§ 3. Интерполирование функций.

Пусть значения некоторой функции $f(x)$, полученные из эксперимента или найденные с помощью вычислений, упорядочены в следующую таблицу:

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	$\dots$	f_{n-1}	f_n

Таблица 3.1

При этом нам требуется вычислить значение функции $\tilde{f} = f(\tilde{x})$ для некоторого значения аргумента $\tilde{x}$, принадлежащего отрезку интерполирования $[x_0, x_n]$, но не совпадающего ни с одной из табличных абсцисс $x_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$.

Очевидный прием решения этой задачи – вычислить значение $\tilde{f} = f(\tilde{x})$, воспользовавшись аналитическим выражением функции $f(x)$.

Этот прием, однако, можно применить лишь в том случае, когда аналитическое выражение $f(x)$ пригодно для вычислений.

Более того, может оказаться, что аналитическое выражение функции $f(x)$ нам вовсе неизвестно или таковое вычисление будет принципиально невыполнимым.

В этих случаях применяется особый прием – построение по исходным числовым данным (Таблице 3.1) приближающей функции $F(x)$, близкой в некотором смысле к функции $f(x)$, и аналитическим выражением которой можно воспользоваться для вычислений, считая приближенно, что

$$f(x) \cong F(x). \tag{3.1}$$

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений функций $f(x)$ и $F(x)$ в точках $x_i, \quad (i = 0, 1, \dots, n)$, т.е.

$$F(x_0) = f_0, \quad F(x_1) = f_1, \quad \dots, \quad F(x_n) = f_n. \tag{3.2}$$

В этом случае нахождение приближающей функции называют ***интерполяцией*** (или ***интерполированием***), а точки $x_0, \ x_1, \ \dots, \ x_n$ – ***узлами интерполяции,*** а промежуток $[x_0, x_n]$ – ***интервалом (отрезком) интерполирования***.

Если значение аргумента $\tilde{x}$ расположено вне интервала таблицы $[x_0, x_n]$, то указанная математическая операция называется ***экстраполяцией***.

Можно, например, искать интерполирующую функцию $F(x)$ в виде алгебраического многочлена:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{3.3}$$

Этот многочлен степени n имеет $n+1$ неизвестный коэффициент.

Естественно предполагать, что $n+1$ условие (3.2), накладываемое на многочлен (3.3), позволит однозначно определить все его коэффициенты.

Действительно, требуя для многочлена $P_n(x)$ выполнения условий (3.2), получаем систему $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k = f_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Решая эту систему относительно неизвестных коэффициентов a_0, a_1, …, a_n, мы и получим аналитическое выражение полинома (3.3).

Система (3.4) всегда имеет единственное решение, так как ее определитель, известный как определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{отличен от нуля.}$$

Отсюда следует, что интерполяционный многочлен $P_n(x)$ для функции $f(x)$, заданной исходной таблицей (3.1), существует и единствен.

Описанный прием в принципе можно использовать и для практического решения задачи интерполирования многочленом вида (3.2), однако на практике используются другие, более удобные и менее трудоемкие способы.

§ 3.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

Пусть функция $f(x)$ задана Таблицей 3.1.

Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$, для которого выполнены условия (3.2) и степень которого не больше n, в виде:

$$L_n(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \ldots + \alpha_n(x), \quad x \in [x_0, x_n], \tag{3.5}$$

где $\alpha_i(x)$ – многочлены степени n, причем

$$\alpha_i(x_k) = \begin{cases} f_i, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \tag{3.6}$$

Многочлены $\alpha_i(x)$ составим следующим способом:

$$\alpha_i(x) = c_i \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \times \ldots \times (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \times \ldots \times (x - x_n),$$

где c_i – константа, значение которой определяется из условия (3.6).

Из условия (3.6) при $i = k$ вытекает, что

$$c_i = \frac{f_i}{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \times \ldots \times (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \times \ldots \times (x - x_n)}, \tag{3.7}$$

и замечаем, что ни один сомножитель в знаменателе дроби не равен нулю.

Таким образом, интерполяционный многочлен Лагранжа построен нами в следующем виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \left[\frac{(x - x_0) \times \ldots \times (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \times \ldots \times (x - x_n)}{(x_i - x_0) \times \ldots \times (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \times \ldots \times (x_i - x_n)} \right]. \tag{3.8}$$

Если таблица исходных данных содержит только 2 узла, т.е.

x	x_0	x_1
$f(x)$	f_0	f_1

Таблица 4.2

то соответствующий интерполяционный многочлен Лагранжа будет представлять собой линейную функцию:

$$L_1(x) = f_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f_1 \cdot (x - x_0) - f_0 \cdot (x - x_1)}{x_1 - x_0} =$$
$$= \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} x - \frac{f_1 \cdot x_0 - f_0 \cdot x_1}{x_1 - x_0} = ax + b, \tag{3.9}$$

где

$a = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$ – угловой коэффициент (тангенс угла наклона прямой к оси Ox),

$b = -\dfrac{f_1 \cdot x_0 - f_0 \cdot x_1}{x_1 - x_0}$ – свободный член,

$x \in [x_0, x_1]$ – область определения интерполяционного многочлена (3.9).

Формула (3.9) относится к так называемому линейному интерполированию, см. Рисунок 3.1.

Линейное интерполирование представляет собой самый простой способ реализации данной математической операции.

Им пользуются в основном для проведения предварительных вычислений либо для построения кусочно-линейных (полигональных) графиков или диаграмм функций на основе их таблиц.

