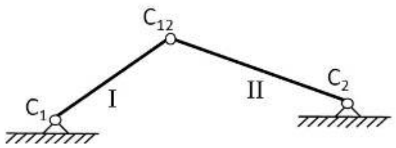
BIOMECCANICA A.A. 2024-25
ANALISI CINEMATICA E STATICA DI STRUTTURE NELLO SPAZIO BIDIMENSIONALE
STRUTTURE A DUE CORPI

1. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA FISSA

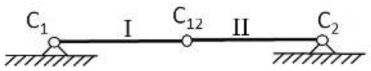
Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando poi la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



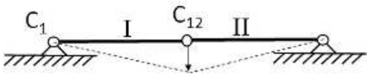
Le cerniere esterne costituiscono i centri di rotazione assoluti dei corpi I e II, rispettivamente indicati con C_1 e C_2. La cerniera interna è il centro di rotazione relativa dei corpi I e II. Poiché in sistemi con due corpi, condizione necessaria e sufficiente perché sia permesso un moto rigido è che risultino allineati sulla medesima retta i punti C_1, C_2 e C_{12}, la struttura risulta fissa. Si noti, inoltre, che le c.d.v. sono pari ai g.d.l.; la struttura risulta quindi isostatica.

2. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando poi la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.

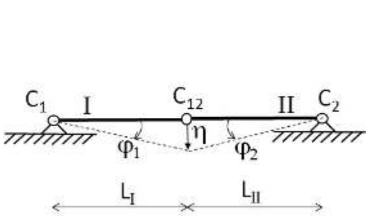


Le cerniere esterne costituiscono i centri di rotazione assoluti dei corpi I e II, rispettivamente, indicati con C_1 e C_2. La cerniera interna è il centro di rotazione relativa dei corpi I e II. Poiché in sistemi con due corpi condizione necessaria e sufficiente perché sia permesso un moto rigido è che risultino allineati sulla medesima retta i punti C_1, C_2 e C_{12}, la struttura risulta labile. Si noti che pur essendo le c.d.v. pari ai g.d.l., la struttura risulta labile e iperstatica.
E' concesso un moto rigido corrispondente ad un abbassamento (o innalzamento), infinitesimo, della cerniera interna, in direzione perpendicolare alla retta congiungente la cerniera interna con le cerniere esterne. Si noti che ogni punto dei due corpi rigidi I e II si sposta perpendicolarmente alla congiungente con il rispettivo centro di rotazione assoluto.



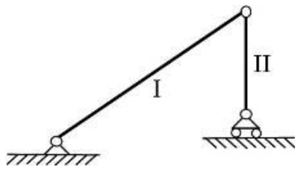
Assegnato lo spostamento della cerniera interna, rimane determinato il moto rigido, poiché le rotazioni rigide dei corpi I e II sono determinabili come:

$$\varphi_1 = \frac{\eta}{L_I}, \quad \varphi_2 = \frac{\eta}{L_{II}}$$

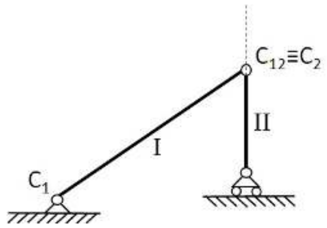


3. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

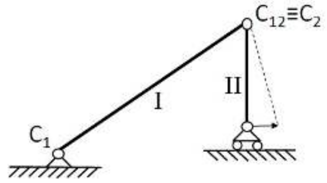
Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando anche la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



Dato che la struttura ha 6 g.d.l. e 5 c.d.v. applicate, la struttura avrà almeno un grado di labilità, risultando ipostatica.

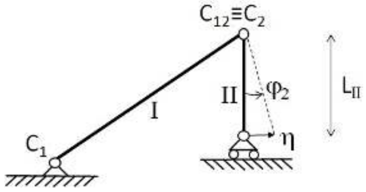


Il centro assoluto C_1 del corpo I coincide con la cerniera esterna. Il centro relativo dei corpi I e II coincide con la cerniera interna. Guardando al vincolo esterno del corpo II, si può dire che il centro assoluto di questo deve appartenere alla retta passante per il carrello e perpendicolare alla sua linea di scorrimento. Perché ci sia possibilità di un moto rigido è necessario che i punti C_1, C_2 e C_{12} siano allineati. Tale condizione si ritrova ipotizzando che i punti C_2 e C_{12} coincidano. Quest'ultima condizione è sufficiente a determinare la possibilità di un moto rigido.



