \text{ Hz}$  2 segnali

$$\Rightarrow \text{bit rate} = 2 \cdot 16 \cdot 44.1 \cdot 10^3 = 1411.2 \frac{\text{Kb}}{\text{s}}$$

# RAPPORTO SEGNALE-RUMORE (SNR)

assumiamo  $X(t)$  uniforme su  $[-V, V] \Rightarrow \sigma_x = \frac{(2V)^2}{12}$

approssimiamo  $\sigma_e$  come distr. uniforme su  $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}] \Rightarrow \sigma_e = \frac{q^2}{12}$

passo di quantizzazione =  $q = \frac{2V}{L}$   $L$  = numero livelli =  $2^{n_{\text{bit}}}$

$$\text{SNR} = \frac{\sigma_x}{\sigma_e} = 2^{2n_{\text{bit}}}$$

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} 2^{2n_{\text{bit}}} = 10 n_{\text{bit}} \log_{10} 4$$

$\simeq 6 n_{\text{bit}}$

Made by Davide Bosco  
@davidebosco  
Appunti non vendibili!

## PRE-AMPLIFICAZIONE

Se il mio quantizzatore copre  $[-V, V]$  ma  $X(t)$  ha range

$$[-0.1V, 0.1V] \Rightarrow \sigma_x = \frac{(2 \cdot 0.1V)^2}{12} = \frac{2V^2}{12} \cdot \frac{1}{100}$$

mentre  $\sigma_e$  rimane invariata  $\Rightarrow \text{SNR} = \frac{2^{2n_{\text{bit}}}}{100}$

$\Rightarrow$  perde 20 dB a parità di segnale

$\Rightarrow$  è necessario pre-amplificare per coprire l'intero segnale

## POTENZIALI EVOCATI

I PE sono delle variazioni specifiche del segnale biomedico

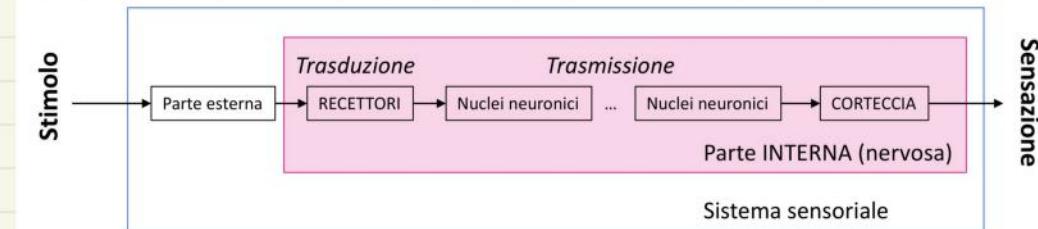
conseguenti alla stimolazione di una via sensoriale o ad un evento motorio

permettono di verificare l'integrità delle vie da conduzione elettrica nervosa

## STRUTTURA DEL SISTEMA SENSORIALE

cellule recettoriali sono classificate in base alla forma di energia alla quale sono selettivamente sensibili (chemiocettori, meccanocettori, termocettori, fotocettori, elettronocettori, recettori acustici)

la maggior parte delle vie sensoriali proietta sul talamo, che le rielabora e trasmette gli stimoli alla corteccia  
 (vie olfattive arrivano dirette alla corteccia, e quelle dell'equilibrio al cervelletto)



⇒ i PE sono il risultato dell'attività collettiva di nuclei neuronici

### RAPPRESENTAZIONE DEI PE

sono rappresentati come onde e sono limitati nel tempo.

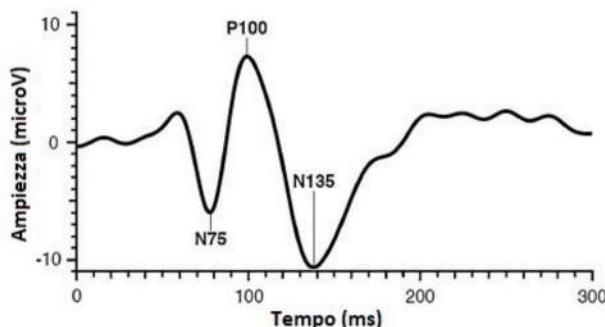
il segnale corrisponde a variazioni di voltaggio nell'ordine del  $\mu V$   
 consiste in una serie di deflessioni positive e negative associate  
 a potenziali post sinaptici sincroni di un gruppo di neuroni  
 corticali

#### • parametri

**latenza** tempo tra stimolo e comparsa della componente

**ampiezza** entità della deflessione rispetto al livello basale

**topografia** posizione sulla sup cranica in cui è stata  
 registrata la massima ampiezza



PE tipico da stimolo visivo

P picco positivo

N picco negativo

il numero rappresenta la latenza

componenti veloci (<100ms) riflettono le qualità fisiche dello stimolo e originano dai livelli periferici del sistema nervoso  
componenti tardive (>100ms) riflettono lo stato psicologico del soggetto che riceve la stimolazione

Made by Davide Bosco  
@davidebosco  
Appunti non vendibili!

## PE VISIVI

misurazione: elettrodi occipitali

stimolo più comune: scacchiera che inverte i colori ogni 0,5 sec

pattern tipico: N70, P100, N140

## PE UDITIVI

misurazione: elettrodi al lobo dell'orecchio + 1 di riferimento sul capo + 1 di terra frontale

stimolo: burst (tono breve) o click, ipo-laterale (stesso emisfero)  
o contro-laterale (altro emisfero)

## PE SOMATOSENSORIALI

servono a studiare la conduzione degli stimoli sensitivi lungo il nervo periferico e il midollo e l'arrivo a livello della corteccia cerebrale

## PE COGNITIVI (P300)

aiutano a comprendere come le funzioni cognitive e esperienze soggettive sono correlate all'attività cerebrale

### • P300

è espressione globale dei processi cerebrali implicati nel mantenimento della memoria di lavoro  $\Rightarrow$  viene generata ogni volta che il soggetto aggiorna la propria rappresentazione mentale del contesto ambientale

nel quale si trova ad operare

## > caratteristiche

latenza: tempo impiegato per completare il pieno riconoscimento dello stimolo

ampiezza: funzione inversa della probabilità di comparsa dello stimolo e della quantità di informazione da esso trasmessa al soggetto

## PE MOTORI

restituiscono informazioni qualitative sullo stato di eccitabilità

cortico-spinale

sono in grado di generare movimento nei muscoli contralaterali

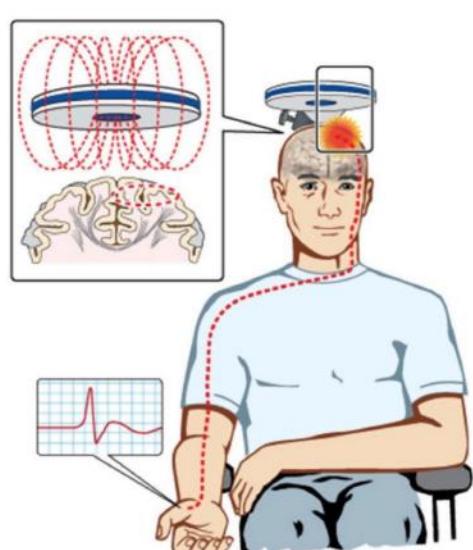
allo stimolo

stimolo: stimolazione magnetica transcranica

(TMS) applicata sulla sup destra  
corteccia motoria.

misurazione: elettrodi EMG di superficie

caratteristiche: latenza  $\approx 20\text{ms}$  per un  
muscolo distale dell'arto  
 $& > 30\text{ms}$  per un muscolo  
della gamba



# RUMORE NEI SEGNALI

Made by Davide Bosco  
davidebosco  
Appunti non vendibili!

