

Maturita Formalita

aneb Jak zvládnout matematiku na jedničku?

5. června 2024

Stížnosti a návrhy na vylepšení můžete zasílat na můj email:

jonas.vybiral.jv@gmail.com.

Obsah

Úvod	3
1 Matematická logika a důkazy	4
1.1 Výroková logika	4
1.2 Odbočka — Predikátová logika	6
1.3 Odbočka — Přirozená dedukce	7
1.4 Důkazy	10

Úvod

Sine mathematica vita nulla est (Bez matematiky život nestojí za nic).

autor neznámý

Tento text má být snaha o trochu pokročilejší náhled na elementární matematiku potřebnou k maturitě. Měl by být vhodný jak pro studenty, kteří se chtějí připravit na maturitu, tak pro ty, kteří chtějí získat hlubší porozumění matematice. Než se pustíme do vysvětlení jak tato kniha funguje, chci Vás odkázat opět na můj email, kam můžete zasílat veškeré dotazy, nejasnosti a připomínky:

jonas.vybiral.jv@gmail.com.

Bežné matematické knihy jsou psané ve formátu definice-věta-důkaz (co tyto věci znamenají se dozvíte brzy). Toto však v tomto textu naleznete pouze v omezené míře. Místo toho se budeme snažit vysvětlit matematické pojmy a věty tak, aby byly srozumitelné pro každého. Pokusím se avšak přidat nějaký náhled na to, jak by to mohlo vypadat, kdybychom se snažili být formální.

Formát knihy bude většinou následující: nejdříve se seznámíme s nějakým pojmem což bude většinou vyznačeno následujícím rámečkem:

Důležitý pojem nebo pravidlo. Rámečkům věnujte extra pozornost.

Poté čtenáři představíme nějaký příklad, který by měl ilustrovat, jak daný pojem funguje. Příklady budou vyznačeny následovně:

Příklad 0.0.1 Příklad na procvičení daného pojmu. Tento příklad bude i řešený.

Cvičení 0.0.2 Cvičení na procvičení daného pojmu.

Nápověda 0.0.2 Pokud bude cvičení náročnější budeme se snažit vždy poskytnout nápovědu aby čtenáři mohla být cesta k řešení usnadněna.

Řešení 0.0.2 Řešení cvičení. Občas bude vynecháno, aby si čtenář mohl cvičení zkusit sám. Vynechávat řešení budeme většinou jen u problémů, které už byly dostatečně procvičeny.

Kapitola 1

Matematická logika a důkazy

Only prove something that already seems to be obvious.

Grant Sanderson

V této kapitole se seznámíme s některými základními pojmy a pravidly, které nám pomohou v matematickém uvažování. Základními bloky jsou pojem výrok a práce s nimi. Po zavedení těchto pojmů se seznámíme s důkazy, díky kterým můžeme ověřit správnost tvrzení.

1.1 Výroková logika

Zde se budeme pouze věnovat základní výrokové logice a na konci si lehce zmíníme něco o predikátové logice. Výroková logika je základním nástrojem matematiky, který nám umožňuje formulovat veškeré matematické tvrzení.

Výrok je tvrzení u kterého lze rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé. Výroky budeme značit písmeny p, q, r, \dots . Pravdivost výroku budeme značit 1 a nepravdivost 0. Těmto číslům se říká pravdivostní hodnoty.

Příklad 1.1.1 Uvedeme si zde několik příkladů výroků:

- p : Venku prší.
- q : $2 + 2 = 69$.
- r : Praha je hlavní město České republiky.
- s : 4 je prvočíslo.
- t : $x^2 + 1 = 0$ má reálná řešení.

Cvičení 1.1.2 Koukněte se na příklad 1.1.1 a rozhodněte, zda jsou jednotlivé výroky pravdivé nebo nepravdivé.

Řešení 1.1.2

- p : Venku prší. — Špatně zapsaný výrok. Není určeno, kde se nacházíme.
- q : $2 + 2 = 69$. — Nepravda. 0.
- r : Praha je hlavní město České republiky. — Pravda. 1.
- s : 4 je prvočíslo. — Nepravda. 0.
- t : $x^2 + 1 = 0$ má reálná řešení. — Nepravda. 0.

Příklad 1.1.3 Důležité je také uvést si, co výrok není.

- Jak se máš?
- Bum!
- Pozor na psa!
- Černá je nejlepší barva. (Toto je názor, nikoliv výrok. Redakce si však myslí, že to je pravda.)

Ještě než se vrhneme na logické spojky, představíme si co to znamená negace výroku.

