

Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

2 ноября 2023 г.

Содержание

1	Задачи оптимизации	1
1.1	Безусловная оптимизация	2
1.2	Выпуклость	3
1.3	Оптимизации с ограничениями равенства	4
1.4	Оптимизация с ограничениями неравенства	6
1.5	Линейное программирование	9
A	Приложение	13
A.1	Симметричные матрицы	13
A.2	Выпуклые функции	14
A.3	Функция Лагранжа для ограничений равенства	14
A.4	Функция Лагранжа для ограничений неравенства	16

1 Задачи оптимизации

Внимание: Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума! Задачи, отмеченные звёздочками, не являются обязательными

1.1 Безусловная оптимизация

№1. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

№2. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

№4. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ и $P_3 = 6$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№5. Завод производит три вида товаров и продает их по ценам $P_1 = 2$, $P_2 = 2$ и $P_3 = 3$. Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

(Q_1, Q_2, Q_3 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$ и $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№7. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

№8. Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y$$

$$f(x, y) = 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy$$

$$f(x, y) = 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy$$

1.2 Выпуклость

№1. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на \mathbb{R}^2

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

$$f(x, y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x, y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

№2. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на \mathbb{R}^3

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

№3. При каких значениях параметра β функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

№4. Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на \mathbb{R}_+^2 ($a, b > 0$)

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a \ln x - b \ln y$$

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

1.3 Оптимизации с ограничениями равенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(2x + 3y) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(5x - 3y) \\ s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2x + 3y) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x - 3y) \\ s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(x^2 + 2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(y^2 - 2x^2) \\ s.t. \ 4x + 3y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(10 - 2x^2 - 18y^2) \\ s.t. \ 4x + 6y = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2y^2 - x^2) \\ s.t. \ 5x + 4y = 17 \end{aligned}$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(x^2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(x^2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(xy) \\ s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(xy) \\ s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

№5. Найти экстремум функции полезности $u = x^2y$ при бюджетном ограничении $2x + 3y = 90$.

№6. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_1 = 10$ и $P_2 = 20$, бюджет составляет \$1200. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№7. Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам $P_x = 5$ и $P_y = 2$, бюджет составляет \$200. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$. Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

№8. Производственная функция предприятия равна $f(x, y) = \sqrt{xy}$. Ресурсы закупаются по ценам P_1 и P_2 . Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \min(P_1x + P_2y) \\ f(x, y) = Q_0 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№9. Потребительская корзина состоит из трех товаров, цена на которые равны P_1, P_2, P_3 . Доход равен I . Функция полезности потребителя равна

$$U(q_1, q_2, q_3) = \ln q_1 + \ln q_2 + \ln q_3.$$

Найдите оптимальную потребительскую корзину.

№10. В условиях предыдущей задачи рассмотрите функцию полезности

$$U(q_1, q_2, q_3) = a \ln q_1 + b \ln q_2 + c \ln q_3 \quad a, b, c > 0$$

№11. Фирма для производства использует два фактора производства: капитал и труд. Производственная функция имеет вид $F = 3KL^2$. Фирма решает следующую задачу

$$\begin{aligned} \min(5K + 4L) \\ F(K, L) = 9600 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

№12. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 10x - 50y - 10z) \\ s.t. \ x + 2y + 3z = 20 \\ \max(10 - 9x - 3y + 3z - 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz) \\ s.t. \ 2x + 2y - 4z = 7 \end{aligned}$$

№13. Решите **численно**¹ задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{cases} \\ \min(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \end{array}$$

¹MS Excel/Python

1.4 Оптимизация с ограничениями неравенства

№1. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 3y^2) \\ s.t. \ x - y \geq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(2x + 3y) \\ s.t. \ 5x^2 + y^2 + 4xy \leq 25 \end{aligned}$$

