Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

10 сентября 2023 г.

Содержание

1 Задачи оптимизации

Внимание: Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума!

1.1 Безусловная оптимизация

№1. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x,y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

№2. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y,z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x,y,z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x,y,z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$
$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$
$$f(x,y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

№4. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ и $P_3 = 6$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№5. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 2$ и $P_3 = 3$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q1Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$ и $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№7. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№8. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x,y) = 6\ln x + 8\ln y - 3x - 2y$$
$$f(x,y) = 4\ln x + 6\ln y + 2x - 3xy$$
$$f(x,y) = 5\ln x + 4\ln y - x - 4xy$$

1.2 Выпуклость

№1. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$
$$f(x,y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$
$$f(x,y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$
$$f(x,y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

№2. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$
$$f(x,y,z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^3 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$
$$f(x,y,z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. При каких значениях параметра β функция

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

№4. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на $\mathbb{R}^2_+$ $(a,b>0)$

$$f(x,y) = a\ln x + b\ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$
$$f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a\ln x - b\ln y$$
$$f(x,y) = a\ln x + b\ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

A Приложение

A.1 Симметричные матрицы

Пусть $\boldsymbol{A}$ – $(n\times n)$ симметричная матрица.

Теорема (Критерий Сильвестра). *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– симметричная матрица и* $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ *последовательность ее угловых миноров:*

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad \Delta_n = \det \boldsymbol{A}$$

Тогда

1. $\boldsymbol{A} > 0 \iff \Delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$
2. $\boldsymbol{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$
3. *если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена*

Предложение. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– симметричная* 2×2 *Тогда*

$$\boldsymbol{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0,\ \det \boldsymbol{A} \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0,\ \det \boldsymbol{A} \geq 0.$$

Для 3×3 матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(13)} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(23)} = \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Предложение. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *– симметричная* 3×3*. Тогда*

$$\boldsymbol{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{matrix} \geq 0,\ \begin{matrix} \mathcal{M}_{(12)} \\ \mathcal{M}_{(13)} \\ \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0,\ \det \boldsymbol{A} \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \end{matrix} \leq 0,\ \begin{matrix} \mathcal{M}_{(12)} \\ \mathcal{M}_{(13)} \\ \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0,\ \det \boldsymbol{A} \leq 0.$$

A.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция f определена на $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

Теорема. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция* f *выпукла* $\iff$ $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$.

Если $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) > 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$, *то функция строго выпукла на* $\mathrm{dom}(f)$.

Следствие. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция* f *вогнута* $\iff$ $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) \leq 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$.

Если $\mathsf{Hess}_f(\boldsymbol{x}) < 0$ *для всех* $\boldsymbol{x} \in \mathrm{dom}(f)$, *то функция строго вогнута на* $\mathrm{dom}(f)$.

Замечание. Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра A.1 или используем Предложения A.1, A.1