Задачи по Теории вероятностей и математической статистике

Артамонов Н.В.

17 января 2025 г.

Содержание

1 Дискретные случайные величины

1.1 Одномерные распределения

№1. В урне содержится 3 белых и 3 черных шара. Случайным образом извлекаются 2 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $\mathsf{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X < 2) \qquad \mathsf{P}(X \geq 1) \qquad \mathsf{P}(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F.

Замечание: $X \sim Hypergeom(6, 3, 2)$

№2. В урне содержится 4 белых и 2 черных шара. Случайным образом извлекаются 3 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $\mathsf{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X < 3) \qquad \mathsf{P}(X > 1) \qquad \mathsf{P}(1 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F.

Замечание: $X \sim Hypergeom(6, 4, 2)$

№3. В урне содержится 3 белых и 4 черных шара. Случайным образом извлекаются 4 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $\mathsf{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения

3. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X < 3) \qquad \mathsf{P}(X > 0) \qquad \mathsf{P}(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F.

Замечание: $X \sim Hypergeom(7, 2, 4)$

1.2 Двумерные распределения

2 Непрерывные распределения

2.1 Плотность, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия

№1. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности

2. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X > 0.5) \qquad \mathsf{P}(0.25 < X < 0.75) \qquad \mathsf{P}(-1 < X < 0.5)$$

3. Вычислите $\mathsf{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$

4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№2. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx^{\lambda-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(λ>0 – параметр распределения)

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности f

2. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X > 0.5) \qquad \mathsf{P}(0.25 < X < 0.75) \qquad \mathsf{P}(-1 < X < 0.5)$$

3. Вычислите $\mathsf{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$

4. Найдите функцию распределения F и нарисуйте её график

Замечание: графики f и F нарисуйте при $0 < \lambda < 1$ и при $\lambda \geq 1$

№3. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности

2. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X < 0.5) \qquad \mathsf{P}(0.25 < X < 0.75) \qquad \mathsf{P}(-5 < X < 0.25)$$

3. Вычислите $\mathsf{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$

4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№4. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(2-x), & x \in [0,2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности

2. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X < 1.5) \quad \mathsf{P}(X > 1) \quad \mathsf{P}(0.5 < X < 1.5) \quad \mathsf{P}(-1 < X < 1)$$

3. Вычислите $\mathsf{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$

4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№5. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1)(2-x)^2, & x \in [-1, 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности

$$\mathsf{P}(X < 1) \qquad \mathsf{P}(X > 1) \qquad \mathsf{P}(-0.5 < X < 1) \qquad \mathsf{P}(0 < X < 3)$$

3. Вычислите $\mathsf{E}(X)$ и $\mathrm{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

2.2 Стандартные распределения

№1. Для распределения $\mathcal{N}(0,1)$ вычислите

$$\phi(1) \quad \phi(2) \quad \phi(-0.5) \quad \phi(-1.5) \quad \Phi(1) \quad \Phi(2) \quad \Phi(-1) \quad \Phi(-2)$$

№2. Для распределения $\mathcal{N}(1, 0.5^2)$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$$

№3. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Вычислите следующие вероятности

$$\mathsf{P}(X \leq 1) \qquad \mathsf{P}(X > -0.5) \qquad \mathsf{P}(-1 \leq X \leq 0.5) \qquad \mathsf{P}(0 < X < 2)$$

№4. Пусть $X \sim \mathcal{N}(1, 1.5^2)$. Вычислите следующие вероятности

$$\mathsf{P}(X \leq 2) \qquad \mathsf{P}(X > 0.5) \qquad \mathsf{P}(-0.5 \leq X \leq 1.5) \qquad \mathsf{P}(0 < X < 3)$$

№5. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$\mathsf{P}(X \leq a) = 0.6 \qquad \mathsf{P}(X \leq b) = 0.8 \qquad \mathsf{P}(X \leq c) = 0.9$$

№6. Пусть $X \sim \mathcal{N}(1, 0.5^2)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$\mathsf{P}(X \leq a) = 0.7 \qquad \mathsf{P}(X \leq b) = 0.85 \qquad \mathsf{P}(X \leq c) = 0.95$$

№7. Для распределения $U[1, 4]$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{0, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5\}$$

№8. Пусть $X \sim U[-1, 5]$. Вычислите следующие вероятности

$$\mathsf{P}(X \leq 0) \qquad \mathsf{P}(X > 2) \qquad \mathsf{P}(-0.5 \leq X \leq 3.5) \qquad \mathsf{P}(0 < X < 4)$$

№9. Для распределения $Exp(2)$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

№10. Пусть $X \sim Exp(0.5)$. Вычислите следующие вероятности

$$\mathsf{P}(X \leq 3) \qquad \mathsf{P}(X > 1) \qquad \mathsf{P}(0.5 \leq X \leq 2.5) \qquad \mathsf{P}(1 < X < 3)$$

