COMPITO DI CONTROLLI AUTOMATICI
Ingegneria dell'Informazione
2 Luglio 2019

Esercizio 1. [10 punti] Data

$$G(s) = \frac{s(1 - 10s)}{(1 + 10s)(1 + s^2)}$$

i) si determini il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema;

ii) si determini il diagramma di Nyquist di $G(j\omega)$ per $\omega \in \mathbb{R}$, calcolando eventuali intersezioni con gli assi (non è richiesto il calcolo degli eventuali asintoti), e si studi attraverso il criterio di Nyquist la stabilità BIBO del sistema retroazionato

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

al variare di K in $\mathbb{R}, K \neq 0$.

Esercizio 2. [9 punti] Data

$$G(s) = \frac{s + a}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

è richiesto di

- determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$, sapendo che $s = +1$ è un punto doppio del luogo
- con tale valore di a, tracciare i Luoghi positivo e negativo, determinando punti doppi, asintoti, ed intersezioni con l'asse immaginario
- discutere la stabilità di $\frac{kG(s)}{1+kG(s)}$, al variare di $k \neq 0$, utilizzando solo le proprietà dei Luoghi tracciati

Esercizio 3. [6.5 punti] Data la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10 \frac{1 + s}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^3}$$

è richiesto

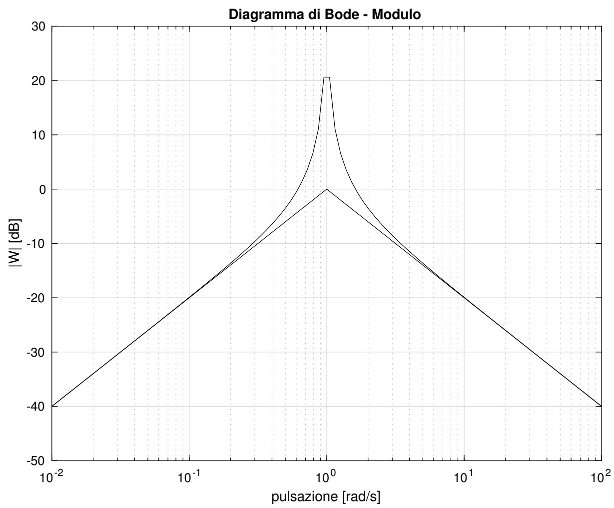
i) il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ che soddisfi le specifiche: errore a regime al gradino pari a circa 0.01 (e quindi tipo 0), $\omega_A \simeq 1000$ rad/s, $m_\phi \simeq 45°$

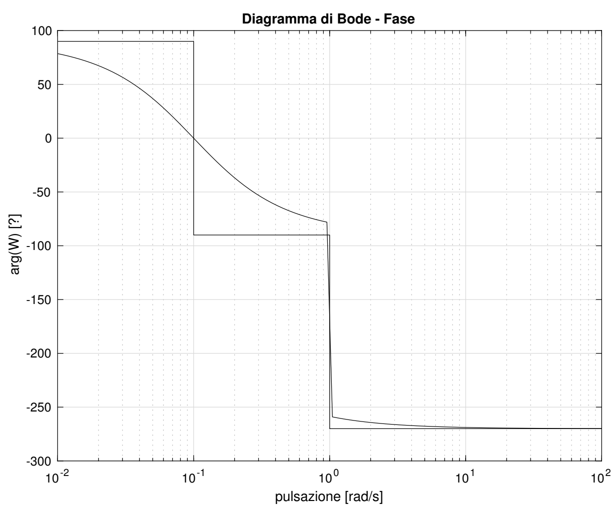
ii) il progetto di un controllore stabilizzante $C_2(s)$ di tipo PID (eventualmente solo P, PI, o PD) che soddisfi le specifiche: errore a regime alla rampa lineare pari a 0.1 (e quindi tipo 1), $\omega_A \simeq 100$ rad/s, $m_\phi \simeq 90°$

Teoria. [5 punti] Si enunci, nella sua versione più restrittiva, il criterio di Nyquist per la stabilità BIBO di sistemi (lineari, tempo-invarianti e a tempo continuo) ottenuti per retroazione unitaria negativa e se ne discutano le possibili estensioni.

