Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

26 ноября 2024 г.

Содержание

1 Задачи оптимизации

Внимание: Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума! Задачи, отмеченные звёздочками, не является обязательными

1.1 Безусловная оптимизация

№1. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x,y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

№2. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y,z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x,y,z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x,y,z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$
$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$
$$f(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

№4. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ и $P_3 = 6$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№5. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 2$ и $P_3 = 3$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$ и $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№7. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№8. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 6\ln x + 8\ln y - 3x - 2y$$
$$f(x,y) = 4\ln x + 6\ln y + 2x - 3xy$$
$$f(x,y) = 5\ln x + 4\ln y - x - 4xy$$

1.2 Выпуклость

№1. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x,y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$
$$f(x,y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$
$$f(x,y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

№2. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x,y,z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x,y,z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. При каких значениях параметра β функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

№4. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на $\mathbb{R}^2_+$ $(a, b > 0)$

$$f(x,y) = a\ln x + b\ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a\ln x - b\ln y$$
$$f(x,y) = a\ln x + b\ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

1.3 Оптимизации с ограничениями равенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(2x+3y) & \min(2x+3y) \\ s.t.\ 2x^2+y^2=11 & s.t.\ 2x^2+y^2=11 \\ \max(5x-3y) & \min(5x-3y) \\ s.t.\ x^2+3y^2=28 & s.t.\ x^2+3y^2=28 \end{array}$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \min(x^2+2y^2) & \max(10-2x^2-18y^2) \\ s.t.\ 3x+2y=22 & s.t.\ 4x+6y=30 \\ \max(y^2-2x^2) & \min(2y^2-x^2) \\ s.t.\ 4x+3y=5 & s.t.\ 5x+4y=17 \end{array}$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(x^2y^2) & \min(x^2y^2) \\ s.t.\ 3x+2y=24 & s.t.\ 3x+2y=24 \end{array}$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(xy) & \min(xy) \\ s.t.\ x^2+2y^2=36 & s.t.\ x^2+2y^2=36 \end{array}$$

№5. Найти экстремум функции полезности $u = x^2y$ при бюджетном ограничении $2x+3y=90$.

№6. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_1 = 10$ и $P_2 = 20$, бюджет составляет \$1200. Производственная функция предприятия равна $f(x,y) = \sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№7. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_x = 5$ и $P_y = 2$, бюджет составляет \$200. Производственная функция предприятия равна $f(x,y) = 2\sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№8. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Ресурсы закупаются по ценам P_1 и P_2. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min(P_1 x + P_2 y)$$
$$f(x, y) = Q_0$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№9. Потребительская корзина состоит их трех товаров, цена на которые равны P_1, P_2, P_3. Доход равен I. Функция полезности потребителя равна

$$U(q_1, q_2, q_3) = \ln q_1 + \ln q_2 + \ln q_3.$$

Найдите оптимальную потребительскую корзину.

№10. В условиях предыдущей задачи рассмотрите функцию полезности

$$U(q_1, q_2, q_3) = a \ln q_1 + b \ln q_2 + c \ln q_3 \qquad a, b, c > 0$$

№11. Фирма для производства использует два фактора производства: капитал и труд. Производственная функция имеет вид $F = 3KL^2$. Фирма решает следующую задачу

$$\min(5K + 4L)$$
$$F(K, L) = 9600$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№12. Решите задачи оптимизации

$$\min(2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 10x - 50y - 10z)$$
$$s.t.\ x + 2y + 3z = 20$$
$$\max(10 - 9x - 3y + 3z - 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz)$$
$$s.t.\ 2x + 2y - 4z = 7$$

№13. Решите **численно**[1] задачи оптимизации

$$\max(x + y + z) \qquad s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \qquad s.t. \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{cases}$$

$$\min(x + y + z) \qquad s.t. \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \qquad s.t. \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

