Задачи по Математическим основам анализа данных

Артамонов Н.В.

12 мая 2025 г.

Содержание

1 Работа с массивами (матричный анализ)

1.1 Операции с матрицами

1.1.1 Скалярное умножение и сложение

№1. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$2A + B \qquad A - 2C \qquad 4B - A - C \qquad C - 2A + 4B$$

№2. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A + 3B \qquad 3B - 2C \qquad 2B - C + 3A \qquad 2C + 3A - 5B$$

№3. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$3A - B \qquad 2A - C \qquad 2B - C + 3A \qquad B - 2A + C$$

1.1.2 Умножение матриц

Замечание: через $\odot$ будем обозначать *произведение Адамара* для матриц

№4. Для следующим матриц вычислите $A \odot B$, если операция определена

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

№5. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ вычислите

$$A \odot A \qquad A^\top \odot A \qquad A \odot A \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A^\top$$

№6. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите

$$A \odot A \qquad A^\top \odot A \qquad A \odot A \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A \qquad A \odot A^\top \odot A^\top$$

№7. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \qquad A \odot B - C \qquad 2B \odot C - A \qquad 2A \odot B - 3B \odot C$$

№8. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \qquad 2A \odot B - C \qquad B \odot C + 2A \qquad 3A \odot B - 2B \odot C$$

№9. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$A \odot B \odot C \qquad 2A \odot C - B \qquad B \odot C - 2B \qquad 3A \odot C - 2A \odot C$$

№10. Для следующим матриц вычислите произведении AB и BA, если операции определены

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

№11. Для следующим матриц вычислите произведении $A^\top B, AB^\top, B^\top A$ и $BA^\top$, если операции определены

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

№12. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$AC - B \quad BA + C \quad (B + C)A \quad C(A - B) \quad AB - BC \quad ABC$$

№13. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислите

$$AB - C \quad BC + A \quad A(B + C) \quad (2A - 3B)C \quad AB + BC \quad ABC$$

№14. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите A^2, A^3, A^4

№15. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ вычислите A^2, A^3, A^4

1.1.3 Обратная матрица

№16. Найдите обратную к следующим матрицам или покажите, что обратная не существует

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&2\\4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$$

№17. Найдите обратную к следующим матрицам или покажите, что обратная не существует

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}3&0&2\\0&1&1\\5&0&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

1.1.4 Матричные уравнения

№18. Решите матричное уравнение $AX = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0&-1&2&1\\2&0&1&-1\end{pmatrix}$

№19. Решите матричное уравнение $AX = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№20. Решите матричное уравнение $XA = B$ для следующих матриц

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

№21. Решите матричное уравнение $A_1XA_2 = B$ для следующих матриц

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.1.5 Определитель

№22. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

№23. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

№24. Вычислите определитель следующих матриц

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

№25. Какие из следующи матриц обратимы?

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 10\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6 & 9\\ 4 & 6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 7\end{pmatrix}$$

№26. Какие из следующи матриц обратимы?

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}6 & 9 & 3\\ 4 & 6 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.2 Системы линейных уравнений

№1. Рассмотрим систему линейных уравнений в матричном виде $Ax = b$. Для следующих матриц запишите систему линейных уравнений и решите её использую обратную матрицу

$$A, b = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix} \quad A, b = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix} \quad A, b = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 7 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

№2. Рассмотрим систему линейных уравнений в матричном виде $Ax = b$. Для следующих матриц запишите систему линейных уравнений и решите её использую обратную матрицу

$$A, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A, b = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A, b = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

№3. Решите систему линейных уравнений использую формулы Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

№4. Какие из следующих систем $Ax = b$ имеют единственной решений?

$$1)\ A, b = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\ A, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3)\ A, b = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 4)\ A, b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2 Элементы анализа

2.1 Функции одной переменной

№1. Вычислите первую производную функций

$$
\begin{array}{llll}
f(x) = x\cos(x) & f(x) = x\sin(x) & f(x) = x^2\sin(x) & f(x) = x^2\cos(x) \\
f(x) = \cos^2(x) & f(x) = \sin^2(x) & f(x) = x\cos^2(x) & f(x) = x\sin^2(x) \\
f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} & f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x} & f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{x} & f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2} \\
f(x) = x\ln x & f(x) = x^2\ln x & f(x) = x\ln^2(x) & f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \\
f(x) = x\exp(x) & f(x) = \exp(x^2) & f(x) = x\exp(-x) & f(x) = x\exp(-x^2)
\end{array}
$$

№2. Вычислите значение первой производной функции

1. $f(x) = x\cos(x)$ в точках $x = 0, \pi/2, \pi$
2. $f(x) = x^2\sin(x)$ в точках $x = 1, \pi/2, \pi$
3. $f(x) = x^3\ln x$ в точках $x = 1, 2, 3$
4. $f(x) = x\exp(x^2)$ в точках $x = 1, 2, 3$

№3. Вычислите вторую производную функций

$$
\begin{array}{llll}
f(x) = x\cos(x) & f(x) = x\sin(x) & f(x) = \cos^2(x) & f(x) = \sin^2(x) \\
f(x) = x\ln x & f(x) = x\exp(x) & f(x) = x^2\exp(-x) & f(x) = \exp(-x^2)
\end{array}
$$

№4. Найдите (численно) локальные экстремумы функции

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = 10 + 3x - x^2 & f(x) = 2x^2 + 4x - 5 \\
f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 10 & f(x) = 6 + 3x - 5x^2 - x^3 \\
f(x) = x\exp(x) & f(x) = x^2\exp(x) \\
f(x) = x^3\exp(-x) & f(x) = x\exp(-x^2)
\end{array}
$$