SOLUZIONI

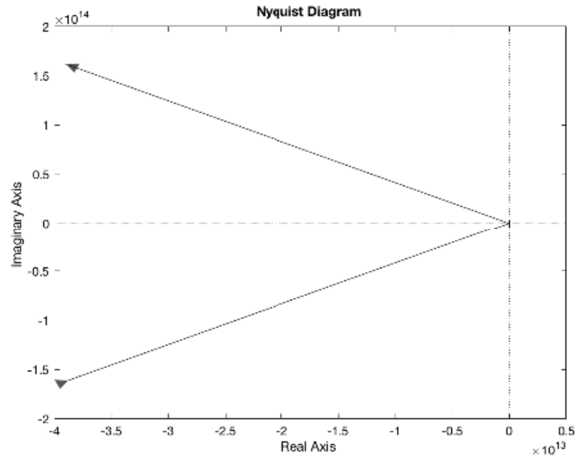
Esercizio 1. i) I diagrammi di Bode sono in figura

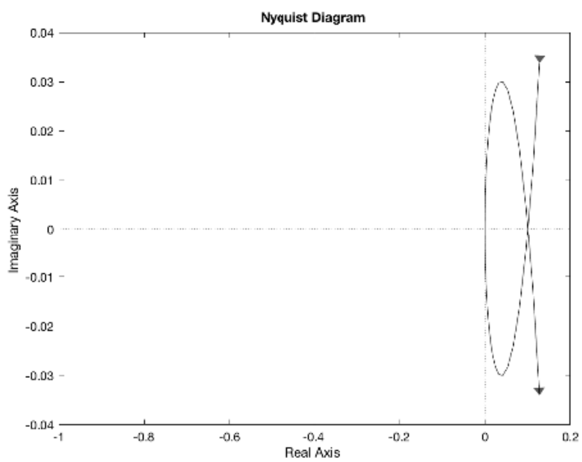


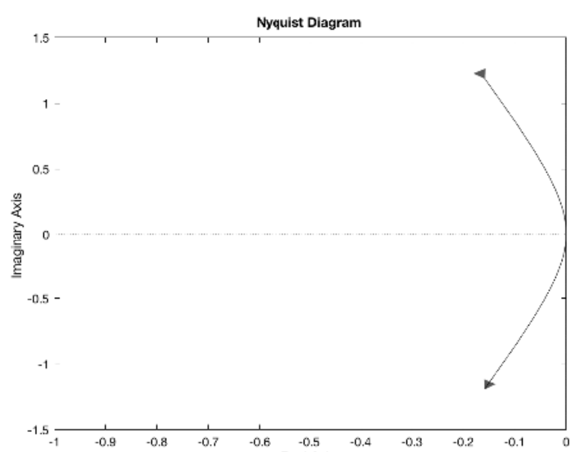


Il modulo (asintotico) arriva da $-\infty$ con pendenza di +20 dB/decade, poi nell'origine ($\omega = 1$ rad/s) vale 1 (0 dB) e cambia pendenza, tornando a $-\infty$ con pendenza di -20 dB/decade, mentre il modulo reale esibisce un picco di risonanza infinito per $\omega = 1$ rad/s. La fase scende da $+90°$ verso i $-90°$, passando per zero gradi in $\omega = \frac{1}{10}$ rad/s, poi in $\omega = 1$ rad/s esibisce una discontinuità di 180° che la porta lievemente sopra i $-270°$, per poi tendere asintoticamente a questo valore.

ii) Il diagramma di Nyquist è in figura assieme a suoi dettagli intorno all'origine (per valori molto piccoli e molto grandi di $|\omega|$)







