

# Задачи по Методам оптимизации и Теории игр

Артамонов Н.В.

15 ноября 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задачи оптимизации</b>	<b>1</b>
1.1	Безусловная оптимизация . . . . .	2
1.2	Выпуклость . . . . .	3
1.3	Оптимизации с ограничениями равенства . . . . .	4
1.4	Оптимизация с ограничениями неравенства . . . . .	6
1.5	Линейное программирование . . . . .	9
<b>A</b>	<b>Приложение</b>	<b>13</b>
A.1	Симметричные матрицы . . . . .	13
A.2	Выпуклые функции . . . . .	14
A.3	Функция Лагранжа для ограничений равенства . . . . .	14
A.4	Функция Лагранжа для ограничений неравенства . . . . .	16

## 1 Задачи оптимизации

Внимание: Во всех расчетных задачах обязательно проверять достаточные условия экстремума! Задачи, отмеченные звёздочками, не являются обязательными

## 1.1 Безусловная оптимизация

**№1.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

**№2.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

**№3.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 5 + x^3 - y^3 + 3xy$$

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

$$f(x, y) = x^3 + x^2y - 2y^3 + 6y$$

**№4.** Завод производит три вида товаров и продает их по ценам  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 4$  и  $P_3 = 6$ . Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3$$

( $Q_1, Q_2, Q_3$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№5.** Завод производит три вида товаров и продает их по ценам  $P_1 = 2$ ,  $P_2 = 2$  и  $P_3 = 3$ . Издержки производства равны

$$C(Q_1, Q_2, Q_3) = 2Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_3^2 - 2Q_2Q_3 - 2Q_1Q_3$$

( $Q_1, Q_2, Q_3$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№6.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 21 - 5Q_1 + 2Q_2$  и  $P_2 = 35 - Q_2 + 2Q_1$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1 + 3Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№7.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 51 - 2Q_1 + 3Q_2$  и  $P_2 = 47 - 5Q_2 + 3Q_1$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = 3Q_1 + 5Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите оптимальные объемы производства.

**№8.** Найдите локальные экстремумы функций

$$f(x, y) = 6 \ln x + 8 \ln y - 3x - 2y$$

$$f(x, y) = 4 \ln x + 6 \ln y + 2x - 3xy$$

$$f(x, y) = 5 \ln x + 4 \ln y - x - 4xy$$

## 1.2 Выпуклость

**№1.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на  $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = 10 - 6x - 4y + 2x^2 + y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = 8 + 8x + 4y - 5x^2 - 2y^2 + 6xy$$

$$f(x, y) = 5 + 2x + 6y + 5x^2 + 3y^2 + 8xy$$

$$f(x, y) = 10 + x^2 + y^2 + 2xy$$

$$f(x, y) = 5 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

**№2.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции на  $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = 6 + 4x + 2y + 6z + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$$

$$f(x, y, z) = 3 + 4x + 8y + 4z - 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$$

$$f(x, y, z) = 8 + 2x + 4y + 2z + 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 4yz$$

**№3.** При каких значениях параметра  $\beta$  функция

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - \beta x_1 x_3$$

будет строго/нестрого выпуклой? Строго/нестрого вогнутой?

**№4.** Исследуйте на выпуклость/вогнутость функции, определённые на  $\mathbb{R}_+^2$  ( $a, b > 0$ )

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 2x^2 - y^2 - 2xy$$

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 4xy - a \ln x - b \ln y$$

$$f(x, y) = a \ln x + b \ln y - 3x^2 - 5y^2 - 8xy$$

### 1.3 Оптимизации с ограничениями равенства

**№1.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(2x + 3y) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(5x - 3y) \\ s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2x + 3y) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x - 3y) \\ s.t. \ x^2 + 3y^2 = 28 \end{aligned}$$

