

Задачи по Теории вероятностей и математической статистике

Артамонов Н.В.

12 января 2025 г.

Содержание

1	Дискретные случайные величины	1
1.1	Одномерные распределения	1
1.2	Двумерные распределения	3
2	Непрерывные распределения	3
2.1	Плотность, функция распределения, математическое ожи- дание, дисперсия	3
2.2	Стандартные распределения	5
2.3	Критические значения	6
A	Основные формулы	7
A.1	Основы теории вероятностей	7
A.2	Дискретные случайные величины	7
A.3	Непрерывные случайные величины	7

1 Дискретные случайные величины

1.1 Одномерные распределения

№1. В урне содержится 3 белых и 3 черных шара. Случайным образом извлекаются 2 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $E(X)$, $Var(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 2) \qquad P(X \geq 1) \qquad P(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F .

Замечание: $X \sim \text{Hypergeom}(6, 3, 2)$

№2. В урне содержится 4 белых и 2 черных шара. Случайным образом извлекаются 3 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $E(X)$, $Var(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 3) \qquad P(X > 1) \qquad P(1 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F .

Замечание: $X \sim \text{Hypergeom}(6, 4, 2)$

№3. В урне содержится 3 белых и 4 черных шара. Случайным образом извлекаются 4 шара. Пусть случайная величина X – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения X
2. Вычислите $E(X)$, $Var(X)$, $\sigma(X)$ и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 3) \qquad P(X > 0) \qquad P(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения F .

Замечание: $X \sim \text{Hypergeom}(7, 2, 4)$

1.2 Двумерные распределения

2 Непрерывные распределения

2.1 Плотность, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия

№1. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности

$$P(X > 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-1 < X < 0.5)$$

3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№2. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx^{\lambda-1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

($\lambda > 0$ – параметр распределения)

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности f
2. Вычислите вероятности

$$P(X > 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-1 < X < 0.5)$$

3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения F и нарисуйте её график

Замечание: графики f и F нарисуйте при $0 < \lambda < 1$ и при $\lambda \geq 1$

№3. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности

$$P(X < 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-5 < X < 0.25)$$

3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№4. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx^2(2-x), & x \in [0, 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности

$$P(X < 1.5) \quad P(X > 1) \quad P(0.5 < X < 1.5) \quad P(-1 < X < 1)$$

3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

№5. Пусть случайная величина X имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} c(x+1)(2-x)^2, & x \in [-1, 2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель c и нарисуйте график плотности

2. Вычислите вероятности

$$P(X < 1) \quad P(X > 1) \quad P(-0.5 < X < 1) \quad P(0 < X < 3)$$

3. Вычислите $E(X)$ и $\text{Var}(X)$

4. Найдите функцию распределения $F(x)$ и нарисуйте её график

2.2 Стандартные распределения

№1. Для распределения $\mathcal{N}(0, 1)$ вычислите

$$\phi(1) \quad \phi(2) \quad \phi(-0.5) \quad \phi(-1.5) \quad \Phi(1) \quad \Phi(2) \quad \Phi(-1) \quad \Phi(-2)$$

№2. Для распределения $\mathcal{N}(1, 0.5^2)$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$$

№3. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 1) \quad P(X > -0.5) \quad P(-1 \leq X \leq 0.5) \quad P(0 < X < 2)$$

№4. Пусть $X \sim \mathcal{N}(1, 1.5^2)$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 2) \quad P(X > 0.5) \quad P(-0.5 \leq X \leq 1.5) \quad P(0 < X < 3)$$

№5. Пусть $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$P(X \leq a) = 0.6 \quad P(X \leq b) = 0.8 \quad P(X \leq c) = 0.9$$

№6. Пусть $X \sim \mathcal{N}(1, 0.5^2)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$P(X \leq a) = 0.7 \quad P(X \leq b) = 0.85 \quad P(X \leq c) = 0.95$$

№7. Для распределения $U[1, 4]$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{0, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 5\}$$

№8. Пусть $X \sim U[-1, 5]$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 0) \quad P(X > 2) \quad P(-0.5 \leq X \leq 3.5) \quad P(0 < X < 4)$$

№9. Для распределения $Exp(2)$ вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$$

№10. Пусть $X \sim Exp(0.5)$. Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 3) \quad P(X > 1) \quad P(0.5 \leq X \leq 2.5) \quad P(1 < X < 3)$$

№11. Пусть $X \sim Exp(0.5)$. Найдите a, b, c т.ч.

$$P(X \leq a) = 0.5 \quad P(X \leq b) = 0.75 \quad P(X \leq c) = 0.95$$

2.3 Критические значения

Замечание: все вычисления необходимо сделать в MS Excel/Python

№1. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения распределения $N(0, 1)$

№2. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения следующих распределений

$$t_{10} \quad t_{100} \quad t_{250} \quad t_{500}$$

№3. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$\chi_2^2 \quad \chi_5^2 \quad \chi_{10}^2 \quad \chi_{20}^2$$

№4. Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$F_{2,100} \quad F_{5,300} \quad F_{10,1000} \quad F_{20,1500}$$

А Основные формулы

А.1 Основы теории вероятностей

А.2 Дискретные случайные величины

А.3 Непрерывные случайные величины

Пусть X – непрерывной распределённая случайная величина. Функция распределения F и плотность f определяются как

$$F(x) = P(X \leq x) \quad f(x) = F'(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

Свойства функции распределения:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad F \uparrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

Свойства плотности

$$f(x) \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Вычисление вероятностей

$$\left. \begin{array}{l} P(a < X < b) \\ P(a \leq X \leq b) \\ P(a < X \leq b) \\ P(a \leq X < b) \end{array} \right\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$
$$\left. \begin{array}{l} P(X < b) \\ P(X \leq b) \end{array} \right\} = F(b) = \int_{-\infty}^b f(t) dt$$
$$\left. \begin{array}{l} P(a < X) \\ P(a \leq X) \end{array} \right\} = 1 - F(a) = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$