Tutto ciò che nel segnale non è di interesse è interferenza artefatto o RUMORE

## TIPI DI RUMORE

### • rumore casuale

proviene da processi casuali (es: interferenza disp elettronici)

È descritto in termini probabilistici

### > parametri

densità di probabilità, momenti statici (media, varianza, entropia, asimmetria, curtosi,...)

l'aleatorietà di un segnale è determinabile tramite test statistici

### > processi aleatori

processi stocastici stazionari → caratteristiche aleatorie invarianti nel tempo

#### - STAZIONARIETÀ

in senso stretto: proprietà statiche indipendenti da un riferimento

temporale assoluto  $p_x(t) = p_x \quad \forall t$

in senso largo: consideriamo indipendenti dal tempo solo i

momenti di primo e secondo ordine e la

funzione di autocorrelazione

$$E[x(t)] = m \quad \text{Var}[x(t)] = \sigma^2$$

$$E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = r(\tau) \quad \text{autocorrelazione dipendente solo dal ritardo}$$

un processo stazionario è **ergodico** se consente di stimare le caratteristiche del proc aleatorio dallo sviluppo temporale di una singola realizzazione del processo

Quasi-stazionarietà e ciclo-stazionarietà sono definite per segnali che sono stazionari per tempi limitati (EEG) o che sono quasi-periodici (ECG)

### > approssimazione

approssimato come un processo aleatorio a media nulla e

varianza  $\neq 0$  di tipo stazionario-ergodico

### • rumore strutturale

legato al dispositivo di acquisizione (interferenza di rete a 50/60 Hz + eventuali armoniche / compressione picchi QRS in ECG)

### > caratteristiche

forma d'onda nota in anticipo

### • Interferenza fisiologica

segnali generati da sistemi o processi diversi rispetto a quelli di interesse (es: tosse e respiro in EMG)

### > caratteristiche

cambia da soggetto a soggetto e non ha una forma d'onda specifica

## • TECNICHE DI RIMOZIONE DEL RUMORE

### • Filtri nel dominio del tempo

Vantaggi: non si richiede di calcolare lo spettro del segnale  
possono essere più veloci di quelli in frequenza

### • Filtri nel dominio della frequenza

utili per agire su specifiche frequenze del segnale

## RUMORE NEI POTENZIALI EVOCATI

In genere un singolo PE non è riconoscibile. Abbiamo bisogno di eliminare il rumore per identificare il PE associato a un certo stimolo

### > media sincrona

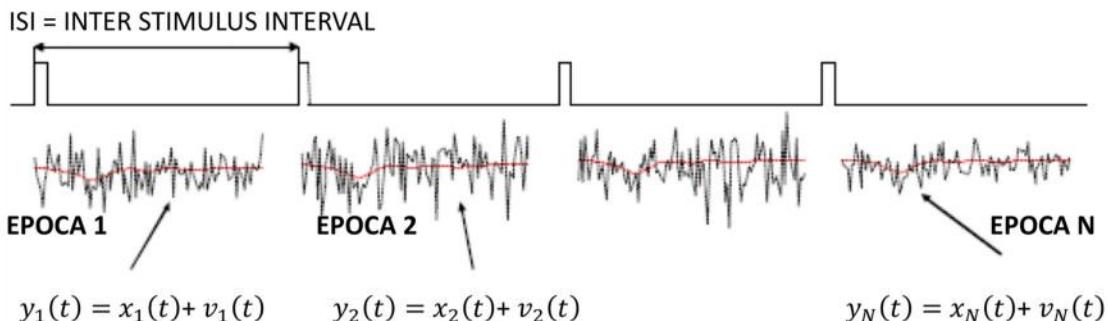
hp di rumore additivo  $y(t) = x(t) + v(t)$

$v(t)$  processo casuale, scorrelato, media nulla, varianza  $\sigma^2$

ripetiamo  $N$  stimoli identici e equispaziati nel tempo

misuriamo uno sweep (o epoca) di segnale dopo ogni stimolo

facciamo la media campionaria dei segnali degli  $N$  sweeps per ogni istante



$$\hat{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k) \quad k \in [1, M]$$

K tempo di campionamento  
 M numero di campioni  
 N numero di epoche

consideriamo il contributo del PE ( $x(t)$ ) sempre uguale

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\underline{x}(k) + v_i(k)] = \underline{x}(k) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(k)$$

usando l'hp  $E[v(k)] = 0 \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(k) = 0$

$\Rightarrow E[\hat{x}(k)] = x(k)$  la media della media sincrona è il segnale utile

## - SNR nella media sincrona

ci permette di decidere quante epochhe ci servono per avere un risultato che abbia un determinato livello di precisione

energia segnale  $E_S = \sum_{k=1}^M S^2(k)$

$$SNR^N = \frac{E_X^N}{E_V^N}$$

$$SNR^{\text{1 ripetizione}} = \frac{E_X^{\text{1 ripetizione}}}{E_V^{\text{1 ripetizione}}}$$

$$E_X^N = \sum_{k=1}^M \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(k) \right]^2 = \sum_{k=1}^M X^2(k) = E_X^{\text{1 ripetizione}}$$

$$\begin{aligned} E_V^N &= \sum_{k=1}^M \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i(k) \right]^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M \left[ \sum_{i=1}^N V_i^2(k) \right] + \\ &\quad \left| + \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^M \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N V_i(k) \cdot V_j(k) \right] \right| \xrightarrow{=0} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \left[ \sum_{k=1}^M V_i^2(k) \right] \\ &\quad \left| \right. \\ &= \frac{N \cdot E_V^{\text{1 ripetizione}}}{N^2} \end{aligned}$$

$$SNR^N = \frac{E_X^N}{E_V^N} = \frac{E_X^{\text{1 ripetizione}}}{E_V^{\text{1 ripetizione}} \cdot \frac{1}{N}} = N \cdot SNR^{\text{1 ripetizione}}$$

$\Rightarrow$  il numero di realizzazioni  $N$  necessario per arrivare a un certo SNR è dipendente dal SNR del singolo PE

es  $SNR^{\text{1 rep}} = \frac{1}{36}$  N.t.c.  $SNR^N = 100 \Rightarrow N = 3600$   
 $(\sim 1 \text{ ora di registrazione})$

# FILTRI

Made by Davide Bosco  
@davidebosco  
Appunti non vendibili!

algoritmo o metodo per il processamento di segnali usato per modificare un segnale in una particolare maniera

- tipologie

- lineare / non lineare
- Stazionario / non Stazionario
- fisso (tempo-invariante) / adattivo (tempo-variante)
- attivo / passivo
- deterministico / probabilistico

- FILTRI COME SISTEMI

## SISTEMI LINEARI TEMPO-INVARIANTI (LTI)

relazione input/output rispetta contemporaneamente le proprietà di linearità e tempo-invarianza

definiamo il sistema con la trasformazione  $T[\cdot] \Rightarrow y(n) = T[x(n)]$

**LINEARITÀ**  $T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$

**TEMPO-INVARIANZA**  $y(n - n_0) = T[x(n - n_0)]$

un sistema LTI è completamente caratterizzato dalla sua risposta impulsiva  $h(n)$   $y(n) = x(n) * h(n)$

**DIMOSTRAZIONE.** Dato che ogni sequenza  $x(n)$  può essere vista come una somma impulsi discreti  $\delta(n)$ :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

utilizzando le proprietà dei sistemi LTI possiamo ottenere che

$$y(n) = T[x(n)] = T[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

Definendo  $h(n) = T[\delta(n)]$  la risposta impulsiva del sistema, otteniamo:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n) \rightarrow \text{DEF di convoluzione discreta}$$

Vale la proprietà commutativa  $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$

## • condizione fisica di realizzabilità

sistema LTI è fisicamente realizzabile  $\Leftrightarrow$  la sua risposta impulsiva è

① reale: definita su parametri reali

② causale: uscita dipendente solo dall'ingresso passato

**Teorema** LTI causale  $\Leftrightarrow h(n) = 0 \quad \forall n < 0$

$\Rightarrow$  se  $x(n)$  e  $h(n)$  sono causali ( $x(n), h(n) = 0 \quad \forall n < 0$ )

allora anche  $y(n)$  è causale

## • BIBO - stabilità

un sistema a tempo discreto è BIBO-stabile  $\Leftrightarrow$  per ogni ingresso limitato anche la sequenza di uscita assume ampiezze limitate

**Teorema** LTI discreto è BIBO st  $\Leftrightarrow$  la sua risposta impulsiva  $h(n)$  è sommabile in modulo

$$\forall M \text{ t.c. } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < M$$

