ESERCIZI TUTORATO

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi canoniche.
   Dato il vettore $u = (1, -2)^T \in \mathbb{R}^2$, si determini $f^{-1}(u)$. La funzione f è invertibile?

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'applicazione lineare definita da $f((x, y, z)^T) = (x+y, x+y, z)^T$.

   (a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

   (b) Determinare $Ker(f)$ e $Im(f)$.

   (c) Mostrare che l'insieme, $B = \{(1, 1, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -1, 0)^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base B nel codominio.

3. Determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ che abbia $Ker(f) =< (1, 1, 0)^T >$ e $Im(f) =< (0, 1, -1)^T, (2, 1, 2)^T >$, se ne dia la matrice associata alla base canonica; f è unica?

4. Si discuta e si risolva il seguente sistema lineare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + ax_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2ax_3 + ax_4 = 1 \\ 2x_2 + (a-2)x_3 + (1-2a)x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - ax_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$