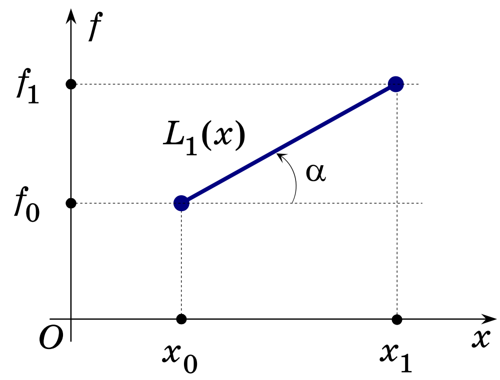


Рисунок 3.1

Пусть теперь нам задана следующая таблица данных:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	f_3

Таблица 3.3

Для Таблицы 3.3 интерполяционный многочлен Лагранжа будет выглядеть следующим образом:

$$L_3(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x), \quad x \in [x_0, x_3], \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_0(x) &= f_0 \cdot \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)\cdot(x_0 - x_3)},\\
\alpha_1(x) &= f_1 \cdot \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)},\\
\alpha_2(x) &= f_2 \cdot \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_3)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - x_3)},\\
\alpha_3(x) &= f_3 \cdot \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)}{(x_3 - x_0)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

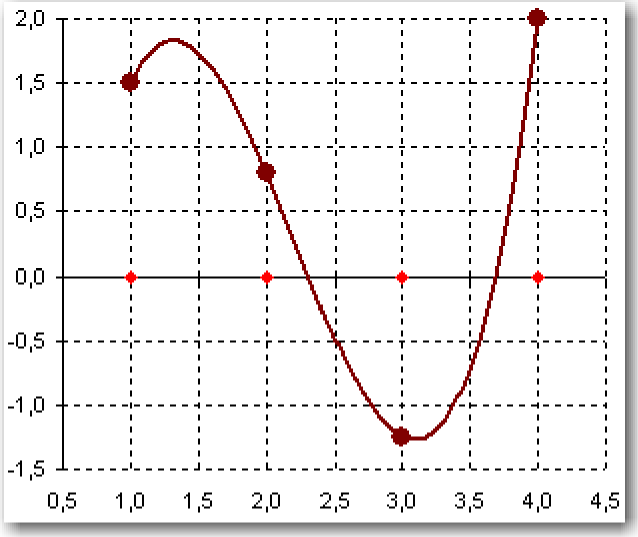


График 3.1 – многочлен $L_3(x)$.

На графике 3.1 изображен кубический интерполяционный многочлен Лагранжа вида (3.10), построенный для таблицы 3.3 с конкретными данными:

x	1.00	2.00	3.00	4.00
$f(x)$	1.50	0.80	–1.25	2.00

Таблица 3.4

Как следует из формул (3.10)–(3.11), кубический интерполяционный многочлен (3.10), построенный для рассматриваемой выше Таблицы 3.3 по 4 узлам, будет представлять собой сумму из четырех кубических многочленов $\alpha_i(x)$.

Конкретный вид этих многочленов для значений из Таблицы 3.4 будет следующим:

$$\alpha_0(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} = -\frac{1}{6}\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4),$$

$$\alpha_1(x) = \frac{4}{5}\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(1)\cdot(-1)\cdot(-2)} = \frac{2}{5}\cdot(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4),$$

$$\alpha_2(x) = -\frac{5}{4}\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{(2)\cdot(1)\cdot(-1)} = \frac{5}{8}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4),$$

$$\alpha_3(x) = 2\cdot\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(3)\cdot(2)\cdot(1)} = \frac{1}{3}\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3).$$

Далее, на графиках 4.2–4.5, построены все эти многочлены.

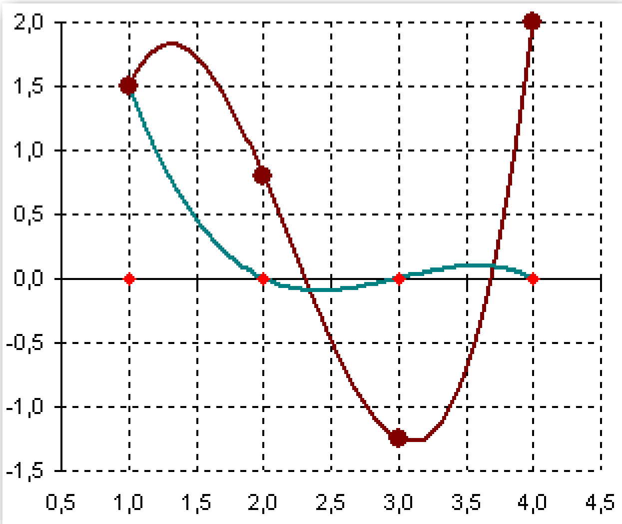


График 3.2 – многочлены $L_3(x)$ и $\alpha_0(x)$.

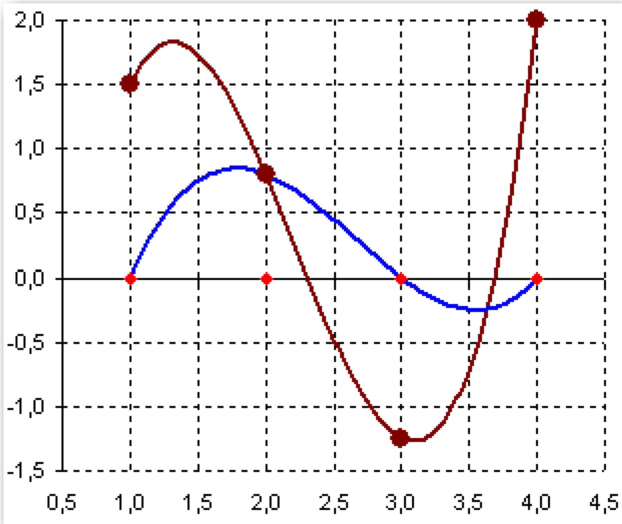


График 3.3 – многочлены $L_3(x)$ и $\alpha_1(x)$.

