COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
e FONDAMENTI DI AUTOMATICA
Ingegneria dell'Informazione ed Elettronica
5 Luglio 2021

Esercizio 1. [10 punti] Dato il sistema di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(1+s)^2}{s(1-0.5s+4s^2)}$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

ii) Si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuandone asintoti ed intersezioni con gli assi.
Nota. È richiesto di calcolare SOLO le pulsazioni corrispondenti alle intersezioni e non i valori numerici delle intersezioni. Dal momento che il calcolo delle intersezioni è molto laborioso, esse possono essere indicate con le lettere $A, B, C, \ldots$.

iii) Si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$, e in caso non sia BIBO stabile si determini il numero di poli a parte reale positiva e/o a parte reale nulla.

Esercizio 2. [9 punti] Data

$$G(s) = \frac{s^2+1}{(s-1)(s+1)^2(s+2)}$$

si traccino, in modo approssimato, i luoghi positivo e negativo (con analisi di asintoti ed intersezioni con l'asse immaginario, ma senza calcolo esplicito dei punti doppi). Per capire l'andamento dei rami fuori dall'asse reale, e la collocazione di alcuni punti doppi, si utilizzi la tabella di Routh e si deduca la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ al variare di K reale, individuando, per i valori di K per cui la prima colonna della tabella non si annulla, il numero di poli a parte reale positiva.

Esercizio 3. [7 punti] i) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+10}{s}$$

è richiesto il progetto di un controllore stabilizzante $C(s)$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 2 ed errore a regime alla rampa parabolica pari a circa

0.1, ed alla funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 1$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.
ii) Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+10)^2}$$

è richiesto il progetto di un controllore stabilizzante $C(s)$ che attribuisca al risultante sistema retroazionato $W(s)$ tipo 1 ed errore a regime alla rampa lineare pari a circa 0.1, ed alla funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ $\omega_A \simeq 100$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5 punti] Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

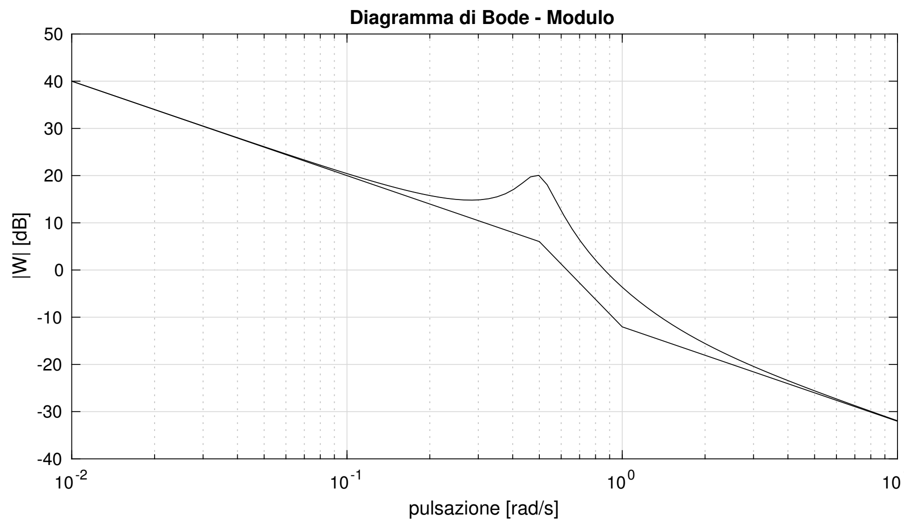
($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) e sollecitato dal segnale di ingresso

