Лабораторная работа №6.

Безусловный экстремум.

Выполнил студент 2 курса радиофизического факультета , Романов Артем Александрович.

Вариант № 18:

Найти точку минимума функции:

f(x1,x2)=x1^2+x1*x2-10*x1+x2^2-5*x2+4

методом покоординатного спуска. Для одномерной оптимизации использовать метод квадратичной интерполяции. Для поиска интервала унимодальности использовать алгоритм Свенна. В окрестности точки минимума построить линии уровня и траекторию поиска(на одном графике).

Теоретическая часть:

Метод покоординатного спуска:

Для построения минимизирующей последовательности используется формула (2). При этом вектор pk определяется по правилу (циклический покоординатный спуск):

pk = ek−[k/n]n+1,k = 0,1,2,..., где [t]-целая часть числа t,ej = {0,...,0,1,0,...0} (единица стоит на j-ом месте), j = 1,...,n.

Число αk ∈ (−∞,∞) можно определять, например, следующим способом f(xk + αkpk) = min −∞<α<∞ f(xk + αpk). Здесь можно сделать замечание, аналогичное замечанию из п.1, §1. Метод покоординатного спуска очень прост, но не очень эффективен. Проблемы могут возникнуть, когда линии уровня сильно вытянуты, т.е. для овражных функций. В подобной ситуации поиск быстро застревает на дне такого оврага, а если начальное приближение оказывается на оси эллипсоида то процесс так и останется в этой точке. Хорошие результаты получаются в тех случаях, когда целевая функция представляет собой выпуклую функцию.

Метод квадратичной интерполяции:

Здесь задаются пробные три пробные точки x1 = (a + b)/2, x2 и x3. Для нахождения точки x2 задается шаг h > 0 в положительном направлении от точки x1, т.е. x2 = x1 + h и если f(x1) > f(x2), то x3 = x1 + 2h, иначе x3 = x1 −h. Вычисляются значения функции в этих точках f(x1),f(x2),f(x3), строится квадратичный интерполяционый многочлен по трем точкам и находится его точка минимума по формуле

x∗ = ((x2)2 −(x3)2)f(x1) + ((x3)2 −(x1)2)f(x2) + ((x1)2 −(x2)2)f(x3)/((x2 −x3)f(x1) + (x3 −x1)f(x2) + (x1 −x2)f(x3))/2.

Находится также точка xmin = argmin(f(x1),f(x2,f(x3)). Если знаменатель в формуле для нахождения минимума квадратичного интерполяционного многочлена равен нулю, т.е. все три точки лежат на одной прямой рекомендуется выбрать за x1 = xmin и повторить нахождение точки x∗. Критерием окончания в этого процесса является выполнение условий для заданного ϵ |f(xmin)−f(x∗)| < ϵ, |xmin −x∗| < ϵ 21

Если условия окончания не выполняются и x∗ ∈ [x1,x3] точка x1 заменяется на точку argmin(f(xmin),f(x∗)), в противном случае точка x1 заменяется на x∗.

Метод Свенна:

Начальный этап:
1) задать x^0 – произвольная начальная точка.

2) выбрать шаг h.

Основной этап:

Шаг 1:
Установить направление убывания целевой функции. Для этого надо взять $x_2=x_1+h$. Если f1<f2, то надо поменять направление движения(h=-h и взять $x_2=x_1+h$).

Шаг 2:
Вычислять f_k в точках $x_{k+1}=x_k+h_k$, где $h_k=2h_{k-1}$, k=2,3,…,n-1 до тех пор пока не придем в точку x_n такую что $f_n>f_{n-1}$.

Шаг 3:
Установить начальный интервал локализации минимума $a_1=x_{n-2}$ и $b_1=x_n$.

Практическая часть:

Программа состоит из четырех функций. Функция F это сама функция от двух переменных, interpolation1 и interpolation2 это функции в которых ищутся экстремумы функций одной переменной. В main реализован сам метод покоординатного спуска. Программа выводит на экран точку минимума , само значение функции и количество итераций.

Результаты:

В результате работы программы у функции f(x1,x2)=x1^2+x1*x2-10*x1+x2^2-5*x2+4

Был найден экстремум в точке (-5,0)(начальная точка (1,1)) за 7 итераций методами покоординатного спуска, квадратичной интерполяции, Свенна с точность 0.0001.

Ниже приведён рисунок с изображением линий уровня анализируемой функции и траектория поиска экстремума.