Санкт-Петербургский государственный университет

Группа 23.М04-мм

Черников Артем Александрович

Применение алгоритмов оптимизации к задаче генерации состояний заданного вида в квантовой оптике

Отчёт по производственной практике

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры системного программирования СПбГУ
С.С. Сысоев

Санкт-Петербург
2025

Оглавление

Введение

Квантовые технологии являются одной из самых перспективных областей научных исследований уже на протяжении нескольких десятилетий. Эти технологии используют принципы квантовой механики и позволяют упростить решение сложных вычислительных задач, стимулируя развитие различных областей, таких как вычислительные системы, идентификация молекулярных структур и химических свойств, криптография и многих других.

Вычислительные устройства, основанные на квантовых технологиях, позволят выполнять квантовые алгоритмы, намного превосходящие по скорости известные классические аналоги в решении некоторых задач, таких как факторизация больших чисел, поиск в неструктурированных базах данных и моделирование сложных молекулярных систем [6, 8]. Квантовая криптография предлагает новаторские подходы к защите информации.

Квантовая оптика является одним из ключевых направлений квантовых технологий. Она изучает поведение света на квантовом уровне и предоставляет возможность управлять квантовыми состояниями света для достижения той или иной цели, что открывает новые горизонты для разработки квантовых вычислительных и коммуникационных систем. Однако проектирование и оптимизация оптических схем является трудной задачей из-за их высокой сложности и многомерности их математического описания.

Оптимизационные алгоритмы играют важную роль в разработке и улучшении квантовых линейных оптических схем. Они позволяют находить оптимальные для рассматриваемой задачи параметры схем, максимизируя их эффективность. Применение эффективных оптимизационных алгоритмов для поиска квантовых оптических схем является актуальной задачей, решение которой может значительно ускорить прогресс в области квантовых технологий.

Данная работа посвящена применению различных техник оптимизации к задаче генерации состояний света заданного вида. Эксперименты проводились для задачи генерации состояния кубической фазы [4]. В общем виде задача формализуется как получение негауссовых состояний из гауссовых [9] с помощью линейных оптических элементов и нелинейной операции измерения числа фотонов. Эти состояния представляют интерес благодаря тому, что могут позволить реализовать универсальное квантовое вычислительное устройство в непрерывных переменных [2, 7].

1. Постановка задачи

Целью данной работы является разработка оптимизационного алгоритма поиска квантовых оптических схем генерации состояний заданного вида.

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи.

- Разобраться с определениями квантовой оптики: волновая функция, гауссово состояние, сжатие, измерение в базисе Фока, состояние кубической фазы, нелинейное сжатие и др.

- Реализовать программно вычисление значений функционала нелинейного сжатия для итеративной схемы с входными состояниями определенного вида.

- Реализовать алгоритм оптимизации функционала из п.2 по параметрам схемы и входных состояний

- Найти наилучшие параметры схемы и входных состояний

- Проверить гипотезы о зависимости функционала от количества итераций в схеме

- Проанализировать результаты

2. Решаемая задача

В данном разделе представлено описание контекста решаемой задачи. В первом подразделе описан общий вид схем, которые применяются для генерации состояний света. Второй подраздел посвящён описанию конкретного вида генерируемых состояний — состояния кубической фазы.

2.1. Исследуемые схемы

Подготовка фотонных состояний определённого вида в квантовой оптике представляет особый интерес для решения разного рода задач. Вид подготавливаемых состояний может быть разным в зависимости от контекста проблемы, как и процесс подготовки, однако в данной работе мы сконцентрируемся на способе подготовки состояний с помощью схемы, изображенной на рис. 1.

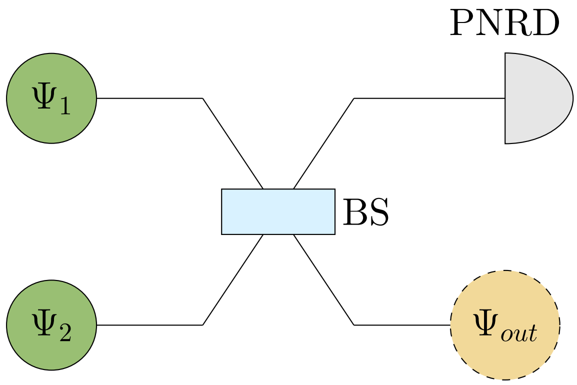

Рис. 1: Схема преобразования над двумя состояниями с волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2. Состояния запутываются с помощью светоделителя BS (Beam Splitter), после чего на одном из выходов схемы измеряется количество фотонов детектором PNRD (Photon Number Resolving Detector). На втором выходе возникает состояние Ψ_{out}.

Проанализируем эту схему. Рассматриваемые нами фотонные состояния задаются волновыми функциями Ψ — непрерывными на $\mathbb{R}$

квадратично-интегрируемыми комплекснозначными функциями:

$$||\Psi||^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1. \tag{1}$$

Схема на рис. 1 имеет два входа, на каждый из которых подаётся по одному состоянию с волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2. Совокупное состояние на входе описывается волновой функцией уже от двух аргументов

$$\Psi_1(x)\Psi_2(y), \tag{2}$$

где x и y — параметры волновых функций, имеющие физический смысл пространственной координаты для соответствующего волнового пакета. Моды — траектории волновых пакетов в интерферометре. Количество аргументов волновой функции равно количеству мод в рассматриваемой схеме. На рис. 1 присутствуют 2 различимые траектории, что соответствует двухмодовому состоянию.

В процессе преобразования фотоны проходят через светоделитель, который частично пропускает, частично отражает попадающий на него свет. Соотношение между количеством пропущенного и отражённого света может быть произвольно задано некоторым углом φ. В схеме на рис. 1 состояние после прохождения через светоделитель будет описываться функцией

$$\Psi_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\Psi_2(-x\sin\varphi + y\cos\varphi). \tag{3}$$

Такая трансформация состояния связана с тем, что действие светоделителя описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{4}$$

действующей на вектор, компоненты которого соответствуют модам.

Наконец, с помощью детектора измеряется количество фотонов в первой моде. В результате этого процесса во второй моде окажется состояние

$$\Psi_{out}(y) = \frac{1}{||\dots||}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\Psi_2(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\psi_n(x)dx, \quad (5)$$

где

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{-x^2/2}H_n(x) \quad (6)$$

— функция Гаусса-Эрмита, а

$$H_n(x) = n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(2x)^{n-2k}(-1)^k}{(n-2k)!k!} \quad (7)$$

— многочлен Эрмита.