**№2.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(x^2 + 2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(y^2 - 2x^2) \\ s.t. \ 4x + 3y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(10 - 2x^2 - 18y^2) \\ s.t. \ 4x + 6y = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2y^2 - x^2) \\ s.t. \ 5x + 4y = 17 \end{aligned}$$

**№3.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(x^2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(x^2y^2) \\ s.t. \ 3x + 2y = 24 \end{aligned}$$

**№4.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(xy) \\ s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(xy) \\ s.t. \ x^2 + 2y^2 = 36 \end{aligned}$$

**№5.** Найти экстремум функции полезности  $u = x^2y$  при бюджетном ограничении  $2x + 3y = 90$ .

**№6.** Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам  $P_1 = 10$  и  $P_2 = 20$ , бюджет составляет \$1200. Производственная функция предприятия равна  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ . Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

**№7.** Для производства предприятие закупает два вида ресурсов по ценам  $P_x = 5$  и  $P_y = 2$ , бюджет составляет \$200. Производственная функция предприятия равна  $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$ . Найдите количество ресурсов с целью обеспечения оптимальной производственной программы.

**№8.** Производственная функция предприятия равна  $f(x, y) = \sqrt{xy}$ . Ресурсы закупаются по ценам  $P_1$  и  $P_2$ . Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} \min(P_1x + P_2y) \\ f(x, y) = Q_0 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

**№9.** Потребительская корзина состоит из трех товаров, цена на которые равны  $P_1, P_2, P_3$ . Доход равен  $I$ . Функция полезности потребителя равна

$$U(q_1, q_2, q_3) = \ln q_1 + \ln q_2 + \ln q_3.$$

Найдите оптимальную потребительскую корзину.

**№10.** В условиях предыдущей задачи рассмотрите функцию полезности

$$U(q_1, q_2, q_3) = a \ln q_1 + b \ln q_2 + c \ln q_3 \quad a, b, c > 0$$

**№11.** Фирма для производства использует два фактора производства: капитал и труд. Производственная функция имеет вид  $F = 3KL^2$ . Фирма решает следующую задачу

$$\begin{aligned} \min(5K + 4L) \\ F(K, L) = 9600 \end{aligned}$$

Дайте интерпретацию оптимальной задачи и найдите её решение.

**№12.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 10x - 50y - 10z) \\ s.t. \ x + 2y + 3z = 20 \\ \max(10 - 9x - 3y + 3z - 4x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4xy + 2xz + 2yz) \\ s.t. \ 2x + 2y - 4z = 7 \end{aligned}$$

**№13.** Решите **численно**<sup>1</sup> задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \ \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & s.t. \ \begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x - 2y + z = 6 \end{cases} \\ \min(x + y + z) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \ \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} & s.t. \ \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 16 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \end{array}$$

---

<sup>1</sup>MS Excel/Python

## 1.4 Оптимизация с ограничениями неравенства

**№1.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 3y^2) \\ s.t. \ x - y \geq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(2x + 3y) \\ s.t. \ 5x^2 + y^2 + 4xy \leq 25 \end{aligned}$$

**№2.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(2x + 4y - 5x^2 - y^2 - 4xy) \\ s.t. \ 2x + 3y \leq 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(4x + 8y - 6x^2 - 3y^2 - 8xy) \\ s.t. \ 2x + 2y \leq 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(4x + 10y - 2x^2 - 6y^2 - 6xy) \\ s.t. \ 3x + 6y \leq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(8x + 8y - 3x^2 - 3y^2 - 6xy) \\ s.t. \ 2x + 4y \leq 13 \end{aligned}$$

**№3.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \min(5x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 4y) \\ s.t. \ 2x + y \geq 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x^2 + y^2 - 4xy - 2x - y) \\ s.t. \ 2x + 3y \geq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(5x^2 + 4y^2 - 8xy - 3x - 4y) \\ s.t. \ 2x + 4y \geq 31 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min(2x^2 + 6y^2 - 6xy - 4x - 43) \\ s.t. \ 3x + 6y \geq 20 \end{aligned}$$

