Задачи по Теории игр

Артамонов Н.В.

23 сентября 2024 г.

Содержание

1 Игры с нулевой суммой

[1]: pp. 364 – 366
[2] p. 207
[5] pp. 33 – 35

№1. Двое играют на деньги, одновременно называя одно из чисел 1 или 2, и потом считая сумму S. Если S четная, то первый выигрывает у второго S долларов, если S нечетная, то второй выигрывает у первого S долларов.

1. Постройте платежную матрицу (матрицу полезностей) каждого из игроков. Будет ли эта игра игрой с нулевой суммой?

2. Будут ли в этой игре доминирующие стратегии?

3. Будут ли положения равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?

4. Предположим, что игроки следуют смешанным стратегиям $P^\top = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ и $Q^\top = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$. Вычислите ожидаемый выигрыш каждого из игроков.

5. Найдите положения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

6. Найдите ожидаемый выигрыш (полезность) каждого из игроков в положении равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

№2. Решите предыдущую задачу при условии, что игроки называю одно из следующих чисел: 1, 2 или 3.

№3. Рассмотрим антагонистическую игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Найдите верхнюю и нижнюю цену игры.

2. Существует ли равновесие в чистых стратегиях? Ответ поясните.

3. Можно ли уменьшить размер платежной матрицы игры?

4. Найдите равновесие Нэша путем сведения к задаче линейного программирования

№4. Примените к платежным матрицам операцию доминирования. Проведите анализ игры до доминирования и после операции доминирования. Найдите равновесие Нэша и цену игры

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & -6 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

№5. Рассмотрим антагонистическую игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу и цену игры.

№6. Найти равновесие (по Нэшу) в смешанных стратегиях и цену игры в игре с нулевой суммой

$$\begin{pmatrix} -20 & 2 & 22 & -15 \\ 20 & -8 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

№7. Для антагонистической игры с матрицей

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -5 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

найдите равновесие Нэша.

№8. Игра «вооружение помехи». Сторона A располагает тремя видами вооружений A_1, A_2, A_3, а сторона B – тремя видами помех B_1, B_2, B_3. Вероятность решения боевой задачи стороной A при различных видах вооружения и помех задана матрицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	0.4	0.5	0.6
A_3	0.1	0.7	0.3

Сторона A стремиться решить боевую задачу, сторона B – воспрепятствовать этому.

- Найдите верхнюю и нижнюю цену игры. Будут ли в этой игре положения равновесия (по Нэшу) в чистых стратегиях?

Для удобства записи умножим матрицу на 10.

- Напишите пару двойственных задач для нахождения равновесия в смешанных стратегиях.

Пусть известны оптимальные решения двойственных задач линейного программирования: для игрока A

$$x_1 = \frac{1}{32} \qquad x_2 = \frac{3}{16} \qquad x_3 = 0$$

для игрока B

$$y_1 = \frac{3}{32} \qquad y_2 = \frac{4}{32} \qquad y_3 = 0$$

- Найдите оптимальные стратегии каждого из игроков и цену игры.

№9. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник, граф Балони, также имеет в подчинении три отряда и должен принять такое же решение. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником. Постройте матрицу игры и найдите положение равновесия по Нэшу в этой игре.

2 Игры с ненулевой суммой

№1. Рассмотрим платежную матрицу участников A и B некоторого парного турника, которые придерживаются в нем одной их двух стратегий

	s_{-1}	s_{-2}
s_1	1, 2	4, 3
s_2	3, 4	2, 3

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

   $$P^\top = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№2. Рассмотрим биматричную игру

	s_{-1}	s_{-2}
s_1	4, 2	2, 0
s_2	2, 2	3, 5

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№3. Рассмотрим биматричную игру

	s_{-1}	s_{-2}	s_{-3}
s_1	4, 1	2, 2	1, 3
s_2	2, 2	3, 5	0, 4

- Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

  Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

- Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№4. Рассмотрим биматричную игру

	s_{-1}	s_{-2}
s_1	4, 2	2, 0
s_2	2, 2	3, 5
s_3	3, 1	2, 3

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№5 (Дуополия Курно). Пусть Q_i – объем выпуска, cQ_i – издержки фирмы $i = 1, 2$. Функция спроса имеет вид $(a > c > 0)$

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & Q \le a \\ 0, & Q > a \end{cases}$$

Доход фирмы определяется равенством $(P(Q_1 + Q_2) - c)Q_i$.

Каждая фирма имеет две возможности: «мелкосерийное производство» $Q^l = (a - c)/4$ и «крупносерийное производство» $Q^h = (a - c)/3$.

1. Напишите биматричную игру в нормальной форме.

2. Найдите положения равновесия (по Нэшу) в чистых и смешанных стратегиях.

№6 (Дуополия Бертрана). Пусть на рынке минеральной воды присутствуют две конкурирующие фирмы A и B. Постоянные издержки каждой из них равны 300 (вне зависимости от объема продаж). Каждая фирма должна выбрать либо «высокую» цену на свою продукцию $P_h = 1$, либо «низкую» цену $P_l = 0.5$ (цена за бутылку). При при «высокой» цене на рынке можно продать 1000 бутылок, при «низкой» цене – 2000 бутылок. Если компании выбирают одинаковую цену, то они делят объемы продаж поровну. Если компании выбирают разные цены, то рынок полностью захватывает компания с более низкой ценой (другая ничего не продает).

