ESERCIZI 2° TUTORATO

1. Siamo dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$V = < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >, W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$$

   (a) Calcolare l'intersezione V ∩ W.
   (b) Calcolare le dimensioni dim V , dim W e dim V ∩ W.
   (c) Calcolare dim(V + W)

2. Si considerino i seguenti sottospazi:

$$V = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\}$$

.

$$W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$$

.

   determinare:

   (a) la dimensione e una base per V e W;
   (b) il sottospazio V +W e una sua base;
   (c) il sottospazio V∩W e una sua base;
   (d) se la somma V +W è diretta;
   (e) a chi appartiene il vettore $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (se appartiene a V +W , a V o a entrambi).

3. Determinare due sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4$= U +W, senza che la somma sia diretta.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (\begin{pmatrix} 2x - 5y + 5 \\ 3x + y - 1 \end{pmatrix}$, è lineare?

5. Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   e W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x + y + 2z = 0$.

   (a) Si determini la dimensione e una base di U.
   (b) Si determini la dimensione e una base di $U \cap W$.
   (c) Si determini la dimensione e una base di$U + W$.