



ИНВ № 33  
НЕ БОЛЕЕ 1 ІІ КНИГИ В  
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

БИБЛИОТЕКА  
КОЛОХЗА  
ОСКОРКА

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE—5  
COLLECTION DIRIGÉE PAR J. L. LIONS

Analyse numérique  
des inéquations  
variationnelles

Tome 1

Théorie générale  
Premières applications

Tome 2

Applications aux phénomènes  
stationnaires et d'évolution

**R. GLOWINSKI**

**J. L. LIONS**

**R. TRÈMOLIERES**

Publié avec le concours du  
Centre National de la Recherche Scientifique

**DUNOD**  
Paris 1976

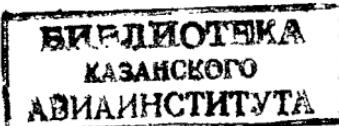
Р. ГЛОВИНСКИ  
Ж. Л. ЛИОНС  
Р. ТРЕМОЛЬЕР

# Численное исследование вариационных неравенств

Перевод с французского  
А. С. КРАВЧУКА

под редакцией  
Б. Е. ПОБЕДРИ

640359



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
«МИР»  
МОСКВА  
1979

Первое в мировой литературе систематическое изложение численных методов исследования вариационных неравенств, возникающих в различных приложениях. В первой части рассмотрены задачи гидродинамики, теории упругости и пластичности. Основное внимание удалено машинным методам решения: релаксации, штрафа, двойственности. Во второй части исследованы задачи климатизации, теории упругости, течения в трубах; рассмотрены методы решения эволюционных неравенств, используемых при исследовании переходных процессов.

Книга представляет большой интерес для специалистов по прикладной математике и механике, а также для аспирантов и студентов старших курсов университетов.

*Редакция литературы по математическим наукам*

1702070000

1 20204-025  
041(01)-79 25-79

© Bordas, Paris, 1976  
© Перевод на русский язык, «Мир», 1979

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Многие задачи математической физики допускают естественную вариационную постановку. В этой постановке задача сводится к отысканию экстремума некоторого функционала, т. е. к решению экстремальной задачи. Вариационный подход позволяет снять ограничения гладкости искомого решения, не вызванные физической природой изучаемого явления (рассматривается так называемое обобщенное или слабое решение). Кроме того, применяя вариационные принципы при дискретизации рассматриваемой задачи для ее численной реализации, получают заведомо устойчивые разностные схемы. Такой метод построения разностных схем носит название вариационно-разностного. В частности, к нему относится метод конечных элементов, едва ли не самый популярный в настоящее время численный метод.

В механике, физике, экономике часто приходится иметь дело с более общим классом задач, которые также приводятся к экстремальным, но на более узком множестве функций, чем традиционные, причем соответствующие функционалы могут не обладать гладкостью, необходимой для применения классических методов вариационного исчисления. Для исследования такого рода экстремальных задач с ограничениями были привлечены так называемые вариационные неравенства, и это позволило решить довольно сложные задачи механики и физики, до того не поддававшиеся решению. К этому классу относится сформулированная А. А. Ильюшиным [1\*] вариационная задача теории вязко-пластичности, которая была исследована с помощью неклассического вариационного исчисления П. П. Мосоловым и В. П. Мясниковым [2\*, 3\*].

Предлагаемая вниманию читателей монография, написанная известными французскими учеными, посвящена численным методам теории вариационных неравенств. Она является очередной книгой серии „Математические методы в информатике“, издаваемой под руководством одного из авторов настоящей книги профессора Коллеж де Франс и члена Французской академии Ж.-Л. Лионса. Книга разделена на две части, которые в русском издании объединены в одну. Первая часть „Общая теория. Первые приложения“ состоит из трех глав, в которых опи-

сываются конкретные физические задачи, приводящие к вариационным неравенствам, исследуются проблемы существования и единственности решения задач, приводятся алгоритмы приближенного решения и их обоснования и подробно решается задача упруго-пластического кручения. Во второй части "Приложения к стационарным и эволюционным задачам" (гл. 4—6) рассмотрены дальнейшие применения развитых методов к решению конкретных задач.

Следует отметить, что в книге недостаточно отражены достижения советских ученых в этой интенсивно развивающейся области. Чтобы хоть как-то восполнить этот пробел, мы дополнили довольно обширную библиографию авторов работами, в которых дана постановка различных физических задач, приводящих к экстремальной задаче с ограничениями [4\*—10\*]. Из монографий и учебных пособий, посвященных методам решения задач оптимизации, мы сочли необходимым привести работы [11\*—23\*]. По теории двойственности, используемой на протяжении всей этой книги, мы порекомендуем работы [24\*, 25\*]. Исследованию рассматриваемых в книге задач другими методами посвящена книга Монахова [26\*].

Вариационные неравенства возникают в ряде разделов механики сплошных сред, в задачах со свободной границей, во многих задачах оптимального управления и т. п. Кроме их прикладного значения они представляют и большой научный интерес для математиков.

Мы надеемся, что книга будет благосклонно встречена советскими читателями и послужит стимулом для дальнейшего развития численных методов в задачах с вариационными неравенствами.

*Б. Е. Победря*

# Часть 1

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ. ПЕРВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### ВВЕДЕНИЕ

К изучению систем неравенств с частными производными приводят многочисленные задачи механики, физики и теории управления; исследование этих неравенств способствовало развитию метода, названного методом *вариационных неравенств*.

1. Для начала приведем одну очень простую задачу, физическую интерпретацию которой можно найти в книге Дюво и Лионса [1].

В открытой ограниченной области  $\Omega$  из  $\mathbb{R}^n$  (в приложениях  $n=2, 3$ ) с границей  $\Gamma$  разыскивается некоторая вещественная функция  $x \rightarrow u(x)$ , удовлетворяющая в  $\Omega$  классическому уравнению

$$(1) \quad -\Delta u + u = f, \quad f \text{ задана в } \Omega,$$

$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  с граничными условиями в виде неравенств

$$(2) \quad u \geqslant 0, \quad \frac{\partial u}{\partial v} \geqslant 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ на } \Gamma,$$

где  $\partial/\partial v$  означает производную по направлению внешней нормали на  $\Gamma$ .

Аналогичная *эволюционная* задача состоит в отыскании функции  $u = u(x, t)$ , определенной для  $x \in \Omega$  и  $t > 0$ , которая является решением уравнения:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad f \text{ задана в } \Omega \times \{t > 0\}$$

с граничными условиями (для  $t > 0$ ) в виде неравенств (2) и начальным условием

$$(4) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0 \text{ задана в } \Omega.$$

Задача (3), (2), (4) является задачей с неравенством параболического типа<sup>1</sup>). В приложениях встречаются также гипербо-

<sup>1)</sup> Ранее (см., например, [2]) автор называл задачи с граничными условиями типа (2) односторонними краевыми задачами. — Прим. ред.

лические неравенства, неравенства типа Петровского и многие другие.

Задача (1), (2) представляет собой, по существу, очень простую *экстремальную задачу с ограничениями*. В самом деле, если ввести функционал<sup>1)</sup>

$$(5) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v),$$

где

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx, \quad (f, v) = \int_{\Omega} fv dx,$$

и ввести выпуклое (замкнутое) множество  $K$ , определяемое формулой

$$(6) \quad K = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma\},$$

то решение уравнения (1) с условиями (2) сводится к задаче отыскания такого  $u \in K$ , что

$$(7) \quad J(u) = \inf J(v), \quad v \in K.$$

Задача (7) имеет единственное решение  $u$  и это решение характеризуется условием

$$(8) \quad \begin{aligned} u &\in K, \\ a(u, v - u) &\geqslant (f, v - u) \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

которое называется *эллиптическим вариационным неравенством*.

В этих терминах задачу (3), (2), (4) удобно сформулировать следующим образом: найти функцию  $u(t)$  ( $u(t)$  означает отображение  $x \rightarrow u(x, t)$ ), такую, что

$$(9) \quad \begin{cases} u(t) \in K, \\ \left( \frac{\partial u(t)}{\partial t}, v - u(t) \right) + a(u(t), v - u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in K, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

где на этот раз

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Полученная задача представляет собой *эволюционное вариационное неравенство*. Известно, что неравенство (9) имеет единственное решение (Лионс—Стампакья [1]), доказательство су-

<sup>1)</sup> Уточнение классов функций (пространств Соболева), на которых следует рассматривать эти функционалы, будет дано ниже.

ществования методом дискретизации — аппроксимации конечномерной задачи с последующим переходом к пределу при стремлении размерности пространства к бесконечности — будет приведено в гл. 6).

2. Укажем теперь, ни в коей мере не претендуя на полноту, некоторые области, где встречаются вариационные неравенства — стационарные и эволюционные.

(1) Задачи *теории упругости с односторонними краевыми условиями* (Синьорини [1], Фикера [1], Фремон [1]) и с краевыми условиями, учитывающими трение упругого тела об ограничивающую поверхность (Дюво—Лионс [1], Калкер [1], [2]), приводят к эллиптическим вариационным неравенствам, в эволюционном случае — к гиперболическим вариационным неравенствам (Дюво—Лионс [4]).

(2) Задачи минимизации с ограничениями возникают в теории упругопластических сред (Койтер [1], Мандель [1], Прагер [1]—[8], Прагер и Ходж [1]); исследования этих задач с применением метода вариационных неравенств были проведены в работах Брезиса и Сибони [1], Дюво и Лионса [1], Леви и Стампаккья [1], [2], Моро [2], [3], Тинга [1], [2], [3].

(3) К стационарным и эволюционным вариационным неравенствам приводят задачи гидродинамики пористых сред (Дюво—Лионс [1]).

(4) Задачи о течении некоторых неильтоновских жидкостей — типа *среды Бингама* — приводят к неравенствам, содержащим в качестве частного случая уравнения Навье—Стокса (Дюво—Лионс) [1], Мосолов и Мясников [1]).

(5) Эволюционные неравенства различных типов возникают в некоторых задачах климатизации и теории электромагнитного поля в нестабильной среде.

(6) Разнообразные физические явления, в которых важно учитывать одновременное протекание *нескольких из упомянутых выше процессов*, например упругопластическая деформация или движение среды Бингама при наличии температурного поля (Прагер [3], Дюво—Лионс [2], [3]), также приводят к неравенствам.

(7) В перечисленных выше приложениях мы приходим к задачам, содержащим переменные, имеющие определенный физический смысл (перемещений, давления, температуры и т. д.).

Классические задачи со свободной границей не являются задачами с вариационными неравенствами относительно физических переменных, но, как было замечено Байокки при исследовании задачи фильтрации, являющейся задачей со свободной границей (Байокки [1]), подходящая (и не тривиальная!) замена искомой функции позволяет перейти к вариационным неравенствам или к задачам, использующим теорию неравенств.

Эта идея была развита в серии работ сотрудников лаборатории национального научно-исследовательского центра в Павии—Байокки, Коминчиоли, Мадженеса и Поззи [1] (см. также библиографию к этой работе).

(8) Методами, навеянными работой Байокки [1], классические задачи со свободной границей сводятся к вариационным неравенствам: об установившемся течении (Брезис и Стампаккья [1]), струйных течениях (Брезис и Дюво [1]), задача типа Стефана (Дюво [1]), задачи кавитации (Байяды [1]). Подробности численной реализации методов, излагаемых в этой книге, можно найти—применительно к проблеме струйных течений—в работе Бурга и Дюво [1].

(9) К эволюционным вариационным неравенствам приводят также задачи об оптимальном успокоении системы (Бенсуссан и Лионс [1], Фридман [1]).

(10) В теории импульсных систем управления возникают задачи, при решении которых используются методы вариационных неравенств; эти задачи известны под названием квазивариационных неравенств и были введены в работах Бенсуссана и Лионса [1], [2] и Бенсуссана, Гурса и Лионса [1]; здесь эти неравенства не рассматриваются, но при их численном исследовании используются, в частности, методы, представленные в данной книге (см. работы Гурса [1], Бенсуссана и Лионса [1]).

(11) Многочисленные задачи исследуемого здесь типа возникают в теории управления системами с распределенными параметрами, особенно при изучении систем с обратной связью (“feedback a priori”) (см. Лионс [2]).

3. Цель настоящей работы состоит в изложении основных численных методов решения стационарных и эволюционных неравенств и в описании некоторых из проведенных на ЭВМ расчетов. . ,

Большинство стационарных задач приводится к следующим двум:

(i) минимизации дифференцируемого функционала  $J$  на некотором замкнутом выпуклом множестве  $K$  (которое называется выпуклым множеством ограничений); примером такой задачи является задача (7);

(ii) минимизаций на всем пространстве (при отсутствии ограничений) некоторого недифференцируемого функционала.

Принцип аппроксимации очевиден: функционал  $J(v)$  (или форма  $(J'(u), v)$  в случае дифференцируемости) приближается функцией конечного числа переменных с использованием, например, метода конечных разностей или же метода конечных элементов, т. е. классических методов численного анализа.

При численном исследовании эллиптических неравенств возникают специфические трудности, характерные именно для неравенств, а не для уравнений, и состоящие в следующем:

(j) в случае (i)—в аппроксимации выпуклого множества  $K$  некоторым множеством в соответствующем конечномерном пространстве;

(jj) в решении дискретизированной задачи, являющейся конечномерной задачей нелинейного программирования.

После аппроксимации функционала  $J(v)$  функцией  $J_h(v_h)$  (где  $h$  означает параметр дискретизации, например шаг сетки), выпуклого множества  $K$ —множеством  $K_h$ , приближенная задача в случае (i) запишется следующим образом:

$$(10) \quad \inf J_h(v_h), \quad v_h \in K_h,$$

и для (ii)—в виде:

$$(11) \quad \inf J_h(v_h), \quad \text{где } J_h \text{—недифференцируемая функция или, во всяком случае, предел } J_h \text{ не является дифференцируемым.}$$

Решение вопроса о *сходимости* последовательности приближенных решений не встречает особых затруднений, проблема оценки погрешности более тонкая: см. работы Фалка [1], Моско и Стренга [1]. Таким образом, основной вопрос состоит в создании эффективных методов решения задач (10), (11).

Мы пришли к выводу о том, что непосредственное применение стандартных методов нелинейного программирования в исследуемых нами задачах приводит к слишком большим затратам машинного времени; это замечание привело нас к разработке таких методов решения вариационных неравенств, в которых систематически использовались бы частные свойства минимизируемых функционалов и выпуклых множеств ограничений.

**4. Общие методы, относящиеся к стационарным задачам, даны в части I; здесь же достаточно глубоко исследована одна модельная задача, возникающая в теории упругопластических сред.**

Различные методы аппроксимации исходной задачи некоторой конечномерной задачей представлены в гл. I. Мы начнем с краткого изложения основных фактов из теории вариационных не-

равенств, что позволит изучать настоящую книгу и читателю, незнакомому с вариационными неравенствами.

Вторая глава посвящена методам, используемым для решения конечномерных задач. Эту главу можно рассматривать как самостоятельный раздел, в котором излагаются методы нелинейного программирования.

В гл. 3 подробно на примерах рассмотрена реализация общих методов и приведено достаточное количество численных решений, что дает возможность провести сравнение различных методов. Проведено достаточно полное исследование задачи упругопластического кручения цилиндрических стержней. Эта задача была выбрана в качестве объекта возможно более полного исследования, поскольку она интересна как с физической точки зрения, так и с позиций общей теории. При численном ее решении встречаются многие из основных трудностей теории, в частности много вопросов возникает при аппроксимации множества  $K$ , которое в данном случае определяется формулой

$$(12) \quad K = \{v \mid |\operatorname{grad} v(x)| \leq 1 \text{ почти всюду в } \Omega; v = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

# Глава 1

## ОБЩИЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

### План изложения

В настоящей главе приведены примеры стационарных неравенств (подробный вывод можно найти в книге Дюво и Лионса [1]), после этого даны *общие методы* их аппроксимации.

Далее эти методы применены к конкретным задачам, основные встречающиеся здесь технические трудности во всех деталях рассмотрены в последующих четырех главах для трех различных классов примеров.

Читатель, желающий возможно быстрее получить общее представление о проблематике стационарных и эволюционных неравенств, может перейти к чтению гл. 6 непосредственно после гл. 1, но изучение гл. 2 и 5 совершенно необходимо для фактической реализации описанных в данной книге методов.

### 1. Примеры

#### 1.1. Задачи о движении жидкости в области, ограниченной полупроницаемой мембраной

Пусть  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^n$  (в приложениях обычно  $n = 1, 2$  или  $3$ ) с границей  $\Gamma$ ; предположим, что область  $\Omega$  заполнена некоторой жидкостью, совершающей установившееся движение при давлении  $u(x)$ <sup>1</sup>). Предполагается, что жидкость может свободно втекать в область  $\Omega$  через границу  $\Gamma$ , но обратное движение невозможно. Зададим на границе  $\Gamma$  (вне  $\Omega$ ) давление жидкости  $h = h(x)$ . При выполнении известных предположений давление  $u$  внутри  $\Omega$  удовлетворяет уравнению

$$(1.1) \quad -\Delta u = f,$$

где  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,  $f = f(x)$  — заданная в  $\Omega$  функция. При задании граничных условий необходимо различать два случая;

<sup>1)</sup> Чрез  $x = (x_1, \dots, x_n)$  обозначается произвольная точка области  $\Omega$ . Будем полагать  $dx = dx_1, \dots, dx_n$ .

в первом

$$(i) \quad u(x) > h(x);$$

здесь жидкость стремится вытекать из области  $\Omega$ , но мембрана  $\Gamma$  препятствует такому движению, следовательно, расход жидкости равен нулю, т. е.

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0^1),$$

во втором случае, когда

$$(ii) \quad u(x) \leq h(x),$$

жидкость стремится втекать в  $\Omega$ ; свойства мембраны таковы, что такое движение возможно, следовательно, расход жидкости ненулевой и имеет место неравенство

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) \geq 0,$$

причем величина  $\frac{\partial u}{\partial n}(x)$  конечна. Для бесконечно тонкой мембранны из непрерывности  $u(x)$  в окрестности точки  $x$  следует (см. Дюво—Лионс [1]), что  $u(x) = h(x)$ . Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$(1.4) \quad (u - h) \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (u - h) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma. \blacksquare$$

*Замечание 1.1.* Очевидно, граница  $\Gamma$  разделяется на две подобласти  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , в первой из которых  $u = h$ , во второй  $du/dn = 0$ . Однако эти области заранее неизвестны и их нахождение эквивалентно решению задачи, следовательно, речь идет о задаче с неизвестной границей<sup>2)</sup>. ■

### Преобразование задачи

Приведем теперь задачу (1.1), (1.4) к некоторой (достаточно простой) задаче *вариационного исчисления*. Это нам позволит:

(i) доказать (при надлежащих предположениях), что задача „поставлена корректно“;

(ii) создать основу для построения конструктивных приближенных методов решения. ■

Мы будем использовать некоторые понятия функционального анализа. Для ознакомления с этими понятиями можно обра-

<sup>1)</sup>  $\frac{\partial}{\partial n}$  — нормальная производная на  $\Gamma$ , направленная *вне*  $\Omega$  (для определенности).

<sup>2)</sup> Это замечание относится ко всем задачам, рассматриваемым в данной книге.

титься к книге Дюво и Лионса [1], гл. 1. Здесь мы напомним только определения (исчерпывающее изложение аппарата соболевских пространств можно найти, например, в книге Нечаса [1], Лионса и Мадженеса [1]<sup>1)</sup>.

Через  $H^1(\Omega)$  обозначается соболевское пространство (порядка 1) функций  $v^2)$ , таких, что (см. Соболев [1]):

$$(1.5) \quad v \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $L^2(\Omega)$  — пространство функций (классов функций) суммируемых с квадратом в  $\Omega^3)$ ; производные в формуле (1.5) понимаются в смысле распределений на  $4)$   $\Omega$ . Снабженное скалярным произведением

$$(1.6) \quad (u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

пространство  $H^1(\Omega)$  является гильбертовым.

Известно (см. цитированные выше книги), что в случае, когда граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  ограничена и достаточно регулярна, можно определить единственным образом след функции  $v \in H^1(\Omega)$  на  $\Gamma$ , обозначаемый в дальнейшем через  $\gamma v$ ,  $\gamma v \in L^2(\Gamma)$ . Отображение  $v \rightarrow \gamma v$  является линейным и непрерывным из  $H^1(\Omega)$  в  $L^2(\Gamma)$ <sup>5)</sup>.

Таким образом, если функция  $h$  задана на  $\Gamma$ , можно определить подмножество  $K$  пространства  $H^1(\Omega)$  по формуле

$$(1.7) \quad K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \gamma v \geq h \text{ почти всюду на } \Gamma\}.$$

Нетрудно проверить, что  $K$  является замкнутым выпуклым подмножеством  $H^1(\Omega)$ .

Введем теперь форму

$$(1.8) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$$

и функционал

$$(1.9) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v),$$

1) Все функции, рассматриваемые в данной книге, принимают только вещественные значения.

2) См. также С. Л. Соболев. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974. — Прим. ред.

3) Следовательно,  $\varphi \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \varphi$  измерима на  $\Omega$  и  $\int_{\Omega} \varphi(x)^2 \, dx < \infty$ .

4) В отечественной литературе распределения чаще называют обобщенными функциями. — Прим. ред.

5) Можно усилить этот результат: образ  $H^1(\Omega)$  при отображении  $\gamma$  уже, нежели  $L^2(\Gamma)$ , и совпадает с  $H^{1/2}(\Gamma)$  (см., например, книгу Лионса и Мадженеса [1], гл. 1).

где

$$(1.10) \quad (f, v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Докажем теперь, что задача (1.1), (1.4) эквивалентна задаче минимизации функционала  $J(v)$  на  $K$ .

Доказательство основывается на следующих замечаниях общего характера:

1) если функционал  $v \rightarrow J(v)$  выпуклый и дифференцируемый, то его производная, определяемая по формуле<sup>1)</sup>

$$(1.11) \quad (J'(u), v) = \frac{d}{d\lambda} J(u + \lambda v) |_{\lambda=0},$$

равна

$$(1.12) \quad (J'(u), v) = a(u, v) - (f, v);$$

2) если  $u$  реализует минимум функционала  $J(v)$  на  $K$ , т. е.

$$(1.13) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K,$$

то

$$(1.14) \quad (J'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

и наоборот: из (1.14) следует (1.13).

Следовательно, используя формулу (1.12), можем заключить, что вариационная задача  $\inf J(v)$ ,  $v \in K$  эквивалентна вариационному неравенству:

$$(1.15) \quad \begin{aligned} u \in K \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что задача (1.1), (1.4) эквивалентна (1.15).

Обозначим через  $\mathcal{D}(\Omega)$  пространство бесконечно дифференцируемых функций с носителем, компактным в  $\Omega$ ; если  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , то

$$(1.16) \quad v = u \pm \varphi$$

принадлежит  $K$ . Полагая в неравенстве (1.15)  $v = u \pm \varphi$ , получим, что

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

откуда следует уравнение (1.1) (из определения производных в теории распределений). Умножая теперь (1.1) скалярно на  $(v - u)$  и интегрируя по частям, найдем

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v - u) d\Gamma + a(u, v - u) = (f, v - u),$$

<sup>1)</sup> В формуле (1.11)  $J'(u)$  означает элемент пространства  $(H^1(\Omega))'$ , двойственного пространству  $H^1(\Omega)$ .  $(J'(u), v)$  означает скалярное произведение, определяющее двойственность пространств  $H^1(\Omega)$  и  $(H^1(\Omega))'$ .

откуда с учетом неравенства (1.15) следует, что

$$(1.17) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v - u) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Выбирая здесь  $v = u + \psi$ , где  $\psi \geq 0$  — произвольная функция (регулярная), заданная на  $\Gamma$ , получим, что

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \psi d\Gamma \geq 0 \quad \forall \psi \geq 0 \text{ на } \Gamma,$$

следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \text{ на } \Gamma.$$

Полагая после этого  $v = h$ , затем  $v = 2u - h$  на  $\Gamma$  (предполагая  $h$  достаточно регулярной на  $\Gamma$ ), находим отсюда, что

$$\frac{\partial u}{\partial n} (u - h) = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

откуда следует (1.4); обратно, из условий (1.4) вытекает неравенство (1.17), что и завершает доказательство указанной выше эквивалентности. ■

*Резюме:* физическая задача привела нас к задаче (1.1), (1.4), содержащей неравенства, и мы только что доказали, что она эквивалентна некоторой задаче вариационного исчисления. Последняя имеет две эквивалентные формулировки

$$1) \inf_{v \in K} J(v);$$

2) найти  $u \in K$ , такое, что

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K.$$

*Замечание 1.2.* Установленная эквивалентность не позволяет нам в настоящий момент утверждать, что решение исследуемой задачи существует. Соображения, касающиеся проблемы существования и относящиеся к ее постановке в форме задачи вариационного исчисления, будут приведены в разд. 2. ■

### План дальнейшего исследования

В настоящем разделе будут даны примеры, отличные от приведенных выше и сформулированные сразу на языке вариационного исчисления. ■

## 1.2. Модельная упругопластическая задача

Сформулируем непосредственно в форме задачи вариационного исчисления одну модельную задачу, встречающуюся в теории пластичности (см. работы Аннина [1], Ланшон [1], книгу Дюво и Лионса [1], гл. 5 и библиографию в этой книге и работу Манделя [1]).

Пусть  $\Omega$  — открытая область со свойствами, перечисленными в разд. 1.1. Введем пространство

$$(1.18) \quad H_0^1(\Omega) = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \gamma v = 0\},$$

являющееся замкнутым векторным подпространством пространства  $H^1(\Omega)$ .

Введем теперь подмножество

$$(1.19) \quad K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), |\operatorname{grad} v(x)| \leq 1 \text{ п. в. в } \Omega\}.$$

Без труда проверяется, что

$$(1.20) \quad K \text{ является замкнутым и выпуклым в } H_0^1(\Omega).$$

Определим функционал  $J(v)$  по формуле (1.9).

Задача формулируется следующим образом: найти

$$(1.21) \quad \inf J(v), \quad v \in K.$$

Как и в разд. 1.1, доказывается, что задача (1.21) эквивалентна задаче разыскания функции  $u$ , такой, что

$$(1.22) \quad \begin{aligned} u &\in K, \\ a(u, v-u) &\geq (f, v-u) \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Если область  $\Omega$  односвязна<sup>1)</sup> задача (1.21) — или (1.22) — является задачей о кручении упругопластического стержня. ■

*Замечание 1.3.* В разд. 2 будет показано, что задача (1.21) имеет единственное решение. ■

*Замечание 1.4.* Поставленную задачу можно интерпретировать следующим образом<sup>2)</sup>. Заметим, что область  $\Omega$  содержит две подобласти  $\Omega_e$  и  $\Omega_p$  (область упругости и область пластического поведения); в области  $\Omega_e$ , находящейся строго внутри  $\Omega$ , справедливо классическое уравнение

$$(1.23) \quad -\Delta u = f,$$

в области  $\Omega_p$  имеем равенство

$$(1.24) \quad |\operatorname{grad} u| = 1,$$

<sup>1)</sup> В случае, когда область многосвязна, формулировки (1.21), (1.22) необходимо видоизменить с тем, чтобы получить задачу теории пластичности (см., например, работы Э. Ланшон [2], Р. Гловински и Э. Ланшон [1]).

<sup>2)</sup> Эта интерпретация будет уточнена в гл. 3.

к которому добавляются граничное условие  $u=0$  на  $\Gamma$ , а также условия сопряжения на границе раздела областей  $\Omega_e$  и  $\Omega_p$ , которые записать в явном виде, впрочем, не так-то просто (см. работу Брезиса [1]).

Приведенные здесь соображения показывают, что

(i) рассматриваемая задача обладает, как уже отмечалось в замечании 1.1 к задаче разд. 1.1, свойствами задачи с неизвестной границей;

(ii) „глобальная“ формулировка вида (1.21) или (1.22) намного удобнее для вычислений „локальной“ формулировки, использующей уравнения (1.23), (1.24) и условия сопряжения на границе раздела („неизвестной границе“). ■

*Замечание 1.5.* В теории пластичности имеется много других задач с неравенствами — стационарных и эволюционных, ознакомиться с ними можно, например, по книге Дюво и Лионса [1], гл. 5. ■

### 1.3. Модельная задача теории упругости с трением

В настоящем разделе мы рассмотрим достаточно идеализированный вариант одной из задач, встречающихся в теории упругости с трением или с односторонними ограничениями (см. работы Синьорини [1], Фикеры [1]). Другие примеры аналогичного типа будут приведены в гл. 4.

Вернемся снова к функциональному пространству  $H^1(\Omega)$ , введенному в разд. 1.1. и определим функционал

$$(1.25) \quad j(v) = \int_{\Gamma} g |v| d\Gamma,$$

где  $g$  — положительная константа<sup>1)</sup>.

Введем также билинейную форму

$$(1.26) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \left( uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

и функционал

$$(1.27) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + j(v).$$

Тогда рассматриваемая задача состоит в разыскании

$$(1.28) \quad \inf J(v), \quad v \in H^1(\Omega).$$

<sup>1)</sup> Можно было бы с тем же успехом рассмотреть случай, когда  $g$  является функцией, например непрерывной на  $\Gamma$  и неограниченной.

Эта задача отличается от предшествующих тем, что нижняя грань на этот раз разыскивается на векторном пространстве, а не на замкнутом выпуклом множестве  $K$ , не являющемся векторным пространством.

С другой стороны, задача (1.28) не сводится к „уравнению Эйлера“

$$J'(u) = 0,$$

поскольку функционал  $j$  (и, следовательно,  $J$ ) недифференцируем.

Без труда проверяется, что задача (1.28) эквивалентна задаче отыскания элемента  $u$ , удовлетворяющего условиям

$$(1.29) \quad \begin{aligned} u &\in H^1(\Omega), \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) &\geq (f, v-u) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

*Замечание 1.6.* В общем случае, когда

$$(1.30) \quad J(v) = H(v) + j(v),$$

где  $H(v)$  — дифференцируемый выпуклый функционал,  $j$  — непрерывный выпуклый и не обязательно дифференцируемый, условие (1.13) эквивалентно неравенству

$$(1.31) \quad (H'(u), v-u) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \blacksquare$$

*Замечание 1.7.* Неравенство (1.29) является вариационным.  $\blacksquare$

Неравенство (1.29) можно интерпретировать следующим образом.

Положив сначала  $v = u \pm \varphi$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , найдем

$$(1.32) \quad -\Delta u + u = f \text{ в } \Omega.$$

Из уравнения (1.32) с помощью формулы Грина выводим, что

$$-\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v-u) d\Gamma + a(u, v-u) = (f, v-u),$$

следовательно, неравенство (1.29) эквивалентно уравнению (1.32) и условию

$$(1.33) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v-u) d\Gamma + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v.$$

Заменив здесь  $v$  на  $\pm \lambda v$ , где  $\lambda > 0$ , находим

$$\lambda \int_{\Gamma} \left( \pm \frac{\partial u}{\partial n} v + g|v| \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial u}{\partial n} + g|u| \right) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0,$$

откуда

$$(1.34) \quad \left| \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma} g |v| d\Gamma,$$

$$(1.35) \quad \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial u}{\partial n} + g |u| \right) d\Gamma \leq 0.$$

Из условия (1.34) следует, что  $|\partial u / \partial n| \leq g$  на  $\Gamma$ , таким образом

$$u \frac{\partial u}{\partial n} + g |u| \geq 0,$$

что в совокупности с неравенством (1.35) дает

$$u \frac{\partial u}{\partial n} + g |u| = 0.$$

Таким образом, неравенство (1.29) эквивалентно уравнению (1.32) с граничными условиями

$$(1.36) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq g, \quad u \frac{\partial u}{\partial n} + g u = 0.$$

■

*Замечание 1.8.* Условия (1.36) эквивалентны следующим<sup>1)</sup>:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| < g \Rightarrow u = 0,$$

$$(1.37) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \Rightarrow u \leq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -g \Rightarrow u \geq 0. \quad ■$$

*Замечание 1.9.* Более сложные и более близкие к практике задачи можно найти в цитированных выше статьях и монографиях, а также в гл. 4 настоящей книги. ■

#### 1.4. Одна задача о течении

При изучении ламинарного течения среды Бингама в цилиндрической трубе возникает (см. работы: Дюво и Лионса [1], гл. 6, Молосова и Мясникова [1]) следующая задача.

На пространстве  $H_0^1(\Omega)$  определяется функционал

$$(1.38) \quad j(v) = \int_{\Omega} g |\operatorname{grad} v| dx, \quad g > 0$$

<sup>1)</sup> При такой формулировке вновь проявляется то обстоятельство, что рассматриваемая задача является задачей с неизвестной границей.

(являющийся, очевидно, как и функционал задачи предыдущего раздела, недифференцируемым). Определим билинейную форму по формуле (1.8) и положим, как и в (1.27):

$$(1.39) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + j(v).$$

Таким образом, рассматриваемая задача аналогична задаче (1.28) с заменой  $H^1(\Omega)$  на  $H_0^1(\Omega)$ :

$$(1.40) \quad \inf J(v), \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

эквивалентной отысканию элемента  $u$ , такого, что

$$(1.41) \quad \begin{aligned} u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Интерпретация полученного неравенства при помощи „обычных“ конструкций затруднительна, но можно дать интерпретацию этого неравенства с использованием мультипликаторов (см. ниже теорему 3.3).

## 1.5. План дальнейшего изложения

В следующем разделе мы приведем обобщенную формулировку всех предшествующих задач, что впоследствии (в разд. 3 и далее) даст нам возможность „расчистить путь“ к применению известных приближенных методов.

## 2. Общая формулировка стационарных вариационных неравенств

### 2.1. Симметричный случай

Рассмотрим гильбертово пространство  $V$  (над полем  $\mathbb{R}$  вещественных чисел) и обозначим через  $\|v\|$  норму элемента  $v$  из  $V$ . На пространстве  $V$  зададим некоторую билинейную непрерывную форму  $a$ ,  $v \rightarrow a(u, v)$ ; из непрерывности следует, что

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \quad c = \text{const}, \quad u, v \in V.$$

Форма  $a(u, v)$  предполагается симметричной, следовательно,

$$(2.1) \quad a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V.$$

Зададим далее  $K \subset V$ ,

$$(2.2) \quad K = \text{замкнутое выпуклое множество в } V.$$

Пусть  $V'$  — пространство, сопряженное к  $V$ , и  $(f, v)$  — скалярное произведение элементов  $f \in V'$  и  $v \in V$ ; рассмотрим функционал

$$(2.3) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v).$$

Рассматриваемая задача состоит в отыскании

$$(2.4) \quad \inf J(v), \quad v \in K.$$

*Замечание 2.1.* Легко видеть, что задачи, приведенные в разд. 1.1 и 1.2, представляют собой частный случай рассматриваемой здесь задачи. ■

Как и в разд. 1, доказывается, что задача (2.4) эквивалентна следующей:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} &\text{найти } u \in K \text{ такое, что} \\ &a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Задача (2.5) представляет собой общее вариационное неравенство.

Аналогичным образом можно рассмотреть функционал  $v \rightarrow j(v)$ , такой, что

$$(2.6) \quad v \rightarrow j(v) \text{ непрерывный выпуклый}^1) \text{ из } V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Евдим далее

$$(2.7) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + j(v),$$

задача состоит в отыскании

$$(2.8) \quad \inf J(v), \quad v \in V.$$

*Замечание 2.2.* Легко проверить, что задачи, рассмотренные в разд. 1.3 и 1.4, охватываются приведенной здесь формулировкой. ■

Задача (2.8) эквивалентна вариационному неравенству:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} &\text{найти } u \in V, \text{ такое, что} \\ &a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

По поводу существования решений имеем следующий классический результат:

**Теорема 2.1.** Если функция  $v \rightarrow J(v)$  удовлетворяет условиям

$$(2.10) \quad J(v) \rightarrow +\infty \text{ при } \|v\| \rightarrow \infty, \quad v \in K^2)$$

тогда решение и задачи (2.5) или (2.9) существует.

<sup>1)</sup> На самом деле достаточно предположить, что  $j$  — выпуклый, собственный и полунепрерывный снизу; говорят, что функционал  $j$  собственный, если  $j \not\equiv +\infty$ ,  $j(v) > -\infty \quad \forall v \in V$ .

<sup>2)</sup> Это условие не нужно, если  $K$  ограничено в  $V$ , что имеет место, например, в случае примера разд. 1.2.

Одно условие, достаточное для выполнения (2.10), состоит в том, что

$$(2.11) \quad \text{существует } \alpha > 0, \text{ такое, что } a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$$

*Замечание 2.3.* Условие (2.11) имеет место в примерах, рассмотренных в разд. 1.2—1.4, но в примере разд. 1.1 оно не выполнено. Можно показать, что в этом случае (2.10) имеет место, если предположить, что

$$(2.12) \quad \int_{\Omega} f(x) dx < 0. \quad \blacksquare$$

Относительно возможной единственности решения имеем следующий результат:

**Теорема 2.2.** *Если функция  $v \rightarrow J(v)$  строго выпукла<sup>1)</sup>, задача (2.5) или (2.9) допускает не более одного решения.*

Это условие выполняется, если имеет место предположение (2.11); отсюда следует, что задачи, рассмотренные в разд. 1.2—1.4, имеют решение, и притом только одно.

Единственность решения задачи разд. 1.1 проверим непосредственно, предполагая выполнение гипотезы (2.12). Пусть  $u_1, u_2$  — два возможных решения задачи (1.15); выбирая  $v = u_1$  (соответственно  $u_2$ ) и складывая, найдем (обозначим  $w = u_1 - u_2$ ):

$$-a(w, w) \geq 0,$$

следовательно,  $a(w, w) = 0$ , и, значит,  $w = \text{const} = c$ <sup>2)</sup>.

Полагая для упрощения  $u_2 = u$ , имеем, таким образом, решения  $u$  и  $(u + c)$ . Итак,

$$(2.13) \quad -\Delta u = f,$$

$$(2.14) \quad u - h \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (u - h) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma,$$

$$(2.15) \quad u + c - h \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (u + c - h) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Из (2.13) и (2.12) получаем, что

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma > 0,$$

так что существует множество  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  меры  $(\Gamma_1) > 0$ , на котором

$$\frac{\partial u}{\partial n} > 0.$$

<sup>1)</sup> Это означает, что  $J((1-\theta)u + \theta v) < (1-\theta)J(u) + \theta J(v)$ , если  $0 < \theta < 1$ ,  $u, v \in K$ ,  $u \neq v$ .

<sup>2)</sup> В предположении выпуклости области  $\Omega$ .

Условия (2.14) и (2.15) дают

$$u - h = 0 \quad u + c - h = 0 \text{ на } \Gamma_1,$$

следовательно,  $c = 0$ , что и доказывает единственность. ■

**Замечание 2.4.** Используемые в доказательствах гипотезы можно значительно обобщить, предполагая, что  $V$  — рефлексивное банахово пространство и что форма  $a$ ,  $v \rightarrow a(u, v)$  непрерывна на  $V$ , линейна по  $v$ , но нелинейна по  $u$ ; таким образом,

$$(2.16) \quad a(u, v) = (A(u), v), \quad A(u) \in V'.$$

Если  $K$  — замкнутое выпуклое множество в  $V$ , задачу можно поставить непосредственно в форме (2.5):

$$(2.17) \quad \begin{aligned} &\text{найти } u \in K, \text{ такое, что} \\ &(A(u) - f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Можно доказать (см. работы Брезиса [1], [2], Браудера [1], Лионса [1]), что в случае, когда оператор  $A$  является монотонным, т. е.

$$(2.18) \quad (A(u) - A(v), u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in V,$$

и коэрцитивным ( $\|v\|$  означает по-прежнему норму элемента  $v$  в пространстве  $V$ ):

$$(2.19) \quad \frac{1}{\|v\|} (A(v), v) \rightarrow +\infty \text{ при } \|v\| \rightarrow \infty, v \in K,<sup>1)</sup>$$

то задача (2.17) допускает хотя бы одно решение.

Решение, очевидно, единствено, если  $A$  строго монотонный, т. е. в случае, когда неравенство (2.18) является строгим при  $u \neq v$ .

Заметим, что задача (2.17) не обязательно представляет собой задачу вариационного исчисления, если только предположение (2.18) не влечет за собой потенциальности оператора  $A$  (см. по этому вопросу работу Рокафеллара [1]).

Различные обобщения и примеры читатель может найти в книге Лионса [1]. ■

## 2.2. Случай несимметричности

Вернемся к случаю, когда  $V$  — пространство Гильберта, и рассмотрим билинейную непрерывную на  $V$  форму  $a(u, v)$ , не обязательно симметричную, т. е. в общем случае

$$(2.20) \quad a(u, v) \neq a(v, u).$$

<sup>1)</sup> Эта гипотеза не нужна, если  $K$  ограничено.

Поставим задачу сразу в виде (2.5); таким образом, речь пойдет уже не о задаче вариационного исчисления.

**Замечание 2.5.** Задачу (2.9) также можно поставить для случая несимметрии. ■

Можно доказать (конструктивное доказательство будет приведено далее, в разд. 3.1), что при выполнении гипотезы (2.11) (и несимметричности формы  $a(u, v)$ ), задача (2.5) или (2.9) имеет решение, и притом только одно.

**Замечание 2.6. (Вариант постановки задач.)**

Задача (2.5) эквивалентна следующей:

$$(2.21) \quad \text{найти } u \in K \text{ такое, что} \\ a(v, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K.$$

(Аналогичным образом задача 2.9) эквивалентна отысканию  $u \in V$ , такого, что

$$(2.22) \quad a(v, v-u) + i(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V.$$

В самом деле, если имеет место неравенство (2.5), то

$$\begin{aligned} a(v, v-u) - (f, v-u) = \\ = a(u, v-u) - (f, v-u) + a(v-u, v-u) \geq 0, \end{aligned}$$

откуда и следует (2.21); обратно, из (2.21) после подстановки  $v = (1-\theta)u + \theta w$  и деления на  $\theta$  найдем

$$a(1-\theta)u + \theta w, w-u) - (f, w-u) \geq 0,$$

устремив  $\theta \rightarrow 0$ , получим (2.5). ■

**Замечание 2.7.** Данному замечанию мы обязаны Л. Ниренбергу и Р. Тремольеру, различные его варианты и приложения приведены в работе Тремольера [4].

Для элементов  $v, w \in V$  определим

$$(2.23) \quad L(v, w) = a(v, v-w) - (f, v-w).$$

Если  $u$  — решение (2.5) или (2.21), то

$$\begin{aligned} L(v, u) \geq 0 \quad \forall v \in K \text{ (в соответствии с (2.21))}, \\ L(u, v) \leq 0 \quad \forall v \in K \text{ (в соответствии с (2.5))}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$(2.24) \quad L(u, v) \leq L(u, u) = 0 \leq L(v, u) \quad \forall v \in K.$$

Таким образом,

$$(2.25) \quad (u, u) — седловая точка функционала  $L(v, w)$ , заданного на  $K \times K$ .$$

Обратно, если  $\{u, \hat{u}\}$  — седловая точка  $L(v, w)$  на  $K \times K$ , то  $u = \hat{u}$  — решение (2.5). ■

## 2.3. План дальнейшего изложения

Предметом изучения разд. 3 будут конструктивные бесконечномерные аппроксимации решений и эллиптических вариационных неравенств. Далее, в разд. 4 и 5 мы увидим, каким образом можно приблизить уравнения, полученные в бесконечномерном пространстве, некоторыми уравнениями в пространстве конечного числа измерений.

## 3. Способы аппроксимации в бесконечномерном варианте

### 3.1. Метод последовательных приближений

Рассмотрим задачу в форме (2.5), где  $a(u, v)$  не обязательно симметрична и удовлетворяет неравенству

$$(3.1) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V.$$

Пусть  $K$  замкнуто и выпукло в  $V$ , и пусть  $u \in K$  — решение неравенства

$$(3.2) \quad a(u, v - u) \geq (f, v - u) \quad \forall v \in K.$$

Идея состоит в следующем. Предположим, что на  $V$  задана некоторая билинейная, непрерывная, симметричная форма  $b(u, v)$ , такая что

$$(3.3) \quad b(v, v) \geq \beta \|v\|^2, \quad \beta > 0, \quad \forall v \in V,$$

для которой задача отыскания элемента  $w \in K$ , такого, что

$$(3.4) \quad b(w, v - w) \geq (g, v - w) \quad \forall v \in K,$$

( $g$  задано в  $V'$ ) имеет решение, и притом только одно, и это решение „легко вычислить“<sup>1)</sup>. ■

*Замечание 3.1.* Так как форма  $b$  симметрична, задача (3.4) эквивалентна задаче минимизации на множестве  $K$  функционала (3.5)

$$(3.5) \quad \frac{1}{2} b(v, v) - (g, v),$$

следовательно, в силу теоремы (2.1) задача (3.4) имеет единственное решение. ■

<sup>1)</sup> Естественно, что это „предположение“ заслуживает того, чтобы его уточнили... Впрочем, см. далее замечание 3.2.

Таким образом, для  $u$ , заданного в  $K$  (или в  $V$ ), и для фиксированного (пока произвольного) числа  $\rho$  существует единственный элемент  $w \in K$ , такой, что

$$(3.6) \quad b(w, v-w) \geq b(u, v-w) - \rho [a(u, v-w) - (f, v-w)] \quad \forall v \in K.$$

Следовательно, мы построили оператор

$$(3.7) \quad u \rightarrow w = S(u) \quad \text{на } K \rightarrow K,$$

откуда немедленно следует, что неравенство (3.2) эквивалентно отысканию неподвижной точки отображения (3.7), т. е. такого элемента  $u$ , что

$$(3.8) \quad u = S(u).$$

Мы сейчас докажем (при помощи метода, предложенного в работе Лионса и Стампакья [1]), что параметр  $\rho$  можно выбрать таким образом, что для любых  $u_1, u_2 \in K$  (или  $V$ ) имеет место неравенство

$$(3.9) \quad \|S(u_1) - S(u_2)\| \leq \delta \|u_1 - u_2\|, \quad 0 < \delta < 1;$$

если временно предположить это неравенство выполненным, то из него будет следовать:

(i) существование и единственность решения  $u$  задачи (3.2);

(ii) возможность использования метода последовательных приближений для аппроксимации решения  $u$ : начиная с произвольного элемента  $u^0$ , принадлежащего множеству  $K$ , строим  $u^{n+1} \in K$  как единственное, принадлежащее множеству  $K$  решение неравенства

$$(3.10) \quad \begin{aligned} b(u^{n+1}, v-u^{n+1}) &\geq b(u^n, v-u^{n+1}) - \\ &- \rho [a(u^n, v-u^{n+1}) - (f, v-u^{n+1})] \quad \forall v \in K, \end{aligned}$$

последовательность  $u^n$  сходится к  $u$  в  $V$ .

Докажем неравенство (3.9). Так как форма  $b$  симметрична и удовлетворяет условию (3.3), ее можно выбрать в качестве нового скалярного произведения в  $V$  и положить

$$\|v\| = (b(v, v))^{1/2}.$$

Положим  $w_i = S(u_i)$ ,  $i = 1, 2$  и выберем  $v = w_2$  (соответственно  $w_1$ ) в неравенстве (3.6), определяющем  $w_1$  (соответственно  $w_2$ ). Сложив полученные два неравенства, найдем

$$(3.11) \quad \begin{aligned} -\|w_1 - w_2\|^2 &\geq -b(u_1 - u_2, w_1 - w_2) + \\ &+ \rho a(u_1 - u_2, w_1 - w_2). \end{aligned}$$

Положим  $u_1 - u_2 = \varphi$ ,  $w_1 - w_2 = \psi$ ,  $b(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_V$  и заметим, что

$$(3.12) \quad a(u, v) = (\mathcal{A}u, v)_V, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V; V).$$

Следовательно, (3.11) записывается в виде

$$(3.13) \quad \|\psi\|^2 \leq ((I - \rho A) \varphi, \psi)_V.$$

Но

$$\begin{aligned} \|(I - \rho A) \varphi\|^2 &= \|\varphi\|^2 + \rho^2 \|A\varphi\|^2 - 2\rho (A\varphi, \varphi)_V \leq \\ &\leq (1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2\alpha\rho) \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

так что из (3.13) имеем

$$(3.14) \quad \|\psi\| \leq (1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2\alpha\rho)^{1/2} \|\varphi\|.$$

Так как  $\alpha > 0$ , то величину  $\rho$  можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось  $(1 + \rho^2 \|A\|^2 - 2\alpha\rho)^{1/2} < 1$ , откуда и следует (3.9). ■

*Замечание 3.2.* Приведем один из вариантов изложенного выше метода (см. также работу Брезиса и Сибони [1]).

Пусть  $W$  — гильбертово пространство, обладающее свойствами:

$$(3.15) \quad W \subset V, \quad W \text{ непрерывно и плотно вложено в } V,$$

(3.16)  $K_0$  — замкнутое выпуклое множество в  $W$ , такое, что

$K = \text{замыканию } K_0 \text{ в } V$ ,

и пусть  $b(u, v)$  — билинейная непрерывная форма на  $W$ , не обязательно симметричная и такая, что

$$(3.17) \quad b(v, v) \geq \beta \|v\|_W^2, \quad \beta > 0, \quad \forall v \in W.$$

Тогда для любого  $\epsilon > 0$  существует единственный элемент  $u_\epsilon \in K_0$ , такой, что

$$(3.18) \quad \epsilon b(u_\epsilon, v - u_\epsilon) + a(u_\epsilon, v - u_\epsilon) \geq (f, v - u_\epsilon) \quad \forall v \in K_0.$$

Доказано (Хюэ [1]), что при  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $u_\epsilon \rightarrow u$  в  $V$ , где  $u$  — решение (2.5).

Следовательно, с использованием неравенства (3.18) можно построить итерационный процесс:

$$(3.19) \quad \epsilon_n b(u^n, v - u^n) \geq (f, v - u^n) - a(u^{n-1}, v - u^n) \quad \forall v \in K_0,$$

который может представлять определенный интерес тогда, когда задача (3.19) „проще“ исходной.

В случае уравнений приведем принадлежащий Годунову и Прокопову [1] и полезный для приложений<sup>1)</sup> выбор функциональных пространств. Ограничимся одним примером для случая двух измерений. Предположим, что  $V = H_0^1(\Omega)$ , а форма  $a(u, v)$

<sup>1)</sup> По крайней мере в случае, когда  $\Gamma$  представляет собой объединение отрезков, параллельных координатным осям.

определяется по формуле (1.8). Введем пространства

$$W = \left[ v \mid v \in H_0^1(\Omega); \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \in L^2(\Omega) \right],$$

$$b(v, w) = \int_{\Omega} \left[ vw + \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx,$$

$$v, w \in W.$$

Очевидно, изложенная выше теория справедлива для этого случая. Преимущество введения дифференциального оператора  $B$ , соответствующего форме  $b(v, w)$ , состоит в том, что этот оператор допускает разложение

$$B = \left( I - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \left( I - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

В случае уравнений вводим также схему

$$(3.20) \quad b(u^n, v) = b(u^{n-1}, v) + \rho [(f, v) - a(u^{n-1}, v)] \quad \forall v \in W,$$

$$u^n \in W.$$

Если предположить, что решение  $u$  уравнения  $a(u, v) = (f, v)$   $\forall v \in V$  является элементом  $W$  (что следует из приложений теоремы о регулярности), то

$$b(u, v) = b(u, v) + \rho [(f, v) - a(u, v)] \quad \forall v \in W.$$

Таким образом, если положить  $\varphi^n = u^n - u$ , то из (3.20) следует, что

$$(3.21) \quad b(\varphi^n - \varphi^{n-1}, v) = -\rho a(\varphi^{n-1}, v).$$

Полагая здесь сначала  $v = \varphi^n - \varphi^{n-1}$ , а затем  $v = \varphi^n + \varphi^{n-1}$ , получим отсюда (обозначая при этом

$$b(v, v)^{1/2} = \|v\|, \text{ норма на } W, \text{ эквивалентная } \|v\|_W,$$

и, используя неравенство

$$|a(\varphi, \psi)| \leq M \|\varphi\| \|\psi\|, \quad \|\varphi\| \leq c_1 \|\varphi\|,$$

что

$$\|\varphi^n - \varphi^{n-1}\| \leq \rho M c_1 \|\varphi^{n-1}\|,$$

$$\|\varphi^n\|^2 - \|\varphi^{n-1}\|^2 = -2\rho a(\varphi^{n-1}, \varphi^{n-1}) - \rho a(\varphi^{n-1}, \varphi^n - \varphi^{n-1}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \|\varphi^{n-1}\|^2 - \|\varphi^n\|^2 &\geq 2\alpha\rho \|\varphi^{n-1}\|^2 - M\rho \|\varphi^{n-1}\| \|\varphi^n - \varphi^{n-1}\| \\ &\leq 2\alpha\rho \|\varphi^{n-1}\|^2 - M\rho c_1 \|\varphi^{n-1}\| \|\varphi^n - \varphi^{n-1}\| \\ &\leq 2\alpha\rho \|\varphi^{n-1}\|^2 - (M\rho c_1)^2 \|\varphi^{n-1}\|^2 \\ &= \rho (2\alpha - \rho M^2 c_1^2) \|\varphi^{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Выбирая величину  $\rho$  из условия

$$(3.22) \quad 0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2 c_1^2},$$

будем иметь

$$\|\varphi^{n-1}\| \geq \|\varphi^n\| \geq \dots,$$

а также

$$\|\varphi^{n-1}\| \rightarrow 0.$$

Таким образом, если выбрать  $\rho$  из условия (3.22), то схема (3.20) будет сходящейся в  $V$  к решению задачи.

## 3.2. Метод штрафа

Вернемся к задаче (3.2).

Идея метода штрафа состоит в замене неравенства (3.2) некоторыми уравнениями, в которых вместо условия принадлежности решения множеству  $K$  появляется штраф — слагаемое, которое возрастает при „удалении“ решения от  $K$  и, следовательно, вынуждает предел последовательности приближенных решений принадлежать  $K$ .

Более точно, вводится оператор штрафа  $\beta$  со следующими свойствами:

$\beta$  действует из  $V$  в  $V'$  и удовлетворяет условию Липшица<sup>1)</sup>,

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \text{Кер}(\beta) &= \text{ядру } \beta = K, \\ \beta &\text{ — монотонный оператор.} \end{aligned}$$

Известно, что оператор  $\beta$ , обладающий свойствами (3.23), существует. Более точно, существует бесконечное множество операторов штрафа (для заданного выпуклого множества  $K$ ). ■

Пример 3.1. Рассмотрим пример (1.1) из разд. 1.1.

Для  $v, w \in V = H^1(\Omega)$  положим

$$(3.24) \quad (\beta(v), w) = - \int_{\Gamma} (v - h)^- w d\Gamma;$$

здесь использовано общепринятое обозначение

$$(3.25) \quad \psi^- = \sup(-\psi, 0).$$

Нетрудно проверить, что условия (3.23) выполнены.

Оператор  $\beta$  можно с тем же успехом определить по формуле

$$(3.26) \quad (\beta(v), w) = - \int_{\Gamma} M(v - h)^- w d\Gamma,$$

где  $M$  — заданная непрерывная неотрицательная на  $\Gamma$  функция. ■

<sup>1)</sup> Глобально или локально.

### Уравнение со штрафом

Для заданного  $\varepsilon > 0$  рассмотрим уравнение

$$(3.27) \quad a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} (\beta(u_\varepsilon), v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Уравнение (3.27) нелинейно. Существование решения  $u_\varepsilon$  этого уравнения является следствием общей теории монотонных операторов (см. работы Минти [1], Браудера [1], Лере и Лионса [1]).

Уравнение (3.27) представляет собой уравнение со штрафом, ассоциированное с задачей (3.2). ■

*Пример 3.2.* Выберем оператор штрафа снова по формуле (3.24) и запишем задачу со штрафом, ассоциированную с задачей (1.15), в виде

$$(3.28) \quad \begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= f, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} - \frac{1}{\varepsilon} (u_\varepsilon - h)^- &= 0. \end{aligned}$$

Докажем теперь (см. Лионс [1]) следующую теорему.

**Теорема 3.1.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u_\varepsilon \rightarrow u$ , где  $u$  — решение задачи 3.2.

Изложим основную идею доказательства.

Вначале проверяем, что  $u_\varepsilon$  ограничено в  $V$  (в уравнение (3.27) подставляем  $v = u_\varepsilon - v_0$ ,  $v_0 \in K$ , вычисляем  $A v_0$  и используем коэрцитивность и непрерывность оператора  $A$  и условие

$$(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - v_0) = (\beta(u_\varepsilon) - \beta(v_0), u_\varepsilon - v_0) \geqslant 0).$$

После этого из уравнения (3.27) находим

$$(\beta(u_\varepsilon), v) = \varepsilon [(f, v) - a(u_\varepsilon, v)],$$

откуда следует, что

$$(3.29) \quad \|\beta(u_\varepsilon)\|_V = O(\varepsilon).$$

Таким образом, из последовательности  $u_\varepsilon$  можно извлечь подпоследовательность, которую снова обозначаем через  $u_\varepsilon$ , такую, что

$$(3.30) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ слабо в } V.$$

Отсюда вытекает (на основании свойства монотонности оператора  $\beta$ ), что

$$\beta(u) = 0,$$

следовательно (в силу свойств (3.23)),  $u \in K$ .

Подставляя в уравнение (3.27)  $v = u_\varepsilon$  вместо  $v$ ,  $v \in K$ , получаем

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} (\beta(v) - \beta(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \geqslant 0,$$

откуда

$$(3.31) \quad a(u_\varepsilon, v) - (f, v - u_\varepsilon) \geq a(u_\varepsilon, u_\varepsilon).$$

Поскольку  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq a(u, u)$ , то из (3.31) следует

$$a(u, v) - (f, v - u) \geq a(u, u) \quad \forall v \in K,$$

т. е. неравенство (3.2). ■

**Замечание 3.3.** Изложенный метод допускает очень большое количество вариантов, примеры будут приведены в последующих главах. ■

**Замечание 3.4.** Если метод штрафа интерпретируется как „вариационный“ в предположении, что  $a$  симметрична и что  $\beta$  представляет собой градиент некоторого функционала  $\Psi$  (это предположение допустимо), то задача (3.27) сводится к минимизации функционала со штрафом

$$(3.32) \quad \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \frac{1}{\varepsilon} \Psi(v) = J_\varepsilon(v).$$

В таком виде метод штрафа был введен Курантом [1].

Идея метода штрафа в математическом программировании послужила источником очень большого количества работ, в последующих главах мы снова встретимся с ней. ■

### 3.3. Регуляризация

Рассмотрим сейчас задачу типа (2.9), где функционал  $j$  не дифференцируем.

Естественный путь ее решения состоит в аппроксимации  $j$  семейством выпуклых и дифференцируемых функционалов  $j_\varepsilon$ . ■

**Пример 3.3.** Для задачи, рассмотренной в разд. 1.3, можно выбрать

$$(3.33) \quad j_\varepsilon(v) = \int_{\Gamma} g \varphi_\varepsilon(v) d\Gamma,$$

где функции  $\lambda \rightarrow \varphi_\varepsilon(\lambda)$  — выпуклые и дифференцируемые аппроксимации отображения  $\lambda \rightarrow |\lambda|$ , например

$$(3.34) \quad \varphi_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon+1} |\lambda|^{\varepsilon+1}$$

или, что для вычислений предпочтительнее,

$$(3.35) \quad \varphi_\varepsilon(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 + \varepsilon^2}, \text{ или еще}$$

$\varphi_\varepsilon(\lambda)$  выпукла и дифференцируема,

$$\varphi_\varepsilon(\lambda) = |\lambda| \text{ при } |\lambda| \geq \varepsilon. \blacksquare$$

БИБЛИОТЕКА  
КОЛОХЗА  
ОСКОРКА

ИНВ № 33  
НЕ БОЛЕЕ 1 ІІ КНИГИ В  
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

Таким образом, задача (2.9) „приближается“ задачей

$$(3.36) \quad a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (f, v - u_\varepsilon) \quad \forall v \in V.$$

Поскольку функционал  $j_\varepsilon$  дифференцируем, то неравенство (3.36) эквивалентно уравнению

$$(3.37) \quad a(u_\varepsilon, v) + (j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v) = (f, v) \quad \forall v \in V,$$

которое, как следует из общей теории монотонных операторов, имеет решение, и притом только одно (оператор  $v \rightarrow j'_\varepsilon(v)$  представляет собой монотонный оператор из  $V$  в  $V'$ ).

Покажем, что

$$(3.38) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } V \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ где } u \text{ — решение задачи (2.9).}$$

В самом деле, можно проверить, что последовательность  $u_\varepsilon$  ограничена в  $V$ , следовательно, из нее можно извлечь подпоследовательность, по-прежнему обозначаемую через  $u_\varepsilon$ , такую, что  $u_\varepsilon \rightarrow u$  слабо в  $V$ . Из (3.36) и (3.37) находим, что

$$\begin{aligned} a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) - (f, v - u_\varepsilon) = \\ = j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) - (j'_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \geq 0, \end{aligned}^{(1)}$$

следовательно,

$$(3.39) \quad a(u_\varepsilon, v) - (f, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(v) \geq a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + j_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Имеем (и это аксиоматические предположения относительно свойств, выполняющиеся, например, для случая (3.33)):

$$(3.40) \quad \begin{aligned} j_\varepsilon(v) &\rightarrow j(v), \\ \liminf j_\varepsilon(u_\varepsilon) &\geq j(u), \end{aligned}$$

так что из (3.39), в силу  $\liminf a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geq a(u, v - u)$ , следует

$$a(u, v) - (f, v - u) + j(v) \geq a(u, v - u) + j(u),$$

т. е. имеем неравенство (2.9). ■

*Замечание 3.5.* Проведенные рассуждения без труда обобщаются на рассмотренные выше другие ситуации. Примеры использования метода регуляризации будут приведены в последующих главах. ■

### 3.4. Двойственность (I)

Принцип двойственности допускает различные подходы к решению задач, получающиеся при этом аналитические формулировки существенно отличаются друг от друга. В настоящем и

<sup>1)</sup> В силу выпуклости  $j_\varepsilon$ .

два следующих разделах мы изложим идеи трех подходов, которые, по нашему мнению, являются основными.

Методы, изложенные в настоящем и следующих разделах, будут продемонстрированы лишь на одном примере, но мы постараемся извлечь из него все то, что представляет интерес с общих позиций. Другие примеры численных расчетов будут приведены в последующих главах. ■

Основополагающая классическая идея всех формулировок принципа двойственности состоит в том, что *всякая выпуклая собственная полунепрерывная снизу функция совпадает с верхней гранью семейства всех не превосходящих ее (непрерывных) аффинных функций*<sup>1</sup>.

В применении к задаче, рассмотренной в разд. 4, это означает, что функционал  $j$ , заданный формулой (1.38), представим в виде

$$(3.41) \quad j(v) = \sup_{p \in \mathcal{P}} \int_{\Omega} gp \cdot \operatorname{grad} v \, dx,$$

верхняя грань берется по множеству  $p \in \mathcal{P}$ , где

$$(3.42) \quad \mathcal{P} = \{p \mid p = \{p_1, \dots, p_n\}, |p| \leq 1 \text{ почти всюду в } \Omega\}.$$

Следовательно, задача (1.40) эквивалентна отысканию

$$(3.43) \quad \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \sup_{p \in \mathcal{P}} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \int_{\Omega} gp \cdot \operatorname{grad} v \, dx \right].$$

Положим

$$(3.44) \quad \mathcal{L}(v, p) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \int_{\Omega} gp \cdot \operatorname{grad} v \, dx$$

(функционал  $\mathcal{L}$  часто называют „лагранжианом“).

Таким образом, обозначая через  $u$  решение задачи (1.40), будем иметь

$$(3.45) \quad \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \sup_{p \in \mathcal{P}} \mathcal{L}(v, p) = J(u).$$

Так как всегда  $\sup \inf \leq \inf \sup$ , то из соотношения (3.45) следует, что

$$(3.46) \quad \sup_{p \in \mathcal{P}} \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, p) \leq J(u).$$

Докажем непосредственно следующую теорему <sup>2</sup>).

<sup>1</sup>) См. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач, стр. 188.—*Прим. перев.*

<sup>2</sup>) Эту теорему можно получить как следствие общей задачи о минимаксе.

**Теорема 3.2.** Имеет место равенство

$$(3.47) \quad \sup_{p \in \mathcal{P}} \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, p) = J(u).$$

Доказательство опирается на следующий результат, представляющий интерес и сам по себе.

**Теорема 3.3.** Если  $u$  — решение задачи (1.40), то существует функция  $m = \{m_1, \dots, m_n\}$ , такая, что

$$(3.48) \quad |m| \leq 1 \text{ почти всюду в } \Omega^1)$$

$$(3.49) \quad m \cdot \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \text{ почти всюду в } \Omega,$$

$$(3.50) \quad -\Delta u - g \operatorname{div} m = f \text{ в } \Omega,$$

$$(3.51) \quad u = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Обратно, если пара  $u, m$  — решение задачи (3.48) — (3.51), то  $u$  — решение задачи (1.40).

**Замечание 3.6.** Теорема 3.3 дает интерпретацию задачи разд. 1.4. ■

**Доказательство теоремы 3.3.** Подставляя в (1.41)  $v = 0$ , а затем  $v = 2u$ , получим

$$(3.52) \quad a(u, u) - (f, u) + j(u) = 0.$$

Выбирая теперь  $v = \pm u$  и учитывая (3.52), находим

$$(3.53) \quad |a(u, v) - (f, v)| \leq j(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(Заметим, что задача (1.41) эквивалентна (3.52) — (3.53).) Полагая

$$(3.54) \quad r = \frac{1}{g} (\Delta u + f),$$

видим, что (3.53) эквивалентно неравенству

$$(3.55) \quad |(r, v)| \leq \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Введем пространство

$$\Phi = \{\varphi \mid \varphi \in (L^1(\Omega))^n\}, \quad \|\varphi\|_{\Phi} = \int_{\Omega} |\varphi| dx$$

и отображение

$$v \rightarrow \pi v = \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\}$$

из  $H_0^1(\Omega) \rightarrow \Phi^*$ . Тогда (3.55) эквивалентно неравенству

$$(3.56) \quad |(r, v)| \leq \|\pi v\|_{\Phi}$$

<sup>1)</sup> Следовательно,  $m \in \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  определено по формуле (3.42).

<sup>2)</sup> Область  $\Omega$  предполагается ограниченной.

и по теореме Хана—Банаха существует элемент  $m \in \Phi' = (L^\infty(\Omega))^n$ , такой, что

$$(3.57) \quad \|m\|_\Phi \leqslant 1,$$

$$(3.58) \quad (r, v) = (m, \pi v) = \sum_i \int_{\Omega} m_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

а (3.52) приводится к равенству

$$(3.59) \quad (r, u) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u| dx.$$

Итак, доказано, что (3.57) эквивалентно (3.46), (3.58)—(3.50), а (3.59)—(3.49) (т. е.  $|m| \leqslant 1$  почти всюду). Поскольку  $u \in H^1(\Omega)$ , то мы имеем все необходимые нам условия (3.48)—(3.51).

Обратное утверждение устанавливается непосредственной проверкой. ■

*Доказательство теоремы 3.2.* Вычислим в явном виде нижнюю грань

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, p),$$

которая достигается на элементе  $v = v(p)$  — решении задачи:

$$(3.60) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= g \operatorname{div} p + f, \\ v &= 0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, для  $v = v(p)$  имеем

$$(3.61) \quad \mathcal{L}(v, p) = -\frac{1}{2} a(v, v),$$

и, следовательно,

$$(3.62) \quad \sup_{p \in \mathcal{P}} \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, p) = \sup_{p \in \mathcal{P}} -\frac{1}{2} a(v(p), v(p)),$$

$v(p)$  — решение (3.60).

Если положить  $v = u$ ,  $p = m$ , где  $u$ ,  $m$  удовлетворяют условиям теоремы 3.3, будем иметь  $p \in \mathcal{P}$  и, кроме того,

$$\sup_{p \in \mathcal{P}} \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \mathcal{L}(v, p) \geqslant -\frac{1}{2} a(u, u) = J(u),$$

что в совокупности с неравенством (3.46) и доказывает (3.47). ■

*Замечание 3.7.* Таким образом, имея в виду численное решение вариационных неравенств, мы вместо исходной (или первоначальной) задачи получили возможность решать двойственную

задачу:

$$(3.63) \quad \inf_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{2} a(v(p), v(p)), \quad v \text{ --- решение (3.60).}$$

Алгоритмы аппроксимации (3.63) будут приведены в последующих главах. ■

*Замечание 3.8.* Одновременное решение первоначальной и двойственной задачи дает, как хорошо известно, двустороннюю оценку функционала  $J(u)$

$$J(v) \leq J(u) \leq \frac{1}{2} a(v(p), v(p)), \quad \forall v, \forall p \in \mathcal{P}. \quad ■$$

*Замечание 3.9.* Задачу (3.63) можно рассматривать как некоторую задачу оптимального управления системой, описываемой уравнениями с частными производными (соответствующую теорию можно найти в книге Лионса [2]). В самом деле, будем считать, что  $p$  — управление (или регулирование). Состояние системы  $v = v(p)$  является решением задачи (3.60), функция стоимости (критерий оптимальности) задается формулой:

$$(3.64) \quad J(p) = \frac{1}{2} a(v(p), v(p)).$$

Таким образом, упомянутая задача оптимального управления состоит в отыскании

$$(3.65) \quad \inf J(p), \quad p \in \mathcal{P}. \quad ■$$

### 3.5. Двойственность (II)

Две другие основополагающие идеи двойственности основаны на том, что

(i) ограничения задачи можно снять при помощи метода множителей Лагранжа;

(ii) задачу можно разделить путем введения искусственных ограничений, которые впоследствии снимаются при помощи метода (i).

Эти возможности будут сейчас описаны на примере той же задачи, что и в разд. 3.4. ■

#### Введение искусственных ограничений

Задача (1.40) эквивалентна, очевидно, отысканию нижней грани (3.66)

$$(3.66) \quad \inf \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w|^2 dx - (f, w) + \int_{\Omega} g |w| dx$$

при ограничении

$$(3.67) \quad w = \operatorname{grad} v, \quad v \in H_0^1(\Omega). \quad \blacksquare$$

*Снятие ограничений с использованием множителей*

Используем обобщение идеи (3.41), состоящее в том, что

$$\sup_p (p, w - \operatorname{grad} v), \quad p \in (L^2(\Omega))^n$$

равно  $+\infty$ , исключая случай, когда выполнено (3.67).

Учитывая этот факт, естественно ввести задачу

$$(3.68) \quad \sup_{p, v, w} \mathcal{M}(v, w, p),$$

где

$$(3.69) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}(v, w, p) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w|^2 dx - (f, v) + \\ & + \int_{\Omega} g |w| dx + (p, w - \operatorname{grad} v). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

*Замечание 3.10.* Функции  $v$  и  $w$  в (3.68) считаются независимыми:  $v$  пробегает пространство  $H_0^1(\Omega)$ ,  $w$  — пространство  $(L^2(\Omega))^n$ .  $\blacksquare$

Заметим, что (на самом деле мы именно к этому и стремимся):

$$(3.70) \quad \mathcal{M}(v, \operatorname{grad} v, p) = J(v).$$

Таким образом,

$$\inf_{v, w, p} \mathcal{M}(v, w, p) \leq \inf_v J(v) = J(u),$$

и, следовательно,

$$(3.71) \quad \sup_p \inf_{v, w} \mathcal{M}(v, w, p) \leq J(u).$$

Докажем теперь теорему.

**Теорема 3.5.** Имеет место равенство

$$(3.72) \quad \sup_p \inf_{v, w} \mathcal{M}(v, w, p) = J(u).$$

*Доказательство.* Имеем

$$\inf_{v, w} \mathcal{M}(v, w, p) = \inf_v \mathcal{M}_1(v, p) + \inf_w \mathcal{M}_2(w, p),$$

$$\mathcal{M}_1(v, p) = -(f, v) - (p, \operatorname{grad} v),$$

$$\mathcal{M}_2(w, p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Omega} g |w| dx - (p, w).$$

Но

$$(3.73) \quad \inf_v \mathcal{M}_1(v, p) = \begin{cases} 0 & \text{при } \operatorname{div} p = f, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем также

$$(3.74) \quad \inf_w \mathcal{M}_2(w, p) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega}^{} (|p| - g)^2 dx.$$

В самом деле, мы пришли к необходимости подсчитать

$$\inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left[ \frac{1}{2} |\xi|^2 + g |\xi| + p \xi \right].$$

Непосредственно видно, что эта нижняя грань равна нулю, если  $|p| \geq g$ . Если же  $|p| \geq g$ , то легко заметить, что

$$\begin{aligned} \inf_{\xi} \left[ \frac{1}{2} |\xi|^2 + g |\xi| + p \xi \right] &= -\frac{1}{2} (|p| - g)^2 + \\ &+ \inf_{\xi} \left[ \frac{1}{2} (|\xi| - |p| + g)^2 + p \xi + |p| |\xi| \right] = \\ &= -\frac{1}{2} (|p| - g)^2 \end{aligned}$$

достигается при

$$\xi = -\frac{p}{|p|} (|p| - g).$$

Тем самым устанавливается, что имеет место формула (3.74) и, кроме того,

$$(3.75) \quad \sup_p \inf_{v, w} \mathcal{M}(v, w, p) = -\inf_p \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega}^{} (|p| - g)^2 dx, \\ |p| \geq g \\ \operatorname{div} p = f^1. \end{cases}$$

Пусть теперь  $\{u, m\}$  удовлетворяют условиям теоремы 3.3, и пусть

$$(3.76) \quad p = -\operatorname{grad} u - gm.$$

Тогда в силу условия (3.50) имеем  $p = f$ ; если  $\operatorname{grad} u = 0$ , то  $|p| = g|m| \leq g$ , и, следовательно, остается рассмотреть лишь область, где  $\operatorname{grad} u \neq 0$ . Итак, имеем

$$(3.77) \quad p = -\operatorname{grad} u \left( 1 + g \frac{1}{|\operatorname{grad} u|} \right),$$

<sup>1)</sup> Этот результат очевиден:  $\operatorname{div} p = f$  в области  $\Omega$ , а интеграл берется по области, где  $|p(x)| \geq g$ .

следовательно,

$$|p| = g + |\operatorname{grad} u| \geq g$$

и

$$(3.78) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|p| - g)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

$$\begin{aligned} |p| &\geq g \\ |p| &\geq g \end{aligned}$$

(так как  $\operatorname{grad} u = 0$  в области, исключенной из рассмотрения в первом интеграле).

Таким образом,

$$\sup_p \inf_{v, w} \mathcal{M}(v, w, p) \geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|p| - g)^2 dx$$

при выборе  $p$  по формуле (3.76), следовательно, в силу (3.78)

$$\sup_p \inf_{v, w} \mathcal{M}(v, w, p) \geq -\frac{1}{2} a(u, u) = J(u),$$

что вместе с неравенством (3.71) и завершает доказательство теоремы. ■

*Замечание 3.11.* Учитывая, что рассуждения настоящего раздела чрезвычайно важны для последующего, приведем еще один пример применения изложенного здесь метода. Рассмотрим задачу Стокса: найти вектор  $u = \{u_1, \dots, u_n\}$  и скаляр  $p$ , такие, что

$$(3.79) \quad -\mu \Delta u = f - \operatorname{grad} p,$$

$$(3.80) \quad \operatorname{div} u = 0,$$

$$(3.81) \quad u = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Речь пойдет о краевой задаче без неравенств, для которой условие (3.80) будет рассматриваться как ограничение.

Положим по определению

$$(3.82) \quad V = \{v \mid v \in (H_0^1(\Omega))^n, \operatorname{div} v = 0 \text{ в } \Omega\},$$

$$(3.83) \quad a(u, v) = \mu \sum_{i, j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad \mu > 0,$$

$$(f, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Тогда задача (3.79), (3.80), (3.81) будет эквивалентна отысканию

$$(3.84) \quad \inf_{v \in V} J(v), \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v),$$

или, что то же, отысканию элемента  $u \in V$ , такого, что

$$(3.85) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Поскольку условие (3.80) рассматривается как определение, введем по аналогии с тем, что было только что сделано,

$$(3.86) \quad \mathcal{N}(v, p) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) - \int_{\Omega} p (\operatorname{div} v) dx,$$

где

$$(3.87) \quad v \in W = (H_0^1(\Omega))^n, \quad p \in L^2(\Omega).$$

Непосредственно проверяется, что

$$(3.88) \quad \sup_p \inf_v \mathcal{N}(v, p) = J(u).$$

Далее вычисляем  $\inf_v \mathcal{N}(v, p)$ ,  $v \in W$ . Для фиксированного элемента  $p$  нижняя грань достигается на элементе  $v = v(p)$  решения задачи

$$(3.89) \quad \begin{aligned} -\mu \Delta v &= f - \operatorname{grad} p, \\ v &= 0 \text{ на } \Gamma, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\inf_v \mathcal{N}(v, p) = -\frac{1}{2} a(v, v).$$

Имеем, таким образом,

$$(3.90) \quad -\inf_p \frac{1}{2} a(v, v) = J(u),$$

где  $v = v(p)$  — решение задачи (3.89)<sup>1)</sup>.

Алгоритмы аппроксимации задачи (3.90) будут приведены ниже. ■

*Замечание 3.12.* Область применимости изложенных методов не ограничивается, естественно, операторами только второго порядка; примеры применения к операторам четвертого порядка, встречающимся в теории тонких пластин, будут приведены в гл. 4. ■

*Замечание 3.13.* Как мы только что видели, применение принципа двойственности может приводить к формулировкам, весьма сильно отличающимся по внешнему виду от формулировки исходной задачи. Впрочем, в более общем случае, когда речь идет о задаче вариационного исчисления

$$\inf_v J(v),$$

<sup>1)</sup> Здесь имеется еще одна задача типа задачи об оптимальном управлении системой с распределенными параметрами; см. также замечание 3.9.

в которой нижняя грань функционала не обязательно достигается (например, в теории минимальных поверхностей<sup>1</sup>), можно ввести двойственные задачи

$$\sup_p \Phi(p),$$

обладающие свойствами:

$$(i) \quad \sup_p \Phi(p) = \inf_v J(v);$$

(ii) существует элемент  $p$ , реализующий  $\sup_p \Phi(p)$ . По поводу теории минимальных поверхностей см. работу Темама [1]. Речь идет здесь, таким образом, об одном из методов релаксации<sup>2</sup>; см. также далее замечание 3.17.

Другие методы релаксации, применимые, в частности, к невыпуклым функционалам, встречаются в теории оптимального управления; для ознакомления с ними мы отсылаем читателя к работам Экланда [1] и Бидо [1].

### 3.6. Двойственность (III)

Еще одну возможность доставляет нам использование идеи сопряженных функций — классической идеи, которой мы обязаны Лежандру и которая развита в работах Фенхеля [1], Мандельбройта [1], Хёрмандера [1], Моро [1], Рокафеллара [2].

Как мы сейчас увидим, здесь не предполагается, как в двух предшествующих разделах, симметричность формы  $a(u, v)$ . ■

Будем говорить, что выпуклая функция  $v \rightarrow \Phi(v)$ , заданная на некотором гильбертовом пространстве  $V$ , является собственной, если

(i)  $\Phi$  полунепрерывна снизу и принимает значения в интервале  $]-\infty, +\infty]$ ;

(ii)  $\Phi$  не равна тождественно  $+\infty$ . ■

*Пример 3.4.* Пусть  $K$  — выпуклое замкнутое множество из  $V$ ,  $K \neq \emptyset$ , тогда функция, заданная условиями

$$(3.91) \quad \begin{aligned} \Phi_K(v) &= 0 && \text{при } v \in K, \\ &= +\infty && \text{при } v \notin K, \end{aligned}$$

является собственной выпуклой. ■

<sup>1</sup>) Поверхностей минимальной площади. — Прим. перев.

<sup>2</sup>) Термин „релаксация“ понимается здесь совершенно по-другому, чем используемый в численном анализе (и далее в этой книге) термин „методы релаксации“.

Используя определение (3.91), видим, что неравенство (3.2) эквивалентно отысканию элемента  $u \in V$ , такого, что

$$(3.92) \quad a(u, v-u) - (f, v-u) + \Phi_K(v) - \Phi_K(u) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Отметим также, что функция  $\Phi = j$ , введенная в разд. 2.1, собственная выпуклая, так что все приведенные выше неравенства можно представить в следующей обобщенной форме:

найти элемент  $u \in V$ , такой, что

$$(3.93) \quad a(u, v-u) - (f, v-u) + \Phi(v) - \Phi(u) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

С целью упрощения записи следующих далее формул введем оператор  $A$ :

$$(3.94) \quad \begin{aligned} A &\in \mathcal{L}(V; V'), \\ a(u, v) &= (Au, v). \end{aligned}$$

Тогда неравенство (3.93) приведется к следующему:

$$(3.95) \quad (Au - f, v-u) + \Phi(v) - \Phi(u) \geq 0 \quad \forall v \in V. \blacksquare$$

Преобразуем теперь неравенство (3.95), используя понятие субдифференциала.

Если функция  $\Phi$  дифференцируема, то из выпуклости следует, что

$$(3.96) \quad \Phi(v) - \Phi(u) - (\Phi'(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Более общо, если ввести множество элементов  $\xi \in V'$ , удовлетворяющих неравенству

$$(3.97) \quad \Phi(v) - \Phi(u) - (\xi, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

то это множество будет существовать независимо от того, дифференцируема функция  $\Phi$  или нет.

Множество элементов  $\xi$ , удовлетворяющих неравенству (3.97), обозначается через  $\partial\Phi(u)$  и называется субдифференциалом функции  $\Phi$  по  $u$  (см. Моро [1]).

Часто используется запись

$$(3.98) \quad \Phi(v) - \Phi(u) - (\partial\Phi(u), v-u) \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

которая допустима, если учесть, что  $\xi \in \partial\Phi(u)$ .

Естественно, что в случае дифференцируемости функции  $\Phi$  по  $u$  имеем

$$(3.99) \quad \partial\Phi(u) = \{\Phi'(u)\}.$$

Используя понятие субдифференциала, видим, что неравенство (3.95) эквивалентно условию:

$$(3.100) \quad -(Au - f) \in \partial\Phi(u). \blacksquare$$

*Замечание 3.14.* Отметим, что уравнение (3.100) является уравнением с многозначным оператором. ■

Преобразуем теперь уравнение (3.100), используя понятие функции, сопряженной выпуклой.

Если  $\Phi$  — собственная выпуклая, то сопряженная ей функция  $\Phi^*$ , заданная на  $V'$ , определяется по формуле

$$(3.101) \quad \Phi^*(v^*) = \sup_v [(v^*, v) - \Phi(v)].$$

В работе Моро [1] доказано, что  $\Phi^*$  — собственная выпуклая. ■

*Пример 3.5.* Положим  $V = H^1(\Omega)$ .  $K$  зададим по формуле

$$(3.102) \quad K = \{v \mid v \in V, v \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\},$$

$$\Phi = \Phi_K \text{ определена по формуле (3.91).}$$

Отождествим пространство  $L^2(\Omega)$  с его двойственным пространством, тогда  $V \subset L^2(\Omega) \subset V' = H^{-1}(\Omega)$ , где  $H^{-1}(\Omega)$  — пространство распределений вида

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega).$$

Тогда функция, сопряженная  $\Phi_K$ , задается соотношением

$$\Phi^*(v^*) = \sup_v (v^*, v), \quad v \in K,$$

из которого находим

$$(3.103) \quad \Phi^*(v^*) = \begin{cases} 0 & \text{при } v^* \leqslant 0^1), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если ввести множество

$$(3.104) \quad K^* = \{v^* \mid v^* \in V', v^* \leq 0\}$$

$$= \{\text{конус неположительных мер на } H^{-1}(\Omega)\},$$

то с использованием обозначения (3.91) будем иметь

$$(3.105) \quad \Phi^* = \Phi_{K^*}. \quad ■$$

Следующая эквивалентность проверяется непосредственно:

$$(3.106) \quad u^* \in \partial\Phi(u) \Leftrightarrow u \in \partial\Phi^*(u^*),$$

и является основной для излагаемого принципа двойственности; мы будем следовать Моско [1]. Из (3.100) и (3.106) вытекает,

<sup>1)</sup>  $v^* \leq 0$  понимается в смысле теории распределений в  $\Omega$ , что эквивалентно утверждению о том, что  $v^*$  — неположительная мера (см. Шварц [1]).

что

$$(3.107) \quad u \in \partial\Phi^*(-(Au-f)).$$

Положим

$$(3.108) \quad A^{-1}f = F,$$

$$(3.109) \quad u^* = -Au + f.$$

Тогда (3.107) будет эквивалентным следующему соотношению:

$$-A^{-1}(u^* - f) = -(A^{-1}u^* - F) \in \partial\Phi^*(u^*),$$

или

$$(3.110) \quad (A^{-1}u^* - F, v^* - u^*) + \Phi^*(v^*) - \Phi^*(u^*) \geqslant 0 \quad \forall v^* \in V'.$$

Неравенство (3.100) представляет собой неравенство, „двойственное“ (3.95). ■

*Пример 3.6* (см. работу Фушарди, Моско, Скарпини и Скиаффино [1]). Обратимся к примеру 3.5, где

$$(3.111) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx.$$

Пусть  $\psi$  — функция, заданная в  $H_0^1(\Omega)$ , и пусть

$$(3.112) \quad f = -\Delta\psi.$$

Тогда неравенство

$$u \in K,$$

$$a(u, v - u) \geqslant (f, -u) \quad \forall v \in K$$

приводится к следующему:

$$(3.113) \quad a(u - \psi, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K,$$

т. е. приводится к задаче отыскания проекции в смысле скалярного произведения (3.111) элемента  $\psi$  на конус неотрицательных в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  функций.

Положим

$$(3.114) \quad A^{-1} = G = \text{оператору Грина задачи Дирихле в области } \Omega.$$

Тогда, учитывая равенство (3.105) и замечая, что  $F = \psi$ , можно утверждать, что задача (3.110) эквивалентна неравенству

$$(3.115) \quad u^* \leqslant 0 \text{ в } \Omega,$$

$$(Gu^* - \psi, v^* - u^*) \geqslant 0 \quad \forall v^* \leqslant 0 \text{ в } \Omega.$$

Примеры численных решений неравенства (3.115) приведены в работе Фушарди, Моско, Скарпини и Скиаффино [1]. ■

*Замечание 3.15.* Трудности практической реализации обсуждаемого принципа двойственности состоят в построении выражений для функции  $\Phi^*$ , сопряженной  $\Phi$ . ■

**Замечание 3.16.** Подход, несколько отличающийся от изложенного здесь и применимый также в случае несимметричной формы  $a(u, v)$ , имеется в работе Сеа [1]; см. также доклад Сеа [2].

**Замечание 3.17.** Функция  $\Phi$  задана на  $V$ , сопряженная ей  $\Phi^*$  введена нами так, что она задана на  $V^*$ . Отождествляя пространства  $V$  и  $V^*$ , можно ввести сопряженную функцию, заданную таким образом на  $V$ ; эта конструкция сопряженной функции будет зависеть, кроме того, и от используемого скалярного произведения.

Предположим, что форма  $a(u, v)$  симметрична, и выберем  $a(u, v)$  в качестве нового скалярного произведения на  $V$ , т. е. положим

$$(3.116) \quad a(u, v) = [u, v].$$

Введем „оператор Грина“  $G \in \mathcal{L}(V'; V)$  следующим образом:

$$(3.117) \quad (f, v) = [Gf, v] \quad \forall v \in V.$$

Тогда задача (3.93) будет эквивалентна неравенству

$$(3.118) \quad [u - Gf, v - u] + \Phi(v) - \Phi(u) \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Функция, сопряженная  $\Phi$  на  $V$ , которую сейчас нужно ввести, равна:

$$(3.119) \quad \hat{\Phi}^*(v) = \sup_{\varphi \in V} ([v, \varphi] - \Phi(\varphi)).$$

Таким образом, неравенство (3.118) эквивалентно соответственно условиям

$$\begin{aligned} & -(u - Gf) \in \partial\Phi(u) \\ & \Leftrightarrow u \in \partial\hat{\Phi}^*(-(u - Gf)). \end{aligned}$$

Положим

$$(3.120) \quad w = -u + Gf.$$

Тогда (3.118) приведется к задаче

$$\begin{aligned} & -w + Gf \in \partial\hat{\Phi}^*(w) \\ (3.121) \quad & \Leftrightarrow [w - Gf, -w] + \hat{\Phi}^*(v) - \hat{\Phi}^*(w) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow a(w, v - w) - (f, v - w) + \hat{\Phi}^*(v) - \hat{\Phi}^*(w) \geq 0, \end{aligned}$$

эквивалентной в свою очередь минимизации функционала

$$(3.122) \quad \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \hat{\Phi}^*(v), \quad v \in V.$$

Таким образом, мы получили следующую „абсолютно симметричную“ формулировку: задача минимизации функционала

$$(3.123) \quad \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \Phi(v), \quad v \in V$$

является сопряженной задаче минимизации функционала (3.122); если  $u$  (соответственно  $w$ ) — решение задачи минимизации (3.123) (соответственно 3.122)), то  $u$  и  $w$  связаны соотношением (3.120), т. е.

$$u + w = Gf$$

(см. также, например, монографию Лионса [2], гл. 3, № 12).  $\blacksquare$

Приведем сейчас принадлежащее Брезису [1] одно приложение полученного результата (теорема 1.5 из гл. 1 работы Брезиса [1]).

Выберем

$$V = H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx,$$

$$K = \{v \mid v \in V, |v(x)| \leq 1 \text{ п. в.}\},$$

$$\Phi(v) = 0 \text{ при } v \in K, \quad +\infty \text{ при } v \notin K.$$

Пусть  $f$  принадлежит пространству  $L^2(\Omega)$  (а не  $H^{-1}(\Omega) = V'$ ). Можно доказать (см. цитированную работу Брезиса), что решение  $u$  задачи (3.123) удовлетворяет<sup>1)</sup> условию (теорема о регулярности)

$$(3.124) \quad u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Но если  $f \in L^2(\Omega)$ , то  $Gf \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  и, следовательно, решение  $w$  сопряженной (в используемом сейчас смысле) задачи удовлетворяет условию

$$(3.125) \quad w = Gf - u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Следовательно, нижняя грань функционала (3.122) достигается на элементе пространства  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , и, следовательно,

$$(3.126) \quad \begin{aligned} & \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \hat{\Phi}^*(v) \right] = \\ & = \inf_{v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \hat{\Phi}^*(v) \right]. \end{aligned}$$

Преимущество второй из формулировок (3.126) состоит в том, что  $\hat{\Phi}^*(v)$  нетрудно получить в явном виде как функцию, заданную на  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , чего нельзя сделать в случае простран-

<sup>1)</sup> Предполагая границу  $\Gamma$  достаточно гладкой.

ства  $H_0^1(\Omega)$ . В самом деле, если  $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , то из (3.19) имеем:

$$\hat{\Phi}^*(v) = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_{\Omega} (-\Delta v) \varphi \, dx = \int_{\Omega} |\Delta v| \, dx.$$

Таким образом, сопряженная задача состоит в отыскании нижней грани функционала

$$(3.127) \quad \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v) + \int_{\Omega} |\Delta v| \, dx = \mathcal{Y}(v)$$

в пространстве  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . (Следует подчеркнуть, что функционал (3.127) некоэрцитивен в пространстве  $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ; если ввести пространство  $X$  функций  $v \in H_0^1(\Omega)$ , таких, что  $\Delta v \in L^1(\Omega)$ , то функционал  $\mathcal{Y}(v)$  будет определен на  $L^1(\Omega)$ , однако пространство  $X$  не является рефлексивным, и прямое решение задачи минимизации (3.127) затруднительно.) ■

### 3.7. Различные замечания

*Замечание 3.18.* Рассмотрим неравенство типа (3.2). Пусть  $K_0$  — некоторое замкнутое выпуклое множество из  $V$ , отличное от рассмотренного выше, и пусть  $u_0 \in K_0$  — решение задачи

$$(3.128) \quad a(u_0, v - u_0) \geq (f, v - u_0) \quad \forall v \in K_0.$$

Естественно, что возможна ситуация, когда для некоторых  $f$  имсется место равенство

$$(3.129) \quad u = u_0.$$

В гл. 3 будет приведен пример (принадлежащий Брезису и Сибони [2]), относящийся к задаче разд. 1.2, в которой  $K$  определено по формуле (1.19), и где

$$(3.130) \quad K_0 = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), |v(x)| \leq \text{расстояние от точки } x \text{ до границы } \Gamma\}.$$

Ясно, что определение  $u$  с использованием (3.128), (3.130) намного проще, чем в первоначальной формулировке задачи. ■

*Замечание 3.19.* Развивая идею замечания 3.18, „свойства сравнения“, связывающие решение  $u$  с решениями более простых задач, можно, в частности, использовать для контроля вычислений. См. по этому поводу работы Хогазо [1, 2]. ■

*Замечание 3.20.* Еще один подход состоит в приближении стационарных задач некоторыми эволюционными неравенствами. К этому мы еще вернемся в гл. 6. ■

*Замечание 3.21.* Приложения теории двойственности к теории аппроксимации можно найти в книге Лорана [1]. ■

### 3.8. План дальнейшего изложения

В предшествующих разделах мы дали достаточно большое число эквивалентных формулировок вариационных неравенств, которые приводят к различным бесконечномерным алгоритмам аппроксимации; термин „бесконечномерные“ означает, что приближенные решения определяются из задач, предполагаемых более простыми, нежели исходная, и тем не менее бесконечномерных.

Очевидно, что практическая реализация алгоритмов предполагает сведение задач к конечномерным. На протяжении этой главы будет изложен аппарат, позволяющий произвести сведение к конечному числу измерений.

Для этой цели существуют два достаточно общих класса методов: методы внутренней аппроксимации (разд. 4) и методы внешней аппроксимации (разд. 5).

## 4. Внутренние аппроксимации

### 4.1. Внутренние аппроксимации пространства $V$ .

#### Метод конечных элементов

Будем говорить, что некоторое семейство  $V_h$  конечномерных векторных пространств ( $h$  — некоторый параметр из  $\mathbb{R}^m$  или из окрестности начала  $\mathbb{R}^m$ ) является *внутренней аппроксимацией*  $V$ , если выполнены следующие условия:

$$(4.1) \quad \forall h \quad V_h \subset V^1,$$

(4.2) пространства  $V_h$  приближают  $V$  в следующем смысле: можно найти пространство  $\mathcal{V}^0$ , плотное в  $V^1$  и такое,

<sup>1)</sup> Именно это условие объясняет термин „внутренние“; для случая „внешних“ аппроксимаций это условие не выполняется (см. разд. 5).

<sup>2)</sup> Введение пространства  $\mathcal{V}^0$  ве является необходимым, однако очевидно, что при практической проверке гипотез выгодно иметь определение возможно более слабой сходимости.

что для  $\forall v \in \mathcal{V}$  можно построить элемент  $v_h \in V_h$ , для которого выполняется условие:  $v_h \rightarrow v$  в  $V$   
при  $h \rightarrow 0$  в  $\mathbb{R}^m$ . ■

Пример 4.1 (метод Галеркина)<sup>1)</sup>. Пусть  $w_1, w_2, \dots, w_j, \dots$  — некоторый базис в  $V$ , термин „базис“ означает, что

(4.3)  $\forall j$  элементы  $w_1, \dots, w_j$  линейно независимы;

(4.4) множество комбинаций  $\sum_{\text{конечная}} \lambda_j w_j$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{R}$  плотно в  $V$ <sup>2)</sup>.

Таким образом, положив

$$h = 1/\mu, \quad \mu \text{ — целое,}$$

определим

(4.5)  $V_h = [w_1, \dots, w_\mu]$  — пространство, порожденное элементами  $w_1, \dots, w_\mu$ .

Можно доказать, что условия (4.1), (4.7) выполнены (если взять  $\mathcal{V} = V$ ).

Пример 4.2. Метод конечных элементов. Пусть  $\Omega$  — открытая область из  $\mathbb{R}^2$ ,  $V = H_0^1(\Omega)$ .

Рассмотрим вещественную непрерывную функцию  $h \rightarrow \varphi(h)$ , такую, что

(4.6)  $\varphi(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Рассмотрим разбиение  $\mathcal{T}_h$  области  $\Omega$  на некоторое семейство треугольников  $T \in \mathcal{T}_h$ , обладающее следующими свойствами:

$T \in \mathcal{T}_h$ , мера ( $T$ )  $\leqslant \varphi(h)$ ; для  $\forall h$  углы треугольников

(4.7) ограничены снизу некоторым числом, строго положительным и не зависящим от  $h$ ;

(4.8)  $T \in \mathcal{T}_h \Rightarrow T \subset \Omega$ ;

(4.9)  $T, T' \in \mathcal{T}_h \Rightarrow T \cap T' = \emptyset$  или же  $T$  и  $T'$  имеют одну общую сторону или одну общую вершину;

если  $\Omega_h = \bigcup T$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$ ,  $\Omega_h \rightarrow \Omega$  в следующем

(4.10) смысле: для любого компакта  $E \subset \Omega$  имеет место — при „достаточно малых“  $h$  — включение  $\Omega_h \supset E$ .

Очевидно, что такие разбиения существуют, какова бы ни была функция  $\varphi$ , удовлетворяющая условию (4.6).

<sup>1)</sup> В отечественной литературе этот метод называется методом „Бубнова — Галеркина“. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Такие базисы всегда существуют, если  $V$  сепарабельно.

С разбиением  $\mathcal{T}_h$  ассоциируется пространство  $V_h$  следующим образом: пусть  $M$  — некоторая „внутренняя“ вершина треугольника  $T \in \mathcal{T}_h$  (см. рис. 4.1),  $P_1, \dots, P_k$  — вершины, соседние с  $M$ ; положим по определению:

(4.11)  $w_M =$  аффинной функции<sup>1)</sup> на каждом треугольнике, имеющем  $M$  своей вершиной, причем  
 $w_M(M) = 1, w_M(P_i) = 0, i = 1, \dots, k, w_M$  равна нулю вне треугольников, имеющих  $M$  своей вершиной.

Тогда

$$(4.12) \quad V_h = \text{пространству, натянутому на все } w_M.$$

Условие (4.1), очевидно, выполнено. Для проверки условия (4.2) выбираем  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  и определяем

$$(4.13) \quad v_h = \sum_M v(M) w_M.$$

Предшествующая конструкция представляет собой наиболее элементарный вариант метода конечных элементов, который поро-

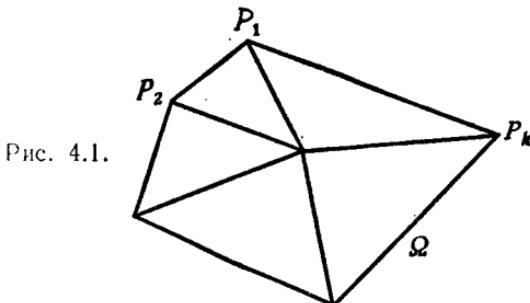


Рис. 4.1.

