Студент: Бобров Артём
Группа: SE
Дата: 25 мая 2020 г.

Задача 1. *Построить однозначную КС грамматику, эквивалетную грамматике*

$$S \rightarrow aSbbbb \mid aaaSbb \mid c$$

Решение. Этой грамматикой пораждается язык, которому принадлежат слова: $acbbbb$, $aaacbb$, $aaaacbbbbbb$ и т. д.

Можно заметить, что этим языком является $a^{n+3m}cb^{4n+2m}$, где $n, m \in Z$ – количество применений первого и второго правила исходного грамматики соответственно. Тогда порядок применения этих правил не важен. И можно преобразовать данную грамматику:

$$S \rightarrow aSbbbb \mid K$$

$$K \rightarrow aaaSbb \mid c$$

Теперь для того, чтобы показать, что грамматика однозначная, необходимо показать, что можно по слову однозначно восстановить последовательность примененных правил.

Пусть в некотором слове u символов a, и v символов b. Тогда можно записать систему:

$$\begin{cases} n + 3m = u, \\ 4n + 2m = v \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение: $n = \frac{3v-2u}{10}$, $m = \frac{4u-v}{10}$, соответственно можем однозначано определить дерево вывода □

Задача 2. *Описать язык, порождаемый грамматикой*

$$F \rightarrow \varepsilon \mid aFaFbF$$

Решение.

Примеры слов, порожденные грамматикой: $\{\varepsilon, aab, aaaabb, aaabab, aabaab, aabaaabab, aaabaaabb\}$.

Данная грамматика порождает язык, любой слово которого состоит из символов $\{a, b\}$.

Заметим, что правилами порождается только то слово, в котором количество символов 'a' в 2 раза больше, чем 'b'. Также, каждый раз мы добавляем 2 'a' и 'b', тогда количество символов 'b' в слове – треть его длины.

Также, каждый раз при применении второй альтернативы, слева от 'b' порождается 2 символа 'a', таким образом на любом префиксе слова (количество 'a') $\geq$ (2$*$ количество 'b'). □

Задача 3. *Определить, является ли следующий язык контекстно-свободным. Если является – привести КС грамматику, если нет - доказать.*

1. $\{a^n b^m c^n d^m | n > 0, m > 0\}$
2. $\{ww | w \in \{a, b\}*\}$
3. $\{a^k b^m b^{k+l} a^m | n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

Решение.

1. $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n > 0, m > 0\}$

   Пусть L – контекстно-свободный язык, тогда $\exists n$, такое $\forall w: \ |w| > n \ \exists \ xyzuv: \ w = xyzuv, \ |yu| \neq \varepsilon, \ |yzv| \leq n$.

   Рассмотрим слово $w = a^n b^m c^n d^m = xyzuv$ из языка L. Пусть n из леммы $= m$.

   - Выберем $x = a^i, y = a^l, z = a^p, u = a^q, v = a^{n-i-l-p-q} b^m c^n d^m, \ i \geq 0, i + q \geq 0, p \geq 0$. Рассмотрим слово, являющимся накачкой нашего языка – $xy^k zv^k u$.

     $$xy^k zv^k u = a^i a^{l*k} a^p a^{kq} a^{n-i-l-p-q} b^m c^n d^m = a^{n+(k-1)(l+q)} b^m c^n d^m$$

     Тогда т.к. $l + q \geq 0$, то при $k \neq 1$ выпадаем из языка.

     Также по аналогии можно доказать для $yzu = b^m, c^n, d^m$

- Выберем $x = a^{n-i}, y = a^i b^q, z = b^r, u = b^t, v = b^{m-r-q-t}c^n d^m, i \geq 0, j + q + t \geq 0, r \geq 0$. Накачаем:

  $$xy^k zv^k u = a^{n-i}(a^i b^q)^k b^r (b^t)^k b^{m-r-q-t} c^n d^m$$

  Если $q \geq 0, k \geq 0$, то при повторении первой скобки слово сразу вылетит из языка(будет что-то типо $a..abab$).
  Если $q = 0$, то

  $$xy^k zv^k u = a^{n+(k-1)i} b^{m+(k-1)t} c^n d^m$$

  Даже при $k = 2$, либо $n + (k-1)i > n$, либо $b^{m+(k-1)t} > m$
  Также по аналогии можно доказать для всех соседних пар $yzu = b^r c^t$...

2. $\{ww | w \in \{a, b\}*\}$

3. $\{a^k b^m b^{k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

   Запишем язык по-другому

   $\{a^k b^m b^{k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\} \rightarrow \{a^k b^{m+k+l} a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\} \rightarrow \{a^k b^k b^l b^m a^m \mid n \geq 0, k \geq 0, l \geq 0\}$

   Тогда грамматика:

$$S \to AB\ B\ BA$$
$$AB \to a\ AB\ b \mid \varepsilon$$
$$B \to b\ B \mid \varepsilon$$
$$BA \to b\ BA\ a \mid \varepsilon$$

$\square$