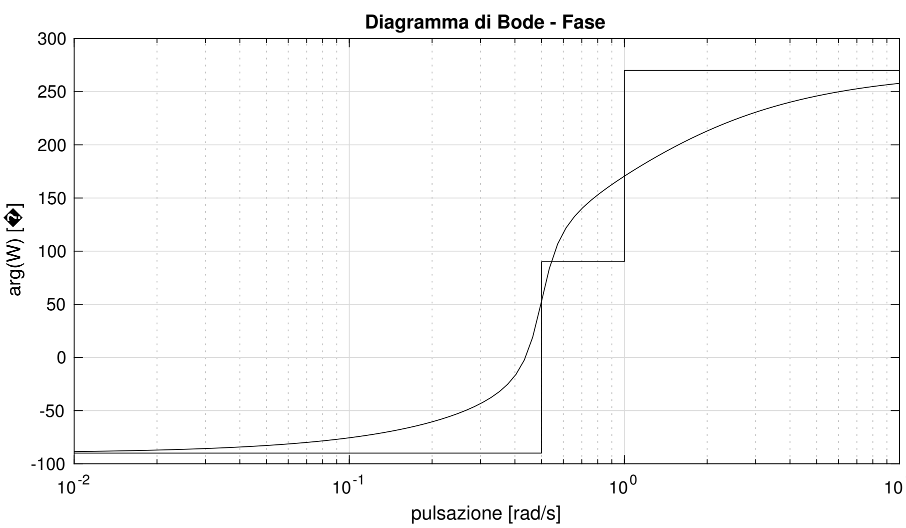
$$u(t) = e^{j\tilde{\omega} t} \delta_{-1}(t),$$

con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fissato. Assumendo condizioni iniziali arbitrarie, si introducano i concetti di risposta di regime permanente e di risposta transitoria, e si dimostri (<u>operando nel dominio delle trasformate</u>) come sotto opportune ipotesi l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema sia sempre esprimibile come somma delle due. Come cambia la risposta alla precedente domanda se le condizioni iniziali del sistema sono nulle?

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) Una volta riportata la funzione di trasferimento in forma di Bode si nota che essa ha guadagno di Bode $K_B = 1$, due zeri reali negativi in $s = -1$ e due poli complessi coniugati instabili con $\omega_n = \frac{1}{2}$ e $\xi = -\frac{1}{8}$. Quindi il diagramma di Bode del modulo scende sempre (eccetto per un picco di risonanza dovuto ai poli complessi) da $+\infty$ a $-\infty$ (il primo tratto con pendenza -20 dB/dec, il tratto da $\omega = 1/2$ a $\omega = 1$ con pendenza -60 dB/dec e l'ultimo tratto con pendenza -20 dB/dec), mentre la fase sale sempre, da $-90°$ fino a $+270°$.





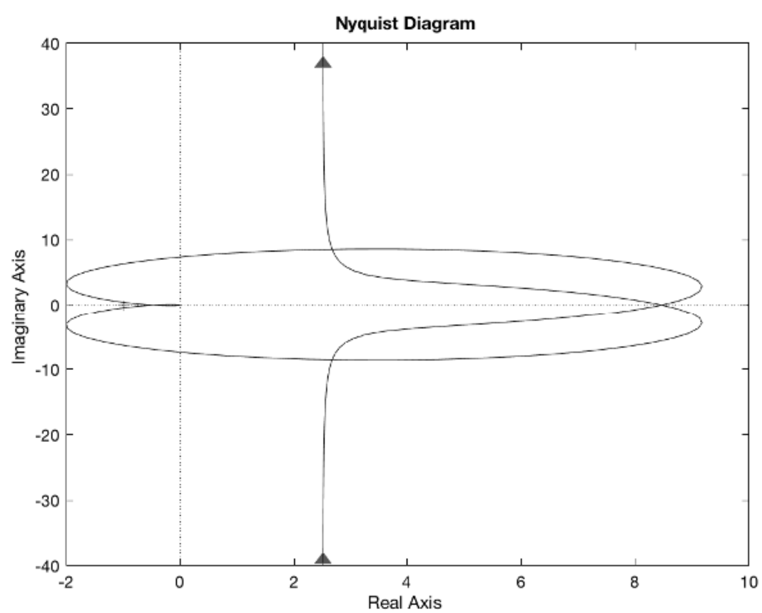
ii) Per quanto concerne il diagramma di Nyquist, esso arriva da $-\infty$ in basso, e l'andamento della fase lo obbliga a passare prima nel primo quadrante, poi nel secondo, infine nel terzo dove poi converge ad $s = 0$ con tangente verticale, parallelo al semiasse immaginario negativo. Avremo quindi due intersezioni con l'asse reale ed una con l'asse immaginario,

