

Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

27 сентября 2023 г.

Содержание

1	Задачи оптимизации	1
1.1	Безусловная оптимизация	1
1.2	Выпуклость	3
1.3	Оптимизации с ограничениями равенства	4
A	Приложение	6
A.1	Симметричные матрицы	6
A.2	Выпуклые функции	7
A.3	Функция Лагранжа для ограничений равенства	7

1 Задачи оптимизации

Внимание: Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума!

1.1 Безусловная оптимизация

№1. Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy \\f(x, y) &= 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy \\f(x, y) &= 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy\end{aligned}$$

№2. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

№4. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ и $P_3 = 6$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№5. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 2$ и $P_3 = 3$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$ и $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№7. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№8. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y$$

$$f(x, y) = 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy$$

$$f(x, y) = 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy$$

1.2 Выпуклость

№1. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

$$f(x, y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x, y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

№2. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на \mathbb{R}^3

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^3 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. При каких значениях параметра β функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

№4. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на \mathbb{R}_+^2 ($a, b > 0$)

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a \ln x - b \ln y$$

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

1.3 Оптимизации с ограничениями равенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(2x + 3y) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(5x - 3y) \\ s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2x + 3y) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x - 3y) \\ s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(x^2 + 2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(y^2 - 2x^2) \\ s.t. \ 4x + 3y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(10 - 2x^2 - 18y^2) \\ s.t. \ 4x + 6y = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2y^2 - x^2) \\ s.t. \ 5x + 4y = 17 \end{aligned}$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(x^2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(x^2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(xy) \\ s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(xy) \\ s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

№5. Найти экстремум функции полезности $u = x^2y$ при бюджетном ограничении $2x + 3y = 90$.

№6. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_1 = 10$ и $P_2 = 20$, бюджет составляет \$1200. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№7. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_x = 5$ и $P_y = 2$, бюджет составляет \$200. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№8. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Ресурсы закупаются по ценам P_1 и P_2 . Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \min(P_1x + P_2y) \\ f(x, y) = Q_0 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№9. Потребительская корзина состоит из трех товаров, цена на которые равны P_1, P_2, P_3 . Доход равен I . Функция полезности потребителя равна

$$U(q_1, q_2, q_3) = \ln q_1 + \ln q_2 + \ln q_3.$$

Найдите оптимальную потребительскую корзину.

№10. В условиях предыдущей задачи рассмотрите функцию полезности

$$U(q_1, q_2, q_3) = a \ln q_1 + b \ln q_2 + c \ln q_3 \quad a, b, c > 0$$

№11. Фирма для производства использует два фактора производства: капитал и труд. Производственная функция имеет вид $F = 3KL^2$. Фирма решает следующую задачу

$$\begin{aligned} \min(5K + 4L) \\ F(K, L) = 9600 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№12. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 10x - 50y - 10z) \\ s.t. \ x + 2y + 3z = 20 \\ \max(10 - 9x - 3y + 3z - 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz) \\ s.t. \ 2x + 2y - 4z = 7 \end{aligned}$$

№13. Решите **численно**¹ задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{cases} \\ \min(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \end{array}$$

¹MS Excel/Python

А Приложение

А.1 Симметричные матрицы

Пусть \mathbf{A} – $(n \times n)$ симметричная матрица.

Теорема 1 (Критерий Сильвестра). Пусть \mathbf{A} – симметричная матрица и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ последовательность ее угловых миноров:

$$\Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \det \mathbf{A}$$

Тогда

1. $\mathbf{A} > 0 \iff \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
2. $\mathbf{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
3. если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена

Предложение 1. Пусть \mathbf{A} – симметричная 2×2 Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \geq 0.$$

Для 3×3 матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(13)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(23)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Предложение 2. Пусть \mathbf{A} – симметричная 3×3 . Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \leq 0.$$

А.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция f определена на $\text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

Теорема 2. Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$.

Если $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$, то функция строго выпукла на $\text{dom}(f)$.

Следствие. Дважды непрерывно дифференцируемая функция f вогнута $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$.

Если $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) < 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$, то функция строго вогнута на $\text{dom}(f)$.

Замечание. Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра [1](#) или используем Предложения [1](#), [2](#)

А.3 Функция Лагранжа для ограничений равенства

Рассмотрим задачи оптимизации с ограничениями равенства

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} \end{array}$$

Функция Лагранжа для этих задач

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

Необходимые условия (локального) условного экстремума

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ g_j(\mathbf{x}) = c_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ \hline \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix}_{(n+k) \times (n+k)}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Явный вид гессиана

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Пусть \mathcal{M}_i ($i = 1, \dots, n+k$) – главный минор матрицы $\text{Hess}_{\mathcal{L}}$, образованный строками и столбцами с индексами $i, i+1, \dots, n+k$.

Теорема 3 (Достаточные условия минимума). Пусть в точке $\hat{\mathbf{x}}$ ранг матрицы $(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})$ максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием локального минимума является выполнение неравенств

$$(-1)^k \mathcal{M}_1(\hat{\mathbf{x}}), \dots, (-1)^k \mathcal{M}_{n-k}(\hat{\mathbf{x}}) > 0. \quad (2)$$

Замечание. Условие (2) означает, что все миноры $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$ имеют знак $(-1)^k$.

Теорема 4 (Достаточные условия максимума). Пусть в точке $\hat{\mathbf{x}}$ ранг матрицы $(\frac{\partial g_j}{\partial x_i})$ максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием наличия максимума является выполнение неравенств

$$(-1)^n (-1)^{i-1} \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3)$$

Замечание. Условие (3) означает чередование знаков в последовательности миноров $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$, начиная со знака $(-1)^n$.