2.2 Функции многих переменных

№1. Вычислите градиент следующих функции

$$\begin{array}{llll} f = xy & f = x^2y^2 & f = x^2y - xy^2 & f = x^2 - xy + y^2 \\ f = \exp(xy) & f = \exp(x+y) & f = \ln(x+y) & f = \exp(x^2y) \end{array}$$

№2. Найдите значение градиента функции

1. $f = xy^2$ в точке $(1, 2)$
2. $f = x^2y + xy^2$ в точке $(2, -1)$
3. $f = x^2 + xy + y^2$ в точке $(-1, 2)$
4. $f = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $(2, 3)$
5. $f = \exp(x^2 + y^2)$ в точке $(-2, 1)$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

№4. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№5. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$
$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$
$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

№6. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y$$
$$f(x, y) = 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy$$
$$f(x, y) = 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy$$

2.3 Интегрирование функции одной переменной

№1. Вычислите первообразные для следующих функций

$$\begin{array}{lll} f = x^2 - 2x & f = x^2 - x^3 & f = x^4 - 3x^3 + x^2 \\ f = \dfrac{1}{x} & f = \dfrac{1}{1+x^2} & f = \dfrac{1}{1-x^2} \\ f = \exp(-x) & f = x\exp(x) & f = x^2\exp(-x) \\ f = \ln x & f = x^2 \ln x & f = x^2 \ln x \\ f = x\cos(x) & f = x^2\sin(x) & f = x^3\cos(x) \end{array}$$

№2. Вычислите первообразную функции

1. $f = x^2 - x + 1$ в точке $x = 1$
2. $f = \frac{x}{1+x^2}$ в точке $x = 0$
3. $f = x^2\cos(x)$ в точке $x = \pi$
4. $f = x^2\sin(x)$ в точке $x = \pi/2$
5. $f = x\exp(-x)$ в точке $x = 1$
6. $f = x^2\exp(x)$ в точке $x = 1$
7. $f = x\ln x$ в точке $x = 1$

№3. Вычислите

$$\begin{array}{lll} \displaystyle\int_0^1 x^2 dx & \displaystyle\int_{-1}^1 x^3 dx & \displaystyle\int_{-1}^1 x^4 dx \\ \displaystyle\int_0^1 x\exp(x)dx & \displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)dx & \displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx \end{array}$$

3 Элементы теории вероятностей

3.1 Дискретные распределения

№1. Симметричную монетку бросают 5 раз. Случайная величина X – число выпадений Орла. Вычислите

1. $\mathsf{E}(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$\mathsf{P}(X = 0) \qquad \mathsf{P}(X = 2) \qquad \mathsf{P}(X \leq 3) \qquad \mathsf{P}(X > 2)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = \mathsf{P}(X = k)$

№2. Симметричную монетку бросают 8 раз. Случайная величина X – число выпадений Орла. Вычислите

1. $\mathsf{E}(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$\mathsf{P}(X = 3) \qquad \mathsf{P}(X = 2) \qquad \mathsf{P}(X \leq 3) \qquad \mathsf{P}(X > 2)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = \mathsf{P}(X = k)$

№3. Несимметричную монетку бросают 7 раз. Вероятность выпадения Герба в одном бросании равна 0.4. Случайная величина X – число выпадений Герба. Вычислите

1. $\mathsf{E}(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$\mathsf{P}(X = 3) \qquad \mathsf{P}(X = 6) \qquad \mathsf{P}(X \leq 4) \qquad \mathsf{P}(X > 3)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = \mathsf{P}(X = k)$

№4. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0.9. В контрольной партии 5 приборов. Случайная величина X – число приборов в партии, удовлетворяющих требованиям качества. Вычислите вероятность, что в партии будет не менее 4 приборов надлежащего качества.

№5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.7. Случайная величина X – число попаданий в цель при четырёх выстрелах. Вычислите вероятность того, что будет не менее двух попаданий в цель.

№6. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено пять независимо работающих светофоров. Каждый светофор с интервалом в 3 мин подает красный и зеленый сигналы. Случайная величина X – число остановок на этой улице. Вычислите вероятность того, что будет не более трёх остановок.

№7. В урне 8 шаров, 4 из них белые, а остальные чёрные. Случайным образом выбрали 4 шара. Случайная величина X – число белых шаров среди выбранных. Вычислите

1. $\mathsf{E}(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$\mathsf{P}(X = 2) \qquad \mathsf{P}(X = 3) \qquad \mathsf{P}(X \leq 2) \qquad \mathsf{P}(X > 1)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = \mathsf{P}(X = k)$

№8. В группе из шести человек два отличника. Случайным образом выбрали двух человек. Случайная величина X – число отличников среди выбранных. Вычислите

1. $\mathsf{E}(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$\mathsf{P}(X = 1) \qquad \mathsf{P}(X = 2) \qquad \mathsf{P}(X \leq 2) \qquad \mathsf{P}(X > 0)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = \mathsf{P}(X = k)$

№9. Партия из 15 изделий содержит 5 бракованных. Из партии случайным образом взято 4 изделия. Пусть X – число бракованных изделий среди трех взятых. Вычислите

1. $\mathsf{E}(X), Var(X), \sigma(X)$

2. вероятности

$$\mathsf{P}(X = 1) \qquad \mathsf{P}(X = 4) \qquad \mathsf{P}(X \leq 3) \qquad \mathsf{P}(X > 2)$$

3. моду распределения

Визуализируйте $f(k) = \mathsf{P}(X = k)$