ESERCIZI TUTORATO

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dal vettore $u = (12, 3, -2, 0)$ e sia W il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$.
   - Si dimostri che $U \subset W$ e si completi la base di U ad una base di W.
   - Sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 3, 0)$ e $v_2 = (2, 3, 4, -1)$. Si determini una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.
   - Dato il vettore $v_t = (t, 0, 1, 2)$, si determini il valore di t per cui i vettori v_1, v_2, v_t sono linearmente dipendenti.
   - Si dica se esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che si abbia $W = Kerf$ e $U = Imf$.
2. Siano dati i vettori $v_1 = (4, -2, 6), v_2 = (0, 4, 4), v_3 = (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ e si consideri la funzione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(1, 0, 1, 0) = v_1, f(1, 0, -1, 0) = v_2$ e tale che i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(2, 0, -1, -3)$ appartengano a $f^{-1}(v_3)$.
   - Si scriva la matrice A di f rispetto alle basi canoniche e si determinino delle basi di $Kerf$ e di Imf.
   - Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}$ di equazione $x_1 + 3x_3 + x_4 = 0$. Si determini una base di W e una base di $f(W)$. Si determini inoltre una base di $Ker(f) \cap W$.
   - Si scriva la matrice della funzione indotta da f, $f|_W : W \to \mathbb{R}^3$, rispetto alla base di W trovata nel punto precedente e alla base canonica del codominio.
3. Nello Nello spazio affine euclideo tridimensionale sono dati i punti $A = (3, -1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ e la retta r di equazioni $x - 3y = 2$ e $x + y - 2z = 6$.
   - Si determinino le equazioni cartesiane della retta s passante per A e B.
   - Si stabilisca se le rette r e s sono incidenti, parallele oppure sghembe.
   - Si determini la distanza della retta r dalla retta s.
   - Si determini l'equazione cartesiana del piano π che passa per i punti A e B e che interseca la retta r in un punto C tale che il triangolo ABC sia rettangolo, con l'angolo retto in A.
   - Dato il punto $P = (1, -3, 5)$ se ne determini la proiezione ortogonale sul piano π.