

# Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

4 сентября 2023 г.

## Содержание

<b>1 Задачи оптимизации</b>	<b>1</b>
1.1 Безусловная оптимизация . . . . .	1
1.2 Выпуклость . . . . .	3

## 1 Задачи оптимизации

**Внимание:** Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума!

### 1.1 Безусловная оптимизация

**№1.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

**№2.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

**№3.** Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 5 + x^3 - y^3 + 3xy \\f(x, y) &= 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 \\f(x, y) &= x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y\end{aligned}$$

**№4.** Завод производит три вида товаров и продает их по ценам  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 4$  и  $P_3 = 6$ . Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

( $Q_1, Q_2, Q_3$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№5.** Завод производит три вида товаров и продает их по ценам  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 2$  и  $P_3 = 3$ . Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

( $Q_1, Q_2, Q_3$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№6.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$  и  $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№7.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$  и  $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№8.** Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y \\f(x, y) &= 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy \\f(x, y) &= 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy\end{aligned}$$

## 1.2 Выпуклость

**№1.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

$$f(x, y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x, y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

**№2.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на  $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^3 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

**№3.** При каких значениях параметра  $\beta$  функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

**№4.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на  $\mathbb{R}_+^2$  ( $a, b > 0$ )

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a \ln x - b \ln y$$

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$