[1] MS Excel/Python

1.4 Оптимизация с ограничениями неравенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \min(2x^2+3y^2) & \max(2x+3y) \\ s.t\ x-y \geq 10 & s.t.\ 5x^2+y^2+4xy \leq 25 \end{array}$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(2x+4y-5x^2-y^2-4xy) & \max(4x+8y-6x^2-3y^2-8xy) \\ s.t.\ 2x+3y \leq 40 & s.t.\ 2x+2y \leq 9 \\ \max(4x+10y-2x^2-6y^2-6xy) & \max(8x+8y-3x^2-3y^2-6xy) \\ s.t.\ 3x+6y \leq 3 & s.t.\ 2x+4y \leq 13 \end{array}$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \min(5x^2+y^2+4xy-2x-4y) & \min(5x^2+y^2-4xy-2x-y) \\ s.t.\ 2x+y \geq 40 & s.t.\ 2x+3y \geq 10 \\ \min(5x^2+4y^2-8xy-3x-4y) & \min(2x^2+6y^2-6xy-4x-43) \\ s.t.\ 2x+4y \geq 31 & s.t.\ 3x+6y \geq 20 \end{array}$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\begin{array}{cc} \max(x-2y) & \max(1-(x+1)^2-(y-1)^2) \\ s.t.\ x^2+y^2 \leq 4 & s.t.\ x+y \leq 10 \\ \max(x-2y) & \max(1-(x+1)^2-(y-1)^2) \\ s.t. \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} x+y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

№5. Завод производит два вида товаров, цена на которые равны $P_1 = 10$ и $P_2 = 30$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 5Q_2^2 - 4Q_1Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 104

2. издержки не должны превышать 5850

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 20 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 30 - 5Q_2 + 3Q_1$ (цены эндогенны). Функция издержек равна $C(Q_1, Q_2) = 10Q_1 + 20Q_2$ (Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 3600

2. издержки не должны превышать 450

№7. Решите **численно**[2] задачи оптимизации

$$\max(x - y + z) \qquad \max(x - y + z)$$

$$s.t.\ 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \qquad s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

$$\min(x^2 + y^2 + z^2) \qquad \min(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \end{cases} \qquad s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases}$$

№8. Решите **численно**[3] задачи оптимизации

$$\max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \qquad \max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

$$s.t.\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 \qquad s.t. \begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) \qquad \min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3)$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \end{cases} \qquad s.t. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

№9 (*). Потребительская корзина состоит из двух товаров, её функция полезности равна $U(x, y) = x + a\ln(y)$ (параметр $a > 0$). Потребитель

[2] MS Excel/Python
[3] MS Excel/Python

решает оптимальную задачу

$$\max U(x,y)$$
$$s.t. \begin{cases} 2x+y \le 10 \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

При каких значениях параметрах a

1. потребительская корзина состоит только из второго товара
2. содержит оба товара

№10 (*). Экономический агент имеет два «товара»: «отдых» l (leisure, в часах) и потребление x. Пусть w – почасовая оплата и P – цена потребления. Агент располагает общим временем H, которое он может тратить на работу и на отдых, и также имеет фиксированный доход M (non-labor income). Функция полезности экономического агента $U(x,l)x+c\ln l$ $(c>0)$. Рассмотрим задачу оптимизации

$$\max U(x,l)$$
$$s.t. \begin{cases} Px+wl \le wH+M \\ 0 \le l \le H \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Найдите решение задачи оптимизации.

№11. Экономический агент потребляет два товара и его функция полезности равна $U(x,y)=y+c\ln x$ $(c>0)$. Цены на товары равны P_1 и P_2, доход равен I. Сформулируйте задачу об оптимальной потребительской корзине и найдите её решение.

1.5 Линейное программирование

№1. Рассмотрим задачи линейного программирования

$$\max(3x+5y) \quad s.t.\begin{cases} x+y\leqslant 5\\ 2x+y\leqslant 8\\ x,y\geqslant 0\end{cases} \qquad \max(7x+4y) \quad s.t.\begin{cases} 2x+5y\leqslant 30\\ 2x+y\leqslant 14\\ x,y\geqslant 0\end{cases}$$

$$\max(4x+5y) \quad s.t.\begin{cases} x+3y\leqslant 15\\ 4x+3y\leqslant 24\\ x,y\geqslant 0\end{cases} \qquad \max(8x+3y) \quad s.t.\begin{cases} 2x+5y\leqslant 35\\ 5x+3y\leqslant 40\\ x,y\geqslant 0\end{cases}$$

1. Решите графическии (прямую) задачу
2. Напишите и решите графически двойственную задачу.

