*Глава 9*

# ТЕОРЕМА РОЛЛЯ И ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Вернёмся снова к дифференциальному исчислению.

**Теорема 156** (так называемая теорема Ролля). *Пусть $f(a)$ непрерывна в $[a,\ b]$,*

$$f(a) = f(b) = 0$$

*и $f(x)$ существует для $a<x<b$. Тогда существует $\xi$ такое, что*

$$a<\xi<b,\ f'(\xi) = 0.$$

**Предварительное замечание.** Если число $\xi$ удовлетворяет неравенствам $a<\xi<b$, то мы будем иногда говорить, что оно лежит между a и b или также между b и a.

Доказательство. 1) Если

$$f(x) = 0 \text{ при } a\leq x\leq b,$$

то

$$f'(\frac{a+b}{2}) = 0.$$

2) Пусть $f(x)$ принимает где-нибудь в $[a,\ b]$ положительное значение. Тогда в силу теоремы 146, существует $\xi$ такое, что

$$a<\xi<b,\ f(x)\leq f(\xi) \text{ при } a\leq x\leq b.$$

При $f'(\xi)>0$ функция $f(x)$ возрастала бы в $\xi$, а при $f'(\xi)<0$ убывала бы. Таким образом, в обоих случаях в $[a,\ b]$ существовало бы $x$ такое, что

$$f(x)>f(\xi).$$

Поэтому

$$f'(\xi) = 0.$$

3) Пусть

$$f(x) \leq 0 \text{ при } a \leq x \leq b,$$

причём где-нибудь в $[a, b]$ $f(x)<0$. Тогда для - $f(x)$ имеет место случай 2), и, следовательно, существует $\xi$ такое, что

$$a<\xi<b, \; - f'(\xi) = 0.$$

**Теорема 157.** *Если*

$$f(x) = \sum_{y=0}^{n} a_y \; x^y,$$

$$a_n \neq 0,$$

*то уравнение*

$$f(x) = 0$$

*имеет, самое большое, n решений.*

Доказательства. При $n = 0$ утверждение очевидно, так как при $a_n \neq 0$ уравнение

$$a_0 = 0$$

вовсе не имеет решений.

Пусть $n>0$ и для $n$-$1$ утверждение теоремы верно.

1) Если уравнение

$$f(x) = 0$$

Не имеет решений, то доказывать нечего.

$$f(x) = f(x) - f(\xi) = \sum_{y=0}^{n} a_y \; x^y - \sum_{y=0}^{n} a_y \; \xi^y = \sum_{y=1}^{n} a_y \; (x^y - \xi^y) = (x-\xi) \sum_{y=1}^{n} a_y \sum_{\mu=0}^{y-1} x^{\mu} \; \xi^{y-1-\mu}$$