

Fondamenti di automatica

August 5, 2023

Contents

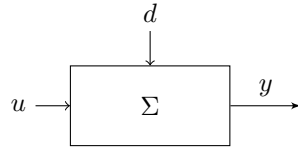
1 Sistemi	4
1.1 Definizione di problema di controllo	4
1.2 Modelli matematici	4
1.2.1 Feedback o retroazione	4
1.2.2 Modelli di stato	4
1.2.3 Sistema lineare tempo invariante LTI	5
1.3 Linearizzazione	5
1.3.1 Punti di equilibrio	5
1.3.2 Linearizzazione attorno al punto di equilibrio	6
2 Richiami di algebra lineare	8
2.1 Inversa di una matrice	9
2.2 Indice di un autovalore	9
2.3 Esponenziale di una matrice	9
3 Analisi dei sistemi lineari	11
3.1 Teorema di sovrapposizione degli effetti	11
3.2 Evoluzione libera	11
3.3 Evoluzione forzata	12
3.4 Analisi di $W(s)$	12
3.4.1 Funzioni razionali	13
3.5 Stabilità	13
3.5.1 Stabilità dei sistemi lineari	14
3.5.2 Stabilità sistemi linearizzati	14
3.5.3 Stabilità BIBO	15
3.6 Criterio di Cartesio	15
4 Diagrammi a blocchi	16
4.1 Serie	16
4.2 Parallelo	16
4.3 Retroazione negativa o Feedback	16
4.4 Analisi delle interconnessioni	17
4.5 Schema prototipico di controllo	17
5 Risposta indiciale (o al gradino)	19
5.1 Uscita indiciale a regime	19
5.2 Transitorio di $y(t)$	19
5.3 Risposta indiciale dei sistemi del primo ordine	21
5.3.1 Effetto di uno zero per un sistema di primo ordine	22
5.4 Sistemi del secondo ordine	23
5.5 Caratteristiche della risposta indiciale	24
5.5.1 Effetto degli zeri	25
5.5.2 Effetto di poli addizionali veloci	25
5.6 Criterio di Routh (stabilità)	25
5.6.1 Tabella di Routh	26
5.6.2 Criterio di Routh	26
5.6.3 Margine di stabilità	26
6 Tipo di un sistema di controllo	27
6.1 Segnali canonici	27
6.2 Definizione di tipo	27
6.3 Errore a regime di segnali a canonici	28
6.4 Risposta in frequenza	29

7	Luogo delle radici	31
7.1	Caratteristiche dei luoghi	32
7.1.1	Prima regola	32
7.1.2	Seconda regola	33
7.1.3	Terza regola	33
7.2	Punti multipli	33
7.3	Rami nei pressi dei luoghi multipli	34
7.4	Small gain theorem e high gain stabilization	34
7.5	Progetto di un controllore con il luogo delle radici	34
8	Reiezione dei disturbi sinusoidali	36
9	Controllo proporzionale-integrativo-derivativo	37
9.1	Puro proporzionale	37
9.2	Integrativo	38
9.3	Derivativo	38
9.4	Steady state error	38
9.5	Proporzionale + integrativo	38
9.6	Aggiunta di azione derivativa	38
9.7	Metodi di taratura automatica dei controllori PID	39
9.8	Disturbi	39
10	Progettazione di un controllore in frequenza	40
10.1	Diagrammi di Boode	40
10.1.1	Funzioni elementari	42
10.2	Diagramma e criterio di Nyquist	44
10.3	Criterio di Nyquist	45
10.3.1	Principio dell'argomento	45
10.3.2	Criterio di Nyquist enunciato	46
10.3.3	Ipotesi	46
10.4	Margine di robustezza	46
10.5	Margine di guadagno	46
10.6	Margine di fase	47
10.7	Criterio di Bode (stabilità in catena chiusa)	47
10.8	Sintesi in frequenza	48
10.8.1	Specifiche in frequenza	48
10.8.2	Indicazioni operative sulla sintesi in frequenza	49
10.9	Reti standard	49

1 Sistemi

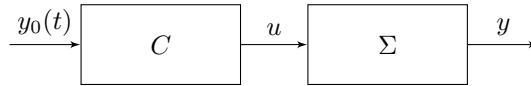
1.1 Definizione di problema di controllo

Consideriamo un sistema fisico con al suo interno 3 tipi di funzioni del tempo.



1. $y(t)$:= variabile in uscita o controllata a cui si vuole imporre un certo andamento;
2. $u(t)$:= variabile di ingresso o di controllo che è possibile manipolare;
3. $d(t)$:= variabile di disturbo che è un altro ingresso che non è possibile manipolare;

Definiamo **problema di controllo** la scelta dell'andamento di $u(t)$ in modo che $y(t)$ abbia un andamento quanto più simile ad un andamento $y_0(t)$ il più possibile indipendente da $d(t)$. Se il progetto di $u(t)$ viene fatto in maniera automatica si parla di **controllo automatico**:



Dove C è detto **controllore**. Le variabili di un sistema fisico le scegliamo noi se ingresso o in uscita, l'obiettivo è progettare C .

Definizione 1.1 (problema di controllo) Se $y_0(t)$ è uguale ad una costante allora si definisce problema di controllo.

Definizione 1.2 (problema di asservimento) Se $y_0(t)$ è uguale ad una variabile allora si definisce problema di asservimento.

1.2 Modelli matematici

Abbiamo bisogno di un modello matematico che legghi $u(t)$ e $y(t)$. Considerazioni sul modello matematico:

1. Il modello matematico è un astrazione della realtà, in quanti si considerano solo le caratteristiche di interesse;
2. Il modello matematico è un approssimazione della realtà,

Per trovare il modello si procede in due modi:

1. Dall'equazioni della fisica;
2. Dai dati;

1.2.1 Feedback o retroazione

Un esemoio è un sensore che percepisce l'uscita e regola l'ingresso. Prende il nome di strategia di Feedback o retroazione o controllore a catena chiusa o controllo ad anello chiuso. Il vantaggio è che funzione anche se ho errori o anche se il sistema è molto grezzo.

1.2.2 Modelli di stato

Sono una particolare classe di modelli, che utilizza variabili di stato, tale che un modello matematico si può rappresentare:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad x(0) = x_0$$

Dove:

- $\dot{x} = \frac{\partial}{\partial t}x(t)$ e $x(t) \in \mathbb{R}^n$;
- $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1$;
- $h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h \in C^1$;

Definizione 1.3 Definiamo l'ordine del sistema con n .

Proprietà 1.1 (Proprietà di separazione) $x(t)$ riassume tutta l'informazione passata del sistema necessaria e sufficiente a calcolare l'evoluzione del sistema $x(s)$ e $y(s)$ per ogni $s \geq t$.

La scelta delle variabili di stato deve essere fatta in modo da soddisfare il principio di separazione. Ci sono delle regole generali per dei casi specifici:

- Circuiti elettrici: tensioni ai capi dei condensatori e corrente ai capi degli induttori;
- Sistemi meccanici: posizione e velocità di tutte le masse che si muovono;
- Sistemi termici: temperature delle parti coinvolte;
- Sistemi idraulici: quantità di liquido accumulate;

1.2.3 Sistema lineare tempo invariante LTI

Definizione 1.4 (Sistema lineare) Un sistema è un lineare se f e h sono funzioni lineari di x, u .

Osservazione 1.1 f è lineare $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n : f(x, u) = Ax + bu$

Osservazione 1.2 h è lineare $\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^{1 \times n}, d \in \mathbb{R} : h(x, u) = cx + du$

Allora Σ è lineare:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

1.3 Linearizzazione

Vogliamo approssimare un sistema Σ non lineare con un sistema lineare. Come approssimando una funzione in un punto con la sua retta tangente, approssimiamo il sistema con un sistema lineare attorno ai punti di equilibrio.

1.3.1 Punti di equilibrio

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

Supponiamo $u(t) = \bar{u}$ costante.

Definizione 1.5 \bar{x} si dice **stato di equilibrio** di Σ corrispondente all'ingresso \bar{u} se la soluzione:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(0) = \bar{x} \end{cases}$$

è $x(t) = \bar{x}, \forall t \geq 0$.

Sostanzialmente il sistema alimentato da un ingresso costante il sistema non cambia di stato. In tal caso (\bar{x}, \bar{u}) si dice **punto di equilibrio** di Σ e $\bar{y} = h(\bar{x}, \bar{u})$ è **uscita di equilibrio**. Per trovare gli stati di equilibrio:

$$\begin{array}{c} \dot{x} = 0 = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \updownarrow \\ \bar{x} \text{ è uno stato di eq. di } \Sigma \end{array}$$

Quindi ci possono essere più punti di equilibrio.

Osservazione 1.3 Gli stati di equilibrio dipendono solo da f .

Nel caso di un sistema lineare:

$$A\bar{x} = -b\bar{u}$$

1. $\det A \neq 0$:

$$\bar{x} = -A^{-1}b\bar{u}$$

2. $\det A = 0$:

$$\exists \text{ sol. } A\bar{x} = -b\bar{u} \Leftrightarrow b\bar{u} \in \text{Im}[A]$$

Esiste un caso che $\forall A, b, b\bar{u} \in \text{Im}[A] : b\bar{u} = 0 \implies \bar{x} = 0$. Allora la coppia $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ è sempre un punto di equilibrio per ogni sistema lineare.

1.3.2 Linearizzazione attorno al punto di equilibrio

Ora vogliamo linearizzare Σ attorno a (\bar{x}, \bar{u}) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

Definiamo:

$$\delta x = x(t) - \bar{x}, \quad \delta u = u(t) - \bar{u}, \quad \delta y = y(t) - \bar{y}$$

Allora:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}(x(t) - \bar{x}) = \delta\dot{x} = f(x(t) - \bar{x}, u(t) - \bar{u})$$

Svilluppando in serie:

$$\delta\dot{x} = f(x(t) - \bar{x}, u(t) - \bar{u}) = \underbrace{f(\bar{x}, \bar{u})}_0 + \frac{\partial}{\partial x}f \Big|_{x=\bar{x}}^{u=\bar{u}} \delta x + \frac{\partial}{\partial u}f \Big|_{x=\bar{x}}^{u=\bar{u}} \delta u + O(t)$$

Dove:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}f_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}f_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}f_n \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial u}f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}f_1 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u}f_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Allora denominando rispettivamente A e b , otteniamo:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + b\delta u + O(t)$$

Se i δx e δu sono piccoli:

$$\delta\dot{x} = A\delta x + b\delta u$$

Che è un sistema lineare rispetto agli discostamenti.

Analogamente per l'uscita:

$$y = h(x, u) \implies \delta y = \underbrace{h(\bar{x}, \bar{u}) - \bar{y}}_0 + \frac{\partial}{\partial x}h \Big|_{x=\bar{x}}^{u=\bar{u}} \delta x + \frac{\partial}{\partial u}h \Big|_{x=\bar{x}}^{u=\bar{u}} \delta u + O(t)$$

Dove:

$$\frac{\partial}{\partial x}h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}h & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}h \end{bmatrix}$$

Allora denominando rispettivamente c e d , otteniamo:

$$\delta y = c\delta x + d\delta u + O(t)$$

Se i δx e δu sono piccoli:

$$\delta y = c\delta x + d\delta u$$

In conclusione gli scostamenti rispetto ai segnali di equilibrio rispettano una relazione che per scostamenti piccolo degli stati e dell'ingresso, il sistema può essere approssimato dal sistema lineare:

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A\delta x + b\delta u \\ \delta y = c\delta x + d\delta u \end{cases}$$

2 Richiami di algebra lineare

Definizione 2.1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ si dice *autovalore* di A se esiste se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$Av = \lambda v$$

In tal caso λ si dice *autovalore* di A relativo all'autovettore.

Definizione 2.2 (Spettro) Lo spettro di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è l'insieme dei suoi autovalori:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ autovalore di } A\}$$

Quindi se $\lambda \in \sigma(A)$ allora ¹:

$$\exists v \neq 0 : Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ è singolare}$$

Quindi:

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$$

Definizione 2.3 Si dice *polinomio caratteristico*:

$$\pi_A(s) = \det(sI - A)$$

Osservazione 2.1 $\pi_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(A)$

Osservazione 2.2 $\pi_A(s)$ è un polinomio **monico** di grado n , cioè:

$$\pi_A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$$

Gli autovalori di A sono tutti e soli gli zeri di $\pi_A(s)$.

Definizione 2.4 (Molteplicità) Sia λ uno zero di $\pi_A(s)$. Si dice *molteplicità* di λ come zero di $\pi_A(s)$ il massimo numero μ tale che:

$$\pi_A(s) = (s - \lambda)^\mu P_1(s)$$

Dove $P_1(s)$ è un polinomio.

Definizione 2.5 (Molteplicità algebrica) Sia $\lambda \in \sigma(A)$. Si dice *molteplicità algebrica* $ma(\lambda)$ di λ come autovalore di A la molteplicità di λ come zero di $\pi_A(s)$.

Definizione 2.6 (Molteplicità geometrica) Sia $\lambda \in \sigma(A)$, si dice *molteplicità geometrica*:

$$mg(\lambda) = \dim(\ker(\lambda I - A))$$

Data una matrice A di ordine n e un suo autovalore, la molteplicità geometrica è la dimensione dell'autospazio relativo all'autovettore, cioè il massimo numero di elementi di una qualsiasi base dell'autospazio relativo all'autovalore.

Teorema 2.1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sia $\lambda \in \sigma(A)$, allora:

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda) \leq n$$

Teorema 2.2 Nell'ipotesi del teorema 2.1:

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} ma(\lambda) = n$$

Osservazione 2.3 Se A ha n autovalori distinti:

$$ma(\lambda) = mg(\lambda)$$

¹Una matrice si dice singolare se ha determinante uguale a zero

Definizione 2.7 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si dice diagonalizzabile se esiste $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $\det T \neq 0$:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dove $\lambda_i \in \sigma(A)$.

Teorema 2.3 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ allora A è diagonalizzabile se e solo se:

$$ma(\lambda) = mg(\lambda), \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Teorema 2.4 Sia $P(s)$ un polinomio a coefficienti reali allora si $P(\lambda) = 0$ con $\lambda \in \mathbb{C} \implies P(\bar{\lambda}) = 0$

Corollario 2.4.1 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reale allora:

$$\lambda \in \sigma(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma(A)$$

2.1 Inversa di una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, allora:

$$A^{-1} = \frac{A_{dj}[A]}{\det A}$$

Dove definiamo la matrice aggiunta:

$$[A_{dj}[A]]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det A_{-j,-i}$$

Con i pedici si indicano le coordinate nel caso siano positive, altrimenti se negativi si indica la riga e la colonna cancellata.

Un esempio:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \implies A_{dj}[A] = \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$$

2.2 Indice di un autovalore

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A) \implies \dim(\ker(\lambda I - A)) \leq ma(\lambda)$.

Teorema 2.5 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$. Allora $\exists I(\lambda) \in \{1, 2, \dots, n\}$, tale che:

$$\begin{aligned} \dim(\ker(\lambda I - A)^q) &< ma(\lambda), \forall q < I(\lambda) \\ \dim(\ker(\lambda I - A)^q) &= ma(\lambda), \forall q \geq I(\lambda) \end{aligned}$$

Tale $I(\lambda)$ si dice **indice** di λ .

Osservazione 2.4 $\lambda \in \sigma(A) \in \mathbb{C} \implies I(\lambda) = I(\bar{\lambda})$

2.3 Esponenziale di una matrice

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{R}$, allora definiamo:

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

$e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e ogni elemento della sua matrice è funzione del tempo t . Queste funzioni sono del tipo:

- Nel caso A sia diagonalizzabile:

Teorema 2.6 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalizzabile. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, gli autovalori reali e $\sigma_1 \pm j\omega_1, \dots, \sigma_c \pm j\omega_c$ gli autovalori complessi di A . Sia:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_r \cup \mathcal{M}_c$$

Dove:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r &:= \{e^{\lambda_i t} : i = 1, \dots, r\} \\ \mathcal{M}_c &:= \{e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i), e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i) : i = 1, \dots, c\}\end{aligned}$$

Allora ogni elemento di e^{At} è combinazione lineare a coefficienti reali di \mathcal{M} . Inoltre per ogni funzione in \mathcal{M} esiste un elemento di e^{At} : tale funzione appare con coefficiente non nullo almeno una volta.