**№4.** Решите задачи оптимизации

$$\begin{aligned} \max(x - 2y) \\ s.t. \ x^2 + y^2 \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(1 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2) \\ s.t. \ x + y \leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(x - 2y) \\ s.t. \ \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max(1 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2) \\ s.t. \ \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**№5.** Завод производит два вида товаров, цена на которые равны  $P_1 = 10$  и  $P_2 = 30$ . Функция издержек равна

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + 5Q_2^2 - 4Q_1Q_2$$

( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 104

2. издержки не должны превышать 5850

**№6.** Завод производит два вида товаров, (обратные) функции спроса на которые имеют вид  $P_1 = 20 - 2Q_1 + 3Q_2$  и  $P_2 = 30 - 5Q_2 + 3Q_1$  (цены эндогенны). Функция издержек равна  $C(Q_1, Q_2) = 10Q_1 + 20Q_2$  ( $Q_1, Q_2$  – объемы производства товаров). Найдите объемы производства, оптимизирующие прибыль, если

1. издержки не должны превышать 3600

2. издержки не должны превышать 450

**№7.** Решите **численно**<sup>2</sup> задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x - y + z) & \max(x - y + z) \\ s.t. \ 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 & s.t. \begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \\ \min(x^2 + y^2 + z^2) & \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \end{cases} & s.t. \begin{cases} x + y - z \geq 10 \\ x - 2y + 2z \geq 8 \\ x, y, z \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

**№8.** Решите **численно**<sup>3</sup> задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) & \max(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ s.t. \ x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 & s.t. \begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_4^2 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \\ \min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) & \min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^3) \\ s.t. \begin{cases} x_1x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \end{cases} & s.t. \begin{cases} x_1x_2 - x_3 + x_4 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \geq 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

**№9** (\*). Потребительская корзина состоит из двух товаров, её функция полезности равна  $U(x, y) = x + a \ln(y)$  (параметр  $a > 0$ ). Потребитель

---

<sup>2</sup>MS Excel/Python

<sup>3</sup>MS Excel/Python

решает оптимальную задачу

$$\begin{aligned} & \max U(x, y) \\ & s.t. \begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

При каких значениях параметра  $a$

1. потребительская корзина состоит только из второго товара
2. содержит оба товара

**№10** (\*). Экономический агент имеет два «товара»: «отдых»  $l$  (leisure, в часах) и потребление  $x$ . Пусть  $w$  – почасовая оплата и  $P$  – цена потребления. Агент располагает общим временем  $H$ , которое он может тратить на работу и на отдых, и также имеет фиксированный доход  $M$  (non-labor income). Функция полезности экономического агента  $U(x, l) = x + c \ln l$  ( $c > 0$ ). Рассмотрим задачу оптимизации

$$\begin{aligned} & \max U(x, l) \\ & s.t. \begin{cases} Px + wl \leq wH + M \\ 0 \leq l \leq H \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Найдите решение задачи оптимизации.

**№11.** Экономический агент потребляет два товара и его функция полезности равна  $U(x, y) = y + c \ln x$  ( $c > 0$ ). Цены на товары равны  $P_1$  и  $P_2$ , доход равен  $I$ . Сформулируйте задачу об оптимальной потребительской корзине и найдите её решение.



## 1.5 Линейное программирование

**№1.** Рассмотрим задачи линейного программирования

$$\begin{array}{ll} \max(3x + 5y) & \max(7x + 4y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 5 \\ 2x + y \leq 8 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 30 \\ 2x + y \leq 14 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \\ \max(4x + 5y) & \max(8x + 3y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 3y \leq 15 \\ 4x + 3y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y \leq 35 \\ 5x + 3y \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1. Решите графически (прямую) задачу
2. Напишите и решите графически двойственную задачу.

