

# Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

28 сентября 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задачи оптимизации</b>	<b>1</b>
1.1	Безусловная оптимизация . . . . .	1
1.2	Выпуклость . . . . .	3
1.3	Оптимизации с ограничениями равенства . . . . .	4
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>6</b>
A.1	Симметричные матрицы . . . . .	6
A.2	Выпуклые функции . . . . .	7
A.3	Функция Лагранжа для ограничений равенства . . . . .	7

## 1 Задачи оптимизации

**Внимание:** Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума!

### 1.1 Безусловная оптимизация

**№1.** Найдите локальные экстремумы функций

$$\begin{aligned}f(x, y) &= 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy \\f(x, y) &= 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy \\f(x, y) &= 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy\end{aligned}$$

**№2.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

**№3.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

**№4.** Завод производит три вида товаров и продает их по ценам  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 4$  и  $P_3 = 6$ . Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

( $Q_1, Q_2, Q_3$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№5.** Завод производит три вида товаров и продает их по ценам  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 2$  и  $P_3 = 3$ . Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

( $Q_1, Q_2, Q_3$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№6.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$  и  $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№7.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$  и  $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№8.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y$$

$$f(x, y) = 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy$$

$$f(x, y) = 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy$$

## 1.2 Выпуклость

**№1.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

$$f(x, y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x, y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

**№2.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на  $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

**№3.** При каких значениях параметра  $\beta$  функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

**№4.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на  $\mathbb{R}_+^2$  ( $a, b > 0$ )

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a \ln x - b \ln y$$

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

### 1.3 Оптимизации с ограничениями равенства

**№1.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} & \max(2x + 3y) \\ & s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max(5x - 3y) \\ & s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min(2x + 3y) \\ & s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min(5x - 3y) \\ & s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

**№2.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} & \min(x^2 + 2y^2) \\ & s.t. \ 3x + 2y = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max(y^2 - 2x^2) \\ & s.t. \ 4x + 3y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max(10 - 2x^2 - 18y^2) \\ & s.t. \ 4x + 6y = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min(2y^2 - x^2) \\ & s.t. \ 5x + 4y = 17 \end{aligned}$$

**№3.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} & \max(x^2y^2) \\ & s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min(x^2y^2) \\ & s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

**№4.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} & \max(xy) \\ & s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min(xy) \\ & s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

**№5.** Найти экстремум функции полезности  $u = x^2y$  при бюджетном ограничении  $2x + 3y = 90$ .

**№6.** Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам  $P_1 = 10$  и  $P_2 = 20$ , бюджет составляет \$1200. Производственная функция предприятия равна  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ . Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

**№7.** Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам  $P_x = 5$  и  $P_y = 2$ , бюджет составляет \$200. Производственная функция предприятия равна  $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$ . Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

**№8.** Производственная функция предприятия равна  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ . Ресурсы закупаются по ценам  $P_1$  и  $P_2$ . Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \min(P_1x + P_2y) \\ f(x, y) = Q_0 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

**№9.** Потребительская корзина состоит из трех товаров, цена на которые равны  $P_1, P_2, P_3$ . Доход равен  $I$ . Функция полезности потребителя равна

$$U(q_1, q_2, q_3) = \ln q_1 + \ln q_2 + \ln q_3.$$

Найдите оптимальную потребительскую корзину.

**№10.** В условиях предыдущей задачи рассмотрите функцию полезности

$$U(q_1, q_2, q_3) = a \ln q_1 + b \ln q_2 + c \ln q_3 \quad a, b, c > 0$$

**№11.** Фирма для производства использует два фактора производства: капитал и труд. Производственная функция имеет вид  $F = 3KL^2$ . Фирма решает следующую задачу

$$\begin{aligned} \min(5K + 4L) \\ F(K, L) = 9600 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

**№12.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 10x - 50y - 10z) \\ s.t. \ x + 2y + 3z = 20 \\ \max(10 - 9x - 3y + 3z - 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz) \\ s.t. \ 2x + 2y - 4z = 7 \end{aligned}$$

**№13.** Решите **численно**<sup>1</sup> задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{cases} \\ \min(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & s.t. \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \end{array}$$

---

<sup>1</sup>MS Excel/Python

## А Приложение

### А.1 Симметричные матрицы

Пусть  $\mathbf{A} - (n \times n)$  симметричная матрица.

**Теорема 1** (Критерий Сильвестра). Пусть  $\mathbf{A}$  – симметричная матрица и  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  последовательность ее угловых миноров:

$$\Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \det \mathbf{A}$$

Тогда

1.  $\mathbf{A} > 0 \iff \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
2.  $\mathbf{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
3. если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена

**Предложение 1.** Пусть  $\mathbf{A}$  – симметричная  $2 \times 2$  Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \geq 0.$$

Для  $3 \times 3$  матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(13)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(23)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Предложение 2.** Пусть  $\mathbf{A}$  – симметричная  $3 \times 3$ . Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \leq 0.$$

## А.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция  $f$  определена на  $\text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

**Теорема 2.** Дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f$  выпукла  $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \geq 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ .

Если  $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) > 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ , то функция строго выпукла на  $\text{dom}(f)$ .

**Следствие.** Дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f$  вогнута  $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \leq 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ .

Если  $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) < 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ , то функция строго вогнута на  $\text{dom}(f)$ .

*Замечание.* Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра [1](#) или используем Предложения [1](#), [2](#)

## А.3 Функция Лагранжа для ограничений равенства

Рассмотрим задачи оптимизации с ограничениями равенства

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} \end{array}$$

Функция Лагранжа для этих задач

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

**Необходимые условия** (локального) условного экстремума

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ g_j(\mathbf{x}) = c_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ \hline \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix}_{(n+k) \times (n+k)}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Явный вид гессиана

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Пусть  $\mathcal{M}_i$  ( $i = 1, \dots, n+k$ ) – главный минор матрицы  $\text{Hess}_{\mathcal{L}}$ , образованный строками и столбцами с индексами  $i, i+1, \dots, n+k$ .

**Теорема 3** (Достаточные условия минимума). Пусть в точке  $\hat{\mathbf{x}}$  ранг матрицы  $(\frac{\partial g_i}{\partial x_i})$  максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием локального минимума является выполнение неравенств

$$(-1)^k \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (2)$$

*Замечание.* Условие (2) означает, что все миноры  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$  имеют знак  $(-1)^k$ .

**Теорема 4** (Достаточные условия максимума). Пусть в точке  $\hat{\mathbf{x}}$  ранг матрицы  $(\frac{\partial g_i}{\partial x_i})$  максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием наличия локального максимума является выполнение неравенств

$$(-1)^n (-1)^{i-1} \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3)$$

*Замечание.* Условие (3) означает чередование знаков в последовательности миноров  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$ , начиная со знака  $(-1)^n$ .



Рассмотрим два частных случая:

- $n = 2, k = 1$  (две переменных при одном ограничении). Тогда  $n - k = 1$  и

$$(loc) \min : \mathcal{M}_1 < 0 \qquad (loc) \max : \mathcal{M}_1 > 0$$

- $n = 3, k = 1$  (три переменных при одном ограничении). Тогда  $n - k = 2$  и

$$(loc) \min : \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 < 0 \qquad (loc) \max : \mathcal{M}_1 < 0, \mathcal{M}_2 > 0$$