- Nel caso A non sia diagonalizzabile:

Teorema 2.7 Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, gli autovalori reali di A e $I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_r)$ i corrispondenti indici. Siano $\sigma_1 \pm j\omega_1, \dots, \sigma_c \pm j\omega_c$ gli autovalori complessi di A e $I(\sigma_1 \pm j\omega_1), \dots, I(\sigma_c \pm j\omega_c)$ i corrispondenti indici. Sia:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_r \cup \mathcal{M}_c$$

Dove ²:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_r &:= \{e^{\lambda_i t} t^a, t^{I(\lambda_i)-1} e^{\lambda_i t} : i = 1, \dots, r\} \\ \mathcal{M}_c &:= \{e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i), \dots, t^{I(\sigma_i \pm j\omega_i)-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i) : i = 1, \dots, c\}\end{aligned}$$

Allora tutti gli elementi di e^{At} sono combinazioni lineari di a coefficienti reali delle funzioni \mathcal{M} e tutte le funzioni "servono".

²La differenza rispetto al teorema 2.6 è che le funzioni sono moltiplicate per t^a con $a \in \{0, I(\lambda) - 1\}$

3 Analisi dei sistemi lineari

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, & x(0) = x_0 \\ y = cx + du \end{cases}$$

Dati x_0 e $u(t)$ voglio calcolare $x(t), y(t)$, $t \leq 0$

Teorema 3.1 Dato Σ lineare e dati x_0 e $u(t)$, $t \leq 0$ si ha:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\sigma)}bu(\sigma) d\sigma \\ y(t) &= ce^{At}x_0 + c \int_0^t e^{A(t-\sigma)}bu(\sigma) d\sigma + du(t) \end{aligned}$$

Questo risultato ci dà la forma esplicita di $x(t)$ e $y(t)$ in funzione delle cause che determinano l'evoluzione del sistema. Gli effetti ovvero x, y dipendono linearmente dalle cause x_0, u che li ha generati.

3.1 Teorema di sovrapposizione degli effetti

Il teorema degli effetti può essere formulato:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} x'_0 \\ u'(t), t \geq 0 \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x'(t) \\ y'(t) \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} x''_0 \\ u''(t), t \geq 0 \end{array} \right\} &\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x''(t) \\ y''(t) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Allora:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_0 = \alpha x'_0 + \beta x''_0 \\ u(t) = \alpha u'(t) + \beta u''(t) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \alpha x' + \beta x'' \\ y = \alpha y' + \beta y'' \end{array} \right\}$$

Questo succede perchè gli effetti dipendono linearmente dalle cause, ricordando che:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\sigma)}bu(\sigma) d\sigma}_{x_f(t)}$$

Definizione 3.1 x_l è definita come evoluzione libera dello stato di Σ

Definizione 3.2 x_f è definita come evoluzione forzata dello stato di Σ

Notiamo che l'evoluzione libera dello stato è uguale all'evoluzione dello stato considerando la variabile di ingresso nulla e che l'evoluzione forzata dello stato dipende dall'ingresso e considerando le condizioni iniziali nulle.

In modo analogo:

$$y(t) = \underbrace{ce^{At}x_0}_{y_l(t)} + \underbrace{c \int_0^t e^{A(t-\sigma)}bu(\sigma) d\sigma}_{y_f(t)} + du(t)$$

3.2 Evoluzione libera

L'evoluzione libera dello stato è definita come:

$$x_l = e^{At}x_0$$

Allora la componente i -esima dell'evoluzione libera dello stato $[x_l]_i$ è combinazione lineare della i -esima riga di e^{At} . e^{At} è formata da combinazioni lineari di \mathcal{M} , allora $[x_l]_i$ è combinazione lineare di \mathcal{M}

L'uscita libera del sistema è definita come:

$$y_l(t) = ce^{At}x_0 = cx_l$$

Allora anche l'uscita libera del sistema è combinazione lineare di \mathcal{M} .

Definizione 3.3 (Modi) Le funzioni \mathcal{M} si dicono **modi** del sistema Σ .

Osservazione 3.1 I modi dipendono solo da A .

3.3 Evoluzione forzata

Consideriamo le trasformate delle variabili ³:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] \quad Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] \quad X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$$

Se abbiamo condizioni iniziali nulle $x(0) = 0$ allora da $\dot{x} = Ax + bu$ otteniamo x_f . Allora applicando Laplace:

$$sX(s) = AX(s) + bU(s) \implies (sI - A)X(s) = bU(s) \implies X_f(s) = (sI - A)^{-1} bU(s)$$

Quindi antitrasformando:

$$\begin{aligned} x_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} bU(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1} b] * \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = \\ &= e^{At} * u(t) \end{aligned}$$

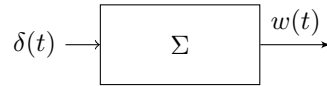
Per l'uscita forzata:

$$y_f(t) = cx_f(t) + du(t) \implies Y_f(s) = cX_f(s) + dU(s) \implies Y_f(s) = \underbrace{[c(sI - A)^{-1} b + d]}_{W(s)} U(s)$$

Definizione 3.4 (Funzione di trasferimento) $W(s) = c(sI - A)^{-1} b + d$ si dice *funzione di trasferimento del sistema*.

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] * \mathcal{L}^{-1}[U(s)] = w(t) * u(t)$$

$w(t)$ è la risposta impulsiva del sistema.



Notiamo che:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \mathcal{L}^{-1}[c(sI - A)^{-1} b + d] = c\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] b + d\mathcal{L}^{-1}[1] = ce^{At}b + d\delta(t)$$

Definizione 3.5 $w(t)$ si dice **strettamente propria** nel caso $d = 0$.

Osservazione 3.2 Nel caso 3.5 $w(t)$ è combinazione lineare dei modi del sistema.

3.4 Analisi di $W(s)$

$W(s)$ è uno scalare:

$$W(s) = c(sI - A)^{-1} b + d$$

Dove:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{A_{dj} [sI - A]}{\det(sI - A)} = \frac{A_{dj} [sI - A]}{\pi_A(s)}$$

$$[A_{dj} [sI - A]]_{ij} = \underbrace{(-1)^{i+j} \det[sI - A]_{-j, -i}}_{\text{polinomio di grado } \leq n-1}$$

$$c(sI - A)^{-1} b = \frac{cA_{dj} [sI - A] b}{\pi_A(s)} = \frac{\text{com. lin. di } A_{dj}}{\pi_A(s)} = \frac{\text{polinomio di grado } \leq n}{\pi_A(s)} = \frac{N(s)}{\pi_A(s)}$$

Quindi la funzione di trasferimento è:

$$W(s) = \frac{N(s)}{\pi_A(s)} + d = \frac{N(s) + d\pi_A(s)}{\pi_A(s)}$$

Dove $N(s) + d\pi_A(s)$ è un polinomio di grado $\leq n$. $W(s)$ è **propria** se il suo denominatore ha il grado maggiore o uguale del suo denominatore. $W(s)$ è **strettamente propria** $\Leftrightarrow d = 0$.

³ $x(t)$ è un vettore e intendiamo con la trasformata di x il vettore con componenti le trasformate delle componenti di x .

3.4.1 Funzioni razionali

Per noi le funzioni razionali sono classi di equivalenza, cioè:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)P(s)}{D(s)P(s)} \quad \forall P(s) \neq 0$$

Definizione 3.6 (Rappresentazione coprime) $W(s)$ è una rappresentazione coprime o minima di $W(s)$ se $N(s)$ e $D(s)$ non hanno zeri comuni.

Definizione 3.7 (Zero) z si dice zero di $W(s)$ se annulla il numeratore di una rappresentazione coprime

Definizione 3.8 (Polo) p si dice polo di $W(s)$ se annulla il denominatore di una rappresentazione coprime

Definizione 3.9 (Grado relativo) Data $W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ si dice grado relativo di $W(s)$ il numero:

$$\text{rel deg}[W] = \text{deg}[D] - \text{deg}[N]$$

Abbiamo visto che:

$$W(s) = \frac{N(s) + d\pi_A(s)}{\pi_A(s)} \quad \text{deg}[N(s) + d\pi_A(s)] \leq \text{deg}[\pi_A(s)]$$

Quindi i poli di $W(s)$ sono:

$$\{\text{I poli di } W(s)\} \subseteq \sigma(A)$$

3.5 Stabilità

Consideriamo un sistema Σ , allora:

$$x_0, u(t) \text{ causa} \rightarrow x(t), y(t) \text{ effetto}$$

Possiamo considerare Σ un buon sistema se ad una perturbazione delle cause δ :

$$\text{causa} + \delta \rightarrow \text{effetto} + \varepsilon \approx 0$$

Il sistema è stabile se $\varepsilon \approx 0$ dovuto ad una perturbazione $\delta \approx 0$.

Consideriamo (\bar{x}, \bar{y}) punto di equilibrio di Σ . Consideriamo il seguente problema:

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}), \quad x(0) = x_0 + \Delta x$$

Sia $x_\Delta(t)$ la corrispondente soluzione.

Definizione 3.10 (Punto di equilibrio stabile) Il punto di equilibrio si dice stabile o semplicemente stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\Delta x\| \leq \delta \implies \|x_\Delta(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Definizione 3.11 (Asintoticamente stabile) Il punto di equilibrio si dice asintoticamente stabile se:

- il punto è stabile;
- $\exists \delta > 0 : \|\Delta x\| \leq \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x_\Delta(t) = \bar{x}$

Il sistema perturbato dopo un certo tempo ritorna nelle condizioni iniziali di equilibrio.

3.5.1 Stabilità dei sistemi lineari

Tutti i sistemi lineari hanno come punto di equilibrio $(0, 0)$.

Proprietà 3.1 Sia Σ lineare e (\bar{x}, \bar{u}) un suo punto di equilibrio, allora:

$$\begin{aligned}(\bar{x}, \bar{u}) \text{ stabile} &\Leftrightarrow (0, 0) \text{ stabile} \\(\bar{x}, \bar{u}) \text{ ass. stabile} &\Leftrightarrow (0, 0) \text{ ass. stabile}\end{aligned}$$

Definizione 3.12 Un sistema lineare è stabile se lo è il relativo punto di equilibrio $(0, 0)$.

Applichiamo la definizione di stabilità al punto di equilibrio $(0, 0)$:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases} \quad \bar{u} = 0, \quad x(0) = \Delta x + 0 = \Delta x \implies x_{\Delta}(t) = e^{At} \Delta x$$

Allora:

- Σ stabile $\Leftrightarrow x_{\Delta}(t)$ limitato $\Leftrightarrow e^{At}$ ha tutte funzioni limitate;
- Σ asintoticamente stabile $\implies x_{\Delta}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow e^{At}$ ha tutte funzioni che tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$;

Teorema 3.2 Il sistema:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$$

1. è stabile \Leftrightarrow tutti i modi del sistema sono funzioni limitate.
2. è asintoticamente stabile \Leftrightarrow tutti i modi del sistema sono funzioni che tendono a zero per $t \rightarrow +\infty$

Teorema 3.3 Il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \Re[\lambda] < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$.

Teorema 3.4 Il sistema è semplicemente stabile:

- $\Re[\lambda] \leq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$;
- $\Re[\lambda] = 0 \quad \lambda \in \sigma(A) \text{ e } m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

3.5.2 Stabilità sistemi linearizzati

Si consideri:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases}$$

e sia (\bar{x}, \bar{u}) punto di equilibrio. Consideriamo il sistema lineare ottenuto linearizzando Σ attorno (\bar{x}, \bar{u}) e sia A la relativa matrice di stato, allora:

1. Se $\Re[\lambda] < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \implies (\bar{x}, \bar{u})$ punto asintoticamente stabile di Σ ;
2. Se $\exists \lambda \in \sigma(A) : \Re[\lambda] > 0 \implies (\bar{x}, \bar{u})$ punto di equilibrio instabile di Σ

Osservazione 3.3 Il risultato non dice nulla nel caso in cui la parte reale di $\lambda \leq 0$.

3.5.3 Stabilità BIBO

La BIBO stabilità non riguarda le condizioni o dal punto di equilibrio, e si definisce solo per sistemi lineari.

Definizione 3.13 *Un sistema lineare si dice BIBO stabile se $\forall u(t)$ limitata la corrispondente uscita forzata è limitata.*

Teorema 3.5 *Sia dato un sistema lineare Σ e la sua funzione di trasferimento $W(s)$, allora:*

$$\Sigma \text{ BIBO stabile} \Leftrightarrow \text{tutti i poli hanno } \Re[p] < 0$$

Corollario 3.5.1 *Sia Σ lineare allora:*

$$\Sigma \text{ as. stabile} \implies \Sigma \text{ BIBO}$$

Non è detto che se il sistema è BIBO allora il sistema sia asintoticamente stabile in quanto i poli della funzione di trasferimento possono essere un sotto insieme dello spettro della matrice di stato.

3.6 Criterio di Cartesio

Sia $P(s) = s^2 + \alpha s + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

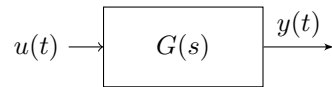
Tutti gli zeri di $P(s)$ hanno $\Re[\] < 0$ se e solo se:

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \end{cases}$$

Se $\alpha < 0$ o $\beta < 0 \implies P(s)$ ha zeri con parte reale > 0 .

4 Diagrammi a blocchi

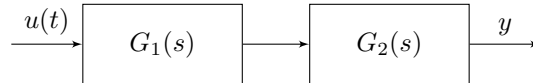
Sia $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema:



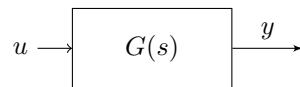
Dove $G(s)$ è un sistema lineare o linearizzato attorno un punto di equilibrio. $u(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ è l'uscita che rappresenta solo la **parte forzata**:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

4.1 Serie



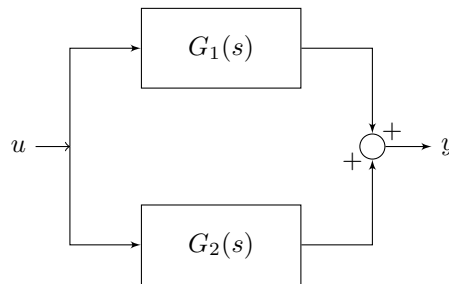
La serie di due sistemi è equivalente ad un sistema equivalente:



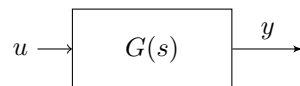
Con:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$

4.2 Parallelo



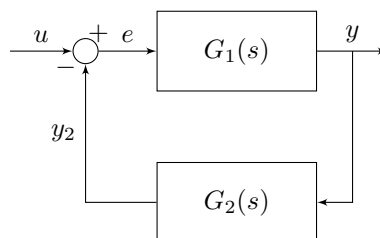
Il parallelo di due sistemi è equivalente ad un sistema equivalente:



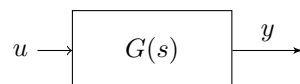
Con:

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

4.3 Retroazione negativa o Feedback



La retroazione negativa di due sistemi è equivalente ad un sistema equivalente:



Calcolo della $G(s)$:

$$Y(s) = G_1(s)E(s) = G_1(s)[U(s) - Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) - G_2(s)Y(s)] = G_1U - G_1G_2Y$$

Ricavando la Y otteniamo:

$$Y = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}U \implies G = \frac{G_1}{1 + G_1G_2}$$

Queste relazioni non tengono conto degli "effetti di carico".

4.4 Analisi delle interconnessioni

Ricordiamo:

$$\{\text{poli}\} \subseteq \sigma(A)$$

I poli determinano le dinamiche ingresso-uscita.

Sia $G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$ con N_1 e D_1 coprimi. Sia $G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)}$ con N_2 e D_2 coprimi.

- Serie:

$$G = G_1G_2 = \frac{N_1N_2}{D_1D_2}$$

Quindi:

$$\{\text{Poli di } G\} \subseteq \{\text{Poli di } G_1\} \cup \{\text{Poli di } G_2\}$$

In G non ci sono nuovi comportamenti dinamici rispetto a G_1 e G_2 .

