Tutorato Algebra Lineare e Geometria (A.A. 2023/24)

Lezione 8

09/05/2024

Esercizio 1

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, con base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Sia $f\colon V \to V$ la funzione lineare definita da $f(v_1) = v_1 + 3v_3, f(v_2) = v_2 + v_4, f(v_3) = 2v_1 + 2v_3, f(v_4) = -2v_2 - 2v_4$.

(a) Stabilire se f è suriettiva e determinare una base di $Im(f)$.

(b) Dire di conseguenza se 0 è un autovalore di f. Se sì, quanto vale la sua molteplicità geometrica?

(c) Determinare, se esiste, una base $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ di V rispetto alla quale la matrice associata a f sia diagonale.

Esercizio 2

Sia k un parametro reale e A_k la seguente matrice quadrata di ordine 3:

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 1-k^3 & 3 \\ 0 & k^2+1 & 2 \\ 0 & 0 & (k+1)^2 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali/e valori/e di k la matrice A_k ha un *unico* autovalore? (sugg.: la matrice è triangolare superiore, quindi gli autovalori sono ...)

(b) Calcolare gli autovettori di $A_{\mathbf{0}}$.

Esercizio 3

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$ e sia $\{v_1, v_2\}$ una base dell'immagine di f. Tale funzione è diagonalizzabile? (Suggerimento: ragionare sulla dimensione del nucleo di f)

Esercizio 4 (bonus)

Sia A una matrice reale quadrata di ordine 2 simmetrica.

(a) Si può affermare che ci sono sempre 2 autovalori *reali*, senza calcolare il polinomio caratteristico?

(b) Si supponga ora che la traccia[1] di A sia nulla. Calcolare il polinomio caratteristico e dimostrare che A ha esattamente due autovalori uguali in modulo ma di segno opposto.

[1] traccia = somma degli elementi sulla diagonale principale