Санкт-Петербургский государственный университет

Применение алгоритмов оптимизации к задаче генерации состояний заданного вида в квантовой оптике

Артем Александрович Черников, группа 23.М04-мм

24 апреля 2025 г.

Научный руководитель: к.ф.-м.н. С.С. Сысоев, старший преподаватель кафедры системного программирования

Санкт-Петербург
2025

Введение

- Квантовые технологии являются перспективной областью исследований
- Квантовая оптика — одно из ключевых направлений квантовых технологий
- Поиск квантовых оптических схем — актуальная и сложная задача

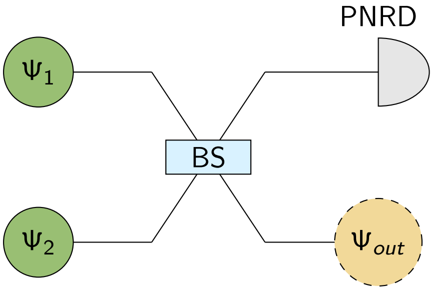
Постановка задачи

Целью работы является разработка оптимизационного алгоритма поиска квантовых оптических схем

Задачи:

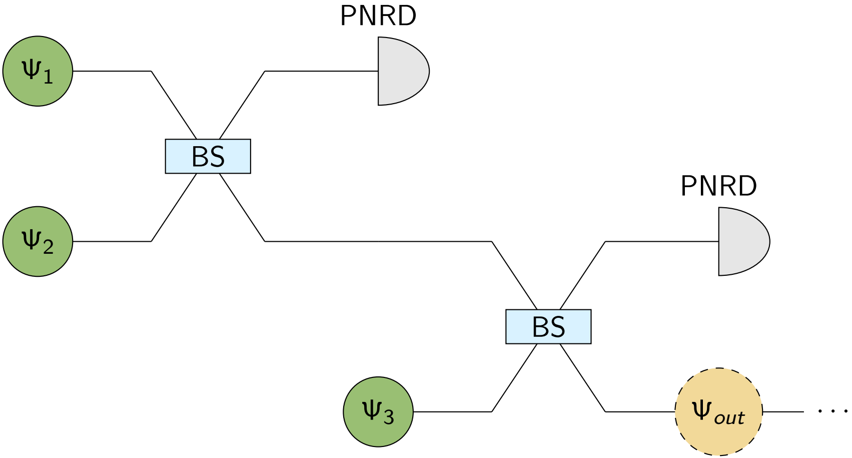
- Разобраться с терминами квантовой оптики
- Реализовать вычисление значений функционала для итеративной схемы с входными состояниями определенного вида
- Реализовать алгоритм оптимизации функционала из п.2 по параметрам схемы и входных состояний
- Найти наилучшие параметры схемы и входных состояний
- Проверить гипотезы о зависимости функционала от количества итераций в схеме
- Проанализировать результаты

Оптическая схема

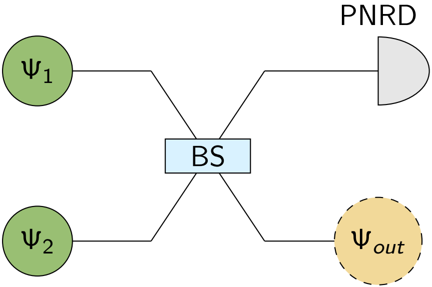


Ψ_1, Ψ_2 — функции, описывающие входные состояния
BS (Beam Splitter) — светоделитель
PNRD (Photon Number Resolving Detector) — датчик количества фотонов
Ψ_{out} — функция, описывающая выходное состояние

Итеративная схема



Оптическая схема, расчет состояния



$$\Psi_{out}(y) = \frac{1}{||\dots||} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\Psi_2(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\psi_n(x)dx$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2x)^{n-2k}(-1)^k}{(n-2k)!k!}$$

Оптимизируемый функционал

Состояние кубической фазы

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(i\gamma x^3 - \frac{1}{2} e^{-2r} x^2 - \frac{r}{2}\right)$$

Функционал

$$\xi(\gamma) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\langle \hat{O}(\gamma)^2 \rangle - \langle \hat{O}(\gamma) \rangle^2\right)$$

где

$$\langle \hat{X} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)} \hat{X} \Psi_{out}(x) dx$$

$$\hat{O}(\gamma) = -i \frac{d}{dx} + \gamma x^2$$

Численные методы

- Численное интегрирование с помощью метода Буля
- Численное дифференцирование с помощью разностных оценок

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

- Приближение выходной функции ступенчатой

$$\Psi_k = \Psi_{out}(x_k)$$

Результаты, численные методы

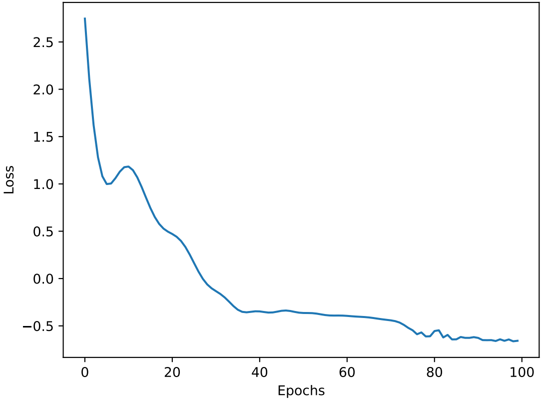


Схема с одной итерацией и одним измеренным фотоном ($\gamma = 1$)