- Parallelo:

$$G = G_1 + G_2 = \frac{N_1D_2 + N_2D_1}{D_1D_2}$$

Quindi:

$$\{\text{Poli di } G\} \subseteq \{\text{Poli di } G_1\} \cup \{\text{Poli di } G_2\}$$

In G non ci sono nuovi comportamenti dinamici rispetto a G_1 e G_2 .

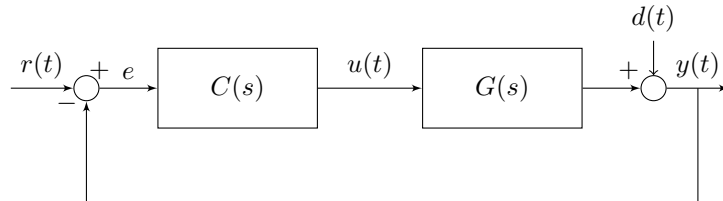
- Retroazione negativa:

$$G = \frac{G_1}{1 + G_1G_2} = \frac{N_1D_2}{D_1D_2 + N_1N_2}$$

$$\{\text{Poli di } G\} \subseteq \{\text{zeri di } D_1D_2 + N_1N_2\}$$

Abbiamo un nuovo comportamento dinamico.

4.5 Schema prototipico di controllo



- $r(t) = y_0$:= uscita desiderata o riferimento;
- $e(t) := r(t) - y(t)$ segnale di errore;
- $d(t) :=$ disturbi in uscita;

- $C(s) :=$ controllore LTI;
- $G(s) :=$ sistema da controllare;

$$Y(s) = D + GU = D + GCE = D + GC(R - Y) \implies Y = \underbrace{\frac{GC}{1+GC}}_{W(s)} R + \underbrace{\frac{1}{1+GC}}_{W_d(s)} D$$

L'uscita è dovuta da un contributo dal riferimento e da un contributo dovuto ai disturbi.

$$Y = WR + W_d D$$

Idealmente noi vorremmo (anche se non è possibile) $Y = R$ e quindi:

$$\begin{cases} W = 1 \\ W = 0 \end{cases} \implies Y = R$$

Vogliamo che W e W_d siano BIBO. Sia $CG = \frac{N}{D}$, quindi:

$$\begin{cases} W = \frac{\frac{N}{D}}{1+\frac{N}{D}} = \frac{N}{N+D} \\ W_d = \frac{1}{1+\frac{N}{D}} = \frac{D}{N+D} \end{cases}$$

Se N, D coprimi $\implies N, N+D$ coprimi.

Sia $\bar{s} : N(\bar{s}) = 0 \implies D(\bar{s}) \neq 0 \implies N(\bar{s}) + D(\bar{s}) \neq 0 \implies \bar{s}$ non è uno zero di $N+D$.

Quindi:

$$W, W_d \text{ BIBO} \Leftrightarrow N+D \text{ ha zeri a } \Re[\cdot] < 0$$

Definizione 4.1 (Hurwitz) Dato un polinomio $P(s)$ si dice di Hurwitz se tutti i suoi zeri sono a parte reale minore strettamente di zero.

C deve essere progettata tale che $N+D$ è di Hurwitz. Per avere $W = 1$ e $W_d = 0$ C dovrebbe tendere all'infinito che è una soluzione pessima. È più opportuno:

- $W(s) \approx 1$ solo per le frequenze di r ;
- $W_d(s) \approx 0$ solo per le frequenze di d ;

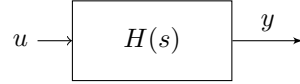
Definizione 4.2 (Funzione di sensibilità) W_d è detta funzione di sensibilità alle variazioni parametriche.

Cosideriamo una variazione di G che chiamiamo δG . Allora $\frac{\delta G}{G}$ è la variazione relativa. Variando G si ha una variazione di W che chiamiamo δW . Allora $\frac{\delta W}{W}$ è la variazione relativa. Il rapporto delle due variazioni relative ci dice quanto la variazione relativa di G influenza la variazione relativa di W possiamo scrivere come:

$$\frac{\frac{\delta G}{G}}{\frac{\delta W}{W}} = \frac{G}{W} \frac{\delta W}{\delta G} \approx \frac{G}{W} \frac{d}{dG} W = \frac{G}{W} \frac{d}{dG} \frac{CG}{1+CG} = \frac{1}{1+CG} = W_d$$

$W_d \approx 0$ garantisce poca sensibilità alle variazioni parametriche.

5 Risposta indiciale (o al gradino)



Dove, supponiamo che $H(s)$ sia BIBO:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

Consideriamo come ingresso un gradino $1(t)$, e l'uscita prende il nome di **risposta indiciale**.

Osservazione 5.1 *Caso importante è quando $H = W = \frac{CG}{1+CG}$:*

$$U(s) = \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \implies Y(s) = \frac{H(s)}{s} \implies y(t) = \int_0^t h(t) dt$$

Ipotesi 5.0.1 $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ con N, D compatti e $\deg D \geq \deg N$

Quindi:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{N(s)}{sD(s)}\right]$$

Ipotesi 5.0.2 H BIBO stabile $\Leftrightarrow D$ di Hurwitz.

Abbiamo:

$$Y = \frac{H(s)}{s}$$

Vogliamo rispondere alle seguenti domande:

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$;
2. Transitorio di $y(t)$;

5.1 Uscita indiciale a regime

Teorema 5.1 (Teorema valore finale) *Se $Y(s)$ è razionale propria che non ha poli in:*

$$\{s \in \mathbb{C} : \Re[s] > 0\} \cup \{s \in \mathbb{C} : \Re[s] = 0, s \neq 0\}$$

Allora:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

Allora considerando come ingresso un gradino abbiamo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = H(0)$$

$H(0)$ è finito in quanto nell'origine del piano complesso non ci sono poli perchè $H(s)$ è BIBO.

5.2 Transitorio di $y(t)$

Riscriviamo l'uscita come:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{N(s)}{sD(s)} - \frac{H(0)}{s} + \frac{H(0)}{s} = \frac{H(0)}{s} + \frac{N(s) - H(0)D(s)}{sD(s)} = \frac{H(0)}{s} + \frac{N(s) - \frac{N(0)}{D(0)}D(s)}{sD(s)} = \\ &= \frac{H(0)}{s} + \frac{N_1(s)}{sD(s)} \end{aligned}$$

Osservazione 5.2 $N_1(s) = 0$ per costruzione.

Allora posso scrivere $N_1(s) = sN_2(s)$:

$$Y(s) = \frac{H(0)}{s} + \frac{N_2(s)}{D(s)} \quad \deg N_1 \leq n \implies \deg N_2 \leq n - 1$$

$\frac{N_2}{D}$ è strettamente propria e BIBO stabile.

Sia $D(s) = \prod_{k=1}^n (s - s_k)$ con $\Re[s_k] < 0$

Ipotesi 5.2.1 Considerando $D(s)$ allora $s_k \neq s_i \forall i \neq k$.

Siccome non ci sono poli multipli posso scrivere $\frac{N_2}{D}$ in fratti semplici e quindi:

$$Y(s) = \frac{H(0)}{s} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s - s_k}$$

Allora:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = H(0)1(t) + \sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} 1(t)$$

Dove $A_k \in \mathbb{C}$ ⁴ e $s_k \in \mathbb{C}$, $\Re[s_k] < 0 \forall k \in \{1, \dots, n\}$. Quindi:

$$A_k e^{s_k t} \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Infatti:

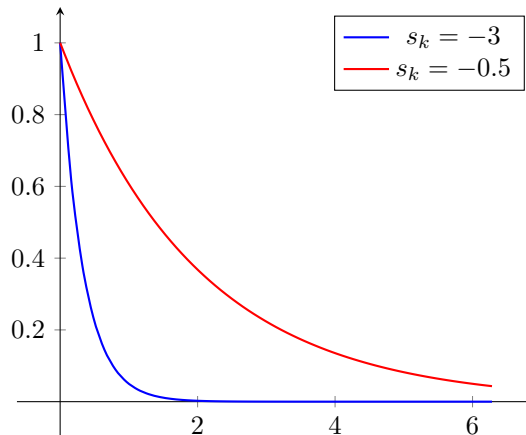
- Se $s_k \in \mathbb{R}$ e $s_k < 0$ si ha $\underbrace{A_k}_{\in \mathbb{R}} e^{s_k t} \rightarrow 0$;
- Se $s_k = \sigma_k + j\omega_k$ con $\sigma_k < 0$ considerando $A_k = 1$ otteniamo:

$$A_k e^{s_k t} + \bar{A}_k e^{\bar{s}_k t} = 2e^{\sigma_k t} [\cos(\omega_k t) + \sin(\omega_k t)] \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0$$

$\Re[s_k]$ regola la velocità con cui il transitorio tende a zero. Più precisamente la velocità con cui si esaurisce il transitorio dipende dal polo più vicino all'asse immaginario.

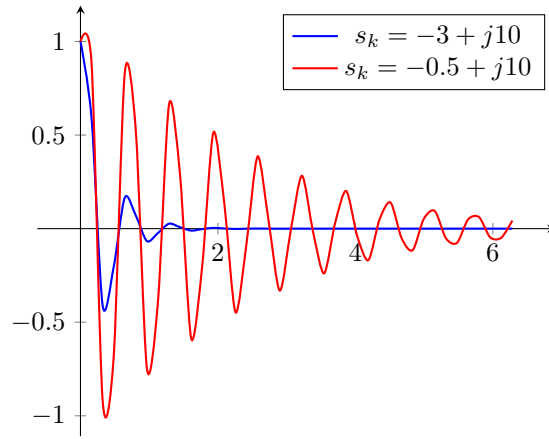
Definizione 5.1 (Polo dominante e modi dominanti) Il polo o la coppia di poli più vicini all'asse immaginario si dice polo dominante. I corrispettivi modi si dicono modi dominanti o modi veloci.

Esempio di comportamento dei modi con $A_k = 1$ e poli reali:



Esempio di comportamento dei modi con $A_k = 1$ e poli complessi coniugati:

⁴Con $A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \frac{N_2(s)}{D(s)}$



Quindi la risposta indiciale la possiamo approssimare come:

$$y(t) \approx \text{risposta a regime} + \text{transitorio dei nodi dominanti}$$

Ovvero:

$$H_{\text{vera}} = \frac{N(s)}{D(s)} \approx \begin{cases} \frac{N}{s-p}, & p \in \mathbb{R} \\ \frac{N}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)} \end{cases}$$

5.3 Risposta indiciale dei sistemi del primo ordine

Abbiamo:

$$H(s) = \frac{k}{s-p}, \quad p < 0$$

Quindi l'uscita è:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{s(s-p)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p} \right]$$

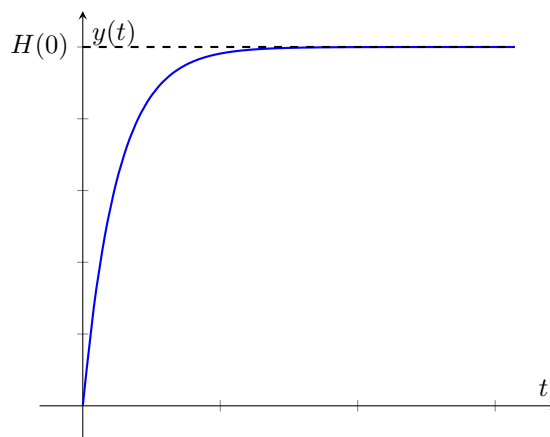
Dove:

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{H(s)}{s} = H(0)$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p} (s-p) \frac{H(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow p} \frac{k}{s} = -H(0)$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = H(0)1(t) - H(0)e^{-pt}1(t) = H(0) (1 - e^{-pt}) 1(t)$$



Consideriamo $\tau = -\frac{1}{p}$ costante di tempo. Dopo 5τ sono praticamente a regime.

Osservazione 5.3 Non si ha discontinuità nell'origine:

$$y(0^+) = y(0^-) = 0$$

Teorema 5.2 Se $H(s)$ è razionale propria e $\text{rel deg}[H] > 0$ e detta $y(t)$ la relativa risposta indiciale, se ha:

$$y(0^+) = y(0^-) = 0$$

Se $\text{rel deg}[H] = 0$:

$$y(0^+) \neq y(0^-) = 0$$

Teorema 5.3 Sia $r = \text{rel deg}[H]$ e $y(t)$ risposta indiciale. Allora per $h \in \{1, \dots, r\}$ ⁵:

$$0 = y^{(r-h)}(0^-) = y^{(r-h)}(0^+)$$

5.3.1 Effetto di uno zero per un sistema di primo ordine

$$H(s) = k \frac{s-z}{s-p}, \quad p < 0$$

Allora l'uscita indiciale:

$$Y(s) = \frac{H(s)}{s} = k \frac{s-z}{s(s-p)} = \frac{H(0)}{s} + \frac{A_1}{s-p}$$

Con $H(0) = \frac{kz}{p}$ e:

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow p} (s-p)Y(s) = \lim_{s \rightarrow p} k \frac{s-z}{s} = k \frac{p-z}{p} = k - \frac{kz}{p} = k - H(0)$$

Allora:

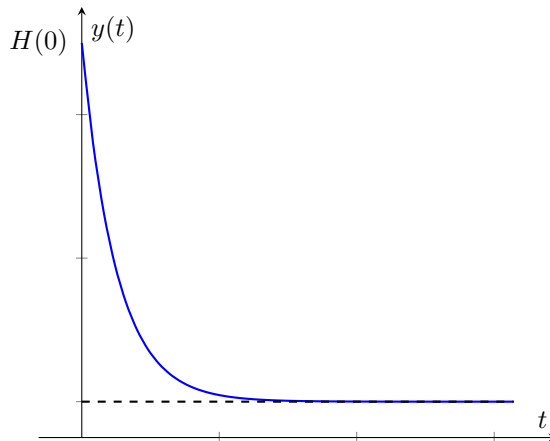
$$y(t) = H(0)1(t) + A_1 e^{pt}1(t) = [H(0) + A_1 e^{pt}]1(t)$$

Analizziamo il comportamento di $y(t)$ in 0:

$$y(0^+) = H(0) + A_1 = H(0) + k - H(0) = k = H(0) \frac{p}{z} \neq 0$$

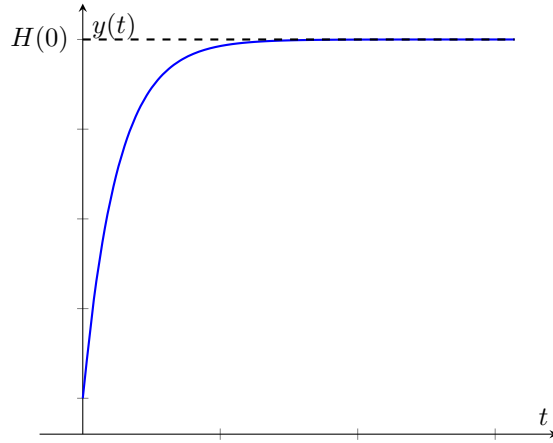
Quindi otteniamo una discontinuità.

Caso in cui $p < z < 0$ che prende il nome di **overshoot**:

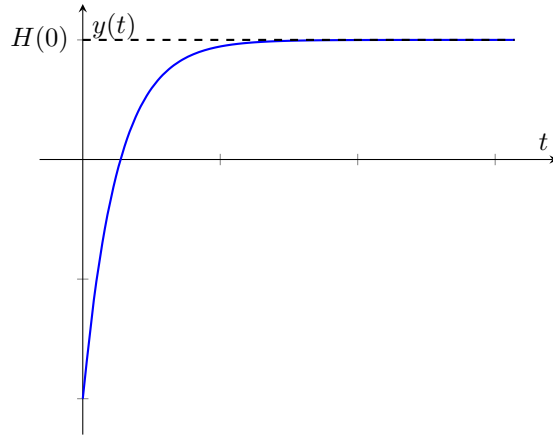


Caso in cui $z < p < 0$:

⁵Con $y^{(n)}$ si intende la derivata n-esima di y .



Caso in cui $p < 0 < z$ che prende il nome di **undershoot**:



5.4 Sistemi del secondo ordine

$$H(s) = \frac{k}{(s-p)(s-\bar{p})}, \quad p = -\sigma + j\omega_d, \quad \sigma > 0$$

Definizione 5.2 Definiamo la **pulsazione naturale** come:

$$w_n = |p| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

Definizione 5.3 Definiamo lo **smorzamento** come:

$$\varrho = \frac{\sigma}{w_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$

Osservazione 5.4 Lo **sporzamento** è compreso da 0 a 1. Quando lo smorzamento è uguale a 1 si ha un polo reale. Quando lo smorzamento è uguale a 0 si hanno due poli puramente immaginari.