дил весьма далеко идущие обобщения (с использованием базисных функций степени выше первой, разбиения области на четырехугольники, тетраэдры и т. д.).

К этому методу мы еще вернемся, а пока сошлемся на работы Сиарле и Вагшала [1], Фрайш де Вёбеке [1], Зенкевича [1], Зламала [1, 2], Сиарле и П. А. Равьера [1] (см. также библиографию в этих работах). ■

<sup>1)</sup> В отечественной литературе по МКЭ базисная функция (в том числе и аффинная) называется обычно функцией формы.—Прим. ред.

## 4.2. Схемы внутренней аппроксимации для случая уравнений

Схемы внутренней аппроксимации вариационного уравнения

$$(4.14) \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

немедленно следуют непосредственно из определений разд. 4.1.

В самом деле, введем задачу: найти  $u_h \in V_h$ , такую, что

$$(4.15) \quad a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Предполагая, как обычно, что

$$(4.16) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V,$$

получаем сразу

**Теорему 4.1.** При выполнении гипотез (4.1), (4.2) имеем

$$(4.17) \quad u_h \rightarrow u \text{ в } V \text{ при } h \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Из уравнения (4.15) находим

$$\alpha \|u_h\|^2 \leq a(u_h, u_h) = (f, u_h) \leq \|f\|_{V'} \|u_h\|,$$

откуда

$$(4.18) \quad \|u_h\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}.$$

Отсюда вытекает, что из элементов  $u_h$  можно составить последовательность, для которой мы сохраним обозначение  $u_h$ , такую, что

$$(4.19) \quad u_h \rightarrow w \text{ слабо в } V \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Для произвольного  $v \in \mathcal{V}$  найдем элемент  $v_h$ , обладающий свойствами (4.2); поскольку при таком выборе  $v_h$  имеет место сильная сходимость  $v_h \rightarrow v$  в  $V$ , то

$$a(u_h, v_h) \rightarrow a(w, v)$$

и, следовательно, уравнение (4.15) в пределе дает

$$a(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathcal{V};$$

так как  $\mathcal{V}$  плотно в  $V$ , то отсюда вытекает, что  $w = u$ ; таким образом, имеем слабую сходимость  $u_h \rightarrow u$  в  $V$  без извлечения подпоследовательности из последовательности приближенных решений.

Остается доказать, что  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $V$ . Для доказательства этого рассмотрим

$$X_h = a(u_h - u, u_h - u).$$

В силу (4.15)  $X_h = (f, u_h) - a(u, u_h - u) - a(u_h, u) \rightarrow (f, u) - a(u, u) = 0$ , следовательно,  $\|u_h - u\| \rightarrow 0$ . ■

Задача теперь состоит в распространении рассуждений на случай вариационных неравенств.

### 4.3. Аппроксимации $K$

Для каждого  $h$  рассмотрим некоторое множество  $K_h$ , обладающее свойствами:

(4.20)  $K_h$  — замкнутое выпуклое множество из  $V_h$ ,

$K_h$  аппроксимирует множество  $K$  в следующем смысле:

(4.21) (i)  $\forall v \in K$  можно найти элемент  $v_h \in K_h$ , такой,

что  $v_h \rightarrow v$  в  $V$ ;

(ii) если  $u_h \in K_h$ ,  $u_h - u$  слабо в  $V$ , то  $u \in K$ . ■

Пример 4.3. Рассмотрим пример (4.2) и положим

(4.22)  $K = \{v | v \in V, v \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}$ .

Тогда, если взять

(4.23)  $K_h = \{v | v \in V_h, v \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}$ ,

где  $V_h$  определено по формуле (4.12), то будем иметь (4.21). ■

Замечание 4.1. Условия (4.21) можно ослабить, вводя пересечение  $K \cap \mathcal{V}^\circ$  и предполагая, что  $K \cap \mathcal{V}^\circ$  плотно в  $K$ . ■

Замечание 4.2. В практических приложениях построение множества  $K_h$  представляет собой одну из основных трудностей решения задач с неравенствами. Многочисленные примеры таких построений будут приведены в последующих главах. (Мы будем использовать при этом также внешние аппроксимации; см. далее разд. 5.) ■

Замечание 4.3. Следует остерегаться заблуждений, в которые может ввести используемая терминология: аппроксимация пространства  $V$  пространством  $V_h$  является внутренней, поскольку  $V_h \subset V$ , аппроксимация множества  $K$  множеством  $K_h$  имеет внутренний характер, поскольку  $K_h \subset K$ , но при этом не предполагается, что  $K_h \subset K$ . ■

Замечание 4.4. Исследования проблемы «аппроксимации выпуклых множеств» общего характера можно найти в работах Моско [2], Жоли [1]; см. также работы Обэна [1], Тремольера [4].

#### 4.4. Схемы аппроксимации исходной задачи

Рассмотрим сейчас следующие задачи для неравенств:

$$(4.24) \quad u \in K, \\ a(u, v-u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in K,$$

$$(4.25) \quad a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V.$$

Схемы аппроксимации, использующие введенные выше определения, запишутся соответственно в виде

$$(4.26) \quad u_h \in K_h, \\ a(u_h, v_h - u_h) \geq (f, v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h,$$

$$(4.27) \quad a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq (f, v_h - u_h) \\ \forall v_h \in V_h, u_h \in V_h.$$

Имеет место

**Теорема 4.2.** Предположим, что выполнены предположения (4.1), (4.2) (а для задачи (4.26) — и условия (4.20), (4.21)). Тогда, если  $u_h$  — решение неравенства (4.26) (соответственно (4.27)), то

$$(4.28) \quad u_h \rightarrow u \text{ в } V,$$

где  $u$  — решение неравенства (4.24) (соответственно (4.25)).

**Доказательство.** Для фиксированного  $v$  из множества  $K$  возьмем элемент  $v_h$ , обладающий свойством (4.21) (i); для такого выбора  $v_h$  в неравенстве (4.26) будем иметь

$$(4.29) \quad a(u_h, u_h) \leq a(u_h, v_h) - (f, v_h - u_h),$$

откуда

$$\alpha \|u_h\|^2 \leq c \|u_h\| \|v_h\| + \|f\|_{V'} (\|v_h\| + \|u_h\|);$$

так как  $\|v_h\| \leq c$  (буквой  $c$  мы будем обозначать различные константы), то

$$\alpha \|u_h\|^2 \leq c (\|u_h\| + 1),$$

откуда

$$(4.30) \quad \|u_h\| \leq c.$$

Таким образом, из последовательности  $u_h$  можно извлечь подпоследовательность, такую, что

$$u_h \rightarrow w \text{ слабо в } V.$$

В силу (4.21) (ii)  $w \in K$  и из неравенства (4.29) мы находим:

$$a(w, w) \leq \liminf a(u_h, u_h) \leq a(w, v) - (f, v - w),$$

следовательно,  $w = u$  — решение неравенства (4.24).

Как и при доказательстве теоремы 4.1, для доказательства сильной сходимости последовательности  $u_h$  к решению  $u$  рассмотрим

$$X_h = a(u_h - u, u_h - u).$$

В силу (4.26) имеем

$$X_h \leq a(u_h, v_h) - (f, v_h - u_h) - a(u_h, u) - a(u, u_h - u);$$

выбирая здесь  $v_h$ , удовлетворяющее условию (4.21) (i), найдем

$$(4.31) \quad \limsup X_h \leq a(u, v) - (f, v - u) - a(u, u);$$

в неравенстве (4.31)  $v$  — произвольный элемент из  $K$ . Полагая  $v = u$ , получим  $X_h = 0$ , откуда и следует сильная сходимость.

Аналогичные рассуждения можно провести для задач (4.25), (4.27). ■

*Замечание 4.5.* Таким образом, проблема сейчас приведена к построению эффективных методов решения неравенства (4.26) или (4.27); изучение соответствующих алгоритмов будет проведено в последующих главах. ■

*Замечание 4.6.* При построении схем (4.26), (4.27) понятия, введенные в разд. 3, не были использованы. Сейчас мы увидим, каким образом эти понятия могут быть применены для решения проблемы аппроксимации: в общих чертах идея состоит в том, что мы будем приближать не исходную задачу (4.24) или (4.25), а одну из преобразованных задач разд. 3, детали таких приближений будут уточнены ниже. ■

## 4.5. Схемы аппроксимации задач, полученных методом штрафа или регуляризации

### Уравнение метода штрафа

Будем аппроксимировать сейчас уравнение (3.27) методом внутренней аппроксимации. Итак:

1) выберем число  $\epsilon = \epsilon(h)$ ,  $\epsilon(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0^1$ .

2) Определим элемент  $u_h \in V_h$ , являющийся решением уравнения:

$$(4.32) \quad a(u_h, v_h) + \frac{1}{\epsilon(h)} (\beta(u_h), v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Имеет место

<sup>1)</sup> При практическом выборе  $\epsilon(h)$  возникают определенные затруднения.

**Теорема 4.3.** Если  $h \rightarrow 0$ , то

$$(4.33) \quad u_h \rightarrow u \text{ в } V,$$

где  $u$  — решение уравнения (4.24).

Доказательство основывается на уже использованных выше принципах, и приводить его мы не будем. ■

**Замечание 4.7.** Схему (4.32) можно рассмотреть и под иным углом зрения, именно: можно сначала построить схему (4.26), а затем применить к (4.26) метод штрафа. Эти два способа могут приводить к различиям технического характера.

### Уравнение метода регуляризации

Рассмотрим некоторое семейство регуляризаций  $j_{\epsilon(h)}$  (заданных, например, по формуле (3.33)). Дискретизируя уравнение (3.37), приходим к схеме

$$(4.34) \quad a(u_h, v_h) + (j_{\epsilon(h)}(u_h), v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Утверждение (4.33) о сходимости последовательности приближенных решений имеет место и в этом случае. ■

**Замечание 4.8.** Это замечание аналогично 4.7: можно сначала построить схему вида (4.27), а затем ее регуляризовать. ■

**Замечание 4.9.** Алгоритмы эффективного решения уравнения (4.32) или (4.34) будут приведены в последующих главах. ■

## 4.6. Схемы аппроксимации задач, полученных методами двойственности

### Формулировка (I)

В настоящем разделе используются результаты разд. 4. Исходная задача была приведена к виду (см. (3.63))

$$(4.35) \quad \inf_{p \in \mathfrak{P}} \frac{1}{2} a(v(p), v(p))^1,$$

где  $v = v(p)$  — решение краевой задачи

$$(4.36) \quad -\Delta u = g \operatorname{div} p + f, \quad v = 0 \text{ на } \Gamma.$$

**Дискретизация задачи** (4.35), (4.36)

<sup>1</sup>) Множество  $\mathfrak{P}$  определено по формуле (3.42).

На первом этапе дискретизации рассматривается пространство  $V_h = \langle\text{внутренней аппроксимации}\rangle$  пространства  $V = H_0^1(\Omega)$ , и для элемента  $p \in \mathcal{P}$  определяется  $v_h \in V_h$  — приближенное решение уравнения

$$(4.37) \quad a(v_h, \varphi_h) = (g \operatorname{div} p + f, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Таким образом, рассматривается задача отыскания

$$(4.38) \quad \inf \frac{1}{2} a(v_h, v_h).$$

Второй этап состоит в «дискретизации»  $\mathcal{P}$ . Для этой цели вводится семейство  $\mathcal{P}_\xi$  подмножеств  $\mathcal{P}$ , „приближающих“  $\mathcal{P}^1$ ), и строится элемент  $v_{h,\xi}$  — решение в  $V_h$  уравнения

$$(4.39) \quad a(v_{h,\xi}, \varphi_h) = (g \operatorname{div} p_\xi + f, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h,$$

и после этого рассматривается задача <sup>2)</sup>

$$(4.40) \quad \inf \frac{1}{2} a(v_{h,\xi}, v_{h,\xi}).$$

Если  $h, \xi \rightarrow 0$ , то

$$(4.41) \quad \inf_{p_\xi} \frac{1}{2} a(v_{h,\xi}, v_{h,\xi}) \rightarrow \inf_p \frac{1}{2} a(v, v). \blacksquare$$

*Замечание 4.10.* Алгоритмы эффективного решения задачи типа (4.40) будут приведены ниже.

### Формулировка (II)

Обратимся теперь к задачам разд. 3.5.

Исходная задача была приведена к виду (см. (3.75))

$$(4.42) \quad \inf \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|p| - g)^2 dx, \quad |p| > g$$

где

$$(4.43) \quad \operatorname{div} p = f.$$

Метод состоит в дискретизации уравнения (4.43), причем более простыми здесь представляются методы внешней дискретизации (см. следующий раздел), после этого „дискретное“  $p$ , обозначаемое далее через  $p_h$ , вносится в (4.42).

<sup>1)</sup> В примерах мы обычно будем выбирать  $\xi = h$ .

<sup>2)</sup> Здесь обозначено  $a(v) = a(v, v)$ .

Таким образом, нам остается (как уже было отмечено выше в замечании 4.10) построить алгоритмы вычисления

$$(4.44) \quad \inf \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|p_h| - g)^2 dx.$$

$|p_h| \geq s$

*Замечание 4.11.* Примеры применения конструкций разд. 3.6 в численном анализе можно найти в работе Фушарди, Моско, Скарпини и Скиаффино [1]. ■

## 4.7. Нерешенные задачи.

### Оценки погрешности аппроксимации

В рассмотренных выше задачах имеется очень важная и до настоящего времени во многих аспектах нерешенная проблема — проблема получения оценок погрешности. Особо ценным было бы исследование вопроса о том, в какой мере оценки, полученные для уравнений (см. работы Обэна [2], Брамбла и Шаца [1], Стренга и Фикса [1], Сиарле и Равьяра [1, 2]), могут быть перенесены на случай неравенств.

Результатов общего характера, полученных в этом направлении, по-видимому, немного; тем не менее следует отметить работы Фалка [1] и Моско и Стренга [1], относящиеся к некоторым частным задачам; оценки погрешности для аппроксимаций по методу конечных элементов будут приведены также в настоящей книге, в частности в гл. 3, 4 и 5; эти оценки, по-видимому, не оптимальны. ■

Для того чтобы закончить (временно) с внутренними аппроксимациями, мы приведем сейчас один пример, для которого можно легко получить оценку погрешности, представляющуюся оптимальной.

Вернемся к примеру 3.5. разд. 3.6, предполагая область  $\Omega$  открытой ограниченной областью из  $\mathbb{R}^2$ , ее границу — достаточно регулярной; имеем

$$(4.45) \quad V = H_0^1(\Omega),$$

$$(4.46) \quad K = \{v \mid v \in V, v \geq 0 \text{ почти всюду в } \Omega\}.$$

Для того чтобы задачу немного упростить, ограничимся случаем симметричной формы  $a$ , определяемой по формуле:

$$(4.47) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dx.$$

Пусть  $f \in L^2(\Omega)$ , тогда вариационное неравенство

$$(4.48) \quad a(u, v-u) \geq \int_{\Omega} f(v-u) dx \quad \forall v \in K,$$

$$u \in K$$

имеет решение, и притом только одно; напомним (см. работу Брезиса и Стампакки), что

$$(4.49) \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega),$$

причем

$$(4.50) \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

где константа  $C$  не зависит от  $f$  и  $u$ . ■

Решение неравенства (4.48) аппроксимируем по методу конечных элементов; используем обозначения разд. 4.1, пример 4.2. Для упрощения рассуждений предположим, что область  $\Omega$  — выпуклый многоугольник, тогда условия (4.49), (4.50) будут выполнены, а разбиение  $\mathcal{T}_h$  можно выбрать удовлетворяющим (кроме (4.7)–(4.10)) ограничению

$$(4.51) \quad \overline{\bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T} = \bar{\Omega}.$$

Введем

$$(4.52) \quad \Sigma_h = \{M \mid M \in \bar{\Omega}, M — \text{вершина } T \in \mathcal{T}_h\}$$

и определим пространство  $V_h$  — „аппроксимацию“  $H_0^1(\Omega)$  — по формуле:

$$(4.53) \quad V_h = \{v_h \mid v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v_h|_T \in P_1, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

где  $v_h|_T$  означает сужение  $v_h$  на  $T$ ,  $P_1$  — пространство полиномов от двух переменных степени  $\leq 1$ . Определим множество  $K_h$  — аппроксимацию  $K$  — по формуле

$$(4.54) \quad K_h = V_h \cap K = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h \geq 0 \text{ в } \bar{\Omega}\}.$$

Очевидно,  $K_h$  замкнуто и выпукло в  $V_h$ ; учитывая, что  $v_h|_T$  принадлежит  $P_1$ , немедленно имеем:

$$(4.55) \quad K_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h(M) \geq 0 \quad \forall M \in \Sigma_h\}.$$

Таким образом, приближенная задача ставится в следующем виде:

$$(4.56) \quad a(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in K_h,$$

$$u_h \in K_h,$$

неравенство (4.56) имеет решение, и притом только одно.

Относительно погрешности аппроксимации  $\|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}$  мы сейчас докажем

**Предложение 4.1.** Предположим, что углы треугольников разбиения  $\mathcal{T}_h$  ограничены снизу равномерно относительно  $h$  константой  $\theta_0 > 0$ ; тогда имеет место оценка

$$(4.57) \quad \|u_h - u\| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{h},$$

в которой константа  $C$  не зависит от  $h$ ,  $u$ ,  $f$ ; напомним, что  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h}$  (площадь  $T$ ).

**Доказательство.** (Встречающиеся ниже различные константы будем обозначать через  $C$ .) Имеем

$$a(u, u_h - u) \geq \int_{\Omega} f(u_h - u) dx,$$

$$a(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v \in K_h,$$

сложив эти два неравенства, найдем

$$\begin{aligned} \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= a(u_h - u, u_h - u) \leq a(u_h, v_h - u) - \\ &\quad - \int_{\Omega} f(v_h - u) dx \quad \forall v_h \in K_h, \end{aligned}$$

или в другом виде

$$\begin{aligned} (4.58) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq a(u_h - u, v_h - u) + a(u, v_h - u) - \\ &\quad - \int_{\Omega} f(v_h - u) dx \quad \forall v_h \in K_h. \end{aligned}$$

Из (4.58) и неравенства

$$2a(v, w) \leq \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

находим, что

$$\begin{aligned} (4.59) \quad \frac{1}{2} \|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{2} \|v_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \\ &\quad + a(u, v_h - u) - \int_{\Omega} f(v_h - u) dx \quad \forall v_h \in K_h. \end{aligned}$$

Так как  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ , то  $-\Delta u - f \in L^2(\Omega)$ , и если положить

$$(4.60) \quad \lambda = -\Delta u - f,$$

то в силу (4.50) будем иметь

$$(4.60)' \quad \|\lambda\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$C$  не зависит от  $f$ .

Из (4.60) следует, что

$$(4.61) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (f + \lambda) v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

а из (4.59) и (4.61) имеем

$$\frac{1}{2} \|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|v_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \lambda (v_h - u) \, dx$$

$$\forall v_h \in K_h,$$

откуда в силу (4.60) следует, что

$$(4.62) \quad \frac{1}{2} \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \|v_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_h - u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\forall v_h \in K_h.$$

Для оценки  $u_h - u$  используем сейчас неравенство (4.67), выбирая в нем надлежащим образом  $v_h$ ; предварительно определим оператор *интерполяции*  $\Pi_h: H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$  по формуле

$$(4.63) \quad \begin{aligned} \Pi_h v &\in V_h & \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), \\ \Pi_h v(M) &= v(M) & \forall M \in \Sigma_h. \end{aligned}$$

Тогда в силу (4.53), (4.55) будем иметь

$$(4.64) \quad \Pi_h v \in K_h \quad \forall v \in K \cap C^0(\bar{\Omega}).$$

Положим теперь в неравенстве (4.62)  $v_h = \Pi_h u$ ; эта операция имеет смысл, так как  $\Omega$ —двумерная область с границей, удовлетворяющей условию Липшица, поэтому  $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$  и в силу (4.64)  $\Pi_h u \in K_h \forall h$ .

Напомним, что  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h}$  (площадь  $T$ ); при выполнении сформулированного выше ограничения на величины углов треугольников из  $\mathcal{T}_h$  из результатов, полученных, например, в работах Фикса и Стренга [1], Сиарле и Равьяра [1], вытекают оценки

$$(4.65) \quad \|\Pi_h u - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)} h,$$

$$(4.66) \quad \|\Pi_h u - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^2(\Omega)} \sqrt{h},$$

константы  $C$  в которых не зависят от  $h$  и  $u$ .

Оценка (4.57) тривиальным образом теперь следует из (4.50), (4.62) при  $v_h = \pi_h u$ , если учесть (4.65) и (4.66). ■

**Замечание 4.12.** Утверждения и доказательство предложения 4.1 нетрудно обобщить на случай, когда  $\Omega$ —выпуклый многоугранник в  $\mathbb{R}^3$ , так как в этом случае включение  $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$  все еще имеет место. ■

**Замечание 4.13.** Задачи, близкие к задаче (4.48), будут изучены в гл. 2, разд. 5 по методу конечных разностей. ■

## 5. Внешние аппроксимации

### 5.1. Пример

В приложениях нами будут использованы методы не только внутренней аппроксимации, но и внешней.

Прежде чем приводить достаточно тяжеловесные „общие аксиомы“, основные идеи мы поясним на примере, выбранном из соображений максимальной простоты.

Будем рассматривать задачу Дирихле:

$$(5.1) \quad -\Delta u + u = f, \quad f \text{ задана в } L^2(\Omega),$$

$$(5.2) \quad u = 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Введем пространство

$$(5.3) \quad V = H_0^1(\Omega)$$

и билинейную форму

$$(5.4) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (uv + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx.$$

Тогда задача (5.1) и (5.2) будет эквивалентна уравнению

$$(5.5) \quad a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Наша цель состоит в аппроксимации  $u$  с использованием характеристических функций, которые не принадлежат пространству  $H^1(\Omega)$ : применение характеристических функций соответствует методу конечных разностей. Более точно: пусть вектор  $h \in \mathbb{R}^n$ ; поставим этому вектору в соответствие сетку  $R_h$

$$(5.6) \quad R_h = \{M \mid M \in \mathbb{R}^n, M = \{m_1 h_1, \dots, m_n h_n\}, m_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждому узлу  $M$  сетки  $R_h$  поставим в соответствие бруск с центром  $M$ :

$$(5.7) \quad \tilde{\omega}_h^v(M) = \prod_{i=1}^n \left[ \left( m_i - \frac{1}{2} \right) h_i, \left( m_i + \frac{1}{2} \right) h_i \right]$$

и крест (с центром  $M$ ):

$$(5.7) \quad \text{bis} \quad \tilde{\omega}_h^1(M) = \bigcup_{i=1}^n \tilde{\omega}_h^0\left(M \pm \frac{h}{2} e_i\right), \quad ^1)$$

где  $e_i$  означает  $i$ -й единичный базисный вектор в  $\mathbb{R}^n$ .

Определим теперь

$$(5.8) \quad \Omega_h = \{M \mid \tilde{\omega}_h^1(M) \subset \Omega\},$$

$$(5.9) \quad \theta_h^M = \text{характеристическая функция } \tilde{\omega}_h^0(M),$$

$$(5.10) \quad V_h = \text{пространство, натянутое на } \theta_h^M, M \in \Omega_h.$$

Функции  $\theta_h^M$  не принадлежат пространству  $H^1(\Omega)$ , так что  $V_h$  не является подпространством  $H^1(\Omega)$ . Следовательно, форму  $a(u, v)$  нельзя определить на  $V_h$ , и таким образом ее необходимо видоизменить. Для этого производные заменяются отношениями конечных разностей. Положим

$$(5.11) \quad \delta_i \varphi(x) = \frac{1}{h_i} \left[ \varphi\left(x + \frac{h_i}{2} e_i\right) - \varphi\left(x - \frac{h_i}{2} e_i\right) \right]$$

и для любых  $u_h, v_h \in V_h$  определим форму

$$(5.12) \quad a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \left( u_h v_h + \sum_{i=1}^n \delta_i u_h \delta_i v_h \right) dx.$$

Тогда приближенная задача состоит в том, чтобы найти элемент  $u_h \in V_h$ , такой, что

$$(5.13) \quad a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Так как

$$(5.14) \quad a_h(v_h, v_h) = \sum_{i=1}^n \|\delta_i v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

то отсюда сразу следует, что уравнение (5.13) имеет единственное решение. Основной результат формулируется в следующем виде:

**Теорема 5.1.** При  $h \rightarrow 0$  имеем

$$(5.15) \quad \begin{cases} \{u_h, \delta_1 u_h, \dots, \delta_n u_h\} \rightarrow \left\{u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right\} \text{ слабо} \\ \text{в } (L^2(\Omega))^{n+1} \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Появившиеся в этих обозначениях индексы „0“ и „1“ соответствуют порядкам конечных разностей, можно ввести „крести“ сколь угодно высокого порядка (см. работу Обэна [2]).

<sup>2)</sup> Можно доказать, что в действительности имеет место сильная сходимость, но для наших целей достаточно иметь утверждение (5.15).

*Доказательство.* Положим

$$(5.16) \quad \|v_h\|_{V_h} = \left( \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\delta_i v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Тогда из (5.13), (5.14) вытекает, что

$$(5.17) \quad \|u_h\|_{V_h} \leq c.$$

Таким образом, из последовательности  $u_h$  можно извлечь подпоследовательность, обозначаемую по-прежнему через  $u_h$ , такую, что

$$(5.18) \quad u_h \rightarrow w, \quad \delta_i u_h \rightarrow w_i \text{ слабо в } L^2(\Omega).$$

Докажем теперь, что имеют место условия

$$(5.19) \quad w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

$$(5.20) \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

В самом деле, для любого  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  и достаточно малых  $h$  имеем

$$(\delta_i u_h, \varphi) = - (u_h, \delta_i \varphi)$$

в пределе  $(w_i, \varphi) = - \left( w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$  (так как  $\delta_i \varphi \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  сильно в  $L^2(\Omega)$ ), откуда и следует (5.19).

Для проверки условия (5.20) рассмотрим элемент  $\tilde{u}_h$ , равный продолжению  $u_h$  на все  $\mathbb{R}^n$  нулем вне  $\Omega$ ; поскольку условие (5.8) при этом выполняется, то

$$(\delta_i \tilde{u}_h) = \delta_i (\tilde{u}_h),$$

и, следовательно,  $\tilde{u}_h \rightarrow \tilde{w}$ ,  $\delta_i (\tilde{u}_h) \rightarrow \tilde{w}_i$  слабо в  $L^2(\Omega)$ .

Таким же образом, как и при доказательстве условия (5.19), проверяется, что  $\tilde{w}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{w})$ , откуда вытекает, что

$$\frac{\partial (\tilde{w})}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall i,$$

следовательно,  $\tilde{w} = 0$  на  $\Gamma$ , и мы имеем условие (5.20).

Остается доказать, что  $w = u$ .

Для этого выберем  $v \in V$  и определим

$$(5.21) \quad r_h v = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{h_1, \dots, h_n} (v, \theta_h^M) \theta_h^M.$$

Проверим, что

$$(5.22) \quad r_h v \rightarrow v, \quad \delta_i r_h v \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ сильно в } L^2(\Omega) \quad \forall v.$$

Полагая теперь  $v_h = r_h v$ , будем иметь  $a_h(u_h, v_h) \rightarrow a(w, v)$ , и, следовательно, уравнение (5.13) дает

$$a(w, v) = (f, v) \quad \forall v \in V,$$

откуда имеем  $w = u$ , что и завершает доказательство теоремы. ■

Сейчас мы проведем „аксиоматизацию“ этого доказательства<sup>1)</sup>, производя дополнительно „аппроксимации“  $K$  и  $j$ .

## 5.2. Внешние аппроксимации $V, a, K, j$

### Аппроксимация $V$

Зададим гильбертово пространство  $F$  и оператор  $\sigma$ , обладающий свойствами

(5.23)  $\sigma \in \mathcal{L}(V; F)$ ,  $\sigma$  — инъективный оператор из  $V$  в  $F$ .

Например, в задаче разд. 5.1  $V = H_0^1(\Omega)$ ,  $F = (L^2(\Omega))^{n+1}$ , а  $\sigma$  определяется равенством

$$(5.24) \quad \sigma v = \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right\}. \blacksquare$$

Рассмотрим далее семейство конечномерных пространств  $V_h$ , снабженных (гильбертовыми) нормами  $\|v_h\|_{V_h}$ . Предположим, что заданы операторы продолжения  $p_h \in \mathcal{L}(V_h; F)$ , удовлетворяющие условию:

$$(5.25) \quad \|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h; F)} \leq c.$$

Например, в задаче разд. 5.1  $V_h$  определено по формуле (5.10),  $\|v_h\|_{V_h}$  — по формуле (5.16);  $p_h$  задается равенством

$$(5.26) \quad p_h v_h = \{v_h, \delta_1 v_h, \dots, \delta_n v_h\},$$

и имеет место оценка

$$\|p_h\|_{\mathcal{L}(V_h; F)} \leq 1. \blacksquare$$

Будем говорить, что семейство  $V_h$  реализует внешнюю<sup>2)</sup> аппроксимацию пространства  $V$ , если

$$(5.27) \quad v_h \in V_h, \quad p_h v_h \text{ слабо сходится к элементу } \xi \text{ пространства } F \Rightarrow \xi \in \sigma V$$

и если

$$(5.28) \quad \forall v \in V, \exists v_h \in V_h, \text{ такое, что } p_h v_h \rightarrow \sigma v \text{ сильно в } F \text{ и } \|v_h\|_{V_h} \leq C.$$

<sup>1)</sup> Это будет сделано с целью избежать повторений в приложениях.

<sup>2)</sup> Терминология оправдывается тем обстоятельством, что  $V_h \not\subset V$ .

Для задачи разд. 5.1 можно взять  $v_h = r_h v$ , определяемое по формуле (5.21), тогда условие (5.22) будет соответствовать условиям (5.28). ■

### Аппроксимация $a$

Зададим теперь билинейную форму  $a_h(u_h, v_h)$  на  $V_h^1$  и предположим, что

$$(5.28)' \quad |a_h(u_h, v_h)| \leq c \|u_h\|_{V_h} \|v_h\|_{V_h},$$

$$(5.29) \quad a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{V_h}^2, \quad \alpha > 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Будем говорить, что формы  $a_h$  реализуют аппроксимацию  $a$ , если

(5.30) из того, что  $p_h v_h \rightarrow \sigma v$  слабо в  $F$ ,  $p_h w_h \rightarrow \sigma w$  сильно в  $V$ , следует, что

$$\begin{aligned} a_h(v_h, w_h) &\rightarrow a(v, w), \\ a_h^*(v_h, w_h) &\rightarrow a^*(v, w), \end{aligned}$$

и, кроме того,

(5.31) если  $p_h v_h \rightarrow \sigma v$  слабо в  $F$ , то  
 $\liminf a_h(v_h, v_h) \geq a(v, v)$ . ■

В задаче разд. 5.1 форма  $a_h$  определена по формуле (5.12) и условия (5.30) и (5.31) удовлетворены. ■

### Аппроксимация $K$

Зададим семейство множеств  $K_h$ , обладающих тем свойством, что

$K_h$  есть выпуклое замкнутое подмножество пространства  $V_h$ .  
(5.32)

Будем говорить, что семейство  $K_h$  реализует аппроксимацию  $K$ , если

(5.33)  $v_h \in K_h$ ,  $p_h v_h$  слабо сходится в  $F$  к элементу

$$\xi \Rightarrow \xi \in \sigma K$$

и если

(5.34) для любого  $v \in K$  можно найти  $v_h \in K_h$ ,  
такое, что  $p_h v_h \rightarrow \sigma v$  сильно в  $F$  и  $\|v_h\|_{V_h} \leq C^3$ .

<sup>1)</sup> Все эти построения обобщаются и на некоторые нелинейные задачи.

<sup>2)</sup> Где, как обычно,  $a^*(\varphi, \psi) = a(\psi, \varphi)$ ,  $a_h^*(\varphi, \psi) = a_h(\psi, \varphi)$ . Эта гипотеза бессодержательна в случае, когда форма  $a$  симметрична и когда  $a_h$  выбрасывается также симметричной (что возможно, если не необходимо).

<sup>3)</sup> Ниже, в гл. 6, условия (5.33)–(5.34) называются консистентностью.—  
Прим. перев.

**Замечание 5.1.** Если  $K = V$ , то  $K_h = V_h$ , и мы приходим снова к условиям (5.27), (5.28) ■

**Замечание 5.2.** Построение семейства  $K_h$  и проверка условий (5.33), (5.34) представляет собой одну из основных трудностей в приложениях. Ниже мы приведем примеры, из которых будет видно, что использование внешних аппроксимаций зачастую более удобно, чем использование аппроксимаций внутренних. ■

### Аппроксимация $j$

Пусть  $j$  — собственная выпуклая (см. разд. 3.6) функция на  $V$ . Зададим собственную выпуклую функцию  $j_h$  на  $V_h$ .

Будем говорить, что функции  $j_h$  реализуют аппроксимацию  $j$ , если

$$(5.35) \quad v_h \in V_h, \quad p_h v_h \rightarrow \sigma v \text{ слабо в } F \Rightarrow \liminf j_h(v_h) \geq j(v),$$

$$(5.36) \quad v_h \in V_h, \quad v \in V, \quad p_h v_h \rightarrow \sigma v \text{ сильно в } F \Rightarrow j_h(v_h) \rightarrow j(v).$$

Примеры будут приведены в гл. 4 и 5. ■

### Аппроксимация правой части

Пусть  $f \in V'$ . Зададим линейную непрерывную форму на  $V_h$  и скажем, что  $f_h$  реализует аппроксимацию  $f$ , если

$$(5.37) \quad |f_h(v_h)| \leq C \|v_h\|_{V_h},$$

$$(5.38) \quad p_h v_h \rightarrow \sigma v \text{ слабо в } F \Rightarrow f_h(v_h) \rightarrow (f, v). ■$$

## 5.3. Схемы внешней аппроксимации

### Аппроксимация задачи (4.24)

Разыскивается элемент  $u_h \in K_h$ , удовлетворяющий неравенству

$$(5.39) \quad a_h(u_h, v_h - u_h) \geq f_h(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in K_h. ■$$

### Аппроксимация задачи (4.25)

Разыскивается элемент  $u_h \in V_h$ , удовлетворяющий неравенству

$$(5.40) \quad a_h(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geq f_h(v_h - u_h) \quad \forall v_h \in V_h. ■$$

Имеет место

**Теорема 5.2.** Предположим, что выполнены условия (5.23) — (5.34), и пусть  $u_h$  (соответственно  $u$ ) — решение неравенства (5.39) или (5.40) (соответственно (4.24) или (4.25)), тогда

$$(5.41) \quad p_h u_h \rightarrow \sigma u \text{ сильно в } F.$$

**Замечание 5.3.** Утверждение (5.41) вновь дает (5.15). ■

**Доказательство теоремы 5.2.** Приведем доказательство для случая (5.39); рассуждения для случая (5.40) проводятся аналогично.

Выберем  $v \in K$  и  $v_h \in K_h$ , удовлетворяющие условиям (5.34). Тогда при таком выборе  $v_h$  в неравенстве (5.39) имеем

$$(5.42) \quad a_h(u_h, u_h) \leq a_h(u_h, v_h) - f_h(v_h - u_h).$$

Отсюда с использованием (5.28), (5.29), (5.34) и (5.37) вытекает неравенство<sup>1)</sup>

$$\alpha \|u_h\|_h^2 \leq C(1 + \|u_h\|_h).$$

Следовательно,

$$(5.43) \quad \|u_h\|_h \leq C.$$

В силу (5.25) имеем теперь

$$(5.44) \quad \|p_h u_h\|_F \leq C.$$

Таким образом, из последовательности  $u_h$  можно извлечь подпоследовательность, по-прежнему обозначаемую через  $u_h$ , такую, что

$$p_h u_h \rightarrow \xi \text{ слабо в } F,$$

что в совокупности с (5.33) показывает, что  $\xi = \sigma w$ ,  $w \in K$ , следовательно,

$$(5.45) \quad p_h u_h \rightarrow \sigma w \text{ слабо в } F, w \in K.$$

Но в силу (5.31) из (5.45) вытекает, что

$$(5.46) \quad \liminf a_h(u_h, u_h) \geq a(w, w).$$

Кроме того, из условия  $p_h v_h \rightarrow \sigma v$  слабо в  $F$  и в силу (5.45) из условий (5.30) следует, что

$$(5.47) \quad a_h(u_h, v_h) \rightarrow a(w, v),$$

а из (5.38) — что

$$(5.48) \quad f_h(v_h - u_h) \rightarrow (f, v - w).$$

Используя в неравенстве (5.42) полученные результаты (5.46), (5.47), (5.48), находим:

$$a(w, w) \leq a(w, v) - (f, v - w) \quad \forall v \in K,$$

следовательно,  $w = u$ , что позволяет утверждать, что  $p_h u_h \rightarrow \sigma u$  слабо в  $F$ .

<sup>1)</sup> С этого момента мы будем полагать  $\|v_h\|_V = \|v_h\|_h$ .

Для доказательства (5.41) введем элемент  $\tilde{u}_h \in K_h$ , для которого

$$p_h \tilde{u}_h \rightarrow \sigma u \text{ сильно в } F$$

(такой элемент существует в силу (5.34)), и положим

$$X_h = a_h(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h).$$

Имеем

$$X_h = a_h(u_h, u_h) - a_h(\tilde{u}_h, u_h) - a_h(u_h, \tilde{u}_h) + a_h(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h).$$

Из (5.39) следует, что

$$\begin{aligned} X_h &\leq a_h(u_h, v_h) - f_h(v_h - u_h) - a_h(\tilde{u}_h, u_h) - \\ &\quad - a_h(u_h, \tilde{u}_h) + (a_h(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)). \end{aligned}$$

Используем теперь (5.30)<sup>1)</sup> и предположим, что  $v_h$  выбрано в соответствии с условиями (5.34). Найдем тогда

$$(5.49) \quad \limsup X_h \leq a(u, v) - (f, v - u) - a(u, u) \quad \forall v \in K.$$

Полагая в (5.49)  $v = u$ , получим, что

$$X_h \rightarrow 0,$$

откуда, в силу (5.29), имеем

$$\|u_h - \tilde{u}_h\|_{V_h} \rightarrow 0$$

и далее с использованием (5.25) найдем

$$p_h u_h - p_h \tilde{u}_h \rightarrow 0 \text{ сильно в } F, \text{ откуда и следует (5.41). } \blacksquare$$

**Замечание 5.4.** В приложениях условие (5.34) достаточно проверять для плотного в  $K$  подмножества, т. е. нужно проверять, что имеет место условие

(5.50) существует  $\mathcal{K} \subset K$ ,  $\mathcal{K}$  плотно в  $K$ ,  $\forall v \in \mathcal{K}$  можно найти  $v_h \in K_h$ , такое, что  $p_h v_h \rightarrow \sigma v$  сильно в  $F$ ,  $\|v_h\|_h \leq C$ .

В самом деле, условие (5.34) вытекает из (5.50): пусть  $v \in K$ ,  $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{K}$ , и пусть

$$\|\varphi_\varepsilon - v\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу (5.50) существуют  $h_\varepsilon$  и  $\varphi_{h_\varepsilon}$ , такие, что

$$\|p_{h_\varepsilon} \varphi_{h_\varepsilon} - \sigma \varphi_\varepsilon\|_F \leq \varepsilon;$$

таким образом,

$$\|p_{h_\varepsilon} \varphi_{h_\varepsilon} - \sigma V\|_F \leq \|p_{h_\varepsilon} \varphi_{h_\varepsilon} - \sigma \varphi_\varepsilon\|_F + \|\sigma \varphi_\varepsilon - \sigma V\|_F \leq C\varepsilon,$$

откуда и вытекает нужный нам результат.  $\blacksquare$

<sup>1)</sup> Второе из условий (5.30) используется только при доказательстве сильной сходимости.

**Замечание 5.5.** Систематическая теория внешних аппроксимаций впервые была развита Сеа [3], частный случай аппроксимации „крест“ был введен Ж.-Л. Лионсом [3]. Исследование для случая уравнений проведено в работе Тремольера [4].

**Замечание 5.6.** Естественно, что—как это было и в случае „внутренних“ методов—нам остается построить алгоритмы решения задач (5.39), (5.40).

Эти алгоритмы, развитые в следующих ниже главах, одни и те же как для схем внутренних, так и внешних.

**Замечание 5.7.** Методы внешней аппроксимации можно теперь применить к задачам разд. 4.6, 4.7. Детали таких аппроксимаций нам сейчас не нужны, примеры будут приведены ниже.

## 6. Заключение

Таким образом, численная аппроксимация стационарных вариационных неравенств представляется следующим образом.

### Этап 1

*Выбор формулировки:* здесь имеются следующие указанные нами основные возможности:

Формулировка в виде задачи вариационного исчисления;  
формулировка в виде вариационного неравенства;  
вариационные неравенства со штрафом;  
регуляризованные вариационные неравенства;  
двойственные вариационные неравенства;

к тому же в рамках каждого из названных выше методов имеются дополнительные возможности.

### Этап 2

*Выбор дискретизации.* Нами были указаны внутренние и внешние методы. Естественно, что в рамках каждой из этих групп методов возможны многочисленные варианты: выбор конечных элементов, выбор операторов продолжения с той или иной степенью аппроксимации и т. д.

### Этап 3

*Выбор алгоритма.* После осуществления этапов 1 и 2 (выше мы развили аппарат для достижения этой цели) перед нами

встает задача нелинейного программирования или решения нелинейного уравнения в конечномерном пространстве. Таким образом, нам необходимо развивать алгоритмы решения, а затем выбирать из них подходящий для решения нашей задачи. Именно этот вопрос рассматривается в следующих ниже четырех главах—сначала в общем виде, а затем на конкретных примерах и численных решениях.

## Глава 2

# АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ

### План изложения

В этой главе мы будем строить алгоритмы оптимизации, уделяя особое внимание тем из них, которые приспособлены к решению неравенств (или минимизации функционалов), встречающихся в гл. 1.

Развиваемую теорию мы проиллюстрируем на нескольких очень простых примерах (или контрпримерах). Основные примеры будут приведены в гл. 3—5 (для стационарного случая).

### 1. Метод релаксации

#### 1.1. Описание метода поточечной релаксации.

##### Случай отсутствия ограничений

Мы будем рассматривать выпуклый непрерывный функционал  $v \rightarrow J(v)$  из  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  и исследуем сначала случай отсутствия ограничений, когда разыскивается

$$(1.1) \quad \inf J(v), \quad v \in \mathbb{R}^N.$$

Будем предполагать, что

$$(1.2) \quad J(v) \rightarrow +\infty \quad \|v\| \rightarrow \infty,$$

$$(1.3) \quad J \text{ строго выпуклый},$$

так что существует единственный элемент  $u$ , такой, что

$$(1.4) \quad J(u) = \inf_v J(v).$$

Начиная с точки  $u^0 = \{u_1^0, \dots, u_N^0\}$  и предполагая  $u^n$  известным, будем вычислять последовательно  $u_i^{n+1}$  для  $i = 1, \dots, N$ . ■

Определим  $u_i^{n+1}$  как решение неравенства

$$(1.5) \quad \begin{aligned} J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) &\leqslant \\ &\leqslant J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \quad \forall v_i \end{aligned}$$

при  $i = 1, 2, \dots, N$ . ■

Прежде чем переходить к более общим алгоритмам (задачи с ограничениями, блочная релаксация и т. д.), изучим проблему сходимости (возможной) алгоритма (1.5).

*Контрпример 1.1.* Метод поточечной релаксации может быть не сходящимся к решению задачи. В самом деле, для случая  $N=2$  возьмем функционал

$$(1.6) \quad J(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2 - 2(v_1 + v_2) + 2|v_1 - v_2|,$$

удовлетворяющий условиям (1.2), (1.3) и недифференцируемый (из-за наличия слагаемого  $2|v_1 - v_2|$ ). Имеем

$$u = \{1, 1\}.$$

Применим алгоритм (1.5), начиная с точки

$$u^0 = \{0, 0\}.$$

Тогда  $u_1^1$  определится путем минимизации по  $v_1$  функции  $J(v_1, 0) = v_1^2 - 2v_1 + 2|v_1|$ , откуда найдем  $u_1^1 = 0$ . Определим далее  $u_2^1$  минимизацией по  $v_2$  функции  $J(u_1^1, v_2) = J(0, v_2)$  откуда  $u_2^1 = 0$  и так далее:

$$u^n = \{0, 0\} \forall n.$$

Следовательно,  $u^n$  не сходится к решению  $u$ . ■

*Замечание 1.1.* Методы, позволяющие минимизировать функционалы типа (1.6) (в частности, принцип двойственности), будут приведены в разд. 4.3 и 4.4.

Впрочем, ниже, в разд. 1.5, мы увидим, что для некоторых недифференцируемых функционалов алгоритм (1.5) сходится. ■

Учитывая контрпример 1.1, разумно вначале предполагать, что функционал  $J$  дифференцируемый, и имеем тогда теорему.

**Теорема 1.1.** Предположим, что функция  $J$  удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3) и принадлежит классу  $C^1$ , тогда решения, полученные методом поточечной релаксации (1.5), сходятся к решению и задачи (1.4).

Доказательство опирается на несколько лемм.

**Лемма 1.1.** Если  $J$  принадлежит классу  $C^1$  и строго выпукла, тогда, каково бы ни было число  $M > 0$ , существует непрерывная строго возрастающая функция  $\lambda \rightarrow \delta_M(\lambda) : [0, 2M] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\delta_M(0) = 0$ , такая, что

$$(1.7) \quad (J'(v) - J'(u), v - u) \geq \delta_M(\|v - u\|) \forall u, v,$$

где  $\|u\| \leq M$ ,  $\|v\| \leq M$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $B_M$  шар  $B_M = \{v \mid \|v\| \leq M\}$  и для  $\tau \in [0, 2M]$  положим

$$(1.8) \quad \delta_M^0(\tau) = \inf_{\substack{\|v-u\|=\tau, \\ u, v \in B_M}} (J'(v) - J'(u), v - u).$$

Имеем

$$\delta_M^0(0) = 0.$$

И так как  $J$  строго выпукла, то  $J'$  строго монотонна, следовательно,

$$\delta_M^0(\tau) > 0, \text{ если } \tau > 0.$$

Так как  $B_M \times B_M$  компактно в  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  и так как  $J'$  принадлежит классу  $C^0$ , то для заданного числа  $\tau$  существует пара  $u_0, v_0 \in B_M \times B_M$ , такая, что

$$\|v_0 - u_0\| = \tau, \quad (J'(v_0) - J'(u_0), v_0 - u_0) = \delta_M^0(\tau).$$

Докажем, что функция  $\delta_M^0$  строго возрастающая. Пусть числа  $\tau_1, \tau_2$  удовлетворяют условию

$$0 < \tau_1 < \tau_2 \leq 2M.$$

Тогда существуют  $u_2, v_2$ , такие, что

$$\|v_2 - u_2\| = \tau_2, \quad \delta_M^0(\tau_2) = (J'(v_2) - J'(u_2), v_2 - u_2).$$

В силу строгой монотонности  $J'$  имеем

$$(J'(v_2) - J'(u_2 + t(v_2 - u_2)), v_2 - u_2) > 0, \text{ если } 0 \leq t < 1.$$

Следовательно,

$$(1.9) \quad (J'(v_2) - J'(u_2), v_2 - u_2) > (J'(u_2 + t(v_2 - u_2)) - J'(u_2), v_2 - u_2), \quad 0 \leq t < 1.$$

Если ввести элемент  $w$  из условия

$$w - u_2 = \frac{\tau_1}{\tau_2} (v_2 - u_2),$$

то

$$\|w - u_2\| = \tau_1,$$

и если в неравенстве (1.9) положить  $t = \tau_1/\tau_2$ , то будем иметь

$$\begin{aligned} \delta_M^0(\tau_2) &> \frac{\tau_2}{\tau_1} (J'(w) - J'(u_2), w - u_2) > (J'(w) - J'(u_2), w - u_2) \geq \\ &\geq \inf_{\substack{\|v-u\|=\tau_1, \\ u, v \in B_M}} (J'(v) - J'(u), v - u) = \delta_M^0(\tau_1), \end{aligned}$$

что и доказывает строгое возрастание функции  $\delta_M^0$ .

Из определения (1.8) функции  $\delta_M^0$  имеем

$$(1.10) \quad (J'(v) - J'(u), v - u) \geq \delta_M^0(\|v - u\|).$$

Применяя неравенство (1.10) к паре  $\{u + t(v - u), u\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , находим

$$(1.11) \quad (J'(u + t(v - u)) - J'(u), v - u) \geq \frac{1}{t} \delta_M^0(t \|v - u\|),$$

откуда для  $\tau = t \|v - u\|$  следует, что

$$0 \leq \frac{1}{\tau} \delta_M^0(\tau) \leq \frac{1}{\|v - u\|} \left( J' \left( u + \tau \frac{v - u}{\|v - u\|} \right) - J'(u), v - u \right);$$

из этого неравенства имеем

$$(1.12) \quad \frac{1}{\tau} \delta_M^0(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0.$$

Интегрируя (1.11), получим

$$(1.13) \quad J(v) - J(u) \geq (J'(u), v - u) + \int_0^1 \delta_M^0(t \|v - u\|) \frac{dt}{t}.$$

Меняя местами  $u$  и  $v$  и складывая получившееся неравенство с неравенством (1.13), найдем

$$(1.14) \quad (J'(v) - J'(u), v - u) \geq 2 \int_0^{\|v - u\|} \delta_M^0(t \|v - u\|) \frac{dt}{t} = \\ = 2 \int_0^{\|v - u\|} \delta_M^0(0) \frac{d\theta}{\theta},$$

так что функция  $\delta_M$ , определяемая интегралом

$$(1.15) \quad \delta_M(\tau) = 2 \int_0^\tau \delta_M^0(\theta) \frac{d\theta}{\theta},$$

обладает всеми требуемыми свойствами. ■

**Лемма 1.2.** *При выполнении предположений и использовании обозначений леммы 1.1 имеет место оценка*

$$(1.16) \quad J(v) - J(u) \geq (J'(u), v - u) + \frac{1}{2} \delta_M \left( \frac{1}{2} \|v - u\| \right), \\ \|u\|, \|v\| \leq M.$$

**Доказательство.** В неравенствах (1.11) и (1.13) функцию  $\delta_M^0$  можно заменить на  $\delta_M$ , откуда следует оценка

$$J(v) - J(u) \geq (J'(u), v - u) + \int_0^1 \delta_M(t \|v - u\|) \frac{dt}{t},$$

содержащая, в частности, (1.16). ■

*Доказательство теоремы 1.1.* Выбирая в (1.5)  $v_i = u_i^n$  и полагая последовательно  $i = N, N-1, \dots, 1$ , найдем

$$\begin{aligned} J(u^{n+1}) &\leq J(u_1^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1}, u_N^n) \leq \\ &\leq J(u_1^{n+1}, \dots, u_{N-2}^{n+1}, u_{N-1}^n u_N^n) \leq \dots \leq J(u^n), \end{aligned}$$

откуда

$$(1.17) \quad J(u^{n+1}) \leq J(u^n) \leq \dots \leq J(u^0).$$

В силу условия (1.2) существует константа  $M$ , такая, что

$$(1.18) \quad \|u^n\| \leq M \quad \forall n \geq 0.$$

В силу леммы 1.2 имеем

$$\begin{aligned} (1.19) \quad &J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^n, \dots, u_N^n) - \\ &- J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \geq \\ &\geq (u_i^n - u_i^{n+1}) \frac{\partial J}{\partial u_i}(u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_M \left( \frac{1}{2} |u_i^{n+1} - u_i^n| \right), \end{aligned}$$

и так как из определения  $u_i^{n+1}$  следует, что

$$(1.20) \quad \frac{\partial J}{\partial u_i}(u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) = 0,$$

то из (1.19) находим

$$\begin{aligned} (1.21) \quad &J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^n, \dots, u_N^n) - \\ &- J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \delta_M \left( \frac{1}{2} |u_i^{n+1} - u_i^n| \right), \end{aligned}$$

откуда

$$(1.22) \quad J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \delta_M \left( \frac{1}{2} |u_i^{n+1} - u_i^n| \right).$$

Но так как в силу (1.17)  $J(u^n) - J(u^{n+1}) \rightarrow 0$ , то из оценки (1.22) с использованием свойства строгого возрастания  $\delta_M$  находим

$$(1.23) \quad u^{n+1} - u^n \rightarrow 0.$$

Докажем теперь, что  $u^n \rightarrow u$ , где  $u$  — решение задачи (1.4), удовлетворяющее также уравнению  $J'(u) = 0$ . В силу (1.18) имеем  $\|u\| \leq M$ , следовательно, в неравенстве (1.7) можно взять  $v = u^{n+1}$ , а в качестве  $u$  — решение задачи (1.4), откуда

$$(1.24) \quad (J'(u^{n+1}), u^{n+1} - u) \geq \delta_M (\|u^{n+1} - u\|).$$

Положим

$${}^i u^{n+1} = \{u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n\},$$

тогда (1.20) примет вид

$$(1.20)' \quad \frac{\partial J}{\partial u_i}({}^i u^{n+1}) = 0.$$

Следовательно, неравенство (1.24) эквивалентно неравенству

$$(1.25) \quad \sum_{i=1}^N (u_i^{n+1} - u_i) \left( \frac{\partial J}{\partial u_i}(u^{n+1}) - \frac{\partial J}{\partial u_i}({}^i u^{n+1}) \right) \geq \delta_M (\|u^{n+1} - u\|).$$

Так как  $\|u^{n+1} - {}^i u^{n+1}\| \leq \|u^{n+1} - u^n\|$ , а оператор  $J'$  непрерывен на ограниченных множествах из  $\mathbb{R}^N$ , то, принимая во внимание (1.23), видим, что левая часть неравенства (1.25) стремится к нулю, следовательно,

$$\delta_M (\|u^{n+1} - u\|) \rightarrow 0,$$

что и завершает доказательство теоремы. ■

## 1.2. Поточечная релаксация.

### Минимизация с ограничениями

Рассмотрим теперь случай, когда функционал  $J$  задан на множестве  $K$ , удовлетворяющем условию

$$(1.26) \quad K = \text{замкнутое выпуклое множество из } \mathbb{R}^N.$$

Предположим, что

$$(1.27) \quad K = \prod_{i=1}^N K_i, \\ K_i = [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \quad (a_i, b_i \text{ могут быть неограниченными}).$$

При задании  $K$  таким образом мы часто будем говорить, что  $K$  определено локальными ограничениями, поскольку принадлежность множеству  $K$  выражается в каждой точке отдельно для каждой координаты.

Формальное обобщение алгоритма (1.5) очевидно:  $u_i^{n+1}$  определяется как решение неравенства

$$(1.28) \quad \begin{aligned} J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) &\leq \\ &\leq J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \quad \forall v_i \in K_i, \\ i &= 1, \dots, N \end{aligned}$$

на множестве  $K_i$ . ■

Если предположить, что

$$(1.29) \quad J(v) \rightarrow +\infty \text{ при } \|v\| \rightarrow +\infty, v \in K^1$$

и что выполнено условие (1.3), то существует единственный элемент  $u \in K$ , такой, что

$$(1.30) \quad J(u) = \inf J(v), v \in K.$$

Имеет место следующее обобщение теоремы 1.1.

**Теорема 1.2.** Предположим, что  $J$  принадлежит классу  $C^1$  и удовлетворяет условиям (1.29), (1.3). Тогда алгоритм поточечной релаксации (1.28) сходится к решению  $u$  задачи (1.30).

**Доказательство.** Ход рассуждений такой же, как и при доказательстве теоремы 1.1. Получаем сначала цепочку неравенств (1.17), откуда следуют оценки (1.18), (1.19).

Вместо равенства (1.20) (или (1.20)') на этот раз имеем

$$(1.31) \quad \frac{\partial J}{\partial u_i}(u^{n+1})(v_i - u_i^{n+1}) \geq 0 \quad \forall v_i \in K_i,$$

так что неравенства (1.21) и (1.22) имеют место и в рассматриваемом случае и, следовательно, выполнено условие (1.23). Из (1.7) находим, что

$$(J'(u^{n+1}) - J'(u), u^{n+1} - u) \geq \delta_M (\|u^{n+1} - u\|),$$

и так как

$$(1.32) \quad (J'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

то отсюда следует оценка (1.24); из этой оценки на основании (1.31) имеем неравенство (1.25), из которого — как и в теореме 1.1 — вытекает нужное нам утверждение. ■

Естественный вопрос, который можно теперь поставить, состоит в том, в какой мере метод можно обобщить на случай, когда выпуклые множества  $K$  непредставимы в форме (1.27). Сначала необходимо уточнить, какой смысл придается теперь рассматриваемому методу; при построении алгоритма неравенство (1.28) можно заменить таким же неравенством, причем потребовать

$$\begin{aligned} &\{u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n\} \in K, \\ &\{u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n\} \in K. \end{aligned}$$

Однако этот метод не является удовлетворительным. В самом деле, приведем один контрпример:

**Контрпример 1.2.** Пусть  $J$  — строго выпуклый на множестве  $K$ , представленном на рис. 1.1. Предположим, что  $J$  — возрастающий

4) Эта гипотеза не нужна, если множество  $K$  ограничено.

по каждой из переменных  $v_1, v_2$ . Начнем с точки

$$u^0 = \{u_1^0, u_2^0\} \in \partial K \quad (\partial K = \text{граница } K).$$

Тогда числа

$u_1^1, u_2^1 \in K_1$  должны удовлетворять неравенству

$$J(u_1^1, u_2^1) \leq J(v_1, u_2^0) \text{ для } \{v_1, u_2^0\} \in K_1,$$

откуда следует, что

$$u_1^1 = u_1^0, \text{ затем } u_2^1 = u_2^0, \dots, u^n = u^0 \quad \forall n.$$

То есть точки границы  $K$  представляют собой точки блокировки алгоритма. ■

*Замечание 1.2.* В гл. 3 разд. 7 мы увидим, что в задаче об упругопластическом кручении цилиндрического стержня не-

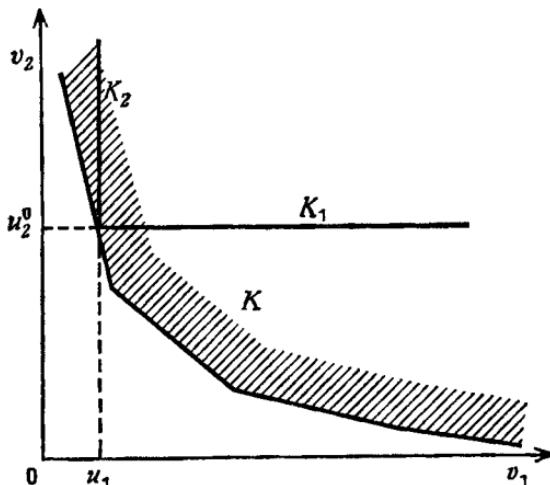


Рис. 1.1.

обходимо минимизировать функционал на некотором замкнутом выпуклом множестве, не удовлетворяющем условию (1.27)<sup>1)</sup>.

Тем не менее будет показано, что метод релаксации сходится к решению при выполнении некоторых ограничений, в частности при надлежащем выборе начального приближения  $u^0$ . ■

*Замечание 1.3.* Вычисление  $u_i^{n+1}$  можно производить в два этапа следующим образом.

Определяем сначала  $u_i^{n+1/2}$  как единственное решение задачи

$$(1.38) \quad \frac{\partial J}{\partial u_i}(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1/2}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) = 0,$$

<sup>1)</sup> В этом случае для краткости будем говорить: для некоторого нелокального выпуклого множества  $K$ .

а затем находим  $u_i^{n+1}$  из условия

$$(1.34) \quad u_i^{n+1} = P_{K_l}(u_i^{n+1/2}),$$

где  $P_{K_l}$  — оператор проектирования на  $K_l$ , т. е.

$$P_{K_l}(f) = \max(a_l, \min(b_l, f)). \blacksquare$$

### 1.3. Блочная релаксация

Выше предполагалось, что декомпозиция (1.27) множества  $K$  осуществляется покоординатно; ясно, что это предположение не является необходимым и без труда может быть обобщено на случай, когда разложение производится на блоки (совокупности координат).

Положим  $V = \mathbb{R}^M$ , и пусть  $V$  представлено в виде разложения

$$V = \prod_{l=1}^N V_l,$$

где  $V_l$  имеет размерность  $m_l$ ,  $m_1 + \dots + m_N = M$ .

Пусть  $K$  — замкнутое выпуклое подмножество  $V$  вида

$$(1.35) \quad K = \prod_{l=1}^N K_l,$$

где  $K_l$  — замкнутое выпуклое множество из  $V_l$ .

Метод (1.28), так же как и теорема 1.2, немедленно обобщается на этот случай. ■

*Замечание 1.4.* Все изложенное обобщается также на случай, когда  $V_l$  являются гильбертовыми или же равномерно выпуклыми банаховыми пространствами, при условии, что утверждения лемм 1.1 и 1.2 переносятся в разряд гипотез или выводятся из предположений более сильных, нежели (1.2), (1.3) и предположение о принадлежности  $J$  классу  $C^1$ .

Исследования такого типа можно найти в работах Левитина и Поляка [1], [2], Поляка [1], Гловински [4], Сеа и Гловински [2].

### 1.4. Верхняя и нижняя релаксации

Пусть  $A$  — симметричная положительно определенная матрица размерности  $(N, N)$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j,$$

и пусть  $f \in \mathbb{R}^n$ .

### Уравнение

$$(1.36) \quad Au = f$$

эквивалентно задаче минимизации без ограничений функционала

$$(1.37) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v),$$

где

$$(1.38) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_j v_i.$$

Для этой задачи алгоритм (1.5) принимает форму

$$(1.39) \quad u_i^{n+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^n - f_i \right),$$

классического алгоритма Гаусса—Зейделя (см. книгу Варга [1]); хорошо известно, что часто более выгодным является следующее обобщение алгоритма Гаусса—Зейделя:

$$(1.40) \quad \begin{aligned} u_i^{n+1/2} &= -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^n - f_i \right), \\ u_i^{n+1} &= (1-\omega) u_i^n + \omega u_i^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Алгоритм (1.40) называется методом верхней (нижней) релаксации, если  $\omega > 1$  ( $\omega < 1$ ); идея состоит в ускорении сходимости путем надлежащего выбора параметра  $\omega$ .

Обобщим предшествующий алгоритм на случай наличия ограничений, когда

$$K = \prod_{i=1}^N K_i.$$

Заметим, что первое из уравнений (1.40) эквивалентно минимизации на  $\mathbb{R}$  функции

$$v_i \rightarrow J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n),$$

т. е.

$$(1.41) \quad \begin{aligned} J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1/2}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) &\leqslant \\ &\leqslant J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \quad \forall v_i \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

определен дальнее

$$(1.42) \quad u_i^{n+1} = P_{K_i}((1-\omega) u_i^n + \omega u_i^{n+1/2}).$$

Тогда имеет место

**Теорема 1.3.** Предположим, что  $J$  задана по формулам (1.37), (1.38), в которых  $A$  — симметричная положительно определенная

матрица, и пусть

$$(1.43) \quad 0 < \omega < 2,$$

тогда алгоритм (1.41), (1.42)<sup>1</sup>) сходится к элементу  $u \in K$ , минимизирующему функционал  $J$  на  $K$ .

*Доказательство.* Докажем сначала, что последовательность убывающая. Для этого достаточно показать, что

$$(1.44) \quad X_i = J(u^{n+1}) - J(u^n) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{2-\omega}{\omega} \right) a_{ii} |u_i^{n+1} - u_i^n|^2, \\ i = 1, \dots, N, \text{ (где принято } {}^0 u^{n+1} = u^n),$$

откуда после суммирования будет вытекать

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{2-\omega}{\omega} \right) \sum_{i=1}^N a_{ii} |u_i^{n+1} - u_i^n|^2,$$

и так как  $a_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , то, обозначая через  $\delta = \inf \{a_{ii} | i = 1, \dots, N\}$ , будем иметь

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{2-\omega}{\omega} \right) \delta |u^{n+1} - u^n|^2.$$

Для  $i = 1$  имеем (формулы для других значений  $i$  аналогичны)

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} a_{11} (u_1^n)^2 + \sum_{j=2}^N a_{1j} u_1^n u_j^n - f_1 u_1^n - \frac{1}{2} a_{11} (u_1^{n+1})^2 - \\ &- \sum_{j=2}^N a_{1j} u_1^{n+1} u_j^n - f_1 u_1^{n+1} = \frac{1}{2} a_{11} ((u_1^n)^2 - (u_1^{n+1})^2) + \\ &+ \left( \sum_{i=2}^N a_{1i} u_i^n \right) (u_1^n - u_1^{n+1}) - f_1 (u_1^n - u_1^{n+1}), \end{aligned}$$

откуда с использованием первого из уравнений (1.40) (вытекающего из (1.41)) следует, что

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} a_{11} ((u_1^n)^2 - (u_1^{n+1})^2) - a_{11} u_1^{n+1/2} (u_1^n - u_1^{n+1}) = \\ &= a_{11} \left[ -\frac{1}{2} (u_1^{n+1} - u_1^n)^2 + (u_1^n - u_1^{n+1})(u_1^n - u_1^{n+1/2}) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и будет вытекать равенство (1.44), если доказать, что

$$(u_1^n - u_1^{n+1})(u_1^n - u_1^{n+1/2}) \geq \frac{1}{\omega} |u_1^{n+1} - u_1^n|^2,$$

1) В дальнейшем автор называет этот алгоритм методом поточечной релаксации с проекцией — *Прим. ред.*

что эквивалентно неравенству

$$(u_i^n - u_i^{n+1}) ((1 - \omega) u_i^n + \omega u_i^{n+1/2} - u_i^{n+1}) \leq 0,$$

вытекающему из (1.42) (при  $i = 1$ ).

Таким образом, последовательность  $J(u^n)$  строго убывающая, и так как она ограничена снизу числом  $J(u)$ , то она сходящаяся, следовательно:

$$(1.45) \quad \|u^n\| \leq C, \quad J(u^n) - J(u^{n+1}) \rightarrow 0,$$

$$(1.46) \quad \|u^n - u^{n+1}\| \rightarrow 0.$$

Пусть  $\lambda_m > 0$  — наименьшее собственное число матрицы  $A$ , тогда

$$(J'(u^{n+1}) - J'(u), u^{n+1} - u) \geq \lambda_m \|u^{n+1} - u\|^2.$$

Если  $u$  — решение задачи минимизации функционала  $J$  на  $K$ , то

$$(1.47) \quad (J'(u^{n+1}), u^{n+1} - u) \geq \lambda_m \|u^{n+1} - u\|^2.$$

Докажем теперь, что левая часть этого неравенства стремится к нулю, отсюда будет следовать

$$\|u^{n+1} - u\| \rightarrow 0,$$

что нам и требовалось доказать.

Пусть  $\bar{u}_i^n$  — минимум на  $K_i$  функционала

$$v_i \rightarrow J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n),$$

и пусть

$${}^i\bar{u}^n = (u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, \bar{u}_i^n, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n).$$

Перепишем теперь левую часть неравенства (1.47) в виде<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} (J'(u^{n+1}), u^{n+1} - u) &= \sum_{i=1}^N (J'_i(u^{n+1}) - J'_i({}^i\bar{u}^n)) (u_i^{n+1} - u_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^N (J'_i({}^i\bar{u}^n) - J'_i(\bar{u}_i^n)) (u_i^{n+1} - u_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^N J'_i(\bar{u}_i^n) (u_i^{n+1} - \bar{u}_i^n) + \sum_{i=1}^N J'_i(\bar{u}_i^n) (\bar{u}_i^n - u_i). \end{aligned}$$

Из определения  $\bar{u}_i^n$  следует, что последнее слагаемое правой части неположительно.

В силу (1.45) и (1.46) первый член правой части стремится к нулю.

<sup>1)</sup> Здесь  $J'_i(v) = \frac{\partial J}{\partial v_i}(v)$ .

Следовательно, осталось доказать, что

$$(1.48) \quad \|u^{n+1} - \bar{u}^n\| \rightarrow 0,$$

где  $\bar{u}^n = (\bar{u}_1^n, \dots, \bar{u}_N^n)$ .

Из определения вытекает, что  $\bar{u}_i^n$  удовлетворяет неравенству

$$\left( \sum_{i < i} a_{ij} u_j^{n+1} + a_{ii} \bar{u}_i^n + \sum_{i > i} a_{ij} u_j^n - f_i \right) (v_i - \bar{u}_i^n) \geq 0$$

$$\forall v_i \in K_i, \quad \bar{u}_i^n \in K,$$

или в другой форме, получающейся с учетом уравнения (1.40),

$$(\bar{u}_i^n - u_i^{n+1/2}) (v_i - \bar{u}_i^n) \geq 0 \quad \forall v_i \in K_i,$$

т. е. (что, впрочем, очевидно)

$$\bar{u}_i^n = P_{K_i}(u_i^{n+1/2}),$$

что в свою очередь эквивалентно неравенству

$$\bar{u}_i^n = P_{K_i}((1-\omega) \bar{u}_i^n + \omega u_i^{n+1/2}).$$

Сравнивая это неравенство с (1.42) и учитывая, что оператор проектирования минимизирует расстояние, найдем

$$|\bar{u}_i^n - u_i^{n+1}| \leq |1-\omega| |\bar{u}_i^n - u_i^n| \leq |1-\omega| (|\bar{u}_i^n - u_i^{n+1}| + |u_i^{n+1} - u_i^n|),$$

откуда вытекает, что

$$(1 - |1-\omega|) |\bar{u}_i^n - u_i^{n+1}| \leq |1-\omega| |u_i^{n+1} - u_i^n| \quad \forall i,$$

и так как  $0 < \omega < 2$ , то отсюда и имеем (1.48). ■

*Замечание 1.5.* В алгоритме (1.42) можно использовать переменные параметры  $\omega^1$ :

$$(1.49) \quad u_i^{n+1} = P_{K_i}((1-\omega_n) u_i^n + \omega_n u_i^{n+1/2}).$$

Если предположить, что

$$(1.50) \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \omega_n \leq 2 - \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i \text{ фиксированы},$$

то утверждение теоремы 1.3 остается справедливым (с тем же доказательством). ■

*Замечание 1.6.* Все изложенное обобщается, естественно, на случай блочной релаксации<sup>2)</sup> (как в разд. 1.3); см. работы Гловински [4], Сеа и Гловински [2]. ■

1) Можно брать также  $\omega_i, n$ , зависящие одновременно от  $i$  и от  $n$ .

2) См. также Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток.— М.: Физматгиз, 1960.— Прим. ред.

*Замечание 1.7.* Приведенные доказательства, основанные на энергетических оценках, распространяются на случай гильбертовых пространств (см. работы Гловински [4], Сеа и Гловински [2]). ■

*Замечание 1.8.* Теорема 1.3. для случая отсутствия ограничений несколько другим путем установлена в работе Варга [1]. ■

*Замечание 1.9.* В работах Ауслендера [1], [2] для случая отсутствия ограничений была предложена схема

$$(1.51) \quad u_i^{n+1} = (1 - \omega) u_i^n + \omega \bar{u}_i^{n+1}, \quad 0 < \omega \leq 1,$$

где  $\bar{u}_i^n$  — минимум на множестве  $K_i$  функционала

$$v_i \rightarrow J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n).$$

Этот способ совпадает с предложенным нами, если все  $u_i^{n+1/2}$  расположены вне  $K_i$  (и, разумеется, при  $0 < \omega \leq 1$ ), и сильно отличается от нашего в противоположном случае. В самом деле, алгоритм (1.51) не допускает верхней релаксации. Однако в приложениях, которые встречаются нам ниже, важно будет иметь возможность выбирать  $\omega > 1$  (что будет ясно из геометрических соображений). ■

*Замечание 1.10.* Варианты изложенных выше алгоритмов полезны при решении систем уравнений; по этому поводу мы отсылаем читателя к работам Шехтера [1], [2], [3], Ортега и Рейнболдта [1], [2].

## 1.5. Один класс недифференцируемых функционалов, минимизируемых методом релаксации

Выше было показано (контрпример 1.1), что алгоритм релаксации не годится, вообще говоря, для минимизации недифференцируемых функционалов, тем не менее мы сейчас установим один положительный результат о применимости этого метода для минимизации функционалов вида

$$(1.52) \quad J(v) = J_0(v) + \sum_{i=1}^N \alpha_i |v_i|, \quad \alpha_i \geq 0,$$

$J_0$  строго выпуклый и принадлежит классу  $C^1$ ,  $J_0(v) \rightarrow +\infty$  при  $\|v\| \rightarrow \infty$ .

*Теорема 1.4.* В задаче минимизации функционалов вида (1.52) алгоритм (1.5) поточечной релаксации сходится к решению и задачи (1.4).

Введем дополнительные переменные<sup>1)</sup>  $y_i, i = 1, \dots, N, y = \{y_i\}$ ; положим

$$(1.53) \quad J_1(v, y) = J_0(v) + \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i,$$

что дает нам выпуклый (нестрого) функционал класса  $C^1$  на пространстве  $\mathbb{R}^{2N}$ ; в  $\mathbb{R}^{2N}$  введем замкнутое выпуклое множество

$$(1.54) \quad K = \prod_{i=1}^N K_i, \\ K_i = \{v_i, y_i \mid y_i \geq |v_i|\}.$$

Легко видеть, что

$$(1.55) \quad \inf_K J_1(v, y) = J_1(u, |u|) = J(u).$$

Введем также

(i) последовательность  $u^n (n \geq 0)$ , определяемую алгоритмом релаксации для функционала  $J$ ;

(ii) последовательность  $z^n$ , определяемую алгоритмом релаксации (блочной) в задаче минимизации функционала

$$(1.56) \quad \begin{aligned} J_1(z), z = \{v, y\} \text{ следующим образом } ^2): \\ J_1(z_1^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, z_i^{n+1}, z_{i+1}^n, \dots, z_N^n) \leqslant \\ \leqslant J_1(z_1^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, z_i, z_{i+1}^n, \dots, z_N^n) \forall z_i \in K_i. \end{aligned}$$

Можно доказать, что если в качестве начального приближения выбрать пару

$$(1.57) \quad z^0 = \{u^0, |u^0|\},$$

то

$$(1.58) \quad z^n = \{u^n, |u^n|\},$$

следовательно,

$$(1.59) \quad J_1(z^n) = J(u^n).$$

Поскольку

$J(u^n) \geq J(u^{n+1})$  (здесь не используется предположение о дифференцируемости  $J$ ),

то

$$(1.60) \quad \|u^n\| \leq M.$$

<sup>1)</sup> Вводим обозначения  $J_1(v, y) = J_1(v_1, y_1, v_2, y_2, \dots, v_N, y_N) = J_1(z_1, z_2, \dots, z_N)$ .

<sup>2)</sup> Применяемый метод имеет своей целью преобразование задачи „минимизации недифференцируемого функционала без ограничений“ в задачу для „дифференцируемого функционала с ограничениями“.

Если  $z = \{v, y\}$ ,  $\zeta = \{u, x\}$ , то

$$(1.61) \quad (J'_1(z) - J'_1(\zeta), z - \zeta)_{R^{2N}} = (J'(v) - J'(u), v - u)_{R^N}$$

и, следовательно, на основании леммы 1.1 (примененной к функционалу  $J_0$ , а не к  $J$ ) имеем

$$(1.62) \quad (J'_1(z) - J'_1(\zeta), z - \zeta)_{R^{2N}} \geq \delta_M (\|v - u\|);$$

из этой оценки, как и в лемме 1.2, находим:

$$(1.63) \quad J_1(z) - J_1(\zeta) \geq (J'_1(\zeta), z - \zeta)_{R^{2N}} + \frac{1}{2} \delta_M \left( \frac{1}{2} \|v - u\| \right).$$

В силу (1.59) последовательность  $J_1(z^n)$  убывающая и ограничена снизу числом  $J(u)$ , следовательно:

$$(1.64) \quad J_1(z^n) - J_1(z^{n+1}) \rightarrow 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (1.65) \quad J_1(z^n) - J_1(z^{n+1}) &= \sum_{i=1}^N [J_1(z_i^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, z_i^n, \dots, z_N^n) - \\ &- J_1(z_i^{n+1}, \dots, z_{i-1}^{n+1}, z_i^{n+1}, z_{i+1}^n, \dots, z_N^n)] \geq (\text{в силу (1.63)}) \\ &\geq \sum_{i=1}^N \frac{\partial J_0}{\partial u_i}(u_i^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n)(u_i^n - u_i^{n+1}) + \\ &+ \alpha_i(y_i^n - y_i^{n+1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \delta_M (\|u_i^n - u_i^{n+1}\|) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \times \\ &\times \delta_M (\|u_i^n - u_i^{n+1}\|), \end{aligned}$$

поскольку из определения  $z_i^{n+1}$  следует, что

$$\frac{\partial J_0}{\partial u_i}(u_i^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n)(u_i^n - u_i^{n+1}) + \alpha_i(y_i^n - y_i^{n+1}) \geq 0.$$

Из (1.65) и (1.64) находим, что

$$(1.66) \quad u^{n+1} - u^n \rightarrow 0.$$

Осталось показать, что  $u^n \rightarrow u$ . Будем рассуждать, как и в случае дифференцируемости (см. (1.24)); положим

$$z^* = \{u, \|u\|\}$$

и будем исходить из неравенства

$$\begin{aligned} &(J'_1(z^{n+1}) - J'_1(z^*), z^{n+1} - z^*)_{R^{2N}} = \\ &= (J'_1(u^{n+1}) - J'_1(u), u^{n+1} - u)_{R^N} \geq \delta_M (\|u^{n+1} - u\|). \end{aligned}$$

Так как

$$(J'_1(z^*), z^{n+1} - z^*)_{R^{2N}} \geq 0,$$

то из исходного неравенства найдем

$$(1.67) \quad (J_1(z^{n+1}), z^{n+1} - z^*)_{\mathbb{R}^{2N}} \geq \delta_M (\| u^{n+1} - u \|),$$

записывая левую часть неравенства (1.67) в развернутом виде, получим

$$(1.68) \quad \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial J_0}{\partial u_i} (u^{n+1}) (u_i^{n+1} - u_i) + \alpha_i (y_i^{n+1} - |u_i|) \right) \geq \delta_M (\| u^{n+1} - u \|)$$

или в другой форме

$$(1.69) \quad \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial J_0}{\partial u_i} (u^{n+1}) - \frac{\partial J_0}{\partial u_i} (u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \right) (u_i^{n+1} - u_i) + \\ + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial J_0}{\partial u_i} (u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) (u_i^{n+1} - u_i) + \right. \\ \left. + \alpha_i (y_i^{n+1} - |u_i|) \right] \geq \delta_M (\| u^{n+1} - u \|).$$

Из определения  $\{u_i^{n+1}, y_i^{n+1}\}$  и из включения  $\{u_i, |u_i|\} \in K_i$  вытекает, что второе слагаемое в левой части неравенства (1.69) неположительно, следовательно,

$$(1.70) \quad \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial J_0}{\partial u_i} (u^{n+1}) - \frac{\partial J_0}{\partial u_i} (u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) \right) (u_i^{n+1} - u_i) \geq \\ \geq \delta_M (\| u^{n+1} - u \|).$$

Так как  $u_i^{n+1} - u_i^n \rightarrow 0$ , отсюда и находим, что  $u^n \rightarrow u$ . ■

*Замечание 1.11.* Теорема 1.4 дополняет результаты, полученные в работах Ауслендера [1], [2], где доказано, что алгоритм приводит к „критической точке“<sup>1)</sup>, которая может отличаться от решения  $u$ . ■

*Замечание 1.12.* Алгоритмы, приведенные в этом разделе, часто определяют как „прямые“, т. е. в них не используются функциональные производные—по крайней мере в формальной записи алгоритма. Существует много других методов, которые относятся к классу „прямых“: метод вращения, метод Розенброка, метод локальных вариаций<sup>2)</sup> или метод Хука и Дживса (см., например, книгу Сеа [1]). ■

*Замечание 1.13.* Приведенные здесь алгоритмы можно было реализовать в режиме параллельной работы нескольких вычислительных машин (см. работу Мориса [1]). ■

<sup>1)</sup> Точке блокировки, определенной в контрпримерах 1.1 и 1.2.

<sup>2)</sup> Метод локальных вариаций был развит также в ряде работ Черноуско Ф. Л., Баничук Н. В. Их результаты изложены в кн: Вариационные задачи механики и управления.—М.: Наука, 1973.—Прим. перев.

## План дальнейшего изложения

Сейчас мы приведем (очень сжато) некоторые сведения о методах, использующих производную минимизируемого функционала.

## 2. Градиентные методы и метод градиента с проекцией

В настоящем разделе мы приведем только алгоритмы; доказательства можно найти в кн. Сеа [2] (в частности, на стр. 80—117, 126—165) и работах, цитированных в этой книге.

### 2.1. Общие замечания

Предположим, что  $u^n$  найдено, и будем разыскивать  $u^{n+1}$  в виде

$$(2.1) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_n w^n,$$

где  $\rho_n \geqslant 0$  подлежит определению, так же как и направление спуска  $w^n$ .

Предполагая функционал  $J$  дифференцируемым, формально имеем

$$(2.2) \quad J(u^n - \rho_n w^n) = J(u^n) - \rho_n (J'(u^n), w^n) + \dots,$$

так что  $w^n$  целесообразно выбрать из условия

$$(2.3) \quad (J'(u^n), w^n) \geqslant 0.$$

Наиболее естественный способ выбора  $w^n$  следующий:

$$(2.4) \quad w^n = J'(u^n);$$

он и приводит нас к градиентным методам.

### 2.2. Градиентные методы (случай отсутствия ограничений)

*Метод с оптимальным выбором длины шага*

Параметр  $\rho_n$  здесь выбирается из того условия, чтобы

$$(2.5) \quad J(u^n - \rho_n J'(u^n)) = \inf_{\rho} J(u^n - \rho J'(u^n)).$$

В предположении

$$(2.6) \quad J \text{ строго выпуклый и принадлежит классу } C^1, \\ J(v) \rightarrow +\infty \text{ при } \|v\| \rightarrow \infty$$

метод оказывается сходящимся. ■

*Метод с фиксированной длиной шага*

Положим

$$(2.7) \quad \rho_n = \rho = \text{const.}$$

Реализация этого метода, естественно, проще, но условия его сходимости достаточно строгие; пусть, например, функционал  $J$  принадлежит классу  $C^2$ , и пусть

$$(2.8) \quad \mu_1 = \sup_{J(v) \leq J(v^0)} \|J''(v)\|.$$

Тогда метод будет сходящимся, если

$$(2.9) \quad 0 < \delta \leq \rho \leq 2\rho_1 - \delta, \quad \rho_1 \leq 1/\mu_1. \quad ■$$

*Метод с уточнением длины шага*

Будем разыскивать  $\rho$  в форме

$$(2.10) \quad \rho = a^k \rho_0, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \rho_0 > 0,$$

$a > 0$ , значение  $k$  уточняется от итерации к итерации из того условия, чтобы имело место неравенство

$$(2.11) \quad J(u^n - \rho J'(u^n)) < J(u^n)$$

(предполагается, что  $J'(u^n) \neq 0$ ).

Метод сходится, если  $\rho_0$  достаточно мало. ■

*Метод расходящихся рядов*

Зададим последовательность  $\rho_n$ , такую, что  $\rho_n > 0$ ,  $\rho_n \rightarrow 0$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = +\infty$ .

Определим далее

$$(2.12) \quad u^{n+1} = u^n, \quad \text{если } J'(u^n) = 0, \\ u^{n+1} = u^n - \rho_n \frac{J'(u^n)}{\|J'(u^n)\|}, \quad \text{если } J'(u^n) \neq 0.$$

Вопрос о построении подходящей последовательности  $\rho_n$  очень тонкий; данный метод сходится, вообще говоря, очень медленно.

### 2.3. Методы сопряженных градиентов (случай отсутствия ограничений)

Рассмотрим случай квадратичного функционала

$$(2.13) \quad J(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (f, v),$$

где  $A$  — симметричная положительно определенная матрица размера  $(N, N)$ .

Направления  $\{\omega^0, \dots, \omega^{N-1}\}$  из  $\mathbb{R}^N$  называются сопряженными по отношению к  $A$ , если

$$(2.14) \quad (Aw^i, w^j) \begin{cases} = 0 & \text{при } i \neq j, \\ \neq 0 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Пусть  $u^0$  — начальное приближение; предположим, что  $u^n$  вычислено, и будем разыскивать  $u^{n+1}$ , двигаясь в направлении  $\omega^n$ , т. е. в виде:

$$(2.15) \quad u^{n+1} = u^n + \lambda \omega^n,$$

значение  $\lambda$  определяется из условия минимума величины

$$J(u^{n+1}) = J(u^n) + \frac{\lambda^2}{2} (Aw^n, \omega^n) + \lambda ((Au^n, \omega^n) - (f, \omega^n))$$

и равно

$$(2.16) \quad \lambda = \lambda_n = \frac{(f, \omega^n) - (Au^n, \omega^n)}{(Aw^n, \omega^n)}.$$

Таким образом, после осуществления  $N$  итераций приходим к выражению

$$(2.17) \quad u^N = u^0 + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(f, \omega^i) - (Au^0, \omega^i)}{(Aw^i, \omega^i)} \omega^i.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что для любого  $g \in \mathbb{R}^N$  имеет место равенство

$$(2.18) \quad A^{-1}g = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(g, \omega^i)}{(Aw^i, \omega^i)} \omega^i,$$

так что (2.17) дает

$$(2.19) \quad u^N = A^{-1}f = u = \text{решению задачи.}$$

Таким образом, алгоритм приводит к цели за конечное число итераций. ■

Проблема заключается теперь прежде всего в построении сопряженных направлений  $\omega^0, \dots, \omega^{N-1}$ .

Пусть  $u^0$  — начальное приближение; в качестве первого направления выберем направление наимбыстрейшего спуска из точки  $u^0$ , т. е. положим

$$(2.20) \quad w^0 = -J'(u^0),$$

в случае квадратичного функционала, очевидно,

$$(2.21) \quad w^0 = -Au^0 + f.$$

Разыскиваем далее элемент

$$u^1 = u^0 + \lambda w^0,$$

минимизирующий  $J(u^0 + \lambda w^0)$ , а затем строим направление  $w^1$  в форме

$$(2.22) \quad w^1 = -J'(u^1) + \mu w^0,$$

где  $\mu$  выбирается таким образом, чтобы направления  $w^0$  и  $w^1$  были сопряженными, т. е. из условия

$$(w^1, Aw^0) = 0,$$

и далее действуем аналогичным способом. Таким образом, приходим к следующему алгоритму: пусть известны  $u^n$ ,  $r^n$ ,  $w^n$  ( $u^0$  произвольно,  $r^0 = -J'(u^0)$ ,  $w^0 = r^0$ ), положим по определению:

$$(2.23) \quad u^{n+1} = u^n + \mu_n w^n, \quad \mu_n = \frac{(w^n, r^n)}{(Aw^n, w^n)},$$

далее вычисляем

$$(2.24) \quad r^{n+1} = -J'(u^{n+1}),$$

$$(2.25) \quad w^{n+1} = r^{n+1} + \lambda_{n+1} w^n, \quad \lambda_{n+1} = -\frac{(r^{n+1}, Aw^n)}{(w^n, Aw^n)} = \frac{\|r^{n+1}\|^2}{\|r^n\|^2}. \quad \blacksquare$$

Для случая неквадратичных функционалов алгоритм видоизменяется следующим образом. Полагаем:

$$(2.26) \quad u^{n+1} = u^n + \mu_n w^n,$$

где  $\mu_n$  определяется из условия минимума  $J(u^n + \mu w^n)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ; после этого находим:

$$r^{n+1} = -J'(u^{n+1}).$$

Выбор  $w^{n+1}$  требует соблюдения некоторых предосторожностей. Полагаем

$$(2.27) \quad \tilde{w}^{n+1} = r^{n+1} + \lambda_{n+1} w^n, \quad \lambda_{n+1} = \frac{\|r^{n+1}\|^2}{\|r^n\|^2}.$$

Далее проверяем, не превосходит ли угол между векторами  $r^{n+1}$  и  $\tilde{w}^{n+1}$  величины  $\frac{\pi}{2} - \delta$ , где  $\delta > 0$  достаточно мало. Если

условие выполнено, полагаем

$$(2.28) \quad w^{n+1} = \tilde{w}^{n+1},$$

если нет — направление  $\tilde{w}^{n+1}$  следует исключить из рассмотрения и выбрать

$$(2.29) \quad w^{n+1} = r^{n+1}.$$

Алгоритм сходится при выполнении обычных предположений (1.2) и (1.3) и условия принадлежности  $J$  классу  $C^1$ .

При численной реализации выгодным оказывается следующая дополнительная предосторожность: если для  $N$  последовательных итераций с номерами  $j = i, i + 1, \dots, i + N - 1$  имеет место условие

$$w^j \neq r^j,$$

то следует положить

$$w^{i+N} = r^{i+N}. \blacksquare$$

*Замечание 2.1.* Описанный здесь метод называется методом сопряженных градиентов. Существуют другие методы, позволяющие построить  $N$  сопряженных направлений. Упомянем, в частности, метод Флетчера—Пауэлла, позволяющий, кроме всего прочего, получить матрицу, обратную  $J''(u)$ .

Ниже мы приведем (см. замечание 4.11) одно приложение метода, называемого методом сопряженных направлений, к решению задачи минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (f, v)$$

с ограничением  $Bv = b$ .

## 2.4. Минимизация с ограничениями

В данном разделе будем рассматривать задачу разыскания (2.30)  $\inf J(v), v \in K$ ,  $K$  — замкнутое выпуклое множество из  $\mathbb{R}^N$ .

Изложенные выше методы обобщаются на этот случай с использованием оператора проектирования  $P_K$  на  $K$ .

### Метод поточечного проектирования

Пусть  $u^0 \in K$  — начальное приближение; переход от  $u^n$  к  $u^{n+1}$  осуществляется по формуле

$$(2.31) \quad u^{n+1} = P_K(u^n - \rho_n J'(u^n)).$$

**Теорема 2.1.** Для случая квадратичного функционала (2.13) можно подобрать числа  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , такие, что при выполнении ограничений

$$(2.32) \quad 0 < \rho_0 \leq \rho_n \leq \rho_1$$

метод (2.31) сходится к решению и задачи (2.30).

**Доказательство.** Для функции  $u$  — решения рассматриваемой задачи — имеет место равенство

$$(2.33) \quad u = P_K(u - \rho_n J'(u)) \forall \rho_n,$$

так как (2.33) эквивалентно условиям

$$(u - \rho_n J'(u) - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K, \text{ т. е. } (J'(u), v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Полагая  $w^n = u^n - u$  и используя тот факт, что  $P_K$  — оператор сжатия, из (2.31) и (2.33) находим, что

$$(2.34) \quad \|w^{n+1}\| \leq \|w^n - \rho_n (J'(u^n) - J'(u))\|,$$

откуда

$$(2.35) \quad \|w^{n+1}\|^2 \leq \|w^n\|^2 - 2\rho_n (w^n, J'(u^n) - J'(u)) + \rho_n^2 \|J'(u^n) - J'(u)\|^2.$$

Но  $J'(u^n) - J'(u) = A(u^n - u) = Aw^n$ , так что из (2.35) вытекает

$$(2.36) \quad \|w^{n+1}\|^2 \leq (1 - 2\alpha\rho_n + C\rho_n^2) \|w^n\|^2.$$

Таким образом, можно найти числа  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , такие, что из условия (2.32) будет следовать

$$1 - 2\alpha\rho_n + C\rho_n^2 \leq \beta < 1$$

и из неравенства (2.36) вытекает, что  $\|w^n\| \rightarrow 0$ . ■

**Замечание 2.2.** Приведенное доказательство без труда обобщается на случай неквадратичного функционала, производная которого  $J'$  удовлетворяет условию Липшица. ■

### Метод градиента с проекцией

Согласно формуле (2.31), мы проектируем на множество  $K$  точки, получаемые итерациями без учета ограничений. В рассматриваемом методе мы будем проектировать сами градиенты. Предположим, что

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{множество } K \text{ ограничено и определено конечным числом линейных ограничений} \\ K = \{v \mid G_j(v) = 0, 1 \leq j \leq l, G_k(v) \leq 0, l+1 \leq k \leq m\} \end{array} \right.$$

и что для любой точки  $v \in K$  векторы

$$G'_j(v), \quad j \in I(v), \quad I(v) = \{j \mid 1 \leq j \leq m, G_j(v) = 0\}$$

линейно независим».

Тогда проекция на  $K$  полупрямой, исходящей из точки  $v$  и направленной по вектору  $-J'(v)$ , т. е. множество таких точек  $w$ , что

$$(2.38) \quad w = P_K(v - \rho J'(v)), \quad \rho \geq 0$$

представляет собой ломаную линию, первый сегмент которой обозначается через  $[v, v^+]$ .

Алгоритм, таким образом, следующий: имея вычисленное  $u^n \in K$ , определяем  $u^{n+1}$  по формуле

$$(2.39) \quad J(u^{n+1}) \leq J(v), \quad \forall v \in [u^n, (u^n)^+].$$

Направление  $[v, v^+]$  получается с использованием оператора проектирования на некоторую гиперплоскость (линейное многообразие).

Это многообразие определяется формулой

$$S = \{v \mid Av = b\};$$

проекция некоторого вектора  $a$  на  $S$  получается с использованием матрицы  $A^*$  — транспонированной к  $A$ :

$$P_S(a) = [I - A^*(AA^*)^{-1}A]a + A^*(AA^*)^{-1}b.$$

Метод сходится (например, при выполнении гипотезы (2.37), предположения о строгой выпуклости функционала  $J$  и принадлежности его классу  $C^1$ ); доказательства см. в работах Розена [1], [2], Кэнона, Куллема и Полака [2].

*Замечание 2.3.* Кроме метода градиента с проекцией следует упомянуть метод приведенного градиента, предложенный Вольфом [1] для минимизации выпуклых функций с линейными ограничениями и полученный обобщением симплекс-метода. Для случая нелинейных ограничений этот метод был обобщен в работе Абади и Карпентьера [1] (см. также работу Флетчера [1]). Близким к приведенному здесь методу является метод Фрэнка — Вольфа [1]. ■

### 3. Метод штрафа и его варианты

#### 3.1. Общие замечания

Идея метода штрафа (с которым мы встретились в гл. 1, разд. 3.2, см., в частности, замечание 3.4) состоит в аппроксимации задачи

$$(3.1) \quad \inf_{v \in K} J(v),$$

(где  $K$  — замкнутое выпуклое множество из  $\mathbb{R}^N$ ) некоторыми задачами без ограничений (ниже, в разд. 3.3, эта идея будет реализована при помощи внешних методов) или же задачи с пассивными ограничениями, т. е. такими, в которых нижняя грань реализуется внутри множества ограничений (эта идея будет реализована с помощью внешнего метода (разд. 3.2) и метода центров с переменным параметром усечений, изложенного ниже в разд. 3.4)<sup>1)</sup>. ■

Ниже будем предполагать, что  $K$  определено следующим образом

$$(3.2) \quad \begin{cases} K = \{v \mid G_j(v) \geq 0, 1 \leq j \leq m\}, \\ G_j — вогнутые непрерывные функции, заданные на \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Будем предполагать также, что  $J$  удовлетворяет требованиям:

(3.3)  $J$  — строго выпуклый непрерывный функционал на  $\mathbb{R}^N$ . ■

#### 3.2. Внутренние методы

Введем функционал

$$(3.4) \quad I(v, \varepsilon) = J(v) + \varepsilon \sum_{j=1}^m \frac{1}{G_j(v)},$$

$\varepsilon > 0$  — параметр, который впоследствии будем устремлять к нулю.

Сделаем следующие предположения:

(3.5)  $K$  — ограничено<sup>2)</sup>, внутренность  $\dot{K}$  множества  $K$ , определяемая по формуле

$$\dot{K} = \{v \mid G_j(v) > 0, j = 1, \dots, m\}, \text{ непуста.}$$

<sup>1)</sup> Естественно, что для решения задачи со штрафом необходимо подобрать соответствующий алгоритм.

<sup>2)</sup> Предположение об ограниченности  $K$  вводится только для облегчения доказательств. На самом деле достаточно предполагать, что минимум  $J(v)$  на  $K$  достигается в точке  $v$  внутри некоторого шара, что имеет место, например, в случае, когда  $J$  удовлетворяет условию (1.2).

Последнее из условий (3.5) выполняется, если существует такое  $v_0$ , что

$$(3.6) \quad G_j(v_0) > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Таким образом, функция  $v \rightarrow I(v, \varepsilon)$  не равна тождественно  $+\infty$  или  $-\infty$  на  $\dot{K}$ ; в самом деле, имеет место

**Лемма 3.1.** *При выполнении условий (3.2), (3.3), (3.5) существует, и притом только один, элемент  $u_\varepsilon$ , такой, что*

$$(3.7) \quad u_\varepsilon \in \dot{K},$$

$$(3.8) \quad I(u_\varepsilon, \varepsilon) \leq I(v, \varepsilon) \quad \forall v \in \dot{K}.$$

*Доказательство.* Пусть элемент  $v_0$  выбран так, что имеют место неравенства (3.6); введем множество

$$(3.9) \quad S_\varepsilon = \{v \mid v \in K, I(v, \varepsilon) \leq I(v_0, \varepsilon)\};$$

это множество непусто, так как  $v_0 \in S_\varepsilon$ . Докажем, что множество  $S_\varepsilon$  замкнуто (и, следовательно, компактно, так как  $S_\varepsilon \subset K$ , а  $K$  ограничено); так как  $I(v, \varepsilon)$  ограничена на  $S_\varepsilon$ ,  $G_j(v)$  строго положительны на  $S_\varepsilon$ , то  $I(v, \varepsilon)$  непрерывна на  $S_\varepsilon$ , откуда и вытекает утверждение о замкнутости  $S_\varepsilon$ . Более того,

$$(3.10) \quad S_\varepsilon \subset \dot{K},$$

откуда и следует утверждение леммы. ■

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему:

**Теорема 3.1.** *При выполнении условий (3.2), (3.3), (3.5) для решения и задачи (3.7), (3.8) имеем*

$$(3.11) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } \mathbb{R}^N,$$

где  $u$  — решение задачи

$$(3.12) \quad u \in K, \quad J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

*Замечание 3.1.* Построенный здесь метод штрафа называется внутренним, так как  $u_\varepsilon \in \dot{K}$ . ■

*Доказательство.* Так как  $u_\varepsilon \in \dot{K}$  и множество  $K$  ограничено, то из последовательности  $u_\varepsilon$  можно извлечь подпоследовательность, по-прежнему обозначаемую через  $u_\varepsilon$ , такую, что

$$(3.13) \quad u_\varepsilon \rightarrow w \text{ в } \mathbb{R}^N.$$

Имеем

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u_\varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^m \frac{1}{G_j(u_\varepsilon)} \leq J(v) + \varepsilon \sum_{j=1}^m \frac{1}{G_j(v)} \quad \forall v \in \dot{K},$$

переходя здесь к пределу, найдем

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in \dot{K},$$

следовательно,

$$J(w) \leq J(v) \quad \forall v \in K,$$

и так как  $J$  строго выпуклая, то  $w = u$ , что и завершает доказательство. ■

*Замечание 3.2.* Имеет место следующее дополнительное свойство:

функция  $\varepsilon \rightarrow J(u_\varepsilon)$ , убывая, стремится к  $J(u)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В самом деле, пусть  $0 < \eta < \varepsilon$ .