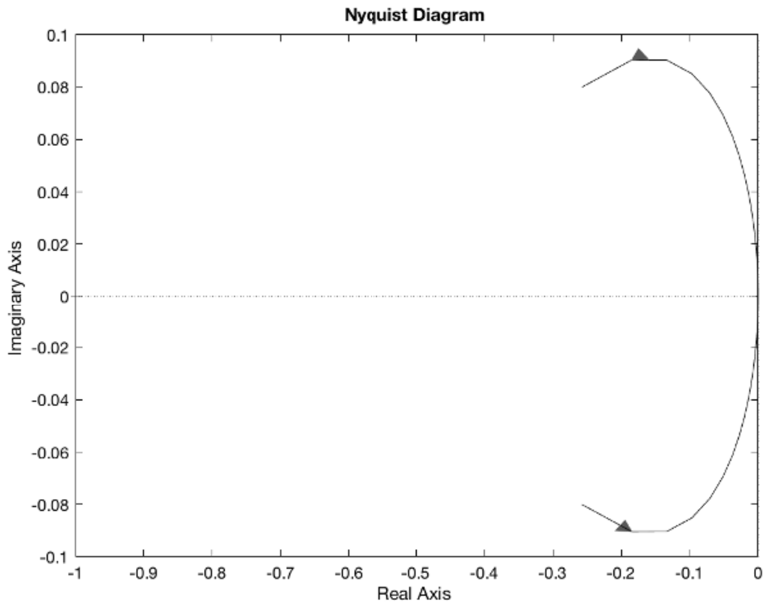
nell'ordine
$$\begin{array}{ll} \omega = \omega_1 \ \Rightarrow \ s = A, \ A > 0, & \\ \omega = \omega_2 \ \Rightarrow \ s = iB, \ B > 0, & \qquad \text{con } 0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3. \\ \omega = \omega_3 \ \Rightarrow \ s = -C, \ C > 0, & \end{array}$$

Per determinate asintoto ed intersezioni con gli assi, calcoliamo parte reale e coefficiente dell'immaginario di $G(i\omega)$ ottenendo:

$$G(i\omega) = \frac{\frac{5}{2} - \frac{17}{2}\omega^2}{(1-4\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{4}} + i\frac{-4\omega^4 + 6\omega^2 - 1}{\omega[(1-4\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{4}]}$$

e la parte immaginaria si annulla per $\omega^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \approx 0.19$ e $\omega^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \approx 1.31$, mentre quella reale per $\omega^2 = \frac{5}{17} \approx 0.542$, da cui le tre pulsazioni $\omega_1 = \sqrt{0.19}, \omega_2 = \sqrt{0.542}, \omega_3 = \sqrt{1.31}$. Assumiamo $A := G(i\omega_1) > 0, B := \frac{G(i\omega_2)}{i} > 0$ e $C := -G(i\omega_3) > 0$. Non è richiesta la valutazione numerica di A, B e C.
Pertanto il diagramma di Nyquist di $G(i\omega)$ (per pulsazioni non negative) parte dal punto improprio nel quarto quadrante parallelo alla retta di ascissa $5/2$, poi attraversa l'asse reale in corrispondenza alla pulsazione ω_1, poi ruotando in verso antiorario attraversa l'asse immaginario per $\omega = \omega_2$, successivamente, sempre ruotando in verso antiorario attraversa l'asse reale per $\omega = \omega_3$ e infine va all'origine (a cui arriva con tangente parallela al semiasse immaginario negativo). Di seguito sono riportati il diagramma complessivo (per pulsazioni positive e negative) e il dettaglio del diagramma in prossimità all'origine per valori di pulsazioni positive o negative di modulo molto alto.





iii) Considerando il cerchio all'infinito (chiuso in verso orario) ed il punto critico $s = -\frac{1}{K}$, si scopre che

$$\begin{array}{lll} -\frac{1}{K} & < & -C \;\Rightarrow\; N=0,\; n_{G_+}=2,\; n_{W_+}=2 \\ -C & < & -\frac{1}{K} < 0 \Rightarrow\; N=+2,\; n_{G_+}=2,\; n_{W_+}=0 \\ 0 & < & -\frac{1}{K} < A \Rightarrow\; N=+1,\; n_{G_+}=2,\; n_{W_+}=1 \\ A & < & -\frac{1}{K} \;\Rightarrow\; N=-1,\; n_{G_+}=2,\; n_{W_+}=3 \end{array}$$

Si nota inoltre che per $1/K = C$ e per $-1/K = A$ la $W(s)$ ha due poli immaginari coniugati. Quindi $W(s)$ è BIBO stabile se e solo se $K > \frac{1}{C} > 0$.

