ESERCIZI SCHEDA 2

ESERCIZIO 1

a)

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } 0\le x\le 2 \\ 5-x & \text{se } 2< x\le 8\end{cases}$$

$\operatorname{dom} f=[0,8]$

immagine:

- con $x\in[0,2]$: $y=x \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$ $\quad y\in[0,2]$
- con $x\in(2,8]$: $y=5-x \Leftrightarrow x=5-y \Rightarrow f(x)=f^{-1}(x)$ $\quad y\in[5-8,5-2)=[-3,3)$ $\Rightarrow \operatorname{Im} f=[-3,3)$

$\min \operatorname{Im} f=-3$, $\sup \operatorname{Im} f=3$ $\Rightarrow$ $\min f=\inf f=-3$, $\sup f=3$, $\nexists \max f$

$f(x)=-3 \Leftrightarrow 5-x=-3 \Leftrightarrow x=8 \Rightarrow$ $x=8$ è un punto di massimo

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\quad x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \Rightarrow \operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$y=\dfrac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow f^{-1}(x)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ Voglio $x\ge 0 \wedge x\neq 0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow \operatorname{dom}(f^{-1})=\operatorname{Im} f=(0,+\infty)$

$\nexists \max f, \min f$, $\inf f=0$, $\sup f=+\infty$

c) $f(x)=\dfrac{3-2x}{8+4x}$ $\quad 8+4x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2 \Rightarrow \operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$y=\dfrac{3-2x}{8+4x} \Leftrightarrow 8y+4xy=3-2x \Leftrightarrow 4xy+2x=3-8y \Leftrightarrow x=\dfrac{3-8y}{4y+2}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3-8x}{4x+2}$ $\quad 4x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{dom}(f^{-1})=\operatorname{Im} f=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$

$\nexists \min f, \max f$. $\sup f=+\infty$, $\inf f=-\infty$

d) $f(x)=\cos(x^2)$ $\quad \operatorname{dom} f=\mathbb{R}$

$y=\cos(x^2) \Leftrightarrow x^2=\arccos(y) \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\arccos(y)}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\pm\sqrt{\arccos x}$ $\quad$ La funzione arcocoseno è sempre positiva e il suo argomento deve essere compreso tra -1 e 1.

$\Rightarrow \operatorname{dom}(f^{-1})=\operatorname{Im} f=[-1,1]$

$\min f=\inf f=-1$, $\quad \max f=\sup f=1$

punti estremanti:

- $f(x)=-1 \Leftrightarrow \cos(x^2)=-1 \Leftrightarrow x^2=\pi+2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\pi+2k\pi}$ con $k\in\mathbb{N}$ sono punti di minimo.
- $f(x)=1 \Leftrightarrow \cos(x^2)=1 \Leftrightarrow x^2=2k\pi \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2k\pi}$ con $k\in\mathbb{N}$ sono punti di massimo.

(e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9+4x}{3-x}}$ $\qquad \dfrac{9+4x}{3-x}\geq 0$

$N(x)\geq 0 \Leftrightarrow 9+4x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{9}{4}$

$D(x)>0 \Leftrightarrow 3-x>0 \Leftrightarrow x<3$

	$-\frac{9}{4}$		3	
N	$-$	$+$		$+$
D	$+$	$+$		$-$
	$-$	$\oplus$		$-$

$\text{dom} f=\left[-\frac{9}{4},3\right)$

$y=\sqrt{\dfrac{9+4x}{3-x}} \Leftrightarrow y^2=\dfrac{9+4x}{3-x} \Leftrightarrow 3y^2-xy^2=9+4x \Leftrightarrow 4x+xy^2=3y^2-9 \Leftrightarrow x(4+y^2)=3y^2-9 \Leftrightarrow x=\dfrac{3y^2-9}{y^2+4}$ con $y\geq 0$

$y\geq 0$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3x^2-9}{x^2+4}$ con $x\geq 0$

$\text{dom}\left(f^{-1}\right)=\text{Im} f=[0,+\infty)$

$\min f=\inf f=0$, $\nexists \max f$, $\sup f=+\infty$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{9+4x}{3-x}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{9+4x}{3-x}=0 \Leftrightarrow 9+4x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{4}$ è punto di minimo.

