Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

31 октября 2023 г.

Содержание

1 Задачи оптимизации

Внимание: Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума! Задачи, отмеченные звёздочками, не является обязательными

1.1 Безусловная оптимизация

№1. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x,y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

№2. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y,z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x,y,z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x,y,z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$
$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$
$$f(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

№4. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ и $P_3 = 6$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№5. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 2$ и $P_3 = 3$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q1Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$ и $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№7. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№8. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 6\ln x + 8\ln y - 3x - 2y$$
$$f(x, y) = 4\ln x + 6\ln y + 2x - 3xy$$
$$f(x, y) = 5\ln x + 4\ln y - x - 4xy$$

1.2 Выпуклость

№1. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$
$$f(x, y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$
$$f(x, y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

№2. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. При каких значениях параметра β функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

№4. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на $\mathbb{R}^2_+$ $(a, b > 0)$

$$f(x, y) = a\ln x + b\ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$
$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a\ln x - b\ln y$$
$$f(x, y) = a\ln x + b\ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

1.3 Оптимизации с ограничениями равенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\max(2x+3y) \qquad \min(2x+3y)$$
$$s.t.\ 2x^2+y^2=11 \qquad s.t.\ 2x^2+y^2=11$$
$$\max(5x-3y) \qquad \min(5x-3y)$$
$$s.t.\ x^2+3y^2=28 \qquad s.t.\ x^2+3y^2=28$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\min(x^2+2y^2) \qquad \max(10-2x^2-18y^2)$$
$$s.t.\ 3x+2y=22 \qquad s.t.\ 4x+6y=30$$
$$\max(y^2-2x^2) \qquad \min(2y^2-x^2)$$
$$s.t.\ 4x+3y=5 \qquad s.t.\ 5x+4y=17$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\max(x^2y^2) \qquad \min(x^2y^2)$$
$$s.t.\ 3x+2y=24 \qquad s.t.\ 3x+2y=24$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\max(xy) \qquad \min(xy)$$
$$s.t.\ x^2+2y^2=36 \qquad s.t.\ x^2+2y^2=36$$

№5. Найти экстремум функции полезности $u = x^2y$ при бюджетном ограничении $2x+3y=90$.

№6. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_1 = 10$ и $P_2 = 20$, бюджет составляет \$1200. Производственная функция предприятия равна $f(x,y)=\sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№7. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_x = 5$ и $P_y = 2$, бюджет составляет \$200. Производственная функция предприятия равна $f(x,y)=2\sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№8. Производственная функция предприятия равна $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Ресурсы закупаются по ценам P_1 и P_2. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min(P_1 x + P_2 y)$$
$$f(x,y) = Q_0$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№9. Потребительская корзина состоит их трех товаров, цена на которые равны P_1, P_2, P_3. Доход равен I. Функция полезности потребителя равна

$$U(q_1, q_2, q_3) = \ln q_1 + \ln q_2 + \ln q_3.$$

Найдите оптимальную потребительскую корзину.

№10. В условиях предыдущей задачи рассмотрите функцию полезности

$$U(q_1, q_2, q_3) = a \ln q_1 + b \ln q_2 + c \ln q_3 \qquad\qquad a, b, c > 0$$

№11. Фирма для производства использует два фактора производства: капитал и труд. Производственная функция имеет вид $F = 3KL^2$. Фирма решает следующую задачу

$$\min(5K + 4L)$$
$$F(K, L) = 9600$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№12. Решите задачи оптимизации

$$\min(2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 10x - 50y - 10z)$$
$$s.t.\ x + 2y + 3z = 20$$
$$\max(10 - 9x - 3y + 3z - 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz)$$
$$s.t.\ 2x + 2y - 4z = 7$$

№13. Решите **численно**[1] задачи оптимизации

$$\max(x + y + z) \qquad s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \qquad s.t. \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$\min(x + y + z) \qquad s.t. \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \qquad s.t. \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

