Esercizi di Algebra Lineare e Geometria- Foglio 2

1. Stabilire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{d\times d}$ sono sottospazi vettoriali

$$W_1 = \{X \in \mathbb{R}^{d\times d} : X^T X = I_d\};$$

$$W_2 = \{X \in \mathbb{R}^{d\times d} : AX = O_d\} ,$$

dove X^T è la trasposta di X, mentre I_d, O_d sono la matrice identità e nulla di $\mathbb{R}^{d\times d}$ rispettivamente.

2. Sia $\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x, a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3. Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}_{\leq 3}[t] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$ definita da

$$f(p(t)) = p''(t) - 2p'(t)$$

dove $p'(t), p''(t)$ indicano rispettivamente le derivate prima e seconda di p rispetto a t. Verificare che f è un'applicazione lineare e determinare la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 3}[t]$.

3. Sia $\mathbb{R}^{2\times 2}$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate a coefficienti reali di ordine 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definita da

$$f(A) = A + A^T$$

dove A^T è la trasposta della matrice A. Dimostrare che f è un endomorfismo di $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e determinare una base per il nucleo e l'immagine di f.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare e tale che

$$f((1,3,0)) = (1,1) \ , f((0,0,2)) = (-1,2) \ , f((0,1,0)) = (0,0) \ .$$

Trovare l'espressione esplicita di f (cioè la "regola" che definisce l'applicazione f).