

Задачи по Математическим основам анализа данных

Артамонов Н.В.

18 мая 2025 г.

Содержание

1	Работа с массивами (матричный анализ)	2
1.1	Операции с матрицами	2
1.1.1	Скалярное умножение и сложение	2
1.1.2	Умножение матриц	3
1.1.3	Обратная матрица	6
1.1.4	Матричные уравнения	6
1.1.5	Определитель	8
1.2	Системы линейных уравнений	8
2	Элементы анализа	10
2.1	Функции одной переменной	10
2.2	Функции многих переменных	11
2.3	Интегрирование функции одной переменной	12
3	Элементы теории вероятностей	12
3.1	Дискретные распределения	12
3.2	Непрерывные распределения	15
3.3	Критические значения	16

1 Работа с массивами (матричный анализ)

1.1 Операции с матрицами

1.1.1 Скалярное умножение и сложение

№1. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$2A + B \quad A - 2C \quad 4B - A - C \quad C - 2A + 4B$$

№2. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A + 3B \quad 3B - 2C \quad 2B - C + 3A \quad 2C + 3A - 5B$$

№3. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$3A - B \quad 2A - C \quad 2B - C + 3A \quad B - 2A + C$$

1.1.2 Умножение матриц

Замечание: через \odot будем обозначать *произведение Адамара* для матриц

№4. Для следующим матриц вычислите $A \odot B$, если операция определена

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

№5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ вычислите

$$A \odot A \quad A^\top \odot A \quad A \odot A \odot A \quad A \odot A^\top \odot A \quad A \odot A^\top \odot A^\top$$

№6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите

$$A \odot A \quad A^\top \odot A \quad A \odot A \odot A \quad A \odot A^\top \odot A \quad A \odot A^\top \odot A^\top$$

№7. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \quad A \odot B - C \quad 2B \odot C - A \quad 2A \odot B - 3B \odot C$$

№8. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \quad 2A \odot B - C \quad B \odot C + 2A \quad 3A \odot B - 2B \odot C$$

№9. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \quad 2A \odot C - B \quad B \odot C - 2B \quad 3A \odot C - 2A \odot C$$

№10. Для следующим матриц вычислите произведения AB и BA , если операции определены

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

№11. Для следующим матриц вычислите произведения $A^\top B$, AB^\top , $B^\top A$ и BA^\top , если операции определены

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

№12. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$AC - B \quad BA + C \quad (B + C)A \quad C(A - B) \quad AB - BC \quad ABC$$

№13. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$AB - C \quad BC + A \quad A(B + C) \quad (2A - 3B)C \quad AB + BC \quad ABC$$

№14. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите A^2 , A^3 , A^4

№15. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите A^2 , A^3 , A^4

1.1.3 Обратная матрица

№16. Найдите обратную к следующим матрицам или покажите, что обратная не существует

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

№17. Найдите обратную к следующим матрицам или покажите, что обратная не существует

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Матричные уравнения

№18. Решите матричное уравнение $AX = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

№19. Решите матричное уравнение $AX = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№20. Решите матричное уравнение $XA = B$ для следующих матриц

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№21. Решите матричное уравнение $A_1XA_2 = B$ для следующих матриц

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2. A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5. A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.1.5 Определитель

№22. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№23. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

№24. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

№25. Какие из следующих матриц обратимы?

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

№26. Какие из следующих матриц обратимы?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Системы линейных уравнений

№1. Рассмотрим систему линейных уравнений в матричном виде $Ax = b$.

Для следующих матриц запишите систему линейных уравнений и решите её используя обратную матрицу

$$A, b = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad A, b = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A, b = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

№2. Рассмотрим систему линейных уравнений в матричном виде $Ax = b$. Для следующих матриц запишите систему линейных уравнений и решите её используя обратную матрицу

$$\begin{array}{ll} A, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & A, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A, b = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} & A, b = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

№3. Решите систему линейных уравнений используя формулы Крамера

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} & \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases} \end{array}$$

№4. Какие из следующих систем $Ax = b$ имеют единственное решение?

$$\begin{array}{ll} 1) A, b = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 2) A, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ 3) A, b = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & 4) A, b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Элементы анализа

