DINAMICA DEI FLUIDI PER L'INGEGNERIA BIOMEDICA

RIPASSO PER ESAME

DENSITÀ $\rho = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta m}{\delta V}$ [kg/m^3]

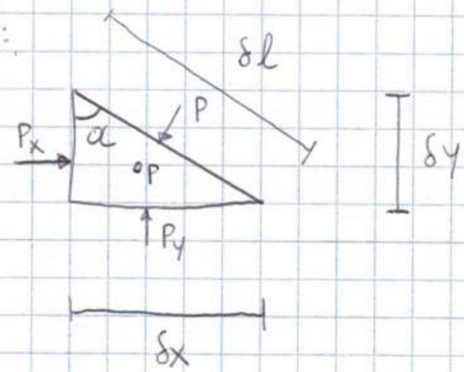
PESO SPECIFICO $\gamma = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta G}{\delta V} = \frac{\delta m \cdot g}{\delta V}$ [N/m^3]

$\delta G \to$ PESO

- PRINCIPIO DI PASCAL:

IN UN FLUIDO PERFETTO, O IN UN QUALSIASI FLUIDO PURCHÉ IN QUIETE, SOGGETTO A SOLI SFORZI DI PRESSIONE, LA PRESSIONE SI MANTIENE INALTERATA IN CIASCUNA DIREZIONE

DIMOSTRAZIONE:



PER EQUILIBRIO

$P_x \delta y - P \delta l \cos\alpha = 0$

$P_y \delta x - P \delta l \sin\alpha = 0$

ESSENDO $\delta x = \delta l \sin\alpha$

$\delta y = \delta l \cos\alpha$

OTTENGO $P_x \delta l \cos\alpha - P \delta l \cos\alpha = 0$

$P_y \delta l \sin\alpha - P \delta l \sin\alpha = 0$

QUINDI $P_x - P = 0 \qquad P = P_x$

$P_y - P = 0 \qquad P = P_y$

- RISPOSTA REOLOGICA

PER FLUIDI NEWTONIANI $\to \tau = \mu \frac{\delta v}{\delta y}$

VISCOSITÀ DINAMICA μ [$N \cdot s/m^2$] = [$kg/(ms)$]

VISCOSITÀ CINEMATICA $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ [m^2/s]

FLUIDO PERFETTO $\to \mu = 0 \Rightarrow \tau = 0$, SONO SOGGETTI A SOLI SFORZI DI PRESSIONE

⚠ UN FLUIDO REALE FERMO SI COMPORTA COME UN FLUIDO PERFETTO ($\tau = 0$)

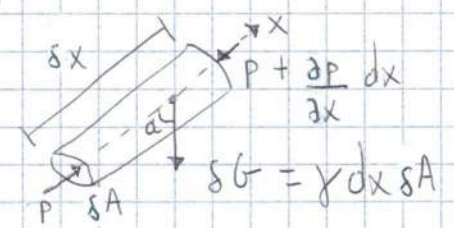
FLUIDO INCOMPRIMIBILE $\to \rho$ (E QUINDI ANCHE γ) È COSTANTE NEL TEMPO E NELLO SPAZIO

- IDROSTATICA

⇓

FLUIDI IN CONDIZIONI DI QUIETE $\Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ STATO DI TENSIONE = PRESSIONE

EQUILIBRIO DI UN VOLUME ELEMENTARE DI UN FLUIDO PESANTE (SOGGETTO ALLA FORZA PESO) IN QUIETE:



$$\delta F_{p,x} = p\,\delta A - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\delta A = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\,\delta A$$

$\delta G_x = -\gamma\, dx\, \delta A \cos\alpha$

PER EQUILIBRIO LUNGO LA GENERICA DIREZIONE X: $\delta F_{p,x} + \delta G_x = 0$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,\delta A - \gamma\, dx\,\delta A\cos\alpha = 0$$

QUINDI $\dfrac{\partial p}{\partial x} + \gamma\cos\alpha = 0$

QUOTA GEODETICA $\rightarrow h$ = ASSE DELLA VERTICALE FISICA POSITIVA VERSO L'ALTO VALE $dx\cos\alpha = dh$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{dh}{dx}$ OTTENGO $\dfrac{\partial p}{\partial x} + \gamma\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0$ SE CONSIDERO UN SINGOLO PUNTO P $\quad dp + \gamma\, dh = 0$ SE IL FLUIDO È OMOGENEO E INCOMPRIMIBILE

