A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ___________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º appello — 20 giugno 2023

Esercizio 1. Siano $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, -2) \in \mathbb{R}^3$.
Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che $f(v_1) = (3, 0, -5)$, v_2 è un autovettore relativo all'autovalore 2 e $f(v_3) = (5, 2, -5)$.

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ (sia nel dominio che nel codominio).

(b) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (sia nel dominio che nel codominio).

(c) Trovare basi del nucleo e dell'immagine di f usando prima la matrice A e poi la matrice B. Come mai usando A oppure B si trovano risultati diversi per le basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$, visto che entrambe le matrici corrispondono alla **stessa** funzione f?

(d) Sia $w = (3, t, -5)$. Utilizzando la matrice B si determini per quale valore di t si ha $w \in \operatorname{Im}(f)$. Per tale valore di t trovare tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(v) = w$.

Soluzione. (a) Si ha:

$$f(v_1) = (3, 0, -5) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3.$$

Risolvendo questo sistema si trova $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$. Questi numeri compongono la prima colonna della matrice che stiamo cercando.
Poi si ha

$$f(v_2) = 2v_2 = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3,$$

quindi la seconda colonna è 0, 2, 0.
Infine si ha:

$$f(v_3) = (5, 2, -5) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3.$$

Risolvendo questo sistema si trova $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2$. Questi numeri compongono la terza colonna della matrice che stiamo cercando.
Quindi la matrice A di f rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Si ha $e_3 = v_1 - v_3$, quindi $f(e_3) = f(v_1) - f(v_3) = (-2, -2, 0)$. Si ha $e_1 = v_1 + e_3$, quindi $f(e_1) = f(v_1) + f(e_3) = (1, -2, -5)$. Infine si ha $e_2 = v_2 - e_1$, quindi $f(e_2) = f(v_2) - f(e_1) = (1, 4, 5)$. Quindi la matrice B di f rispetto alla base canonica è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Usando la matrice A, per trovare una base del nucleo di f risolviamo il sistema $AX = 0$. Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che A ha rango 2, quindi $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Risolvendo il sistema $A'X = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che una base di $\operatorname{Ker} f$ è data dal vettore di coordinate $(1, 1, -1)$.
Attenzione: dato che abbiamo usato la matrice A, che è riferita alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$, le coordinate $(1, 1, -1)$ sono relative a questa base, ciò significa che queste coordinate rappresentano il vettore $v = 1v_1 + 1v_2 - 1v_3 = (1, 1, 1)$, dove $(1, 1, 1)$ sono le coordinate di v rispetto alla base canonica!
Dato che $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, come base dell'immagine di f possiamo prendere due colonne della matrice A (e anche in questo caso le coordinate dei vettori sono relative alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$).
Usando la matrice B, per trovare una base del nucleo di f risolviamo il sistema $BX = 0$. Riducendo la matrice B in forma a scala si ottiene la matrice

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che B ha rango 2, quindi $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ e $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. Risolvendo il sistema $B'X = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che una base di $\operatorname{Ker} f$ è data dal vettore $v = (1, 1, 1)$, e queste sono le coordinate riferite alla base canonica.
Dato che $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$, come base dell'immagine di f possiamo prendere due colonne della matrice B.
Si noti che usando le matrici A o B non abbiamo trovato due vettori **diversi** per la base del nucleo di f. Infatti usando la matrice A abbiamo trovato il vettore $(1, 1, -1)$, ma queste coordinate sono riferite alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ e quindi rappresentano il vettore $1v_1 + 1v_2 - 1v_3$ le cui coordinate rispetto alla base canonica sono proprio $(1, 1, 1)$ che è il risultato che abbiamo trovato usando la matrice B.

(d) Per determinare $f^{-1}(w)$ bisogna risolvere il sistema $BX = w$. A tal fine si può ricordare il Teorema di Rouché–Capelli: dato che la matrice B ha rango 2 è necessario che anche la matrice completa (ottenuta aggiungendo a B il vettore colonna w) abbia rango 2. Riducendo in forma a scala la matrice completa si trova che essa ha rango 2 solo se $t = 0$. Si conclude pertanto che $w \in \operatorname{Im}(f)$ se e solo se $t = 0$. Infine, risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 1 + x_3 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$f^{-1}(w) = \{\, (2, 1, 0) + x_3(1, 1, 1) \mid \text{per ogni } x_3 \in \mathbb{R} \,\}.$$

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & t \\ -3 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per cui A **non** è invertibile.

(b) Ora si ponga $t = 2$ per tutto il resto dell'esercizio. Determinare il valore di a per il quale il vettore $v = (2, 0, a)$ è un autovettore di A. Chi è l'autovalore corrispondente?

(c) Determinare tutti gli autovalori di A e stabilire se A è simile a una matrice diagonale.

(d) Si dica se A è simile alla matrice A^2 (la risposta deve essere giustificata).

Soluzione. (a) Si ha:

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 4t = 0 \qquad \text{per } t = \frac{3}{2}$$

Si conclude che se $t = 3/2$ la matrice A non è invertibile, mentre per $t \neq 3/2$ A è invertibile.

(b) Ponendo $t = 2$ si ottiene la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Il vettore v è autovettore di A se $Av = \lambda v$. Si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ a\lambda \end{pmatrix}$$

da cui si ricava $a = 1$ e $\lambda = 1$.

(c) Calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ -3 & -5-\lambda & 6 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -\lambda-2 & 2 & 2 \\ \lambda+2 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda-2 & 2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 8 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (-\lambda-2)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

Da ciò si ricava che gli autovalori sono $\lambda = -2$ (con molteplicità 1) e $\lambda = 1$ (con molteplicità 2). La matrice A è diagonalizzabile se l'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione 2. Calcoliamo dunque tale autospazio.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

pertanto questo autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(2, 0, 1)$ (che è l'autovettore trovato in precedenza). Quindi A non è simile a una matrice diagonale.

