Date: 04.09.2025 Num: 00005

ЛИНАЛ

AB

I Основные алгебраические структуры. Комплексные числа.

множества

√ Опр. множество
не опр. (совокупность произвольных объектов)

√ Опр. элемент множества
не опр. (объекты, входящие в множество)

З.: $a \in A$ – a принадлежит A

√ Опр. пустое множество
не содержит элементов множества

З.: $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество A состоит из элементов $x_1, \dots, x_n$

З.: $A = \{x \in M \mid a(x)\}$ – множество A состоит из эл. x множества M, обладающих св-вом $a(x)$

E.g. определение множества:
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$ – множество веществ. чисел, чей квадрат < 4.

кванторы

• Квантор – логический символ, показывающий объект рассужд. выск.:
$\forall$ – „для любого": всеобщность. $:=$ определяется как
$\exists$ – „существует": существование.
$\mid$ – „такой что"
$\exists!$ – „существует единственный элемент" x
$]$ – „пусть"

E.g. запись выражений с квантором:
$\forall x \in M (a(x))$ – для любого x из множества M справедлив $a(x)$.

операции над множествами

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$
3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$
4. $\overline{A} = U \setminus A$ $\{x \mid x \notin A\}$
5. $A \times B$ $\{\langle x, y \rangle \mid x \in A$ и $y \in B\}$ // „сопоставить A к B, сохранив пор.", поэтому: $A \times B \neq B \times A$!
6. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

числовые множества

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

↳ компл. $\{4 + 3i; \dots\}$
↳ вещест. $\{\pi; \sqrt{2}; \dots\}$
↳ рацион. $\{2{,}25; 0{,}5; \dots\}$
↳ целые $\{-1; -2; \dots\}$
↳ натур. $\{0; 1; \dots\}$

Date: 04.09.2025 Num: 00006

A2

комплексные числа

✓ Опр. мнимая единица
$\exists i \in \mathbb{C}: i^2 = -1$

✓ Опр. комплексное число
$z = x + iy$; x, y – действ. числа.
$x = \mathrm{Re}\, z$ – действительная часть
$y = \mathrm{Im}\, z$ – мнимая часть.

✓ Опр. комплексно-сопряжённые числа
$\exists z = a + ib$, то $\overline{z} = a - ib$.

Св-ва комплексного сопряжения

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + A} = \overline{z} + \overline{A}$
3. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$

✓ Опр. алгебраическая структура
Кортеж (A, F), где A – множеств, F – набор опер. над A.

✓ Опр. арность
Количество аргументов. // бинарная опер.: $A * A \to A$

поле

✓ Опр. поле
алгебраическая структура $(F; +, \cdot)$, где F – множеств, $+$ и $\cdot$ – бинарные операции и выполняется:

1. $\forall x, y, z \in F ((x+y)+z = x+(y+z))$ – ассоциат. слож.
2. $\forall x, y \in F (x+y = y+x)$ – коммутативн. слож.
3. $\forall a \in F$: $a + 0 = 0$ – существ. нуля
4. $\forall x \in F (\exists (-x) \in F (x + (-x) = 0))$ – существ. против. элем.
5. $\forall x, y, z \in F ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ – ассоциат. умн.
6. $\forall x, y \in F (x \cdot y = y \cdot x)$ – коммутативн. умн.
7. $\forall a$, $1 \cdot a = a$ – существование 1.
8. $\forall a \neq 0$, $\exists a^{-1}: a^{-1} \cdot a = 1$ – существование обр. элем.
9. $\forall a, b, c \in F (a(b+c) = ab + ac)$ – дистрибут.
10*. нетривиальность поля: $1 \neq 0$.

✓ E.g. поле: $\mathbb{Q}$ (дроби)

✓ Опр. конечное поле $\mathbb{F}_q$ ($GF(q)$):
содержит конечное число элементов

Date: 04.09.2025 Num: 00007
11.09.2025

AB

E.g. конечное поле: $F_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$

✓ Опр. Абелева группа
$(G; +)$ при выполнении акс. 1–4 поля.

☐ Построение поля комплексных чисел:
1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
2. $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + b_1, b_1 + b_2)$
3. $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd; ad + bc)$

$\Rightarrow (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) \quad i \Rightarrow (0,1)$
$\Rightarrow (a, b) \leftrightarrow a + bi$