III Многочлены

✓ Основная теорема алгебры комплексных чисел:
∀ многочлен степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, \ldots n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} : f(c) = 0.$$ (св-во алг. замкн. поля $\mathbb{C}$)

коммутативные кольца

✓ Опр.
Мн-во K называется коммутативным кольцом с 1, если на K заданы операции сложения и умножения, которое удовлетворяет всем аксиомам поля, кроме № 8 (см. 1. 00006, 04.09.2025)

△ Прим.: 1) $\mathbb{Z}$ - коммут. кольцо с 1.
(E.g.) 2) Мн-во многочленов с коэф-ами из поля $\mathbb{F}$
3) Мн-во чётных чисел - коммут. кольцо без 1.
4) Многочлены $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z$ $(a_0 = 0)$ - тоже

основные понятия

✓ Опр.
$\mathbb{F}$ - поле, мн-во формальных сумм $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, где сложение задано правилом $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum\limits_{k=0} b_k x^k =$

Date: 18.09.2025 Num: ____

$= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$, а умножение $\sum_{k=0}^{n} a_k x_k \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x_i$,

где $c_i = \sum_{l=0}^{i} a_l \cdot b_{i-l}$ обозначается $\mathbb{F}[x]$ называется кольцом многочленов над полем $\mathbb{F}$.

✓ E.g. $\mathbb{R}[x]$; $\mathbb{C}[x]$.

степень многоч. ✓ Опр.
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, n – степень многочлена.

обозн. $\deg f(x) = n$

△ Зам. Если $f(x) = 0$, то $\deg(f) = -\infty$.

✓ Следствия: 1) $\deg(f_n(x) + g(x)) \leq \max(\deg(f(x); g(x))$.
$f(x) \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
$g(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$

2) $\deg(f(x) \cdot g(x)) = m + n$.

Корни многоч. ✓ Опр.
Корнем многочлена называется значение c, при котором $f(c) = 0$.

✓ Опр.
Многочлен $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ делится на $g(x) \in \mathbb{F}[x]$, если $\exists h(x) \in \mathbb{F}[x]$; $f(x) = g(x) \cdot h(x)$.

✓ Теор.
c – корень многочлена $f(x) \Leftrightarrow f(x) \vdots (x - c)$.

□ Д-во: следствие из теор. Безу: $f(x) = f(x) - \underbrace{f(c)}_{0} = \sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{(x^k - c^k)}_{\vdots (x-c)}$

✓ Опр.
c наз. корнем кратности k, если k – макс. степень для которой выполняется условие: $f(x) \vdots (x - c)^k$

деление многоч. с остатком ✓ Теор.
$f, g \in \mathbb{F}[x]$, $g \neq 0$, $\exists$ единственная пара мн-в $q, r \in \mathbb{F}[x]$, такая что $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, причём $\deg r(x) < \deg g(x)$.

□ Док-во теор.
1. $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $\deg g = m$,
2. зафиксируем $g(x)$,

Date: 18.09.2025 Num: _____

3. $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $\deg f(x)=n$
4. ММК(по n):

5. База: $n<m \Rightarrow q(x)=0$, $r(x)=f(x)$
6. Инд. переход: $n\geq m$ выполняется. Докажем для степени $n+1$:
7. $f(x)_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$,
8. $\Delta \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - g(x)\cdot x^{n+1-m}\cdot \frac{a_{n+1}}{b_m} = \tilde{f}(x) \Rightarrow \deg \tilde{f}(x) \leq n \Rightarrow$
9. $f(x)=\underbrace{g(x)\cdot \tilde{q}(x)+\tilde{r}(x)}_{\tilde{f}(x)}+g(x)\cdot x^{n+1-m}\cdot \frac{a_{n+1}}{b_m}$, где

$\deg(\tilde{r}(x))<n$ $\quad = g(x)\cdot\left(\tilde{q}(x)+x^{n+1-m}\cdot\frac{a_{n+1}}{b_m}\right)+\underbrace{\tilde{r}(x)}_{\deg<m}$

существование доказано!

10. Единственность: $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$, $\deg r<m$
$f(x)=g(x)\cdot \tilde{q}(x)+\tilde{r}(x)$, $\deg\tilde{r}<m$.
$0=\underbrace{g(x)\cdot(q(x)-\tilde{q}(x))}_{\deg m}+\underbrace{(r(x)-\tilde{r}(x))}_{\deg<m}$ противоречие.
$r(x)-\tilde{r}(x)\equiv 0$
$q(x)-\tilde{q}(x)\equiv 0$,
ч.т.д.

Теорема Безу

✓ Теор.
$g(x)=x-c \Rightarrow f(x)=(x-c)\cdot g(x)+r(x)$, $\deg(r)=0$, т.е.
$(r(x)\equiv r)$,
$r=f(c)$

□ Док-во:
1. Пусть $x=c \Rightarrow f(c)=(c-c)\cdot g(x)+r \Rightarrow r=f(c)$, ч.т.д.

△ Следствие: c - корень $f(x) \Leftrightarrow f(x) \vdots (x-c)$

□ Док-во:
Если c - корень $\Rightarrow r=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-c)\cdot g(x)$.

✓ Теор. О разложении многочлена на неприводимые:
$f(z)\in\mathbb{C}[z]$. $\deg f=n\geq 1 \Rightarrow f(z)=a_n(z-c_1)^{k_1}(z-c_2)^{k_2}\cdots(z-c_m)^{k_m}$,
$k_1+k_2 \ldots k_m=n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ - корни $f(z)$.

1) Теор. Виета для мн. ур. n ст.
2) Пусть x_1, x_2, x_3 - корни $x^3-2x^2+x+1=0$. Сост. кубич. ур-ие $\frac{1}{x_1^2}, \frac{1}{x_2^2}, \frac{1}{x_3^2}$