[1] MS Excel/Python

1.4 Оптимизация с ограничениями неравенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \min(2x^2+3y^2) & \max(2x+3y) \\ s.t\ x-y\geq 10 & s.t.\ 5x^2+y^2+4xy\leq 25 \end{array}$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(2x+4y-5x^2-y^2-4xy) & \max(4x+8y-6x^2-3y^2-8xy) \\ s.t.\ 2x+3y\leq 40 & s.t.\ 2x+2y\leq 9 \\ \max(4x+10y-2x^2-6y^2-6xy) & \max(8x+8y-3x^2-3y^2-6xy) \\ s.t.\ 3x+6y\leq 3 & s.t.\ 2x+4y\leq 13 \end{array}$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \min(5x^2+y^2+4xy-2x-4y) & \min(5x^2+y^2-4xy-2x-y) \\ s.t.\ 2x+y\geq 40 & s.t.\ 2x+3y\geq 10 \\ \min(5x^2+4y^2-8xy-3x-4y) & \min(2x^2+6y^2-6xy-4x-43) \\ s.t.\ 2x+4y\geq 31 & s.t.\ 3x+6y\geq 20 \end{array}$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(x-2y) & \max(1-(x+1)^2-(y-1)^2) \\ s.t.\ x^2+y^2\leq 4 & s.t.\ x+y\leq 10 \\ \max(x-2y) & \max(1-(x+1)^2-(y-1)^2) \\ s.t. \begin{cases} x^2+y^2\leq 4 \\ x,y\geq 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} x+y\leq 10 \\ x,y\geq 0 \end{cases} \end{array}$$

№5. Завод производит два вида товаров, цена на которые равны $P_1=10$ и $P_2=30$. Функция издержек равна

$$C(Q_1,Q_2)=Q_1^2+5Q_2^2-4Q_1Q_2$$

(Q_1,Q_2 – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 104

2. издержки не должны превышать 5850

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 20 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 30 - 5Q_2 + 3Q_1$ (цены эндогенны). Функция издержек равна $C(Q_1, Q_2) = 10Q_1 + 20Q_2$ (Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 3600

2. издержки не должны превышать 450

№7. Решите **численно**[2] задачи оптимизации

$$\max(x - y + z) \quad s.t.\ 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$

$$\max(x - y + z) \quad s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \quad s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \quad s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

№8. Решите **численно**[3] задачи оптимизации

$$\max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \quad s.t.\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25$$

$$\max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \quad s.t. \begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) \quad s.t. \begin{cases} x_1 x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \end{cases}$$

$$\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) \quad s.t. \begin{cases} x_1 x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

№9 (*). Потребительская корзина состоит из двух товаров, её функция полезности равна $U(x, y) = x + a\ln(y)$ (параметр $a > 0$). Потребитель

[2] MS Excel/Python
[3] MS Excel/Python

решает оптимальную задачу

$$\max U(x,y)$$
$$s.t. \begin{cases} 2x+y \le 10 \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

При каких значениях параметрах a

1. потребительская корзина состоит только из второго товара
2. содержит оба товара

№10 (*). Экономический агент имеет два «товара»: «отдых» l (leisure, в часах) и потребление x. Пусть w – почасовая оплата и P – цена потребления. Агент располагает общим временем H, которое он может тратить на работу и на отдых, и также имеет фиксированный доход M (non-labor income). Функция полезности экономического агента $U(x,l)x+c\ln l$ $(c>0)$. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\max U(x,l)$$
$$s.t. \begin{cases} Px+wl \le wH+M \\ 0 \le l \le H \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Найдите решение задачи оптимизации.

№11. Экономический агент потребляет два товара и его функция полезности равна $U(x,y)=y+c\ln x$ $(c>0)$. Цены на товары равны P_1 и P_2, доход равен I. Сформулируйте задачу об оптимальной потребительской корзине и найдите её решение.

1.5 Линейное программирование

№1. Рассмотрим задачи линейного программирования

$$\max(3x+5y) \quad s.t. \begin{cases} x+y \leqslant 5 \\ 2x+y \leqslant 8 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max(7x+4y) \quad s.t. \begin{cases} 2x+5y \leqslant 30 \\ 2x+y \leqslant 14 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max(4x+5y) \quad s.t. \begin{cases} x+3y \leqslant 15 \\ 4x+3y \leqslant 24 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max(8x+3y) \quad s.t. \begin{cases} 2x+5y \leqslant 35 \\ 5x+3y \leqslant 40 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Решите графическии (прямую) задачу
2. Напишите и решите графически двойственную задачу.

№2. Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\max(5x+4y) \quad s.t. \begin{cases} x+3y \leqslant 18 \\ x+2y \leqslant 13 \\ 3x+2y \leqslant 27 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\max(4x+3y) \quad s.t. \begin{cases} x+4y \leqslant 28 \\ 2x+3y \leqslant 26 \\ x+y \leqslant 11 \\ 2x+y \leqslant 20 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min(7x+6y) \quad s.t. \begin{cases} 3x+y \geqslant 9 \\ 4x+3y \geqslant 22 \\ x+3y \leqslant 10 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\min(2x+5y) \quad s.t. \begin{cases} 3x+y \geqslant 10 \\ 2x+y \geqslant 8 \\ x+3y \geqslant 9 \\ x+6y \geqslant 12 \\ x,y \geqslant 0 \end{cases}$$

№3. Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\max(5x - 4y)$$
$$s.t. \begin{cases} 2x + 5y \leqslant 16 \\ x + 2y \leqslant 22 \\ -5x - y \leqslant 19 \\ -2x + 6y \leqslant 14 \end{cases}$$

$$\max(-3x + 2y)$$
$$s.t. \begin{cases} x + 2y \leqslant 9 \\ 3x - y \leqslant 13 \\ -2x - 7y \leqslant 22 \\ -5x + y \leqslant 18 \\ -x + 4y \leqslant 15 \end{cases}$$

A Приложение

A.1 Симметричные матрицы

Пусть $\boldsymbol{A}$ – $(n \times n)$ симметричная матрица.