Esercizio 2. Osserviamo preliminarmente che $n = 4 > 2 = m$ e quindi sia nel luogo positivo che nel luogo negativo ci sono due asintoti. Le direzioni di tali asintoti sono $\pi/2, 3\pi/2$ nel luogo positivo e $0, \pi$ nel luogo negativo. Il baricentro della stella di asintoti (rilevante solo nel caso del luogo positivo) è:

$$(x_B, 0), \quad \text{con} \quad x_B = \frac{(1-1-1-2)-(j-j)}{4-2} = -\frac{3}{2}.$$

Se considero il luogo positivo noto che appartiene ad esso solo il seguente intervallo dell'asse reale: $(-2, 1)$. Invece appartengono al luogo negativo le due semirette $(-\infty, -2)$ e $(1, +\infty)$. Una valutazione preliminare ci porta quindi a dire che nel luogo positivo ci sono due punti doppi sull'asse reale, uno in $(-2, -1)$ e uno in $(-1, 1)$. I due rami uscenti da -1 e -2 si incrociano in qualche punto dell'intervallo $(-2, -1)$ e poi vanno all'asintoto verticale centrato in $(-3/2, 0)$. D'altra parte i due rami che partono da -1 e 1 si incrociano in qualche punto (doppio) intermedio e poi vanno ai due zeri in $\pm j$. Si tratta di capire se tali rami sono interamente contenuti nel semipiano destro, in quello sinistro o attraversano l'asse immaginario. Per quel che concerne il luogo negativo, invece, abbiamo un ramo sull'asse reale che da -2 va a $-\infty$, uno sull'asse reale che va da 1 va a $+\infty$ e due rami che partono dal polo doppio in -1 e raggiungono i due zeri in $\pm j$. Anche in questo caso si

deve capire se tali rami sono interamente contenuti nel semipiano sinistro o attraversano l'asse immaginario.
La ricerca delle intersezioni con l'asse immaginario conduce a

$$(j\omega - 1)(1-\omega^2+j2\omega)(2+j\omega) + K(1-\omega^2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} -3\omega(1+\omega^2) = 0 \\ \omega^4 - \omega^2 - 2 + K(1-\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Si vede quindi che l'unica soluzione possibile è $\omega = 0$ per $K = 2$.
Se ora applichiamo la tabella di Routh al polinomio

$$d(s) + Kn(s) = s^4 + 3s^3 + (K+1)s^2 - 3s + (K-2)$$

osserviamo preliminarmente che il polinomio ha i coefficienti del termine di grado 4 e 1 di segno opposto per ogni scelta di K. Pertanto abbiamo ora tutte le risposte che ci servono circa l'andamento rispetto all'asse immaginario dei rami sia del luogo positivo che del luogo negativo.
La tabella di Routh è la seguente:

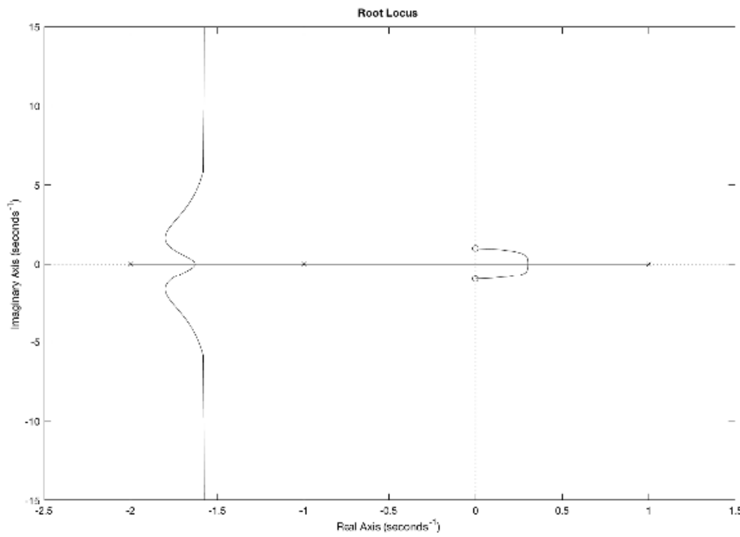
$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & K+1 & K-2 \\ 3 & 3 & -3 & \\ 2 & K+2 & K-2 & \\ 1 & \dfrac{-6K}{K+2} & & \\ 0 & K-2 & & \end{array}$$