Положим

$$\frac{1}{G(v)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i(v)}.$$

Из определения  $u_\varepsilon$  и  $u_\eta$  следуют неравенства

$$(3.14) \quad J(u_\varepsilon) + \varepsilon \frac{1}{G(u_\varepsilon)} \leq J(u_\eta) + \varepsilon \frac{1}{G(u_\eta)},$$

$$(3.15) \quad J(u_\eta) + \eta \frac{1}{G(u_\eta)} \leq J(u_\varepsilon) + \eta \frac{1}{G(u_\varepsilon)};$$

сложив эти неравенства, получим

$$(\varepsilon - \eta) \left( \frac{1}{G(u_\varepsilon)} - \frac{1}{G(u_\eta)} \right) \leq 0,$$

откуда

$$\frac{1}{G(u_\varepsilon)} - \frac{1}{G(u_\eta)} \leq 0,$$

и из (3.15) имеем

$$J(u_\eta) - J(u_\varepsilon) \leq \eta \left( \frac{1}{G(u_\varepsilon)} - \frac{1}{G(u_\eta)} \right) \leq 0. \blacksquare$$

### 3.3. Внешние методы

Введем функционал

$$(3.16) \quad E(v, \varepsilon) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} G(v)^-,$$

где по определению

$$(3.17) \quad G(v)^- = \sum_{i=1}^m G_i(v)^- = \sum_{i=1}^m \sup(-G_i(v), 0).$$

Заметим (ср. разд. 3.2 гл. 1), что

$$(3.18) \quad G(v)^- = 0 \Leftrightarrow v \in K.$$

Мы сейчас не требуем выполнения условий (3.5). Так как это означает, в частности, что множество  $K$  может быть неограниченным, то нужно предположить, что

$$(3.19) \quad J(v) \rightarrow +\infty \text{ при } \|v\| \rightarrow \infty, v \in \mathbb{R}^N.$$

Так как

$$(3.20) \quad E(v, \varepsilon) \geq J(v),$$

то тем более  $E(v, \varepsilon) \rightarrow +\infty$  при  $\|v\| \rightarrow \infty$ , таким образом, из строгой выпуклости  $E(v, \varepsilon)$  по  $v$  следует, что

$$(3.21) \quad \begin{aligned} &\text{существует единственный элемент } u_\varepsilon \in \mathbb{R}^N, \text{ такой,} \\ &\text{что } E(u_\varepsilon, \varepsilon) = \inf_{v \in \mathbb{R}^N} E(v, \varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

**Теорема 3.2.** Предположим, что выполнены условия (3.2), (3.3), (3.19). Тогда, если  $u_\varepsilon$  определено из (3.21),  $u$  — из (3.12), то

$$(3.22) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ в } \mathbb{R}^N.$$

**Замечание 3.3.** Апроксимирующий элемент  $u_\varepsilon$  не обязательно принадлежит множеству  $K$ , откуда и название — внешний метод. ■

**Доказательство.** Имеют место неравенства

$$(3.23) \quad J(u_\varepsilon) \leq E(u_\varepsilon, \varepsilon) \leq \inf_{v \in K} E(v, \varepsilon) = \inf_{v \in K} J(v) = J(u),$$

из которых следует, что  $u_\varepsilon$  ограничено в  $\mathbb{R}^N$ . Отсюда вытекает, что из последовательности  $u_\varepsilon$  можно извлечь подпоследовательность, по-прежнему обозначаемую через  $u_\varepsilon$ , такую, что  $u_\varepsilon \rightarrow w$  в  $\mathbb{R}^N$ , и из (3.23) находим, что

$$(3.24) \quad J(w) \leq J(u).$$

Кроме того, в силу (3.23)

$$\frac{1}{\varepsilon} G(u_\varepsilon)^- \leq J(u) - J(u_\varepsilon),$$

следовательно,

$$G(w)^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(u_\varepsilon)^- = 0$$

и, таким образом (см. (3.18)),  $w \in K$ , что в совокупности с (3.24) показывает, что  $w = u$ . ■

**Замечание 3.4.** Подчеркнем, что внешний метод применим и в случае, когда  $\dot{K} = \emptyset$ . Это обстоятельство позволяет использовать его для решения задач, содержащих линейные ограничения в виде равенств: штраф, соответствующий ограничению  $G_j(v) = 0$ , берется в виде

$$\frac{1}{\varepsilon} |G_j(v)|. \blacksquare$$

**Замечание 3.5.** Вместо определения  $G(v)^+$  по формуле (3.17) можно использовать также формулу

$$G(v)^+ = \sum_{j=1}^m [\sup(-G_j(v), 0)]^\alpha \quad \alpha \geq 1. \blacksquare$$

**Замечание 3.6.** Не выходя за рамки внешних методов, можно использовать следующий вариант: каждому ограничению  $G_j(v) \geq 0$  ( $j = 1, m$ ) поставим в соответствие переменную  $t_j \geq 0$  (называемую отклонением), что дает пару ограничений  $\{G_j(v) - t_j = 0, t_j \geq 0\}$ , эквивалентных ранее использованным, и функционал со штрафом

$$F(v, t, \varepsilon) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^m (G_j(v) - t_j)^2,$$

где  $t = (t_1, \dots, t_m) \in R^m$ ; таким образом, задача со штрафом состоит в минимизации  $F(v, t, \varepsilon)$  на  $R^n \times R_+^m$ .

Преимущество этого метода по сравнению с ранее использованным состоит в том, что за счет введения вектора  $t$  сохраняется порядок дифференцирования  $J$  и  $G_j$  (условие положительности  $t_j$  не вносит дополнительных затруднений в приложениях).

Результаты разд. 3.3 без труда переносятся на случай функционала  $E(v, \varepsilon)$  (см., например, книгу Сеа [2]).

Приложения изложенных здесь методов к модельной задаче упругопластического кручения (постановка которой была дана в разд. 1.2 гл. 1) будут приведены в разд. 8.2.2 гл. 3.  $\blacksquare$

### 3.4. Метод центров с переменным параметром усечений

#### Общие замечания

Для задачи 3.1, рассматриваемой на протяжении всей этой главы, введем множество

$$(3.25) \quad K(\lambda) = \{v \mid v \in K, J(v) \leq \lambda\},$$

которое будет замкнутым, выпуклым и непустым при условии  
 $\lambda \geqslant J(u) \quad (K(J(u)) = \{u\})$ .

С формальной стороны идея состоит в построении алгоритма, определяющего

- (i) убывающую последовательность  $\lambda_n (\rightarrow J(u))$ ;
- (ii) сопоставляющего каждому  $\lambda_n$  «центр» множества  $K(\lambda_n)$  (в действительности  $\lambda_{n+1}$  определяется исходя из «центра»  $K(\lambda_n)$ ). ■

### «Центр выпуклого множества»

i

Понятие «центра выпуклого множества» не представляет собой однозначно определяемой характеристики этого множества, и можно ввести много определений, более или менее эквивалентных друг другу.

Здесь мы приведем два определения, которые представляются наиболее естественными и полезными для приложений.

Рассмотрим общий случай, когда  $\mathcal{L}$  — замкнутое выпуклое множество из  $\mathbb{R}^N$ , определяемое по формуле

$$(3.26) \quad \mathcal{L} = \{v \mid L_j(v) \geqslant 0, 0 \leqslant j \leqslant m\},$$

где для любого  $j$

$$(3.27) \quad L_j — \text{непрерывная вогнутая функция.}$$

Будем рассматривать в качестве «центра» множества  $\mathcal{L}$  либо точку  $\mathcal{L}$  (в действительности точку  $\dot{\mathcal{L}}$ ), в которой

$$(3.28) \quad \prod_{j=0}^m L_j(v) \text{ принимает максимальное значение,}$$

либо же точку  $\mathcal{L}$  (в действительности точку  $\dot{\mathcal{L}}$ ), в которой

$$(3.29) \quad \sum_{j=0}^m \frac{1}{L_j(v)} \text{ принимает минимальное значение. ■}$$

### Приложения определений (3.28), (3.29) к множеству $K(\lambda)$

Применим введенные выше определения для случая множества  $K(\lambda)$ , когда

$$L_0(v) = \lambda - J(v), \quad L_j(v) = G_j(v), \quad 1 \leqslant j \leqslant m;$$

для упрощения записи будем полагать

$$(3.30) \quad D(v, \lambda) = (\lambda - J(v)) \prod_{j=1}^m G_j(v),$$

$$(3.31) \quad F(v, \lambda) = \frac{1}{\lambda - J(v)} + \sum_{j=1}^m \frac{1}{G_j(v)}. ■$$

*Описание алгоритма.* Зададим элемент  $v_0 \in K$  и положим  
 $\lambda_1 = J(v_0)$ .

Определим теперь элемент  $v_1$ , совпадающий с «центром»  $K(\lambda_1)$ ,  
с использованием метода (3.26)<sup>1)</sup>, т. е.

$$(3.32) \quad D(v_1, \lambda_1) = \sup_{v \in K(\lambda_1)} D(v, \lambda_1).^2)$$

Определим далее элемент (см. ниже замечание 3.7)  $w_1 \in K(\lambda_1)$ ,  
такой, что

$$(3.33) \quad J(w_1) \leqslant J(v_1),$$

после чего находим  $\lambda_2$  по формуле

$$(3.34) \quad \lambda_2 = \lambda_1 - \rho_1 (\lambda_1 - J(w_1)) \quad 0 < \rho_1 < 1.$$

Предполагая, что  $v_{n-1}$  и  $\lambda_n$  известны, строим  $v_n$  из условия

$$(3.35) \quad D(v_n, \lambda_n) = \sup_{v \in K(\lambda_n)} D(v, \lambda_n).$$

Определяем элемент  $w_n \in K(\lambda_n)$ , такой, что

$$(3.36) \quad J(w_n) \leqslant J(v_n),$$

и полагаем

$$(3.37) \quad \lambda_{n+1} = \lambda_n - \rho_n [\lambda_n - J(w_n)],$$

где

$$(3.38) \quad 0 < \delta \leqslant \rho_n \leqslant 1.$$

Заметим, что

$$(3.39) \quad v_n \in \overline{K(\lambda_n)}.$$

Имеет место<sup>3)</sup>

**Теорема 3.3.** Предположим, что выполнены условия (3.2), (3.3),  
(3.4). Тогда алгоритм метода центров с переменным параметром  
усечений, определяемый формулами (3.35), (3.36), (3.37), сходится  
в следующем смысле: если  $u$  — решение задачи (3.1), то

$$(3.40) \quad \lambda_n \rightarrow J(u),$$

$$(3.41) \quad v_n \rightarrow u.$$

<sup>1)</sup> Если используется определение (3.29), элемент  $v_1$  (отличающийся от введенного выше) определяется из условия

$$F(v_1, \lambda_1) = \inf_{v \in K(\lambda_1)} F(v, \lambda_1).$$

<sup>2)</sup> При использовании определения (3.29) вместо (3.28) алгоритм будет аналогичным.

<sup>3)</sup> При использовании определения (3.29) утверждения и доказательство теоремы аналогичны.

*Доказательство.* По построению алгоритма последовательности  $\lambda_n$  и  $J(v_n)$  убывающие; в силу (3.37) и (3.36) имеем

$$\lambda_n - \lambda_{n+1} = \rho_n [\lambda_n - J(w_n)] \geq \rho_n [\lambda_n - J(v_n)],$$

откуда

$$\lambda_n - J(v_n) \leq \frac{1}{\delta} (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$(3.42) \quad \lim \lambda_n = \lim J(v_n) = \mu \geq J(u).$$

Докажем, что

$$(3.43) \quad \mu = J(u)$$

(отсюда и будет вытекать утверждение теоремы, так как из строгой выпуклости функции  $J$  и из того, что последовательность  $v_n$  — минимизирующая, будем иметь (3.41)).

Предположим, что  $\mu > J(u)$ . Так как  $\overline{K(\mu)} \neq \emptyset$ , то существует элемент  $v_0$ , такой, что

$$D(v_0, \mu) > 0.$$

Из неравенства  $\lambda_n \geq \mu$  следует  $D(v_0, \lambda_n) \geq D(v_0, \mu)$ , и из определения  $v_n$  имеем

$$D(v_n, \lambda_n) \geq D(v_0, \lambda_n);$$

следовательно,

$$(3.44) \quad D(v_n, \lambda_n) \geq D(v_0, \mu) > 0.$$

С другой стороны,

$$D(v_n, \lambda_n) = (\lambda_n - J(v_n)) \prod_{i=1}^m G_i(v_n) \leq C(\lambda_n - J(v_n)) \rightarrow 0,$$

что противоречит неравенству (3.44). ■

*Замечание 3.7.* (О выборе  $w_n$ .)

1) Для начала можно полагать  $w_n = v_n$ :

если  $\rho_n = 1$ , то мы имеем метод центров (Хаарда [1]),

если  $\rho_n < 1$ , то метод можно интерпретировать как метод нижней релаксации.

2) Сходимость метода заметно ускоряется, если  $w_n$  выбирать из условия

$$J(w_n) < J(v_n).$$

В приложениях  $w_n \in K(\lambda_n)$  можно разыскивать либо на полу-прямой, исходящей из точки  $v_n$  в направлении  $-J'(v_n)$ , либо на сегменте  $[v_{n-1}, v_n]$ .

В таком варианте метод интерпретируется как метод верхней релаксации. ■

## 4. Методы двойственности

### 4.1. Общие замечания

В этом разделе мы вернемся к определениям, введенным в гл. I, разд. 3.4 и 3.5, и на основе этих определений построим алгоритмы, которые на протяжении оставшейся части книги будут для нас основными.

Рассмотрим некоторое гильбертово пространство  $V$ , которое в численных приложениях будет всегда конечномерным:  $V = \mathbb{R}^N$  и функционал

$$(4.1) \quad J_0(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v),$$

где  $a(u, v) = a(v, u)$   $\forall u, v \in V$  — билинейная непрерывная на  $V$  форма, удовлетворяющая условию

$$(4.2) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in V$$

( $\|v\|$  — норма элемента  $v$  в пространстве  $V$ ); в определении (4.1) форма  $v \rightarrow (f, v)$  линейна и непрерывна на  $V$ .

Кроме того, зададим

(4.3)  $M$  — выпуклое замкнутое множество в  $V$ ,

(4.4)  $L$  — гильбертово пространство,  $\Phi$  — функция из  $V \rightarrow L$  или из  $M \rightarrow L$ , линейная или нелинейная,

(4.5)  $\Lambda$  — выпуклое замкнутое множество в пространстве  $L$ .

Обозначим через  $(, )_L$  — скалярное произведение в  $L$  и предположим, что для любой функции  $q \in L$  выполнено условие:

(4.6)  $v \rightarrow (q, \Phi(v))_L$  — выпукла и слабо полуунпрерывна снизу на  $V$ .

И, наконец, рассмотрим задачу

$$(4.7) \quad \inf_{v \in M} [J_0(v) + \sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v))_L]. \quad \blacksquare$$

*Замечание 4.1.* Таким образом, мы с самого начала исследуемую задачу ставим в той форме, в какой она получается в методе двойственности. Ниже, в разд. 4.2, мы увидим, каким образом практические важные задачи приводятся к виду (4.7).

*Замечание 4.2. Функция*

$$v \rightarrow \sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v))_L$$

выпукла и полуунпрерывна снизу в слабой топологии на  $V$ ; следовательно, это свойство имеет место и для функции  $J$ , заданной по формуле

$$(4.8) \quad J(v) = J_0(v) + \sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v))_L. \quad \blacksquare$$

## 4.2. Примеры

*Пример 4.1.* Используя обозначения (1.18) гл. 1, положим

$$V = H_0^1(\Omega), \quad M = V,$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx, \quad (f, v) = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad f \in L^2(\Omega),$$

$$L = (L^2(\Omega))^n, \quad \Phi v = \operatorname{grad} v, \quad \Phi \in \mathcal{L}(V; L),$$

$$\Lambda = \{q \mid q \in L, |q(x)| \leq g \text{ п. в. в } \Omega\}.$$

Имеем (что уже было в гл. 1, разд. 3.4):

$$\sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v)) = g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| \, dx.$$

Таким образом, задача (4.7) представляет собой рассмотренную в гл. 1, разд. 1.4 задачу о течении, с интересующих нас сейчас позиций данная задача была уже исследована в гл. 1, разд. 3.4. ■

*Пример 4.2.* Выберем  $V, M, a, (f, v)$ , как и в примере 4.1:

$$L = L^2(\Omega), \quad \Lambda_1 = [q \mid q \in L, q \geq 0 \text{ п. в.}]$$

и определим отображение  $\Phi_1: V \rightarrow L$  по формуле

$$\Phi_1(v) = |\operatorname{grad} v| - 1.$$

Функция  $\Phi_1$  удовлетворяет условию Липшица на  $V$ .

Таким образом, мы находимся в ситуации разд. 4.1; имеем

$$\sup_{q \in \Lambda_1} (q, \Phi_1(v)) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\operatorname{grad} v| \leq 1 \text{ всюду} \\ +\infty & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, в данном примере задача (4.7) представляет собой задачу кручения упруго-пластического стержня, рассмотренную в гл. 1, разд. 1.2.

Заметим, что функция  $\Phi_1$  недифференцируема, и это затруднение (с точки зрения численного анализа<sup>1)</sup>) приводит к необходимости введения функции  $\Phi_2: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$  и оператора  $\Lambda_2$  по формулам

$$\Phi_2(v) = |\operatorname{grad} v|^2 - 1,$$

$$\Lambda_2 = L_+^\infty(\Omega) = [q \mid q \in L^\infty(\Omega), q \geq 0 \text{ п. в.}];$$

легко видеть, что

$$\sup_{q \in \Lambda_2} \int_{\Omega} q \Phi_2(v) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } |\operatorname{grad} v| \leq 1 \text{ всюду,} \\ +\infty & \text{в противоположном случае,} \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Легко преодолимое; см. гл. 5, разд. 8

однако помимо прочих трудностей следует отметить, что функцию  $\Phi_2$  в бесконечномерном случае нельзя исследовать в рамках гильбертова пространства<sup>1)</sup>, так как  $\Phi_2(v) \in L^1(\Omega)$ .

Заметим, что  $\Phi_2$  бесконечно дифференцируема по Фреше (и, следовательно, локально удовлетворяет условию Липшица) на  $H_0^1(\Omega)$ .

### 4.3. Первый алгоритм разыскания седловой точки

Введем функцию Лагранжа

$$(4.9) \quad \mathcal{L}(v, q) = J_0(v) + (q, \Phi(v))_L.$$

Мы примем следующие предположения:

(4.10) существует седловая точка функции  $\mathcal{L}(v, q)$  на  $M \times \Lambda$ , т. е. точка  $\{u, p\} \in M \times \Lambda$ , такая, что

$$\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, p) \leq \mathcal{L}(v, p), \quad \forall v \in M, \quad \forall q \in \Lambda;$$

(4.11) функция  $\Phi: M \rightarrow \Lambda$  удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует константа  $C_1$ , такая, что

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_L \leq C_1 \|u - v\| \quad \forall u, v \in M.$$

В приложениях полезен следующий вариант предположения (4.11):

$\forall q \in \Lambda$  решение задачи  $\inf_{v \in M} \mathcal{L}(v, q)$  ограничено

(4.11)' независимо от  $q$ , функция  $\Phi$  на  $V$  локально удовлетворяет условию Липшица (на любом ограниченном множестве в пространстве  $V$ ).

При этих ограничениях определим следующий алгоритм<sup>2)</sup>.

Начиная с точки  $p^0$ , вычисляем  $u^0$ , далее вычисляем  $p^1$  и т. д.; общее правило следующее:

(4.12) зная  $p^n (\in \Lambda)$ , определяем  $u^n$  как элемент  $M$ , минимизирующий  $J_0(v) + (p^n, \Phi(v))_L$

(этим способом элемент  $u^0$  определяется единственным образом — см. ниже замечание 4.3); далее строим

$$(4.13) \quad p^{n+1} = P_\Lambda(p^n + \rho_n \Phi(u^n)),$$

<sup>1)</sup> К этому мы вернемся ниже, в гл. 3.

<sup>2)</sup> Речь идет об алгоритме типа алгоритма Удзавы.

где

(4.14)  $P_\Lambda$  — оператор проектирования  $L \rightarrow \Lambda$ ,

(4.15)  $\rho_n > 0$ , параметр, который необходимо соответствующим образом подбирать (см. ниже). ■

*Замечание 4.3.* Функция  $v \rightarrow J_0(v) + (p^n, \Phi(v))_L$  строго выпукла и равна „бесконечности“ на „бесконечности“; в самом деле, если в (4.11) зафиксировать и произвольным образом в  $M$ , то из этого условия будем иметь  $\|\Phi(v)\|_L \leq C(\|v\| + 1)$  и, следовательно,

$$J_0(v) + (p^n, \Phi(v))_L \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - C(\|v\| + 1)$$

(буквой  $C$  мы обозначаем различные константы). ■

*Замечание 4.4.* (Обоснование алгоритма.) Если  $\{u, p\}$  — седловая точка, то

(4.16)  $J_0(u) + (p, \Phi(u))_L \leq J_0(v) + (p, \Phi(v))_L \quad \forall v \in M$ ,

откуда следует выполнение условия (4.12) и неравенство

(4.17)  $(q - p, \Phi(u)) \leq 0 \quad \forall q \in \Lambda, \quad p \in \Lambda$ ,

эквивалентно уравнению

(4.18)  $p = P_\Lambda(p + \rho\Phi(u)) \quad \forall \rho > 0$ ,

на основании которого и строится алгоритм (4.13). ■

*Замечание 4.5.* На самом деле алгоритм определен не полностью, так как в (4.15) содержится выбор алгоритма построения приближения  $u^n$ . В разд. 4.4 мы увидим вариант конкретизации этого выбора. ■

### Сходимость алгоритма

Мы сейчас докажем теорему:

**Теорема 4.1.** Предположим, что выполнены условия (4.3), ..., (4.6) и (4.10), (4.11) (или (4.11)'). Тогда алгоритм, определяемый формулами (4.12), (4.13), сходится в следующем смысле:

(4.19)  $u^n \rightarrow u$  сильно в  $V$ ,

где  $u$  — решение задачи (4.7),

(4.20)  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1$ ,  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  выбраны надлежащим образом<sup>1</sup>).

<sup>1</sup>) Оценки для  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  будут получены в процессе доказательства.

*Доказательство.* Свойства (4.12), (4.16) эквивалентны следующим:

$$(4.21) \quad (J'_0(u^n), v - u^n) + (p^n, \Phi(v) - \Phi(u^n))_L \geq 0 \quad \forall v \in M,$$

$$(4.22) \quad (J'_0(u), v - u) + (p, \Phi(v) - \Phi(u))_L \geq 0 \quad \forall v \in M;$$

выбирая  $v = u$  ( $v = u^n$ ) в (4.21) (в (4.22)), найдем

$$(4.23) \quad a(u^n - u, u^n - u) + (p^n - p, \Phi(u^n) - \Phi(u))_L \leq 0.$$

Положим

$$(4.24) \quad p^n - p = r^n.$$

Из (4.13), (4.18) и того обстоятельства, что  $P_\Lambda$  — оператор сжатия, найдем

$$(4.25) \quad \|r^{n+1}\|_L^2 \leq \|r^n + \rho_n(\Phi(u^n) - \Phi(u))\|_L^2 = \|r^n\|_L^2 + \\ + 2\rho_n(r^n, \Phi(u^n) - \Phi(u))_L + \rho_n^2 \|\Phi(u^n) - \Phi(u)\|_L^2.$$

Используя (4.23) и (4.11) (или (4.11)'), из (4.25) получим (4.26)

$$(4.26) \quad \|r^{n+1}\|_L^2 \leq \|r^n\|_L^2 - 2\rho_n a(u^n - u, u^n - u) + C_1^2 \rho_n^2 \|u^n - u\|^2 \leq \\ \leq \|r^n\|_L^2 - (2\alpha\rho_n - C_1^2 \rho_n^2) \|u^n - u\|^2.$$

Выберем  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  таким образом, чтобы из (4.20) следовало

$$(4.27) \quad 2\alpha\rho_n - C_1^2 \rho_n^2 \geq \beta > 0.$$

Тогда (4.26) дает

$$(4.28) \quad \|r^{n+1}\|_L^2 + \beta \|u^n - u\|^2 \leq \|r^n\|_L^2.$$

Из (4.28) вытекает, что последовательность  $n \rightarrow \|r^n\|_L^2$  убывающая, следовательно, она сходится к некоторому пределу, так что

$$\beta \|u^n - u\|^2 \rightarrow 0, \text{ откуда и следует (4.19).}$$

*Замечание 4.6.* Общие результаты о существовании седловой точки можно найти в книге Экланда и Темама [1]. ■

#### 4.4. Второй алгоритм разыскания седловой точки

Дополним сейчас замечание 4.5, предполагая, что

$$(4.29) \quad \Phi \in \mathcal{L}(V; L), \\ M = V.$$

Тогда на этапе (4.12)  $u^n$  будет определяться из уравнения

$$J'_0(u^n) + \Phi^* p^n = 0,$$

или, вводя оператор  $A \in \mathcal{L}(V, V')$  из условия  $a(u, v) = (Au, v)$ , из уравнения

$$(4.30) \quad Au^n + \Phi^* p^n - f = 0,$$

и если теперь ввести итерационный алгоритм для решения уравнения (4.30), то мы естественным образом придем к следующему алгоритму: зная  $u^n$  и  $p^n$ , определяем  $u^{n+1}$  по формуле<sup>1</sup>

$$(4.31) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_1 S^{-1} (Au^n + \Phi^* p^n - f),$$

где  $S$  — тождественный оператор, если  $V' = V$  — конечномерному пространству (или  $S$  — произвольной симметричной положительно-определенной матрице); в бесконечномерном случае  $S$  — оператору двойственности между  $V$  и  $V'$ <sup>2</sup>); далее определяем  $p^{n+1}$  по формуле

$$(4.32) \quad p^{n+1} = P_\Delta (p^n + \rho_2 \Phi u^{n+1}),$$

в (4.31) и (4.32)  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — параметры, которые необходимо выбирать надлежащим образом. Имеет место

**Теорема 4.2.** Предположим, что выполнены условия (4.3), ..., (4.6), (4.29). Тогда можно найти такие значения параметров  $\rho_1$  и  $\rho_2$ <sup>3</sup>, чтобы алгоритм (4.31), (4.32) был сходящимся в следующем смысле:

$$(4.33) \quad u^n \rightarrow u \text{ сильно в } V,$$

где  $u$  — решение задачи (4.7).

**Доказательство.** Пусть  $\{u, p\}$  — седловая точка лагранжиана  $\mathcal{L}(v, q)$ , тогда имеем:

$$(4.34) \quad u = u - \rho_1 S^{-1} (Au + \Phi^* p - f),$$

$$(4.35) \quad p = P_\Delta (p + \rho_2 \Phi u).$$

Полагая  $w^n = u^n - u$  и используя обозначение (4.24), получаем:

$$(4.36) \quad w^{n+1} = w^n - \rho_1 S^{-1} (Aw^n + \Phi^* r^n),$$

$$(4.37) \quad \|r^{n+1}\|_L^2 \leq \|r^n\|_L^2 + 2\rho_2 (r^n, \Phi w^{n+1})_L + \rho_2 \|\Phi w^{n+1}\|_L^2.$$

Из (4.36) находим, что

$$Sw^{n+1} = Sw^n - \rho_1 (Aw^n + \Phi^* r^n).$$

<sup>1)</sup> Речь идет здесь об алгоритме типа Эрроу — Гурвица.

<sup>2)</sup> Если известно, что решение задачи  $u$  принадлежит рефлексивному пространству  $W \subset V$ , то в качестве  $S$  можно взять изоморфизм  $W \rightarrow W'$ .

<sup>3)</sup> Оценки для  $\rho_1$  и  $\rho_2$  вытекают из результатов, получаемых при доказательстве теоремы.

Умножая скалярно в смысле двойственности между  $V'$  и  $V$  на элемент  $w^{n+1}$ , находим

$$\|w^{n+1}\|^2 = ((S - \rho_1 A) w^n, w^{n+1}) - \rho_1 (\Phi^* r^n, w^{n+1}).$$

Так как  $A^* = A$ ,  $(Av, v) \geq \alpha \|v\|^2$ , то

$$\|(S - \rho_1 A)v\| \leq \beta \|v\|, \quad 0 < \beta < 1, \quad 0 < \rho_1 \leq \rho_0.$$

Таким образом,

$$(4.38) \quad \|w^{n+1}\|^2 \leq \beta \|w^n\| \|w^{n+1}\| - \rho_1 (\Phi^* r^n, w^{n+1}).$$

Будем разыскивать  $\rho_1, \rho_2$  в виде

$$\rho_1 = \rho, \quad \rho_2 = \rho C.$$

Используя оценку (4.38) в неравенстве (4.37), найдем

$$\begin{aligned} \|r^{n+1}\|_L^2 &\leq \|r^n\|_L^2 + 2C(\beta \|w^n\| \|w^{n+1}\| - \|w^{n+1}\|^2) + \\ &+ \rho^2 C^2 \|\Phi\|^2 \|w^{n+1}\|^2 \leq \|r^n\|_L^2 + \\ &+ 2C\beta (\|w^n\| \|w^{n+1}\| - \|w^{n+1}\|^2) + \\ &+ [\rho^2 C^2 \|\Phi\|^2 - 2C(1-\beta)] \|w^{n+1}\|^2 \leq \|r^n\|_L^2 + \\ &+ C\beta (\|w^n\|^2 - \|w^{n+1}\|^2) + \\ &+ [\rho^2 C^2 \|\Phi\|^2 - 2C(1-\beta)] \|w^{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$2C(1-\beta) - \rho^2 C^2 \|\Phi\|^2 \geq \gamma > 0 \quad 0 < \rho \leq \rho_0^*,$$

так что при условии  $0 < \rho \leq \min(\rho_0, \rho_0^*)$  будем иметь

$$(4.39) \quad \|r^n\|_L^2 + C\beta \|w^n\|^2 - (\|r^{n+1}\|^2 + C\beta \|w^{n+1}\|^2) \geq \gamma \|w^{n+1}\|^2.$$

Следовательно,

$\|r^n\|_L^2 + C\beta \|w^n\|^2$  убывает с ростом  $n$  и, следовательно, сходится, так что левая часть неравенства (4.39)  $\rightarrow 0$ , таким образом,  $\|w^{n+1}\| \rightarrow 0$ . ■

**Замечание 4.7.** Поведение последовательности  $r^n$  зависит от свойств рассматриваемой задачи. Можно доказать, что во всех примерах, решение которых было найдено при помощи рассматриваемых методов, последовательность  $r^n$  ограничена и любая точка сгущения этой последовательности такова, что  $(u, p)$  представляет собой седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}(v, q)$  на  $M \times \Lambda$ . ■

**Замечание 4.8.** Первый метод дает оценку снизу нижней грани

$$\inf_{v \in M} [J_0(v) + \sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v))_L].$$

В самом деле, по определению  $u^n$ ,

$$\begin{aligned} J(u^n) + (p^n, \Phi(u^n))_L &\leq J(u) + (p^n, \Phi(u))_L \leq \\ &\leq J(u) + \sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(u))_L = \inf_{v \in M} (J_0(v) + \sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v))_L). \quad ■ \end{aligned}$$

**Замечание 4.9.** Изложенные выше методы применимы для минимизации недифференцируемых функционалов, в частности, они применимы ко всем задачам этого сорта, изученным в настоящей книге, в том числе к задачам примера 4.1, которая записывается в виде

$$(4.40) \quad \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx + g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx - (f, v) \right]$$

и которую мы будем изучать в гл. 5. Сразу же заметим, что при использовании дискретизации (4.40) возникают функционалы типа рассмотренных в контрпримере 1.1 (естественно, более сложные). ■

**Замечание 4.10.** Решение задачи

$$\min J(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (f, v),$$

где  $A$  — симметричная положительно-определенная матрица размерности  $N \times N$ , при ограничении

$$Bv = b,$$

где  $B$  — некоторая матрица размерности  $M \times N$  ранга  $M \leq N$ , после введения переменных Лагранжа приводится к решению системы уравнений

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ b \end{bmatrix},$$

имеющей форму  $\mathcal{A}z = d$ , где  $\mathcal{A}$  — симметричная, но не обязательно положительно определенная матрица, следовательно, к решению этой задачи метод сопряженных градиентов не применим. Заметим, однако, что система

$$\mathcal{A}^* \mathcal{A} z = \mathcal{A}^* d$$

эквивалентна предшествующей, а ее матрица  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  симметрична и положительно определена. Для ее решения, таким образом, можно применять метод сопряженных градиентов, который в случае конечного числа измерений приводит к решению за конечное число итераций. Как известно из численного анализа, использование матрицы  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  нарушает обусловленность системы, что может приводить к такому накоплению ошибок округления, которое может препятствовать сходимости алгоритма. Именно это обстоятельство привело некоторых исследователей (Бекман [1], Люэнбергер [2]) к необходимости обобщения алгоритма сопряженных градиентов непосредственно на систему  $\mathcal{A}z = d$ , где  $\mathcal{A}$  симметрична, но не обязательно положительно определена. ■

## 5. Применение методов релаксации и двойственности для численного исследования одной модельной вариационной задачи

### 5.1. Общие замечания

В настоящем разделе мы примем результаты разд. 1 и 4, а также гл. 1, разд. 5 к решению одной вариационной задачи, возникающей в теории смазки<sup>1)</sup>; вариант этой задачи был рассмотрен в гл. 1 (пример 3.6). Другими методами эта задача была решена в работах Фушарди, Моско, Скарпини и Скиаффино [1], и Мардзулли [1]<sup>2)</sup>.

### 5.2. Непрерывная задача

#### 5.2.1. Постановка непрерывной задачи

Пусть

$$\Omega = ]0, 1[ \times ]0, b[, \Gamma_1 = ]0, 1[ \times \{0\}, \Gamma_2 = ]0, 1[ \times \{b\}$$

$V = \{v | v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_1} = 0, v|_{\Gamma_2} = 0, v(0, x_2) = v(1, x_2) \text{ п. в. на } 0, v[$  — гильбертово пространство со следующим скалярным произведением и нормой:

$$(5.1) \quad (u, v)_V = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx,$$

$$(5.2) \quad \|u\|_V = \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Для заданного элемента  $f \in L^2(\Omega)$  (что вполне достаточно для тех приложений, которые мы собираемся рассмотреть) определим строго выпуклый и непрерывный на  $V$  функционал по формуле

$$(5.3) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx$$

и рассмотрим задачу  $(P)$ :

$$(P) \begin{cases} \min_{v \in K} J(v), \\ K = [v | v \in V, v \geqslant 0 \text{ почти всюду в } \Omega]. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Физическую интерпретацию этой задачи и соответствующую библиографию найти в работе Мардзулли [1].

<sup>2)</sup> Применение метода верхней релаксации с проекцией к решению одной задачи теории смазки типа исследуемой в настоящем разд. 5 дано в работе Крайера [2]; в работе Крайера область  $\Omega$  предполагается одномерной.

Так как  $K$  замкнуто и выпукло в  $V$  и  $\lim_{\|v\|_V \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$ , то задача  $(P)$  имеет оптимальное решение, и притом только одно; будем обозначать это решение через  $u$ . ■

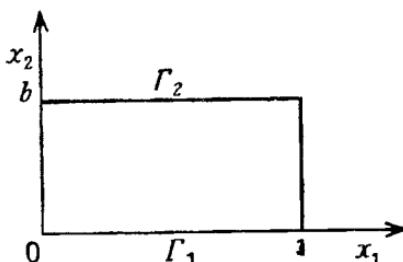


Рис. 5.1.

### 5.2.2. Результаты о регулярности решения

Если  $f \in L^p(\Omega)$ , то, как установлено в работе Брезиса и Стампакки [2],  
 $u \in V \cap W^{2,p}(\Omega)$ <sup>1)</sup>. ■

### 5.2.3. Условия, характеризующие решения

Из результатов разд. 2 гл. 1 следует, что оптимальное решение характеризуется неравенством

$$(5.4) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K, u \in K.$$

Учитывая отмеченную в 5.2.2 регулярность решения, заключаем, что в (5.4) можно произвести интегрирование по частям, в результате для рассматриваемого случая, когда  $K$  — конус с вершиной в нуле, получим следующую совокупность условий, характеризующих решение:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & u \in V, \\ & -\Delta u - f \geq 0 \text{ в } \Omega, \quad \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V, \\ & u \geq 0 \text{ п. в.,} \\ & (-\Delta u - f) u = 0 \text{ п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Совокупность условий (5.5) для нас фундаментальна, так как здесь элемент  $\lambda = -\Delta u - f$  (в силу 5.2.2  $\lambda \in L^2(\Omega)$ ) с необходимостью появляется в роли множителя Лагранжа для задачи  $(P)$ ; к этому моменту мы вернемся ниже, в разд. 5.6. ■

1) Здесь по определению для  $p \geq 1$

$$W^{2,p}(\Omega) = \left[ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega), i, j = 1, n \right].$$

### 5.3. Приближенная задача

*Замечание 5.1.* Учитывая периодичность по  $x_1$  элементов  $V$ , удобно идентифицировать область  $\Omega$  и область  $\tilde{\Omega} = \gamma \times ]0, b[$ , где  $\gamma$  — круг радиуса  $1/2\pi$  (тор размерности 1), ориентированный обычным образом (впрочем, в этой области ставится физическая задача), тогда граница  $\tilde{\Gamma}$  области  $\tilde{\Omega}$  есть

$$\gamma \times \{0\} \cup \gamma \times \{b\},$$

откуда

$$V = \{v \mid v \in H^1(\tilde{\Omega}), v|_{\tilde{\Gamma}} = 0\}.$$

следовательно,  $(P)$  — задача Дирихле (с ограничениями) на цилиндрическом многообразии. ■

#### 5.3.1. Внешняя аппроксимация задачи $(P)$

Построения разд. 5.1 гл. 1 легко переносятся на задачу  $(P)$ ; учитывая 5.1, задавая положительные целые числа  $N_1, N_2$ , которые мы будем устремлять к бесконечности, и параметры  $h_1 = 1/N_1$ ,  $h_2 = b/N_2$ ,  $h = (h_1, h_2)$ , положим по определению:

$$(5.6) \quad R_h = \{M \mid M \in \gamma \times R, M = (m_1 h_1, m_2 h_2), 0 \leq m_1 \leq N_1 - 1, m_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждому узлу множества  $R_h$  поставим в соответствие „брюсь“ с центром  $M$ :

$$(5.7) \quad \tilde{\omega}_h^i(M) = \gamma_{m_1} \times ]\left(m_2 - \frac{1}{2}\right) h_2, \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) h_2[,$$

$$(5.8) \quad \tilde{\omega}_h^i(M) = \tilde{\omega}_h^i(M) \cup \tilde{\omega}_h^i\left(M \pm \frac{h_2}{2} e_2\right),$$

где  $\gamma_{m_1}$ , ( $0 \leq m_1 \leq N_1 - 1$ ) определяется по формуле

$$(5.9) \quad \gamma_0 = ]1 - h_1/2, 1] \cup [0, h_1/2[,$$

$$\gamma_{m_1} = \left] \left(m_1 - \frac{1}{2}\right) h_1, \left(m_1 + \frac{1}{2}\right) h_1 \right[ \text{ если } 1 \leq m_1 \leq N_1 - 1.$$

По аналогии с тем, что было сделано в разд. 5.1 гл. 1, полагаем далее

$$(5.10) \quad \tilde{\Omega}_h = \{M \mid M \in R_h, \tilde{\omega}_h^i(M) \subset \tilde{\Omega}\},$$

$$(5.11) \quad V_h = \{v_h \mid v_h = (v_M)_{M \in \tilde{\Omega}_h}, v_M \in R\},$$

а также вводим отображение  $q_h^{-1}$ :  $V_h \rightarrow L^2(\gamma \times \mathbb{R})$  по формуле:

$$(5.12) \quad q_h^{-1} v_h = \sum_{M \in \tilde{\Omega}_h} v_M \theta_h^M,$$

где (см. формулу (5.9) гл. 1)

(5.13)  $\theta_h^M$  — характеристическая функция множества  $\tilde{\omega}_h^0(M)$ .

Полагая, как и ранее,

$$(5.14) \quad \delta_i \varphi(x) = \frac{1}{h_i} \left[ \varphi\left(x + \frac{h_i}{2} e_i\right) - \varphi\left(x - \frac{h_i}{2} e_i\right) \right]^2,$$

„приближаем“  $J$  функцией  $J_h: V_h \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$(5.15) \quad J_h(v_h) = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h v_h|^2 dx - \int_{\tilde{\Omega}} f q_h v_h dx,$$

откуда имеем приближенную задачу

$$(5.16) \quad (P_h) \begin{cases} \min_{v_h \in K_h} J_h(v_h), \\ K_h = [v_h \mid v_h \in V_h, v_M \geq 0 \quad \forall M \in \tilde{\Omega}_h]. \end{cases}$$

Заметим, что  $q_h v_h \geq 0 \quad \forall v_h \in K_h$ . ■

### 5.3.2. О разрешимости задачи $(P_h)$

Нетрудно видеть, что функция

$$v_h \rightarrow \left( \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h v_h|^2 dx \right)^{1/2}$$

определяет норму на  $V_h$ , которую мы будем обозначать через  $\|v_h\|_h$ ; следовательно, функционал  $J_h$  — непрерывный строго выпуклый на  $V_h$  и удовлетворяет условию

$$\lim_{\|v_h\|_h \rightarrow +\infty} J_h(v_h) = +\infty,$$

и так как  $K_h$  замкнуто, то имеет место существование и единственность оптимального решения задачи  $(P_h)$ ; это решение будем обозначать через  $u_h$ . ■

### 5.3.3. Развёрнутая формулировка задачи $(P_h)$

Для численного решения задачи  $(P_h)$  формулы (5.15), (5.16) необходимо записать в развёрнутом виде, элементы множества  $M \in \tilde{\Omega}_h$  при этом удобно помечать двойными индексами ( $k, l$ ); имеем

1) Как и в разд. 5.2 гл. 1 с использованием  $q_h$  и  $\delta_i$ , введенных в (5.14), можно было бы определить отображение  $p_h: V_h \rightarrow (L^2(\gamma \times \mathbb{R}))^3$ , однако, учитывая элементарный характер рассматриваемого здесь выпуклого множества  $K$ , мы видим, что большой выгода от этого не получается.

2) В формуле (5.14) значение  $x \pm \frac{h_1}{2} e_1$  для  $i = 1$  определяется по модулю 1 с тем, чтобы оно лежало на подынтервале  $[0, 1]$ .

$M_{kl} = (kh_1, lh_2)$ , где  $0 \leq k \leq N_1 - 1$ ,  $1 \leq l \leq N_2 - 1$ . Тогда формулу (5.15) в явном виде можно записать следующим образом:

$$(5.17) \quad \begin{aligned} 2J_h(v_h) = & \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h^*} \left[ \left( \frac{v_{k+1l} - v_{kl}}{h_1} \right)^2 + \left( \frac{v_{k-1l} - v_{kl}}{h_1} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{v_{kl+1} - v_{kl}}{h_2} \right)^2 + \left( \frac{v_{kl-1} - v_{kl}}{h_2} \right)^2 \right] - 2h_1 h_2 \sum_{M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h} f_{kl} v_{kl}, \\ f_{kl} = & \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\tilde{\omega}_h^0(M_{kl})} f(x) dx^1, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Omega}_h^* = \tilde{\Omega}_h \cup (\tilde{\Gamma} \cap R_h)$ ; задачу (5.16) — в виде

$$(5.18) \quad \begin{aligned} \min_{v_h \in K_h} J_h(v_h), \\ K_h = [v_h | v_h \in V_h, v_{kl} \geq 0 \quad \forall M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h]. \blacksquare \end{aligned}$$

*Замечание 5.2.* В формуле (5.17) при  $M_{kl} \notin \tilde{\Omega}_h$  необходимо полагать  $v_{kl} = 0$ , а для учета периодичности по  $x_1$ ,  $v_{-1l} = v_{N_1-1l}$ ,  $v_{N_1l} = v_{0l} \forall l$ . ■

#### 5.4. Сходимость последовательности приближенных решений при $h \rightarrow 0$

*Предварительные замечания.* Сходимость последовательности  $u_h$  (в действительности  $q_h u_h$ ) к решению задачи ( $P$ ) непосредственно вытекает из результатов разд. 5.2 гл. 1. Однако, учитывая то обстоятельство, что рассматриваемая в настоящем разделе задача представляет собой первый пример численного решения вариационного неравенства, что впервые встречается в этой книге, мы сознательно детализируем различные этапы доказательства. ■

Имеет место

**Теорема 5.1.** Если  $h \rightarrow 0$ , то

$$(5.19) \quad \{q_h u_h, \delta_1 q_h u_h, \delta_2 q_h u_h\} \rightarrow \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} \text{ сильно в } (L^2(\tilde{\Omega}))^3,$$

$$(5.20) \quad J_h(u_h) \rightarrow J(u).$$

1) Если  $f$  непрерывна, будем полагать  $f_{kl} = f(M_{kl})$ .

*Доказательство.* Норма  $\|v_h\|_h$ , определенная в разд. 5.2.2, удовлетворяет дискретному аналогу неравенства Пуанкаре:

$$(5.21) \quad \|q_h v_h\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \alpha \left( \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h v_h|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$(\alpha > 0) \quad \forall h, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Этот результат можно найти в книгах Сеа [3], Лионса [3].

Так как  $0 \in K_h$ , то  $J_h(u_h) \leq J_h(0) = 0$ , откуда, учитывая неравенство (5.21), имеем

$$(5.22) \quad \|q_h u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C \quad \forall h,$$

$$\|\delta_i q_h u_h\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq C \quad \forall h \quad (i = 1, 2).$$

Действуя таким же образом, как и при доказательстве теоремы 5.1 разд. 5.1 гл. 1, на основании (5.22) можно доказать, что для некоторой подпоследовательности  $u_h$ , по-прежнему обозначаемой через  $u_h$ , имеем

$$(5.23) \quad q_h u_h \rightharpoonup w \text{ слабо в } L^2(\tilde{\Omega}),$$

$$\delta_i q_h u_h \rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial x_i} \text{ слабо в } L^2(\tilde{\Omega}), \quad (i = 1, 2),$$

где

$$(5.24) \quad w \in V.$$

Кроме того,  $q_h u_h \geq 0$  почти всюду, и так как множество  $[v \mid v \in L^2(\tilde{\Omega}), v \geq 0]$  выпукло и замкнуто в  $L^2(\tilde{\Omega})$ , следовательно, слабо замкнуто, то отсюда следует, что

$$(5.25) \quad w \geq 0 \text{ почти всюду} \Rightarrow w \in K.$$

Осталось доказать, что  $w = u$ ; для этого определим отображение  $r_h: V \rightarrow V_h$ :

$$(5.26) \quad (r_h v)_M = \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\tilde{\Omega}_h(M)} v(x) dx, \quad M \in \tilde{\Omega}_h,$$

если  $v \geq 0$  всюду, то, очевидно,  $(r_h v)_M \geq 0 \quad \forall M \in \tilde{\Omega}_h \Rightarrow r_h v \in K_h$ , откуда

$$(5.27) \quad v \in K \Rightarrow r_h v \in K_h.$$

Докажем теперь, что для  $\forall v \in V$  имеем сходимость:

$$(5.28) \quad q_h r_h v \rightharpoonup v \text{ сильно в } L^2(\tilde{\Omega}),$$

$$\delta_i q_h r_h v \rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ сильно в } L^2(\tilde{\Omega}), \quad (i = 1, 2),$$

отсюда будет следовать, что

$$(5.29) \quad J_h(r_h v) \rightarrow J(v).$$

Так как  $u_h$  — оптимальное решение на  $K_h$ , то из условия (5.27) имеем

$$(5.30) \quad J_h(u_h) \leq J_h(r_h v) \quad \forall v \in K.$$

Переходя здесь к пределу с учетом слабой полунепрерывности снизу, найдем

$$(5.31) \quad J(w) \leq \liminf J_h(u_h) \leq J(v) \quad \forall v \in K,$$

и из (5.24), (5.25), (5.27), (5.31) следует, что  $w = u$ .

Заметим, что из единственности  $u$  вытекает сходимость к  $u$  всей последовательности  $q_h u_h$ .

Для доказательства (5.20) достаточно в (5.30), (5.31) положить  $v = u$ ; из полученных оценок будет следовать сильная сходимость; в самом деле, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h u_h|^2 dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h r_h u|^2 dx &= 2J_h(u_h) - \\ &- 2J_h(r_h u) + 2 \left[ \int_{\tilde{\Omega}} f q_h u_h dx - \int_{\tilde{\Omega}} f q_h r_h u dx \right], \end{aligned}$$

на основании (5.20), (5.21), (5.28), (5.29), (5.31) имеем предельные равенства

$$(5.32) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h r_h u|^2 dx \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} |\operatorname{grad} u|^2 dx,$$

$$(5.33) \quad J_h(u_h) \rightarrow J(u),$$

$$(5.34) \quad J_h(r_h u) \rightarrow J(u),$$

$$(5.35) \quad \int_{\tilde{\Omega}} f q_h u_h dx \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} f u dx,$$

$$(5.36) \quad \int_{\tilde{\Omega}} f q_h r_h u dx \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} f u dx,$$

из которых следует, что

$$(5.37) \quad \sum_{i=1}^2 \int_{\tilde{\Omega}} |\delta_i q_h u_h|^2 dx \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} |\operatorname{grad} u|^2 dx,$$

что и доказывает сходимость нормы в  $(L^2(\tilde{\Omega}))^3$ , следовательно, в силу (5.23), сильную сходимость. ■

## 5.5. Решение приближенной задачи методом поточечной верхней релаксации с ограничениями

Используем алгоритм (1.41), (1.42) разд. 1.4, который с учетом (5.17), (5.18) принимает форму

$$(5.38) \quad \begin{aligned} u_{kl}^n &\geq 0 \quad \forall M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h, \\ u_{kl}^{n+1/2} &= (1 - \omega) u_{kl}^n + \frac{\omega h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} \times \\ &\times \left[ f_{kl} + \frac{1}{h_1^2} (u_{k+1,l}^n - u_{k-1,l}^n) + \frac{1}{h_2^2} (u_{kl+1}^n + u_{kl-1}^n) \right], \\ u_{kl}^{n+1} &= \max(0, u_{kl}^{n+1/2}), \quad M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h, \end{aligned}$$

если проводить итерации по возрастанию индексов  $k, l$ .

Для алгоритма (5.38) замечание 5.2 остается в силе.

Применяя теорему 1.3 разд. 1.4 к задаче  $(P_h)$ , получаем

**Предложение 5.1.** Если  $0 < \omega < 2$ , то последовательность  $u_h^n$  сходится к  $u_h$ . ■

**Замечание 5.3.** Если  $u_h^0 = 0$ ,  $0 < \omega \leq 1$ , то из соотношений (5.38) немедленно вытекает, что последовательность  $(u_{kl}^n)_n$  — возрастающая  $\forall M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h$ ; следовательно, сходимость монотонная, и мы подходим к координатам  $u_{kl}$  вектора  $u_h$  снизу. ■

## 5.6. Решение методом двойственности

### 5.6.1. Постановка задачи

Задача  $(P)$  будет входить в класс задач, рассмотренных в разд. 4, если положить

$$\begin{aligned} J_0(v) &= J(v), \quad M = V, \quad \Phi(v) = v, \quad L = L^2(\Omega), \\ \Lambda &= L_-^2(\Omega) = \{q \mid q \in L^2(\Omega), q \leq 0 \text{ п. в.}\} \end{aligned}$$

В самом деле, с учетом введенных определений имеем

$$\sup_{q \in \Lambda} (q, \Phi(v))_L = \begin{cases} 0 & \text{при } v \in K, \\ +\infty & \text{при } v \notin K. \end{cases}$$

Использование только пространства  $L_+^2(\Omega)$  путем замены  $q$  на  $-\mu$  несколько проще; в этом случае имеем постановку задачи  $(P)$  в форме

$$(5.39) \quad \inf \left[ J(v) + \sup_{\mu \in L_+^2(\Omega)} (-\mu, v) \right].$$

Следовательно, мы вводим лагранжиан:

$$(5.40) \quad \mathcal{L}(v, \mu) = J(v) - (\mu, v).$$

Пусть  $u$  — решение задачи  $(P)$ , или, что то же, задачи (5.5). Положим

$$(5.41) \quad \lambda = -\Delta u - f.$$

Для доказательства того, что мы находимся в условиях теоремы 4.1, достаточно установить аналог условий (4.10); более точно, имеет место

**Теорема 5.2.** Пара  $\{u, \lambda\}$  (где  $\lambda$  определяется по формуле (5.41)) представляет собой единственную седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}(v, \mu)$  на множестве  $V \times L_+^2(\Omega)$ .

**Доказательство.** 1) На основании результатов разд. 5.2.2 и условий (5.5) заключаем, что  $\lambda \in L_+^2(\Omega)$  и  $\lambda u = 0$  почти всюду; с другой стороны,

$$u \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \mu u \, dx \geq 0 \quad \forall \mu \in L_+^2(\Omega),$$

откуда

$$(5.42) \quad \mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) (= J(u)) \quad \forall \mu \in L_+^2(\Omega).$$

2) Для фиксированного значения  $\lambda$  рассмотрим задачу оптимизации:

$$(5.43) \quad \min_{v \in V} \mathcal{L}(v, \lambda).$$

Единственное оптимальное решение  $u_\lambda$  задачи (5.43) характеризуется условиями

$$(5.44) \quad -\Delta u_\lambda = f + \lambda, \quad \int_{\Gamma} v \frac{\partial u_\lambda}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V$$

$$u_\lambda \in V,$$

из которых вытекает, что  $u_\lambda = u$ , следовательно,

$$(5.45) \quad \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \forall v \in V,$$

что в соответствии с (5.42) и доказывает, что  $\{u, \lambda\}$  — седловая точка.

Отметим, что

$$(5.46) \quad \int_{\Omega} (\mu - \lambda) u \, dx \geq 0 \quad \forall \mu \in L_+^2(\Omega).$$

3) Для доказательства единственности заметим, что всякая седловая точка  $(u^*, \lambda^*)$  лагранжиана  $\mathcal{L}$  на множестве  $V \times L_+^2(\Omega)$

удовлетворяет условию типа (5.41), на основании которого легко получаем совокупность соотношений, характеризующих решение

$$(5.47) \quad \begin{aligned} -\Delta u^* &= f + \lambda^* \text{ в } \Omega, \int_{\Gamma} v \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V, \\ u^* &\in V, \\ \int_{\Omega} (\mu - \lambda^*) u^* dx &\geq 0 \quad \forall \mu \in L_+^2(\Omega), \\ \lambda^* &\in L_+(\Omega). \end{aligned}$$

Положим теперь  $\mu = \lambda^*$  в (5.46),  $\mu = \lambda$  в третьем из соотношений (5.47); складывая получившиеся результаты, найдем

$$(5.48) \quad \int_{\Omega} (\lambda^* - \lambda) (u^* - u) dx \leq 0;$$

откуда

$$(5.49) \quad \lambda^* - \lambda = -\Delta(u^* - u),$$

следовательно, из (5.47), (5.48) получим

$$(5.50) \quad -\int_{\Omega} \Delta(u^* - u)(u^* - u) dx = \int_{\Omega} |\operatorname{grad}(u^* - u)|^2 dx \leq 0,$$

или в другом виде:  $\|u^* - u\|_V^2 \leq 0$ , откуда вытекает, что  $u^* = u$  и  $\lambda^* = \lambda$ . ■

**Замечание 5.4.** Аналогичный результат без труда можно было бы установить для приближенной задачи  $(P_h)$  с лагранжианом  $\mathcal{L}_h$

$$(5.51) \quad \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = J_h(v_h) - h_1 h_2 \sum_{M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h} \mu_{kl} v_{kl},$$

где

$$\mu_h = \{\mu_{kl}\}_{M_{kl} \in \tilde{\Omega}_h}. \quad ■$$

### 5.6.2. Решение задачи $(P)$ методом двойственности

Алгоритм разд. 4.3, примененный к задаче  $(P)$ , принимает форму

$$(5.52) \quad \lambda^n \in L_+^2(\Omega) \text{ выбирается произвольно (например, равным нулю)}$$

$$(5.53) \quad \begin{aligned} -\Delta u^{n+1} &= f + \lambda^n \text{ в } \Omega, \int_{\Gamma} v \frac{\partial u^{n+1}}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V, \\ u^{n+1} &\in V, \end{aligned}$$

$$(5.54) \quad \lambda^{n+1} = (\lambda^n - \rho_n u^{n+1})^+ = \\ = \text{положительной части } \lambda^n - \rho_n u^{n+1}, \rho_n > 0.$$

Так как каноническое вложение  $V \rightarrow L^2(\Omega)$  непрерывно, то существует такая константа  $C > 0$ , что

$$(5.55) \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|, \quad \forall v \in V$$

(что дает константу Липшица функции  $\Phi$ ; см. разд. 4.3).

Из теоремы 4.1 вытекает, что

$$(5.56) \quad u^n \rightarrow u \text{ сильно в } V^1,$$

если только выполнено условие

$$(5.57) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < 2/C^2,$$

в котором константа  $C$  та же, что и в (5.55).

Для задачи  $(P)$  нетрудно доказать, что оптимальное значение константы  $C$  (т. е. наименьшее), которое мы будем обозначать через  $C_0$ , равно обратному значению корня квадратного из наименьшего собственного значения  $\lambda_0$ , соответствующего последовательности собственных функций оператора  $-\Delta$  в пространстве  $V$ , определяемых по формуле

$$(5.58) \quad \left\{ \cos 2\pi m x_1, \sin n\pi \frac{x_2}{b}, \sin 2\pi m x_1 \sin n\pi \frac{x_2}{b}; \quad m \geq 0, \quad n \geq 1 \right\};$$

соответствующий этой последовательности набор собственных чисел дается формулой

$$(5.59) \quad \left\{ \pi^2 \left[ 4m^2 + \frac{n^2}{b^2} \right]; \quad m \geq 0, \quad n \geq 1 \right\},$$

из которой вытекает, что  $\lambda_0 = \pi^2/b^2$ ,  $C_0 = b/\pi$ , следовательно, ограничение для  $\rho_n$  таково:

$$(5.60) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < 2\pi^2/b^2,$$

и эта формула уточняет (5.57). ■

### 5.6.3. Решение задачи $(P_h)$ методом двойственности

Аналог приведенного выше алгоритма для задачи  $(P_h)$  определяется следующим образом:

<sup>1)</sup> В действительности имеет место сильная сходимость в пространстве  $H^{2-\epsilon}(\Omega) \cap V$ , где  $\epsilon > 0$  достаточно мало: в самом деле, из доказательства теоремы 4.1 можно усмотреть, что последовательность  $\lambda^n$  ограничена в пространстве  $L^2(\Omega) \Rightarrow$  последовательность  $\Delta u^n$  ограничена в  $L^2(\Omega) \Rightarrow u^n$  ограничена в  $H^2(\Omega) \cap V$ , откуда и следует наше утверждение. Определение пространств  $H^s(\Omega)$  для нецелых  $s$  см. в книге Лионса и Мадженеса [1].

(5.61)  $\lambda_{kl}^n \geq 0 \quad \forall M_{kl} \in \bar{\Omega}_h$  выбираются произвольно  
(например, равными нулю)

$$(5.62) - \left[ \frac{u_{k+1l}^{n+1} + u_{k-1l}^{n+1} - 2u_{kl}^{n+1}}{h_1^2} + \frac{u_{kl+1}^{n+1} + u_{kl-1}^{n+1} - 2u_{kl}^{n+1}}{h_2^2} \right] = \\ = f_{kl} + \lambda_{kl}^n, \quad M_{kl} \in \bar{\Omega}_h,$$

$$(5.63) \lambda_{kl}^{n+1} = \max(0, \lambda_{kl}^n - \rho_n u_{kl}^{n+1}),$$

замечание 5.2 остается в силе и для (5.62).

При ограничении на  $\rho_n$  вида (5.57) имеет место сходимость последовательности

$$u_h^n = \{u_{kl}^n\}_{M_{kl} \in \bar{\Omega}_h}$$

к решению  $u_h$  задачи  $(P_h)^1$

## 5.7. Анализ численных результатов

Все вычисления были проведены для случая, когда

$$(5.64) f(x_1, x_2) = 4\pi^2 \sin 2\pi x_1,$$

(использовалась ЭВМ СII 10070 Научно-исследовательского института информатики и автоматики (IRIA)).

### 5.7.1. Исходные данные

Вычисления были проведены для следующих значений:

$$b = 0,2, 0,34, 0,69;$$

для значений  $h_1$ :

$$h_1 = 1/10, 1/30, 1/50;$$

и для значения  $h_2$ :

$$h_2 = b/10.$$

Условие останова было выбрано в виде:

$$(5.65) \sum_{M_{kl} \in \bar{\Omega}_h} |u_{kl}^{n+1} - u_{kl}^n| \leq \epsilon,$$

<sup>1)</sup> А также последовательности  $\lambda_h^n = \{\lambda_{kl}^n\}_{M_{kl} \in \bar{\Omega}_h}$  к элементу  $\lambda_h = \{\lambda_{kl}\}_{M_{kl} \in \bar{\Omega}_h}$ , где  $\lambda_{kl}$  определяются по формуле:

$$\lambda_{kl} = - \left[ \frac{u_{k+1l} + u_{k-1l} - 2u_{kl}}{h_1^2} + \frac{u_{kl+1} + u_{kl-1} - 2u_{kl}}{h_2^2} \right] - f_{kl} \quad \forall M_{kl} \in \bar{\Omega}_h.$$

в этом условии принималось

$$\varepsilon = 10^{-4} \text{ для } b = 0,69, \quad \varepsilon = 5 \cdot 10^{-5} \text{ для } b = 0,34,$$

$$\varepsilon = 10^{-5} \text{ для } b = 0,2. \blacksquare$$

### 5.7.2. Решение методом верхней релаксации

Результаты, представленные в табл. 5.1, соответствуют решению задачи ( $P_h$ ) с использованием алгоритма (5.38), в котором

$$(5.66) \quad \begin{aligned} \omega &= 1,6 \text{ для } h_1 = 1/10, 1,7 \text{ для } h_1 = 1/30, \\ &1,8 \text{ для } h_1 = 1/50, \\ u_h^0 &= 0, \end{aligned}$$

параметры  $h_1, h_2, b, \varepsilon$  пробегают значения разд. 5.7.1, условие останова имеет вид (5.65).

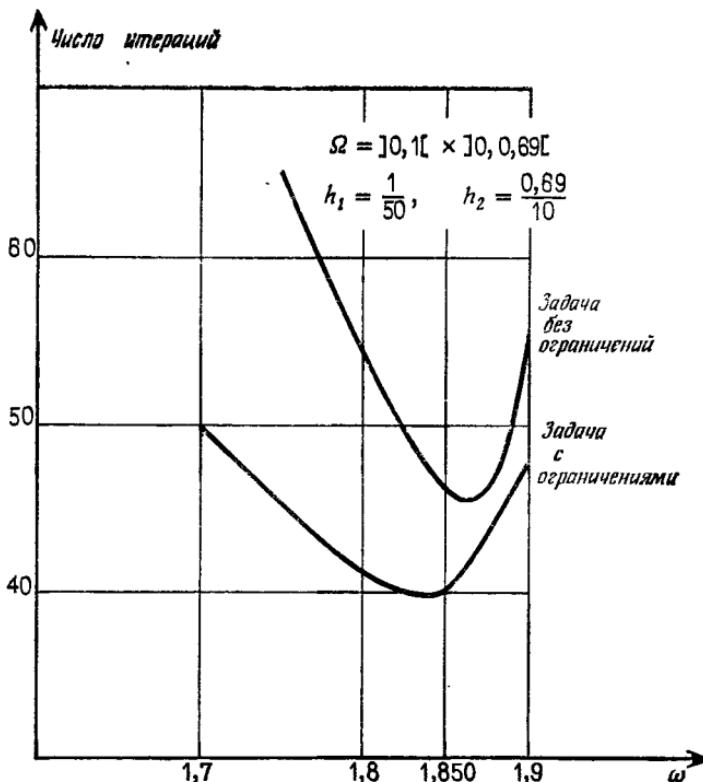


Рис. 5.2. Влияние параметра  $\omega$  на скорость сходимости.

На рис. 5.2 представлено число итераций в зависимости от  $\omega$ ; условие останова все время имеет вид (5.65); на этом же рисунке нанесено количество итераций в зависимости от  $\omega$  (с тем же

Таблица 5.1

$b$	$h_1$	Число ите- раций	Время вы- числений, мин. ЭВМ СII 10070
0,2	1/10	17	0,025
	1/30	25	0,08
	1/50	30	0,19
0,34	1/10	17	0,025
	1/30	30	0,10
	1/50	35	0,22
0,69	1/10	17	0,025
	1/30	35	0,12
	1/50	50	0,31

условием останова) для задачи без ограничений <sup>1)</sup>, т. е.:

$$(5.67) \quad -\Delta u = f \text{ в } \Omega, \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\Gamma = 0, \\ u \in V.$$

Из анализа этих кривых можно сделать следующие замечания.

**Замечание 5.5.** В задаче с ограничениями метод верхней релаксации с фиксированным значением  $\omega$  требует меньшего количества итераций, чем в задаче без ограничений. ■

**Замечание 5.6.** Установлено, что скорость сходимости максимальна для значения  $\omega$ , намного превосходящего 1, что подтверждает высказанное ранее замечание 1.9 разд. 1.4. ■

**Замечание 5.7.** В задаче с ограничениями оптимальное значение  $\omega$  зависит от функции  $f$  (в противоположность тому, что мы имеем для задачи без ограничений). Более точно, если ввести обозначение  $\Omega^+ = [x | x \in \Omega, u(x) > 0]$ , то значение  $\omega$  будет тем же, что и при решении задачи, аппроксимирующей задачу Дирихле  $-\Delta u = f$  в области  $\Omega^+$  при тех же параметрах дискретизации  $h_1, h_2$ . Естественно, что область  $\Omega^+$  заранее неизвестна, так что речь здесь идет о возможности теоретической. ■

1) В действительности для дискретного аналога задачи (5.67).

### 5.7.3. Решение с помощью алгоритма Удзавы

Будем решать задачу  $(P_h)$  с использованием алгоритма (5.61), (5.62), (5.63), параметр  $\rho$  в котором остается постоянным, условие останова все время принимается в виде (5.65).

Приближенные задачи Дирихле (5.62), являющиеся частью общего алгоритма, были решены методом точечной верхней ре-

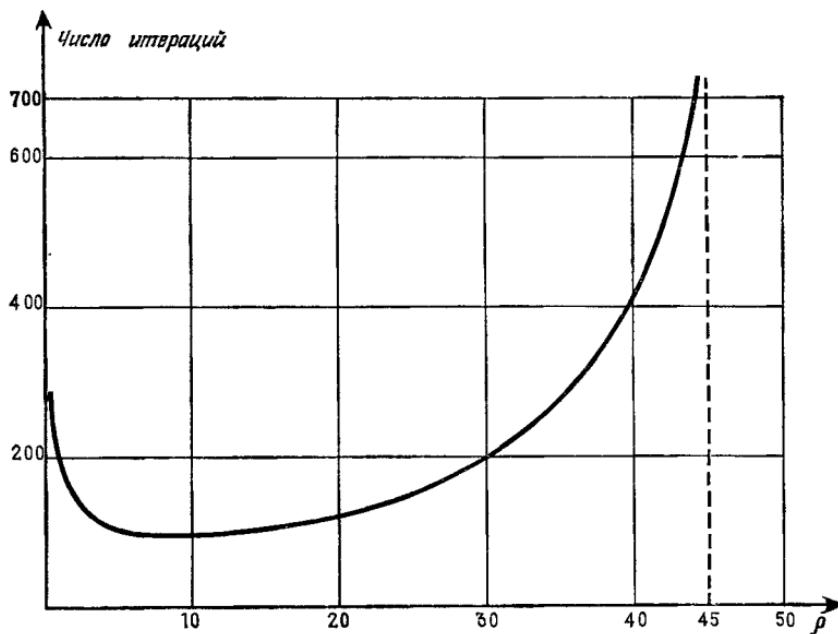


Рис. 5.3. Влияние параметра  $\rho$  на скорость сходимости.

лаксации при  $\omega = 1,6$  для  $h_1 = 1/10$ , 1,7 для  $h_1 = 1/30$ , 1,8 для  $h_1 = 1/50$ .

В табл. 5.2 приведены число итераций и время вычисления по алгоритму (5.61), (5.62), (5.63), при этом значение параметра  $\rho$  было равно оптимальному (определяемому экспериментально).

На рис. 5.3 показано изменение числа итераций в зависимости от  $\rho$ ,  $h_1 = 1/50$  и  $b = 0,69$ , условие останова принято в форме (5.65); на основе анализа полученных данных можно сделать следующие замечания:

**Замечание 5.8.** Полное количество итераций, необходимых для решения задачи  $(P_h)$  при фиксированном значении  $\rho$ , достаточно мало зависит от точности, с которой мы решаем приближенные задачи Дирихле (5.65). ■

Таблица 5.2  
Время вычислений,  
мин. ЭВМ  
СИ 10070

$b$	$h_1$	$\rho$ оптимальн.	Число итераций	
0,2	1/10	45	30	0,045
	1/30	41	35	0,105
	1/50	30	50	0,3
0,34	1/10	16	30	0,04
	1/30	13	40	0,12
	1/50	10	50	0,3
0,69	1/10	13	40	0,09
	1/30	8	70	0,27
	1/50	5	100	0,6

**Замечание 5.9.** Для  $b = 0,69$  число  $2\pi^2/b^2 \approx 42,5$  и оценка (5.60)<sup>1)</sup> для задачи  $(P_h)$  очень близка к действительности, так как для  $\rho = 42,5$  метод сходится за 522 итерации, для  $\rho = 44$  — за 698 итераций, и для  $\rho = 45$  метод фактически расходится.

**Замечание 5.10.** На основании приведенных выше результатов можем заключить, что в задаче  $(P)$  метод верхней релаксации является более быстрым, нежели метод двойственности, по крайней мере в случае, когда задачи Дирихле (5.62) решаются методом верхней релаксации.

Кроме того, мы установили, что вопрос об уточнении  $\rho$  с целью получения удовлетворительной сходимости является более тонким, чем вопрос о выборе подходящего значения  $\omega$ . Отметим также, что применение метода двойственности приводит к увеличению объема используемой оперативной памяти по сравнению с методом верхней релаксации, поскольку необходимо запоминать значение компонент вектора  $\lambda_h$ .

Скорость сходимости метода двойственности можно очевидным образом увеличить, используя для решения задач Дирихле (5.62) методы более быстрые для этого класса задач, нежели метод точечной верхней релаксации (переменных направлений, метод блочной верхней релаксации) или же прямые методы (на-

<sup>1)</sup> Относящаяся к задаче  $(P)$ , а не к  $(P_h)$ .

пример, метод Гаусса или метод Холесского и т. д.), но этот способ приведет к еще большему увеличению используемой оперативной памяти ЭВМ.

Все сказанное выше остается в силе, если мы заменим ограничение  $v(x) \geq 0$  п. в. на ограничение  $\Psi_1(x) \leq v(x) \leq \Psi_2(x)$  п. в. ■

#### 5.7.4. Определение свободной границы

На рис. 5.4 представлены соответствующие значению  $B = 0,69$  и найденные при решении задачи  $(P_h)$  с параметрами  $h_1 = 1/50$ ,  $h_2 = 0,69/10$ , область, где  $u = 0$ , часть области с  $u > 0$  (т. е. об-

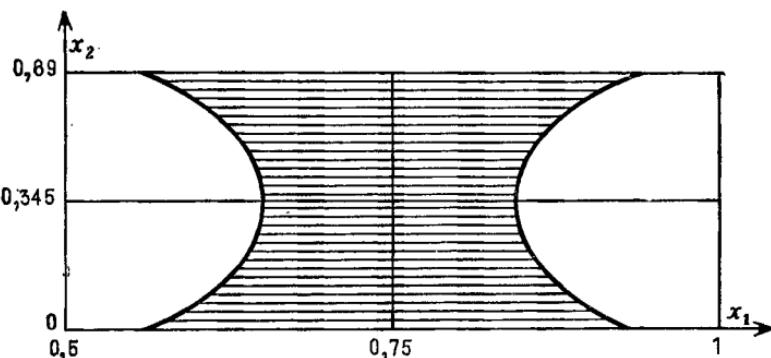


Рис. 5.4. Заштрихованная область соответствует точкам, где  $u = 0$ .

ласть  $\Omega^+$ ) и граница раздела этих областей, подлежащая определению при постановке задачи  $(P)$ , как со свободной границей.

Напомним, что в области  $\Omega^+$  имеет место уравнение  $-\Delta u = f$ . ■

## 6. Комментарии

Мы обращаем внимание читателя на то, что целью настоящей главы не является исчерпывающее изучение алгоритмов оптимизации. Мы приводим работы, в которых можно найти достаточно полное исследование этой темы.

Задачи оптимизации без ограничений. Работы Дэниэла [2], Ковалика и Осборна [1], Спэнга [1], Вайнберга [1].

Задачи оптимизации с ограничениями. Работы Абади [1], [2], Балакришнана и Нейштадта [1], Бокса [1], Брема и Саати [1], Кенона, Куллема и Полака [1], Сеа [2], Флетчера [1], Грэвза и Вульфе [1], Хедли [1], Куна и Таккера [1], Кюнци, Крелле

и Оэтти [1], Кюнци, Чаха и Зендера [1], Лэсдона [1], Левитина и Поляка [1], Люэнбергера [1], Полака [1], Тремольера [3], Варайя [1], Зангвилла [1], Зойгендейка [1]. Понятия, аналогичные тем, которые были введены в разд. 1, изучались ранее многочисленными авторами: Крузей [1], Элькином [1], Сеа и Гловински [2], Гловински [4], [5], Мезляковым [1], Мъеллу [1], Моцкином и Шёнбергом [1], Ортега и Рейнболдтом [1], [2], [3], Ортега и Росковом [1], Петришином [1], [2], Шехтером [1], [2], [3], Саусвеллом [1], Штифелем [1], Коминчиоли [1], Варгой [1], Крайером [1], [2].

По поводу свойств выпуклых функций см. работу Левитина и Поляка [1].

Понятия, введенные в разд. 2, являются классическими.

Задачи оптимизации без ограничений можно найти также в работах Блюма [1], Коши [1], Крокета и Чернова [1], Карри [1], Голдстайна [1], [2], Гринштадта [1], Поляка [1].

Сходимость предложенного Ермольевым метода расходящихся рядов установлена в работе Поляка [2] и — для случая общей задачи без ограничений — в работе Тремольера [2]. Перенесение этого метода на вариационные неравенства осуществлено в работе Ауслендера, Гургана и Гней [1].

Предложенный Хестенсом метод, который называется методом сопряженных градиентов, исследовался в работах Антосевича и Рейнболдта [1], Бекмана [1], Дюрана [1], Флетчера и Ривза [1], Хестенса и Штифеля [1]. На случай бесконечного числа измерений этот метод был обобщен Дэниэлем [1], [2]. Методы типа сопряженных градиентов можно найти в работах Давидона [1], Флетчера и Паузла [1], Пирсона [1]. Распространение метода сопряженных направлений на задачу минимизации с ограничениями произведено в работах Голдфарба [1], Голдфарба и Ланидуса [1], Люэнбергера [2] и Тремольера [4].

По поводу методов типа поточечного проектирования или градиента с проекцией см. работы Альтмана [1], Демьянова [1], Голдстайна [1], Левитина и Поляка [1], [2], Поляка [3], [4], Розена [1], [2], Сибони [1].

Метод штрафа ограничений вида  $G(v) = 0$  с помощью функции

$$J(\cdot) + \frac{1}{\epsilon} G(v)^2, \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

был введен Курантом [1]. Для случая ограничений в виде неравенств функция внешнего штрафа  $J(v) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m \max[-G_i(v), 0]$  предложена Эблou и Бригхэмом [1]. Функция внутреннего штрафа  $J(v) + \epsilon \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i(v)}$  построена в работе Кэрола [1].

Метод центров, использующий функцию — расстояние

$$(\lambda - J(v)) \prod_{i=1}^m G_i(v),$$

был введен Хуардом [1] и обобщен на случай топологических пространств Бюи-Тронг-Лиё и Хуардом в работе [1].

Новая функция — расстояние  $\frac{1}{\lambda - J(v)} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{G_i(v)}$  введена Фиакко и Маккорником [1]. Идея переменных усечений и ускорения этого метода при помощи верхней релаксации принадлежит Тремольеру [1].

Общее изложение методов штрафа можно найти в работах Фиакко и Маккорника [1] и Лутсма [1].

Понятия разд. 4 менее классические. Общие теоремы о существовании седловой точки приведены в работах Бержа [1], Браудера [1], Кифана [1], Сиона [1], [2], Экланда и Темама [1]. По поводу теорем двойственности в математическом программировании см. работы Эрроу, Гурвица и Удзавы [1], Бенсуссана, Лионса и Темама [1], Мангазаряна [1], Рокафеллара [3] и Варайя [2].

Исследование двух основных алгоритмов метода двойственности содержится в работах Эрроу, Гурвица и Удзавы [1], Сеа, Гловински и Неделека [2], Сеа и Гловински [1] и в работе Тремольера [3].

В заключение этой главы упомянем методы расширенного лагранжиана, полученные комбинацией методов штрафа и двойственности; примеры будут приведены в разд. 10 гл. 3 и разд. 9 гл. 5.

Данный подход представляется особенно интересным по следующим двум основным причинам:

1) возможности ускорения сходимости методов двойственности;

2) возможности улучшения обусловленности минимизируемого функционала.

Для ознакомления с теорией можно обратиться к работам Хестенса [2], Пауэлла [1], Рокафеллара [4], [5] и др. Кроме того, применение данной методологии для решения нелинейных краевых задач можно найти в работах Гловински и Мароккс [1], [2] и Мерсье [1].

## Глава 3

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

## Введение

В этой главе мы будем в основном использовать результаты и методы гл. 1 и 2 для численного исследования модельной задачи теории пластичности, рассмотренной в разд. 1.2 гл. 1.

### 1. Постановка непрерывной задачи. Физическая интерпретация. План изложения

#### 1.1. Постановка непрерывной задачи

В настоящем разделе мы вновь возвращаемся к конструкциям разд. 1.2 гл. 1; пусть  $\Omega$ —некоторая открытая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ ; введем функциональное пространство

$$(1.1) \quad H_0^1(\Omega) = \{v \mid v \in H^1(\Omega), \quad \gamma v = 0\},$$

представляющее собой замкнутое векторное подпространство  $H^1(\Omega)$  и являющееся гильбертовым пространством со следующими скалярным произведением и нормой:

$$(1.2) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dx,$$

$$(1.3) \quad \|v\| = \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Норма (1.3) эквивалентна норме, индуцированной из  $H^1(\Omega)$ . Введем далее

$$(1.4) \quad K_0 = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad |\operatorname{grad} v(x)| \leq 1 \text{ п. в. в } \Omega\}$$

—замкнутое выпуклое множество в  $H_0^1(\Omega)$ , и функционал

$$(1.5) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v),$$

где  $L$ —линейная непрерывная на  $H_0^1(\Omega)$  форма.

Рассматриваем следующую вариационную задачу  $P_0$ :

$$(1.6) \quad (P_0) \min_{v \in K_0} J(v).$$

Так как функционал  $J$  непрерывный и строго выпуклый на  $H_0^1(\Omega)$  и удовлетворяет условию  $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$ , то к задаче (1.1) применима теорема 2.1 разд. 2.1 гл. 1; из этой теоремы вытекает существование и единственность решения задачи  $(P_0)$ . Будем обозначать это решение через  $u$ ; элемент  $u$  удовлетворяет также вариационному неравенству

$$(1.7) \quad \begin{aligned} a(u, v-u) &\geq L(v-u) \quad \forall v \in K_0, \\ u &\in K_0, \end{aligned}$$

эквивалентному задаче  $(P_0)$ . ■

Ниже, в разд. 2, для частных видов формы  $L$  будут даны более подробно свойства решения  $u$ .

## 1.2. Физическая интерпретация

Пусть  $\Omega$  — открытая ограниченная односвязная область в  $\mathbb{R}^2$ ; рассмотрим цилиндрический стержень, поперечное сечение которого совпадает с  $\Omega$ , и предположим, что этот стержень изготовлен из упругоидеально-пластического материала, подчиняющегося критерию Мизеса (см., например, книгу Манделя [1]<sup>1</sup>).

Стержень, в исходном состоянии которого отсутствуют напряжения, подвергается воздействию возрастающей крутящей пары, деформированное состояние стержня характеризуется углом закручивания на единицу длины  $C$ . Для каждого значения  $C$  и подходящей системы единиц измерения задачу определения поля напряжений можно привести, согласно принципу Хаара — Кармана, к решению следующей вариационной задачи (где  $v$  — потенциал напряжений):

$$(1.8) \quad \min_{v \in K_0} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx - C \int_{\Omega} v(x) dx \right],$$

$$K_0 = [v \mid v \in H_0^1(\Omega), |\operatorname{grad} v| \leq 1],$$

представляющей собой частный случай задачи  $(P_0)$ , когда форма  $L$  задается интегралом

$$(1.9) \quad L(v) = C \int_{\Omega} v(x) dx. \quad ■$$

<sup>1</sup>) См. также Соколовский В. В. Теория пластичности.—М.: Высшая школа, 1969.

**Замечание 1.1.** Для многосвязного сечения  $\Omega$  формулировку задачи (1.8) необходимо надлежащим образом изменить; по этому поводу см. Гловински и Ланшон [1], Э. Ланшон [2].

В случае когда исходное состояние не является ненапряженным или/и крутящая пара не возрастает, формулировка задачи (1.8) не соответствует рассматриваемой физической задаче; в этом случае необходимо применять математические модели эволюционного типа, более точно — квазистатического (подробное исследование квазистатических моделей в пластичности см. в книге Дюво и Лионса [1], гл. 1). ■

**Замечание 1.2.** Замечание 1.4 разд. 1.2 гл. 1 можно дополнить, указав, что некоторые авторы, в частности Шоу [1], построили решение задачи об упругопластическом стержне, рассматриваемой как задача с неизвестной границей, используя упомянутую выше в замечании локальную формулировку в виде

$$(1.10) \quad -\Delta u = C \text{ в } \Omega_e$$

$$(1.11) \quad |\operatorname{grad} u| = 1 \text{ в } \Omega_p,$$

где

$$(1.12) \quad \Omega_e = [x \mid x \in \Omega, |\operatorname{grad} u(x)| < 1],$$

$$(1.13) \quad \Omega_p = \Omega - \Omega_e;$$

к предшествующим соотношениям следует добавить

$$(1.14) \quad u|_{\Gamma} = 0$$

+ условие непрерывности  $\operatorname{grad} u$  на линии раздела области  $\Omega_e$  и  $\Omega_p$ .

Численные методы, основанные на использовании (1.10), ..., (1.14), приводят к удовлетворительным результатам (см., например, работу Ходжа, Стата и Гераковича [1]), но реализация этих методов представляется делом намного более сложным, нежели реализация большинства приведенных в настоящей книге методов, использующих вариационную формулировку (1.8). ■

### 1.3. План изложения

В разд. 2 будут сформулированы некоторые свойства решения задачи (1.6.) (т. е.  $(P_0)$ ) и ее частного случая (1.8); следствия из этих свойств важны для численного анализа проблемы. Отметим (см. замечание 3.18 разд. 3.7 гл. 1), что оптимальное

решение задачи (1.8) одновременно является решением задачи

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min_{v \in K_1} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx - C \int_{\Omega} v(x) dx \right], \\ K_1 = [v \mid v \in H_0(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma)], \end{array} \right.$$

где  $\delta(x, \Gamma)$  — расстояние от точки  $x$  до границы  $\Gamma$ .

Задача ( $P_1$ ), которую мы будем изучать в разд. 3, очень близка к задаче теории смазки, изученной в разд. 5 гл. 2.

Учитывая эквивалентность задач (1.8) и (1.15) и имея в виду приложения к механике, можно было бы ограничиться изучением только задачи (1.15); тем не менее нам представляется интересным, если учесть возможность приложений к другим проблемам, рассмотреть численное решение задачи ( $P_0$ ) в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с  $f \in L^2(\Omega)$ , работая непосредственно с множеством  $K_0$ .

Разд. 4, 5, 6 будут посвящены аппроксимации задачи ( $P_0$ ), разд. 7, 8, 9 — решению приближенной задачи методом релаксации, штрафа и двойственности соответственно. ■

## 2. Некоторые свойства решения задачи ( $P_0$ )

### 2.1. Результаты о регулярности

Предположим, что в (1.6) линейная форма  $L$  имеет вид

$$(2.1) \quad L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx.$$

Пусть  $u$  — решение задачи ( $P_0$ ); в разд. 3 работы [1] Брезиса и Стампаккья установлено, что

1) если  $\Omega$  — открытая ограниченная выпуклая область в  $\mathbb{R}^n$  с границей, удовлетворяющей условию Липшица, и если  $f \in L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ <sup>1</sup>,  $p > 1$ , то

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Delta u \in L^p(\Omega) \quad (1 < p < +\infty), \\ u \in W^{2,p}(\Omega) \quad (1 < p < +\infty). \end{aligned}$$

2) если  $\Omega$  — открытая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma$ <sup>2</sup>,  $f \in L^p(\Omega) \cap H^{-1}(\Omega)$ ,  $p > 1$ , то по-прежнему имеют место включения (2.2).

<sup>1</sup>) Это требование автоматически выполняется, если  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 2$ .

<sup>2</sup>) По поводу строгой формулировки условий, касающихся регулярности границы  $\Gamma$  и необходимых для обеспечения свойств (2.2), мы осылаем к цитированной выше работе Брезиса и Стампаккьи.

**Замечание 2.1.** В разд. 2.3 мы увидим, что приведенные здесь свойства регулярности оптимальны — по крайней мере в пространствах Соболева целого порядка. ■

## 2.2. Эквивалентная вариационная задача

В работе Брезиса и Сибони установлено, что в случае, когда  $\Omega$  — открытая ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с достаточно гладкой границей,  $L$  — линейная форма вида

$$(2.3) \quad L(v) = C \int_{\Omega} v(x) dx,$$

решение задачи  $(P_0)$  одновременно является решением задачи  $(P_1)$ , т. е. задачи (1.15), а также решением следующего вариационного неравенства:

$$(2.4) \quad a(u, v-u) \geq C \int_{\Omega} (v-u) dx \quad \forall v \in K_1,$$

$$u \in K_1 = [v \mid v \in H_0^1(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma)],$$

билинейная форма в котором определена в (1.2). ■

**Замечание 2.2.** Нетрудно доказать, что знак решения задачи  $(P_1)$  совпадает со знаком  $C$ ; следовательно, в случае  $C > 0$  множество  $K_1$  в задачах (1.15) и (2.4) можно заменить еще более простым выпуклым множеством

$$K'_1 = [v \mid v \in H_0^1(\Omega), 0 \leq v(x) \leq \delta(x, \Gamma)]. ■$$

**Замечание 2.3.** С точки зрения вычислительной решение задачи  $(P_1)$  легче, нежели решение  $(P_0)$ ; в разд. 3 будет проведено исследование задачи  $(P_1)$ , представляющей собой вариант методики, изложенной в разд. 5 гл. 2. ■

## 2.3. Некоторые частные случаи, когда решение известно<sup>1)</sup>

### 2.3.1. Первый пример

Выберем  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $L(v) = C \int_0^1 v(x) dx$ , где  $C > 0$ ; следовательно, задача  $(P_0)$  приобретает форму

$$(2.5) \quad \min_{v \in K_0} \left[ \int_0^1 v'^2 dx - 2C \int_0^1 v dx \right],$$

$$K_0 = [v \mid v \in H_0^1(0, 1), |v'(x)| \leq 1],$$

где  $v' = dv/dx$ .

<sup>1)</sup> Мы ограничимся очень простыми примерами, которые будут использованы в качестве тестов для проверки алгоритмов, построенных в данной главе; другие точные решения можно найти, например, в книге Манделя [1]. ■

Нетрудно проверить, что решение  $u$  задачи  $(P_0)$  (а также  $(P_1)$ ) дается формулой

$$(2.6) \quad u(x) = \frac{C}{2}x(1-x), \text{ если } C < 2,$$

а при  $C \geq 2$  — формулой

$$x, \text{ если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{C},$$

$$(2.7) \quad \frac{C}{2} \left[ x(1-x) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{C} \right)^2 \right], \text{ если } \frac{1}{2} - \frac{1}{C} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{C},$$

$$1-x, \text{ если } \frac{1}{2} + \frac{1}{C} \leq x \leq 1. \blacksquare$$

Решение задачи  $(P_0)$  (и  $(P_1)$ ), соответствующее  $C = 4$  (следовательно,  $1/2 - 1/C = 1/4$ ), представлено на рис. 2.1.

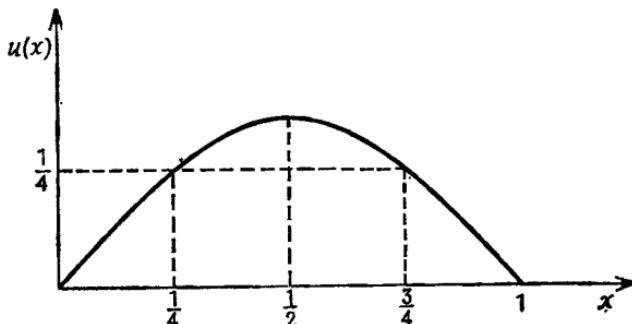


Рис. 2.1. Решение задачи  $(P_0)$  для  $C = 4$ .

### 2.3.2. Второй пример

Положим  $n = 2$ ,

$$\Omega = [x \mid x = (x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 < R^2],$$

$$L(v) = C \int_{\Omega} v(x) dx, \quad C > 0;$$

тогда решение задачи  $(P_0)$  (и  $(P_1)$ ) дается формулой

$$(2.8) \quad u(x) = (C/4)(R^2 - r^2), \text{ если } C \leq 2/R,$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

если  $C \geq 2/R$ , то

$$(2.9) \quad u(x) = \begin{cases} R - r, & \text{если } R' \leq r \leq R, \\ -Cr^2/4 + (R - 1/C), & \text{если } 0 \leq r \leq R', \end{cases}$$

где

$$(2.10) \quad R' = 2/C. \blacksquare$$

*Замечание 2.4.* Можно дополнить сейчас замечание 2.1: в приведенных выше примерах, когда исходные данные достаточно регулярны, для достаточно больших значений  $C$  имеем

$$u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^1,$$

однако

$$u \notin C^2(\bar{\Omega}), \quad u \notin H^3(\Omega). \blacksquare$$

### 3. Численное исследование задачи $(P_1)$

#### 3.1. План изложения

В этом разделе область  $\Omega$  мы будем предполагать односвязной и применим результаты гл. 1 и 2 к исследованию задачи  $(P_1)$ ; мы будем рассматривать только внешнюю аппроксимацию задачи  $(P_1)$  (т. е. аппроксимацию типа конечноразностной), и по сравнению с вариационной задачей, рассмотренной в разд. 5 гл. 2, здесь не будет дополнительных затруднений, не считая доказательства сходимости последовательности приближенных решений при  $h \rightarrow 0$ , которое здесь является несколько более тонким.

При описании алгоритмов мы ограничимся методом верхней релаксации, который, как нам кажется, лучше приспособлен к ограничениям, встречающимся в рассматриваемой задаче. ■

#### 3.2. Внешняя аппроксимация задачи $(P_1)$

##### 3.2.1. Формулировка приближенной задачи

Напомним, что  $(P_1)$  ставится следующим образом:

$$(3.1) \quad \min_{v \in K_1} \left[ J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx - C \int_{\Omega} v dx \right], \quad (C > 0),$$

$$K_1 = [v \mid v \in H_0^1(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \text{ п. в.}].$$

1) На самом деле в этих двух примерах мы имеем большую регулярность, так как

$$u \in W^{2,\infty}(\Omega) = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^\infty(\Omega) \right\}.$$

Пусть  $h > 0$  — параметр, который мы будем устремлять к нулю; как и в разд. 5.1 гл. 1, разд. 5 гл. 2, определим сетку  $R_h$ :

$$(3.2) \quad R_h = \{M_{ij} \mid M_{ij} \in \mathbb{R}^2, M_{ij} = \{ih, jh\}, i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждому узлу  $M_{ij}$  сетки  $R_h$  поставим в соответствие брус с центром  $M_{ij}$ :

$$(3.3) \quad \mathfrak{B}_h^0(M_{ij}) = \left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) h, \left( i + \frac{1}{2} \right) h \right] \times \left[ \left( j - \frac{1}{2} \right) h, \left( j + \frac{1}{2} \right) h \right],$$

и крест (с центром  $M_{ij}$ ):

$$(3.4) \quad \mathfrak{B}_h^1(M_{ij}) = \mathfrak{B}_h^0 \left( M_{ij} \pm \frac{h}{2} e_1 \right) \cup \mathfrak{B}_h^0 \left( M_{ij} \pm \frac{h}{2} e_2 \right).$$

Определим далее

$$(3.5) \quad \Omega_h = \{M_{ij} \mid \mathfrak{B}_h^1(M_{ij}) \subset \Omega\},$$

$$(3.5)' \quad \Gamma_h = \{M_{ij} \mid M_{ij} \in R_h, M_{ij} \notin \Omega_h, \text{ по крайней мере одна из четырех точек } M_{ij} \pm he_1, M_{ij} \pm he_2 \in \Omega_h\},$$

$$(3.5)'' \quad \bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h,$$

$$(3.6) \quad V_h = \{v_h \mid v_h = (v_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h}, v_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

и отображение  $q_h: V_h \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ <sup>1)</sup> по формуле

$$(3.7) \quad q_h v_h = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} v_{ij} \theta_h^{ij},$$

где

$$(3.8) \quad \theta_h^{ij} — \text{характеристическая функция множества } \mathfrak{B}_h^0(M_{ij}).$$

Положив (как и в разд. 5.1 гл. 1 и разд. 5 гл. 2) для  $k = 1, 2$

$$(3.9) \quad \delta_k \varphi(x) = \frac{1}{h} \left[ \varphi \left( x + \frac{h}{2} e_k \right) - \varphi \left( x - \frac{h}{2} e_k \right) \right],$$

аппроксимируем функционал  $J$  функцией  $J_h: V_h \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$(3.10) \quad J_h(v_h) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx - C \int_{\Omega} q_h v_h dx$$

и возьмем в качестве приближенной задачу

$$(3.11) \quad (P_{1h}) \begin{cases} \min_{v_h \in K_{1h}} J_h(v_h), \\ K_{1h} = \{v_h \mid v_h \in V_h, |v_{ij}| \leq \delta(M_{ij}, \Gamma), \forall M_{ij} \in \Omega_h\}. \end{cases}$$

Заметим, что множество  $K_{1h}$  ограничено и замкнуто в  $V_h$ . ■

<sup>1)</sup> Тоже обозначение будет использовано для отображения  $V_h \rightarrow L^2(\Omega)$ , определяемого как  $v_h \rightarrow$  сужение  $q_h v_h$  на область  $\Omega$ .

### 3.2.2. О разрешимости задачи ( $P_{1h}$ )

Рассуждаем как и в разд. 5.3.2 гл. 2: отображение

$$v_h \rightarrow \left( \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx \right)^{1/2}$$

определяет норму на  $V_h$ , обозначаемую через  $\|v_h\|_h$ ; тогда функционал  $J_h$  непрерывен и строго выпуклый на  $V_h$ . Так как множество  $K_{1h}$  ограничено и замкнуто в  $V_h$ , то имеет место существование и единственность оптимального решения задачи ( $P_{1h}$ ), которое мы будем обозначать через  $u_h$ . ■

### 3.2.3. Развёрнутая формулировка задачи ( $P_{1h}$ )

Функционал (3.10) в явном виде можно записать следующим образом:

$$(3.12) \quad J_h(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right] - h^2 C \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} v_{ij}. ■$$

*Замечание 3.1.* Если  $M_{pq} \notin \Omega_h$ , то в формуле (3.12) нужно брать  $v_{pq} = 0$ . ■

## 3.3. Сходимость последовательности приближенных решений при $h \rightarrow 0$

*Предварительное замечание.* В этом разделе мы докажем, что

$$\{q_h u_h, \delta_1 q_h u_h, \delta_2 q_h u_h\} \rightarrow \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} \text{ сильно в } (L^2(\Omega))^3,$$

где  $u$  — оптимальное решение задачи ( $P_1$ ). Этот результат о сходимости можно получить непосредственно, действуя так же, как и в разд. 5 гл. 2, при этом возникнут некоторые технические осложнения; однако мы предпочли использовать более общие методы разд. 5 гл. 1, несмотря на некоторую тяжеловесность данного варианта изложения.

### 3.3.1. Приведение задачи ( $P_{1h}$ ) к эквивалентному вариационному неравенству на множестве $K_{1h}$

Для приведения задач ( $P_1$ ) и ( $P_{1h}$ ) к формам, изучаемым в разд. 5 гл. 1, удобно сформулировать их как вариационные

неравенства:

$$(3.13) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} (v - u) dx \geq C \int_{\Omega} (v - u) dx \quad \forall v \in K_1,$$

$$u \in K_1,$$

$$(3.14) \quad \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \delta_k q_h u_h \delta_k q_h (v_h - u_h) dx \geq C \int_{\Omega} q_h (v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in K_{1h},$$

$$u_h \in K_{1h}.$$

Ранее мы определили

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v dx = a(u, v).$$

Определим теперь форму  $a_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$(3.15) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \delta_k q_h u_h \delta_k q_h v_h dx. \blacksquare$$

### 3.3.2. Внешняя аппроксимация $H_0^1(\Omega)$ , $a$ , $K_1$ , $L$

Проверим сейчас поочередно все нужные нам свойства, формулировка которых была дана в разд. 5.2 гл. 1.