№11. Пусть $X \sim Exp(0.5)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$\mathsf{P}(X \leq a) = 0.5 \qquad \mathsf{P}(X \leq b) = 0.75 \qquad \mathsf{P}(X \leq c) = 0.95$$

2.3 Критические значения

Замечание: все вычисления необходимо сделать в MS Excel/Python

№1. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения распределения $\mathcal{N}(0, 1)$

№2. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения следующих распределений

$$t_{10} \qquad t_{100} \qquad t_{250} \qquad t_{500}$$

№3. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$\chi^2_2 \qquad \chi^2_5 \qquad \chi^2_{10} \qquad \chi^2_{20}$$

№4. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$F_{2,100} \qquad F_{5,300} \qquad F_{10,1000} \qquad F_{20,1500}$$

A Основные формулы

A.1 Основы теории вероятностей

Комбинаторика:

- Число перестановок $P_n = n!$
- Число сочетаний $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Число размещений $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

«Классическое» определение вероятностей (модель равновероятных элементарных исходов)

$$\mathsf{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Формула суммы событий

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(AB)$$

Условная вероятность B при условии (наблюдения) A

$$\mathsf{P}(B|A) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(A)} \qquad \mathsf{P}(A) \neq 0$$

Пусть $\{H_i\}_{i=1}^n$ – полная группа событий (гипотезы). Тогда для произвольного события A

- Формула полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)$$

- Формула Байеса

$$\mathsf{P}(H_i|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_i)\,\mathsf{P}(H_i)}{\mathsf{P}(A)} \qquad i = 1, \ldots, n$$

A.2 Дискретные случайные величины

A.2.1 Стандартные дискретные распределения

Биномиальное распределение $Binom(n, p)$ (n – число испытаний, $p \in (0, 1)$ – вероятность успеха в одном испытании).

Закон распределения, математическое ожидание и дисперсия

$$f(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, \ldots, n$$
$$\mathsf{E}(X) = np \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p)$$

Гипергеометрическое распределение $Hypergeom(N, D, n)$ (N – общее число объектов, D – число «хороших» объектов, n – объём выборки)

Закон распределения, математическое ожидание и дисперсия

$$f(k) = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n} \qquad k = \max\{0, D+n-N\}, \ldots, \min\{n, D\}$$
$$\mathsf{E}(X) = \frac{nD}{N} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{n(N-n)}{N-1} \cdot \frac{D}{N} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right)$$

A.3 Непрерывные случайные величины

A.3.1 Общие распределения

Пусть X – непрерывной распределённая случайная величина. Функция распределения F и плотность f определяются как

$$F(x) = \mathsf{P}(X \le x) \qquad f(x) = F'(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Свойства функции распределения:

$$0 \le F(x) \le 1 \qquad F \uparrow \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Свойства плотности

$$f(x) \ge 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1 \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Вычисление вероятностей

$$\left.\begin{array}{r}\mathsf{P}(a < X < b)\\ \mathsf{P}(a \leq X \leq b)\\ \mathsf{P}(a < X \leq b)\\ \mathsf{P}(a \leq X < b)\end{array}\right\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathsf{P}(X < b)\\ \mathsf{P}(X \leq b)\end{array}\right\} = F(b) = \int_{-\infty}^b f(t)dt$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathsf{P}(a < X)\\ \mathsf{P}(a \leq X)\end{array}\right\} = 1 - F(a) = \int_a^{+\infty} f(t)dt$$

Математическое ожидание (**если интеграл сходится!**)

$$\mathsf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

Если интеграл расходится, то математическое ожидание не существует.

Момент порядка $k \in \mathbb{N}$ (**если интеграл сходится!**)

$$\mathsf{E}(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x) dx$$

Дисперсия (если конечен момент второго порядка!)

$$\mathrm{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - (\mathsf{E}(X))^2 \geq 0$$

A.3.2 Стандартные непрерывные распределения

Нормальное (гауссово) распределение Стандартное гауссово или нормальное распределение $\mathcal{N}(0,1)$:

- плотность и функция распределения

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt$$

- Математическое ожидание и дисперсия

$$\mathsf{E}(X) = 0 \qquad \mathrm{Var}(X) = 1$$

Общее нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- плотность и функция распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Математическое ожидание и дисперсия

$$\mathsf{E}(X) = \mu \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Равномерное распределение $U[a, b]$ на отрезке

- плотность и функция распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

- Математическое ожидание и дисперсия

$$\mathsf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Экспоненциальное распределение $Exp(\lambda)$ (параметр $\lambda > 0$)

- плотность и функция распределения

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\exp(-\lambda x), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- Математическое ожидание и дисперсия

$$\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$