Esso parte da $s = 0$ con tangente verticale e si muove nel I quadrante, attraversa l'asse reale e si porta nel IV quadrante, dove tende all'infinito lungo un asintoto obliquo. Rispunta poi dall'infinito (lungo lo stesso asintoto) nel II quadrante, e tende a zero con tangente verticale. Calcolando $G(i\omega)$ si ha facilmente

$$G(i\omega) = \frac{20\omega^2}{(1-\omega^2)(1+100\omega^2)} + i\frac{\omega(1-100\omega^2)}{(1-\omega^2)(1+100\omega^2)}$$

e si vede facilmente che $G(0) = G(\infty) = 0$, $G(i) = \infty$, $G\left(\frac{i}{10}\right) = \frac{10}{99}$, confermando quanto appena detto ed individuando l'attraversamento dell'asse reale per $\omega = \frac{1}{10}$ nel punto $s = \frac{10}{99}$ (dove si annulla solo la parte immaginaria). Chiudendo Nyquist con un semicerchio orario all'infinito, si scopre che per $k > 0$ oppure per $k < -\frac{99}{10}$, esso compie $N = -2$ giri attorno al punto critico $s = -\frac{1}{k}$, da cui $n_{W_+} = 2$, essendo $n_{G_+} = 0$ (quindi 1 polo negativo e due a parte reale positiva), mentre se $-\frac{99}{10} < k < 0$ si ha $N = 0$, quindi $n_{W_+} = 0$ e BIBO stabilità di $W(s)$. Infine, per $k = -\frac{99}{10}$ il diagramma passa per il punto critico per $\omega = \frac{1}{10}$, e si hanno quindi due poli immaginari puri ($s = \pm\frac{i}{10}$) ed 1 polo negativo in $s = -10$ (si vede fattorizzando $d(s) - \frac{99}{10}n(s) = 10\left(s^2 + \frac{1}{100}\right)(s+10)$). Riassumendo, si ha BIBO stabilità se e solo se $-\frac{99}{10} < k < 0$.

Esercizio 2. L'equazione dei punti doppi

$$2s^3 + (1+3a)s^2 + 2as + (a-1) = 0$$

valutata per $s = +1$ porge facilmente $a = -\frac{1}{3}$, e sostituendo tale valore di a si ottiene

$$3s^3 - s - 2 = 0 \;\Rightarrow\; (s-1)(3s^2+3s+2) = 0 \;\Rightarrow\; s = +1,\; s = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{5}{12}}$$

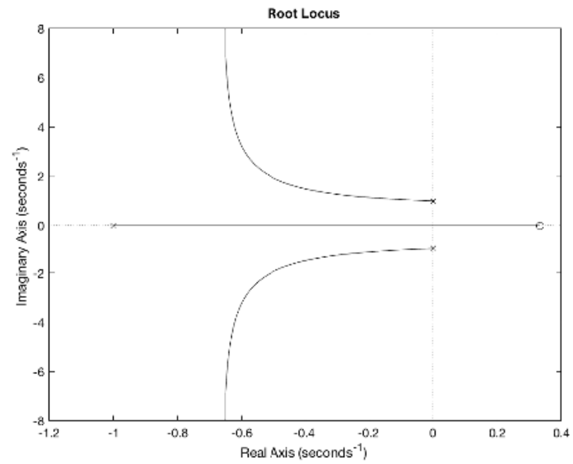
(la fattorizzazione si trova effettuando la divisione del polinomio di terzo grado per $(s-1)$, oppure imponendo che esso fattorizzi come $(s-1)(As^2 + Bs + C)$), dove i punti doppi complessi vanno scartati in quanto il grado di $G(s)$ è minore di 4. Quindi $s = +1$ è l'unico punto doppio, corrispondente a $k = -6$, e quindi appartenente al luogo negativo. Il centro-stella asintoti è in

