Date: 19.09.2025 Num: _____

III Бинарные отношения 1

✓ Опр. Декартово произведение
$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$.

Бинарные отнош.

✓ Опр. Бинарное отношение
A binary relation R on sets A and B is a subset of Cartesian product $A\times B$.

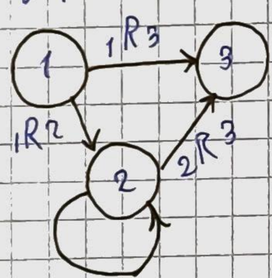
✓ Обозн.: $x R y \equiv (x,y)\in R$ (e.g. $a<b$, $A\subseteq B$)

✓ Опр.
A binary relation $R\subseteq A\times B$ on two different sets A and B is called heterogeneous.

✓ Опр.
A binary relation $R\subseteq M^2$ on the same set M is called homogeneous.

✓ Обозн.: „<" $=\{(x,y)\mid x<y\}$

✓ Опр.
A homogeneous relation $R\subseteq M^2$ can be represented as directed graph:



(NB! $R=\{\cdots(2,2)\}$)

✓ Опр.
A heterogeneous relation $R\subseteq A\times B$ can be represented as a bipartite graph.

✓ Опр.
A binary relation $R\subseteq A\times B$ can be represented as matrix $M_R = [R]$.

Рене Декарт - как жить? :)

Date: 19.09.2025 Num: _ _ _ _ _

$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$, $R = \{(a,x), (b,x), (c,y)\}$

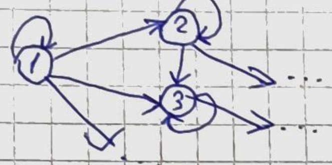
✓ Опр.
For any set M, we define these special relations:
- Empty: $\varnothing \subseteq M^2$; (no elements are related)
- Identity: $I_M = \{(x,y) \mid x \in M\}$
- Universal: $U_M = M^2$

✓ Опр. *
For relations $R, S \subseteq A \times B$:
- union: $R \cup S$
- intersection: $R \cap S$
- complement: $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$

свойства отнош.

1. рефлексивность: $\forall x \in M (x R x)$
2. симметричность: $\forall x, y \in M : (x R y) \to (y R x)$.
3. транзитивность: $\forall x, y, z \in M . (x R y \wedge y R z) \to (x R z)$

✓ E.g. $\leq$



! NB: рефлексивно: $x \leq x$
не симметрично: $1 \leq 2$, but $2 \not\leq 1$
транзитивно: $1 \leq 2 \wedge 2 \leq 3 \to 1 \leq 3$
антисимметрично: $1 \leq 1 \wedge 1 \leq 1 \Rightarrow 1 = 1$
(false!)

4. иррефлексивность: $\forall x \in M (x \not R x)$
5. антисимметричность: $\forall x, y \in M (x R y \wedge y R x) \to (x = y)$
6. асимметричность: $\forall x, y \in M (x R y) \to (y \not R x)$

дополнительные свойства

1. $R \subseteq M^2$, корефлексивность: $\forall x, y : M (x R y) \to (x = y)$.
2. Правая евклидовость: $\forall x, y, z \in M (x R y \wedge x R z) \to (y R z)$
3. Левая евклидовость: $\forall x, y, z \in M (y R x \wedge z R x) \to (y R z)$

✓ Опр. отношение эквивалентности (почти "="):
Если $R \subseteq M^2$ рефлексивно, симметрично и транзитивно, то это отнош. наз.-вается эквивалентностью.

✓ Опр. класс эквивалентности **
$R \subseteq M^2$ – отношение эквивалентности, Классом эквивалентности называется множество связанных элементов

$[x]_R = \{y \in M / x R y\}$ E.g. $[5]_{\equiv_{12}} = \{y \in N \mid 5 \equiv_{12} y\} = \{5, 17, 29, \ldots\}$

---

*inverse.
$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$

** Modulo arythmetic: $x R y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{12}$

✓ Опр. Quotient set

The quotation set of M by the equivalence relation R is the set of all equivalence classes.

✓ Обозн.: $N/_{\equiv_{12}} = \{ [0] = \{0, 12, 24, \dots\}, [1] = \{1, 13, \dots\}, \dots [11] \}$