Функция Гаусса-Эрмита $\psi_n(x)$ параметризуется целым неотрицательным числом n, которое равно количеству измеренных датчиком фотонов. Заранее неизвестно, сколько фотонов будет измерено, поскольку состояние находится в квантовой суперпозиции, в которой одновременно присутствуют состояния с 0, 1, 2 и т.д. фотонами в первой моде. При этом вероятность p_n, с которой будет измерено n фотонов, может быть посчитана: она равна квадрату нормы функции

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\Psi_2(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\psi_n(x)dx, \quad (8)$$

$$p_n = ||\Phi||^2. \quad (9)$$

Таким образом, невозможно предугадать, сколько фотонов будет измерено, однако можно узнать, с какой вероятностью будет измерено то или иное количество фотонов. При этом количество измеренных фотонов полностью определяет выходную функцию Ψ_{out}, то есть можно настроить схему так, чтобы желаемое состояние подготавливалось в выходной моде при измерении заданного числа фотонов.

После измерения выходную волновую функцию нужно отнормировать, чтобы корректно задавать состояние.

Рассмотренную схему можно усложнить, сделав итеративной: вы-

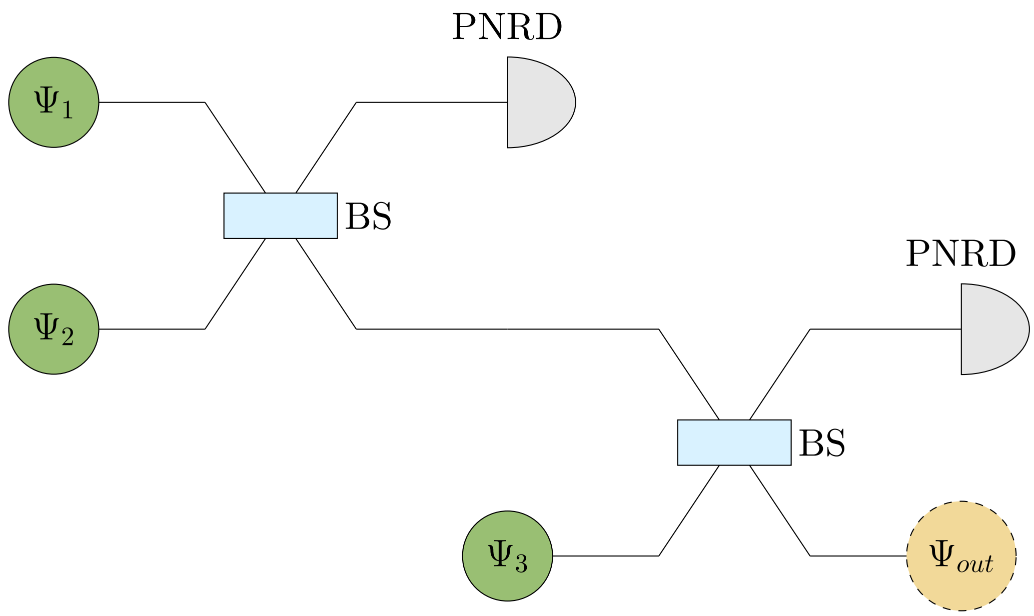

Рис. 2: Пример итеративной схемы.

ходное состояние может быть подано как входное для другой такой же схемы и так далее (рис. 2). Усложнение схемы итеративностью может позволить подготавливать состояния, которые невозможно подготовить при помощи лишь одной итерации.

Схемы варьируются входными функциями, углами светоделителей и количеством итераций. Выходная функция зависит от этих параметров и может быть настроена под соответствие определённым условиям.

В качестве входных состояний рассматриваются состояния с гауссовыми волновыми функциями, задаваемые физическими параметрами $r \in \mathbb{R}$ — коэффициент сжатия, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ — соответственно поворот и сдвиг на фазовой плоскости:

$$\Psi_{in}(x) = \frac{\exp\left(ix\sqrt{2}\mathrm{Im}(\alpha) - \frac{\left(x-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\alpha)\right)^2(1+i\sinh 2r\sin\varphi)}{2(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi)}\right)}{\sqrt[4]{\pi(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi)}}. \tag{10}$$

Задачей исследования является реализация алгоритма нахождения схем рассмотренного вида, подготавливающих состояния, которые отвечают определённым требованиям. Например, волновая функция подготавливаемого состояния может минимизировать некоторый функционал. В частности, требовалось организовать поиск схем, генерирующих состояния кубической фазы, что описано подробнее в следующем подразделе.

2.2. Состояние кубической фазы

Состояние кубической фазы описывается волновой функцией вида

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(i\gamma x^3 - \frac{1}{2}e^{-2r}x^2 - \frac{r}{2}\right), \tag{11}$$

где γ представляет собой кубичность состояния, а r — коэффициент сжатия.

В качестве оценки, насколько некоторое состояние похоже на состояние кубической фазы, используется нелинейное сжатие

$$\xi(\gamma) = \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\min_{\hat{\rho}_G} var_{\hat{\rho}_G}(\hat{O}(\gamma))} = \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \cdot \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\gamma^{2/3}}, \tag{12}$$

где

$$\hat{O}(\gamma) = -i\frac{d}{dx} + \gamma x^2, \tag{13}$$

$$var_{\hat{\rho}_{out}}\hat{X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}^2\Psi_{out}(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}\Psi_{out}(x)dx\right)^2. \tag{14}$$

Чем ближе состояние к состоянию кубической фазы, тем меньше значение нелинейного сжатия. Таким образом, требуется минимизировать функционал $\xi(\gamma)$.

3. Реализация

В этом разделе описаны два подхода к реализации алгоритма, решающего поставленную задачу: через приближённое интегрирование и дифференцирование и через разложение в ряды функций Гаусса-Эрмита. Код доступен в репозитории[1], размещённом на веб-сервисе GitHub.

