# COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
# Ingegneria dell'Informazione
# 31 Agosto 2017

**Esercizio 1.** [10 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1+s^2}{s(1-10s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}.$$

i) Si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, individuandone asintoti ed intersezioni con gli assi;

iii) si studi, attraverso il criterio di Nyquist, la stabilità BIBO del sistema $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ (determinandone l'eventuale numero di poli a parte reale positiva e/o nulla), al variare di $K \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

**Esercizio 2.** [9 punti] Data la funzione di trasferimento di un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante:

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+1)^2(s+5)^2},$$

è richiesto di tracciare i luoghi delle radici positivo e negativo, determinando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, e deducendo quindi per quali valori reali di $K$ il sistema retroazionato di funzione di trasferimento $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ è BIBO stabile.

**Esercizio 3.** [3.5 punti] Dato il processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^2\left(1+\frac{s}{1000}\right)} \in \mathbb{R}(s),$$

è richiesto di progettare un controllore razionale e proprio, stabilizzante, $C(s)$, di tipo PID (eventualmente P, PI o PD) in modo tale che: attribuisca al sistema retroazionato tipo 1 e relativo errore di regime permanente (alla rampa lineare) $e_{rp}^{(2)} \approx 1$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ abbia pulsazione di attraversamento $\omega_A \approx 10$ rad/s e e margine di fase $m_\psi \approx 90°$.

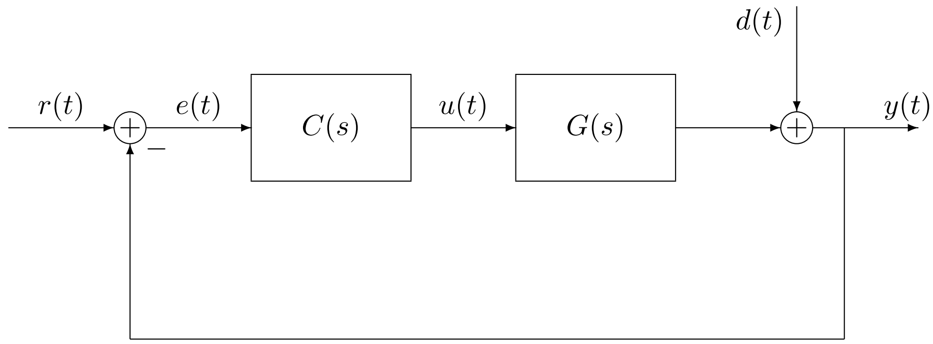
**Esercizio 4.** [3 punti] Si consideri un processo di funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{K_1}{s+p},$$

con $K_1$ e $p$ numeri reali positivi. Si dimostri (o attraverso calcoli numerici espliciti o attraverso dettagliate motivazioni teoriche) che per ogni $K_2 > 0$ il controllore integrale

$$C(s) = \frac{K_2}{s}$$

attribuisce al sistema retroazionato di figura




le seguenti proprietà:

i) funzione di trasferimento in catena chiusa

$$W(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

BIBO stabile;

ii) reiezioni di disturbi costanti $d(t) = d_0\delta_{-1}(t)$ in uscita (ovvero a regime permanente i disturbi costanti non danno contributo all'uscita $y(t)$).

**Teoria.** [5 punti] Si consideri un modello ingresso/uscita LTI a tempo continuo causale, descritto da un'equazione differenziale lineare e a coefficienti costanti del tipo

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \ldots + b_0 u(t),$$

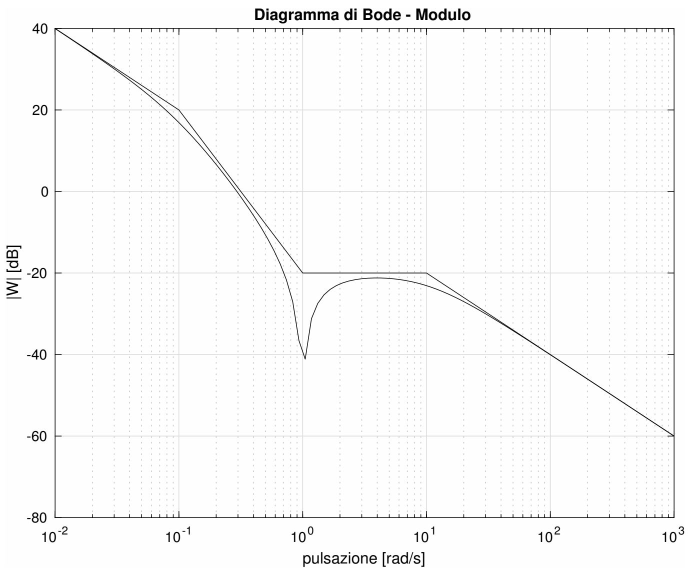
($a_n, b_m \neq 0$ e $n \geq m$) e sollecitato dal segnale di ingresso