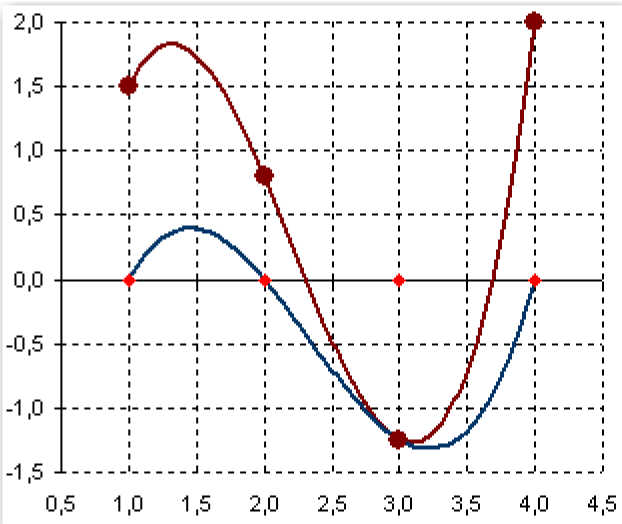


График 3.4 – многочлены $L_3(x)$ и $\alpha_2(x)$.

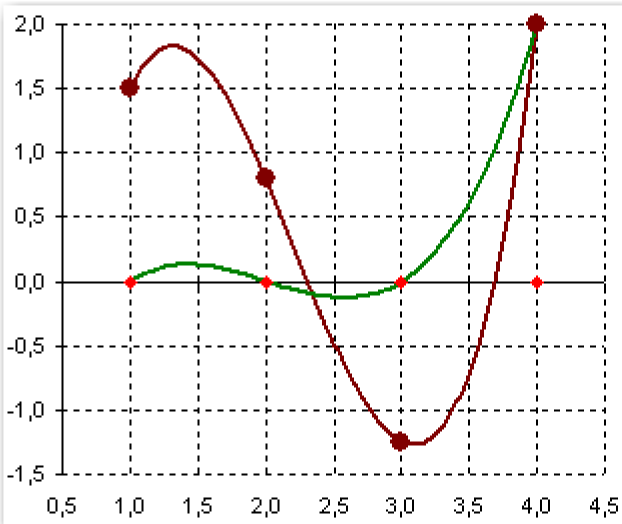


График 3.5 – многочлены $L_3(x)$ и $\alpha_3(x)$.

На всех Графиках 3.2–3.5 мы можем проследить выполнение обязательных условий интерполирования (3.6).

А именно, каждый из многочленов $\alpha_i(x)$ принимает соответствующее табличное значение f_i в узле x_i, т.е. имеем $\alpha_i(x_i) = f_i$.

В остальных узлах из таблицы исходных данных многочлен $\alpha_i(x)$ обращается строго в нуль, что легко проследить на каждом из графиков (график функции $\alpha_i(x)$ пересекает ось абсцисс Ox в трех точках красного цвета).

Также очевидно, что вне границ отрезка интерполирования $[x_0, x_n]$ все рассмотренные выше многочлены будут строго монотонны.

Интерполирование по Лагранжу можно считать удобным для программной реализации в виде семейства библиотечных методов.

Очевидно, что компьютерные вычисления по формуле (3.8) потребуют достаточно большого количества арифметических операций, включая такие «плохие» операции как вычитание и деление.

Однако простота алгоритма (3.8) и корректная запись программного кода могут свести к минимуму указанные выше недостатки.

Например, формулу (3.8) следует переписать в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \left[\left(\frac{x - x_0}{x_i - x_0}\right) \times \ldots \times \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \cdot \left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right) \times \ldots \times \left(\frac{x - x_n}{x_i - x_n}\right)\right], \qquad (3.12)$$

и уже после этого приступать к ее непосредственной программной реализации.

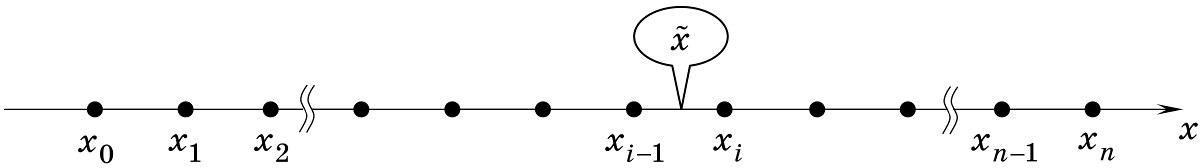
Если же исходная таблица данных содержит в себе значительное количество узлов интерполирования, например, $n \geq 10$, то степень n интерполяционного многочлена Лагранжа (3.12) будет неоправданно большой, что неотвратимо повлечет потерю верных значащих цифр в итоговом результате.

Поэтому мы рассмотрим «оптимизацию» для практической реализации вычислений по формуле (3.12).

Пусть нас устраивает тот факт, что интерполяционный многочлен Лагранжа будет иметь степень m, которая удовлетворяет условию $1 \leq m \leq n$.

Для построения такого многочлена Лагранжа нам потребуется не вся исходная Таблица функции 3.1, а только та ее часть, которая обеспечит возможность построения многочлена Лагранжа степени m и даст при этом наилучшую точность вычислений.

К построению такого интерполяционного многочлена мы должны «привлечь» те узлы из исходной таблицы функции, которые непосредственно примыкают к интервалу $[x_{i-1}, x_i]$, содержащему расчетное значение аргумента $\tilde{x}$, удовлетворяющее обязательному условию $x_{i-1} \leq \tilde{x} \leq x_i$ интерполирования.



Общее количество таких узлов должно быть $2 \leq m + 1 \leq n + 1$.

Составим алгоритм определения индексных границ для той части исходной таблицы функции, что содержит расчетное значение аргумента $\tilde{x}$.

Входными параметрами нашего алгоритма будут:

1) упорядоченные массивы значений аргумента x_i и функции f_i;

2) n – общее количество интервалов таблицы функции;

3) m – степень интерполяционного многочлена Лагранжа;

4) $\tilde{x}$ – расчетное значение аргумента.