$\underline{p + \gamma h = \text{COSTANTE}}$ EQUAZIONE FONDAMENTALE DELL'IDROSTATICA

- SPINTE IDROSTATICHE

FORZA CHE UN FLUIDO PESANTE IN QUIETE TRASMETTE AD UNA SUPERFICIE DI CONTATTO IN VIRTÙ DELLO STATO DI PRESSIONE PRESENTE SUL PUNTO DELLA SUPERFICIE STESSA:

$d\vec{S} = p\,\vec{n}\,dA \qquad \vec{S} = \int_A d\vec{S} = \int_A p\,\vec{n}\,dA$

• SPINTE IDROSTATICHE SU SUPERFICI PIANE

G = BARICENTRO DELLA SUPERFICIE A

C = CENTRO DI SPINTA

$\vec{S} = \int_A p\,\vec{n}\,dA = \left(\int_A p\,dA\right)\vec{n}$ PERCHÉ A È PIANA E QUINDI S È DIRETTA VERSO $\vec{n}$

$$S = \int_A (p_0 + \gamma z)\, dA = p_0 A + \gamma z_G A = p_G A$$

QUINDI $\underline{\vec{S} = p_G A \vec{n}}$, VERSO: DIPENDE DAL SEGNO DELLA PRESSIONE BARICENTRICA p_G

$p_G > 0 \Rightarrow$ DAL FLUIDO VERSO LA SUPERFICIE (IL FLUIDO SPINGE A)

$p_G < 0 \Rightarrow$ DALLA SUPERFICIE VERSO IL FLUIDO (IL FLUIDO ASPIRA A)

CENTRO DI SPINTA C: $y_C - y_G = \dfrac{\gamma I_x \sin\alpha}{p_G A}$ → MOMENTO D'INERZIA

$p_G > 0 \Rightarrow y_C - y_G > 0 \Rightarrow$ C È PIÙ IN PROFONDITÀ DEL BARICENTRO G

$p_G < 0 \Rightarrow y_C - y_G < 0 \Rightarrow$ C È MENO IN PROFONDITÀ DEL BARICENTRO G

- SPINTE IDROSTATICHE SU SUPERFICI CURVE:

UTILIZZANDO IL METODO DELL'EQUILIBRIO GLOBALE (MEG), CIÒ RIDUCE IL CALCOLO DI $\vec{S}$ AL CALCOLO DI UN VOLUME E DI UNA O PIÙ SPINTE IDROSTATICHE SU SUPERFICI PIANE

a) SUPERFICIE CON CONCAVITÀ VERSO IL FLUIDO

! ISOLO UN OPPORTUNO VOLUME FLUIDO E APPLICO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO. IL VOLUME DA ISOLARE È SCELTO IN MODO CHE LA SUPERFICIE CHE LO RACCHIUDE SIA COMPOSTA DALL'INTERA SUPERFICIE CURVA PIÙ UNA O PIÙ SUPERFICI PIANE

CONDIZIONE DI EQUILIBRIO → $\underbrace{\vec{G}}_{\text{FORZA DI VOLUME (PESO)}} + \underbrace{\vec{P}}_{\text{FORZA DI SUPERFICIE (SPINTA DI PRESSIONE)}} = 0$

$$\vec{P} = \int_{\overset{\frown}{AB}} p\vec{n}\, dA + \int_{\overline{AB}} p\vec{n}\, dA$$

$$\vec{S}_{\overset{\frown}{AB}} = \underbrace{-\int_{\overset{\frown}{AB}} p\vec{n}\, dA}$$

→ SPINTA CHE LA SUPERFICIE CURVA ESERCITA SUL FLUIDO, CALCOLANDO L'OPPOSTO METTO IL SEGNO −

QUINDI PER EQUILIBRIO: $\vec{G} + \vec{P} = 0$ $\quad \vec{G} + \int_{\overset{\frown}{AB}} p\vec{n}\, dA + \int_{\overline{AB}} p\vec{n}\, dA = 0$

$\vec{G} - \vec{S}_{\overset{\frown}{AB}} + \vec{S}_{\overline{AB}} = 0$ $\quad \vec{S}_{\overset{\frown}{AB}} = \vec{G} + \vec{S}_{\overline{AB}} + \dots$ SE CI DOVESSERO ESSERE ALTRE SUPERFICI PIANE COMPARIRANNO ANCHE I LORO CONTRIBUTI

