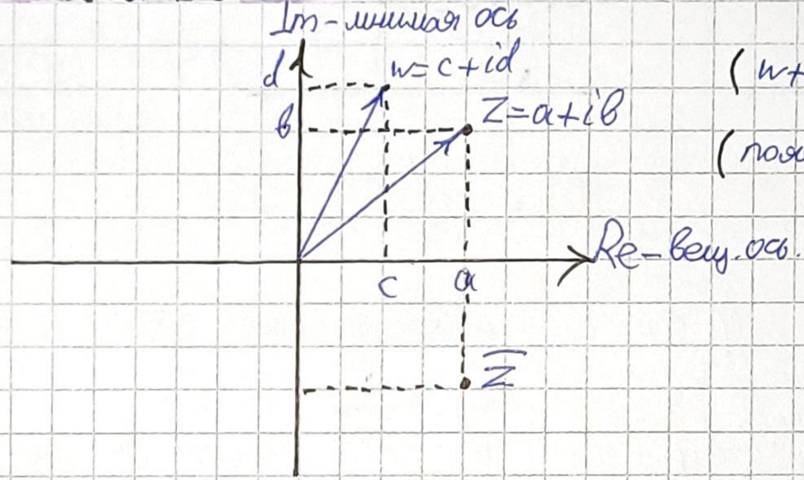
II Комплексные числа

геометрическая интерпретация $\mathbb{C}$

✓



($w + z$ = сложение векторов)

(появляются геом. св-ва)

модуль комплексн. числа и его св-ва

✓ Опр.

Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется модулем комплексного числа $z = a + ib$.

✓ св-ва $|z|$:

1) $|z| \geq 0 \wedge |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
3) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
4) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

✓ E.g. $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$

5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ – неравенство треуг.

Date: 11.09.2025 Num: 00020 АБ

□ Док-во: неравенство треугольника

1) $w \neq 0$, иначе очевидно.

2) Рассм. $|z+1|^2 = (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2 + \overbrace{z+\bar{z}}^{2a} + 1 =$
$= |z|^2 + 2a + 1 \leq |z|^2 + 2|z| + 1 = (|z|+1)^2$ $\ast\ a \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

3) $|z+1| \leq |z|+1$

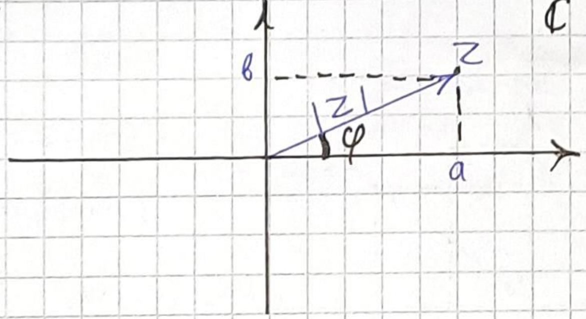
4) $|z+w| = \left|w\left(\frac{z}{w}+1\right)\right| = |w|\left|\frac{z}{w}+1\right| \leq |w|\left(\frac{z}{w}+1\right) = |z|+|w|$, ч.т.д.

аргумент комплексного числа

• $z = a+ib = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$, причем $\frac{a^2}{|z|^2} + \frac{b^2}{|z|^2} = 1 \Rightarrow$
$\frac{a}{|z|}$ и $\frac{b}{|z|}$ – cos и sin некоторого угла.

√ Опр.
Аргументом числа $z = a+ib$ $(z \neq 0)$ наз. число φ, $(\varphi \in \mathbb{R})$, такое что $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$

√



Δ При $z=0$,

Δ Зам. φ опр. с точностью до слаг. $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

тригонометрическая форма записи к.ч.

√ Опр.
$\operatorname{Arg} z = \{\varphi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ – множество всех аргументов z
$\arg z$ – единственн. зн. $\operatorname{Arg} z$, попад. в $[0; 2\pi)$

√ $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \cos\varphi = \frac{a}{|z|};\ \sin\varphi = \frac{b}{|z|}\}$

√ Опр. тригонометрическая форма к. ч. z.
$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$

умножение и деление комплексных чисел в триг. ф.

√ Теорема

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ z_2 &= |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) \end{aligned}$$

□ Док-во:
1) $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i \cdot$
$\cdot (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1) = \ldots$

4 – рассмотрим

Date: 11.09.2025 Num: 00031

2) аналогично для п.1.:

возведение в степень к. ч.. Формула Муавра	✓ Теор. Муавра $z = \lvert z \rvert (\cos\varphi + i\sin\varphi),\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow z^n = \lvert z \rvert^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ (следствие теор. об умн.
экспоненциальная форма к. ч.	✓ Замечательная Формула Эйлера: (док-во на мат. анализе) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$

□ E.g. $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

✓ Опр. экспоненциальная форма числа z
$z = \lvert z \rvert \cdot e^{i\varphi}$ (периодич. функция)

□ E.g.: $z_1 \cdot z_2 = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi} = \lvert z_1 \rvert \cdot \lvert z_2 \rvert \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

□ E.g. $\cos^3\varphi$ – ?

