A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

4$^{\mathbf{o}}$ appello — 4 febbraio 2020

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti reali, che non ha autovalori reali (pertanto A non è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali). Possiamo concludere che A deve necessariamente essere diagonalizzabile nel campo dei numeri complessi? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $V = M(m, n)$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. V può essere generato da matrici di rango 1 ? L'insieme delle matrici di rango ≤ 1 è un sottospazio vettoriale di V ?

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare determinata dalle seguenti proprietà: $f(e_1) = (2, -1, 1)$, $f(e_2) = (1, -3, -7)$, e i vettori $(1, 0, 0, 1)$ e $(0, 1, -1, 1)$ appartengono al nucleo di f.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare il rango di f e dire per quale valore di α il vettore $(1, -1, \alpha)$ appartiene all'immagine di f.

(c) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (1, -1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1)$, $w_3 = (0, 0, 1)$ del codominio.

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Scrivere delle basi degli autospazi di A.

(c) Determinare una matrice *ortogonale* P tale che $P^T A\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio vettoriale $U : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Si noti che i vettori $u_1 = (1, 1, 1, -1)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ appartengono a U e sono ortogonali tra loro.

(a) Completare l'insieme di vettori $\{u_1, u_2\}$ in una base ortogonale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U, tale che $u_3 \cdot e_1 = 1$.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$, con $\dim W = 2$, tale che $U + W = \mathbb{R}^4$. Se ciò è possibile si trovi una base di W, in caso contrario si spieghi perché un tale W non può esistere.

(c) Dato il vettore $v = (5, -1, 3, 3)$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + 3y - 7 = 0 \\ 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} x = (1 + 2h)t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + ht \end{cases}$$

(a) Per $h = -2$ determinare se le rette r e s_{-2} sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Determinare tutti i valori di h per cui le rette r e s_h sono complanari.

(c) Per uno dei valori di h trovati al punto (b), scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente le due rette.

B

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

4º appello — 4 febbraio 2020

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti reali, che non ha autovalori reali (pertanto A non è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali). Possiamo concludere che A deve necessariamente essere diagonalizzabile nel campo dei numeri complessi? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $V = M(m,n)$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. V può essere generato da matrici di rango 1 ? L'insieme delle matrici di rango ≤ 1 è un sottospazio vettoriale di V ?

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare determinata dalle seguenti proprietà: $f(e_1) = (3,1,-2)$, $f(e_2) = (2,4,-1)$, e i vettori $(1,0,1,0)$ e $(1,-1,0,1)$ appartengono al nucleo di f.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare il rango di f e dire per quale valore di α il vettore $(4,-2,\alpha)$ appartiene all'immagine di f.

(c) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (1,0,0)$, $w_2 = (-1,1,0)$, $w_3 = (0,-1,1)$ del codominio.

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Scrivere delle basi degli autospazi di A.

(c) Determinare una matrice *ortogonale* P tale che $P^T A\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio vettoriale $U : x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$. Si noti che i vettori $u_1 = (1,1,-1,-2)$ e $u_2 = (1,0,1,0)$ appartengono a U e sono ortogonali tra loro.

(a) Completare l'insieme di vettori $\{u_1, u_2\}$ in una base ortogonale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U, tale che $u_3 \cdot e_1 = 3$.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$, con $\dim W = 2$, tale che $U + W = \mathbb{R}^4$. Se ciò è possibile si trovi una base di W, in caso contrario si spieghi perché un tale W non può esistere.

(c) Dato il vettore $v = (6,3,-2,3)$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} x = 1 + (3h-4)t \\ y = -ht \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

(a) Per $h = 1$ determinare se le rette r e s_1 sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Determinare tutti i valori di h per cui le rette r e s_h sono complanari.

(c) Per uno dei valori di h trovati al punto (b), scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente le due rette.

C

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola ________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

PROF. F. BOTTACIN, M. CANDILERA, E. DETOMI, R. COLPI, G. PERUGINELLI

4º appello — 4 febbraio 2020

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti reali, che non ha autovalori reali (pertanto A non è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali). Possiamo concludere che A deve necessariamente essere diagonalizzabile nel campo dei numeri complessi? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $V = M(m,n)$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. V può essere generato da matrici di rango 1 ? L'insieme delle matrici di rango ≤ 1 è un sottospazio vettoriale di V ?