$$x_B = \frac{(i - i - 1) - \left(\frac{1}{3}\right)}{2} = -\frac{2}{3}.$$

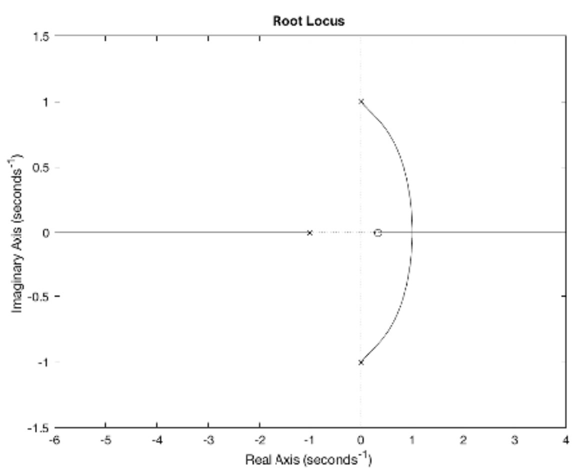
Studiando le intersezioni con l'asse immaginario, ponendo $s = i\omega$ in $(s^2+1)(s+1) + k\left(s - \frac{1}{3}\right) = 0$, si ha

$$\left(1 - \omega^2 - \frac{k}{3}\right) + i\omega(1 - \omega^2 + k) = 0 \;\Rightarrow\; (k = 0,\; \omega = \pm 1),\; (k = 3,\; \omega = 0)$$

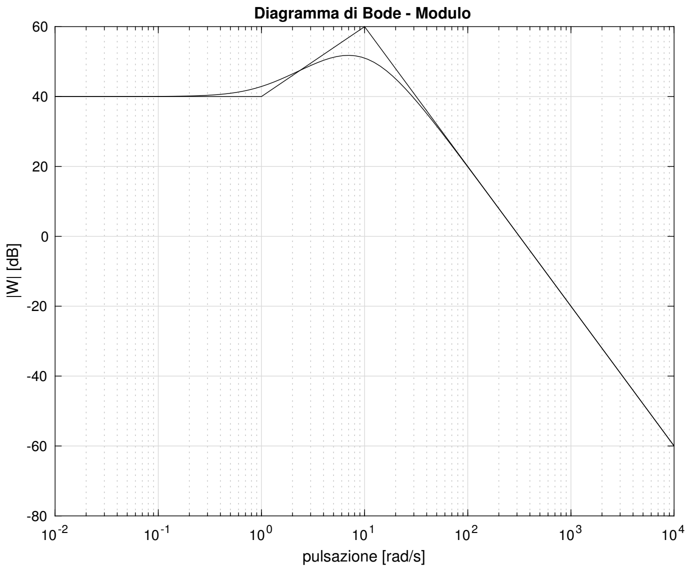
per cui, oltre alle intersezioni banali per $k = 0$ (poli immaginari puri di $G(s)$), abbiamo un'unica intersezione in $s = 0$ per $k = 3$, quindi nel luogo positivo. In conclusione, nel luogo positivo un ramo parte dal polo in $s = -1$, attraversa l'asse immaginario nell'origine per $k = 3$, e poi prosegue verso lo zero in $s = \frac{1}{3}$ (muovendosi interamente sull'asse reale), mentre altri due rami complessi coniugati si dirigono verso gli asintoti verticali centrati in $c = -\frac{2}{3}$ (restando sempre al di fuori dell'asse reale, e senza mai toccare l'asse immaginario, se non nei poli di partenza $s = \pm i$ per $k = 0$, non avendo trovato altre intersezioni con l'asse immaginario del luogo oltre a quelle citate).

