

## Appello n.4 di **FAMP** 19 Settembre 2018

Scrivere sul foglio intestato le proprie generalità! **COSA CONSEGNARE:** questo foglio e il foglio protocollo intestato con **TUTTI** gli **SVOLGIMENTI** degli esercizi affrontati. **NON INSERIRE FOGLI DI BRUTTA COPIA.** Necessaria la sufficienza sulla teoria e sugli esercizi

TEMPO Esercizi (Analisi + Probabilità): 2 ore e 30 minuti

### Analisi

1. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^{x+y}, y(0) = -1.$$

Determinare la soluzione  $y$ , precisando bene su quale intervallo è definita.

2. Dire se  $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$  ha un massimo locale. Dire poi se  $f$  ha massimo assoluto.
3. Si consideri la superficie cartesiana  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , nella regione delimitata dai piani  $z = 1$  e  $z = 2$ . Calcolare l'integrale di  $1/z^2$  su tale superficie.
4. Si consideri il campo  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{8/9}(x, y, z)$ , definito su  $\mathbb{R}^3$ . Il campo è radiale? è conservativo? determinarne una primitiva in caso affermativo.

# Probabilità

**Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Questo foglio va consegnato unitamente al solo foglio di bella. Fare i conti fino alla fine, esprimendo i risultati in termini di frazioni**

1. Quanti sono i modi per allineare, di faccia, 52 carte da gioco in modo che i 4 assi siano vicini fra loro?
2. In una nazione si vota per l'uscita dall'Unione Europea. E' noto che gli elettori intervistati in un exit poll non sempre rispondono in modo veritiero. Una società di sondaggi è incaricata dell'exit poll per il referendum. La società stima che un elettore che ha votato per rimanere nell'Unione Europea dichiarerà la verità con probabilità del 90%, mentre un elettore che ha votato contro dichiarerà la verità con probabilità del 75%. Dall'ultimo sondaggio preelettorale risulta che il 58% degli elettori è favorevole a rimanere nell'Unione Europea e il 42% è contrario.
  - (a) Qual è la probabilità che un elettore che ha votato contro rimanere nell'Unione Europea dichiari invece che ha votato per rimanere?
  - (b) Qual è la probabilità che un elettore che dichiara di aver votato per rimanere nell'Unione Europea abbia effettivamente votato così ?
3. Siano  $X$  una variabile uniforme su  $[0, 4]$  e  $Y$  una variabile esponenziale di parametro  $\lambda = 3$ . Le variabili  $X$  e  $Y$  sono indipendenti.
  - (a) Determinare la densità congiunta continua di  $(X, Y)$ ;
  - (b) Calcolare  $P(X \leq 0, Y \geq 1)$ ;
  - (c) Calcolare  $P(Y \geq X + 1)$ .
4. In una azienda, il salario medio annuale degli impiegati è di 29 321 euro, con deviazione standard di 2 120 euro. Si considera un campione di 100 impiegati: qual è la probabilità che il loro salario medio sia inferiore a 29 000 euro? Esprimere il risultato utilizzando la  $\Phi$  (es.  $1/2 + \Phi(17/20)$ ).

## Analisi

$$1. y' e^{-y} = e^x \Rightarrow \int y' e^{-y} dx = e^x + C$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = e^x + C \Rightarrow e^{-y} = C - e^x$$

$$-y = \ln(C - e^x) \quad y(x) = -\ln(C - e^x).$$

$$\text{E } y(0) = -1 \Leftrightarrow -\ln(C - 1) = -1 \Leftrightarrow \ln(C - 1) = 1 \Leftrightarrow C - 1 = e$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\ln(1 + e - e^x)}.$$

$$\text{Definita per } 1 + e - e^x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x < \ln(1 + e)}$$

$$2. \nabla f(x, y) = (-6x + 6y, 6y - 6y^2 + 6x) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 12y - 6y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 0 \vee y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \begin{cases} (0, 0) \\ (2, 2) \end{cases}.$$

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 - 12y \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \det < 0 \Rightarrow \text{sella}$$

$$\text{Hess } f(2, 2) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -18 \end{pmatrix} \quad -6 < 0, \det > 0$$

$\Rightarrow (2, 2) \bar{e}$  MAX locale stretto.