№2. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(2x + 4y - 5x^2 - y^2 - 4xy) \\ s.t. \ 2x + 3y \leq 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(4x + 8y - 6x^2 - 3y^2 - 8xy) \\ s.t. \ 2x + 2y \leq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(4x + 10y - 2x^2 - 6y^2 - 6xy) \\ s.t. \ 3x + 6y \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(8x + 8y - 3x^2 - 3y^2 - 6xy) \\ s.t. \ 2x + 4y \leq 13 \end{aligned}$$

№3. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(5x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 4y) \\ s.t. \ 2x + y \geq 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x^2 + y^2 - 4xy - 2x - y) \\ s.t. \ 2x + 3y \geq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x^2 + 4y^2 - 8xy - 3x - 4y) \\ s.t. \ 2x + 4y \geq 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 6y^2 - 6xy - 4x - 43) \\ s.t. \ 3x + 6y \geq 20 \end{aligned}$$

№4. Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(x - 2y) \\ s.t. \ x^2 + y^2 \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(1 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2) \\ s.t. \ x + y \leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(x - 2y) \\ s.t. \ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(1 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2) \\ s.t. \ \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

№5. Завод производит два вида товаров, цена на которые равны $P_1 = 10$ и $P_2 = 30$. Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 5Q_2^2 - 4Q_1Q_2$$

(Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 104

2. издержки не должны превышать 5850

№6. Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид $P_1 = 20 - 2Q_1 + 3Q_2$ и $P_2 = 30 - 5Q_2 + 3Q_1$ (цены эндогенны). Функция издержек равна $C(Q_1, Q_2) = 10Q_1 + 20Q_2$ (Q_1, Q_2 – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 3600

2. издержки не должны превышать 450

№7. Решите **численно**² задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x - y + z) & \max(x - y + z) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 & s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \\ \min(x^2 + y^2 + z^2) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \end{cases} & s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

№8. Решите **численно**³ задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) & \max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ s.t. \ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 & s.t. \begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \\ \min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) & \min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) \\ s.t. \begin{cases} x_1x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \end{cases} & s.t. \begin{cases} x_1x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

№9 (*). Потребительская корзина состоит из двух товаров, её функция полезности равна $U(x, y) = x + a \ln(y)$ (параметр $a > 0$). Потребитель

²MS Excel/Python

³MS Excel/Python

решает оптимальную задачу

$$\begin{aligned} & \max U(x, y) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

При каких значениях параметра a

1. потребительская корзина состоит только из второго товара
2. содержит оба товара

№10 (*). Экономический агент имеет два «товара»: «отдых» l (leisure, в часах) и потребление x . Пусть w – почасовая оплата и P – цена потребления. Агент располагает общим временем H , которое он может тратить на работу и на отдых, и также имеет фиксированный доход M (non-labor income). Функция полезности экономического агента $U(x, l) = x + c \ln l$ ($c > 0$). Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} & \max U(x, l) \\ \text{s.t. } & \begin{cases} Px + wl \leq wH + M \\ 0 \leq l \leq H \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Найдите решение задачи оптимизации.

№11. Экономический агент потребляет два товара и его функция полезности равна $U(x, y) = y + c \ln x$ ($c > 0$). Цены на товары равны P_1 и P_2 , доход равен I . Сформулируйте задачу об оптимальной потребительской корзине и найдите её решение.

1.5 Линейное программирование

№1. Рассмотрим задачи линейного программирования

$$\begin{array}{ll} \max(3x + 5y) & \max(7x + 4y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 30 \\ 2x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \\ \max(4x + 5y) & \max(8x + 3y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 3y \leq 15 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 35 \\ 5x + 3y \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1. Решите графически (прямую) задачу
2. Напишите и решите графически двойственную задачу.