Osservazione 5.5 Possiamo scrivere lo **sforzamento** come:

$$\varrho = \cos \varphi$$

Dove φ è l'angolo formato dal polo con l'asse reale del piano complesso. In quanto i poli sono complessi coniugati con parte reale negativa consideriamo con $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Allora ⁶:

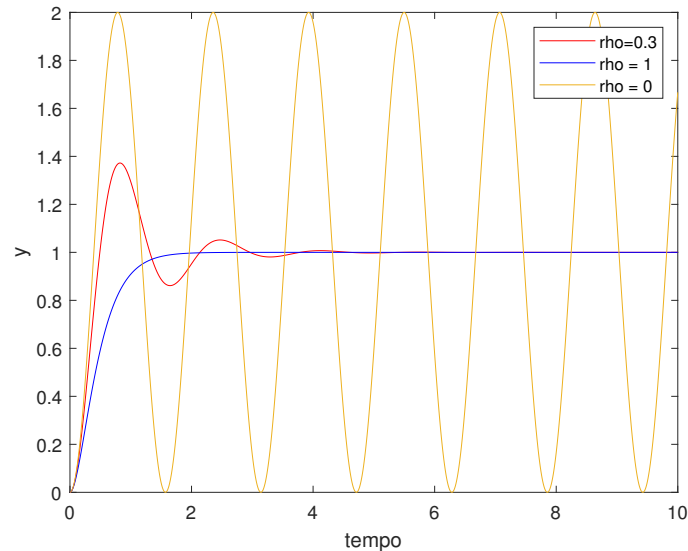
$$H(s) = \frac{k}{(s-p)(s-\bar{p})} = \frac{k}{s^2 - \underbrace{(p+\bar{p})}_{2\Re[p]} + |p|^2} = \frac{k}{s^2 + 2\sigma s + w_n^2} = \frac{k}{s^2 + 2w_n\varrho s + w_n^2} = \frac{H(0)w_n^2}{s^2 + 2w_n\varrho s + w_n^2}$$

⁶ $H(0) = \frac{k}{w_n^2}$

Risposta al gradino:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = H(0) \left[1 - e^{-\sigma t} \left(\frac{\sin(w_d t + \varphi)}{\sin(\varphi)} \right) \right] 1(t) \\
 &= H(0) \left[1 - e^{-w_n \varrho t} \left(\frac{\sin \left(w_n \sqrt{1 - \varrho^2} t + \arccos \varrho \right)}{\sqrt{1 - \varrho^2}} \right) \right] 1(t)
 \end{aligned}$$

Dove $H(0)$ è un fattore di scala di $y(t)$ e w_n è un fattore di scala di tempo, tracciamo i grafici al variare di ϱ :

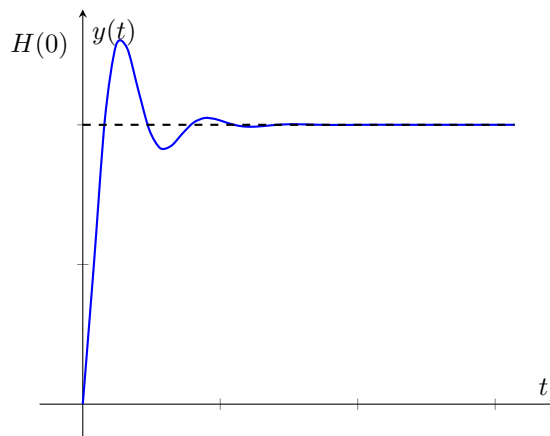


5.5 Caratteristiche della risposta indiciale

La risposta in frequenza del sistema senza approssimazioni è:

$$H_v(s) = \frac{CG}{1 + CG}$$

La tipica risposta indiciale di un sistema è:



Dove l'asintoto orizzontale è uguale a $H(0)$.

Questa risposta indiciale può essere descritta da tre parametri:

1. t_r = **tempo di salita** ovvero il tempo che y impiega per passare dal 10% al 90%;
2. t_s = **tempo di assestamento** tempo dopo il quale y rimane entro 1% del valore di regime;
3. **massima sovralongazione** che indica quanto la risposta supera il valore di regime in termini relativi:

$$M_p = \frac{y_{max} - H(0)}{H(0)}$$

Si vuole M_p piccolo, t_s , t_r ne più grandi ne piccoli di quanto si richiede.

Approssimiamo il sistema con un sistema di secondo ordine con i poli dominanti:

$$H_v(s) \approx H(s) = \frac{k}{s^2 + 2w_n \rho s + w_n^2}$$

Consideriamo le seguenti specifiche:

$$t_r \leq t_r^* \quad t_s \leq t_s^* \quad M_p \leq M_p^*$$

Come scegliere i poli:

1. $t_r \approx \frac{1.8}{w_n}$, se $t_r \leq t_r^*$ allora $w_n^* \geq \frac{1.8}{t_r^*}$. Nel piano complesso significa che i poli devono avere il modulo maggiore di un numero definito. Ha senso prendere il modulo minore possibile.
2. È noto:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(s)}{s} \right] = H(0) \left[1 - e^{-\sigma t} \left(\frac{\sin(w_d t + \varphi)}{\sin(\varphi)} \right) \right] 1(t)$$

t_s è il tempo con il quale l'uscita ci mette a raggiungere il $0.99H(0)$. Allora possiamo trascurare l'oscillazione, allora $e^{-\sigma t_s} = 0.01 \implies t_s \approx \frac{4.6}{\sigma}$ allora $\sigma^* \geq \frac{4.6}{t_s^*}$. Ciò significa che il polo deve avere parte reale minore di un numero fissato. Ha senso prendere il modulo minore possibile in modulo.

3. M_p e ρ sono legati:

$$\rho = \frac{|\ln(M_p)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$$

Se M_p è crescente allora ρ è decrescente. Allora se $M_p \leq M_p^*$ allora $\rho \geq \rho^*$. Ricordando che $\rho = \cos \varphi$, allora $\varphi \leq \varphi^*$. Allora i poli devono avere fase minore di un angolo fissato.

Se abbiamo tutte e tre le specifiche si ottiene delle condizioni dei poli nel piano complesso. Nel caso ottimale si prendono i poli vicino ai bordi. Notare che tutte queste indicazioni sono molto rozze a causa delle approssimazioni. Queste regole hanno un senso pratico nel caso le cose non funzionano.

5.5.1 Effetto degli zeri

- zeri a $\Re[\] < 0$ hanno l'effetto di amplificare la sovraelongazione;
- zeri a $\Re[\] > 0$ tendono a provocare una sottoelongazione;

5.5.2 Effetto di poli addizionali veloci

L'aggiunta di poli addizionali veloci tende a rendere il sistema meno pronto (t_r aumenta) e la risposta indiciale tende a partire con meno continuità (aumenta il grado relativo come visto in 5.2).

Inoltre tendono a far diminuire la sovraelongazione.

5.6 Criterio di Routh (stabilità)

Cominciamo generalizzando cartesio:

Dato un polinomio $P(s)$:

$$P(s) = k \prod_i (s + \alpha_i) \prod_i (s + \sigma_i + jw_i) (s + \sigma_i - jw_i) \quad \alpha_i, \sigma_i, w_i \in \mathbb{R}$$

Se $P(s)$ di Hurwitz:

$$\alpha_i > 0 \quad \sigma_i > 0 \quad \forall i$$

$$\begin{aligned} P(s) &= k \prod_i (s + \alpha_i) \prod_i (s + \sigma_i + jw_i) (s + \sigma_i - jw_i) = k \prod_i (s + \alpha_i) \prod_i ((s + \sigma_i)^2 - (jw_i)^2) = \\ &= k \prod_i (s + \underbrace{\alpha_i}_{>0}) \prod_i ((s + \underbrace{\sigma_i}_{>0})^2 + \underbrace{w_i^2}_{>0}) = k (s^n + \beta_{n-1} s^{n-1} + \dots + \beta_0) \end{aligned}$$

Quindi per costruzione:

$$\beta_i > 0 \quad \forall i = \{1, \dots, n-1\}$$

$P(s)$ di Hurwitz \implies tutti i coefficienti del polinomio hanno lo stesso segno.

Attenzione che è una condizione **neccessaria** al contrario della regola di cartesio.

5.6.1 Tabella di Routh

Dato un polinomio $P(s)$:

$$P(s) = \alpha_0 s^n + \dots + \alpha_n$$

La tabella ha $n+1$ righe e si comincia inserendo le prime due righe:

$$\begin{array}{c|cccc} n & \alpha_0 & \alpha_2 & \alpha_4 & \dots \\ n-1 & \alpha_1 & \alpha_3 & \dots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

Dove nella prima riga si inseriscono i termini con indici pari e nella seconda i termini con indici dispari. Entrambe le righe devono essere lunghe $n-1$ e in caso manchi un termine si mette zero (caso seconda riga con polinomio di grado pari o grado mancante del polinomio).

La riga successiva si ricava dalle righe precedenti:

$$\begin{array}{c|cccc} \vdots & & & & \\ i+2 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\ i+1 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ i & d_1 & d_2 & d_3 & \dots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Dove:

$$d_i = -\frac{1}{c_1} \det \begin{bmatrix} b_1 & b_{i+1} \\ c_1 & c_{i+1} \end{bmatrix}$$

La tabella non è costruibile nel caso nella prima colonna compare almeno uno zero.

5.6.2 Criterio di Routh

$P(s)$ è di Hurwitz se:

1. Si può costruire la tabella;
2. Gli elementi della prima colonna hanno lo stesso segno;

Osservazione 5.6 *Gli zeri a $\Re[\] > 0$ sono tanti quante le variazioni di segno nella prima colonna e ciascuno zero è contato con la sua molteplicità.*

Se nella tabella, considerando una riga, le due righe precedenti formano una "scala" allora l'ultimo elemento della riga considerata avrà come ultimo elemento l'ultimo elemento della riga più alta tra le due precedenti.

5.6.3 Margine di stabilità

Vogliamo che i poli dell'equazione di trasferimento siano $\Re[\] < -\sigma$ con $\sigma > 0$.

Sia $W(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ N, D coprimi.

Definisco:

$$D_\sigma(s) = D(s - \sigma)$$

Da cui:

$$D_\sigma(\alpha) = 0 \Leftrightarrow D(\alpha - \sigma) = 0$$

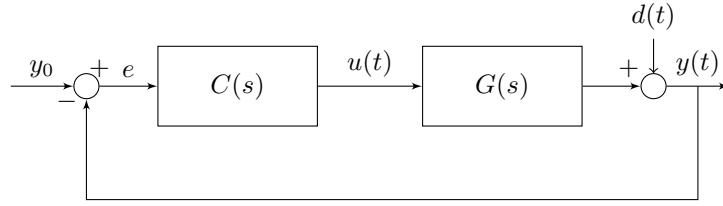
Dove α è uno zero di D_σ e $\alpha - \sigma$ è uno zero di D . Da cui si deduce:

$$\Re[\alpha] < 0 \Leftrightarrow \Re[\alpha - \sigma] < -\sigma$$

Quindi D_σ è di Hurwitz se solo se gli zeri di D sono a parte reale $< -\sigma$.

6 Tipo di un sistema di controllo

Consideriamo lo schema in configurazione di feedback negativa:



Ci chiediamo se per certe classi di segnali di y_0 e d :

1. a regime si riesce a inseguire certe classi di segnali y_0 ;
2. a regime si riesce ad avere reiezione a certe classi di disturbi;

Possiamo trattare y_0 e d in modo separato perchè:

$$Y = WY_0 + W_dD$$

$$E = Y_0 - Y = (1 - W)Y_0 - W_dD = \left(1 - \frac{CG}{1 + CG}\right)Y_0 - W_dD = \frac{1}{1 + CG}Y_0 - W_dD = \underbrace{W_dY_0}_{E_{Y_0}} - \underbrace{W_dD}_{E_D}$$

L'errore dipende dal riferimento e dal disturbo. Le funzioni di trasferimento che legano il riferimento e il disturbo con l'errore sono uguali al meno del segno.

Osservazione 6.1 Si vuole che e_{y_0} e e_d siano entrambi piccoli.

Osservazione 6.2 Non scegliere mai $e_{y_0} \approx -e_d$. Si vuole che i due segnali siano entrambi piccoli.

Consideriamo y_0 e d segnali canonici:

6.1 Segnali canonici

Considerando $l \in \{0, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{R}$:

$$u(t) = \frac{1}{l!} t^l 1(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^{l+1}}$$

Che viene detto segnale canonico di ordine l . Ad esempio il gradino è il segnale canonico di ordine 0. Questi segnali sono tutti segnali causali.

6.2 Definizione di tipo

Consideriamo il sistema in catena chiusa e si suppone il sistema sia BIBO stabile ovvero W sia BIBO stabile.

Allora si dice **tipo** di sistema di controllo la molteplicità del polo in zero (eventuale) di $H(s)$ dove:

$$H(s) = C(s)G(s)$$

Ha senso di parlare di tipo del sistema in catena chiusa solamente quando W è BIBO stabile.

Definizione 6.1 (Tipo zero) Se $H(s)$ non ha poli nell'origine allora il sistema è di tipo zero.

Osservazione 6.3 H è chiamata catena ad azione diretta.

- Tipo 0: H non ha poli in $s = 0 \implies H(0) \in \mathbb{R}$ finito;
- Tipo 1: H ha un polo nell'origine

$$H(s) = \frac{1}{s} H_1(s) \quad \text{con} \quad \begin{cases} H_1(0) \in \mathbb{R} \text{ finito} \\ H_1(0) \neq 0 \end{cases}$$

- Tipo k:

$$H(s) = \frac{1}{s^k} H_1(s) \quad \text{con} \begin{cases} H_1(0) \in \mathbb{R} \text{ finito} \\ H_1(0) \neq 0 \end{cases}$$

Teorema 6.1 (Teorema valore finale) Sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{N(s)}{D(s)s^\nu}$ dove N e D sono coprimi e $\nu \in \{1, 2, \dots\}$ e D è di Hurwitz, allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Osservazione 6.4 Questo limite è finito per $\nu = 0$ e quando $\nu = 1$.

6.3 Errore a regime di segnali a canonici

Rispondiamo alle due domande che ci siamo fatti in 6:

1. Caso 1 (errore dovuto al riferimento):

$$y_0 = \frac{t^l}{l!} 1(t) \quad d = 0$$

Abbiamo:

$$W_d = \frac{N}{D} \text{ coprimi} \quad Y_0 = \frac{1}{s^{l+1}} \quad D = 0$$

Quindi l'errore:

$$E(s) = W_d Y_0 - W_d D = W_d Y_0 = \frac{N}{D s^{l+1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \nu = l + 1 \\ D \text{ è Hurwitz} \end{array} \right\} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = e_r \text{ a regime}$$

- Sistema di tipo zero:

$$H(0) = C(0)G(0) \in \mathbb{R} \quad W_d = \frac{1}{1 + H}$$

Allora:

$$e_r = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_d Y_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{N}{D} \frac{1}{s^{l+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{N}{D s^l} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)} \frac{1}{s^l}$$

Quindi l'errore a regime:

$$e_r = \begin{cases} \frac{1}{1+H(0)} & l = 0 \\ \infty & l \geq 1 \end{cases}$$

Se si ha un sistema di tipo zero allora si è in grado di seguire il gradino con un errore finito. Invece se il segnale canonico non è di ordine zero non si è in grado di seguire il riferimento di uscita perchè l'errore a regime va infinito.

Osservazione 6.5 Caso in cui $l = 0$ e $H(0) = -1$:

$$W(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)} \implies W(s) = \infty \text{ per } s = 0 \text{ (polo in zero)} \implies \text{no BIBO}$$

- Sistema di tipo $k > 0$:

$$\begin{aligned} e_r &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_d Y_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + H(s)} \frac{1}{s^{l+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)} \frac{1}{s^l} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{s^k} H_1(s)} \frac{1}{s^l} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{k-l}}{s^k + H_1(s)} \end{aligned}$$

Quindi l'errore a regime:

$$e_r = \begin{cases} 0 & l < k \\ \frac{1}{H_1(0)} & l = k \\ \infty & l > k \end{cases}$$

Quindi quando si ha un sistema di tipo $k > 0$ si riesce a inseguire con errore nullo tutti i segnali canonici di ordine $l < k$. Si riesce ad inseguire con errore finito il segnale canonico di ordine $l = k$. Non si riesce ad inseguire i segnali canonici di ordine $l > k$.

