Задачи по Математическим основам анализа данных

Артамонов Н.В.

4 марта 2025 г.

Содержание

1 Работа с массивами (матричный анализ) 1
1.1 Операции с матрицами 1
1.1.1 Скалярное умножение и сложение 1
1.1.2 Умножение метриц 2
1.1.3 Обратная матрица 5
1.1.4 Матричные уравнения 6
1.1.5 Определитель 8

1 Работа с массивами (матричный анализ)

1.1 Операции с матрицами

1.1.1 Скалярное умножение и сложение

№1. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$2A + B \qquad A - 2C \qquad 4B - A - C \qquad C - 2A + 4B$$

№2. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A + 3B \qquad 3B - 2C \qquad 2B - C + 3A \qquad 2C + 3A - 5B$$

№3. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$3A - B \qquad 2A - C \qquad 2B - C + 3A \qquad B - 2A + C$$

1.1.2 Умножение метриц

Замечание: через $\odot$ будем обозначать *произведение Адамара* для матриц

№4. Для следующим матриц вычислите $A \odot B$, если операция определена

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

№5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ вычислите

$$A \odot A \qquad A^\top \odot A \qquad A \odot A \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A^\top$$

№6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите

$$A \odot A \qquad A^\top \odot A \qquad A \odot A \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A^\top$$

№7. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \qquad A \odot B - C \qquad 2B \odot C - A \qquad 2A \odot B - 3B \odot C$$

№8. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \qquad 2A \odot B - C \qquad B \odot C + 2A \qquad 3A \odot B - 2B \odot C$$

№9. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \qquad 2A \odot C - B \qquad B \odot C - 2B \qquad 3A \odot C - 2A \odot C$$

№10. Для следующим матриц вычислите произведении AB и BA, если операции определены

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

№11. Для следующим матриц вычислите произведении $A^\top B, AB^\top, B^\top A$ и $BA^\top$, если операции определены

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

№12. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$AC - B \quad BA + C \quad (B + C)A \quad C(A - B) \quad AB - BC \quad ABC$$

№13. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$AB - C \quad BC + A \quad A(B + C) \quad (2A - 3B)C \quad AB + BC \quad ABC$$

№14. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите A^2, A^3, A^4

№15. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите A^2, A^3, A^4

1.1.3 Обратная матрица

№16. Найдите обратную к следующим матрицам или покажите, что обратная не существует

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

№17. Найдите обратную к следующим матрицам или покажите, что обратная не существует

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3&0&2\\0&1&1\\5&0&3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

1.1.4 Матричные уравнения

№18. Решите матричное уравнение $AX = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&-1&2&1\\2&0&1&-1\end{pmatrix}$

№19. Решите матричное уравнение $AX = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&-1&1&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$

№20. Решите матричное уравнение $XA = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№21. Решите матричное уравнение $A_1 X A_2 = B$ для следующих матриц

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.1.5 Определитель

№22. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

№23. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$