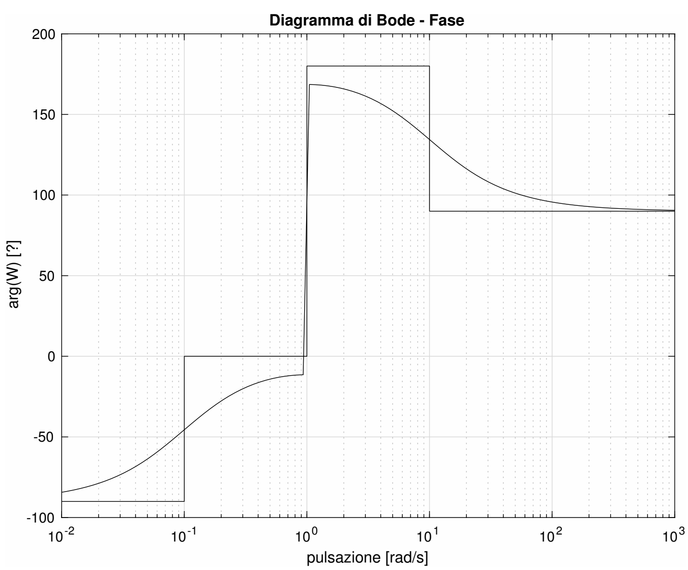
$$u(t) = e^{j\tilde{\omega}t}\delta_{-1}(t),$$

con $\tilde{\omega} \in \mathbb{R}$ fissato. Assumendo condizioni iniziali arbitrarie, si introducano i concetti di risposta di regime permanente e di risposta transitoria, e si dimostri (operando nel dominio del tempo) come sotto opportune ipotesi l'evoluzione complessiva (d'uscita) $y(t)$ del sistema sia sempre esprimibile come somma delle due. Come cambia la risposta alla precedente domanda se le condizioni iniziali del sistema sono nulle?

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.** i) Il diagramma di Bode è il seguente:



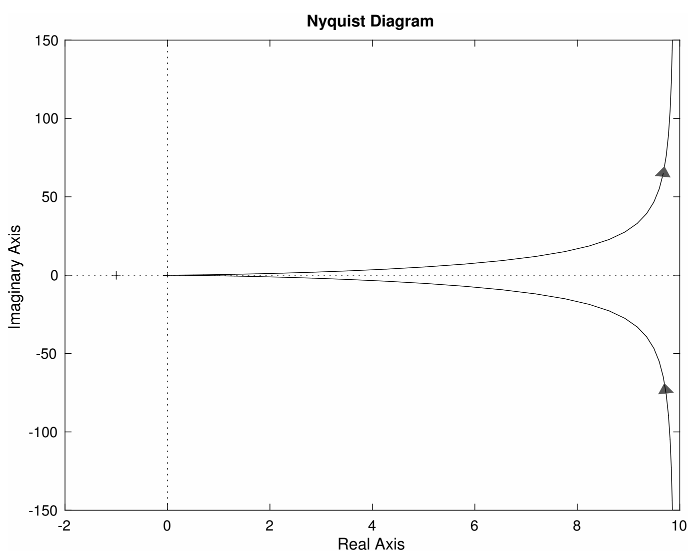




Il modulo parte da $+\infty$ per $\omega = 0$ ed è monotono decrescente, fatta eccezione solo per la presenza di un picco di antirisonanza infinito (anche se nel diagramma appare finito) per $\omega = 1$. Inoltre tende a $-\infty$ per $\omega \to +\infty$. La fase parte da $-90°$ ed è monotona crescente fino a quasi $0°$ per $\omega = 1$, dove una discontinuità di $180°$ la porta un po' sotto $+180°$, da cui prosegue invertendo direzione fino a $+90°$. Non sono quindi previste intersezioni con l'asse reale (origine esclusa), visto che la fase non è mai un esatto multiplo di $180°$.