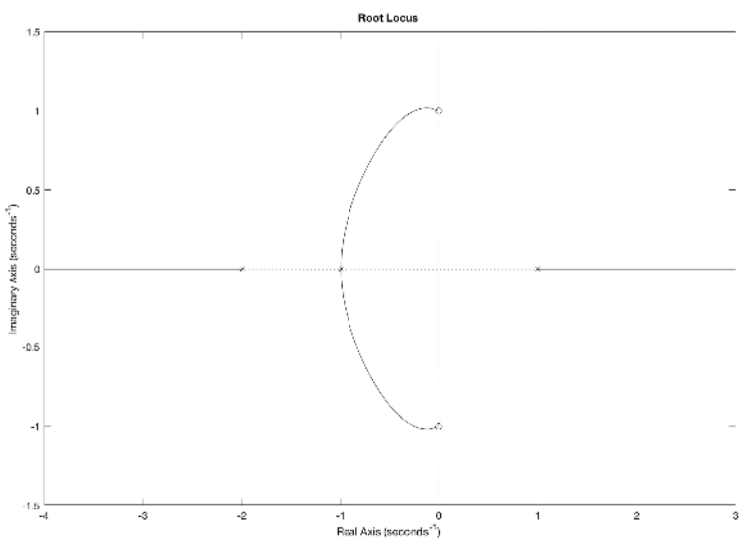
Da questa tabella si vede chiaramente che il polinomio non è mai di Hurwitz. Se valutiamo per quali valori di K si annullano i termini in prima colonna nelle righe "2", "1", e "0", troviamo $\{-2, 0, 2\}$. Se allora valutiamo permanenze e variazioni troviamo nei seguenti intervalli il seguente risultato:

$K < -2$	1 variazione
$-2 < K < 0$	1 variazione
$0 < K < 2$	1 variazione
$K > 2$	2 variazioni

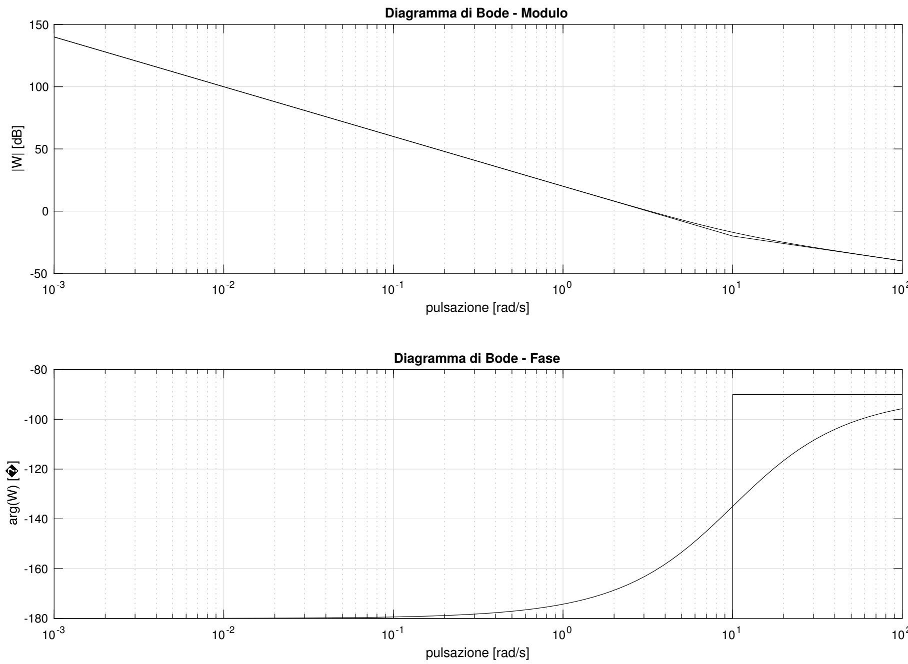
Pertanto il sistema retroazionato ha sempre un polo reale positivo tranne che per $K > 2$, situazione in cui ha due poli a parte reale positiva.