2. Caso 2:

$$y_0 = 0 \quad d = \frac{t^l}{l!} 1(t)$$

Abbiamo:

$$W_d = \frac{N}{D} \text{ coprimi} \quad Y_0 = 0 \quad D = \frac{1}{s^{l+1}}$$

Quindi l'errore:

$$E(s) = W_d Y_0 - W_d D = -W_d D = -\frac{N}{D s^{l+1}}$$

Stessa struttura di prima tranne per il segno, quindi:

- Sistema di tipo zero:

$$e_r = \begin{cases} -\frac{1}{1+H(0)} & l = 0 \\ \infty & l \geq 1 \end{cases}$$

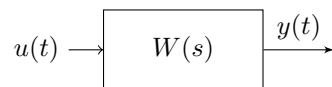
- Sistema di tipo $k > 0$:

$$e_r = \begin{cases} 0 & l < k \\ -\frac{1}{H_1(0)} & l = k \\ \infty & l > k \end{cases}$$

Osservazione 6.6 *Tutti questi risultati si possono applicare per linearità a combinazioni lineari di segnali canonici.*

6.4 Risposta in frequenza

Considero un sistema $W(s)$ BIBO stabile:



Sia:

$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi) 1(t)$$

Teorema 6.2 (Teorema della risposta in frequenza)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y(t) - M A \sin(\omega t + \varphi + \theta)] = 0$$

Dove:

$$M(\omega) = |W(j\omega)| \quad \theta(\omega) = \angle W(j\omega)$$

In modo improprio si può scrivere:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |W(j\omega)| A \sin(\omega t + \varphi + \angle W(j\omega))$$

Sostanzialmente a regime l'uscita è uguale al seno traslato e scalato.

Osservazione 6.7 *Questo risultato vale anche per il coseno.*

Osservazione 6.8 *Caso in cui:*

$$A = 1 \quad \omega = 0 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Si ottiene che l'ingresso è:

$$u(t) = 1(t)$$

Allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |W(j0)| \sin \left(0 \cdot t + \frac{\pi}{2} + \angle W(j0) \right)$$

Inoltre considerando funzioni razionali a coefficienti reali:

$$W(j0) = W(0) \in \mathbb{R} \quad \angle W(j0) = \begin{cases} 0 & \text{se } W(0) > 0 \\ \pi & \text{se } W(0) < 0 \end{cases}$$

Quindi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = |W(j0)| A \sin \left(\frac{\pi}{2} + \angle W(j0) \right) = W(0)$$

Osservazione 6.9 *Essendo il sistema lineare se si prende:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^l A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) 1(t)$$

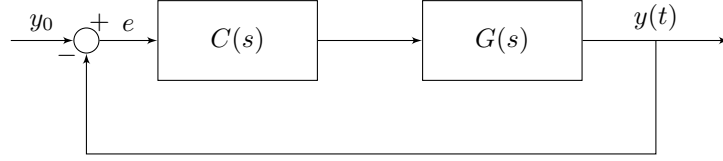
Allora:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \sum_{k=1}^l |W(j\omega_k)| A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k + \angle W(j\omega_k))$$

Questo segnale di uscita viene chiamato uscita a regime permanente.

7 Luogo delle radici

Consideriamo lo schema in retroazione negativa, trascurando il disturbo che non gioca un ruolo fondamentale:



Dove:

$$G(s) = \frac{N_G}{D_G} \quad C(s) = k \frac{N_C}{D_C}$$

Ipotizziamo che la struttura di $C(s)$ è nota, ovvero N_C e D_C sono noti.

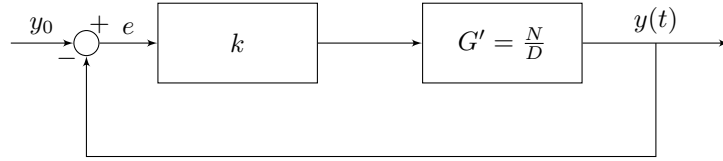
Osservazione 7.1 *Nel caso $C(s) = k$, $N_C = D_C = 1$*

Quindi non è noto $k \in \mathbb{R}$. Date le specifiche sulla risposta indiciale (t_r, t_s, M_p) si vuole progettare k tale che i poli dominanti di W stiano nella corrispondente regione.

Si deve capire come variano i poli di $W = \frac{CG}{1+CG}$ rispetto a k . É noto che:

$$CG = k \frac{N_C N_G}{D_C D_G} = k \frac{N}{D} \quad \text{con} \quad N = N_C N_G \quad D = D_C D_G$$

Lo schema in retroazione quindi è equivalente a:



Ipotesi:

1. N, D coprimi;
2. $n = \deg D \geq \deg N = m$;
3. N, D sono monici, infatti se non lo fossero ⁷:

$$\left. \begin{array}{l} N = \alpha_m s^m + \dots \\ D = \beta_n s^n + \dots \end{array} \right\} \implies kG' = k \frac{N}{D} = k \frac{\alpha_m s^m + \dots}{\beta_n s^n + \dots} = k \underbrace{\frac{\alpha_m}{\beta_n}}_{\bar{k}} \frac{s^m + \dots}{s^n + \dots}$$

Quindi abbiamo:

$$W(s) = \frac{kG'}{1 + kG'} = \frac{k \frac{N}{D}}{1 + \frac{N}{D}} = \frac{kN}{D + kN}$$

Per capire come variano i poli dobbiamo studiare gli zeri di:

$$P_k(s) = D(s) + kN(s)$$

Osservazione 7.2

$$\{\text{poli catena chiusa}\} = \{\text{zeri di } P_k\}$$

In quanto kN e $D + kN$ sono coprimi.

⁷Non si tratta di un ipotesi restrittiva, ma solamente una questione di comodità

$$D(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad p_i \text{ poli di } G' \quad N(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i) \quad z_i \text{ zeri di } G'$$

Poli e zeri non sono necessariamente distinti.

Consideriamo il caso $k \geq 0$. Si deve analizzare l'insieme:

$$\mathcal{L}_+ = \{s \in \mathbb{C} : \exists k \geq 0 \quad P_k(s) = D(s) + kN(s) = 0\}$$

Questo insieme è chiamato **luogo positivo o luogo diretto**.

Osservazione 7.3

$$\left. \begin{array}{l} P_k = D + kN \\ D(s) = s^n + \dots \\ N(s) = s^m + \dots \\ m \leq n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m < n : & P_k = s^n + \dots \quad \forall k \geq 0 \\ m = n : & P_k = (1+k)s^n + \dots \quad \forall k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \deg[P_k(s)] = n$$

Per ogni $k \geq 0$ P_k ha n zeri con le loro molteplicità che sono n punti nel piano complesso.

Osservazione 7.4 \mathcal{L}_+ è formata da n curve continue e orientate in \mathbb{C} . Ciascuna di queste curve detta **ramo** di \mathcal{L}_+ .

7.1 Caratteristiche dei luoghi

Queste curve sono parametrizzate da k :

- Per $k = 0$: $P_k(s) = D_k(s) = 0 \Rightarrow$ gli zeri di $P_k(s)$ sono gli di G' che sono i poli della catena ad azione diretta CG . Gli n rami di questo luogo originano dai poli di G' ;
- Per $k \rightarrow \infty$:

$$P_k(s) = D(s) + kN(s) = k \left[N(s) + \frac{1}{k}D(s) \right] \approx kN(s)$$

Quindi gli zeri $P_k(s)$ tendono agli m zeri di $N(s)$. Questo ragionamento ha senso se $m = n$.

Se $m < n$ gli zeri di P_k tendono a:

$$\begin{cases} m & \text{zeri di } N(s) \\ n - m & \text{zeri di } \frac{1}{k}D(s) \end{cases}$$

Dove gli $n - m$ zeri divergono ⁸.

Osservazione 7.5 Per ogni $k \geq 0$ $P_k(s)$ è un polinomio a coefficienti reali, quindi gli zeri di $P_k(s)$ possono essere:

$$\begin{cases} \text{reali} \\ \text{una coppia di zeri complessi coniugati} \end{cases}$$

Quindi \mathcal{L}_+ è simmetrico rispetto a \mathbb{R} .

Osservazione 7.6 Nel piano complesso la croce indica un polo e il cerchietto indica uno zero.

Adesso vediamo come tracciare queste curve:

7.1.1 Prima regola

Appartengono a \mathcal{L}_+ tutti i punti di \mathbb{R} che lasciano alla propria destra un numero dispari di poli e zeri contati con la loro molteplicità. Gli unici altri punti di \mathbb{R} che appartengono al luogo sono i $p_i \in \mathbb{R}$. Mentre gli $z_i \in \mathbb{R}$ appartengono alla chiusura di \mathcal{L}_+ .

⁸In quanto affinché dividendo per infinito per generare qualcosa di non ovvio devono divergere.

7.1.2 Seconda regola

Se $n - m$ è dispari allora uno dei rami che tende a divergere tende a infinito lungo il semiasse reale negativo.

7.1.3 Terza regola

Gli $n - m$ rami che tendono a infinito vi tendono lungo $n - m$ asintoti che sono semirette che originano nel medesimo punto definito:

$$\sigma_c = \frac{\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{i=1}^n z_i}{n - m} \in \mathbb{R}$$

Questo punto è chiamato **centro stella**.

Questi asintoti dividono l'angolo giro in $n - m$ settori uguali.

Osservazione 7.7 Se $n - m$ è dispari un asintoto è il semiasse reale negativo (seconda regola).
Se $n - m$ è pari allora il semiasse reale negativo è la bisettrice di uno dei settori.

7.2 Punti multipli

Due o più rami di \mathcal{L}_+ possono intersecarsi in un punto. Tale punto si dice **punto multiplo** di \mathcal{L}_+ .

Se i rami che si intersecano in tale punto sono due si parla di **punto doppio** e così via.

Osservazione 7.8 \bar{s} è un punto multiplo di \mathcal{L}_+ se e solo se $\exists \bar{k} : \bar{s}$ è zero multiplo di:

$$P_{\bar{k}}(s) = D(s) + \bar{k}N(s) \quad \bar{k} \geq 0$$

Allora \bar{s} è punto multiplo di \mathcal{L}_+ se solo se $\exists \bar{k} \geq 0$:

$$P_{\bar{k}}(\bar{s}) = 0$$

Allora:

$$P_{\bar{k}}(s) = (s - \bar{s})^\mu P_1(s) \quad \mu \geq 2$$

Derivando rispetta a s :

$$P'_{\bar{k}}(s) = \mu(s - \bar{s})^{\mu-1} P_1(s) + (s - \bar{s})^\mu P'_1(s)$$

E notiamo che $P'_{\bar{k}}(\bar{s}) = 0$, se non ci fosse stata la molteplicità invece il polinomio non avrebbe fatto zero.

Allora la condizione di punto multiplo diventa:

$$\begin{cases} P_{\bar{k}}(\bar{s}) = 0 \\ P'_{\bar{k}}(\bar{s}) = 0 \end{cases}$$

In oltre è di molteplicità pari a μ se e solo se $\exists \bar{k} \geq 0$:

$$\begin{cases} P_{\bar{k}}^{(l)}(\bar{s}) = 0 & l \leq \mu - 1 \\ P_{\bar{k}}^{(\mu)}(\bar{s}) \neq 0 \end{cases}$$

Per determinare i punti multipli si deve imporre:

$$\begin{cases} P_{\bar{k}}(s) = 0 \\ P'_{\bar{k}}(s) = 0 \end{cases}$$

Le coppie (\bar{k}, \bar{s}) che risolvono il sistema sono punti multipli per $k \geq 0$. Osserviamo che:

$$\begin{cases} D(s) + kN(s) = 0 \\ D'(s) + kN'(s) = 0 \end{cases} \implies N(s)D'(s) = D(s)N'(s)$$

Le soluzioni \bar{s} della condizione ottenuta sono punti multipli di $\mathcal{L}_+ \Leftrightarrow -\frac{D(s)}{N(s)} \geq 0$.

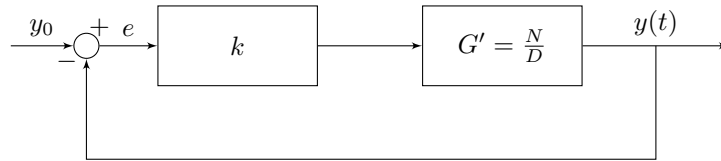
7.3 Rami nei pressi dei luoghi multipli

I rami nei pressi dei luoghi multipli hanno tre tipi di comportamento:

1. I punti multipli di \mathcal{L}_+ corrispondono a $k = 0$: Se \bar{s} è punto multiplo di molteplicità μ di \mathcal{L}_+ corrispondente a $\bar{k} = 0$, allora da \bar{s} originano μ rami e le tangenti in uscita di questi rami dividono l'angolo giro in μ settori uguali;
2. Punti multipli di \mathcal{L}_+ corrispondenti a $k > 0$: Se \bar{s} è punto multiplo di molteplicità μ di \mathcal{L}_+ corrispondente a $\bar{k} > 0$, allora in \bar{s} entrano μ rami ($k \rightarrow \bar{k}_-$) e in \bar{s} escono μ rami ($k \rightarrow \bar{k}_+$). Le tangenti in \bar{s} dei μ rami entranti e uscenti dividono l'angolo giro in 2μ settori uguali. Infine i rami entranti e quelli uscenti si alternano;
3. Punti multipli di \mathcal{L}_+ corrispondenti a $k = \infty$: Se \bar{s} è punto multiplo di molteplicità μ di \mathcal{L}_+ corrispondente a $\bar{k} = \infty$, allora in \bar{s} convergono μ rami ($k \rightarrow \infty$) le cui tangenti suddividono l'angolo giro in μ settori uguali (uguale al primo caso ma negli zeri invece che nei poli).

7.4 Small grain theorem e high gain stabilization

Consideriamo lo schema in retroazione negativa con $k > 0$, trascurando il disturbo per semplicità:



Teorema 7.1 (S.g.t.) Se $D(s)$ è di Hurwitz allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che la funzione di trasferimento della catena chiusa è BIBO stabile $\forall k \in [0, \varepsilon)$

Teorema dedotto dal luogo delle radici. Tutti i rami di \mathcal{L}_+ delle radici originano nei poli che hanno parte reale negativa.

Teorema 7.2 (high stabilization theorem) Se:

1. $N(s)$ è Hurwitz;
2. vale una delle seguenti condizioni:
 - $n - m = 0$;
 - $n - m = 1$;
 - $n - m = 2$ e centro stella negativo;

Allora $\exists M$ tale che la funzione di trasferimento della catena chiusa è BIBO stabile $\forall k > M$;

Il teorema deriva dal luogo delle radici. Nel caso $n - m = 0$ nessun ramo diverge e i rami convergono negli zeri che hanno parte reale negativa. Nel caso $n - m = 1$ uguale al caso di prima tranne che si ha un ramo in più che diverge a meno infinito. Nell'ultimo caso si hanno due rami che divergono nell'asintoto che passa per il centro stella negativo (che è perpendicolare all'asse reale per la prima regola).

Osservazione 7.9 $n - m \geq 3$ non esiste un M perchè ci sono $n - m$ asintoti che divergono e che dividono l'angolo giro in $n - m$ parti uguali.

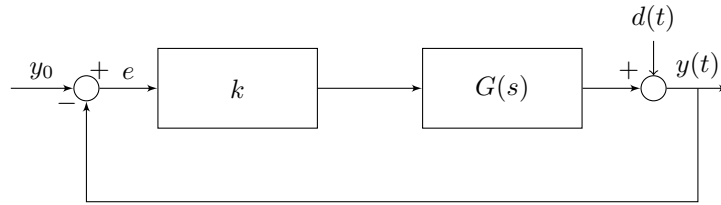
Osservazione 7.10 Se N e D sono di Hurwitz non è detto che $\forall k$ la catena chiusa è BIBO stabile.