(f) $f(x)=e^{2x^2+3x}$ $\qquad \text{dom} f=\mathbb{R}$

$y=e^{2x^2+3x} \Leftrightarrow \log y=2x^2+3x$

$y>0$

completamento del quadrato (metodo utile per ricavare le funzioni inverse)
Voglio un polinomio scritto come $a^2x^2+2abx+b^2=(ax+b)^2$:

$a^2x^2=2x^2 \Rightarrow a=\sqrt{2}$

$2abx=3x=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x \Rightarrow a=\sqrt{2},\ b=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ $\qquad \Rightarrow b^2=\frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow \log y+\frac{9}{8}=2x^2+3x+\frac{9}{8} \Leftrightarrow \log y+\frac{9}{8}=\left(\sqrt{2}x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x+\frac{3}{2\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\log y+\frac{9}{8}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\pm\sqrt{\log y+\frac{9}{8}}\right)$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\pm\sqrt{\log x+\frac{9}{8}}\right)$

$\begin{cases}\log x+\frac{9}{8}\geq 0\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}\log x\geq -\frac{9}{8}\\ x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq e^{-\frac{9}{8}}\\ x>0\end{cases}$ $\Rightarrow x\geq e^{-\frac{9}{8}}$

$\Rightarrow \text{dom}\left(f^{-1}\right)=\text{Im} f=\left[e^{-\frac{9}{8}},+\infty\right)$

$\min f=\inf f=e^{-\frac{9}{8}}$, $\nexists \max f$, $\sup f=+\infty$

$f(x)=e^{-\frac{9}{8}} \Leftrightarrow e^{2x^2+3x}=e^{-\frac{9}{8}} \Leftrightarrow 2x^2+3x+\frac{9}{8}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x+\frac{3}{2\sqrt{2}}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{8}$ è punto di minimo.

ESERCIZIO 2

Quando metto le [ ] sto facendo un ragionamento parallelo.

f è strettamente crescente [decrescente] su $A \Rightarrow \forall x_1,x_2\in A$: $x_1<x_2$, allora $f(x_1)<f(x_2)$ $[f(x_1)>f(x_2)]$

Praticamente: $\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow f$ è invertibile QED ■

Da osservare che la cosa non varrebbe se nelle ipotesi non fosse specificato "STRETTAMENTE".

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+5 & \text{se } x<0 \\ x^2+3x+4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Studio le due parti separatamente:

I) $f(x) = x^2+2x+5$ è una parabola. Ne calcolo l'immagine:

$y = x^2+2x+5 \Leftrightarrow y = x^2+2x+4+1 \Leftrightarrow y-4 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{y-4}$ $\quad Im_1 = [4, +\infty)$

Non è detto che Im_1 sia uguale a $f((-\infty,0))$, perché non sappiamo se nell'intervallo $(-\infty,0)$ è compreso il punto di minimo della parabola (vertice). Calcoliamolo:

Dall'immagine: $y_{V_1} = 4 \Rightarrow x_{V_1} = -1 \Rightarrow$ il minimo è compreso

$\Rightarrow f((-\infty,0)) = [4,+\infty)$

Il ramo ascendente termina a $f(0^-) = 0^2+2\cdot0+5 = 5$

II) $f(x) = x^2+3x+4 \Rightarrow y = x^2+3x+4$ A completamento del quadrato coi primi due termini si ha:

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 = x^2+3x+\frac{9}{4}$$

$2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x$

$\Rightarrow y = x^2+3x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4} \Leftrightarrow y-\frac{7}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{y-\frac{7}{4}}$ $\quad Im_2 = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$

$y_{V_2} = \frac{7}{4} \Rightarrow x_{V_2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ L'ascissa del vertice sta fuori dall'intervallo $[0,+\infty)$, quindi in questo intervallo è visibile solo il ramo crescente della parabola.

