

Задачи по Теории вероятностей и математической статистике

Артамонов Н.В.

5 декабря 2024 г.

Содержание

1 Дискретные случайные величины	1
1.1 Одномерные распределения	1
1.2 Двумерные распределения	2
2 Непрерывные распределения	2
2.1 Плотность, функция распределения, математическое ожи- дание, дисперсия	2
2.2 Стандартные распределения	4
2.3 Критические значения	4

1 Дискретные случайные величины

1.1 Одномерные распределения

№1. В урне содержится 3 белых и 3 черных шара. Случайным образом извлекаются 2 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $E(X)$, $Var(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 2) \qquad P(X \geq 1) \qquad P(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F .

Замечание: $X \sim \text{Hypergeom}(6, 3, 2)$

№2. В урне содержится 4 белых и 2 черных шара. Случайным образом извлекаются 3 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 3) \qquad P(X > 1) \qquad P(1 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F .

Замечание: $X \sim \text{Hypergeom}(6, 4, 2)$

№3. В урне содержится 3 белых и 4 черных шара. Случайным образом извлекаются 4 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $E(X)$, $\text{Var}(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 3) \qquad P(X > 0) \qquad P(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F .

Замечание: $X \sim \text{Hypergeom}(7, 2, 4)$

1.2 Двумерные распределения

2 Непрерывные распределения

2.1 Плотность, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия

№1. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности

$$P(X > 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-1 < X < 0.5)$$
3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№2. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx^{\lambda-1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

($\lambda > 0$ – параметр распределения)

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности f
2. Вычислите вероятности

$$P(X > 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-1 < X < 0.5)$$
3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения F и нарисуйте её график

Замечание: графики f и F нарисуйте при $0 < \lambda < 1$ и при $\lambda \geq 1$

№3. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности

$$P(X < 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-5 < X < 0.25)$$
3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

2.2 Стандартные распределения

№1. Для распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ вычислите

$$\phi(1) \quad \phi(2) \quad \phi(-0.5) \quad \phi(-1.5) \quad \Phi(1) \quad \Phi(2) \quad \Phi(-1) \quad \Phi(-2)$$

№2. Для распределения $\mathcal{N}(1, 0.5^2)$ вычислите значение плотности и функции распределения в точках

$$x = \{-3, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$$

2.3 Критические значения

Замечание: все вычисления необходимо сделать в MS Excel/Python

№1. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения распределения $\mathcal{N}(0, 1)$

№2. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения следующих распределений

$$t_{10} \qquad t_{100} \qquad t_{250} \qquad t_{500}$$

№3. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$\chi_2^2 \qquad \chi_5^2 \qquad \chi_{10}^2 \qquad \chi_{20}^2$$

№4. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$F_{2,100} \qquad F_{5,300} \qquad F_{10,1000} \qquad F_{20,1500}$$