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare determinata dalle seguenti proprietà: $f(e_1) = (1,2,-2)$, $f(e_2) = (3,-1,2)$, e i vettori $(0,1,0,1)$ e $(1,0,1,-1)$ appartengono al nucleo di f.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare il rango di f e dire per quale valore di α il vettore $(1,-5,\alpha)$ appartiene all'immagine di f.

(c) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (1,0,-1)$, $w_2 = (0,1,0)$, $w_3 = (1,1,0)$ del codominio.

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Scrivere delle basi degli autospazi di A.

(c) Determinare una matrice *ortogonale* P tale che $P^T A\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio vettoriale $U : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Si noti che i vettori $u_1 = (1,1,-1,-1)$ e $u_2 = (1,0,0,1)$ appartengono a U e sono ortogonali tra loro.

(a) Completare l'insieme di vettori $\{u_1, u_2\}$ in una base ortogonale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U, tale che $u_3 \cdot e_2 = -1$.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$, con $\dim W = 2$, tale che $U + W = \mathbb{R}^4$. Se ciò è possibile si trovi una base di W, in caso contrario si spieghi perché un tale W non può esistere.

(c) Dato il vettore $v = (5,0,3,0)$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} x = 1 + ht \\ y = 1 + (3h+1)t \\ z = 2t \end{cases}$$

(a) Per $h = -1$ determinare se le rette r e s_{-1} sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Determinare tutti i valori di h per cui le rette r e s_h sono complanari.

(c) Per uno dei valori di h trovati al punto (b), scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente le due rette.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola __________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Prof. F. Bottacin, M. Candilera, E. Detomi, R. Colpi, G. Peruginelli

4º appello — 4 febbraio 2020

Esercizio 1. Sia A una matrice quadrata di ordine 2 a coefficienti reali, che non ha autovalori reali (pertanto A non è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali). Possiamo concludere che A deve necessariamente essere diagonalizzabile nel campo dei numeri complessi? (*la risposta deve essere giustificata*)

Esercizio 2. Sia $V = M(m, n)$ lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. V può essere generato da matrici di rango 1 ? L'insieme delle matrici di rango ≤ 1 è un sottospazio vettoriale di V ?

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare determinata dalle seguenti proprietà: $f(e_1) = (1, 3, -1)$, $f(e_2) = (2, 1, 3)$, e i vettori $(0, 1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1, -1)$ appartengono al nucleo di f.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare il rango di f e dire per quale valore di α il vettore $(1, -7, \alpha)$ appartiene all'immagine di f.

(c) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica del dominio e alla base $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, -1, 1)$, $w_3 = (-1, 0, 1)$ del codominio.

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(b) Scrivere delle basi degli autospazi di A.

(c) Determinare una matrice *ortogonale* P tale che $P^T A\, P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto scalare usuale si consideri il sottospazio vettoriale $U : 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. Si noti che i vettori $u_1 = (1, 2, -1, -2)$ e $u_2 = (1, 0, 1, 0)$ appartengono a U e sono ortogonali tra loro.

(a) Completare l'insieme di vettori $\{u_1, u_2\}$ in una base ortogonale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U, tale che $u_3 \cdot e_2 = -1$.

(b) Si dica se è possibile trovare un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$, con $\dim W = 2$, tale che $U + W = \mathbb{R}^4$. Se ciò è possibile si trovi una base di W, in caso contrario si spieghi perché un tale W non può esistere.

(c) Dato il vettore $v = (5, -3, -2, 3)$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} 3x + y - 6 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s_h : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = (2h - 3)t \\ z = 1 + (h - 2)t \end{cases}$$

(a) Per $h = 3$ determinare se le rette r e s_3 sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Determinare tutti i valori di h per cui le rette r e s_h sono complanari.

(c) Per uno dei valori di h trovati al punto (b), scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente le due rette.