3.1. Численные методы

Имея явное задание функций $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$, посчитаем ненормированную выходную функцию

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\Psi_2(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\psi_n(x)dx \tag{15}$$

в нескольких точках, получив её ступенчатое приближение. Значение в каждой точке посчитаем с помощью численного интегрирования. Достаточно точным для этой задачи оказался метод Буля[2]. Среди других методов интегрирования использовались методы трапеций, Гаусса, Симпсона и Монте Карло. Сравнение методов производилось для частного решения по среднеквадратичной ошибке при фиксированном количестве точек разбиения.

Норму функции $\Phi(y)$ посчитаем также с помощью численного интегрирования:

$$||\Phi||^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(y)|^2 dy. \tag{16}$$

Поскольку промежутки интегрирования бесконечны, а значения интегрируемых функций стремятся к нулю при больших по модулю значениях аргумента, выберем конечный интервал, вне которого значения интегрируемых функций пренебрежимо малы, и подставим его вместо интервала $(-\infty, \infty)$.

[1] Репозиторий проекта — https://github.com/artemgl/magpractice (дата обращения: 24.03.2025), пользователь artemgl

[2] Статья про интегрирование методом Буля — https://en.wikipedia.org/wiki/Boole%27s_rule (дата обращения: 10.04.2025)

Наконец, отнормируем $\Phi(x)$

$$\Psi_{out}(x) = \frac{\Phi(x)}{||\Phi||}, \tag{17}$$

получив ступенчатое приближение выходной функции.

Минимизируемый функционал выглядит следующим образом:

$$\xi(\gamma) = \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\min_{\hat{\rho}_G} var_{\hat{\rho}_G}(\hat{O}(\gamma))} = \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \cdot \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\gamma^{2/3}}, \tag{18}$$

где

$$\hat{O}(\gamma) = -i\frac{d}{dx} + \gamma x^2, \tag{19}$$

$$var_{\hat{\rho}_{out}}\hat{X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}^2\Psi_{out}(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}\Psi_{out}(x)dx\right)^2. \tag{20}$$

Из определения $\hat{O}(\gamma)$ следует, что

$$\hat{O}(\gamma)^2 = -\frac{d^2}{dx^2} - 2i\gamma x^2\frac{d}{dx} - 2i\gamma x + \gamma^2 x^4. \tag{21}$$

Таким образом, требуется также считать первую и вторую производные. Для этого будем использовать разностные оценки:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{22}$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \tag{23}$$

3.2. Разложение в ряды

Функции Гаусса-Эрмита

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{24}$$

образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций на прямой $L^2(\mathbb{R})$ [3]. То есть, для них верно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x)\psi_n(x)dx = \delta_{k,n}, \tag{25}$$

и любая функция $\Psi(x)$ с конечной нормой ($||\Psi||^2 < \infty$) может быть разложена в ряд

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x), \tag{26}$$

где

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\psi_k(x)dx. \tag{27}$$

Поскольку коэффициенты a_k убывают по модулю с ростом k, начиная с некоторого момента они становятся пренебрежимо малы и могут быть исключены из рассмотрения. Таким образом, функцию $\Psi(x)$ можно представить в виде вектора конечной размерности.

Покажем, что, используя такое представление функций, можно выразить все расчёты в виде произведения тензоров.

Входные состояния имеют вид

$$\Psi_{in}(x) = \frac{\exp\left(ix\sqrt{2}\mathrm{Im}(\alpha) - \frac{\left(x-\sqrt{2}\mathrm{Re}(\alpha)\right)^2 (1+i\sinh 2r \sin\varphi)}{2(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi)}\right)}{\sqrt[4]{\pi(\cosh 2r - \sinh 2r \cos\varphi)}} \tag{28}$$

и r, φ, α являются физическими параметрами.

Для удобства введём замену переменных и получим

$$\Psi_{in}(x) = c \cdot \exp\left(-ax^2 + bx\right), \tag{29}$$

где

$$a = \frac{1 + i\sinh 2r \sin\varphi}{2(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi)}, \tag{30}$$

$$b = \sqrt{2}\Big(iIm(\alpha) + Re(\alpha)\frac{1 + i\sinh 2r\sin\varphi}{\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi}\Big), \tag{31}$$

$$c = \frac{\exp\Big(- Re^2(\alpha)\frac{1+i\sinh 2r\sin\varphi}{\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi}\Big)}{\sqrt[4]{\pi(\cosh 2r - \sinh 2r\cos\varphi)}}. \tag{32}$$

Коэффициенты разложения входных функций

В [1] показано, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(lx+e,f)e^{-\alpha x^2+\beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\Big(\frac{\beta^2}{4\alpha}\Big)H_n\Big(e+\frac{\beta l}{2\alpha}, f+\frac{l^2}{4\alpha}\Big), \tag{33}$$

где

$$H_n(x,y) = n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{x^{n-2k}y^k}{(n-2k)!k!} \tag{34}$$

— обобщённый многочлен Эрмита, и

$$H_n(x) = H_n(2x,-1). \tag{35}$$

Используя равенство (33), получим выражение для коэффициентов разложения входной функции:

$$a_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)\psi_k(x)dx = \frac{c}{\sqrt{2^k k!\sqrt{\pi}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-ax^2+bx\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}H_k(2x,-1)dx =$$

$$= c\sqrt{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k-1}k!(2a+1)}}\exp\Big(\frac{b^2}{2+4a}\Big)H_k\Big(\frac{2b}{1+2a},\frac{1-2a}{1+2a}\Big). \tag{36}$$

После обратной замены получим явное выражение, показывающее зависимость a_k от физических параметров. На практике оказалось удобным в качестве настраиваемых параметров использовать r, φ и b. Формула для них примет следующий вид:

$$a_k = \sqrt{\frac{\widetilde{a}}{2^k k!\sqrt{\widetilde{c}}}}\exp\Big(\frac{\widetilde{a}b^2}{4} - \frac{\mathrm{Re}(b)^2\widetilde{c}}{2}\Big)H_k\Big(\widetilde{a}b, \widetilde{a}-1\Big), \tag{37}$$

где

$$\widetilde{a} = 1 - e^{i\varphi}\tanh r, \tag{38}$$

$$\widetilde{c} = e^{2r}\sin^2\frac{\varphi}{2} + e^{-2r}\cos^2\frac{\varphi}{2}. \tag{39}$$

Следует отметить, что представленная формула задаёт исходную функцию не в точности, а домноженную на некоторое комплексное число единичного модуля. Это обстоятельство нисколько не влияет на свойства волновой функции и может быть проигнорировано.