- Сильная погрешность вычислений

Разложение в ряды

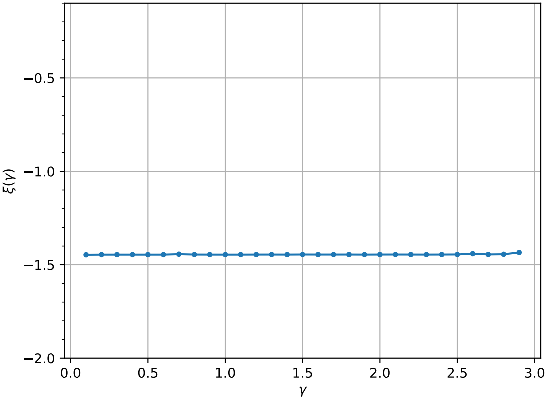
$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

- Начальное задание a_k
- Переход к двум агрументам $\Psi(x) \to \Psi(x+y)$
- Сжатие $\Psi(x) \to \Psi(\lambda x)$
- Произведение функций
- Интегрирование, дифференцирование

$$\Psi_{out}(y) = \frac{1}{||\dots||} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\Psi_2(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\psi_n(x)dx$$

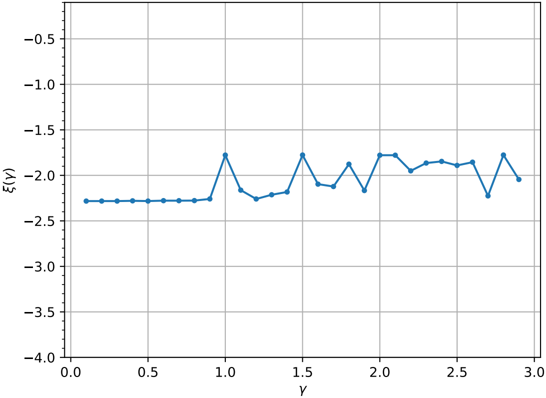
Результаты, разложение в ряды

- Итераций схемы: 1
- Фотонов: 1



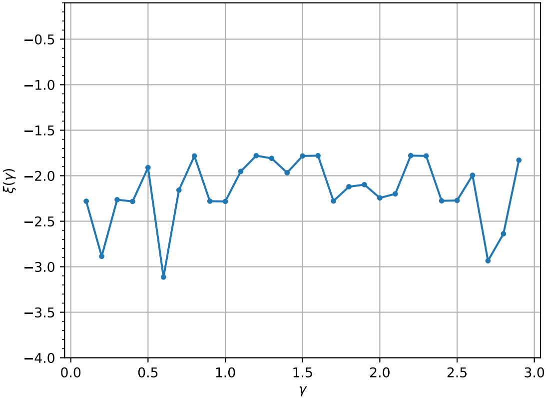
Результаты, разложение в ряды

- Итераций схемы: 1
- Фотонов: 2



Результаты, разложение в ряды

- Итераций схемы: 2
- Фотонов: 1 (на каждой итерации)



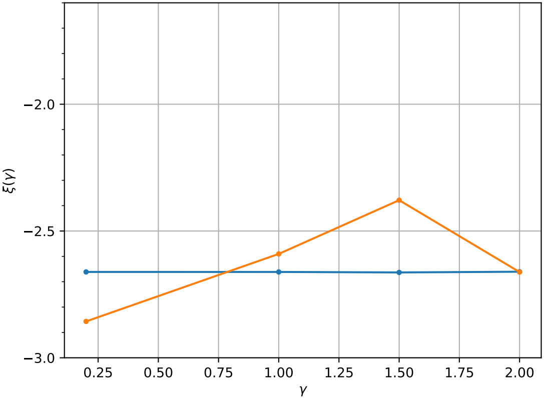
Результаты, разложение в ряды

Синим:

- Итераций схемы: 3
- Фотонов: 1 (на каждой итерации)

Оранжевым:

- Итераций схемы: 1
- Фотонов: 3



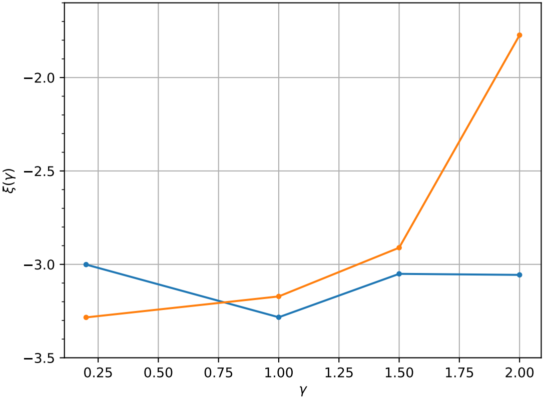
Результаты, разложение в ряды

Синим:

- Итераций схемы: 4
- Фотонов: 1 (на каждой итерации)

Оранжевым:

- Итераций схемы: 1
- Фотонов: 4



Заключение

В ходе выполнения данной работы были достигнуты следующие результаты:

- Изучены термины квантовой оптики
- Реализовано вычисление значений функционала и алгоритм его оптимизации для итеративной схемы
- Предложена схема вычисления функционала через представление в базисе Гаусса-Эрмита. Получено представление необходимых операций в терминах тензорной алгебры, выделена часть вычислений, независящих от параметров функционала
- Реализован алгоритм вычисления функционала в операциях тензорной алгебры. Реализована программа для расчетов с использованием GPU (PyTorch)

Заключение

- Проанализирована структура оптимизируемого функционала. Применены различные методы глобальной оптимизации
- Найдены наилучшие параметры схем и входных состояний для 1, 2, 3 и 4 итераций с совокупным вычитанием от 1 до 4 фотонов
- Доказана теорема о независимости значения глобального минимума от параметра состояния кубической фазы γ
- Проверены гипотезы о зависимости функционала от количества итераций в схеме
- На основе анализа результатов сделан вывод о том, что итеративная схема не выигрывает у простой схемы (без итераций) при условии вычитания достаточного количества фотонов при одной итерации

Код доступен в репозитории[1] GitHub

[1] https://github.com/artemgl/magpractice (дата обращения: 24.03.2025)

Оптимизируемый функционал

Состояние кубической фазы

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(i\gamma x^3 - \frac{1}{2}e^{-2r}x^2 - \frac{r}{2}\right)$$

Функционал

$$\xi(\gamma) = \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\min_{\hat{\rho}_G} var_{\hat{\rho}_G}(\hat{O}(\gamma))} = \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \cdot \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\gamma^{2/3}}$$

где

$$\hat{O}(\gamma) = -i\frac{d}{dx} + \gamma x^2$$

$$var_{\hat{\rho}_{out}}\hat{X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}^2\Psi_{out}(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}\Psi_{out}(x)dx\right)^2$$

Разложение в ряды

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

где

$$a_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\psi_n(x)dx$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2x)^{n-2k}(-1)^k}{(n-2k)!k!}$$

Разложение в ряды, начальное задание

Для функции

$$\Psi_{in}(x) = \frac{\exp\left(ix\sqrt{2}\mathrm{Im}(\alpha) - \frac{\left(x-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\alpha)\right)^2(1+i\sinh 2r\sin\varphi)}{2(\cosh 2r-\sinh 2r\cos\varphi)}\right)}{\sqrt[4]{\pi(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi)}}$$

$$a_k = \sqrt{\frac{\widetilde{a}}{2^k k!\sqrt{\widetilde{c}}}}\exp\left(\frac{\widetilde{a}b^2}{4} - \frac{\mathrm{Re}(b)^2\widetilde{c}}{2}\right)H_k\left(\widetilde{a}b, \widetilde{a}-1\right)$$

где

$$\widetilde{a} = 1 - e^{i\varphi}\tanh r$$

$$\widetilde{c} = e^{2r}\sin^2\frac{\varphi}{2} + e^{-2r}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$b = \sqrt{2}\left(iIm(\alpha) + Re(\alpha)\frac{1 + isinh(2r)sin(\varphi)}{cosh(2r) - sinh(2r)cos(\varphi)}\right)$$

Разложение в ряды, переход к двум аргументам

$$\Psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \psi_m(x)$$

$$\Psi(x+y) = \sum_{k,n=0}^{\infty} b_{k,n} \psi_k(x) \psi_n(y)$$

$$b_{k,n} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_{k,n,m}$$

где

$$J_{k,n,m} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_m(x+y) \psi_k(x) \psi_n(y) dxdy$$

Разложение в ряды, сжатие

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x)$$

$$\Psi(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\lambda x)\psi_n(x) dx$$

где

$$S_{n,k}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\lambda x)\psi_n(x) dx$$

Разложение в ряды, произведение функций

$$\Psi_1(x,y) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\psi_k(x)\psi_n(y), \quad \Psi_2(x,y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} b_{r,s}\psi_r(x)\psi_s(y)$$

$$\Psi_1(x,y)\Psi_2(x,y) = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{p,q}\psi_p(x)\psi_q(y)$$

$$c_{p,q} = \sum_{n,r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} I_{k,r,p}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} b_{r,s} I_{n,s,q}\right)$$

где

$$I_{i,j,k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x)dx$$

Разложение в ряды, интегрирование

$$\Psi(x, y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{k,m}\psi_k(x)\psi_m(y)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, y)\psi_n(x)dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\psi_m(y)$$

Разложение в ряды, функционал

$$\hat{O}(\gamma) = -i\frac{d}{dx} + \gamma x^2$$

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)$$

$$x\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & \cdots \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad x\cdot = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & \cdots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$