Результатом выполнения алгоритма будут индексные границы i_L и i_R той части исходной таблицы, что обеспечит возможность построения многочлена Лагранжа степени m для заданного расчетного значения аргумента $\tilde{x}$.

Тогда искомое значение интерполяционного многочлена должно будет вычисляться по формуле, вытекающей из представления (3.12):

$$L_m(\tilde{x}) = \sum_{i=i_L}^{i_R} f_i \cdot \left[\left(\frac{\tilde{x} - x_{i_L}}{x_i - x_{i_L}} \right) \times \ldots \times \left(\frac{\tilde{x} - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) \cdot \left(\frac{\tilde{x} - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right) \times \ldots \times \left(\frac{\tilde{x} - x_{i_R}}{x_i - x_{i_R}} \right) \right]. \quad (3.*)$$

Примем следующие правила для проверки корректности задания и использования значений входящих параметров: степени m интерполяционного многочлена Лагранжа и расчетного значения аргумента $\tilde{x}$.

Если входное значение параметра m оказывается меньше, чем 1, то строится линейный интерполяционный многочлен на интервале $x_{i-1} \le \tilde{x} \le x_i$, т.е. принимается, что $m = 1$, $i_L = i - 1$, $i_R = i$.

Если входное значение параметра m оказывается больше, чем n, то строится интерполяционный многочлен на всем интервале $[x_0, x_n]$ таблицы функции, т.е. принимается, что $m = n$, $i_L = 0$, $i_R = n$.

Если расчетное значение аргумента $\tilde{x}$ оказывается вне границ таблицы функции, т.е. либо $\tilde{x} < x_0$, либо $\tilde{x} > x_n$ (а это уже задача ***экстраполирования***), то вычисления не производятся и возвращаемым значением интерполяционного многочлена $L_m(\tilde{x})$ будет `double.NaN`, и $i_L = 0$, $i_R = 0$.

Если определен интервал $[x_{i-1}, x_i]$ исходной таблицы функции, для которого выполняется условие $x_{i-1} \le \tilde{x} \le x_i$, и $1 < m < n$, то установление значений индексных границ i_L и i_R должно выполняться последовательно по следующему правилу.

Сначала принимаем, что $i_L = i - 1$ и $i_R = i$. При этом «текущее» значение степени интерполяционного многочлена M будет равно 1 (а нам требуется $\mathrm{M} = m$).

Будем последовательно «расширять» индексные границы влево и вправо от интервала $[x_{i-1}, x_i]$ до тех пор, пока не выполнится условие $\mathrm{M} = i_R - i_L = m$.

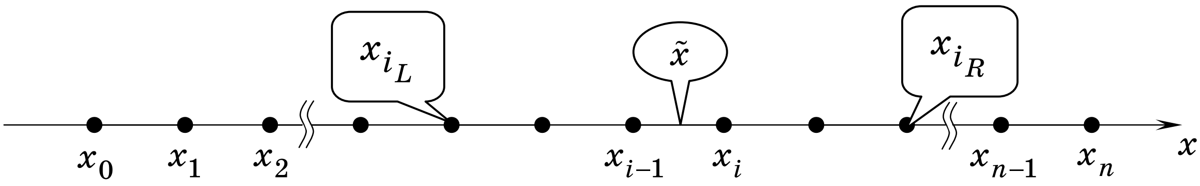
На каждом таком «циклическом шаге» значение i_L будем уменьшать на 1, а значение i_R будем увеличивать на 1.

Очевидно, что не может быть $i_L < 0$ или $i_R > n$.

Поэтому, если будет достигнуто значение $i_L = 0$, то левая индексная граница i_L далее не уменьшается.

А если будет достигнуто значение $i_R = n$, то правая индексная граница i_R далее не увеличивается.

Ниже приводится рисунок, когда $m = 5$, $i_L = i - 3$, $i_R = i + 2$.



После того, как левая i_L и правая i_R индексные границы установлены, остается только непосредственно вычислить по формуле (3.*) искомое значение $L_m(\tilde{x})$ интерполяционного многочлена Лагранжа для расчетного значения аргумента $\tilde{x}$.

Сказанное выше будет Вами реализовано при выполнении Лабораторной работы 2.1 в виде соответствующих методов в отдельном классе алгоритмов интерполяции.

В заключении отметим, что интерполирование по Лагранжу не требует равноотстоящих узлов, а также каких-либо предварительных (дополнительных) преобразований или вычислений на базе исходной таблицы функции (таблицы данных).

Далее мы рассмотрим иные, более сложные методы интерполирования, где такие операции уже будут необходимы.

§ 4.2 Интерполяционный многочлен Ньютона.

Часто интерполирование производится для функций $f = f(x)$, заданных таблицами с равноотстоящими значениями их аргумента.

В этом случае шаг $h_i = x_i - x_{i-1}$ таблицы функции, является величиной постоянной, т.е. $h_i = h = const$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Для таких таблиц построение интерполяционных формул заметно упрощается.

Конечные разности.

Пусть функция $f(x)$ задана Таблицей 4.1 с постоянным шагом h.

Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются ***конечными разностями первого порядка***:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из разностей первого порядка строятся ***конечные разности второго порядка***:

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

а по ним – ***конечные разности третьего порядка***:

$$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Продолжая этот процесс, можно по исходной таблице функции составить следующую таблицу конечных разностей, где n – порядок старшей разности:

x	f	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	...	$\Delta^{n-1} f_i$	$\Delta^n f_i$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	...	$\Delta^{n-1} f_0$	$\Delta^n f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	…	...	$\Delta^{n-1} f_1$	
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	...	…	…		
x_3	f_3	Δf_3	...	…	…			
x_4	f_4	...	…	…				
...	...	…	…					
x_{n-1}	f_{n-1}	Δf_{n-1}						
x_n	f_n							

Таблица 4.5.