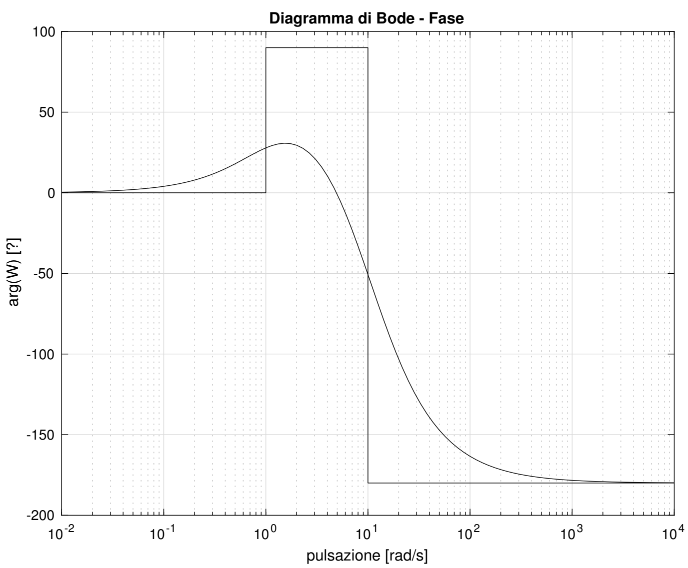


Nel luogo negativo due rami partono dai poli in $s = \pm i$ e si incontrano nel punto doppio $s = +1$ per $k = -6$ (restando sempre alla destra dell'asse immaginario, vista l'assenza di altre intersezioni) e si dirigono poi (restando ora sempre sull'asse reale) uno verso lo zero in $s = +\frac{1}{3}$, l'altro verso $s = +\infty$, mentre il terzo ramo parte dal polo in $s = -1$ e si dirige, restando sull'asse reale, verso $s = -\infty$ (infatti qui i due asintoti sono orizzontali). In conclusione, non si ha mai BIBO stabilità per $k < 0$, mentre si ha BIBO stabilità se e solo se $0 < k < 3$, unico caso in cui i 3 rami sono tutti nel semipiano alla sinistra dell'asse immaginario. I 2 luoghi sono in figura.



Esercizio 3. i) Per $C_1(s)$, il ricorso a $C'(s) = 10$ garantisce il soddisfacimento della specifica sull'errore a regime, dopodichè Bode per $C'(s)G(s)$ evidenzia un attraversamento anticipato rispetto ad $\omega_A \simeq 1000$, dove il modulo vale circa -20 dB