Переход к двум аргументам

Нам понадобится преобразование, увеличивающее количество аргументов функции следующим образом:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k(x) \to \Psi(x+y). \tag{40}$$

Поскольку функция $\Psi(x+y)$ зависит от двух аргументов, она задаётся не вектором, а матрицей:

$$\Psi(x+y) = \sum_{k,n=0}^{\infty} b_{k,n}\psi_k(x)\psi_n(y). \tag{41}$$

Найдём формулу для вычисления $b_{k,n}$.

$$b_{k,n} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Psi(x+y)\psi_k(x)\psi_n(y)dxdy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m(x+y)\psi_k(x)\psi_n(y)dxdy =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_m(x+y)\psi_k(x)\psi_n(y)dxdy. \tag{42}$$

Введём трёхмерный тензор

$$J_{k,n,m} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_m(x+y)\psi_k(x)\psi_n(y)dxdy. \tag{43}$$

Тогда матрица b является тензорным произведением J и a, причём тензор J не зависит от входной функции и может быть посчитан заранее.

Чётность функции Гаусса-Эрмита $\psi_n(x)$ совпадает с чётностью её индекса n. Используя это свойство, получим соотношения

$$J_{k,n,m} = J_{n,k,m}, \quad J_{k,n,m} = (-1)^n J_{m,n,k},$$

$$J_{k,n,m} = 0 \quad [k+n+m \text{ нечётно}], \tag{44}$$

которые позволят сократить время вычисления тензора J.

Сжатие

После перехода к двум аргументам нам потребуется преобразование, сжимающее функцию по одной из осей:

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x) \to \Psi(\lambda x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n(x). \tag{45}$$

$$b_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi(\lambda x)\psi_n(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\lambda x)\psi_n(x)dx. \tag{46}$$

Обозначив $S_{n,k}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\lambda x)\psi_n(x)dx$, получим, что результирующий вектор есть произведение матрицы $S(\lambda)$ на вектор a.

Имея

$$H_{2j}(x) = (-1)^j 2^{2j} j! L_j^{-\frac{1}{2}}(x^2), \tag{47}$$

$$H_{2j+1}(x) = (-1)^j 2^{2j+1} j! x L_j^{\frac{1}{2}}(x^2), \tag{48}$$

где L_j^α — обобщённый многочлен Лагерра, по формуле из таблицы интегралов [5] (номер 7.414.4), получим

$$S_{n,k}(\lambda) = \frac{(-1)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor} 2^{\frac{n+k+1}{2}}}{\sqrt{\pi n! k! (1+\lambda^2)}} \Gamma\Big(\frac{n+k+1}{2}\Big)\Big(\frac{(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)}\Big)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\Big(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\Big)^{[n \text{ нечётно}]}\times$$

$$\times {}_2F_1\Bigg(-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor, -\lfloor\frac{k}{2}\rfloor; \frac{1-n-k}{2}; \Big(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\Big)^2\Bigg). \tag{49}$$

где Γ — гамма-функция, ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция.

Параметр λ настраиваемый, поэтому для вычисления градиента требуется явное задание $S_{n,k}(\lambda)$, однако вычисления по приведённой формуле не являются устойчивыми. Чтобы решить эту проблему, функции $S_{n,k}(\lambda)$ были приближены непрерывными кусочно-линейными функциями, узлы которых были посчитаны заранее по формуле (49) с помощью длинной арифметики.

Для функции от двух аргументов применимы аналогичные рассуждения, в результате которых оказывается, что для сжатия по соответствующей оси нужно умножить матрицу, которая задаёт исходную функцию, слева на $S(\lambda)$ или справа на $S(\lambda)^T$.

Произведение функций

Посмотрим, как задаётся произведение двух функций

$$\Psi_1(x,y) = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\psi_k(x)\psi_n(y), \quad \Psi_2(x,y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} b_{r,s}\psi_r(x)\psi_s(y). \tag{50}$$

$$\Psi_1(x,y)\Psi_2(x,y) = \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{p,q}\psi_p(x)\psi_q(y), \tag{51}$$

$$c_{p,q} = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(\sum_{k,n=0}^{\infty} a_{k,n}\psi_k(x)\psi_n(y)\Big)\Big(\sum_{r,s=0}^{\infty} b_{r,s}\psi_r(x)\psi_s(y)\Big)\psi_p(x)\psi_q(y)dxdy =$$

$$= \sum_{k,n=0}^{\infty}\sum_{r,s=0}^{\infty} a_{k,n}b_{r,s}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(x)\psi_r(x)\psi_p(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(y)\psi_s(y)\psi_q(y)dy. \tag{52}$$

Введём обозначение

$$I_{i,j,k} = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_i(x)\psi_j(x)\psi_k(x)dx. \tag{53}$$

Тензор I может быть посчитан заранее и использоваться в вычислениях. Сократить подсчёты позволят следующие свойства:

$$I_{i,j,k} = I_{i,k,j}, \quad I_{i,j,k} = I_{j,i,k},$$

$$I_{i,j,k} = 0 \quad [i+j+k \text{ нечётно}]. \tag{54}$$

Тогда

$$c_{p,q} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} a_{k,n} b_{r,s} I_{k,r,p} I_{n,s,q} = \sum_{n,r=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} I_{k,r,p}\Big)\Big(\sum_{s=0}^{\infty} b_{r,s} I_{n,s,q}\Big), \tag{55}$$

что в сущности является свёрткой двух тензоров: $\widetilde{A}_{n,r,p} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n} I_{k,r,p}$ и $\widetilde{B}_{r,n,q} = \sum_{s=0}^{\infty} b_{r,s} I_{n,s,q}$.

Интегрирование

В процессе вычислений требуется считать интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x,y)\psi_n(x)dx, \tag{56}$$

имея задание функции

$$\Psi(x,y) = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{k,m}\psi_k(x)\psi_m(y). \tag{57}$$

По свойствам базисных функций $\psi_n(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k,m=0}^{\infty} a_{k,m}\psi_k(x)\psi_m(y)\Big)\psi_n(x)dx = \sum_{k,m=0}^{\infty} a_{k,m}\psi_m(y) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x)\psi_n(x)dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\psi_m(y), \tag{58}$$

что является функцией, задаваемой строкой матрицы a под номером n.