2.1 Функции одной переменной

№1. Вычислите первую производную функций

$$\begin{array}{llll} f(x) = x \cos(x) & f(x) = x \sin(x) & f(x) = x^2 \sin(x) & f(x) = x^2 \cos(x) \\ f(x) = \cos^2(x) & f(x) = \sin^2(x) & f(x) = x \cos^2(x) & f(x) = x \sin^2(x) \\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} & f(x) = \frac{\cos(x)}{x} & f(x) = \frac{\cos^2 x}{x} & f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \\ f(x) = x \ln x & f(x) = x^2 \ln x & f(x) = x \ln^2(x) & f(x) = \frac{\ln x}{x} \\ f(x) = x \exp(x) & f(x) = \exp(x^2) & f(x) = x \exp(-x) & f(x) = x \exp(-x^2) \end{array}$$

№2. Вычислите значение первой производной функции

1. $f(x) = x \cos(x)$ в точках $x = 0, \pi/2, \pi$
2. $f(x) = x^2 \sin(x)$ в точках $x = 1, \pi/2, \pi$
3. $f(x) = x^3 \ln x$ в точках $x = 1, 2, 3$
4. $f(x) = x \exp(x^2)$ в точках $x = 1, 2, 3$

№3. Вычислите вторую производную функций

$$\begin{array}{llll} f(x) = x \cos(x) & f(x) = x \sin(x) & f(x) = \cos^2(x) & f(x) = \sin^2(x) \\ f(x) = x \ln x & f(x) = x \exp(x) & f(x) = x^2 \exp(-x) & f(x) = \exp(-x^2) \end{array}$$

№4. Найдите (численно) локальные экстремумы функции

$$\begin{array}{ll} f(x) = 10 + 3x - x^2 & f(x) = 2x^2 + 4x - 5 \\ f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 10 & f(x) = 6 + 3x - 5x^2 - x^3 \\ f(x) = x \exp(x) & f(x) = x^2 \exp(x) \\ f(x) = x^3 \exp(-x) & f(x) = x \exp(-x^2) \end{array}$$

2.2 Функции многих переменных

№1. Вычислите градиент следующих функции

$$\begin{array}{llll} f = xy & f = x^2y^2 & f = x^2y - xy^2 & f = x^2 - xy + y^2 \\ f = \exp(xy) & f = \exp(x + y) & f = \ln(x + y) & f = \exp(x^2y) \end{array}$$

№2. Найдите значение градиента функции

1. $f = xy^2$ в точке $(1, 2)$
2. $f = x^2y + xy^2$ в точке $(2, -1)$
3. $f = x^2 + xy + y^2$ в точке $(-1, 2)$
4. $f = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $(2, 3)$
5. $f = \exp(x^2 + y^2)$ в точке $(-2, 1)$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{array}{l} f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy \\ f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy \\ f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy \end{array}$$

№4. Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{array}{l} f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz \\ f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz \\ f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz \end{array}$$

№5. Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{array}{l} f(x, y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy \\ f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 \\ f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y \end{array}$$

№6. Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{array}{l} f(x, y) = 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y \\ f(x, y) = 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy \\ f(x, y) = 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy \end{array}$$

2.3 Интегрирование функции одной переменной

№1. Вычислите первообразные для следующих функций

$f = x^2 - 2x$	$f = x^2 - x^3$	$f = x^4 - 3x^3 + x^2$
$f = \frac{1}{x}$	$f = \frac{1}{1+x^2}$	$f = \frac{1}{1-x^2}$
$f = \exp(-x)$	$f = x \exp(x)$	$f = x^2 \exp(-x)$
$f = \ln x$	$f = x^2 \ln x$	$f = x^2 \ln x$
$f = x \cos(x)$	$f = x^2 \sin(x)$	$f = x^3 \cos(x)$

№2. Вычислите первообразную функции

1. $f = x^2 - x + 1$ в точке $x = 1$
2. $f = \frac{x}{1+x^2}$ в точке $x = 0$
3. $f = x^2 \cos(x)$ в точке $x = \pi$
4. $f = x^2 \sin(x)$ в точке $x = \pi/2$
5. $f = x \exp(-x)$ в точке $x = 1$
6. $f = x^2 \exp(x)$ в точке $x = 1$
7. $f = x \ln x$ в точке $x = 1$

№3. Вычислите

$\int_0^1 x^2 dx$	$\int_{-1}^1 x^3 dx$	$\int_{-1}^1 x^4 dx$
$\int_0^1 x \exp(x) dx$	$\int_0^\pi x \cos(x) dx$	$\int_0^\pi x \sin(x) dx$

