II Поле вещественных чисел.

✓ Опр. отношение порядка.

Отношение ($\leq$), заданное на множестве M называется отношением порядка, если оно удовлетворяет св-вам:

1. рефлексивно; // каждый элемент сравним сам с собой: $a \leq a$
2. антисимметрично; // Если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.
3. транзитивно. // Если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$

✓ Опр. упорядоченное поле

Поле $\mathbb{F}$ называется упорядоченным, если на нём задано отношение порядка ($\leq$) и:

1. $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, если $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.
2. $\forall x \geq 0 \wedge y \geq 0 : x \cdot y \geq 0$.

E.g. 1. $\mathbb{Q}$ – упорядоченное поле

E.g. 2. $\mathbb{Z}_2$ – остатки при делении на 2:

$0; 1;$ $\exists\, 0 \leq 1$; но $0 + 1 \not\leq 1 + 1$;

$\exists\, 1 \leq 0$, но $1 + 1 \not\leq 0 + 1$

Date 16.09.2025 Num: _____

принцип полноты множеств

✓ A и B – упорядоченные множества.

✓ Опр.
Мн-во A левее мн-ва B, если $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$: $a \leq b$

✓ Опр.
Пусть A лежит левее B. Число C разделяет A и B, если $\forall a \in A: a \leq C$
$\forall b \in B: C \leq b$

. E.g. Пусть $A = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2 \}$, $a \geq 0$; $B = \{ b \in \mathbb{Q} \mid b^2 \geq 2 \}$, $b \geq 0$. A левее B. C – разделяет A и B.
Док-ть C – не рац. (упр)
Теор. Кантора и иссл. $a, 1$

✓ Опр. принцип полноты множества
Числовое множество обладает св-вом полноты, если для $\forall$ подмножеств, одно из которых лежит левее другого, существует элемент, разделяющий эти множества.

определение поля вещественных чисел

✓ Опр.
Пусть $\mathbb{R}$ – упорядоченное поле с действиями слож. (+) и умн. (*), с отношением порядка ($\leq$), тогда $\mathbb{R}$ наз. полем вещественных чисел, если выполнены аксиомы:

I) 10 аксиом поля

II) 4 аксиомы порядка:
① рефлексивн.: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leq x$
② антисимм.: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: если $x \leq y$ и $y \leq x$: $x = y$
③ транзитивн.: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ и $y \leq z$: $x \leq z$
④ линейной упорядочен.: $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y$ или $y \leq x$

III 2 аксиомы упорядоченного поля:
① $\forall x, y, z$: если $x \leq z$, то $x + y \leq z + y$
② $\forall x \geq 0$ и $\forall y \geq 0$: $xy \geq 0$

IV 1 аксиома полноты:
Для $\forall X, Y \subset \mathbb{R}$, таких что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$: $\exists c \in \mathbb{R}$: $x \leq c \leq y$: $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

E.g. 3. Дедекиндовы сечения*

✓ Св-ва поля вещественных чисел:
① Верхняя (нижняя) грань числового множества

✓ Опр. $X \subset \mathbb{R}$ наз. ограниченным сверху, если $\exists C \in \mathbb{R}$: $\forall x \in X$, $x \leq C$,
C – верхняя граница мн. X (мажоранта)

✓ Опр. X ограниченное множество $\Leftrightarrow$ X огр. сверху и снизу.

Date: 16.09.2025 Num: _____

принцип верхней грани

✓ Опр. наименьшее из чисел, ограничивающих $X \subset R$ сверху называется точной верхней границей X - ($\sup X$)

✓ $s = \sup X \Leftrightarrow \forall x \in X : x \leq s$ и $\forall s' < s \ \exists x' \in X : s' \not\leq x'$

✓ $s = \inf X \Leftrightarrow$

· E.g. 1. $[0;1] = X$
$\sup X = 1$
2. $(0;1) = X$
$\sup x = 1 \notin X$

3. $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\sup X = 1$
$\inf X = 0 \notin X$

✓ Лемма:
Любое непустое ограниченное сверху множество имеет единственный супремум.

□ Док-во:
1. $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \varnothing$, огр. сверху.
2. $\exists Y$ - мн-во верхних границ $X \Rightarrow Y$ правее $X \Rightarrow \exists c \in R$, разделяющее X и Y: $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$: $x \leq c \leq y \Rightarrow c \in Y \Rightarrow$ $c - \min Y \Rightarrow$ по опр. $c - \sup X$, ч.т.д.