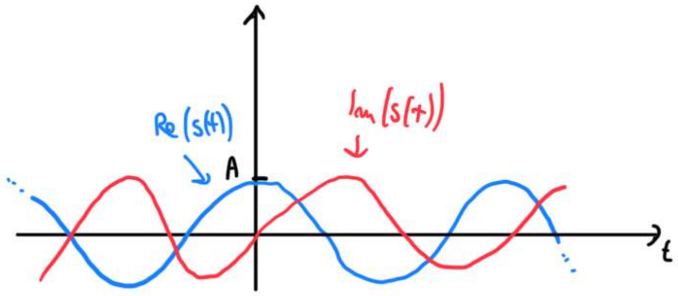
Lezione 3 - 1/03/2024

PROVIAMO A VEDERE COSA SUCCEDE QUANDO ABBIAMO A CHE FARE CON

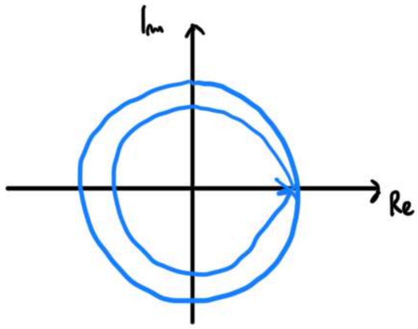
ESPONENZIALI COMPLESSI

$$s(t) = \underset{A \in \mathbb{R}}{A} e^{j2\pi F_0 t} = A\, e^{j\omega_0 t}$$

$$= A\cos(\omega_0 t) + jA\sin(\omega_0 t)$$



il periodo è $\boxed{T_p = \frac{1}{|F_0|}}$



$$\rightarrow s(t+T_p) = e^{j2\pi F_0 (t + \overset{\frac{1}{|F_0|}}{T_p})} = e^{j2\pi F_0 t + j2\pi \frac{F_0}{|F_0|}}$$

$$= e^{j2\pi F_0 t \pm j2\pi} = e^{j2\pi F_0 t} \cdot \cancelto{1}{e^{\pm j2\pi}} = s(t)$$

CALCOLIAMO ORA:

- AREA A_s
- VALORE MEDIO m_s
- MODULO QUADRO $|s(t)|^2$
- ENERGIA E_s
- POTENZA P_s

- $A_s(T_p) = 0$ (perché il valore medio di sin e cos è 0)

[se volessi calcolarlo in modo formale

$$A_s(T_p) = \int_0^{T_p} A e^{j2\pi F_0 t}\, dt = \left[\frac{A e^{j2\pi F_0 t}}{j2\pi F_0}\right]_0^{T_p} = \frac{A}{j2\pi F_0}\left(\underset{1}{e^{j2\pi \frac{F_0}{|F_0|}}} - 1\right) = 0$$

]

- $m_s = \frac{A_s(T_p)}{T_p} = 0$

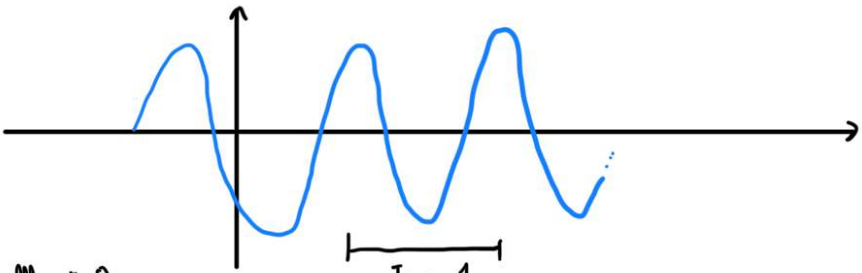
- $|s(t)|^2 = |A e^{j2\pi F_0 t}|^2 = |A|^2 = A^2$

- $E_s(T_p) = A^2 T_p$

- $P_s = \frac{E_s(T_p)}{T_p} = A^2$

Un altro risultato da memorizzare è un esercizio che facciamo adesso, in cui il segnale è una sinusoide

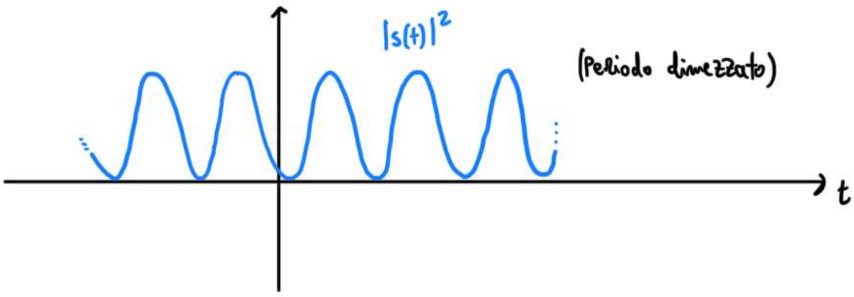
ESERCIZIO: ABBIAMO UN SEGNALE SINUSOIDALE QUALUNQUE, PER ESEMPIO:



$m_s = 0$ $\qquad T_p = \frac{1}{|F_0|}$

$$|s(t)|^2 = A^2 \cos^2(2\pi F_0 t + \varphi_0)$$
$$= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi \cdot 2F_0 t + 2\varphi_0)$$

[RICORDA CHE:
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$
]



(periodo dimezzato)

$$E_s(T_p) = \frac{A^2}{2} T_p + \frac{A^2}{2} \cdot 0 = \frac{A^2}{2} \cdot T_p$$

$$P_s = \frac{A^2}{2}$$

Cosa succede quando facciamo una

COMPOSIZIONE DI SINUSOIDI

$$s(t) = 2\cos(\underbrace{18\pi t}_{2\pi \cdot 9 \cdot t} + 1) \cdot \sin(\underbrace{12\pi t}_{2\pi \cdot 6t} + 7)$$

$F_1 = 9$, $T_{p_1} = \frac{1}{9}$ $\qquad$ $F_2 = 6$, $T_{p_2} = \frac{1}{6}$

Come facciamo a disegnare un segnale del genere?

$T_{p_1} \cdot m$
$T_{p_2} \cdot K$ $\quad (\forall m, K \in \mathbb{Z})$ (se un segnale è periodico di T_{p_1}, sarà anche periodico di $T_{p_1} \cdot m$)

PER TROVARE UN PERIODO (NON NECESSARIAMENTE QUELLO FONDAMENTALE)

$T_{p_1} m = T_{p_2} \cdot K$

PERIODICITÀ COMUNE

$\frac{m}{K} = \frac{T_{p_2}}{T_{p_1}} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ K = 2 \end{cases} \rightarrow T_p = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

SE s(t) FOSSE FATTO COSÌ:

$\cos(2\pi \cdot 6t) + \sin(\underbrace{6t})$

$F_1 = 6 \qquad 2\pi \cdot \frac{6}{2\pi} t \rightarrow F_2 = \frac{3}{\pi}$

$T_{p_1} = \frac{1}{6} \qquad T_{p_2} = \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow$ scrivo $m \frac{1}{6} = K \frac{\pi}{3}$ $\rightarrow$ riesco a trovare m, K interi? No, non ha soluzione

$\frac{m}{K} = 2\pi$ che è irrazionale

QUINDI, SE NON RIESCO A TROVARE LA PERIODICITÀ COMUNE INTERA, CONCLUDO CHE LA COMPOSIZIONE DEI 2 SEGNALI NON È PERIODICA

IN GENERALE:

$\boxed{\text{UNA COMPOSIZIONE DI SEGNALI PERIODICI DÀ UN SEGNALE PERIODICO} \iff \text{LE FREQUENZE SONO IN RAPPORTO RAZIONALE TRA LORO}}$

ESERCIZIO

$$s(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{COMPLESSO} \\ A_1 = |A_1| e^{j\varphi_1}}}{A_1} e^{j2\pi F_1 t} + A_2 e^{j2\pi F_2 (t)}$$

$F_1 \neq F_2$

$F_1, F_2 \neq 0$

1) E' PERIODICO? SOLO SE $\frac{F_1}{F_2} \in \mathbb{Q}$ (RAZIONALE)

2) VALORE MEDIO?

$$m_s = A_1 m_{s_1} + A_2 m_{s_2} = 0$$

3) POTENZA DEL SEGNALE?

$$P_s = |s(t)|^2 = \left| |A_1| e^{j(2\pi F_1 (t) + \varphi_1)} + |A_2| e^{j(2\pi F_2 t + \varphi_2)} \right|^2$$

$$= s(t) \cdot s^*(t)$$

$$= \left(|A_1| e^{j(2\pi F_1 t + \varphi_1)} + |A_2| e^{j(2\pi F_2 t + \varphi_2)}\right) \cdot \left(|A_1| e^{-j(2\pi F_1 t + \varphi_1)} + |A_2| e^{-j(2\pi F_2 t + \varphi_2)}\right)$$

$$|s(t)|^2 = |A_1|^2 \underbrace{e^{j(2\pi F_1 t + \varphi_1)} \cdot e^{-j(2\pi F_1 t + \varphi_1)}}_{= e^{j0} = 1} + |A_2|^2 + |A_1||A_2| \underbrace{e^{j(2\pi F_1 t + \varphi_1)} \cdot e^{-j(2\pi F_2 t + \varphi_2)}}_{e^{j\alpha}}$$