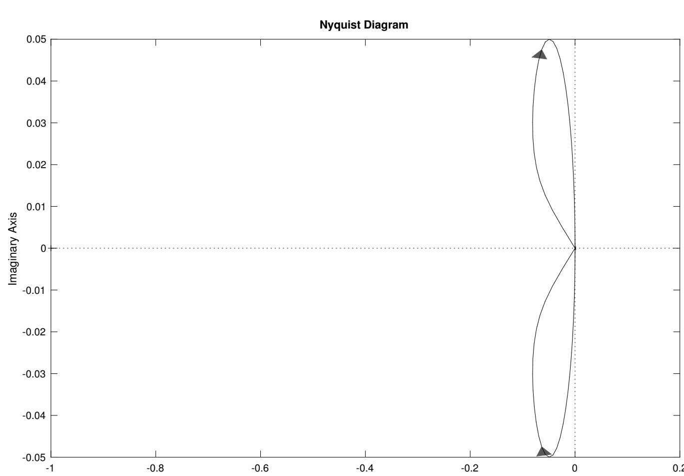
ii) Il calcolo di $G(j\omega)$ porge, dopo alcuni conti,

$$G(j\omega) = \frac{99}{10}\frac{1-\omega^2}{(1+\omega^2)^2 + \frac{99^2}{100}\omega^2} + j\frac{(\omega^2-1)(\omega^2+1)}{\omega\left[(1+\omega^2)^2 + \frac{99^2}{100}\omega^2\right]}.$$

Il limite per $\omega \to 0^+$ porge il valore $\frac{99}{10}$ per la parte reale e $-\infty$ per quella immaginaria, da cui l'asintoto verticale centrato in $s = \frac{99}{10}$, con Nyquist che proviene dall'infinito in basso. In accordo con Bode, Nyquist deve ruotare in senso antiorario da $-90°$ fino a quasi $0°$, poi attraversa l'origine con tangente quasi orizzontale, rispuntando nel secondo quadrante, dove inizia a ruotare in senso orario e formando un piccolo cappio termina nell'origine con tangente verticale. La parte reale si annulla per solo per $\omega = 1$, dove si annulla anche quella immaginaria (passaggio per l'origine in corrispondenza del picco di antirisonanza), quindi come già previsto non ci sono intersezioni con gli assi oltre all'origine. Il diagramma di Nyquist è il seguente:




Il suo dettaglio per pulsazioni che variano in modulo da 1 a $+\infty$ viene riportato qui di seguito:



Riportando il diagramma di Nyquist complessivo (per pulsazioni positive e negative) al finito con un semicerchio percorso in senso orario, si ottiene una curva chiusa di cui va valutato il numero di giri $N$ attorno al punto critico $-\frac{1}{K}$. Essendo $n_{G_+} = 1$, si hanno i seguenti casi possibili

- $K > 0$, che implica $N = 0$ e quindi $n_{W_+} = 1$, instabilità con 1 polo positivo e due a parte reale negativa
- $K < 0$, che implica $N = -1$ e quindi $n_{W_+} = 2$, instabilità con 1 polo negativo e due a parte reale positiva

Quindi mai stabilità BIBO, e neppure mai poli a parte reale nulla.

**Esercizio 2.** L'equazione dei punti doppi porge, dopo alcuni passaggi,

$$s(s+1)(s+5)(2s^2-10) = 0,$$

da cui i punti doppi banali ($s = -1$ e $s = -5$ per $K = 0$, $s = 0$ per $K = \pm\infty$) ed i punti doppi $s = \pm\sqrt{5}$. Sostituendo a $s$ i valori $\pm\sqrt{5}$ nell'equazione del luogo:

$$d(s) + Kn(s) = (\pm\sqrt{5}+1)^2(\pm\sqrt{5}+5)^2 + K6 = 0$$

senza bisogno di far conti si vede che in entrambi i casi $K$ deve essere negativo e quindi entrambi i punti doppi in senso stretto appartengono al luogo negativo. Per determinare le intersezioni con l'asse immaginario imponiamo $d(j\omega) + Kn(j\omega) = 0$, cioè

$$(j\omega+1)^2(j\omega+5)^2 - K\omega^2 = 0 \;\Rightarrow\; [\omega^4 - (46+K)\omega^2 + 25] - j12\omega(\omega^2-5) = 0.$$