3 Элементы теории вероятностей

3.1 Дискретные распределения

№1. Симметричную монетку бросают 5 раз. Случайная величина X — число выпадений Орла. Вычислите

1. $E(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$P(X = 0) \quad P(X = 2) \quad P(X \leq 3) \quad P(X > 2)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = P(X = k)$

№2. Симметричную монетку бросают 8 раз. Случайная величина X – число выпадений Орла. Вычислите

1. $E(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$P(X = 3) \quad P(X = 2) \quad P(X \leq 3) \quad P(X > 2)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = P(X = k)$

№3. Несимметричную монетку бросают 7 раз. Вероятность выпадения Герба в одном бросании равна 0.4. Случайная величина X – число выпадений Герба. Вычислите

1. $E(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$P(X = 3) \quad P(X = 6) \quad P(X \leq 4) \quad P(X > 3)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = P(X = k)$

№4. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0.9. В контрольной партии 5 приборов. Случайная величина X – число приборов в партии, удовлетворяющих требованиям качества. Вычислите вероятность, что в партии будет не менее 4 приборов надлежащего качества.

№5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.7. Случайная величина X – число попаданий в цель при четырёх выстрелах. Вычислите вероятность того, что будет не менее двух попаданий в цель.

№6. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено пять независимо работающих светофоров. Каждый светофор с интервалом в 3 мин подает красный и зеленый сигналы. Случайная величина X – число остановок на этой улице. Вычислите вероятность того, что будет не более трёх остановок.

№7. В урне 8 шаров, 4 из них белые, а остальные чёрные. Случайным образом выбрали 4 шара. Случайная величина X – число белых шаров среди выбранных. Вычислите

1. $E(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$P(X = 2) \quad P(X = 3) \quad P(X \leq 2) \quad P(X > 1)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = P(X = k)$

№8. В группе из шести человек два отличника. Случайным образом выбрали двух человек. Случайная величина X – число отличников среди выбранных. Вычислите

1. $E(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$P(X = 1) \quad P(X = 2) \quad P(X \leq 2) \quad P(X > 0)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = P(X = k)$

№9. Партия из 15 изделий содержит 5 бракованных. Из партии случайным образом взято 4 изделия. Пусть X – число бракованных изделий среди трех взятых. Вычислите

1. $E(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$P(X = 1) \quad P(X = 4) \quad P(X \leq 3) \quad P(X > 2)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = P(X = k)$

3.2 Непрерывные распределения

№1. Для распределения $N(0, 1)$ вычислите

$$\phi(1) \quad \phi(2) \quad \phi(-0.5) \quad \phi(-1.5) \quad \Phi(1) \quad \Phi(2) \quad \Phi(-1) \quad \Phi(-2)$$

№2. Для распределения $N(1, 0.5^2)$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$$

№3. Пусть $X \sim N(0, 1)$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 1) \quad P(X > -0.5) \quad P(-1 \leq X \leq 0.5) \quad P(0 < X < 2)$$

№4. Пусть $X \sim N(1, 1.5^2)$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 2) \quad P(X > 0.5) \quad P(-0.5 \leq X \leq 1.5) \quad P(0 < X < 3)$$

№5. Пусть $X \sim N(0, 1)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$P(X \leq a) = 0.6 \quad P(X \leq b) = 0.8 \quad P(X \leq c) = 0.9$$

№6. Пусть $X \sim N(1, 0.5^2)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$P(X \leq a) = 0.7 \quad P(X \leq b) = 0.85 \quad P(X \leq c) = 0.95$$

№7. Для распределения $U[1, 4]$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{0, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5\}$$

№8. Пусть $X \sim U[-1, 5]$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 0) \quad P(X > 2) \quad P(-0.5 \leq X \leq 3.5) \quad P(0 < X < 4)$$

3.3 Критические значения

Замечание: все вычисления необходимо сделать в MS Excel/Python

№1. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения распределения $\mathcal{N}(0, 1)$

№2. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения следующих распределений

$$t_{10}$$

$$t_{100}$$

$$t_{250}$$

$$t_{500}$$

№3. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$\chi_2^2$$

$$\chi_5^2$$

$$\chi_{10}^2$$

$$\chi_{20}^2$$

№4. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$F_{2,100}$$

$$F_{5,300}$$

$$F_{10,1000}$$

$$F_{20,1500}$$