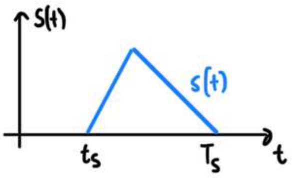
$$+ |A_2||A_1| \underbrace{e^{-j(2\pi F_1 t + \varphi_1)} \cdot e^{j(2\pi F_2 t + \varphi_2)}}_{e^{-j\alpha}}$$

$$\rightarrow |s(t)|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2|A_1||A_2| \cos(2\pi \underset{\substack{\uparrow \\ F_1 - F_2 \neq 0}}{(F_1 - F_2)} t + \varphi_1 - \varphi_2)$$

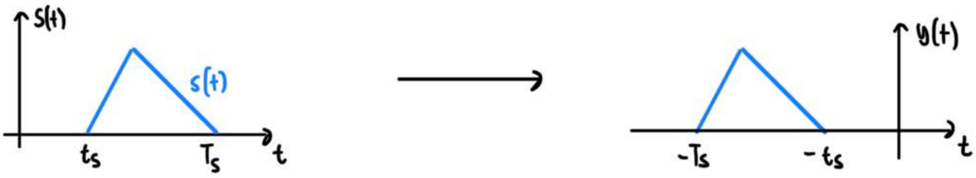
$$\rightarrow P_s = |A_1|^2 + |A_2|^2 \qquad \rightarrow P_s = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

NOTA: $A \cos(2\pi F_0 t) = \frac{A}{2} e^{j2\pi \overset{\downarrow F_0}{F_0} t} + \frac{A}{2} e^{-j2\pi \overset{\downarrow -F_0}{F_0} t}$

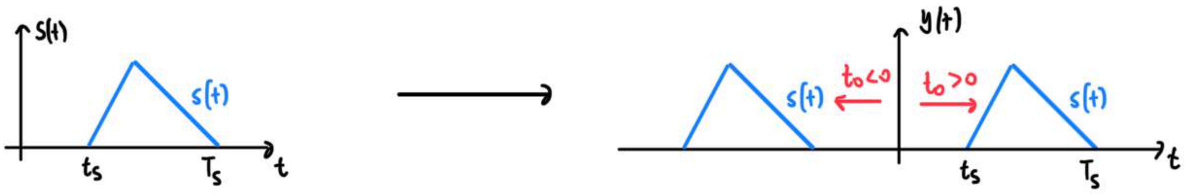
TRASFORMAZIONI ELEMENTARI



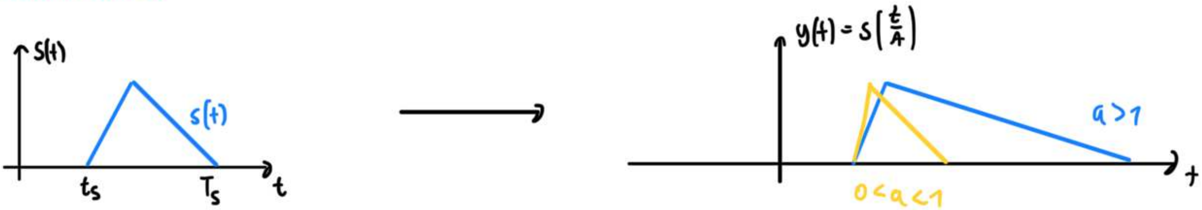
- **RIBALTAMENTO**: $y(t) = s(-t) = s_-(t)$



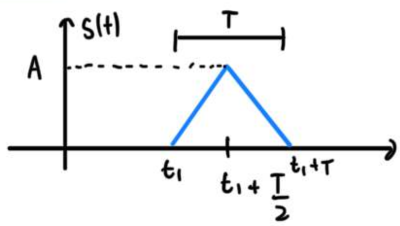
- **TRASLAZIONE**: $y(t) = s(t-t_0)$



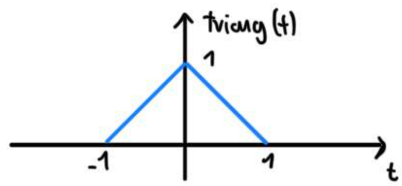
- **CAMBIO SCALA**:



ESEMPIO: sia dato il segnale



lo voglio trasformare in: triang(t)



$$y(t) = \text{triang}\left(\frac{t}{T/2}\right) = \text{triang}\left(\frac{2t}{T}\right)$$

abbiamo un triangolo di base T centrato altrove. devo centrarlo in 0

$$z(t) = y\left(t - \left(t_1 + \frac{T}{2}\right)\right) = \text{triang}\left(\frac{2(t-t_1)-T}{T}\right)$$

ora devo sistemare l'altezza, basta molt. per un A

HO REALIZZATO IL SEGUENTE SISTEMA: