COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
18 Luglio 2016

Esercizio 1. [9.5 punti] Dato il sistema a tempo-continuo di funzione di trasferimento

$$G(s) = -100 \frac{s^2 \left(s^2 + 10^2\right)}{\left(s^2 - 0.2s + 1\right)(s + 100)^2},$$

se ne traccino i diagrammi di Bode e Nyquist. Si studi, inoltre, la stabilità BIBO di $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ utilizzando il Criterio di Nyquist, e si individui il numero di poli a parte reale positiva di $W(s)$.

Esercizio 2. [8.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s^3}{(s+3)^2 \left(s^2 - \frac{2}{3}s + 1\right)}$$

è richiesto il tracciamento del luogo delle radici positivo e negativo, calcolando punti doppi, asintoti, intersezioni con l'asse immaginario, e studiando di conseguenza la stabilità al variare di K sui numeri reali del sistema retroazionato $W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$, assumendo noto che per $K = -6$ risulta che $W(s)$ ha 2 poli a parte reale positiva e 2 poli a parte reale negativa.
[**Suggerimento:** dopo aver raccolto tutti i termini possibili nell'equazione dei punti doppi, quel che rimane da risolvere è un'equazione di terzo grado, che è tuttavia facilmente fattorizzabile].

Esercizio 3. [7 punti] Data la funzione di trasferimento

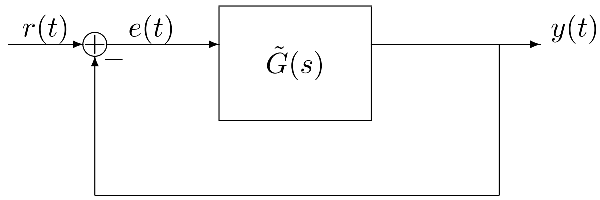
$$G(s) = 10 \frac{1+s}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^3}$$

è richiesto

- il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ proprio che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 0, con $e_{rp}^{(1)} \simeq 10^{-2}$ al gradino, mentre il sistema in catena aperta abbia $\omega_a \simeq 100\sqrt{10}$ rad/s, $m_\phi \simeq 45°$;

- il progetto di un controllore stabilizzante $C_2(s)$ di tipo PID (eventualmente solo P, PI, o PD) che garantisca che il risultante sistema retroazionato sia di tipo 1, con $e_{rp}^{(2)} \simeq 0.1$ alla rampa lineare, mentre il sistema in catena aperta abbia $\omega_a \simeq 1000$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$.

Teoria. [5.5 punti] Dato il sistema retroazionato con retroazione unitaria negativa di figura



Si assuma che $\tilde{G}(s) \in \mathbb{R}(s)$ sia propria e che il risultante sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 + \tilde{G}(s)}$$

sia BIBO stabile.

i) Si determini analiticamente sotto quali condizioni il sistema è in grado di inseguire con errore a regime nullo segnali di riferimento di tipo sinusoidale causale, del tipo $r(t) = R_0 \cos(\omega t + \phi)\delta_{-1}(t)$.

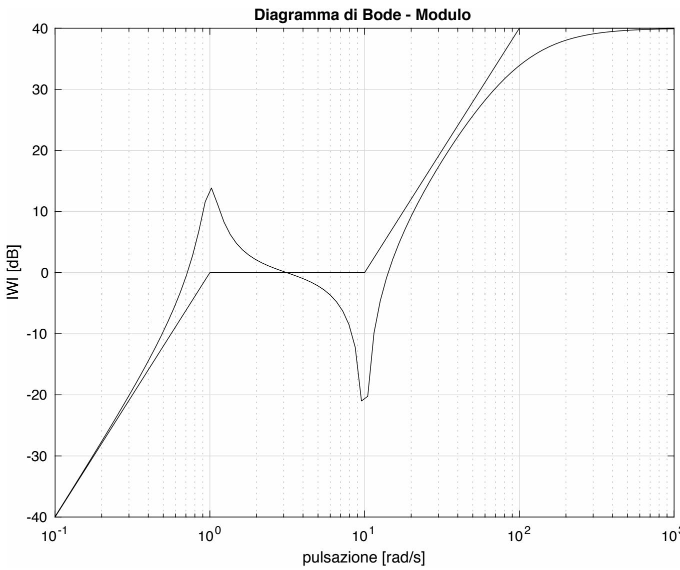
ii) Come cambia la risposta alla precedente domanda se il segnale di riferimento e' un'esponenziale causale del tipo

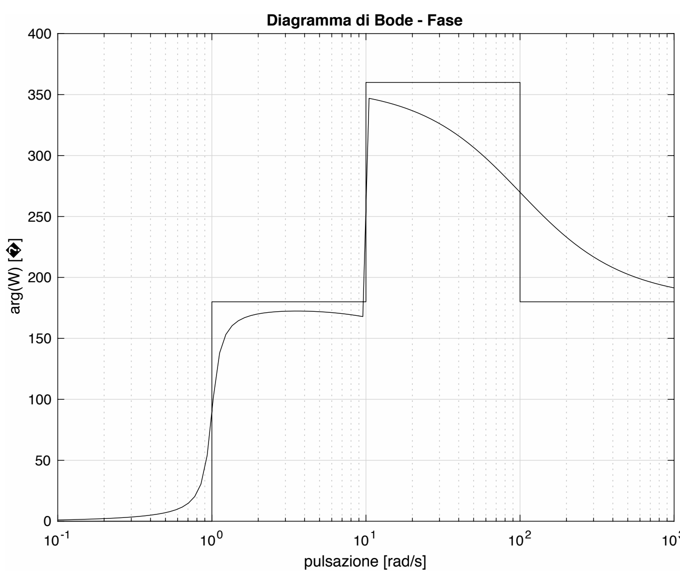
$$r(t) = Ae^{\alpha t}\delta_{-1}(t),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$?
[**Suggerimento:** si adotti un ragionamento simile a quello adottato per rispondere alla precedente domanda, basato sulle trasformate di Laplace dei segnali coinvolti].

SOLUZIONI

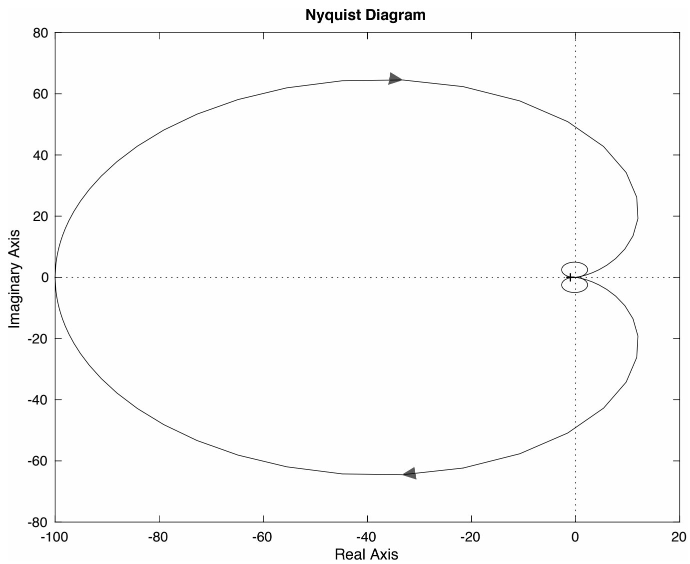
Esercizio 1. Diagrammi di Bode:

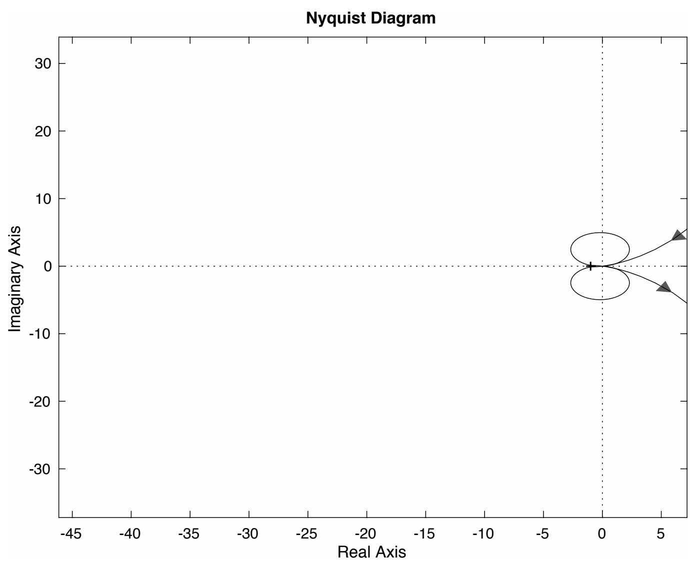




Il diagramma dei moduli asintotico sale con pendenza 40 dB/decade da $-\infty$ (per $\omega = 0^+$) fino a 0 dB, in corrispondenza di $\omega = 1$ rad/s, dove la pendenza cambia e diventa di 0 dB/decade. Poi (per $\omega = 10$ rad/s) inizia a salire con pendenza 40 dB/decade. Raggiunto il valore di 40 dB per $\omega = 100$ rad/s, procede con pendenza di 0 dB/decade per tutte le pulsazioni successive. Il diagramma dei moduli reale esibisce un picco di antirisonanza infinito (anche se il diagramma in questione lo mostra finito e molto piccolo!) per $\omega = 10$ rad/s ed un non trascurabile picco di risonanza per $\omega = 1$ rad/s. Invece la fase parte da 0°, sale fino a quasi 180° in $\omega = 10$ rad/s, dove una discontinuità la porta un po' sotto a 0°, per poi scendere ulteriormente e portarsi a regime al valore di $-180°$.

Diagramma di Nyquist e suo particolare:





Essendo $N = -1$ e $n_{G_+} = 2$, non si ha stabilità BIBO ($n_{W_+} = 3$).

Esercizio 2. $G(s)$ ha un polo doppio reale in $s = -3$ e due poli complessi coniugati in $s = \frac{1 \pm j\sqrt{8}}{3}$. L'equazione dei punti doppi porge facilmente

$$s^2(s+3)(s^3 - 3s^2 + 3s - 9) = 0$$

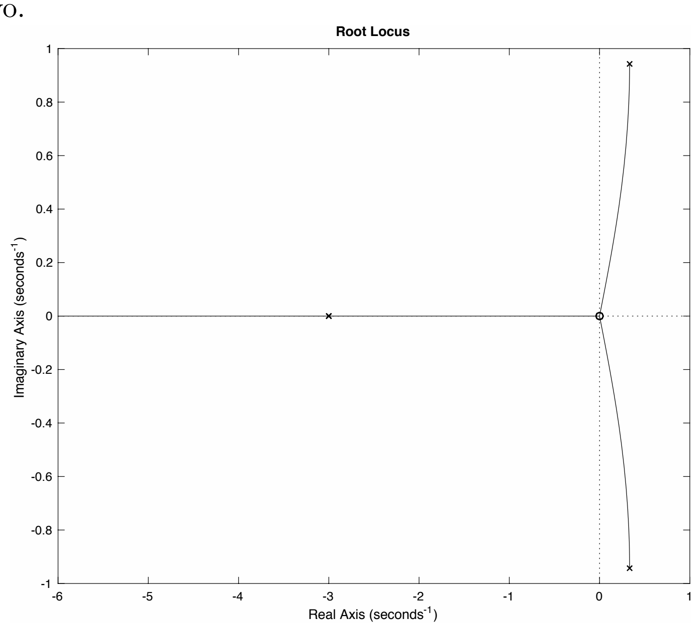
che fattorizza facilmente come

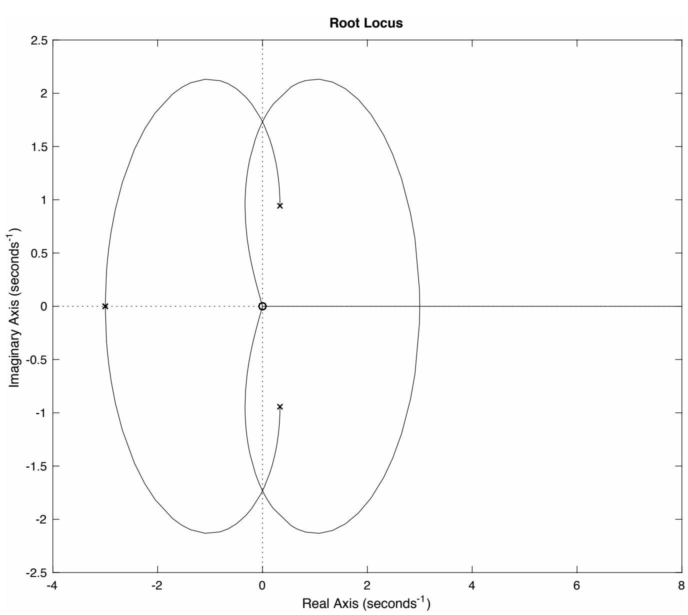
$$s^2(s+3)(s-3)(s^2+3) = 0$$

da cui le soluzioni $s = -3$ (punto doppio iniziale del luogo, $K = 0$), $s = 0$ (zero triplo di $G(s)$, non accettabile in quanto $K = \infty$), $s = +3$ (corrispondente a $K = -\frac{32}{3}$, quindi nel luogo negativo), e $s = \pm j\sqrt{3}$ (che pur essendo complessi corrispondono a $K = -\frac{16}{3}$, che è reale, per cui sono accettabili e stanno anch'essi nel luogo negativo). Ponendo $s = j\omega$ nell'equazione del luogo, si ottiene

$$(\omega^2 - 3)^2 - j\omega^3 \left(K + \frac{16}{3} \right) = 0$$

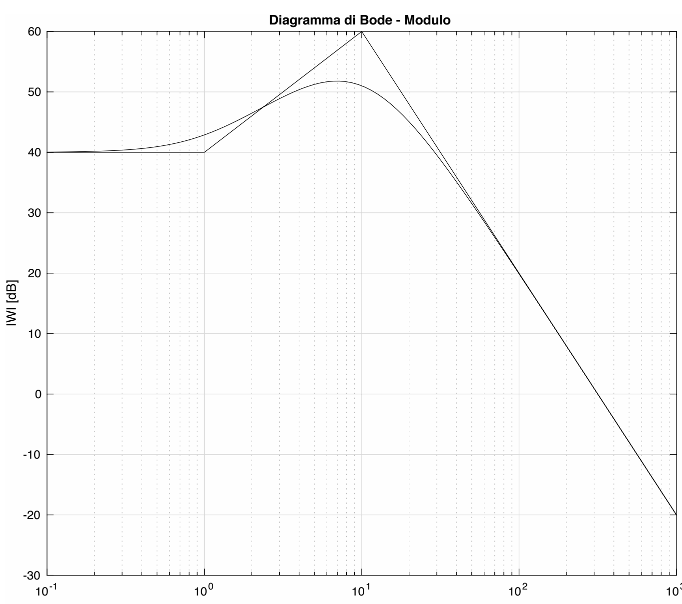
da cui facilmente le soluzioni $\omega = \pm\sqrt{3}$, $K = -\frac{16}{3}$, che corrispondono ai due punti doppi complessi (immaginari puri). Quindi i punti doppi complessi sono le uniche intersezioni con l'asse immaginario nel luogo negativo ($K = -\frac{16}{3}$), mentre nel luogo positivo non ce ne sono (si noti che $s = 0$ non è intersezione con l'asse immaginario, in quanto, essendo zero di $G(s)$, corrisponde a $K = \infty$). Infine, l'asintoto è unico e corrisponde al semiasse reale negativo nel luogo positivo, a quello positivo nel luogo negativo. In figura i luoghi positivo e negativo.

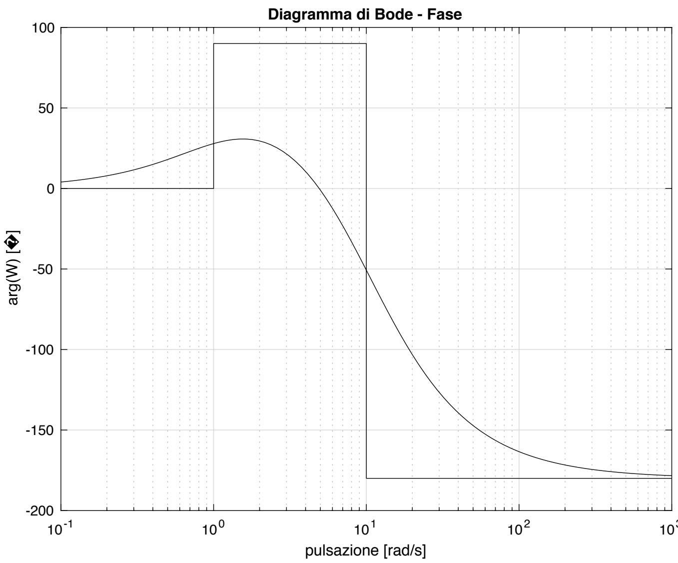




Il luogo positivo ha due rami che, restando sempre nel semipiano destro, dai due poli complessi di $G(s)$ si dirigono verso lo zero triplo in $s = 0$, mentre gli altri due rami si muovono sull'asse reale, partendo dal polo doppio $s = -3$, dirigendosi uno verso $-\infty$ e l'altro verso lo zero triplo $s = 0$. Quindi $K > 0$ implica instabilità con 2 poli negativi e 2 complessi a parte reale positiva (esattamente come $G(s)$, quindi come per $K = 0$). Il luogo negativo ha due rami che escono dal polo doppio $s = -3$ (con simmetria coniugata) dirigendosi verso i punti doppi $s = \pm j\sqrt{3}$ e restando nel semipiano sinistro fino a $K = -\frac{16}{3}$. La stessa cosa fanno i due rami che escono dai poli complessi, restando però nel sempiano destro. Raggiunti i punti doppi complessi, i rami proseguono due verso lo zero triplo in $s = 0$ e gli altri due verso il punto doppio $s = +3$, raggiunto per $K = -\frac{32}{3}$, per poi proseguire lungo l'asse reale, uno verso lo zero triplo $s = 0$ e l'altro verso $s = +\infty$. Mentre questi ultimi due rami sono certamente nel semipiano destro, per $K < -\frac{16}{3}$, dovendo raggiungere $s = +3$, a priori non possiamo sapere in quale semipiano stiano i rimanenti due rami per $K < -\frac{16}{3}$. Tuttavia, non essendoci ulteriori intersezioni con l'asse immaginario, sappiamo che essi saranno sempre nel semipiano destro oppure sempre in quello sinistro, e dal fatto che per $K = -6 < -\frac{16}{3}$ i poli a parte reale positiva sono 2 (e non 4), i 2 rimanenti rami non possono che stare necessariamente a sinistra dell'asse immaginario. Quindi avremo instabilità, con 2 poli a parte reale positiva, sia per $K > 0$ che per $K < 0$ (eccetto che per $K = -\frac{16}{3}$, caso in cui ci sono 4 poli immaginari puri, che implicano comunque l'instabilità).

Esercizio 3. Nel primo caso si ha (dopo aver adottato $C'(s) = 10$ per l'errore a regime) che ω_a è già a posto, ma m_ψ è di poco superiore a zero gradi, quindi occorre una rete che introduca uno zero in corrispondenza di ω_a per il requisito sulla fase (oltre ad un polo in alta frequenza).

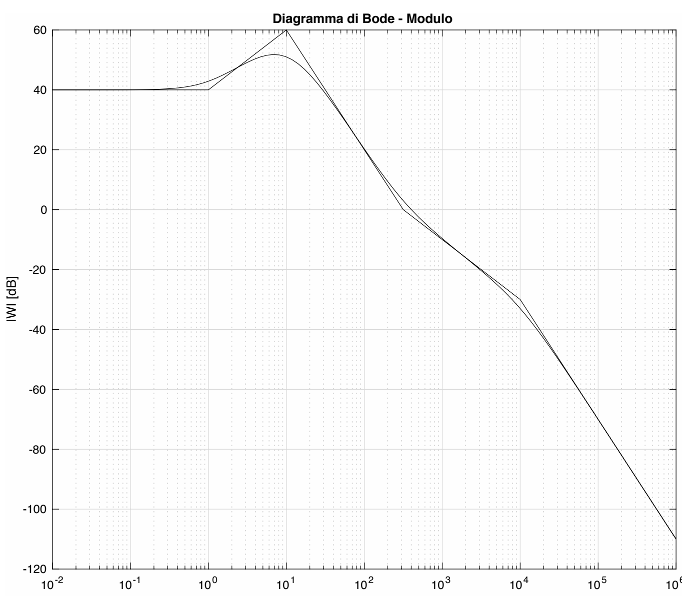


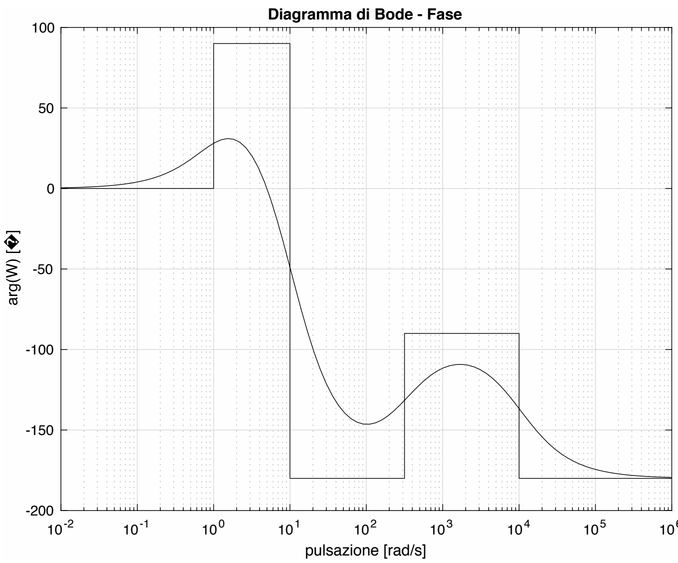


Una possibile soluzione è la seguente

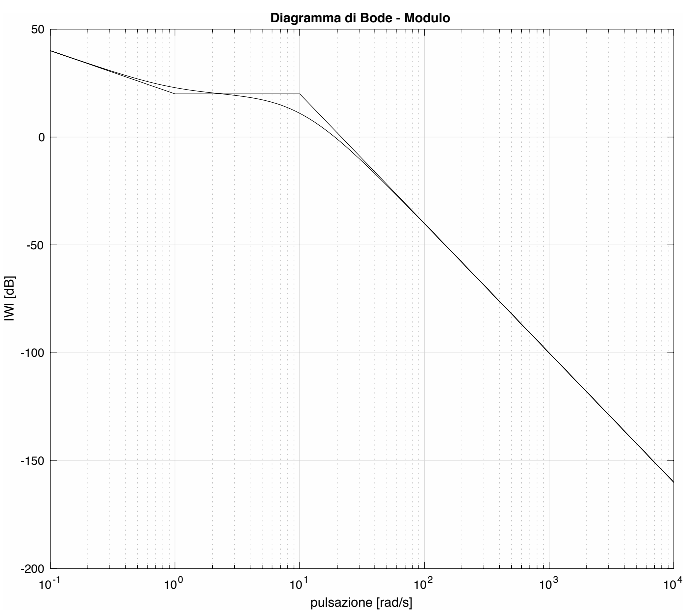
$$C_1(s) = 10 \frac{1 + \frac{s}{100\sqrt{10}}}{1 + \frac{s}{10^4}}$$

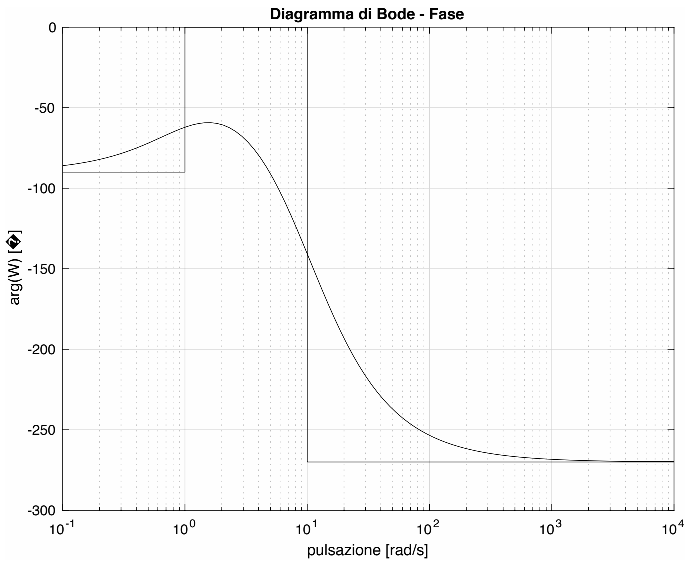
che si vede immediatamente soddisfare tutti i requisiti (stabilità compresa per il Criterio di Bode).





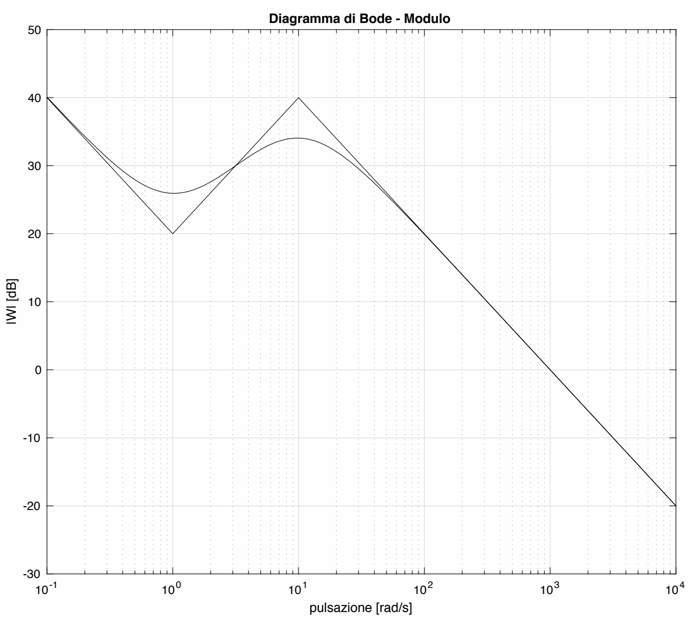
Nel secondo caso è necessario un termine $C'(s) = \frac{1}{s}$ per sistemare l'errore alla rampa, che rende quasi di $-90°$ il margine di fase in $\omega = 1000$ rad/s,

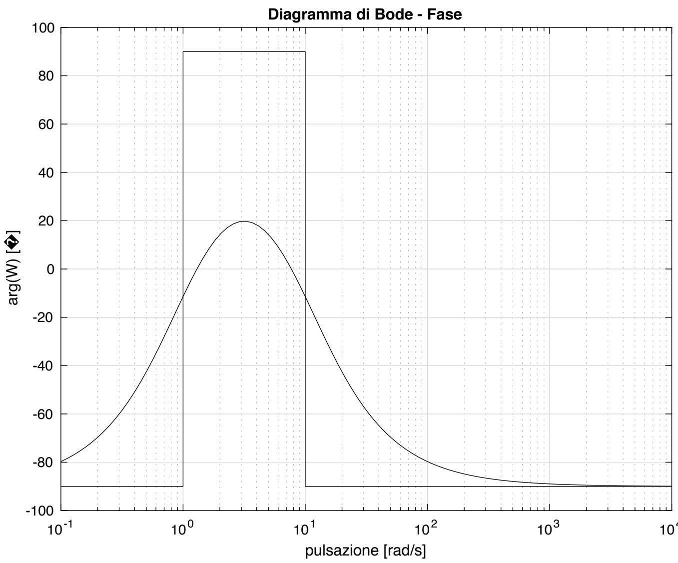




per cui sono necessari due zeri (e quindi un PID) per sistemare la fase. Ad esempio, la soluzione seguente (che introduce una cancellazione zero-polo ammissibile) soddisfa tutti i requisiti (compresa la stabilità per il Criterio di Bode)

$$C_2(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{10}\right)(1+s)}{s} = \frac{1}{s} + \frac{11}{10} + \frac{s}{10}$$





Teoria. Vedi il Libro di Testo (II Edizione), a pag. 279, per la I parte. Per la seconda, con un ragionamento del tutto analogo il termine $(s-\alpha)$ deve essere fattore del denominatore di $\tilde{G}(s)$.