$f(0) = 0^2+3\cdot0+4 = 4 \Rightarrow f([0,+\infty)) = [4,+\infty)$

$\Rightarrow$ La prima parabola scende da $+\infty$ a 1 per terminare salendo in 5 (non compreso)
$\Rightarrow$ La seconda parabola sale da 4 a $+\infty$

$$\Rightarrow f(x)=\alpha \text{ ha: } \begin{cases} 0 \text{ soluzioni per } \alpha<1 \\ 1 \text{ soluzione per } \alpha=1 \\ 2 \text{ soluzioni per } 1<\alpha<4 \vee \alpha\geq5 \\ 3 \text{ soluzioni per } 4\leq\alpha<5 \end{cases}$$

Esercizio 4

ⓐ $f(x) = \sin(\log(\cos x)) = f(g(h(x)))$ con $h(x) = \cos x$, $g(y) = \log y$, $f(z) = \sin z$

ⓑ $f(x) = \log(\sqrt{x}+3) = f(g(h(x)))$ con $h(x) = \sqrt{x}$, $g(y) = y+3$, $f(z) = \log z$

Esercizio 5

ⓐ $f(x) = \arccos\left(\left|x^3 - \frac{1}{2}\right|\right)$

dom$f$: $\underset{\text{ovvio}}{1 \le} \left|x^3-\frac{1}{2}\right| \le 1 \iff \left|x^3-\frac{1}{2}\right| \le 1 \iff -1 \le x^3 - \frac{1}{2} \le 1 \iff -\frac{1}{2} \le x^3 \le \frac{3}{2} \iff \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \le x \le \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow$ dom$f = \left[\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right]$

segno: un arcocoseno è sempre positivo $\Rightarrow$ $f(x) \ge 0 \ \forall x \in$ dom$f$

Il dominio non è simmetrico rispetto a 0. $\Rightarrow$ Non ci sono simmetrie nella funzione.

Non è una funzione periodica.

ⓑ $f(x) = \sqrt{e^{2x}+e^x-2} - \left(e^x - \frac{1}{2}\right)$

dom$f$: $e^{2x}+e^x-2 \ge 0 \iff e^{2x}+2e^x-e^x-2 \ge 0 \iff e^x(e^x+2)-(e^x+2) \ge 0 \iff (e^x-1)\underbrace{(e^x+2)}_{>0} \ge 0$

$\iff e^x - 1 \ge 0 \iff e^x \ge 1 \iff x \ge 0 \Rightarrow$ dom$f = [0, +\infty)$

segno: $\sqrt{e^{2x}+e^x-2} - \left(e^x-\frac{1}{2}\right) \ge 0 \iff \sqrt{e^{2x}+e^x-2} \ge e^x - \frac{1}{2}$ $\forall x \in$ dom$f$, il secondo membro è positivo

$\iff \cancel{e^{2x}}+e^x-2 \ge \cancel{e^{2x}}+\frac{1}{4}-e^x$

$\iff 2e^x \ge \frac{9}{4} \iff e^x \ge \frac{9}{8} \iff x \ge \log\frac{9}{8}$

$\Rightarrow$ $f(x) \ge 0$ se $x \ge \log\frac{9}{8}$, $f(x) < 0$ se $x \in [0, \log\frac{9}{8}]$

Il dominio non è simmetrico rispetto a 0. $\Rightarrow$ Non ci sono simmetrie nella funzione.

Non è una funzione periodica.

ⓒ $f(x) = \arcsin\left(\frac{|x+2|}{2}\right)$

dom$f$: $-1 \le \frac{|x+2|}{2} \le 1 \iff -2 \overset{\text{ovvio}}{\le} |x+2| \le 2 \iff |x+2| \le 2 \iff -2 \le x+2 \le 2 \iff -4 \le x \le 0 \Rightarrow$ dom$f = [-4, 0]$

segno: $\arcsin\left(\frac{|x+2|}{2}\right) \ge 0 \iff \frac{|x+2|}{2} \ge 0$ $\forall x \in$ dom$f$ $\Rightarrow$ $f(x) \ge 0 \ \forall x \in$ dom$f$

Il dominio non è simmetrico rispetto a 0. $\Rightarrow$ Non ci sono simmetrie nella funzione.

Non è una funzione periodica.

d) $f(x) = [\log(\sin x)](\sin x - 1)^{-1} = \dfrac{\log(\sin x)}{\sin x - 1}$

dom f: $\begin{cases} \sin x - 1 \neq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\text{dom} f = (2k\pi, \pi + 2k\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}}$

segno: $\dfrac{\log(\sin x)}{\sin x - 1} \geq 0$

$N(x) \geq 0$: $\log(\sin x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ non compatibile con dom f

$D(x) > 0$: $\sin x - 1 > 0 \Leftrightarrow \sin x > 1 \quad \nexists x \in \text{dom} f$

$\Rightarrow \boxed{f(x) < 0 \ \forall x \in \text{dom} f}$

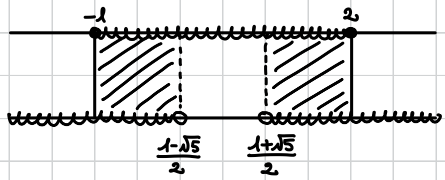
Il dominio non è simmetrico rispetto a 0. $\Rightarrow$ Non ci sono simmetrie nella funzione.