*Аппроксимация  $H_0^1(\Omega)$*

Учитывая обозначения разд. 5.1 гл. 1, выберем

$$(3.16) \quad V = H_0^1(\Omega),$$

$$(3.17) \quad F = (L^2(\Omega))^3,$$

а также определим отображение  $V \rightarrow F$  (инъективное) по формуле

$$(3.18) \quad \sigma v = \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\}. \blacksquare$$

В разд. 3.2.1 мы определили семейство конечномерных пространств  $V_h$ , являющихся гильбертовыми, с нормой  $\|\cdot\|_h$ :

$$(3.19) \quad \|v_h\|_h = (a_h(v_h, v_h))^{1/2} = \left( \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx \right)^{1/2};$$

напомним (см. Сеа [3], Лионс [3]), что норма  $\|\cdot\|_h$  удовлетворяет дисcretному неравенству Пуанкаре:

$$(3.20) \quad \|q_h v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \|v_h\|_h \quad (\alpha > 0), \quad \forall h, \forall v_h \in V_h. \blacksquare$$

И, наконец, определим семейство операторов продолжения  $p_h \in \mathcal{L}(V_h; F)$  исходя из определения (3.7) разд. 3.2.1 операторов  $q_h: V_h \rightarrow L^2(\Omega)$ :

$$(3.21) \quad p_h v_h = \{q_h v_h, \delta_1 q_h v_h, \delta_2 q_h v_h\},$$

учитывая неравенство (3.20), имеем оценку

$$(3.22) \quad \|p_h\|_{\mathcal{E}(V_h, F)} \leq C. \blacksquare$$

Имея эти определения и оценки, докажем сейчас, что имеет место

**Предложение 3.1.** Семейство  $(Y_h)_h$  реализует внешнюю аппроксимацию пространства  $V$ .

*Доказательство.* Нам необходимо установить свойство (5.27) разд. 5 гл. 1. Определим оператор  $r_h: V \rightarrow V_h$

$$(3.23) \quad (r_h v)_{M_{ij}} = \frac{1}{h^2} \int_{\tilde{\omega}_0(M_{ij})} v(x) dx, \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h.$$

Тогда (см. разд. 5.1 гл. 1)  $\forall v \in V = H_0^1(\Omega)$

$$(3.24) \quad p_h r_h v \rightarrow \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} \text{ сильно в } (L^2(\Omega))^3,$$

откуда с учетом (3.19)

$$(3.25) \quad \|r_h v\|_h \leq c \text{ независимо от } h. \blacksquare$$

### Аппроксимация а

Форма  $a_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная по (3.15), удовлетворяет условиям

$$(3.26) \quad |a_h(u_h, v_h)| \leq \|u_h\|_h \|v_h\|_h,$$

$$(3.27) \quad a_h(v_h, v_h) = \|v_h\|_h^2,$$

а также условиям (5.30) и (5.31) разд. 5.2 гл. 1 (это доказывается без особых затруднений), следовательно, имеет место

**Предложение 3.2.** Семейство  $(a_h)_h$  реализует аппроксимацию формы а.  $\blacksquare$

### Аппроксимация множества $K_1$

Пусть семейство множеств  $K_{1h}$  определено по формуле (3.11), тогда имеет место

**Предложение 3.3.** Семейство  $K_{1h}$  реализует аппроксимацию множества  $K_1$ .

*Доказательство.* Нужно доказать (см. условия (5.33) и (5.34) разд. 5.2 гл. 1), что

$$(3.28) \quad \text{если } v_h \in K_{1h}, \lim_{h \rightarrow 0} p_h v_h = \xi \text{ слабо в } F, \text{ то } \xi \in \sigma K_1,$$

$$(3.29) \quad \forall v \in K_1, \exists v_h \in K_{1h} \text{ такой, что } p_h v_h \rightarrow \sigma v \text{ сильно в } F \text{ и } \|v_h\|_h \leq c.$$

*Проверка условия (3.28).*

Полагаем  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ , тогда из результатов разд. 5.1 гл. 1 следует, что

$$(3.30) \quad \left. \begin{array}{l} \xi_0 \in H_0^1(\Omega) = V \\ \xi_k = \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} (k=1, 2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \xi \in \sigma V.$$

Кроме того, из непрерывности функции  $x \rightarrow \delta(x, \Gamma)$  на  $\bar{\Omega}$  следует ее равномерная непрерывность, откуда и из определения  $K_{1h}$  имеем:

$$(3.31) \quad v_h \in K_{1h} \Rightarrow |q_h v_h(x)| \leq \delta(x, \Gamma) + \eta(h) \text{ п.в.,}$$

где

$$(3.32) \quad \eta(h) \text{ не зависит от } x, \lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0.$$

Поскольку множество  $[v | v \in L^2(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) + \epsilon \text{ п. в.}]$   $\forall \epsilon > 0$  выпукло и замкнуто в  $L^2(\Omega)$ , следовательно, слабо замкнуто, то из условий (3.31) и (3.32) находим, что

$$(3.33) \quad |\xi_0(x)| \leq \delta(x, \Gamma) + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \Leftrightarrow |\xi_0(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \text{ п.в.}$$

и, следовательно,  $\xi \in \sigma K_1$ . ■

*Проверка условия (3.29)*

Это условие достаточно проверить для некоторого подмножества  $\chi_1$  множества  $K_1$ , плотного в  $K_1$  (см. замечание 5.4 разд. 5.3 гл. 1).

Пусть  $v \in K_1$ ,  $\epsilon > 0$  задано, определим  $v_\epsilon = \tau_\epsilon(v)$  по формуле

$$(3.34) \quad \tau_\epsilon(v) = v_\epsilon = (v - \epsilon)^+ - (v + \epsilon)^-.$$

Так как  $\varphi \rightarrow \varphi^+$ ,  $\varphi^-$  отображает  $H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ ,  $\tau_\epsilon(v) \in H^1(\Omega)$ , и без труда проверяется, что

$$(3.35) \quad v_\epsilon(x) \begin{cases} = 0, & \text{если } \delta(x, \Gamma) \leq \epsilon \\ \leq \delta(x, \Gamma) - \epsilon & \text{в противоположном случае.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$(3.36) \quad \tau_\epsilon(v) \in K_1 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Определим теперь подмножество  $\chi_1$  множества  $K_1$  по формуле

$$(3.37) \quad \chi_1 = \bigcup_{\epsilon > 0} \tau_\epsilon K_1.$$

Имеем

$$(3.38) \quad \bar{\chi}_1 = K_1.$$

В самом деле,  $(v - \epsilon)^+ (v + \epsilon)^-$  стремится к  $v^+ (v^-)$  сильно в  $H^1(\Omega)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ , следовательно,  $\tau_c(v) \rightarrow v$  сильно в  $H^1(\Omega)$ .

### Вариант доказательства

Проведенное выше рассуждение показывает, что множество функций  $v$  из  $K_1$ , которые равны нулю в окрестности  $\Gamma$  и модуль которых мажорирован функцией  $\delta(x, \Gamma) - \epsilon_v$ , плотно в  $K_1$ . Для доказательства этого факта можно действовать также следующим образом: пусть  $v \in K_1$ , и пусть  $\theta_n$  — последовательность функций из  $C^1(\bar{\Omega})$ , такая, что  $|\theta_n(x)| \leq 1$ ,  $\theta_n = 0$  в окрестности границы  $\Gamma$  и  $\theta_n(x) \rightarrow 1$  равномерно на любом компакте в  $\Omega$ .

$|\frac{\partial \theta_n}{\partial x_i}(x) \delta(x, \Gamma)| \leq \text{Const}$ , следовательно,  $\theta_n v \rightarrow v$  в  $H^1(\Omega)$  (так как  $v \in H_0^1(\Omega)$ )

и  $|\theta_n v(x)| \leq |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma)$ . Следовательно, уже сейчас можно предполагать, что  $v$  равна нулю в окрестности  $\Gamma$ . Но если  $0 < \lambda < 1$ ,  $\lambda \rightarrow 1$ , то  $\lambda v \rightarrow v$  в  $H^1(\Omega)$  и  $|\lambda v(x)| \leq \lambda \delta(x, \Gamma)$ , что в совокупности с тем, что  $v$  равна нулю в окрестности  $\Gamma$ , доказывает, что  $|\lambda v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) - \epsilon_v$ , откуда и вытекает нужное нам утверждение. ■

Имея в виду этот результат и выбирая  $v \in \chi_1$ ,  $v_h = r_h v$ , где оператор  $r_h: V \rightarrow V_h$  определен по формуле (3.23), на основании условия (3.35) и непрерывности функции  $\chi \rightarrow \delta(x, \Gamma)$  на  $\Omega$  получим, что

$$(3.39) \quad \begin{aligned} |v_{ij}| &= \frac{1}{h^2} \left| \int_{\tilde{\omega}_h^0(M_{ij})} v(x) dx \right| \leq \frac{1}{h^2} \int_{\tilde{\omega}_h^0(M_{ij})} |v(x)| dx \leq \\ &\leq \delta(M_{ij}, \Gamma) = \delta_{ij} \\ &\forall h > 0 \text{ и достаточно малых } \Leftrightarrow v_h \in K_{1h} \\ &\forall h > 0 \text{ достаточно малых.} \end{aligned}$$

В силу (3.24) и (3.25) имеем  $p_h r_h v (= p_h v_h) \rightarrow \sigma v$  сильно в  $F$  и  $\|v_h\|_h \leq c$ , следовательно, условие (3.29) выполняется для функций множества  $\chi_1$ . ■

**Замечание 3.2.** Условие (3.38) можно, следуя Равьяру [1], гл. 0, проверить с использованием того обстоятельства, что из слабой сходимости  $p_h v_h \rightarrow \xi$  в  $F$  вытекает сильная сходимость некоторой подпоследовательности, по-прежнему обозначаемой через  $v_h$ :

$$(3.40) \quad q_h v_h \rightarrow \xi_0 \text{ сильно в } L^2(\Omega) \text{ п. в. в } \Omega. ■$$

**Замечание 3.3.** Опираясь на условие (3.35), мы сейчас докажем, что  $\mathcal{D}(\Omega) \cap K_1 = K_1$ ; так как множество  $\chi_1 \subset K_1$  плотно

в  $K_1$ , то это утверждение достаточно доказать для множества  $\chi_1$ ; будем действовать методом регуляризации.

Итак, пусть  $(\rho_n)_n$  — некоторая регуляризирующая последовательность (т. е.  $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ ,  $\rho_n \geq 0$ ,  $\rho_n \rightarrow \delta(0)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(x) dx = 1$ , но-

ситель  $(\rho_n) \rightarrow 0$ ); если  $v \in \chi_1$ , продолжаем  $v$  функцией  $\tilde{v}$ , равной нулю вне  $\Omega$ ;  $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ; определим функцию  $\tilde{v}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  по формуле

$$(3.41) \quad \tilde{v}_n = \tilde{v} * \rho_n \Leftrightarrow \tilde{v}_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}(y) \rho_n(x-y) dy.$$

Положим

$$(3.42) \quad v_n = \text{сужение функции } \tilde{v}_n \text{ на } \Omega.$$

Имеем тогда

$$(3.43) \quad \tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \text{ сильно в } H^1(\mathbb{R}^2),$$

откуда, сужая область определения до  $\Omega$ , получаем

$$(3.44) \quad v_n \rightarrow v \text{ сильно в } H^1(\Omega).$$

Из условия (3.15) и для достаточно больших значений  $n$  имеем

$$(3.45) \quad \text{носитель } (\tilde{v}_n) \subset \Omega \Rightarrow v_n \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Таким образом, осталось доказать, что при достаточно больших  $n$  элемент  $v_n \in K_1$ .

Пусть  $x \in \Omega$ , имеем тогда

$$(3.46) \quad v_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}(y) \rho_n(x-y) dy;$$

положим

$$(3.47) \quad \omega_n(x) = [y \mid y \in \mathbb{R}^2, x-y \in \text{носитель } (\rho_n)],$$

тогда  $x \in \omega_n(x)$  и, кроме того,

$$(3.48) \quad \text{диаметр } (\omega_n(x)) = \text{диаметру носителя } (\rho_n) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Для всех  $x \in \Omega$  имеем теперь

$$(3.49) \quad |v_n(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{v}(y)| \rho_n(x-y) dy \leq \|\tilde{v}(y)\|_{L^\infty[\omega_n(x)]} \times \\ \times \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(y) dy = \|\tilde{v}(y)\|_{L^\infty[\omega_n(x)]}.$$

Из условия (3.35), определения  $\tilde{v}$  и условий (3.48) и (3.49) нетрудно найти, что

(3.50)  $|v_n(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \quad \forall x \in \Omega$  для достаточно больших  $n$ , следовательно,  $v_n \in K_1$  для достаточно больших  $n$ . ■

### Аппроксимация $L$

В рассмотренном случае, когда  $L(v) = C \int_{\Omega} v(x) dx$ , проверка условий (5.37), (5.38) разд. 5.2 гл. 1 для аппроксимации  $L_h: V_h \rightarrow \mathbb{R}$  вида

$$L_h(v_h) = C \int_{\Omega} q_h v_h dx.$$

осуществляется непосредственно. ■

### 3.3.3. Один результат о сильной сходимости

Учитывая установленные в разд. 3.3.2 свойства внешних аппроксимаций  $H_0^1(\Omega)$ ,  $a$ ,  $K_1$ ,  $L$ , к задаче  $(P_{1h})$  (более точно к эквивалентной формулировке (3.14) этой задачи), можно применить доказанную в разд. 5.4 гл. 1 теорему 5.2, из которой получаем теорему.

**Теорема 3.1.** Пусть  $u_h$  — решение задачи  $(P_{1h})$ , тогда при  $h \rightarrow 0$  имеем

$$(3.51) \quad \begin{cases} p_h u_h \rightarrow \sigma u \text{ сильно в } F, \\ J_h(u_h) \rightarrow J(u), \end{cases}$$

где  $u$  — решение задачи  $(P_1)$ . ■

## 3.4. Решение приближенной задачи методом поточечной верхней релаксации с проекцией

Будем использовать алгоритм (1.41), (1.42) разд. 1.4 гл. 2, который с учетом (3.11), (3.12) и при организации итераций по возрастающим значениям индексов  $i$ ,  $j$  принимает такой вид:

$$(3.52) \quad \begin{cases} u_h^0 \in K_{1h}, \\ u_{ij}^{n+1/2} = (1 - \omega) u_{ij}^n + \frac{\omega}{4} (u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^n + u_{i+1j-1}^n + u_{i-1j+1}^n + h^2 C), \\ u_{ij}^{n+1} = \max(-\delta_{ij}, \min(u_{ij}^{n+1/2}, \delta_{ij})), \\ M_{ij} \in \Omega_h. \end{cases}$$

Здесь по-прежнему принимается соглашение о том, что  $u_{kl} = 0$  при  $M_{kl} \notin \Omega_h$ .

Применив к задаче ( $P_{1h}$ ) теорему 1.3 разд. 1.4 гл. 2, получим теорему.

**Теорема 3.2.** Последовательность  $u_h^n$  стремится к  $u_h$ , если  $0 < \omega < 2$  и  $n \rightarrow +\infty$ . ■

**Замечание 3.4.** Если  $u_h^0 = 0$  и если  $0 < \omega \leq 1$ , то из формул (3.52) вытекает, что последовательность  $(u_{ij}^n)_n$  возрастающая для всех  $M_{ij} \in \Omega_h$ ; следовательно, сходимость монотонная, и мы подходим к точным значениям координат  $u_{ij}$  вектора  $u_h$  снизу. ■

**Замечание 3.5.** Задачу ( $P_{1h}$ ) можно было бы решать и другими методами, в частности методом двойственности, близким к тому, который был использован в разд. 5.6 гл. 2; при реализации данного метода в задаче ( $P_{1h}$ ) никаких затруднений не возникает, но в примере настоящего раздела мы ограничились использованием метода верхней релаксации, который, как нам кажется, лучше приспособлен к рассматриваемой задаче. ■

### 3.5. Приложения. Пример 1

Выберем  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  и  $C = 10$ .

#### 3.5.1. Исходные данные

Шаг дискретизации:  $h = 1/40$ .

Начальное приближение для алгоритма (3.52):  $u_h^0 = 0$ .

Условие останова алгоритма (3.52):

$$(3.53) \quad \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| < 10^{-4}. \blacksquare$$

#### 3.5.2. Анализ численных результатов

Результаты, касающиеся скорости сходимости в зависимости от параметра  $\omega$ , приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$\omega$	1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
Число итераций	293	138	118	98	93	108	188	Расходимость

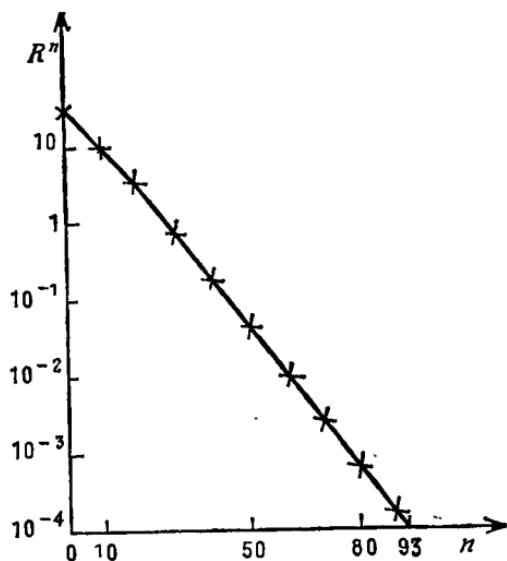


Рис. 3.1. Убывание величины  $R^n$  с ростом числа итераций  $n$ .  
Случай  $C = 10$  (полулогарифмическая шкала).

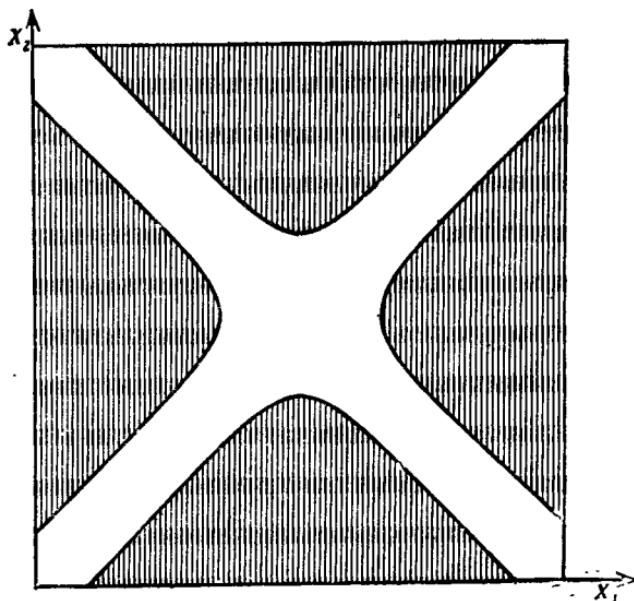


Рис. 3.2. Распределение областей пластичности (заштрихованы);  $C = 10$ .

Время вычислений на ЭВМ IBM 360/91 равно 7,33 с для  $\omega = 1$  и 2,51 с для  $\omega = 1,7$ . ■

**Замечание 3.6.** Заметим, что здесь, как и ранее, скорость сходимости максимальна для значений  $\omega$ , намного больших 1. ■

На рис. 3.1 показано убывание величины

$$R^n = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n|$$

в зависимости от числа итераций для  $\omega = 1,7$ ; на рис. 3.2 показаны области пластического течения ( $|u(x)| = \delta(x, \Gamma)$ )<sup>1)</sup> и области упругости, где ( $|u(x)| < \delta(x, \Gamma)$ )<sup>2)</sup>. Относительно оптимального значения параметра  $\omega$  можно сделать следующее замечание.

**Замечание 3.7.** В задаче Дирихле без ограничений для области  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , дискретизированной с шагом  $h = 1/40$ , оптимальное значение  $\omega$  очень близко к значению 1,85, в то время

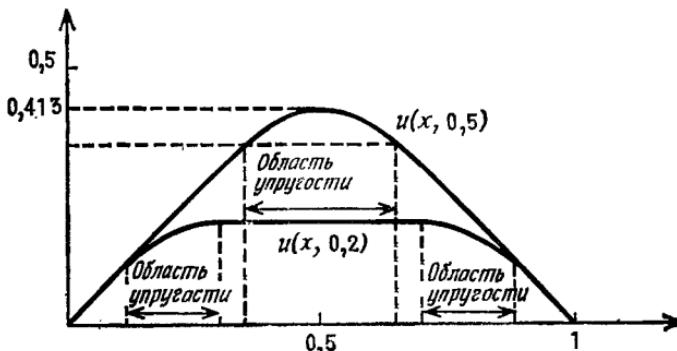


Рис. 3.3  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $C = 10$ . Графики функций  $u(x, 0, 2)$  и  $u(x, 0, 5)$ .

как в задаче ( $P_{1h}$ ) при  $C = 10$  это значение близко к 1,7, что почти совпадает с тем, которое соответствует задаче для уравнений  $-\Delta u = C$  в области упругости при шаге дискретизации, равном  $h$ ; это объясняется экспериментально установленным фактом о том, что область пластичности, т. е. область, в которой ограничения выполняются со знаком строгого равенства, локализуется очень быстро и машинное время затрачивается в основном на решение уравнения  $-\Delta u = C$  в области упругости. Все сказанное здесь подтверждает замечание 5.7 разд. 5.7.2 гл. 2. ■

На рис. 3.3 показано полученное на основании числовых результатов поведение функций  $x \rightarrow u(x, 0, 2)$  и  $x \rightarrow u(x, 0, 5)$ , где  $u$  — решение задачи ( $P_1$ ).

<sup>1)</sup> То есть множества точек, где  $|\operatorname{grad} u| = 1$ .

<sup>2)</sup> То есть множества точек, где  $|\operatorname{grad} u| < 1$ ,  $-\Delta u = C$ .

### 3.6. Приложения. Пример 2

Выберем в качестве  $\Omega$  область, показанную на рис. 3.4, и положим  $C = 5$  и  $10$ .

#### 3.6.1. Исходные данные

Шаг дискретизации:  $h = 1/20$ .

Начальное приближение для алгоритма (3.52):  $u_h^0 = 0$ .

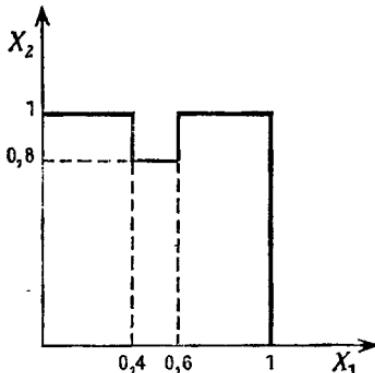


Рис. 3.4.

Условие останова алгоритма (3.52): по-прежнему используется условие (3.53).

#### 3.6.2. Анализ численных результатов

Результаты, касающиеся скорости сходимости в зависимости от  $\omega$ , приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

$C$	5	5	10	10
$\omega$	1	1,5	1	1,5
Число итераций	185	81	64	38

Время вычислений для  $C = 10$ ,  $\omega = 1$  равно 0,88 с на ЭВМ IBM 360/91.

Приведенные результаты подтверждают выгоду использования значений  $\omega > 1$  в алгоритме (3.52); кроме того, поскольку для значения  $C = 10$  область plasticности больше, чем для  $C = 5$ ,

то в первом случае большее количество ограничений выполняется со знаком строгого равенства, что и объясняет большую скорость сходимости алгоритма (3.52).

На рис. 3.5 показаны области пластичности и области упругости, соответствующие значению  $C = 10$ .

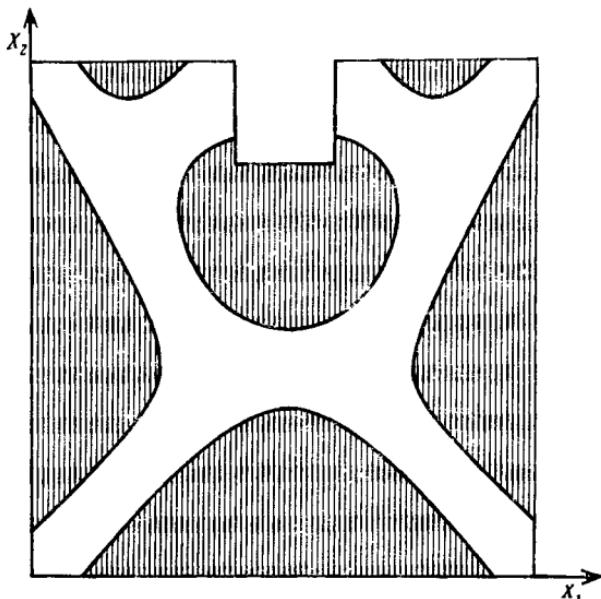


Рис. 3.5. Распределение областей упругости и пластичности для  $C = 10$  (области пластичности заштрихованы).

## 4. Внутренние аппроксимации задачи ( $P_0$ )

### План изложения

В предшествующем разделе мы изучили задачу ( $P_1$ ); сейчас мы будем рассматривать задачу ( $P_0$ ), в которой дискретизация функционала  $J$  осуществляется таким же образом, как и ранее, однако учет ограничений (принадлежности множеству  $K_0$ ) ставит здесь новые проблемы, весьма различные по своей природе в зависимости от способа аппроксимации функционала  $J$ . Таким образом, в этом и последующих разделах мы будем систематически изучать аппроксимации функционала  $J$  и соответствующие аппроксимации выпуклого множества  $K_0$ .

В этом разделе мы сформулируем два типа аппроксимаций, являющихся внутренними в смысле определения разд. 4 гл. 1.

В разд. 4.1 мы рассмотрим метод *конечных элементов* с линейными аппроксимациями на треугольниках (см. пример 4.2

разд. 4 гл. 1), в разд. 4.2 мы рассмотрим аппроксимацию Галеркина (см. пример 4.1 разд. 4 гл. 1) с базисными функциями, совпадающими с собственными функциями оператора  $-\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ .

Сходимость этих аппроксимаций будет изучена в разд. 6. ■

## 4.1. Метод конечных элементов

### 4.1.1. Разбиение области $\Omega$ . Определение пространства $V_h$

Вернемся к примеру 4.2 разд. 4 гл. 1; пусть  $\mathcal{T}_h$  — *триангуляция*, т. е. разбиение, порожденное конечным числом треуголь-

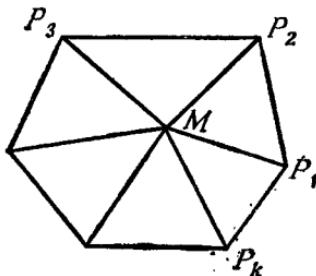


Рис. 4.1.

ников и обладающее следующими свойствами:

$$(4.1) \quad T \in \mathcal{T}_h \Rightarrow T \subset \bar{\Omega},$$

(4.2)  $T, T' \in \mathcal{T}_h \Rightarrow T \cap T' = \emptyset$ , или  $T$  или  $T'$  имеют одну общую сторону, или же  $T$  и  $T'$  имеют одну общую вершину;

в качестве  $\Phi$  (см. условие (4.6) примера 4.2 разд. 4 гл. 1) выберем

$$(4.3) \quad \varphi(h) = h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} (\text{площадь } T),$$

что обеспечивает выполнение условий (4.6), (4.7) разд. 4 гл. 1.

Определим множества

$$(4.4) \quad \bar{\Omega}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$$

$$(4.5) \quad \Omega_h = \overset{\circ}{\Omega}_h,$$

$$(4.6) \quad \Gamma_h = \partial \Omega_h,$$

$$(4.7) \quad \Sigma_h = \text{множество вершин } \mathcal{T}_h,$$

$$(4.8) \quad \dot{\Sigma}_h = [M \mid M \in \Sigma_h, M \notin \Gamma_h].$$

Пусть  $M \in \dot{\Sigma}_h$ , обозначим через  $P_1, \dots, P_k$  вершины, ближайшие к  $M$  (см. рис. 4.1).

Определим теперь

(4.9)  $w_M$  = непрерывная аффинная функция на каждом треугольнике, имеющем  $M$  одной из своих вершин, причем  $w_M(M)=1$ ,  $w_M(P_i)=0$ ,  $i=1, \dots, k$ ,  $w_M$  равна нулю на части  $\Omega$ , лежащей вне треугольников с вершиной  $M$

и далее

(4.10)  $V_h$  = пространство, натянутое на функции  $w_M$ ,  $M \in \dot{\Sigma}_h$ .

Имеет место

**Предложение 4.1.**  $V_h$  представляет собой подпространство пространства  $H_0^1(\Omega)$ , причем

$$\dim(V_h) = N = \text{Card}(\dot{\Sigma}_h). \blacksquare$$

**Замечание 4.1.** Так как функции  $v_h \in V_h$  на  $T$  являются аффинными, то  $\text{grad } v_h$  — константа на  $T$  для всех  $T \in \mathcal{T}_h$ .  $\blacksquare$

#### 4.1.2. Определение приближенной задачи

В задаче ( $P_0$ ) ограничимся случаем, когда

$$(4.11) \quad L(v) = \int_{\Omega} fv dx dy, \quad f \in L^q(\Omega),$$

тогда для  $a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v dx dy$ , будем иметь

$$(4.12) \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f v dx dy$$

и задачу

$$(P_0) \left\{ \begin{array}{l} \min_{v \in K_0} J(v), \\ K_0 = [v \mid v \in H_0^1(\Omega), |\text{grad } v| \leqslant 1 \text{ п. в.}] \end{array} \right.$$

Определим теперь приближенную задачу

$$(4.13) \quad (P_{0h}) \min_{v_h \in K_0 \cap V_h} J(v_h). \blacksquare$$

**Замечание 4.2.** Из условия  $v_h \in K_0 \cap V_h \Rightarrow |\text{grad } v_h|^2 \leqslant 1$  п. в., если положить (см. (4.10))

$$(4.14) \quad v_h = \sum_{M \in \dot{\Sigma}_h} v_M w_M, \quad v_M \in R,$$

то приближенная задача (4.13) приводится — с учетом замечания 4.1 — к задаче оптимизации в  $\mathbb{R}^N$  с  $N' (= \text{Card}(\mathcal{T}_h))$  квадратичными ограничениями на переменные  $v_M$ . ■

#### 4.1.3. О разрешимости приближенной задачи

Так как функционал  $J$  обладает всеми нужными нам свойствами (см. разд. 2.1 гл. 1), то имеет место

**Предложение 4.2.** Приближенная задача (4.13) имеет единственное решение, характеризуемое условиями

$$(4.15) \quad a(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx dy \quad \forall v_h \in K_0 \cap V_h,$$

$$u_h \in K_v \cap V_h. \quad \blacksquare$$

#### 4.1.4. Развернутая формулировка приближенной задачи

Пусть  $M_1, M_2, M_3$  — вершины треугольника  $T \in \mathcal{T}_h$  с координатами  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; тогда аффинная функция  $\phi$ , определяемая условиями

$$(4.16) \quad \phi(M_i) = v_{M_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

записывается следующим образом:

$$(4.17) \quad \phi(x, y) = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^3 (\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i) v_{M_i},$$

где

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= y_3 - y_2, & \beta_1 &= x_3 - x_2, & \gamma_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, \\ \alpha_2 &= y_3 - y_1, & \beta_2 &= x_1 - x_3, & \gamma_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, \\ \alpha_3 &= y_1 - y_2, & \beta_3 &= x_2 - x_1, & \gamma_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{aligned}$$

и

$$(4.19) \quad \delta = \sum_{i=1}^3 \gamma_i,$$

$|\delta| = 2 \cdot$  (площадь треугольника с вершинами  $M_1, M_2, M_3$ ). ■

Ниже через  $m(T)$  мы будем обозначать площадь треугольника  $T$ ; для упрощения записи положим  $v_{M_i} = v_i$ .

Пусть  $v_h \in V_h$ , тогда (см. (4.14))

$$(4.20) \quad v_h(x, y) = \sum_{M \in \Sigma_h} c_M w_M(x, y).$$

Функцию  $v_h$  можно (и полезно), очевидно, определить с использованием характеристических функций треугольников  $T \in \mathcal{T}_h$ :

с учетом определений (4.16) и (4.18) и используя очевидные обозначения, имеем

$$(4.21) \quad v_h(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{m(T)} \left( \sum_{i=1}^3 (\alpha_{iT}x + \beta_{iT}y + \gamma_{iT}) v_i \right) \theta_T(x, y),$$

где

$$(4.22) \quad \theta_T = \text{характеристическая функция } T.$$

Из определения находим

$$(4.23) \quad \frac{\partial v_h}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{m(T)} \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_{iT} v_{iT} \right) \theta_T(x, y),$$

$$(4.24) \quad \frac{\partial v_h}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{m(T)} \left( \sum_{i=1}^3 \beta_{iT} v_{iT} \right) \theta_T(x, y),$$

$$(4.25) \quad |\operatorname{grad} v_h(x, y)|^2 = \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{(m(T))^2} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_{iT} v_{iT} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \beta_{iT} v_{iT} \right)^2 \right] \theta_T(x, y),$$

откуда

$$(4.26) \quad J(v_h) = \frac{1}{8} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{m(T)} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_{iT} v_{iT} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \beta_{iT} v_{iT} \right)^2 \right] - \sum_{M \in \Sigma_h} v_M \int_{\Omega} f(x, y) w_M(x, y) dx dy$$

и, кроме того,

$$(4.27) \quad v_h \in K_0 \cap V_h \Leftrightarrow \frac{1}{4(m(T))^2} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_{iT} v_{iT} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \beta_{iT} v_{iT} \right)^2 \right] \leqslant 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

что позволяет записать в развернутом виде задачу ( $P_{0h}$ ) как задачу отыскания неизвестных  $v_M$ . ■

*Замечание 4.3.* В формуле (4.26) интеграл

$$\int_{\Omega} f(x, y) w_M(x, y) dx dy$$

в действительности берется по области, совпадающей с носителем функции  $w_M$ . ■

**Замечание 4.4.** На языке метода конечных элементов положительно определенная симметричная матрица, соответствующая квадратичной части функционала  $J(v_h)$ , называется матрицей жесткости, отвечающей рассматриваемому разбиению; в приближенной задаче она играет ту же роль, что и оператор  $-\Delta$  в непрерывной задаче. ■

#### 4.1.5. Об использовании конечных элементов порядка выше 1

В разд. 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 были рассмотрены полиномиальные аппроксимации степени, не превосходящей 1 на каждом треугольнике  $T \in \mathcal{T}_h$ , поэтому градиент был постоянен на  $T$  для всех  $T \in \mathcal{T}_h$ . Использование полиномиальных аппроксимаций степени, не превосходящей  $k (\geq 2)$ , приводит, вообще говоря, к градиенту, являющемуся полиномом от  $x, y$  степени  $k-1 \geq 1$  (следовательно, *не постоянным*) на  $T$  для всех  $T \in \mathcal{T}_h$ .

В этом случае приближенную формулировку условия  $|\operatorname{grad} v(x, y)| \leq 1$  п. в. можно осуществить различными способами (приведенный список неполный):

$$(4.28) \quad \begin{cases} |\operatorname{grad} v_h(G_T)| \leq 1 & \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ G_T = \text{центр тяжести треугольника } T, \end{cases}$$

$$(4.29) \quad \frac{1}{m(T)} \int_T |\operatorname{grad} v_h(x, y)|^2 dx dy \leq 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

$$(4.30) \quad |\operatorname{grad} v_h(x, y)| \leq 1 \quad \text{п. в. в } \Omega_h,$$

$$(4.31) \quad \frac{1}{m(T)} \int_T |\operatorname{grad} v_h(x, y)| dx dy \leq 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

При вычислениях условия (4.28), (4.29) нетрудно записать через коэффициенты рассматриваемых полиномиальных аппроксимаций на  $T$ ; фактическая проверка условия (4.30) осуществляется без затруднений только для  $k=2$ ; в самом деле, в этом частном случае отображение  $g_T: T \rightarrow R$ , определенное по формуле

$$(4.32) \quad g_T(x, y) = |\operatorname{grad} v_h(x, y)|^2 \quad \forall (x, y) \in T,$$

представляет собой полином степени, не превосходящей  $2(k-1) = 2$ , и его матрица — гессиан (т. е. матрица из вторых производных) постоянна и (по крайней мере) положительно полуопределенна, следовательно, максимум  $g_T$  достигается на одной из вершин треугольника  $T$ , откуда вытекает, что необходимо удовлетворить трем ограничениям на каждом треугольнике  $T \in \mathcal{T}_h$ . Промежуточные вычисления, необходимые для раскрытия (а также проверки) условия (4.30), приводят к тому, что для  $k \geq 3$  использовать эту формулировку затруднительно; такая же ситуация имеет место и для (4.31) (как только  $k \geq 2$ ), так

как при проверке этого условия возникает необходимость вычислять интеграл в левой его части каким-либо приближенным методом, поскольку точно вычислить этот интеграл в общем случае невозможно. ■

Пусть  $V_h$  — подпространство  $H_0^1(\Omega)$ , такое, что  $v_h \in V_h \Rightarrow v_h$  — полином на  $T$  степени, не превосходящей  $k$ , следовательно, рассматриваемая аппроксимация — внутренняя в смысле определения разд. 4 гл. 1. Заметим, что в общем случае (исключая  $k=1$ <sup>1)</sup>) из выполнения условий (4.28), (4.29), (4.31) не следует условие

$$v_h \in K_0 = [v \mid v \in H_0^1(\Omega), |\operatorname{grad} v| \leq 1 \text{ п. в.}],$$

причем последнее имеет место только для формулировки (4.30).

При использовании (4.30) приближенная задача  $\min_{v_h \in K_0 \cap V_h} J(v_h)$

в случае  $k=2$  представляет собой конечномерную задачу оптимизации с  $3 \operatorname{Card}(\mathcal{T}_h) = 3N'$  квадратичными ограничениями вместо  $N'$  ограничений для  $k=1$  (если только триангуляции совпадают<sup>2)</sup>). ■

## 4.2. Метод внутренней аппроксимации, использующий собственные функции оператора $-\Delta$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$

### План изложения

Предположим (что на практике встречается редко), что известны собственные функции оператора  $-\Delta$  в  $H_0^1(\Omega)$ ; цель такого подхода состоит в том, чтобы показать трудности использования схем повышенной точности в односторонних задачах (это ясно будет видно в разд. 9), если только ограничения — точечные, как это имеет место в случае множества  $K_0$ . ■

#### 4.2.1. Аппроксимация $H_0^1(\Omega)$

Так как область  $\Omega$  ограничена, то спектр оператора  $-\Delta$  в  $H_0^1(\Omega)$  бесконечен; будем обозначать

$$(4.33) \quad (\beta_m)_{m \in N} = \text{спектр } -\Delta \text{ в } H_0^1(\Omega) \quad (\beta_m > 0, \forall m),$$

1) В этом случае условия (4.28), (4.29), (4.30) и (4.31) совпадают.

2) Главная причина перехода от  $k=1$  к  $k=2$  состоит скорее в стремлении уменьшить число треугольников, а не в том, чтобы увеличить точность.

соответствующие собственные функции будем обозначать через  $w_m$ ; имеем

$$(4.34) \quad \begin{cases} -\Delta w_m = \beta_m w_m & \forall m \in N, \\ w_m \in H_0^1(\Omega) & \forall m \in N. \end{cases}$$

Напомним, что

$$(4.35) \quad \int_{\Omega} w_m(x) w_n(x) dx = 0 \text{ для } m \neq n;$$

будем предполагать, что

$$(4.36) \quad \int_{\Omega} |w_m(x)|^2 dx = 1 \quad \forall m \in N.$$

Так как множество  $(w_m)_{m \in N}$  можно взять за базис в методе Галеркина в  $H_0^1(\Omega)$ , то  $H_0^1(\Omega)$  можно приближать семейством пространств  $(V_M)_{M \in N}$ , определяемых по формуле:

$$(4.37) \quad V_M = \text{подпространство } H_0^1(\Omega), \text{ натянутое на функции } (w_m)_{1 \leq m \leq M}.$$

#### 4.2.2. Аппроксимация $K_0$

Пусть в вычислениях используется множество  $K_0 \cap V_M$ , тогда для  $v \in V_M$  ограничимся проверкой условия  $|\operatorname{grad} v| \leq 1$  на конечном множестве точек  $\Omega$  (или  $\bar{\Omega}$ ), которое мы будем обозначать через  $\Omega_h$  (соответственно  $\bar{\Omega}_h$ ); откуда следует аппроксимация<sup>1)</sup>  $K_0$  множеством  $K_{0h}^M$ :

$$(4.38) \quad K_{0h}^M = [v | v \in V_M; |\operatorname{grad} v(P)| \leq 1 \quad \forall P \in \Omega_h].$$

Аналогичное определение получается при замене  $\Omega_h$  областью  $\bar{\Omega}_h$ . ■

*Замечание 4.5.* Использованный здесь метод аппроксимации принадлежит к коллокационным; следуя Дж. Б. Розену [3], зададим число  $h > 0$  (которое мы будем устремлять к нулю) и построим следующий естественный способ аппроксимации (который будет реализован в разд. 9):

$$(4.39) \quad R_h = [x | x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 = ih, x_2 = jh, i, j \in \mathbb{Z}],$$

$$(4.40) \quad \Omega_h = \Omega \cap R_h.$$

Аналогичным образом, задав конечное подмножество точек  $\Gamma_h$  множества  $\Gamma$ , по меньшей мере одна из координат которых кратна  $h$ , определим множество  $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$ . ■

<sup>1)</sup> Эта аппроксимация будет обоснована в разд. 6.

### 4.2.3. Определение приближенной задачи

Пусть функционал  $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  задан, как и выше, в виде

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv dx,$$

где  $f \in L^2(\Omega)$ ; приближенную задачу определим как задачу разыскания

$$(4.41) \quad \min_{v \in K_{0h}^M} J(v). \blacksquare$$

### 4.2.4. О разрешимости приближенной задачи

Так как функционал  $J$  и множество  $K_{0h}^M$  обладают всеми нужными нам свойствами (см. разд. 2.1 гл. 1), то имеет место

**Предложение 4.3.** Приближенная задача (4.41) имеет единственное решение  $u_h^M$ , характеризующееся условиями

$$(4.42) \quad \begin{cases} a(u_h^M, v - u_h^M) \geq \int_{\Omega} f(v - u_h^M) dx \quad \forall v \in K_{0h}^M, \\ u_h^M \in K_{0h}^M. \end{cases}$$

### 4.2.5. Развернутая формулировка приближенной задачи

Пусть  $v \in V_M$ , тогда

$$(4.43) \quad v = \sum_{i=1}^M \mu_i w_i, \quad \mu_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, M,$$

и с учетом ортонормированности системы функций  $(w_m)_{m \in N}$  имеем

$$(4.44) \quad J(v) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \beta_m \mu_m^2 - \sum_{m=1}^M f_m \mu_m \quad \forall v \in V_M.$$

Кроме того,

$$(4.45) \quad |\operatorname{grad} v(P)|^2 = \left( \sum_{m=1}^M \mu_m \frac{\partial w_m}{\partial x_1}(P) \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^M \mu_m \frac{\partial w_m}{\partial x_2}(P) \right)^2.$$

Полагая  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$  и учитывая выражения (4.44), (4.45), приближенную задачу (4.41) в развернутом виде запишем:

$$(4.46) \quad \begin{aligned} & \min_{\mu} \left[ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \beta_m \mu_m^2 - \sum_{m=1}^M f_m \mu_m \right], \\ & \mu \in \left[ \mu \mid \mu \in R^M, \left( \sum_{m=1}^M \mu_m \frac{\partial w_m}{\partial x_1}(P) \right)^2 + \left( \sum_{m=1}^M \mu_m \frac{\partial w_m}{\partial x_2}(P) \right)^2 \leq \right. \\ & \quad \left. \leq 1 \quad \forall P \in \Omega_h \text{ (или } \bar{\Omega}_h) \right]. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание 4.6.** Из формул (4.44) видно, что матрица, соответствующая квадратичной части функционала  $J$ , рассматриваемой как функция переменных  $\mu$ , является диагональной, и такая ситуация — наилучшая по сравнению с тем, что может дать любой другой способ аппроксимации; однако в ограничениях  $|\operatorname{grad} v(P)| \leq 1 \quad \forall P \in \Omega_h$  (или  $\bar{\Omega}_h$ ) с необходимостью содержатся в явном виде все координаты вектора  $\mu$  (что не имеет места для внутренних аппроксимаций, рассмотренных в разд. 4.1, а также для внешних аппроксимаций, изучаемых в разд. 5), и это обстоятельство сильно ограничивает возможности использования данного типа аппроксимаций. ■

## 5. Внешние аппроксимации задачи $(P_0)$

### 5.1. Аппроксимации функционала $J$

#### 5.1.1. Первая внешняя аппроксимация функционала $J$

Будем сохранять определения и формулировки разд. 3.2.1: для элемента  $f \in L^2(\Omega)$  аппроксимация функционала  $J(v) = -\frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv dx$  функцией  $J_h^1: V_h \rightarrow \mathbb{R}$  определяется по

формуле

$$(5.1) \quad J_h^1(v_h) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx - \int_{\Omega} f q_h v_h dx,$$

функция (5.1) в явном виде записывается следующим образом:

$$(5.2) \quad J_h^1(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \left| \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i-1,j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right] - h^2 \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} f_{ij} v_{ij},$$

где

$$(5.3) \quad f_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{\tilde{\omega}_h^0(M_{ij})} f(x) dx \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h;$$

множества  $\Omega_h$ ,  $\bar{\Omega}_h$  были определены в разд. 3.2.1; замечание 3.1 остается в силе и для функции (5.2). ■

### 5.1.2. Вторая внешняя аппроксимация функционала $J$

Ниже мы будем использовать также следующую аппроксимацию функционала  $J$ :

$$(5.4) \quad J_h^2(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left( \frac{\delta_1 q_h v_h(x_1, x_2 + \frac{h}{2}) + \delta_1 q_h v_h(x_1, x_2 - \frac{h}{2})}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\delta_2 q_h v_h(x_1 + \frac{h}{2}, x_2) + \delta_2 q_h v_h(x_1 - \frac{h}{2}, x_2)}{2} \right)^2 \right] \times \\ \times dx - \int_{\Omega} f q_h v_h dx.$$

Прежде чем записывать функцию (5.4) в явном виде, определим сетку  $Q_h$  по формуле

$$(5.5) \quad Q_h = \left\{ M \mid M \in \mathbb{R}^2, x_1 = (2i+1) \frac{h}{2}, x_2 = (2j+1) \frac{h}{2}, i, j \in \mathbb{Z} \right\}$$

и будем обозначать (см. рис. 5.1)

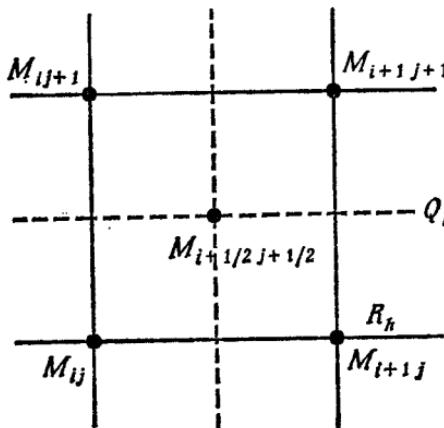


Рис. 5.1.

$$(5.6) \quad M_{i+1/2,j+1/2} = \left\{ (2i+1) \frac{h}{2}, (2j+1) \frac{h}{2} \right\}.$$

Определим множество  $\Sigma_h$  следующим образом:

$$(5.7) \quad \Sigma_h = \left\{ M \mid M \in Q_h, \text{ по крайней мере одна из } 4 \text{ вершин} \omega_h^0(M) \text{ принадлежит } \Omega_h \right\}.$$

Функцию (4.50) теперь можно записать в явном виде:

$$(5.8) \quad J_h^2(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{i+1/2,j+1/2} \in \Sigma_h} \left[ \left( \frac{v_{i+1,j+1} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{i+1,j} - v_{ij+1}}{h} \right)^2 \right] - \\ - h^2 \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} f_{ij} v_{ij},$$

где  $f_{ij}$  определяются, как и ранее, по формуле (5.3) и  $v_{pq} = 0$  для  $M_{pq} \notin \Omega_h$ . ■

## 5.2. Внешние аппроксимации множества $K_0$

Следующий способ аппроксимации  $K_0$  представляется естественным:

$$(5.9) \quad K_{0h}^1 = \{ v_h | v_h \in V_h, |\delta_1 q_h v_h|^2 + |\delta_2 q_h v_h|^2 \leq 1 \text{ п. в.} \},$$

здесь функция  $|\delta_1 q_h v_h|^2 + |\delta_2 q_h v_h|^2$  — постоянная на квадрате  $N^o = 1$  (соответственно 2, 3, 4) со стороной длины  $h/2$ , показан-

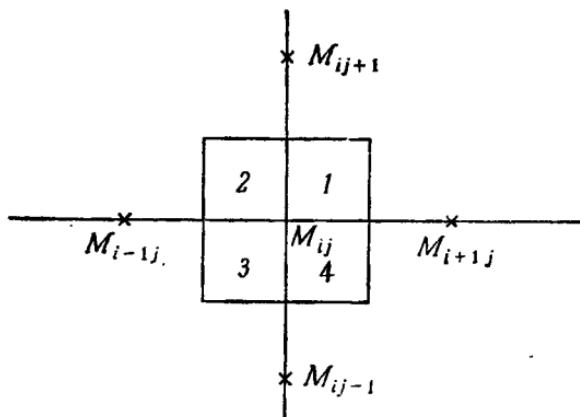


Рис. 5.2.

ном на рис. 5.2, и равна

$$\left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2;$$

развернутая форма аппроксимации (5.9) записывается следующим образом:

$$(5.10) \quad \begin{aligned} K_{0h}^1 = & \left\{ v_h | v_h \in V_h, \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \leq 1, \right. \\ & \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \leq 1, \\ & \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \leq 1, \\ & \left. \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \leq 1 \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h \right\}, \end{aligned}$$

причем в формуле (5.10)  $v_{pq} = 0$  для  $M_{pq} \notin \Omega_h$ . ■

Из формулы (5.10) вытекает, что использование аппроксимации  $K_{0h}^1$  приводит примерно к  $4 \text{Card}(\Omega)$  квадратичным ограни-

чениям. Для уменьшения количества ограничений до числа порядка  $\text{Card}(\Omega_h)$  можно взять среднее из ограничений (5.10) в надлежащим образом выбранных точках  $R_h$  или  $Q_h$ , откуда получаем

$$(5.11) \quad K_{0h}^2 = \left\{ v_h \mid v_h \in V_h, \frac{1}{2} \left[ \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij+1}}{h} \right|^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left| \frac{v_{i+1j+1} - v_{i+1j}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right] \leq 1 \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h \right\}.$$

Определение множества  $K_{0h}^2$  можно интерпретировать как некоторую аппроксимацию ограничения  $|\operatorname{grad} v|^2 \leq 1$ ; множество  $K_{0h}^2$  можно определить также по формуле

$$(5.12) \quad K_{0h}^2 = \left\{ v_h \mid v_h \in V_h, \frac{1}{2} \left[ \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) \right|^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right) \right|^2 + \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 \right] \leq 1 \text{ п. в. } \right\}. \blacksquare$$

Для того чтобы определить третью внешнюю аппроксимацию множества  $K_0$ , введем множество  $0_h$  следующим образом:

$$(5.13) \quad 0_h = \bigcup_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} \bar{\omega}_h^0(M_{i+1/2j+1/2}).$$

Рассмотрим теперь внешнюю аппроксимацию

$$(5.14) \quad K_{0h}^3 = \left\{ v_h \mid v_h \in V_h, \frac{\int_{\text{мера } (M_{ij})}^{[\delta_1 q_h v_h]^2 + [\delta_2 q_h v_h]^2} dx}{\bar{\omega}_h^0(M_{ij})} \leq \right.$$

$$\left. \leq 1 \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h \right\};$$

явная формулировка условия принадлежности множеству  $K_{0h}^3$  приводит к необходимости различать 3 случая:

Если  $M_{ij} \in \Omega_h$ , то

$$(5.15) \quad \frac{1}{2} \left[ \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right] \leq 1,$$

где  $v_{pq} = 0$  при  $M_{pq} \notin \Omega_h$ .

Если  $M_{ij} \in \Gamma_h$  и существует лишь одна соседняя с  $M_{ij}$  точка из  $\Omega_h$  (например, точка  $M_{i+1j}$ , см. рис. 5.3), то

$$(5.16) \quad \frac{1}{h} |v_{i+1j} - v_{ij}| \leq 1,$$

и так как в действительности  $v_{ij} = 0$ , то

$$(5.17) \quad \frac{1}{h} |v_{i+1j}| \leq 1.$$

Если  $M_{ij} \in \Gamma_h$  и существуют две соседние с  $M_{ij}$  точки из  $\Omega_h$  (например, точки  $M_{i+1j}$ ,  $M_{ij-1}$  — см. рис. 5.4), то

$$(5.18) \quad \frac{2}{3} \left[ \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right] \leq 1,$$

и так как  $v_{ij} = 0$ , имеем:

$$(5.19) \quad \frac{2}{3h^2} (v_{i+1j}^2 + v_{ij-1}^2) \leq 1.$$

Формулы, определяющие множество  $K_{0h}^3$ , можно интерпретировать как некоторую аппроксимацию ограничения  $|\operatorname{grad} v|^2 \leq 1$  в точке  $M_{ij} \in \bar{\Omega}_h$ . ■

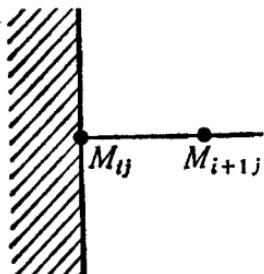


Рис. 5.3. Область вне  $\Omega_h$  заштрихована.

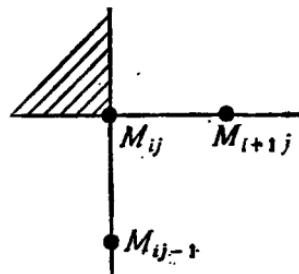


Рис. 5.4. Область вне  $\Omega_h$  заштрихована.

Мы будем использовать также следующую внешнюю аппроксимацию множества  $K_0$ :

$$(5.20) \quad \begin{aligned} K_{0h}^4 = & \left\{ v_h \mid v_h \in V_h, \right. \\ & \left| \frac{\delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) + \delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right)}{2} \right|^2 + \\ & + \left| \frac{\delta_2 q_h v_h \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) + \delta_2 q_h v_h \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right)}{2} \right|^2 \leq 1 \text{ п. в.} \right\}, \end{aligned}$$

которая в развернутом виде такова:

$$(5.21) \quad K_{0h}^4 = \left\{ v_h \mid v_h \in V_h, \left| \frac{v_{i+1,j+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i+1,j} - v_{ij+1}}{h} \right|^2 \leq 2 \right. \\ \left. \forall M_{i+1/2, j+1/2} \in \Sigma_h \right\},$$

где  $v_{pq} = 0$  при  $M_{pq} \notin \Omega_h$ . ■

**Замечание 5.1.** Существуют, очевидно, другие внешние аппроксимации множества  $K_0$ ; например, для аппроксимации ограничения  $|\operatorname{grad} v|^2 \leq 1$  в точке  $M_{ij}$  можно использовать условие

$$(5.22) \quad \left| \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h} \right|^2 \leq 1,$$

однако, не вдаваясь в подробности, заметим, что при использовании условия (5.22) возникают серьезные осложнения с устойчивостью численного решения. ■

### 5.3. Формулировка приближенной задачи

Определим функционалы  $J_h^l$  ( $l = 1, 2$ ) и выпуклые множества  $K_{0h}^m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) так, как это сделано в разд. 5.1 и 5.2; в качестве приближенных задач будем брать задачи

$$(5.23) \quad (P_{0h})_{lm}: \min_{v_h \in K_{0h}^m} J_h^l(v_h). \quad ■$$

### 5.4. Разрешимость приближенной задачи

Рассуждения, приведенные ранее в разд. 5.3.2 гл. 2 (или разд. 3.2.2 гл. 3), проходят и в рассматриваемом случае, если заметить, что отображения

$$(5.24) \quad v_h \rightarrow \left( \int_{\Omega} (|\delta_1 q_h v_h|^2 + |\delta_2 q_h v_h|^2) dx \right)^{1/2},$$

$$(5.25) \quad v_h \rightarrow \left( \int_{\Omega} \left( \left| \frac{\delta_1 q_h v_h(x_1, x_2 + \frac{h}{2}) + \delta_1 q_h v_h(x_1, x_2 - \frac{h}{2})}{2} \right|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left| \frac{\delta_2 q_h v_h(x_1 + \frac{h}{2}, x_2) + \delta_2 q_h v_h(x_1 - \frac{h}{2}, x_2)}{2} \right|^2 \right) dx \right)^{1/2}$$

определяют нормы на  $V_h$  и что выпуклые множества  $K_{0h}^m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) замкнуты в  $V_h$ ; следовательно, имеет место существование и единственность оптимального решения задачи  $(P_{0h})_{lm}$ . ■

Сходимость при  $h \rightarrow 0$  последовательности решений будет изучена в разд. 6.

## 6. Сходимость внешних и внутренних аппроксимаций

### План изложения

В этом разделе будет показана сходимость аппроксимаций, рассмотренных в разд. 4 и 5; для исследования внутренних аппроксимаций будут использованы методы разд. 4 гл. 1, для исследования внешних — методы разд. 5 гл. 1.

Основой доказательства сходимости для различных рассмотренных нами аппроксимаций служит один результат о плотности. ■

### 6.1. Одна лемма о плотности

Сейчас будет доказана

**Лемма 6.1.** Имеет место равенство

$$(6.1) \quad \overline{\mathcal{D}(\Omega) \cap K_0} = K_0.$$

*Доказательство.* Будем действовать (как и в разд. 3.3.2, замечании 3.3) методом усечения и регуляризации, следовательно, имеем два этапа:

1) Пусть заданы элемент  $v \in K_0$  и число  $\varepsilon > 0$ ; определим элемент  $v_\varepsilon = \tau_\varepsilon(v)$  (как и в (3.34)) по формуле

$$(6.2) \quad \tau_\varepsilon(v) = v_\varepsilon = (v - \varepsilon)^+ - (v + \varepsilon)^-;$$

тогда  $\tau_\varepsilon(v) \in H^1(\Omega)$ , причем  $|\operatorname{grad} \tau_\varepsilon(v)| \leq 1$  почти всюду в  $\Omega$ ; так как

$$K_0 \subset K_1 = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \text{ п. в.}\},$$

то (как и в (3.35))

$$(6.3) \quad v_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \delta(x, \Gamma) \leq \varepsilon, \\ \leq \delta(x, \Gamma) - \varepsilon & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

следовательно,  $\tau_\varepsilon(v) \in K_0 \forall \varepsilon > 0$ .

С другой стороны,

$$(6.4) \quad \tau_\varepsilon v \rightarrow v \text{ в } H^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

так что

(6.5) достаточно приблизить функцию  $v \in K_0$ , равную нулю в окрестности границы  $\Gamma$ .

2) Продолжим функцию  $v$  ( $v \in K_0$ ) функцией  $\tilde{v}$ , определенной на всем пространстве  $\mathbb{R}^2$  и равной нулю вне  $\Omega$ , очевидно,  $\tilde{v} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $|\operatorname{grad} \tilde{v}| \leq 1$  п. в. в  $\mathbb{R}^2$ .

Пусть  $(\rho_n)_n$  — последовательность регуляризирующих функций; определим функцию  $\tilde{v}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  по формуле

$$(6.6) \quad \tilde{v}_n = \tilde{v} * \rho_n \quad (\tilde{v}_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{v}(y) \rho_n(x-y) dy);$$

имеем

$$(6.7) \quad \tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \text{ сильно в } H^1(\mathbb{R}^2).$$

Заметим, что

$$(6.8) \quad v_n = \text{сужение } \tilde{v}_n \text{ на область } \Omega;$$

так что, если  $v$  удовлетворяет условию (6.5) и  $n$  достаточно велико, то

$$(6.9) \quad \text{носитель } (\tilde{v}_n) \subset \Omega \Rightarrow \begin{cases} v_n \in \mathcal{D}(\Omega), \\ v_n \rightarrow v \text{ сильно в } H_0^1(\Omega) \text{ при } n \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Мы сейчас докажем, что  $v_n \in K_0$ ; в самом деле,

$$(6.10) \quad \operatorname{grad} \tilde{v}_n = \rho_n * \operatorname{grad} \tilde{v},$$

отсюда следует, что

$$(6.11) \quad |\operatorname{grad} \tilde{v}_n(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(x-\eta) |\operatorname{grad} \tilde{v}(\eta)| d\eta \leqslant \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(x-\eta) d\eta = 1. \blacksquare$$

*Замечание 6.1.* Так как функции множества  $K_0$  равномерно непрерывны на  $\bar{\Omega}$  (и даже равномерно удовлетворяют условию Липшица с коэффициентом 1), а множество  $K_0$  ограничено в  $L^\infty(\Omega)$ , то  $K_0$  — сильно компактно в  $L^\infty(\Omega)$  (по теореме Асколи), так что, если  $v_n \in K_0 \forall n$   $v_n \rightarrow v$  в  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , то  $v \in K_0$  и  $v_n \rightarrow v$  сильн $\circ$  в  $L^\infty(\Omega)$  (т. е. равномерно). ■

## 6.2. Сходимость внутренних аппроксимаций

### 6.2.1. Сходимость метода конечных элементов

Используя результаты, полученные в разд. 4.3 и 4.4 гл. 1, мы сейчас исследуем вопрос о сходимости внутренних аппроксимаций, построенных в разд. 4.1; напомним, что параметр  $h$  был определен следующим образом:

$$(6.14) \quad \varphi(h) = h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} (\text{площадь } T).$$

Будем говорить, что  $\lim_{h \rightarrow 0} (\Omega - \Omega_h) = 0$ , если для любого компакта  $K \subset \Omega$  и для достаточно малых  $h$  выполняется включение  $\Omega_h \supset K$ . Таким образом, имеет место

**Теорема 6.1.** Если  $\Omega - \Omega_h \rightarrow 0$  и для любого  $h$  любой угол  $\theta$  треугольника  $T \forall T \in \mathcal{T}_h$  удовлетворяет условию  $\theta \geqslant \theta_0 > 0$ , то  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , где  $u_h$  — решение приближенной задачи  $(P_{oh})$  — задачи (4.13) разд. 4.1.2,  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ .

**Доказательство.** Будем использовать теорему 4.2 разд. 4.4 гл. 1; для этого необходимо проверить выполнение условий:

- (i)  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  существует  $v_h \in V_h$ , такое, что  $v_h \rightarrow v$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ ,
- (ii)  $\forall v \in K_0$  существует  $v_h \in K_0 \cap V_h$ , такое, что  $v_h \rightarrow v$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ , причем для каждого из этих двух условий достаточно выбрать  $v$  из множества, плотного в  $H_0^1(\Omega)$  для условия (i), в  $K_0$  — для условия (ii) (см. (4.2) и замечание 4.1 гл. 1).

Как обычно, выберем  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  и для всех

$$T = \{\text{треугольник } M_1 M_2 M_3\} \in \mathcal{T}_h$$

введем аффинную на  $T$  функцию  $\Phi_T$ , удовлетворяющую условиям

$$(6.15) \quad \Phi_T(M_i) = v(M_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Определим теперь функцию  $v_h$  следующим образом:

$$(6.16) \quad v_h = \Phi_T \text{ на } T.$$

Используя разложения в ряд Тейлора до членов второй степени<sup>1)</sup>, легко доказать, что

<sup>1)</sup> Систематическое исследование этого вопроса см. в работе Сиарле и Вагшала [1].

$$(6.17) \quad |\Phi_T(x) - v(x)| \leq c_1(v)h \quad \forall x \in T,$$

$$(6.18) \quad |\operatorname{grad} \Phi_T(x) - \operatorname{grad} v(x)| \leq c_2(v) \sqrt{h} \quad \forall x \in T;$$

константы  $c_1(v)$  и  $c_2(v)$  здесь зависят от функции  $v$ .

Из этих оценок и определения (6.16) немедленно следует, что

$$(6.19) \quad v_h \rightarrow v \text{ в } H_0^1(\Omega),$$

откуда и вытекает условие (i) (для функций множества  $\mathcal{D}(\Omega)$ , плотного в  $H_0^1(\Omega)$ ).

Для доказательства (ii) используем лемму 6.1, в соответствии с которой можно выбрать  $v$  из множества  $K_0 \cap \mathcal{D}(\Omega)$ ; поскольку

$$(6.20) \quad v := \lim (\lambda v) \text{ в } H_0^1(\Omega), \quad \lambda < 1, \quad \lambda \rightarrow 1,$$

то можно ограничиться случаем, когда

$$(6.21) \quad v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad |\operatorname{grad} v(x)| \leq \lambda < 1.$$

Таким образом, для любого  $T \in \mathcal{T}_h$  имеет место оценка

$$(6.22) \quad |\operatorname{grad} v_h(x)| = |\operatorname{grad} \Phi_T(x)| \leq |\operatorname{grad} v(x)| + \\ + c_2(v) \sqrt{h} \leq \lambda + c_2(v) \sqrt{h},$$

из которой следует, что

$$(6.23) \quad v_h \in K_0 \text{ для достаточно малых } h \text{ (таких, что} \\ \lambda + c_2(v) \sqrt{h} \leq 1),$$

что в совокупности с условием (6.19) и дает нам условие (ii).

И, наконец, из замечания 6.1 имеем

$$(6.24) \quad u_h \rightarrow u \text{ сильно в } L^\infty(\Omega). \blacksquare$$

*Замечание 6.2.* В работе Фалка [1] получена оценка погрешности аппроксимации в зависимости от параметра  $h$ ; подчеркнем, что условия (на область  $\Omega$  и триангуляцию  $\mathcal{T}_h$ ), при которых эта оценка имеет место, более ограничительны, нежели предположения разд. 4.1.1 и теоремы 6.1.  $\blacksquare$

## 6.2.2. Сходимость метода внутренней аппроксимации, использующего собственные функции оператора $-\Delta$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$

Исследуем сходимость построенной в разд. 4.2 внутренней аппроксимации  $u_h^M$ , сохраняя при этом введенные ранее обозначения. Будем предполагать, что ограничение  $|\operatorname{grad} v| \leq 1$  выполняется на множестве  $\Omega_h$ , определение которого было дано в замечании 4.5 разд. 4.5 (формулы (4.39), (4.40)). Будем предполагать

также, что спектр  $(\beta_m)_{m \in N}$  оператора  $-\Delta$  упорядочен по возрастанию собственных значений, т. е.

$$(6.25) \quad \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots$$

Тогда для решения и задачи  $(P_0)$  имеет место

**Теорема 6.2.** Если  $M \rightarrow +\infty$ ,  $h \rightarrow 0$ , причем

$$(6.26) \quad h\beta'_M \rightarrow 0, \quad r > 1 \text{ — вещественное число,}$$

то

$$(6.27) \quad u_h^M \rightarrow u \text{ сильно в } H_0^1(\Omega).$$

*Доказательство.* Будем использовать теорему 4.2 разд. 4.4 гл. 1, принимая при этом во внимание замечание 4.1 разд. 4.3 гл. 1; единственныe неочевидные условия, которые необходимо здесь установить, состоят в том, что при сформулированных выше ограничениях на  $M$  и  $h$

$$(6.28) \quad \forall v \in \chi \subset K_0, \quad \bar{\chi} = K_0 \text{ существует функция } v_h^M \in K_{0h}^M, \\ \text{такая, что } v_h^M \rightarrow v \text{ сильно в } H_0^1(\Omega),$$

$$(6.29) \quad \text{если } v_h^M \in K_{0h}^M, \quad v_h^M \rightarrow v \text{ слабо в } H_0^1(\Omega) \text{ то } v \in K_0.$$

*Проверка условия (6.28)*

Действуя таким же образом, как и при доказательстве теоремы 6.1, определим множество  $\chi$  по формуле

$$(6.30) \quad \chi = \bigcup_{0 < \lambda < 1} \lambda \{K_0 \cap \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

Пусть  $v \in \chi$ ; зададим  $v^M$  в виде суммы первых  $M$  членов разложения Фурье функции  $v$  по системе собственных функций  $(w_m)_{m \in N}$ ; так как функции  $w_m$  ортонормированы, то

$$(6.31) \quad v^M = \sum_{m=1}^M (w_m, v)_{L^2(\Omega)} w_m.$$

Так как  $v \in \chi \subset \mathcal{D}(\Omega)$ , то

$$(6.32) \quad (-\Delta)^q v \in H_0^1(\Omega) \quad \forall q \geq 0,$$

откуда вытекает (см. Лионс — Мадженес [1]), что при  $M \rightarrow +\infty$ :

$$(6.33) \quad v^M \rightarrow v \text{ сильно в } H^s(\Omega) \quad \forall s \geq 0 \Rightarrow v^M \rightarrow v \\ \text{сильно в } C^k(\bar{\Omega}) \quad \forall k \geq 1$$

и, в частности, что

$$(6.34) \quad \operatorname{grad} v^M \rightarrow \operatorname{grad} v \text{ сильно в } C^0(\Omega) \quad \forall v \in \chi;$$

1) Здесь необходимо предполагать, что  $\Gamma$  достаточно регулярна.

следовательно, существует функция  $\eta(M) > 0$ , такая, что  $\eta(M) \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow +\infty$  равномерно относительно  $x \in \Omega$ , причем

$$(6.35) \quad |\operatorname{grad} v^M(x)| \leq |\operatorname{grad} v(x)| + \eta(M) \leq \lambda + \eta(M) < 1 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

для достаточно больших значений  $M$ ; в частности,  $|\operatorname{grad} v^M(x)| < 1$  на  $\Omega_h$ , следовательно,  $v^M \in K_{oh}^M$ , и, стало быть, для проверки условия (6.28) достаточно положить  $v_h^M = v^M$ . ■

### Проверка условия (6.29)

Эту проверку осуществим в два этапа.

1) Определим семейство открытых областей  $\theta_h \subset \Omega$  следующим образом: введем множество

$$(6.36) \quad \dot{\Omega}_h = \{P \mid P \in \Omega_h, \bar{\omega}_h^t(P) \subset \Omega\}$$

и напомним, что

$$\bar{\omega}_h^t(P) = \left[ x_1 - \frac{h}{2}, x_1 + \frac{h}{2} \right] \times \left[ x_2 - \frac{h}{2}, x_2 + \frac{h}{2} \right],$$

где  $P = (x_1, x_2)$ ; определим теперь  $\theta_h$  по формуле

$$(6.37) \quad \theta_h = \overline{\bigcup_{P \in \dot{\Omega}_h} \bar{\omega}_h^t(P)},$$

имеем  $\lim_{h \rightarrow 0} (\Omega - \theta_h) = 0$  в следующем смысле:  $\forall K$  — компакт, лежащего строго внутри  $\Omega$ , и для достаточно малых  $h$  множество  $K \subset \theta_h$ . Итак, пусть задана  $v_h^M \in H_{oh}^M$ , такая, что  $v_h^M \rightarrow v$  слабо в  $H_0^1(\Omega)$ , если  $P \in \theta_h$ , то существует  $P^* \in \Omega_h$ , такое, что  $|PP^*| < h/\sqrt{2}$ ; применяя формулу конечных приращений к  $\operatorname{grad} v_h^M$ , найдем

$$(6.38) \quad \operatorname{grad} v_h^M(P) = \operatorname{grad} v_h^M(P^*) + \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_1^2}(Q) \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_1 \partial x_2}(Q) \\ \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_1 \partial x_2}(Q) \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_2^2}(Q) \end{pmatrix} \cdot \overline{PP^*},$$

$$Q \in [P, P^*],$$

откуда вытекает, что

$$(6.39) \quad |\operatorname{grad} v_h^M(P)| \leq |\operatorname{grad} v_h^M(P^*)| + \frac{h}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_1^2}(Q) \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_1 \partial x_2}(Q) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v_h^M}{\partial x_2^2}(Q) \right)^2}.$$

Ниже через  $C$  мы будем обозначать различные константы. Поскольку  $v_h^M \in K_h^M$ ,  $P^* \in \Omega_h$ , то из определения  $K_h^M$  следует, что

$|\operatorname{grad} v_h^M(P^*)| \leq 1$ , откуда с учетом оценки (6.39) и принадлежности  $v_h^M$  пространству  $C^\infty(\bar{\Omega})$  имеем

$$(6.40) \quad |\operatorname{grad} v_h^M(P)| \leq 1 + Ch \|v_h^M\|_{C^2(\bar{\Omega})} \quad \forall P \in \mathcal{G}_h.$$

По теореме вложения Соболева<sup>1)</sup>  $H^s(\Omega) \subset C^2(\bar{\Omega})$  для  $s > 3$ ; так как это вложение непрерывно, то

$$(6.41) \quad |\operatorname{grad} v_h^M(P)| \leq 1 + Ch \|v_h^M\|_{H^s(\Omega)} \quad (s > 3) \quad \forall P \in \mathcal{G}_h.$$

Более того, для  $v_h^M = \sum_{m=1}^M \mu_m w_m$  имеем:

$$(6.42) \quad \|v_h^M\|_{H^s(\Omega)} \leq C \left( \sum_{m=1}^M \beta_m^s \mu_m^2 \right)^{1/2} \leq C \beta_M^{(s-1)/2} \left( \sum_{m=1}^M \beta_m \mu_m^2 \right)^{1/2} = \\ = C \beta_M^{(s-1)/2} \|v_h^M\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Положим  $r = (s-1)/2$ , тогда из  $s > 3 \Rightarrow r > 1$ ; кроме того, из слабой сходимости последовательности  $v_h^M$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  следует ее ограниченность, откуда, учитывая оценки (6.41), (6.42), имеем окончательно

$$(6.43) \quad |\operatorname{grad} v_h^M(P)| \leq 1 + Ch \beta_M^r \quad (r > 1) \quad \forall P \in \mathcal{G}_h. \quad \blacksquare$$

2) Докажем сейчас, что при условии  $h \beta_M^r \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow +\infty$ , слабый предел  $v$  последовательности  $v_h^M$  из пространства  $H_0^1(\Omega)$  принадлежит  $K_0$ . Пусть  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$ ; функционал

$$(6.44) \quad \omega \rightarrow \int_{\Omega} \varphi (|\operatorname{grad} \omega| - 1) dx$$

является выпуклым и сильно непрерывным в  $H_0^1(\Omega)$ . Из оценки (6.43) с учетом того, что для достаточно малых  $h$  носитель  $(\varphi) \subset \mathcal{G}_h$ , найдем

$$(6.45) \quad \int_{\Omega} \varphi (|\operatorname{grad} v_h^M| - 1) dx \leq Ch \beta_M^r \int_{\Omega} \varphi dx,$$

далее, из предположения  $h \beta_M^r \rightarrow 0$  при  $M \rightarrow +\infty$  и из слабой полунепрерывности снизу в пределе получим

$$(6.46) \quad \int_{\Omega} \varphi (|\operatorname{grad} v| - 1) dx \leq \liminf \int_{\Omega} \varphi (|\operatorname{grad} v_h^M| - 1) dx \leq \\ \leq C \left( \int_{\Omega} \varphi dx \right) \lim h \beta_M^r = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \varphi \geq 0,$$

<sup>1)</sup> Более точно, если  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , а  $\Gamma$  достаточно регулярия, то  $H^s(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$  и это вложение непрерывно, если  $s > \frac{N}{2} + k$  (см. Лионс — Мадженес [1]).

откуда следует, что

$$(6.47) \quad |\operatorname{grad} v| \leq 1 \quad \text{п. в.} \Leftrightarrow v \in K_0,$$

что и доказывает (6.29). ■

Таким образом, из условия (6.28) имеем сильную сходимость последовательности  $u_h^M \rightarrow u$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ . ■

**Замечание 6.3.** Если  $\Gamma$  достаточно регулярна, то из оценки (6.43) можно получить (с использованием теоремы Асколи), что одновременно  $u_h^M \rightarrow u$  сильно в  $L^\infty(\Omega)$ ; в случае, когда  $\Omega$  выпукла, доказательство этого утверждения осуществляется непосредственно. ■

### 6.3. Сходимость внешних аппроксимаций

В этом разделе, используя результаты разд. 5 гл. 1 и некоторые результаты разд. 3.3 настоящей главы, мы исследуем сходимость внешних аппроксимаций задачи  $(P_0)$ , поставленной в разд. 5. Мы будем придерживаться пути, которым мы шли в разд. 3.3 при исследовании задачи  $(P_1)$ ; используем обозначения разд. 5.

#### 6.3.1. Сведение задачи $(P_{0h})_{lm}$ к вариационному неравенству

Напомним, что решение задачи  $(P_0)$  эквивалентно разысканию решения  $u$  вариационного неравенства

$$(6.48) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K_0, \quad u \in K_0,$$

приближенный аналог которого следующий:

$$(6.49) \quad \begin{cases} a_h^l(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega} f q_h(v_h - u_h) dx & \forall v_h \in K_{0h}^m, \\ u_h \in K_{0h}^m; \end{cases}$$

через  $u_h$  обозначается решение задачи  $(P_{0h})_{lm}$ ,  $l = 1, 2$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$  (см. (5.23)); билинейные симметричные формы  $a_h^l$  ( $l = 1, 2$ ) на  $V_h$  были определены следующим образом:

$$(6.50) \quad a_h^l(u_h, v_h) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \delta_k q_h u_h \delta_k q_h v_h dx,$$

$$\begin{aligned}
 (6.51) \quad a_h^2(u_h, v_h) = & \int_{\Omega} \left( \frac{\delta_1 q_h u_h(x_1, x_2 + \frac{h}{2}) + \delta_1 q_h u_h(x_1, x_2 - \frac{h}{2})}{2} \right) \times \\
 & \times \left( \frac{\delta_1 q_h v_h(x_1, x_2 + \frac{h}{2}) + \delta_1 q_h v_h(x_1, x_2 - \frac{h}{2})}{2} \right) dx + \\
 & + \int_{\Omega} \left( \frac{\delta_2 q_h u_h(x_1 + \frac{h}{2}, x_2) + \delta_2 q_h u_h(x_1 - \frac{h}{2}, x_2)}{2} \right) \times \\
 & \times \left( \frac{\delta_2 q_h v_h(x_1 + \frac{h}{2}, x_2) + \delta_2 q_h v_h(x_1 - \frac{h}{2}, x_2)}{2} \right) dx.
 \end{aligned}$$

Напомним, что здесь

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx. \blacksquare$$

### 6.3.2. Внешние аппроксимации $H_0^1(\Omega)$ , $a$ , $K_0$ , $L$

Мы сейчас проверим последовательно (как и в разд. 3.3.2) выполнение условий, необходимых для применения теоремы 5.2 разд. 5.3 гл. 1.

#### Аппроксимации пространства $H_0^1(\Omega)$

Будем различать два случая, соответствующие двум различным аппроксимациям формы  $a$  по формулам (6.50) и (6.51).

##### 1) Первая внешняя аппроксимация $H_0^1(\Omega)$ .

Речь идет здесь об аппроксимации, изученной в разд. 3.3.2; использованные ранее обозначения мы слегка изменим:

$$(6.52) \quad V = H_0^1(\Omega),$$

$$(6.53) \quad F_1 = (L^2(\Omega))^3,$$

отображения  $\sigma_1$ :  $V \rightarrow F_1$ ,  $p_{1h}$ :  $V_h \rightarrow F_1$  и норму  $\| \cdot \|_{1h}$  на  $V_h$  определим по формулам

$$(6.54) \quad \sigma_1 v = \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\},$$

$$(6.55) \quad p_{1h} v_h = \{q_h v_h, \delta_1 q_h v_h, \delta_2 q_h v_h\},$$

$$(6.56) \quad \|v_{1h}\|_{1h} = [a_{1h}(v_h, v_h)]^{1/2}.$$

Таким образом, мы можем использовать предложение 3.1 разд. 3.3.2: при выполнении условий (6.52), (6.53), ..., (6.56)

семейство  $V_h$  реализует внешнюю аппроксимацию пространства  $H_0^1(\Omega)$ . ■

2) Вторая внешняя аппроксимация пространства  $H_0^1(\Omega)$ .

Как и ранее, выбираем здесь  $V = H_0^1(\Omega)$ ; определим пространство:

$$(6.57) \quad F_2 = (L^2(\mathbb{R}^2))^3,$$

определен опператоры  $\sigma_2: V \rightarrow F_2$ ,  $p_{2h}: V_h \rightarrow F_2$ :

$$(6.58) \quad \sigma_2 \tilde{v} = \left\{ v, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} \right\},$$

где  $\tilde{v}$  — элемент  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , полученный продолжением  $v$  нулем вне  $\Omega^1$ ,

$$(6.59) \quad p_{2h}v = \left\{ q_h v_h, \frac{1}{2} (\tau_{2(h/2)} \delta_1 q_h v_h + \tau_{2(-h/2)} \delta_1 q_h v_h), \right. \\ \left. \frac{1}{2} (\tau_{1(h/2)} \delta_2 q_h v_h + \tau_{1(-h/2)} \delta_2 q_h v_h) \right\},$$

где  $\eta$  — некоторый скаляр;  $\tau_{1\eta}, \tau_{2\eta}: L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$  определим следующим образом:

$$(6.60) \quad \begin{aligned} (\tau_{1\eta}g)(x_1, x_2) &= g(x_1 + \eta, x_2) \text{ п. в.,} \\ (\tau_{2\eta}g)(x_1, x_2) &= g(x_1, x_2 + \eta) \text{ п. в.} \end{aligned}$$

Снабдим  $V_h$  нормой

$$(6.61) \quad \|v_h\|_{2h} = [a_h^*(v_h, v_h)]^{1/2}.$$

Имеет место

**Предложение 6.1.** При выполнении условий (6.57), (6.58), ..., (6.61) семейство  $(V_h)_h$  реализует внешнюю аппроксимацию пространства  $H_0^1(\Omega)$ .

**Доказательство.** Нужно доказать, что (см. разд. 5.2 гл. 1):

$$(6.62) \quad \|p_{2h}\|_{\mathcal{L}(V_h, F_2)} \leq c \quad \forall h,$$

$$(6.63) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \exists v_h \in V_h, \text{ такое, что } p_{2h}v_h \rightarrow \sigma_2 v \text{ сильно в } F_2, \text{ причем}$$

$$(6.64) \quad \|v_h\|_{2h} \leq c \quad \forall h.$$

Временно предположим, что имеет место

1) Очевидно,  $\left\| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, k = 1, 2.$

**Лемма 6.2.** Справедливы оценки

$$(6.65) \quad \frac{1}{\gamma} \|q_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq a_h^1(v_h, v_h) \leq a_h^1(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

с константой  $\gamma > 0$ , не зависящей от  $h$  для  
достаточно малых значений  $h$ .

Из (6.51), (6.59), (6.60), (6.61) следует, что

$$(6.66) \quad \|p_{2h} v_h\|_{F_2} = [\|q_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + a_h^3(v_h, v_h)]^{1/2} = [\|q_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|v_h\|_{2h}^2]^{1/2},$$

из которых с учетом (6.65) имеем

$$(6.67) \quad \|p_{2h} v_h\|_{F_2} \leq \|v_h\|_{2h} \sqrt{1+\gamma},$$

откуда и вытекает условие (6.62) с константой  $c = \sqrt{1+\gamma}$ .

Для проверки (6.63), (6.64) определим, как и в разд. 3.3.2, оператор  $r_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ , действующий по формуле (3.23), и для  $v \in H_0^1(\Omega)$  положим

$$(6.68) \quad v_h = r_h v.$$

Имеем (см. разд. 5.1 гл. 1)

$$(6.69) \quad p_{1h} v_h \rightarrow \left\{ v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\} \text{ сильно в } (L^2(\Omega))^3,$$

откуда следует, что

$$(6.70) \quad \|v_h\|_{1h} \leq c.$$

Обозначая, как обычно, через  $\tilde{v}$  элемент пространства  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , полученный продолжением  $v$  нулем вне  $\Omega$ , из условия (6.69) найдем, что

$$(6.71) \quad \begin{cases} q_h v_h \rightarrow \tilde{v} \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R}^2), \\ \delta_k q_h v_h \rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \ (k=1, 2). \end{cases}$$

Для вывода условия (6.63) из утверждений (6.71) используем сейчас следующий результат.

Пусть заданы две последовательности  $(g_n)_n$ ,  $g_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$  и  $(h_n)_n$ ,  $h_n \in R$ , такие, что при  $n \rightarrow +\infty$

$$(6.72) \quad \begin{cases} g_n \rightarrow g & \text{сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \ (\text{слабо}), \\ h_n \rightarrow 0, \end{cases}$$

тогда легко видеть, что

$$(6.73) \quad \begin{cases} \tau_{1h_n} g_n \rightarrow g & \text{сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \ (\text{слабо}) \\ \tau_{2h_n} g_n \rightarrow g & \text{сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \ (\text{слабо}). \end{cases}$$

Таким образом, с учетом (6.71), (6.72), (6.73) имеем

$$(6.74) \quad \begin{aligned} \frac{\tau_2(h/2) \delta_1 q_h v_h + \tau_2(-h/2) \delta_1 q_h v_h}{2} &\rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_1} \quad \text{сильно в } L^2(\mathbb{R}^2), \\ \frac{\tau_1(h/2) \delta_2 q_h v_h + \tau_1(-h/2) \delta_2 q_h v_h}{2} &\rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_2} \quad \text{сильно в } L^2(\mathbb{R}^2), \end{aligned}$$

что в совокупности с определением (6.59) и первым из условий (6.71) доказывает (6.63). Что касается условия (6.64), то оно следует из (6.51), (6.61), (6.74) или, — что проще, — из условий (6.56), (6.65), (6.70). Таким образом, предложение 6.1 доказано, с той лишь оговоркой, что нам осталось провести

### Доказательство леммы 6.2.

1) Докажем сначала правое неравенство в утверждении леммы; имеем

$$(6.75) \quad \begin{aligned} a_h^2(v_h, v_h) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left( \frac{\tau_2(h/2) \delta_1 q_h v_h + \tau_2(-h/2) \delta_1 q_h v_h}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\tau_1(h/2) \delta_2 q_h v_h + \tau_1(-h/2) \delta_2 q_h v_h}{2} \right)^2 \right] dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [ |\tau_2(h/2) \delta_1 q_h v_h|^2 + |\tau_2(-h/2) \delta_1 q_h v_h|^2 + \\ &\quad + |\tau_1(h/2) \delta_2 q_h v_h|^2 + |\tau_1(-h/2) \delta_2 q_h v_h|^2 ] dx = \\ &= \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_k q_h v_h|^2 dx, \end{aligned}$$

где  $(V_h$  и  $q_h$  определены по формулам (3.6) и (3.7) разд. 3.2.1) носитель  $(\delta_k q_h v_h) \subset \Omega$  ( $k = 1, 2$ ); из (6.75) получаем оценку

(6.76)

$$a_h^2(v_h, v_h) \leqslant \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_k q_h v_h|^2 dx = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx = a_h^1(v_h, v_h). \quad \blacksquare$$

2) Докажем теперь левое из неравенств (6.65)<sup>1</sup>); заметим, что мы всегда в состоянии расширить множество  $\Omega_h$  до  $R_h$  (см. (4.39)) и осуществить перенос начала системы координат, следовательно, мы всегда можем предполагать, что пространство  $V_h$  порождено множеством  $\Omega_h$ , заданной следующей формулой:

$$(6.77) \quad \Omega_h = \{M_{ij} \mid M_{ij} \in R_h, M_{ij} = (ih, jh), 1 \leqslant i \leqslant N-1, \\ 1 \leqslant j \leqslant N-1\},$$

соответствующее множество  $\bar{\Omega}_h$  будет тогда определяться по

<sup>1</sup>) Дискретный аналог неравенства Пуанкаре.

формуле

$$(6.78) \quad \bar{\Omega}_h = \{M_{ij} \mid M_{ij} \in R_h, M_{ij} = (ih, jh), 0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N\},$$

причем  $\lim_{h \rightarrow 0} Nh = L < +\infty$  (6.79) и оптимальный выбор  $L$  осуществляется из условия

$$(6.80) \quad L^2 = \text{минимум площадей квадратов со сторонами, параллельными координатным осям и содержащими область } \Omega.$$

Очевидно,

$$(6.81) \quad \dim V_h = (N - 1)^2.$$

Определим линейный симметричный положительно определенный оператор  $-\Delta_h^2$  (аппроксимация оператора  $-\Delta$ ):

$$(6.82) \quad a_h^2(v_h, v_h) = -h^2 (\Delta_h^2 v_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

в формуле (6.82)  $(., .)$  означает обычное евклидово скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^{(N-1)^2}$ ; в более явном виде имеем:

$$(6.83) \quad -(\Delta_h^2 v_h)_{ij} = \frac{4v_{ij} - (v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j+1} + v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1})}{2h^2},$$

в формуле (6.83)  $v_{pq} = 0$ , если  $M_{pq} \notin \Omega_h$ .

С использованием формулы (6.83) докажем, что собственные векторы оператора  $-\Delta_h^2$  в пространстве  $V_h$  равны:

$$(v_h)_{\mu\nu}^2 = \{v_{ij} \mid v_{ij} = \sin \mu (i - 1) \frac{\pi}{N} \sin \nu (j - 1) \frac{\pi}{N}\};$$

$$(6.84) \quad \begin{aligned} i, j &= 2, 3, \dots, N \\ \mu, \nu &= 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

соответствующие собственные значения определяются выражением

$$(6.85) \quad \lambda_{\mu\nu}^2 = \frac{2}{h^2} \left( 1 - \cos \mu \frac{\pi}{N} \cos \nu \frac{\pi}{N} \right).$$

Очевидно, наименьшее собственное значение получается при  $\mu = \nu = 1$  (и  $\mu = \nu = N - 1$ ) и равно

$$(6.86) \quad \lambda_{11}^2 = \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{N}.$$

Следовательно, с учетом формулы (6.82) и ортогональности собственных векторов имеем:

$$(6.87) \quad \begin{aligned} a_h^2(v_h, v_h) &= -h^2 (\Delta_h^2 v_h, v_h) \geq \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{N} h^2 \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} v_{ij}^2 = \\ &= \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{N} \|q_h v_h\|_{L^2(R^2)}^2, \end{aligned}$$

и если  $h \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow +\infty$  таким образом, что выполнено условие (6.79), то

$$(6.88) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{N} = \frac{2\pi^2}{L^2} > 0,$$

что в совокупности с (6.87) и завершает доказательство леммы 6.2. ■

### Аппроксимация формы $a$

Имеет место

**Предложение 6.2.** Семейства  $(a_h^1)_h$  и  $(a_h^2)_h$  реализуют внешние аппроксимации формы  $a$ .

**Доказательство.** Для билинейной формы (6.50) это предложение (с точностью до обозначений) было уже доказано в разд. 3.3.2 (предложение 3.2) при условиях (6.52), (6.53), ..., (6.56); следовательно, нам осталось провести доказательство для формы  $a_h^2$ , предполагая, что выполнены условия (6.57), (6.58), (6.59), (6.61). Очевидно, что

$$(6.89) \quad |a_h^2(u_h, v_h)| \leq \|u_h\|_{2h} \|v_h\|_{2h} \quad \forall u_h, v_h \in V_h \text{ и } \forall h,$$

$$(6.90) \quad a_h^2(v_h, v_h) = \|v_h\|_{2h}^2 \quad \forall v_h \in V_h \text{ и } \forall h.$$

Следовательно, остается проверить, что (см. разд. 5.2 и 5.3 гл. 1):

$$(6.91) \quad \begin{aligned} &\text{если } p_{2h}v_h \rightarrow \sigma_2 v \text{ слабо в } F_2, \quad p_{2h}w_h \rightarrow \sigma_2 w \text{ сильно в } F_2, \\ &\text{то } a_h^2(v_h, w_h) \rightarrow a(v, w), \end{aligned}$$

$$(6.92) \quad \begin{aligned} &\text{если } p_{2h}v_h \rightarrow \sigma_2 v \text{ слабо в } F_2, \text{ то} \\ &\liminf a_h^2(v_h, v_h) \geq a(v, v). \end{aligned}$$

Так как билинейная форма

$$(6.93) \quad \{(f_1, f_2), (g_1, g_2)\} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} (f_1 g_1 + f_2 g_2) dx$$

непрерывна на  $(L^2(\mathbb{R}^2))^4$ , то из (6.51), (6.58), (6.59) находим, что при выполнении тех гипотез, при которых сформулировано условие (6.91), имеет место неравенство

$$(6.94)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} a_h^2(v_h, w_h) = \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x_k} dx = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} dx = a(v, w),$$

которое и доказывает (6.91). Что касается условия (6.92), то оно следует из (6.51), (6.58), (6.59) и слабой полуценерывности снизу следующего выпуклого и сильно непрерывного на  $(L^2(\mathbb{R}^2))^2$

функционала:

$$(6.95) \quad (f_1, f_2) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} (f_1^2 + f_2^2) dx. \blacksquare$$

### Внешние аппроксимации $K_0$

Будем различать два случая в зависимости от того, используется ли в аппроксимации  $V_h$  пространства  $H_0^1(\Omega)$  норма  $\|\cdot\|_{1h}$  или же норма  $\|\cdot\|_{2h}$ . Начнем с рассмотрения первого случая, который несколько проще. Имеет место

**Предложение 6.3.** *При выполнении условий (6.52), (6.53), ..., (6.56) выпуклые множества  $K_{0h}^m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), определение которых было дано в разд. 5.2, реализуют внешние аппроксимации множества  $K_0$ .*

*Доказательство.* Для  $m = 1, 2, 3, 4$  нужно доказать (см. разд. 5.2 гл. 1), что

$$(6.96) \quad \begin{aligned} &\text{если } v_h \in K_{0h}^m \text{ и } \lim_{h \rightarrow 0} p_{1h} v_h = \xi \text{ слабо} \\ &\text{в } F_1, \text{ то } \xi \in \sigma_1 K_0, \end{aligned}$$

$$(6.97) \quad \forall v \in K_0, \exists v_h \in K_{0h}^m, \text{ такое, что } p_{1h} v_h \rightarrow \sigma_1 v \text{ сильно в } F_1 \text{ и } \|v_h\|_{1h} \leq c.$$

### Проверка условия (6.96)

Положим  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ ; из результатов, полученных в разд. 5.1 гл. 1 вытекает, что

$$(6.98) \quad \begin{aligned} &\xi_0 \in H_0^1(\Omega) \\ &\xi_k = \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2), \end{aligned}$$

следовательно,  $\xi = \sigma_1 H_0^1(\Omega)$ .

Остается доказать, что  $\xi \in \sigma_1 K_0$ ; легко видеть, что это свойство имеет место для  $m = 1$ ; в самом деле

$$(6.99) \quad v_h \in K_{0h}^1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^2 |\delta_k q_h v_h|^2 \leq 1 \text{ п. в.},$$

в силу (6.96), (6.98):

$$(6.100) \quad \delta_k q_h v_h \rightarrow \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} \text{ слабо в } L^2(\Omega) \quad (k = 1, 2),$$

так как выпуклое множество  $[(f_1, f_2) | f_1, f_2 \in L^2(\Omega), f_1^2 + f_2^2 \leq 1 \text{ п. в.}]$

замкнуто в  $(L^2(\Omega))^2$ , то, переходя здесь к пределу, найдем

$$(6.101) \quad \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} \right|^2 \leqslant 1 \text{ п. в.,}$$

откуда с учетом (6.98) вытекает, что  $\xi \in \sigma_1 K_0$ . ■

Случаи  $m = 2, 3, 4$  будем исследовать одновременно; заметим, что из определения (5.14) разд. (5.7) имеем

$$(6.102) \quad v_h \in K_{0h}^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 + \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right) \right|^2 \right] \leqslant 1 \text{ п. в.}$$

Так как функция  $\tilde{\xi}_0$  — элемент пространства  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , полученный продолжением  $\xi_0$  нулем вне  $\Omega$ ,  $q_h v_h, \delta_k q_h v_h$  ( $k = 1, 2$ ) — элементы пространства  $L^2(\mathbb{R}^2)$ <sup>1)</sup>, то из условий (6.96), (6.98) вытекает, что

$$(6.103) \quad q_h v_h \rightarrow \tilde{\xi}_0 \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^2), \\ \delta_k q_h v_h \rightarrow \frac{\partial \tilde{\xi}_0}{\partial x_k} \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ } (k = 1, 2).$$

Следовательно, мы можем применить условия (6.72), (6.73), так что:

$$(6.104) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \tau_{k_1(\pm h/2)} \delta_{k_2} q_h v_h = \frac{\partial \tilde{\xi}_0}{\partial x_{k_2}} \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Так как множества  $[(f_1, f_2) | f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^2), f_1^2 + f_2^2 \leqslant 1 \text{ п. в.}]$ ,

$$\left[ (f_i)_{i=1,2,3,4} | f_i \in L^2(\mathbb{R}^2), i = 1, 2, 3, 4, \sum_{i=1}^4 f_i^2 \leqslant 2 \text{ п. в.} \right]$$

выпуклы и замкнуты в  $(L^2(\mathbb{R}^2))^2((L^2(\mathbb{R}^2))^4)$ , то в пределе, учитывая условия (5.12), (6.102), (5.20), (6.60) и (6.104), найдем

$$(6.105) \quad \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_0}{\partial x_k} \right|^2 \leqslant 1 \text{ п. в. в } \mathbb{R}^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_0}{\partial x_k} \right|^2 \leqslant 1 \text{ п. в. в } \Omega,$$

откуда на основании (6.98) следует, что  $\xi \in \sigma_1 K_0$ . ■

1) Напомним, что носители функций  $q_h v_h, \delta_k q_h v_h$  ( $k = 1, 2$ ) содержатся в области  $\Omega$ , следовательно, мы можем считать эти функции элементами либо пространства  $L^2(\Omega)$ , либо  $L^2(\mathbb{R}^2)$  — смотря по тому, что нам нужно в данный момент.

### Проверка условия (6.97)

В силу леммы 6.1<sup>1)</sup>, это условие достаточно проверить для множества (см. замечание 5.4 разд. 5.3 гл. 1)

$$(6.106) \quad \bigcup_{0 < h < 1} \lambda \{K_0 \cap \mathcal{D}(\Omega)\},$$

плотного в множестве  $K_0$ .

Пусть  $v$  принадлежит подмножеству (6.106); определим  $v_h$  по формуле

$$(6.107) \quad v_h = \{v_{ij} \mid v_{ij} = v(M_{ij}), M_{ij} \in \Omega_h\},$$

так как  $v$  принадлежит  $\mathcal{D}(\Omega)$ , то<sup>2)</sup>

$$(6.108) \quad \begin{aligned} q_h v_h &\rightarrow v \text{ сильно в } L^2(\Omega), \\ \delta_k q_h v_h &\rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_k} \text{ сильно в } L^2(\Omega) \ (k=1, 2), \end{aligned}$$

другими словами,  $p_{1h} v_h \rightarrow \sigma_1 v$  сильно в  $F_2$ ; разумеется, из условий (6.50), (6.56), (6.108) следует, что  $\|v_h\|_{1h} \leq c$ .