**№2.** Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(5x + 4y) & \max(4x + 3y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 3y \leq 18 \\ x + 2y \leq 13 \\ 3x + 2y \leq 27 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 4y \leq 28 \\ 2x + 3y \leq 26 \\ x + y \leq 11 \\ 2x + y \leq 20 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \\ \min(7x + 6y) & \min(2x + 5y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} 3x + y \geq 9 \\ 4x + 3y \geq 22 \\ x + 3y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} 3x + y \geq 10 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 3y \geq 9 \\ x + 6y \geq 12 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

**№3.** Решите графически следующие задачи оптимизации

$$\begin{array}{ll} \max(5x - 4y) & \max(-3x + 2y) \\ s.t. \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y \leq 16 \\ 2x - 7y \leq 22 \\ -5x - y \leq 19 \\ -x + 3y \leq 7 \end{array} \right. & s.t. \left\{ \begin{array}{l} x + 2y \leq 9 \\ 3x - y \leq 13 \\ -2x - 7y \leq 22 \\ -5x + y \leq 18 \\ -x + 4y \leq 15 \end{array} \right. \end{array}$$

**№4.** Фирма производит четыре товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	Количество ресурса
Ресурс 1	4	4	1	2	100
Ресурс 2	5	3	2	1	150
Цена	20	12	4	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

**№5.** Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Количество ресурса
Ресурс 1	2	1	5	100
Ресурс 2	4	2	3	120
Цена	3	8	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

**№6.** Фирма производит три товара и использует для производства два ресурса. Норма затрат ресурсов, количество ресурсов и прибыль от каждой единицы товара приведены в таблице

	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Количество ресурса
Ресурс 1	2	1	5	100
Ресурс 2	5	2	5	220
Цена	3	8	2	

Предполагается, что нормы затрат постоянны и цены постоянны.

Постройте модель оптимизации производства и решите её численно (MS Excel/Python).

**№7.** Фирма «Московия» заключила контракт с компанией АЛРОСА на покупку промышленного золота для его реализации в пяти городах в объеме: Самара – 80 кг, Москва – 260 кг, Ростов-на-Дону – 100 кг, Санкт-Петербург – 140 кг, Нижний Новгород – 120 кг. Компания АЛРОСА располагает тремя месторождениями: «Мирное», «Удачный» и «Полевое», которые планируют за год выработать соответственно 200, 250 и 250 кг золота.

Постройте модель оптимизации фрахта специализированного транспорта, обеспечивающего полное удовлетворение заявок покупателя, при заданной системе тарифов (на 1 кг)

	Самара	Москва	Ростов-на-Дону	С.-Пб.	Н. Новгород
«Мирное»	7	9	15	4	18
«Удачный»	13	25	8	15	5
«Полевое»	5	11	6	20	12

Найдите **численно** оптимальное решение.

**№8.** Московский филиал «The Coca-Cola Company», выпускающей напитки приблизительного равного спроса (Sprite, Coca-Cola, Fanta), складуемых в разных местах, должен поставить свою продукцию в четыре крупных супермаркета: «Ашан», «Карусель», «Седьмой Континент» и «Арбатский». Каждая упаковка содержит 12 банок емкостью 0.33 литра. Тарифы на доставку, объемы запасов и заказы на продукцию приведены в таблице.

	Супермаркеты				
Склады	Ашан	Карусель	Перекрёсток	Дикси	Запасы, уп.
Coca-Cola	6	4	9	5	400
Sprite	5	7	8	6	300
Fanta	9	4	6	7	200
Заказы, уп.	150	250	150	350	

Постройте оптимизационную модель плана поставок напитков в супермаркеты. Найдите **численно** оптимальное решение.

**№9.** Коммерческое предприятие реализует три группы товаров А, В и С. Плановые нормативы затрат ресурсов (на 1 тыс рублей товарооборота), доход от продажи товаров (на 1 тыс. рублей товарооборота) приведены в таблице

Ресурсы	Нормы затрат			Объем ресурсов
	А	В	С	
Рабочее время продавцов	0.1	3	0.4	1100
Площадь торговых залов	0.05	0.2	0.02	120
Площадь складских помещений	3	0.02	2	8000
Доход	3	1	4	

Постройте модель оптимизации для получения максимального дохода. Найдите **численно** оптимальное решение.