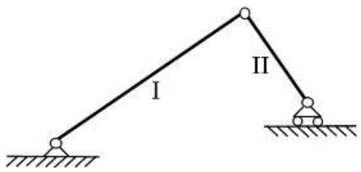
Il cinematismo prevede che il carrello si sposti in direzione orizzontale, di una quantità infinitesima, in corrispondenza ad una rotazione del corpo II attorno al punto C_2. Ogni punto del corpo II si sposta in direzione perpendicolare alla congiungente con il centro C_2. Si noti che in tale moto rigido infinitesimo il corpo I non si sposta.
Imposto lo spostamento della cerniera interna, rimane determinato il moto rigido, che prevede una rotazione rigida del corpo II pari a:

$$\varphi_2 = \frac{\eta}{L_{II}}$$

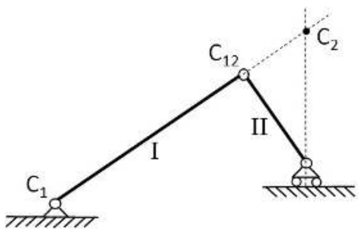


4. ANALISI CINEMATICA: STRUTTURA LABILE

Si proceda con l'analisi cinematica della struttura mediante la determinazione della posizione relativa di centri assoluti e relativi dei corpi, determinando la condizione di ipostaticità, isostaticità o iperstaticità della struttura.



Anche in questo caso la struttura sarà ipostatica, con almeno 1 grado di labilità, dato che ha 6 g.d.l. e 5 c.d.v, similarmente al caso precedente.
Il centro assoluto C_1 del corpo I coincide con la cerniera esterna. Il centro relativo dei corpi I e II coincide con la cerniera interna. Il centro assoluto del corpo II deve poi appartenere alla retta passante per il carrello e perpendicolare alla sua linea di scorrimento. Perché ci sia possibilità di un moto rigido è necessario che i punti C_1, C_2 e C_{12} siano allineati. Tale condizione si ritrova ipotizzando che il punto C_2 si trovi all'intersezione delle rette indicate in tratteggio. Quest'ultima condizione è sufficiente a determinare la possibilità di un moto rigido.

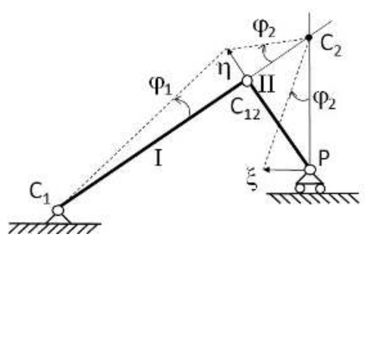


Il cinematismo prevede che il carrello si sposti in direzione orizzontale, di una quantità infinitesima, in corrispondenza ad una rotazione del corpo II attorno al punto C_2. Ogni punto del corpo II si sposta in direzione perpendicolare alla propria congiungente con il centro C_2. Fissato il valore della rotazione rigida del corpo II, rimane determinato il moto rigido della struttura. Ciò significa che la struttura ha 1 grado di labilità. Infatti, nello spostamento rigido del corpo II, assegnata la rotazione si ottiene:

$$\xi = \varphi_2 |PC_2|, \quad \eta = \varphi_2 |C_{12}C_2|$$

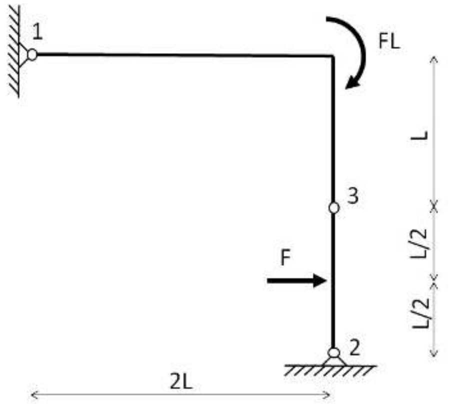
Notando poi che il punto C_{12} appartiene anche al corpo I, si può dedurre la rotazione rigida di questo attorno al punto C_1:

$$\varphi_1 == \frac{\eta}{|C_1C_{12}|} = \frac{\varphi_1 |C_{12}C_2|}{|C_1C_{12}|}$$