Кроме того, используя разложение в ряд Тейлора до членов порядка 2, можно показать, что из неравенства  $|\operatorname{grad} v| \leq \lambda < 1$  в области  $\Omega$  следует—если учесть условия (5.10), (5.11), (5.15), (5.21), —что для достаточно малых  $h$  функция  $v_h \in K_{0h}^m$  для  $m = 1, 2, 3, 4$ . ■

Для изучаемой здесь внешней аппроксимации второго типа имеет место

**Предложение 6.4.** *При выполнении условий (6.57), (6.58), ..., (6.61) выпуклые множества  $K_{0h}^m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ), определение которых было дано в разд. 5.2, реализуют внешние аппроксимации множества  $K_0$ .*

**Доказательство.** Для  $m = 1, 2, 3, 4$  нужно доказать (см. разд. 5.2 гл. 1), что

$$(6.109) \quad \text{если } v_h \in K_{0h}^m \text{ и } \lim_{h \rightarrow 0} p_{2h} v_h = \xi \text{ слабо в } F_2, \text{ то } \xi \in \sigma_2 K_0,$$

$$(6.110) \quad \forall v \in K_0, \exists v_h \in K_{0h}^m, \text{ такое, что } p_{2h} v_h \rightarrow \sigma_2 v \text{ сильно в } F_2, \text{ причем } \|v_h\|_{2h} < c.$$

<sup>1)</sup> Достаточно было бы рассмотреть функции  $v \in C^1(\bar{\Omega})$  с носителем, компактным в области  $\Omega$ .

<sup>2)</sup> В действительности имеет место сильная сходимость в пространстве  $L^\infty(\Omega)$ .

### Проверка условия (6.109)

Положим  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ ; тогда из (6.59) будем иметь:

$$(6.111) \quad q_h v_h \rightarrow \xi_0 \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^2); \text{ для } k_1, k_2 = 1, 2, k_1 \neq k_2 \\ \frac{1}{2} (\tau_{k_1}(h/2) \delta_{k_2} q_h v_h + \tau_{k_1}(-h/2) \delta_{k_2} q_h v_h) \rightarrow \xi_{k_2} \text{ слабо в } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Случай  $m=4$  будем отличать от трех других, так что нам необходимо произвести проверку условия (6.109).

### Проверка условия (6.109) при $m=1, 2, 3$

Так как носитель функции  $\delta_k q_h v_h$  ( $k=1, 2$ ) содержится в  $\Omega$ , то нетрудно показать, что из условий принадлежности множеству  $K_{0h}^m$  (условия (5.9) для  $m=1$ , условия (5.12) для  $m=2$ , условия (5.12) для  $m=2$ , условий (5.14) и (6.102) для  $m=3$ ) следует оценка

$$(6.112) \quad \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx (= a_h^1(v_h, v_h) = \|v_h\|_{1h}^2) \leqslant \text{ мера } \Omega,$$

из которой в силу леммы 6.2 (или же условия (3.22) разд. 3.3.2) имеем:

$$(6.113) \quad \|p_{1h} v_h\| \leqslant C \text{ в } F_1 (= L^2(\Omega))^3 \quad \forall h.$$

Следовательно, из последовательности  $v_h$  можно извлечь подпоследовательность, которую по-прежнему будем обозначать  $v_h$ , такую, что существует элемент  $\xi^* \in F_1$ ,  $\xi^* = (\xi_0^*, \xi_1^*, \xi_2^*)$ , для которого

$$(6.114) \quad \begin{aligned} q_h v_h &\rightarrow \xi_0^* \text{ слабо в } L^2(\Omega), \\ \delta_k q_h v_h &\rightarrow \xi_k^* \text{ слабо в } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Из полученных условий (6.114), результатов предложения 6.3 и принадлежности  $v_h \in K_{0h}^m$  следует, что

$$(6.115) \quad \begin{aligned} \xi_0^* &\in K_0, \\ \xi_k^* &= \frac{\partial \xi_0^*}{\partial x_k} \quad (k=1, 2). \end{aligned}$$

Применяя результаты о трансляции (6.72), (6.73), из условий (6.111), (6.114), (6.115) получим

$$(6.116) \quad \begin{aligned} \xi_0 &= \tilde{\xi}_0^*, \\ \xi_k &= \frac{\partial \tilde{\xi}_0^*}{\partial x_k} \quad (k=1, 2), \end{aligned}$$

где  $\tilde{\xi}_0^*$  означает элемент пространства  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , полученный продолжением функции  $\xi_0^*$  нулем вне  $\Omega$ ; таким образом, из (6.116) и первого из условий (6.115) имеем  $\xi \in \sigma^2 K_0$ . ■

*Проверка (6.109) для  $m = 4$* 

Из первого из условий (6.111) следует, что (что очевидно):

$$(6.117) \quad q_h v_h \rightarrow \xi_0 \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),$$

откуда (что проверяется без труда)

$$(6.118) \quad \frac{1}{2} (\tau_{k_1(h/2)} \delta_{k_2} q_h v_h + \tau_{k_1(-h/2)} \delta_{k_2} q_h v_h) \rightarrow \frac{\partial \xi_0}{\partial x_{k_2}} \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \\ (k_1, k_2 = 1, 2),$$

что в совокупности с первым из условий (6.111) дает

$$(6.119) \quad \xi_k = \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2).$$

Таким образом, имеем

$$(6.120) \quad \xi_0 \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Кроме того, из замкнутости в  $[L^2(\mathbb{R}^2)]^2$  выпуклого множества  $[(f_1, f_2) | f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^2), f_1^2 + f_2^2 \leq 1 \text{ п. в.}]$ , второго из условий (6.111), принадлежности  $v_h \in K_{0h}^4$  (см. определение (5.20)) и условия (6.119) вытекает, что в пределе:

$$(6.121) \quad \sum_{k=1}^2 \left| \frac{\partial \xi_0}{\partial x_k} \right|^2 \leq 1 \text{ п. в. в } \mathbb{R}^2.$$

Принимая во внимание условия (6.120) и (6.121), для доказательства принадлежности  $\xi \in \sigma_2 K_0$  достаточно установить, что  $\xi_0$  равна нулю вне  $\Omega$ ; это делается непосредственно.

В самом деле, функция  $q_h v_h$ , носитель которой содержится в  $\Omega$ , принадлежит следующему замкнутому выпуклому множеству пространства  $L^2(\mathbb{R}^2)$ :

$$(6.122) \quad [g | g \in L^2(\mathbb{R}^2), g = 0 \text{ п. в. в } \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}];$$

таким образом, из первого из условий (6.111) вытекает, что в пределе элемент  $\xi_0$  принадлежит выпуклому множеству (6.122). ■

*Проверка условия (6.110)*

Определим элемент  $v_h$  с использованием — как и при доказательстве второй части предложения 6.3 — множества (6.106); следовательно, для достаточно малых  $h$  будем иметь  $v_h \in K_{0h}^m \forall m = 1, 2, 3, 4$ . Кроме того, в силу условий (6.71), (6.72) из (6.108) вытекает, что

$$q_h v_h \rightarrow \tilde{v} \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R}^2),$$

$$(6.123) \quad \frac{1}{2} (\tau_{k_1(h/2)} \delta_{k_2} q_h v_h + \tau_{k_1(-h/2)} \delta_{k_2} q_h v_h) \rightarrow \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_{k_2}}$$

$$\text{сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \quad (k_1, k_2 = 1, 2),$$

откуда

$$(6.124) \quad p_{2h}v_h \rightarrow \sigma_2 v \text{ сильно в } F_2, \\ \|v_h\|_{2h} \leq c. \blacksquare$$

### Аппроксимация $L$

Для функционала  $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , заданного по формуле  $L(v) = \int_{\Omega} fv dx$ , где  $f \in L^2(\Omega)$  и  $L_h: V_h \rightarrow \mathbb{R}$ , заданного по формуле  $L_h(v_h) = \int_{\Omega} f q_h v_h dx$ , проверка условий (5.37), (5.38) разд. 5.2 гл. 1 для двух рассматриваемых здесь типов аппроксимации пространства  $H_0^1$  осуществляется без труда. ■

#### 6.3.3. Результаты о сильной сходимости в пространстве $F_1$ , $F_2$

Учитывая результаты, установленные в разд. 6.3.2 для внешних аппроксимаций  $H_0^1(\Omega)$ ,  $a$ ,  $K_0$ ,  $L$ , заключаем, что к задачам  $(P_{0h})_{lm}$  ( $l = 1, 2$ ;  $m = 1, 2, 3, 4$ ), или, более точно, к эквивалентным формулировкам (6.49), можно применить теорему 5.2 разд. 5.4 гл. 1, в результате получаем теорему

**Теорема 6.3.** Пусть  $u_{lh}^m$  — решение задачи  $(P_{0h})_{lm}$ ,  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ , тогда при  $h \rightarrow 0$  имеем:

1) при выполнении условий (6.52), (6.53), ..., (6.56):

$$(6.125) \quad \begin{aligned} p_{1h}u_{1h}^m &\rightarrow \sigma_1 u \text{ сильно в } F_1, \\ J_h^1(u_{1h}^m) &\rightarrow J(u) \\ \forall m &= 1, 2, 3, 4; \end{aligned}$$

2) при выполнении условий (6.57), (6.58), ..., (6.61):

$$(6.126) \quad \begin{aligned} p_{2h}u_{2h}^m &\rightarrow \sigma_2 u \text{ сильно в } F_2, \\ J_h^2(u_{2h}^m) &\rightarrow J(u) \\ \forall m &= 1, 2, 3, 4. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание 6.4.** Учитывая условия (6.72), (6.73), из полученного результата (6.125) о сходимости имеем

$$(6.127) \quad \begin{aligned} p_{2h}u_{1h}^m &\rightarrow \sigma_2 u \text{ сильно в } F_2, \\ J_h^2(u_{1h}^m) &\rightarrow J(u) \\ \forall m &= 1, 2, 3, 4. \blacksquare \end{aligned}$$

### 6.3.4. Результаты о равномерной сходимости

В этом разделе мы докажем равномерную сходимость последовательности  $q_h u_h^m$  к элементу  $u$  для  $l=1, 2$  и  $m=1, 2, 3, 4$ ; доказательства будут одинаковыми для  $m=1, 2, 3$ , однако случай  $m=4$  будет отличаться от трех других. ■

Как и при доказательстве второй части леммы 6.2, можно предполагать, что пространство  $V_h$  порождается множеством  $\Omega_h$ ,

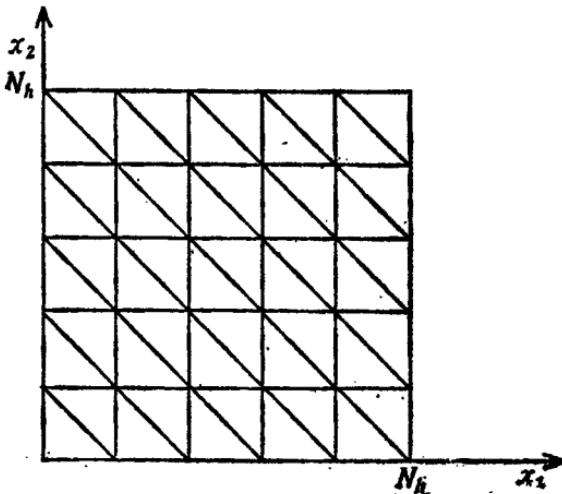


Рис. 6.1.

определенным по формуле (6.77) и удовлетворяющим условиям (6.78), (6.79), (6.80); таким образом, определив множество  $\bar{\Omega}_h$  по формуле (5.13), в данном частном случае имеем

$$(6.128) \quad \bar{\Omega}_h = ]0, Nh[ \times ]0, Nh[.$$

Рассмотрим триангуляцию  $\mathcal{T}_h$  области  $\bar{\Omega}_h$ , показанную на рис. 6.1, и определим отображение  $\Pi_h: V_h \rightarrow H_0^1(\bar{\Omega}_h) \cap C^0(\bar{\Omega}_h)$ :

$$(6.129) \quad \begin{aligned} & \Pi_h v_h \in H_0^1(\bar{\Omega}_h) \cap C^0(\bar{\Omega}_h), \\ & \text{Пункт } \Pi_h v_h \text{ — линейная аффинная функция} \\ & \text{на треугольниках из } \mathcal{T}_h, \\ & (\Pi_h v_h)(M_{ij}) = v_{ij} \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h. \end{aligned}$$

(Напомним, что  $v_{ij} = 0$  для  $M_{ij} \notin \Omega_h$ .) Имеет место

**Лемма 6.3.** Множество  $\Pi_h K_{0h}^m$  для  $m=1, 2, 3$  состоит из ограниченных и равномерно относительно  $h$  удовлетворяющих условию Липшица на  $\bar{\Omega}_h$  функций, причем

$$(6.130) \quad \|q_h v_h - \Pi_h v_h\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_h)} \leq C h, \quad C \text{ не зависит от } h.$$

**Доказательство.** Градиент функции  $\Pi_h v_h$  — константа на каждом треугольнике из  $\mathcal{T}_h$ , и условия принадлежности элемента  $v_h$  множеству дают:

$$(6.131) \quad \begin{aligned} |\operatorname{grad} \Pi_h v_h| &\leq 1 \text{ п. в. для } m=1, \\ |\operatorname{grad} \Pi_h v_h| &\leq \sqrt{2} \text{ п. в. для } m=2, 3, \end{aligned}$$

что в совокупности с условиями  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow +\infty}} Nh = L < +\infty$  и  $\Pi_h v_h = 0$

на  $\partial\Omega_h$  означает, что функции  $\Pi_h v_h$ , принадлежащие множеству  $\Pi_h K_{0h}^m$  ( $m=1, 2, 3$ ), ограничены и удовлетворяют условию Липшица равномерно относительно  $h$ .

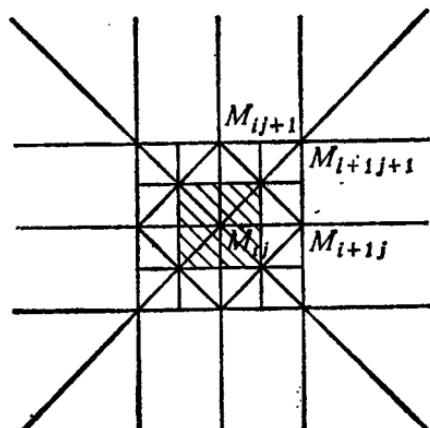


Рис. 6.2. Расположение областей  $w_h^0(M_{ij})$ ,  $\sigma_h(M_{ij})$ ,  $w_h^1(M_{ij})$  (область  $w_h^0(M_{ij})$  заштрихована).

Так как функция  $q_h v_h$  кусочно-постоянна и равна  $v_{ij}$  на брусе  $w_h^0(M_{ij})$ , то можно доказать, что из условий (6.131) следует оценка,

$$(6.132) \quad \begin{aligned} \|q_h v_h - \Pi_h v_h\|_{L^\infty(\mathcal{O}_h)} &\leq \frac{h}{\sqrt{2}} \quad \text{для } m=1, \\ \|q_h v_h - \Pi_h v_h\|_{L^\infty(\mathcal{O}_h)} &\leq h \quad \text{для } m=2, 3, \end{aligned}$$

которая доказывает и одновременно уточняет (6.130). ■

С помощью леммы 6.1 докажем, что имеет место

**Теорема 6.4.** Пусть  $u_h^m$  — решение задачи  $(P_{0h})_{lm}$ ,  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ ; если  $h \rightarrow 0$ , то

$$(6.133) \quad q_h u_h^m \rightarrow u \text{ сильно в } L^\infty(\Omega) \\ \forall l=1, 2 \text{ и } m=1, 2, 3.$$

**Доказательство.** Будем предполагать, что  $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O}_h$  (этому предположению всегда можно удовлетворить путем расширения  $\Omega_h$ ); в силу леммы 6.3 к сужению  $\Pi_h u_h^m$  на  $\bar{\Omega}$  можно применить теорему Асколи, из которой, а также теоремы (6.3) и оценок (6.132)

следует, что

(6.134) сужение  $\Pi_h u_h^m$  на область  $\bar{\Omega}$  сходится сильно к элементу  $u$  в пространстве  $L^\infty(\Omega)$ ,  
 $q_h u_h^m \rightarrow u$  сильно в  $L^\infty(\Omega)$ ,  $\forall l=1, 2$  и  $m=1, 2, 3$ . ■

Докажем сейчас, что аналогичный результат справедлив и для  $u_{lh}^k$ .

Введем в  $R_h$  два непересекающихся подмножества:

$$(6.135) \quad R_{1h} = \{M_{ij} \mid M_{ij} \in R_h, \text{ четность } i \neq \text{четности } j\}, \\ R_{2h} = \{M_{ij} \mid M_{ij} \in R_h, \text{ четность } i = \text{четности } j\}.$$

Очевидно, что

$$R_h = R_{1h} + R_{2h}.$$

Введем далее

(6.136)  $\sigma_h(M_{ij})$  = открытый брус с центром в точке  $M_{ij}$   
со сторонами длины  $h\sqrt{2}$ , параллельными  
биссектрисам углов  $x_1Ox_2$ ,

(6.137)  $\chi_h^{ij}$  = характеристическая функция бруса  $\sigma_h(M_{ij})$ .

Заметим, что

$$(6.138) \quad \overline{\bigcup_{M_{ij} \in R_{rh}} \sigma_h(M_{ij})} = \mathbb{R}^2 \quad (r=1, 2),$$

$$(6.139) \quad \mathfrak{w}_h^0(M_{ij}) \subset \sigma_h(M_{ij}) \subset \mathfrak{w}_h^1(M_{ij})^1 \quad (\text{см. рис. 6.2}).$$

Определим отображение  $I_{rh} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2); L^2(\mathbb{R}^2))$  ( $r=1, 2$ ) по формуле

$$(6.140) \quad I_{rh}(g) = \sum_{M_{ij} \in R_{rh}} g_{ij} \chi_h^{ij},$$

где

$$g_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{\mathfrak{w}_h^0(M_{ij})} g(x) dx.$$

Имеет место

**Лемма 6.4.** Для  $a$ ,  $\forall r=1, 2$  имеем

$$(6.141) \quad \|I_{rh}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \sqrt{2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

$$(6.142) \quad I_{rh}(g) \rightarrow g \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

*Доказательство*

1) Проверка утверждения (6.141).

<sup>1)</sup> Область  $\mathfrak{w}_h^1(M_{ij})$  была определена по формуле (5.7)<sup>6</sup> разд. 5.1 гл. 1.

Имеем ( $\forall r = 1, 2$ ):

$$\| I_{rh}(g) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 2h^2 \sum_{M_{ij} \in R_{rh}} g_{ij}^2 = 2h^2 \sum_{M_{ij} \in R_{rh}} \frac{1}{h^4} \left( \int_{\tilde{\omega}_h^0(M_{ij})} g(x) dx \right)^2,$$

оценивая здесь правую часть по неравенству Шварца, найдем

$$\begin{aligned} \| I_{rh}(g) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq 2 \sum_{M_{ij} \in R_{rh}} \int_{\tilde{\omega}_h^0(M_{ij})} |g(x)|^2 dx \leq \\ &\leq 2 \sum_{M_{ij} \in R_{rh}} \int_{\sigma_h(M_{ij})} |g(x)|^2 dx = \\ &= 2 \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx = 2 \| g \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \blacksquare \end{aligned}$$

2) Проверка утверждения (6.142).

Для функции  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  утверждение (6.142) доказывается непосредственно путем использования равномерной непрерывности  $g$  на ее носителе; так как  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  плотно в  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , то, учитывая условие (6.141), заключаем, что (6.142) справедливо для всех элементов  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .  $\blacksquare$

Из леммы 6.1 получаем

**Следствие 6.1.** Пусть последовательность  $(g_m)_m$  такова, что при  $m \rightarrow +\infty$   $g_m \rightarrow g$  сильно в  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , тогда при  $h \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow \infty$   $\forall q = 1, 2$  имеем

$$I_{qh}(g_m) \rightarrow g \text{ сильно в } L^2(\mathbb{R}^2) \quad \forall q = 1, 2. \blacksquare$$

Прежде чем переходить к доказательству равномерной сходимости последовательности  $q_h u_l^h$  к решению  $u$  ( $l = 1, 2$ ), определим (по аналогии со случаем  $m = 1, 2, 3$ ) множество

$$(6.143) \quad \Omega_{rh} = \Omega_h \cap R_{rh} \quad (r = 1, 2)$$

и оператор

$$(6.144) \quad q_{rh} v_h = \sum_{M_{ij} \in \Omega_{rh}} v_{ij} \chi_{ij}^{rh}.$$

Заметим, что из определения  $\Omega_h$  вытекает, что  $\tilde{\omega}_h^1(M_{ij}) \subset \Omega$ , если только  $M_{ij} \in \Omega_h$ ; следовательно, если учесть условие (6.139), будем иметь

$$(6.145) \quad \text{носитель } (q_{rh} v_h) \subset \Omega \quad \forall v_h \in V_h, \quad r = 1, 2.$$

Произведем триангуляцию  $\mathcal{T}_{rh}$  ( $r = 1, 2$ ) так, как показано на рис. 6.3:

и определим

$$(6.146) \quad \Pi_{rh}v_h = \text{непрерывная аффинная на треугольниках из } \mathcal{T}_{rh} \text{ функция, такая, что } (\Pi_{rh}v_h)(M_{ij}) = v_{ij} \\ \forall M_{ij} \in R_{rh} \text{ (r=1, 2).}$$

Имеет место

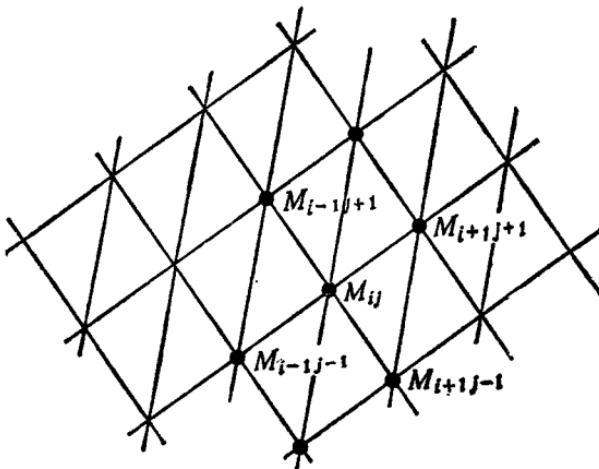


Рис. 6.3. Триангуляция  $\mathcal{T}_{rh}$ .

**Лемма 6.5.** Множество  $\Pi_{rh}K_{0h}^4$  состоит из функций, ограниченных и удовлетворяющих условию Липшица на  $\mathbb{R}^2$  равномерно относительно  $h$ ; кроме того,

$$(6.147) \quad \|q_{rh}v_h - \Pi_{rh}v_h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq h\sqrt{2} \quad \forall v_h \in K_{0h}^4; \quad r=1, 2.$$

**Доказательство.** Замечая, что из условий принадлежности множеству  $K_{0h}^4$  (см. разд. 5.2) следует неравенство

$$(6.148) \quad |\operatorname{grad} \Pi_{rh}v_h| \leq \sqrt{2} \text{ п. в } \forall v_h \in K_{0h}^4; \quad r=1, 2,$$

путем поворота на угол  $\pi/4$  и замены  $h$  на  $h\sqrt{2}$  приходим к случаю леммы 6.3. ■

Из леммы 6.5 следует

**Теорема 6.5.** Пусть  $u_{lh}^4$  — решение задачи  $(P_{0h})_{l4}$ ,  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ , тогда при  $h \rightarrow 0$  имеем

$$(6.149) \quad q_h u_{lh}^4 \rightarrow u \text{ сильно в } L^\infty(\Omega), \\ \forall l=1, 2.$$

<sup>1)</sup>  $v_{ij}=0 \quad \forall M_{ij} \in R_{rh} - \Omega_{rh} \quad (r=1, 2).$

### Доказательство

1) В силу теоремы 6.3 при  $h \rightarrow 0$  последовательность  $q_h u_{lh}^i \rightarrow u$  сильна в  $L^2(\Omega)$ ; применяя следствие 6.1 леммы 6.4 и учитывая условие (6.145), имеем

$$(6.150) \quad q_{rh} u_{lh}^i \rightarrow u \text{ сильна в } L^2(\Omega) \text{ при } h \rightarrow 0 \quad (r = 1, 2), \\ \forall l = 1, 2.$$

2) В силу леммы 6.5 к сужению функции  $\Pi_{rh} u_{lh}^i$  на  $\Omega$  можно применить теорему Асколи, следовательно, из условий (6.147), (6.150) имеем

$$(6.151) \quad q_{rh} u_{lh}^i \rightarrow u \text{ сильна в } L^\infty(\Omega) \quad (r = 1, 2), \\ \forall l = 1, 2,$$

откуда путем сужения на область  $\bigcup_{M_{ij} \in \Omega_{rh}} \mathfrak{d}_h(M_{ij})$  ( $r = 1, 2$ ) и склеивания находим нужный нам результат (6.149). ■

## 7. Численное решение приближенной задачи, соответствующей задаче $(P_0)$ , методами поточечной и верхней релаксации с последовательной проекцией

### 7.1. План изложения

В этом разделе мы изучим применение методов релаксации и верхней релаксации, изложенных в разд. 1 гл. 2, к численному решению конечномерных задач, полученных в результате применения к задаче  $(P_0)$  аппроксимаций разд. 4.1 и 4.5<sup>1)</sup>.

Подчеркнем сразу же, что сходимость алгоритма, описание которого будет дано в разд. 7.2, не доказана (исключая частный пример разд. 7.3.2), так как выпуклые множества, аппроксимирующие  $K_0$ , не являются „локальными“ в смысле определения, данного в разд. 1.2 гл. 2 (по этому поводу см. контрпример 1.2 разд. 1.2 гл. 2). Тем не менее мы сочли полезным привести описание этого метода, по крайней мере для тех случаев, когда результаты приближенного решения задачи  $(P_0)$  совпадают<sup>2)</sup> с результатами, полученными другими методами, сходимость которых обоснована<sup>3)</sup>.

<sup>1)</sup> Что касается аппроксимаций разд. 4.2, то, учитывая их „глобальный“ характер в применении к множеству  $K_0$  (см. замечание 4.6 разд. 4.2.5), заключаем, что излагаемый ниже метод в этом случае неприменим.

<sup>2)</sup> По крайней мере в рассмотренных нами примерах.

<sup>3)</sup> Относительно скорости сходимости см. ниже замечание 7.14.

## 7.2. Описание метода

Используем способ, приведенный в разд. 1.2 гл. 2 для случая выпуклого множества  $K$ , определяемого нелокальными ограничениями.

### 7.2.1. Случай внутренней аппроксимации (с помощью конечных элементов) разд. 4.1

Будем использовать обозначения разд. 4.1. Напомним, что приближенная задача, определение которой было дано в разд. 4.1, приводится к задаче квадратичного программирования в пространстве  $\mathbb{R}^N$  ( $N = \text{Card}(\dot{\Sigma}_h)$ ) с  $N' = \text{Card}(\mathcal{T}_h)$  квадратичными ограничениями; искомые переменные представляют собой значения  $v_M$  функций  $v_h$  ( $v_h \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$ ) в узлах  $M \in \dot{\Sigma}_h$ .

Ниже  $v_h$  будет иметь обычный смысл, т. е. через  $v_h$  мы будем обозначать вектор<sup>1)</sup>  $(v_M)_{M \in \dot{\Sigma}_h}$ ; для упрощения обозначений поставим точки  $M \in \Sigma_h$  индексами  $i = 1, \dots, N$  и положим  $v_i = v_{M_i} = v_h(M_i)$ .

Алгоритм релаксации с проекцией строится следующим образом:

(7.1)  $u_h^0 \in K_0 \cap V_h$  выбирается произвольно (например,  $u_h^0 = 0$ ); пусть  $u_h^n$  известно; определим последовательно числа  $u_i^{n+1}$  для  $i = 1, \dots, N$  как решение неравенств

$$(7.2) \quad \begin{aligned} J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^{n+1}, \dots, u_N^n) &\leqslant \\ &\leqslant J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n), \end{aligned}$$

в которых  $v_i$  удовлетворяет условию

$$(7.3) \quad \{u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n\} \in K_0 \cap V_h,$$

причем

$$(7.4) \quad \{u_1^{n+1}, \dots, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n\} \in K_0 \cap V_h. \blacksquare$$

По поводу практического применения алгоритма (7.1), ..., (7.4) можно сделать следующие замечания.

*Замечание 7.1.* Количество ограничений, которые необходимо принимать во внимание при определении  $u_i^{n+1}$ , равно количеству треугольников, имеющих  $M_i$  одной из своих вершин (см. рис. (7.1))<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Более строго:  $(v_M)_{M \in \dot{\Sigma}_h} = r_h v_h$ , где  $r_h$  — изоморфизм  $v_h \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

<sup>2)</sup> Объединение этих треугольников совпадает с носителем функции  $\omega_M$  (напомним, что  $\omega_M$  определяется по формуле (4.9) разд. 4.1.1).

Заметим, что

$$(7.5) \quad \mathcal{T}_{ih} = \{T \mid T \in \mathcal{T}_h, M_i \text{ — вершина } T\},$$

$$(7.6) \quad N_i = \text{Card}(\mathcal{T}_{ih}).$$

*Замечание 7.2.* Из условий (7.3) и (7.4) вытекает, что  $v_i$  и  $u_i^{n+1}$  принадлежат замкнутому интервалу из  $\mathbb{R}$ , зависящему от

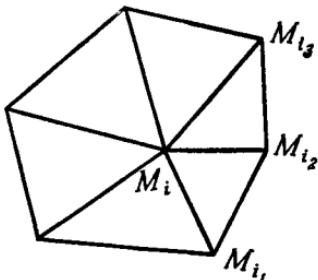


Рис. 7.1.

числа  $n$ ; будем обозначать этот интервал через  $K_i^n$ ; фактически этот интервал определяется следующим образом:

$$(7.7) \quad K_i^n = \bigcap_{T \in \mathcal{T}_{ih}} I_T^n,$$

где  $I_T^n$  — замкнутый интервал из  $\mathbb{R}$  вида

$$(7.8) \quad I_T^n = \{v_i \mid |\text{grad}^i v_h^{n+1}| \leq 1 \text{ в } T\},$$

причем

$$(7.9) \quad I_h^{n+1} = \{u_i^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n\}.$$

Развернутая форма неравенства  $|\text{grad}^i v_h^{n+1}|^2 \leq 1$  в условии (7.8), записанном через координаты  $I_h^{n+1}$ , получается из формулы (4.27) разд. 4.1.4.

Заметим, что из условия  $u_i^0 \in K_0 \cap V_h$  вытекает, что на каждом шаге  $K_i^n \neq \emptyset$ , поскольку  $u_i^n \in K_i^n$ . ■

*Замечание 7.3.* Будем находить  $u_i^{n+1}$ , как и в гл. 2, т. е. найдем сначала  $u_i^{n+1/2}$  как решение (единственное в силу строгой монотонности) уравнения

$$(7.10) \quad \frac{\partial J}{\partial u_i}(u_i^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1/2}, u_{i+1}^n, \dots, u_N^n) = 0 \quad (i = 1, \dots, N),$$

после этого определим

$$(7.11) \quad u_i^{n+1} = P_{K_i^n}(u_i^{n+1/2}),$$

где

$$(7.12) \quad P_{K_i^n}(x) = \max(a_i^n, \min(b_i^n, x)) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

если  $K_i^n = [a_i^n, b_i^n]$ . ■

*Замечание 7.4.* Будем использовать также следующий вариант алгоритма (7.1), ..., (7.4): оставляя неизменными условия (7.1), ..., (7.4), определим  $u_i^{n+1/2}$  по формуле (7.10), а после этого  $u_i^{n+1}$  согласно алгоритму

$$(7.13) \quad u_i^{n+1} = P_{K_i^n}((1-\omega)u_i^n + \omega u_i^{n+1/2}),$$

представляющему собой алгоритм типа верхней (или нижней) релаксации с проекцией на множество  $K_i^n$ . ■

### 7.2.2. Случай внешней аппроксимации разд. 5

Будем использовать обозначения разд. 5; задачи  $(P_{0h})_{lm}$  ( $l=1, 2$ ;  $m=1, 2, 3, 4$ ) представляют собой задачи квадратичного программирования в  $\mathbb{R}^N$  ( $N=\text{Card}(\Omega_h)$ ); ограничения в этих задачах также квадратичные, и мы имеем примерно  $4N$  ограничений для  $m=1$  и  $N$  для  $m=2, 3, 4$ .

Определим теперь алгоритм релаксации с проекцией (вариант алгоритма (7.1), ..., (7.4)) решения задачи  $(P_{0h})_{lm}$  следующим образом:

элемент

$$(7.14) \quad u_h^0 \in K_{0h}^m,$$

выбирается произвольно (например, полагаем  $u_h^0 = 0$ ); предположим, что  $u_h^n$  известно, и определим  $u_h^{n+1}$  последовательно для всех точек  $M_{ij} \in \Omega_h$  из неравенства

$$(7.15) \quad J_h^i(u_{ii}^{n+1}, \dots, u_{i-1i}^{n+1}, u_{ii-1}^{n+1}, u_{ii}^{n+1}, u_{i+1i}^n, u_{ii+1}^n, \dots) \leqslant \\ \leqslant J_h^i(u_{ii}^{n+1}, \dots, u_{i-1i}^{n+1}, u_{ii-1}^{n+1}, v_{ij}, u_{i+1i}^n, u_{ii+1}^n, \dots),$$

в котором  $v_{ij}$  удовлетворяют условию

$$(7.16) \quad \{u_{ii}^{n+1}, \dots, u_{i-1i}^{n+1}, u_{ii-1}^{n+1}, v_{ij}, u_{i+1i}^n, u_{ii+1}^n, \dots\} \in K_{0h}^m,$$

причем

$$(7.17) \quad \{u_{ii}^{n+1}, \dots, u_{i-1i}^{n+1}, u_{ii-1}^{n+1}, u_{ii}^{n+1}, u_{i+1i}^n, u_{ii+1}^n, \dots\} \in K_{0h}^m,$$

если предполагать, что итерации строятся по возрастающим номерам  $i, j$ . ■

Относительно алгоритма (7.14), ..., (7.17) можно сделать следующие замечания:

*Замечание 7.5.* В соответствии с определением множества  $K_{0h}^m$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ) число ограничений, которые необходимо принимать во внимание при определении  $u_{ii}^{n+1}$ , равно числу  $N_m$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ).

2, 3, 4), причем

$$(7.18) \quad \begin{aligned} N_1 &= 12, \\ N_2 &= 4, \\ N_3 &= 5, \\ N_4 &= 4. \end{aligned}$$

**Замечание 7.6.** Из условий (7.16), (7.17) вытекает, что  $v_{ij}$  и  $u_{ij}^{n+1}$  принадлежат замкнутому интервалу из  $\mathbb{R}$ , зависящему от числа  $n$ ; будем обозначать этот интервал через  $K_{ij}^n$ ; практически этот интервал строится как пересечение  $N_m$  интервалов из  $\mathbb{R}$ , определяемых  $N_m$  ограничениями, в которые в явном виде входят переменные  $v_{ij}$ ; при вычислениях для  $m=1$  будут использованы формулы (5.10), для  $m=2$ —формулы (5.11), для  $m=3$ —(5.15), (5.16), (5.18), для  $m=4$ —(5.21).

Заметим, что из условия  $u_{ij}^n \in K_{ij}^n$  вытекает, что на каждом шаге  $K_{ij}^n \neq \emptyset$ , поскольку  $u_{ij}^n \in K_{ij}^n$ . ■

**Замечание 7.7.** Действуя по методу разд. 7.2.1, вычисляем  $u_{ij}^{n+1}$ , определяя предварительно  $u_{ij}^{n+1/2}$  как решение уравнения

$$(7.19) \quad \frac{\partial J_h^l}{\partial v_{ij}}(u_{11}^{n+1}, \dots, u_{i-1j}^{n+1}, u_{ii-1}^{n+1}, u_{ii}^{n+1/2}, u_{i+1j}^{n+1}, u_{i+1j+1}^{n+1}, \dots) = 0$$

$$\forall M_{ij} \in \Omega_h,$$

из которого находим:

$$(7.20)_1 \quad u_{ii}^{n+1/2} = \frac{1}{4}(u_{i-1j}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1} + u_{ii+1}^{n+1} + u_{i+1i}^{n+1} + h^2 f_{ij}) \text{ для } l=1,$$

$$(7.20)_2 \quad u_{ii}^{n+1/2} = \frac{1}{4}(u_{i-1j-1}^{n+1} + u_{i-1j+1}^{n+1} + u_{i-1i+1}^{n+1} + u_{i+1j+1}^{n+1} + 2h^2 f_{ij}) \text{ для } l=2,$$

в формуле (7.20)<sub>2</sub> предполагается, что сначала все значения индекса  $j$  возрастают, а затем при фиксированном  $j$ —значения индекса  $i$  возрастают; в (7.20)<sub>1</sub> и (7.20)<sub>2</sub> величина  $v_{pq}=0$  при  $M_{pq} \notin \Omega_h$ .

После этого определяем

$$(7.21) \quad u_{ij}^{n+1} = P_{K_{ij}^n}(u_{ij}^{n+1/2}).$$

Если используется метод верхней (нижней) релаксации с параметром  $\omega$ , то формула (7.21) заменяется следующей:

$$(7.22) \quad u_{ij}^{n+1} = P_{K_{ij}^n}((1-\omega)u_{ij}^n + \omega u_{ij}^{n+1/2}).$$

**Замечание 7.8.** Из (7.18) вытекает, что использование множества  $K_{0h}^1$  удваивает число ограничений по сравнению с исполь-

зованием  $K_{0h}^m$  для  $m = 2, 3, 4$ ; следовательно, при приближенном решении задачи  $(P_0)$  методом релаксации с проекцией более предпочтительным является применение трех последних аппроксимаций выпуклого множества ограничений. ■

### 7.3. Результаты о сходимости

Как отмечалось в разд. 7.1, проблема сходимости решений, полученных при помощи алгоритмов (7.1), ..., (7.4) и (7.14), ..., (7.17), к решениям соответствующих приближенных задач в настоящее время, по-видимому, не решена. В разд. 7.3.1 мы приведем один результат о поведении последовательности  $u_h^n$  в предположении, что  $f \geq 0$  и  $u_h^0 = 0$ ; при этих же ограничениях на  $f$  и  $u_h^0$  в разд. 7.3.2 мы докажем сходимость алгоритма для случая одномерной области.

#### 7.3.1. Один результат о монотонной сходимости

**Определение 7.1.** Пусть даны два вектора  $u$  и  $v$  из  $\mathbb{R}^N$ ; будем говорить, что  $u \leq v$ , если  $u_i \leq v_i \quad \forall i = 1, N$ . ■

Имеет место

**Предложение 7.1.** Если  $f \geq 0$  и  $u_h^0 = 0$ , то при  $n \rightarrow +\infty$  последовательность  $u_h^n$ , определяемая алгоритмами (7.1), ..., (7.4), (7.14), ..., (7.17), сходится монотонно к элементу  $u_h^*$ , приближаясь к нему снизу в смысле определения 7.1<sup>1)</sup>.

**Доказательство.** Имеем

$$(7.23) \quad \|v_h\| \leq C \quad \forall v_h \in K_0 \cap V_h \text{ или } K_{0h}^m;$$

следовательно, достаточно доказать, что

$$(7.24) \quad u_h^n \leq u_h^{n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

Докажем теперь это неравенство для алгоритма (7.14), ..., (7.17), относящегося к задачам  $(P_{0h})_{lm}$ .

1) Доказательство неравенства (7.24) для случая (7.14), ..., (7.17).

По определению

$$f_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{\mathfrak{M}_h^0(M_{ij})} f(x) dx.$$

Следовательно,  $f \geq 0 \Rightarrow f_{ij} \geq 0 \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h$ .

<sup>1)</sup> Для случая алгоритма (7.1), (7.2), (7.3), (7.4) необходимо, кроме всего прочего, предположить, что углы триангуляции  $\mathcal{T}_h$  не превосходят  $\pi/2$ .

Вводя обозначения

$$(7.25) \quad u_h^{n+1/2} = (u_{11}^{n+1/2}, \dots, u_{ii}^{n+1/2}),$$

докажем сейчас, что имеет место также неравенство

$$(7.26) \quad u_h^{n+1/2} \geq u_h^{n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

Будем действовать методом индукции: доказав, что оценки (7.24), (7.26) справедливы до итерации номер  $n-1$ , установим, что они остаются справедливыми и при переходе от  $n-1$  к  $n$ .

Последнее утверждение также доказывается методом индукции; предположение индукции состоит в том, что

$$(7.27) \quad u_{pq}^n \leq u_{pq}^{n+1} \text{ для всех координат } u_h^{n+1}, \\ \text{вычисленных до координат } u_{ij}^{n+1}.$$

Имеем

$$(7.28)_1 \quad u_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{4} [u_{i-1j}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1} + u_{i+1j}^n + u_{i+1j+1}^n + h^2 f_{ij}] \text{ для } l=1,$$

$$(7.28)_2 \quad u_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{4} [u_{i-1j-1}^{n+1} + u_{i+1j-1}^{n+1} + u_{i-1j+1}^n + u_{i+1j+1}^n + 2h^2 f_{ij}] \quad \text{для } l=2,$$

откуда с учетом двух принятых выше индуктивных предположений находим, что

$$(7.29) \quad u_{ij}^{n+1/2} \geq u_{ij}^{n-1/2} \geq u_{ij}^n.$$

Кроме того,

$$\left. \begin{array}{l} u_{ij}^n \in K_{ij}^n \\ u_{ij}^{n+1} = P_{K_{ij}^n}(u_{ij}^{n+1/2}) \end{array} \right\} \Rightarrow (u_{ij}^n - u_{ij}^{n+1})(u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n) \leq 0,$$

откуда с учетом неравенств (7.29) следует

$$(7.30) \quad u_{ij}^{n+1} \geq u_{ij}^n.$$

Нетрудно доказать, что неравенства (7.29), (7.30) справедливы для первой определяемой нами координаты векторов  $u_h^{n+1/2}$  и  $u_h^{n+1}$ , откуда следуют оценки (7.24), (7.26), (7.27).

Таким образом, остается доказать, что (7.24), (7.26) справедливы для  $n=0$ ; для  $l=1$  имеем  $u_{11}^{1/2} = h^2 f_{11}$ , для  $l=2 - u_{11}^1 = 2h^2 f_{11}$ , откуда с учетом условий  $0 = u_{11}^0 \in K_{11}^1$ ,  $f_{11} \geq 0$ , находим:

$$(7.31) \quad u_{11}^{1/2} \geq u_{11}^1 \geq u_{11}^0 = 0.$$

Оценка типа (7.31) для всех последующих координат получается из формул (7.28) <sub>$l$</sub>  ( $l=1, 2$ ), если учесть, что  $f_{ij} \geq 0$   $\forall M_{ij} \in \Omega_h$ ,  $0 = u_{ij}^0 \in K_{ij}^1$ :

$$(7.32) \quad u_h^{1/2} \geq u_h^1 \geq u_h^0 = 0,$$

этот этап и завершает доказательство неравенства (7.24). ■

2) Доказательство (7.24) для алгоритма (7.1), ..., (7.4).  
Имеет место равенство

$$(7.33) \quad \frac{\partial J}{\partial v_i} = \alpha_i v_i - \sum_{k=1}^{N_i} \beta_{ik} v_{ik} - \gamma_i f_i,$$

в котором  $v_{ik}$  относится к  $N_i$  вершинам, соседним с вершиной  $M_i$ , т. е. вершинам, принадлежащим тем же треугольникам, что и  $M_i$  (см. рис. 7.1).

Легко доказать (в предположении, что углы  $\mathcal{T}_h$  не превосходят  $\pi/2$ ), что

$$(7.34) \quad \alpha_i > 0, \quad \beta_{ik} \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, N_i, \quad \gamma_i > 0,$$

$$(7.35) \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^{N_i} \beta_{ik},$$

$$(7.36) \quad f \geq 0 \Rightarrow f_i \geq 0.$$

С учетом условий (7.33), (7.34), (7.35) оценка (7.24) для алгоритма (7.1), ..., (7.4) устанавливается точно так же, как это было выше сделано для алгоритма (7.14), ..., (7.17). ■

*Замечание 7.9.* Вектор  $u_h^*$ , фигурирующий в предложении 7.1, представляет собой точку блокировки рассматриваемого алгоритма (в том смысле, который был разъяснен на контрпримерах 1.1 и 1.2 разд. 1 гл. 2). ■

*Замечание 7.10.* Предложение 7.1 остается справедливым при использовании варианта (7.1), (7.10), (7.13), ((7.14), (7.19), (7.22)) алгоритма (7.1), ..., (7.4) ((7.14), ..., (7.17)) для значений  $0 < \omega \leq 1$ . ■

### 7.3.2. Один частный случай сходимости к точному решению приближенной задачи алгоритма релаксации с проекцией

*Постановка задачи и аппроксимация*

Для частного случая  $\Omega = [0, 1]$  определим функционал  $J: H_0^1(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$(7.37) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx - \int_0^1 fv dx$$

и выберем здесь  $f \in L^1(0, 1)$ ; таким образом, получаем следующую формулировку задачи  $(P_0)$ :

$$(7.38) \quad \min_{v \in K_0} J(v),$$

$$K_0 = [v \mid v \in H_0^1(0, 1), |v'| \leq 1 \text{ п. в. в } (0, 1)].$$

Пусть  $N$  — целое положительное число, которое мы будем устремлять к  $+\infty$ ; положим  $h = 1/N$  и определим внутренние аппроксимации  $H_0^1(\Omega)$  и  $K_0$

$$(7.39) \quad V_h = [v_h \mid v_h \in H_0^1(0, 1),$$

функция  $v_h$  — аффинная на отрезках  $[(i-1)h, ih]$ ,  
 $i = 1, \dots, N]$ ,

$$(7.40) \quad K_{0h} = [v_h \mid v_h \in V_h, |v'_h| \leq 1 \text{ п. в.}].$$

Обозначая  $v_i = v_h((i-1)h)$  ( $i = 1, \dots, N+1$ ), получим

$$(7.41) \quad v_h \in K_{0h} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right| \leq 1 & (i = 1, \dots, N), \\ v_1 = v_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Функционал  $J$  аппроксимируем функцией  $J_h: V_h \rightarrow \mathbb{R}$

$$(7.42) \quad J_h(v_h) = \frac{1}{2} \int_0^1 v'_h dx - h \sum_{i=2}^N f_i v_i,$$

где (например):

$$(7.43) \quad f_i = \frac{1}{h} \int_{\left(i-\frac{3}{2}\right)h}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)h} f(x) dx,$$

или

$$f_i = f((i-1)h) \quad \text{для } f \in C^0[0, 1].$$

В развернутом виде функция (7.42) записывается следующим образом:

$$(7.42)' \quad J_h(v_h) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \right)^2 - h \sum_{i=2}^N f_i v_i;$$

приближенную задачу  $(P_0)_h$  определим как задачу разыскания

$$(7.44) \quad \min_{v_h \in K_{0h}} J_h(v_h).$$

Применяя к этой элементарной задаче результаты, полученные в предшествующих разделах, можно показать, что (7.44) имеет решение, и притом только одно, которое мы будем обозначать через  $u_h$ ; если  $h \rightarrow 0$ , то  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $H^1(0, 1) \cap L^\infty(0, 1)$ , где  $u$  — решение (единственное) задачи (7.38). ■

Решение задачи (7.44) методом точечной релаксации с проекцией

Если в задаче (7.44) строить итерации по возрастающим номерам  $i$ , то алгоритм разд. 7.2 принимает вид

$$(7.45) \quad \begin{aligned} u_h^0 &\in K_{0h} \text{ выбирается произвольно (например } u_h^0 = 0), \\ u_1^n &= u_{N+1}^n = 0, \\ u_i^{n+1/2} &= \frac{1}{2}(h^2 f_i + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n) \quad (2 \leq i \leq N), \\ u_i^{n+1} &= P_{K_{ii}^n}(u_i^{n+1/2}). \end{aligned}$$

Развернутое определение интервала  $K_i^n$  следующее:

$$(7.46) \quad K_i^n = [v_i \mid v_i \in \mathbb{R}, |u_{i+1}^n - v_i| \leq h, |u_{i-1}^{n+1} - v_i| \leq h, i = 2, \dots, N],$$

этот интервал непуст на любом шаге (см. разд. 7.2), если только  $u_h^0 \in K_{0h}$ . ■

*Сходимость алгоритма (7.45) в предположении  $f \geq 0$  и  $u_h^0 = 0$ .*

Ниже будем предполагать, что  $f \geq 0$  и  $u_h^0 = 0$ , следовательно, в силу (7.43)  $f_i \geq 0$ . Мы дополним сейчас утверждение предложения 7.1 (справедливое и для алгоритма (7.45)), доказав, что  $u_h^* = u_h$ ; доказательство этого равенства получится из следующих предложений.

**Предложение 7.2.** Имеем

$$(7.47) \quad \text{последовательности } u_h^n \text{ и } u_h^{n+1/2} \text{—возрастающие}$$

$$(7.48) \quad u_h^{n+1/2} \geq u_h^{n+1} \quad \forall n \geq 0,$$

$$(7.49) \quad u_h^n \in K_{0h} \quad \forall n \geq 0.$$

*Доказательство.* См. доказательство предложения 7.1. ■

**Предложение 7.3.** Если  $u_h$ —решение (единственное) задачи (7.44), то

$$(7.50) \quad u_h \geq 0$$

$$(7.51) \quad \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_{i-1}) \leq u_i \leq \frac{1}{2}(h^2 f_i + u_{i+1} + u_{i-1}), \quad (2 \leq i \leq N).$$

*Доказательство*

1) *Доказательство (7.50)*

Пусть  $u_h$ —решение задачи (7.44); определим элементы  $\bar{u}_h \in V_h$ ,  $\bar{u}_h \geq 0$  следующим образом:

$$(7.52) \quad \bar{u}_h((i-1)h) = |u_i|, \quad i = 1, \dots, N+1.$$

Из условия  $f_i \geq 0$  и неравенства  $||u_i| - |u_{i-1}|| \leq |u_i - u_{i-1}|$  находим

$$(7.53) \quad u_h \in K_{0h} \Rightarrow \tilde{u}_h \in K_{0h},$$

$$(7.54) \quad \sum_{i=1}^N \left( \frac{|u_{i+1}| - |u_i|}{h} \right)^2 \leq \sum_{i=1}^N \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2,$$

$$(7.55) \quad \sum_{i=1}^N f_i u_i \leq \sum_{i=2}^N f_i |u_i|,$$

откуда следует неравенство

$$(7.56) \quad J_h(u_h) \geq J_h(\tilde{u}_h), \quad \tilde{u}_h \in K_{0h},$$

из которого вытекает, что  $\tilde{u}_h = u_h$ . ■

## 2) Доказательство (7.51)

Пусть  $\tilde{u}_i = \frac{1}{2}(h^2 f_i + u_{i+1} + u_{i-1})$ ,  $K_i$  — непустой интервал из  $\mathbb{R}$ , определяемый по формуле

$$(7.57) \quad K_i = [v_i | v_i \in \mathbb{R}, |v_i - u_{i+1}| \leq h, |v_i - u_{i-1}| \leq h].$$

Пусть  $w_i = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_{i-1})$ , тогда  $f_i \geq 0 \Rightarrow \bar{u}_i \geq w_i$ , и так как  $w_i$  минимизирует на  $\mathbb{R}$  функцию  $v_i \rightarrow (v_i - u_{i+1})^2 + (v_i - u_{i-1})^2$ , то

$$(7.58) \quad |w_i - u_{i+1}| = |w_i - u_{i-1}|,$$

$$(w_i - u_{i+1})^2 + (w_i - u_{i-1})^2 \leq (u_i - u_{i+1})^2 + (u_i - u_{i-1})^2,$$

откуда находим оценку

$$(7.59) \quad |w_i - u_{i+1}| = |w_i - u_{i-1}| \leq \max(|u_i - u_{i+1}|, |u_i - u_{i-1}|) \leq h \Rightarrow w_i \in K_i,$$

из которой с учетом условий  $u_i = P_{K_i}(\bar{u}_i)$ ,  $\bar{u}_i \geq w_i$  вытекает, что

$$(7.60) \quad (w_i - u_i)(\bar{u}_i - u_i) \leq 0 \Rightarrow w_i \leq u_i \leq \bar{u}_i,$$

откуда и следует (7.51). ■

**Предложение 7.4.** Если для индекса  $i_0$  имеем  $u_{i_0} - u_{i_0-1} = h$  ( $u_{i_0} - u_{i_0+1} = h$ ), то  $u_i - u_{i-1} = h \quad \forall i, i = 2, \dots, i_0$  ( $u_i - u_{i+1} = h \quad \forall i, i = i_0, \dots, N$ ).

**Доказательство.** Пусть  $i_0$  таково, что  $u_{i_0} - u_{i_0-1} = h$ , тогда на основании предложения 7.3 имеем  $u_{i_0-1} \geq \frac{1}{2}(u_{i_0} + u_{i_0-2})$ , откуда вытекает, что  $u_{i_0-1} - u_{i_0-2} \geq u_{i_0} - u_{i_0-1} = h$ ; с другой стороны,  $u_h \in K_{0h}$ , следовательно,  $u_{i_0-1} - u_{i_0-2} = h$  и так далее до  $i = 2$ .

Аналогичное рассуждение можно провести для другого семейства соотношений. ■

**Предложение 7.5.** Пусть  $i_M$  ( $2 \leq i_M \leq N$ ) таково, что  $u_{iM} = \max_{1 \leq i \leq N+1} u_i$ ; тогда достаточно малых  $h$  имеют место условия

$$(7.61) \quad \begin{aligned} 0 &\leq u_{iM} - u_{iM-1} < h, \\ 0 &\leq u_{iM} - u_{iM+1} < h, \\ u_{iM} &= \frac{1}{2} (h^2 f_{iM} + u_{iM-1} + u_{iM+1}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Используя обозначения предложения 7.3, имеем

$$(7.62) \quad \bar{u}_{iM} = \frac{1}{2} (h^2 f_{iM} + u_{iM-1} + u_{iM+1}),$$

отсюда следует, что

$$(7.63) \quad \left( \frac{\bar{u}_{iM} - u_{iM-1}}{h} \right) + \left( \frac{\bar{u}_{iM} - u_{iM+1}}{h} \right) = h f_{iM} = \int_{e_{iM}} f(x) dx,$$

где обозначено

$$e_{iM} = \left[ \left( i_M - \frac{3}{2} \right) h, \left( i_M - \frac{1}{2} \right) h \right].$$

В силу предложения 7.3 имеем  $\bar{u}_{iM} \geq u_{iM}$ , откуда с учетом условий (7.36) вытекает:

$$(7.64) \quad \begin{aligned} 0 &\leq \frac{\bar{u}_{iM} - u_{iM-1}}{h} \leq \int_{e_{iM}} f(x) dx, \\ 0 &\leq \frac{\bar{u}_{iM} - u_{iM+1}}{h} \leq \int_{e_{iM}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Если  $h \rightarrow 0$ , то  $\int_{e_{iM}} f(x) dx \rightarrow 0$ , следовательно, для достаточно малых значений  $h$  имеем  $\int_{e_{iM}} f(x) dx < 1$ , откуда  $\bar{u}_{iM} \in K_{iM}' \Rightarrow \Rightarrow u_{iM} = \bar{u}_{iM}$ , что в совокупности с (7.62), (7.63) и доказывает (7.61).

**Предложение 7.6.** Последовательность  $u_h^n$ , определяемая по формулам (7.45), сходится к элементу  $u_h^* \in K_{0h}$ , приближаясь к нему снизу, причем  $u_h^* \leq u_h$ .

**Доказательство.** Докажем сначала, что  $u_h^n \leq u_h \forall n$ .

Будем действовать методом индукции, предполагая, что нужное и нам свойство имеет место до шага номер  $n$  и что оно верно для  $u_h^{n+1}$  до индекса  $i-1$ .

В силу предложений 7.2 и 7.3 имеем

$$(7.65) \quad \bar{u}_i = \frac{1}{2} (h^2 f_i + u_{i-1} + u_{i+1}) \geq u_i,$$

$$u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2} (h^2 f_i + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n) \geq u_i^{n+1}.$$

Если  $u_i = \bar{u}_i$ , то по предложению индукции имеем  $u_i \geq u_i^{n+1/2} \geq u_i^{n+1}$ . Если  $\bar{u}_i > u_i$ , то из предложения 7.4 следует, что

$$(7.66) \quad u_i = \min(u_{i+1}, u_{i-1}) + h,$$

аналогичным образом устанавливаем, что всегда имеет место оценка

$$(7.67) \quad u_i^{n+1} \leq \min(u_{i-1}^{n+1}, u_{i+1}^n) + h.$$

С другой стороны (в силу предложений индукции),  $u_{i-1}^{n+1} \leq u_{i-1}$  и  $u_{i+1}^n \leq u_{i+1}$ , откуда вытекает, что

$$(7.68) \quad u_i^{n+1} \leq \min(u_{i-1}^{n+1}, u_{i+1}^n) + h \leq \min(u_{i-1}, u_{i+1}) + h = u_i.$$

Следовательно, если предположить, что нужное нам свойство имеет место до  $n$ -го шага, то, поскольку оно верно до  $(n+1)$ -го шага для  $u_h^{n+1} = 0$ , оно остается верным и для  $u_h^n$ ; с другой стороны, это свойство справедливо для  $u_h^0 = 0$ , следовательно, оно имеет место для любого  $n$ , т. е.

$$(7.69) \quad u_h^n \leq u_h \quad \forall n \geq 0.$$

Так как последовательность  $u_h^n$  возрастающая и ограничена элементом  $u_h$ , то она сходится к  $u_h^* \in K_{0h}$ , приближаясь к  $u_h^*$  снизу, причем  $u_h^* \leq u_h$ . ■

**Предложение 7.7.** Функция  $u_h^*$  обладает всеми свойствами функции  $u_h$ , о которых шла речь в предложениях 7.3, 7.4, 7.5.

**Доказательство.** Из условия  $u_h^n = 0$  и предложения 7.2 находим, что

$$(7.70) \quad u_h^n \geq 0 \quad \forall n \geq 0,$$

применив далее тот же метод, что и в п. 2 доказательства предложения 7.3, получим

$$(7.71) \quad \frac{1}{2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^{n+1}) \leq u_i^{n+1} \leq \frac{1}{2} (h^2 f_i + u_{i+1}^n + u_{i-1}^{n+1}),$$

в пределе из неравенств (7.70), (7.71) найдем

$$(7.72) \quad u_h^* \geq 0,$$

$$\frac{1}{2} (u_{i+1}^* + u_{i-1}^*) \leq u_i^* \leq \frac{1}{2} (h^2 f_i + u_{i+1}^* + u_{i-1}^*).$$

Рассуждая таким же образом, как и при доказательстве предложения 7.4, с использованием (7.72) можно доказать, что утверждения предложения 7.4 остаются в силе и для элемента  $u_h^*$ ; аналогичный вывод можно сделать также относительно предложения 7.5.

**Предложение 7.8.** Имеет место равенство  $u_h^* = u_h$ .

*Доказательство*

1) Предположим, что существует индекс  $i_0$ ,  $2 \leq i_0 \leq N$ , такой, что  $u_{i_0}^* - u_{i_0-1}^* = h$  ( $u_{i_0}^* - u_{i_0+1}^* = h$ ), тогда  $u_{i_0}^* = u_{i_0}$ . В самом деле, в силу предложения 7.7 имеем

$$u_{i_0}^* = (i_0 - 1)h \quad (u_{i_0}^* = (N + 1 - i_0)h);$$

с другой стороны,  $|u_{i+1} - u_i| \leq h \quad \forall i = 1, \dots, N$ , откуда вытекает, что  $u_{i_0} \leq (i_0 - 1)h$ ,  $u_{i_0} \leq (N + 1 - i_0)h$ , следовательно,  $u_{i_0} \leq u_{i_0}^*$ , и так как  $u_h^* \leq u_h$ , то  $u_{i_0}^* = u_{i_0}$ ; таким же образом находим, что

$$u_i = u_i^* \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq i_0 \quad (\forall i \quad i_0 \leq i \leq N).$$

2) Имеет место также равенство

$$(7.73) \quad J_h(u_h) = J_h(u_h^*) + (J'_h(u_h^*), u_h - u_h^*) + \\ + \frac{1}{2}(J''_h(u_h^*), u_h - u_h^*, u_h - u_h^*),$$

в котором

$$(7.74) \quad (J'_h(u_h^*), u_h - u_h^*) = h \sum_{i=2}^N \left( \frac{-u_{i-1}^* - u_{i+1}^* + 2u_i^*}{h^2} - f_i \right) (u_i - u_i^*),$$

$$(7.75) \quad (J''_h(u_h^*), u_h - u_h^*, u_h - u_h^*) = h \sum_1^N \left( \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h} \right)^2,$$

где  $\omega_h = u_h - u_h^*$ .

3) В силу предложения 7.7 имеем

$$(7.76) \quad \frac{-u_{i-1}^* - u_{i+1}^* + 2u_i^*}{h^2} - f_i \leq 0 \quad \forall i = 2, \dots, N.$$

Если это неравенство строгое, то  $|u_{i+1}^* - u_i^*| = h$  и (или)  $|u_i^* - u_{i-1}^*| = h$ , откуда и из п. 1 настоящего доказательства следует, что  $u_i = u_i^*$ . Таким образом, имеем

$$(7.77) \quad \left( \frac{-u_{i-1}^* - u_{i+1}^* + 2u_i^*}{h^2} - f_i \right) (u_i - u_i^*) = 0 \quad \forall i \quad 2 \leq i \leq N,$$

откуда

$$(7.78) \quad J_h(u_h) - J_h(u_h^*) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\omega_{i+1} - \omega_i}{h} \right)^2 \geq 0,$$

и так как  $u_h^* \in K_{0h}$ , то  $u_h^* = u_h$ . ■

Таким образом, установлена

**Теорема 7.1.** Если  $f \geq 0$ ,  $u_h^0 = 0$ , то последовательность  $u_h^n$ , определяемая алгоритмом (7.45), сходится к решению  $u_h$  задачи (7.44), причем

$$(7.79) \quad 0 \leq u_h^1 \leq \dots \leq u_h^n \leq u_h^{n+1} \leq \dots \leq u_h \blacksquare$$

**Замечание 7.11.** Теорема 7.1 остается в силе для следующего варианта алгоритма (7.45):

$$(7.80) \quad \begin{aligned} u_h^0 &= 0, \\ u_1^n &= u_{N+1}^n = 0, \\ u_i^{n+1/2} &= \frac{1}{2} (h^2 f_i + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n), \\ u_i^{n+1} &= P_{K_i^n} (u_i^n + \omega (u_i^{n+1/2} - u_i^n)), \end{aligned}$$

в котором  $0 < \omega \leq 1$ . ■

## 7.4. Приложения. Пример 1

Выберем  $\Omega = [x \mid x \in \mathbb{R}^2, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \frac{1}{2}]$ ,  $f = 10$ ; как было отмечено в разд. 2.3.2, решение задачи  $(P_0)$  дается формулой

$$(7.81) \quad \begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2} - r && \text{для } 0,2 \leq r \leq \frac{1}{2} \text{ (область пластич-} \\ &&& \text{ности),} \\ u(x) &= 0,4 - 2,5r^2 && \text{для } 0 \leq r \leq 0,2 \text{ (область упругости).} \end{aligned}$$

Следуя работе Бурга [1], для аппроксимации задачи  $(P_0)$  будем использовать метод конечных элементов (разд. 4.1); рассмотрим две триангуляции  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$ , для  $1/12$  части круга показанные на рис. 7.3 и 7.4; приближенные задачи были решены с использованием алгоритма (7.1), (7.10), (7.13), описание которого было дано в разд. 7.2.1, нулевое приближение  $u_h^0 = 0$ , условие останова было выбрано в виде

$$(7.82) \quad \frac{\sum_{M_i \in \Sigma_j} |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\sum_{M_i \in \Sigma_j} |u_i^{n+1}|} \leq 10^{-4}.$$

Основные результаты, относящиеся к приближенному решению задачи  $(P_0)$  описанными выше методами, приведены в табл. 7.1.

Величина  $e_a$  в этой таблице равна максимуму из абсолютных величин разностей (в вершинах треугольников) между точным

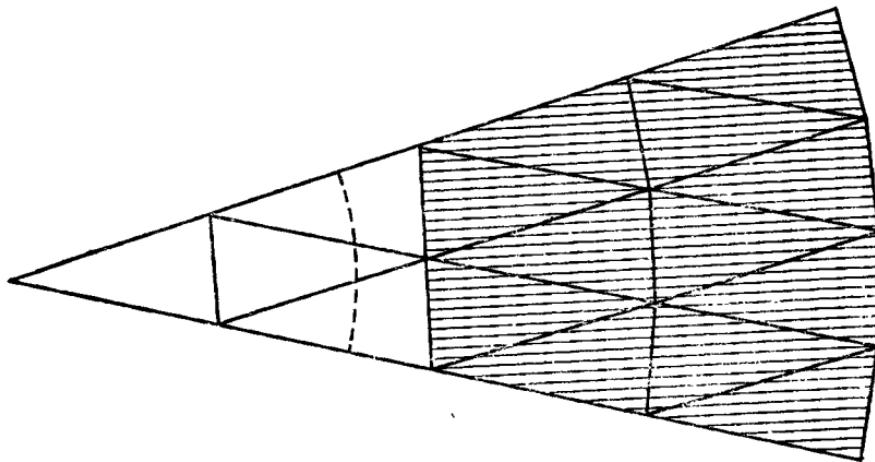


Рис. 7.2. ( $f = 10$ ). Триангуляция  $\mathcal{T}_1$  и приближенное распределение областей упругости и пластичности (область пластичности заштрихована).

решением и приближенным, найденным с использованием представленных выше аппроксимаций и алгоритма с условием останова (7.82).

Подробно разбиения (триангуляции)  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$ , на конечные элементы для  $1/12$  части круга показаны на рис. 7.2 и 7.3 (полная картина разбиений получается поворотами на угол  $k\pi/6$ ,  $k = 1, \dots, 11$ ); на этих же рисунках показаны найденные приближенно области пластичности (заштрихованная) и упругости, а также известная из точного решения область раздела

Таблица 7.1

Разбиение	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$
Количество вершин	121	433
$N = \text{Card}(\dot{\Sigma}_f)$ $j = 1, 2$	73	337
$\omega$	1,6	1,6
Число итераций	7	20
$e_a$	$1,3 \times 10^{-2}$	$1,4 \times 10^{-3}$
Время вычислений (СИ 10070)	10 с	50 с

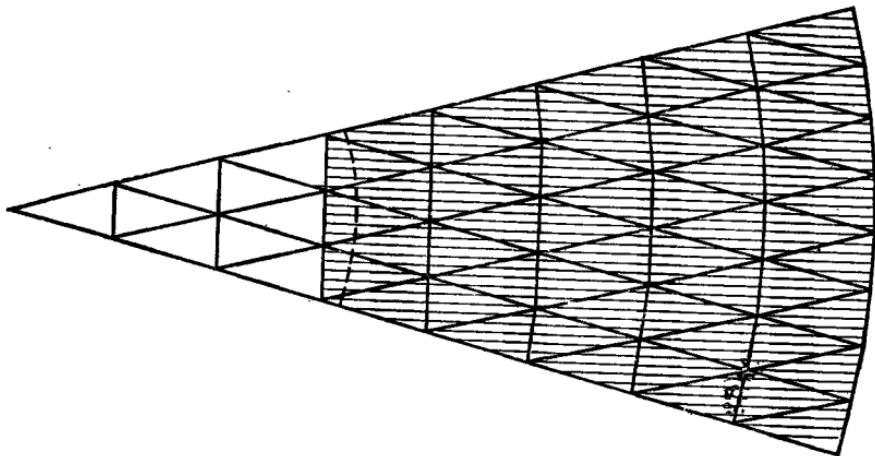


Рис. 7.3. ( $f = 10$ ). Триаングуляция  $\mathcal{T}_2$  и приближенное распределение областей упругости и пластичности (зона пластичности заштрихована).

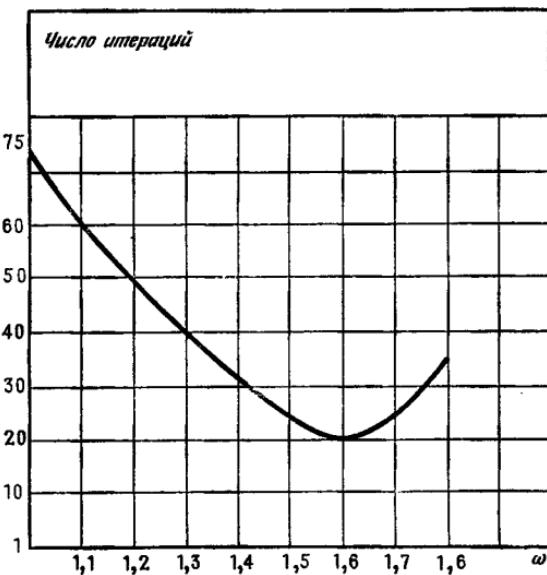


Рис. 7.4. Зависимость числа итераций, необходимых для достижения сходимости, от параметра  $\omega$  (пример раздела 1).

областей упругости и пластичности (т. е. окружность радиуса 0,2, отмеченная пунктиром). Другие детали приближенного решения задачи примера 1 можно найти в работе Бурга [1]. ■

**Замечание 7.12.** Подробное исследование (Бурга [1]) поведения последовательности итераций в алгоритме (7.1), (7.10), (7.13)

показывает, что область пластичности и пластическая составляющая решения определяются достаточно быстро, основное же количество итераций затрачивается на решение уравнения  $\Delta u = f$  в области упругости, сходимость тем быстрее (при

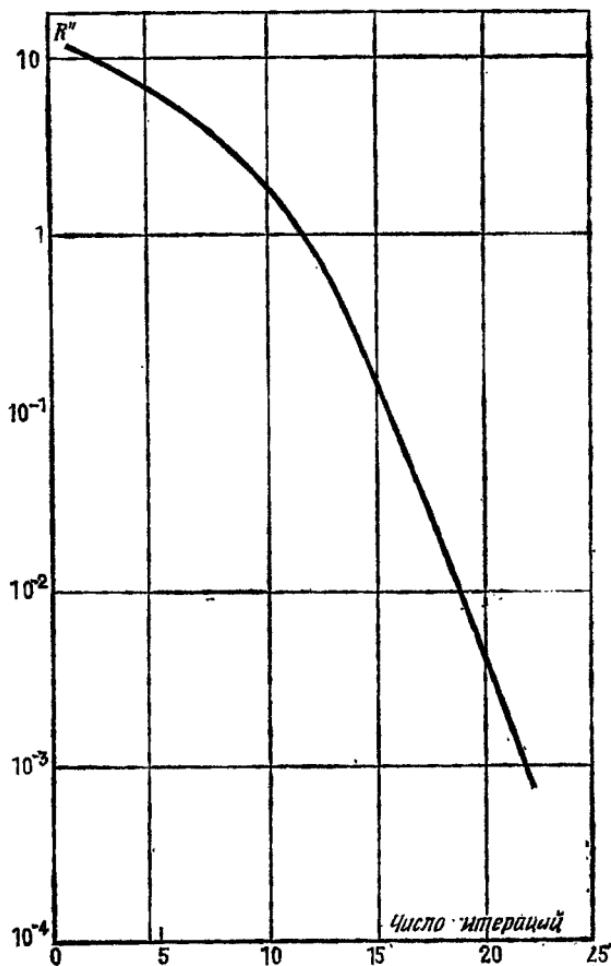


Рис. 7.5. Убывание величины  $R^n$  с ростом числа итераций (пример раздела 2).

заданном  $\omega$ ), чем больше область пластичности (т. е. чем больше ограничений выполняются со знаком равенства); это соответствует замечанию 5.7 разд. 5.7.2 гл. 2 и замечанию 3.7 разд. 3.5.2 гл. 3.

Отметим (см. рис. 7.5), что использование значений  $\omega$ , намного превосходящих 1, и в этой задаче позволяет значительно увеличить скорость сходимости. ■

*Замечание 7.13.* Решение  $u$  задачи  $(P_0)$  удовлетворяет условию

$$(7.83) \quad u \in W_0^{1, \infty}(\Omega) \cap W^{2, \infty}(\Omega).$$

Отсюда можно получить (Стрэнг, частное сообщение), что при выполнении условий теоремы 6.1 разд. 6.2.1 имеет место оценка

$$(7.84) \quad \|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch^{1/4}, \quad C \text{ не зависит от } h,$$

напомним, что  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h}$  площадь  $(T)$ . ■

## 7.5. Приложения. Пример 2

Вернемся к рассмотренному ранее примеру разд. 3.5 ( $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $f = 10$ ), заменив при этом с использованием установленных в работе Брезиса и Сибони [1] результатов об эквивалентности (см. разд. 2.2) выпуклое множество  $K_0$  множеством  $K_1$ .

Для приближенного решения задачи  $(P_0)$  используем, следуя Гурса [1], метод внешней аппроксимации (определение см. в разд. 5); более точно, аппроксимируем функционал  $J$  функцией  $J_h^1$  (см. формулы (5.1), (5.2), (5.3) разд. 5.1.1), множество  $K_0$  — множеством  $K_{\delta h}^0$  (см. (5.19) разд. 5.2).

### 7.5.1. Начальные значения параметров

Шаг дискретизации  $h = 1/20$ .

Начальное приближение для алгоритма (7.14), (7.19), (7.22):  $u_h^0 = 0$ .

Условие останова алгоритма (7.14), (7.19), (7.22):

$$\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| < 10^{-3}.$$

### 7.5.2. Анализ численных результатов

Для значений  $0 < \omega < 2$  имеет место сходимость последовательности  $u_h^n$  к пределу, который с точностью до  $10^{-4}$  (в относительных величинах) совпадает с решением, найденным при решении задачи  $(P_{1h})$  разд. 3.5 методом, изложенным в разд. 3.4, с тем же значением  $h = 1/20$ .

Оптимальное значение  $\omega$  (найденное экспериментально) примерно равно 1,5, т. е. совпадает с оптимальным значением ~~этого же~~ параметра, найденного при решении задачи  $(P_{1h})$ ; следовательно, замечание 3.7 (разд. 3.5.2) остается в силе.

При значении  $\omega = 1,5$  алгоритм (7.14), (7.19), (7.22) сходится за 22 итерации, что соответствует 1,38 с машинного времени ЭВМ IBM 360/91 или 22 с ЭВМ СII 10070; на рис. 7.5 показана кривая

$$R^n = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n|,$$

иллюстрирующая убывание величины  $R^n$  с ростом числа итераций для значения  $\omega = 1,5$ . Непрямолинейная часть приведенной кривой соответствует, грубо говоря, решению нелинейной части задачи, т. е. приближенному определению зон пластичности и пластической части решения; остальная часть кривой, являющаяся прямолинейной, соответствует решению (приближенному) некоторой линейной задачи, в данном случае уравнения  $-\Delta u = f$  в упругой зоне; все сказанное относится и к рис. 3.1 разд. 3.5.2. ■

## 7.6. Приложения. Пример 3

Выберем  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  и  $f$ , задаваемое по формулам:

(7.85)

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{для } (x_1, x_2) \in ]0, \frac{1}{2}[ \times ]\frac{1}{2}, 1[, \\ -10 & \text{для } (x_1, x_2) \in ]\frac{1}{2}, 1[ \times ]0, \frac{1}{2}[, \\ 0 & \text{для } (x_1, x_2) \in ]0, \frac{1}{2}[ \times ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[ \times ]\frac{1}{2}, 1[. \end{cases}$$

Задача  $(P_0)$  в данном случае аппроксимируется с использованием внешних аппроксимаций предыдущего примера (разд. 7.5) при значении  $h = 1/20$ ; для начального приближения  $u_h^0 = 0$ , условия останова

$$\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| < 10^{-4},$$

и  $\omega = 1,7$  алгоритм (7.14), (7.19), (7.22) сходится за 57 итераций (что соответствует 1 мин 13 с машинного времени ЭВМ СII 10070); полученный здесь предел совпадает с решением задачи  $(P_0)$  другими методами, для которых можно доказать сходимость. На рис. 7.6 показаны найденные в процессе решения области, в которых  $|\operatorname{grad} u| < 1$  ( $-\Delta u = f$ ) (незаштрихованные), и области с  $|\operatorname{grad} u| = 1$  (заштрихованные). ■

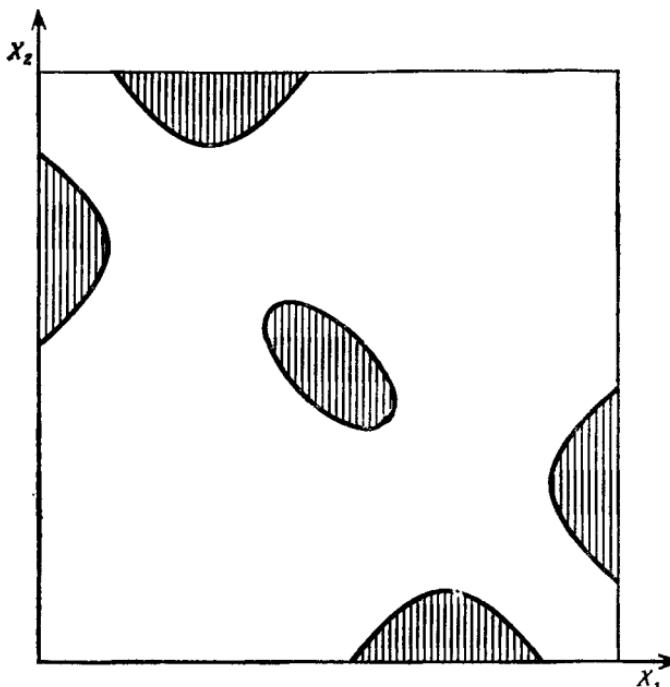


Рис. 7.6. Распределение областей, соответствующих условиям  $|\operatorname{grad} u| < 1|$  и  $|\operatorname{grad} u| = 1$  (области, в которых  $|\operatorname{grad} u| = 1$ , заштрихованы) (пример раздела 3).

## 7.7. Различные замечания

**Замечание 7.14.** Алгоритм (7.14), (7.19), (7.22) решения задачи ( $P_0$ ) с использованными в примерах 2, 3 аппроксимациями функционала  $J$  и множества  $K_0$  сходится быстрее<sup>1)</sup>, нежели метод верхней релаксации с проекцией разд. 3.4 при решении задачи ( $P_1$ )<sup>2)</sup>, когда для аппроксимации функционала  $J$  применяются формулы (3.10), (3.12)<sup>3)</sup> разд. 3.2.1, множество  $K_1$  аппроксимируется по формуле (3.11) разд. 3.2.1. Это обстоятельство объясняется тем, что ограничения, определяющие множество  $K_0$  ( $K_{0h}^3$ ) более жесткие, чем ограничения в определении множества  $K_1$  ( $K_{1h}$ ), поскольку имеет место строгое включение  $K_0 \subset K_1$  (получить столь же четкую интерпретацию аналогичного свойства приближений выпуклых множеств несколько труднее).

<sup>1)</sup> При фиксированном  $\omega$  и совпадающих начальных приближениях и условиях останова.

<sup>2)</sup> В том случае, разумеется, когда имеют место результаты разд. 2.2 об эквивалентности.

<sup>3)</sup> Следовательно, полученная здесь аппроксимация функционала  $J$  совпадает с аппроксимацией в примере 2 разд. 7.5.

Что касается затрат машинного времени, то здесь второй алгоритм оказывается (аналогичные результаты получаются во всех рассмотренных нами примерах) несколько более быстрым; этот факт без труда объясняется тем, что операция проектирования на интервал  $K_{ij}^n$  в случае первого алгоритма сложнее операции проектирования на интервал  $[-\delta_{ij}, \delta_{ij}]$  при использовании второго алгоритма, так как число соотношений, определяющих эти интервалы, в первом случае больше.

Добавим, что из всех опробованных для приближенного решения задачи  $(P_0)$  методов (без использования результатов разд. 2.2 об эквивалентности) именно метод настоящего разд. 7 оказался наиболее совершенным с точки зрения затрат машинного времени и памяти ЭВМ. ■

**Замечание 7.15.** Относительно сходимости алгоритмов (7.1), ..., (7.4) и (7.14), ..., (7.17) (и вариантов этих алгоритмов с теми или иными значениями параметров верхней и нижней релаксации) заметим (это замечание не является строгим доказательством), что при  $h \rightarrow 0 (N \rightarrow +\infty)$  аппроксимации множества  $K_0$ , построенные в разд. 4.1 (конечноэлементные) и в разд. 5.2 (конечно-разностные), приобретают все более локальный характер в следующем смысле.

Максимальное количество ограничений, в которые в явном виде входит одна переменная, ограничено сверху числом  $N_0 = 2\pi/\theta_0$  в случае метода конечных элементов при выполнении условий теоремы (о сходимости) 6.1 и ограничено целыми числами  $N_m (m = 1, 2, 3, 4)$ , определяемыми по формуле (7.18), для случая внешних аппроксимаций разд. 5.2.

Разумеется, имеет место равенство  $\lim_{h \rightarrow 0} (N_m/N) = 0$ , где  $N$  — количество переменных, входящих в формулировку приближенной задачи. ■

**Замечание 7.16.** Для приближенного решения задачи  $(P_0)$  можно использовать следующий метод аппроксимаций и декомпозиции, идеей которого мы обязаны Ж. Сеа; особенно легко использовать этот метод для внешних аппроксимаций  $(P_{0h})_{lm}$  ( $l = 1, 2; m = 2, 4$ ).

Идея метода состоит в следующем:

Пусть функционал  $J$  аппроксимируется функцией  $J_h^l (l = 1, 2)$  (см. разд. 5.1.1, 5.1.2); потребуем выполнения условий принадлежности множеству  $K_{0h}^m (m = 2, 4)$  (см. разд. 5.2) в узлах сетки  $Q_h$  (определение  $Q_h$  см. в разд. 5.1.2), одновременно принадлежащих сетке с шагом  $2h$ , наложенной на  $Q_h$  (см. рис. 7.7), т. е. примерно в одном узле из четырех, принадлежащих  $Q_h$ .

Смысл данного метода учета ограничений состоит в том, что соотношения, выражющие принадлежность элемента аппрокси-

мации выпуклого множества, не связаны друг с другом, так как они не содержат ни одной общей переменной; следовательно, мы можем объединить переменные в блоки по 4 и решать приближенную задачу одним из методов верхней или нижней блочной релаксации (по четыре переменные в блоке) с ограничениями;

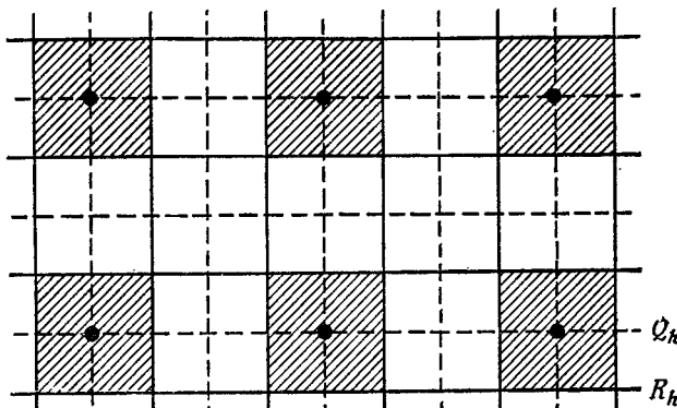


Рис. 7.7.

для значений  $0 < \omega < 2$ . Эти методы сходятся в силу отмеченной выше несвязанности ограничений (см. замечания 1.6 и 1.7 разд. 1.4 гл. 2, а также разд. 7 работы Гловински [1]). ■

## 8. Решение приближенной задачи, соответствующей задаче $(P_0)$ , методами штрафа

### 8.1. План изложения

В этом разделе мы будем изучать применение методов штрафа, изложенных в разд. 3.2 гл. 1 и разд. 3 гл. 2, к решению задачи  $(P_0)$ , а также к решению конечномерных задач, полученных из  $(P_n)$  при помощи конечноэлементных аппроксимаций разд. 4.1 и внешних аппроксимаций разд. 5.

Будут рассмотрены два метода штрафа, основанные на использовании следующих идей:

(i) Ограничение  $|\operatorname{grad} v| \leq 1$  п. в. снимается при помощи штрафа или, в крайнем случае, заменяется более простыми с точки зрения численной реализации ограничениями (см. ниже разд. 8.2).

(ii) Производится декомпозиция задачи  $(P_0)$  путем прибавления дополнительных функций и „искусственных ограничений“, которые впоследствии снимаются с помощью штрафа (см. ниже разд. 8.3).

Прежде чем переходить к применению описываемых ниже методов к решению приближенных задач, мы сочли полезным

привести их для случая непрерывной задачи, формально более простой. После этого представлены результаты решения нескольких конкретных задач, полученные при помощи этих методов. ■

## 8.2. Первый вариант метода штрафа

### 8.2.1. Идея метода

Функционалу  $J$  поставим в соответствие функционал со штрафом  $J_\varepsilon: W_0^{1,4}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ :<sup>1)</sup>

$$(8.1) \quad J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} \{(1 - |\operatorname{grad} v|^2)^-\}^2 dx.$$

Имеют место следующие результаты (доказательства см., например, в книге Лионса [1], разд. 5 гл. 3).

**Предложение 8.1.** Функционал  $J_\varepsilon$  обладает следующими свойствами:

(i)  $J_\varepsilon$  непрерывен и строго выпуклый на  $W_0^{1,4}(\Omega)$ ,

(ii)  $\lim_{\|v\|_{W_0^{1,4}(\Omega)} \rightarrow +\infty} J_\varepsilon(v) = +\infty$ ,

(iii)  $J_\varepsilon$  дифференцируем по Гато на  $W_0^{1,4}(\Omega)$ , градиент  $J'_\varepsilon$  определяется по формуле

$$(8.2) \quad (J'_\varepsilon(v), w) = a(v, w) - \int_{\Omega} fw dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - |\operatorname{grad} v|^2)^- \times \\ \times \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} w dx \quad \forall w \in W_0^{1,4}(\Omega). \blacksquare$$

В (8.2) скалярное произведение  $J'_\varepsilon(v)$  и  $w$  совпадает с формой, которая приводит в двойственность линейные системы  $W^{-1,4/3}(\Omega)$  (через  $W^{-1,4/3}(\Omega)$  обозначается пространство, сопряженное с  $W_0^{1,4}(\Omega)$ ) и  $W_0^{1,4}(\Omega)$ .

**Предложение 8.2.** Задача со штрафом  $(P_\varepsilon)$ , соответствующая задаче  $(P_0)$ ,

$$(8.3) \quad (P_\varepsilon) \min_{v \in W_0^{1,4}(\Omega)} J_\varepsilon(v),$$

<sup>1)</sup> Напомним, что  $v \in K_0 \Rightarrow v \in W_0^{1,\infty}(\Omega) = \left[ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega), v \Big|_{\Gamma} = 0 \right]$ .

$W_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ .

имеет решение, и притом только одно: это решение, которое мы будем обозначать  $u_\varepsilon$ , удовлетворяет уравнению

$$(8.4) \quad a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^{-} \operatorname{grad} u_\varepsilon \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \\ = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall v \in W_0^{1,4}(\Omega), \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,4}(\Omega). \blacksquare$$

*Замечание 8.1.* Из уравнения (8.4) следует, что элемент  $u_\varepsilon$  представляет собой единственное решение следующей краевой задачи для нелинейного эллиптического монотонного уравнения в  $W_0^{1,4}(\Omega)$ :

$$(8.5) \quad -\Delta u_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} \left( (1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^{-} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \right) = f, \\ u_\varepsilon|_{\Gamma} = 0. \blacksquare$$

*Замечание 8.2.* Можно показать, что нелинейный оператор  $\beta$ :

$$W_0^{1,4}(\Omega) \rightarrow W^{-1,4/3}(\Omega),$$

определяемый по формуле

$$(8.6) \quad (\beta(v), w) = \int_{\Omega} (1 - |\operatorname{grad} v|^2)^{-} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} w \, dx \\ \forall v, w \in W_0^{1,4}(\Omega),$$

является монотонным (как градиент выпуклой функции), локально удовлетворяет условию Липшица и  $\beta(v) = 0 \quad \forall v \in K_0$ ; следовательно,  $\beta$  представляет собой оператор штрафа, соответствующий множеству  $K_0$ , в смысле определения разд. 3.2 гл. 1. ■

Относительно поведения последовательности  $u_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место

**Теорема 8.1.** *Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то*

$$(8.7) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ сильна в } H_0^1(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ .

**Доказательство.** Это — вариант доказательства теоремы 3.1 разд. 3.2 гл. 1.

Для решения  $u$  задачи  $(P_0)$  имеем:  $(1 - |\operatorname{grad} u|^2)^{-} = 0$ , откуда вытекает, что

$$(8.8) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u) \leq J(u) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(8.9) \quad J(u_\varepsilon) \leq J(u) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

откуда

$$(8.10) \quad \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно, существует элемент  $u^* \in H_0^1(\Omega)$  и последовательность, которую мы по-прежнему обозначаем  $u_\varepsilon$ , такие, что

$$(8.11) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u^* \text{ слабо в } H_0^1(\Omega).$$

Из условия (8.8) вытекает неравенство

$$(8.12) \quad \int_{\Omega} \{(1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^-\}^2 dx \leq 4\varepsilon (J(u) - J(u_\varepsilon)),$$

откуда с учетом (8.10) имеем

$$(8.13) \quad \|u_\varepsilon\|_{W_0^{1,4}(\Omega)} \leq C,$$

$$(8.14) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \{(1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^-\}^2 dx = 0.$$

Таким образом, для подпоследовательности, о которой шла речь выше, имеем

$$(8.15) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u^* \text{ слабо в } W_0^{1,4}(\Omega).$$

С использованием свойства слабой полунепрерывности снизу из (8.9), (8.11), (8.14), (8.15) находим

$$(8.16) \quad J(u^*) \leq J(u),$$

$$(8.17) \quad \int_{\Omega} \{(1 - |\operatorname{grad} u^*|^2)^-\}^2 dx = 0.$$

Из равенства (8.17) вытекает, что  $u^* \in K_0$ , следовательно, в силу (8.16) и единственности решения  $u$ , заключаем, что  $u^* = u$ .

Из (8.9), (8.11) находим, что для подпоследовательности имеют место оценки

$$J(u) \leq \liminf J(u_\varepsilon) \leq \limsup J(u_\varepsilon) \leq J(u),$$

откуда вытекает, что

$$(8.18) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(u_\varepsilon) = J(u),$$

что в свою очередь дает

$$(8.19) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 dx.$$

Следовательно, имеет место сходимость норм, откуда вытекает сильная сходимость, поскольку слабая сходимость нами

уже установлена. Учитывая единственность решения  $u$ , имеем  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u$  для всей последовательности  $u_\varepsilon$  (без выделения подпоследовательности). ■

### 8.2.2. Вариант метода

Использование метода штрафа разд. 8.2.1 ограничивает дифференцируемость минимизируемого функционала  $J_\varepsilon$ ; для того чтобы снять этот нежелательный эффект, вводят неотрицательную функцию отклонения (см. замечание 3.6 разд. 3.3 гл. 2). В самом деле, ограничение

$$(8.20) \quad |\operatorname{grad} v| \leq 1 \text{ п.в.}$$

эквивалентно ограничению

$$(8.21) \quad |\operatorname{grad} v|^2 + q = 1 \text{ п.в., } q \geq 0 \text{ п.в.,}$$

откуда путем штрафа ограничения (8.21) получаем задачу  $(\Pi_\varepsilon)$  — вариант  $(P_\varepsilon)$ :

$$(8.22) \quad (\Pi_\varepsilon) \quad \min_{(v, q) \in W_0^{1,4}(\Omega) \times L_+^2(\Omega)} \left[ J(v) + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v|^2 + q - 1)^2 dx \right].$$

Заметим, что функционал со штрафом в задаче  $(\Pi_\varepsilon)$  — невыпуклый по отношению к паре переменных  $(v, q)$ . Имея в виду это обстоятельство, докажем, что имеет место

**Предложение 8.3.** *Задача  $(\Pi_\varepsilon)$  имеет единственное решение  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ , где  $u_\varepsilon$  — решение задачи  $(P_\varepsilon)$ , а  $p_\varepsilon$  определяется по формуле*

$$(8.23) \quad P_\varepsilon = \sup (0, 1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2) = (1 - |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2)^+.$$

*Доказательство.* Введем обозначение

$$I_\varepsilon(v, q) = J(v) + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v|^2 + q - 1)^2 dx$$

и для заданного элемента  $v$  определим  $q_v$  по формуле

$$(8.24) \quad q_v = \sup (0, 1 - |\operatorname{grad} v|^2) = (1 - |\operatorname{grad} v|^2)^+.$$

Имеем тогда

$$(8.25) \quad I_\varepsilon(v, q) \geq I_\varepsilon(v, q_v) = J_v(v) \geq J_v(u_\varepsilon) \quad \forall (v, q) \in W_0^{1,4}(\Omega) \times L_+^2(\Omega),$$

откуда с учетом формулы (8.23)

$$(8.26) \quad I_\varepsilon(v, q) \geq J_v(u_\varepsilon) = I_v(u_\varepsilon, p_\varepsilon) \quad \forall (v, q) \in W_0^{1,4}(\Omega) \times L_+^2(\Omega),$$

т. е. неравенство, которое и нужно было доказать. ■

Из предложения 8.3 и замечания 8.1 (см. выше) нетрудно получить

**Предложение 8.4.** Пара  $(u_e, p_e)$  — решение задачи  $(\Pi_e)$ , характеризуется условиями

$$(8.27) \quad -\Delta u_e - \frac{1}{e} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (|\operatorname{grad} u_e|^2 + p_e - 1) \frac{\partial u_e}{\partial x_k} = f,$$

$$u_e|_F = 0,$$

$$p_e = \sup (0, 1 - |\operatorname{grad} u_e|^2).$$

### 8.2.3. Применение к решению приближенных задач (I). Формулировка приближенной задачи со штрафом

**Предварительное замечание.** Нет никаких затруднений (в принципе) в применении методов штрафа разд. 8.2.1, 8.2.2 к различным аппроксимациям задачи  $(P_0)$ , построенным в разд. 4 и 5. Мы ограничимся аппроксимацией  $(P_{0h})_{13}$  этой задачи (см. разд. 5.1, 5.2, 5.3), так как только для этого случая были получены численные результаты; использованный здесь метод представляет собой конечномерный аналог метода разд. 8.2.2. ■

*Применение метода штрафа к задаче  $(P_{0h})_{13}$*

Определим пространство  $L_h$  и выпуклое множество  $L_{h+}$ :

$$(8.28) \quad L_h = \{q_h \mid q_h = \{q_{ij}\}_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h}, q_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

$$(8.29) \quad L_{h+} = \{q_h \mid q_h \in L_h, q_{ij} \geq 0 \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h\},$$

определен также функционал  $I_{eh}: V_h \times L_h \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующий задаче  $(P_{0h})_{13}$ , по формуле

$$(8.30)^1) I_{eh}(v_h, q_h) = J_h^1(v_h) + \frac{h^2}{4e} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \alpha_{ij} Q_{ij}^e(v_h, q_h),$$

в которой

$$(8.31) \quad Q_{ij}(v_h, q_h) = \frac{1}{2} \beta_{ij} \left( \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right) + q_{ij} - 1,$$

<sup>1)</sup> Определение  $J_h^1$  сп. в разд. 5.1.1.

где (см. рис. 5.2, 5.3, 5.4 разд. 5.2)

$$(8.32) \quad \begin{aligned} \beta_{ij} &= 1, \text{ если } M_{ij} \in \Omega_h, \\ \beta_{ij} &= 2, \text{ если } M_{ij} \in \Gamma_h \text{ и имеется одна соседняя точка} \\ &\quad \text{в области } \Omega_h, \end{aligned}$$

$$\beta_{ij} = \frac{4}{3}, \text{ если } M_{ij} \in \Gamma_h \text{ и имеется две соседних точки в } \Omega_h,$$

(условимся полагать  $v_{pq} = 0$  в (8.31), если  $M_{pq} \in \Omega_h$ ).

Все параметры  $\alpha_{ij}$  можно выбрать равными 1, однако более естественный выбор состоит в следующем:

$$(8.33) \quad \alpha_{ij} = \frac{1}{\beta_{ij}} \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h.$$

Определим теперь задачу  $(\Pi_{eh})$  — дискретный аналог задачи  $(\Pi_e)$ :

$$(8.34) \quad (\Pi_{eh}) \min_{(v_h, q_h) \in V_h \times L_{h+}} I_{eh}(v_h, q_h). \blacksquare$$

Обозначая

$$(8.35) \quad G_{ij}(v_h) = \left\{ \frac{1}{2} \left( \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right) \right\}^{1/2}$$

и действуя точно так же, как и в разд. 8.2.1, 8.2.2, без труда можно доказать, что имеют место предложения:

**Предложение 8.5.** Задача  $(\Pi_{eh})$  имеет, и притом только одно, решение  $(u_{he}, p_{he})$  в пространстве  $V_h \times L_{h+}$ , причем при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $u_{he} \rightarrow u_h$ , где  $u_h$  — решение задачи  $(P_{0h})_{13}$ .  $\blacksquare$

**Предложение 8.6.** Пара  $(u_{he}, p_{he})$  — единственное решение задачи  $(\Pi_{eh})$ , характеризуется условиями

$$(8.36) \quad \frac{\partial I_{eh}}{\partial v_{ij}}(u_{he}, p_{he}) = 0 \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h,$$

$$p_{eij} = (1 - \beta_{ij} G_{ij}^2(u_h))^+ = \max(0, 1 - \beta_{ij} G_{ij}^2(u_{he})) \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h,$$

**Замечание 8.3.** Предложение 8.5 имеет место и в случае, когда в качестве  $\alpha_{ij}$  выбираются произвольные строго положительные скалярные величины.  $\blacksquare$

**Замечание 8.4.** Система (8.36) представляет собой дискретный аналог системы (8.27).  $\blacksquare$

## 8.2.4. Применение к решению приближенных задач (11).

Решение приближенной задачи со штрафом

Для решения задачи  $(\Pi_{eh})$  достаточно — если учесть предложение 8.1 — решить систему (8.36) (нелинейную); для решения этой системы будем использовать один из вариантов метода точечной верхней релаксации с проекцией.