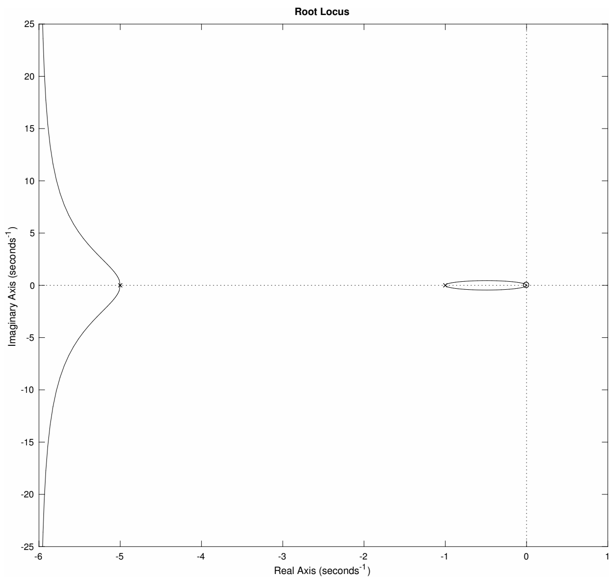
Eguagliando a zero la parte immaginaria si trova $\omega = 0$ oppure $\omega^2 = 5$. La prima soluzione si ottiene solo per $K = \pm\infty$. La seconda sostituita nella parte reale porta a $K = -36$. Quindi anche le intersezioni con gli assi immaginari sono relative al solo luogo negativo. Essendo $n = 4$ e $m = 2$ nel luogo positivo gli asintoti hanno le direzioni $\pi/2$ e $3\pi/2$ mentre il baricentro degli asintoti è

$$x_B = \frac{-5-5-1-1-0-0}{4-2} = -6.$$

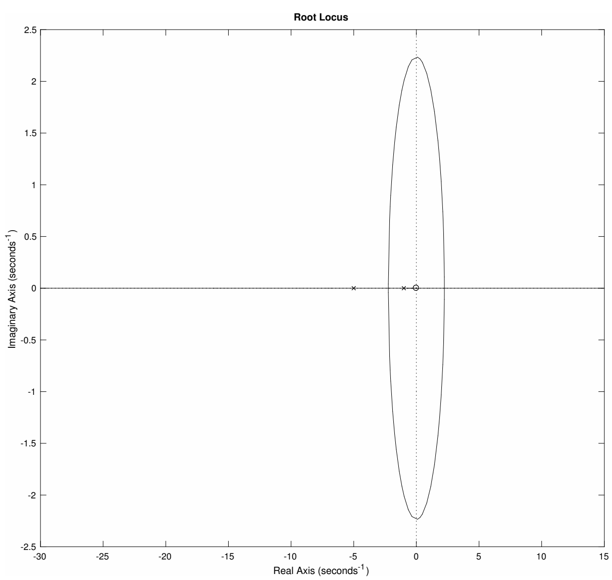
Invece nel luogo negativo gli asintoti sono i due semiassi reali.

Nel luogo positivo abbiamo due rami che partono dal polo doppio in $-5$ e vanno direttamente a chiudersi sui due asintoti verticali, mentre altri due rami partono dal polo doppio in $-1$ e vanno allo zero doppio in 0. Nessun punto dell'asse reale ad esclusione di zeri e poli di $G(s)$ fa parte del luogo.