Функционал

Выходная функция должна минимизировать функционал

$$\xi(\gamma) = \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\min_{\hat{\rho}_G} var_{\hat{\rho}_G}(\hat{O}(\gamma))} = \frac{2\cdot 2^{2/3}}{3}\cdot\frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\gamma^{2/3}}, \tag{59}$$

где

$$\hat{O}(\gamma) = -i\frac{d}{dx} + \gamma x^2, \tag{60}$$

$$var_{\hat{\rho}_{out}}\hat{X} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}^2\Psi_{out}(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}\Psi_{out}(x)dx\right)^2. \tag{61}$$

$\hat{X}$ — линейный оператор, задаваемый матрицей $X = \{x_{k,n}\}_{k,n=0}^{\infty}$ и такой, что

$$\hat{X}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} x_{k,n}a_n\Big)\psi_k(x). \tag{62}$$

Тогда для $\Psi_{out}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\psi_k(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi_{out}(x)}\hat{X}\Psi_{out}(x)dx = a^{\dagger}Xa, \tag{63}$$

($\dagger$ — эрмитово сопряжение) таким образом, данный интеграл выражается через матричные произведения.

Матричное представление оператора $\hat{O}(\gamma)$ можно получить из соотношений

$$\frac{d}{dx}\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x), \tag{64}$$

$$x\psi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x). \tag{65}$$

Тогда матричные представления операторов $\frac{d}{dx}$ и $x\cdot$ равны соответственно

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \cdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{66}$$

через которые легко выражается матричное представление $\hat{O}(\gamma)$.

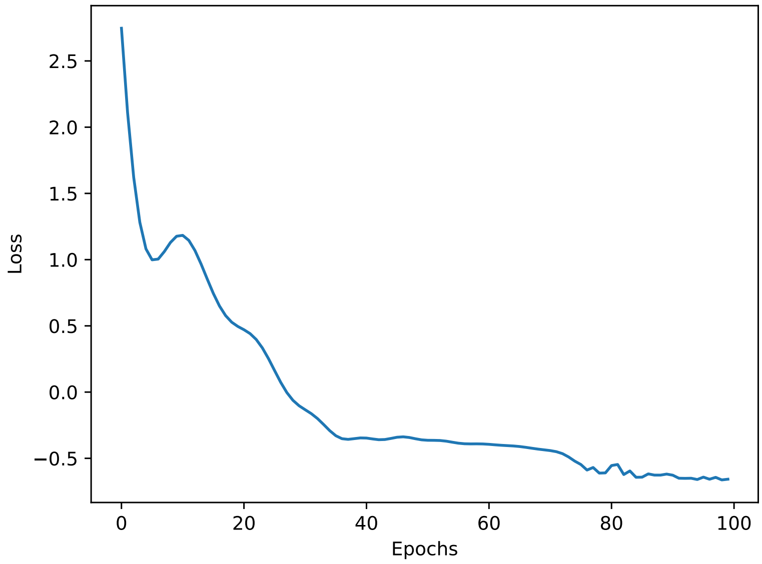

Рис. 3: График изменения функции потерь с увеличением пройденных градиентных шагов ($\gamma = 1$).

4. Результаты

В данном разделе представлены результаты применения описанных в предыдущих разделах методов поиска параметров, оптимизирующих нелинейное сжатие выходной функции. Результаты подхода через ряды показали, что реализованный алгоритм способен находить оптимальные схемы и может быть использован для решения задач такого рода.

4.1. Численные методы

Поиск проводился для схемы с одной итерацией и один измеренным фотоном с помощью градиентного спуска. На рис. 3 представлен график изменения нелинейного сжатия с увеличением градиентных шагов для $\gamma = 1$. В конце поиска значение функции потерь оказалось отрицательным, что говорит о наличии сильной погрешности в вычислениях, поскольку нелинейное сжатие не может быть отрицательным.

Метод, описанный в следующем подразделе, показал более удовлетворительные результаты, поэтому эксперименты с численными методами были приостановлены.

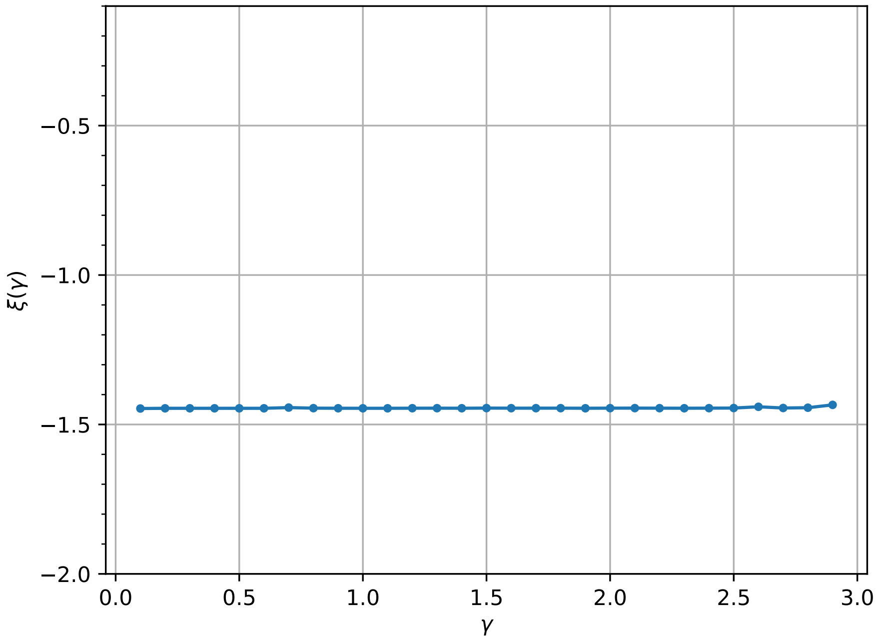

Рис. 4: Зависимость найденного оптимального нелинейного сжатия от γ для схем с одной итерацией и одним измеренным фотоном.

4.2. Разложение в ряды

Поиск состояний проводился с помощью градиентного спуска для одной, двух, трёх и четырёх итераций оптической схемы. Требовалось проследить взаимосвязь схем, измеряющих одно и то же количество фотонов, но имеющих разное количество итераций. На рис. 4 изображён график зависимости найденного минимального нелинейного сжатия от разных параметров γ. Из приведённого графика видно, что оптимальное значение нелинейного сжатия скорее всего не зависит от параметра γ.