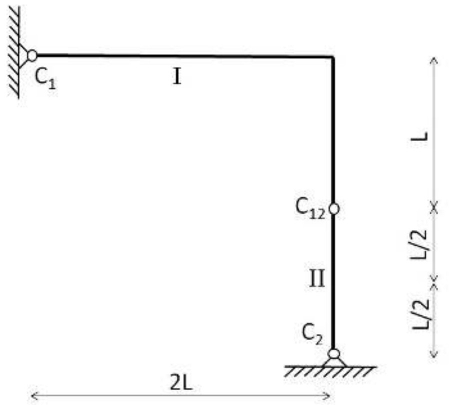


5. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

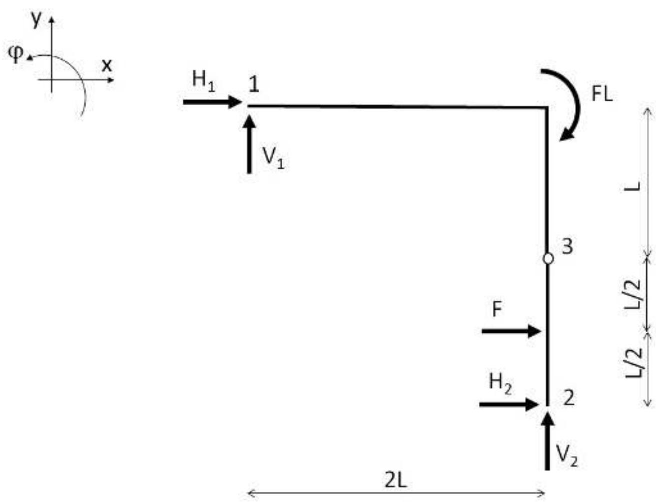
Si proceda con il calcolo delle componenti statiche delle reazioni vincolari della seguente struttura, dopo averne determinato l'effettiva isostaticità.



Considerando vincoli interni ed esterni, la posizione dei centri assoluti e relativi dei due corpi rappresentati nella figura sottostante permette di dire che la struttura è fissa, dato che C_1, C_2 e C_{12} non sono allineati.



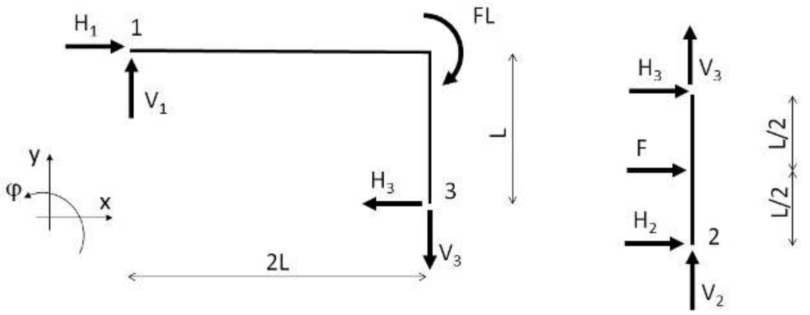
Poiché i g.dl. della struttura sono 2x3 = 6 e le c.d.v. sono pari a 2+2+2 = 6, siamo nella condizione per cui la struttura è resa fissa con un numero di vincoli strettamente sufficiente a renderla tale. La struttura è quindi isostatica e ci si deve aspettare di poter calcolare le componenti di reazione vincolare facendo ricorso alle sole equazioni di equilibrio.



Per risolvere il problema statico consideriamo il sistema di corpo libero dedotto dalla struttura effettiva sostituendo i vincoli nei punti 1 e 2 con le componenti statiche che questi possono esplicare. Si assumono quindi come incognite statiche le componenti H_1, V_1, H_2 e V_2.
Il sistema delle equazioni di equilibrio deve includere 4 equazioni. Queste sono date dalle condizioni di equilibrio globale per le forze in direzione x e y e dall'equilibrio globale dei momenti calcolati rispetto al punto 1. La quarta equazione è ottenuta imponendo che sia nullo il momento risultante del corpo II, soggetto alle forze esterne che lo interessano, rispetto alla cerniere interna del punto 3. Quest'ultimo tipo di equazione è detta 'equazione ausiliaria di equilibrio'. Il suo uso si fonda sul fatto che se una struttura è in equilibrio deve essere in equilibrio anche ogni sottostruttura che la componga, sotto l'azione delle forze esterne applicate.