№2. Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(5x + 4y) & \max(4x + 3y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 3y \leq 18 \\ x + 2y \leq 13 \\ 3x + 2y \leq 27 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 4y \leq 28 \\ 2x + 3y \leq 26 \\ x + y \leq 11 \\ 2x + y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \\ \min(7x + 6y) & \min(2x + 5y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} 3x + y \geq 9 \\ 4x + 3y \geq 22 \\ x + 3y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} 3x + y \geq 10 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 3y \geq 9 \\ x + 6y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

№3. Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\begin{array}{l} \max(5x - 4y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 16 \\ x + 2y \leq 22 \\ -5x - y \leq 19 \\ -2x + 6y \leq 14 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \max(-3x + 2y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 2y \leq 9 \\ 3x - y \leq 13 \\ -2x - 7y \leq 22 \\ -5x + y \leq 18 \\ -x + 4y \leq 15 \end{array} \right. \end{array}$$

№4. Фирма производит четыре товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	Количество ресурса
Ресурс 1	4	4	1	2	100
Ресурс 2	5	3	2	1	150
Цена	20	12	4	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

№5. Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Количество ресурса
Ресурс 1	2	1	5	100
Ресурс 2	4	2	3	120
Цена	3	8	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

№6. Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Количество ресурса
Ресурс 1	2	1	5	100
Ресурс 2	5	2	5	220
Цена	3	8	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

№7. Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА на покупку промышленного золота для его реализации в пяти городах в объеме: Самара – 80 кг, Москва – 260 кг, Ростов-на-Дону – 100 кг, Санкт-Петербург – 140 кг, Нижний Новгород – 120 кг. Компания АЛРОСА располагает тремя месторождениями: «Мирное», «Удачный» и «Полевое», которые планируют за год выработать соответственно 200, 250 и 250 кг золота.

Постройте модель оптимизации фрахта специализированного транспорта, обеспечивающего полное удовлетворение заявок покупателя, при заданной системе тарифов (на 1 кг)

	Самара	Москва	Ростов-на-Дону	С.-Пб.	Н. Новгород
«Мирное»	7	9	15	4	18
«Удачный»	13	25	8	15	5
«Полевое»	5	11	6	20	12

Найдите **численно** оптимальное решение.

№8. Московский филиал «The Coca-Cola Company», выпускающей напитки приблизительного равного спроса (Sprite, Coca-Cola, Fanta), складуемых в разных местах, должен поставить свою продукцию в четыре крупных супермаркета: «Ашан», «Карусель», «Седьмой Континент» и «Арбатский». Каждая упаковка содержит 12 банок емкостью 0.33 литра. Тарифы на доставку, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице.

	Супермаркеты				
Склады	Ашан	Карусель	Перекрёсток	Дикси	Запасы, уп.
Coca-Cola	6	4	9	5	400
Sprite	5	7	8	6	300
Fanta	9	4	6	7	200
Заказы, уп.	150	250	150	350	

Постройте оптимизационную модель плана поставок напитков в супермаркеты. Найдите **численно** оптимальное решение.

№9. Коммерческое предприятие реализует три группы товаров А, В и С. Плановые нормативы затрат ресурсов (на 1 тыс рублей товарооборота), доход от продажи товаров (на 1 тыс. рублей товарооборота) приведены в таблице

Ресурсы	Нормы затрат			Объем ресурсов
	А	В	С	
Рабочее время продавцов	0.1	3	0.4	1100
Площадь торговых залов	0.05	0.2	0.02	120
Площадь складских помещений	3	0.02	2	8000
Доход	3	1	4	

Постройте модель оптимизации для получения максимального дохода. Найдите **численно** оптимальное решение.

№10. Три нефтеперерабатывающих завода с (ежедневной) производительностью 6, 5 и 8 млн.т бензина снабжают три бензохранилища, (ежедневно) потребность которых составляет 4, 8 и 7 млн. т бензина соответственно. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Стоимость транспортировки составляет 0.3 руб за 1000 т на один км длины бензопровода. В таблице приведены расстояния в км между заводами и хранилищами. Отметим, что первый нефтеперерабатывающий завод не связан бензопроводом с третьим бензохранилищем.

	Хранилища			Объем
	1	2	3	
	120	180	—	6
2	300	100	80	5
3	200	250	120	8
Вместимость хранилища	4	8	7	

Постройте оптимизационную модель транспортировки бензина. Найдите **численно** оптимальное решение.