Таблицу 4.5 можно понимать как совокупность одномерного массива абсцисс x_i и собственно таблицы конечных разностей, в которой столбец значений f_i можно трактовать как конечные разности нулевого порядка.

Ячейки таблицы 4.5, окрашенные в бирюзовый цвет, остаются незаполненными.

Очевидно, что конечные разности любого порядка могут быть вычислены непосредственно через табличные значения функции f_i.

Для разностей первого порядка это следует из определения, а для разностей второго порядка имеем:

$$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = (f_{i+2} - f_{i+1}) - (f_{i+1} - f_i) = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i .$$

Аналогично для разностей третьего порядка:

$$\begin{aligned}\Delta^3 f_i &= \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i = (f_{i+3} - 2f_{i+2} + f_{i+1}) - (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) = \\ &= f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i .\end{aligned}$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^k f_i = f_{i+k} - k \cdot f_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot f_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k f_i .$$

Первая интерполяционная формула Ньютона.

Пусть для функции, заданной Таблицей 4.1 с постоянным шагом h, нами предварительно составлена Таблица 4.5 конечных разностей.

Будем строить интерполяционный многочлен $n-$й степени в виде:

$$\begin{aligned}P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ \ldots + a_n \cdot (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) .\end{aligned} \tag{4.13}$$

Значения коэффициентов $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ определим из условия совпадения значений исходной функции $f = f(x)$ и многочлена $P_n(x)$ в узлах x_i.

Подстановка значения $x = x_0$ в (4.13) дает нам

$$f_0 = P_n(x_0) = a_0 .$$

Затем, присваивая переменной x последовательно значения x_1 и x_2, мы получаем:

$$f_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = f_0 + a_1 \cdot h ,$$

откуда
$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f_0}{h} ;$$

и

$$f_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1 \cdot (x_2 - x_0) + a_2 \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) =$$

$$= f_0 + \frac{\Delta f_0}{h} \cdot 2h + a_2 \cdot 2h \cdot h = f_0 + 2 \cdot (f_1 - f_0) + a_2 \cdot 2h^2,$$

откуда $$f_2 - 2f_1 + f_0 = \Delta^2 f_0 = 2h^2 a_2 \;\text{ и }\; a_2 = \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}.$$

Далее, проведя аналогичные выкладки, можно получить $a_3 = \dfrac{\Delta^3 f_0}{3!h^3}$, а в общем случае выражение для коэффициента a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}. \tag{4.14}$$

Подставим (4.14) в выражение для многочлена (4.13):

$$P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2} \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n} \cdot (x - x_0) \times \ldots \times (x - x_{n-1}). \tag{4.15}$$

На практике интерполяционная формула (4.15) применяется в несколько ином виде.

Введем новую безразмерную переменную (замена переменной):

$$t = \frac{x - x_0}{h}, \text{ т.е. } x = x_0 + h \cdot t, \quad \text{при } x_0 \le x \le x_1 \text{ имеем } 0 \le t \le 1.$$

Тогда $$\frac{x - x_0}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1, \quad \frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2, \quad \text{и т.д.}$$

Окончательно имеем:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + h \cdot t) = f_0 + t \cdot \Delta f_0 + \frac{t \cdot (t-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_0 + \ldots + \\ + \frac{t \cdot (t-1) \times \ldots \times (t - n + 1)}{n!} \cdot \Delta^n f_0. \tag{4.16}$$

Формула (4.16) называется ***первой интерполяционной формулой Ньютона***.

На практике формула (4.16) используется для интерполирования, когда аргумент x расположен ближе к левой границе x_0 общего интервала интерполирования $[x_0, x_n]$, чем к его правой границе x_n, т.е. когда $x - x_0 < x_n - x$.

Первую интерполяционную формулу Ньютона (4.16) по этой причине еще называют формулой для интерполирования «вперед».

Проиллюстрируем сказанное выше на следующем примере.

Пусть исходная таблица данных содержит 7 узлов интерполирования ($n = \mathbf{6}$), а соответствующая ей таблица конечных разностей построена вплоть до разностей четвертого порядка:

x	f	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$
x_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$	$\Delta^3 f_3$	
x_4	f_4	Δf_4	$\Delta^2 f_4$		
x_5	f_5	Δf_5			
x_6	f_6				

Таблица 4.6.

Если расчетное значение аргумента $x = x_*$ принадлежит первому интервалу таблицы данных, т.е. $x_0 \le x_* \le x_1$, то для интерполирования будет применяться непосредственно формула (4.16).

При этом в расчетной формуле будут использованы конечные разности из «нулевой» строки таблицы 4.6. (ячейки закрашены голубым цветом).

Если же, например, $x_2 \le x_* \le x_3$, то формулу (4.16) следует использовать с конечными разностями из второй строки (ячейки салатового цвета) таблицы разностей.

При этом расчетное значение безразмерной переменной t должно вычисляться по формуле $t = \dfrac{x_* - x_2}{h}$.

Если значение x_* удовлетворяет условию $x_5 \le x_* \le x_6$, то первую интерполяционную формулу с разностями всех порядков мы применить уже не сможем.

Для таких значений x_* мы сможем выполнять лишь линейную интерполяцию:

$$P_1(x) = f_5 + \frac{\Delta f_5}{h} \cdot (x_* - x_5) = f_5 + \Delta f_5 \cdot t \text{, где } t = \frac{x_* - x_5}{h},$$

т.к. больше конечных разностей в шестой строке таблицы 4.6. у нас не имеется.

Вторая интерполяционная формула Ньютона.

Выше мы показали, что когда расчетное значение аргумента находится ближе к правой границе x_n отрезка интерполяции $[x_0, x_n]$ (т.е. $x_* - x_0 \geq x_n - x_*$), применять первую интерполяционную формулу (4.16) становится невыгодно.