## SISTEMI DEFINITI DA EQ ALLE DIFFERENZE LINEARI A COEFF COST

$$y(n) = \underbrace{-\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)}_{\substack{\text{parte} \\ \text{auto regressiva}}} + \underbrace{\sum_{k=0}^M b_k x(n-k)}_{\text{mobile average}}$$

Ordine del sistema  $\max(N, M)$

l'eq alle differenze è ricorsiva se almeno un coeff  $a_k \neq 0$

(altrimenti è non ricorsiva)

definisce sistemi causali e i coeff  $a_k$  e  $b_k$  sono cost

se coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  reali  $\Rightarrow$  filtro è realizzabile

## SISTEMI FIR (Finite impulse response)

$$y(n) = + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

mobile average

tutti i coeff  $a_k = 0 \Rightarrow$  no parte AR

ogni sist MA è FIR (FIR possono essere scritti anche come ARMA)

l'uscita dipende solo dall'ingresso

sono sempre stabili (perché  $h(n) \neq 0$  solo per gli  $M$  valori  $k=1 \dots M$  in cui  $h(k) = b_k$ )

possono essere visti come combinazione di amplificazioni e ritardi

$$y(n) = G x(n) \quad G: \text{guadagno}$$

$$y(n) = x(n-r) \quad r: \text{ritardo}$$

- **Filtro a media mobile**

caso particolare di filtro FIR che propone una media lungo l'asse temporale

$$y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \quad b_k \text{ tiene conto della divisione per } N$$

es:  $y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$

- **Filtro a media sincrona**

usato per rimuovere il rumore nei PE e segnali quasi-periodici

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N x(n-Lk) \quad N: \text{numero di epocha}$$

$L: \text{campioni contenuti in un'epoca}$

- **Filtro derivativo**

$$y(n) = \frac{x(n) - x(n-1)}{T_s} \quad T_s: \text{tempo di campionamento}$$

## SISTEMI IIR (Infinite impulse response)

$$y(n) = \underbrace{-\sum_{k=1}^N a_k y(n-k)}_{\text{parte auto regressiva}} + \underbrace{\sum_{k=0}^M b_k x(n-k)}_{\text{mobile average}}$$

è presente retroazione (almeno un  $a_k \neq 0$ )

la stabilità dipende del caso specifico

## FILTRI IN FREQUENZA

la trattazione di filtri per segnali e sistemi discreti necessita l'uso

della discrete-time Fourier Transform (DTFT)

$$X(\omega) = \text{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \omega = 2\pi f$$

per il teorema della convoluzione si ha

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad \text{con} \quad H(\omega) = \text{DTFT}[h(n)] \in \mathbb{C}$$

$\hookrightarrow$  risposta in frequenza

$$\Rightarrow H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\arg[H(\omega)]} = |H(\omega)| e^{j\angle[H(\omega)]}$$

dato che la DTFT è un operatore lineare, vale la sovrapposizione degli ingressi

$$\Rightarrow \text{DTFT}[x(n+k)] = \text{DTFT}[x(n)] e^{jk\omega k} = X(\omega) e^{jk\omega k}$$

possiamo scrivere l'uscita di un filtro in coord polari

$$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{|H(\omega)| X(\omega) e^{j\angle[H(\omega)]}}{\text{amplificazione ritardo}}$$

### caso particolare

Se  $x(n)$  sinusoidale e  $H(\omega)$  è un sistema LTI

$$\Rightarrow X(\omega) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad Y(\omega) = A |H(\omega)| \sin(\omega_0 t + \varphi + \angle[H(\omega)])$$

DTFT corrisponde  
 a FT Segnale continuo  
 ripetuto in modo  
 periodico con frequenza  
 $F_c = 1/\text{tempo campion.}$

- note sulla DTFT

- è periodica di periodo  $2\pi \Rightarrow$  non ho informazioni sul tempo del campionamento del segnale
- La DTFT di un segnale reale è una funzione con modulo pari e fase dispari (si studia il modulo da 0 a  $\pi$ )

- gestione della fase

la fase della DTFT è la misura di quanto la forma d'onda del segnale originario venga ritardata

Non possiamo avere fase nulla perché il segnale dovrebbe essere reale e PARI (noi invece usiamo segnali causali)

$\Rightarrow$  possiamo invece mantenere un ritardo costante/lineare  
(succede se il filtro è simmetrico rispetto al suo supporto  
es: FIR con  $h(n)$  simmetrica rispetto al suo supporto

$$h(k) = h(M-1-k)$$

- TRASFORMATA Z

problema: la DTFT esiste solo se il segnale è BIBO st  
(risposta impulsiva assolutamente sommabile)

la trasformata Z (ZT) esiste sempre e permette di determinare le condizioni di stabilità

$$X(z) = ZT[X(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n)z^{-n} \quad \text{con } z = r \cdot e^{j\omega}$$

$$\left. \begin{aligned} X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(n)e^{-j\omega n} \\ X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{-n} X(n)e^{-j\omega n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow X(w) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} \\ z = e^{j\omega} \Leftrightarrow r = 1$$

## • proprietà

stesse proprietà della FT

Linearità  $ZT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(z) + bX_2(z)$

Traslazione  $ZT[x(n+k)] = X(z) z^k$

Convoluzione  $y(n) = x(n) \otimes h(n) \rightarrow Y(z) = X(z) \cdot H(z)$

## • funzione di trasferimento

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$\Rightarrow Y(z) = -\sum_{k=1}^N a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$$

$$\Rightarrow Y(z) [1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}] = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

la trasformata Z di un filtro digitale definito da un eq alle differenze è una funzione razionale in z

POLI N valori per cui il denominatore di H(z) si annulla

ZERI M valori per cui il numeratore di H(z) si annulla

se  $a_k$  e  $b_k$  sono reali  $\Rightarrow$  i poli e zeri sono reali o

complessi coniugati

## REGIONE DI CONVERGENZA DELLA ZT (ROC)

la ROC è la parte del piano complesso che garantisce la convergenza assoluta della ZT

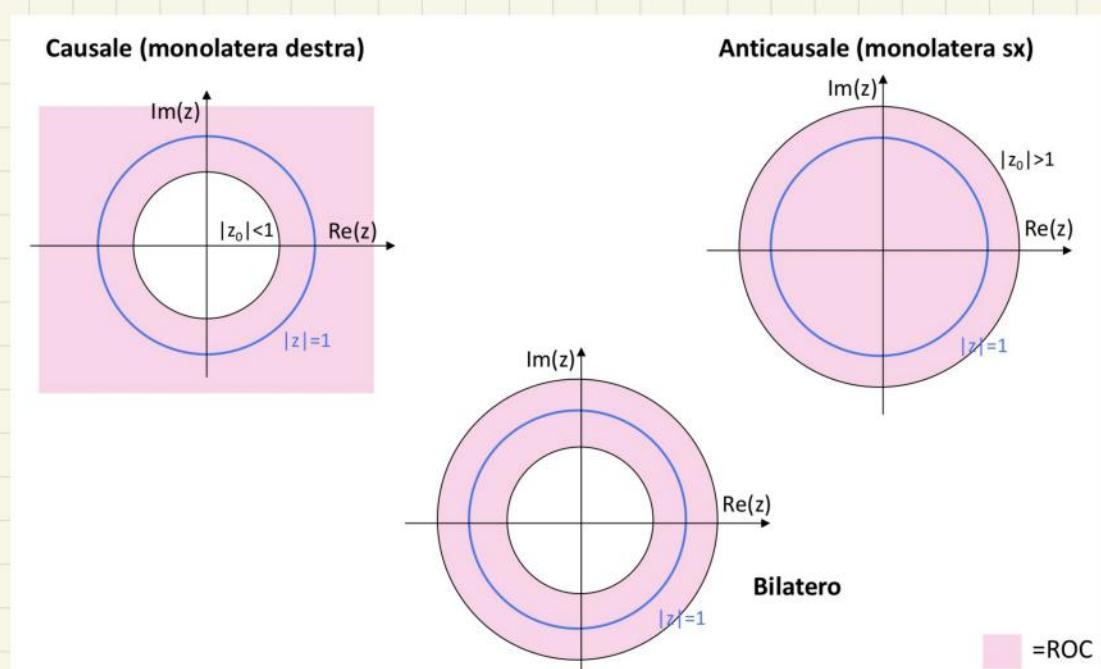
$$\exists M > 0 \text{ t.c. } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(n)z^{-n}| < M$$