I luoghi positivo e negativo sono riportati qui di seguito:





Esercizio 3. Per il punto i), è necessario il ricorso a $C'(s) = \frac{1}{s}$ per il requisito sul tipo mentre l'errore a regime alla rampa parabolica è già a posto; dopodichè si nota che in $\omega_A^* = 10^0$ rad/s il modulo di $C'(j\omega)G(j\omega)$ è a $+20$ dB, mentre la fase è a quasi $-180°$.



È necessario quindi il ricorso ad una rete a sella per abbassare il modulo di 20dB, aumentando nel contempo la fase di circa $+90°$. Una possibile (tra le infinite) soluzioni è la seguente

$$C''(s) = \frac{1+10s}{1+10^3 s}\frac{1+10s}{1+s/10}$$

che porta al compensatore complessivo

$$C(s) = \frac{(1+10s)^2}{s(1+10^3 s)(1+s/10)}.$$

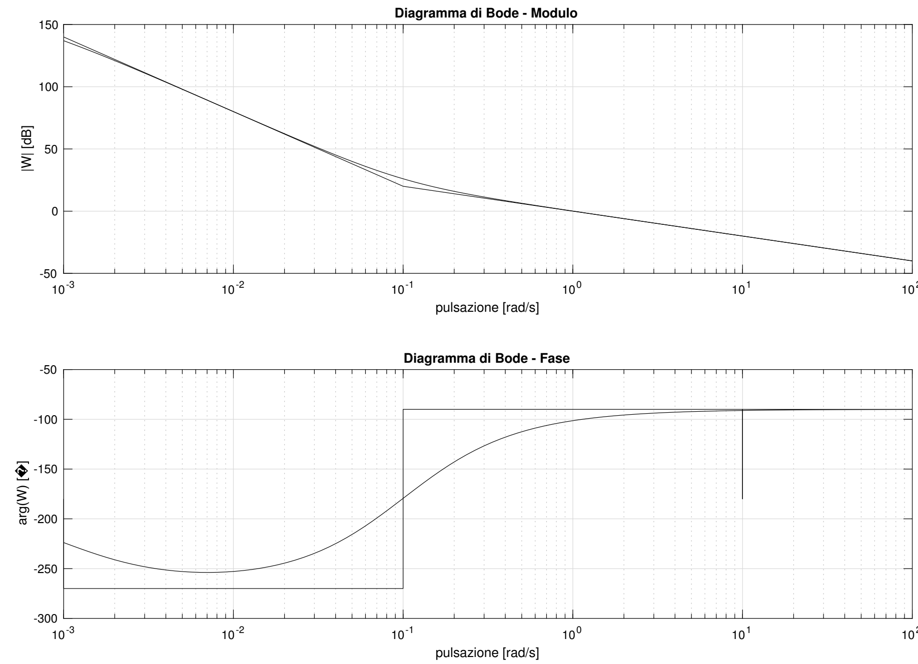
Infatti la rete anticipatrice

$$C_{ant}(s) = \frac{1+10s}{1+s/10}$$

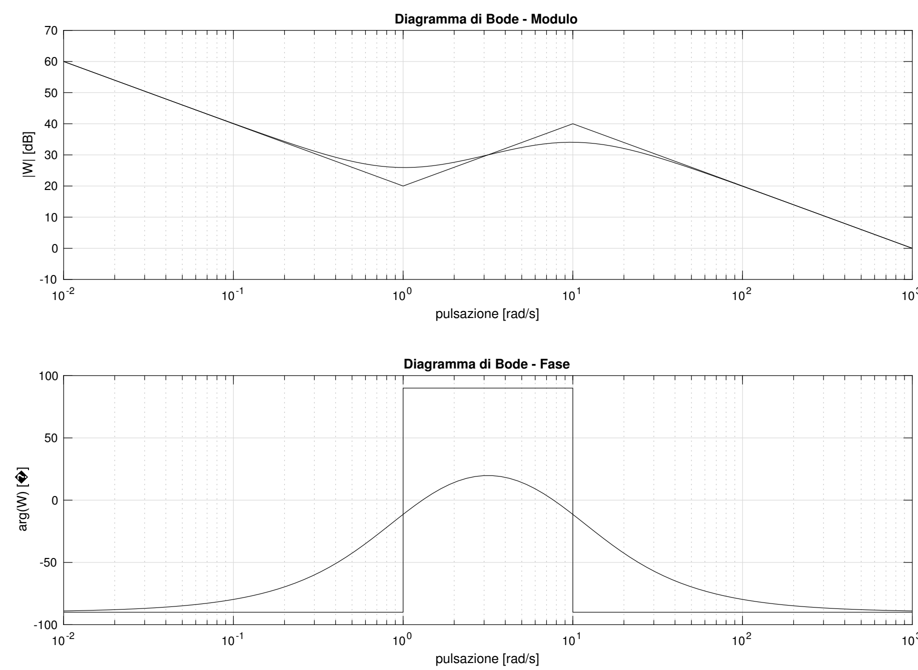
alza la fase in ω^* di $90°$, ma al contempo da un contributo di 20 dB al modulo. La rete attenuatrice