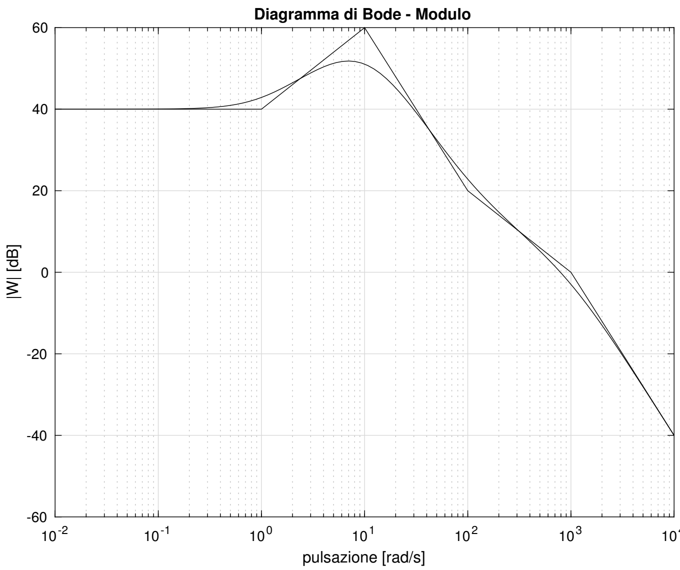


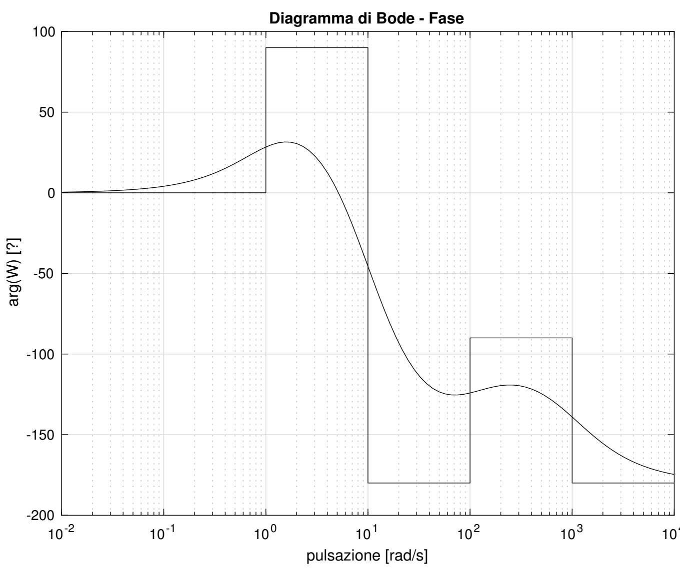


Pertanto è necessaria una rete anticipatrice, con distanza di 1 decade tra zero e polo, ma anche polo coincidente con ω_A, visto il requisito sul margine di fase. Quindi

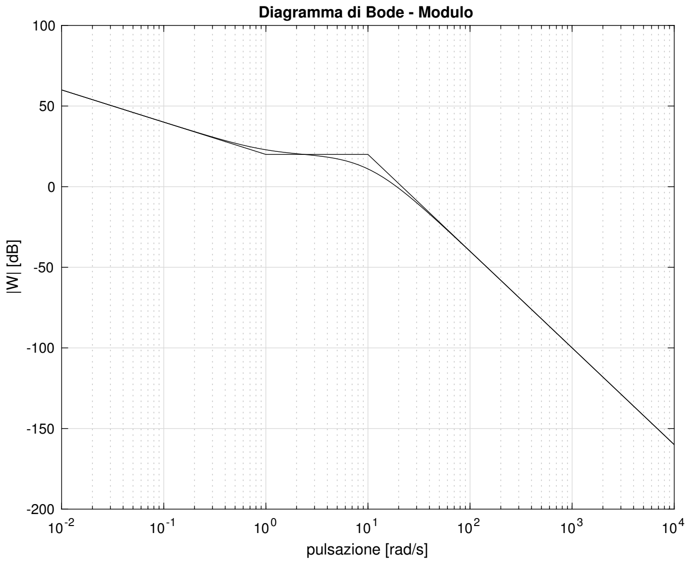
$$C_1(s) = \frac{10\left(1+\frac{s}{100}\right)}{1+\frac{s}{1000}}.$$

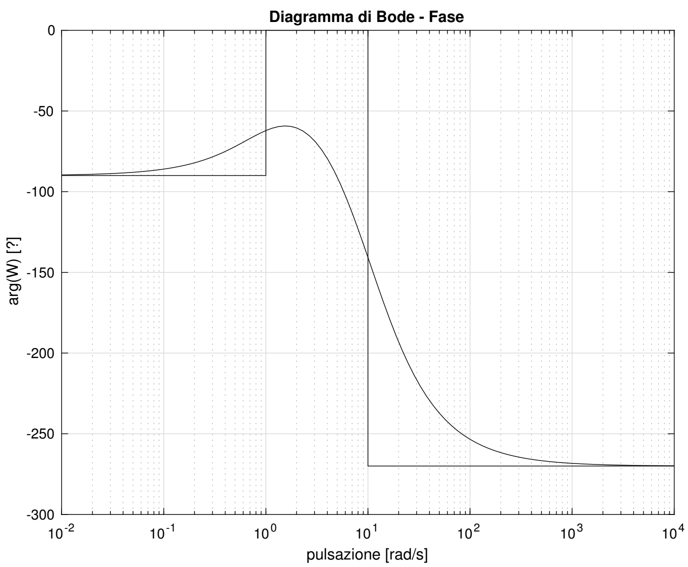
I diagrammi di Bode del risultante sistema in catena aperta sono riportati qui di seguito. La stabilità BIBO è garantita dal rispetto delle condizioni del criterio di Bode.