Negace nebo-li NOT výroku p je výrok, který tvrdí opak výroku p . Negaci výroku p budeme značit $\neg p$.

Příklad 1.1.4 Vezměme si výrok p : Voda v moři je slaná. Negací tohoto výroku je výrok $\neg p$: Voda v moři není slaná.

Upozorňujeme, že v příkladu 1.1.4 opravdu měníme jen slovo 'je' na 'není'. Nepoužíváme například 'Voda v moři je sladká'. Důvodem pro to je, že ne všechno je dichotomie pravda/nepravda. Některé výroky mohou být pravdivé, nepravdivé nebo něco mezi tím. Vezměme například výrok *Kámen je zelený*. Negace je *Kámen není zelený*. Ale nevíme, zda je kámen modrý, červený nebo třeba duhový.

Cvičení 1.1.5 Opět se vraťte k příkladu 1.1.1 a určete negace jednotlivých výroků.

Řešení 1.1.5

- $\neg p$: Venku neprší.
- $\neg q$: $2 + 2 \neq 69$.
- $\neg r$: Praha není hlavní město České republiky.
- $\neg s$: 4 není prvočíslo.
- $\neg t$: $x^2 + 1 = 0$ nemá reálná řešení.

Výroky samotné jsou sice fajn ale co s nimi dělat? K tomu nám poslouží logické spojky. Je to způsob jakým můžeme spojovat výroky do složitějších celků. Proč? Dozvíte se za chvíli.

Rozlišujeme 4 základní logické spojky:

Konjunkce (\wedge): Konjunkce nebo-li AND výroků p a q je výrok, který je pravdivý právě tehdy, když jsou pravdivé oba výroky p a q .

Disjunkce (\vee): Disjunkce nebo-li OR výroků p a q je výrok, který je pravdivý právě tehdy, když je pravdivý alespoň jeden z výroků p a q .

Implikace (\Rightarrow): Implikace nebo-li IF-THEN výroků p a q je výrok, který je nepravdivý právě tehdy, když je pravdivý výrok p a nepravdivý výrok q . V tomto případě lze nad tím přemýšlet jako nad slibem. Když mi někdo něco slíbí, tak to musí splnit, ale pokud to neslíbí, tak je jedno co udělá.

Ekvivalence (\Leftrightarrow): Ekvivalence nebo-li IF-AND-ONLY-IF výroků p a q je výrok, který je pravdivý právě tehdy, když jsou oba výroky p a q pravdivé nebo oba nepravdivé.

Pro větší přehlednost si můžete vytvořit tabulku pravdivostních hodnot pro jednotlivé logické spojky.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Příklad 1.1.6 Uvedme si několik příkladů na logické spojky:

- Konjunkce: $p \wedge q$: Venku prší a je teplo.
- Disjunkce: $p \vee q$: Venku prší nebo je teplo.
- Implikace: $p \Rightarrow q$: Když prší, tak je mokro.
- Ekvivalence: $p \Leftrightarrow q$: Venku prší právě tehdy, když je mokro.

Cvičení 1.1.7 Vraťte se k příkladu 1.1.1 a zkuste si spojit výroky pomocí logických spojek.

1.2 Odbočka — Predikátová logika

Predikátová logika staví na výrokové logice a rozšiřuje ji o kvantifikátory. Pracuje se zde také s množinami výroků. Ty nám umožňují mluvit o všech prvcích nějaké množiny. Základními kvantifikátory jsou:

- Univerzální kvantifikátor \forall : Výrok $\forall x \in M : P(x)$ znamená, že výrok $P(x)$ platí pro všechny prvky množiny M .
- Existenciální kvantifikátor \exists : Výrok $\exists x \in M : P(x)$ znamená, že existuje prvek množiny M , pro který platí výrok $P(x)$.

Toto se nám bude hodit při důkazech, kde budeme chtít mluvit o všech prvcích nějaké množiny (co je množina se také dozvíte). Negace a spojování kvantifikátorů také funguje, ale je to lehce složitější.

Příklad 1.2.1 V predikátové logice se pracuje v takzvaném univerzu. To si vždy zvolíme. Může to být například množina všech reálných čísel, množina všech lidí, množina všech zvířat, atd. Většinou se značí písmenem U . Ukažme si nyní dva příklady. Pokud si za naše univerzum zvolíme množinu všech reálných čísel, můžeme napsat:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$. Tento výrok je pravdivý, protože druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$. Tento výrok je nepravdivý, protože druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná.