№2. Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\max(5x+4y) \quad s.t.\begin{cases} x+3y\leqslant 18\\ x+2y\leqslant 13\\ 3x+2y\leqslant 27\\ x,y\geqslant 0\end{cases} \qquad \max(4x+3y) \quad s.t.\begin{cases} x+4y\leqslant 28\\ 2x+3y\leqslant 26\\ x+y\leqslant 11\\ 2x+y\leqslant 20\\ x,y\geqslant 0\end{cases}$$

$$\min(7x+6y) \quad s.t.\begin{cases} 3x+y\geqslant 9\\ 4x+3y\geqslant 22\\ x+3y\geqslant 10\\ x,y\geqslant 0\end{cases} \qquad \min(2x+5y) \quad s.t.\begin{cases} 3x+y\geqslant 10\\ 2x+y\geqslant 8\\ x+3y\geqslant 9\\ x+6y\geqslant 12\\ x,y\geqslant 0\end{cases}$$

№3. Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\max(5x - 4y) \qquad s.t. \begin{cases} 5x + 2y \leqslant 16 \\ 2x - 7y \leqslant 22 \\ -5x - y \leqslant 19 \\ -x + 3y \leqslant 7 \end{cases}$$

$$\max(-3x + 2y) \qquad s.t. \begin{cases} x + 2y \leqslant 9 \\ 3x - y \leqslant 13 \\ -2x - 7y \leqslant 22 \\ -5x + y \leqslant 18 \\ -x + 4y \leqslant 15 \end{cases}$$

№4. Фирма производит четыре товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	Количество ресурса
Ресурс 1	4	4	1	2	100
Ресурс 2	5	3	2	1	150
Цена	20	12	4	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

№5. Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Количество ресурса
Ресурс 1	2	1	5	100
Ресурс 2	4	2	3	120
Цена	3	8	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

№6. Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Количество ресурса
Ресурс 1	2	1	5	100
Ресурс 2	5	2	5	220
Цена	3	8	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

№7. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА на покупку промышленного золота для его реализации в пяти городах в объеме: Самара – 80 кг, Москва – 260 кг, Ростов-на-Дону – 100 кг, Санкт-Петербург – 140 кг, Нижний Новгород – 120 кг. Компания АЛРОСА располагает тремя месторождениями: «Мирное», «Удачный» и «Полевое», которые планируют за год выработать соответственно 200, 250 и 250 кг золота.

Постройте модель оптимизации фрахта специализированного транспорта, обеспечивающего полное удовлетворение заявок покупателя, при заданной системе тарифов (на 1 кг)

	Самара	Москва	Ростов-на-Дону	С.-Пб.	Н. Новгород
«Мирное»	7	9	15	4	18
«Удачный»	13	25	8	15	5
«Полевое»	5	11	6	20	12

Найдите **численно** оптимальное решение.

№8. Московский филиал «The Coca-Cola Company», выпускающей напитки приблизительного равного спроса (Sprite, Coca-Cola, Fanta), складируемых в разных местах, должен поставить свою продукцию в четыре крупных супермаркета: «Ашан», «Карусель», «Перекрёсток» и «Дикси». Каждая упаковка содержит 12 банок емкостью 0.33 литра. Тарифы на доставку, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице.

	Супермаркеты				
Склады	Ашан	Карусель	Перекрёсток	Дикси	Запасы, уп.
Coca-Cola	6	4	9	5	400
Sprite	5	7	8	6	300
Fanta	9	4	6	7	200
Заказы, уп.	150	250	150	350	

Постройте оптимизационную модель плана поставок напитков в супермаркеты. Найдите **численно** оптимальное решение.

№9. Коммерческое предприятие реализует три группы товаров A, B и C. Плановые нормативы затрат ресурсов (на 1 тыс рублей товарооборота), доход от продажи товаров (на 1 тыс. рублей товарооборота) приведены в таблице

	Нормы затрат			
Ресурсы	A	B	C	Объем ресурсов
Рабочее время продавцов	0.1	3	0.4	1100
Площадь торговых залов	0.05	0.2	0.02	120
Площадь складских помещений	3	0.02	2	8000
Доход	3	1	4	

Постройте модель оптимизации для получения максимального дохода. Найдите **численно** оптимальное решение.