IN GENERALE LA POSIZIONE DI C NON PUÒ ESSERE CALCOLATA NUMERICAMENTE MA NEL

CASO DI SUPERFICI A CURVATURA COSTANTE LA RETTA D'AZIONE DELLA SPINTA IDROSTATICA PASSA PER IL CENTRO DI CURVATURA (METODO GRAFICO)

SPINTA DI ARCHIMEDE: FORZA ESERCITATA DA UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE IN QUIETE SU DI UN CORPO IMMERSO NEL FLUIDO STESSO

$$\vec{F}_A = \int_{A_{corpo}} p\vec{n}\,dA = \gamma V \vec{k}$$

γ = PESO SPECIFICO
V = VOLUME
$\vec{k}$ = VETTORE CHE PUNTA VERSO L'ALTO

b) SUPERFICIE CON CONVESSITÀ VERSO IL FLUIDO

! CONSIDERO UN SISTEMA EQUIVALENTE FORMATO DALLO STESSO FLUIDO NEL QUALE È IMMERSO (E SOSPESO) UN VOLUME RACCHIUSO DA UNA SUPERFICIE COMPOSTA DALLA SUPERFICIE CURVA PIÙ UNA O PIÙ SUPERFICI PIANE

PER EQUILIBRIO: $\vec{F}_A = \int_{\widehat{AB}} p\vec{n}\,dA + \int_{\overline{AB}} p\vec{n}\,dA = \vec{S}_{\widehat{AB}} + \vec{S}_{\overline{AB}}$ QUINDI

$\vec{S}_{\widehat{AB}} = \vec{F}_A - \vec{S}_{\overline{AB}} + \dots$ SE CI DOVESSERO ESSERE ALTRE SUPERFICI PIANE COMPARIRANNO ANCHE I LORO CONTRIBUTI

- CINEMATICA:

LINEA DI CORRENTE → LINEA CHE AD UN DATO ISTANTE È IN OGNI SUO PUNTO TANGENTE AL VETTORE VELOCITÀ NEL PUNTO STESSO

TUBO DI FLUSSO → PORZIONE DI CAMPO FLUIDO DELIMITATA DALLA SUPERFICIE COMPOSTA DALLE LINEE DI CORRENTE CHE SI APPOGGIANO ALLA LINEA CHIUSA SCELTA COME RIFERIMENTO

IL FLUIDO SI MUOVE ESCLUSIVAMENTE NELLA DIREZIONE DELL'ASSE LONGITUDINALE DEL TUBO STESSO

CORRENTE FLUIDA → MOTO FLUIDO CHE SI REALIZZA LUNGO UNA DIREZIONE PRINCIPALE, NON NECESSARIAMENTE RETTILINEA

CORRENTE IN MOTO UNIFORME → CORRENTE IN CUI LA VELOCITÀ È INDIPENDENTE DAL TEMPO E DALLA COORDINATA S (ASSE DEL TUBO DI FLUSSO)

$dQ = \vec{v}\,d\vec{A}$ → PORTATA VOLUMETRICA ELEMENTARE

$Q = \int_A dQ = \int_A V_n\,dA = \int_A \vec{v}\,d\vec{A}$ → PORTATA VOLUMETRICA FINITA

$V = \dfrac{Q}{A}$ → VELOCITÀ MEDIA

- PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA (EQUAZIONE DI CONTINUITÀ)

$\frac{dm}{dt} = 0$ PER FLUIDI INCOMPRIMIBILI IN MOTO STAZIONARIO OPPURE ATTRAVERSO CONTORNI RIGIDI OTTENGO $Q = \text{costante}(s,t)$

MOTO PERMANENTE / STAZIONARIO $\rightarrow \vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ E NON DIPENDE DA t

$a \neq 0$ PERCHÉ PUÒ ESSERCI ACCELERAZIONE CONVETTIVA DOVUTA ALLA GEOMETRIA DEL CONDOTTO

CONSIDERO FLUIDI REALI, NEWTONIANI E INCOMPRIMIBILI

- PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\underbrace{\nabla p}_{\text{PRESSIONE}} + \underbrace{\gamma \nabla h}_{\text{FORZA PESO}} = \underbrace{-\rho \frac{d\vec{v}}{dt}}_{\text{FORZE INERZIA}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \vec{v}}_{\text{FORZE ATTRITO VISCOSO}}$$ → EQUAZIONE DI NAVIER - STOKES