La funzione è composta a partire dalla funzione seno $\Rightarrow \boxed{T = 2\pi}$

e) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x - 1)}$

dom f: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x - 1) \geq 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 \leq 1 \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$



$\boxed{\text{dom} f = \left[-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right]}$

segno: Una radice è un numero positivo o nullo $\Rightarrow \boxed{f(x) \geq 0 \ \forall x \in \text{dom} f}$

Il dominio non è simmetrico rispetto a 0. $\Rightarrow$ Non ci sono simmetrie nella funzione.

Non è una funzione periodica.

ESERCIZIO 6

$f(x) = 2x^2 - x$ $\quad$ $f(x)$ è geometricamente una parabola.

$y = 2x^2 - x + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow y + \frac{1}{8} = \left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$

$(\sqrt{2}x)^2$ $\quad$ $2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \pm \sqrt{y + \frac{1}{8}}\right) = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y + \frac{1}{8}}$ $\quad$ $\text{Im} f = [-\frac{1}{8}, +\infty)$

punto di minimo: $y_m = -\frac{1}{8} \Rightarrow x_m = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \boxed{f(\mathbb{R}) = \text{Im} f = [-\frac{1}{8}, +\infty)}$

Il punto di minimo non rientra nell'intervallo $[\frac{1}{2},+\infty)$. Siamo nel ramo ascendente della parabola.

$$\Rightarrow f([\tfrac{1}{2},+\infty)) = [f(\tfrac{1}{2}),+\infty) = [0,+\infty) \Rightarrow f^{-1}([0,+\infty)) = [\tfrac{1}{2},+\infty)$$

L'inversione della funzione presenta un $\pm$ $\Rightarrow$ Ad un valore di y possono corrispondere più valori di x. In questo caso per $y > -\frac{1}{8}$ si hanno 2 valori di x.

$\Rightarrow$ f non è iniettiva

Ma come suggerisce il primo punto, si può restringere il dominio a $[\frac{1}{2},+\infty)$. La restrizione più "larga" fattibile è in $[-\frac{1}{4},+\infty)$.

Esercizio 7

La si confuta considerando una funzione definita a tratti invertibile con un tratto crescente e un tratto decrescente.

Esercizio 8

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 100 \\ 0 & \text{se } 10 \leq x < 100 \\ \sin x & \text{se } x < 10 \end{cases}$$

$f_1(x) = \sin x \qquad f_1 : (-\infty, 10) \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin x$

$f_2(x) = 0 \qquad f_2 : [10, 100) \to 0$, $x \mapsto 0$

$f_3(x) = e^x \qquad f_3 : [100,+\infty) \to [e^{100},+\infty)$, $x \mapsto e^x$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha \text{ ha: } \begin{cases} 0 \text{ soluzioni per } \alpha < -1 \vee 1 < \alpha < e^{100} \\ 1 \text{ soluzione per } \alpha \geq e^{100} \\ \text{infinite soluzioni per } -1 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Esercizio 9

$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right) \Rightarrow y = \log\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right) \Leftrightarrow e^y = \frac{x+2}{x^2+1} \Leftrightarrow e^y x^2 + e^y = x+2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^y x^2}_{(e^{y/2}x)^2} \underbrace{- x}_{2e^{y/2}x \cdot \frac{e^{-y/2}}{2}} = 2 - e^y$$