$$\begin{cases} H_1 + H_2 + F = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ -FL + F\frac{3}{2}L + H_2 2L + V_2 2L = 0 \\ F\frac{L}{2} + H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = -F/2 \\ V_1 = -F/4 \\ H_2 = -F/2 \\ V_2 = F/4 \end{cases}$$

Si noti come, in virtù della sua applicazione nel punto di mezzo del corpo II, la forza orizzontale F insiste per metà sulla cerniera 3 e per metà viene riportata dalla struttura superiore nella cerniera 1.
In forma alternativa, si può procedere sostituendo anche la cerniera interna con le componenti statiche che si esplicano attraverso questa. Si ottiene il seguente schema di corpi liberi, dove la disposizione delle azioni vincolari interne nel punto 3 tiene conto del necessario equilibrio del punto.



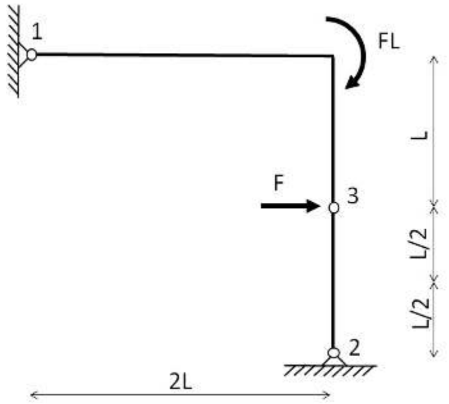
Si noti come in questo vi siano 6 incognite statiche: le componenti H_1, V_1, H_2, V_2, H_3 e V_3. Avendo due corpi è possibile scrivere 6 equazioni di equilibrio (3 per corpo) e dedurre in tal modo il valore delle componenti di reazione vincolare. L'equazione di equilibrio ai momenti del corpo I è scritta con riferimento al punto 1, quella di equilibrio ai momenti del corpo II è scritta con riferimento al punto 3. Le equazioni di equilibrio delle forze in direzione orizzontale e verticale dei due corpi completano il sistema delle equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} H_1 - H_3 = 0 \\ V_1 - V_3 = 0 \\ -FL - H_3 L - V_3 2L = 0 \end{array}\right| \rightarrow \text{eq.i corpo I} \\ \left.\begin{array}{l} H_2 + H_3 + F = 0 \\ V_2 + V_3 = 0 \\ F\frac{L}{2} + H_2 L = 0 \end{array}\right| \rightarrow \text{eq.i corpo II} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = -F/2 \\ V_1 = -F/4 \\ H_2 = -F/2 \\ V_2 = F/4 \\ H_3 = -F/2 \\ V_3 = -F/4 \end{cases}$$

Si osservi come le componenti vincolari relative ai nodi 1 e 2 sono ovviamente coincidenti con quelle ricavate attraverso lo svolgimento precedente. In questo caso sono direttamente determinate anche le componenti di reazione della cerniera interna. Per altro, a partire dai valori delle componenti H_1, V_1, H_2 e V_2 (risultato dello svolgimento precedente) sarebbe possibile ottenere H_3 e V_3.

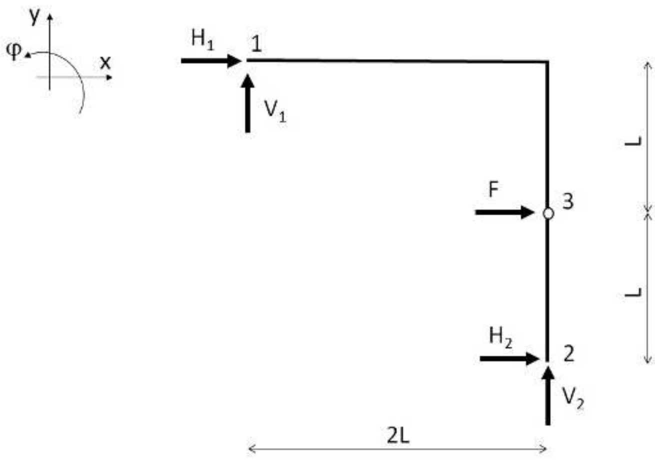
6. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Si calcolino le componenti di reazione vincolare per la struttura precedente, soggetta alla condizione di carico indicata nella seguente figura.



In questo esempio si mostrerà come sia possibile, in generale, calcolare le componenti relative ai singoli carichi, per poi sommare gli effetti trovando la soluzione complessiva.