è generalizzabile come una corona circolare

- OSS per segnali o sistemi a durata finita, la trasformata Z è ben definita  $\forall z$  (tutto il piano complesso)  
eccetto al più  $z=0$  e  $z=\infty$
- $H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$  non converge per  $z=0$   
 $H(z) = z^2 + z^1 + 1$  non converge per  $z=\infty$

## • proprietà della ROC

- è sempre una regione limitata da cerchi centrati nell'origine
- può contenere zeri ma non poli  $\Rightarrow$  è limitata dai poli



LTI causale  $\Leftrightarrow h(n)=0$  per  $n < 0$  ( $H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n)z^{-n}$ )

- un filtro è stabile se la ROC della sua ZT contiene la circonferenza unitaria

DIMOSTRAZIONE: un filtro LTI è BIBO st  $\Leftrightarrow$  la sua  $h(n)$  è assolutamente sommabile  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < M$

In Z si esprime con  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)z^{-n}| < M \Rightarrow |H(z)|_{z=1} < M$

## • CAUSALITÀ E STABILITÀ FIR E IIR

- le differenze precedentemente descritte sono sempre causali
- trasformata Z di un filtro FIR converge sempre.  
eventuali poli sono solo nell'origine
- trasformata Z di un filtro IIR converge solo per alcuni valori di z. Ma almeno un polo fuori dall'origine

**ROC per  $h(n) = \alpha^n u(n)$**  FUNZIONE GRADINO: Caso particolare di funzione causale

$$h(n) = \alpha^n u(n) \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n \rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

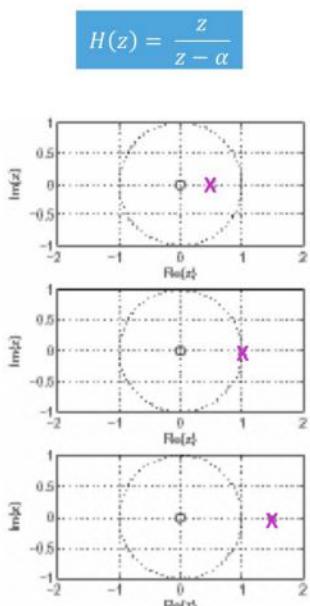
Serie geometrica:  
Converge se  $|\alpha z^{-1}| < 1$

### IN PRATICA

La funzione può essere riscritta come:

$$H(z) = \frac{z}{z - \alpha} \quad (\text{ha un polo in } z = \alpha)$$

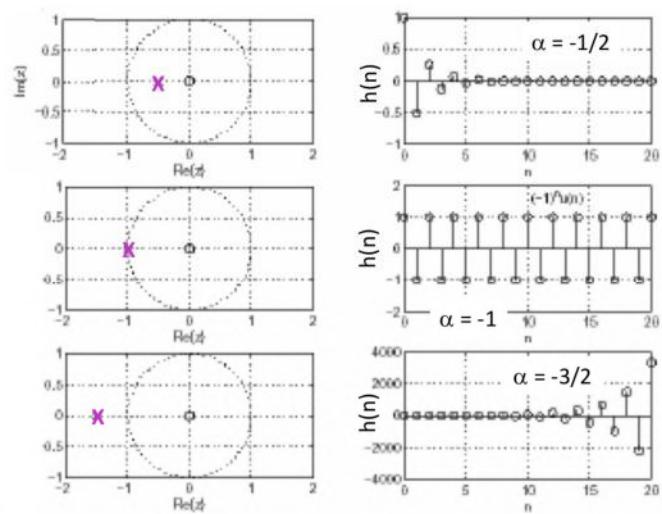
È stabile se e solo se il polo sta all'interno del cerchio unitario:  $|\alpha| < 1$ , ovvero, infatti, la  $h(n)$  è assolutamente sommabile.



Caso  $\alpha > 0$

$$H(z) = \frac{z}{z - \alpha}$$

Caso  $\alpha < 0$



# • PROGETTAZIONE FILTRI

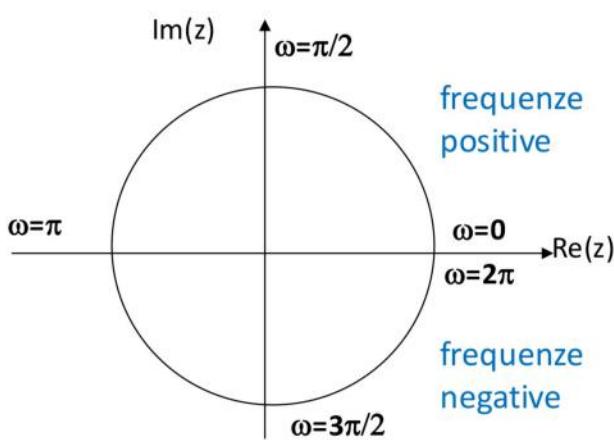
Scomponiamo  $H(z)$  in fattori

$$H(z) = G \cdot z^{-\alpha} \frac{\prod(1 - C_i z^{-i})}{\prod(1 - P_i z^{-i})}$$

Scegliamo  $G$  tale da avere un coefficiente di amplificazione unitario alle frequenze in cui c'è un max di  $H(z)$  o al centro della banda di riferimento  $|H(\omega = \omega_0)| = 1$

## • relazione DTFT e ZT

$$X(\omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad z = r e^{j\omega} \Rightarrow r=1$$



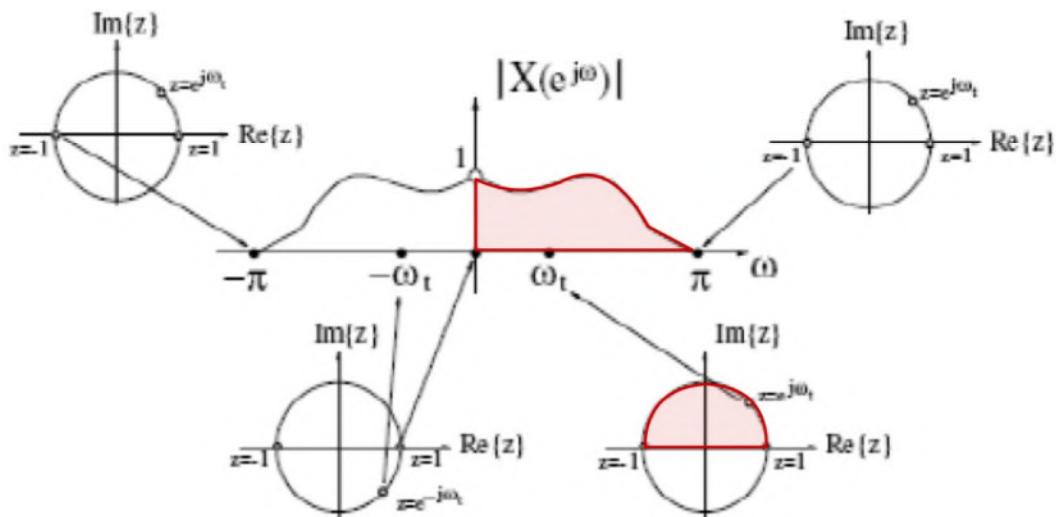
$$\omega = \frac{2\pi f}{F_c} \Rightarrow f = \frac{\omega F_c}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f_{\text{norm}} \Rightarrow f_{\text{norm}} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Nota:  $f_{\text{Matlab}} = \frac{\omega}{\pi}$

Se  $\omega = 2\pi \Rightarrow f = F_c \quad f_{\text{norm}} = 1$

Se  $\omega = \pi \Rightarrow f = \frac{F_c}{2} \quad f_{\text{norm}} = \frac{1}{2}$