Il luogo positivo è illustrato nella seguente figura

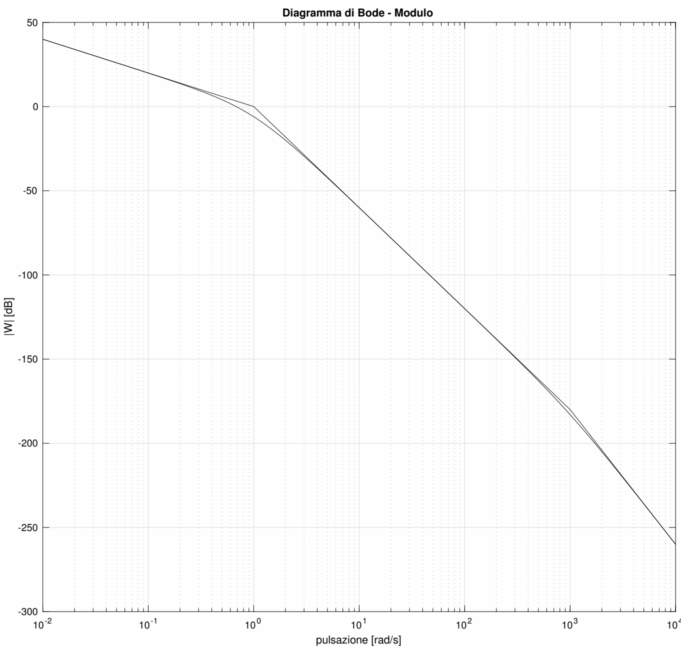


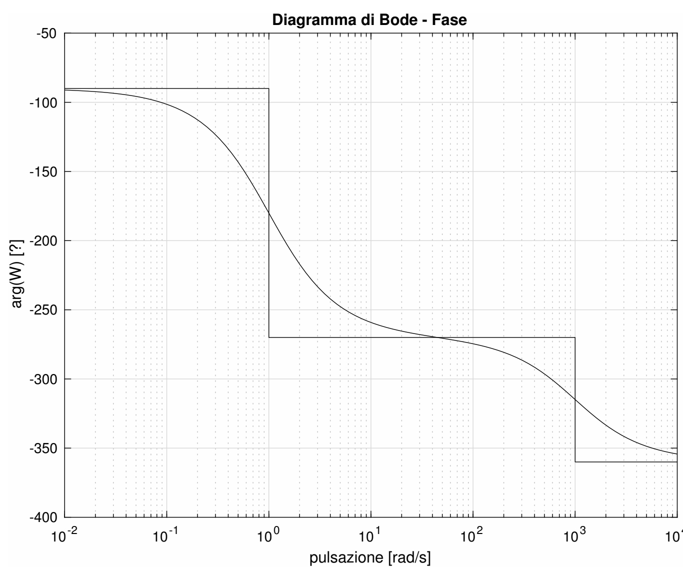

Invece nel luogo negativo l'asse reale fa interamente parte del luogo. Due rami partono dal polo in $-5$: uno va verso $-\infty$ e l'altro verso il punto doppio $-\sqrt{5}$ dove si incontra con uno dei due rami che partono dal polo in $-1$. L'altro ramo che parte da $-1$ va allo zero in 0. I due rami che lasciano l'asse reale in $-\sqrt{5}$ si richiudono nel punto doppio $\sqrt{5}$ e da lì uno va allo zero in 0 e l'altro a $+\infty$. Il luogo negativo è illustrato nella seguente figura




Dallo studio di luogo positivo e negativo emerge che nel luogo positivo tutti i rami sono contenuti nel semipiano reale negativo, e quindi c'è BIBO stabilità per ogni $K > 0$. Invece nel luogo positivo si ha stabilità BIBO fintanto che i due rami non attraversano l'asse immaginario. Infatti per valori più piccoli del $K$ in valore assoluto tutti i rami sono contenuti nel semipiano reale sinistro aperto. Pertanto il sistema retroazionato è BIBO stabile per $0 > K > -36$. Riassumendo si ha BIBO stabilità per ogni $K > -36$.

**Esercizio 3.** i) Il precompensatore che deve sistemare tipo ed errore di regime permanente è $C'(s) = \frac{1}{s}$. Ciò significa automaticamente che nel controllore PID compare l'azione integrativa, quindi useremo o un PI o un PID sulla base dell'incremento di fase necessario alla pulsazione di fase desiderata. Il diagramma di Bode di $C'(s)G(s)$ presenta pulsazione di attraversamento $\omega_A \simeq 1$ rad/sec e margine di fase di circa $-90°$.