**№10.** Три нефтеперерабатывающих завода с (ежедневной) производительностью 6, 5 и 8 млн.т бензина снабжают три бензохранилища, (ежедневно) потребность которых составляет 4, 8 и 7 млн. т бензина соответственно. Бензин транспортируется в бензохранилища по бензопроводу. Стоимость транспортировки составляет 0.3 руб за 1000 т на один км длины бензопровода. В таблице приведены расстояния в км между заводами и хранилищами. Отметим, что первый нефтеперерабатывающий завод не связан бензопроводом с третьим бензохранилищем.

Завод	Хранилища			Объем
	1	2	3	
1	120	180	—	6
2	300	100	80	5
3	200	250	120	8
Вместимость хранилища	4	8	7	

Постройте оптимизационную модель транспортировки бензина. Найдите **численно** оптимальное решение.

## А Приложение

### А.1 Симметричные матрицы

Пусть  $\mathbf{A}$  –  $(n \times n)$  симметричная матрица.

**Теорема 1** (Критерий Сильвестра). Пусть  $\mathbf{A}$  – симметричная матрица и  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  последовательность ее угловых миноров:

$$\Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \Delta_n = \det \mathbf{A}$$

Тогда

1.  $\mathbf{A} > 0 \iff \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
2.  $\mathbf{A} < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, \dots, n.$
3. если знаки миноров не удовлетворяют предыдущим пунктам, то матрица не знакоопределена

**Предложение 1.** Пусть  $\mathbf{A}$  – симметричная  $2 \times 2$  Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} \\ a_{22} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \geq 0.$$

Для  $3 \times 3$  матрицы обозначим центральные миноры

$$\mathcal{M}_{(12)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(13)} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{(23)} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Предложение 2.** Пусть  $\mathbf{A}$  – симметричная  $3 \times 3$ . Тогда

$$\mathbf{A} \geq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \geq 0, \det \mathbf{A} \geq 0$$

$$\mathbf{A} \leq 0 \iff \begin{matrix} a_{11} & \mathcal{M}_{(12)} \\ a_{22} & \mathcal{M}_{(13)} \\ a_{33} & \mathcal{M}_{(23)} \end{matrix} \leq 0, \det \mathbf{A} \leq 0.$$

## А.2 Выпуклые функции

Пусть числовая функция  $f$  определена на  $\text{dom}(f) \subset \mathbb{R}^n$

**Теорема 2.** Дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f$  выпукла  $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \geq 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ .

Если  $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) > 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ , то функция строго выпукла на  $\text{dom}(f)$ .

**Следствие.** Дважды непрерывно дифференцируемая функция  $f$  вогнута  $\iff \text{Hess}_f(\mathbf{x}) \leq 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ .

Если  $\text{Hess}_f(\mathbf{x}) < 0$  для всех  $\mathbf{x} \in \text{dom}(f)$ , то функция строго вогнута на  $\text{dom}(f)$ .

*Замечание.* Знак гессиана проверяем по критерию Сильвестра [1](#) или используем Предложения [1](#), [2](#)

## А.3 Функция Лагранжа для ограничений равенства

Рассмотрим задачи оптимизации с ограничениями равенства

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) = c_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) = c_k \end{cases} \end{array}$$

Функция Лагранжа для этих задач

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

**Необходимые условия** (локального) условного экстремума

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ g_j(\mathbf{x}) = c_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Гессиан для функции Лагранжа (симметричная матрица)

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_l} \\ \hline \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} & | & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} \end{pmatrix}_{(n+k) \times (n+k)}$$

Из определения функции Лагранжа

- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_l} = 0$
- $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial x_j} = -\frac{\partial g_s}{\partial x_j}$

Явный вид гессиана

$$\text{Hess}_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_n} & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} \\ -\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial g_k}{\partial x_n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Пусть  $\mathcal{M}_i$  ( $i = 1, \dots, n+k$ ) – главный минор матрицы  $\text{Hess}_{\mathcal{L}}$ , образованный строками и столбцами с индексами  $i, i+1, \dots, n+k$ .