А Приложение

А.1 Симметричные матрицы

Пусть \mathbf{A} – $(n \times n)$ симметричная матрица.

Теорема 1 (Критерий Сильвестра). Пусть \mathbf{A} – симметричная матрица и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ последовательность ее угловых миноров:

$$\Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \det \mathbf{A}$$

Тогда

1. $\mathbf{A} > 0 \iff \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
2. $\mathbf{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
3. если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена

Предложение 1. Пусть \mathbf{A} – симметричная 2×2 Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \geq 0.$$

Для 3×3 матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(13)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(23)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Предложение 2. Пусть \mathbf{A} – симметричная 3×3 . Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \leq 0.$$

А.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция f определена на $\text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

Теорема 2. Дважды непрерывно дифференцируемая функция f выпукла $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \geq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$.

Если $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) > 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$, то функция строго выпукла на $\text{dom}(f)$.

Следствие. Дважды непрерывно дифференцируемая функция f вогнута $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$.

Если $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) < 0$ для всех $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$, то функция строго вогнута на $\text{dom}(f)$.

Замечание. Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра [1](#) или используем Предложения [1](#), [2](#)

А.3 Функция Лагранжа для ограничений равенства

Рассмотрим задачи оптимизации с ограничениями равенства

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} \end{array}$$

Функция Лагранжа для этих задач

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

Необходимые условия (локального) условного экстремума

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ g_j(\mathbf{x}) = c_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & \mid & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ \text{---} & + & \text{---} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & \mid & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix}_{(n+k) \times (n+k)}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Явный вид гессиана

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Пусть \mathcal{M}_i ($i = 1, \dots, n+k$) – главный минор матрицы $\text{Hess}_{\mathcal{L}}$, образованный строками и столбцами с индексами $i, i+1, \dots, n+k$.

Теорема 3 (Достаточные условия минимума). Пусть в точке $\hat{\mathbf{x}}$ ранг матрицы $(\frac{\partial g_i}{\partial x_i})$ максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием локального минимума является выполнение неравенств

$$(-1)^k \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (2)$$

Замечание. Условие (2) означает, что все миноры $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$ имеют знак $(-1)^k$.

Теорема 4 (Достаточные условия максимума). Пусть в точке $\hat{\mathbf{x}}$ ранг матрицы $(\frac{\partial g_i}{\partial x_i})$ максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием наличия локального максимума является выполнение неравенств

$$(-1)^n (-1)^{i-1} \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3)$$

Замечание. Условие (3) означает чередование знаков в последовательности миноров $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$, начиная со знака $(-1)^n$.

Рассмотрим два частных случая:

- $n = 2, k = 1$ (две переменных при одном ограничении). Тогда $n - k = 1$ и

$$(loc) \min : \mathcal{M}_1 < 0 \qquad (loc) \max : \mathcal{M}_1 > 0$$

- $n = 3, k = 1$ (три переменных при одном ограничении). Тогда $n - k = 2$ и

$$(loc) \min : \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 < 0 \qquad (loc) \max : \mathcal{M}_1 < 0, \mathcal{M}_2 > 0$$

А.4 Функция Лагранжа для ограничений неравенства

Задача 1 Будем рассматривать задачу максимизации в виде

$$\begin{aligned} & \text{max} f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \leq C_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \leq C_k \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

и задачу минимизации в виде

$$\begin{aligned} & \text{min} f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \geq C_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \geq C_k \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

Важно!. *Согласованность знаков неравенства в ограничениях с максимизацией/минимизацией целевой функции.*

Определение. *Задача оптимизации (4) называется задачей выпуклого программирования или выпуклой оптимизации, если*

- f вогнута
- g_1, \dots, g_k выпуклы

Определение. Задача оптимизации (5) называется *задачей выпуклого программирования* или *выпуклой оптимизации*, если

- f выпукла
- g_1, \dots, g_k вогнуты

Обозначим

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (4), (5) в виде

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{c} & \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c} \end{array}$$

Функцией Лагранжа для задачи (4) и задачи (5) имеет вид

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - C_j) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c})$$

Дополнительные переменные $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^\top$ называются **множителями Лагранжа** (Lagrange multipliers).