В этом случае применяется формула для интерполирования назад – ***вторая интерполяционная формула Ньютона***, которая строится в виде:

$$P_n(x) = b_0 + b_1 \cdot (x - x_n) + b_2 \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + b_n \cdot (x - x_n) \times \ldots \times (x - x_1)\,. \qquad (4.17)$$

Как и для первой формулы Ньютона, неизвестные коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_n$ находятся из условия совпадения значений функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена $P_n(x)$ в узлах x_i.

Подстановка значения $x = x_n$ в (4.17) дает нам

$$f_n = P_n(x_n) = b_0\,.$$

Затем, присваивая переменной x последовательно значения x_{n-1} и x_{n-2}, мы получаем:

$$f_{n-1} = P_n(x_{n-1}) = b_0 + b_1 \cdot (x_{n-1} - x_n) = f_n + b_1 \cdot (-h)\,,$$

откуда
$$b_1 = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\Delta f_{n-1}}{h}\,;$$

и
$$f_{n-2} = P_n(x_{n-2}) = b_0 + b_1 \cdot (x_{n-2} - x_n) + b_2 \cdot (x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1}) =$$
$$= f_n + \frac{\Delta f_{n-1}}{h} \cdot (-2h) + b_2 \cdot (-2h) \cdot (-h) = f_n - 2 \cdot (f_n - f_{n-1}) + b_2 \cdot 2h^2,$$

откуда
$$f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2} = \Delta^2 f_{n-2} = 2h^2 \cdot b_2 \;\text{ и }\; b_2 = \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!\,h^2}.$$

Обобщим эти результаты в виде единой формулы:

$$b_k = \frac{\Delta^k f_{n-k}}{k!\,h^k}\,. \qquad (4.18)$$

Подставим выражения (4.18) в (4.17) и запишем вторую интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_n(x) = f_n + \frac{\Delta f_{n-1}}{h} \cdot (x - x_n) + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!\,h^2} \cdot (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!\,h^n} \cdot (x - x_n) \times \ldots \times (x - x_1)\,. \qquad (4.19)$$

Сделаем следующую замену переменной:

$$t = \frac{x - x_n}{h}, \text{ т.е. } x = x_n + h \cdot t, \quad \text{при } x_{n-1} \le x \le x_n \text{ имеем } -1 \le t \le 0.$$

Тогда $\dfrac{x - x_{n-1}}{h} = \dfrac{x - x_n + h}{h} = t + 1$, $\dfrac{x - x_{n-2}}{h} = \dfrac{x - x_n + 2h}{h} = t + 2$, и т.д.

Окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона будет следующим:

$$P_n(x) = P_n(x_n + h \cdot t) = f_n + t \cdot \Delta f_{n-1} + \frac{t \cdot (t+1)}{2!} \cdot \Delta^2 f_{n-2} + \\ + \ldots + \frac{t \cdot (t+1) \times \ldots \times (t+n-1)}{n!} \cdot \Delta^n f_0\,. \qquad (4.20)$$

Рассмотрим снова таблицу разностей 4.6:

x	f	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$
x_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$	$\Delta^3 f_3$	
x_4	f_4	Δf_4	$\Delta^2 f_4$		
x_5	f_5	Δf_5			
x_6	f_6				

Таблица 4.7.

Теперь, если значение x_* удовлетворяет условию $x_5 \le x_* \le x_6$, для интерполирования по Ньютону мы непосредственно воспользуемся формулой (4.20).

При этом в формуле (4.20) будут задействованы разности, расположенные «по диагонали вверх» от нижней ячейки со значением f_6 (отмечены оранжевым цветом).

Если же значение x_* удовлетворяет условию $x_3 \le x_* \le x_4$, то в формуле (4.20) следует воспользоваться конечными разностями, расположенными «по диагонали вверх» от ячейки со значением f_4 (отмечены желтым цветом).

При этом расчетное значение безразмерной переменной t должно вычисляться по формуле $t = \dfrac{x_* - x_4}{h}$.

Если же $x_* < x_3$ следует вернуться к представлению (4.16).

Таким образом, совокупность двух интерполяционных формул Ньютона (4.16) и (4.20), полностью решает нам задачу интерполирования на интервале $[x_0, x_n]$.

Качество интерполирования будет, очевидно, определяться старшим порядком конечных разностей, вычисленных в соответствующей таблице.

Все изложенное выше можно считать алгоритмом выбора одной из двух формул (4.16) или (4.20) для конкретного расчетного значения аргумента x_*.

Этот алгоритм должен быть положен в основу программной реализации соответствующего метода, объединяющего в своем теле интерполяционные формулы (4.16) и (4.20).

Интерполирование может применяться для уплотнения заданной таблицы функции, т.е. вычисления по исходной таблице данных новой таблицы с большим числом значений аргумента, чем на начальном интервале $[x_0, x_n]$ его изменения.

Эту операцию еще называют ***субтабулированием*** функции.

В случае, когда исходная таблица является таблицей с постоянным шагом h, естественно применять интерполяционный многочлен Ньютона.

При этом, как уже обсуждалось выше, в качестве x_0 необходимо выбирать ближайшее к расчетному x табличное значение аргумента.

Выбор интерполяционной формулы (вперед или назад) должен также опираться на возможность вычисления соответствующего количества конечных разностей для достижения заданной точности субтабулирования.

Если же узлы исходной таблицы функции не равноотстоящие, т.е. $h_i = x_i - x_{i-1} \ne h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots)$, то построение интерполяционного многочлена Ньютона следует выполнять с использованием ***разделенных разностей***.

Разделенные разности.

По определению, значения функции $f_i = f(x_i)$ называются ***разделенными разностями нулевого порядка***.

