I Вещественные (действительные числа)

Вновь о множествах

✓ Множества: A, B; элементы a, b.

✓ Опр. пустое множество
$(\text{п.м. } \varnothing) := (\forall x : x \notin \varnothing)$

✓ Доп. зн.: $\Rightarrow$ – след.
$\Leftrightarrow$ – равносильн.

□ Pr. Парадокс Рассела:
K – это совокупность множеств, которые не сод. себя как элемент.
// $K = \{A \mid A \notin A\}$
1. $K \in K? \Rightarrow K \notin K \Rightarrow ?!$
2. $K \notin K? \Rightarrow K \in K$

✓ Отношения между множествами:

1. Опр. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$
2. Опр. $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ и $A \subset B$
3. $A \subset B$ наз. собственным, если $A \neq B$ и $A \neq \varnothing$

□ E.g. 1) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
2) $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
3) $\mathbb{Q} = \{p/q$, где $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
4) $\mathbb{R} = \dots$

✓ Действия над множ.:
1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$
5. $A \triangle B = \{x \mid x \in$
6. $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ (пр. произв. мн.)

□ Действия над множествами: Законы де Моргана:
1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
4. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Date: 29.09.2025 Num: 00010

Понятие функции

✓ Отображения.

✓ Опр. отношение (функция):
A, B – множества: $f: A \to B$ – это соответствие, которое сопоставляет каждому $x \in A$ единственный эл-т B, обозначаемый $f(x)$.

✓ Опр. $f: A \to B$
1. Если $C \subset A$, то $f(C) = \{ y \in B \mid x \in C : y = f(x) \}$ – образ C
2. Если $D \subset B$, то $f(D) = \{ x \in A \mid y \in D : y = f(x) \}$ – прообраз D

✓ Виды отображений

1. Опр. $f: A \to B$: f наз. инъективным, если $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ // образы разн. эл. не склеив.
f наз. сюръективным, если $f(A) = B$ // отображение на.
f наз. биективным, если оно инъективно и сюръективно. // взаимно однознач.

✓ Опр.
f – биективно $A \to B$, то обратное к f отобр. $f^{-1}: B \to A$, кот. $\forall y \in B$, так что $f(x) = y$.

▷ Зам. $f(f^{-1}(x)) = x$

Натур. числа. Аксиомы Пеано

✓ Опр.
Пусть N – множество, удовл. 5 аксиомам:
1. Есть выделенный элемент – "1" $\in N$
2. $\exists$ отображение $\sigma: N \to N$
3. σ – инъективно
4. Не существует эл. $n \in N$ такого, что $\sigma(n) = 1$ (σ – не сюръект.)
5. Акс. индукции: Пусть $S \subset N$, такое что а) $1 \in S$, б) $n \in S \Rightarrow \sigma(n) \in S$, то $S = \mathbb{N}$ ← множество нат. чисел.

✓ Опр. операция сложения натур. чисел. опр. рекурсивно:
① $\forall n \in N: n + 1 = \sigma(n)$
② $\forall n, m \in N: n + \sigma(m) = \sigma(n + m)$

✓ Опр. операция умножения натур. чисел.
① $\forall n \in N: n = n \cdot 1$
② $\forall n, m \in N: n \cdot \sigma(m) = n \cdot m + n$

Date: 09.09.2025 Num: 00011

✓ Порядок на $\mathbb{N}$: опр.
$n, m \in \mathbb{N}$; $n<m$, если $\exists k \in \mathbb{N}: m = n+k$

Δ Зам.: $n \le m$, если $n<m$ или $n=m$

✓ Теор. Св-ва полной упорядоченности $\mathbb{N}$
Если $S \subset \mathbb{N}$, то $\exists n \in S$, такой что $\forall m \in S$ $n \le m$ (т.е. n — наим. эл-т S)

метод матем. индукции

• Теор. Об индукции.
Пусть $P(n)$ — утв., которое зависит от $n \in \mathbb{N}$. Предположим:
① (База): $P(1)$ — истинно
② (Инд. переход): Если $P(m)$ истинно $\Rightarrow P(m+1)$ — истинно, $\Rightarrow$ $P(n)$ истинно для $\forall n$.

□ Док-во теор. полной упор.:
1. Если в множ. S есть n, то есть миним. эл., S — не пусто
2. $n=1$, 1 — мин. эл. в S
3. Предположим, что верно $P(n)$ для n. Проверим правильность: $(n+1) \in S$
4. Если в S есть хотя бы один эл-т $x \in [1, n-1]$, то по индукц. предполож. $\exists m$ — мин. эл.-т.
5. Если же нет, то $(n+1)$ — min эл., ч.т.д.