Определение. Будем говорить, что для ограничений задачи (4) выполнено *условие Слейтера*, если существует $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) < \mathbf{c}$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (5) выполнено *условие Слейтера*, если существует $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) > \mathbf{c}$$

Теорема 5. Пусть задача (4) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.

Тогда $\hat{\mathbf{x}}$ является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, $\hat{\mathbf{x}}$ – глобальный максимум в задаче (4).

Следствие. Чтобы точка \mathbf{x} была локальным минимумом в задаче (5) необходимо, чтобы для некоторых чисел $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k$ выполнялась система

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \leq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (7)$$

Кроме того, $\hat{\mathbf{x}}$ – глобальный минимум в задаче (5).

Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ – решение задачи (4) или задачи (5). Рассмотрим это решение как функцию от C_1, \dots, C_k :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(C_1, \dots, C_k) \quad \hat{f} = f(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k)$$

Теорема 6. Оптимальное решение есть гладкая функция от C_1, \dots, C_k и выполнены равенства

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} = \hat{\lambda}_j \quad j = 1, \dots, k$$

Задача 2 Рассмотрим теперь задачу максимизации в следующей форме

$$\begin{aligned} & \max f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq C_j & j = 1, \dots, k \\ \mathbf{x}_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

и задачу минимизации в форме

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \geq C_j & j = 1, \dots, k \\ \mathbf{x}_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

(отдельно выделяем ограничения неотрицательности переменных)

Определение. Задача оптимизации (8) называется *задачей выпуклого программирования* или *выпуклой оптимизации*, если

- f вогнута
- g_1, \dots, g_k выпуклы

Задача оптимизации (9) называется *задачей выпуклого программирования* или *выпуклой оптимизации*, если

- f выпукла
- g_1, \dots, g_k вогнуты

Обозначим

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (8), (9) в виде

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Определим для задач (8), (9) **функцию Лагранжа в форме Куна – Таккера**, включив в неё только нетривиальные ограничения

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \mu_j (g_j(\mathbf{x}) - C_j) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c})$$

с множителями Лагранжа $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \dots \ \mu_k)^\top$

Определение. Будем говорить, что для ограничений задачи (8) выполнено **условие Слейтера**, если существует $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) < \mathbf{c} \quad \mathbf{x}_0 > 0$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (9) выполнено **условие Слейтера**, если существует $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) > \mathbf{c} \quad \mathbf{x}_0 > 0$$

Замечание. Условие Слейтера относится только к системе ограничений и не касается целевой функции

Теорема 7. Пусть задача (8) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.

Тогда $\hat{\mathbf{x}}$ является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ x_i \geq 0, \mathcal{Z}'_{x_i} \leq 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \geq 0, \mathcal{Z}'_{\mu_j} \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (10)$$

Кроме того, $\hat{\mathbf{x}}$ – глобальный максимум в задаче (8).

Теорема 8. Пусть задача (9) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.

Тогда $\hat{\mathbf{x}}$ является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ x_i \geq 0, \mathcal{Z}'_{x_i} \geq 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \geq 0, \mathcal{Z}'_{\mu_j} \leq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (11)$$

Кроме того, $\hat{\mathbf{x}}$ – глобальный минимум в задаче (9).

Рассмотрим оптимальное решение задачи (8) и задачи (9) и оптимальное значение целевой функции как функцию от C_1, \dots, C_k :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(C_1, \dots, C_k) \quad \hat{f} = f(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k).$$

Теорема 9. $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(C_1, \dots, C_k)$ есть гладкая функция и выполнены равенства

$$\mu_j = \frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} \quad j = 1, \dots, k$$