Разделенные разности первого порядка задаются следующими соотношениями:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, (n-1). \tag{4.21}$$

Разделенные разности второго порядка вычисляются через разности первого порядка (4.21):

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, (n-2). \tag{4.22}$$

Разделенные разности k-го порядка $(k \le n)$ определяются через разности $(k-1)$-го порядка:

$$f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; \ldots; x_{i+k}) - f(x_i; \ldots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, (n-k). \tag{4.23}$$

Очевидно, что для Таблицы 4.1 старшей разделенной разностью будет разность n-го порядка:

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_1; \ldots; x_n) - f(x_0; \ldots; x_{n-1})}{x_n - x_0}. \tag{4.24}$$

При вычислениях разделенные разности удобно записывать в следующую таблицу:

x	***Порядок разделенной разности***					
	0	1	2	…	$n-1$	n
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	…	$f(x_0; x_1; \ldots x_{n-2}; x_{n-1})$	$f(x_0; x_1; \ldots x_{n-1}; x_n)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	…	$f(x_1; x_2; \ldots x_{n-1}; x_n)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_2; x_3; x_4)$	…		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_3; x_4)$	$f(x_3; x_4; x_5)$			
…	…	…	…			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-1}; x_n)$				
x_n	$f(x_n)$					

Таблица 4.8.

Лемма. ***Разделенная разность n-го порядка выражается через узловые значения функции по формуле***

$$f(x_0;x_1;\ldots x_{n-1};x_n)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},\quad (4.25)$$

т.е. является симметрической функцией своих аргументов.

Для значения $n=1$ утверждение леммы очевидно:

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}.$$

При $n=2$ будем иметь:

$$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{1}{x_2-x_0}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_2-x_0}\left(\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}-f(x_1)\left(\frac{1}{x_2-x_1}+\frac{1}{x_1-x_0}\right)+\frac{f(x_0)}{x_1-x_0}\right)=$$

$$=\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

Свойство (4.25) для произвольного порядка n доказывается методом математической индукции.

Из доказанной выше леммы следует, что значение разделенной разности n-го порядка не зависит от нумерации $n+1$ узлов, по которым она строится.

Если узлы интерполирования расположены с постоянным шагом h, то между разделенной разностью n-го порядка и конечной разностью n-го порядка имеется следующая связь:

$$f(x_0;x_1;\ldots;x_{n-1};x_n)=\frac{\Delta^n f_0}{n!\cdot h^n}.\quad (4.26)$$

Истинность данного утверждения очевидна для разностей первого порядка:

$$f(x_0;x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f_1-f_0}{h}=\frac{\Delta f_0}{1!\cdot h}.$$

При нахождении каждой следующей по порядку конечной разности (см. Таблицу 4.5) происходит простое вычитание предыдущих разностей, а при вычислении каждой последующей разделенной разности в соответствии с (4.23), производится дополнительно к вычитанию деление на величину $x_n-x_0=nh$.

Отсюда и возникает величина $n!\cdot h^n$ в знаменателе правой части равенства (4.26).

Разделенная разность n-го порядка обладает тем свойством, что на интервале интерполирования существует такая внутренняя абсцисса $\xi \in [x_0, x_n]$, для которой выполняется равенство

$$f(x_0;x_1;\ldots;x_{n-1};x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Разделенная разность n–го порядка от алгебраического многочлена n–й степени принимает постоянное значение, не зависящее от выбора узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$, а разделенные разности более высоких порядков будут равны нулю.

Опираясь на все выше сказанное, можно утверждать, что алгебраический многочлен n-й степени:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n(x) = f(x_0) &+ (x - x_0)\cdot f(x_0;x_1) + \\ &+ (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot f(x_0;x_1;x_2) + \ldots + \\ &+ (x-x_0)\times\ldots\times(x-x_{n-1})\cdot f(x_0;x_1;\ldots;x_n)\,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

является интерполяционным, т.е. для него выполняется совокупность равенств

$$\mathrm{D}_n(x_i) = f_i \text{ для всех } i = \overline{0,n}\,.$$

Доказательством последнего утверждения могут быть формулы (4.14) и (4.26).

Следует обратить внимание на то, что в формуле (4.27) используются разделенные разности из «нулевой строки» таблицы разностей 4.8. Аналогично формуле (4.16).

$f(x_0)$	$f(x_0;x_1)$	$f(x_0;x_1;x_2)$	$\ldots$	$f(x_0;x_1;\ldots x_{n-2};x_{n-1})$	$f(x_0;x_1;\ldots x_{n-1};x_n)$

Если таблица разделенных разностей (Таблица 4.8) рассчитана, то сам интерполяционный многочлен Ньютона (4.27) можно вычислять по более компактной формуле (алгоритму):

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\times\Big(&f(x_0;x_1) + \\ &+ (x-x_1)\times\Big(f(x_0;x_1;x_2) + \ldots + \\ &+ (x-x_{n-2})\times\Big(f(x_0;\ldots;x_{n-1}) + (x-x_{n-1})\cdot f(x_0;\ldots;x_n)\Big)\cdots\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.28}$$

По аналогии с формулами (4.16) и (4.20) строится соответствующий интерполяционный многочлен с разделенными разностями:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)\cdot f(x_n;x_{n-1}) + \\ + (x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot f(x_n;x_{n-1};x_{n-2}) + \ldots + \\ + (x - x_n)\times\ldots\times(x - x_1)\cdot f(x_n;x_{n-1};\ldots;x_1;x_0)\,.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Или в виде «компактного» алгоритма:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_n(x) = f(x_n) + (x - x_n)\times\Big(\, f(x_n;x_{n-1}) + \\ + (x - x_{n-1})\times\Big(\, f(x_n;x_{n-1};x_{n-2}) + \ldots + \\ + (x - x_2)\times\Big(\, f(x_n;\ldots x_1) + (x - x_1)\cdot f(x_n;\ldots x_1;x_0)\,\Big)\cdots\Big)\,.\end{aligned} \tag{4.30}$$

В этой формуле уже используются «диагональные» разделенные разности, выделенные в Таблице 4.8. оранжевым цветом. Очевидна аналогия с формулой (4.20).