**Теорема 3** (Достаточные условия минимума). Пусть в точке  $\hat{\mathbf{x}}$  ранг матрицы  $(\frac{\partial g_i}{\partial x_i})$  максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием локального минимума является выполнение неравенств

$$(-1)^k \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (2)$$

*Замечание.* Условие (2) означает, что все миноры  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$  имеют знак  $(-1)^k$ .

**Теорема 4** (Достаточные условия максимума). Пусть в точке  $\hat{\mathbf{x}}$  ранг матрицы  $(\frac{\partial g_i}{\partial x_i})$  максимален и эта точка удовлетворяет необходимым условиям экстремума.

Тогда достаточным условием наличия локального максимума является выполнение неравенств

$$(-1)^n (-1)^{i-1} \mathcal{M}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}) > 0 \quad i = 1, \dots, n-k. \quad (3)$$

*Замечание.* Условие (3) означает чередование знаков в последовательности миноров  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-k}$ , начиная со знака  $(-1)^n$ .

Рассмотрим два частных случая:

- $n = 2, k = 1$  (две переменных при одном ограничении). Тогда  $n - k = 1$  и

$$(loc) \min : \mathcal{M}_1 < 0 \qquad (loc) \max : \mathcal{M}_1 > 0$$

- $n = 3, k = 1$  (три переменных при одном ограничении). Тогда  $n - k = 2$  и

$$(loc) \min : \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 < 0 \qquad (loc) \max : \mathcal{M}_1 < 0, \mathcal{M}_2 > 0$$

#### А.4 Функция Лагранжа для ограничений неравенства

**Задача 1** Будем рассматривать задачу максимизации в виде

$$\begin{aligned} & \text{max} f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \leq C_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \leq C_k \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

и задачу минимизации в виде

$$\begin{aligned} & \text{min} f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_1(\mathbf{x}) \geq C_1 \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \geq C_k \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

**Важно!.** *Согласованность знаков неравенства в ограничениях с максимизацией/минимизацией целевой функции.*

**Определение.** *Задача оптимизации (4) называется задачей выпуклого программирования или выпуклой оптимизации, если*

- $f$  вогнута
- $g_1, \dots, g_k$  выпуклы



**Определение.** Задача оптимизации (5) называется *задачей выпуклого программирования* или *выпуклой оптимизации*, если

- $f$  выпукла
- $g_1, \dots, g_k$  вогнуты

Обозначим

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (4), (5) в виде

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{c} & \text{s.t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c} \end{array}$$

Функцией Лагранжа для задачи (4) и задачи (5) имеет вид

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \lambda_j (g_j(\mathbf{x}) - C_j) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda}^\top (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c})$$

Дополнительные переменные  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^\top$  называются **множителями Лагранжа** (Lagrange multipliers).

**Определение.** Будем говорить, что для ограничений задачи (4) выполнено *условие Слейтера*, если существует  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) < \mathbf{c}$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (5) выполнено *условие Слейтера*, если существует  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) > \mathbf{c}$$

**Теорема 5.** Пусть задача (4) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.

Тогда  $\hat{\mathbf{x}}$  является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того,  $\hat{\mathbf{x}}$  – глобальный максимум в задаче (4).

**Следствие.** Чтобы точка  $\mathbf{x}$  была локальным минимумом в задаче (5) необходимо, чтобы для некоторых чисел  $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k$  выполнялась система

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \lambda_j \mathcal{L}'_{\lambda_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ \lambda_j \geq 0, \mathcal{L}'_{\lambda_j} \leq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (7)$$

Кроме того,  $\hat{\mathbf{x}}$  – глобальный минимум в задаче (5).