$$C_{att}(s) = \frac{1+10s}{1+10^3 s}$$

è posizionata prima in modo da dare un contributo nulla alla fase, mentre il polo precedente di due decadi lo zero così da dare un contributo al modulo di -40 dB.
La stabilità BIBO del sistema retroazionato è garantita dal criterio di Bode.



Per il punto ii), è necessario il ricorso a $C'(s) = \frac{10^3}{s}$ per il requisito sul tipo e sull'errore a regime alla rampa lineare; dopodichè si nota che in $\omega_A^* = 10^2$ rad/s il modulo di $C'(j\omega)G(j\omega)$ è a $+20$ dB, mentre la fase è superiore a $-90°$.



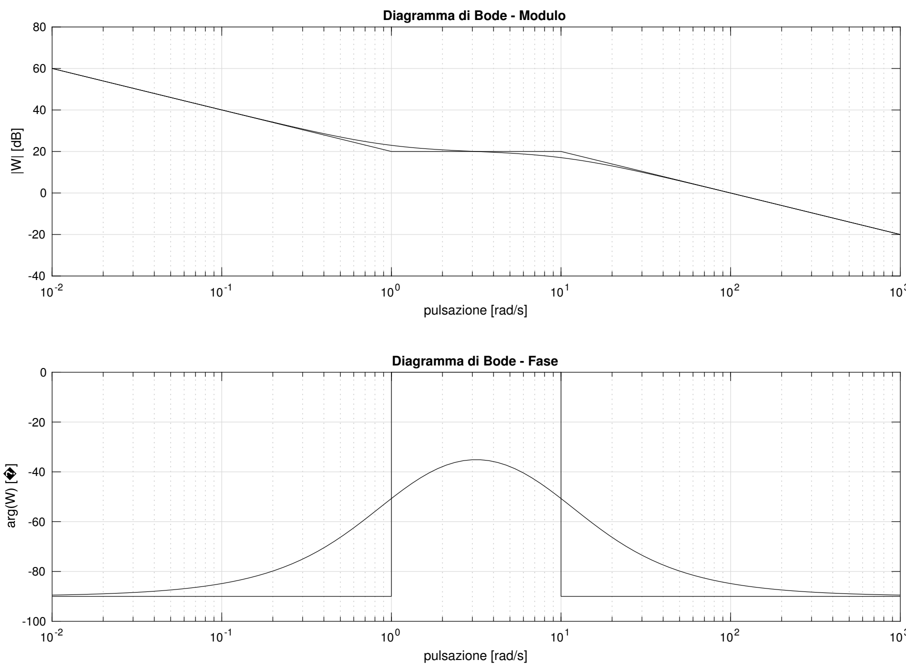
Possiamo allora ricorrere ad una rete attenuatrice che abbassi il modulo di 20 dB e non abbassi sostanzialmente la fase. A tal fine è sufficiente scegliere una rete attenuatrice con un polo in -1 e uno zero in -10, il che corrisponde a fare una doppia cancellazione ammissibile nella funzione di trasferimento del processo:

$$C''(s) = \frac{1 + s/10}{1 + s}.$$

Il controllore complessivo diventa allora

$$C(s) = \frac{10^3(1 + s/10)}{s(1 + s)}.$$

Il diagramma finale di $C(s)G(s)$ è il seguente:



La stabilità BIBO del sistema retroazionato è garantita dal criterio di Bode.

Teoria. Si veda il Libro di testo, pp. 89 e seguenti.