$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu}$ È IL RAPPORTO TRA LE FORZE D'INERZIA E LE FORZE VISCOSE

$\frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \frac{\text{FORZE D'INERZIA}}{\text{FORZE VISCOSE}}$ L = LUNGHEZZA CARATTERISTICA

$Re < 2000 \div 2500 \rightarrow$ MOTO LAMINARE

$Re > 4000 \rightarrow$ MOTO TURBOLENTO

- MOTO DI POISEUILLE IN UN CONDOTTO CIRCOLARE

IPOTESI DI LAVORO:

- FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRIMIBILE
- CONDOTTO RETTILINEO DI DIAMETRO COSTANTE
- MOTO PERMANENTE
- MOTO LAMINARE

NEL MOTO IN ESAME LA PRESSIONE È DISTRIBUITA IDROSTATICAMENTE NELLA SEZIONE (LUNGO LA NORMALE ALLA DIREZIONE DEL MOTO)

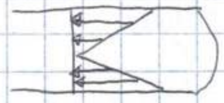
QUOTA PIEZOMETRICA $\rightarrow h^* := \frac{p}{\gamma} + h$

CADENTE PIEZOMETRICA $\rightarrow i := -\dfrac{dh^*}{dx}$ h^* DIMINUISCE NELLA DIREZIONE DEL MOTO $\Rightarrow i \geq 0$

RISOLVENDO L'EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES:

$V = V_x(r) = -\dfrac{\gamma i}{4\mu}(r^2 - r_0^2)$ IL PROFILO DELLA VELOCITÀ È PARABOLICO

$V_{max} = V_x(r=0) = \dfrac{\gamma i}{4\mu} r_0^2$

$\tau = \dfrac{\gamma i}{2} r$ ANDAMENTO DELLO SFORZO TANGENZIALE 

IN AMBITO EMODINAMICO LA FORZA GRAVITAZIONALE VIENE USUALMENTE TRASCURATA RISPETTO AL CONTRIBUTO DELLA PRESSIONE QUINDI LE FORMULE RISULTANO:

$V_x(r) = \dfrac{\Delta p}{L} \dfrac{(r_0^2 - r^2)}{4\mu}$

$Q = \dfrac{\Delta p}{L} \dfrac{\pi r_0^4}{8\mu} = \dfrac{\Delta p}{R}$

$V_{max} = 2 V_{media} = 2 \dfrac{Q}{A}$ $\qquad V_{media} = \dfrac{\Delta p}{L} \dfrac{r_0^2}{8\mu}$

$R = \dfrac{8\mu L}{\pi r_0^4} \rightarrow$ RESISTENZA DEL CONDOTTO

n CONDOTTI IN SERIE $\quad R_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} R_i$

n CONDOTTI IN PARALLELO $\quad \dfrac{1}{R_{TOT}} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{R_i}$

- CORRENTI MONODIMENSIONALI

$E = \dfrac{p}{\gamma} + h + \dfrac{v^2}{2g} = h^* + \dfrac{v^2}{2g}$ $\rightarrow$ ENERGIA SPECIFICA NEL GENERICO PUNTO P AL GENERICO ISTANTE t

(v: VELOCITÀ PUNTUALE)

$[E] = m$

$h \rightarrow$ ENERGIA POTENZIALE PER UNITÀ DI PESO

$\dfrac{p}{\gamma} \rightarrow$ ENERGIA DI PRESSIONE PER UNITÀ DI PESO

$\frac{V^2}{2g}$ → ENERGIA CINETICA PER UNITÀ DI PESO

7

ENERGIA SPECIFICA DELLA CORRENTE IN UNA GENERICA SEZIONE:

$$E_{1D} = \frac{1}{A}\int_A E\, dA = \frac{1}{A}\int_A \left(\frac{p}{\gamma}+h\right) dA + \frac{1}{A}\int_A \frac{v^2}{2g}\, dA = \frac{p}{\gamma} + h + \alpha\frac{V^2}{2g} = h^* + \alpha\frac{V^2}{2g}$$

→ VELOCITÀ MEDIA NELLA SEZIONE

$$\alpha = \text{FATTORE DI CORREZIONE} = \begin{cases} 2 & \text{SE MOTO LAMINARE} \\ \sim 1 & \text{SE MOTO TURBOLENTO} \end{cases}$$