Формулы (4.27) и (4.29) называются многочленами Ньютона с разделенными разностями, построенными для интерполирования соответственно вперед и назад.

Очевидно, что многочлены Лагранжа и Ньютона, построенные для одной и той же исходной таблицы функции, тождественно равны, хотя и имеют различные функциональные представления.

Многочлен Ньютона имеет преимущество перед многочленом Лагранжа тогда, когда мы по какой-либо причине вынуждены менять количество узлов n в исходной таблице данных.

В случае Лагранжа это приводит к необходимости пересчета всего многочлена.

Для многочлена Ньютона потребуется только один раз пересчитать соответствующую таблицу разностей.

Вообще говоря, наличие быстродействующей вычислительной техники делает оба подхода к проблеме интерполирования практически равнозначными.

Основная проблема будет заключаться в надежности и корректности программной реализации рассмотренных выше методов и минимизации ошибок, связанных с ограниченностью мантиссы в компьютерном представлении чисел с плавающей точкой.

§ 4.3. Интерполяция сплайнами.

При большом количестве узлов интерполяции возрастает степень интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона, что делает их неудобными для вычислений и значительно увеличивает ошибки округления.

Высокой степени интерполяционного многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей с последующим построением для каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена.

Однако такое интерполирование имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что в точках стыка разных интерполяционных многочленов будет разрывной уже их первая производная. Поэтому оправдано пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции – интерполяцией сплайнами.

Сплайн – это функция, которая на каждом частичном отрезке интерполяции является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными.

Наиболее распространенными на практике являются кубические сплайны или сплайны третьей степени, поэтому рассмотрим ниже алгоритм их построения.

Пусть интерполируемая функция $f(x)$ задана своими значениями y_i в узлах x_i, $(i=\overline{0,n})$.

Длину частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ обозначим через h_i.

Будем строить кубический сплайн на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ в виде

$$\begin{aligned} S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + \\ + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \end{aligned} \tag{4.31}$$

где $x_{i-1} \le x \le x_i$, и a_i, b_i, c_i, d_i – четверка неизвестных коэффициентов, а всего их будет ровно $4n$.

Потребуем совпадения значений $S_i(x)$ в узлах с табличными значениями функции $f(x_i) = y_i$:

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \tag{4.32}$$

$$S_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3. \tag{4.33}$$

Количество уравнений (4.32) и (4.33) равно $2n$, что вдвое меньше числа неизвестных коэффициентов.

Чтобы получить дополнительные условия, потребуем также непрерывности $S_i'(x)$ и $S_i''(x)$ во всех точках интервала $[x_{i-1}, x_i]$, включая узловые.

Для этого приравняем «*левые*» $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ и «*правые*» $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ производные, во внутреннем $(i = 1, \ldots, n-1)$ узле x_i исходной таблицы данных.

Запишем вид производных $S_i'(x)$ и $S_i''(x)$:

$$S_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$$
$$S_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

Тогда имеем

$$S_i'(x_i) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2,$$
$$S_{i+1}'(x_i) = b_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

$$S_i''(x_i) = 2c_i + 6d_i h_i,$$
$$S_{i+1}''(x_i) = 2c_{i+1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Приравняем «*левые*» и «*правые*» производные и получим:

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{4.34}$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{4.35}$$

Уравнения (4.34) и (4.35) в совокупности дают еще $2(n-1)$ условий для неизвестных коэффициентов.

Однако недостает еще двух уравнений.

Обычно в качестве этих уравнений (условий) ставят требования к поведению сплайна в граничных точках x_0 и x_n интервала интерполирования.

Если потребовать нулевой кривизны сплайна (равенства нулю второй производной) на концах x_0 и x_n, то получим

$$c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \tag{4.36}$$

Перепишем теперь все уравнения (4.32)–(4.36), исключив n неизвестных $a_i = y_{i-1}$:

$$
\begin{aligned}
b_i + c_i h_i + d_i h_i^2 &= (y_i - y_{i-1}) / h_i, \qquad (i = \overline{1, n}), \\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 - b_{i+1} &= 0, \qquad (i = \overline{1, n-1}), \\
c_i + 3d_i h_i - c_{i+1} &= 0, \qquad (i = \overline{1, n-1}).
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Система (4.36)–(4.37) состоит из $3n$ уравнений.

Решив эту систему, например, по схеме Гаусса, мы получим значения неизвестных b_i, c_i, d_i, определяющих совокупность всех формул для искомого интерполяционного сплайна (4.31).

Систему уравнений (4.36)–(4.37) можно представить в матричной форме:

$$
\mathrm{A} \cdot \chi = \xi,
$$

где уравнения (4.37) записываются поочередно для каждого узла интерполирования:

i	b_1	c_1	d_1	b_2	c_2	d_2	b_3	c_3	d_3	$\cdots$	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	b_n	c_n	d_n	ξ_j
	1	h_1	h_1^2	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	$\frac{y_1 - y_0}{h_1}$
1	1	$2h_1$	$3h_1^2$	-1	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	$3h_1$	0	-1	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	h_2	h_2^2	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	$\frac{y_2 - y_1}{h_2}$
2	0	0	0	1	$2h_2$	$3h_2^2$	-1	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	$3h_2$	0	-1	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	h_{n-1}	h_{n-1}^2	0	0	0	$\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}}$
$n-1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	$2h_{n-1}$	$3h_{n-1}^2$	-1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	1	$3h_{n-1}$	0	-1	0	0
n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	1	h_n	h_n^2	$\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$
n	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	1	$3h_n$	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0	0