Теорема 1 (Критерий Сильвестра)**.** *Пусть $\boldsymbol{A}$ – симметричная матрица и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ последовательность ее угловых миноров:*

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \Delta_n = \det \boldsymbol{A}$$

Тогда

1. $\boldsymbol{A} > 0 \iff \Delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$
2. $\boldsymbol{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$
3. *если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена*

Предложение 1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ – симметричная 2×2 Тогда*

$$\boldsymbol{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0,\ \det \boldsymbol{A} \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0,\ \det \boldsymbol{A} \geq 0.$$

Для 3×3 матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{M}_{(13)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{M}_{(23)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Предложение 2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– симметричная* 3×3. *Тогда*

$$\boldsymbol{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{matrix} \geq 0, \begin{matrix} \mathcal{M}_{(12)} \\ \mathcal{M}_{(13)} \\ \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \ \det \boldsymbol{A} \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{matrix} \leq 0, \begin{matrix} \mathcal{M}_{(12)} \\ \mathcal{M}_{(13)} \\ \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \ \det \boldsymbol{A} \leq 0.$$

A.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция f определена на $\operatorname{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

Теорема 2. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция* f *выпукла* $\iff$ $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f)$.

Если $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) > 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f)$, *то функция строго выпукла на* $\operatorname{dom}(f)$.

Следствие. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция* f *вогнута* $\iff$ $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f)$.

Если $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) < 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \operatorname{dom}(f)$, *то функция строго вогнута на* $\operatorname{dom}(f)$.

Замечание. Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра 1 или используем Предложения 1, 2

A.3 Функция Лагранжа для ограничений равенства

Рассмотрим задачи оптимизации с ограничениями равенства

$$\max f(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \min f(\boldsymbol{x})$$

$$s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = c_1 \\ \quad\vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = c_k \end{cases} \qquad\qquad s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = c_1 \\ \quad\vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = c_k \end{cases}$$

Функция Лагранжа для этих задач

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(\boldsymbol{x})$$

Необходимые условия (локального) условного экстремума

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ g_j(\boldsymbol{x}) = c_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\underset{(n+k)\times(n+k)}{\mathsf{Hess}_{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ -- & + & -- \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Явный вид гессиана

$$\underset{(n+k)\times(n+k)}{\mathsf{Hess}_{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, ..., n+k)$ – главный минор матрицы $\mathsf{Hess}_{\mathcal{L}}$, образованный строками и столбцами с индексами $i, i+1, ..., n+k$.

Теорема 3 (Достаточные условия минимума)**.** *Пусть в точке* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *ранг матрицы* $(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})$ *максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условия экстремума.*
Тогда достаточным условием локального минимума является выполнение неравенств

$$(-1)^k \mathcal{M}_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-k. \tag{2}$$

Замечание. Условие (2) означает, что все миноры $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$ имеют знак $(-1)^k$.

Теорема 4 (Достаточные условия максимума)**.** *Пусть в точке* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *ранг матрицы* $(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})$ *максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условия экстремума.*
Тогда достаточным условием наличия локального максимума является выполнение неравенств

$$(-1)^n(-1)^{i-1} \mathcal{M}_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \qquad i = 1, \dots, n-k. \tag{3}$$

Замечание. Условие (3) означает чередование знаков в последовательности миноров $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$, начиная со знака $(-1)^n$.

Рассмотрим два частных случая:

- $n = 2, k = 1$ (две переменных при одном ограничении). Тогда $n-k = 1$ и
$$(loc)\min : \mathcal{M}_1 < 0 \qquad (loc)\max : \mathcal{M}_1 > 0$$
- $n = 3, k = 1$ (три переменных при одном ограничении). Тогда $n - k = 2$ и
$$(loc)\min : \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 < 0 \qquad (loc)\max : \mathcal{M}_1 < 0, \mathcal{M}_2 > 0$$

A.4 Функция Лагранжа для ограничений неравенства

Задача 1 Будем рассматривать задачу максимизации в виде

$$\max f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) \leq C_1 \\ \quad\vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \leq C_k \end{cases} \tag{4}$$

