A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

1º Appello — 19 giugno 2012

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni delle equazioni $2x_1 - x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 0$, $2x_2 + x_3 + tx_4 = 0$, ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determini la dimensione e una base di W.

(c) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus U' = \mathbb{R}^4$. Si dica inoltre se tale sottospazio U' è unico oppure no.

Esercizio 2. Siano $v_1 = (-2, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, -1)$, $v_4 = (1, 1, 3)$, $w_2 = (-1, 1, 0)$, $w_3 = (5, -3, 2)$, $w_4 = (t, 5, -1)$ vettori di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ e $f(v_i) = w_i$, per $i = 2, 3, 4$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Si determini l'antiimmagine del vettore $(0, 1, 1)$ e l'antiimmagine del vettore $(2, 2, -1)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'identità.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni $2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0$ e $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (4, 2, 4, 2)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

(c) Esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$? In caso di risposta affermativa si determini una base di L.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che associa ad un vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia r la retta di equazioni $2x - y - 2 = 0$ e $x - z + 1 = 0$ e sia s la retta passante per il punto $P = (2, 1, -1)$ e parallela al vettore $v = (t^2, 1, 7t + 4)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ passante per il punto P e contenente la retta r.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si dica se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(d) Per $t = 1$ si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo a s.

B

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ

1^o Appello — 19 giugno 2012

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni delle equazioni $x_2 - 2x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, $x_1 - x_3 + tx_4 = 0$, ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $2x_1 + x_2 + 2x_4 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determini la dimensione e una base di W.

(c) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus U' = \mathbb{R}^4$. Si dica inoltre se tale sottospazio U' è unico oppure no.

Esercizio 2. Siano $v_1 = (-1, 2, -3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$, $v_4 = (1, 1, 4)$, $w_2 = (3, -1, 2)$, $w_3 = (1, -1, 0)$, $w_4 = (t, -3, 4)$ vettori di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ e $f(v_i) = w_i$, per $i = 2, 3, 4$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Si determini l'antiimmagine del vettore $(0, 3, 3)$ e l'antiimmagine del vettore $(2, -2, 3)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'identità.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ e $2x_1 + x_3 + x_4 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (3, 3, -2, -6)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

(c) Esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$? In caso di risposta affermativa si determini una base di L.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che associa ad un vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia r la retta di equazioni $x + z - 4 = 0$ e $y - 3z + 3 = 0$ e sia s la retta passante per il punto $P = (1, 2, 1)$ e parallela al vettore $v = (2t - 1, 1, t^2)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ passante per il punto P e contenente la retta r.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si dica se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(d) Per $t = 2$ si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo a s.

C

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, N. RODINÒ

1º Appello — 19 giugno 2012

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni delle equazioni $3x_2+x_3=0$, $x_1-x_2+2x_4=0$, $3x_1+x_3+tx_4=0$, ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1+x_2+6x_4=0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determini la dimensione e una base di W.

(c) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U+W$.

(d) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus U' = \mathbb{R}^4$. Si dica inoltre se tale sottospazio U' è unico oppure no.

Esercizio 2. Siano $v_1=(5,1,2)$, $v_2=(1,0,-1)$, $v_3=(1,0,1)$, $v_4=(2,1,1)$, $w_2=(-2,-1,-3)$, $w_3=(0,1,1)$, $w_4=(t,-1,1)$ vettori di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ e $f(v_i)=w_i$, per $i=2,3,4$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Si determini l'antiimmagine del vettore $(-1,1,0)$ e l'antiimmagine del vettore $(1,1,-3)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'identità.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni $x_1-3x_2+2x_3=0$ e $2x_2+3x_3+x_4=0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v=(1,-5,6,6)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v+w \in U$.

(c) Esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$? In caso di risposta affermativa si determini una base di L.

(d) Sia $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che associa ad un vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia r la retta di equazioni $2x-y-7=0$ e $x-y-z=0$ e sia s la retta passante per il punto $P=(1,-1,3)$ e parallela al vettore $v=(3t-2,t^2,-1)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ passante per il punto P e contenente la retta r.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si dica se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(d) Per $t=1$ si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo a s.

D

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, N. Rodinò

1º Appello — 19 giugno 2012

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ dato dalle soluzioni delle equazioni $3x_1+x_4=0$, $x_2-2x_3-3x_4=0$, $tx_1+x_2-2x_3=0$, ove $t \in \mathbb{R}$ è un parametro.
Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$.

(a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si determini la dimensione e una base di U.

(b) Si determini la dimensione e una base di W.

(c) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Per il valore di t per cui U ha dimensione 2, si determini una base di un sottospazio $U' \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus U' = \mathbb{R}^4$. Si dica inoltre se tale sottospazio U' è unico oppure no.

Esercizio 2. Siano $v_1 = (3,7,-1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,-1,0)$, $v_4 = (0,2,-1)$, $w_2 = (1,1,2)$, $w_3 = (1,3,4)$, $w_4 = (t,-1,-4)$ vettori di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si dica per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ e $f(v_i) = w_i$, per $i = 2, 3, 4$.

(b) Per il valore di t trovato nel punto (a) si scriva la matrice di f rispetto alle basi canoniche.

(c) Si determini l'antiimmagine del vettore $(1,-1,0)$ e l'antiimmagine del vettore $(2,2,-1)$.

(d) Si dica se esiste una funzione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'identità.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio di equazioni $x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 0$ e $x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$.

(a) Si determini una base di U e una base di $U^\perp$.

(b) Dato il vettore $v = (1,-3,-8,5)$, si determini un vettore w di norma minima tale che $v + w \in U$.

(c) Esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $L \oplus U = \mathbb{R}^4$ e $L \oplus U^\perp = \mathbb{R}^4$? In caso di risposta affermativa si determini una base di L.

(d) Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare che associa ad un vettore di $\mathbb{R}^4$ la sua proiezione ortogonale su U. Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f e si dica se f è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine euclideo tridimensionale, sia r la retta di equazioni $x - y + 3 = 0$ e $2y - z + 1 = 0$ e sia s la retta passante per il punto $P = (-2,3,1)$ e parallela al vettore $v = (1, 2t+3, t^2)$.

(a) Si determini l'equazione cartesiana del piano σ passante per il punto P e contenente la retta r.

(b) Si determini la proiezione ortogonale del punto P sulla retta r.

(c) Al variare di $t \in \mathbb{R}$, si dica se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.

(d) Per $t = 1$ si determini l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta r e parallelo a s.