A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 15 giugno 2021

Esercizio 1. Sia $M(2,\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Data $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, sia $U \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che commutano con A:

$$U = \{B \in M(2,\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che contengono il vettore $(3,-2)$ nel loro nucleo. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Stabilire se U contiene qualche matrice con rango < 2 e diversa dalla matrice nulla.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la funzione f **non** è suriettiva.

(b) Per il valore di t trovato determinare delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Poniamo ora $t = 0$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (-1,2,0,3)$. Scrivere la matrice della funzione $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$, definita ponendo $\tilde{f}(u) = f(u)$, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Verificare che $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1,0,0) = (2,-2,-2)$, $f(0,1,0) = (-2,5,-1)$ e tale che $v = (1,-1,-1)$ sia un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 6$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Determinare gli autovalori e autovettori di f e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f e, se esiste, trovarla.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati i punti $A = (0,3,3)$, $B = (1,1,2)$, $C = (2,2,1)$.

(a) Verificare che l'angolo $A\widehat{B}C$ è retto e trovare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.

(b) Trovare il punto E, intersezione delle diagonali del rettangolo $ABCD$.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene il rettangolo $ABCD$.

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 15 giugno 2021

Esercizio 1. Sia $M(2,\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Data $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, sia $U \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che commutano con A:

$$U = \{B \in M(2,\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che contengono il vettore $(1,3)$ nel loro nucleo. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Stabilire se U contiene qualche matrice con rango < 2 e diversa dalla matrice nulla.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & t & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la funzione f **non** è suriettiva.

(b) Per il valore di t trovato determinare delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Poniamo ora $t = 0$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (0,2,1,3)$. Scrivere la matrice della funzione $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$, definita ponendo $\tilde{f}(u) = f(u)$, rispetto alla base $\{u_1,u_2,u_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Verificare che $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1,0,0) = (2,1,-1)$, $f(0,1,0) = (1,2,1)$ e tale che $v = (1,-1,1)$ sia un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Determinare gli autovalori e autovettori di f e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f e, se esiste, trovarla.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati i punti $A = (0,2,1)$, $B = (2,3,-1)$, $C = (3,3,0)$.

(a) Verificare che l'angolo $A\widehat{B}C$ è retto e trovare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.

(b) Trovare il punto E, intersezione delle diagonali del rettangolo $ABCD$.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene il rettangolo $ABCD$.

C

Cognome ________________ Nome ________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1$^{\mathbf{o}}$ appello — 15 giugno 2021

Esercizio 1. Sia $M(2,\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Data $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$, sia $U \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che commutano con A:

$$U = \{B \in M(2,\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che contengono il vettore $(2,3)$ nel loro nucleo. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Stabilire se U contiene qualche matrice con rango < 2 e diversa dalla matrice nulla.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & -4 \\ 2 & -3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la funzione f **non** è suriettiva.

(b) Per il valore di t trovato determinare delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Poniamo ora $t = 0$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (0,1,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (2,2,-1,1)$. Scrivere la matrice della funzione $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$, definita ponendo $\tilde{f}(u) = f(u)$, rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Verificare che $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0) = (2,5,1)$, $f(0,0,1) = (-2,1,5)$ e tale che $v = (2,-1,1)$ sia un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 0$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Determinare gli autovalori e autovettori di f e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f e, se esiste, trovarla.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati i punti $A = (2,1,1)$, $B = (3,0,2)$, $C = (4,2,3)$.

(a) Verificare che l'angolo $A\widehat{B}C$ è retto e trovare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.

(b) Trovare il punto E, intersezione delle diagonali del rettangolo $ABCD$.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene il rettangolo $ABCD$.

D

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1^{o} appello — 15 giugno 2021

Esercizio 1. Sia $M(2,\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, sia $U \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che commutano con A:

$$U = \{B \in M(2,\mathbb{R}) \mid AB = BA\}.$$

(a) Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset M(2,\mathbb{R})$ il sottospazio formato dalle matrici che contengono il vettore $(3,-1)$ nel loro nucleo. Determinare la dimensione e una base di W.

(c) Determinare $U \cap W$ e $U + W$.

(d) Stabilire se U contiene qualche matrice con rango < 2 e diversa dalla matrice nulla.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & t & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare per quale valore di t la funzione f **non** è suriettiva.

(b) Per il valore di t trovato determinare delle basi del nucleo e dell'immagine di f.

(c) Poniamo ora $t = 0$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (1,2,-1,3)$. Scrivere la matrice della funzione $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$, definita ponendo $\tilde{f}(u) = f(u)$, rispetto alla base $\{u_1,u_2,u_3\}$ di U e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(d) Verificare che $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(0,1,0) = (-1,2,-1)$, $f(0,0,1) = (-1,-1,2)$ e tale che $v = (1,0,-1)$ sia un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 3$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Determinare gli autovalori e autovettori di f e dire se A è diagonalizzabile.

(c) Stabilire se esiste una base **ortonormale** di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f e, se esiste, trovarla.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono dati i punti $A = (3,0,-2)$, $B = (-1,1,-1)$, $C = (-1,2,-2)$.

(a) Verificare che l'angolo $A\widehat{B}C$ è retto e trovare un punto D tale che $ABCD$ sia un rettangolo.

(b) Trovare il punto E, intersezione delle diagonali del rettangolo $ABCD$.

(c) Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene il rettangolo $ABCD$.