ESERCIZIO

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- Dato il tensore degli sforzi $[\sigma]$
  - → calcolare tensioni, direzioni principali
  - → dimostrare che nel sist. principale vige uno stato di tensione monoassiale
  - → identificare la parte isovolumetrica / sferica e deviatorica del tensore $[\sigma]$
  - → disegnare cerchi di Mohr

- calcolo tensioni principali

$$\det\left([\sigma] - \sigma_\alpha [I]\right) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\sigma_\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1-\sigma_\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1-\sigma_\alpha \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\sigma_\alpha)\left[(1-\sigma_\alpha)^2 - 1\right] - 1\left[(1-\sigma_\alpha) - 1\right] + 1\left[1 - (1-\sigma_\alpha)\right] = 0$$

$$(1-\sigma_\alpha)\left[\underbrace{\sigma_\alpha^2 \cancel{+1} - 2\sigma_\alpha \cancel{-1}}_{\sigma_\alpha(\sigma_\alpha - 2)}\right] + \sigma_\alpha + \sigma_\alpha = 0$$

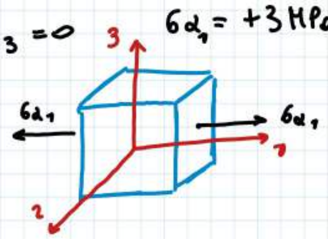
$$(\sigma_\alpha)\left[(1-\sigma_\alpha)(\sigma_\alpha - 2) + 2\right] = 0$$

$$(\sigma_\alpha)\left[\sigma_\alpha \cancel{-2} - \sigma_\alpha^2 + 2\sigma_\alpha \cancel{+2}\right] = 0$$

$$-(\sigma_\alpha)^2\left[\sigma_\alpha - 3\right] = 0$$

$\sigma_{\alpha_{2,3}} = 0 \qquad \sigma_{\alpha_1} = +3 \text{ MPa}$

due autovalori sono NULLI quindi nel SISTEMA PRINCIPALE (1, 2, 3) AVRÒ UNO STATO di TENSIONE MONOASSIALE



(cioè che agisce su un unico asse)

direzione principale associata all'autovalore $\sigma_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ \quad '' \qquad = 1 \\ \quad '' \qquad = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = -u_2 - u_3 \\ -u_2 - u_3 + u_2 + u_3 = 0 \\ \hookrightarrow 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 = \bar{u} \\ u_3 = \bar{\bar{u}} \\ u_1 = \bar{u} + \bar{\bar{u}} \end{cases}$$

autovettore
$\langle 3, 1, 2 \rangle$

direzione principale associata all'autovalore $\sigma_2 = +3\ MPa$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{cases} -2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases}$$

$u_2 = 2u_1 - u_3$

$u_1 - 2(2u_1 - u_3) + u_3 = 0$

$\hookrightarrow u_1 - 4u_1 + 2u_3 + u_3 = 0$

$-3u_1 = -3u_3$

$u_1 = u_3 \rightarrow u_2 = u_1$

$u_1 + u_1 - 2u_1 = 0$

$0 = 0$

$u_1 = \bar{u}$ arbitrario

autovettore $\langle 1, 1, 1 \rangle$

- come per il tensore deformazione anche tensore tensione può essere descritto come la somma di due contributi

$$[\sigma] = [\sigma_s] + [\sigma_d]$$

parte IDROSTATICA o parte SFERICA $\quad [\sigma_s] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$ con $\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\underset{\text{TRACCIA}}{tr[\sigma]}}{3}$

parte DEVIATORICA $\quad [\sigma_d] = [\sigma] - [\sigma_s]$

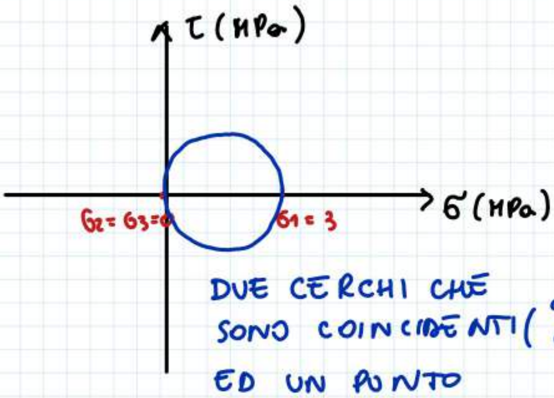
$$= \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}$$

in questo caso:

$$[\sigma_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_m = \frac{tr([\sigma])}{3} = \frac{1+1+1}{3} = 1$$

$[\sigma_d] = [\sigma] - [\sigma_s]$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



DUE CERCHI CHE SONO COINCIDENTI (cerchio σ_1, σ_2 / cerchio σ_2, σ_3)
ED UN PUNTO

→ nel punto, ogni sistema di rif. è un sistema principale
(in questo caso NON agisce nessuno stato tensionale $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)