Nyní zvolme univerzum všech lidí. Zvolme si takzvané predikáty $M(x)$ a $G(x)$, které budou respektive znamenat, že x zvládl maturitu a x je génius. Nyní můžeme napsat:

- $\forall x \in \text{Lidé} : M(x) \Rightarrow G(x)$. Tento výrok říká, že každý, kdo zvládl maturitu, je génius. O pravdivosti se zde raději nebudeme bavit.
- $\exists x \in \text{Lidé} : M(x) \wedge G(x)$. Tento výrok říká, že existuje někdo, kdo zvládl maturitu a je génius.

Všimněte si, že v prvním příkladě jsme mluvili o všech reálných číslech a v druhém o všech lidech. To je důležité, protože výrok může být pravdivý v jednom univerzu a nepravdivý v jiném.

Nyní si ukážeme, jak se neguje kvantifikátor. Negace univerzálního kvantifikátoru je existenciální kvantifikátor a naopak.

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M : P(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg P(x) \\ \neg(\exists x \in M : P(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg P(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Je to celkem intuitivní. Pokud něco platí pro všechny, stačí nám najít jedno, kde to neplatí. Pokud neexistuje ani jedno, kde to platí, tak to neplatí pro všechny.

1.3 Odbočka — Přirozená dedukce

Jeden z formálních dokazovacích systémů je přirozená dedukce. Tento systém je založen na pravidlech, které nám umožňují odvodit nové výroky z již známých.¹ Většina pravidel je intuitivních a vychází z toho, jak my lidé přirozeně uvažujeme. Tato sekce je uvedena opět jako odbočka, ale doporučuji si ji projít abyste v dalších kapitolách chápali jak se dělají důkazy.

Je zde pár pravidel, ale ty si uvádět nebudeme. Koukneme se na příklady a vysvětlíme si to u nich.

Většinou našim cílem bude odvodit nějaký výrok q z předpokladů p_1, p_2, \dots, p_n . To značíme jako $p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$. Předpoklad je výrok, který považujeme za pravdivý. Nutno ještě zmínit co znamená pomocný předpoklad. Pro větší přehlednost si kreslíme box kolem našeho ‘světa’ ve kterém se pohybujeme. Pokud si vytvoříme nový box, tak to znamená, že v něm a jen v něm platí ty předpoklady, které jsme si tam napsali. Pokud z něj odejdeme, tak už ty předpoklady neplatí. Může se to zdát zbytečné, ale většinou nám to pomůže důkaz dokončit viz příklad 1.3.2.

Příklad 1.3.1 Ukažme si nyní, jak bychom mohli dokázat, že $p \wedge q \vdash q \wedge p$. Budeme postupovat pomocí přirozené dedukce. Začneme tedy předpokladem $p \wedge q$ a budeme chtít dokázat $q \wedge p$.

1. $p \wedge q$ (předpoklad)
2. p (eliminace konjunkce z 1)
3. q (eliminace konjunkce z 1)
4. $q \wedge p$ (zavedení konjunkce z 3 a 2)

Tímto jsme dokázali, že $p \wedge q \vdash q \wedge p$. Zde jsme použili pravidla eliminace konjunkce a zavedení konjunkce. Tyto pravidla vychází z toho, že pokud víme, že platí $p \wedge q$, tak víme, že platí p a q samostatně a naopak. U ostatních pravidel to tak jednoduché nebude.

Provedeme si nyní nějakou přípravu, která bude působit zbytečně, ale v dalších kapitolách se nám to bude hodit.

Příklad 1.3.2 Ukažme si, jak bychom mohli dokázat, že $p \Rightarrow q \vdash \neg q \Rightarrow \neg p$. Budeme postupovat pomocí přirozené dedukce. Začneme tedy předpokladem $p \Rightarrow q$ a budeme chtít dokázat $\neg q \Rightarrow \neg p$.

1. $p \Rightarrow q$ (předpoklad)
2. $\neg q$ (pomocný předpoklad)
 3. $\neg p$ (modus tollens z 1 a 2)
4. $\neg q \Rightarrow \neg p$ (zavedení implikace z 2 a 3)

Tímto jsme dokázali, že $p \Rightarrow q \vdash \neg q \Rightarrow \neg p$. Zde jsme použili pravidlo modus tollens. To říká, že pokud víme, že platí $p \Rightarrow q$ a $\neg q$, tak můžeme odvodit $\neg p$. To vychází přímo z definice implikace. Pokud někdo něco nesplnil, ale slib ‘vyšel’ pozitivně, tak to znamená, že to ani neslíbil. Zde je krásně vidět, jak nám pomocný předpoklad pomohl. Protože jsme viděli, že když budeme předpokládat $\neg q$, tak můžeme odvodit $\neg p$ a z toho jsme zavedli chtěnou implikaci.