Аналогичные графики для двух измеренных фотонов приведены на рис. 5 и 6. Хаотичные колебания кривой наталкивают на мысль о том, что истинная кривая, так же как в предыдущем случае, является горизонтальной прямой, а алгоритм в некоторых точках либо застревал в локальном экстремуме, либо слишком тонко подбирал параметры, так что вычисление значения функции потерь давало сильную погрешность, и это значение оказывалось слишком низким. Несмотря на это, на обоих графиках прослеживается отсутствие зависимости оптимального нелинейного сжатия от параметра γ, а также это нелинейное сжа-

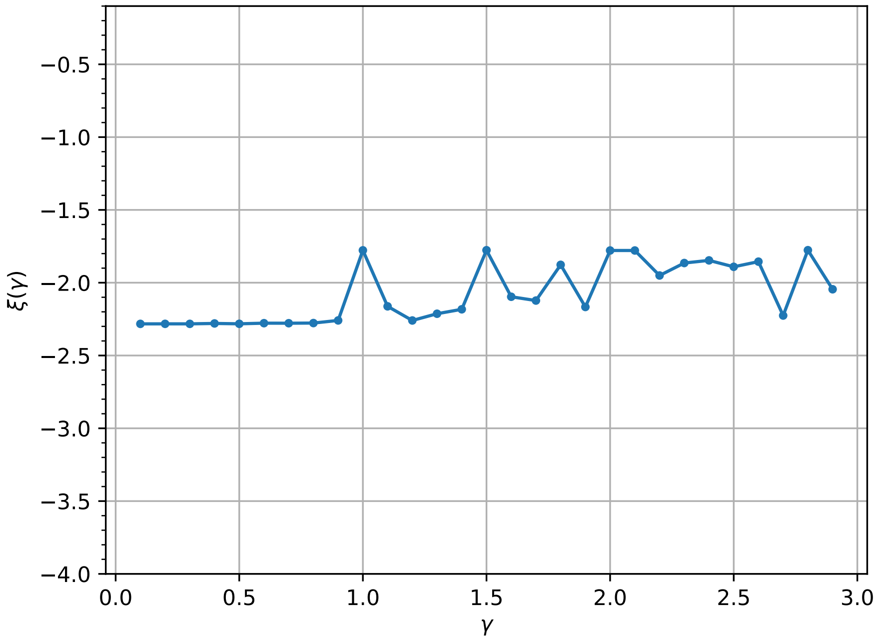

Рис. 5: Зависимость найденного оптимального нелинейного сжатия от γ для схем с одной итерацией и двумя измеренными фотонами.

тие принимает одинаковое значение. Таким образом, измерение двух фотонов за одну итерацию не хуже, чем измерение двух фотонов по одному за две итерации.

Графики для трёх и четырёх фотонов приведены на рис. 7 и 8 соответственно. Непосредственно по этим графикам сложно оценить, насколько итеративные схемы лучше схем с одним измерением. Тем не менее, в подразделе 4.3 описан результат, который говорит о том, что если минимум нелинейного сжатия для некоторого γ_1 достигается на функции $\Psi(x)$, то для другого γ_2 этот же минимум достигается на $\sqrt{(\frac{\gamma_2}{\gamma_1})^{1/3}}\Psi\left((\frac{\gamma_2}{\gamma_1})^{1/3}x\right)$. То есть если для некоторого γ^* был найден минимум, он может быть найден и для любого другого γ. Таким образом, достаточно смотреть не на всю кривую, а на её минимальное значение. Используя эту информацию, можно на основе полученных графиков выдвинуть предположение, что для четырёх фотонов увеличение количества итераций так же не улучшает схему, а для трёх даже ухудшает.

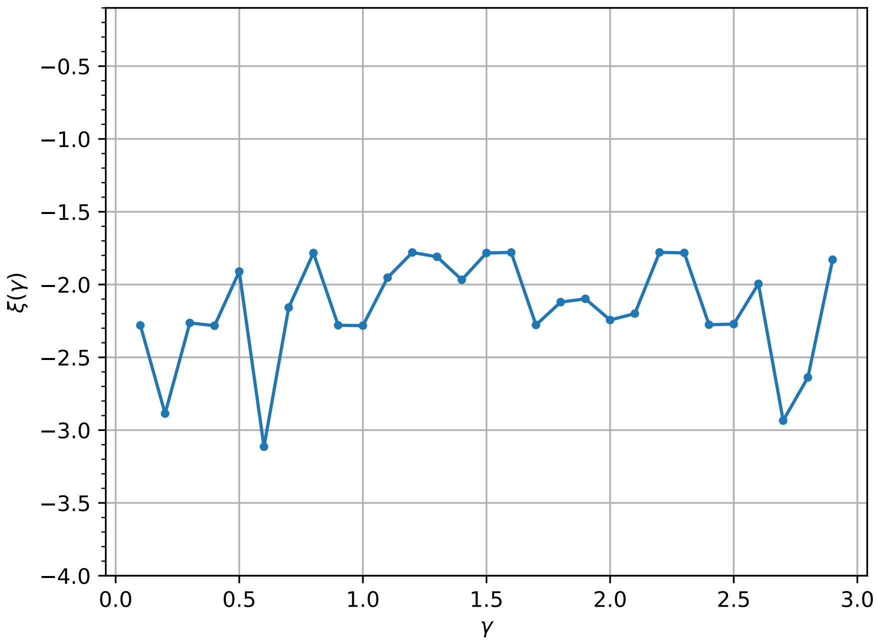

Рис. 6: Зависимость найденного оптимального нелинейного сжатия от γ для схем с двумя итерациями по одному измеренному фотону.