(d) Gli autovalori della matrice A^2 sono i quadrati degli autovalori di A, oppure si può osservare che $\det(A^2) = (\det A)^2$. Pertanto le matrici A e A^2 non hanno gli stessi autovalori (e non hanno lo stesso determinante), quindi non possono essere simili.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 2, 0, -1)$, $u_2 = (0, -4, 3, 4)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Trovare una base di $U^\perp$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale di $v = (0, 5, 3, 4)$ su U.

(d) Sia $w = (2, -1, 0, 2)$. Si dica se esiste un sottospazio $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore $\ell = (1, 1, 2, 0)$.

Soluzione. (a) Per trovare una base ortogonale di U utilizziamo il procedimento di Gram–Schmidt. Poniamo $u_1' = u_1$ e $u_2' = u_2 + \alpha u_1$. Richiedendo che $u_1' \cdot u_2' = 0$ si trova $\alpha = 2$ e quindi $u_2' = u_2 + 2u_1 = (2, 0, 3, 2)$. Una base ortogonale di U è formata dai vettori u_1' e u_2'.

(b) Un generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp$ deve essere ortogonale ai vettori u_1' e u_2' della base di U. Le equazioni cartesiane di $U^\perp$ sono quindi

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{cases} x_3 = -4x_1/3 - 4x_2/3 \\ x_4 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

e quindi una base di $U^\perp$ è formata dai vettori $(1, 0, -4/3, 1)$ e $(0, 1, -4/3, 2)$.

(c) Poniamo $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$. Si ha $v' = \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1, 3\alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2)$ e $v'' = v - v' = (-\alpha_1 - 2\alpha_2, 5 - 2\alpha_1, 3 - 3\alpha_2, 4 + \alpha_1 - 2\alpha_2)$. Il vettore $v'' \in U^\perp$ deve essere ortogonale ai vettori u_1' e u_2'. Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} -6\alpha_1 + 6 = 0 \\ -17\alpha_2 + 17 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$. Quindi la proiezione ortogonale di v su U è il vettore $v' = (3, 2, 3, 1)$.

(d) Se esiste un tale sottospazio L poniamo $v = \ell + \tilde{\ell}$, con $\ell \in L$ e $\tilde{\ell} \in L^\perp$. Si ha $\tilde{\ell} = w - \ell = (1, -2, -2, 2)$ e questo vettore dovrebbe essere ortogonale al vettore $\ell = (1, 1, 2, 0) \in L$. Però si ha $\ell \cdot \tilde{\ell} = -5 \neq 0$, quindi ℓ e $\tilde{\ell}$ non sono ortogonali. Questo significa che non esiste alcun sottospazio L tale che la proiezione ortogonale di w su L sia il vettore ℓ assegnato.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo le due rette

$$r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (0, 1, -1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $3x - z = 0$.

(d) Consideriamo la famiglia di piani $\pi_t : z = t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sia $R_t = r \cap \pi_t$ e $S_t = s \cap \pi_t$. Sia M_t il punto medio del segmento di estremi R_t e S_t. Verificare che i punti M_t si trovano tutti su una stessa retta e scrivere le equazioni parametriche di tale retta.

Soluzione. (a) Mettendo a sistema le equazioni di r con quelle di s si scopre che tale sistema non ha soluzioni, quindi le due rette non sono incidenti.
Due punti di r sono $R_1 = (0, 1, -1)$ e $R_2 = (1, 0, 1)$, quindi un vettore direttore della retta r è $v_r = R_2 - R_1 = (1, -1, 2)$. Due punti di s sono $S_1 = (1, 0, 2)$ e $S_2 = (3, 1, 3)$, quindi un vettore direttore della retta s è $v_s = S_2 - S_1 = (2, 1, 1)$. Da ciò si deduce che r e s non sono parallele, quindi sono due rette sghembe.

(b) Il vettore n perpendicolare al piano contenente la retta s e parallelo a r deve essere perpendicolare ai vettori v_r e v_s, quindi possiamo prendere $n = v_r \times v_s = (-3, 3, 3)$. Questo vettore è parallelo al vettore $(1, -1, -1)$ quindi possiamo anche prendere $n = (1, -1, -1)$. Da ciò segue che l'equazione del piano deve essere del tipo $x - y - z + d = 0$. Poiché questo piano deve contenere la retta s basta imporre la condizione di passaggio per il punto S_1. In questo modo si trova $d = 1$ e quindi l'equazione del piano cercato è $x - y - z + 1 = 0$.

(c) Consideriamo un generico piano parallelo al piano $3x - z = 0$ che, pertanto, deve avere un'equazione del tipo $3x - z = k$, per qualche $k \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione di passaggio per il punto $R = (0, 1, -1)$ si trova $k = 1$. Ora cerchiamo il punto di intersezione di questo piano con la retta s:

$$\begin{cases} 3x - z = 1 \\ x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova il punto $S = (1, 0, 2)$, questo è il punto S cercato.

(d) Il punto R_t si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Si trova

$$R_t = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,t, t\Big)$$

Il punto S_t si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Si trova

$$S_t = \big(2t - 3, t - 2, t\big)$$

Il punto M_t è dato da

$$M_t = \frac{R_t + S_t}{2} = \Big(-\frac{5}{4} + \frac{5}{4}\,t, -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,t, t\Big)$$

Ora si riconosce che le equazioni

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{4}\,t \\ y = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\,t \\ z = t \end{cases}$$

sono le equazioni parametriche di una retta. Questa è la retta descritta dai punti M_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.