Pozorného čtenáře jistě napadlo, že místo tohoto postupu si můžeme napsat pravdivostní tabulku a zjistit, že tvrzení platí. To bychom se připravili o všechnu zábavu a pro složitější tvrzení by tabulka rostla exponenciálně. Uvedeme si zde pro představu jak by vypadala tabulka pro příklad 1.3.2

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

¹Přirozený důsledek lze zavést i pro predikátovou logiku, ale to je nad rámec tohoto textu.

Příklad 1.3.3 Pojdme si nyní odpočinout od úplně formálních příkladů a podívat na trochu méně formální příklad. Mějme následující tvrzení:

- Na výlet pojede Petr nebo Quido.
- Jestliže pojede Quido, pojede Simona a nepojede Renata.
- Jestliže pojede Tomáš, pojede i Renata.
- Jestliže pojede Simona, pojede Tomáš.

Chceme zjistit, zda je pravda tvrzení ‘Petr pojede na výlet’.² Budeme postupovat pomocí přirozené dedukce. Začneme tedy předpoklady, které máme a budeme chtít dokázat, že Petr pojede na výlet. Pojmenujeme si výroky p : Petr pojede na výlet, q : Quido pojede na výlet, s : Simona pojede na výlet, t : Tomáš pojede na výlet, r : Renata pojede na výlet.

1. $p \vee q$ (předpoklad)
 2. $q \Rightarrow (s \wedge \neg r)$ (předpoklad)
 3. $t \Rightarrow r$ (předpoklad)
 4. $s \Rightarrow t$ (předpoklad)
5. $\neg p$ (pomocný předpoklad)
 6. q (eliminace disjunkce z 1)
 7. $s \wedge \neg r$ (modus ponens z 2 a 6)
 8. s (eliminace konjunkce z 7)
 9. t (modus ponens z 4 a 8)
 10. r (modus ponens z 3 a 9)
 11. $\neg r$ (eliminace konjunkce z 7)
 12. \perp (eliminace negace z 10 a 11)
13. $\neg \neg p$ (reductio ad absurdum z 5–12)
 17. p (eliminace dvojí negace z 13)

Tímto jsme dokázali, že Petr pojede na výlet. Zde jsme použili pravidla eliminace disjunkce, modus ponens a reductio ad absurdum. Pojdme si spolu pravidla vysvětlit.

- Eliminace disjunkce: Pokud víme, že platí $p \vee q$ a víme, že jedno z nich neplatí, tak můžeme odvodit to druhé.
- Modus ponens: Pokud víme, že platí $p \Rightarrow q$ a p , tak můžeme odvodit q . Někdo mi něco slíbil a já vím, že slib byl úspěšný, takže to i splnil.
- Reductio ad absurdum: Pokud předpokládáme něco a dokážeme, že z toho vyplývá spor, tak můžeme odvodit, že to, že platí negace našeho předpokladu.

Cvičení 1.3.4 Ať si taky něco procvičíte, zkuste si dokázat, že $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$.³

Řešení 1.3.4

1. $p \Rightarrow q$ (předpoklad)
 2. $q \Rightarrow r$ (předpoklad)
3. p (pomocný předpoklad)
 4. q (modus ponens z 1 a 3)
 5. r (modus ponens z 2 a 4)
6. $p \Rightarrow r$ (zavedení implikace z 3–5)

²Toto lze také převést na problém sématického důsledku a řešit resoluční metodou. Tímto spojením se zabývá věta o úplnosti, která je též nad rámec této středoškolské knihy.

³Pokud se vám to povede, tak gratuluji. Nejsou zde vypsána pravidla, takže se ani nepředpokládá, že byste to měli zvládnout.

Nebudeme vás nadále trápit, ale ještě si ukážeme odkud se berou vzorečky negací složených výroků.

Příklad 1.3.5 (De Morganovy zákony) De Morganovy zákony jsou zákony, které nám říkají, jak se neguje konjunkce a disjunkce. Jsou to následující vzorečky:

$$\begin{aligned}\neg(p \wedge q) &\dashv\vdash \neg p \vee \neg q \\ \neg(p \vee q) &\dashv\vdash \neg p \wedge \neg q\end{aligned}\tag{1.2}$$

Tyto zákony se dají dokázat pomocí pravdivostní tabulky, ale my si je zde formálně dokážeme. Dají se zobecnit matematickou indukcí (už se brzy dozvíte co to je) na libovolný počet výroků následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}\neg\left(\bigwedge_{i=1}^n p_i\right) &\dashv\vdash \bigvee_{i=1}^n \neg p_i \\ \neg\left(\bigvee_{i=1}^n p_i\right) &\dashv\vdash \bigwedge_{i=1}^n \neg p_i.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Uvedeme zde důkaz prvního De Morganova zákona. Zbytek necháme jako cvičení pro čtenáře.