1. Постройте платежную матрицу (матрицу полезностей) каждого из игроков. Будет ли эта игра игрой с нулевой суммой?

2. Будут ли в этой игре доминирующие стратегии?

3. Будут ли положения равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?

4. Найдите положения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

5. Дайте интерпретацию равновесных (по Нэшу) стратегий.

6. Найдите ожидаемый выигрыш (полезность) каждого из игроков в положении равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

№7 (Дуополия Бертрана). Пусть на рынке минеральной воды присутствуют две конкурирующие фирмы A и B. Постоянные издержки каждой из них равны \$5000 (вне зависимости от объема продаж). Каждая фирма должна выбрать либо «высокую» цену на свою продукцию $P_h = \$2$, либо «низкую» цену $P_l = \$1$ (цена за бутылку). Тогда:

1. при «высокой» цене на рынке можно продать 5000 бутылок,

2. при «низкой» цене на рынке можно продать 10000 бутылок,

3. если компании выбирают одинаковую цену, то они делят объемы продаж поровну,

4. если компании выбирают разные цены, то рынок полностью захватывает компания с более низкой ценой (другая ничего не продает).

Постройте матрицу игры. Будет ли это игра с нулевой суммой? Найдите положения равновесия по Нэшу и цену игры.

№8. Рассмотрим биматричную игру

	s_{-1}	s_{-2}	s_{-3}	s_{-4}
s_1	2, 2	1, 1	1, 3	2, 1
s_2	2, 4	1, 3	1, 2	4, 2
s_3	3, 2	2, 3	2, 5	3, 1
s_4	4, 1	1, 4	3, 1	2, 2

Проведите процедуру последовательного удаления доминируемых стратегий. Будут ли в этой игре положения равновесия по Нэшу и по Парето в чистых стратегиях?

№9. У двух авиапассажиров, следовавших одним рейсом, пропали чемоданы. Авиакомпания готова возместить ущерб каждому пассажиру. Для того, чтобы определить размер компенсации, каждого пассажира просят сообщить, во сколько он оценивает содержимое своего чемодана.

Каждый пассажир может назвать сумму не менее \$90 и не более \$100. Условия компенсации таковы: если оба сообщают одну и ту же сумму, то каждый получит эту сумму в качестве компенсации. Если же заявленный одним из пассажиров ущерб окажется меньше, чем заявленный ущерб другого пассажира, то каждый пассажир получит компенсацию, равную меньшей из заявленных сумм. При этом тот, кто заявил меньшую сумму, получит дополнительно \$2, тот, кто заявил большую сумму — дополнительно потеряет два доллара. Постройте матрицу игры и найдите положение равновесия по Нэшу в этой игре.

№10. Винни Пух и Пятачок решают, к кому они пойдут в гости — к Пуху (стратегия 1), Пятачку (стратегия 2) или к Кролику (стратегия 3). Друзья могут пойти как вместе так и по раздельности. С точки зрения Пуха, удовольствие от похода в гости оценивается так: 1, 2 и 4 соответственно. С точки зрения Пятачка удовольствия таковы: 3, 2 и 2 соответственно. Присутствие спутника (совместный поход в гости) добавляет одну единицу удовольствия каждому. Найти равновесие в этой игре.

№11. Две фирмы делят рынок. У каждой фирмы три стратегии — выставить низкую цену, среднюю цену и высокую цену $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$. Предположим, что спрос на рынке составляет 100 единиц продукции, при равенстве цен он делится поровну между фирмами, если одна фирма выставила высокую цену, а другая среднюю, то спрос составляет 30 и 70 единиц соответственно. При средней и низкой цене спрос также делится на 30 и 70, а при высокой и низкой он составляет 10 и 90 единиц соответственно. Найти положение равновесия по Нэшу.

№12. Две радиостанции делят рынок, выбирая из двух форматов вещания: новости и музыка. Целевая аудитория каждого из форматов равна 38% и 62% соответственно. Если радиостанции выбирают одинаковый формат вещания, то они делят целевую аудитория пополам. Если Если радиостанции выбирают разный формат вещания, то каждая “захватывает” всю целевую аудиторию своего формата вещания. Выигрыш радиостанции – её доля аудитории.

1. Запишите игру в нормальной форме. Будет ли эта игра игрой с нулевой суммой?

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях и выигрыши игроков в равновесии.

Список литературы

[1] Asoke Kumar Bhunia, Laxminarayan Sahoo, Ali Akbar Shaikh, «Advanced Optimization and Operations Research»

[2] Wolfgang Eichhorn, Winfried Gleißner, «Mathematics and Methodology for Economics»

[3] James N.Webb «Game Theory Decisions, Interaction and Evolution»

[4] Takashi Hayashi, «Microeconomic Theory for the Social Sciences»

[5] Hans Peters, <Game Theory A Multi-Leveled Approach>