7.5 Progetto di un controllore con il luogo delle radici

Dato G sistema da controllare e le specifiche (t_s, t_r, M_p) , prendiamo il controllore più semplice:

$$C(s) = k$$

Allora il sistema in catena chiusa diventa:



Disegno il luogo delle radici dove $G' = G$ e la corrispondente regione dove devono stare i poli dovute dalle specifiche. Da cui si sceglie un determinato \hat{k} per rispettare le specifiche.

Se si hanno specifiche più stringente può capitare che non esiste $\cup k$, affinché le specifiche siano rispettate.

Allora si deve arricchire $C(s)$:

$$C(s) = k \frac{N_c(s)}{D_c(s)}$$

Si aggiungono zeri e poli in $C(s)$ e quindi anche in $G' = \frac{N_C N_G}{D_C D_G}$. \mathcal{L}_+ può essere visto come le linee di un campo elettrico dove:

- cariche positive sono in corrispondenza dei p_i ;
- cariche negative sono in corrispondenza dei z_i ;

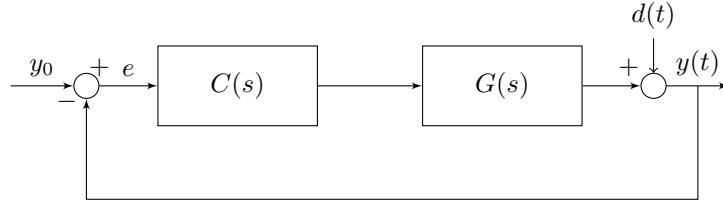
Si possono aggiungere zeri e poli in $C(s)$ tenendo conto che questi poli respingono il luogo di partenza e questi zeri attraggono il luogo di partenza ⁹.

In pratica:

- Si aggiunge gli zeri per attirare i rami che non stanno dietro la regione di specifica;
- Si aggiunge dei poli remoti (molto negativi) per garantire che $C(s)$ sia propria.

⁹Cosa che sembra difficile a dirsi ma molto intuitiva nella pratica.

8 Reiezione dei disturbi sinusoidali



Supponiamo che d è sinusoidale.

Si vuole eliminare l'errore dovuto dal disturbo a regime.

Abbiamo che:

$$E = W_d Y_0 - W_d D$$

Definiamo:

$$E_d = -W_d D$$

Ipotizziamo che la catena chiusa sia BIBO stabile e sia:

$$d(t) = A \sin(\omega_0 t + \theta) 1(t)$$

Essendo il sistema BIBO stabile posso applicare il teorema della risposta in frequenza, allora l'errore a regime:

$$e_{d,r} = -|W_d(j\omega_0)| A \sin(\omega_0 t + \theta + \angle W_d(j\omega_0)) 1(t)$$

Si vuole che $e_{d,r} = 0$ e quindi abbiamo che una **reiezione asintotica perfetta**. Quindi bisogna che $|W_d(j\omega_0)| = 0 \Leftrightarrow W_d(j\omega_0) = 0$ Sia $CG = \frac{N(s)}{D(s)}$, dove N e D coprimi, quindi:

$$W_d = \frac{1}{1 + CG} = \frac{1}{1 + \frac{N}{D}} = \frac{D}{N + D} \Leftrightarrow D(j\omega_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} D(j\omega_0) = 0 \\ D(-j\omega_0) = 0 \end{cases}$$

Quindi $s = \pm j\omega_0$ sono zeri di $D(s)$, quindi:

$$D(s) = (s - j\omega_0)(s + j\omega_0) D_1(s) = (s^2 + \omega_0^2) D_1(s)$$

Se la catena chiusa è BIBO stabile si ha reiezione asintotica perfetta di disturbi sinusoidali a pulsazione omega zero se e solo se $(s^2 + \omega_0^2)$ è fattore del denominatore della funzione di trasferimento di CG .

9 Controllo proporzionale-integrativo-derivativo

Nel caso non avessimo un modello del sistema il controllore proporzionale-integrativo-derivativo potrebbe essere una buona idea. Nel caso non avessimo un modello e non possiamo risolvere il problema a catena chiusa, allora ci si appropia al problema con una metodologia "trial-error".

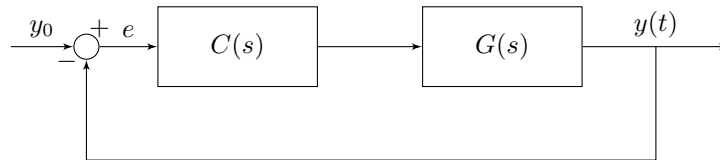
Il p.i.d. funziona con tre parametri e modificando i tre parametri riusciamo ad ottenere il risultato voluto. Questa metodologia ha diversi vantaggi:

1. Non richiedono un modello del processo;
2. Ampiamente studiati:
 - Linee guida di taratura;
 - Taratura automatica (esempio: ziegler nichols);
 - Implementazioni che gestiscono molti problemi di implementazione (ritardo);

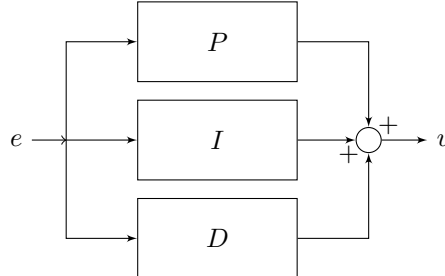
Però ha dei svantaggi:

1. Trial-error;
2. Non utilizzabile per sistemi complessi (molti poli e molti zeri);
3. Performance;

Consideriamo il seguente schema di riferimento:



E possiamo scrivere il controllore $C(s)$ p.i.d. come:



Con il proporzionale non riusciamo a risolvere tutto. L'azione integrativa serve a gestire l'errore a regime considerando l'informazione passata trasformando CG di almeno tipo 1. L'azione derivativa permette di capire come l'errore si muove velocemente. Quindi:

$$u(t) = k_P + k_I \int_0^t e(t) dt + k_D \frac{de(t)}{dt}$$

Allora nel dominio delle trasformate di laplace:

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + \frac{k_D s}{\tau_a s + 1}$$

Non possiamo scrivere la derivata ovvero $k_D s$ in quanto non è un processo causale, per renderla realizzabile si filtra il segnale derivato introducendo un ritardo.

9.1 Puro proporzionale

Con un sistema di primo ordine aumentando il coefficiente proporzionale aumentano la performance dell'uscita avendo un errore a regime. Al salire di k_p si ha una risposta più rapida, una riduzione dell'errore a regime, ma un'azione di controllo più elevata.

9.2 Integrativo

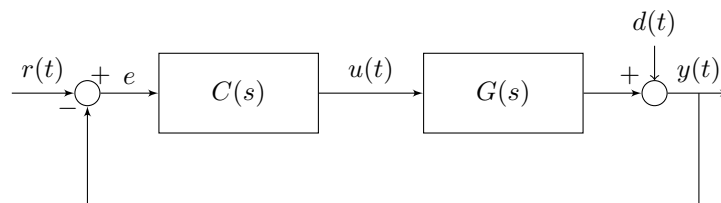
Considerando un sistema integrativo, il sistema va a regime in quanto non serve un input costante per avere un'uscita costante perchè si considera l'informazione passata. Aumentando il k_P la risposta è più rapida e non c'è errore a steady state.

9.3 Derivativo

Aumentando il k_D si ha una risposta più rapida e si ha una sovraelongazione.

9.4 Steady state error

Consideriamo:



Supponiamo che:

- $r(t) = 1(t)$;
- $H(s) = C(s)G(s) = \frac{1}{s^k} H_1(s)$

Consideriamo la seguente tabella dell'errore a regime dove sulle righe è presente la trasformata di $r(t)$, sulle colonne il numero di poli in zero di H , ricordando 6.3:

	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$
0	$\frac{1}{H(0)+1}$	∞
1	0	$\frac{1}{H_1(0)}$
2	0	0

Abbiamo casi in cui non abbiamo errore nullo a regime.

Come conseguenza abbiamo che se $G(s)$ non ha poli in zero posso aggiungere poli in zero in $C(s)$.

9.5 Proporzionale + integrativo

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s}$$

L'idea è di integrare errore costante per portare a zero l'errore costante.

Se l'integratore ha coefficiente basso si raggiunge lentamente il valore di regime. Se l'integratore ha coefficiente alto si ha una sovraelongazione.

Con l'integrale alto e una saturazione si ha una sovraelongazione sproporzionata che prende il nome di **wind-up**. Esistono schemi di anti wind-up che sostanzialmente blocca integrazione ed è facile da implementare con un controllo digitale.

9.6 Aggiunta di azione derivativa

Abbiamo una componente aggiuntiva:

$$C(s) = \frac{k_D s}{\tau s + 1} = \frac{k_D s}{\frac{s}{N} + 1}$$

Con un valore di N molto alto filtro molto. Abbiamo che l'azione derivativa amplifica il disturbo.

Abbiamo due azioni:

- Se $r(t)$ è costante riduce l'aggressività del sistema;
- Se $r(t)$ varia nel tempo l'azione anticipatrice nel controllo, se $\dot{r}(t)$ è molto elevato può dare problemi (problema risolvibile se si aggiunge un derivativo all'uscita invece che all'errore);

9.7 Metodi di taratura automatica dei controllori PID

I metodi di taratura servono a fornire le costanti del PID. Il più noto è il Ziegler-nichols che funziona in due passaggi:

1. Aumento k_P fino a quando l'uscita è oscillatoria e non smorzata (sistema in risonanza);
2. Dopo aver trovato k_P ci sono delle tabelle per il calcolo degli altri coefficienti;

9.8 Disturbi

Abbiamo che:

$$W_d = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

Se abbiamo un sistema da cui dobbiamo reiettare un disturbo si ha bisogno di poli nel controllore (vedere lezione 26).

10 Progettazione di un controllore in frequenza

Se abbiamo un modello del processo $G(s)$, e vengono date delle specifiche di controllo è possibile progettare un controllore più il processo $C(s)G(s)$ in frequenza.

Vantaggi:

- Non è trial-error;;
- Taratura legata alle specifiche;
- Controllori efficaci per sistemi complessi;

Svantaggi:

- É necessario sapere un modello accurato.

10.1 Diagrammi di Boode

Da segnali:

$G(s) :=$ funzione di trasferimento

$G(j\omega) :=$ risposta in frequenza

Dove $G(j\omega)$ è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva.

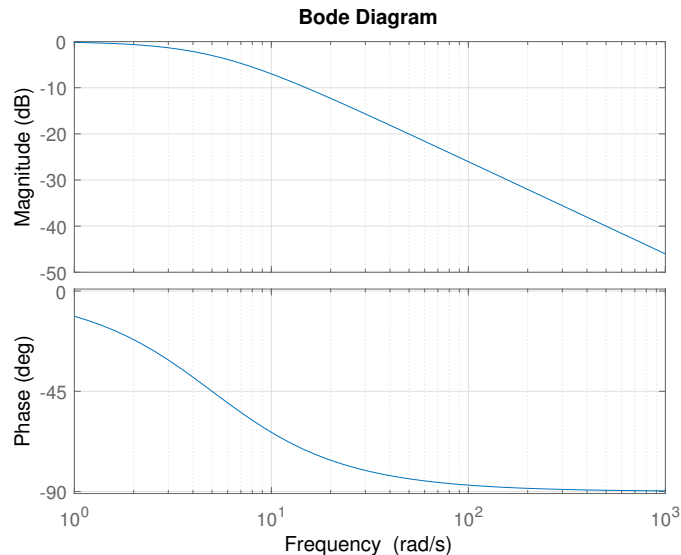
Consideriamo un sistema del primo ordine:

$$G(s)|_{s=j\omega} = \frac{a}{s+a}|_{s=j\omega} = \frac{a}{j\omega+a} = \frac{a}{\sqrt{\omega^2+a^2}} e^{j(-\arctan(\frac{\omega}{a}))}$$

Allora:

$$|G(j\omega)| = \frac{a}{\sqrt{\omega^2+a^2}} \quad \angle G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Guardando il modulo crescere delle frequenze di ingresso ci aspettiamo un attenuazione del segnale in uscita. Quindi è un filtro passa basso. Di cui il diagramma di Boode è:



Il diagramma di boode rappresentano un utile strumento per rappresentare una funzione di trasferimento in funzione della frequenza.

Il diagramma di Boode consiste di due diagrammi che rappresentano modulo e fase al variare di $\omega > 0$. In tali diagrammi l'ascissa è:

$$x = \log_{10}(\omega)$$

Nel diagramma del modulo di ha sulle ordinate:

$$y = 20 \log_{10} |W(j\omega)| = |W(j\omega)|_{dB}$$

Che sono chiamati decibel(dB).

Nel diagramma di fase la fase è rappresentata in gradi o in radianti.

Notare che:

$$|W(-j\omega)| = |W(j\omega)| \quad \angle W(-j\omega) = -\angle W(j\omega)$$

I diagrammi di Bode hanno il vantaggio che il grafico diventa lineare rispetto a x ed è possibile rappresentare un ampio range di frequenze:

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega + a} \right| = -20 \log |j\omega + a| \implies \omega \rightarrow +\infty \quad -20 \log |j\omega + a| \approx -20 \log \omega = -20x$$

Utilizzando questa nuova scala si ragiona in decadi, ovvero si cresce di un unità ogni volta che si fa un salto di ordine di grandezza. Una decade è un aumento di un ordine di grandezza.

La distanza tra due pulsazioni sono:

$$\text{dist}(\omega_1, \omega_2) = x_2 - x_1 = \log \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)$$

Definizione 10.1 (Forma di Boode) La forma di Boode è una forma particolare che diamo alla scrittura dell'equazione di trasferimento che ci permette di disegnare la risposta in frequenza semplicemente:

$$W(s) = \frac{K_B}{s^l} \frac{\prod (1 + sT_k)^{\nu_k} \prod \left(1 + 2\xi_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)^{\mu_k}}{\prod (1 + s\bar{T}_k)^{\bar{\nu}_k} \prod \left(1 + 2\bar{\xi}_k \frac{s}{\omega_{nk}} + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)^{\bar{\mu}_k}}$$

In questa rappresentazione si distinguono gli zeri e poli se reali o complessi coniugati. K_B è il **guadagno di Boode**. l che può essere positivo, nullo o negativo è il **tipo del sistema**.

Adesso vediamo la formula di Evans e negli esercizi ci sarà da convertirla in forma di boode:

$$W(s) = K = \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

Se z_k è reale:

$$s - z_k = -z_k (1 + sT_k) \quad T_k = -\frac{1}{z_k}$$

Se z_k non è reale allora esiste una coppia complessa coniugata:

$$(s - z_k)(s - \bar{z}_k) = s^2 - 2\Re[z_k]s + |z_k|^2 = |z_k|^2 \left(\frac{s^2}{|z_k|^2} - 2\frac{\Re[z_k]}{|z_k|^2}s + 1 \right) = |z_k|^2 \left(1 + 2\frac{\xi_k}{\omega_{nk}}s + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} \right)$$

Dove:

$$\omega_{nk}^2 = |z_k|^2 \quad \xi_k = -\frac{\Re[z_k]}{|z_k|} \in]-1, 1[$$

Notare che il K cambia dalla forma di Evans e dalla forma di boode.