$$\Leftrightarrow e^y x^2 - x + \frac{e^{-y}}{4} = 2 - e^y + \frac{e^{-y}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{y/2}x + \frac{e^{-y/2}}{2}\right)^2 = 2 - e^{y} + \frac{e^{-y}}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{y/2}x + \frac{e^{-y/2}}{2} = \pm\sqrt{2 - e^{y} + \frac{e^{-y}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow e^{y/2}x = -\frac{e^{-y/2}}{2} \pm\sqrt{2 - e^{y} + \frac{e^{-y}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-y/2}\left(-\frac{e^{-y/2}}{2} \pm\sqrt{2 - e^{y} + \frac{e^{-y}}{4}}\right) = -\frac{e^{-y}}{2} \pm \sqrt{2e^{-y} - 1 + \frac{e^{-2y}}{4}} = -\frac{1}{2e^{y}} \pm \sqrt{\frac{8e^{y} - 4e^{2y} + 1}{4e^{2y}}}$$

$$\Rightarrow (\text{scelgo } \oplus) \quad f^{-1}(x) = -\frac{1}{2e^{x}} + \sqrt{\frac{8e^{x} - 4e^{2x} + 1}{4e^{2x}}}$$

$\text{Im} f = \text{dom}(f^{-1})$: $\begin{cases} 2e^{x} \neq 0 \to \forall x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{8e^{x} - 4e^{2x} + 1}{\cancel{4e^{2x}}} \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 8e^{x} - 4e^{2x} + 1 \geq 0$ cambio di variabile: $t = e^{x}$

$\Leftrightarrow 8t - 4t^2 + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4t^2 - 8t - 1 \leq 0$ $\quad t_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+16}}{8} = \dfrac{8 \pm \sqrt{80}}{8} = 1 \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq t \leq 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \underset{\downarrow \text{ovvia}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq} e^{x} \leq 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \leq \log\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$\text{Im} f = \left(-\infty, \log\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

Esercizio 10

$$f(x) = \log\left(\frac{|x-1|}{|1 - \log|x-1||}\right)$$

dom$f$: $\begin{cases} \dfrac{|x-1|}{|1-\log|x-1||} > 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ |1 - \log|x-1|| \neq 0 \\ |x-1| > 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \log|x-1| \neq 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \neq 1 \\ |x-1| \neq e \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \neq 1 \\ x-1 \neq e \\ x-1 \neq -e \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 1+e \\ x \neq 1-e \end{cases} \Rightarrow \text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1-e, 1, 1+e\}$

Per $x \in (1, e+1)$:
- $x - 1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1 \Rightarrow \log|x-1| = \log(x-1)$
- $\log(x-1) < \log(e) = 1 \Rightarrow 1 - \log(x-1) > 0 \Rightarrow |1 - \log(x-1)| = 1 - \log(x-1)$

$$\Rightarrow f(x) = \log\left(\frac{x-1}{1 - \log(x-1)}\right)$$

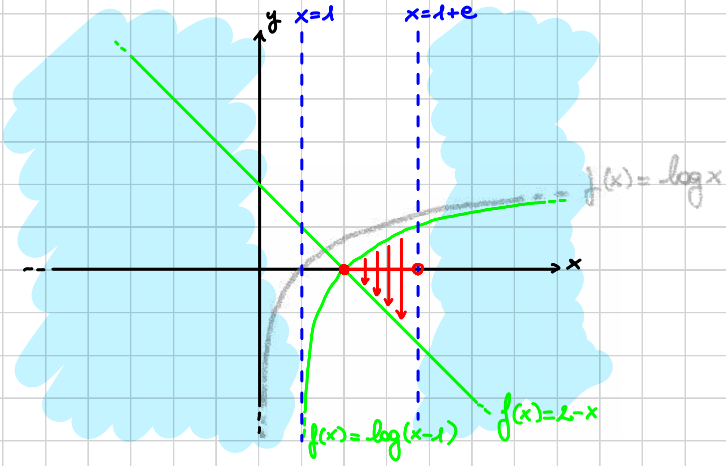
Studio il segno della funzione nell'intervallo $(1, e+1)$:

$$\log\left(\frac{x-1}{1-\log(x-1)}\right) \geq 0 \iff \frac{x-1}{1-\log(x-1)} \geq 1 \iff \frac{x-1-(1-\log(x-1))}{1-\log(x-1)} \geq 0 \iff \frac{x+\log(x-1)-2}{1-\log(x-1)} \geq 0$$

Come precedentemente detto, nell' intervallo $(1, e+1)$ il denominatore è positivo. Quindi, basta studiare:

$x+\log(x-1)-2 \geq 0$ Non si hanno gli strumenti per calcolarlo.

Risolvo per via grafica: $\log(x-1) \geq 2-x$



$2 \leq x < e+1$