Ниже будем полагать (для упрощения)  $u_{he} = (u_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h}$ ,  $p_{he} = (p_{ij})_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h}$ , и так как  $G_{ij}(v_h)$  кроме точки  $M_{ij}$  содержит лишь 4 соседние с  $M_{ij}$  точки, введем обозначение

$$G_{ij}(v_h) = G_{ij}(v_{i-1j}, v_{ij-1}, v_{ij}, v_{ij+1}, v_{ij+1}).$$

Уравнение  $\frac{\partial I_{eh}}{\partial v_{ij}}(u_{he}, p_{he}) = 0$  можно теперь написать в развернутом виде; пусть  $\alpha_{ij}$  даются формулой (8.33), тогда

$$\begin{aligned}
 & -\epsilon \left( \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2} - f_{ij} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} [\beta_{ij} G_{ij}^2(u_{i-1j}, u_{ij-1}, u_{ij}, u_{ij+1}, u_{ij+1}) + p_{ij} - 1] \times \\
 & \times \left( \frac{4u_{ij} - u_{i+1j} - u_{i-1j} - u_{ij+1} - u_{ij-1}}{h^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} [\beta_{i-1j} G_{i-1j}^2(u_{i-2j}, u_{i-1j-1}, u_{i-1j}, u_{ij}, u_{i-1j+1}) + \\
 & + p_{i-1j} - 1] \left( \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h^2} \right) + \\
 (8.37) \quad & + \frac{1}{2} [\beta_{ij-1} G_{ij-1}^2(u_{i-1j-1}, u_{ij-2}, u_{ij-1}, u_{ij+1}, u_{ij}) + \\
 & + p_{ij-1} - 1] \left( \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} [\beta_{i+1j} G_{i+1j}^2(u_{ij}, u_{i+1j-1}, u_{i+1j}, u_{ij+2}, u_{i+1j+1}) + \\
 & + p_{i+1j} - 1] \left( \frac{u_{ij} - u_{i+1j}}{h^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} [\beta_{ij+1} G_{ij+1}^2(u_{i-1j+1}, u_{ij}, u_{ij+1}, u_{ij+1}, u_{ij+2}) + \\
 & + p_{ij+1} - 1] \left( \frac{u_{ij} - u_{ij+1}}{h^2} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

где  $u_{pq} = 0$ , если  $M_{pq} \notin \Omega_h$ . Обозначим левую часть уравнения (8.37) через

$$F_{eij}(u_{i-2j}, u_{i-1j-1}, u_{i-1j}, u_{i-1j+1}, u_{ij-2}, u_{ij-1}, u_{ij}, u_{ij+1}, u_{ij+2}, u_{i+1j-1}, u_{i+1j}, u_{i+1j+1}, u_{ij+2}; p_{ij}, p_{i-1j}, p_{ij-1}, p_{i+1j}, p_{ij+1}),$$

и заметим, что (8.37) соответствует дискретизации левой части уравнения (8.27) в точке  $M_{ij}$  по схеме с 13 узлами, показанной на рис. 8.1:

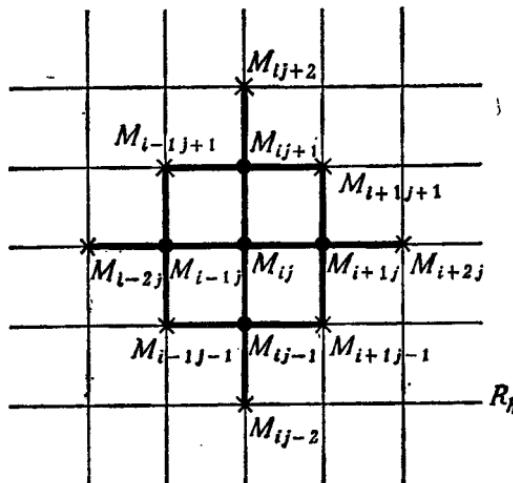


Рис. 8.1.

### Описание алгоритма верхней релаксации

Ниже будем предполагать, что итерации проводятся по возрастанию индекса  $i$ , а при фиксированном  $i$  — по возрастанию индекса  $j$ .

Таким образом, мы применяем алгоритм:

$$(8.38) \quad u_h^0, p_h^0 \text{ задаем произвольно,}$$

затем, предполагая известными  $u_h^n, p_h^n$ , определяем координаты  $u_{ij}^{n+1}$  вектора  $u_h^{n+1}$  по формуле

$$(8.39) \quad F_{eij}(u_{i-2j}^{n+1}, u_{i-1j-1}^{n+1}, u_{i-1j}^{n+1}, u_{i-1j+1}^{n+1}, u_{ij-2}^{n+1}, u_{ij-1}^{n+1}, \boxed{u_{ij}^{n+1}}, u_{ij+1}^{n+1}, u_{ij+2}^{n+1}, u_{i+1j-1}^{n+1}, u_{i+1j}^{n+1}, u_{i+1j+1}^{n+1}, u_{i+2j}^{n+1}; \\ p_{ij}^n, p_{i+1j}^n, p_{i-1j}^n, p_{ij-1}^n, p_{ij+1}^n) = \\ = (1-\omega) F_{eii}(u_{i-2j}^{n+1}, u_{i-1j-1}^{n+1}, u_{i-1j}^{n+1}, u_{i-1j+1}^{n+1}, u_{ij-2}^{n+1}, u_{ij-1}^{n+1}, \\ \boxed{u_{ij}^n}, u_{ij+1}^{n+1}, u_{ij+2}^{n+1}, u_{i+1j-1}^{n+1}, u_{i+1j}^{n+1}, u_{i+1j+1}^{n+1}, u_{i+2j}^{n+1}; \\ p_{ij}^n, p_{i+1j}^n, p_{i-1j}^n, p_{ij-1}^n, p_{ij+1}^n) \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h;$$

имея  $u_h^{n+1}$ , находим  $p_h^{n+1}$ :

$$(8.40) \quad p_{ij}^{n+1} = \max(0, 1 - \beta_{ij} G_{ij}^2(u_h^{n+1})) \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h.$$

Заметим, что  $u_{ij}^{n+1}$  в уравнении (8.39) представляет собой решение некоторого уравнения 3-й степени (от одной переменной). ■

## 8.2.5. Применение к решению приближенных задач. (III). Примеры

Пример 1. Вернемся к примеру разд. 7.5, когда

$$\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[, f = 10.$$

Численные значения параметров:

Шаг дискретизации:  $h = 1/20$ .

Параметр штрафа:  $\varepsilon = 0,625 \times 10^{-3}$ .

Начальное приближение для алгоритма (8.38), (8.39), (8.40):  $u_h^0 = 0$ ,  $p_h^0 = 0$ .

Условие останова алгоритма (8.38), (8.39), (8.40):

$$\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| \leq 10^{-6}.$$

*Решение уравнения (8.39).*

Уравнение третьей степени, определяющее  $u_{ij}^{n+1}$  и получающееся из уравнения (8.39), было решено по методу Ньютона — Рафсона с начальным приближением  $u_{ij}^n$ ; этот способ более быстрый, нежели использование формул Кардано.

*Анализ численных результатов*

При значении  $\omega = 1$  ( $\omega = 1,7$ ) имеет место сходимость за 391 итерацию (186 итераций), что соответствует 10 с (6,2 с) машинного времени ЭВМ IBM 360/91. ■

Пример 2. Вернемся к примеру 3 разд. 7.6, когда  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$ ,  $f$  определяется формулой

$$(8.41) \quad f(x) = \begin{cases} 10 & \text{для } (x_1, x_2) \in ]0, \frac{1}{2}[ \times ]\frac{1}{2}, 1[, \\ -10 & \text{для } (x_1, x_2) \in ]\frac{1}{2}, 1[ \times ]0, \frac{1}{2}[, \\ 0, & \text{для } (x_1, x_2) \in ]0, \frac{1}{2}[ \times ]0, \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}, 1[ \times \\ & \times ]\frac{1}{2}, 1[. \end{cases}$$

Выберем здесь по-прежнему  $h = 1/20$ ,  $\varepsilon = 0,625 \times 10^{-3}$ ,  $u_h^0 = 0$ ,  $p_h^0 = 0$  и то же условие останова алгоритма (8.38), (8.39), (8.40), что и в предыдущем примере.

При значении  $\omega = 1$  имеет место сходимость за 560 итераций, что соответствует 14,5 с машинного времени ЭВМ IBM 360/90; число  $u_{ij}^{n+1}$  определяется, как и выше, по методу Ньютона — Рафсона. ■

*Замечание 8.5.* Полученные здесь приближенные решения в двух рассмотренных выше примерах совпадают (с точностью до

1% — в относительных величинах) с решениями тех же приближенных задач, полученными другими методами настоящей главы. ■

**Замечание 8.6.** Скорость сходимости можно увеличить путем изменения  $\epsilon$ ; процесс начинается с достаточно больших значений  $\epsilon$ , при вычислении последующих итераций в соответствии с алгоритмом (8.38), (8.39), (8.40)  $\epsilon$  постепенно уменьшается (см. ниже разд. 8.3.5). ■

**Замечание 8.7.** Другие варианты задачи  $(\Pi_{eh})$  можно получить, используя аппроксимацию  $J_h^2$  функционала  $J$  (см. разд. 5.1.2) и/или аппроксимации  $K_{0h}^m$  ( $m = 1, 2, 4$ ) множества  $K_0$  (см.

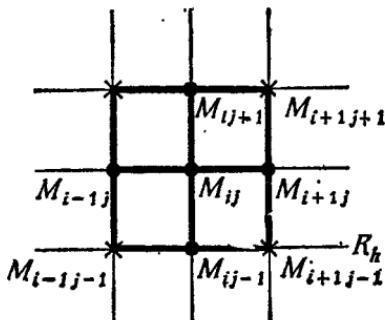


Рис. 8.2.

разд. 5.2); применение  $K_{0h}^m$  привело бы к варианту уравнения (8.37), куда вошли бы значения  $u_{pq}$  в 9 узлах, показанных на рис. 8.2, и 12(4) переменных отклонения для  $m=1$  ( $m=2, 4$ ).

Напомним (см. разд. 5.2), что при  $m=2, 3, 4$  количество ограничений примерно равно количеству переменных  $u_{ij}$ , следовательно, в этом случае мы имели бы примерно одинаковое число переменных отклонения и переменных  $u_{ij}$ ; в случае же  $m=1$  переменных отклонения было бы примерно в 4 раза больше, чем переменных  $u_{ij}$ . ■

### 8.3. Второй вариант метода штрафа

#### 8.3.1. Идея метода

Введем обозначение:

$$(8.42) \quad \Lambda = \{q \mid q \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), q = (q_1, q_2), q_1^2(x) + q_2^2(x) \leqslant 1 \text{ п.в.}\}.$$

Тогда задача

$$(P_0) \min_{v \in K_0} J(v)$$

эквивалентна задаче

$$(8.43) \quad (\Pi_0)_1 \begin{cases} \min_{(v, q) \in \mathcal{K}_0} J(v), \\ \mathcal{K}_0 = \left\{ (v, q) \mid v \in H_0^1(\Omega), q \in \Lambda, q_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1}, q_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\}, \end{cases}$$

или же задаче

$$(8.44) \quad (\Pi_0)_2 \min_{(v, q) \in \mathcal{K}_0} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (q_1^2 + q_2^2) dx - \int_{\Omega} fv dx \right].$$

Мы будем сейчас „штрафовать“ лишь ограничение

$$(8.45) \quad q = \operatorname{grad} v,$$

что дает в применении к задаче  $(\Pi_0)_1$

$$(8.46) \quad (\Pi_\epsilon)_1 \min_{(v, q) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda} \left[ J(v) + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} \left| q_1 - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} \left| q_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2} \right|^2 dx \right],$$

в применении к задаче  $(\Pi_0)_2$ ,

$$(8.47) \quad (\Pi_\epsilon)_2 \begin{cases} \min_{(v, q) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (q_1^2 + q_2^2) dx - \int_{\Omega} fv dx + \frac{1}{2\epsilon} \times \right. \\ \left. \times \int_{\Omega} \left| q_1 - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} \left| q_2 - \frac{\partial v}{\partial x_2} \right|^2 dx \right]. \end{cases}$$

Обозначим через  $\mathcal{I}_{1\epsilon}(\mathcal{I}_{2\epsilon})$  функционал задачи (8.46), ((8.47)),  $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2$ ; нетрудно доказать, что имеют место предложение:

**Предложение 8.6.** Функционал  $\mathcal{I}_{ke}$  ( $k = 1, 2$ ) обладает следующими свойствами:

(i)  $\mathcal{I}_{ke}$  непрерывен и строго выпуклый на  $\mathcal{V}$ ,

(ii)  $\lim_{\|(v, q)\|_v \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{ke}(v, q) = +\infty$ ,

(iii)  $\mathcal{I}_{ke}$  дифференцируем по Гато (и даже на  $C^\infty$  дифференцируем по Фреше) на  $\mathcal{V}$ . ■

**Предложение 8.7.** Каждая из задач  $(\Pi_\epsilon)_k$  ( $k = 1, 2$ ) со штрафом имеет в  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda$  решение, и притом только одно, которое мы будем обозначать  $(u_\epsilon^k, p_\epsilon^k)$ ; эти решения характеризуются условиями:

для  $k=1$

$$(8.48) \quad \begin{aligned} & - (1 + \varepsilon) \Delta u_\varepsilon^1 + \operatorname{div} p_\varepsilon^1 = \varepsilon f, \\ & u_\varepsilon^1|_\Gamma = 0, \\ & \int_{\Omega} (p_\varepsilon^1 - \operatorname{grad} u_\varepsilon^1) \cdot (q - p_\varepsilon^1) dx \geqslant 0 \quad \forall q \in \Lambda, \\ & p_\varepsilon^1 \in \Lambda, \end{aligned}$$

для  $k=2$

$$(8.49) \quad \begin{aligned} & - \Delta u_\varepsilon^2 + \operatorname{div} p_\varepsilon^2 = \varepsilon f, \\ & u_\varepsilon^2|_\Gamma = 0, \\ & \int_{\Omega} \left( p_\varepsilon^2 - \frac{\operatorname{grad} u_\varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \right) \cdot (q - p_\varepsilon^2) dx \geqslant 0 \quad \forall q \in \Lambda, \\ & p_\varepsilon^2 \in \Lambda. \blacksquare \end{aligned}$$

*Замечание 8.8.* Последние из условий (8.48), (8.49) эквивалентны соответственно условиям

$$(8.50) \quad p_\varepsilon^1 = P_\Lambda(\operatorname{grad} u_\varepsilon^1),$$

$$(8.51) \quad p_\varepsilon^2 = P_\Lambda \left( \frac{\operatorname{grad} u_\varepsilon^2}{1 + \varepsilon} \right),$$

где через  $P_\Lambda$  обозначен оператор ортогонального проектирования  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \Lambda$  в смысле обычного определения нормы прямого произведения  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ ; в явном виде

$$(8.52) \quad P_\Lambda(q) = \frac{q}{\sup(1, |q|)} \quad \forall q \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

где

$$|q| = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}. \blacksquare$$

Использование метода штрафа оправдано в силу следующей теоремы:

**Теорема 8.2.** Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то для всех  $k=1, 2$  имеем

$$(8.53) \quad u_\varepsilon^k \rightarrow u \quad \text{сильно в } H_0^1(\Omega),$$

$$(8.54) \quad p_\varepsilon^k \rightarrow \operatorname{grad} u \quad \text{сильно в } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ .

*Доказательство.* Оно представляет собой вариант доказательства теоремы 3.1 разд. 3.2 гл. 1; будет рассмотрен лишь случай  $k=1$ , случай  $k=2$  рассматривается аналогично.

Пусть  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ ,  $p = \operatorname{grad} u$ ; имеем  $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda$  и, кроме того,

$$(8.55) \quad J(u_\varepsilon^1) \leqslant \mathcal{I}_{1\varepsilon}(u_\varepsilon^1, p_\varepsilon^1) < \mathcal{I}_{1\varepsilon}(u, p) = J(u) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Следовательно,

$$(8.56) \quad J(u_\varepsilon^1) \leqslant J(u) \quad \forall \varepsilon > 0$$

откуда вытекает, что

$$(8.57) \quad \|u_\varepsilon^1\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant C \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Кроме того,  $p_\varepsilon^1 \in \Lambda \Rightarrow p_\varepsilon^1$  ограничена в  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , следовательно, существует подпоследовательность, которую мы по-прежнему будем обозначать  $(u_\varepsilon^1, p_\varepsilon^1)$ , и элементы  $u^* \in H_0^1(\Omega)$ ,  $p^* \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , такие, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$(8.58) \quad u_\varepsilon^1 \rightarrow u^* \text{ слабо в } H_0^1(\Omega),$$

$$(8.59) \quad p_\varepsilon^1 \rightarrow p^* \text{ слабо в } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

и так как  $\Lambda$  выпукло и замкнуто в  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  (следовательно, слабо замкнуто), то

$$(8.60) \quad p^* \in \Lambda.$$

Из условий (8.55) следует, что

$$(8.61) \quad \int_{\Omega} \left| p_{1\varepsilon}^1 - \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| p_{2\varepsilon}^1 - \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial x_2} \right|^2 dx \leqslant 2\varepsilon (J(u) - J(u_\varepsilon^1)),$$

откуда с учетом (8.57) имеем

$$(8.62) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p_\varepsilon^1 - \operatorname{grad} u_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = 0.$$

Используя свойство слабой полунепрерывности снизу, из (8.56), (8.58), (8.59), (8.62) находим

$$(8.63) \quad J(u^*) \leqslant J(u),$$

$$(8.64) \quad p^* = \operatorname{grad} u^*,$$

и из (8.60) вытекает, что  $u^* \in K_0$ . Таким образом, имеем  $u^* = u$ .

Сильная сходимость  $u_\varepsilon^1$  и сходимость всей последовательности  $(u_\varepsilon^1)_\varepsilon$  доказывается точно так же, как и в теореме 8.1, сильная сходимость последовательности  $p_\varepsilon^1$  вытекает из сильной сходимости  $u_\varepsilon^1$  и предельного равенства (8.62). ■

1) В действительности  $p_\varepsilon^1 \rightarrow p^*$  —слабо в  $L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega)$ .

### 8.3.2. Применение к решению приближенных задач (1).

Формулировка приближенной задачи со штрафом для случая конечноэлементной аппроксимации разд. 4.1

Мы ограничимся конечноцисленным аналогом задачи  $(\Pi_e)_1$ , задача  $(\Pi_e)_2$  исследуется аналогично (для краткости индекс 1 ниже будем опускать); сохраним обозначения разд. 4.

Пусть пространство  $V_h$  определено так, как это сделано в разд. 4.1.1; введем подпространство  $L_h$  пространства  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ :

$$(8.65) \quad \begin{aligned} L_h = & \left\{ q = (q_1, q_2) \mid q \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), q_1 = \right. \\ & \left. = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} q_{1T} \theta_T, q_2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} q_{2T} \theta_T; q_{1T}, q_{2T} \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

где

(8.66)  $\theta_T$  — характеристическая функция множества  $T$ .

Определим далее

$$(8.67) \quad \Lambda_h = L_h \cap \Lambda.$$

Заметим, что

$$(8.68) \quad v_h \in V_h \Leftrightarrow \operatorname{grad} v_h \in L_h,$$

$$(8.69) \quad v_h \in V_h \cap K_0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} v_h \in \Lambda_h,$$

$$(8.70) \quad q \in \Lambda_h \Leftrightarrow q_{1T}^2 + q_{2T}^2 \leq 1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Конечноцисленный аналог задачи  $(\Pi_e)_1$  определим теперь следующим образом:

$$(8.71) \quad (\Pi_{eh}) \quad \min_{(v_h, q_h) \in V_h \times \Lambda_h} \mathcal{J}_e(q_h, v_h),$$

где  $\mathcal{J}_e$  было введено ранее по формуле (8.46); нетрудно доказать

**Предложение 8.8.** Задача  $(\Pi_{eh})$  имеет решение, и притом только одно; это решение мы будем обозначать  $(u_{he}, p_{he})$ . Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то

$$(8.72) \quad u_{he} \rightarrow u_h,$$

$$(8.73) \quad p_{he} \rightarrow \operatorname{grad} u_h,$$

где  $u_h$  — решение (единственное) задачи минимизации

$$\min_{v_h \in V_h \cap K_0} J(v_h). \blacksquare$$

**Замечание 8.9.** По причинам, отмеченным в замечании 4.6 разд. 4.2.5, метод внутренней аппроксимации, описание кото-

рого было дано в разд. 4.2 (с использованием собственных функций оператора  $-\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ ), не приспособлен к применению метода штрафа разд. 8.3.

### 8.3.3. Применение к решению приближенных задач (II).

*Формулировка приближенной задачи со штрафом  
в случае внешних аппроксимаций разд. 5.*

Из рассмотренных в разд. 5.2 внешних аппроксимаций  $K_0$  лишь  $K_{0h}^4$  идеально подходит к использованию метода штрафа разд. 8.3 (по новому затруднений, возникающих при применении описанных в разд. 5.2 других аппроксимаций выпуклых множеств ограничений, см. работу Марокко [1]). Здесь мы также ограничимся только конечномерным аналогом задачи  $(\Pi_\varepsilon)_1$  (см. определение (8.46)), сохраняя при этом обозначения разд. 5.

Напомним, что

$$V_h = \{v_h \mid v_h = (v_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h}\},$$

и введем множества

$$(8.74) \quad L_h = \{q_h \mid q_h = (q_{1i+1/2j+1/2}, q_{2i+1/2j+1/2})_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h}\},$$

$$(8.75) \quad \Lambda_h = \{q_h \mid q_h \in L_h, q_{1i+1/2j+1/2}^2 + q_{2i+1/2j+1/2}^2 \leq 1 \\ \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h\}.$$

Определим теперь следующие аппроксимации задачи  $(\Pi_\varepsilon)_1$  для значений  $l=1, 2$ :

$$(8.76) \quad (\Pi_{\varepsilon h}^l) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min_{(v_h, q_h) \in V_h \times \Lambda_h} \left[ J_h^l + \frac{h^2}{2\varepsilon} \sum_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} \times \right. \\ \times \left( q_{1i+1/2j+1/2} - \frac{v_{i+1/2j+1} - v_{ij+1} + v_{i+1j} - v_{ij}}{2h} \right)^2 + \\ + \frac{h^2}{2\varepsilon} \sum_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} \times \\ \times \left( q_{2i+1/2j+1/2} - \frac{v_{i+1/2j+1} - v_{i+1j} + v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right)^2 \end{array} \right].$$

Нетрудно доказать, что имеют место следующие предложения:

**Предложение 8.9.** *Задача  $(\Pi_{\varepsilon h})$  имеет решение, и притом только одно; это решение мы будем обозначать  $(u_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$ . Если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то для  $l=1$  или  $2$  имеем*

$$(8.77) \quad u_{\varepsilon h}^l \rightarrow u_h^l,$$

где  $u_h$  — решение задачи (см. задачу (5.23)):

$$(P_{0h})_{l,i} \min_{v_h \in K_{0h}^4} J_h^l(v_h).$$

**Предложение 8.10.** Положим

$$u_{he} = (u_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h}, \quad p_{he} = (p_{l+1/2j+1/2})_{M_{i+1/2j+1/2}} \in \Sigma_h,$$

тогда оптимальное решение характеризуется условиями:

$$(8.78) \quad \begin{aligned} & -\varepsilon \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2} \\ & + \frac{u_{i+1j+1} + u_{i-1j+1} + u_{ij+1-1} + u_{ij-1-1} - 4u_{ij}}{2h^2} + \\ & + \frac{p_{1l+1/2j+1/2} - p_{1l-1/2j+1/2} + p_{1l+1/2j-1/2} - p_{1l-1/2j-1/2}}{2h} + \\ & + \frac{p_{2l+1/2j+1/2} - p_{2l+1/2j-1/2} - p_{2l-1/2j+1/2} - p_{2l-1/2j-1/2}}{2h} = \\ & = \varepsilon f_{ij} \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h \end{aligned}$$

для  $l = 1$ ,

$$(8.79) \quad \begin{aligned} & -(1+\varepsilon) \frac{u_{i+1j+1} + u_{i-1j+1} + u_{ij+1-1} + u_{ij-1-1} - 4u_{ij}}{2h^2} + \\ & + \frac{p_{1l+1/2j+1/2} - p_{1l-1/2j+1/2} + p_{1l+1/2j-1/2} - p_{1l-1/2j-1/2}}{2h} + \\ & + \frac{p_{2l+1/2j+1/2} - p_{2l+1/2j-1/2} + p_{2l-1/2j+1/2} - p_{2l-1/2j-1/2}}{2h} = \\ & = \varepsilon f_{ij} \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h \end{aligned}$$

для  $l = 2$ ,

$$(8.80) \quad \begin{aligned} & \left( p_{1l+1/2j+1/2} - \frac{u_{i+1j+1} - u_{ij+1} + u_{ij+1} - u_{ij}}{2h} \right) \times \\ & \times (q_{1l+1/2j+1/2} - p_{1l+1/2j+1/2}) + \\ & + \left( p_{2l+1/2j+1/2} - \frac{u_{i+1j+1} - u_{ij+1} + u_{ij+1} - u_{ij}}{2h} \right) \times \\ & \times (q_{2l+1/2j+1/2} - p_{2l+1/2j+1/2}) \geqslant 0 \\ & \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h, \quad \forall q_h \in \Lambda_h \\ & p_{he}^l \in \Lambda_h \end{aligned}$$

$\forall l = 1, 2$ . ■

**Замечание 8.9.** Условия (8.78), (8.79), (8.80) представляют собой дискретный аналог условий (8.48). ■

Замечание 8.10. Условие (8.80) эквивалентно следующему:

$$(8.81) \quad \begin{aligned} & (p_{1i+1/2j+1/2}, p_{2i+1/2j+1/2}) = \\ & = P_{\bar{D}} \left( \frac{u_{i+1j+1} - u_{ij+1} + u_{i+1j} - u_{ij}}{2h}, \right. \\ & \quad \left. \frac{u_{i+1j+1} - u_{i+1j} + u_{ij+1} - u_{ij}}{2h} \right) \\ & \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h, \end{aligned}$$

где

$$(8.82) \quad \bar{D} = [y \mid y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1^2 + y_2^2 \leq 1],$$

$P_{\bar{D}}$  — оператор ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{D}$  с использованием евклидовой нормы на  $\mathbb{R}^2$ , т. е.

$$(8.83) \quad P_{\bar{D}}(y_1, y_2) = \left\{ \frac{y_1}{\max(1, \sqrt{y_1^2 + y_2^2})}, \frac{y_2}{\max(1, \sqrt{y_1^2 + y_2^2})} \right\}$$

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \blacksquare$$

### 8.3.4. Применение к решению приближенных задач (III).

Решение приближенной задачи со штрафом методом верхней релаксации с проекцией

Мы ограничимся внешними аппроксимациями, описанными в разд. 8.3.3.

Предварительное замечание. Операторы

$$(8.84) \quad y = P_{\bar{D}}(z)$$

и

$$(8.85) \quad y = P_{\bar{D}}(y - \rho(y - z)) \quad \forall \rho \geq 0. \blacksquare$$

эквивалентны.

Описание алгоритма верхней релаксации

Ниже будем предполагать, что итерации осуществляются по возрастающему индексу  $i$ , при фиксированном  $i$  — по возрастающему индексу  $j$ ; таким образом, используется алгоритм:

$$(8.86) \quad u_h^0, p_h^0 \text{ задается произвольно,}$$

предполагая далее  $u_h^n, p_h^n$ , известными, определим координаты

$u_{ij}^{n+1}$  вектора  $u_h^{n+1}$  следующим образом:

$$(8.87) \quad \begin{aligned} & -\varepsilon \frac{u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^{n+1} + u_{ij+1}^n + u_{ij-1}^{n+1} - \boxed{4u_{ij}^{n+1}}}{h^2} - \\ & - \frac{u_{i+1j+1}^n + u_{i-1j+1}^{n+1} + u_{i+1j-1}^n + u_{i-1j-1}^{n+1} - \boxed{4u_{ij}^{n+1}}}{h^2} + \\ & + \frac{p_{1i+1/2j+1/2}^n - p_{1i-1/2j+1/2}^n + p_{1i+1/2j-1/2}^n - p_{1i-1/2j-1/2}^n}{2h} + \\ & + \frac{p_{2i+1/2j+1/2}^n - p_{2i+1/2j-1/2}^n + p_{2i-1/2j+1/2}^n - p_{2i-1/2j-1/2}^n}{2h} = \\ & = \varepsilon f_{ij} \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h \end{aligned}$$

для  $l=1$ ,

$$(8.88) \quad \begin{aligned} & -(1+\varepsilon) \frac{u_{i+1j+1}^n + u_{i-1j+1}^{n+1} + u_{i+1j-1}^n + u_{i-1j-1}^{n+1} - \boxed{4u_{ij}^{n+1}}}{2h^2} + \\ & + \frac{p_{1i+1/2j+1/2}^n - p_{1i-1/2j+1/2}^n + p_{1i+1/2j-1/2}^n - p_{1i-1/2j-1/2}^n}{2h} + \\ & + \frac{p_{2i+1/2j+1/2}^n - p_{2i+1/2j-1/2}^n + p_{2i-1/2j+1/2}^n - p_{2i-1/2j-1/2}^n}{2h} = \\ & = \varepsilon f_{ij} \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h \end{aligned}$$

для  $l=2$ ; после этого находим

$$(8.89) \quad u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \omega_1 (\bar{u}_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n) \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h;$$

вычислив таким образом  $u_h^{n+1}$ , определяем  $p_h^{n+1} \in \Lambda_h$  по формулам

$$(8.90) \quad \begin{aligned} & \bar{p}_{1i+1/2j+1/2}^{n+1} = \\ & = (1-\omega_2) p_{1i+1/2j+1/2}^n + \omega_2 \left( \frac{u_{i+1j+1}^{n+1} - u_{ij+1}^{n+1} + u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{2h} \right), \\ & \bar{p}_{2i+1/2j+1/2}^{n+1} = \\ & = (1-\omega_2) p_{2i+1/2j+1/2}^n + \omega_2 \left( \frac{u_{i+1j+1}^{n+1} - u_{i+1j}^{n+1} + u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1}}{2h} \right) \\ & \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h, \end{aligned}$$

$$(8.91) \quad (p_{1i+1/2j+1/2}^{n+1}, p_{2i+1/2j+1/2}^{n+1}) = P_{\bar{D}} (\bar{p}_{1i+1/2j+1/2}^{n+1}, \bar{p}_{2i+1/2j+1/2}^{n+1}) \\ \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h.$$

В формулах (8.89), (8.91) выбираем  $0 < \omega_1, \omega_2 < 2$ . ■

Приведенный выше алгоритм построен на основании результатов предложений 8.10, замечания 8.10 и сформулированного выше предварительного замечания. ■

### Сходимость алгоритма

Используя блочный вариант теоремы 1.3 разд. 1.4 гл. 2 (см. работу Гловински [4], теорема 7.1 разд. 7.4) можно доказать, что имеет место

**Предложение 8.11.** При выполнении условий  $0 < \omega_1 < 2$ ,  $0 < \omega_2 < 2$  алгоритмы (8.86), (8.87), (8.89), (8.90), (8.91) и (8.86), (8.88), (8.89), (8.90), (8.91) сходятся, т. е. при  $n \rightarrow +\infty$  имеем:

$$(8.92) \quad u_h^n \rightarrow u_{he}^l \quad \forall l = 1, 2,$$

$$(8.93) \quad p_h^n \rightarrow p_{he}^l \quad \forall l = 1, 2. \blacksquare$$

### 8.3.5. Применение к решению приближенных задач (IV). Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим снова пример 3 разд. 7.5, к решению которого метод штрафа (в другом варианте) уже применялся (см. разд. 8.2.5, пример 1); таким образом,  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$ ,  $f = 10$ .

Аппроксимация задачи  $(P_0)$ : используется аппроксимация  $(P_{0h})_{14}$  (см. разд. 5.3, 8.3.3).

Численные значения параметров.

Шаг дискретизации:  $h = 1/20$ .

Начальное приближение для алгоритма (8.86), (8.87), (8.89), (8.90), (8.91):  $u_h^0 = 0$ ,  $p_h^0 = 0$ .

Условие останова:

$$\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| \leq \varepsilon_T.$$

### Анализ численных результатов

Результаты, полученные для случая, когда  $\varepsilon$  в процессе выполнения итераций неизменно, приведены в табл. 8.1.

Полученные здесь значения решения  $u$  в точке  $(0,5, 0,5)$  близки к значению 0,483, найденному при решении задачи  $(P_1)$  (см. разд. 3), соответствующей задаче  $(P_0)$ , по методу разд. 3.4 с шагом  $1/40$ .

Как видно из табл. 8.1, для малых значений  $\varepsilon$  сходимость очень медленная; скорость сходимости была увеличена путем одновременного уменьшения  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_T$  в процессе выполнения итераций: более точно, процесс начинается при значении  $\varepsilon = 10^{-1}$  и  $\varepsilon_T = 10^{-2}$ , эти величины делятся на 10 каждый раз, когда впервые выполняется условие

$$\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| \leq \varepsilon_T.$$

Таблица 8.1 (пример 1)

$\varepsilon$	$\varepsilon_T$	$\omega_1$	$\omega_2$	$u(0,5, 0,5)$	Количество итераций	Время вычислений, с ЭВМ СII 10070
$10^{-1}$	$10^{-4}$	1,6	1	0,455	183	30 с
$10^{-2}$	$10^{-4}$	1,8	1	0,417	848	120 с
$10^{-3}$	$10^{-4}$	1,8	1	Значение после 3000 итераций: 0,376	После 3000 итераций сходимости нет	

Таблица 8.2 (пример 1)

$\varepsilon$	$\varepsilon_T$	$\omega_1$	$\omega_2$	$u(0,5, 0,5)$	Количество итераций	Время вычислений, с ЭВМ СII 10070
$10^{-1}$	$10^{-2}$	1,8	1		95	
$10^{-2}$	$10^{-3}$	1,8	1		269	
$10^{-3}$	$10^{-4}$	1,8	1	0,414	853	120 с

Таблица 8.3 (пример 1)

$\varepsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$
$\omega_1$		
1,6	183	1055
1,7	179	943
1,8	180	848
1,9	197	883

Таблица 8.4 (пример 2)

$\varepsilon$	$\varepsilon_T$	$\omega_1$	$\omega_2$	$u (0,25, 0,75)$	Количество итераций	Время вычислений, с ЭВМ СII 10070
$10^{-1}$	$10^{-4}$	1,7	1	0,125	277	48 с
$10^{-2}$	$10^{-4}$	1,7	1	0,122	1895	336 с
$10^{-3}$	$10^{-4}$	1,6	1	Значение после 3000 итераций: 0,088	После 3000 итераций сходимости нет	

Таблица 8.5 (пример 2)

$\varepsilon$	$\varepsilon_T$	$\omega_1$	$\omega_2$	$u (0,25, 0,75)$	Количество итераций	Время вычислений, с ЭВМ СII 10070
$10^{-1}$	$10^{-2}$	1,8	1		158	
$10^{-2}$	$10^{-3}$	1,8	1		472	
$10^{-3}$	$10^{-4}$	1,8	1	0,124	732	120 с

Таблица 8.6 (пример 2)

$\varepsilon$	$10^{-1}$	$10^{-2}$
$\omega_1$		
1,6	182	2473
1,7	277	1895
1,8	321	2147
1,9	427	2835

Полученное таким способом улучшение процесса проявляется, как видно из табл. 8.2, как в отношении скорости сходимости, так и в отношении достигаемой точности.

Числа итераций, указанные в табл. 8.2, относятся ко всему процессу (т. е. после сходимости процесса в подзадачах счетчик итераций не сбрасывается на нуль).

В табл. 8.3 приведено количество итераций, необходимых для сходимости процесса, в зависимости от  $\omega_1$  и  $\varepsilon$  при значении  $\omega_2 = 1$ ,  $u_h^0 = 0$ ,  $p_h^0 = 0$ ,  $\varepsilon_T = 10^{-4}$ .

Как видно из табл. 8.3, количество итераций, необходимых для сходимости процесса, мало меняется при изменении  $\omega_1$  в достаточно большой окрестности оптимального значения  $\omega_1$ . ■

*Пример 2.* Вернемся к примеру 3 разд. 7.6, рассмотренному ранее в разд. 8.2.5 (пример 2); таким образом,  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  определяется по формуле (8.41).

Как и в предшествующем примере, для численного решения поставленной задачи используется аппроксимация  $(P_{0h})_{14}$  задачи  $(P_0)$  с шагом  $h = 1/20$ ; начальное приближение для алгоритма (8.86), (8.87), (8.89), (8.90), (8.91) полагается равным  $u_h^0 = 0$ ,  $p_h^0 = 0$ .

В табл. 8.4 проведены некоторые результаты, полученные с неизменным значением;  $\varepsilon$  в табл. 8.5 — результаты, найденные с использованием итерационного процесса, в котором  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_T$  уменьшаются так, как это описано в предыдущем примере.

Количество итераций, необходимых для сходимости в зависимости от  $\omega_1$  и  $\varepsilon$  при значениях  $\omega_2 = 1$ ,  $u_h^0 = 0$ ,  $p_h^0 = 0$ ,  $\varepsilon_T = 10^{-4}$ , указано в табл. 8.6.

## 8.4. Сравнение результатов

Как видно из анализа полученных выше результатов, эффективность рассмотренных в разд. 8.2 и 8.3 методов штрафа примерно одинакова в отношении времени вычислений, однако формулировка приближенных задач в первом варианте сложнее из-за сильной нелинейности задачи со штрафом; это затруднение во втором случае отсутствует, поскольку задача со штрафом почти линейна.

Отметим, не вдаваясь в подробности, что в работе Тремольера [1] для решения рассматриваемых задач применен метод центров с переменным параметром усечений, изложенный в разд. 3.4 гл. 2; этот метод, идея которого состоит в том, что мы приближаемся к решению, оставаясь внутри множества ограничений, требует больших затрат машинного времени; в частности, в задаче  $(P_0)$  в области  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  с  $f = 10$  и при тех же численных значениях параметров, что и в примере 1 разд. 8.2.5, 8.3.5,

на решение на ЭВМ IBM 360/91 приближенной задачи

$$\min_{v_h \in K_{0h}^1} J_h^1(v_h)$$

требуется 24с при  $h = 1/10$  и 139с при  $h = 1/20$ , т. е. примерно в 20 раз больше времени, чем на решение той же задачи при помощи внешних методов штрафа, рассмотренных в этом разделе.

Подробности применения метода центров с переменным параметром усечений для решения задачи  $(P_0)$  можно найти в цитированной выше работе Тремольера [1].

## 9. Решение приближенной задачи, соответствующей задаче $(P_0)$ , методами двойственности

### 9.1. Введение и план изложения

В этом разделе мы будем изучать применение методов двойственности, изложенных в разд. 3.4, 3.5 гл. 1 и разд. 4 гл. 2, к решению конечномерных задач, полученных при аппроксимации задачи  $(P_0)$  методами разд. 4 и 5.

Для того чтобы сделать изложение более простым, использованные нами различные подходы будут рассмотрены на примере непрерывной задачи.

#### 9.1.1. Первая формулировка

Вернемся к конструкциям разд. 4.2 гл. 2 (пример 4.2); определим множество

$$(9.1) \quad \Lambda_1 = L_+^2(\Omega),$$

оператор

$$(9.2) \quad \Phi_1: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \text{ действующий по формуле}$$

$$\Phi_1(v) = |\operatorname{grad} v| - 1,$$

и лагранжиан  $\mathcal{L}_1: H_0^1(\Omega) \times \Lambda_1 \rightarrow R$ :

$$(9.3) \quad \mathcal{L}_1(v, q) = J(v) + \int_{\Omega} q \Phi_1(v) dx.$$

Из того, что

$$(9.4) \quad \sup_{v \in \Lambda_1} \int_{\Omega} q \Phi_1(v) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |\operatorname{grad} v| \leq 1 \\ +\infty & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

следует, что в случае, когда существует седловая точка  $\{u, p\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_1$ , элемент  $u$  представляет собой решение задачи  $(P_0)$ ; следовательно, в этом случае, когда предположения (4.10), (4.11) разд. 4.3 гл. 2 выполнены, задачу  $(P_0)$  можно решить при помощи алгоритма (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2:

пусть  $p^n$  известно; тогда  $u^n$  определяется как элемент пространства  $H_0^1(\Omega)$ , минимизирующий функционал (9.5)

$$J(v) + \int_{\Omega} p^n \Phi_1(v) dx,$$

$$(9.6) \quad p^{n+1} = \sup (0, p^n + \rho_n \Phi_1(u^n)),$$

$$(9.7) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Задача минимизации, возникающая на этапе (9.5) (и имеющая единственное решение), представляет собой задачу минимизации недифференцируемого функционала, весьма близкого к той, которая возникает в задаче о течении жидкости, рассмотренной в разд. 1.4, гл. 1 и примере 1 разд. 4.2 гл. 2; применение алгоритма (9.5), (9.6), (9.7) для решения задачи  $(P_0)$  будет рассмотрено в разд. 8 гл. 5. ■

### 9.1.2. Вторая формулировка

Определим множество

$$(9.8) \quad \Lambda_2 = L_+^\infty(\Omega),$$

оператор

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \Phi_2: H_0^1(\Omega) &\rightarrow L^1(\Omega), \text{ действующий по формуле} \\ \Phi_2(v) &= |\operatorname{grad} v|^2 - 1, \end{aligned}$$

и лагранжиан  $\mathcal{L}_2: H_0^1(\Omega) \times \Lambda_2 \rightarrow R$ .

$$(9.10) \quad \mathcal{L}_2(v, q) = J(v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q \Phi_2(v) dx.$$

Из того, что

$$(9.11) \quad \sup_{q \in \Lambda_2} \int_{\Omega} q \Phi_2(v) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |\operatorname{grad} v| \leq 1, \\ +\infty & \text{в противоположном случае,} \end{cases}$$

следует, что в случае, когда существует седловая точка  $\{u, p\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_2$ , элемент  $u$  представляет собой решение задачи  $(P_0)$ .

Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в разд. 4 гл. 2, приводят — совершенно формально, так как мы не имеем дела теперь с гильбертовым пространством (как это

было в разд. 3.4 гл. 2<sup>1)</sup>), — к использованию алгоритма (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2 для решения задачи ( $P_0$ ):

(9.12) пусть  $p^n$  известно; тогда  $u^n$  определяется как элемент пространства  $H_0^1(\Omega)$ , минимизирующий функционал  $J(v) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} p^n \Phi_2(v) dx$ ,

$$(9.13) \quad p^{n+1} = \sup (0, p^n + \rho_n \Phi_2(u^n)),$$

$$(9.14) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Отметим, что при заданном  $p^n$  элемент  $u^n$  представляет собой решение в  $H_0^1(\Omega)$  следующей эллиптической задачи:

$$(9.15) \quad - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (1 + p^n) \frac{\partial u^n}{\partial x_i} \right\} = f, \quad u^n|_{\Gamma} = 0.$$

Применение алгоритма (9.12), (9.13), (9.14) для решения задачи ( $P_0$ ) (более точно, внешних и внутренних аппроксимаций этой задачи) будет рассмотрено в разд. 9.2, 9.3, 9.4. ■

### 9.1.3. Третья формулировка

Главное затруднение рассматриваемой задачи, состоящее в учете ограничения  $|\operatorname{grad} v| \leq 1$ , в двух предшествующих формулировках «исключалось» (по меньшей мере формально) путем введения соответствующего этому ограничению множителя Лагранжа (Куна — Таккера), удовлетворяющего условию неотрицательности; учет ограничения неотрицательности в плане алгоритмическом особых хлопот не доставляет. Рассматриваемый здесь новый подход основан на результатах разд. 8.3.1.

Обозначим

$$(9.16) \quad \Lambda = \{q \mid q \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), q = (q_1, q_2), q_1^2(x) + q_2^2(x) \leq 1 \text{ п. в.}\}$$

$$(9.17) \quad \mathcal{K}_0 = \{(v, q) \mid v \in H_0^1(\Omega), q \in \Lambda, q = \operatorname{grad} v\};$$

тогда задача ( $P_0$ ) эквивалентна задаче отыскания

$$(9.18) \quad \min_{(v, q) \in \mathcal{K}_0} \left[ \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |q|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx \right].$$

Так как операция проектирования  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \Lambda$  на практике трудностей не представляет, мы ограничимся тем, что разделим переменные  $v$  и  $q$ : другими словами, мы исключим

<sup>1)</sup> Исключая случай  $f = \text{const}$ , проблема существования седловой точки лагранжиана  $\mathcal{L}_2$  в множестве  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda_2$ , по-видимому, не решена, даже в случае  $f \in L^2(\Omega)$  (см. ниже замечание 9.2).

условие  $q = \operatorname{grad} v$ , поставив ему в соответствие множитель Лагранжа (в разд. 8.3 на этом этапе мы действовали методом штрафа<sup>1)</sup>).

Таким образом, определим пространство

$$(9.19) \quad L = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

оператор

$$(9.20) \quad \begin{aligned} \Phi_s: H_0^1(\Omega) \times L &\rightarrow L, \text{ действующий по формуле:} \\ \Phi_s(v, q) &= \operatorname{grad} v - q, \end{aligned}$$

и лагранжиан  $\mathcal{L}_s: H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L \rightarrow R$ :

$$(9.21) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_s(v, q; \mu) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |q|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu \cdot \Phi(v, q) dx. \end{aligned}$$

Из того, что

$$(9.22) \quad \sup_{\mu \in L} \int_{\Omega} \mu (\operatorname{grad} v - q) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{grad} v - q = 0, \\ +\infty & \text{в противоположном случае,} \end{cases}$$

следует, что в случае, когда существует седловая точка  $\{u, p; \lambda\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_s$  в пространстве  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$ , пара  $\{u, p\}$  представляет собой решение задачи (9.18), эквивалентной задаче  $(P_0)$ ; таким образом, алгоритм (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2 принимает форму:

$$(9.23) \quad \begin{aligned} \text{пусть } \lambda^n \text{ известно } (\in L); \text{ определим } \{u^n, p^n\} \text{ как} \\ \text{элемент пространства } H_0^1(\Omega) \times \Lambda, \text{ минимизирую-} \\ \text{щий } \mathcal{L}_s(v, q; \lambda^n), \end{aligned}$$

$$(9.24) \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n \Phi_s(u^n, p^n),$$

$$(9.25) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Пусть  $\lambda^n$ —заданный элемент  $L$ , тогда  $u^n$  и  $p^n$  являются решениями следующих задач:

$$-\Delta u^n = 2f + \operatorname{div} \lambda^n,$$

$$(9.26) \quad u^n|_{\Gamma} = 0,$$

$$(9.27) \quad p^n = P_{\Lambda}(\lambda^n).$$

Применение алгоритма (9.23), (9.24), (9.25) для решения задачи  $(P_0)$  будет рассмотрено в разд. 9.5.

<sup>1)</sup> В разд. 10 будет изложен метод, представляющий собой комбинацию этих двух.

**Замечание 9.1.** Метод, изложенный в разд. 9.1.3, представляет собой метод декомпозиции—координации (определение дано в работе Бенсуссана, Лионса и Тремольера [1]), примененный к решению задачи (9.18), эквивалентной задаче  $(P_0)$ . ■

#### 9.1.4. Замечания

**Замечание 9.2.** Проблема существования седловой точки лагранжиана  $\mathcal{L}_1$  ( $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$ ) на  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda_1$  ( $H_0^1(\Omega) \times \Lambda_2$ ,  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$ ), по-видимому, не решена; используя (например) результаты разд. 1 § 2 гл. 2 работы Бенсуссана, Лионса и Темама [1], можно доказать существование седловой точки функционалов

$$(9.28) \quad \mathcal{L}'(v, q) = J(v) + \langle |\operatorname{grad} v| - 1, q \rangle \quad \text{в } W_0^{1, \infty}(\Omega) \times (L^\infty(\Omega))'_+,$$

$$(9.29) \quad \mathcal{L}'(v, q) = J(v) + \langle |\operatorname{grad} v|^2 - 1, q \rangle \quad \text{в } W_0^{1, \infty}(\Omega) \times (L^\infty(\Omega))'_+,$$

$$(9.30) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}'_3(v, q; \mu) = & \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |q|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_1} - q_1, \mu_1 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_2} - q_2, \mu_2 \right\rangle \\ \text{в } & W_0^{1, \infty}(\Omega) \times \Lambda \times (L^\infty(\Omega))' \times (L^\infty(\Omega))', \end{aligned}$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означает билинейную форму, которая определяет двойственность между  $L^\infty(\Omega)$  и  $(L^\infty(\Omega))'$ , причем

$$(9.31) \quad W_0^{1, \infty}(\Omega) = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega), \quad \forall i, v|_F = 0 \right\},$$

$$(9.32) \quad (L^\infty(\Omega))'_+ = \{ q \mid q \in (L^\infty(\Omega))', \langle v, q \rangle \geq 0 \quad \forall v \in L_+^\infty(\Omega) \}.$$

Доказательство существования седловой точки для сужений  $\mathcal{L}_1$  ( $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$ ) на пространства и выпуклые множества конечного числа измерений, появляющиеся при использовании внутренних аппроксимаций задачи  $(P_0)$ , построенных в разд. 4 (см. ниже разд. 9.2, 9.3), не представляет затруднений; аналогичное утверждение имеет место для построенных в разд. 5 внешних аппроксимаций (см. ниже разд. 9.4, 9.5). ■

**Замечание 9.3.** Для случая  $f = \operatorname{const}$  (что соответствует физической задаче разд. 1.2). Брезис в работе [5] доказал существование элемента  $p \in \Lambda_2 (= L_+^\infty(\Omega))$ , равного нулю в области упругости и такого, что пара  $\{u, p\}$  (где  $u$ —решение задачи  $(P_0)$ ) является единственной седловой точкой функционала  $\mathcal{L}_2$  в множестве  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda_2$  (по поводу механической интерпретации этого результата см. книгу Дюво и Лионса [1], разд. 6.6 гл. 5). ■

## 9.2. Применение метода двойственности разд. 9.1.2 к решению приближенных задач. Случай конечноэлементной аппроксимации разд. 4.1

### 9.2.1. О существовании седловой точки

Будем сохранять обозначения разд. 4.

Пусть пространство  $V_h$  определено так, как это сделано в разд. 4.1.1; введем пространство  $L_h$ , являющееся подпространством  $L^\infty(\Omega)$ :

$$(9.33) \quad L_h = \left\{ q \mid q = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} q_T \theta_T, q_T \in \mathbb{R} \right\},$$

где

(9.34)  $\theta_T$  — характеристическая функция множества  $T$ ,

а также множество

$$(9.35) \quad \Lambda_{2h} = \Lambda_2 \cap L_h = \{q \mid q \in L_h, q_T \geq 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Заметим, что  $v_h \in V_h \Rightarrow \operatorname{grad} v_h \in L_h \times L_h$  и что

$$v_h \in K_0 \cap V_h \Rightarrow 1 - |\operatorname{grad} v_h|^2 \in \Lambda_{2h}.$$

Пусть лагранжиан  $\mathcal{L}_2$  определен по формулам (9.9), (9.10), тогда имеет место

**Предложение 9.1.** Лагранжиан  $\mathcal{L}_2$  имеет седловую точку на  $V_h \times \Lambda_{2h}$ , которую мы будем обозначать через  $\{u_h, p_h\}$ , причем

$$(9.36) \quad u_h — решение задачи \min_{v_h \in K_0 \cap V_h} J(v_h),$$

и

$$(9.37) \quad p_h (|\operatorname{grad} u_h|^2 - 1) = 0.$$

**Доказательство.** Так как пространства  $V_h$  и  $L_h$  конечномерны, доказательство немедленно следует из теорем 28.2, 28.3 разд. 28 работы Рокафеллара [3]. ■

**Замечание 9.4.** Так как пара  $\{u_h, p_h\}$  — седловая точка лагранжиана  $\mathcal{L}_2$  на  $V_h \times \Lambda_{2h}$ , то  $\mathcal{L}_2(u_h, p_h) \leq \mathcal{L}_2(v_h, p_h) \quad \forall v_h \in V_h$ , или в развернутом виде

$$(9.38) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 + p_h) |\operatorname{grad} u_h|^2 - \int_{\Omega} f u_h dx \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 + p_h) |\operatorname{grad} v_h|^2 dx - \int_{\Omega} f v_h dx, \end{aligned}$$

в частности, если  $v_h = 0$ , то, учитывая условие (9.37), будем иметь

$$(9.39) \quad \int_{\Omega} p_h dx \leq 2 \int_{\Omega} f v_h dx - \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_h|^2 dx.$$

Предполагая, что условия применимости теоремы 6.1 разд. 6.2.1 выполнены, заключаем, что при  $h \rightarrow 0$  имеет место сходимость  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ ; так как  $p_h \geq 0$ , то для  $p_h$  имеем оценку

$$(9.40) \quad \|p_h\|_{L^1(\Omega)} \leq C \quad \forall h > 0$$

в пространстве  $L^1(\Omega)$ . ■

### 9.2.2. Решение приближенной задачи при помощи алгоритма отыскания седловой точки (I). Описание алгоритма

Будем использовать алгоритм (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2, который в данном частном случае приобретает форму

пусть  $p_h^n$  известно ( $\in \Lambda_{2h}$ ); определим  $u_h^n$  как элемент пространства  $V_h$ , минимизирующий функционал  $J(v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} p_h^n (|\operatorname{grad} v_h|^2 - 1) dx$ ,

$$(9.42) \quad p_h^{n+1} = \sup (0, p_h^n + \rho_n (|\operatorname{grad} u_h^n|^2 - 1)),$$

$$(9.43) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Алгоритм (9.41), (9.42), (9.43) представляет собой «аппроксимацию» алгоритма (9.12), (9.13), (9.14); заметим, что если  $p_h^n$  задано, то  $u_h^n$  — единственное решение следующего вариационного уравнения в  $V_h$ :

$$(9.44) \quad \int_{\Omega} (1 + p_h^n) \operatorname{grad} u_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_h^n \in V_h. \quad ■$$

*Замечание 9.5.* Развернутая форма этапа (9.41) алгоритма (и/или уравнения (9.44)) в виде функции параметра  $q_T$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$  и „узловых“ параметров

$$v_i = v_h(M_i), \quad u_i^n = u_h^n(M_i), \quad M_i \in \dot{\Sigma}_h$$

(см. формулу (4.8) разд. 4.1.1) может быть получена с использованием зависимостей разд. 4.1.4; эту форму можно найти в работе Бурга [1]. ■

**9.2.3. Решение приближенной задачи при помощи алгоритма отыскания седловой точки (II). Сходимость алгоритма**

Имеет место

**Предложение 9.2.** Последовательность  $(u_h^n)_n$ , определяемая алгоритмом (9.41), (9.42), (9.43), сходится к решению  $u_h$  задачи

$$\min_{v_h \in K_h \cap V_h} J(v_h).$$

**Доказательство.** Учитывая предложение 9.1, заключаем, что доказательство будет вытекать из теоремы 4.1 разд. 4.3 гл. 2, если проверить, что (см. условие (4.11)' разд. 4.3 гл. 2):

(i) Отображение  $\Phi_{2h}: V_h \rightarrow L_h$ :

$$(9.45) \quad \Phi_{2h}(v_h) = |\operatorname{grad} v_h|^2 - 1$$

локально удовлетворяет условию Липшица;

(ii) Для всех  $q \in \Lambda_{2h}$  решение задачи

$$(9.46) \quad \min_{v_h \in V_h} \left\{ J(v_h) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q \Phi_{2h}(v) dx \right\}$$

ограничено константой, которая не зависит от  $q$ .

Условие (i) проверяется немедленно, поскольку  $\forall v_h \in V_h$ , функция  $|\operatorname{grad} v_h|^2$  квадратична по „узловым“ параметрам  $v_i = v_h(M_i)$ , и, следовательно, принадлежит пространству  $C^\infty$ ; что касается условия (ii), то, замечая, что  $u_{hq}$ , решение задачи (9.46), удовлетворяет вариационному уравнению в  $V_h$ :

$$(9.47) \quad \int_{\Omega} (1+q) \operatorname{grad} u_{hq} \cdot \operatorname{grad} v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

положим в нем  $v_h = u_{hq}$  и, учитывая условие  $q \geq 0$ , находим

$$(9.48) \quad \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u_{hq}|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad ^1)$$

что и доказывает условие (ii), а вместе с ним и предложение 9.2. ■

**Замечание 9.6.** Проводя для частного случая алгоритма (9.41), (9.42), (9.43) подробно все вычисления, встречающиеся при доказательстве теоремы 4.1 разд. 4.3 гл. 2, можно показать, что

<sup>1)</sup> Здесь  $C$  — константа Пуанкаре в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ , т. е. величина, обратная корню квадратному из наименьшего собственного значения оператора  $-\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ .

условие сходимости алгоритма имеет вид

$$(9.49) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < \frac{4}{1 + \frac{C^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2}{\gamma(\mathcal{T}_h)}},$$

константа  $C$  в котором совпадает с константой в оценке (9.48),  $\gamma(\mathcal{T}_h) = \min_{T \in \mathcal{T}_h}$  (площадь  $T$ ). В действительности оценка (9.49) достаточно пессимистична, по крайней мере для рассматриваемых ниже примеров. ■

#### 9.2.4. Решение приближенной задачи при помощи алгоритма отыскания седловой точки (III).

*Практические рекомендации по использованию алгоритма (9.41), (9.42), (9.43)*

В этом разделе и ниже, в разд. 9.2.5, мы следуем работе Бурга [1].

##### Решение уравнения (9.44)

Определение  $u_h^n$  при известном  $p_h^n$  сводится на основании (9.44) к решению некоторой линейной краевой задачи (приближенной) для эллиптического уравнения второго порядка с переменными в области  $\Omega$  коэффициентами, зависящими также от индекса  $n$ ; эта задача типа Дирихле была решена методом поточечной верхней релаксации, в которой в качестве искомых переменных выбирались узловые значения  $v_i \quad \forall M_i \in \dot{\Sigma}_h$ . ■

*Условия останова:* отождествим  $u_h^n$  и  $(u_i^n)_{M_i \in \dot{\Sigma}_h}$  и определим

$$(9.50) \quad D_\infty(n) = \max_{M_i \in \dot{\Sigma}_h} |u_i^n - u_i^{n-1}|,$$

$$(9.51) \quad D_1(n) = \frac{\sum_{M_i \in \dot{\Sigma}_h} |u_i^n - u_i^{n-1}|}{\sum_{M_i \in \dot{\Sigma}_h} |u_i^n|},$$

для алгоритма (9.41), (9.42), (9.43) условие останова будем брать в виде

$$(9.52) \quad D_1(n) < \varepsilon.$$

Кроме того, нет смысла, по крайней мере в начале итерационного процесса, решать подзадачи Дирихле (9.44) с очень высокой точностью; следовательно, при использовании алгоритма верхней релаксации для решения задач (9.44) можно применять

условие останова типа (9.52), где  $\varepsilon$  заменяется на  $\varepsilon_n$ :

$$(9.53) \quad \varepsilon_n = \min \left( \varepsilon_{n-1}, \frac{D_\infty(n-1)}{10} \right). \blacksquare$$

**Начальное приближение.** В приведенных ниже примерах в качестве начального приближения для алгоритма (9.41), (9.42), (9.43) выбиралось  $r_h^0 = 0$ ; при определении  $u_h^n$  по известному  $r_h^n$  (из решения уравнения (9.44)) в качестве начального приближения для алгоритма верхней релаксации выбирался элемент  $u_h^{n-1}$ . ■

### 9.2.5. Решение приближенной задачи при помощи алгоритма отыскания седловой точки (IV). Примеры

**Пример 1.** Вернемся к примеру 1 разд. 7.4, когда

$$\Omega = \{x | x \in R^2, x_1^2 + x_2^2 < 1\}, f = 10,$$

точное решение задачи дается формулой (7.81); обозначения и триангуляции совпадают с теми, которые были использованы в разд. 7.4 (см. рис. 7.3 и 7.4).

Начальные приближения указаны в разд. 9.2.4; в условии (9.52) полагаем  $\varepsilon = 10^{-3}$ , в (9.53) полагаем  $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ , в соотношении (9.42)  $\rho_n = \rho = 1$ ,  $\omega = 1,5$  — параметр метода верхней релаксации при решении уравнения (9.44) (см. разд. 9.2.4).

Основные результаты, полученные при решении приближенной задачи ( $P_0$ ) изложенными выше методами, сгруппированы в табл. 9.1 (обозначения совпадают с теми, которые использовались в табл. 7.1).

Число итераций, необходимых для решения  $n$ -й задачи (9.44) по методу верхней релаксации с начальными приближениями и условиями останова, описанными в разд. 9.2.4, указано в табл. 9.2.

**Замечание 9.7.** Анализируя результаты, полученные в этом разделе, а также в разд. 7.4 (табл. 7.1), видим, что метод верхней релаксации с проекцией разд. 7 быстрее приводит к цели, нежели рассмотренный выше метод двойственности (во всяком случае, этот вывод справедлив для исследуемой здесь задачи<sup>1)</sup>); кроме того, метод, изложенный в разд. 7, имеет то преимущество, что его реализация (а следовательно, и программирование) проще, а объем используемой при этом памяти ЭВМ меньше (поскольку, кроме всего прочего, нет необходимости хранить координаты вектора  $r_h^n$ ); следует, однако, отметить, что в случае физической задачи упругопластического кручения

<sup>1)</sup> В действительности это замечание имеет вполне общий характер (см. ниже).

Таблица 9.1

Разбиение	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$
Число вершин	121	433
$N = \text{Card}(\mathring{\Sigma}_j), j = 1, 2$	73	337
$N' = \text{Card}(\mathcal{T}_j), j = 1, 2$	192	768
Число итераций	8	10
$e_a$	$1,7 \times 10^{-2}$	$4 \times 10^{-3}$
Время вычислений ЭВМ IBM 360/91	2 с	8 с
Время вычислений ЭВМ СII 10070	25 с	90 с

Таблица 9.2

$n$	2	4	6	8	10
Количество итераций верхней релаксации	28	24	22	7	6

(т. е.  $f = \text{const}$ ) функция  $p$  представляет очень большой интерес (см. книгу Дюво и Лионса [1], гл. 5), что может послужить поводом к использованию алгоритма (9.41), (9.42), (9.43), который помимо аппроксимации решения  $u$  задачи  $(P_0)$  дает аппроксимацию функции  $p$ . ■

*Другие примеры.* Для постоянного значения  $f = 10$  были рассмотрены следующие случаи:

*Пример 2.*  $\Omega = ]0,1[\times]0,1[$ .

*Пример 3.*  $\Omega$  — равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 1.

*Пример 4.*  $\Omega$  — область, имеющая форму буквы  $T$ , показанная на рис. 9.1.

Использованные для решения этих задач триангуляции показаны соответственно на рис. 9.2, 9.3, 9.4; основные результаты, относящиеся к решению этих задач, сведены в табл. 9.3; дополн-

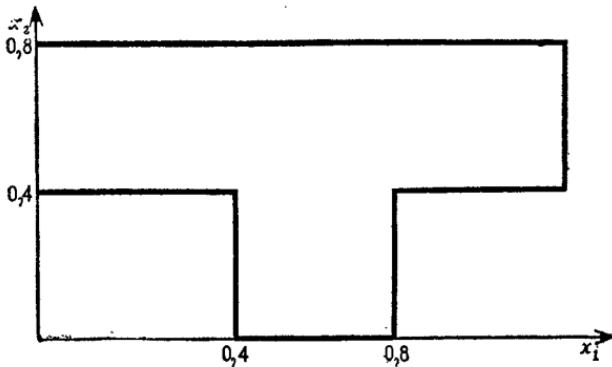
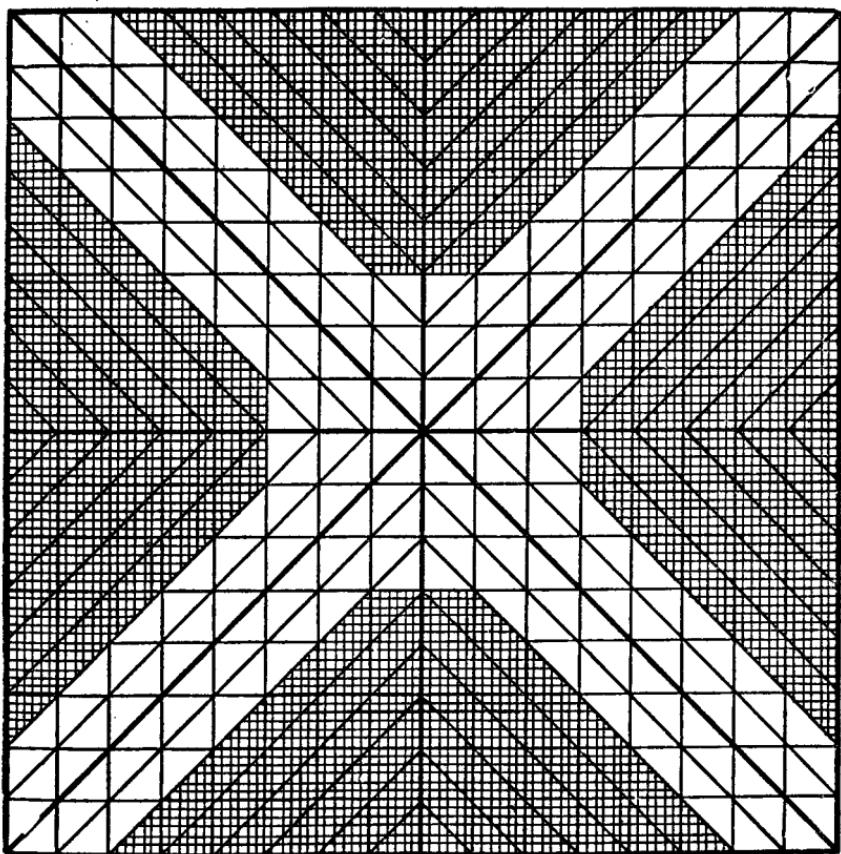


Рис. 9.1.

Рис. 9.2. Поперечное сечение в виде квадрата: метод конечных элементов  
(512 треугольников),  $C = 10$ .Области пластичности: Первоначальное разбиение:

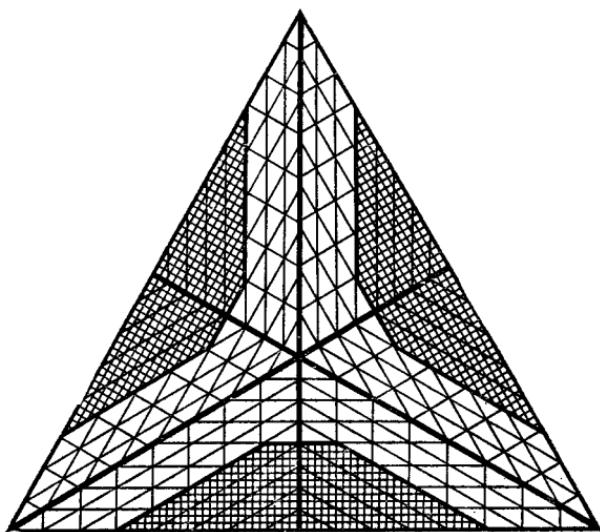


Рис. 9.3. Расчет упругопластического кручения цилиндрического стержня с поперечным сечением в виде треугольника по методу конечных элементов  
Число конечных элементов равно 384.

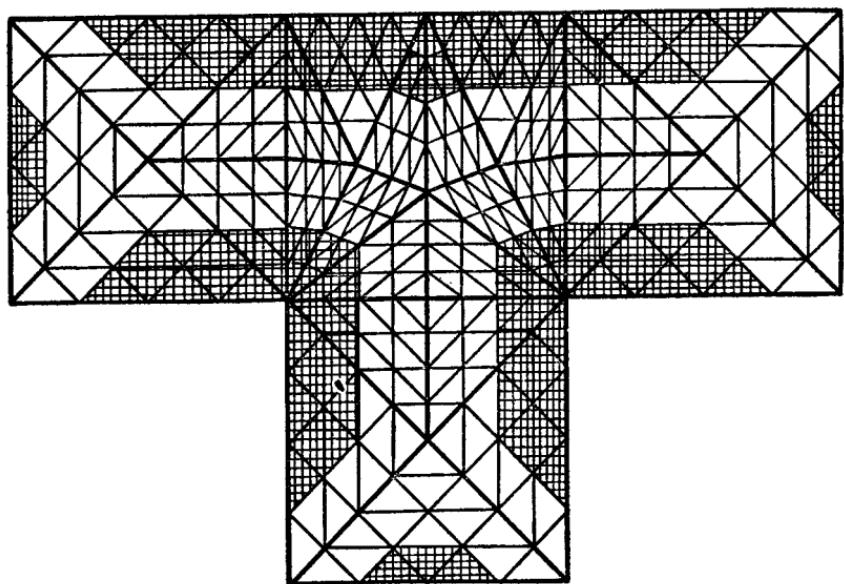


Рис. 9.4. Т-образное сечение: метод конечных элементов (432 треугольника),  
 $C=10$ .

Области пластичности:

Первоначальное разбиение:

Таблица 9.3

$\Omega$	Квадрат	Равносторонний треугольник	T-образная область
Число вершин	289	217	239
$N = \text{Card}(\mathcal{\tilde{S}}_h)$	225	169	195
$N' = \text{Card}(\mathcal{T}_h)$	512	384	432
$\rho_n = \rho$	1	1	1
$\omega$	1,5	1,5	1,5
$\varepsilon$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-4}$
$\varepsilon_1$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
Число итераций ( $n$ )	19	8	16
Время вычислений ЭВМ СІІ 10070	90 с	40 с	60 с

нительные сведения о решении можно найти в работе Бурга [1]. На рис. 9.2, 9.3, 9.4 кроме использованных триангуляций показаны приближенные формы областей упругости и пластичности: треугольник  $T$  считался находящимся в области пластичности, как только  $|\operatorname{grad} u_h| \geqslant 0,995$ .

### 9.3. Применение метода двойственности разд. 9.1.2 к решению приближенных задач. Случай внутренней аппроксимации при помощи собственных функций оператора $-\Delta$ в пространстве $H^1(\Omega)$

*Предварительное замечание.* Собственные функции оператора  $-\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  в явном виде в общем случае неизвестны, что серьезно ограничивает применимость аппроксимаций

разд. 4.2; поэтому здесь рассмотрен лишь один пример, который соответствует  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  и  $f = 10$ , когда собственные функции и соответствующие им собственные значения известны в явном виде, и для которого задача  $(P_0)$  была уже решена (приближенно) другими методами. ■

### 9.3.1. Постановка непрерывной задачи и спектральное разложение оператора $-\Delta$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$

Рассматривается задача  $(P_0)$  в области  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  с  $f = 10$ , исследованная ранее в разд. 3.5 (с использованием результатов разд. 2.2 об эквивалентности), 7.5, 8.2.5, 8.3.5, 9.2.5 другими методами (см. также ниже разд. 9.4).

Для указанной выше области  $\Omega$  собственные функции оператора  $-\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  равны

$$(9.54) \quad w_{pq}(x_1, x_2) = 2 \sin p\pi x_1 \sin q\pi x_2, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

собственные значения суть

$$(9.55) \quad \beta_{pq} = \pi^2 (p^2 + q^2).$$

Собственные функции (9.54) ортогональны в  $H_0^1(\Omega)$  и ортонормированы в  $L^2(\Omega)$ . ■

### 9.3.2. Развёрнутая формулировка приближенной задачи

Для несколько большей общности мы будем предполагать, что не обязательно  $f = \text{const}$ ; пусть  $M \in \mathbb{N}$ ; обозначим через  $V_M$  подпространство пространства  $H_0^1(\Omega)$ , натянутое на функции  $w_{pq}$  для  $1 \leq p, q \leq M$ , т. е.

$$(9.56) \quad V_M = \left\{ v | v \in H_0^1(\Omega), v = \sum_{1 \leq p, q \leq M} \mu_{pq} w_{pq}, \mu_{pq} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Используя определение (9.56), для функции  $v \in V_M$  имеем

$$(9.57) \quad J(v) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq M} (p^2 + q^2) \mu_{pq}^2 - \sum_{1 \leq p, q \leq M} f_{pq} \mu_{pq},$$

где (предполагается, что  $f \in L^2(\Omega)$ )

$$(9.58) \quad f_{pq} = \int_{\Omega} w_{pq}(x) f(x) dx.$$

В частном случае, когда  $f = \text{const}$ , имеем

$$(9.58') \quad f_{pq} = \begin{cases} \frac{8C}{\pi^2 pq}, & \text{если } p \text{ и } q \text{ нечетные,} \\ 0 & \text{в противоположном случае,} \end{cases}$$

если  $v \in V_M$ , то

$$(9.57') J(v) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{1 \leq p, q \leq M} (p^2 + q^2) \mu_{pq}^2 - \frac{8C}{\pi^2} \sum_{\substack{1 \leq p, q \leq M \\ p, q \text{ нечетные}}} \frac{\mu_{pq}}{pq}. \blacksquare$$

**Замечание 9.8.** Учитывая свойства симметрии решения рассматриваемой частной задачи, видим, что в выражении (9.57') можно ограничиться удержанием коэффициентов  $\mu_{pq}$  с нечетными индексами  $p$  и  $q$ , поскольку остальные коэффициенты равны нулю; ниже это упрощение сознательно не делается. ■

При аппроксимации множества  $K_0$  будем действовать, как и в замечании 4.5 разд. 4.2.2; имея заданное целое число  $M'$ , строго большее нуля (которое мы будем устремлять к бесконечности), положим  $h = 1/M'$  и определим множество

$$(9.59) \quad R_h = \{P_{ij} \mid P_{ij} = (ih, jh), i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

В рассматриваемом частном случае множество  $\Omega_h = R_h \cap \Omega$  в явном виде определяется по формуле

$$(9.60) \quad \Omega_h = \{P_{ij} \mid P_{ij} = (ih, jh), 1 < i, j < M' - 1\},$$

из которой для множества  $K_0$  имеем аппроксимацию:

$$(9.61) \quad K_{0h}^M = \{v \mid v \in V_M, |\operatorname{grad} v(P_{ij})| \leq 1 \quad \forall P_{ij} \in \Omega_h\},$$

условие  $|\operatorname{grad} v(P_{ij})| \leq 1$  раскрывается (если обозначить  $x_{1i} = ih$ ,  $x_{2j} = jh$ ) следующим образом:

$$(9.62) \quad 2\pi \left[ \left( \sum_{1 \leq p, q \leq M} p\mu_{pq} \cos p\pi x_{1i} \sin q\pi x_{2j} \right)^2 + \left( \sum_{1 \leq p, q \leq M} q\mu_{pq} \sin p\pi x_{1i} \cos q\pi x_{2j} \right)^2 \right]^{1/2} \leq 1. \blacksquare$$

Формулы (9.57), (9.58), (9.61), (9.62) позволяют без труда получить развернутую формулировку приближенной задачи относительно переменных  $\mu_{pq}$  ( $1 \leq p, q \leq M$ ):  $\min_{v \in K_{0h}^M} J(v)$ . ■

### 9.3.3. О существовании седловой точки

Обозначим через  $G_{ij}$  отображение  $V_M \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемое левой частью неравенства (9.62): введем также множество

$$(9.63) \quad \Lambda_{2h} = \{q_h \mid q_h = (q_{ij})_{P_{ij} \in \Omega_h}, q_{ij} \geq 0 \quad \forall P_{ij} \in \Omega_h\}.$$

С приближенной задачей естественно связать следующую аппроксимацию лагранжиана  $\mathcal{L}_2$  (см. разд. 9.1.2):

$$(9.64) \quad \mathcal{L}_{2h}^M(v_M, q_h) = J(v_M) + \frac{h^2}{2} \sum_{P_{ij} \in \Omega_h} q_{ij} (G_{ij}^2(v_M) - 1),$$

и, поскольку доказательство предложения 9.1 без труда переносится и на этот случай, лагранжиан  $\mathcal{L}_{2h}^M$  имеет на  $V_M \times \Lambda_{2h}$  седловую точку, которую мы будем обозначать через  $\{u_M, p_h\}$ , причем

$$(9.65) \quad u_M \text{ — решение задачи разыскания } \min_{v \in K_{0h}^M} J(v),$$

$$(9.66) \quad p_{ij}(G_{ij}^2(u_M) - 1) = 0 \quad \forall P_{ij} \in \Omega_h. \blacksquare$$

### 9.3.4. Описание алгоритма и его сходимость

Используется конечномерный вариант алгоритма (9.12), (9.13), (9.14):

$$(9.67) \quad \text{пусть } p_h^n \text{ известно } (\in \Lambda_{2h}); \text{ определим } u_M^n \text{ как элемент пространства } V_M, \text{ минимизирующий функционал } \mathcal{L}_{2h}^M(v_M, p_h^n),$$

$$(9.68) \quad p_{ij}^{n+1} = \max(0, p_{ij}^n + \rho_n(G_{ij}^2(u_M^n) - 1)) \quad \forall P_{ij} \in \Omega_h,$$

$$(9.69) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Доказательство предложения 9.2 без труда переносится на рассматриваемый случай, поэтому можно утверждать, что последовательность  $(u_M^n)_n$ , определяемая алгоритмом (9.67), (9.68), (9.69), сходится к решению задачи  $\min_{\Lambda \in K_{0h}^M} J(v)$ . ■

### 9.3.5. Практические замечания по поводу использования алгоритма (9.67), (9.68), (9.69)

Значения членов  $\cos p \pi x_{1i}$  (соответственно  $\cos q \pi x_{2j}$ ) и  $\sin p \pi x_{1i}$  (соответственно  $\sin q \pi x_{2j}$ ), которые необходимо вычислять при подсчете величины  $G_{ij}$  (см. формулы (9.62), (9.68)) при реализации алгоритма (9.67), (9.68), (9.69) можно, очевидно, вычислить раз и навсегда.

Кроме того, если при вычислении элемента  $u_M^n$  (по известному  $p_h^n$  на этапе (9.67) алгоритма) положить  $u_M^n = \sum_{1 \leq p, q \leq M} \lambda_{pq}^n w_{pq}$ , то вектор  $(\lambda_{pq}^n)_{1 \leq p, q \leq M}$  будет решением некоторой линейной системы с симметричной положительно определенной матрицей<sup>1)</sup> (коэффициенты матрицы зависят от  $n$ ); эта система решалась методом Холлесского.

<sup>1)</sup> И доставляющей определенные затруднения из-за того, что все элементы отличны от нуля.

Что касается начального приближения для алгоритма (9.67), (9.68), (9.69), то оно всегда выбиралось равным нулю,  $p_b^0 = 0$ . ■

### 9.3.6. Численные результаты

Алгоритм (9.67), (9.68), (9.69) был применен для решения частной задачи, когда  $f = 10$ ; поскольку здесь точное решение неизвестно, то в качестве эталона было взято приближенное решение, найденное по методу разд. 3 (при построении которого использовались, следовательно, результаты об эквивалентности, приведенные в разд. 2.2) с шагом дискретизации  $h = 1/40$ .

*Результаты для  $h = 1/20$ :*

- Для значения  $M = 10$  (т. е. 100 собственных функций  $\omega_{pq}$ ) на выполнение 10 итераций затрачивается 10 с машинного времени ЭВМ IBM 360/91; для значений  $r_n$ , не зависящих от индекса  $n$ ,  $r_n = \rho =$  оптимальному значению этого параметра, почти не отличающемуся от 1, после 5 итераций было получено решение, отличающееся от эталонного решения лишь на величину порядка  $10^{-3}$  (сравниваются абсолютные величины); совпадение решений с точностью до  $10^{-4}$  получилось после 7 итераций. Для  $0,5 \leq \rho \leq 1,5$  эталонное решение получилось меньше чем за 10 итераций с погрешностью, не превышающей  $10^{-3}$ . ■

- Для значения  $M = 5$  (т. е. 25 собственных функций  $\omega_{pq}$ ) на выполнение 20 итераций нужно затратить 16 с машинного времени ЭВМ IBM 360/91; если выбрать, как и ранее, значения  $\rho$  равными оптимальному значению, которое близко к 1, предел практически достигается менее чем за 10 итераций, отличие полученного решения от эталонного составляет величину порядка  $10^{-2}$  (в абсолютных величинах); чтобы дать представление об этой величине, укажем, что в точках  $(0,5, 0,5)$   $(1/20, 1/20)$  получается значение 0,427 (соответственно 0,019) вместо значений 0,413 (0,029) эталонного решения. ■

- Для значения  $M = 15$  использовать метод практически невозможно, так как на выполнение лишь одной итерации на ЭВМ IBM 360/91 расходуется несколько десятков секунд при весьма значительных затратах машинной памяти. ■

*Результаты для  $h = 1/10$ :*

Для значения  $M = 10$  на выполнение 20 итераций необходимо затратить 50 с машинного времени ЭВМ IBM 360/91, и при значении  $r_n = \rho$ , равном своему оптимальному значению, которое здесь, как и раньше, близко к 1, имеет место сходимость практически за 6 итераций; найденное при этом решение отличается от эталонного на величину порядка  $10^{-3}$  (в абсолютных величинах). ■

### 9.3.7. Заключение

Анализируя приведенные выше результаты, заключаем, что применение метода решения задачи ( $P_0$ ), основанного на идее комбинированного использования метода разложения по собственным функциям оператора —  $\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  (разд. 4.2) и конечномерного варианта алгоритма (9.41), (9.42), (9.43) (см. разд. 9.3.4), представляется очень дорогостоящим в том, что касается времени вычислений и затрат машинной памяти; кроме того, напомним, что собственные функции оператора —  $\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$  в явном виде в общем случае неизвестны. Упомянутые выше затруднения связаны с глобальным характером рассматриваемых аппроксимаций (носитель собственных функций совпадает со всей областью  $\bar{\Omega}$ ), в то время как ограничение  $|\operatorname{grad} v| \leq 1$  локально; из-за этого матрица, появляющаяся при определении  $i_m^n$  на этапе (9.67) алгоритма, не содержит нулей и имеет большую размерность.

Аналогичные затруднения имеют место (правда, в меньшей степени) при приближенном решении задачи ( $P_0$ ) с использованием конечноэлементных аппроксимаций степени выше 2 (см. разд. 4.1.5). ■

## 9.4. Применение метода двойственности разд. 9.1.2 к решению приближенных задач.

### Случай внешних аппроксимаций разд. 5

*План изложения.* Мы ограничимся аппроксимацией  $(P_{0h})_{13}$  (см. разд. 5), другие случаи исследуются почти аналогично; реализация<sup>1)</sup> метода для этих случаев при  $m=1$  требует примерно такого же объема памяти ЭВМ. ■

#### 9.4.1. О существовании седловой точки.

*Описание и сходимость алгоритма двойственности*

*Существование седловой точки*

Мы сохраним обозначения разд. 5 и 8.2.3; определим множества

$$(9.70) \quad L_h = \{q_h \mid q_h = \{q_{ij}\}_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h}, q_{ij} \in \mathbb{R}\},$$

$$(9.71) \quad \Lambda_{2h} = L_{2h} = \{q_h \mid q_h \in L_h, q_{ij} \geq 0 \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h\},$$

<sup>1)</sup> См. разд. 5.2.

с приближенной задачей  $(P_{0h})_{13}$  свяжем следующую аппроксимацию  $\mathcal{L}_{2h}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_2$ :

$$(9.72) \quad \mathcal{L}_{2h}(v_h, q_h) = J_h^1(v_h) = \frac{h^2}{2} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \alpha_{ij} q_{ij} (\beta_{ij} G_{ij}^2(v_h) - 1),$$

где  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $G_{ij}$  определены в разд. 8.2.3 соответствующими формулами (8.33), (8.32), (8.35).

Доказательство предложения 9.1 без труда переносится на рассматриваемый случай, следовательно, лагранжиан  $\mathcal{L}_{2h}$  имеет на  $V_h \times \Lambda_{2h}$  седловую точку, которую мы будем обозначать через  $\{u_h, p_h\}$ ; причем

$$(9.73) \quad \begin{aligned} u_h &\text{ — решение задачи } (P_{0h})_{13}, \\ p_{ij} (\beta_{ij} G_{ij}^2(u_h) - 1) &= 0 \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h. \blacksquare \end{aligned}$$

### Описание алгоритма и его сходимость

Будем использовать конечномерный вариант алгоритма (9.12), (9.13), (9.14), т. е.

$$(9.74) \quad \text{пусть } p_h^n (\in \Lambda_{2h}) \text{ известно; определяем } u_h^n \text{ как элемент пространства } V_h, \text{ минимизирующий функционал } \mathcal{L}_{2h}(v_h, p_h^n),$$

$$(9.75) \quad p_{ij}^{n+1} = \max(0, p_{ij}^n + \rho_n (\beta_{ij} G_{ij}^2(u_h^n) - 1)) \quad \forall M_{ij} \in \bar{\Omega}_h,$$

$$(9.76) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Доказательство предложения 9.2 без труда переносится на рассматриваемый случай, поэтому можно утверждать, что последовательность  $(u_h^n)_n$ , определяемая алгоритмом (9.74), (9.75), (9.76), сходится к решению задачи  $(P_{0h})_{13}$ . ■

### 9.4.2. Приложения

Ограничимся случаем, когда  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  и  $f = 10$ , исследованным ранее другими методами (другие примеры и более подробный анализ численных результатов можно найти в работе Бурга [1]).

*Шаг дискретизации:*  $h = 1/20$

*Метод решения задачи (9.74):* метод точечной верхней релаксации по возрастающим значениям индексов  $i$  и  $j$ .

*Начальные приближения:* для алгоритма (9.74), (9.75), (9.76)  $p_h^0 = 0$ ; начальное приближение для метода поточечной верхней релаксации на этапе (9.74) равно  $u_h^{n-1}$  ( $u_h^{-1} = 0$ ).

Условия останова. Положим

$$(9.77) \quad D_1(n) = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n+1}|$$

и

$$(9.78) \quad D_\infty(n) = \max_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n+1}|$$

и в качестве условия останова алгоритма (9.74), (9.75), (9.76) выберем условие

$$(9.79) \quad D_i(n) \leq 10^{-8}.$$

Что касается решения подзадач (9.74) по методу точечной верхней релаксации, то здесь мы будем использовать условие останова, жесткость которого с ростом номера  $n$  растет:

$$(9.80) \quad D_\infty(p) \leq \epsilon_n,$$

где

$$(9.81) \quad \epsilon_n = \min(\epsilon_{n-1}, 0, 2D_\infty(n-1)), \quad \epsilon_0 = 10^{-8},$$

целое число  $p$  в условии (9.80) равно числу итераций метода верхней релаксации.

### Численные результаты

Основные результаты, касающиеся сходимости алгоритма (9.74), (9.75), (9.76), сведены в табл. 9.4:

Таблица 9.4

$\rho_n = \rho$	1
$\omega$	1,7
Время вычислений ЭВМ СII 10070	30 с
Время вычислений ЭВМ IBM 360/91	2 с

Полученное здесь решение с точностью до  $10^{-6}$  (в абсолютных величинах) совпадает с решением той же приближенной задачи, найденным по методу верхней релаксации с проекцией, который был изложен на примере 2 разд. 7.5. На рис. 9.5

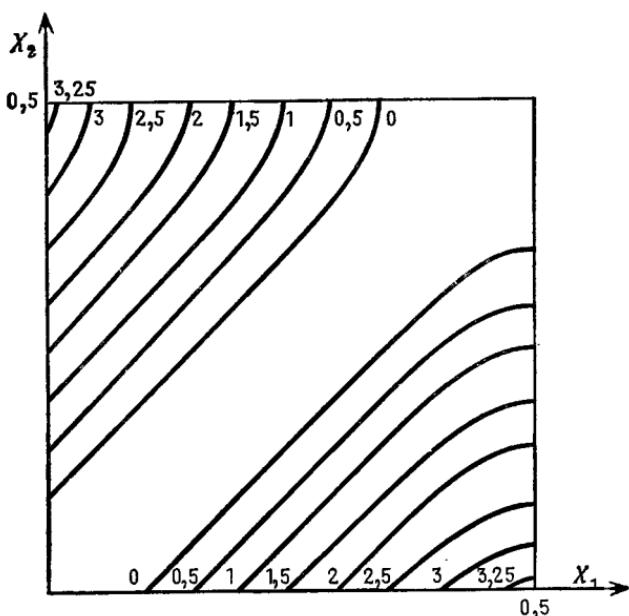


Рис. 9.5. Линии уровня сопряженной функции  $p$ .

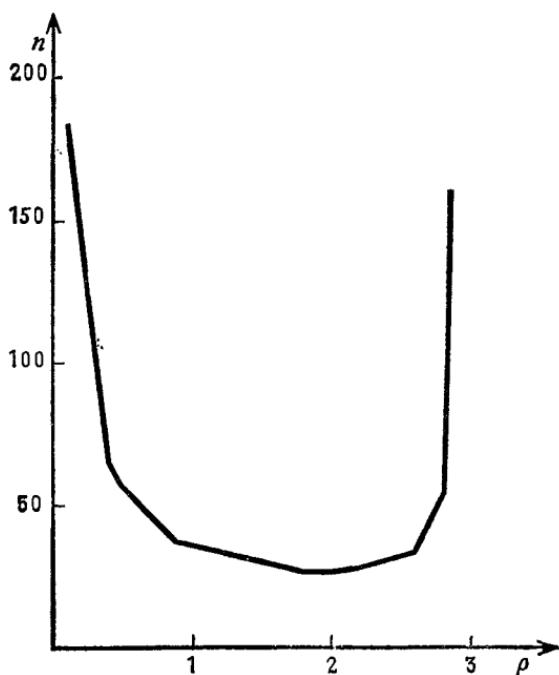


Рис. 9.6. Зависимость числа итераций от параметра  $\rho$  ( $\omega = 1, 5$ ).

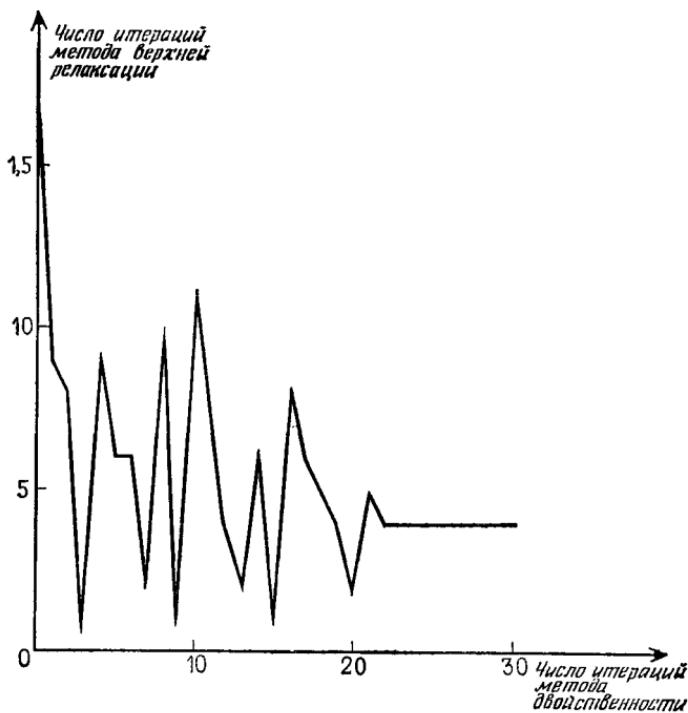


Рис. 9.7.

показаны проекции на область  $\left] 0, \frac{1}{2} \right[ \times \left] 0, \frac{1}{2} \right[$  линий равных значений (линий уровня) функции  $p$ , определение которой было дано в разд. 9.1.2; приближенное значение  $p_h$  было найдено по алгоритму (9.74), (9.75), (9.76); можно проверить, что  $p$  непрерывна, что в соответствии с результатами работы X. Брезиса [5] и должно иметь место для случая выпуклой области  $\Omega$ . На рис. 9.6 показана зависимость количества итераций, необходимых для сходимости алгоритма, от параметра  $\rho$  для значения  $\omega = 1,5$ ; на рис. 9.7 — зависимость числа итераций метода верхней релаксации для решения той подзадачи (9.74) при использовании условия останова (9.80), (9.81) и значений  $p_n = \rho = 1$ ,  $\omega = 1,7$ .

## 9.5. Применение метода двойственности разд. 9.1.3 к решению приближенных задач

Мы ограничимся конечноэлементной аппроксимацией разд. 4.1 и внешними аппроксимациями задачи ( $P_0$ ), использующими  $K_{ob}^4$  вместо множества  $K_0$  (см. разд. 5.2).

9.5.1. Случай конечноэлементной аппроксимации разд. 4.1 (I). Формулировка приближенной задачи и существование седловой точки

Сохраним обозначения разд. 4.1 и 8.3.2; положим

$$(9.82) \quad \mathcal{K}_{0h} = \{(v, q) \mid (v, q) \in \mathcal{K}_0, v \in V_h, q \in \Lambda_h\},$$

тогда задача  $\min_{v \in V_h \cap K_0} J(v)$  эквивалентна задаче разыскания

$$(9.83) \quad \min_{(v, q) \in \mathcal{K}_{0h}} \left[ \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\Omega} |q|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx \right].$$

Пусть лагранжиан  $\mathcal{L}_3$  определен по формулам (9.20), (9.21), тогда имеет место

**Предложение 9.3.** Лагранжиан  $\mathcal{L}_3$  имеет на  $(V_h \times \Lambda_h) \times L_h$  седловую точку, которую мы будем обозначать через  $\{u_h, p_h; \lambda_h\}$ , причем

$$(9.84) \quad u_h \text{ — решение задачи разыскания } \min_{v_h \in K_0 \cap V_h} J(v_h),$$

$$(9.85) \quad p_h = \operatorname{grad} u_h,$$

$$(9.86) \quad p_h = P_{\Lambda}(\lambda_h).$$

**Доказательство.** Рассматриваемая задача конечномерна, поэтому можно применить утверждение теорем 28.2, 28.3 разд. 2.8 книги Рокафеллара [3]. ■

9.5.2. Случай конечноэлементной аппроксимации разд. 4.1 (II). Описание алгоритма и его сходимость

Будем использовать алгоритм (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2, который в данном частном случае принимает вид

пусть  $\lambda_h^n$  известно ( $\in L_h$ ); определяем элементы  $u_h^n \in V_h$  и  $p_h^n \in \Lambda_h$  как решения следующих задач:

$$(9.87) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx = 2 \int_{\Omega} fv_h dx - \int_{\Omega} \lambda_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$\int_{\Omega} p_h^n \cdot q_h dx = \int_{\Omega} \lambda_h^n \cdot q_h dx \quad \forall q_h \in \Lambda_h \Leftrightarrow p_h^n = P_{\Lambda}(\lambda_h^n),$$

$$(9.88) \quad \lambda_h^{n+1} = \lambda_h^n + \rho_n (\operatorname{grad} u_h^n - p_h^n),$$

$$(9.89) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Алгоритм (9.87), (9.88) представляет собой „аппроксимацию“ алгоритма (9.23), (9.24), (9.25). ■

**Предложение 9.4.** Пусть  $0 < \alpha \leq \rho_h \leq \beta < 1$ ; тогда последовательность  $\{u_h^n, p_h^n\}$ , определяемая алгоритмом (9.87), (9.88), (9.89), сходится к  $\{u_h, p_h\}$ , где

$$(9.90) \quad u_h \text{ — решение задачи разыскания} \quad \min_{v_h \in K_0 \cap V_h} J(v_h),$$

$$(9.91) \quad p_h = \operatorname{grad} u_h. \blacksquare$$

### 9.5.3. Случай внешних аппроксимаций разд. 5 (I).

Формулировка приближенной задачи  
и существование седловой точки

Предварительное замечание разд. 8.3.3 остается в силе и здесь; смысл его теперь состоит в том, что из всех рассмотренных аппроксимаций множества  $K_0$  только аппроксимация  $K_{0h}^4$  идеально подходит к использованию метода двойственности разд. 9.1.3. Сохраним обозначения разд. 5 и 8.3.3, т. е. определим

$$(9.92) \quad V_h = \{v_h \mid v_h = (v_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h}\},$$

$$(9.93) \quad L_h = \{q_h \mid q_h = (q_{1i+1/2j+1/2}, q_{2i+1/2j+1/2})_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h}\},$$

$$(9.94) \quad \Lambda_h = \{q_h \mid q_h \in L_h, q_{1i+1/2j+1/2}^2 + q_{2i+1/2j+1/2}^2 \leq 1 \\ \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h\}.$$

Введем следующую аппроксимацию множества  $\mathcal{K}_0$ :

$$(9.95) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_{0h} = \Big\{ (v_h, q_h) \mid v_h \in V_h, q_h \in \Lambda_h, q_{1i+1/2j+1/2} = \\ = \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij+1} + v_{i+1j} - v_{ij}}{2h}, \\ q_{2i+1/2j+1/2} = \frac{v_{i+1j+1} - v_{i+1j} + v_{ij+1} - v_{ij}}{2h} \quad \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h \Big\}, \end{aligned}$$

тогда задача разыскания

$$(9.96) \quad \min_{v_h \in K_{0h}^4} \frac{1}{2} (J_h^1(v_h) + J_h^2(v_h))$$

эквивалентна задаче

$$(9.97) \quad \begin{aligned} \min_{(v_h, q_h) \in \mathcal{K}_{0h}} \Bigg\{ \frac{h^2}{8} \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} \left[ \left( \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right)^2 \right] + \frac{h^2}{4} \times \\ \times \sum_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} (q_{1i+1/2j+1/2}^2 + q_{2i+1/2j+1/2}^2) - \\ - h^2 \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} f_{ij} v_{ij} \Bigg\}, \end{aligned}$$

функционал  $\frac{1}{2}(J_h^1(v_h) + J_h^2(v_h))$  в которой в развернутом виде записывается следующим образом: ( $v_{pq} = 0$  при  $M_{pq} \in \Omega_h$ ):

$$(9.98) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}(J_h^1(v_h) + J_h^2(v_h)) = & \frac{h^2}{8} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \left( \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \right. \\ & + \left. \left( \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{h^2}{8} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \left( \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{v_{i+1j-1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left( \frac{v_{i-1j+1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{v_{i-1j-1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 \right] - h^2 \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} f_{ij} v_{ij}. \end{aligned}$$

Аналогично, задача разыскания

$$(9.99) \quad \min_{v_h \in K_{0h}^4} J_h^3(v_h)$$

эквивалентна задаче

$$(9.100) \quad \begin{aligned} \min_{(q_h, q_h) \in \mathcal{K}_{0h}} & \left\{ \frac{h^2}{8} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \left( \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{v_{i+1j-1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{v_{i-1j+1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{v_{i-1j-1} - v_{ij}}{h\sqrt{2}} \right)^2 \right] + \right. \\ & + \frac{h^2}{4} \sum_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} (q_{i+1/2j+1/2}^2 + q_{i+1/2j+1/2}^2) - \\ & \left. - h^2 \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} f_{ij} v_{ij} \right\}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание 9.9.** Апроксимация (9.96) задачи  $(P_0)$  в разд. 5 и 6 не рассматривалась; нетрудно доказать, что все результаты (в частности, о сходимости), установленные ранее для других аппроксимаций, переносятся и на задачу (9.96).  $\blacksquare$

Будем обозначать через  $\mathcal{J}_h^l$  функционал из  $V_h \times L_h \rightarrow \mathbb{R}$  для  $l=1$ , определяемый по формуле (9.97), для  $l=2$  — по формуле (9.100); с задачами (9.98), (9.100) свяжем функционалы  $\mathcal{L}_{3h}^1$  и  $\mathcal{L}_{3h}^3$  из  $(V_h \times L_h) \times L_h \rightarrow \mathbb{R}$ , представляющие собой следующие аппрок-

симации функционала  $\mathcal{L}_h^l$ :

$$(9.101) \quad \begin{aligned} & \mathcal{L}_{sh}^l(v_h, q_h; \mu_h) = \mathcal{I}_h^l(v_h, q_h) + \\ & + \frac{h^3}{2} \sum_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} \left[ \mu_{1i+1/2j+1/2} \times \right. \\ & \times \left( \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij+1} + v_{i+1j} - v_{ij}}{2h} - q_{1i+1/2j+1/2} \right) + \\ & + \mu_{2i+1/2j+1/2} \left( \frac{v_{i+1j+1} - v_{i+1j} + v_{ij+1} - v_{ij}}{2h} - q_{2i+1/2j+1/2} \right) \Big], \\ & l = 1, 2. \end{aligned}$$

Можно показать, что имеет место предложение, аналогичное предложению 9.3, в соответствии с которыми лагранжиан  $\mathcal{L}_{sh}^l (l=1, 2)$  имеет на  $(V_h \times \Lambda_h) \times L_h$  седловую точку, которую мы обозначаем  $\{u_h^l, p_h^l, \lambda_h^l\}$ , причем

(9.102)  $u_h^l$  — решение задачи (9.96),  $u_h^2$  — решение задачи (9.99),

$$(9.103) \quad \left. \begin{aligned} p_{1i+1/2j+1/2}^l &= \frac{u_{i+1j+1}^l - u_{ij+1}^l + u_{i+1j}^l - u_{ij}^l}{2h} \\ p_{2i+1/2j+1/2}^l &= \frac{u_{i+1j+1}^l - u_{i+1j}^l + u_{ij+1}^l - u_{ij}^l}{2h} \end{aligned} \right\} \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h,$$

$$(9.104) \quad (p_{1i+1/2j+1/2}^l, p_{2i+1/2j+1/2}^l) = P_{\bar{D}}(\lambda_{1i+1/2j+1/2}^l, \lambda_{2i+1/2j+1/2}^l) \\ \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h \quad (l = 1, 2),$$

где оператор  $P_{\bar{D}}$  в формуле (9.104) определен по формулам (8.82), (8.83) разд. 8.3.3. ■

#### 9.5.4. Случай внешних аппроксимаций разд. 5 (II).

*Описание алгоритма и его сходимость*

Будем использовать алгоритм (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2, который для данного частного случая принимает форму (верхний индекс  $l$  будем опускать):

1) для  $l = 1$

пусть  $\lambda_h^n$  известно ( $\in L_h$ ); определяем элемент  $u_h^n \in V_h$ , представляющий собой решение следующей задачи:

$$(9.105)_1 \quad \begin{aligned} & - \frac{u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^n + u_{ij+1}^n + u_{ij-1}^n - 4u_{ij}^n}{h^2} = 2f_{ij} + \\ & + \frac{\lambda_{1i+1/2j+1/2}^n - \lambda_{1i-1/2j+1/2}^n + \lambda_{1i+1/2j-1/2}^n - \lambda_{1i-1/2j-1/2}^n}{2h} + \\ & + \frac{\lambda_{2i+1/2j+1/2}^n - \lambda_{2i+1/2j-1/2}^n + \lambda_{2i-1/2j+1/2}^n - \lambda_{2i-1/2j-1/2}^n}{2h} \\ & \forall M_{ij} \in \Omega_h; \end{aligned}$$

2) для  $l = 2$

$$(9.105)_2 \quad \begin{aligned} & -\frac{u_{i+1/2j+1}^n + u_{i-1/2j+1}^n + u_{i+1/2j-1}^n + u_{i-1/2j-1}^n - 4u_{ij}^n}{2h^2} = 2f_{ij} + \\ & + \frac{\lambda_{1i+1/2j+1/2}^n - \lambda_{1i-1/2j+1/2}^n + \lambda_{1i+1/2j-1/2}^n - \lambda_{1i-1/2j-1/2}^n}{2h} + \\ & + \frac{\lambda_{2i+1/2j+1/2}^n - \lambda_{2i+1/2j-1/2}^n + \lambda_{2i-1/2j+1/2}^n - \lambda_{2i-1/2j-1/2}^n}{2h} \end{aligned}$$

$\forall M_{ij} \in \Omega_h,$

после этого для  $l = 1$  или 2 определяем

$$(9.106) \quad (p_{1i+1/2j+1/2}^n, p_{2i+1/2j+1/2}^n) = P_D(\lambda_{1i+1/2j+1/2}^n, \lambda_{2i+1/2j+1/2}^n)$$

$\forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h,$

$$(9.107) \quad \begin{aligned} & \lambda_{1i+1/2j+1/2}^{n+1} = \lambda_{1i+1/2j+1/2}^n + \\ & + \rho_n \left( \frac{u_{i+1/2j+1}^n - u_{ij+1}^n + u_{i+1/2j-1}^n - u_{ij}^n}{2h} - p_{1i+1/2j+1/2}^n \right) \end{aligned}$$

$\forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h,$

$$(9.108) \quad \begin{aligned} & \lambda_{2i+1/2j+1/2}^{n+1} = \lambda_{2i+1/2j+1/2}^n + \\ & + \rho_n \left( \frac{u_{i+1/2j+1}^n - u_{ij+1}^n + u_{i+1/2j-1}^n - u_{ij}^n}{2h} - p_{2i+1/2j+1/2}^n \right) \end{aligned}$$

$\forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h,$

$$(9.109) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Приведенный алгоритм представляет собой „аппроксимацию“ алгоритма (9.23), (9.24), (9.25), условия (9.105) <sub>$l$</sub>  ( $l = 1, 2$ ) — дискретные аналоги условия (9.26). ■

Из теоремы 4.1 разд. 4.3 гл. 2 следует, что последовательность  $\{u_h^n, p_h^n\}$ , определяемая алгоритмом (9.105) <sub>$l$</sub>  ( $l = 1, 2$ ), (9.106), (9.107), (9.108), для достаточно малых значений  $\rho_n$  сходится к решению  $\{u_h^l, p_h^l\}$ . ■

### 9.5.5. Случай внешних аппроксимаций разд. 5 (III).

Численный пример

Рассматривается исследованная ранее задача ( $P_0$ ) в области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  с  $f = 10$ ; мы ограничились аппроксимацией (9.96), следовательно, используемый алгоритм определяется соотношениями (9.105)<sub>1</sub>, ..., (9.109).