## EFFETTO DI POLI E ZERI

- requisiti per realizzabilità

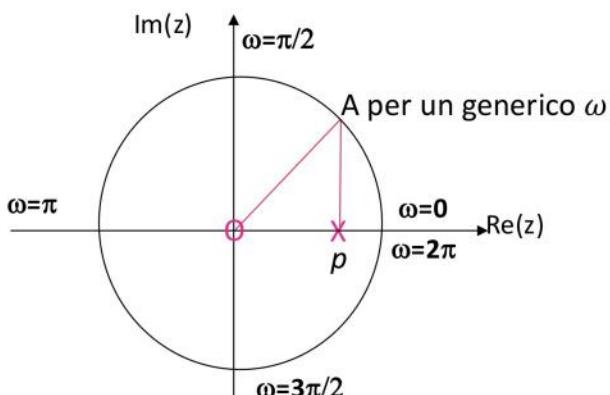
> **Causalità** numero poli  $\geq$  numero zeri

> **Stabilità** poli devono essere all'interno del cerchio unitario

(filtro causale  $\Rightarrow$  ROC è esterna a una circonferenza delimitata dal polo più lontano dall'origine.  
 perché filtro sia stabile la ROC deve contenere la circonferenza unitaria)

> **reale** poli e zeri in coppie di complessi coniugati

- **poli enfatizzano frequenze**



$$H(z) = G \frac{z}{z-p}$$

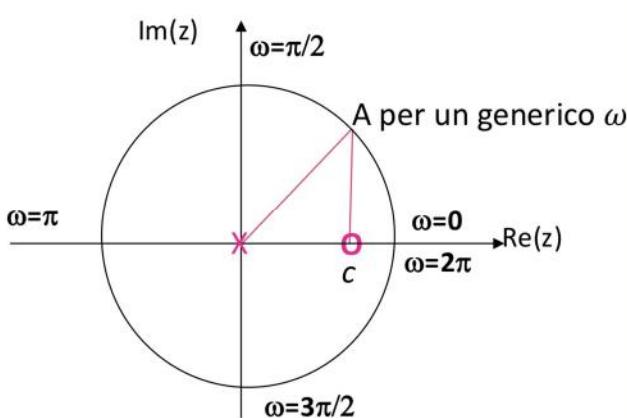
$$|H(z)|_{z=e^{j\omega}} = G \frac{|e^{j\omega}|}{|e^{j\omega}-p|} \sim G \frac{1}{|\overline{Ap}|}$$

$$|\overline{Ap}| \in (0, 1]$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| \rightarrow \infty \text{ per } |\overline{Ap}| \rightarrow 0$$

$$|H(\omega)| = G \text{ per } |\overline{Ap}| = 1$$

- **Zeri attenuano Frequenze**



$$H(z) = G \frac{z-c}{z}$$

$$|H(z)|_{z=e^{j\omega}} = G \frac{|e^{j\omega}-c|}{|e^{j\omega}|} \sim G |\overline{Ac}|$$

$$|\overline{Ac}| \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = 0 \text{ per } |\overline{Ac}| = 0$$

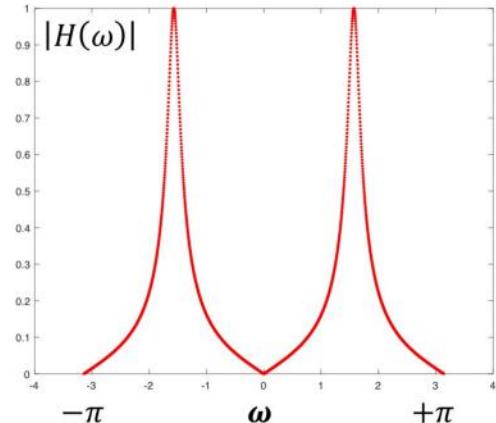
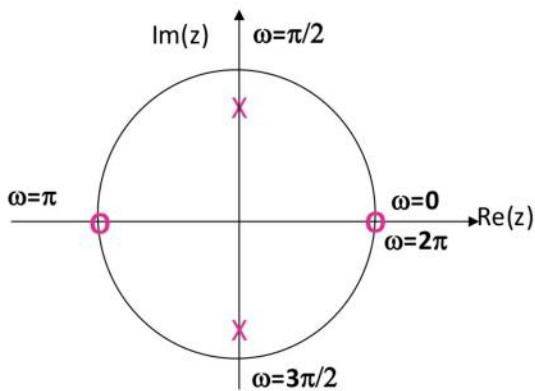
$$|H(\omega)| = G \text{ per } |\overline{Ac}| = 1$$

## ESEMPI

- passa banda

ESEMPIO: Filtro con

- 2 zeri in  $z=1$  e  $z=-1$
- 2 poli complessi e coniugati in  $z = pe^{\pm j\pi/2}$



17

- Filtro notch

## Progetto di un filtro notch

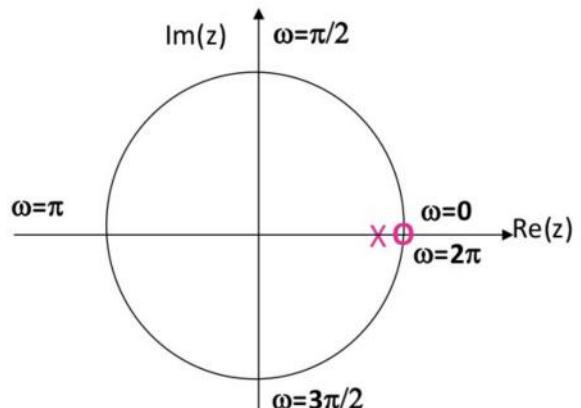
ESEMPIO 1: eliminare la componente a  $\omega=0$

Si dovranno porre:

- uno zero in  $z=1$  Cancellia  $\omega=0$
- un polo vicino allo zero (es:  $z=0.9$ ) Enfatizza  $\omega>0$

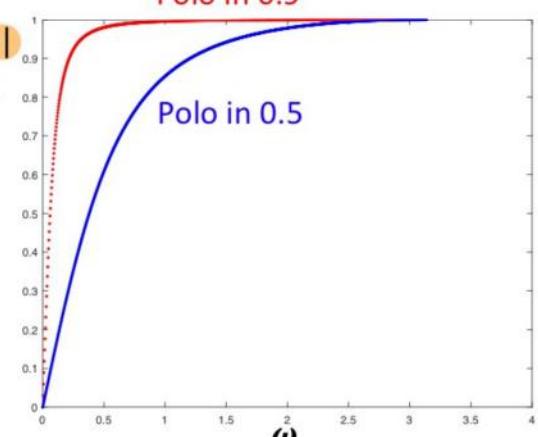
$$H(z) = G \frac{z-1}{z-0.9}$$

Per definire il guadagno, noto che per  $\omega \neq 0$ ,  $|H(\omega)| \approx 1$



Quindi imponendo  $G = 1$  fisso un guadagno  $|H(\omega)|$  unitario per frequenze diverse dal notch.  $|H(\omega)|_{\omega \neq 0} = 1$

Da notare che quanto più il polo è vicino allo zero, tanto più rapida transizione per  $|H(\omega)|$  da 0 a 1



Caso particolare di filtro passa alto

## POSSIBILE ESERCIZIO ESAME:

Dato il filtro notch  $H(z)$ , definire il guadagno posso imponendo che  $|H(\omega = \pi)| = 1$  e definire l'equazioni alle differenze del filtro

### SOLUZIONE PARTE 1

$$H(z) = G \frac{(1-z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})}$$

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = G \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} - 0.9}$$

$$\left| H(\omega) \right|_{\omega=\pi} = G \left| \frac{-2}{-1-0.9} \right| = 1 \Rightarrow G = 1.9/2 = 0.95$$

### SOLUZIONE PARTE 2

$$H(z) = 0.95 \frac{1-z^{-1}}{1-0.9z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$y(n) = 0.9y(n-1) + 0.95x(n) - 0.95x(n-1)$$

## Progetto di un filtro notch

ESEMPIO 2: eliminare la componente a  $\omega = \pi/2$

Si dovranno porre:

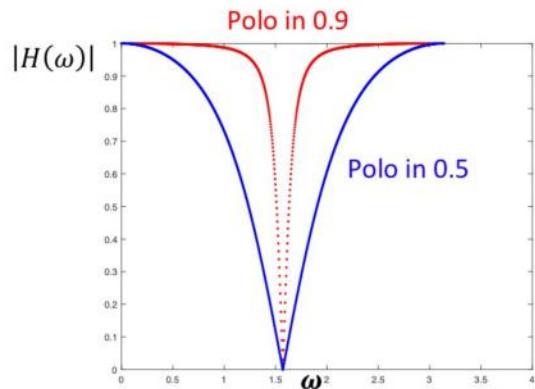
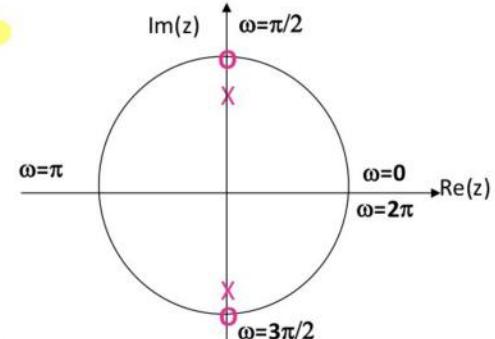
- 2 zeri in  $z = \pm j$
- 2 poli vicino agli zeri (es:  $z = \pm pj$  con  $p \sim 1 < 1$ )

$$H(z) = G \frac{(z-j)(z+j)}{(z-jp)(z+jp)} = \frac{z^2 + 1}{z^2 + p^2}$$

Per definire il guadagno, noto che per  $\omega \neq \pi/2$ ,  $|H(\omega)| \approx 1$

Quindi imponendo  $G = 1$  fisso un guadagno unitario per frequenze diverso dal notch.

Da notare che quanto più il polo è vicino allo zero, tanto più rapida è la transizione per  $|H(\omega)|$  da 0 a 1



## Progetto di un filtro notch

POSSIBILE ESERCIZIO ESAME (MATLAB):

Dato un segnale acquisito con una frequenza di campionamento di 128Hz, definire filtro notch per eliminare la frequenza di potenza a 50Hz.

### SOLUZIONE AD ALTO LIVELLO

- Devo pensare a posizionare coppie zero-polo immaginari come nel caso precedente.
- Per prima cosa devo trovare il valore di  $\omega$  corrispondente alla frequenza da eliminare (Nel esercizio 128:  $2\pi = 50$ :  $\omega$ )
- Posiziono gli zeri sul cerchio di raggio unitario di angolo  $\pm\omega$  e trovo i valori corrispondenti di  $z = e^{\pm j\omega}$
- Posiziono i poli vicino agli zeri come  $z = pe^{\pm j\omega}$  con  $p \sim 1 < 1$  (esempio  $p = 0.9$ )
- Fisso un guadagno unitario perché per  $\omega \neq$  frequenza Notch,  $|H(\omega)| \approx 1$

# FILTRI NOTEVOLI

## • media mobile

### FILTRI NOTEVOLI: filtro media mobile

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)$$

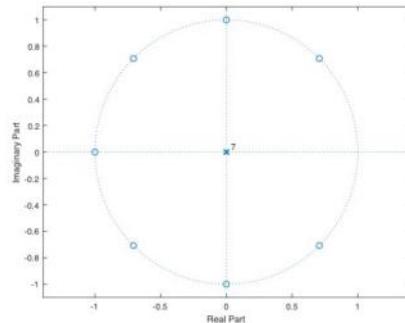


Corrisponde a filtro passa-basso con

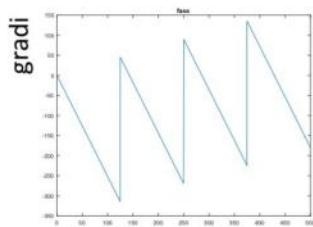
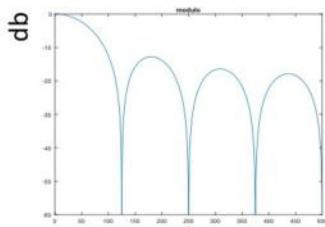
- N-1 zeri, equi-distribuiti sul cerchio di raggio unitario
- N-1 poli nell'origine

CASO PRATICO con N=8

$$y(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 x(n-k)$$



Implementazione per Fc = 1000Hz



## • filtro derivativo

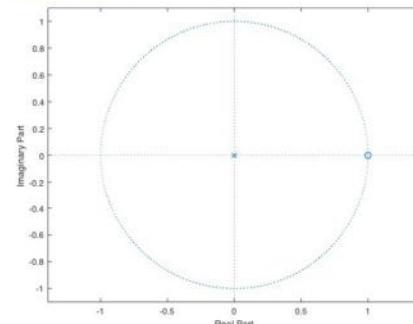
### FILTRI NOTEVOLI: filtro derivativo

$$y(n) = \frac{1}{T} [x(n) - x(n-1)]$$

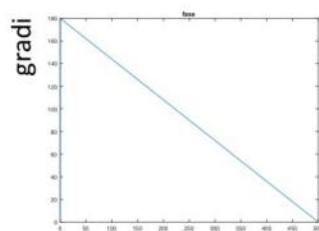
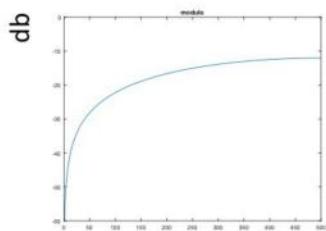


Corrisponde a filtro passa-alto con  $H(z) = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$

- Zero in  $z=1$
- Polo in  $z=0$



Implementazione per Fc = 1000Hz



## FILTRI IN SERIE

### FILTRI NOTEVOLI: filtro differenza centrale (di tre punti)

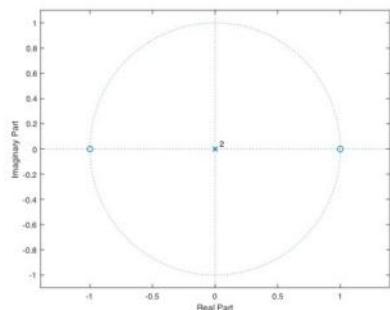
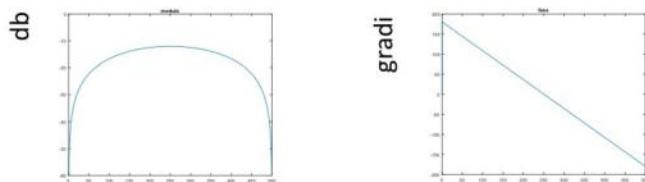
IDEA: Combinare un filtro a media mobile su due punti e un filtro derivativo (in serie)

La funzione di trasferimento è il prodotto delle funzioni di trasferimento

$$H(z) = H(z)_{Media} \cdot H(z)_{Derivativo} = \frac{1}{2} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{1}{T} \frac{z+1}{z}$$

Equivale a  $y(n) = \frac{1}{2T} [x(n) - x(n-2)]$

Implementazione per  $F_c = 1000\text{Hz}$

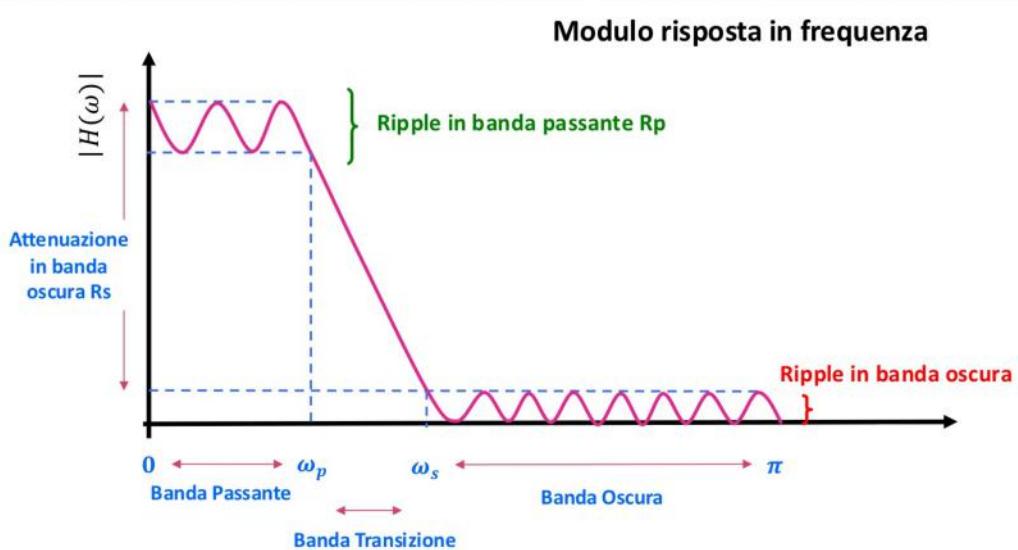


## • FILTRI IDEALI vs REALI

### FILTRI IDEALI

- modulo unitario per le frequenze da mantenere
- modulo zero per quelle da rimuovere
- nessuna modulazione di fase (distorsione / ritardo tra freq diverse)