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA SPECIFICA (FORMA DIFFERENZIALE)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \underbrace{-\frac{\beta}{g}\frac{\partial V}{\partial t}}_{\text{INERZIA TEMPORALE DEL MOTO}} \underbrace{- J}_{\text{DISSIPAZIONE DI ENERGIA PER UNITÀ DI LUNGHEZZA}}$$

$$\beta = \text{FATTORE DI CORREZIONE} = \begin{cases} 1{,}33 & \text{SE MOTO LAMINARE} \\ \sim 1 & \text{SE MOTO TURBOLENTO} \end{cases}$$

NEL CASO DI MOTO STAZIONARIO $\left(\frac{\partial V}{\partial t}=0\right)$, INTEGRANDO OTTENGO $E_1 - E_2 = \Delta E_{1\to 2}$

L'ENERGIA DELLA SEZIONE DI MONTE MENO L'ENERGIA DELLA SEZIONE DI VALLE È PARI ALLA DISSIPAZIONE DI ENERGIA CHE SI PRODUCE TRA LE DUE SEZIONI

LA DISSIPAZIONE DI ENERGIA È DOVUTA AL CARATTERE VISCOSO DEL FLUIDO, INFATTI $\mu = 0 \Rightarrow \Delta E_{1\to 2}$ (FLUIDO IDEALE)

$$\Delta E_{1\to 2} = \underbrace{\Delta E^{\text{CONTINUE}}_{1\to 2}}_{\text{PERDITE CONTINUE}} + \underbrace{\Delta E^{\text{LOCALIZZATE}}_{1\to 2}}_{\text{PERDITE LOCALIZZATE}}$$

- DISSIPAZIONI CONTINUE:

$$\Delta E^{\text{CONTINUE}}_{1\to 2} = \underline{J \cdot L_{1\to 2}}$$

→ LUNGHEZZA DEL TRATTO

$$J = \underbrace{\frac{f}{4R_h}}_{R_h:\ \text{RAGGIO IDRAULICO}}\frac{V^2}{2g} = \frac{f}{d}\frac{V^2}{2g}$$ → FORMULA DI DARCY - WEISBACH

PER CONDOTTI CIRCOLARI PIENI

f = COEFFICIENTE DI RESISTENZA

$f = \frac{64}{Re}$ SE MOTO LAMINARE, SOLUZIONE ESATTA CHE NON DIPENDE DALLA NATURA DELLA PARE

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{e/d}{3{,}71} + \frac{2{,}52}{\sqrt{f}\,Re}\right)$$

SE MOTO TURBOLENTO È UN'EQUAZIONE IMPLICITA IN f, METODO RICORSIVO (TABELLA) → SUCCESSIVE ITERAZIONI → EQUAZIONE DI

e = SCABREZZA EQUIVALENTE ASSOLUTA

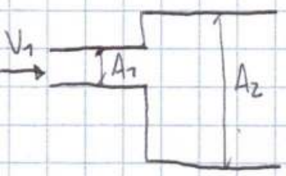
e/d = SCABREZZA EQUIVALENTE RELATIVA

• DISSIPAZIONI LOCALI

SONO GENERATE DAI VORTICI CHE A LORO VOLTA SONO GENERATI DALLA GEOMETRIA DEI CONTORNI SOLIDI

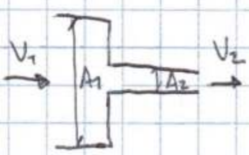
$$\Delta E_{1\to 2} = \xi \frac{V^2}{2g}$$

BRUSCO ALLARGAMENTO (BORDA)



$$\xi = \left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{V_1^2}{2g}\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

BRUSCO RESTRINGIMENTO



$$\xi = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2$$

$$\text{QUINDI } \Delta E = \frac{V_1^2}{2g}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2 = \frac{V_2^2}{2g}\left(\frac{1}{C_c}-1\right)^2$$

C_c = COEFFICIENTE DI CONTRAZIONE, NEL CASO = $\frac{A_c}{A_2}$

A_c = AREA DELLA SEZIONE DI VENA CONTRATTA

- POMPA:

PREVALENZA → H_P = ENERGIA FORNITA DALLA POMPA ALLA CORRENTE

POTENZA UTILE → $P_U = \gamma Q H_P$, POTENZA MECCANICA FORNITA DALLA POMPA ALLA CORRENTE

QUANDO TRA LA SEZIONE DI MONTE E LA SEZIONE DI VALLE È PRESENTE UNA POMPA LA PREVALENZA H_P DELLA POMPA DEVE ESSERE CONTEGGIATA NEL BILANCIO COME ULTERIORE ENERGIA A DISPOSIZIONE DELLA CORRENTE