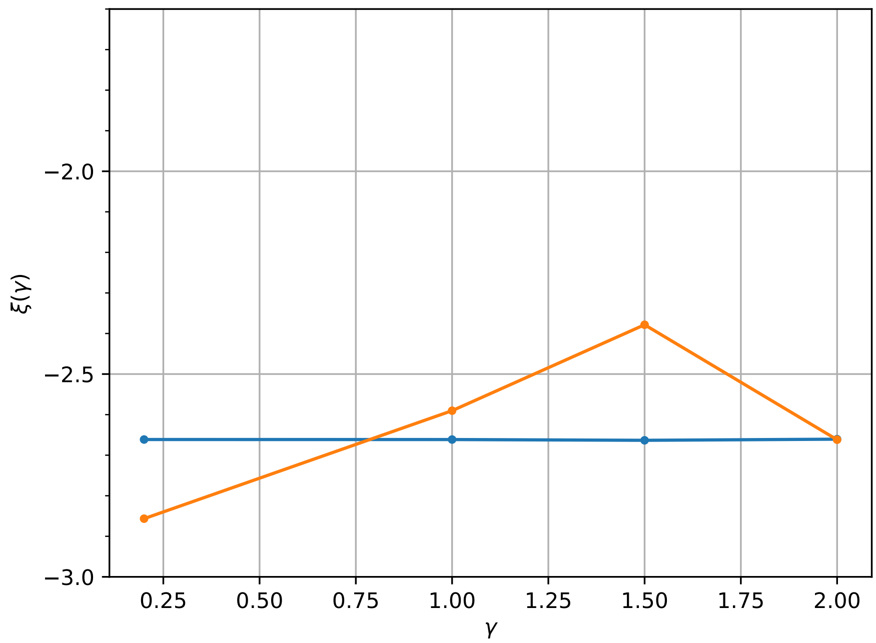

Рис. 7: Зависимость найденного оптимального нелинейного сжатия от γ для схем с тремя измеренными фотонами. Синей кривой обозначены схемы с тремя итерациями по одному измеренному фотону, оранжевой — с одной итерацией.

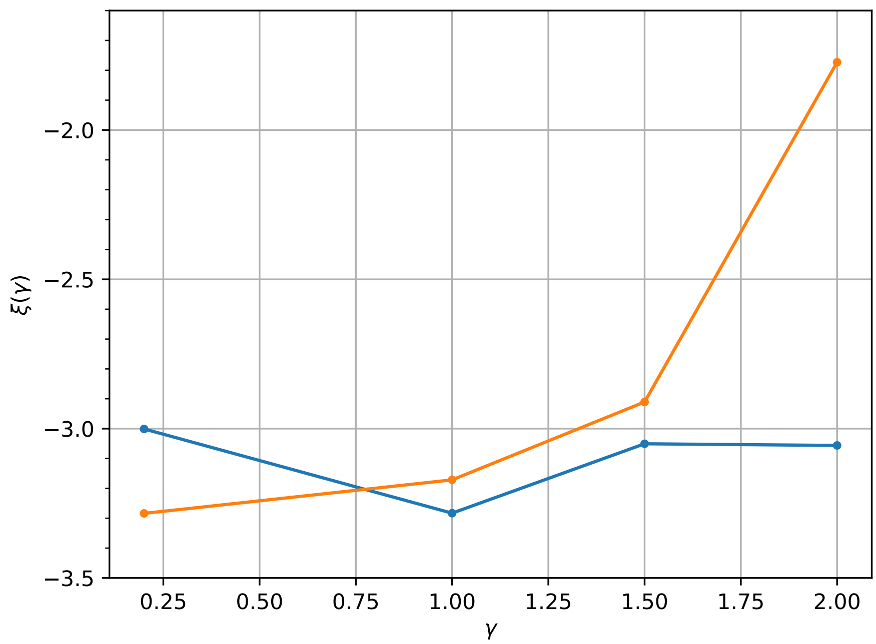

Рис. 8: Зависимость найденного оптимального нелинейного сжатия от γ для схем с четырьмя измеренными фотонами. Синей кривой обозначены схемы с четырьмя итерациями по одному измеренному фотону, оранжевой — с одной итерацией.

4.3. Независимость нелинейного сжатия от γ

Рассмотрим нелинейное сжатие для выходного состояния $\hat{\rho}_{out}$:

$$\xi(\gamma) = \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\min_{\hat{\rho}_G} var_{\hat{\rho}_G}(\hat{O}(\gamma))} = \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \cdot \frac{var_{\hat{\rho}_{out}}(\hat{O}(\gamma))}{\gamma^{2/3}}, \tag{67}$$

$$\hat{O}(\gamma) = -i\frac{d}{dx} + \gamma x^2. \tag{68}$$

Пусть $\hat{\rho}_{out}$ описывается функцией $\Psi_{out}(x)$ и минимум $\xi(\gamma)$ достигается на некоторой функции $\Psi(x)$:

$$\min_{\hat{\rho}_{out}} \xi(\gamma) = \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3\gamma^{2/3}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x) \hat{O}(\gamma)^2 \Psi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x) \hat{O}(\gamma) \Psi(x) dx \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x) \left(\frac{\hat{O}(\gamma)}{\gamma^{1/3}} \right)^2 \Psi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x) \frac{\hat{O}(\gamma)}{\gamma^{1/3}} \Psi(x) dx \right)^2 \right). \tag{69}$$

Считаем, что нам известно γ и $\Psi(x)$. Хотим найти такую функцию $\Phi(x)$, на которой достигается минимум нелинейного сжатия в другой известной точке μ:

$$\min_{\hat{\rho}_{out}} \xi(\mu) =$$

$$= \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}(x) \Big(\frac{\hat{O}(\mu)}{\mu^{1/3}} \Big)^2 \Phi(x) dx - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi}(x) \frac{\hat{O}(\mu)}{\mu^{1/3}} \Phi(x) dx \Big)^2 \Bigg). \quad (70)$$

Пусть существует обратимый линейный оператор $\hat{A}$, такой что

$$\Phi(x) = \hat{A} \Psi(x). \quad (71)$$

Подставим в (70):

$$\min_{\hat{\rho}_{out}} \xi(\mu) =$$

$$= \frac{2 \cdot 2^{2/3}}{3} \Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x) \Big(\hat{A}^{\dagger} \frac{\hat{O}(\mu)}{\mu^{1/3}} \hat{A} \Big)^2 \Psi(x) dx - \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x) \Big(\hat{A}^{\dagger} \frac{\hat{O}(\mu)}{\mu^{1/3}} \hat{A} \Big) \Psi(x) dx \Big)^2 \Bigg). \quad (72)$$

Если

$$\hat{A}^{\dagger} \frac{\hat{O}(\mu)}{\mu^{1/3}} \hat{A} = \frac{\hat{O}(\gamma)}{\gamma^{1/3}}, \quad (73)$$

то из (69)

$$\min_{\hat{\rho}_{out}} \xi(\mu) = \min_{\hat{\rho}_{out}} \xi(\gamma) \quad (74)$$

и достигается этот минимум на функции $\hat{A}\Psi(x)$.

