

Задача 1. Построить однозначную КС грамматику, эквивалентную грамматике

$$S \rightarrow aSbbbb \mid aaaSbb \mid c$$

Решение. Этой грамматикой порождается язык, которому принадлежат слова: $acbbbb$, $aaacbb$, $aaaacbbbbb$ и т. д.

Можно заметить, что этим языком является $a^{n+3m}cb^{4n+2m}$, где $n, m \in \mathbb{Z}$ – количество применений первого и второго правила исходного грамматики соответственно. Тогда порядок применения этих правил не важен. И можно преобразовать данную грамматику:

$$S \rightarrow aSbbbb \mid K$$

$$K \rightarrow aaaSbb \mid c$$

Теперь для того, чтобы показать, что грамматика однозначная, необходимо показать, что можно по слову однозначно восстановить последовательность примененных правил.

Пусть в некотором слове u символов a , и v символов b . Тогда можно записать систему:

$$\begin{cases} n + 3m = u, \\ 4n + 2m = v \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение: $n = \frac{3v-2u}{10}$, $m = \frac{4u-v}{10}$, соответственно можем однозначно определить дерево вывода \square

Задача 2. Описать язык, порождаемый грамматикой

$$F \rightarrow \varepsilon \mid aFaFbF$$

Решение.

Примеры слов, порожденные грамматикой: $\{\varepsilon, aab, aaaabb, aaabab, aabaab, aabaabaab, aaabaabb\}$.

Данная грамматика порождает язык, любой слово которого состоит из символов $\{a, b\}$.

Заметим, что правилами порождается только то слово, в котором количество символов 'a' в 2 раза больше, чем 'b'. Также, каждый раз мы добавляем 2 'a' и 'b', тогда количество символов 'b' в слове – треть его длины.

Также, каждый раз при применении второй альтернативы, слева от 'b' порождается 2 символа 'a', таким образом на любом префиксе слова (количество 'a') $\geq (2 * \text{количество 'b'})$. \square

Задача 3. Определить, является ли следующий язык контекстно-свободным. Если является – привести КС грамматику, если нет – доказать.

$$1. \{a^n b^m c^n d^m \mid n > 0, m > 0\}$$

$$2. \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$3. \{a^k b^m b^{k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$$

Решение.

$$1. L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n > 0, m > 0\}$$

Пусть L – контекстно-свободный язык, тогда $\exists n$, такое $\forall w : |w| > n \exists xyziuv : w = xyziuv, |yu| \neq \varepsilon, |yzv| \leq n$.

Рассмотрим слово $w = a^n b^m c^n d^m = xyziuv$ из языка L и $n = m$.

- Выберем $x = a^i, y = a^l, z = a^p, u = a^q, v = a^{n-i-l-p-q} b^m c^n d^m, i \geq 0, i+q > 0, p \geq 0$. Рассмотрим слово, являющимся накачкой нашего языка – $xy^k z v^k u$.

$$xy^k z v^k u = a^i a^{l*k} a^p a^{kq} a^{n-i-l-p-q} b^m c^n d^m = a^{n+(k-1)(l+q)} b^m c^n d^m$$

Тогда т.к. $l+q \geq 0$, то при $k \neq 1$ выпадаем из языка.

Также по аналогии можно доказать для $yzu = b^m, c^n, d^m$

- Выберем $x = a^{n-i}, y = a^i b^q, z = b^r, u = b^t, v = b^{m-r-q-t} c^n d^m, i \geq 0, j + q + t > 0, r \geq 0$. Накачаем:

$$xy^k z v^k u = a^{n-i} (a^i b^q)^k b^r (b^t)^k b^{m-r-q-t} c^n d^m$$

Если $q \geq 0, k \geq 0$, то при повторении первой скобки слово сразу вылетит из языка (будет что-то типа $a...abab$).