Allora il modulo della funzione di trasferimento in dB diventa:

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &= \left| \frac{K_B}{(j\omega)^l} \right|_{dB} + \sum \nu_k |1 + j\omega T_k|_{dB} - \sum \bar{\nu}_k |1 + j\omega \bar{T}_k|_{dB} + \\ &+ \sum \mu_k \left| 1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right|_{dB} - \sum \bar{\mu}_k \left| 1 + 2\bar{\xi}_k \frac{j\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right|_{dB} \end{aligned}$$

Per la fase:

$$\begin{aligned} \angle(W(j\omega)) &= \angle \left(\frac{K_B}{(j\omega)^l} \right) + \sum \nu_k \angle(1 + j\omega T_k) - \sum \bar{\nu}_k \angle(1 + j\omega \bar{T}_k) + \\ &+ \sum \mu_k \angle \left(1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right) - \sum \bar{\mu}_k \angle \left(1 + 2\bar{\xi}_k \frac{j\omega}{\omega_{nk}} - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right) \end{aligned}$$

10.1.1 Funzioni elementari

Analizziamo i diagrammi di boode delle funzioni elementari della funzione di trasferimento:

•

$$\frac{K_B}{s^l}$$

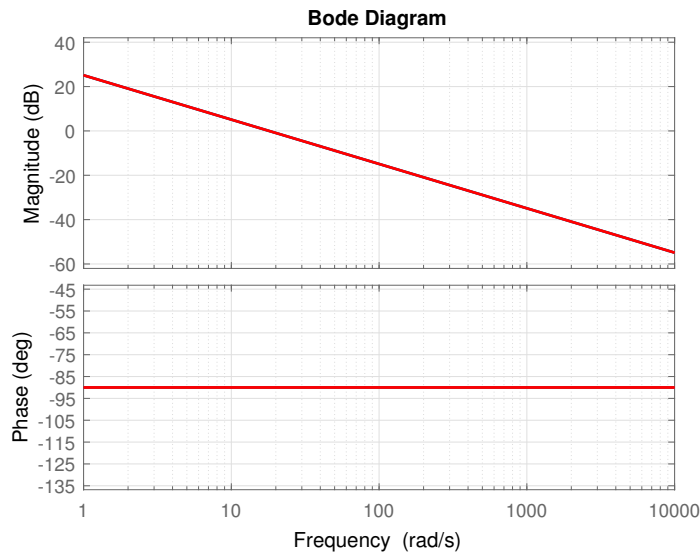
Allora considerando pulsazioni positive:

$$y = 20 \log \left| \frac{K_B}{s^l} \right| = 20 \log |K_B| - l 20 \log \omega = 20 \log |K_B| - l 20x$$

La fase:

$$y = \angle \left(\frac{K_B}{s^l} \right) = \angle K_B - \angle j\omega = \begin{cases} -l \frac{\pi}{2} & \text{se } K_B > 0 \\ -\pi - l \frac{\pi}{2} & \text{se } K_B < 0 \end{cases}$$

Esempio di $\frac{18}{s}$:



Quindi si ha una retta di inclinazione $20dB$. Il valore della retta per frequenza uguale a 1 prende il nome di **intercetta**. Il grafico del modulo è uguale a zero quando la funzione di trasferimento è uguale a uno, in questo caso 18.

•

$$1 + sT$$

Il modulo:

$$y = 20 \log |1 + sT| = 10 \log (1 + \omega^2 T^2) = 10 \log (1 + 10^{2x} T^2) \\ \approx \begin{cases} 20 \log |1| = 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \\ 20 \log |\omega T| = 20x - 20 \log \left| \frac{1}{T} \right| & \text{se } \omega \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Al variare di T si ha una traslazione dove la traslazione è di $\log \left| \frac{1}{T} \right|$. L'intercetta rispetto all'asse x è $\log \left| \frac{1}{T} \right|$. Dopo una decade rispetto all'intercetta si è già molto vicini all'asintoto.

Osservazione 10.1 *Notare che nel punto di spezzamento si discosta di 3dB.*

La fase:

$$y = \angle (1 + j\omega T) = \angle (1 + j10^x T) \\ \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } \omega = \frac{1}{|T|} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

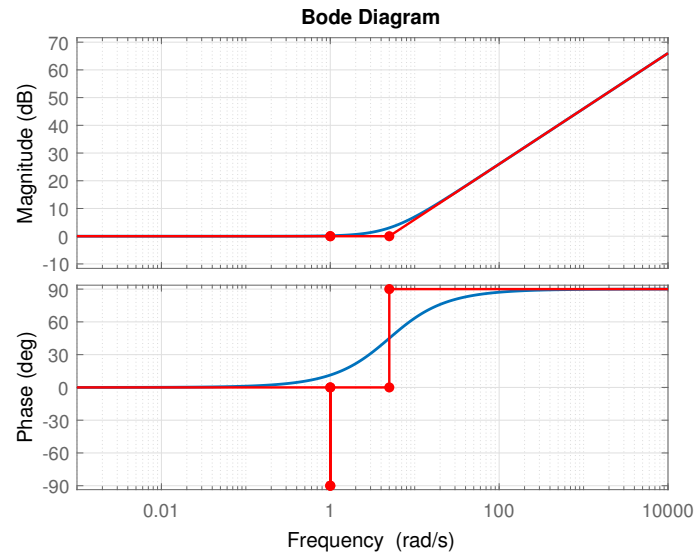
Se $T > 0$ **caso stabile**:

$$y \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \\ \frac{\pi}{4} & \text{se } \omega = \frac{1}{|T|} \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Se $T < 0$ **caso instabile**:

$$y \approx \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \\ -\frac{\pi}{4} & \text{se } \omega = \frac{1}{|T|} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Esempio di $5s + 1$ ¹⁰:



•

$$1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}$$

Il modulo:

$$y = 20 \log \left| 1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \right| = 10 \log \left(\left(1 - \frac{10^{2x}}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\xi^2 \frac{10^{2x}}{\omega_n^2} \right)$$

La fase per $\xi > 0$ **caso stabile**:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } \omega = \frac{1}{|T|} \\ \pi & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

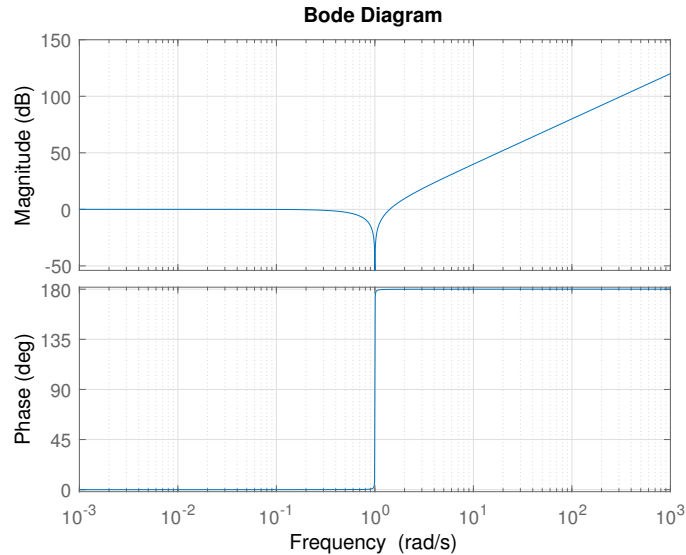
La fase per $\xi < 0$ **caso instabile**:

$$\begin{cases} 0 & \text{se } \omega \rightarrow 0^+ \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } \omega = \frac{1}{|T|} \\ -\pi & \text{se } \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

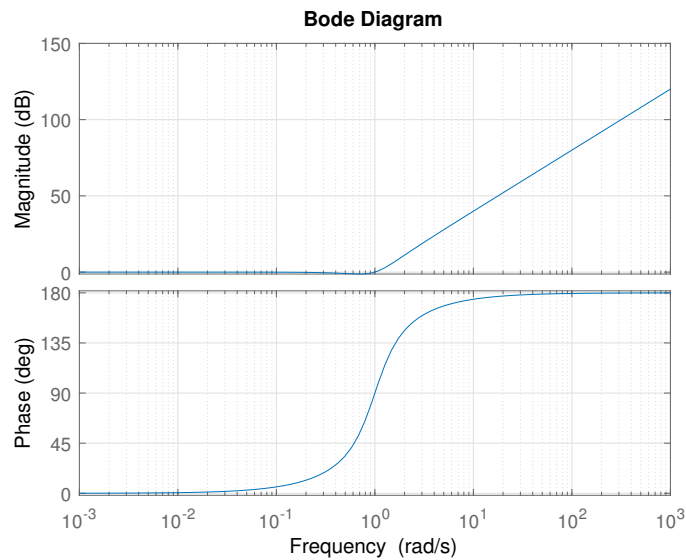
Si può dimostrare che variando ω_n si ha una traslazione di $\log \omega_n$. Dove la retta assintotica ha coefficiente angolare $40dB$.

Per $\xi = 0.02$ e $\omega_n = 1$:

¹⁰matlab ha un bug in zero nel diagramma della fase.



Per $\xi = 0.9$ e $\omega_n = 1$:



Per $|\xi| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ il diagramma reale è sempre maggiore o uguale del diagramma assintotico. Per $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ il diagramma reale è sempre minore o uguale del diagramma assintotico.

Il picco è uguale $20 \log \frac{1}{2|\xi|}$, nel caso $|\xi| \leq \frac{1}{2}$.

Osservazione 10.2 Se $|\xi| = 1$ allora il diagramma di bode nel punto di spezzamento è di 6dB.

Se $|\xi| = 0$ allora il diagramma di bode nel punto di spezzamento è di $-\infty$ dB.

Osservazione 10.3 Se $|\xi|$ è più vicina a zero più il cambiamento sarà repentino.

Inoltre se abbiamo una un polinomio di secondo grado se dobbiamo scriverlo secondo la forma di bode, allora sapendo che ha soluzioni complesse coniugate della forma $a \pm jb$:

$$a = -\omega_n \xi \quad b = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

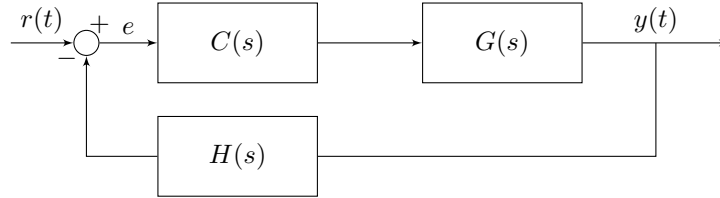
10.2 Diagramma e criterio di Nyquist

Il diagramma di Nyquist è forma alternativa della risposta in frequenza. Dove il diagramma di Nyquist è formato da un piano dove l'ascissa è la parte reale della risposta in frequenza e l'ordinata la parte immaginaria. Su questo si traccia al variare della pulsazione, la risposta in frequenza con una curva orientata nel piano.

É abbastanza difficile tracciare il diagramma di Nyquist e non verrà richiesto.

Si utilizza il diagramma di Nyquist perchè si riesce a caratterizzare la stabilità a catena chiusa.

Consideriamo il caso più generale:



Allora:

$$W_{ry}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \frac{*}{1 + W(s)}$$

Dove considerando il caso $H(s) = 1$ allora la $W(s)$ è il sistema a catena aperta.

La stabilità della retroazione può essere studiata tramite $W(s)$ e il diagramma di Nyquist, invece della tabella di Routh.

10.3 Criterio di Nyquist

Facciamo il diagramma di Nyquist solo per pulsazioni positive in quanto la risposta in frequenza ha simmetria hermitiana e quindi:

$$W(-j\omega) = \overline{W(j\omega)}$$

Ciò vuol dire che è simmetrico rispetto all'asse reale.

Possiamo tracciare il diagramma di Nyquist tramite il diagramma di Bode.

La stabilità del sistema in catena chiusa non dipende dall'intero diagramma di Nyquist, ma solo dalla sua porzione corrispondente alle pulsazioni critiche ω_A e ω_B che sono così definite:

$$|W(j\omega_A)| = 1 \quad \angle W(j\omega_A) = \pi$$

Definizione 10.2 (stabilità robusta) Con il diagramma di Nyquist è possibile determinare quanto si allontana dall'instabilità. Si introducono degli indici che permettono di prevedere quanto si può perturbare $W(s)$ pur riuscendo a conservare la stabilità del sistema.

Se non avvengono cancellazioni tra le funzioni di trasferimento H, C, G , i poli della funzione di trasferimento W_{ry} coincidono con gli **zeri di** $1 + W(s)$.

Quindi per la BIBO stabilità del sistema in retroazionamento serve a verificare che $1 + W(s)$ ha zeri con parte reale negativa. Questa condizione può essere verificata con il diagramma di Nyquist di $W(s)$.

10.3.1 Principio dell'argomento

Consideriamo:

$$\begin{aligned} \gamma &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightarrow \gamma(t) \end{aligned}$$

dove γ è una curva chiusa $\gamma(0) = \gamma(1)$, semplice e percorsa in senso orario.

Adesso consideriamo $F(\gamma)$ dove F è una funzione razionale priva di zeri e di poli su γ . Si ha che la curva di arrivo è sempre una curva chiusa.

Allora la $F(\gamma)$ ha un numero di aggiramenti N nell'origine pari a:

$$N = P - Z$$

Considerando positivi i giri in senso orario e negativi i versi in anti orario. Dove Z e P di F dentro γ contatiti con molteplicità.

Si considera la solita curva che si prende per risolvere integrali difficili con il teorema dei residui e analogamente si fa tendere il raggio all'infinito (questa volta però consideriamo l'asse immaginario e non quello reale). Quindi questa curva ingloba tutti i poli e zeri instabili. Notare che così facendo alla fine l'anello in uscita alla curva considerata è il diagramma di Nyquist, trascurando ovviamente l'anello all'infinito che è trascurabile.

Consideriamo come $F(s) = 1 + W(s)$ di cui ci chiediamo quali sono gli zeri instabili che corrispondono ai poli instabili di W_{ry} .

Quindi abbiamo che Z (incognita) è uguale al numero di poli instabili della catena chiusa e P numero di poli instabili di $1 + W(s)$.

Il numero di aggiramenti N è dato basta fare Nyquist e P è uguale al numero di poli instabili di $1 + W$ che è uguale a W (numero poli instabili della catena aperta).

Il numero di aggiramenti di $1 + W(s)$ corrispondono al numero di aggiramenti attorno a -1 di W .

Osservazione 10.4 *Il sistema a catena chiusa risulta instabile se il numero di poli instabili di $W(s)$ è diverso dal numero di aggiramenti rispetto a -1 di $W(s)$*

10.3.2 Criterio di Nyquist enunciato

$$Z = P - N$$

- Z = numero di poli instabili della catena chiusa;
- P = numero di poli instabili di $W(s)$;
- N = numero di giri intorno al punto -1 del diagramma di Nyquist di $W(s)$;

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema a catena chiusa sia BIBO stabile, allora:

$$N = P$$

Criterio ridotto dice che se il sistema a catena aperta è stabile allora il numero di aggiramenti deve essere uguale a zero affinché la catena chiusa sia BIBO stabile.

10.3.3 Ipotesi

1. $W(s)$ non ha poli sull'asse immaginario. Se $W(s)$ avesse poli sull'asse immaginario, allora il diagramma di Nyquist sarebbe una curva aperta con dei rami che vanno all'infinito e quindi risulterebbe non banale contare il numero di aggiramenti;
2. $W(j\omega) \neq -1 \forall \omega \geq 0$ caso non possibile perchè il diagramma di Nyquist passerebbe per -1 ;
3. $W(s)$ propria e $W(\infty) \neq -1$;

10.4 Margine di robustezza

Consideriamo una $G(s)$ come un approssimazione del sistema reale:

- Semplicità;
- Si trascurano dinamiche fuori dalla banda di interesse;
- Ricavata sperimentalmente;
- Linearizzazione;

Cerchiamo di capire come stare distanti dall'instabilità, ovvero avere la garanzia di maggiore robustezza.

10.5 Margine di guadagno

Il margine di guadagno vuol dire che noi dato il margine di guadagno sappiamo quanto si può discostare garantendo la stabilità del sistema, dove il guadagno è il K_B .

Facciamo delle ipotesi:

1. $W(s)$ risposta del sistema a catena aperta ha $K_B > 0$, e che sia un sistema stabile;
2. Il diagramma di Nyquist deve attraversare una sola volta il semiasse reale negativo nel punto $x_A \in \mathbb{R}$;
3. $x_A > -1$

Da ciò il criterio di Nyquist è applicabile e ci garantisce che il sistema in catena chiusa sia stabile. Però se x_A si avvicina a -1 allora basterebbe un discostamento per rendere il sistema instabile.

Definizione 10.3 (margine di guadagno) *Il margine di guadagno si definisce come:*

$$k_m = \frac{1}{|x_A|} = \frac{1}{|W(j\omega_\pi)|} = -\frac{1}{x_A}$$

Dove ω_π è la pulsazione corrispondente tale che:

$$\angle W(j\omega_\pi) = -\pi$$

Ovvero quando si passa per l'asse reale.

Ricavare k_m dal diagramma di bode è molto semplice:

1. Si trova ω_π sul diagramma della fase;
2. Per tale pulsazione si ricava il modulo dall'altro diagramma e si fa l'inverso;

Per questo motivo conviene scrivere i diagrammi di bode uno sopra l'altro allineati.