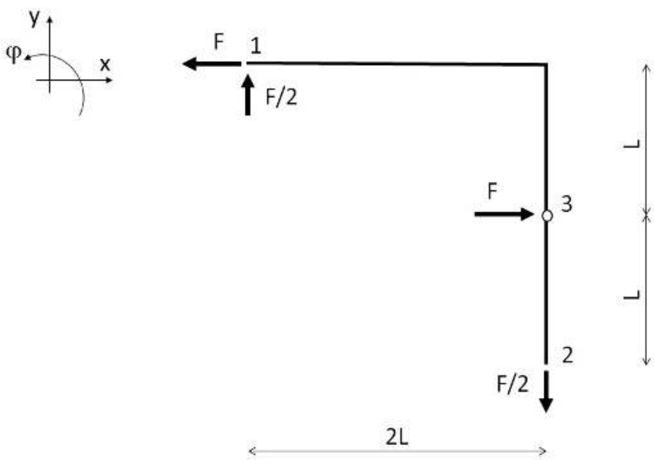
Carico 1:
Si considera il sistema di corpo libero soggetto alla sola forza orizzontale.



Le equazioni di equilibrio globali e l'equazione ausiliaria di equilibrio del corpo II porgono il seguente sistema. L'equilibrio globale ai momenti è fatto rispetto al punto 1. L'equazione ausiliaria di equilibrio corrisponde all'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera interna nel punto 3.

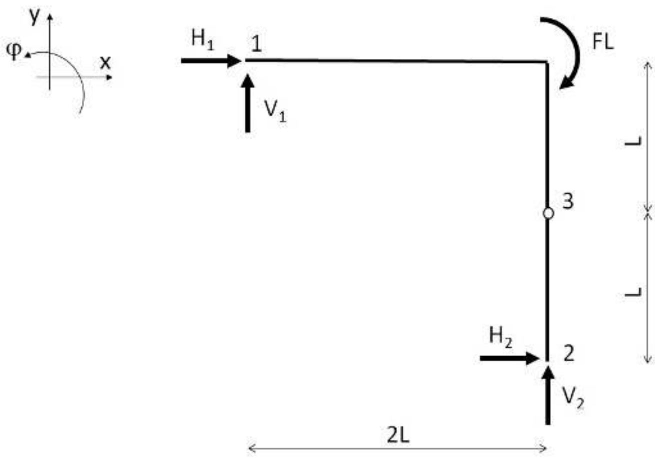
$$\begin{cases} H_1 + H_2 + F = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ FL + H_2 2L + V_2 2L = 0 \\ H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = -F \\ V_1 = F/2 \\ V_2 = -F/2 \\ H_2 = 0 \end{cases}$$

La struttura soggetta all'azione della forza orizzontale F e delle componenti di reazione vincolare che fanno equilibrio a questa è rappresentata nella figura seguente. Le componenti di reazione vincolare sono disegnate con l'effettivo verso. Si noti come la forza applicata nella cerniera interna 3 eserciti il suo effetto completamente sulla sottostruttura I.

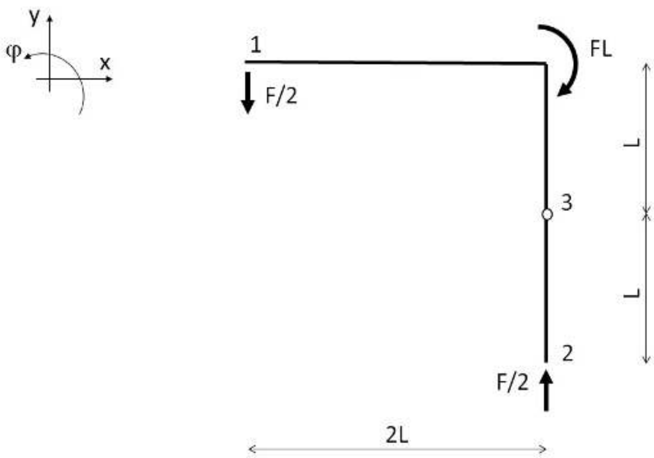


Carico 2:

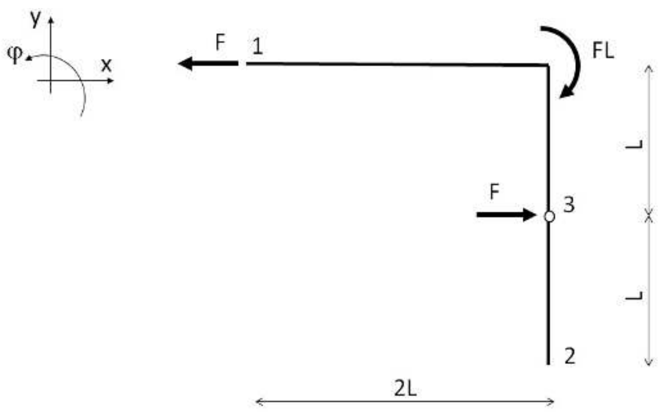
Procedendo in modo similare per la struttura soggetta al solo momento esterno FL si ricava:



$$\begin{cases} H_1 + H_2 = 0 \\ V_1 + V_2 = 0 \\ -FL + H_2 2L + V_2 2L = 0 \\ H_2 L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ V_1 = -F/2 \\ V_2 = F/2 \\ H_2 = 0 \end{cases}$$

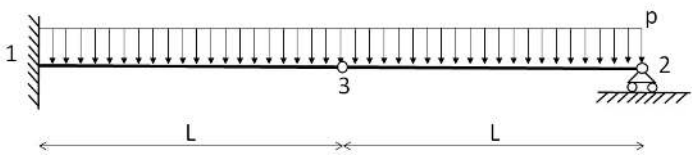


Il valore delle componenti di reazione vincolare corrispondenti alla condizione di carico definita dalla forza F e dal momento FL si ottiene dalla somma delle due soluzioni precedenti. Graficamente, la soluzione è rappresentata nella figura seguente.



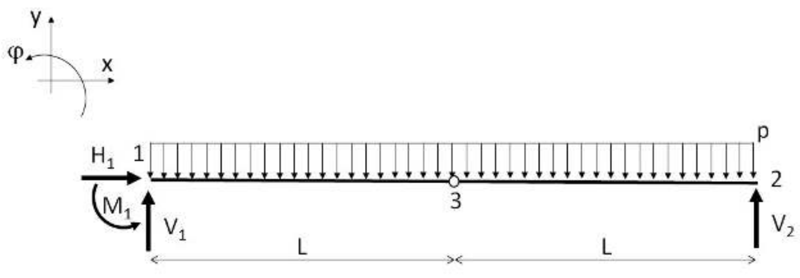
7. ANALISI STATICA: STRUTTURA ISOSTATICA

Si calcolino le componenti di reazione vincolare per la struttura indicata in figura, soggetta al carico per un unità di lunghezza uniformemente distribuito p.



La struttura è fissa. La porzione di sinistra risulta infatti impedita in ogni componente di spostamento dall'incastro agente nel punto 1. Considerata, di conseguenza, la fissità della cerniera nel punto 3, la parte destra della struttura è già stata studiata in precedenza, ottenendo che anch'essa è fissa. Poiché i g.dl. della struttura sono 2x3 = 6 e le c.d.v. sono pari a 3+2+1 = 6, la struttura è isostatica.

Il sistema principale adottato è indicato nella figura seguente:



Valutando il carico agente nella sua complessità, si scrivono le equazioni di equilibrio globale e l'equazione ausiliaria di equilibrio del corpo di destra rispetto alla cerniera in 1. L'equazione di equilibrio globale ai momenti è valutata rispetto al punto 1.

$$
\begin{cases}
H_1 = 0 \\
V_1 + V_2 - p \cdot 2L = 0 \\
M_1 - p \cdot 2L \cdot L + V_2 \cdot 2L = 0 \\
V_2 \cdot L - p \cdot L \cdot L/2 = 0
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
H_1 = 0 \\
V_1 = 3pL/2 \\
M_1 = pL^2 \\
V_2 = pL/2
\end{cases}
$$

Si osservi che:

- le equazioni di equilibrio globali si possono ottenere considerando la risultante dell'intero carico distribuito agente nel punto di mezzeria del tratto 1-2;
- l'equazione ausiliaria si ottiene considerando la risultante del solo carico distribuito agente nel tratto 2-3, applicato nel punto di mezzeria del tratto 2-3;
- non si può ridurre il carico distribuito nel tratto 1-2 alla sola risultante nella cerniera 3 e non tenere conto dei suoi effetti sul tratto 2-3 nell'equazione ausiliaria di equilibrio.