### FILTRI REALI



nei analogici esistono tecniche analitiche per determinare filtri a partire da specifiche su  $W_p$ ,  $W_s$ , e sui ripple tollerati in banda passante e in banda oscura

- Butterworth

monotona sia in banda passante che banda oscura

> **caratteristiche** risposta in ampiezza monotona

approssima il filtro ideale con una funzione monotona in altezza

l'approssimazione migliora all'aumentare del grado di complessità N

$$\Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

$[B, A] = butter(N, W_n)$

↳ denominator  
↳ numerator  
↳ cutoff frequency  
 $W_n \in [0, 1]$   $f_{taglio} = W_n \frac{f_c}{2}$

**butterord(...)** finds N given specifics

- Optional 'high', 'low' arguments (highpass/lowpass)
- $W_n$  can be length 2 vect  
⇒ passband  
Optional 'stop' argument

- Chebyshov

ripple uniforme in banda passante e monotona in banda oscura (tipo 1) o viceversa (tipo 2)

$[B, A] = cheby1(N, R, W_n)$

↳ denominator  
↳ numerator  
peak-to-peak dB  
in passband  
↳ cutoff frequency  
 $W_n \in [0, 1]$   $f_{taglio} = W_n \frac{f_c}{2}$

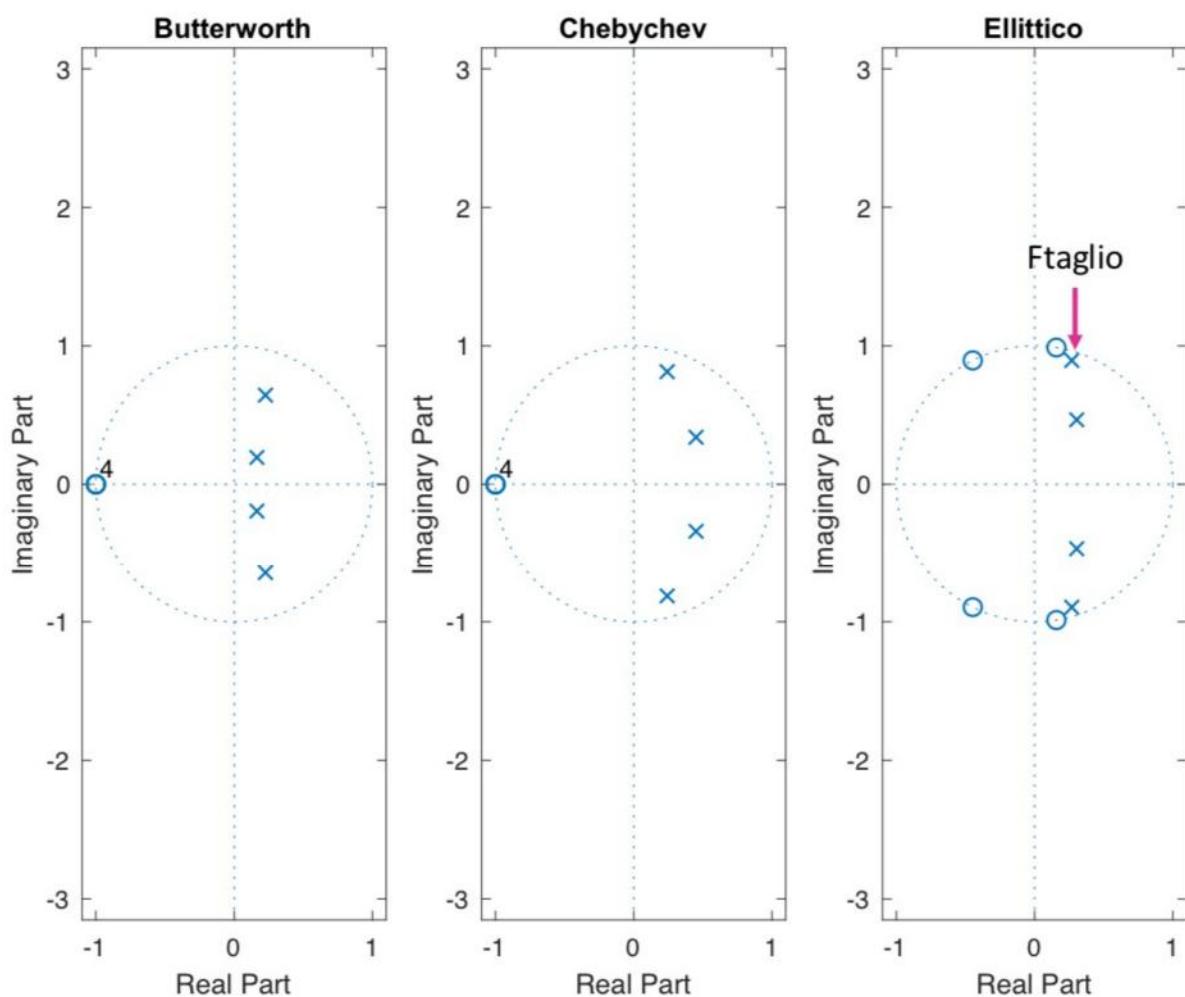
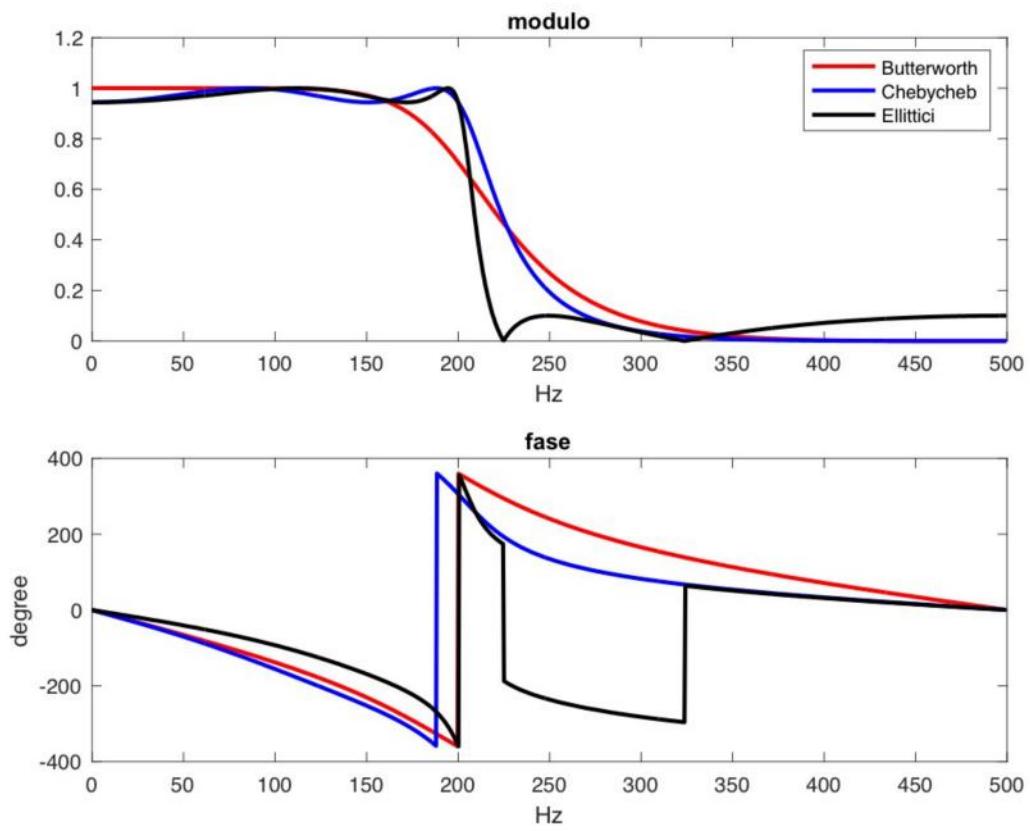
- Ellittici