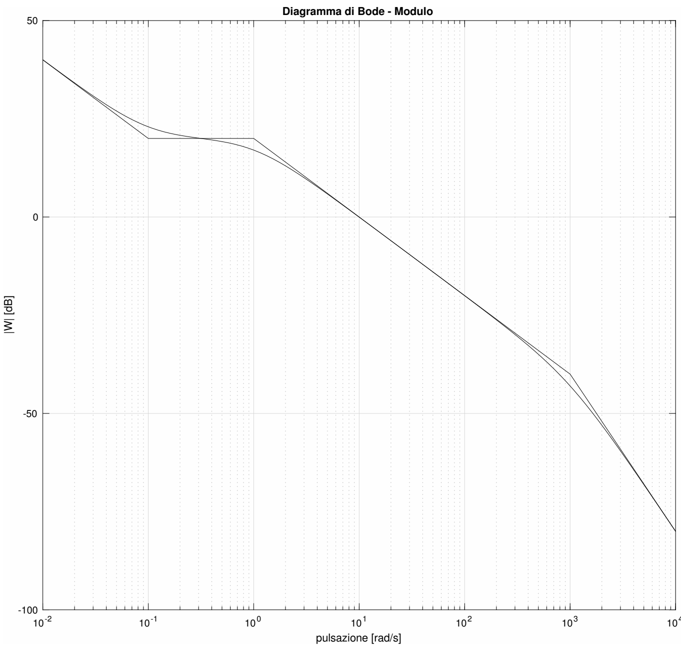

Dovendo alzare $|C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*)|$ di 60 dB e $\arg(C'(j\omega_A^*)G(j\omega_A^*))$ di 180°, è necessario il ricorso a due zeri stabili (e quindi ad una rete PID) entrambi collocati a sinistra di $\omega_A^*$ e tali da aumentare complessivamente il modulo di 60 dB alla pulsaizone $\omega_A^* = 10$ rad/s. Ciò è possibile, ad esempio, mettendo uno zero in $-10^{-1}$ e uno in $-1$. Si ha allora

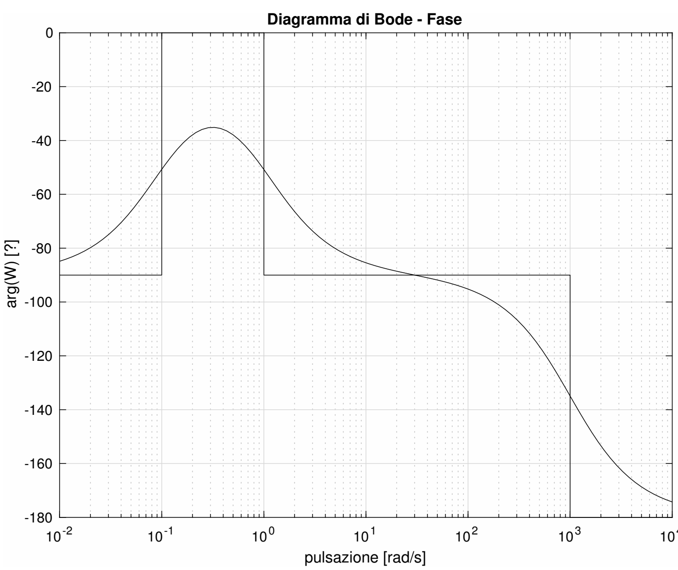
$$C''(s) = (1 + s)(1 + 10s)$$

e quindi come controllore complessivo

$$C(s) = \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{s} = 11 + \frac{1}{s} + 10s.$$

La funzione di trasferimento in catena aperta finale $C(s)G(s)$ ha diagrammi di Bode




In base al criterio di Bode, il sistema retroazionato finale risulta BIBO stabile.

**Esercizio 4.** La funzione di trasferimento del sistema retroazionato di ingresso $r(t)$ e uscita $y(t)$ in corrispondenza al processo e alla famiglia di controllori selezionata è:

$$W(s) = \frac{K_1 K_2}{s^2 + ps + K_1 K_2}$$

e per la regola dei segni di Cartesio ha polinomio al denominatore Hurwitz per ogni scelta di $p, K_1$ e $K_2$ sui reali positivi. Pertanto $W(s)$ è BIBO stabile. D'altra parte la funzione di trasferimento da disturbo $d(t)$ a uscita $y(t)$ è:

$$W_d(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = \frac{s(s+p)}{s^2 + ps + K_1 K_2}.$$

Essa è a sua volta BIBO stabile e in $s = 0$ si annulla. Possiamo allora applicare la teoria della risposta di regime permanente e transitoria a segnali fasoriali o sinusoidali casuali e dire che la risposta di regime permanente a $d(t) = d_0 \delta_{-1}(t)$ è

$$y_{rp}^d(t) = W_d(0) d_0 = 0.$$

Pertanto la reiezione ai disturbi costanti in uscita è garantita. Si noti che lo schema analizzato in questo esercizio differisce da quello considerato nel libro di testo dove i disturbi agiscono sull'ingresso $u(t)$ (ovvero sono disturbi di attuazione) e non sull'uscita $y(t)$ (disturbi di misura), quindi uno non poteva risolvere l'esercizio semplicemente riferendosi alla teoria sviluppata in classe (a cui tuttavia la corrente soluzione è estremamente simile).

**Teoria.** Si veda il Capitolo 4 del Libro di testo.