Шаг дискретизации:  $h = 1/20$

Начальное приближение для алгоритма (9.105)<sub>1</sub>, ..., (9.109):  $\lambda_h^0 = 0$ .

*Определение  $u_h^n$  по известному  $\lambda_h^n$ :* методом точечной верхней релаксации с начальным приближением  $u_h^{n-1}$ . В качестве условия останова выбирается условие:  $\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| \leq \epsilon_1$ , где  $n$  — номер итерации в алгоритме верхней релаксации.

Условие останова алгоритма  $(9.105)_1, \dots, (9.109)$ :

$$\sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| \leq \epsilon.$$

### Анализ численных результатов

Результаты, касающиеся сходимости алгоритма  $(9.105)_1, \dots, (9.109)$ , соответствующие значению параметра верхней релаксации, равному 1,75, и  $\rho_n = \rho = 0,75$ , приведены в табл. 9.5:

Таблица 9.5

$\epsilon$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-5}$
$\epsilon_1$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
Число итераций, необходимых для сходимости	120	80	90
Приближенное значение $u(0,5, 0,5)$	0,415	0,415	0,414
Время вычислений (сек.) на ЭВМ СII 70010			40 с

Относительно достигаемой здесь точности отметим, что найденное приближенное решение с точностью до  $10^{-3}$  (в абсолютных величинах) совпадает с решениями, полученными другими методами настоящей главы. ■

## 10. Комментарии

Задачи теории пластичности послужили источником очень большого количества работ, посвященных их численному решению.

Для ознакомления с успехами, достигнутыми в этой области, мы отсылаем к работам Аргириса [1], [2], [3], Аргириса, Шарпфа и Спунера [1], [2], Аргириса и Шарифа [1], Аргириса, Ваймера,

Дольциниса и Уильяма [1], Нейяка и Зенкевича [1], Зенкевича, Вэллиапэйна и Кинга [1], Зенкевича и Валлиапэйна [1], Зенкевича и Кормо [1]; см. также библиографию к этим работам.

Частной задаче упругопластического кручения также посвящено большое количество работ как теоретического характера, так и ее численному решению; мы отметим работы Ходжа, Гераковича и Ставта [1], Гераковича и Ходжа [1], Ставта и Ходжа [1], Черноуско и Баничука [1], Бурга [1], Сеа, Гловински и Неделека [2], Гурса [1], Марокко [1], Брезиса и Сибони [1], Огазо [2], посвященные численному решению задачи упругопластического кручения; см. также библиографию к этим работам.

Конечные элементы первого порядка, описание которых дано в разд. 4.1, лучше других, по нашему мнению, приспособлены для практического решения задачи кручения; в частности, эти элементы позволяют лучше по сравнению с методом конечных разностей разд. 5 аппроксимировать области сложной формы; кроме того, слабая регулярность решений и отмеченные в разд. 4 и 6 затруднения, возникающие при использовании конечных элементов порядка 2 и выше, ограничивают интерес к такого типа конечным элементам.

Что касается методов численного решения приближенных задач, то здесь мы хотели бы отметить преимущества методов типа метода двойственности, основанных на использовании алгоритма Удзавы (разд. 9), и привести следующий вариант этих методов, представляющий собой комбинацию методов разд. 8 и 9. Будем использовать обозначения разд. 8.3; введем

$$(10.1) \quad L = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$$(10.2) \quad \Lambda = \{q \mid q \in L, q = (q_1, q_2), |q|^2 = q_1^2(x) + q_2^2(x) \leq 1 \text{ п.в.}\},$$

$$(10.3) \quad j(v, q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |q|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx;$$

тогда задача  $(P_0)$  эквивалентна задаче<sup>1)</sup>:

$$(10.4) \quad \min_{(v, q)} j(v, q), \quad (v, q) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda, \quad \nabla v - q = 0.$$

Пусть  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ ; тогда пара  $(u, \nabla u)$  представляет собой единственное решение задачи (10.4). С задачей (10.4) естественно связать лагранжиан  $\mathcal{L}$ , полученный дуализацией<sup>2)</sup> ограничения  $\nabla v - q = 0$ :

$$\mathcal{L}(v, q; \mu) = j(v, q) + \int_{\Omega} \mu \cdot (\nabla v - q) dx.$$

<sup>1)</sup> Ниже будем использовать обозначение:  $\operatorname{grad} v = \nabla v$ .

<sup>2)</sup> Умножением (в смысле  $L_2$ ) ограничения  $\nabla v - q = 0$  на множитель Лагранжа и добавлением получившегося выражения к исходному функционалу задачи.— Прим. перев.

При фиксированных  $\mu$  и  $q$  функционал  $\mathcal{L}$  линеен по  $v$  и, следовательно, некоэрцитивен, что неудобно, если мы хотим определить возможную седловую точку функционала  $\mathcal{L}$  на пространстве  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$  по методу Удзавы; для выхода из создавшейся ситуации „оштрафуем“ ограничение  $\nabla v - q = 0$ , используя принцип Хестенса [2]:

$$\mathcal{L}_\varepsilon(v, q; \mu) = \mathcal{L}(v, q; \mu) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla v - q|^2 dx.$$

Можно доказать, что любая седловая точка  $\mathcal{L}_\varepsilon$  на  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$  имеет форму  $(u, \nabla u; \lambda)$ , где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ .

Применим алгоритм Удзавы для разыскания седловой точки функционала  $\mathcal{L}_\varepsilon$ :

$$(10.5) \quad \text{задаем } \lambda^0 \in L,$$

если элемент  $\lambda^n$  известен, определяем последовательно  $u^n, p^n, \lambda^{n+1}$  из решений следующих задач:

$$(10.6) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(u^n, p^n; \mu^n) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(v, q; \mu^n) \quad \forall (v, q) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda \\ (u^n, p^n) \in H_0^1(\Omega) \times \Lambda,$$

$$(10.7) \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n (\nabla u^n - p^n), \quad \rho_n > 0.$$

Предполагая, что седловая точка функционала  $\mathcal{L}_\varepsilon$  на  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$  существует, можно доказать, что выполнены условия

$$(10.8) \quad 0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < \frac{2}{\varepsilon};$$

имеет место сходимость:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u^n, p^n) = (u, \nabla u) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega) \times L.$$

Заметим, что задача (10.6) определения  $(u^n, p^n)$  представляет собой задачу квадратичного программирования в бесконечномерном случае; решение которой без труда можно построить методом блочной верхней релаксации с проекцией, изложенным и изученным в работе Сеа и Гловински [2]. Проблема существования седловой точки функционала  $\mathcal{L}_\varepsilon$  на  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$  в общем случае, по-видимому, не решена; однако такой результат нетрудно установить для сужения функционала  $\mathcal{L}_\varepsilon$  на конечно-мерные аппроксимации множества  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda \times L$ , построенные каким-либо из методов конечных элементов, например при помощи конечных элементов первого порядка разд. 4. Подробности численной реализации алгоритма (10.5) — (10.7) можно будет найти (после опубликования) в работе Фортена, Гловински и Марокко; в этой же работе будут рассмотрены другие нелинейные задачи, для решения которых применены различные варианты алгоритма (10.5) — (10.7).

## Часть 2

# ПРИЛОЖЕНИЯ К СТАЦИОНАРНЫМ И ЭВОЛЮЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

### ВВЕДЕНИЕ

1. Во втором томе продолжается численное исследование вариационных неравенств; это исследование проводится для нескольких классов стационарных и эволюционных задач, встречающихся в механике и физике.

В первом томе были изложены общие методы исследования для бесконечномерного случая — в первой главе, конечномерного — во второй главе; далее, в третьей главе изучена одна стационарная задача теории пластичности, где проявляются некоторые основные типичные трудности рассматриваемой проблемы.

2. Часть исследования, посвященная стационарным задачам, составляет содержание четвертой и пятой глав.

В этих главах изучаются задачи, имеющие практическую ценность, и в которых проявляются другие типичные трудности, встречающиеся при решении стационарных неравенств, связанных, в частности, с недифференцируемыми функционалами.

Практические выводы, которые можно извлечь из этих рассмотрений, состоят в следующем: для подходящих множеств ограничений  $K$  „оптимальные“ методы (с точки зрения простоты программирования, затрачиваемой памяти, времени вычислений и т. д.) принадлежат к типу методов верхней релаксации (см. гл. 2), в особенности для задач с эллиптическими операторами 2-го порядка.

Двойственные методы (см. гл. 1 и 2) имеют более широкую область применения (в частности, они хорошо приспособлены для решения эллиптических задач с операторами 4-го порядка и некоторых задач с недифференцируемым функционалом), имеют хорошие рабочие характеристики в отношении скорости вычислений, однако при прочих равных условиях численная реализация этих методов является более тонким делом, затрачиваемая здесь машинная память больше (зачастую это относится и к времени вычислений) по сравнению с тем, что имеет место для методов верхней релаксации (в случае их применимости).

В рассматриваемых здесь задачах реализация методов штрафа (см. гл. 2) сложнее, а затрачиваемая машинная память больше, чем при использовании методов верхней релаксации и двойственности. Однако игнорировать методы штрафа не следует; некоторые применения, в частности, из теории оптимального управления, дают возможность полагать, что эти методы могут быть полезны, если применять их одновременно с методами верхней релаксации и двойственности.

Методы декомпозиции и расщепления ограничений (Лионс и Темам [1]) в этой книге не отражены; общее представление об этих методах можно получить из работы Бенсуссана, Лионса и Темама [1]; их численная реализация и, в частности, разыскание „оптимальных“ декомпозиций правых частей проведено в работе Лавэна [1].

### 3. Эволюционные задачи изучаются в гл. 6.

Если в неравенстве (9) производную  $d\bar{u}(t)/dt$  заменить на  $(\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n)/\Delta t$ , где  $\bar{u}^n$  означает аппроксимацию функции  $u(n\Delta t)$ , то задачу (9) можно „приблизить“ при помощи семидискретизации:

$$(10) \quad \left( \frac{\bar{u}^{n+1} - \bar{u}^n}{\Delta t}, v - \bar{u}^{n+1} \right) + a(\bar{u}^{n+1}, v - \bar{u}^{n+1}) \geqslant \\ \geqslant (f(n\Delta t), v - \bar{u}^{n+1}) \quad \forall v \in K, \bar{u}^{n+1} \in K \quad (\bar{u}^0 = u_0),$$

полученная задача есть не что иное, как стационарное вариационное неравенство, для решения которого, следовательно, можно применить методы, упомянутые выше в п. 2.

Таким образом, после дискретизации задачи (10) приходим к полной дискретизации задачи (9).

Использованный выше способ перехода к задаче (10), конечно, самый простой из возможных, но он вовсе не является единственным! Таким образом, здесь возникают следующие вопросы:

- (i) выбор метода дискретизации по переменной  $t$ ;
- (ii) исследование устойчивости и сходимости;
- (iii) получение численных решений, когда возможно произвести сравнение.

В гл. 6 с этой точки зрения изучаются вариационные неравенства с линейными и нелинейными операторами:

- параболические неравенства типа I и II (гл. 6);
- гиперболические неравенства и неравенства, соответствующие операторам типа Петровского; далее, в разд. 11, приводится краткое исследование (подробности можно найти в работах Фортена [1] и Бежи [1]) аналогичных задач для нелинейных операторов типа Бингама.

4. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному исследованию задач механики с огра-

ничениями, особенно задачам теории пластичности; назовем по этому поводу работы Прагера и Ходжа [1], Гераковича и Ходжа [1], Капурсо [1], [2], [3], Капурсо и Майера [1], Майера [1], [2] и работы, в которых используется метод конечных элементов: Аргириса [1], [2], Аргириса, Шарпфа и Спунера [1], Ямады [1], Зенкевича [1], Зенкевича, Валланпэйна и Кинга [1]; см. также библиографию к этим работам.

Общие методы для эллиптического случая развиты в работах Огазо [1], [2] и Обэна [1]. В нашей работе широко использованы результаты Сеа и Гловински [1] и Сеа, Гловински и Неделека [1]. Первые результаты для эволюционных задач были опубликованы в заметке Лионса [5]; наше изложение опирается в основном на результаты работ Тремольера [4], Вио [1] и Фортена [1].

На протяжении всей книги нами были использованы также результаты, полученные в работах Бежи [1], Бурга [1], Гурса [2], Лемонье [1], Леруа [1], Марокко [1], Мерсье [1], Томассе [1]; авторам этих работ мы выражаем нашу горячую благодарность.

Другие методы, относящиеся к стационарному случаю, можно найти в работах Ауслендера [1], Моско [1].

По поводу различных приложений можно назвать в числе других, следующие работы: Байокки, Коминчиоли, Мадженеса и Поззи [1], Коминчиоли, Гуэрри и Вольпи [1], Фремона [1], Фушиарди, Моско, Скарпини и Скиаффино [1].

Мы горячо благодарим Сеа, Неделека и Стренга за интересные дискуссии по вопросам, излагаемым в этой книге.

За время, прошедшее с момента окончания редактирования этой книги (июнь 1974 г.), в численных исследованиях вариационных неравенств достигнуты определенные успехи, в основном в решении проблемы оценки погрешности аппроксимации по методу конечных элементов. В числе прочих работ можно указать на работы Брезиса, Хажера и Равьяра, Фалка, Фалка и Мерсье, Гловински, Джонсона, Джонсона и Мерсье, Моско и Скарпини, Ницше и др. Некоторые из этих работ можно найти в библиографии к статье Гловински [9].

Отметим также установленные в численных экспериментах достоинства методов, опирающихся на использование расширенного лагранжиана, упомянутых в разд. 6 гл. 2; разд. 10 гл. 3 и разд. 9 гл. 5. По поводу приложений этих методов к нелинейным уравнениям с частными производными и вариационным неравенствам мы отсылаем к работам Габей и Мерсье [1], Гловински и Марокко [1], [2], Мерсье [1].

## Глава 4

# ЗАДАЧИ КЛИМАТИЗАЦИИ, ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА 4-ГО ПОРЯДКА

### План изложения

В этой главе будут изучены задачи, численное исследование которых опирается на методы и приемы, изложенные в гл. 1 и 2.

В разд. 1, 2, 3 будут изучены различные односторонние эллиптические задачи второго порядка, односторонний характер которых определяется граничными условиями; в разд. 4 будут изучены эллиптические вариационные неравенства 4-го порядка, моделирующие односторонние задачи теории тонких пластин. ■

## 1. Задачи климатизации и диффузии жидкости через полупроницаемую мембрану

### 1.1. Постановка задачи

В некоторых модельных задачах, описывающих климатизацию через границу или процесс диффузии сквозь ограничивающую область  $\Omega$  мембрану, возникает проблема определения функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , удовлетворяющей следующим уравнениям и условиям:

$$(1.1) \quad \mu u - \Delta u = f \text{ в } \Omega,$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u) = 0 \text{ на } \Gamma_d,$$

$$(1.3) \quad u = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d,$$

или

$$(1.3)' \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d.$$

В задаче (1.1)–(1.3)'  $\mu$  — неотрицательная константа,  $\Gamma_d$  — часть границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ ,  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная возрастающая функция.

В соответствии с результатами гл. 1 работы Дюво и Лионса [1] решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) и (1.1), (1.2), (1.3)' сво-

дится к задаче минимизации функционала

$$(1.4) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V \\ u \in V,$$

где (предполагается, что  $f \in L^2(\Omega)$ )

$$(1.5) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu v^2 + |\operatorname{grad} v|^2) dx - \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma_a} \Psi(v) d\Gamma;$$

в (1.4) для случая задачи (1.1), (1.2), (1.3)

$$(1.6) \quad V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma-\Gamma_d} = 0\}$$

и

$$(1.7) \quad V = H^1(\Omega)$$

для задачи (1.1), (1.2), (1.3)'; функция  $\Psi$  в определении (1.5) представляет собой первообразную функции  $\varphi$ , равную нулю в начале, т. е.

$$(1.8) \quad \Psi(\xi) = \int_0^{\xi} \varphi(\tau) d\tau.$$

*Замечание 1.1.* Для того чтобы несколько упростить изложение, будем предполагать, что  $\mu > 0$ ; теоретическое исследо-

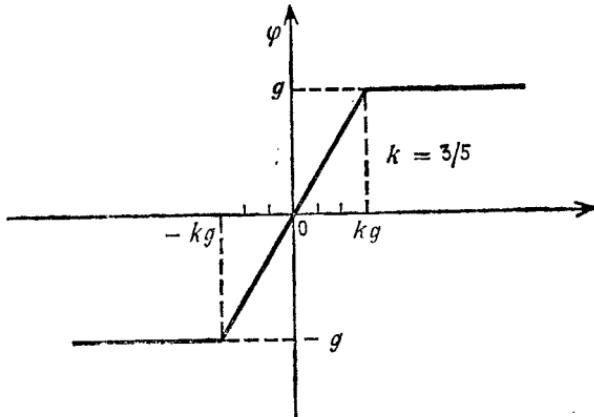


Рис. 1.1. График функции  $\varphi(v)$ .

вание случая  $\mu = 0$  можно найти в разд. 7.3 гл. 1 книги Дюво и Лионса [1]. ■

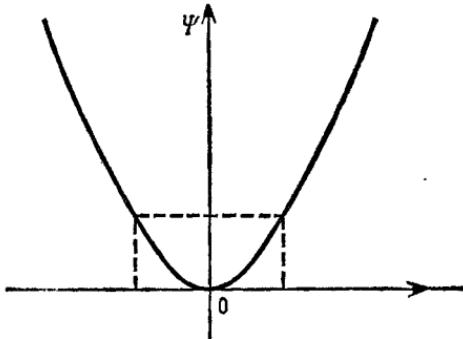
**Замечание 1.2.** Рассматриваемая в этом разделе функция определена по формуле

$$(1.9) \quad \varphi(\xi) = \begin{cases} g, & \text{если } \xi \geq kg, \\ \xi/k, & \text{если } -kg < \xi < kg, \\ -g, & \text{если } \xi \leq -kg, \end{cases}$$

где  $g$  и  $k$  — заданные положительные постоянные. Таким образом с учетом определения (1.6) имеем

$$(1.10) \quad \Psi(\xi) = \begin{cases} g\xi - \frac{1}{2}kg^2, & \text{если } \xi \geq kg, \\ \frac{\xi^2}{2k}, & \text{если } |\xi| \leq kg, \\ -g\xi - \frac{1}{2}kg^2, & \text{если } \xi \leq -kg. \end{cases}$$

Графики функций  $\varphi$  и  $\Psi$  показаны на рис. 1.1 и 1.2.



Ис. 1.2. График функции  $\Psi(v)$ .

Более общие по сравнению с (1.9) примеры функций  $\varphi$ , в том числе разрывных, можно найти в книге Дюво и Лионса [1] (см. также ниже разд. 2, где  $\Psi(v) = g|v|$ ).

## 1.2. Результаты о существовании и единственности решения задачи (1.4), (1.5)

Ниже через  $\|v\|$  мы будем обозначать стандартную норму на пространстве  $H^1(\Omega)$ , т. е.

$$\|v\| = \left( \int_{\Omega} (v + |\operatorname{grad} v|^2)^{1/2} dx \right)^{1/2}.$$

Имеет место

**Теорема 1.1.** Если область  $\Omega$  ограничена, ее граница  $\Gamma$  удовлетворяет условию Липшица, то задача (1.4), (1.5) имеет решение, и притом только одно.

**Доказательство.** Функционал  $J$  строго выпуклый и, кроме того,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty;$$

поскольку непрерывность отображения

$$v \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v|^2 + \mu |v|^2) dx - \int_{\Omega} fv dx$$

на пространстве  $H^1(\Omega)$  очевидна, то для применимости теоремы 2.1 разд. 2.1 гл. 1 достаточно установить непрерывность отображения  $j: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$j(v) = \int_{\Gamma_d} \Psi(v) d\Gamma.$$

Имеет место оценка

$$(1.11) \quad |\Psi(\eta) - \Psi(\xi)| \leq g |\eta - \xi| \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

из которой вытекает, что

$$(1.12) \quad |j(v_2) - j(v_1)| \leq g \int_{\Gamma_d} |v_2 - v_1| d\Gamma \quad \forall v_2, v_1 \in L^2(\Gamma);$$

с другой стороны, пусть  $\gamma_0$  — оператор вычисления следа<sup>1)</sup>, тогда

$$(1.13) \quad \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma \leq \int_{\Gamma} |v| d\Gamma \leq \left( \int_{\Gamma} d\Gamma \right)^{1/2} \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)},$$

и из непрерывности оператора следа имеем

$$(1.14) \quad \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

откуда и из оценок (1.12) — (1.14) вытекает нужный нам результат. ■

**Замечание 1.3.** Полученный результат сохраняется и для случая, когда в определении (1.9) предполагается, что  $k=0$ ; к этому случаю, когда

$$j(v) = g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma,$$

мы вернемся ниже в разд. 2. ■

<sup>1)</sup> Функции  $v$  на границе  $\Gamma$ . — Прим. перев.

### 1.3. Апроксимация по методу конечных элементов

В этом разделе будет изучена аппроксимация задачи (1.4), (1.5) по методу конечных элементов Лагранжа первого и второго порядка. Ниже для упрощения будем предполагать, что область  $\Omega$  полигональна (следовательно, ее граница удовлетворяет условию Липшица).

#### 1.3.1. Триангуляция области $\Omega$ .

*Определение пространства  $V_h$*

Будем действовать, как и в примере 4.2 разд. 4 гл. 1 и разд. 4.1 гл. 3; итак, пусть  $\mathcal{T}_h$  — конечная триангуляция области  $\Omega$ , удовлетворяющая условиям:

$$(1.15) \quad T \subset \bar{\Omega} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \bar{\Omega},$$

$$(1.16) \quad T \text{ и } T' \in \mathcal{T}_h \Rightarrow T \cap T' = \emptyset, \text{ или же } T \text{ и } T' \text{ имеют одну общую сторону, или } T \text{ и } T' \text{ имеют одну общую вершину.}$$

Положим

$$(1.17) \quad h \text{ — длина наибольшей стороны } T \in \mathcal{T}_h,$$

$$(1.18) \quad \Sigma_h \text{ — множество вершин } \mathcal{T}_h,$$

$$\Sigma'_h \text{ — множество середин сторон треугольников из } \mathcal{T}_h.$$

Учитывая условие (1.15), видим, что все вершины, принадлежащие  $\Gamma$ , лежат на  $\Gamma_d$ ; кроме того, будем предполагать, что  $\Gamma_d$  представляет собой объединение лежащих на  $\Gamma$  сторон треугольников из  $\mathcal{T}_h$ .

Пространство  $H^1(\Omega)$  аппроксимируем — классическим способом — следующим пространством:

$$(1.19) \quad \mathcal{V}_h = \{v_h \mid v_h \in H^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), v_h|_T \in P_q, \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

где  $v_h|_T$  означает сужение функции  $v_h$  на треугольник  $T$ ,  $P_q$  — пространство полиномов степени, не превосходящей  $q$  по совокупности переменных; мы ограничимся случаем  $q=1, 2$ .

Таким образом, пространство  $V_h$ , соответствующее задаче (1.1), (1.2), (1.3), определяется следующим образом:

$$(1.20) \quad V_h = \{v_h \mid v_h \in \mathcal{V}_h, v_h|_{\Gamma - \Gamma_d} = 0\};$$

что касается задачи (1.1), (1.2), (1.3)', то здесь мы будем полагать:

$$(1.21) \quad V_h = \mathcal{V}_h.$$

За степени свободы<sup>1)</sup> естественно выбрать при использовании указанных выше аппроксимаций значения функции  $v_h$  в точках множества  $\Sigma_h (\Sigma_h \cup \Sigma'_h)$ , если  $q=1$  ( $q=2$ ). ■

### 1.3.2. Аппроксимация функционала $j$

Функционал

$$j(v) = \int_{\Gamma_d} \Psi(v) d\Gamma$$

определен на пространствах  $V_h$ , построенных выше; практическое вычисление значений данного функционала на элементах пространств  $V_h$  затруднительно, поэтому мы будем также

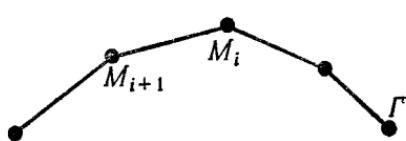


Рис. 1.3.

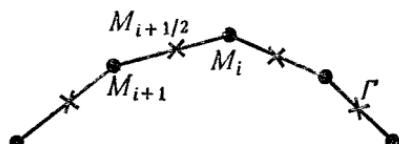


Рис. 1.4.

аппроксимировать данный функционал функционалом  $j_h$ , полученным из  $j$  численным интегрированием, или — что то же — точным интегрированием надлежащим образом подобранных интерполяций функции  $\Psi(v_h)$ ; обозначим через  $W_h$  пространство следов на  $\Gamma_d$  функций из  $V_h$ ; для заданной  $v_h \in V_h$  аппроксируем  $\Psi(v_h)$  функцией  $\Psi_h(v_h)$  следующим образом:

$$(1.22) \quad \begin{aligned} \Psi_h(v_h) &\in W_h, \quad (\Psi_h(v_h))(P) = \Psi(v_h(P)) \\ \forall P \in \Gamma_d \cap \Sigma_h, \quad q &= 1; \quad \forall P \in \Gamma_d \cap (\Sigma_h \cup \Sigma'_h), \quad q = 2; \end{aligned}$$

тогда  $j(v)$  приближается функционалом:

$$(1.23) \quad j_h(v_h) = \int_{\Gamma_d} \Psi_h(v_h) d\Gamma,$$

обладающим, очевидно, свойствами выпуклости и непрерывности.

Примем обозначения для  $q=1$ , показанные на рис. 1.3, для  $q=2$  — на рис. 1.4, тогда, считая, что суммирование производится по всем сторонам треугольников из  $\mathcal{T}_h$ , объединение ко-

<sup>1)</sup> Искомые параметры.—Прим. перев.

торых совпадает с границей  $\Gamma_d$ , будем иметь:

$$(1.24) \quad j_h(v_h) = \frac{1}{2} \sum |M_i M_{i+1}| (\Psi(v_h(M_i)) + \Psi(v_h(M_{i+1}))), \quad q=1,$$

$$(1.25) \quad j_h(v_h) = \frac{1}{6} \sum |M_i M_{i+1}| (\Psi(v_h(M_i)) + 4\Psi(v_h(M_{i+1/2})) + \Psi(v_h(M_{i+1}))), \quad q=2.$$

Формулы (1.24), (1.25) соответствуют, очевидно, квадратурной формуле трапеций (Симпсона). ■

### 1.3.3. Постановка приближенных задач и их разрешимость

Будем использовать обозначения разд. 1.3.1, 1.3.2, и пусть  $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  — билинейная симметричная форма вида

$$(1.26) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \mu uv) dx;$$

задачу (1.4), (1.5) заменим следующей приближенной задачей минимизации:

$$(1.27) \quad \frac{1}{2} a(u_h, u_h) + j_h(u_h) - \int_{\Omega} f u_h dx \leq \frac{1}{2} a(v_h, v_h) + j_h(v_h) - \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h \quad u_h \in V_h,$$

эквивалентной вариационному неравенству:

$$(1.28) \quad a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h. \quad ■$$

Учитывая выпуклость и непрерывность функционала  $j_h$ , можно доказать, что для полученной выше приближенной задачи (1.27) имеет место следующий аналог теоремы 1.1.

**Теорема 1.2.** *Задача (1.27) имеет решение, и притом только одно.* ■

Для эффективного решения различных приближенных задач необходимо написать развернутые выражения аппроксимаций (1.24) или (1.25) через значения  $u_h$  и  $v_h$  в точках множества  $\Sigma_h$  для  $q=1$ , в точках множества  $\Sigma_h \cup \Sigma'_h$  в случае  $q=2$ ; ниже, в разд. 1.6 к этому мы еще вернемся. ■

Для более четкого разъяснения вопроса о сходимости последовательности  $u_h$  при  $h \rightarrow 0$  случаи  $q=1$  (разд. 1.4) и  $q=2$  (разд. 1.5) мы будем рассматривать по отдельности.

## 1.4. Сходимость последовательности приближенных решений (I). Случай $q = 1$

Буквой  $C$  в этом разделе мы будем обозначать различные константы.

### 1.4.1. Две леммы

Для исследования сходимости при  $h \rightarrow 0$  используем следующие две леммы:

**Лемма 1.1.** Имеет место оценка

$$(1.29) \quad j_h(v_h) \geq j(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall h.$$

*Доказательство.* Используем обозначения разд. 1.3.2.

Пусть  $M \in \widehat{M_i M_{i+1}}$ , тогда  $\overrightarrow{M_i M} = \theta \overrightarrow{M_i M_{i+1}}$ , где

$$\theta = |M_i M| / |M_i M_{i+1}|,$$

откуда следует, что

$$(1.30) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad \forall M \in \widehat{M_i M_{i+1}};$$

функция  $v_h$  — аффинная,  $\Psi$  выпукла, следовательно (обозначая  $v_i = v_h(M_i)$ ),

$$(1.31) \quad v_h(M) = (1 - \theta)v_i + \theta v_{i+1},$$

$$(1.32) \quad \Psi(v_h(M)) \leq (1 - \theta)\Psi(v_i) + \theta\Psi(v_{i+1}).$$

Кроме того,

$$(1.33) \quad j(v_h) = \sum_{M_i}^{\widehat{M_{i+1}}} \Psi(v_h) d\Gamma.$$

Интегрированием из (1.31), (1.32) получаем оценку

$$j(v_h) \leq \sum |M_i M_{i+1}| \left[ \Psi(v_i) + (\Psi(v_{i+1}) - \Psi(v_i)) \int_0^1 \theta d\theta \right],$$

из которой с учетом (1.24) имеем

$$(1.34) \quad j(v_h) \leq \frac{1}{2} \sum |M_i M_{i+1}| (\Psi(v_i) + \Psi(v_{i+1})) = j_h(v_h),$$

что и завершает доказательство неравенства (1.29). ■

**Лемма 1.2.** Пусть  $s \in [0, 1]$ , тогда

$$(1.35) \quad |j_h(v_h) - j(v_h)| \leq C_0 g h^s \|v_h\|_{H^s(\Gamma)},$$

где  $C_0$  — константа, не зависящая от  $k, g, h, s, v_h$ .

*Доказательство.* Пусть  $v_h \in V_h$ ; используя обозначения, показанные на рис. 1.5, определим элемент  $q_h \gamma_0 v_h \in L^2(\Gamma)$  по формуле

$$(1.36) \quad q_h \gamma_0 v_h = \sum_{M_i \in \Gamma \cap \Sigma_h} v_h(M_i) \tilde{\omega}_i,$$

где

$$(1.37) \quad \tilde{\omega}_i = \text{характеристическая функция «дуги» } M_{i-1/2} \overset{\curvearrowright}{M_i M_{i+1/2}}.$$

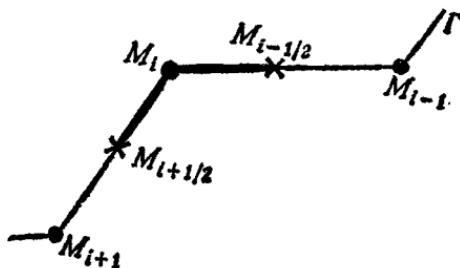


Рис. 1.5.

Пусть функция  $\Psi_h(v_h)$  определена по формуле (1.22); нетрудно показать, что

$$(1.38) \quad \int_{\Gamma_d} \Psi_h(v_h) d\Gamma = \int_{\Gamma_d} \Psi(q_h \gamma_0 v_h) d\Gamma,$$

откуда следует выражение

$$(1.39) \quad j_h(v_h) = \int_{\Gamma_d} \Psi(q_h \gamma_0 v_h) d\Gamma.$$

С учетом условий (1.11) и (1.39) имеем

$$(1.40) \quad |j_h(v_h) - j(v_h)| \leq g \int_{\Gamma} |v_h - q_h \gamma_0 v_h| d\Gamma \leq \\ \leq g \left( \int_{\Gamma} d\Gamma \right)^{1/2} \| \gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h \|_{L^2(\Gamma)}.$$

Используя обозначения, введенные при доказательстве леммы 1.1, получаем

$$\| \gamma_0 v_h \|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} | \gamma_0 v_h |^2 d\Gamma = \frac{1}{6} \sum_i | M_i M_{i+1} | (v_i^2 + (v_i + v_{i+1})^2 + v_{i+1}^2),$$

а также

$$\| q_h \gamma_0 v_h \|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} | q_h \gamma_0 v_h |^2 d\Gamma = \frac{1}{2} \sum_i | M_i M_{i+1} | (v_i^2 + v_{i+1}^2),$$

с другой стороны,  $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$  имеет место неравенство

$$\xi^2 + \eta^2 \leq \xi^2 + (\xi + \eta)^2 + \eta^2,$$

следовательно,

$$(1.41) \quad \|q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq 2 \|\gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \quad \forall v_h \in V_h,$$

и из неравенства (1.41) получаем оценку

$$(1.42) \quad \|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq 3 \|\gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \quad \forall v_h \in V_h. \blacksquare$$

Кроме того,

$$\gamma_0 v_h(M) - q_h \gamma_0 v_h(M) = v_h(M) - v_h(M_i) \quad \forall M \in M_i M_{i+1/2},$$

и так как  $v_h$  аффинна на отрезке  $\widehat{M_i M_{i+1}}$ , то отсюда имеем, что

$$(1.43) \quad |\gamma_0 v_h(M) - q_h \gamma_0 v_h(M)| = |MM_i| \frac{|v_{i+1} - v_i|}{|M_i M_{i+1}|} \\ \forall M \in \widehat{M_i M_{i+1/2}};$$

аналогичным путем находим, что

$$(1.44) \quad |\gamma_0 v_h(M) - q_h \gamma_0 v_h(M)| = |MM_{i+1}| \frac{|v_{i+1} - v_i|}{|M_i M_{i+1}|} \\ \forall M \in \widehat{M_{i+1/2} M_{i+1}}.$$

Интегрированием равенств (1.43), (1.44) по отрезку  $\widehat{M_i M_{i+1}}$  получаем

$$(1.45) \quad \int_{\widehat{M_i M_{i+1}}} |\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h|^2 d\Gamma = \frac{|M_i M_{i+1}|^3}{12} \frac{|v_{i+1} - v_i|^2}{|M_i M_{i+1}|^2},$$

и так как  $\gamma_0 v_h$  аффинна на отрезке  $\widehat{M_i M_{i+1}}$ , то

$$\left| \frac{d(\gamma_0 v_h)}{d\Gamma} \right| = \frac{|v_{i+1} - v_i|}{|M_i M_{i+1}|} \text{ на } \widehat{M_i M_{i+1}},$$

откуда следует равенство

$$\int_{\widehat{M_i M_{i+1}}} |\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h|^2 d\Gamma = \frac{|M_i M_{i+1}|^2}{12} \int_{\widehat{M_i M_{i+1}}} \left| \frac{d(\gamma_0 v_h)}{d\Gamma} \right|^2 d\Gamma.$$

Суммирование всех таких равенств дает

$$(1.46) \quad \int_{\Gamma} |\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h|^2 d\Gamma = \frac{1}{12} \sum_i |M_i M_{i+1}|^2 \int_{\widehat{M_i M_{i+1}}} \left| \frac{d(\gamma_0 v_h)}{d\Gamma} \right|^2 d\Gamma.$$

Учитывая определение  $h$  (см. (1.17)), из формулы (1.46) находим оценку

$$\|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \frac{h^2}{12} \int_{\Gamma} \left| \frac{d(\gamma_0 v_h)}{d\Gamma} \right|^2 d\Gamma \leq \frac{h^2}{12} \|\gamma_0 v_h\|_{H^1(\Gamma)}^2,$$

или в другом виде

$$(1.47) \quad \|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{h}{2\sqrt{3}} \|\gamma_0 v_h\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Используя свойства интерполяционных пространств между  $L^2(\Gamma)$  и  $H^1(\Gamma)$ <sup>1)</sup>, из оценок (1.42) и (1.47) получаем

$$(1.48) \quad \|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq C h^s \|\gamma_0 v_h\|_{H^s(\Gamma)},$$

где  $C$  — константа, не зависящая от  $h$ ,  $s$ ,  $v_h$ . Оценка (1.48) в совокупности с (1.40) обосновывает неравенство (1.35) и, следовательно, утверждение леммы. ■

#### 1.4.2. Теорема о сходимости

Отметим, что проводимые ниже рассуждения сохраняются и для случая, когда в определении (1.9) константа  $k=0$ .

Имеет место

**Теорема 1.3.** *Если при  $h \rightarrow 0$  величины углов треугольников триангуляции  $\mathcal{T}_h$  ограничены снизу константой  $\theta_0 > 0$ , то*

$$(1.49) \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \text{ сильно в } H^1(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи (1.4), (1.5),  $u_h$  — решение задачи (1.27).

**Доказательство.** Оно представляет собой вариант доказательства теоремы 4.2 разд. 4.4 гл. 1. Имеем

$$(1.50) \quad a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$(1.51) \quad a(u, u_h - u) + j(u_h) - j(u) \geq \int_{\Omega} f(u_h - u) dx.$$

Складывая неравенства (1.50) и (1.51), находим, что  $\forall v_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) + j_h(u_h) - j(u_h) &\leq \int_{\Omega} f(u - v_h) dx + \\ &+ j_h(v_h) - j(u) + a(u_h, v_h - u); \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> См. книгу Лионса и Мадженеса [1], разд. 5 гл. 1.—Прим. перев.

в силу леммы 1.1  $j_h(u_h) - j(u_h) \geq 0$ , откуда следует, что

$$(1.52) \quad a(u_h - u, u_h - u) \leq \int_{\Omega} f(u - v_h) dx + j_h(v_h) - j(u) + a(u_h, v_h - u) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Пусть  $v \in V$ ; обозначим через  $r_h v$  проекцию  $v$  на подпространство  $V_h$  (проекция определяется по отношению к норме

$$v \rightarrow \sqrt{a(v, v)},$$

эквивалентной обычной норме на  $H^1(\Omega)$ ); таким образом, имеем

$$(1.53) \quad \begin{aligned} a(r_h v, v_h) &= a(v, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ r_h v &\in V_h. \end{aligned}$$

Известно (см., например, книгу Фикса и Стренга [1] или работу Сиарле и Равьяра [1]), что при выполнении указанных выше ограничений на триангуляцию  $\mathcal{T}_h$

$$(1.54) \quad \lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v \text{ сильно в } V;$$

положив в неравенстве (1.50)  $v_h = r_h u$ , из оценок (1.53), (1.54) найдем, что

$$(1.55) \quad a(u_h, r_h u - u) = 0,$$

$$(1.56) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(u - r_h u) dx = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |j_h(r_h u) - j(u)| &\leq |j_h(r_h u) - j(r_h u)| + |j(r_h u) - j(u)| \leq \\ &\leq |j_h(r_h u) - j(r_h u)| + Cg \|r_h u - u\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

и, принимая во внимание лемму 1.2, получаем

$$(1.57) \quad |j_h(r_h u) - j(u)| \leq Cg (\sqrt{h} \|r_h u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|r_h u - u\|_{L^2(\Gamma)}).$$

Из предельного равенства (1.54) следует, что

$$(1.58) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \gamma_0 r_h v &= \gamma_0 v \text{ сильно в } H^s(\Gamma) \\ \forall s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

из неравенства (1.57) и полученного условия (1.58) вытекает, что

$$(1.59) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (j_h(r_h u) - j(u)) = 0.$$

Принимая во внимание оценку (1.52) с  $v_h = r_h u$ , из полученных выше результатов (1.55), (1.56), (1.59) находим, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(u_h - u, u_h - u) = 0,$$

откуда и следует утверждение о сильной сходимости. ■

**Замечание 1.4.** Теорема 1.3 имеет место и для случая, если член  $\int_{\Omega} fv dx$  в функционале  $J$  заменить на  $L(v)$ , где  $L$  — элемент пространства  $V'$ , двойственного к  $V$ ; это замечание важно для некоторых приложений. ■

**Замечание 1.5.** Если предположить, что  $f \in L^2(\Omega)$ , то для решения  $u$  задачи (1.4), (1.5) имеем следующее свойство регулярности:

$$(1.60) \quad u \in V \cap H^{1+\alpha}(\Omega),$$

где  $\alpha$  — некоторая константа из интервала  $[0, 1]$ . Учитывая регулярность (1.60) решения  $u$ , можно надеяться на получение оценок погрешности аппроксимации через параметр  $h$ ; этот вопрос будет рассмотрен в разд. 1.4.3. ■

#### 1.4.3. Оценки погрешности аппроксимации через параметр $h$

В этом разделе будут приведены оценки погрешности аппроксимации, не зависящие от параметра  $k$  в определении (1.9); эти оценки сохраняются и для случая  $k=0$ , когда  $j(v) = g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma$ .

Оценки, в которые входит параметр  $k$ , не рассматриваются по той причине, что их получение основано на методах, характерных для уравнений, а не для неравенств. Результаты настоящего раздела ни в коей мере не претендуют на оптимальность. При первом ознакомлении с материалом можно сразу перейти к формулировке теоремы 1.4, где сгруппированы все результаты, установленные в этом разделе. ■

В процессе доказательства теоремы 1.3 было показано, что функции  $u$  и  $u_h$  — решения задач соответственно (1.4), (1.5) и (1.27) — удовлетворяют условию

$$(1.61) \quad a(u_h - u, u_h - u) \leq a(u_h, v_h - u) + j_h(v_h) - j(u) + \\ + \int_{\Omega} f(u - v_h) dx \quad \forall v_h \in V_h.$$

Определим оператор интерполяции<sup>1)</sup>  $\pi_h: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ :

$$(1.62) \quad \begin{aligned} \pi_h v &\in V_h, \\ \pi_h v(P) &= v(P) \quad \forall P \in \Sigma_h; \end{aligned}$$

пусть  $v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap V$ ; учитывая, что по предположению  $\Gamma_d$  представляет собой объединение сторон треугольников из  $\mathcal{T}_h$ , видим, что в действительности  $\pi_h v \in V_h$  независимо от того, определено ли пространство  $V_h$  по формуле (1.20) или же по формуле (1.21).

В неравенстве (1.61) положим сейчас  $v_h = \pi_h u$ , что законно, поскольку (см. замечание (1.5))  $u \in V \cap H^{1+\alpha}(\Omega)$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) и, кроме того, по теореме вложения Соболева (для  $\alpha > 0$ )  $H^{1+\alpha}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ , так как  $\Omega$ —двумерная открытая область с границей, удовлетворяющей условию Липшица (см., например, книгу Нечаса [1]). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) &\leq a(u_h, \pi_h u - u) + j_h(\pi_h u) - j(u) + \\ &\quad + \int_{\Omega} f(u - \pi_h u) dx, \end{aligned}$$

или в другой форме

$$(1.63) \quad \begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) &\leq a(u_h - u, \pi_h u - u) + a(u, \pi_h u - u) + \\ &\quad + j_h(\pi_h u) - j(u) + \int_{\Omega} f(u - \pi_h u) dx. \end{aligned}$$

Так как форма  $a$  симметрична, то из неравенства (1.63) следует, что

$$(1.64) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} a(u_h - u, u_h - u) &\leq \frac{1}{2} a(\pi_h u - u, \pi_h u - u) + \\ &\quad + a(u, \pi_h u - u) + j_h(\pi_h u) - j(\pi_h u) + j(\pi_h u) - j(u) + \\ &\quad + \int_{\Omega} f(u - \pi_h u) dx. \end{aligned}$$

Оценим слагаемое  $a(u, \pi_h u - u)$ , замечая, что  $u$  в силу (1.1)–(1.3)' представляет собой решение уравнения

$$(1.65) \quad \begin{aligned} a(u, v) + \int_{\Gamma_d} \Phi(u) v d\Gamma &= \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in V \\ u \in V; \end{aligned}$$

полагая в (1.65)  $v = \pi_h u - u$ , с использованием неравенства (1.64)

<sup>1)</sup> Пространство  $\mathcal{V}_h$  было определено по формуле (1.19).

находим

$$(1.66) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} a(u_h - u, u_h - u) &\leq \frac{1}{2} a(\pi_h u - u, \pi_h u - u) + j_h(\pi_h u) - \\ &- j(\pi_h u) + j(\pi_h u) - j(u) - \int_{\Gamma_d} \varphi(u)(\pi u - u) d\Gamma. \end{aligned}$$

Имеем

$$(1.67) \quad a(\pi_h u - u, \pi_h u - u) \leq \max(1, \mu) \| \pi_h u - u \|_{H^1(\Omega)}^2,$$

далее, в силу леммы 1.2,

$$(1.68) \quad |j_h(\pi_h u) - j(\pi_h u)| \leq C_0 g h^s \| \gamma_0 \pi_h u \|_{H^s(\Gamma)}, \text{ если } s \in [0, 1],$$

и, наконец, из определения (1.9) и неравенств (1.12), (1.13) получаем

$$(1.69) \quad \begin{aligned} &\left| j(\pi_h u) - j(u) - \int_{\Gamma_d} \varphi(u)(\pi_h u - u) d\Gamma \right| \leq \\ &\leq Cg \| \gamma_0 (\pi_h u - u) \|_{L^2(\Gamma)}, \quad C \text{ — константа, не зависящая от} \\ &g, k, h, u. \blacksquare \end{aligned}$$

Таким образом, для оценки слагаемого  $a(u_h - u, u_h - u)$  необходимо, используя отмеченное выше в замечании 1.5 свойство регулярности  $u \in V \cap H^{1+\alpha}(\Omega)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , оценить

$$\| \pi_h u - u \|_{H^1(\Omega)}, \quad h^s \| \gamma_0 \pi_h u \|_{H^s(\Gamma)}, \quad \| \gamma_0 \pi_h u - \gamma_0 u \|_{L^2(\Gamma)};$$

ниже мы будем различать два случая (i) и (ii).

(i) Случай  $V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_d - \Gamma} = 0\}$ .

Функция  $u$  представляет собой решение следующей смешанной (нелинейной) задачи:

$$(1.70) \quad \begin{aligned} -\Delta u + \mu u &= f \quad \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u) &= 0 \quad \text{на } \Gamma_d, \\ u &= 0 \quad \text{на } \Gamma - \Gamma_d; \end{aligned}$$

из уравнений и условий (1.70), неравенства  $|\varphi(u)| \leq g$  на  $\Gamma_d$  и известных результатов о регулярности решений смешанных задач (см. работу Мадженеса и Стампаккья [1]) вытекает, что

$$(1.71) \quad \begin{aligned} u &\in H^{3/2-\varepsilon}(\Omega), \text{ откуда следует } \gamma_0 u \in H^{1-\varepsilon}(\Gamma), \\ \varepsilon > 0 \text{ и сколь угодно мало,} \end{aligned}$$

причем

$$(1.72) \quad \begin{aligned} \| u \|_{H^{3/2-\varepsilon}} \\ \| \gamma_0 u \|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \leq C(\varepsilon) (\| f \|_{L^2(\Omega)} + g), \quad C(\varepsilon) \text{ не зависит от } f \text{ и } g. \end{aligned}$$

Для оценки правых частей неравенства (1.67)–(1.69) применим, как и ранее, интерполяцию в пространствах Соболева.

### Оценка нормы $\|\pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)}$

Будем использовать результаты работ Фикса и Стренга [1], Снэрле и Равьяра [1] и др. Известно, что при ограничениях на  $\mathcal{T}_h$ , сформулированных в теореме 1.3, имеет место оценка

$$(1.73) \quad \|\pi_h v - v\|_{H^1(\Omega)} \leq C h \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

константа  $C$  не зависит от  $h$  и  $v$ .

Аналогичным образом, если  $\eta > 0$ , то  $H^{1+\eta}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$  и мы имеем

$$(1.74) \quad \|\pi_h v - v\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\eta) \|v\|_{H^{1+\eta}(\Omega)}, \quad \forall v \in H^{1+\eta}(\Omega),$$

константа  $C(\eta)$  не зависит от  $h$  и  $v$ .

Пользуясь свойствами интерполяционных пространств между  $H^{1+\eta}(\Omega)$  и  $H^2(\Omega)$ , из (1.71), (1.73), (1.74) находим

$$(1.75) \quad \|\pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\eta) h^{\theta_1} \|u\|_{H^{3/2-\epsilon}(\Omega)}$$

при  $\theta_1 = \frac{1}{2} \frac{1-2(\epsilon+\eta)}{1-\eta}$ ,

где  $C(\eta)$  — константа, не совпадающая с константой  $C(\eta)$  в неравенстве (1.74); из оценок (1.72), (1.75) получаем

$$(1.76) \quad \|\pi_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\epsilon, \eta) h^{\theta_1} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g). \blacksquare$$

### Оценка $\|\gamma_0(\pi_h u - u)\|_{L^2(\Gamma)}$

Так как граница  $\Gamma$  одномерна и удовлетворяет условию Липшица, то

$$H^{1/2+\eta}(\Gamma) \subset C^0(\Gamma),$$

если только  $\eta > 0$ . Пусть  $v \in C^0(\bar{\Omega})$ ; след линейной интерполяции  $\pi_h v$  совпадает с интерполяцией следа  $\gamma_0 v$ ; кроме того, имеет место оценка

$$(1.77) \quad \|\gamma_0(\pi_h v - v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C h \|\gamma_0 v\|_{H^1(\Gamma)} \leq C h \|v\|_{H^{3/2}(\Omega)}$$

$\forall v \in H^{3/2}(\Omega)$ .

Аналогичным образом можно показать, что при выполнении условия  $\eta > 0$  имеем неравенство

$$(1.78) \quad \|\gamma_0(\pi_h v - v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\eta) \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2+\eta}(\Gamma)} \leq C(\eta) \|v\|_{H^{1+\eta}(\Omega)}$$

$\forall v \in H^{1+\eta}(\Omega)$ .

Пользуясь свойствами интерполяционных пространств между  $H^{1+\eta}(\Omega)$  и  $H^{3/2}(\Omega)$ , из (1.71), (1.77), (1.78) находим, что

$$(1.79) \quad \|\gamma_0(\pi_h u - u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\eta) h^{\theta_2} \|\gamma_0 u\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)},$$

$$\text{где } \theta_2 = \frac{1-2(\varepsilon+\eta)}{1-2\eta}.$$

Учитывая оценки (1.72), перепишем (1.79) в виде

$$(1.80) \quad \|\gamma_0(\pi_h u - u)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C(\varepsilon, \eta) h^{\theta_2} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g).$$

Ниже для упрощения будем предполагать, что числа  $\eta$  в оценках (1.75) и (1.79) совпадают. ■

### Оценка $h^s \|\gamma_0 \pi_h u\|_{H^s(\Gamma)}$

Учитывая условие (1.71), выберем  $s = 1 - \varepsilon$ ; кроме того, поскольку след интерполяции  $\pi_h v$  равен интерполяции следа, то можно доказать, что

$$\|\gamma_0 \pi_h v\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \leq C \|\gamma_0 v\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)},$$

откуда с учетом (1.72) следует оценка

$$(1.81) \quad \|\gamma_0 \pi_h u\|_{H^{1-\varepsilon}(\Gamma)} \leq C(\varepsilon) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g). ■$$

### Оценка $\|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}$

Собирая оценки (1.66)–(1.69), (1.76), (1.80), (1.81), получаем неравенство

$$(1.82) \quad \begin{aligned} \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C(\varepsilon) g (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) h^{1-\varepsilon} + \\ &+ C(\varepsilon, \eta) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g)^2 h^{\frac{1-2(\varepsilon+\eta)}{1-\eta}} \times \\ &\times \left( 1 + \frac{g}{\|f\|_{L^2(\Omega)} + g} h^{\frac{1-2(\varepsilon+\eta)}{(1-\eta)(1-2\eta)}} \right), \end{aligned}$$

в котором  $C(\varepsilon)$  и  $C(\varepsilon, \eta)$ —константы, не зависящие от  $h, k, g, f$ ;  $\varepsilon$  и  $\eta$ —произвольные, сколь угодно малые положительные числа. ■

(ii) Случай  $V = H^1(\Omega)$ .

Функция  $u$  представляет собой решение задачи

$$(1.83) \quad \begin{aligned} -\Delta u + \mu u &= f \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi(u) &= 0 \text{ на } \Gamma_d, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d. \end{aligned}$$

Если  $\Gamma = \Gamma_d$ , то, как установлено в гл. I работы Брезиса [2],  
(1.84)  $u \in H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малая положительная константа, и если  $\Omega$  — выпуклая область, то в условии (1.84) можно положить  $\varepsilon = 0$ ; кроме того,

$$(1.85) \quad \|u\|_{H^{2-\varepsilon}(\Omega)} \leq C(\varepsilon) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

где  $C(\varepsilon)$  — константа, не зависящая от  $k$ ,  $g$ ,  $f$ <sup>1</sup>). ■

Если  $\Gamma_d \neq \Gamma$ , то  $\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)} \leq Cg$ , откуда с учетом (1.83) имеем

$$(1.86) \quad u \in H^{3/2}(\Omega),$$

где

$$(1.87) \quad \|u\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + g);$$

из условия (1.86) получаем, что  $\gamma_0 u \in H^1(\Gamma)$ , и так как функция  $\varphi$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $1/k$ , то отсюда вытекает (см., например, гл. I работы Брезиса [2]), что  $\varphi(\gamma_0 u) \in H^1(\Gamma_d)$  и, следовательно,

$$(1.88) \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_d} \in H^1(\Gamma_d).$$

Так как любая функция  $u \in H^1(\Gamma_d)$ , продолженная нулем на  $\Gamma - \Gamma_d$ , принадлежит пространству  $H^{1/2-\varepsilon}(\Gamma)$ , где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число, то из (1.83) и (1.88) следует, что  $u \in H^{2-\varepsilon}(\Omega)$ . Было бы интересно исследовать вопрос о том, сохраняется ли это свойство регулярности в предельном случае, когда  $k=0$  (когда  $j(v) = g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma$ ), но пока на этот вопрос ответа, по-видимому, нет. ■

Имея в виду условия (1.84) — (1.87) можно утверждать, что, если  $V = H^1(\Omega)$ , то существует число  $\alpha$ , такое, что

$$(1.89) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1, \\ u \in H^{1+\alpha}(\Omega), \end{aligned}$$

где

$$(1.90) \quad \|u\|_{H^{1+\alpha}(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + g),$$

$C$  — константа, не зависящая от  $k$ ,  $g$ ,  $f$ .

<sup>1)</sup> Оценка (1.65), не зависящая от  $k$ , имеет место и в случае  $k=0$ , когда  $i(v) = g \int_D |v| d\Gamma$  (см. ниже разд. 2).

Учитывая (1.89), (1.90) и действуя таким же образом, как и в п. (i), можно доказать, что

$$(1.91) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Cg (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) h + Cg (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) \times \\ \times h^{1/2+\alpha} + C(\eta) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g)^2 h^{2(\alpha-\eta)/(1-\eta)},$$

где  $C$  и  $C(\eta)$  не зависят от  $h, k, g, f; \eta > 0$  и сколь угодно мало ( $\eta = 0$ , если  $\alpha = 1$ ). ■

Резюмируя полученные результаты, имеем теорему

**Теорема 1.4.** Пусть  $u$  — решение задачи (1.4.), (1.5),  $u_h$  — решение соответствующей приближенной задачи (1.27); если при  $h \rightarrow 0$  углы треугольников из  $\mathcal{T}_h$  остаются ограниченными снизу некоторой константой  $\theta_0 > 0$ , то для погрешности аппроксимации  $\|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}$  имеем следующие оценки:

(i) Если  $V = \{v | v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma - \Gamma_d} = 0\}$ , то

$$(1.92) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\varepsilon) g (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) h^{1-\varepsilon} + \\ + C(\varepsilon, \eta) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g)^2 h^{\frac{1-2(\varepsilon+\eta)}{1-\eta}} \times \\ \times \left( 1 + \frac{g}{\|f\|_{L^2(\Omega)} + g} h^{\frac{1-2(\varepsilon-\eta)}{(1-\eta)(1-2\eta)}} \right),$$

причем в (1.92) константы  $C(\varepsilon)$  и  $C(\varepsilon, \eta)$  не зависят от  $h, k, g, f; \varepsilon$  и  $\eta$  — сколь угодно малые положительные числа. ■

(ii) Если  $V = H^1(\Omega)$ , то существует  $\alpha, \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ , такое, что  $u \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ , и имеет место оценка

$$(1.93) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Cg (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) h + Cg (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) \times \\ \times h^{1/2+\alpha} + C(\eta) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g)^2 h^{2(\alpha-\eta)/(1-\eta)},$$

причем в (1.93)  $C$  и  $C(\eta)$  не зависят от  $h, k, g$ ; число  $\eta > 0$  и сколь угодно мало ( $\eta = 0$ , если  $\alpha = 1$ ). ■

**Замечание 1.6.** Если в случае  $V = \{v | v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma - \Gamma_d} = 0\}$  решение  $u \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ , где  $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$  (что в общем случае неверно), то оценку погрешности (1.92) можно заменить оценкой (1.93). ■

**Замечание 1.7.** Если бы в качестве приближенной задачи вместо (1.27) была выбрана задача

$$(1.94) \quad a(u_h, v_h - u_h) + j(v_h) - j(u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h$$

(неудобная с точки зрения численной реализации), то вместо оценок (1.92), (1.93) получились бы оценки

$$(1.95) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(\varepsilon, \eta) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g)^2 h^{\frac{1-2(\varepsilon+\eta)}{1-\eta}} \times \\ \times \left( 1 + \frac{gh^{\frac{1-2(\varepsilon+\eta)}{(1-\eta)(1-2\eta)}}}{\|f\|_{L^2(\Omega)} + g} \right),$$

$$(1.96) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq Cg (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) h^{1/2+\alpha} + \\ + C(\eta) (\|f\|_{L^2(\Omega)} + g) h^{2(\alpha-\eta)/(1-\eta)}.$$

Сравнивая оценки (1.92), (1.93), (1.95), (1.96), видим, что дополнительная ошибка, возникающая при замене  $j$  на  $j_h$ , „практически“ имеет порядок  $O(\sqrt{h})$ ; таким образом, если регулярность решения не лучше, чем  $u \in H^{3/2}(\Omega)$ , то отсюда следует, что ошибка, о которой выше шла речь, имеет тот же порядок, что и соответствующая ошибка аппроксимации точной задачи приближенной задачей (1.94). Однако в случае, когда  $u \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ , где  $\alpha > \frac{1}{2}$ , из сравнения оценок (1.93) и (1.96) можем заключить, что, по-видимому, главная часть ошибки аппроксимации  $\|u_h - u\|_{H^1(\Omega)}$  по порядку величины равна ошибке, возникающей за счет замены  $j$  на  $j_h$ . ■

## 1.5. Сходимость последовательности приближенных решений (II). Случай $q=2$

На протяжении всего этого раздела буквой  $C$  мы будем обозначать различные константы.

### 1.5.1. Лемма

Для исследования сходимости при  $h \rightarrow 0$  будем использовать следующий вариант леммы 1.2:

**Лемма 1.3.** Пусть  $s \in [0, 1]$ ; имеет место оценка

$$(1.97) \quad |j_h(v_h) - j(v_h)| \leq Cgh^s \|\gamma_0 v_h\|_{H^s(\Gamma)},$$

причем в (1.97)  $C$  не зависит от  $k, g, h, s, v_h$ .

**Доказательство.** Пусть  $v_h \in V_h$ ; используем обозначения, показанные на рис. 1.6, причем  $|M_{i-1/2} M_{i-5/6}| = |M_{i-1/2} M_{i-1/6}| = \frac{1}{3} |M_{i-1} M_i|$ ; определим

$$(1.98) \quad q_h \gamma_0 v_h = \sum_{M_i \in \Gamma \cap \Sigma_h} v_h(M_i) \bar{w}_i + \sum_{M_{i-1/2} \in \Gamma \cap \Sigma_h} v_h(M_{i-1/2}) \bar{w}_{i-1/2},$$

$\Phi_t$  — характеристическая функция множества  $M_{t-1/6}M_tM_{t+1/6}$ ,

$\Phi_{t-1/2}$  — характеристическая функция множества

$$M_{t-5/6}M_{t-1/2}M_{t-1/6}.$$

Пусть функция  $\psi_h(v_h)$  определена по формуле (1.22), тогда

$$(1.99) \quad \int_{\Gamma_d} \psi_h(v_h) d\Gamma = \int_{\Gamma_d} \psi(q_h \gamma_0 v_h) d\Gamma,$$

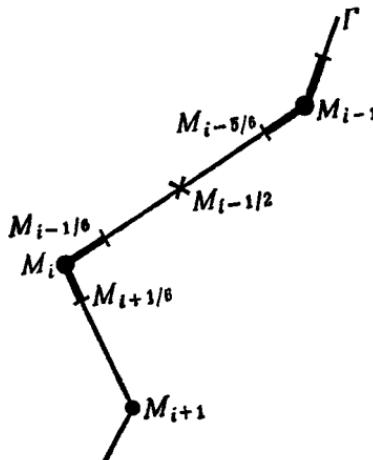


Рис. 1.6.

откуда следует, что

$$(1.100) \quad j_h(v_h) = \int_{\Gamma_d} \psi(q_h \gamma_0 v_h) d\Gamma.$$

Из неравенства (1.11) и формулы (1.100) имеем

$$(1.101) \quad \begin{aligned} |j_h(v_h) - j(v_h)| &\leq g \int_{\Gamma_d} |v_h g_h \gamma_0 v_h| d\Gamma \leq \\ &\leq g \left( \int_{\Gamma_d} d\Gamma \right)^{1/2} \| \gamma_0 v_h - g_h \gamma_0 v_h \|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

где

$$(1.102) \quad \| \gamma_0 v_h \|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{15} \sum_i |M_t M_{t+1}| (2(v_i^2 + v_{i+1}^2) + 8v_{i+1/2}^2 - v_i v_{i+1} + 2v_{i+1/2}(v_i + v_{i+1}))$$

и

$$(1.103) \quad \| q_h \gamma_0 v_h \|_{L^2(\Gamma)}^2 = \frac{1}{6} \sum_i |M_t M_{t+1}| (v_i^2 + 4v_{i+1/2}^2 + v_{i+1}^2)$$

так как

$$(1.104) \quad \xi^2 + 4\xi^2 + \eta^2 \leq 2(\xi^2 + \eta^2) + 8\xi^2 - \xi\eta + 2\xi(\xi + \eta),$$

то из (1.102), ..., (1.104) следует, что

$$(1.105) \quad \|q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq 3 \|\gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)},$$

откуда

$$(1.106) \quad \|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq 4 \|\gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \quad \forall v_h \in V_h. \blacksquare$$

Прежде чем переходить к оценке  $\|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)}$ , в которую входит  $\|\gamma_0 v_h\|_{H^1(\Gamma)}$ , заметим, что если  $\Phi \in P_2$ , то

$$(1.107) \quad \Phi(\xi) - \Phi(\alpha) = (\xi - \alpha) \Phi' \left( \frac{\alpha + \xi}{2} \right),$$

откуда

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\Phi(\xi) - \Phi(\alpha)|^2 d\xi = \int_{\alpha}^{\beta} |\xi - \alpha|^2 |\Phi' \left( \frac{\alpha + \xi}{2} \right)|^2 d\xi,$$

или в другом виде (если обозначить  $\tau = (\alpha + \xi)/2$ )

$$(1.108) \quad \begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |\Phi(\xi) - \Phi(\alpha)|^2 d\xi &= 8 \int_{\alpha}^{(\alpha+\beta)/2} |\tau - \alpha|^2 |\Phi'(\tau)|^2 d\tau \leq \\ &\leq 2(\beta - \alpha)^2 \int_{\alpha}^{\beta} |\Phi'(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Имеем

$$(1.109) \quad \gamma_0 v_h(M) - q_h \gamma_0 v_h(M) = v_h(M) - v_h(M_i)$$

$$\forall M \in \widehat{M_i M_{i+1/6}},$$

$$(1.110) \quad \gamma_0 v_h(M) - q_h \gamma_0 v_h(M) = v_h(M) - v_h(M_{i+1/2})$$

$$\forall M \in \widehat{M_{i+1/6} M_{i+1/2} M_{i+5/6}},$$

$$(1.111) \quad \gamma_0 v_h(M) - q_h \gamma_0 v_h(M) = v_h(M) - v_h(M_{i+1})$$

$$\forall M \in \widehat{M_{i+5/6} M_{i+1}},$$

откуда с учетом (1.108) получаем, что

$$(1.112) \quad \int_{\widehat{M_i M_{i+1}}} |\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h|^2 d\Gamma \leq \frac{2}{9} |M_i M_{i+1}|^2 \int_{\widehat{M_i M_{i+1}}} \left| \frac{d\gamma_0 v_h}{d\Gamma} \right|^2 d\Gamma.$$

Суммируя оценки (1.112) и вспоминая определение  $h$ , находим

$$(1.113) \quad \|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq (\sqrt{2}/3) h \|\gamma_0 v_h\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Пользуясь свойствами интерполяционных пространств между  $L^2(\Gamma)$  и  $H^1(\Gamma)$ , из (1.106), (1.113) получаем оценку

$$(1.114) \quad \|\gamma_0 v_h - q_h \gamma_0 v_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq C h^s \|\gamma_0 v_h\|_{H^s(\Gamma)},$$

в которой  $C$  не зависит от  $h$ ,  $s$ ,  $v_h$ . Неравенство (1.114) в совокупности с (1.101) доказывает оценку (1.97), а вместе с ней и лемму. ■

### 1.5.2. Теорема о сходимости

Полученные ниже результаты сохраняются и для случая, когда в определении (1.9)  $k=0$ . Имеет место

**Теорема 1.5.** *Если при  $h \rightarrow 0$  углы треугольников из  $\mathcal{T}_h$  остаются ограниченными снизу константой  $\theta_0 > 0$ , то*

$$(1.115) \quad \lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \text{ сильно в } H^1(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи (1.4), (1.5),  $u_h$  — решение задачи (1.27).

**Доказательство.** Доказательство представляет собой вариант доказательства теоремы (1.3); таким образом, имеем  $\forall v_h \in V_h$

$$(1.116) \quad a(u_h - u, u_h - u) \leq a(u_h, v_h - u) - \int_{\Omega} f(v_h - u) dx + \\ + j_h(v_h) - j(u) + j(u_h) - j_h(u_h).$$

Пусть  $v \in V$ , обозначим через  $r_h v$  проекцию  $v$  на  $V_h$ , соответствующую норме  $v \rightarrow \sqrt{a(v, v)}$  (эквивалентной обычной норме на  $H^1(\Omega)$ ); таким образом,

$$(1.117) \quad \begin{aligned} a(r_h v, v_h) &= a(v, v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ r_h v &\in V_h. \end{aligned}$$

При выполнении сформулированных выше предположений относительно  $\mathcal{T}_h$  имеем

$$(1.118) \quad \lim_{h \rightarrow 0} r_h v = v \text{ сильно в } V;$$

полагая в (1.116)  $v_h = r_h u$ , из (1.117) и (1.118) находим

$$(1.119) \quad a(u_h, r_h u - u) = 0,$$

$$(1.120) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(r_h u - u) dx = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |j_h(r_h u) - j(u)| &\leq |j_h(r_h u) - j(r_h u)| + |j(r_h u) - j(u)| \leq \\ &\leq |j_h(r_h u) - j(r_h u)| + Cg \|r_h u - u\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

и с учетом леммы 1.3 получаем

$$(1.121) \quad |j_h(r_h u) - j(u)| \leq Cg (\sqrt{h} \|r_h u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|r_h u - u\|_{L^2(\Gamma)}).$$

Из предельного равенства (1.118) вытекает, что

$$(1.122) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \gamma_0 r_h v = \gamma_0 v \text{ сильно в } H^s(\Gamma),$$

$$\forall s \in [0, 1/2]$$

и из (1.121), (1.122) следует

$$(1.123) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (j_h(r_h u) - j(u)) = 0.$$

Таким образом, остается доказать, что

$$(1.124) \quad \lim_{h \rightarrow 0} (j_h(u_h) - j(u_h)) = 0;$$

полагая в (1.28)  $v_h = 0$ , получим

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

откуда следует, что

$$(1.125) \quad \|\gamma_0 u_h\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Используя лемму 1.3 со значением  $s = \frac{1}{2}$  в неравенстве (1.97), из (1.125) находим

$$|j_h(u_h) - j(u_h)| \leq C g \sqrt{h} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

откуда и следует оценка (1.124), а из неравенства (1.116), в котором следует положить  $v_h = r_h u$ , а также условий (1.118) — (1.120), (1.123), (1.124) вытекает

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(u_h - u, u_h - u) = 0,$$

что и доказывает теорему. ■

*Замечание 1.7.* Теорема 1.5 сохраняется и для случая, когда в функционале  $J$ , заданном по формуле (1.5), слагаемое  $\int_{\Omega} f v \, dx$  заменяется на  $L(v)$ , где  $L$  — элемент пространства  $V'$ , сопряженного к  $V$ . ■

## 1.6. Численное решение приближенных задач

### План изложения

В этом разделе мы будем изучать численное решение приближенных задач разд. 1.3.3

$$(1.126) \quad \min_{v_h \in V_h} [J_0(v_h) + j_h(v_h)],$$

$$J_0(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h|^2 \, dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |v_h|^2 \, dx - \int_{\Omega} f v_h \, dx$$

некоторыми из методов оптимизации гл. 2. Прежде чем приступить к численному решению, необходимо получить развернутые выражения функционалов  $J_0(v_h)$ ,  $j_h(v_h)$  через значения  $v_h$  в точках множества  $\Sigma_h$  для  $q=1$ , в точках  $\Sigma_h \cup \Sigma'_h$  для  $q=2$ ; это будет сделано в разд. 1.6.1 и 1.6.2.

### 1.6.1. Формулировка приближенной задачи (I), $q=1$

Явное выражение для функционала  $j_h$  через значения функции  $v_h$  в точках множества  $\Sigma_h \cap \Gamma$  дается формулой (1.24):

$$(1.127) \quad j_h(v_h) = \frac{1}{2} \sum |M_i M_{i+1}| (\psi(v_i) + \psi(v_{i+1})).$$

Для построения явных выражений для линейной формы  $\int f v_h dx$  удобно ввести базисные функции в пространстве  $\mathcal{V}_h$ .

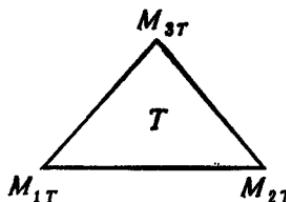


Рис. 1.7.

(определяем по формуле (1.19)), аналогичные функциям примера 4.2 разд. 4.1 гл. 2, т. е.

$$(1.128) \quad \begin{aligned} & (w_i)_{M_i \in \Sigma_h}, \\ & w_i \in \mathcal{V}_h, \quad w_i(M_j) = \delta_{ij} \quad \forall M_j \in \Sigma_h; \end{aligned}$$

обозначая через  $\Omega_i$  носитель функции  $w_i$ , найдем, что

$$(1.129) \quad \int_{\Omega} f v_h dx = \sum_{M_i \in \Sigma_h} v_i \int_{\Omega_i} f w_i dx.$$

Используя обозначения, показанные на рис. 1.7, и обозначая через  $A(T)$  площадь треугольника  $T$ , имеем формулу

$$\int |v_h|^2 dx = \frac{A(T)}{12} [(v_{1T} + v_{3T})^2 + (v_{2T} + v_{3T})^2 + (v_{3T} + v_{1T})^2],$$

из которой следует, что

$$(1.130) \quad \int |v_h|^2 dx = \frac{1}{12} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) [(v_{1T} + v_{3T})^2 + (v_{2T} + v_{3T})^2 + (v_{3T} + v_{1T})^2]$$

И, наконец, используя соотношения (4.17)–(4.19) разд. 4.1.4 гл. 3, устанавливаем, что

$$\int \|\operatorname{grad} v_h\|^2 dx = \frac{1}{4A(T)} |v_{1T}\overrightarrow{M_{2T}M_{3T}} + v_{2T}\overrightarrow{M_{3T}M_{1T}} + v_{3T}\overrightarrow{M_{1T}M_{2T}}|^2,$$

откуда вытекает выражение

$$(1.131) \quad \int \|\operatorname{grad} v_h\|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{A(T)} |v_{1T}\overrightarrow{M_{2T}M_{3T}} + v_{2T}\overrightarrow{M_{3T}M_{1T}} + v_{3T}\overrightarrow{M_{1T}M_{2T}}|^2.$$

Формулы (1.127), (1.129)–(1.131) позволяют сформулировать приближенную задачу (1.126) в явном виде как задачу оптимизации в пространстве конечного числа измерений. ■

### 1.6.2. Формулировка приближенной задачи (II), $q = 2$

Явное выражение для функционала  $j_h$  через значения функции  $v_h$  в точках множества  $(\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma$  дается формулой (1.25):

$$(1.132) \quad j_h(v_h) = \frac{1}{6} \sum |M_i M_{i+1}| (\psi(v_i) + 4\psi(v_{i+1/2}) + \psi(v_{i+1})).$$

Для построения явных выражений для линейной формы  $\int f v_h dx$  вводим, как и в разд. 1.6.1, базисные функции в про-

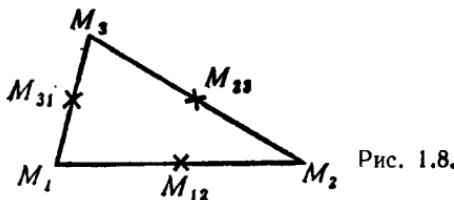


Рис. 1.8.

странстве  $\mathcal{V}_h$ , определяемом по формуле (1.19):

$$(1.133) \quad \begin{aligned} &(\omega_t)_{M_i \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h)} \\ &\omega_t \in \mathcal{V}_h, \quad \omega_t(M_j) = \delta_{ij} \quad \forall M_j \in \Sigma_h \cup \Sigma'_h; \end{aligned}$$

обозначая через  $\Omega_t$  носитель функции  $\omega_t$ , найдем, что

$$(1.134) \quad \int f v_h dx = \sum_{M_i \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h)} v_i \int_{\Omega_i} f \omega_t dx.$$

Используя обозначения, показанные на рис. 1.8, и обозначая через  $A(T)$  площадь треугольника  $T$ , имеем формулу

$$\int_T |v_h|^2 dx = \frac{A(T)}{3} \left( \frac{1}{10} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \frac{8}{15} (v_{12}^2 + v_{23}^2 + v_{31}^2) - \right. \\ (1.135) \quad \left. - \frac{1}{30} (v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_3 v_1) + \frac{8}{15} (v_{12} v_{23} + v_{23} v_{31} + v_{31} v_{12}) - \right. \\ \left. - \frac{2}{15} (v_1 v_{23} + v_2 v_{31} + v_3 v_{12}) \right),$$

которая позволяет построить явное выражение для  $\int_{\Omega} |v_h|^2 dx$ , поскольку

$$\int_{\Omega} |v_h|^2 dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |v_h|^2 dx.$$

Кроме того, устанавливаем, что

$$\int_T |\operatorname{grad} v_h|^2 dx = \frac{1}{12 A(T)} \{ |v_1 \overrightarrow{M_2 M_3} - v_2 \overrightarrow{M_3 M_1} + \\ + v_3 \overrightarrow{M_1 M_2}|^2 + 2(v_{12} + v_{23} - v_{31}) \overrightarrow{M_3 M_1} |^2 + \\ + |v_1 \overrightarrow{M_2 M_3} + v_2 \overrightarrow{M_3 M_1} - v_3 \overrightarrow{M_1 M_2}|^2 + \\ + 2(v_{23} + v_{31} - v_{12}) \overrightarrow{M_1 M_2} |^2 + \\ + |-v_1 \overrightarrow{M_2 M_3} + v_2 \overrightarrow{M_3 M_1} + v_3 \overrightarrow{M_1 M_2}|^2 + \\ + 2(v_{31} + v_{12} - v_{23}) \overrightarrow{M_2 M_3} |^2 \}, \quad (1.136)$$

что позволяет получить явное выражение для  $\int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h|^2 dx$ , поскольку

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h|^2 dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\operatorname{grad} v_h|^2 dx.$$

Учитывая формулы (1.132), (1.134)–(1.136), приближенную задачу (1.126) можно поставить как задачу оптимизации в пространстве конечного числа измерений. ■

### 1.6.3. Решение приближенной задачи методом релаксации

Пусть  $N_h = \dim V_h$ ; через  $v_h$  в этом и последующих разделах мы будем обозначать произвольный элемент пространства  $\mathbb{R}^{N_h}$ , т. е.  $v_h = (v_1, v_2, \dots, v_{N_h})$ . В разд. 1.6.2, 1.6.3 было показано,

что приближенная задача (1.126) в действительности сводится к задаче минимизации функционала, обозначаемого через  $J_h$ , на пространстве  $\mathbb{R}^{N_h}$ ; функционал  $J_h$  обладает следующими свойствами:

- (i)  $J_h$  является строго выпуклым;
- (ii)  $\lim_{\|v_h\| \rightarrow +\infty} J_h(v_h) = +\infty$ ;
- (iii)  $J_h \in C^1(\mathbb{R}^{N_h})$ , так как  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ .

Учитывая эти свойства и вспоминая теорему 1.1 разд. 1.1 гл. 2, убеждаемся в том, что сходимость метода релаксации в задаче минимизации функционала  $J_h$  на  $\mathbb{R}^{N_h}$  обеспечена. Этот алгоритм определяется следующим образом:

(1.137) задается произвольный элемент  $u_h^0 = (u_1^0, \dots, u_{N_h}^0)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{N_h}$ ,

при известном  $u_h^n$  определяются координаты элемента  $u_h^{n+1}$  из решения следующих задач:

$$(1.138) \quad \frac{\partial J_h}{\partial v_i}(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots, u_{N_h}^n) = 0, \quad 0 \leq i \leq N_h. \blacksquare$$

*Замечание 1.8.* Для переменной  $v_i$ , соответствующей узлу множества  $\Sigma_h$  ( $q=1$ ), или  $\Sigma_h \cup \Sigma'_h$  ( $q=2$ ), не принадлежащему границе  $\Gamma_d$ , уравнение (1.138) линейно.  $\blacksquare$

*Замечание 1.9.* Для достаточно малых значений постоянной  $k$  в формуле (1.9) имеется априорная уверенность в том, что алгоритм (1.137), (1.138) работает хорошо. В самом деле, в пределе, когда  $k \rightarrow 0$ , имеем равенство  $\psi(\xi) = g|\xi|$ , из которого вытекает, что

$$(1.139) \quad j_h(v_h) = \frac{g}{2} \sum |M_i M_{i+1}|(|v_i| + |v_{i+1}|), \quad q=1,$$

$$(1.140) \quad j_h(v_h) = \frac{g}{6} \sum |M_i M_{i+1}|(|v_i| + 4|v_{i+1/2}| + |v_{i+1}|), \quad q=2;$$

и, следовательно, мы находимся в условиях применимости теоремы 1.4 разд. 1.5 гл. 2, обеспечивающей сходимость алгоритма релаксации, разумеется, при условии, что уравнение (1.138) (которое в данном случае может терять смысл) заменяется неравенством

$$(1.141) \quad \begin{aligned} J_h(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots) &\leq \\ &\leq J_h(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots) \quad \forall v_i \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

К этому вопросу мы вернемся ниже в разд. 2.  $\blacksquare$

**Замечание 1.10.** Для увеличения скорости сходимости может оказаться полезным введение параметра верхней или нижней релаксации  $\omega$ ; в этом случае получается следующий вариант сформулированного выше алгоритма (1.37), (1.38):

$$(1.142) \quad u_h^n \text{ задается,}$$

$$(1.143) \quad \frac{\partial J_h}{\partial v_i}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1/2}, u_{i+1}^n, \dots) = 0,$$

$$(1.144) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \omega(u_i^{n+1/2} - u_i^n). \blacksquare$$

#### 1.6.4. Решение приближенной задачи методом сопряженных градиентов

Учитывая свойства функционала  $J_h$ , для решения приближенной задачи (1.126) можно использовать также вариант<sup>1)</sup> (2.26)–(2.29) разд. 2.3 гл. 2 алгоритма сопряженных градиентов. ■

### 1.7. Примеры

*Предварительное замечание.* В рассмотренных ниже примерах все приближенные задачи были решены методом верхней релаксации (1.142)–(1.144) разд. 1.6.3; несколько пробных численных реализаций метода сопряженных градиентов привели к очень хорошим результатам, однако следует отметить, что программирование этого метода является делом и намного более трудоемким и сложным (при одинаковых примерах затратах машинного времени) по сравнению с программированием метода верхней релаксации; соответствующие результаты здесь не приведены. ■

#### 1.7.1. Пример 1

Рассматриваемая задача (1.4) конкретизируется заданием области:  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[, \Gamma_d = \Gamma$ , пространства  $V: \Gamma_d = \Gamma$  влечет за собой равенство  $V = H^1(\Omega)$ , функции  $f: f = 1$ , численных значений параметров:  $\mu = 1, k = 1, 0,1, 0,01, g = 1$  и  $0,2$ , начальное приближение для алгоритма верхней релаксации:  $u_h^0 = 0$ .

<sup>1)</sup> Приспособленный для случая неквадратичного функционала.

Условие останова алгоритма верхней релаксации:

$$(1.145) \quad \frac{\sum_{t=1}^{N_h} |u_t^{n+1} - u_t^n|}{\sum_{t=1}^{N_h} |u_t^{n+1}|} \leq \varepsilon_r,$$

здесь  $\varepsilon_r = 10^{-5}$  для  $q = 1$  (конечные элементы первого порядка),  $\varepsilon_r = 10^{-4}$  для  $q = 2$  (конечные элементы второго порядка).

Триангуляция  $\mathcal{T}_h$ . Триангуляции, соответствующие значениям  $q = 1$  и  $q = 2$ , показаны соответственно на рис. 1.9 и 1.10.

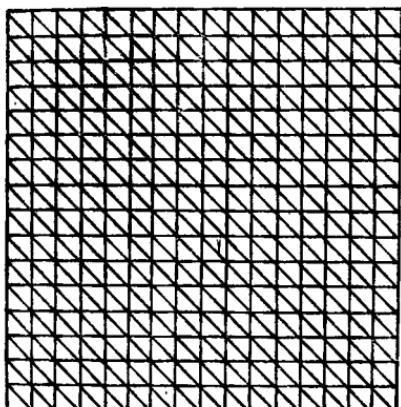


Рис. 1.9. ( $q=1$ ).

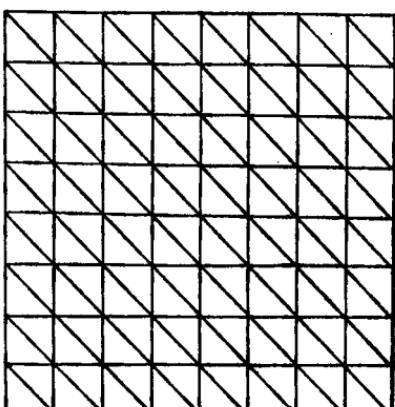


Рис. 1.10. ( $q=2$ ).

Для  $q = 1$  ( $q = 2$ ) имеется 512 (128) треугольников и 289 узлов, следовательно,  $N_h = 289$ .

#### Анализ численных результатов

В табл. 1.1 приведены некоторые данные, касающиеся решения приближенных задач и полученных результатов; через  $\mu_1(u_h)$  и  $\mu_2(u_h)$  обозначены следующие величины:

$$\mu_1(u_h) = \max u_h(M), \quad M \in \Sigma_h, \quad q = 1, \quad M \in \Sigma_h \cup \Sigma'_h, \quad q = 2,$$

$$\mu_2(u_h) = \max u_h(M), \quad M \in \Sigma_h \cap \Gamma, \quad q = 1,$$

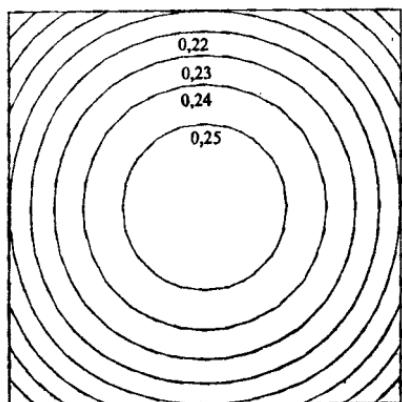
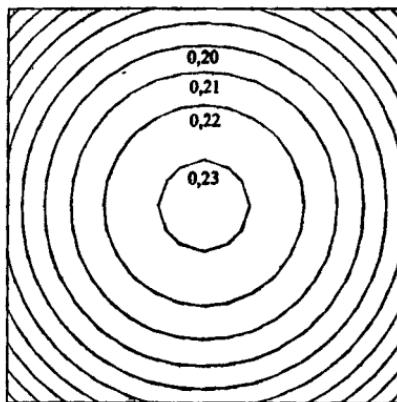
$$M \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma, \quad q = 2.$$

Все вычисления проводились на ЭВМ СII 10070; время, затрачиваемое на выполнение 1 итерации для  $q = 1$ , было равно 0,26 с, для  $q = 2 - 0,42$  с.

Таблица 1.1

$k$	Параметр верхней релаксации $\omega$	$\mu_1(u_h)$		$\mu_2(u_h)$		Число итераций	
		$q=1$	$q=2$	$q=1$	$q=2$	$q=1$	$q=2$
$g=1$	1	1,7	1,7	0,256	0,255	0,206	0,206
	0,1	1,7	1,7	0,095	0,094	0,029	0,029
	0,01	1,7	1,7	0,073	0,072	0,003	0,003
$g=0,2$	1	1,9	1,9	0,259	0,258	0,209	0,210
	0,1	1,9	1,9	0,233	0,232	0,183	0,183
	0,01	1,9	1,9	0,233	0,232	0,183	0,183

Анализируя все эти результаты, можно заключить, что аппроксимация при помощи конечных элементов 1-го порядка, по-видимому, более выгодна, нежели конечноэлементная аппрокси-

Рис. 1.11. Пример 1:  $g=0,2$ ,  $k=1$ .Рис. 1.12. Пример 1:  $g=0,2$ ,  $k=0,1$ .

мация 2-го порядка — по крайней мере для данного класса задач, так как при одной и той же точности и одном и том же числе степеней свободы затраченное в первом случае время примерно в два раза меньше.

На рис. 1.11 и 1.12 показаны линии уровня приближенных решений для  $g=0,2$ ,  $k=1$  и  $0,1$ .

На рис. 1.13 показаны графики функции  $u_h(x_1, 0)$  для  $g=0,2$ ,  $k=1, 0,1$ .

Как можно заметить из рис. 1.13, переход функции  $u_h(x_1, 0)$  через критическое значение  $kg$  не влечет за собой никаких неприятностей в отношении регулярности следа решения. ■

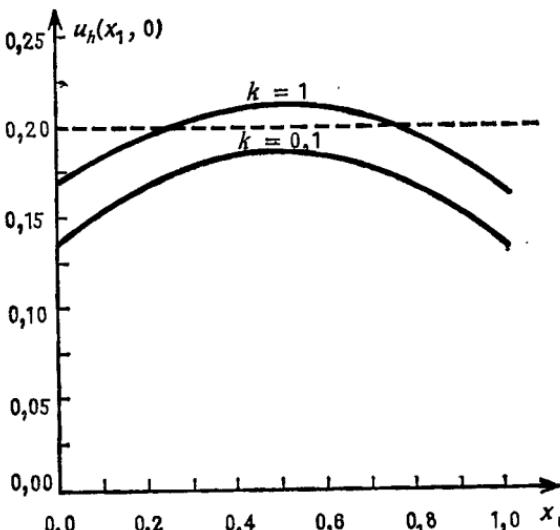


Рис. 1.13. Пример 1:  $g=0,2$ . График функции  $u_h(x_1, 0)$ .

### 1.7.2. Пример 2

Задача (1.4) определяется следующим образом.

Геометрические данные:

$$\Omega = [0,1] \times [0,1], \quad \Gamma_d = \{(x_1, x_2) \mid 0,25 \leq x_1 \leq 0,75, x_2 = 0\}.$$

Пространство  $V$ :  $V = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d\}$ .

Функция  $f$ :  $f$  была выбрана равной  $10 \times$  (характеристическая функция квадрата  $[0,375, 0,625] \times [0,375, 0,625]$ ), т. е.  $f(x) = 10$ , если  $x$  принадлежит этому квадрату, и 0 в противоположном случае.

Численные значения параметров: было выбрано  $\mu = 0$ , что законно, поскольку

$$\left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx \right)^{1/2}$$

определяет на  $V$  норму, эквивалентную норме, индуцированной из

$$H^1(\Omega), \quad k = 1, 0, 1, 0,01, \quad g = 1, 0,2.$$

Начальное приближение и условие останова для алгоритма верхней релаксации: см. разд. 1.7.1.

Триангуляция  $\mathcal{F}_h$ : см. разд. 1.7.1; число степеней свободы на этот раз равно 234.

Область  $\Omega$ , часть границы  $\Gamma_d$  и носитель функции  $f$  показаны на рис. 1.14.

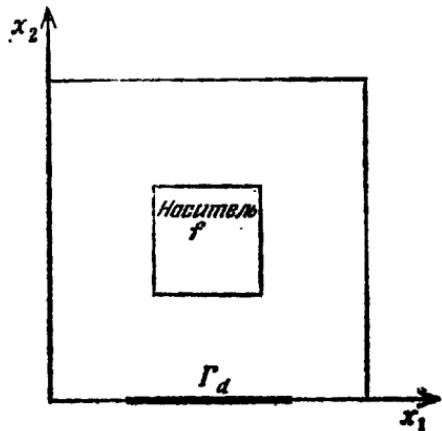


Рис. 1.14. Пример 2.

### Анализ численных результатов

Некоторые сведения, касающиеся полученных численных результатов, сгруппированы в табл. 1.2.

Таблица 1.2

$k$	Параметр верхней релаксации $\omega$	Число итераций	
		$q=1$	$q=2$
$g=1$	1	1,67	1,7
	0,1	1,67	1,7
	0,01	1,67	1,7
$g=0,2$	1	1,67	1,7
	0,1	1,67	1,7
	0,01	1,67	1,7

Затраты машинного времени ЭВМ СII 10070 на выполнение одной итерации примерно те же, что и в примере 1; поскольку полученное решение практически то же, что и в примере 1, то данный пример еще раз показывает выгоды использования при решении данного класса задач — конечные элементы порядка 1.

Линии уровня приближенных решений для  $g = 1$ ,  $k = 1$ ,  $0,1$ ,  $0,001$  показаны на рис. 1.15, 1.16, 1.17.

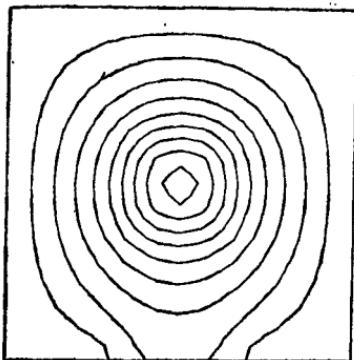


Рис. 1.15. Пример 2:  $g = 1$ ,  $k = 1$ .

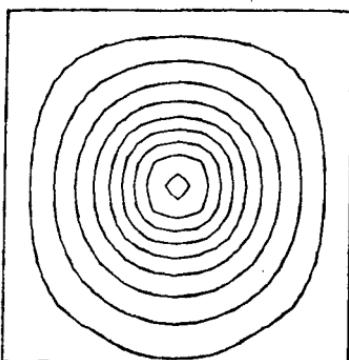


Рис. 1.16. Пример 2:  $g = 1$ ,  $k = 0,1$ .

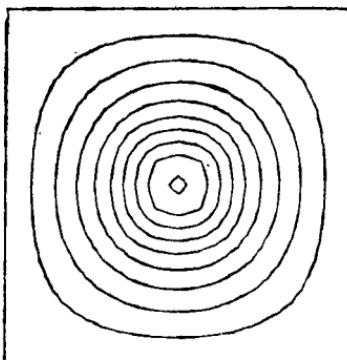


Рис. 1.17. Пример 2:  $g = 1$ ,  $k = 0,01$ .

### 1.7.3. Пример 3

Геометрические данные:  $\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{4}\}$ ,  $\Gamma_d$  — нижняя полуокружность (см. рис. 1.18).

Пространство:  $V: V = \{v | v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma - \Gamma_d} = 0\}$ .

Функция  $f$ :  $f$  равна  $18 \times$ (характеристическая функция круга радиуса 0,25).

Численные значения параметров:  $\mu = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = 0,1$ ,  $0,01$ ,  $g = 1$ ,  $0,2$ .

Начальное приближение и условие останова для алгоритма верхней релаксации: см. разд. 1.7.1.

Триангуляция  $\mathcal{T}_h$ : показана на рис. 1.19 и содержит 384 треугольника, 217 узлов с  $N_h = 193$ .

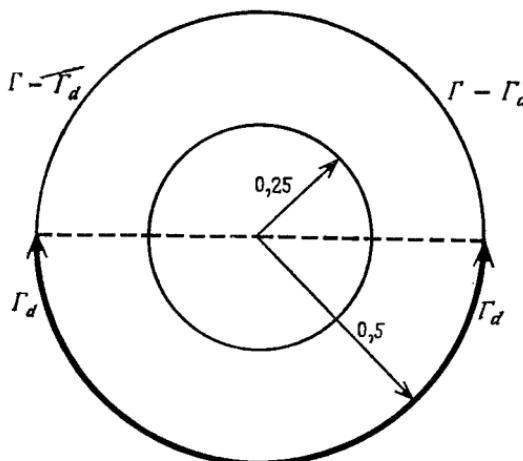


Рис. 1.18.