№10. Три нефтеперерабатывающих завода с (ежедневной) производительностью 6, 5 и 8 млн.т бензина снабжают три бензохранилища, (ежедневно) потребность которых составляет 4, 8 и 7 млн. т бензина соответственно. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Стоимость транспортировки составляет 0.3 руб за 1000 т на один км длины бензопровода. В таблице приведены расстояния в км между заводами и хранилищами. Отметим, что первый нефтеперерабатывающий завод не связан бензопроводом с третьим бензохранилищем.

	Хранилища			
Завод	1	2	3	Объем
1	120	180	—	6
2	300	100	80	5
3	200	250	120	8
Вместимость хранилища	4	8	7	

Постройте оптимизационную модель транспортировки бензина. Найдите **численно** оптимальное решение.

2 Введение в теорию игр

2.1 Игры с нулевой суммой

№1. Двое играют на деньги, одновременно называя одно из чисел 1 или 2, и потом считая сумму S. Если S четная, то первый выигрывает у второго S долларов, если S нечетная, то второй выигрывает у первого S долларов.

1. Постройте платежную матрицу (матрицу полезностей) каждого из игроков. Будет ли эта игра игрой с нулевой суммой?

2. Будут ли в этой игре доминирующие стратегии?

3. Будут ли положения равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?

4. Предположим, что игроки следуют смешанным стратегиям $P^\top = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$ и $Q^\top = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$. Вычислите ожидаемый выигрыш каждого из игроков.

5. Найдите положения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

6. Найдите ожидаемый выигрыш (полезность) каждого из игроков в положении равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

№2. Решите предыдущую задачу при условии, что игроки называю одно из следующих чисел: 1, 2 или 3.

№3. Рассмотрим антагонистическую игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Найдите верхнюю и нижнюю цену игры.

2. Существует ли равновесие в чистых стратегиях? Ответ поясните.

3. Можно ли уменьшить размер платежной матрицы игры?

4. Найдите равновесие Нэша путем сведения к задаче линейного программирования

№4. Примените к платежным матрицам операцию доминирования. Проведите анализ игры до доминирования и после операции доминирования. Найдите равновесие Нэша и цену игры

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & -6 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

№5. Рассмотрим антагонистическую игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

   $$P^\top = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу и цену игры.

№6. Найти равновесие (по Нэшу) в смешанных стратегиях и цену игры в игре с нулевой суммой

$$\begin{pmatrix} -20 & 2 & 22 & -15 \\ 20 & -8 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

№7. Для антагонистической игры с матрицей

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & -5 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

найдите равновесие Нэша.

№8. Игра «вооружение помехи». Сторона A располагает тремя видами вооружений A_1, A_2, A_3, а сторона B – тремя видами помех B_1, B_2, B_3. Вероятность решения боевой задачи стороной A при различных видах вооружения и помех задана матрицей

	B_1	B_2	B_3
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	0.4	0.5	0.6
A_3	0.1	0.7	0.3

Сторона A стремиться решить боевую задачу, сторона B – воспрепятствовать этому.

- Найдите верхнюю и нижнюю цену игры. Будут ли в этой игре положения равновесия (по Нэшу) в чистых стратегиях?

Для удобства записи умножим матрицу на 10.

- Напишите пару двойственных задач для нахождения равновесия в смешанных стратегиях.

Пусть известны оптимальные решения двойственных задач линейного программирования: для игрока A

$$x_1 = \frac{1}{32} \qquad x_2 = \frac{3}{16} \qquad x_3 = 0$$

для игрока B

$$y_1 = \frac{3}{32} \qquad y_2 = \frac{4}{32} \qquad y_3 = 0$$

- Найдите оптимальные стратегии каждого из игроков и цену игры.

№9. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник, граф Балони, также имеет в подчинении три отряда и должен принять такое же решение. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником. Постройте матрицу игры и найдите положение равновесия по Нэшу в этой игре.