☑ Док-во: $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) - \text{ложно}\}$. Показать $S = \varnothing$
От противного: предположим, что $S \neq \varnothing \Rightarrow$ по св-ву полной упорядоченности $\mathbb{N}$ $\exists$ min эл-т S $m \in S$
по ① $P(1)$ ист. $\Rightarrow m \neq 1$ $(m>1)$
Т.к. m — наим. эл. S, то $m-1 \notin S \Rightarrow P(m-1)$ — ист. $\Rightarrow$ по ② $\Rightarrow$ $P(m)$ — истинно $\Rightarrow$?! $\Rightarrow S = \varnothing$ $P(n)$ — истинно $\forall n$, ч.т.д.

□ E.g. 1. $1 + c + c^2 + \ldots + c^n = \dfrac{c^{n+1}-1}{c-1}$
$c \neq 1$

ММИ:
База: $n=0$ $\quad 1 = \dfrac{c^1 - 1}{c-1} = 1$

Инд. переход: $\exists m \in \mathbb{N}: 1 + \ldots + c^m = \dfrac{c^{m+1}-1}{c-1} \Rightarrow$

$1 + \ldots + c^{m+1} = \dfrac{c^{m+2}-1}{c-1}$

проверка: $1 + c + \ldots + c^{m+1} = (1 + \ldots + c^{m+1}) = \dfrac{c^{m+1} + c^{m+2}}{c-1} =$
$= \dfrac{c^{m+2}-1}{c-1}$

Date: 09.09.2025 Num: 00012

☐ E.g. док-во для нер. Бернулли:
Для $\forall c \geq -1$: $(1+c)^n \geq 1+n\cdot c \quad \forall n \in N$

Док-во:

1) База: $n=1$: $(1+c)^1 \geq 1+c$ ист.

2) Индпер.: $(1+c)^m \geq 1+m\cdot c$ ист. $\Rightarrow (1+c)^{m+1} \geq 1+(m+1)c$

$$(1+c)^{m+1} = (1+c)^m(1+c) \geq (1+mc)(1+c) = 1+mc+c+mc^2 \geq 1+mc+c; \text{ ч.т.д.}$$

мощность множ. счетные множества

✓ Опр. A и B - равномощны, если существует биекция: $f: A \to B$

обознач. 1) $|A| = |B|$ - A и B - равномощны.
2) $|A| \leq |B|$ - т.е. $\exists$ инъекция $f: A \to B$
3) $|A| < |B| \Rightarrow f$ инъекц., но не биек. $|A| \neq 0$
4) A равномощно B: $A \sim B$

✓ Опр. Если $|A| = |N|$, то мн-во A называют счётным

✓ Опр. Если A - конечно или счётно, говорят, что A - НБЧС (не более чем счётным).

☐ E.g. $A = \{2n \mid n \in N\}$ E.g. $A \mid \{2n-1; n \in N\} = |N|$

$|A| = |N|$

Биекция: $f: n \to 2n$

☐ E.g. $|\{x \in Q \mid x > 0\}| = |N|$

Теор. $Q \sim N$.

Док-во: $q \in Q \Leftrightarrow q = \frac{n}{m}$ - несокр. дробь

„Высота" q: $h := |n| + m$. Для фикс. h m требовает $h-1$ знач

$h=1 \Rightarrow m=1 \quad \frac{0}{1}$ $\quad h=4: \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{3}{1}; -\frac{3}{1}$

$h=2 \Rightarrow \frac{1}{1}; \frac{-1}{1}$

$h=3 \Rightarrow \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{2}{1}; -\frac{2}{1}$

Date: 09.09.2025 Num: 00013
16.09.2025

Нумеруем рац. числа по каждой „ножке" в порядке возрастания

✓ Теор. Кантора

A – множество

Булеан A – множество всех подмножеств A

$\mathcal{P}(A)$ или 2^A

$A = \{1, 2, 3\}$

$|2^A| = 2^{|A|}$

Если A – мн-во $\Rightarrow |A| < |2^A|$

✓ Следствие: $|N| < |\mathcal{P}(N)| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(N))| < \dots$

E.g. $A = \{a\}$

$2^A = \{\{a\}, \varnothing\}$

✓ док-во т. Кантора