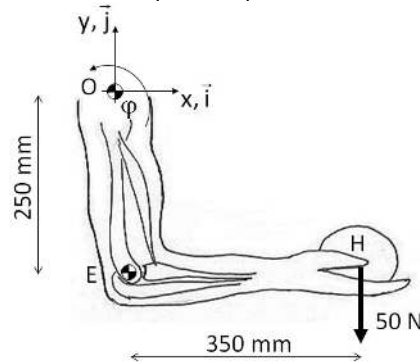


BIOMECCANICA A.A. 2024-25
ESERCIZI SU SISTEMI DI FORZE

1. CALCOLO DEL MOMENTO DI UNA FORZA

Determinare il momento della forza indicata rispetto al punto di articolazione del gomito e della spalla.



Rispetto al sistema di riferimento indicato (destro), orientato dai versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, i segmenti orientati che interessano per il calcolo sono:

$$OE = (0 \quad -250 \quad 0) \quad OH = (350 \quad -250 \quad 0) \quad EH = (350 \quad 0 \quad 0)$$

Il vettore forza applicato nel punto H è dato da

$$\vec{F} = (0 \quad -50 \quad 0)$$

Il momento della forza rispetto al punto E (articolazione del gomito) è dato dal determinante indicato nel seguito:

$$\vec{M}_E = EH \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 350 & 0 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot [350 \cdot (-50)] = -17500 \vec{k} \text{ Nmm}$$

Il momento è quindi di verso orario rispetto al punto E (negativo, secondo la convenzione adottata). Il momento della forza rispetto al punto O (articolazione della spalla) è dato da:

$$\vec{M}_O = OH \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 350 & -250 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot [350 \cdot (-50) + 0 \cdot (-250)] = -17500 \vec{k} \text{ Nmm}$$

Il momento è quindi uguale se calcolato rispetto ai punti E oppure O.

Una forza applicata nel punto H con componenti

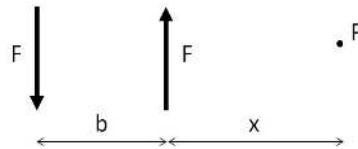
$$\vec{F} = (35 \quad -25 \quad 0)$$

è una forza con retta di applicazione passante per O (si costruisca per esercizio la rappresentazione grafica). Il momento di questa rispetto all'articolazione della spalla deve risultare nullo, come si ricava dal calcolo:

$$\vec{M}_O = OH \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 350 & -250 & 0 \\ 35 & -25 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot [350 \cdot (-25) + 35 \cdot (-250)] = 0$$

2. MOMENTO DATO DA UNA COPPIA DI FORZE DI VERSO OPPOSTO

Si calcoli il momento dato dal sistema di forze indicato, rispetto al punto P.



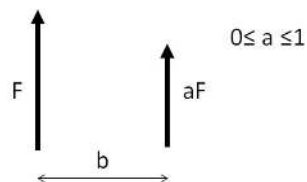
Dato che il sistema di forze è planare, il vettore momento sarà perpendicolare al piano di giacenza e con segno positivo se antiorario o negativo se orario. Procedendo in modo più agile rispetto a quanto fatto nell'esercizio precedente, si ottiene

$$M_p = F \cdot (b + x) - F \cdot x = Fb$$

Si noti che il modulo del momento della coppia di forze è pari a Fb , a prescindere dal punto rispetto al quale si calcola.

3. RISULTANTE DI UN SISTEMA DI FORZE

Si determini la retta di applicazione della risultante del sistema di forze indicato in figura.



La risultante ha modulo $R = F \cdot (1 + a)$ ed è parallela alle forze indicate, con medesimo verso. Per determinare la posizione della retta di applicazione calcoliamo il momento rispetto al punto di applicazione della retta di sinistra (si sarebbe potuto scegliere qualsiasi altro punto):

$$M = aF \cdot b$$

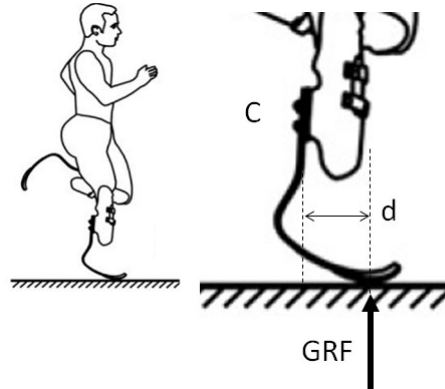
La distanza della retta di applicazione della risultante da quella di F è pari a:

$$d = \frac{M}{R} = \frac{aF \cdot b}{(1 + a)F}$$

Si noti che per $a = 1$ la risultante è in posizione simmetrica rispetto alle forze indicate in figura. Per $a \rightarrow 0$, la risultante tende a coincidere con la forza di sinistra.