Покажем, что $\hat{A}$ — не что иное, как оператор сжатия по оси абсцисс в $(\mu/\gamma)^{1/3}$ раз с сохранением нормы:

$$\hat{A} f(x) = \sqrt{(\frac{\mu}{\gamma})^{1/3}} f\Big((\frac{\mu}{\gamma})^{1/3} x \Big), \quad (75)$$

$$\hat{A}^{\dagger} f(x) = \sqrt{(\frac{\gamma}{\mu})^{1/3}} f\Big((\frac{\gamma}{\mu})^{1/3} x \Big). \quad (76)$$

Тогда

$$f(x) \overset{\hat{A}}{\to} \sqrt{(\frac{\mu}{\gamma})^{1/3}} f\Big((\frac{\mu}{\gamma})^{1/3} x \Big) \overset{\frac{\hat{O}(\mu)}{\mu^{1/3}}}{\to}$$

$$\to \sqrt{(\frac{\mu}{\gamma})^{1/3}} \frac{1}{\mu^{1/3}} \Bigg((-i) (\frac{\mu}{\gamma})^{1/3} f'\Big((\frac{\mu}{\gamma})^{1/3} x \Big) + \mu x^2 f\Big((\frac{\mu}{\gamma})^{1/3} x \Big) \Bigg) \overset{\hat{A}^{\dagger}}{\to}$$

$$\to \frac{1}{\mu^{1/3}}\Bigg((-i)(\frac{\mu}{\gamma})^{1/3}f'(x)+\mu(\frac{\gamma}{\mu})^{2/3}x^2f(x)\Bigg)=$$

$$=\frac{1}{\gamma^{1/3}}\Bigg((-i)f'(x)+\gamma x^2f(x)\Bigg)=\frac{\hat{O}(\gamma)}{\gamma^{1/3}}f(x). \qquad (77)$$

Таким образом, если минимум $\xi(\gamma)$ достигается на $\Psi(x)$, то минимум $\xi(\mu)$ достигается на $\sqrt{(\frac{\mu}{\gamma})^{1/3}}\Psi\Big((\frac{\mu}{\gamma})^{1/3}x\Big)$, причем эти минимумы равны.

Заключение

В ходе выполнения данной работы были достигнуты следующие результаты.

- Изучены определения квантовой оптики: волновая функция, гауссово состояние, сжатие, измерение в базисе Фока, состояние кубической фазы, нелинейное сжатие и др.

- Реализовано программно вычисление значений функционала нелинейного сжатия для итеративной схемы с входными состояниями определенного вида.

- Реализован алгоритм оптимизации функционала из п.2 по параметрам схемы и входных состояний.

- Предложена схема вычисления функционала через представление волновых функций в базисе Гаусса-Эрмита. Получено представление необходимых операций для этого базиса в терминах тензорной алгебры.

- Выделена часть вычислений, которые не зависят от параметров функционала (может быть посчитана 1 раз для выбранной точности).

- Реализован алгоритм вычисления функционала в операциях тензорной алгебры. Реализована программа для расчетов с использованием GPU (PyTorch).

- Проанализирована структура оптимизируемого функционала. Применены различные методы глобальной оптимизации - метод отжига, многократный запуск градиентного метода из случайных точек пространства.

- Найдены наилучшие параметры схем и входных состояний для 1, 2, 3 и 4 итераций с совокупным вычитанием от 1 до 4 фотонов.

- Доказана теорема о независимости значения глобального минимума от параметра состояния кубической фазы γ.
- Проверены гипотезы о зависимости функционала от количества итераций в схеме.
- На основе анализа результатов сделан вывод о том, что итеративная схема не выигрывает у простой схемы (без итераций) при условии вычитания достаточного количества фотонов при одной итерации.

Код доступен в репозитории[3], размещённом на веб-сервисе GitHub.

[3]Репозиторий проекта — https://github.com/artemgl/magpractice (дата обращения: 24.03.2025), пользователь artemgl

Список литературы

[1] Babusci D., Dattoli G., and Quattromini M. On integrals involving Hermite polynomials // Applied Mathematics Letters. — 2012. — Vol. 25, no. 8. — P. 1157–1160. — Access mode: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965912001140 (online; accessed: 20.04.2025).

[2] Braunstein Samuel L. and van Loock Peter. Quantum information with continuous variables // Rev. Mod. Phys. — 2005. — Jun. — Vol. 77. — P. 513–577. — Access mode: https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.513 (online; accessed: 20.04.2025).

[3] Celeghini Enrico, Gadella Manuel, and del Olmo Mariano A. Hermite functions and Fourier series // Symmetry. — 2021. — Vol. 13, no. 5. — P. 853.

[4] Zheng Yu, Hahn Oliver, Stadler Pascal, Holmvall Patric, Quijandría Fernando, Ferraro Alessandro, and Ferrini Giulia. Gaussian Conversion Protocols for Cubic Phase State Generation // PRX Quantum. — 2021. — Feb. — Vol. 2. — P. 010327. — Access mode: https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.2.010327 (online; accessed: 20.04.2025).

[5] Gradshteyn I.S. and Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. — 2007. — Access mode: http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/TISPISGIMR.pdf (online; accessed: 20.04.2025).

[6] L.K. Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. — 1996. — Access mode: https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/237814.237866 (online; accessed: 20.04.2025).

[7] Lloyd Seth and Braunstein Samuel L. Quantum Computation over Continuous Variables // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Feb. — Vol. 82. — P. 1784–1787. — Access mode: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.1784 (online; accessed: 20.04.2025).

[8] P.W. Shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. — 1994. — Access mode: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=2273d9829cdf7fc9d3be3cbecb961c7a6e4a34ea (online; accessed: 11.06.2024).

[9] Parthasarathy K R. What is a Gaussian state? // Communications on Stochastic Analysis. — 2010. — Vol. 4. — Access mode: https://repository.lsu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1130&context=cosa (online; accessed: 20.04.2025).