1. $\cos\varphi = \mathrm{Re}\, z,\quad z = \cos\varphi + i\sin = e,\quad \bar{z} = e^{-i\varphi}$
2. $\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2}$
3. $\cos^3\varphi = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^3 = \frac{z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\cdot\bar{z} + (\bar{z})^3}{8} = \frac{z^3 + 3z + 3\bar{z} + (\bar{z})^3}{8}$

$= \frac{e^{3i\varphi} + 3\cdot 2\cdot\cos\varphi + e^{-3i\varphi}}{8} = \frac{2\cos 3\varphi + 6\cos\varphi}{8}$

извлечение корней из к. ч.	✓ Опр. $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, корнем n-й степени из z называется любое к. ч., такое что $w^n = z$.

об. $\sqrt[n]{z} = \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$

□ E.g. $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z \Rightarrow \lvert w \rvert^n = \lvert z \rvert \Rightarrow \lvert w \rvert = \sqrt[n]{\lvert z \rvert}$
$(\sqrt[n]{0} = 0)$

□ E.g. Пусть $z \neq 0$: $z = \lvert z \rvert \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
$w = \lvert w \rvert \cdot (\cos\psi + i\sin\psi)$.

$w^n = \lvert w \rvert^n \cdot (\cos n\psi + i\sin(\psi)) = \lvert z \rvert \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

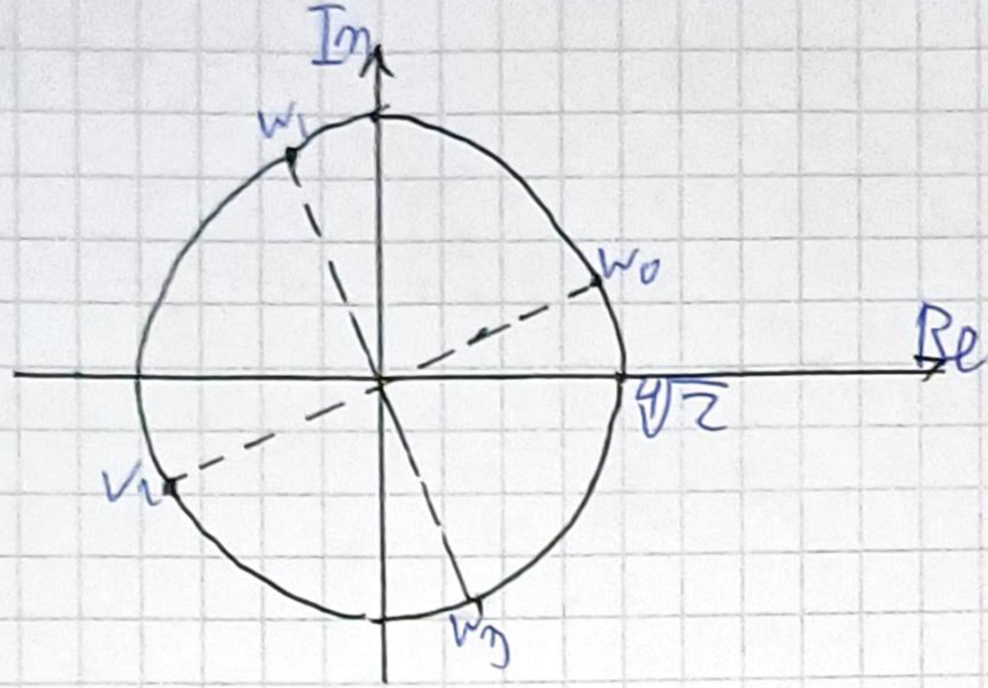
$n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, сущ. n знач.

Date: 11.09.2025 Num: 00022

АБ

$\forall \sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \dots, w_{n-1}\}$, $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$

Δ Зам.: Все корни n-й ст. лежат в вершинах правильного n-угольника.



Прим.: 1) $\sqrt{1} = \{\pm 1\}$,
2) $\sqrt{-1} = \{\pm i\}$,
3) $\sqrt[3]{1} = \{1; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$
4) $\sqrt[4]{1} = \{\pm 1; \pm i\}$

Упр. $\sqrt{3+4i}$