2.2 Игры с ненулевой суммой

№1. Рассмотрим платежную матрицу участников A и B некоторого парного турника, которые придерживаются в нем одной их двух стратегий

	B_1	B_2
A_1	1, 2	4, 3
A_2	3, 4	2, 3

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№2. Рассмотрим биматричную игру

	B_1	B_2
A_1	4, 2	2, 0
A_2	2, 2	3, 5

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№3. Рассмотрим биматричную игру

	B_1	B_2	B_3
A_1	4, 1	2, 2	1, 3
A_2	2, 2	3, 5	0, 4

- Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

  Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

- Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№4. Рассмотрим биматричную игру

	B_1	B_2
A_1	4, 2	2, 0
A_2	2, 2	3, 5
A_3	3, 1	2, 3

1. Рассмотрим смешанные стратегии игроков

$$P^\top = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad\qquad Q^\top = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

   Найдите ожидаемые выигрыши каждого из игроков

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях

№5 (Дуополия Курно). Пусть Q_i – объем выпуска, cQ_i – издержки фирмы $i = 1, 2$. Функция спроса имеет вид $(a > c > 0)$

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & Q \le a \\ 0, & Q > a \end{cases}$$

Доход фирмы определяется равенством $(P(Q_1 + Q_2) - c)Q_i$.

Каждая фирма имеет две возможности: «мелкосерийное производство» $Q^l = (a - c)/4$ и «крупносерийное производство» $Q^h = (a - c)/3$.

1. Напишите биматричную игру в нормальной форме.

2. Найдите положения равновесия (по Нэшу) в чистых и смешанных стратегиях.

№6 (Дуополия Бертрана). Пусть на рынке минеральной воды присутствуют две конкурирующие фирмы A и B. Постоянные издержки каждой из них равны 300 (вне зависимости от объема продаж). Каждая фирма должна выбрать либо «высокую» цену на свою продукцию $P_h = 1$, либо «низкую» цену $P_l = 0.5$ (цена за бутылку). При при «высокой» цене на рынке можно продать 1000 бутылок, при «низкой» цене – 2000 бутылок. Если компании выбирают одинаковую цену, то они делят объемы продаж поровну. Если компании выбирают разные цены, то рынок полностью захватывает компания с более низкой ценой (другая ничего не продает).

1. Постройте платежную матрицу (матрицу полезностей) каждого из игроков. Будет ли эта игра игрой с нулевой суммой?
2. Будут ли в этой игре доминирующие стратегии?
3. Будут ли положения равновесия по Нэшу в чистых стратегиях?
4. Найдите положения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.
5. Дайте интерпретацию равновесных (по Нэшу) стратегий.
6. Найдите ожидаемый выигрыш (полезность) каждого из игроков в положении равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

№7 (Дуополия Бертрана). Пусть на рынке минеральной воды присутствуют две конкурирующие фирмы A и B. Постоянные издержки каждой из них равны \$5000 (вне зависимости от объема продаж). Каждая фирма должна выбрать либо «высокую» цену на свою продукцию $P_h = \$2$, либо «низкую» цену $P_l = \$1$ (цена за бутылку). Тогда:

1. при «высокой» цене на рынке можно продать 5000 бутылок,
2. при «низкой» цене на рынке можно продать 10000 бутылок,
3. если компании выбирают одинаковую цену, то они делят объемы продаж поровну,
4. если компании выбирают разные цены, то рынок полностью захватывает компания с более низкой ценой (другая ничего не продает).

Постройте матрицу игры. Будет ли это игра с нулевой суммой? Найдите положения равновесия по Нэшу и цену игры.

№8. Рассмотрим биматричную игру

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2, 2	1, 1	1, 3	2, 1
A_2	2, 4	1, 3	1, 2	4, 2
A_3	3, 2	2, 3	2, 5	3, 1
A_4	4, 1	1, 4	3, 1	2, 2

Проведите процедуру последовательного удаления доминируемых стратегий. Будут ли в этой игре положения равновесия по Нэшу и по Парето в чистых стратегиях?