и задачу минимизации в виде

$$\begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t. &\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) \geq C_1 \\ \qquad \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \geq C_k \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

Важно!. *Согласованность знаков неравенства в ограничениях с максимизацией/минимизацией целевой функции.*

Определение. *Задача оптимизации (4) называется* ***задачей выпуклого программирования*** *или* ***выпуклой оптимизации****, если*

- f *вогнута*
- $g_1, \ldots, g_k$ *выпуклы*

Определение. *Задача оптимизации (5) называется* ***задачей выпуклого программирования*** *или* ***выпуклой оптимизации****, если*

- f *выпукла*
- $g_1, \ldots, g_k$ *вогнуты*

Обозначим

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (4), (5) в виде

$$\begin{aligned} \max f(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{c} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Функцией Лагранжа для задачи (4) и задачи (5) имеет вид

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (g_j(\boldsymbol{x}) - C_j) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^\top (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c})$$

Дополнительные переменные $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^\top$ называются **множителями Лагранжа** (Lagrange multipliers).

Определение. *Будем говорить, что для ограничений задачи (4) выполнено* ***условие Слейтера****, если существует* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) < \boldsymbol{c}$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (5) выполнено ***условие Слейтера****, если существует* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) > \boldsymbol{c}$$

Теорема 5. *Пусть задача (4) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.*

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ *является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе*

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \tag{6}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ *– глобальный максимум в задаче (4).*

Следствие. *Чтобы точка* $\boldsymbol{x}$ *была локальным минимумом в задаче (5) необходимо, чтобы для некоторых чисел* $\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_k$ *выполнялась система*

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \leq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \tag{7}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ *– глобальный минимум в задаче (5).*

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ – решение задачи (4) или задачи (5). Рассмотрим это решение как функцию от $C_1, \dots, C_k$:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(C_1, \dots, C_k) \qquad \hat{f} = f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k)$$

Теорема 6. *Оптимальное решение есть гладкая функция от* $C_1, \dots, C_k$ *и выполнены равенства*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} = \hat{\lambda}_j \qquad j = 1, \dots, k$$

Задача 2 Рассмотрим теперь задачу максимизации в следующей форме

$$\max f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_j(\boldsymbol{x}) \le C_j & j = 1, \dots, k \\ x_i \ge 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{8}$$

и задачу минимизации в форме

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_j(\boldsymbol{x}) \ge C_j & j = 1, \dots, k \\ x_i \ge 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{9}$$

(отдельно выделяем ограничения неотрицательности переменных)

Определение. *Задача оптимизации (8) называется **задачей выпуклого программирования** или **выпуклой оптимизации**, если*

- f *вогнута*
- $g_1, \dots, g_k$ *выпуклы*

*Задача оптимизации (9) называется **задачей выпуклого программирования** или **выпуклой оптимизации**, если*

- f *выпукла*
- $g_1, \dots, g_k$ *вогнуты*

Обозначим

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (8), (9) в виде

$$\max f(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \le \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \ge 0 \end{cases} \qquad s.t. \begin{cases} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \ge 0 \end{cases}$$

Определим для задач (8), (9) **функцию Лагранжа в форме Куна – Таккера**, включив в неё только нетривиальные ограничения

$$\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \mu_j (g_j(\boldsymbol{x}) - C_j) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^\top (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c})$$

с множителями Лагранжа $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix}^\top$

Определение. *Будем говорить, что для ограничений задачи (8) выполнено* ***условие Слейтера****, если существует $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) < \boldsymbol{c} \qquad\qquad \boldsymbol{x}_0 > 0$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (9) выполнено ***условие Слейтера****, если существует $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) > \boldsymbol{c} \qquad\qquad \boldsymbol{x}_0 > 0$$

Замечание. Условие Слейтера относится только к системе ограничений и не касается целевой функции

Теорема 7. *Пусть задача (8) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.*

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \ldots, k \\ x_i \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{x_i} \leq 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{\mu_j} \geq 0 & j = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{10}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ – глобальный максимум в задаче (8).

Теорема 8. *Пусть задача (9) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.*

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \ldots, k \\ x_i \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{x_i} \geq 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{\mu_j} \leq 0 & j = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{11}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ *– глобальный минимум в задаче* (9).

Рассмотрим оптимальное решение задачи (8) и задачи (9) и оптимальное значение целевой функции как функцию от $C_1, \dots, C_k$:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(C_1, \dots, C_k) \qquad\qquad \hat{f} = f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k).$$

Теорема 9. $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(C_1, \dots, C_k)$ *есть гладкая функция и выполнены равенства*

$$\mu_j = \frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} \qquad\qquad j = 1, \dots, k$$