

# Задачи по Теории вероятностей и математической статистике

Артамонов Н.В.

6 декабря 2024 г.

## Содержание

<b>1 Дискретные случайные величины</b>	<b>1</b>
1.1 Одномерные распределения . . . . .	1
1.2 Двумерные распределения . . . . .	2
<b>2 Непрерывные распределения</b>	<b>2</b>
2.1 Плотность, функция распределения, математическое ожи- дание, дисперсия . . . . .	2
2.2 Стандартные распределения . . . . .	4
2.3 Критические значения . . . . .	4

## 1 Дискретные случайные величины

### 1.1 Одномерные распределения

**№1.** В урне содержится 3 белых и 3 черных шара. Случайным образом извлекаются 2 шара. Пусть случайная величина  $X$  – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения  $X$
2. Вычислите  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\sigma(X)$  и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 2) \qquad P(X \geq 1) \qquad P(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения  $F$ .

*Замечание:*  $X \sim \text{Hypergeom}(6, 3, 2)$

**№2.** В урне содержится 4 белых и 2 черных шара. Случайным образом извлекаются 3 шара. Пусть случайная величина  $X$  – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения  $X$
2. Вычислите  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\sigma(X)$  и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 3) \qquad P(X > 1) \qquad P(1 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения  $F$ .

*Замечание:*  $X \sim \text{Hypergeom}(6, 4, 2)$

**№3.** В урне содержится 3 белых и 4 черных шара. Случайным образом извлекаются 4 шара. Пусть случайная величина  $X$  – число белых шаров среди выбранных.

1. Найдите таблицу распределения  $X$
2. Вычислите  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\sigma(X)$  и моду распределения
3. Вычислите вероятности

$$P(X < 3) \qquad P(X > 0) \qquad P(0 < X < 3)$$

4. Нарисуйте график функции распределения  $F$ .

*Замечание:*  $X \sim \text{Hypergeom}(7, 2, 4)$

## 1.2 Двумерные распределения

# 2 Непрерывные распределения

## 2.1 Плотность, функция распределения, математическое ожидание, дисперсия

**№1.** Пусть случайная величина  $X$  имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель  $c$  и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности
 
$$P(X > 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-1 < X < 0.5)$$
3. Вычислите  $E(X)$  и  $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения  $F(x)$  и нарисуйте её график

**№2.** Пусть случайная величина  $X$  имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx^{\lambda-1}, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

( $\lambda > 0$  – параметр распределения)

1. Найдите нормировочный множитель  $c$  и нарисуйте график плотности  $f$
2. Вычислите вероятности
 
$$P(X > 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-1 < X < 0.5)$$
3. Вычислите  $E(X)$  и  $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения  $F$  и нарисуйте её график

*Замечание:* графики  $f$  и  $F$  нарисуйте при  $0 < \lambda < 1$  и при  $\lambda \geq 1$

**№3.** Пусть случайная величина  $X$  имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

1. Найдите нормировочный множитель  $c$  и нарисуйте график плотности
2. Вычислите вероятности
 
$$P(X < 0.5) \quad P(0.25 < X < 0.75) \quad P(-5 < X < 0.25)$$
3. Вычислите  $E(X)$  и  $\text{Var}(X)$
4. Найдите функцию распределения  $F(x)$  и нарисуйте её график

## 2.2 Стандартные распределения

**№1.** Для распределения  $\mathcal{N}(0, 1)$  вычислите

$$\phi(1) \quad \phi(2) \quad \phi(-0.5) \quad \phi(-1.5) \quad \Phi(1) \quad \Phi(2) \quad \Phi(-1) \quad \Phi(-2)$$

**№2.** Для распределения  $\mathcal{N}(1, 0.5^2)$  вычислите значение функции распределения и плотности в точках

$$x\{-3, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$$

**№3.** Пусть  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 1) \quad P(X > -0.5) \quad P(-1 \leq X \leq 0.5) \quad P(0 < X < 2)$$

**№4.** Пусть  $X \sim \mathcal{N}(1, 1.5^2)$ . Вычислите следующие вероятности

$$P(X \leq 2) \quad P(X > 0.5) \quad P(-0.5 \leq X \leq 1.5) \quad P(0 < X < 3)$$

## 2.3 Критические значения

**Замечание:** все вычисления необходимо сделать в MS Excel/Python

**№1.** Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения распределения  $\mathcal{N}(0, 1)$

**№2.** Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите (двусторонние) критические значения следующих распределений

$$t_{10} \quad t_{100} \quad t_{250} \quad t_{500}$$

**№3.** Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$\chi_2^2 \quad \chi_5^2 \quad \chi_{10}^2 \quad \chi_{20}^2$$

**№4.** Для уровней значимости: 1%, 5%, 10% вычислите критические значения следующих распределений

$$F_{2,100} \quad F_{5,300} \quad F_{10,1000} \quad F_{20,1500}$$