№9. У двух авиапассажиров, следовавших одним рейсом, пропали чемоданы. Авиакомпания готова возместить ущерб каждому пассажиру. Для того, чтобы определить размер компенсации, каждого пассажира просят сообщить, во сколько он оценивает содержимое своего чемодана. Каждый пассажир может назвать сумму не менее \$90 и не более \$100. Условия компенсации таковы: если оба сообщают одну и ту же сумму, то каждый получит эту сумму в качестве компенсации. Если же заявленный одним из пассажиров ущерб окажется меньше, чем заявленный ущерб другого пассажира, то каждый пассажир получит компенсацию, равную меньшей из заявленных сумм. При этом тот, кто заявил меньшую сумму, получит дополнительно \$2, тот, кто заявил большую сумму — дополнительно потеряет два доллара. Постройте матрицу игры и найдите положение равновесия по Нэшу в этой игре.

№10. Винни Пух и Пятачок решают, к кому они пойдут в гости — к Пуху (стратегия 1), Пятачку (стратегия 2) или к Кролику (стратегия 3). Друзья могут пойти как вместе так и по раздельности. С точки зрения Пуха, удовольствие от похода в гости оценивается так: 1, 2 и 4 соответственно. С точки зрения Пятачка удовольствия таковы: 3, 2 и 2 соответственно. Присутствие спутника (совместный поход в гости) добавляет одну единицу удовольствия каждому. Найти равновесие в этой игре.

№11. Две фирмы делят рынок. У каждой фирмы три стратегии — выставить низкую цену, среднюю цену и высокую цену $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_3 = 7$. Предположим, что спрос на рынке составляет 100 единиц продукции, при равенстве цен он делится поровну между фирмами, если одна фирма выставила высокую цену, а другая среднюю, то спрос составляет 30 и 70 единиц соответственно. При средней и низкой цене спрос также делится на 30 и 70, а при высокой и низкой он составляет 10 и 90 единиц соответственно. Найти положение равновесия по Нэшу.

№12. Две радиостанции делят рынок, выбирая из двух форматов вещания: новости и музыка. Целевая аудитория каждого из форматов равна 38% и 62% соответственно. Если радиостанции выбирают одинаковый формат вещания, то они делят целевую аудитория пополам. Если Если радиостанции выбирают разный формат вещания, то каждая “захватывает” всю целевую аудиторию своего формата вещания. Выигрыш радиостанции – её доля аудитории.

1. Запишите игру в нормальной форме. Будет ли эта игра игрой с нулевой суммой?

2. Найдите положения равновесия по Нэшу в чистых и смешанных стратегиях и выигрыши игроков в равновесии.

A Приложение

A.1 Симметричные матрицы

Пусть $\boldsymbol{A}$ – $(n \times n)$ симметричная матрица.

Теорема (Критерий Сильвестра)**.** *Пусть $\boldsymbol{A}$ – симметричная матрица и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ последовательность ее угловых миноров:*

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \Delta_n = \det \boldsymbol{A}$$

Тогда

1. $\boldsymbol{A} > 0 \iff \Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.
2. $\boldsymbol{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.
3. *если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена*

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{A}$ – симметричная 2×2 Тогда*

$$\boldsymbol{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0, \ \det \boldsymbol{A} \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0, \ \det \boldsymbol{A} \geq 0.$$

Для 3×3 матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(13)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(23)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Предложение. *Пусть $\boldsymbol{A}$ – симметричная 3×3. Тогда*

$$\boldsymbol{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{matrix} \geq 0, \ \begin{matrix} \mathcal{M}_{(12)} \\ \mathcal{M}_{(13)} \\ \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \ \det \boldsymbol{A} \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{matrix} \leq 0, \ \begin{matrix} \mathcal{M}_{(12)} \\ \mathcal{M}_{(13)} \\ \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \ \det \boldsymbol{A} \leq 0.$$

A.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция f определена на $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

Теорема. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\iff$ $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$.*

Если $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) > 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$, то функция строго выпукла на $\mathrm{dom}(f)$.

Следствие. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция f вогнута $\iff$ $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) \leq 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$.*

Если $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) < 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$, то функция строго вогнута на $\mathrm{dom}(f)$.