Пусть  $\hat{\mathbf{x}}$  – решение задачи (4) или задачи (5). Рассмотрим это решение как функцию от  $C_1, \dots, C_k$ :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(C_1, \dots, C_k) \quad \hat{f} = f(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k)$$

**Теорема 6.** Оптимальное решение есть гладкая функция от  $C_1, \dots, C_k$  и выполнены равенства

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} = \hat{\lambda}_j \quad j = 1, \dots, k$$

**Задача 2** Рассмотрим теперь задачу максимизации в следующей форме

$$\begin{aligned} & \max f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \leq C_j & j = 1, \dots, k \\ \mathbf{x}_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

и задачу минимизации в форме

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{x}) \\ & s.t. \begin{cases} g_j(\mathbf{x}) \geq C_j & j = 1, \dots, k \\ \mathbf{x}_i \geq 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

(отдельно выделяем ограничения неотрицательности переменных)

**Определение.** Задача оптимизации (8) называется *задачей выпуклого программирования* или *выпуклой оптимизации*, если

- $f$  вогнута
- $g_1, \dots, g_k$  выпуклы

Задача оптимизации (9) называется *задачей выпуклого программирования* или *выпуклой оптимизации*, если

- $f$  выпукла
- $g_1, \dots, g_k$  вогнуты

Обозначим

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_k(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}$$

Перепишем задачи (8), (9) в виде

$$\begin{array}{ll} \max f(\mathbf{x}) & \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} & \text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Определим для задач (8), (9) **функцию Лагранжа в форме Куна – Таккера**, включив в неё только нетривиальные ограничения

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^k \mu_j (g_j(\mathbf{x}) - C_j) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}^\top (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{c})$$

с множителями Лагранжа  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \dots \ \mu_k)^\top$

**Определение.** Будем говорить, что для ограничений задачи (8) выполнено **условие Слейтера**, если существует  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) < \mathbf{c} \quad \mathbf{x}_0 > 0$$

Будем говорить, что для ограничений задачи (9) выполнено **условие Слейтера**, если существует  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) > \mathbf{c} \quad \mathbf{x}_0 > 0$$

*Замечание.* Условие Слейтера относится только к системе ограничений и не касается целевой функции

**Теорема 7.** Пусть задача (8) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.

Тогда  $\hat{\mathbf{x}}$  является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ x_i \geq 0, \mathcal{Z}'_{x_i} \leq 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \geq 0, \mathcal{Z}'_{\mu_j} \geq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (10)$$

Кроме того,  $\hat{\mathbf{x}}$  – глобальный максимум в задаче (8).

**Теорема 8.** Пусть задача (9) является задачей выпуклого программирования и для ограничений выполнено условие Слейтера.

Тогда  $\hat{\mathbf{x}}$  является решением экстремальной задачи тогда и только тогда, когда он удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x_i \mathcal{Z}'_{x_i} = 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \mathcal{Z}'_{\mu_j} = 0 & j = 1, \dots, k \\ x_i \geq 0, \mathcal{Z}'_{x_i} \geq 0 & i = 1, \dots, n \\ \mu_j \geq 0, \mathcal{Z}'_{\mu_j} \leq 0 & j = 1, \dots, k \end{cases} \quad (11)$$

Кроме того,  $\hat{\mathbf{x}}$  – глобальный минимум в задаче (9).

Рассмотрим оптимальное решение задачи (8) и задачи (9) и оптимальное значение целевой функции как функцию от  $C_1, \dots, C_k$ :

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(C_1, \dots, C_k) \quad \hat{f} = f(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{f}(C_1, \dots, C_k).$$

**Теорема 9.**  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}(C_1, \dots, C_k)$  есть гладкая функция и выполнены равенства

$$\mu_j = \frac{\partial \hat{f}}{\partial C_j} \quad j = 1, \dots, k$$