Osservazione 10.5 *Il margine k_m non è espresso in dB.*

Osservazione 10.6 *Se non è rispettata la seconda ipotesi allora k_m non è definito.*

k_m è legato alla robustezza. Infatti il margine di guadagno è direttamente legato alla robustezza rispetto all'incertezza sul guadagno. Se l'incertezza del guadagno (fattore moltiplicativo della funzione di trasferimento) è maggiore del margine di guadagno si ha un avvolgimento intorno a -1 e allora il sistema non sarebbe più stabile.

10.6 Margine di fase

Consideriamo le seguenti ipotesi:

1. $W(s)$ stabile;
2. Il diagramma di Nyquist attraversa una e una sola volta la circonferenza di raggio unitario:

$$|W(j\omega_a)| = 1 \implies |W(j\omega_a)|_{dB} = 0 \quad \varphi_A = \angle W(j\omega_a)$$

3. $|\varphi_A| < \pi$, solitamente φ_A è negativo in quanto nel terzo quadrante;

Definizione 10.4 (margine di fase) *Definiamo il margine di fase come:*

$$m_\varphi = \pi + \varphi_A$$

Tale margine ci dice quanto passa lontana la curva rispetto a -1, infatti il sistema essendo stabile va a zero per pulsazioni elevate.

Per ricavare m_φ dal diagramma di bode:

1. ricavare ω_a dal modulo;
2. ricavare $m_\varphi = \pi + \angle W(j\omega_a)$;

ω_a prende il nome di pulsazione di attraversamento.

10.7 Criterio di Bode (stabilità in catena chiusa)

Alternativa al criterio di Nyquist. Ipotesi:

1. $W(s)$ sistema a catena aperta stabile (no poli a parte reale positiva, possono esserci poli in zero);
2. Il diagramma di bode attraversa 0dB una sola volta;

Allora se:

$$K_B > 0 \wedge m_\varphi > 0 \iff \text{il sistema a catena chiusa è asintoticamente stabile}$$

10.8 Sintesi in frequenza

L'obiettivo è quello di trovare $C(s)$ che soddisfi delle specifiche nel tempo.

Specifiche dinamiche:

- tempo di salita t_R^* (90%);
- sovraelongazione s^* ;

Specifiche statiche (a regime permanente):

- errore a regime e_∞^* ;
- stabilità;
- reiezione ai disturbi;

10.8.1 Specifiche in frequenza

1. Errore a regime (già visto):

	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$
	e_∞^0	e_∞^1	e_∞^2
0	$\frac{1}{ K_B+1 }$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{ K_B }$	∞
2	0	0	$\frac{1}{ K_B }$

Dove sulle colonne c'è il tipo del sistema e sulla riga il segnale da inseguire in Laplace, considerando come sistema a catena aperta:

$$W(s) = \frac{K_B}{s^l} \tilde{W}(s)$$

Generalmente la specifica si dà in valore assoluto e l'errore a regime deve essere minore di un numero od oppure deve essere uguale a zero;

Usiamo $C(s)$ se necessario, infatti:

$$W(s) = C(s)G(s) = \underbrace{\frac{\mu_c}{s^l}}_{\text{Spec. statiche}} \underbrace{\tilde{C}(s)G(s)}_{\text{Spec. dinamoche}}$$

Attenzione che $\tilde{C}(s)$ può essere maggiore di 1, ma attenzione che non può essere minore di 1 perchè potrebbe essere non più rispettata la condizione dell'errore a regime.

Il tipo del sistema influenza anche la reiezione ai disturbi.

Aggiungere poli in zero si riduce il margine di fase m_φ .

2. Sovraelongazione e stabilità:

Si può dimostrare che:

$$s^* \text{ decresce} \Leftrightarrow m_\varphi \text{ di } W(s) \text{ cresce}$$

Quindi si ha $m_\varphi > m_\varphi^*$ ha un impatto sulla stabilità robusta e sulla sovraelongazione.

3. Il tempo di salita è legato alla pulsazione di attraversamento:

$$|W_{ry}(j\omega)|_{dB} = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|_{dB}$$

Dove considerando la catena aperta come al solito:

$$|W_{ry}(j\omega)| \approx \begin{cases} 0dB & \omega < \omega_a \\ |W_{ry}(j\omega)|_{dB} & \omega > \omega_a \end{cases}$$

Quindi la pulsazione di attraversamento del sistema a catena aperta è anche la frequenza di taglio per sistema chiusa (filtro passa basso). Quindi quando si supera la pulsazione di attraversamento il sistema non insegnerà bene.

L'effetto filtrante del sistema a catena chiusa è direttamente legato alla pulsazione di attraversamento a catena aperta.

Osservazione 10.7 *Il sistema a catena chiusa sarà più performante e un tempo salita più basso, più sarà alta la pulsazione di attraversamento del sistema a catena aperta.*

Attenzione che si amplificano i disturbi ad alte frequenza.

In genere abbiamo come specifica $\omega_a = \omega_a^*$

10.8.2 Indicazioni operative sulla sintesi in frequenza

1. Si soddisfano le specifiche statiche, quindi otteniamo un controllore della forma con $\mu_c > 0$:

$$C(s) = \frac{\mu_c}{s^{l_c}} \tilde{C}(s)$$

Definiamo:

$$\tilde{W}(s) = \frac{\mu_c}{s^{l_c}} G(s)$$

Quindi abbiamo:

$$W(s) = C(s)G(s) = \frac{\mu_c}{s^{l_c}} \tilde{C}(s)G(s) = \tilde{C}(s)\tilde{W}(s)$$

Sostanzialmente nel prossimo passaggio invece di considerare il sistema come $G(s)$ consideriamo $\tilde{W}(s)$, e sviluppiamo $\tilde{C}(s)$. Attenzione che però non si deve avere che $\tilde{C}(0) < 1$ in quanto le condizioni statiche potrebbero non essere rispettate. Si può usare una $\tilde{C}(0) < 1$ quando l'errore a regime deve essere nullo e quindi dipende dal tipo del sistema.

2. Si soddisfano le specifiche dinamiche. Si progetta $\tilde{C}(s)$ operando su $\tilde{W}(s)$.

Osservazione 10.8 $\tilde{C}(s)$ non può cancellare poli instabili di $G(s)$.

Osservazione 10.9 $\tilde{C}(s)$ deve essere propria per essere realizzabile.

10.9 Reti standard

Nel caso che da specifica statica si impone $\tilde{C}(0) > 1$ ci sono delle soluzioni standard. La scelta della rete standard si fa in base alla minoranza o la maggioranza della pulsazione di attraversamento e dal margine di fase.

	$\omega_a < \omega_a^*$	$\omega_a > \omega_a^*$
$m_\varphi(\omega_a^*) < m_\varphi^*$	rete anticipatrice	rete a sella
$m_\varphi(\omega_a^*) > m_\varphi^*$	amplificazione dura	rete ritardatrice

1. **Amplificazione:** Caso in cui si ha che le specifiche sull'errore a regime e sul margine di fase sono rispettate, ma la pulsazione di attraversamento è minore di quella richiesta. Quindi il grafico di bode deve essere alzato.

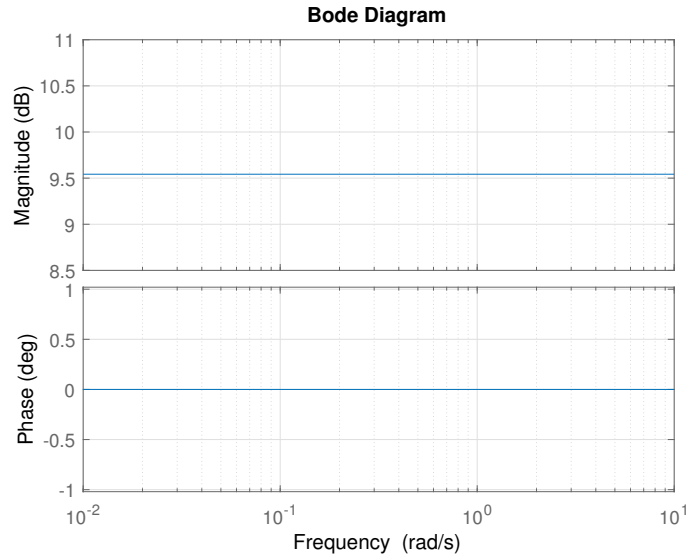
Quindi si ha che:

$$\tilde{C}(s) = \mu_c$$

Quindi abbiamo:

$$20 \log |\tilde{W}(j\omega_a^*) \cdot \mu_c| = 0dB \implies \mu_c = 10^{-\frac{|\tilde{W}(j\omega_a^*)|_{dB}}{20}} = \frac{1}{|\tilde{W}(j\omega_a^*)|}$$

Esempio del controllore ($\mu_c = 3$):



2. **Rete ritardatrice** (nome fa riferimento al nome in quanto la fase diminuisce e quindi introduce un ritardo): Caso in cui si ha che le specifiche sull'errore a regime e sul margine di fase sono rispettate, ma la pulsazione di attraversamento è maggiore di quella richiesta. Quindi il grafico di bode deve essere abbassato senza modificare la fase, però non possiamo moltiplicare per un numero minore di 1. Quindi si mette un polo seguito da uno zero. Quindi:

$$\tilde{C}(s) = \frac{1 + sT}{1 + srT}$$

Si sceglie T tale che $1/T$ sia almeno due decadi prima (tempo per sistemare la fase) di ω_a^* :

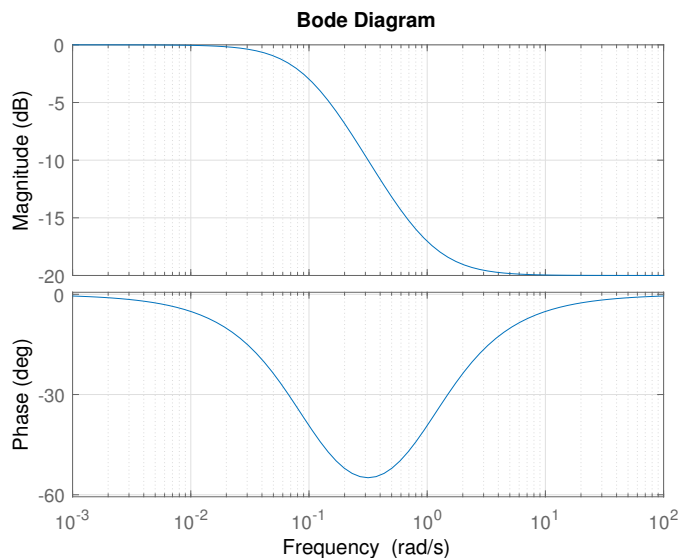
$$\frac{1}{T} \leq \frac{\omega_a^*}{100} \implies T \geq \frac{100}{\omega_a^*}$$

Tra il polo e lo zero il grafico di bode scenderà di $20dB$ per una distanza di r , si vuole che $|W(j\omega_a^*)|_{dB} = 0$, quindi:

$$-20 \log r + \left| \tilde{W}(j\omega_a^*) \right|_{dB} = 0 \implies r = 10^{\frac{|\tilde{W}(j\omega_a^*)|_{dB}}{20}}$$

Dove $r > 1$.

Esempio del controllore ($T = 1$, $r = 10$):



3. **Rete anticipatrice**: Caso in cui la pulsazione di attraversamento è minore di quella richiesta e il margine di fase non è abbastanza e quindi bisogna aumentarlo. La scelta migliore è quella di

aggiungere uno zero stabile prima della pulsazione di attraversamento voluta per alzare modulo e fase e poi un polo dopo la pulsazione di attraversamento per rendere il controllore realizzabile. Quindi abbiamo un controllore della forma:

$$\tilde{C}(s) = \frac{1 + sT}{1 + sTa}$$

Dove $0 < a < 1$. Abbiamo che il grafico della del modulo si alza di $20 \log\left(\frac{1}{a}\right)$, poi abbiamo che la pulsazione tale che la fase del controllore diventa massima è $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{a}T}$ e che il valore della fase massima è di $\varphi_{max} = \arctan\left(\frac{1-a}{2\sqrt{a}}\right)$.

Quindi si mette ω_{max} nella pulsazione di attraversamento voluta per rendere minimo il margine di fase, quindi:

$$\frac{1}{\sqrt{a}T} = \omega_a^* = \omega_{max}$$

Attenzione che a differenza della rete ritardatrice la pulsazione di attraversamento si trova in mezzo al polo e allo zero aggiunti, quindi si avrà un innalzamento della faase di metà, quindi:

$$10 \log\left(\frac{1}{a}\right) + \left|\tilde{W}(j\omega_a^*)\right|_{dB} = 0$$

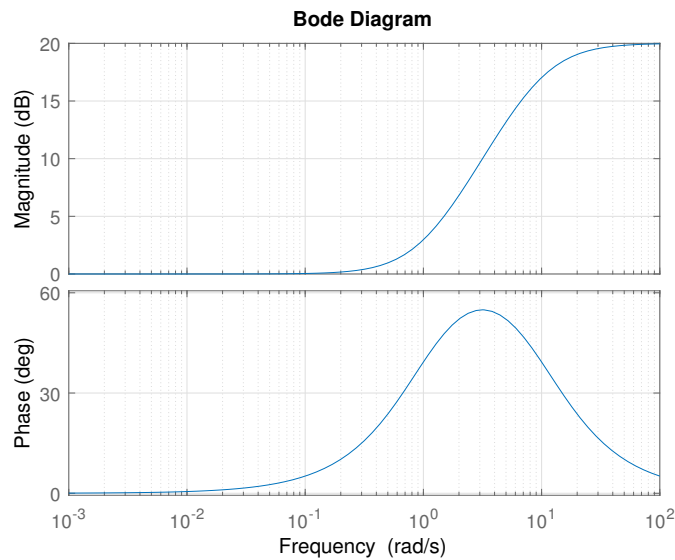
É utile ricordare a memoria:

$$\begin{aligned} a = 0.1 &\implies \varphi_{max} = 55^\circ \\ a = 0.01 &\implies \varphi_{max} = 79^\circ \\ a = 0.001 &\implies \varphi_{max} = 86^\circ \\ a = 0.0001 &\implies \varphi_{max} = 88^\circ \end{aligned}$$

Può succedere che la scelta di a faccia rispettare le condizioni sul modulo ma che la fase non sia sufficientemente grande il quel caso si usa anche una rete a sella. Infatti si deve verificare:

$$\arctan\left(\frac{1-a}{2\sqrt{a}}\right) + m_\varphi(\omega_a^*) \geq m_\varphi$$

Esempio del controllore ($T = 1$, $a = 0.1$):



4. **Rete a sella.** Caso in cui la pulsazione di attraversamento è maggiore di quella richiesta e il margine di fase non è abbastanza e quindi bisogna aumentarlo.

Si piazza ω_{max} (punto in cui la fase è massima) in ω_a^* . Per abbassare la fase si mette una rete ritardatrice che abbassa il modulo e poi un anticipatrice in cui si rialza il modulo e si alza la fase:

$$\tilde{C}(s) = \frac{1 + sT_A}{1 + sT_A a} \frac{1 + sT_R}{1 + sT_R r}$$

L'azione del modulo è una diminuzione di $10 \log(r)$ e per la fase è φ_{max} sempre la stessa formula anticipatrice. Attenzione che $a = \frac{1}{r}$. T_R è due decadi prima di ω_a .

Linee guida per trovare i tre gradi di libertà (T_A , T_R , a):

- Fissare $\omega_{max} = \omega_a^*$;
- $10 \log(r) - \left| \tilde{W}(j\omega_a^*) \right|_{dB} = 0$, da cui si ricava r e di conseguenza a e anche T_A e di conseguenza anche T_R ;
- Se $\varphi_m(\omega_a^*) > \varphi_m^*$ allora finito;
- Se $\varphi_m(\omega_a^*) < \varphi_m^*$ allora $a \neq \frac{1}{r}$;
- Scelgo a^* tale che da rispettare $\varphi_m(\omega_a^*) > \varphi_m^*$;
- Si sceglie r^* da:

$$-20 \log(r) + 10 \log\left(\frac{1}{a^*}\right) + \left| \tilde{W}(j\omega_a^*) \right|_{dB} = 0$$

Esempio del controllore ($T_A = 0.01$, $T_R = 100$, $a = 0.1$, $r = 10$):