Замечание. Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра A.1 или используем Предложения A.1, A.1

A.3 Функция Лагранжа для ограничений равенства

Рассмотрим задачи оптимизации с ограничениями равенства

$$\begin{aligned} &\max f(\boldsymbol{x}) \\ s.t. &\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = c_k \end{cases} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t. &\begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) = c_k \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

Функция Лагранжа для этих задач

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (g_j(\boldsymbol{x}) - c_j)$$

Обозначим

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Тогда задачи (1) можно записать в виде

$$\begin{array}{rcr} \max f(\boldsymbol{x}) & \qquad & \min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} & & s.t.\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \end{array}$$

Функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^\top(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c})$$

Необходимые условия (локального) условного экстремума в задачах (1)

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\underset{(n+k)\times(n+k)}{\mathsf{Hess}_{\mathcal{L}}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ -- & + & -- \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Пусть $\mathcal{M}_i$ $(i = 1, ..., n+k)$ – главный минор матрицы $\mathsf{Hess}_{\mathcal{L}}$, образованный строками и столбцами с индексами $i, i+1, ..., n+k$.

Теорема (Достаточные условия минимума)**.** *Пусть точка $\hat{\boldsymbol{x}}$ удовлетворяет необходимым условия экстремума и в точке ранг матрицы $(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})$ максимален.*
Тогда достаточным условием локального минимума является выполнение неравенств

$$(-1)^k \mathcal{M}_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \qquad\qquad i = 1, \dots, n-k. \tag{3}$$

Замечание. Условие (3) означает, что все миноры $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n-k}$ имеют знак $(-1)^k$.

Теорема (Достаточные условия максимума)**.** *Пусть в точке* $\hat{\boldsymbol{x}}$ *ранг матрицы* $(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})$ *максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условия экстремума.*
Тогда достаточным условием наличия локального максимума является выполнение неравенств

$$(-1)^n(-1)^{i-1}\mathcal{M}_i(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \qquad i = 1, \ldots, n-k. \tag{4}$$

Замечание. Условие (4) означает чередование знаков в последовательности миноров $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{n-k}$, начиная со знака $(-1)^n$.

Рассмотрим два частных случая:

- $n = 2, k = 1$ (две переменных при одном ограничении). Тогда $n-k = 1$ и

$$(loc)\min : \mathcal{M}_1 < 0 \qquad (loc)\max : \mathcal{M}_1 > 0$$

- $n = 3, k = 1$ (три переменных при одном ограничении). Тогда $n - k = 2$ и

$$(loc)\min : \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 < 0 \qquad (loc)\max : \mathcal{M}_1 < 0, \mathcal{M}_2 > 0$$

A.4 Функция Лагранжа для ограничений неравенства

Задача 1 Будем рассматривать задачу максимизации в виде

$$\begin{gathered}\max f(\boldsymbol{x}) \\ s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) \leq C_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \leq C_k \end{cases}\end{gathered} \tag{5}$$

и задачу минимизации в виде

$$\begin{gathered}\min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t. \begin{cases} g_1(\boldsymbol{x}) \geq C_1 \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \geq C_k \end{cases}\end{gathered} \tag{6}$$

Важно!. *Согласованность знаков неравенства в ограничениях с максимизацией/минимизацией целевой функции.*

Определение. *Задача оптимизации (5) называется* ***задачей выпуклого программирования*** *или* ***выпуклой оптимизации****, если*

- f *вогнута*
- $g_1, \ldots, g_k$ *выпуклы*

Определение. *Задача оптимизации (6) называется* ***задачей выпуклого программирования*** *или* ***выпуклой оптимизации****, если*

- f *выпукла*
- $g_1, \ldots, g_k$ *вогнуты*

Обозначим

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (5), (6) в виде

$$\begin{aligned} &\max f(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{c} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\min f(\boldsymbol{x}) \\ s.t.\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

Функцией Лагранжа для задачи (5) и задачи (6) имеет вид

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (g_j(\boldsymbol{x}) - C_j) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\lambda}^\top (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c})$$

Дополнительные переменные $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)^\top$ называются **множителями Лагранжа** (Lagrange multipliers).