4. SOLLECITAZIONI SU UNA PROTESI

Si calcolino risultante e momento risultante della reazione al suolo in appoggio monopodalico per l'atleta con protesi trans-tibiali descritto in figura.



Dati del soggetto: massa $m = 80 \text{ kg}$, altezza $h = 180 \text{ cm}$

Per la configurazione indicata in figura e per i dati antropometrici e di protesi dell'atleta, si stima che d sia pari a 15.2 cm .

Da misure sperimentali la reazione sul terreno GRF è ragionevolmente pari a $1.8 W_b$, dove W_b è la forza peso dell'atleta. Si ricava pertanto:

$$W_b = 80 \text{ kg} \cdot 9.8066 \text{ m/s}^2 = 784.5 \text{ N}$$

$$\text{GRF} = 1.8 \cdot W_b = 1.8 \cdot 784.5 = 1412.1 \text{ N}$$

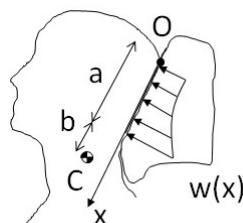
Risultante e momento risultante rispetto a C sono dati da

$$R = \text{GRF} = 1412.1 \text{ N} \quad (\text{nella direzione e nel verso di GRF})$$

$$M = \text{GRF} \cdot d = 1412.1 \cdot 15.2 / 100 = 214.64 \text{ Nm} \quad (\text{verso antiorario})$$

5. RISULTANTE E MOMENTO RISULTANTE DI UN CARICO DISTRIBUITO

Si suppone che il poggiatesta di un'auto applichi al passeggero una pressione sulla nuca riconducibile, in via semplificativa, al carico per unità di lunghezza $w(x)$ indicato in figura. Si calcoli risultante e momento risultante del carico distribuito rispetto al punto C, corrispondente al giunto cervicale C3-C4.



$$a = 0.15 \text{ m}, b = 0.05 \text{ m}, w(x) = 200(1 + 20x^2) \text{ N/m}$$

Conviene calcolare il sistema statico equivalente rispetto al punto di origine del sistema di riferimento x:
Risultante in modulo:

$$R = \int_0^{0.15} w(x) dx = \int_0^{0.15} 200(1 + 20x^2) dx = \left[200x + \frac{4000}{3}x^3 \right]_0^{0.15}$$

$$= 200 \cdot 0.15 + \frac{4000}{3} \cdot 0.15^3 = 30 + 4.5 = 34.5 \text{ N}$$

Direzione e verso sono concordi al carico distribuito.

Momento risultante in modulo:

$$M_0 = \int_0^{0.15} w(x) \cdot x dx = \int_0^{0.15} 200(x + 20x^3) dx = \left[200x^2 + \frac{4000}{4}x^4 \right]_0^{0.15}$$

$$= \frac{200}{2} \cdot 0.15^2 + \frac{4000}{4} \cdot 0.15^4 = 2.25 + 0.506 = 2.76 \text{ Nm}$$

Il verso del momento è orario, pertanto negativo rispetto alla convenzione di segno adottata.

La risultante del carico distribuito è una forza pari a 34.5 N, applicata ad una distanza dal punto O pari a:

$$x = \frac{M_0}{R} = \frac{2.76}{34.5} = 0.08 \text{ m}$$

Il sistema di forze staticamente equivalente al carico distribuito e applicato al punto C è dato da:

$$R = 34.5 \text{ N}$$

$$M_c = -2.76 + 34.5 \cdot 0.2 = -2.76 + 6.9 = 4.14 \text{ Nm}$$

Il momento risultante M_c è positivo, pertanto antiorario.