ii) Per $C_2(s)$, il ricorso a $C'(s) = \frac{1}{s}$ garantisce il soddisfacimento della specifica sull'errore a regime, dopodichè Bode per $C'(s)G(s)$ evidenzia un attraversamento anticipato rispetto ad $\omega_A \simeq 100$, dove il modulo vale circa -40 dB, ed un margine di fase addirittura negativo

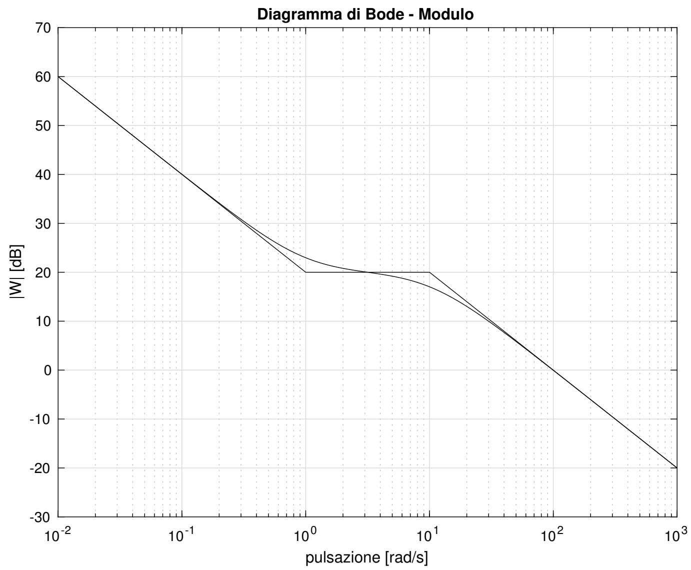


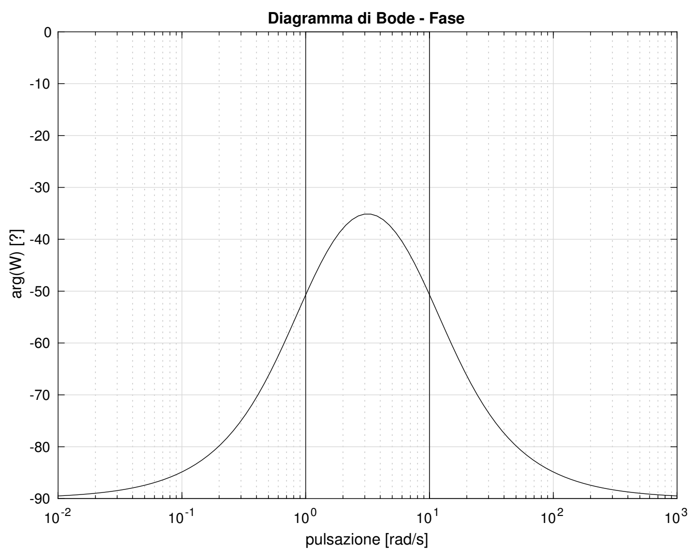


Pertanto sono necessari due zeri, e ciascuno dei due zeri deve provvedere ad alzare il modulo di 20dB, il che si ottiene posizionandoli 1 decade prima di ω_A, causando così una doppia cancellazione zero/polo ammissibile, da cui il PID

$$C_2(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2}{s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{5} + \frac{1}{100}s$$

con il che anche il margine di fase è sistemato.
I diagrammi di Bode del risultante sistema in catena aperta sono riportati qui di seguito.
La stabilità BIBO è garantita dal rispetto delle condizioni del criterio di Bode.





Teoria. [5 punti] Si veda il Capitolo 7 del libro di testo, pagina 189 e successive.