Если $q = 0$, то

$$xy^k z v^k u = a^{n+(k-1)i} b^{m+(k-1)t} c^n d^m$$

Даже при $k = 2$, либо $n + i > n$, либо $m + t > m$

Также по аналогии можно доказать для всех соседних пар $yzu = b^r c^t \dots$

Нашли противоречие, а т.к. единственно предположение – L – кс язык, то L не контекстно-свободный язык

2. $L = \{ww | w \in \{a, b\}^*\}$ Пусть L – контекстно-свободный язык.

Рассмотрим слово: $\delta = a^n b^n a^n b^n$.

Рассмотрим разложения слова на $xuziv$.

- Выберем $x = a^i, y = a^j, z = a^q, u = a^p, v = a^{n-i-j-q-p} b^n a^n b^n, i \geq 0, j + p > 0, q \geq 0$. Накачиваем и получаем: $a^{n+(j+p)(k-1)} b^n a^n b^n$.

Выпадаем из языка, так как не можем разделить слово на 2 одинаковые половины.

По аналогии можно показать выпадание и для b , и для второй половины.

- Выберем $x = a^n b^{n-q-i}, y = b^q, z = b^i a^j, u = a^r, v = a^{b-r-j} b^n, q + r > 0$.

Накачиваем: $a^n b^{n+q(k-1)} a^{n+r(k-1)} b^n$

При $k = 2$ либо $n + q(k-1) \geq n$, либо $n + r(k-1) \geq n$, то есть выпадаем из языка.

- Выберем $x = a^n b^{n-i-j-q}, y = b^i, z = b^j, u = b^q a^p, v = a^{n-p} b^n, i + q + p > 0, j \geq 0$. Накачиваем:

$$a^n b^{n+(k-1)i-q} (b^q a^p)^k a^{n-p} b^n$$

(a) $q > 0, p > 0$, то при $k > 0$ сразу вылетает из язык ($ab...abab..ab$)

(b) $q = 0, p > 0$, то при $k = 2$: $a^n b^{n+i} a^{n+p} b^n$, а неравенство $i + p > 0$, тогда не симметричны, т.к либо $i > 0$ или $p > 0$.

(c) $q > 0, p = 0$, то при $k = 2$: $a^n b^{n+i+q} a^n b^n$, а неравенство $i + q > 0$, то несимметрично $\Rightarrow \notin L$.

(d) $p = 0, q = 0 \Rightarrow i > 0$, то при $k = 2$ $a^n b^{n+i} a^n b^n$, то несимметрично $\Rightarrow \notin L$.

Аналогично можно рассмотреть для $y = a^j b^q, u = b^i$.

- Выберем $x = a^{n-i}, y = a^i b^q, z = b^r, u = b^t, v = b^{n-r-q-t} a^n b^n, i \geq 0, j + q + t > 0, r \geq 0$ Накачаем: $a^{n-i} (a^i b^q)^k b^{n-q+t(k-1)} a^n b^n$. Как в прошлом пункте можно рассмотреть различные варианты $> 0, = 0$ для i, q и взять $k = 2$, рассмотреть неравенство $j + q + t > 0$ при этих значениях и получить противоречия.

Также по аналогии можно доказать для случая $y = b^i, u = a^j b^q$.

- Выберем $x = a^n, y = b^i, z = b^{n-i} a^j, u = a^q, v = a^{n-q-j} b^n, i + q > 0$.

Накачиваем: $a^n b^{n+(k-1)i} a^{n+(k-1)q} b^n$, тогда если $i > 0$ или $q > 0$, то при $k = 2$, либо $n + i > n$, либо $n + q > n$, что выбивает из языка L .

Таким образом найдено противоречие при единственном предположении – L – кс язык, тогда L не контекстно-свободный язык.

3. $\{a^k b^m b^{k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

Запишем язык по-другому

$$\{a^k b^m b^{k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\} \rightarrow \{a^k b^{m+k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\} \rightarrow \{a^k b^k b^l b^m a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$$

Тогда грамматика:

$$S \rightarrow AB \mid BA$$

$$AB \rightarrow a \mid AB \mid b \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow b \mid B \mid \epsilon$$

$$BA \rightarrow b \mid BA \mid a \mid \epsilon$$

□