Определение. *Будем говорить, что для ограничений задачи (5) выполнено* ***условие Слейтера****, если существует* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) < \boldsymbol{c}$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (6) выполнено ***условие Слейтера****, если существует* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) > \boldsymbol{c}$$

Теорема. *Пусть задача (5) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.*

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \tag{7}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ – глобальный максимум в задаче (5).

Следствие. *Чтобы точка $\boldsymbol{x}$ была локальным минимумом в задаче (6) необходимо, чтобы для некоторых чисел $\hat{\lambda}_1, ..., \hat{\lambda}_k$ выполнялась система*

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \leq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \tag{8}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ – глобальный минимум в задаче (6).

Пусть $\hat{\boldsymbol{x}}$ – решение задачи (5) или задачи (6). Рассмотрим это решение как функцию от $C_1, \dots, C_k$:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(C_1, \dots, C_k) \qquad \hat{f} = f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k)$$

Теорема. *Оптимальное решение есть гладкая функция от $C_1, \dots, C_k$ и выполнены равенства*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} = \hat{\lambda}_j \qquad j = 1, \dots, k$$

Задача 2 Рассмотрим теперь задачу максимизации в следующей форме

$$\max f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_j(\boldsymbol{x}) \leq C_j & j = 1, \dots, k \\ x_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \tag{9}$$

и задачу минимизации в форме

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} g_j(\boldsymbol{x}) \geq C_j & j = 1, \ldots, k \\ x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{10}$$

(отдельно выделяем ограничения неотрицательности переменных)

Определение. *Задача оптимизации (9) называется* ***задачей выпуклого программирования*** *или* ***выпуклой оптимизации****, если*

- f *вогнута*
- $g_1, \ldots, g_k$ *выпуклы*

Задача оптимизации (10) называется ***задачей выпуклого программирования*** *или* ***выпуклой оптимизации****, если*

- f *выпукла*
- $g_1, \ldots, g_k$ *вогнуты*

Обозначим

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ g_k(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (9), (10) в виде

$$\max f(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \min f(\boldsymbol{x})$$
$$s.t. \begin{cases} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad s.t. \begin{cases} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \geq \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{x} \geq 0 \end{cases}$$

Определим для задач (9), (10) **функцию Лагранжа в форме Куна – Таккера**, включив в неё только нетривиальные ограничения

$$\mathcal{Z}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{k} \mu_j (g_j(\boldsymbol{x}) - C_j) = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\mu}^\top (\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{c})$$

с множителями Лагранжа $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_k \end{pmatrix}^\top$

Определение. *Будем говорить, что для ограничений задачи (9) выполнено* ***условие Слейтера****, если существует* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) < \boldsymbol{c} \qquad\qquad \boldsymbol{x}_0 > 0$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (10) выполнено ***условие Слейтера****, если существует* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) > \boldsymbol{c} \qquad\qquad \boldsymbol{x}_0 > 0$$

Замечание. Условие Слейтера относится только к системе ограничений и не касается целевой функции

Теорема. *Пусть задача (9) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.*

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ *является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе*

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \ldots, k \\ x_i \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{x_i} \leq 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{\mu_j} \geq 0 & j = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{11}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ *– глобальный максимум в задаче (9).*

Теорема. *Пусть задача (10) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.*

Тогда $\hat{\boldsymbol{x}}$ *является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе*

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \ldots, k \\ x_i \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{x_i} \geq 0 & i = 1, \ldots, n \\ \mu_j \geq 0,\ \mathcal{Z}'_{\mu_j} \leq 0 & j = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{12}$$

Кроме того, $\hat{\boldsymbol{x}}$ *– глобальный минимум в задаче (10).*

Рассмотрим оптимальное решение задачи (9) и задачи (10) и оптимальное значение целевой функции как функцию от $C_1, \ldots, C_k$:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(C_1, \ldots, C_k) \qquad\qquad \hat{f} = f(\hat{\boldsymbol{x}}) = \hat{f}(C_1, \ldots, C_k).$$

Теорема. $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}(C_1, \ldots, C_k)$ *есть гладкая функция и выполнены равенства*

$$\mu_j = \frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} \qquad\qquad j = 1, \ldots, k$$