1. $\neg(p \wedge q)$ (předpoklad)

2. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ (pomocný předpoklad)

3. $\neg p$ (pomocný předpoklad)
4. $\neg p \vee \neg q$ (zavedení disjunkce z 3)
5. \perp (eliminace negace z 4 a 2)

6. p (reductio ad absurdum z 3–5)

7. $\neg q$ (pomocný předpoklad)
8. $\neg p \vee \neg q$ (zavedení disjunkce z 7)
9. \perp (eliminace negace z 8 a 2)

10. q (reductio ad absurdum z 7–9)
11. $p \wedge q$ (zavedení konjunkce z 6 a 10)
12. \perp (eliminace negace z 11 a 1)

13. $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$ (reductio ad absurdum z 1–12)

14. $\neg p \vee \neg q$ (eliminace dvojí negace z 13)

1. $\neg p \vee \neg q$ (předpoklad)

2. $p \wedge q$ (pomocný předpoklad) 3. p (eliminace konjunkce z 2)
4. q (eliminace konjunkce z 2)

5. $\neg p$ (pomocný předpoklad)
6. \perp (eliminace negace z 3 a 5)

7. $\neg q$ (pomocný předpoklad)
8. \perp (eliminace negace z 4 a 7)

9. \perp (eliminace konjunkce z 6 a 8)

10. $\neg(p \wedge q)$ (reductio ad absurdum z 2–9)

Mohli bychom pokračovat dál, ale máme tu ještě spoustu dalších zajímavých věcí, které chceme probrat. Pokud vás toto téma zaujalo, tak si doporučuji přečíst si knihu

Jiří Velebil, *Velmi jemný úvod do matematické logiky*, Praha 2007

1.4 Důkazy

Důkazy jsou základním nástrojem matematiky a bez nich bychom se nedostali daleko. V této kapitole si ukážeme několik základních typů důkazů, které se v matematice používají. V úvodní kapitole byl zmíněn systém definice-věta-důkaz. Než tedy přejdeme k důkazům, tak si ještě jednou připomeneme co tento systém znamená.

Definice je vymezení pojmu, ze kterým hodláme pracovat. Definice obsahuje název a charakteristické vlastnosti daného pojmu.

Věta je výrok, který je pravdivý a musí být dokázán. Většinou rozvíjíme nějaký pojem, který jsme si definovali.

Důkaz je postup, který nám ukazuje, proč je věta pravdivá. Důkaz se skládá z předpokladů a závěru. Předpoklady jsou věty, které už máme dokázané a závěr je věta, kterou chceme dokázat.

Příklad 1.4.1 Vyzkoušejme si zde jak by vypadal jednoduchý důkaz. V matematické literatuře by to vypadalo následovně:

Věta 1.2.3⁴ (O součtu dvou sudých čísel): Součet dvou sudých čísel je sudé číslo.

DŮKAZ. Nechť a a b jsou sudá čísla. Pak existují taková čísla $k, l \in \mathbb{Z}$, že $a = 2k$ a $b = 2l$. Potom

$$a + b = 2k + 2l = 2(k + l), \quad (1.4)$$

kde $k + l \in \mathbb{Z}$. Tedy $a + b$ je sudé číslo. ■

Důkaz není úplně korektní, ale za předpokladu, že víme, co znamená, že číslo je sudé, tak bychom mohli tento důkaz přijmout.

Cvičení 1.4.2 Zkuste si nyní dokázat, že součet dvou lichých čísel je sudé číslo.

Řešení 1.4.2

DŮKAZ. Nechť a a b jsou lichá čísla. Pak existují taková čísla $k, l \in \mathbb{Z}$, že $a = 2k + 1$ a $b = 2l + 1$. Potom

$$a + b = 2k + 1 + 2l + 1 = 2(k + l + 1), \quad (1.5)$$

kde $k + l + 1 \in \mathbb{Z}$. Tedy $a + b$ je sudé číslo. ■

⁴Nenechte se zmást značením. Je zde uvedeno jako příklad, nezapadá však do našeho číslování.