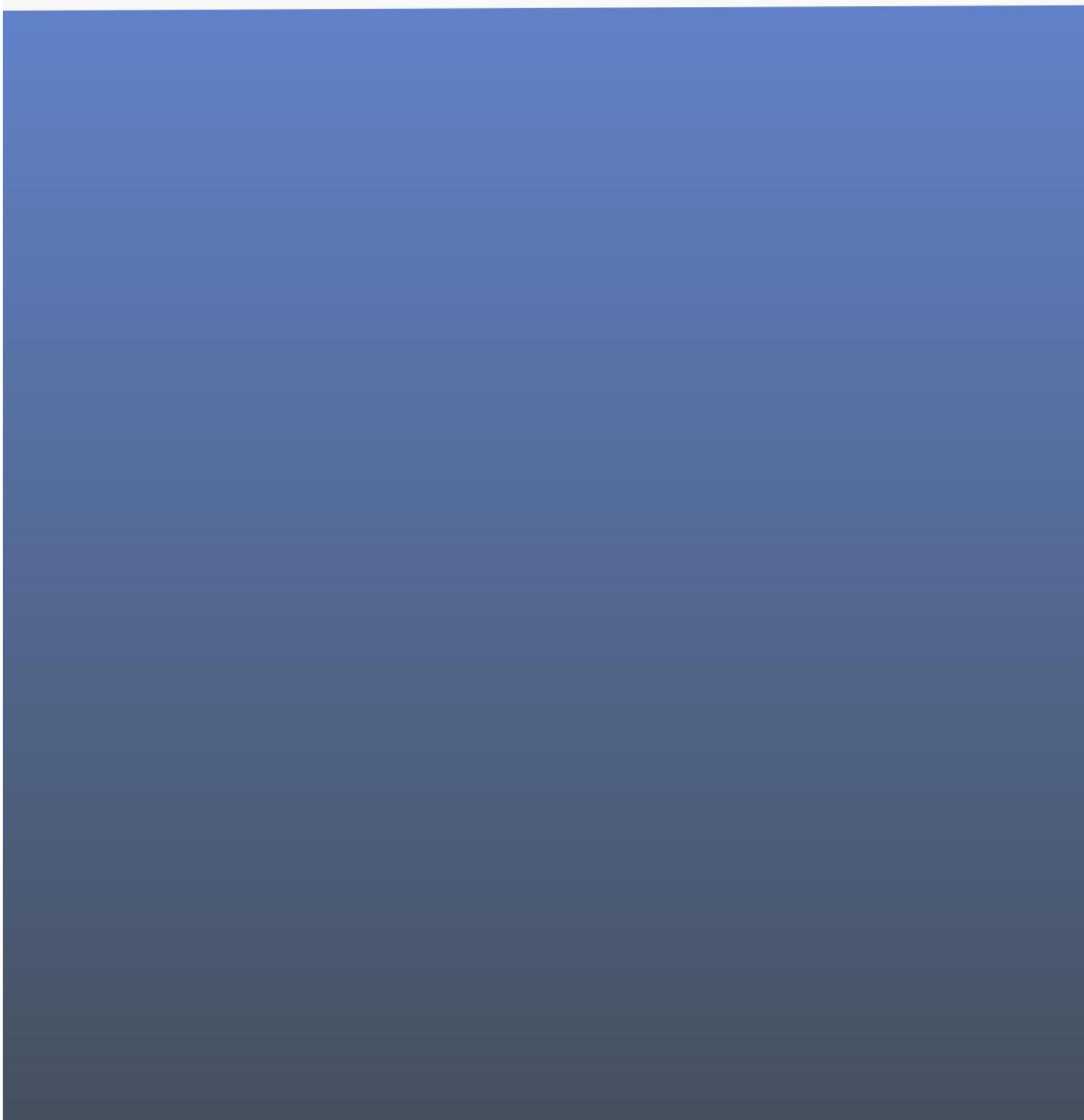
ripple sia in banda passante che banda oscura

$[B, A] = ellip(N, R_p, R_s, W_n)$

↳ denominator  
↳ numerator  
peak-to-peak dB  
in passband  
minimum stopband attenuation dB  
↳ cutoff frequency  
 $W_n \in [0, 1]$   $f_{taglio} = W_n \frac{f_c}{2}$

Caso passa basso, Fc=1000 Hz, Ftaglio=200 Hz, Rp = 0.5, Rs = 20, N=4





load filename

xlsread ('filename') per excel

readmatrix ('filename') per excel, csv, txt, ...

importdata ('filename')

### Quantizzazione

- quantizzazione per truncamento

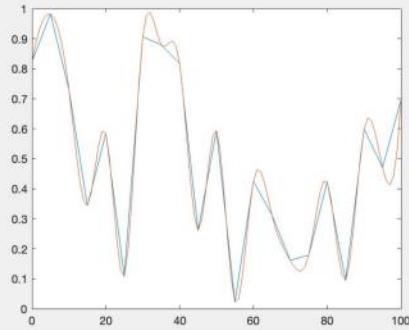
$$y_{trunc} = q \cdot sign(y) \cdot \min \left\{ \left| fix \left( \frac{y}{q} \right) \right|, \frac{N_{livelli} - 1}{2} \right\}$$

- quantizzazione per arrotondamento

$$y_{arr} = q \cdot sign(y) \cdot \min \left\{ \left| round \left( \frac{y}{q} \right) \right|, \frac{N_{livelli} - 1}{2} \right\}$$

- interpolazione  $y_i = interp1(x, y, x_i, \underline{\text{metodo}})$

```
campioni = 100  
tempo = 30 % secondi  
Fc = 5 % campioni / secondo  
  
t = 0:5:100;  
a = rand(1, length(t));  
  
t2 = 0:1:100;  
ai = interp1(t, a, t2, "spline");  
  
plot(t, a)  
hold on  
plot(t2, ai)
```



↳ linear, spline, cubic  
pchip, nearest

- convoluzione

$$\underline{y = conv(x, h)}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) = x * h(n)$$

Filtro nel tempo

↳ coeff AR [1, a<sub>1</sub>, ..., a<sub>N</sub>]

- eq alle differenze

$$y = filter(B, A, X)$$

↳ coeff MA [b<sub>0</sub>, ..., b<sub>M</sub>]

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

es  $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2)$

$$B = [1, 1, 1] \quad A = [1]$$

- H(z) da poli e zeri

$$b = poly(z) \quad z = poly(p)$$

$$z = roots(b)$$

↳ inverso di poly

$$[H, F] = freqz(b, a, N_p, F_c)$$

↳ numero pti su cui viene rappresentato H(z)  
per convenzione 2098

modulo di  $H(z) \rightarrow \text{abs}(H)$   $20 * \log_{10}(\text{abs}(H))$  [dB]

fase di  $H(z) \rightarrow \text{angle}(H)$  [rad]  $\text{angle}(H) * 360 / (2 * \pi)$  [ $^{\circ}$ ]

- **disegnare poli e zeri**  $\text{zplane}(z, p)$  con vettori colonna  
 $\text{zplane}(b, a)$  con vettori riga

- **guadagno**  $\text{polyval}(b, x) \Rightarrow$  valuta polinomio b in x

$G = \text{polyval}(b, z0) / \text{polyval}(a, z0);$  % Valore di  $H(z)$  in  $z0$  ( $\omega_0$ )

$b = b * (1/G);$  % Normalizziamo polinomio numeratore

$[H, F] = \text{freqz}(b, a, Np, Fc);$  % Troviamo  $H$  tale che  $|H(z0)|=1$

- **cross correlazione**  $[r, \text{lags}] = \xrightarrow{\text{value}} \text{xcorr}(x, y, \text{'coeff'})$   
 $\xrightarrow{\text{offset expressed in indexes}}$

$\text{time\_lags} = \text{linspace}(-\text{max\_time}, \text{max\_time}, \text{length(lags)})$

$\xrightarrow{\text{offset expressed in time}}$

$\text{circshift} \rightarrow$  shift circolare