•  $(2, 2)$  non è max assoluta dato che

$$f(y, 0) = 3y^2 - 2y^3 \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} +\infty.$$

$$3). \quad \gamma = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$3). \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$\text{Elemento d'area: } \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{z^2} d\sigma &= \int_{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4} \frac{1}{x^2 + y^2} \sqrt{2} \, dx \, dy = 2\pi\sqrt{2} \int_1^2 \frac{1}{\rho^2} \, \rho \, d\rho \\ &= 2\pi\sqrt{2} \ln 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ Posto } X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{F}(X) &= (\|X\|^2)^{8/9} X \\ &= \|X\|^{16/9} X \\ &= \|X\|^{25/9} \frac{X}{\|X\|} \quad (X \neq 0) \end{aligned}$$

Si tratta di un campo radiale  $\Rightarrow$  conservativo in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$   
 con primitiva  $\frac{1}{\frac{25}{9} + 1} \|X\|^{\frac{25}{9} + 1}$ , che è  $C^1$  in  $\mathbb{R}^3$   
 $\Rightarrow \vec{F}$  conservativo in  $\mathbb{R}^3$ .

## Probabilità.

1. 2 tappe: a) sequenze dei 4 assi:  $4!$

b) sequenze con blocco dei 4 assi formate in a) e le altre 48 carte:  $49!$  modi.

In tutto  $4! \times 49!$  modi.

2. Si Eu: ha votato sì Eu / No Eu: lo votato No Eu | V: dice verità agli exit poll

$$P(V | \text{Si Eu}) = 0.9 \quad ; \quad P(V | \text{No Eu}) = 0.75$$

$$P(\text{Si Eu}) = 0.58 \quad ; \quad P(\text{No Eu}) = 0.42$$

$$(a) \quad P(\text{Mente} | \text{No Eu}) = 1 - P(\text{Vero} | \text{No Eu}) = 0.25$$

$$(b) P(SiEu | die SiEu) = \frac{P(die SiEu | SiEu) P(SiEu)}{P(die SiEu)}$$

$$P(die SiEu) = P(die SiEu | SiEu) P(SiEu) + P(die SiEu | NoEu) P(NoEu)$$

$$= P(V | SiEu) P(SiEu) + P(Mente | NoEu) P(NoEu)$$

$$= 0.9 \times 0.58 + 0.25 \times 0.42$$

$$\Rightarrow P(SiEu | die SiEu) = \frac{0.9 \times 0.58}{0.9 \times 0.58 + 0.25 \times 0.42}$$

$$3. f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} e^{-3y} & x \in [0,4], y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(a) P(X \leq 0, Y \geq 1) = 0 \text{ perché } (X \leq 0, Y \geq 1) \subseteq X \leq 0 \text{ e } P(X \leq 0) = 0$$

$$\begin{aligned} (b) P(Y \geq X+1) &= \int_{\substack{y \geq x+1 \\ x \in [0,4]}} \frac{3}{4} e^{-3y} dx dy \\ &= \frac{3}{4} \int_0^4 \int_{x+1}^{\infty} e^{-3y} dy dx \\ &= \frac{3}{4} \int_0^4 \left[ -\frac{1}{3} e^{-3y} \right]_{y=x+1}^{\infty} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^4 (0 + e^{-3(x+1)}) dx \\ &= -\frac{1}{4} \left[ -\frac{1}{3} e^{-3(x+1)} \right]_{x=0}^{x=4} \\ &= \frac{1}{4} (e^{-3} - e^{-15}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{12} (e^{-3} - e^{-15})$$

$$4. \quad P\left(\frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100} < 29.000\right) \approx P\left(\frac{100 \times 29.321 + 10 \times 2120Z}{100} < 29.000\right)$$

$Z \sim N(0, 1)$

$$= P(29.321 + 212Z < 29.000)$$

$$= P\left(Z < -\frac{321}{212}\right) = \Phi\left(-\frac{321}{212}\right) = \boxed{1 - \Phi\left(\frac{321}{212}\right)}$$