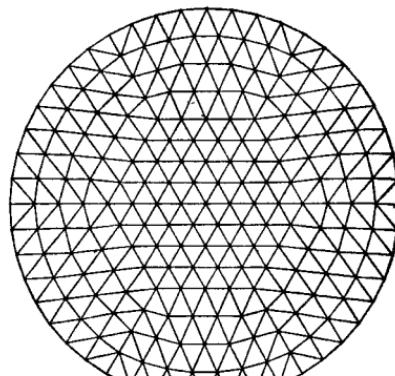


Рис. 1.19.

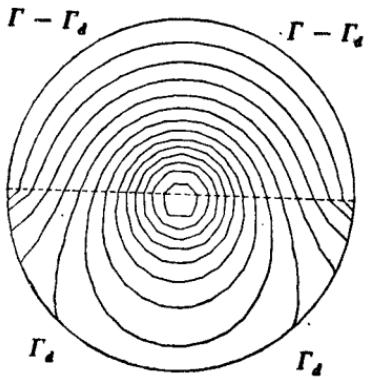


Рис. 1.20. Пример 3:  $g=1$ ,  $k=1$ .

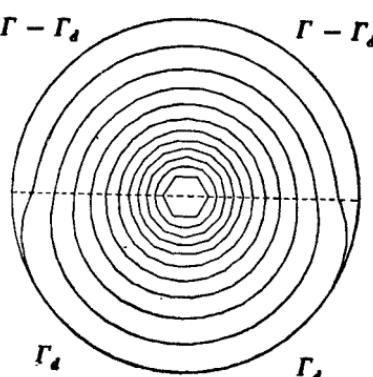


Рис. 1.21. Пример 3:  $g=1$ ,  $k=0,1$ .

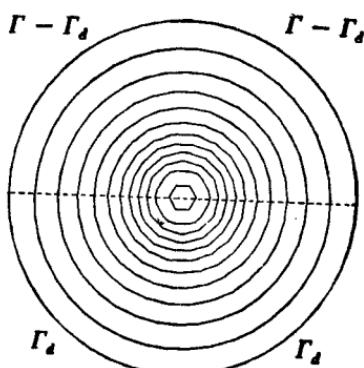


Рис. 1.22. Пример 3:  $g=1$ ,  $k=0,01$ .

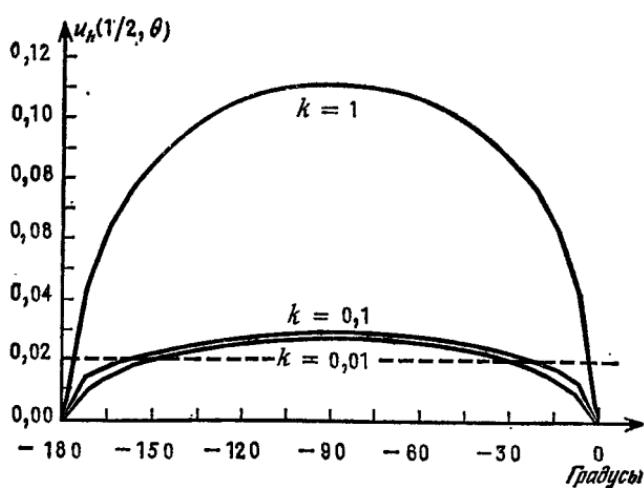
Анализ численных результатов: были использованы только конечные элементы порядка 1 ( $q = 1$ ), соответствующие результаты приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

	$k$	$\omega$	Число итераций
$g = 1$	1		42
	0,1	1,76	35
	0,01		35
$g = 0,2$	1		42
	0,1	1,76	48
	0,01		56

Затраты машинного времени на выполнение одной итерации на ЭВМ СII 10070 в среднем равны 0,33 с; линии уровня приближенных решений для  $g = 1$ ,  $k = 1, 0,1, 0,01$  показаны на рис. 1.20, 1.21, 1.22.

Графики функции  $u_h\left(\frac{1}{2}, \theta\right)$  для  $\theta \in [-\pi, 0]$  в полярных координатах и для  $g = 0,2$ ,  $k = 1, 0,1, 0,01$  показаны на рис. 1.23.

Рис. 1.23. Пример 3:  $g = 0,2$ .

### 1.7.4. Пример 4

Геометрические данные: см. разд. 1.7.3.

Пространство  $V: V = H^1(\Omega)$ .

Функция  $f:f = 10 \times$  (характеристическую функцию круга радиуса 0,25).

Численные значения параметров:  $\mu = 1$ ,  $k = 1, 0,1, 0,01$ ,  $g = 1, 0,2$ .

Начальное приближение и условие останова для алгоритма верхней релаксации: см. разд. 1.7.1.

Триангуляция  $\mathcal{T}_h$ : см. разд. 1.7.3; в настоящем случае  $N_h = 217$ .

#### Анализ численных результатов

Затраты машинного времени на выполнение одной итерации на ЭВМ С-II 10070 в среднем равны 0,33 с, полученные данные приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

	$k$	$\omega$	Число итераций
$g = 1$	1		91
	0,1	1,91	96
	0,01		97
$g = 0,2$	1		91
	0,1	1,91	111
	0,01		97

Линии уровня приближенных решений для  $g = 1$  и  $k = 1, 0,1, 0,01$  показаны на рис. 1.24, 1.25, 1.26.

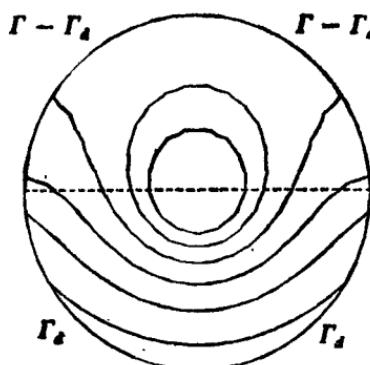


Рис. 1.24. Пример 4:  $g = 1$ ,  $k = 1$ .

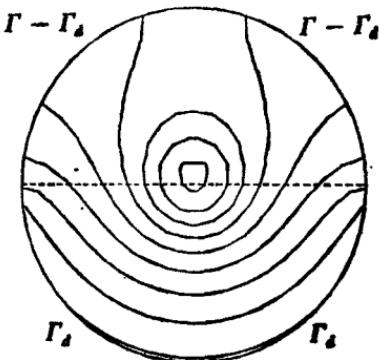
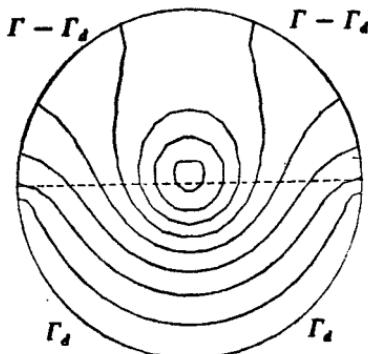


Рис. 1.25. Пример 4:  $g = 1$ ,  $k = 0,1$ .

Рис. 1.26. Пример 4:  $g = 1$ ,  $k = 0,01$ .

## 2. Задачи с учетом трения

### 2.1. Формулировки задач

Некоторые модельные задачи<sup>1)</sup> об определении поля перемещений в твердом теле  $\Omega$  при наличии трения на границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  или на части  $\Gamma_d$  этой границы приводят к следующей вариационной задаче определения функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ :

$$(2.1) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V, \\ u \in V,$$

где

$$(2.2) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu v^2 + |\operatorname{grad} v|^2) dx - \int_{\Omega} fv dx + g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma.$$

В формуле (2.2) полагаем  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $g > 0$ ; что касается пространства  $V$ , то мы ограничимся случаем, когда

$$(2.3) \quad V = \{v | v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d\}$$

или же

$$(2.4) \quad V = H^1(\Omega). \blacksquare$$

*Замечание 2.1.* Для того чтобы несколько упростить изложение, ниже будем предполагать, что  $\mu > 0$ ; случай  $\mu = 0$  см. в цитированной выше книге Дюво и Лионса. ■

<sup>1)</sup> По поводу исследования и схематизации более близких к действительности, но и намного более сложных задач см. гл. 3 книги Дюво и Лионса [1].

## 2.2. Результаты о существовании и единственности решения задачи (2.1), (2.2)

Аналогично тому, как была установлена теорема 1.1 в разд. 1.2, можно доказать, что имеет место

**Теорема 2.1.** *Если область  $\Omega$  ограничена, а ее граница  $\Gamma$  удовлетворяет условию Липшица, то задача (2.1), (2.2) имеет решение, и притом только одно.* ■

## 2.3. Связь с задачами разд. 1

Мы сейчас докажем, что задачу (2.1), (2.2) можно рассматривать как предельный случай задачи (1.4), (1.5) разд. 1.1, когда параметр  $k$  в определении (1.9) стремится к нулю; это будет вытекать из следующего предложения.

**Предложение 2.1.** *Пусть  $u$  — решение задачи (2.1), (2.2),  $u_k$  — решение задачи (1.4), (1.5) разд. 1.1, тогда*

$$\lim_{k \rightarrow 0} u_k = u \text{ сильно в } V.$$

*Доказательство.* Обозначим

$$(2.5) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\mu uv + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx,$$

$$(2.6) \quad j(v) = g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma,$$

$$(2.7) \quad j_k(v) = \int_{\Gamma_d} \psi_k(v) d\Gamma,$$

функция  $\psi_k$  в формуле (2.7) определена по формуле (1.10), ранее, в разд. 1.1, она обозначалась через  $\Phi$ .

Решения  $u$  и  $u_k$  характеризуются неравенствами

$$(2.8) \quad a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx,$$

$$(2.9) \quad a(u_k, v - u_k) + j_k(v) - j_k(u_k) \geq \int_{\Omega} f(v - u_k) dx,$$

полагая  $v = u_k$  в неравенстве (2.8),  $v = u$  — в (2.9) и складывая, найдем

$$(2.10) \quad a(u_k - u, u_k - u) \leq j_k(u) - j(u) + j(u_k) - j_k(u_k).$$

Из неравенства (2.10) следует, что

$$(2.11) \quad 0 \leq g|\xi| - \psi_k(\xi) \leq \frac{1}{2}kg^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

откуда, учитывая формулы (2.6), (2.7), имеем

$$(2.12) \quad 0 \leq j(v) - j_k(v) \leq \frac{g^2}{2} \left( \int_{\Gamma} d\Gamma \right) k \quad \forall v \in V.$$

Из (2.10), (2.12) получаем оценку

$$a(u_k - u, u_k - u) \leq \frac{g^2}{2} \left( \int_{\Gamma} d\Gamma \right) k,$$

из которой следует, что

$$(2.13) \quad \lim_{k \rightarrow 0} a(u_k - u, u_k - u) = 0;$$

и так как отображение  $v \rightarrow \sqrt{a(v, v)}$  определяет на  $V$  норму, эквивалентную норме, индуцированной из  $H^1(\Omega)$ , то из (2.13) вытекает сильная сходимость последовательности  $u_k$ . ■

**Замечание 2.2.** Полученный выше результат является фундаментальным для последующего, так как он имеет место и для приближенных задач (при фиксированном  $h$ ), следовательно, полученные в разд. I не зависящие от  $k$  оценки погрешности аппроксимации сохраняются и в рассматриваемом случае. ■

**Замечание 2.3.** Можно считать, что задача (1.4), (1.5) получается из задачи (2.1), (2.2) путем регуляризации недифференцируемого слагаемого  $j(v) = g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma$ . ■

## 2.4. Зависимость решения от параметра $g$

Обозначим временно через  $u_g$  решение задачи (2.1), (2.2) относительно отображения  $g \rightarrow u_g$  имеем

**Предложение 2.2.** Имеют место следующие утверждения:

(i) отображение  $g \rightarrow u_g$  из  $\mathbb{R}_+ \rightarrow V$  удовлетворяет условию Липшица;

(ii) отображение  $g \rightarrow \int_{\Gamma_d} |u_g| d\Gamma$  удовлетворяет условию Липшица и является убывающим;

(iii) отображение  $g \rightarrow a(u_g, u_g)$  является выпуклым и убывающим.

**Доказательство.** Сформулированные утверждения будут вытекать из доказанной ниже леммы 2.1 (эта лемма применима и для доказательства аналогичных результатов разд. 2.2 гл. 5, но там мы предпочли прямую проверку). ■

Отметим, что здесь мы частично используем формализм предыдущего раздела.

**Лемма 2.1.** Пусть:

$V$ —вещественное гильбертово пространство,

$a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ —билинейная непрерывная симметричная коэрцитивная форма,

$L: V \rightarrow \mathbb{R}$ —линейная непрерывная форма,

$j: V \rightarrow \mathbb{R}$ —полунорма на пространстве  $V$ , непрерывная на этом пространстве,

$g$ —некоторый неотрицательный скалярный параметр; буквой  $J$  будем обозначать следующий функционал  $V \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + gj(v) - L(v).$$

**Задача**

$$(2.14) \quad J(u_g) \leq J(v) \quad \forall v \in V, \\ u_g \in V$$

имеет решение, и при том только одно; отображение  $g \rightarrow u_g$  обладает при этом следующими свойствами:

(i) отображение  $g \rightarrow u_g$  из  $\mathbb{R}_+ \rightarrow V$  удовлетворяет условию Липшица;

(ii) отображение  $g \rightarrow j(u_g)$  удовлетворяет условию Липшица и является убывающим;

(iii) отображение  $g \rightarrow a(u_g, u_g)$  является выпуклым и убывающим.

**Доказательство.** Учитывая свойства формы  $a$ , можно всегда считать, что гильбертова структура пространства  $V$  определяется скалярным произведением  $(u, v) = a(u, v)$ , следовательно, ассоциированная с этим скалярным произведением норма на  $V$  равна  $\|v\| = \sqrt{a(v, v)}$ ; кроме того, по теореме Рисса существует единственный элемент  $f \in V$ , такой, что  $L(v) = (f, v) \quad \forall v \in V$ , так что

$$J(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2 + gj(v) - (f, v).$$

И наконец, из условия непрерывности  $j$  вытекает, что

$$(2.15) \quad j(v) \leq |j| \|v\| \quad \forall v \in V,$$

где

$$|j| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{j(v)}{\|v\|}.$$

*Доказательство утверждения (i).* Пусть  $g_1, g_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_1 = u_{g_1}$ ,  $u_2 = u_{g_2}$  — соответствующие значениям  $g_1$  и  $g_2$  решения задачи (2.14); имеем

$$(2.16) \quad (u_1, v - u_1) + g_1(j(v) - j(u_1)) \geq (f, v - u_1),$$

$$(2.17) \quad (u_2, v - u_2) + g_2(j(v) - j(u_2)) \geq (f, v - u_2),$$

полагая в неравенстве (2.16)  $v = u_2$ , в неравенстве (2.17) —  $v = u_1$  и складывая получившиеся при этом результаты, получим оценку

$$(2.18) \quad \|u_2 - u_1\|^2 \leq (g_2 - g_1)(j(u_2) - j(u_1)).$$

Учитывая неравенство (2.15), имеем теперь

$$\|u_2 - u_1\|^2 \leq |g_2 - g_1| |j(u_2 - u_1)| \leq |g_2 - g_1| |j| \|u_2 - u_1\|,$$

откуда следует, что

$$(2.19) \quad \|u_2 - u_1\| \leq |j| |g_2 - g_1|,$$

т. е. нужное нам утверждение (i). ■

*Доказательство утверждения (ii).* Из того условия, что  $j$  — полунорма, и из неравенства (2.15), (2.19) получаем, что

$$|j(u_2) - j(u_1)| \leq j(u_2 - u_1) \leq |j| \|u_2 - u_1\| \leq |j|^2 |g_2 - g_1|,$$

следовательно, отображение  $g \rightarrow j(u_g)$  удовлетворяет условию Липшица; что касается свойства убывания, то оно следует из неравенства (2.18). ■

*Доказательство утверждения (iii).* Докажем сначала свойство выпуклости; заметим, что элемент  $u_g$  удовлетворяет условию

$$(2.20) \quad (u_g, v - u_g) + gj(v) - gj(u_g) \geq (f, v - u_g) \quad \forall v \in V, \\ u_g \in V,$$

полагая здесь поочередно  $v = 0$  и  $v = 2u_g$ , найдем

$$(2.21) \quad \|u_g\|^2 + gj(u_g) = (f, u_g).$$

Из равенства (2.21) вытекает, что

$$(2.22) \quad J(u_g) = -\frac{1}{2} \|u_g\|^2,$$

однако

$$J(u_g) = \min_{v \in V} \left[ \frac{1}{2} \|v\|^2 + gj(v) - (f, v) \right],$$

следовательно, функция  $g \rightarrow J(u_g)$  представляет собой нижнюю грань семейства аффинных (следовательно, вогнутых) функций, и, таким образом, она сама — вогнутая; учитывая этот результат, на основании формулы (2.22) заключаем, что функция  $g \rightarrow \|u_g\|^2$  выпуклая. ■

Для доказательства свойства убывания функции  $g \rightarrow \|u_g\|^2$  используем способ, который на самом деле позволит установить некоторые другие свойства решения  $u_g$ . Пусть

$$V_1 = \text{Ker}(j) = \{v \mid v \in V, j(v) = 0\},$$

$V_1$  представляет собой замкнутое подпространство пространства  $V$ ; обозначим через  $V_2$  подпространство  $V_1^\perp$ , тогда будем иметь разложение

$$(2.23) \quad V = V_1^\perp \oplus V_2$$

и соответствующие разбиения элементов  $v, f, u_g$ :

$$(2.24) \quad v = v_1 + v_2, \quad f = f_1 + f_2, \quad u_g = u_{g1} + u_{g2}.$$

Можно доказать, что

$$(2.25) \quad j(v) = j(v_2) \quad \forall v \in V$$

и что  $j$  — норма на  $V_2$ .

Учитывая формулы (2.23) — (2.25), имеем

$$(2.26) \quad \|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \quad \forall v \in V,$$

$$(2.27) \quad J(v) = J(v_1, v_2) = \frac{1}{2} (\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) + gj(v_2) - (f_1, v_1) - (f_2, v_2) \quad \forall v \in V,$$

из (2.26), (2.27) заключаем, что элемент  $u_{g1}$  представляет собой решение задачи разыскания

$$(2.28) \quad \min_{v \in V_1} \left\{ \frac{1}{2} \|v\|^2 - (f_1, v) \right\},$$

откуда следует, что

$$(2.29) \quad u_{g1} = f_1 \quad \forall g.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что  $u_{g2}$  — решение задачи

$$(2.29)' \quad \min_{v \in V_1} \left\{ \frac{1}{2} \|v\|^2 + gj(v) - (f_2, v) \right\},$$

и, следовательно, мы имеем (ср. (2.21))

$$(2.30) \quad \|u_{g1}\|^2 + gj(u_{g1}) = (f_1, u_{g1}).$$

Из формулы (2.30) вытекает, что

$$(2.31) \quad \|u_{g^2}\| \leq \|f_2\|,$$

откуда имеем оценку

$$(2.32) \quad j(u_{g^2}) \leq \frac{2}{g} \|f_2\|^2.$$

Учитывая неравенства (2.31), (2.32), заключаем, что

$$(2.33) \quad \lim_{g \rightarrow \infty} u_{g^2} = 0 \text{ слабо в } V,$$

и из (2.30), (2.33) вытекает, что

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \lim_{g \rightarrow \infty} gj(u_{g^2}) &= 0, \\ \lim_{g \rightarrow \infty} u_{g^2} &= 0 \text{ сильно в } V. \end{aligned}$$

Имеет место равенство  $\|u_{g^2}\|^2 = \|u_g\|^2 - \|f_1\|^2$ , следовательно, функция  $g \rightarrow \|u_{g^2}\|^2$  — выпуклая; кроме того,

$$(2.35) \quad \lim_{g \rightarrow \infty} \|u_{g^2}\|^2 = 0;$$

учитывая предельное равенство (2.35) и то, что  $\|u_{g^2}\|^2 \geq 0 \forall g$ , заключаем, что из выпуклости функции  $g \rightarrow \|u_{g^2}\|^2$  следует, что эта функция, а вместе с ней и  $g \rightarrow \|u_g\|^2$  — убывающая, поскольку

$$\|u_g\|^2 = \|f_1\|^2 + \|u_{g^2}\|^2. \blacksquare$$

Предложение 2.2 следует немедленно из леммы 2.1, если заметить, что отображение

$$v \rightarrow \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma$$

обладает всеми свойствами, которые требовались относительно  $j$  в формулировке леммы. ■

Пусть  $V_1 = \{v \mid v \in V, j(v) = 0\}$ , и пусть  $\hat{u}$  — решение задачи

$$(2.36) \quad \begin{aligned} J_0(\hat{u}) &\leq J_0(v) \quad \forall v \in V_1, \\ \hat{u} &\in V_1, \end{aligned}$$

где

$$J_0(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v);$$

легко видеть, что, доказав (iii) леммы (2.1), мы одновременно доказали следующую лемму:

**Лемма 2.2.** Имеет место утверждение

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} u_g = \hat{u} \text{ сильно в } V. \blacksquare$$

Из этой леммы вытекает

**Предложение 2.3.** Пусть  $u_g$  — решение задачи (2.1), (2.2),  $\hat{u}$  — решение задачи минимизации

$$(2.37) \quad \min_{v \in W} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu v^2 + |\operatorname{grad} v|^2) dx - \int_{\Omega} fv dx \right\},$$

$$W = \{v | v \in V, v|_{\Gamma_d} = 0\};$$

тогда

$$\lim_{g \rightarrow +\infty} u_g = \hat{u} \text{ сильно в } V.$$

**Замечание 2.4.** Решение  $\hat{u}$  (2.37) представляет собой решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{u} + \mu \hat{u} &= f, \\ \hat{u}|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

в случае, когда  $V$  определено по формуле (2.3), и смешанной задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{u} + \mu \hat{u} &= f, \\ \hat{u} &= 0 \text{ на } \Gamma_d, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} &= 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d, \end{aligned}$$

когда  $V = H^1(\Omega)$ . ■

## 2.5. Свойства сопряженных переменных

Обозначим через  $\Lambda$  следующее замкнутое выпуклое множество из  $L^2(\Gamma_d)$ :

$$(2.38) \quad \Lambda = \{q | q \in L^2(\Gamma_d), |q(x)| \leq 1 \text{ п. в. на } \Gamma_d\};$$

имеет место теорема:

**Теорема 2.2.** Решение и задачи (2.1) обладает тем свойством, что существует единственный элемент  $p \in \Lambda$ , такой, что

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v + \mu uv) dx + g \int_{\Gamma_d} pv d\Gamma &= \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in V, \\ u &\in V, \\ pu &= |u| \text{ п. в. на } \Gamma_d, \\ p &\in \Lambda. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Доказательство можно было бы провести, опираясь на теорему Хана—Банаха, так, как это было сделано в теореме 3.3 разд. 3.4 гл. 1, однако мы предпочли более конструктивное доказательство, использующее (в числе прочих свойств) свойство регулярности, формулировка которого была дана в предложении 2.1<sup>1)</sup>. Будем использовать формализм разд. 2.3; обозначим через  $\varphi_k$  производную функцию  $\psi_k$  (ср. формулу (1.9)):

$$(2.40) \quad \varphi_k(\xi) = \begin{cases} g, & \text{если } \xi \geq kg, \\ \xi/k, & \text{если } -kg \leq \xi \leq kg, \\ -g, & \text{если } \xi \leq -kg; \end{cases}$$

решение  $u_k$  задачи (1.4), (1.5) разд. 1.1 представляет собой одновременно решение следующего нелинейного вариационного уравнения:

$$(2.41) \quad a(u_k, v) + \int_{\Gamma_d} \varphi_k(u_k) v d\Gamma = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in V,$$

$$u_k \in V.$$

Определим функцию  $p_k$  по формуле  $p_k = \varphi_k(u_k)/g$ ; из (2.40), (2.41) следует, что

$$(2.42) \quad p_k \in \Lambda$$

и

$$(2.43) \quad a(u_k, v) + g \int_{\Gamma_d} p_k v d\Gamma = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in V.$$

Так как выпуклое множество  $\Lambda$  слабо компактно в пространстве  $L^2(\Gamma_d)$ , то из формулы (2.43) вытекает существование элемента  $p \in \Lambda$  и подпоследовательности  $p_k$ , таких, что

$$(2.44) \quad p_k \rightarrow p \text{ слабо в } L^2(\Gamma_d).$$

Учитывая предложение (2.1) и свойство (2.44), заключаем, что в пределе из (2.43) следует равенство

$$(2.45) \quad a(u, v) + g \int_{\Gamma_d} p v d\Gamma = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in V.$$

Из результатов, полученных при доказательстве леммы (2.1), вытекает, что

$$(2.46) \quad a(u, u) + g \int_{\Gamma_d} |u| d\Gamma = \int_{\Omega} fu dx.$$

<sup>1)</sup> К этому способу мы вновь обратимся в разд. 6.1.4 гл. 5.

<sup>2)</sup> На самом деле  $p_k \rightarrow p$  слабо в  $L^\infty(\Gamma_d)$ .

Кроме того, полагая  $v = u$  в (2.45), находим равенство

$$a(u, u) + g \int_{\Gamma_d} pu d\Gamma = \int_{\Omega} fu dx,$$

из которого с учетом (2.46) следует, что

$$\int_{\Gamma_d} |u| d\Gamma = \int_{\Gamma_d} pu d\Gamma$$

или в другом виде

$$(2.47) \quad \int_{\Gamma_d} (|u| - pu) d\Gamma = 0.$$

С другой стороны, из условия  $p \in \Lambda$  вытекает неравенство  
 $pu \leq |pu| \leq |u|$ ,

из которого имеем

$$(2.48) \quad |u| - pu \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_d.$$

Из условий (2.47), (2.48) следует, таким образом, что  $|u| = pu$   
 п. в. на  $\Gamma_d$ . Доказательство единственности осуществляется методом от противного: предположим, что существуют два различных элемента  $p_1, p_2 \in \Lambda$ , удовлетворяющие условиям (2.39), тогда

$$(2.49) \quad \int_{\Gamma} (p_2 - p_1) v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in V,$$

и так как пространство следов на  $\Gamma_d$  функций из пространства  $V$  плотно в  $L^2(\Gamma_d)$ , то из условия (2.49) следует, что  $p_2 = p_1$ , что и означает единственность. Теорема, обратная теореме 2.2, доказывается без труда. ■

**Замечание 2.5.** Из (2.39) вытекает, что решение  $u$  задачи (2.1) удовлетворяет условиям

$$-\Delta u + \mu u = f \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + p = 0 \text{ на } \Gamma_d,$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d$$

в случае, когда пространство  $V$  определено по формуле (2.3), и

$$-\Delta u + \mu u = f \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + p = 0 \text{ на } \Gamma_d,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d,$$

если  $V = H^1(\Omega)$ . ■

## 2.6. Аппроксимация по методу конечных элементов

### 2.6.1. Формулировка приближенной задачи

Предположим, как и в разд. 1.3, что область  $\Omega$  полигональна; это предположение позволяет определить  $\mathcal{T}_h$  и  $V_h$  так, как это было сделано в разд. 1.3, в частности, сохраняется гипотеза о том, что  $\Gamma_d$  представляет собой объединение сторон треугольников из  $\mathcal{T}_h$ , лежащих на границе  $\Gamma$ .

Что касается аппроксимации функционала  $j(v) = g \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma$ ,

то для этого мы будем использовать пределы<sup>1)</sup>, при  $k \rightarrow 0$ , функционалов, определение которых было дано в разд. 1.3 по формулам (1.24), (1.25):

$$(2.50) \quad j_h(v_h) = \frac{g}{2} \sum_i |M_i M_{i+1}| (|v_h(M_i)| + |v_h(M_{i+1})|),$$

если  $q = 1$ ,

$$(2.51) \quad j_h(v_h) = \frac{g}{6} \sum_i |M_i M_{i+1}| (|v_h(M_i)| + 4|v_h(M_{i+1/2})| + |v_h(M_{i+1})|), \text{ если } q = 2,$$

суммирование проводится по всем сторонам треугольников из  $\mathcal{T}_h$ , объединением которых является граница  $\Gamma_d$ .

Таким образом, задача (2.1) приближается следующей конечномерной задачей (записанной в форме вариационного неравенства):

$$(2.52) \quad a(u_h, v_h - u_h) + j_h(v_h) - j_h(u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$u_h \in V_h.$$

Из этой формулировки сразу следует

**Теорема 2.3.** Приближенная задача (2.52) имеет решение, и притом только одно. ■

### 2.6.2. Сходимость приближенных решений

Используя доказательства, идентичные тем, которые были проведены для теоремы 1.3 разд. 1.4.2 ( $q = 1$ ) и теоремы 1.5 разд. 1.5.2 ( $q = 2$ ), можно доказать, что имеет место

<sup>1)</sup> Развёрнутые выражения для которых были даны ранее, в разд. 1.6.3, замечание 1.9 — формулы (1.139), (1.140).

**Теорема 2.4.** Если при  $h \rightarrow 0$  углы треугольников из  $\mathcal{F}_h$  остаются ограниченными снизу некоторой константой  $\theta_0 > 0$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \text{ сильно в } H^1(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи (2.1),  $u_h$  — решение задачи (2.52). ■

### 2.6.3. Оценки погрешности аппроксимации

Полученные в разд. 1.4.3 оценки погрешности аппроксимации, для  $q = 1$ , не зависящие от параметра  $k$ , имеют место и для приближенных решений задачи (2.1), определяемых из (2.52). ■

## 2.7. Численное решение приближенных задач

### План изложения

Мы будем изучать решение приближенной задачи (2.52) по методу релаксации, рассмотренному в разд. 1.6.3, и с использованием алгоритма двойственности типа Удзавы (см. разд. 4.3 гл. 2).

### 2.7.1. Формулировка приближенных задач

Для получения развернутой формулировки приближенной задачи (2.52) мы используем выражение (2.50) ( $q = 1$ ) и (2.51) ( $q = 2$ ) функционала  $j_h$  и формулы разд. 1.6.1 (1.6.2) для  $q = 1$  ( $q = 2$ ). ■

### 2.7.2. Решение приближенной задачи методом релаксации

Учитывая замечание 1.9 разд. 1.6.3, заключаем, что построения, относящиеся к приближенной задаче (1.126), применимы и к задаче (2.52), которая эквивалентна следующей конечномерной задаче оптимизации:

$$(2.53) \quad \min_{v_h \in V_h} [J_0(v_h) + j_h(v_h)],$$

$$J_0(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h|^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |v_h|^2 dx - \int_{\Omega} fv_h dx. ■$$

### 2.7.3. Решение приближенной задачи методом двойственности

Изучим сначала случай непрерывной задачи; очевидно, задача (2.1), (2.2) входит в класс задач разд. 4 гл. 2, если поло-

жить

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v|^2 + \mu v^2) dx - \int_{\Omega} fv dx, \quad M = V, \quad L = L^2(\Gamma_d),$$

$$\Phi(v) = v|_{\Gamma_d}, \quad \Lambda = \{q \mid q \in L^2(\Gamma_d), |q(x)| \leq 1 \text{ почти всюду на } \Gamma_d\}.$$

В самом деле, имеет место равенство

$$(2.54) \quad \int_{\Gamma_d} |v| d\Gamma = \max_{q \in \Lambda} \int_{\Gamma_d} qv d\Gamma \quad \forall v \in V;$$

вводя теперь лагранжиан

$$\mathcal{L}(v, \mu) = J_0(v) + g \int_{\Gamma_d} \mu v d\Gamma,$$

можно, используя условия (2.39) в формулировке теоремы 2.2, доказать, что имеет место

**Теорема 2.5.** Лагранжиан  $\mathcal{L}$  имеет на  $V \times \Lambda$  единственную седловую точку  $\{u, p\}$ , где  $u$  — решение задачи (2.1), (2.2), а элемент  $p$  связан с  $u$  условиями (2.39). ■

Обозначим  $v|_{\Gamma_d}$  через  $\gamma_d v$ ; из теоремы 2.5 следует, что задачу (2.1), (2.2) можно решать с использованием алгоритма (4.12) — (4.15) разд. 4.3 гл. 2, который в рассматриваемом частном случае принимает форму:

(2.55) элемент  $p^0 \in \Lambda$  выбирается произвольно (например, положим  $p_0 = 0$ ),

$$(2.56) \quad \mathcal{L}(u^n, p^n) \leq \mathcal{L}(v, p^n) \quad \forall v \in V, u^n \in V,$$

$$(2.57) \quad p^{n+1} = P_{\Lambda}(p^n + \rho_n g \gamma_d u^n), \quad \rho_n > 0.$$

Развертывая этап (2.56) алгоритма, получаем, что

$$-\Delta u^n + \mu u^n = f \text{ в } \Omega,$$

$$(2.58) \quad \frac{\partial u^n}{\partial n} + g p^n = 0 \text{ на } \Gamma_d,$$

причем

$$(2.59) \quad u^n = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d, \text{ если } V \text{ задано по формуле (2.3),}$$

$$(2.60) \quad \frac{\partial u^n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d, \text{ если } V = H^1(\Omega),$$

кроме того,

$$(2.61) \quad P_{\Lambda}(q) = \sup(-1, \inf(1, q)) \quad \forall q \in L^2(\Gamma_d),$$

что позволяет конкретизировать этап (2.57) рассматриваемого алгоритма.

Поскольку отображение  $\gamma_d: v \rightarrow L^2(\Gamma_d)$  линейно и непрерывно, то

$$(2.62) \quad \|\gamma_d v\|_{L^2(\Gamma_d)} \leq \|v\|_V \quad \forall v \in V;$$

и, следовательно, из теоремы 4.1 разд. 4.3 гл. 2 вытекает, что

$$(2.63) \quad u^n \rightarrow u \text{ сильно в } V,$$

если только выполнено условие <sup>1)</sup>

$$(2.64) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < \frac{2}{g^2 \|\gamma_d\|^2}. \quad \blacksquare$$

Приближенная задача (2.52) также решается с помощью дискретного аналога алгоритма (2.55)–(2.57).

Обозначим через  $\mu_h = \{\mu_i\}_i$ , где  $M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma_d$  для  $q=1$  и  $M_i \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma_d$  для  $q=2$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$ ; определяем аппроксимацию  $\Lambda_h$  множества  $\Lambda$

$$\Lambda_h = \{\mu_h \mid |M_i| \leq 1 \quad \forall i\},$$

после этого — аппроксимацию  $\mathcal{L}_h$  лагранжиана  $\mathcal{L}$ :

$$(2.65) \quad \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = J_0(v_h) + \frac{g}{2} \sum_i |M_i M_{i+1}| (\mu_i v_h(M_i) + \\ + \mu_{i+1} v_h(M_{i+1})) \quad q=1,$$

$$(2.66) \quad \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = J_0(v_h) + \frac{g}{6} \sum_i |M_i M_{i+1}| (\mu_i v_h(M_i) + \\ + 4\mu_{i+1/2} v_h(M_{i+1/2}) + \mu_{i+1} v_h(M_{i+1})) \quad q=2.$$

Существует единственная седловая точка  $\{u_h, \lambda_h\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_h$  на множестве  $V_h \times \Lambda_h$ , где  $u_h$  — решение приближенной задачи (2.52); таким образом, дискретный аналог алгоритма (2.55)–(2.57) имеет вид

$$(2.67) \quad \lambda_h^0 \in \Lambda_h,$$

$$(2.68) \quad \mathcal{L}_h(u_h^n, \lambda_h^n) \leq \mathcal{L}_h(v_h, \lambda_h^n) \quad \forall v_h \in V_h, u_h^n \in V_h,$$

$$(2.69) \quad \lambda_i^{n+1} = \max(-1, \min(1, \lambda_i^n + \rho_n g u_h^n(M_i)))$$

$$\forall M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma_d \quad q=1, \quad \forall M_i \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma_d \quad q=2.$$

Можно доказать, что при выполнении условия  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1$ , где  $\alpha_1$  достаточно мало,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_h^n = u_h$ , где  $u_h$  — решение задачи (2.52). ■

<sup>1)</sup> Норма отображения  $\gamma_d \in \mathcal{L}(V; L^2(\Gamma_d))$  соответствует выбору в качестве нормы на  $V$  величины  $\left( \int_{\Omega} (\mu v^2 + |\operatorname{grad} v|^2) dx \right)^{1/2}$ .

## 2.8. Пример

Изложенные выше методы аппроксимации и решения мы применим сейчас к задаче, формулировка которой приведена в разд. 2.8.1.

### 2.8.1. Непрерывная задача

Рассмотренная ранее задача (2.1), (2.2) конкретизируется: Геометрическими данными:  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$ ,

$$\Gamma_d = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0\} \cup \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 1\}.$$

Пространством  $V: V = \{v | v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d\}$ . Функцией  $f$ :

$$f(x) = 10, \text{ если } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \times ]0,1[, f(x) = -10, \\ \text{если } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times ]0,1[.$$

Численными значениями параметров:  $\mu = 0; g = 0, 2, 0,5, 1, 1, 5, 2$ .

Из условия  $v = 0$  на  $\Gamma - \Gamma_d$  вытекает, что заданное на  $V$  отображение  $v \rightarrow \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx \right)^{1/2}$  определяет на  $V$  норму, эквивалентную индуцированной из  $H^1(\Omega)$  норме. Следовательно, в выражении (2.2) можно положить  $\mu = 0$ . ■

### 2.8.2. Приближенная задача

Случай  $q = 1$  ( $q = 2$ ) соответствует аппроксимации конечными элементами первого (второго) порядка; при решении приближенной задачи, определяемой неравенством (2.52), была использована триангуляция, показанная на рис. 1.9 для  $q = 1$  и рис. 1.10 для  $q = 2$ , т. е. для  $q = 1$  мы имеем 512 треугольников (для  $q = 2$  — 128 треугольников), 289 узлов и 255 степеней свободы.

Явная формулировка приближенной задачи для  $q = 1$  ( $q = 2$ ) получается с использованием зависимостей разд. 1.6.1 (соответственно (1.6.2)) и формулы (2.50) (соответственно (2.51)). ■

### 2.8.3. Решение методом верхней релаксации

Приближенная задача (2.52) эквивалентна следующей конечномерной задаче оптимизации:

$$(2.70) \quad J_h(u_h) \leq J_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_h \in V_h,$$

где

$$J_h(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h|^2 dx + j_h(v_h) - \int_{\Omega} f v_h dx;$$

для решения задачи (2.70) используется алгоритм <sup>1)</sup>:

(2.71) в пространстве  $\mathbb{R}^{N_h}$  задается элемент  $u_h^0 = (u_1^0, \dots, u_{N_h}^0)$ , зная  $u_h^n$ , определяем последовательно координаты элемента  $u_h^{n+1}$  из условия

$$(2.72) \quad J_h(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1/2}, u_{i+1}^n, \dots) \leqslant \\ \leqslant J_h(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots) \quad \forall v_i \in \mathbb{R},$$

$$(2.73) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \omega (u_i^{n+1/2} - u_i^n).$$

В качестве начального приближения для алгоритма (2.71) — (2.73) в рассматриваемой здесь задаче использовался элемент  $u_h^0 = 0$ , условие останова было выбрано в виде

$$\frac{\sum_l |u_l^{n+1} - u_l^n|}{\sum_l |u_l^{n+1}|} \leq 10^{-5}.$$

### Анализ численных результатов

Некоторые данные, относящиеся к решению приближенных задач и полученным результатам, приведены в табл. 2.1; через  $\mu_1(u_h)$  и  $\mu_2(u_h)$  обозначены следующие величины:

$$\mu_1(u_h) = \max M \in \Sigma_h q=1, M \in \Sigma_h \cup \Sigma'_h, q=2,$$

$$\mu_2(u_h) = \max M \in \Sigma_h \cap \Gamma q=1, M \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma, q=2.$$

Таблица 2.1

g	Параметр верхней релаксации		$\mu_1(u_h)$		$\mu_2(u_h)$		Число итераций	
	$\omega$	$q=1$	$q=2$	$q=1$	$q=2$	$q=1$	$q=2$	$q=1$
0,2	1,74	1,75	0,309	0,309	0,276	0,275	26	40
0,5	1,74	1,75	0,304	0,304	0,221	0,219	26	30
1	1,74	1,75	0,295	0,295	0,129	0,126	26	33
1,5	1,74	1,75	0,286	0,287	0,040	0,038	25	35
2	1,74	1,75	0,284	0,284	0	0	27	37

<sup>1)</sup> Обозначения совпадают с обозначениями разд. 1.6.3.

Все вычисления были проведены на ЭВМ СИИ 10070, время, затрачиваемое на выполнение 1 итерации, в среднем равно 0,2 с для  $q = 1$  и 0,4 с для  $q = 2$ .

Зависимость  $x_1 \rightarrow u_h(x_1, \frac{1}{2})$  ( $x_1 \rightarrow u_h(x_1, 0)$ ), построенная для  $q = 1$ , показана на рис. 2.1 (рис. 2.2).

Линии уровня найденного решения (для  $q = 1$ ) приведены на рис. 2.3 и 2.4.

**Замечание 2.6.** Решения приближенной задачи (1.27) разд. 1.3.3 для тех же условий, что и в рассматриваемой здесь задаче, практически совпадают с решениями задачи (2.52), как только  $k \leq 10^{-8}$ ; это совпадение экспериментально подтверждает результаты разд. 2.3. ■

#### 2.8.4. Решение с использованием метода двойственности

Построим сейчас решение приближенной задачи, рассмотренной в разд. 2.8.1, 2.8.2, при помощи алгоритма двойственности (2.67)–(2.69), ограничиваясь случаем  $q = 1$ ; метод реализуется при следующих условиях.

*Начальное приближение для алгоритма (2.67)–(2.69):  $\lambda_h^0 = 0$*

Решение задачи (2.68): методом поточечной верхней релаксации при оптимальном значении параметра и с начальным приближением  $u_h^{n-1}$ .

Выбор  $\rho_n$ : выбиралось значение  $\rho_n = \rho$ , не зависящее от индекса  $n$ .

Условие останова алгоритма (2.67)–(2.69):

$$(2.74) \quad \frac{\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\sum_i |u_i^n|} \leq 10^{-4}.$$

Результаты, полученные этим методом, совпадают с результатами, найденными по методу верхней релаксации разд. 2.8.3; зависимость числа необходимых для сходимости алгоритма итераций от параметра  $\rho$  приведена в табл. 2.2.

**Замечание 2.6.** Установлено, что для значений  $g = 0,2, 0,5$  и 1 величина  $|\lambda_h|$  всюду равна 1; отсюда следует, что алгоритм (2.67)–(2.69) в действительности сходится для любого положительного значения  $\rho$ , однако для значений  $g = 1,5$  и 2 величина  $|\lambda_h|$  строго меньше 1, и алгоритм расходится, если  $\rho$  слишком велико. ■

**Замечание 2.7.** Для примера, рассмотренного в разд. 2.8.1, получим оценку сверху для величины  $\frac{2}{g^2 \| \gamma_d \|^2}$ , фигурирующей

Таблица 2.2

$\rho$	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9
$g$											
0,2				22	15	12	10	9	8	7	7
0,5		21		12	9	7	6	5	5	5	4
1		17		9	7	6	5	4	3	3	3
1,5		37		21	15	7	9	$+\infty$			
2	25	17	12	$+\infty$							

в условиях сходимости алгоритма двойственности (2.55) — (2.57); напомним (см. разд. 2.7.3, формула (2.64)), что алгоритм (2.55) — (2.57) сходится, если

$$0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < \frac{2}{\|g^*\| \|\gamma_d\|^2}.$$

В рассматриваемом случае  $V = \{v | v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma - \Gamma_d\}$ , следовательно, в качестве нормы на  $V$  можно выбрать величину

$$\|v\| = \left( \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Собственные функции оператора  $-\Delta$  в пространстве  $V$ , т. е. решения задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \text{ в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \Gamma - \Gamma_d, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_d, \end{aligned}$$

равные

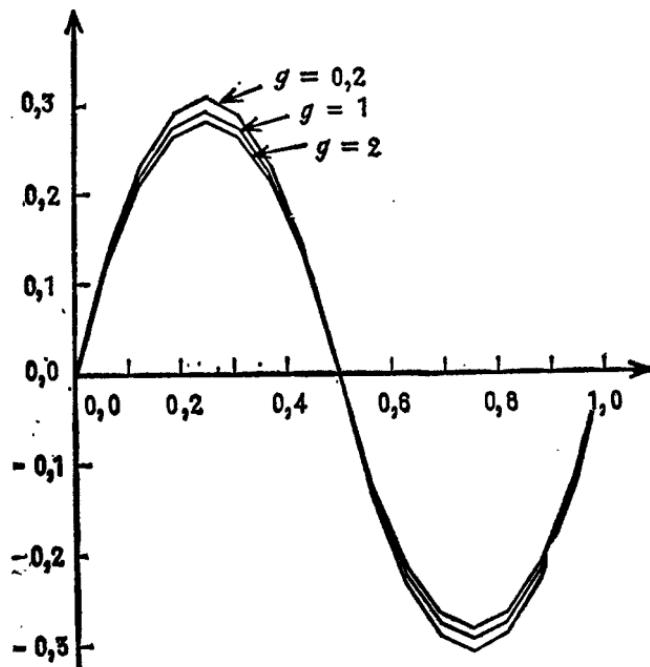
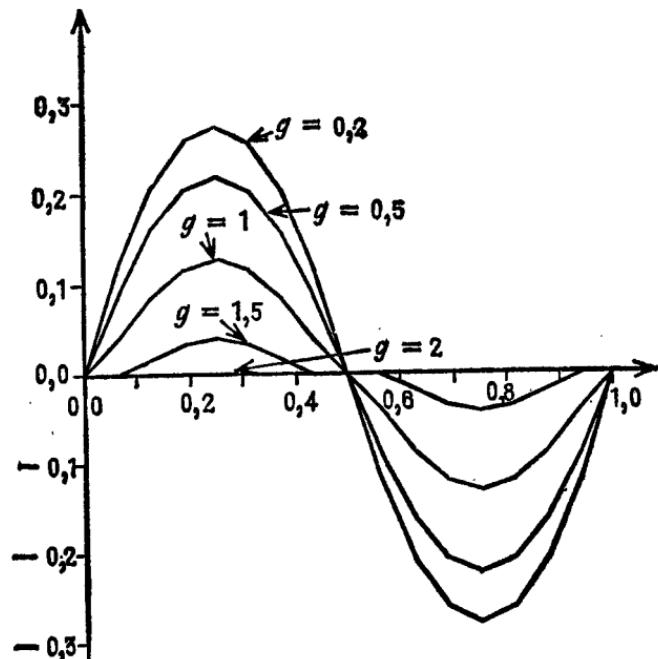
$$\begin{aligned} u_{m0} &= \sqrt{2} \sin m\pi x_1, \quad m \geq 1, \\ u_{mn} &= 2 \sin mx_1 \cos nx_2, \quad m, n \geq 1, \end{aligned}$$

образуют базис в пространстве  $V$  (ортонормированный в  $L^2(\Omega)$ ), следовательно, для всех  $v \in V$ :

$$v(x_1, x_2) = \sum_{m \geq 1} v_m \sqrt{2} \sin mx_1 + \sum_{m, n \geq 1} v_{mn} 2 \sin mx_1 \cos nx_2.$$

Из этой формулы находим, что

$$(2.75) \|v\|^2 = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx = \pi^2 \left( \sum_{m \geq 1} m^2 v_{m0}^2 + \sum_{m, n \geq 1} (m^2 + n^2) v_{mn}^2 \right).$$

Рис. 2.1. График функции  $u(x_1, 1/2)$  ( $q = 1$ ).Рис. 2.2. График функции  $u(x_1, 0)$  ( $q = 1$ ).

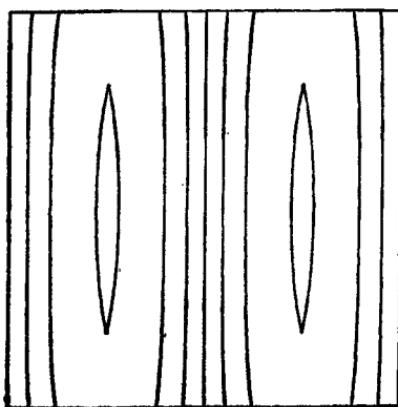


Рис. 2.3. Линии уровня функции  $u$  ( $g=0,2$ ).

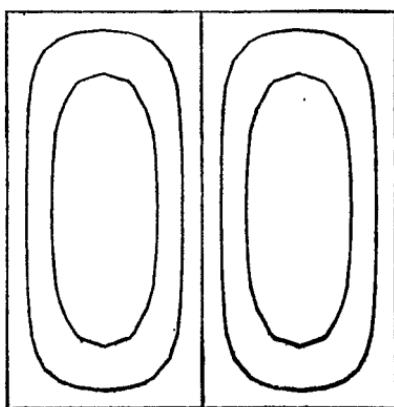


Рис. 2.4. Линии уровня функции  $u$  ( $g=1,5$ ).

Для следов функций на  $\Gamma_d$  имеем

$$v(x_1, 0) = \sum_{m \geq 1} V\sqrt{2} \sin m\pi x_1 \left( v_{m0} + V\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} v_{mn} \right),$$

$$v(x_1, 1) = \sum_{m \geq 1} V\sqrt{2} \sin m\pi x_1 \left( v_{m0} + V\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^n v_{mn} \right),$$

откуда следуют формулы

$$\int_0^1 |v(x_1, 0)|^2 dx_1 = \sum_{m \geq 1} \left( v_{m0} + V\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} v_{mn} \right)^2,$$

$$\int_0^1 |v(x_1, 1)|^2 dx_1 = \sum_{m \geq 1} \left( v_{m0} + V\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^n v_{mn} \right)^2,$$

из которых вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_d} v^2 d\Gamma &\leq 2 \sum_{m \geq 1} \left( |v_{m0}| + V\sqrt{2} \sum_{n \geq 1} |v_{mn}| \right)^2 \leq \\ &\leq 4 \sum_{m \geq 1} \left( |v_{m0}| + \sum_{n \geq 1} |v_{mn}| \right)^2 = \\ &= 4 \sum_{m \geq 1} \left( |v_{m0}| + \sum_{n \geq 1} n |v_{mn}| \frac{1}{n} \right)^2 \leq \\ &\leq 4 \sum_{m \geq 1} \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right) \left( v_{m0}^2 + \sum_{n \geq 1} n^2 v_{mn}^2 \right) \leq \\ &\leq 4 \left( 1 + \frac{\pi^2}{6} \right) \left( \sum_{m \geq 1} m^2 v_{m0}^2 + \sum_{m, n \geq 1} (m^2 + n^2) v_{mn}^2 \right) = \\ &= 4 \left( \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{6} \right) \|v\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\gamma_d\|^2 \leq 4 \left( \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{6} \right)$$

и сходимость алгоритма (2.55)–(2.57) обеспечена, если

$$(2.76) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < \frac{1}{g^2} \frac{3\pi^2}{6 + \pi^2}.$$

Замечая, что  $3\pi^2/(6 + \pi^2) \approx 1.9$ , и имея в виду результаты табл. 2.2, заключаем, что неравенство (2.76) дает достаточно грубую оценку интервала сходимости алгоритма (2.67)–(2.69).

### 2.8.5. Различные замечания

Как уже отмечалось в замечании 5.10 разд. 5.7 гл. 2, алгоритм верхней релаксации экономичнее алгоритма двойственности<sup>1)</sup> как в отношении затрат машинного времени, так и занимаемой памяти ЭВМ. Несмотря на это, алгоритм двойственности выгоден тем, что он одновременно дает аппроксимацию „ множителя“  $p$  и позволяет — за счет небольшой модификации — легко строить решения задачи (2.1)–(2.2), если только имеется в наличии программа решения смешанных задач для уравнений эллиптического типа; в самом деле, очевидно, что главный этап реализации алгоритма (2.67)–(2.69) состоит в решении задачи (2.68). ■

Что касается типа используемых конечных элементов, то, как нам кажется, при одной и той же точности использовать элементы первого порядка ( $q = 1$ ) намного выгоднее, нежели элементы порядка два ( $q = 2$ ); преимущество элементов первого порядка становится еще более заметным в случае, когда граница криволинейна, и это обстоятельство вынуждает использовать изопараметрические криволинейные конечные элементы порядка два<sup>2)</sup>. По нашему мнению, в действительности предыдущее замечание имеет место для любых эллиптических задач второго порядка, если только решения этих задач не слишком регулярны (скажем, не лучше, чем регулярность функций из пространства  $H^2$ ). ■

<sup>1)</sup> По крайней мере при решении задачи (2.1), (2.2).

<sup>2)</sup> Определение и теоретическое исследование криволинейных конечных элементов имеется в работе Сиарле и Равьяра [2] (см. также книгу: Корнеев В. Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности.—Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977).—Прим. перев.

### 3. Одна задача с односторонними ограничениями на границе

#### 3.1. План изложения

В этом разделе мы проведем численное исследование задачи

$$(3.1) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} (v-u) dx + \mu \int_{\Omega} u (v-u) dx \geq \\ & \geq \int_{\Omega} f (v-u) dx \quad \forall v \in K, \\ & u \in K, \end{aligned}$$

где  $f \in L^2(\Omega)$  и

$$(3.2) \quad K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma\}.$$

Один из вариантов этой задачи (в случае  $\mu=0$ ) был уже рассмотрен (с теоретической точки зрения) в разд. 1.1 и 2.1 гл. 1, там же была указана ее физическая интерпретация.

#### 3.2. Результаты относительно существования и единственности решения задачи (3.1), (3.2)

Ниже будем предполагать, что  $\mu > 0$ . Заметим, что задача (3.1), (3.2) эквивалентна задаче разыскания

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & \min_{v \in K} J_0(v), \\ & J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\|\operatorname{grad} v\|^2 + \mu v^2) dx - \int_{\Omega} fv dx; \end{aligned}$$

так как функция  $J_0$  непрерывна и строго выпукла в  $H^1(\Omega)$ , причем

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J_0(v) = +\infty,$$

и так как множество  $K$  выпукло и замкнуто в  $H^1(\Omega)$ , то к задаче (3.3) можно применить теорему 2.1 разд. 2.1 гл. 1, из которой вытекает, что (3.3), а также эквивалентная (3.3) задача (3.1), (3.2) имеет решение, и притом только одно. ■

### 3.3. Результаты, связанные с регулярностью

Известно (см. разд. 8 гл. 2 книги Лионса [1] и работу Брезиса [1]), что в случае, когда граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  достаточно регулярна, решение  $u$  задачи (3.1), (3.2) принадлежит множеству  $K \cap H^2(\Omega)$ , причем  $\|u\|_{H^2\Omega} \leq C \|f\|_{L^2\Omega}$ ,  $C$  — константа, не зависящая от  $u$  и  $f$ . ■

### 3.4. Результаты, связанные с двойственностью

Докажем сначала, что имеет место

**Предложение 3.1.** *Решение  $u$  задачи (3.1), (3.2) характеризуется следующей совокупностью условий:*

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & -\Delta u + \mu u = f \text{ в } \Omega, \\ & u \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma, \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma, \\ & u \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ п. в. на } \Gamma. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Введем обозначение

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + \mu u v) dx;$$

поскольку  $K$  — выпуклый конус с вершиной в нуле, решение  $u$  задачи (3.1), (3.2) на самом деле характеризуется тем, что

$$(3.5) \quad \begin{aligned} & a(u, v) \geq \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in K, \\ & u \in K, \\ & a(u, u) = \int_{\Omega} fu dx; \end{aligned}$$

так как  $\mathcal{D}(\Omega) \subset K$ , то из первого из условий (3.5) следует, что

$$\pm \left( a(u, v) - \int_{\Omega} fv dx \right) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

откуда имеем

$$(3.6) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega);$$

из условия (3.6) вытекает, что

$$(3.7) \quad -\Delta u + \mu u = f \text{ в } \Omega.$$

Умножая это уравнение на элемент  $v \in K$  и используя формулу интегрирования по частям, из условий (3.5) и (3.7) находим

$$(3.8) \quad \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = a(u, v) - \int_{\Omega} fv dx \geqslant 0 \quad \forall v \in K;$$

из (3.8), таким образом, имеем  $\partial u / \partial n \geqslant 0$  п. в. на  $\Gamma$ ; полагая в (3.8)  $v = u$ , найдем, что

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma = 0,$$

и так как  $u \geqslant 0$ ,  $\partial u / \partial n \geqslant 0$  п. в., то  $u(\partial u / \partial n) = 0$  п. в. на  $\Gamma$ , что и завершает доказательство выполнения условий (3.4). ■

Обратно, исходя из условий (3.4), без труда можно перейти к совокупности условий (3.5), характеризующих решение  $u$ . ■

Обозначим через  $\mathcal{L}$  лагранжиан

$$\mathcal{L}(v, q) = J_0(v) - \int_{\Gamma} qv d\Gamma,$$

через  $\Lambda$  — положительный конус в пространстве  $L^2(\Gamma)$ , т. е.

$$\Lambda = \{q | q \in L^2(\Gamma), q \geqslant 0 \text{ п. в. на } \Gamma\};$$

замечая, что из условия  $u \in H^2(\Omega)$  вытекает, что  $\partial u / \partial n \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ , и используя предложение 3.1, можно доказать следующую теорему:<sup>1)</sup>

**Теорема 3.1.** Пусть  $u$  — решение задачи (3.1), (3.2); тогда совокупность  $\{u, \partial u / \partial n\}$  представляет собой единственную седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}$  на множестве  $H^1(\Omega) \times \Lambda$ . ■

Полученный результат будет использован в разд. 3.7 при доказательстве сходимости одного из алгоритмов метода двойственности, представляющего собой разновидность алгоритма, рассмотренного в разд. 2.7.3. ■

### 3.5. Аппроксимация при помощи конечных элементов первого и второго порядков

#### 3.5.1. Формулировка приближенной задачи

Как и в разд. 3.1, предположим, что область  $\Omega$  полигональна; это предположение позволяет выбрать триангуляцию  $\mathcal{T}_h$  так, как это было сделано в разд. 1.3.1, и определить аппроксимацию

<sup>1)</sup> Доказательство теоремы 3.1 представляет собой вариант доказательства теоремы 5.2 разд. 5.6 гл. 2.

$V_h$  пространства  $H^1(\Omega)$  по формуле (1.19). Множество  $K$  аппроксимируем следующим замкнутым выпуклым в  $V_h$  множеством  $K_h$ :

$$(3.9)_1 \quad K_h = K \cap V_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h(P) \geq 0 \quad \forall P \in \Sigma_h \cap \Gamma\}, \quad q=1,$$

$$(3.9)_2 \quad K_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h(P) \geq 0 \quad \forall P \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma\}, \quad q=2.$$

Следует отметить, что  $K_h \not\subset K$  в случае  $q=2$ .

Таким образом, задача (3.1), (3.2) заменяется следующей приближенной задачей

$$(3.10) \quad a(u_h, v_h - u_h) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in K_h \\ u_h \in K_h,$$

которая имеет решение, и притом только одно.

### 3.5.2. Сходимость приближенных решений

Докажем следующую лемму:

**Лемма 3.1.** Имеет место равенство

$$(3.11) \quad \overline{C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K} = K.$$

**Доказательство.** Если  $v \in H^1(\Omega)$ , то  $v = v^+ - v^-$ , где  $v^+, v^- \in H^1(\Omega)$ , и

$$(3.12) \quad K = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v^- \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Учитывая (3.12) и то, что  $\overline{\mathcal{D}(\bar{\Omega})} = H_0^1(\Omega)$ , заключаем, что для доказательства равенства (3.11) достаточно показать, что для  $\forall v \in H^1(\Omega)$  и таких, что  $v \geq 0$  п. в. в  $\Omega$ , можно найти последовательность  $v_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $v_n \geq 0$  в  $\Omega$ , обладающую тем свойством, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$  сильно в  $H^1(\Omega)$ . Если  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $v \geq 0$

п. в., тогда  $v$  допускает продолжение  $\tilde{v}$  в пространство  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , для которого  $\tilde{v} \geq 0$  п. в. в  $\mathbb{R}^2$ ; в самом деле, пусть  $\tilde{v}$ —произвольное продолжение<sup>1)</sup> элемента  $v$  в пространстве  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , из условия  $v \geq 0$  почти всюду в  $\Omega$  следует, что элемент  $\tilde{v} = |v|$  также представляет собой продолжение  $v$  в пространство  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Пусть  $(\rho_n)_n$ —регуляризирующая последовательность, и пусть  $\tilde{v}_n = v * \rho_n$ , тогда  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{v}_n = \tilde{v}$  сильно в  $H^1(\mathbb{R}^2)$ ; кроме того,  $\tilde{v}_n \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  и

$$\tilde{v}_n(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(y) \tilde{v}(y-x) dy \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

<sup>1)</sup> Такое продолжение существует, если граница  $\Gamma$  удовлетворяет условию Липшица (см., например, книгу Нечаса [1]).

поскольку  $\rho_n \geq 0$  и  $\tilde{v} \geq 0$  п. в. в  $\mathbb{R}^2$ .

Пусть  $v_n$  — сужение элемента  $\tilde{v}_n$  на область  $\Omega$ ; из свойств функции  $\tilde{v}_n$  следует, что  $v_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $v_n \geq 0$  в  $\Omega$ , причем  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$  сильно в  $H^1(\Omega)$ . ■■■

С учетом этой леммы имеем теорему:

**Теорема 3.2.** *Если при  $h \rightarrow 0$  углы треугольников из  $\mathcal{T}_h$  остаются ограниченными снизу некоторой константой  $\theta_0 > 0$ , то*

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \text{ сильно в } H^1(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи (3.1), (3.2),  $u_h$  — решение задачи (3.10).

*Доказательство теоремы 3.2 в случае  $q = 1$ .* Используем теорему 4.2 разд. 4.3 гл. 1, учитывая замечание 4.1; таким образом, необходимо проверить, что

- (3.13) (i)  $\forall v \in \chi$ ,  $\bar{\chi} = K$  можно найти элемент  $v_h \in K_h$ , такой, что  $v_h \rightarrow v$  сильно в  $H^1(\Omega)$ ;  
(ii) если  $v_h \in K_h$ ,  $v_h \rightarrow v$  слабо в  $H^1(\Omega)$ , то  $v \in K$ .

Условие (ii) сразу следует из включения  $K_h \subset K$ . Для проверки п. (i) можно в соответствии с леммой 3.1 выбрать  $\chi = C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K$ ; пусть  $\pi_h: C^0(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$  — оператор интерполяции, определяемый по формуле (1.62) разд. 1.4.3. Если  $v \in \chi$ , то

$$v(P) \geq 0 \quad \forall P \in \Sigma_h \cap \Gamma \Rightarrow \pi_h v(P) \geq 0 \quad \forall P \in \Sigma_h \cap \Gamma,$$

следовательно,  $\pi_h v \in K_h \quad \forall v \in \chi$ ;

кроме того,  $\lim_{h \rightarrow 0} \pi_h v = v$  сильно в  $H^1(\Omega)$ , если только выполнено сформулированное в теореме 3.1 ограничение на углы треугольников из  $\mathcal{T}_h$ ; следовательно, для проверки условия (i) достаточно выбрать

$$\chi = C^\infty(\bar{\Omega}) \cap K \quad \text{и} \quad v_h = \pi_h v. \blacksquare$$

*Доказательство теоремы 3.2 в случае  $q = 2$ .* В этом случае дело сводится, как и ранее, к проверке условий (3.13); пункт (i) в этих условиях проверяется точно так же, как и в случае  $q = 1$ ; следовательно, необходимо установить, что выполнен п. (ii). Пусть  $\varphi \in C^0(\Gamma)$ ; используя обозначения, показанные на рис. 1.5 разд. 1.4.1, определим кусочно-постоянную на  $\Gamma$  функцию  $\varphi_h$  по формуле

$$(3.14) \quad \varphi_h(P) = \sum_i \varphi(M_{i+1/2}) \chi_{i+1/2}(P),$$

где  $\chi_{i+1/2}$  — характеристическая функция многообразия  $M_i M_{i+1}$ .

имеем:

$$(3.15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h = \varphi \text{ равномерно для } \forall \varphi \in C^0(\Gamma), \text{ и } \varphi_h \geq 0,$$

если  $\varphi \geq 0$ .

Так как формула Симпсона — точная для полиномов степени  $\leq 3$ , то

$$\int_{\Gamma} \varphi_h v_h d\Gamma = \frac{1}{6} \sum_i [M_i M_{i+1}] [v_h(M_i) + 4v_h(M_{i+1/2}) + v_h(M_{i+1})] \varphi(M_{i+1/2}) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall \varphi \in C^0(\Gamma),$$

откуда в силу условия (3.9)<sub>2</sub> имеем

$$(3.16) \quad \int_{\Gamma} \varphi_h v_h d\Gamma \geq 0 \quad \forall v_h \in K_h, \quad \forall \varphi \in C^0(\Gamma), \quad \varphi \geq 0.$$

Если  $v_h \rightarrow v$  слабо в  $H^1(\Omega)$ , то  $v_h \rightarrow v$  сильно в  $L^2(\Gamma)$ , откуда с учетом условия (3.15) вытекает, что

$$(3.17) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \varphi_h v_h d\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi v d\Gamma \quad \forall \varphi \in C^0(\Gamma).$$

Кроме того, если  $v_h \in K_h$ , то из условий (3.16), (3.17) следует неравенство

$$(3.18) \quad \int_{\Gamma} \varphi v d\Gamma \geq 0 \quad \forall \varphi \in C^0(\Gamma), \quad \varphi \geq 0,$$

из которого имеем, что  $v \geq 0$  на  $\Gamma$ , что и требовалось доказать. ■

### 3.6. Численное решение приближенных задач

#### План изложения

В этом разделе будет исследовано решение приближенной задачи (3.10) методом поточечной верхней релаксации с проекцией разд. 1.4 гл. 2 и с использованием алгоритма двойственности типа Удзавы, описание которого было дано в разд. 4.3 гл. 2.

#### 3.6.1. Формулировка приближенных задач

Для получения развернутых формулировок приближенной задачи (3.10) в случае  $q=1$  ( $q=2$ ) используем определение (3.9)<sub>1</sub> ((3.9)<sub>2</sub>) и формулы разд. 1.6.1 (1.6.2). ■

### 3.6.2. Решение приближенной задачи методом верхней релаксации с проекцией

Приближенная задача (3.10) эквивалентна конечномерной задаче

$$(3.19) \quad \min_{v_h \in K_h} J_0(v_h),$$

$$J_0(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v_h|^2 + \mu v_h^2) dx - \int_{\Omega} f v_h dx.$$

Учитывая структуру множества  $K_h$  для  $q=1$  (см. формулу (3.9)<sub>1</sub>), для  $q=2$  — (3.9)<sub>2</sub>, заключаем, что для решения задачи (3.19) можно применить метод поточечной верхней релаксации с проекцией, описание которого приведено в разд. 1.4 гл. 2, сходящийся для всех  $\omega \in ]0, 2[$ .

### 3.6.3. Решение приближенной задачи методом двойственности

Рассмотрим сначала случай непрерывной задачи; задача (3.1), (3.2) принадлежит классу задач, рассмотренных в разд. 4 гл. 2, если положить

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v|^2 + \mu v^2) dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

$$\mathcal{L}(v, q) = J_0(v) - \int_{\Gamma} q v d\Gamma,$$

$$M = V = H^1(\Omega), \quad L = L^2(\Gamma), \quad \Phi(v) = -\gamma_0 v, \quad \Lambda = L_+^2(\Gamma).$$

Учитывая теорему 3.1 (разд. 3.4), заключаем, что для решения задачи (3.1), (3.2) можно применить алгоритм (4.12) — (4.15) разд. 4.3 гл. 2, который в данном частном случае принимает форму:

$$(3.20) \quad p^0 \in \Lambda \text{ выбирается произвольно (например, } p_0 = 0\text{),}$$

$$(3.21) \quad \mathcal{L}(u^n, p^n) \leq \mathcal{L}(v, p^n) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad u^n \in V,$$

$$(3.22) \quad p^{n+1} = P_{\Lambda}(p^n - \rho_n \gamma_0 u^n), \quad \rho_n > 0.$$

Раскрывая неравенство (3.21), получаем задачу Неймана:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} -\Delta u^n + \mu u^n &= f \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial u^n}{\partial n} &= \lambda^n \text{ на } \Gamma, \end{aligned}$$

кроме того,

$$(3.24) \quad (P_{\Lambda}(q)) = q^+ \quad \forall q \in L^2(\Gamma),$$

и эта формула позволяет получить явный вид задачи (3.22).

Так как отображение  $\gamma_0$  — линейное и непрерывное из  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ , то

$$(3.25) \quad \|\gamma_0 v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\gamma_0\| \left( \int_{\Omega} (|\operatorname{grad} v|^2 + \mu v^2) dx \right)^{1/2}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega);$$

следовательно, из теоремы разд. 4.3 гл. 2 получаем, что

$$(3.26) \quad u^n \rightarrow u \text{ сильно в } H^1(\Omega),$$

если только выполнено условие

$$(3.27) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < \frac{2}{\|\gamma_0\|^2}. \blacksquare$$

Приближенная задача (3.10) также решается при помощи дискретного аналога алгоритма (3.20) — (3.22):

Обозначаем  $\mu_h = \{\mu_i\}_l$ , где  $M_i \in \Sigma_h$ , если  $q=1$ ,

$M_i \in \Sigma_h \cup \Sigma'_h$ , если  $q=2$ .

Определяем аппроксимацию  $\Lambda_h$  множества  $\Lambda$  по формуле

$$\Lambda_h = \{\mu_h \mid \mu_i \geq 0 \quad \forall i\},$$

и аппроксимацию  $\mathcal{L}_h$  лагранжиана  $\mathcal{L}$  — по формуле

$$(3.28) \quad \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = J_0(v_h) - \frac{1}{2} \sum_i |M_i M_{i+1}| (\mu_i v_h(M_i) + \\ + \mu_{i+1} v_h(M_{i+1})), \text{ если } q=1,$$

$$(3.29) \quad \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = J_0(v_h) - \frac{1}{6} \sum_i |M_i M_{i+1}| (\mu_i v_h(M_i) + \\ + 4\mu_{i+1/2} v_h(M_{i+1/2}) + \mu_{i+1} v_h(M_{i+1})), \quad q=2.$$

Существует единственная седловая точка<sup>1)</sup>  $\{u_h, \lambda_h\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_h$  на множестве  $V_h \times \Lambda_h$ , где  $u_h$  — решение задачи (3.10); таким образом, дискретный аналог алгоритма (3.20) — (3.23) имеет форму

$$(3.30) \quad \lambda_h \in \Lambda_h,$$

$$(3.31) \quad \mathcal{L}_h(u_h^n, \lambda_h^n) \leq \mathcal{L}_h(v_h, \lambda_h^n) \quad \forall v_h \in V_h, u_h^n \in V_h,$$

$$(3.32) \quad \lambda_i^{n+1} = [\lambda_i^n - \rho_n u_h^n(M_i)]^+ \quad \forall M_i \in \Sigma_h, \quad q=1, \\ \forall M_i \in \Sigma_h \cup \Sigma'_h, \quad q=2.$$

Можно доказать, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_h^n = u_h$ , где  $u_h$  — решение задачи (3.10), если только выполнено условие  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1$  и  $\alpha_1$  достаточно мало. ■

<sup>1)</sup>  $\lambda_h$  — переменная Куна — Таккера для задачи (3.19).

### 3.7. Пример

#### 3.7.1. Формулировка непрерывной задачи

Пусть  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\Gamma_d$ ,  $V$  и  $f$  заданы так, как и в разд. 2.8.1; изложенные выше методы аппроксимации и решения были применены для решения следующего<sup>1)</sup> варианта задач (3.1), (3.2):

$$\min_{v \in K} J_0(v),$$

$$(3.33) \quad J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx,$$

$$(3.34) \quad K = \{v | v \in V, v \geq 0 \text{ п. в. на } \Gamma_d\}.$$

#### 3.7.2. Приближенная задача

Будем действовать, как и в разд. 2.8.2, используя построенную там триангуляцию.

#### 3.7.3. Решение методом верхней релаксации

Был использован алгоритм поточечной верхней релаксации с проекцией разд. 1.4 гл. 2 при следующих исходных данных (для значений  $q=1$  и  $2$ ):

Начальное приближение:  $u_h^0 = 0$ .

Условие останова:

$$\frac{\sum_i |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\sum_i |u_i^{n+1}|} \leq 10^{-5}.$$

Значение параметра  $\omega$ :  $\omega = 1,74$ . ■

Анализ численных результатов: для значения  $q=1$  имеет место сходимость за 27 итераций, для  $q=2$  — за 42 итерации.

Затраты машинного времени на 1 итерацию составляют в среднем (для ЭВМ СII 10070) 0,2 с для  $q=1$  и 0,4 с, если  $q=2$ .

Графики функций  $x_1 \rightarrow u_h(x_1, 0)$  и  $x_1 \rightarrow u_h(x_1, \frac{1}{2})$  приведены на рис. 3.1, на рис. 3.2 показаны линии уровня приближенного решения  $u_h$ .

<sup>1)</sup> Таким образом, здесь  $\mu=0$ .

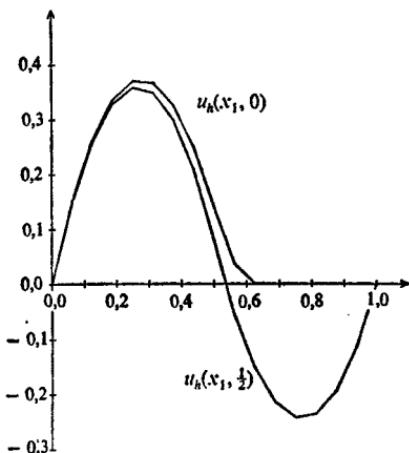


Рис. 3.1.

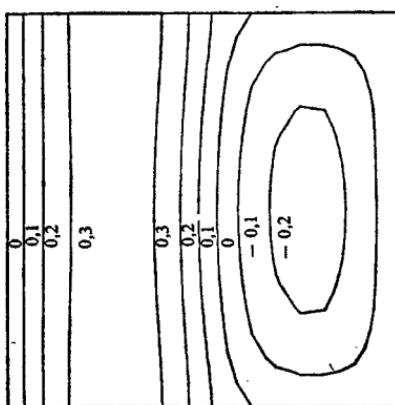


Рис. 3.2.

### 3.7.4. Решение методом двойственности

Ограничимся случаем  $q = 1$ , т. е. фактически используем алгоритм (3.30)–(3.32), когда в формуле (3.32) точки  $M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma_d$ . При условиях реализации алгоритма, совпадающих с условиями разд. 2.8.4, было установлено, что полученные результаты совпадают с результатами, полученными методом поточечной верхней релаксации с проекцией в разд. 3.7.3. Числа итераций, необходимых для достижения сходимости, в зависимости от параметра  $\rho$  приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

$\rho$	2	4	6	8	10
Число итераций	27	16	12	17	$+\infty$

Замечания разд. 2.8.5 о сравнении достоинств различных методов аппроксимации и численного решения сохраняются и для задачи, рассмотренной в данном разделе. ■

## 4. Численное исследование вариационных неравенств четвертого порядка

### 4.1. План изложения

В этом разделе будет приведено описание некоторых численных способов решения вариационных задач 4-го порядка, спе-

цифических именно для этих задач. В подтверждение того обстоятельства, что эти задачи важные и сложные, можно указать на исследования, намного более обширные, чем сжато представленный здесь материал. По поводу теоретического исследования и механической интерпретации вариационных неравенств 4-го порядка мы отсылаем к работам Дюво и Лионса гл. 4 книги [1] и работам [4] и [5], кроме того, некоторые дополнительные факты, касающиеся очень кратко рассмотренных в данном разд. 4 применений метода конечных элементов и итерационных методов решения, можно найти в работах Бежи и Гловински [1], Сиарле и Гловински [1], Сиарле и Равьяра [3], Гловински [6]<sup>1)</sup>. ■

## 4.2. Итерационный метод решения некоторых вариационных задач четвертого порядка

В этом разделе будет доказано, что некоторые вариационные задачи 4-го порядка можно с использованием итерационной процедуры привести к решению последовательности задач 2-го порядка.

### 4.2.1. Сведение задачи Дирихле для оператора $\Delta^2$ к последовательности задач второго порядка

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  — открытая ограниченная область с регулярной границей; задача Дирихле (однородная) для оператора  $\Delta^2$  определяется следующим образом:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u &= f \text{ в } \Omega, \\ u \Big|_{\Gamma} &= \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

*Определение функциональных пространств и обозначения*  
Пусть

$$\begin{aligned} V &= H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)} = \\ &= \left\{ v \mid v \in H^1(\Omega), v \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}; \end{aligned}$$

так как область  $\Omega$  ограничена и ее граница  $\Gamma$  достаточно регулярна, то отображение

$$v \rightarrow \|\Delta v\|_{L^1(\Omega)}$$

определяет на  $V$  норму, эквивалентную норме, индуцированной из пространства  $H^2(\Omega)$ . Через  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  будем обозначать отобра-

<sup>1)</sup> См. также библиографию к этим работам.

жения, соответствующие вычислению следов:  $\gamma_0 v = v|_{\Gamma}$ ,  $\gamma_1 v = -\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma}$ . ■

*Вариационная формулировка задачи (4.1). Результаты о существовании, единственности и регулярности решения*

Предположим (временно), что  $f \in H^{-2}(\Omega)$  ( $H^{-2}(\Omega)$ ) означает: топологически сопряженное к  $H_0^2(\Omega)$ ; известно, что задача (4.1) в этом случае имеет в пространстве  $H_0^2(\Omega)$ ; решение, и притом только одно; это решение одновременно является решением вариационного уравнения

$$(4.2) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

$$u \in H_0^2(\Omega),$$

а также следующей задачи оптимизации:

$$(4.3) \quad \min_{v \in H^2(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 \, dx - \langle f, v \rangle \right].$$

Угловые скобки  $\langle , \rangle$  в формулах (4.2) и (4.3) означают билинейную форму, относительно которой пространства  $H^{-2}(\Omega)$  и  $H_0^2(\Omega)$  приводятся в двойственность.

Что касается регулярности решения, то здесь мы ограничимся следующим утверждением (доказательство см. в книге Лионса и Мадженеса [1]):

если  $f \in L^q(\Omega)$ <sup>1)</sup>, то  $u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ . ■

#### *Описание итерационного метода*

Ниже будем предполагать, что  $f \in L^q(\Omega)$ ; рассмотрим следующий алгоритм:

(4.4) элемент  $\lambda^n$  выбирается произвольно в пространстве  $L^2(\Gamma)$  (например, полагаем  $\lambda^n = 0$ ),

пусть  $\lambda^n$  известно, определим тогда элементы  $u^n \in V$  и  $\lambda^{n+1} \in L^2(\Gamma)$  из решения следующих задач:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u^n &= f, \\ \gamma_0 u^n &= 0, \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \gamma_0 \Delta u^n &= -\lambda^n, \\ \lambda^{n+1} &= \lambda^n + \rho_n \gamma_1 u^n, \quad \rho_n > 0. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Следовательно, здесь  $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx$ .

### Сходимость алгоритма (4.4)–(4.6)

Имеет место

**Теорема 4.1.** Последовательность  $(u^n)_n$ , определяемая алгоритмом (4.4)–(4.6), сходится в  $V$  сильно к решению и задачи (4.1), если

$$(4.7) \quad 0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < 2\sigma_0^2,$$

где

$$(4.8) \quad \sigma_0 = \inf_{v \in H^2 \cap H_0^1} \frac{\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}}{\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\Gamma)}}.$$

**Доказательство.** Будем следовать работе Гловински [6]; пусть  $u$  — решение задачи (4.1), как было отмечено,  $u \in H^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ , откуда следует, что  $\gamma_0 \Delta u \in H^{3/2}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ ; положим  $\lambda = -\gamma_0 \Delta u$ ,  $\bar{u}^n = u^n - u$ ,  $\bar{\lambda}^n = \lambda^n - \lambda$ . Так как  $\gamma_1 u = 0$ , то

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u &= f, \\ \gamma_0 u &= 0, \\ \gamma_0 \Delta u &= -\lambda \end{aligned}$$

и

$$(4.10) \quad \lambda = \lambda + \rho_n \gamma_1 u;$$

вычитая из этих уравнений соответствующие уравнения группы (4.5), (4.6), найдем:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \Delta^2 \bar{u}^n &= 0, \\ \gamma_0 \bar{u}^n &= 0, \end{aligned}$$

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \gamma_0 \Delta \bar{u}^n &= -\bar{\lambda}^n, \\ \bar{\lambda}^{n+1} &= \bar{\lambda}^n + \rho_n \gamma_1 \bar{u}^n. \end{aligned}$$

Пусть  $\mu \in L^2(\Gamma)$ , обозначим  $|\mu| = \|\mu\|_{L^2(\Gamma)}$ ; тогда из (4.12) находим, что

$$(4.13) \quad |\bar{\lambda}^n|^2 - |\bar{\lambda}^{n+1}|^2 = -2\rho_n \int_{\Gamma} \bar{\lambda}^n \gamma_1 \bar{u}^n d\Gamma - \rho_n^2 |\gamma_1 \bar{u}^n|^2.$$

С использованием формулы Грина

$$(4.14) \quad \int_{\Omega} (v \Delta w - w \Delta v) dx = \int_{\Gamma} \left( v \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Gamma,$$

и формул (4.12), (4.13) получаем

$$0 = \int_{\Omega} \Delta^2 \bar{u}^n \bar{u}^n dx = \int_{\Omega} |\Delta \bar{u}^n|^2 dx - \int_{\Gamma} \gamma_0 \Delta \bar{u}^n \gamma_1 \bar{u}^n d\Gamma$$

и далее

$$|\bar{\lambda}^n|^2 - |\bar{\lambda}^{n+1}|^2 = 2\rho_n \|\Delta \bar{u}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \rho_n^2 |\gamma_1 \bar{u}^n|_{L^2(\Gamma)}^2,$$

откуда и из определения  $\sigma_0$  следует, что

$$(4.15) \quad |\bar{\lambda}^n|^2 - |\bar{\lambda}^{n+1}|^2 \geq \rho_n \left(2 - \frac{\rho_n}{\sigma_0^2}\right) \|\Delta \bar{u}^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Учитывая условие (4.7), из неравенства (4.15) заключаем, что последовательность  $|\bar{\lambda}^n|$  — убывающая и сходящаяся, следовательно,  $|\bar{\lambda}^n|^2 - |\bar{\lambda}^{n+1}|^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , откуда вытекает, что  $\Delta \bar{u}^n \rightarrow 0$  сильно в  $L^2(\Omega)$ , что и доказывает теорему. ■

*Замечание 4.1.* Из условия (4.7) и оценки (4.15) заключаем, что последовательность  $\lambda^n$  ограничена в  $L^2(\Gamma)$ , откуда с учетом (4.5) имеем ограниченность последовательности  $u^n$  в пространстве  $H^{5/2}(\Omega)$ , что в совокупности с теоремой 4.1 доказывает сильную сходимость  $u^n \rightarrow u$  в  $H^s(\Omega)$  для  $\forall s < \frac{5}{2}$ . ■

*Замечание 4.2.* Для неоднородной задачи

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в } \Omega,$$

$$\gamma_0 u = g_1, \quad \gamma_1 u = g_2$$

можно в случае достаточно регулярных  $g_1$  и  $g_2$  использовать следующее обобщение алгоритма (4.4)–(4.6):

(4.16)  $\lambda^0$  выбирается произвольно в  $L^2(\Gamma)$ ,

$$\Delta^2 u^n = f,$$

$$(4.17) \quad \gamma_0 u^n = g_1,$$

$$\gamma_0 \Delta u^n = -\lambda^n,$$

$$(4.18) \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n (\gamma_1 u^n - g_2), \quad \rho_n > 0,$$

при выполнении прежних ограничений (4.7) на параметр  $\rho$  сходимость данного алгоритма доказывается точно так же, как это было сделано выше. ■

*Замечание 4.3.* Пусть  $x_0 \in \Omega$ ,  $\delta(x_0)$  — мера Дирака, сосредоточенная в точке  $x_0$ ; если  $N = 2$ ,  $s > 1$ , то  $H^s(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ , причем это вложение непрерывно, следовательно,  $\delta(x_0)$  линейна и непрерывна на  $H^s(\Omega)$ , если только  $s > 1$ . Отсюда вытекает (см. книгу Лионса и Мадженеса [1]), что, если в формуле (4.1)  $f = \delta(x_0)$ <sup>1</sup>), то  $u \in H_0^s(\Omega) \cap H^s(\Omega)$   $\forall s < 3$ , следовательно,  $\gamma_0 \Delta u \in L^2(\Gamma)$ .

1) Это важно для некоторых приложений.

что позволяет — с учетом применимости теоремы 4.1 в данном случае — использовать для решения задачи (4.1) алгоритм (4.4) — (4.6). ■

**Замечание 4.4.** В силу (4.5) (это замечание справедливо также для (4.16) — (4.18)) задача определения приближения  $u^n$  по известному  $\lambda^n$  приводится при помощи факторизации к двум задачам Дирихле для оператора  $-\Delta$ .

$$(4.19) \quad -\Delta p^n = f \text{ в } \Omega, \quad -\Delta u^n = p^n \text{ в } \Omega, \\ \gamma_0 p^n = \lambda^n, \quad \gamma_0 u^n = 0.$$

Это замечание имеет фундаментальное значение, так как из него вытекает, что решение задачи (4.1) можно привести к решению последовательности задач Дирихле для оператора  $-\Delta$ .

Таким образом, для функций  $u^n$  и  $p^n$  естественным является использование аппроксимаций в пространстве  $H^1(\Omega)$ , что приводит к внешним аппроксимациям для  $u^n$ ; к этому моменту мы вернемся ниже, в разд. 4.3, 4.4, 4.5. ■

*Результаты применения метода двойственности. Интерпретация алгоритма (4.4) — (4.6)*

Сохраним гипотезу о том, что  $f \in L^2(\Omega)$ , и обозначение  $\lambda = -\gamma_0 \Delta u$ ; лагранжиан  $\mathcal{L}: V \times L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующий задаче (4.3), определим по формуле

$$(4.20) \quad \mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Gamma} \mu \gamma_1 v d\Gamma.$$

Теперь можно доказать (см. разд. 1.4 цитированной выше работы Гловински), что имеет место

**Теорема 4.2.** Пара  $(u, \lambda)$  представляет собой единственную седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}$  на множестве

$$V \times L^2(\Gamma). \blacksquare$$

Учитывая теорему 4.2, заключаем, что для разыскания седловой точки  $\mathcal{L}$  можно применить алгоритм (4.12) — (4.13) разд. 4.3 гл. 2, в котором  $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $M = V$ ,  $L = L^2(\Gamma)$ ,  $\Lambda = L$ ,  $\Phi = \gamma_1$ ; полученный таким образом алгоритм есть не что иное, как алгоритм (4.4) — (4.6). ■

*Один вариант алгоритма (4.4) — (4.6)*

Если  $v \in H^2(\Omega)$ , то  $\partial v / \partial n \in H^{1/2}(\Gamma)$ , и, следовательно, лагранжиан  $\tilde{\mathcal{L}}$ , определенный по формуле (4.20), естественно продолжить на пространство  $V \times H^{-1/2}(\Gamma)$ ; в этом случае

$$(4.21) \quad \tilde{\mathcal{L}}(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx + \langle \mu, \gamma_1 v \rangle;$$

в выражении (4.21) угловые скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означают билинейную форму, относительно которой пространства  $H^{-1/2}(\Gamma)$  и  $H^{1/2}(\Gamma)$  приведены в двойственность<sup>1)</sup>.

Пусть  $S: H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  — оператор двойственности<sup>2)</sup>, рассмотрим следующий вариант алгоритма (4.4) — (4.6):

(4.22) элемент  $\lambda^0 \in H^{-1/2}(\Gamma)$  выбирается произвольно (например, полагаем  $\lambda^0 = 0$ ),

после вычисления  $\lambda^n$  определяем поочередно  $u^n$  и  $\lambda^{n+1} \in H^{-1/2}(\Gamma)$  из решений следующих задач:

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u^n &= f, \\ \gamma_0 u^n &= 0, \\ \gamma_0 \Delta u^n &= -\lambda^n, \end{aligned}$$

$$(4.24) \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n S \gamma_1 u^n, \quad \rho_n > 0.$$

С использованием рассуждений, представляющих собой вариант доказательства теоремы 4.1, можно доказать, что имеет место

**Теорема 4.3.** Последовательность  $(u^n, \lambda^n)_n$ , определяемая алгоритмом (4.22) — (4.24), сходится сильно в пространстве  $V \times H^{-1/2}(\Gamma)$  к элементу  $(u, -\gamma_0 \Delta u)$ , где  $u$  — решение задачи (4.1), если

$$(4.25) \quad 0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < 2\sigma_1^2,$$

где

$$(4.26) \quad \sigma_1 = \inf_{v \in H^2 \cap H_0^1} \frac{\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}}{\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}}. \quad \blacksquare$$

**Замечание 4.5.** Можно доказать, что при выполнении условия (4.25) имеют место оценки

$$(4.27) \quad \|u^{n+1} - u\|_V \leq K \|u^n - u\|_V,$$

$$(4.28) \quad \|\lambda^{n+1} - \lambda\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq K \|\lambda^n - \lambda\|_{H^{-1/2}(\Gamma)},$$

<sup>1)</sup> Если  $\mu \in L^2(\Gamma)$ , то  $\langle \mu, \gamma_1 v \rangle = \int_{\Gamma} \mu \gamma_1 v \, d\Gamma$ .

<sup>2)</sup> Следовательно,

$$\langle S\mu, \mu \rangle = \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall \mu \in H^{1/2}(\Gamma),$$

$$\langle \mu, S^{-1}\mu \rangle = \|\mu\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

где<sup>1)</sup>  $0 < K < 1$ ; следовательно, алгоритм (4.22)–(4.24) обладает скоростью сходимости первого порядка. ■

**Замечание 4.6.** Для доказательства сходимости алгоритма (4.22)–(4.24) достаточно предполагать, что  $\gamma_0 \Delta u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ , т. е. ограничение  $f \in L^2(\Omega)$  можно значительно ослабить, и замечание 4.3 тем более будет справедливо. ■

**Замечание 4.7.** Практический интерес алгоритма (4.22)–(4.24) ограничен тем, что использовать пространства  $H^{-1/2}(\Gamma)$  и  $H^{1/2}(\Gamma)$  в численном анализе затруднительно (тем не менее см. работы Гловински [7], [8]). ■

#### 4.2.2. Обобщение на случай вариационных неравенств

Сейчас на примере трех достаточно простых задач мы укажем возможности для обобщений алгоритма (4.4)–(4.6) на решение вариационных неравенств 4-го порядка.

Ниже будем предполагать, что  $\Omega$ —открытая ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$  с достаточно регулярной границей  $\Gamma$ .

##### Пример 1. Постановка задачи

Пусть  $K$ —замкнутое выпуклое множество из пространства  $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , определяемое по формуле

$$K = \{v \mid v \in V, \gamma_0 v \geq 0 \text{ п. в.}\},$$

и пусть  $f \in L^2(\Omega)$ . Вариационное неравенство (4-го порядка)

$$(4.29) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K,$$

$v \in K,$

имеет решение, и притом только одно, одновременно являющееся решением следующей задачи минимизации:

$$(4.30) \quad J_0(u) \leq J_0(v) \quad \forall v \in K,$$

$u \in K,$

где

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx. ■$$

*Результаты, связанные с регулярностью и двойственностью*

Используя результаты разд. 8.7.2 гл. 2 книги Лионса [1], можно доказать, что, если  $f \in L^2(\Omega)$ , то  $u \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , откуда

<sup>1)</sup> Константа  $K$  зависит, кроме всего прочего, от  $r_0$  и  $r_1$ .

вытекает, что

$$\gamma_0 \Delta u \in H^{1/2}(\Gamma) \subset L^2(\Omega).$$

Из этого результата получаем, что  $u$  характеризуется условиями

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u &= f \text{ в } \Omega, \quad u \in H^2(\Omega), \quad u = 0 \text{ на } \Gamma, \\ \gamma_0(\Delta u) &\geq 0, \quad \gamma_1 u \geq 0, \quad \gamma_0(\Delta u)\gamma_1 u = 0 \text{ на } \Gamma. \end{aligned}$$

Пусть  $\mathcal{L}: V \times L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  задается по формуле

$$(4.32) \quad \mathcal{L}(v, \mu) = J_0(v) - \int_{\Gamma} \mu \gamma_1 v \, d\Gamma,$$

и пусть

$$\Lambda = L_+^2(\Gamma) = \{\mu \mid \mu \in L^2(\Gamma), \mu \geq 0 \text{ п. в.}\};$$

можно установить, что из условий (4.11) вытекает

**Теорема 4.4.** Пусть  $u$ —решение задачи (4.29), тогда пара  $(u, \gamma_0 \Delta u)$  представляет собой седловую точку (единственную) лагранжиана  $\mathcal{L}$  на множестве  $V \times \Lambda$ . ■

*Решение задачи (4.29) методом двойственности*

Учитывая теорему 4.4, заключаем, что для решения задачи разыскания седловой точки лагранжиана  $\mathcal{L}$  можно применить следующий вариант алгоритма (4.4)–(4.6):

(4.33) элемент  $\lambda^n$  выбирается произвольно в множестве  $\Lambda$  (например, полагаем  $\lambda^n = 0$ ),

$$(4.34) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u^n &= f, \\ \gamma_0 u^n &= 0, \end{aligned}$$

$$(4.35) \quad \begin{aligned} \gamma_0 \Delta u^n &= \lambda^n, \\ \lambda^{n+1} &= P_{\Lambda}(\lambda^n - \rho_n \gamma_1 u^n) = (\lambda^n - \rho_n \gamma_1 u^n)^+, \quad \rho_n > 0. \end{aligned}$$

Условия сходимости алгоритма (4.33)–(4.35) в точности совпадают с условиями сходимости алгоритма (4.4)–(4.6), т. е. условиями (4.7), замечания 4.1, 4.3, 4.4 остаются в силе и здесь. ■

*Пример 2. Постановка задачи*

Пусть  $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ,  $g > 0$ —некоторая константа,  $f \in L^2(\Omega)$ ; вариационное неравенство

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u \Delta(v - u) \, dx + g \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| \, d\Gamma - g \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \, d\Gamma &\geq \\ \geq \int_{\Omega} f(v - u) \, dx \quad \forall v \in V \quad u \in V \end{aligned}$$

имеет решение, и притом только одно, одновременно являющееся решением следующей задачи минимизации:

$$(4.37) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V,$$

$$u \in V,$$

где

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx + g \int_{\Gamma} |\gamma_1 v| d\Gamma - \int_{\Omega} fv dx. \blacksquare$$

*Результаты, связанные с регулярностью и двойственностью.*

Пусть  $\Lambda$  — замкнутое выпуклое множество из пространства  $L^2(\Gamma)$ , определяемое по формуле

$$(4.38) \quad \Lambda = \{\mu \mid \mu \in L^2(\Gamma), |\mu(x)| \leq 1 \text{ п. в. на } \Gamma\};$$

действуя таким же образом, как и в разд. 1.3 гл. 2, или же методом регуляризации, как это было сделано в разд. 2.3 гл. 4 и разд. 6.1.4 гл. 5, можно доказать, что существует  $\lambda \in \Lambda$ , такое, что решение  $u$  задачи (4.36) характеризуется условиями

$$(4.39) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u &= f \text{ в } \Omega, \\ \gamma_0 u &= 0, \\ \gamma_0 \Delta u &= -g\lambda, \\ \lambda \gamma_1 u &= |\gamma_1 u| \text{ п. в.} \end{aligned}$$

Пусть  $\mathcal{L}: V \times L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  — лагранжиан, определяемый по формуле

$$(4.40) \quad \mathcal{L}(v, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx + g \int_{\Gamma} \mu \gamma_1 v d\Gamma,$$

из условий (4.39) следует, что пара  $(u, -\frac{1}{g} \gamma_1 \Delta u)$  представляет собой седловую точку (единственную) лагранжиана  $\mathcal{L}$  на множестве  $V \times \Lambda$ .  $\blacksquare$

Что касается регулярности решения, то из условий (4.39) можно найти:  $u \in V \cap H^{5/2}(\Omega)$ ; однако если проводить аналогию с результатами Брезиса [2] для задач с операторами 2-го порядка, то естественно предполагать, что в действительности имеет место

$$u \in V \cap H^s(\Omega). \blacksquare$$

*Решение задачи (4.36) методом двойственности*

Учитывая отмеченный выше результат относительно седловой точки, видим, что для разыскания седловой точки лагранжиана  $\mathcal{L}$  можно применить алгоритм двойственности (4.12), (4.13)

разд. 4.3 гл. 2; таким образом, получается следующий вариант алгоритма (4.4)–(4.6):

(4.41) элемент  $\lambda^0 \in \Lambda$  выбирается произвольно (например, полагаем  $\lambda^0 = 0$ ),

$$(4.42) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u^n &= f, \\ \Psi_0 u^n &= 0, \\ \gamma_0 \Delta u^n &= -g \lambda^n, \end{aligned}$$

$$(4.43) \quad \lambda^{n+1} = P_\Delta(\lambda^n + \rho_n g \gamma_1 u^n), \quad \rho_n > 0,$$

где

$$P_\Delta(\mu) = \sup (\inf (1, \mu), -1) \quad \forall \mu \in L^1(\Gamma).$$

Точная формулировка условий сходимости следующая:

$$(4.44) \quad 0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < (2/g^2) \sigma_0^2,$$

замечания 4.1, 4.3 (4.4) остаются в силе и в рассматриваемом случае. ■

### Пример 3. Постановка задачи

Пусть  $\psi \in L^\infty(\Omega)$ , и пусть  $f \in L^2(\Omega)$ ; вариационное неравенство

$$(4.45) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta (v - u) dx \geq \int_{\Omega} f (v - u) dx \quad \forall v \in K,$$

$$u \in \dot{K} = \{v \mid v \in H_0^2(\Omega), v \geq \psi \text{ п. в.}\}$$

имеет решение, и притом только одно<sup>1)</sup>, одновременно являющееся решением следующей задачи минимизации:

$$(4.46) \quad \begin{aligned} J_0(u) &\leq J_0(v) \quad \forall v \in K, \\ u &\in K, \end{aligned}$$

где

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx - \int_{\Omega} fv dx. \quad ■$$

**Замечание 4.8.** В случае  $N = 2$  неравенство (4.45) моделирует процесс малых деформаций, возникающих при чистом изгибе тонкой горизонтальной жестко защемленной по краю  $\Gamma$  пластинки под действием нормальной распределенной нагрузки интенсивности  $f$ ; при этом требуется, чтобы пластинка все время находилась выше некоторого препятствия, поверхность которого задается функцией  $\psi$ . ■

<sup>1)</sup> При условии  $K \neq \emptyset$ , которое ниже мы будем предполагать выполненным.

### Результаты, связанные с двойственностью

Если  $N = 2$  — что мы будем предполагать, — то  $H^2(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ , причем данное вложение непрерывно, следовательно, если  $v \in H_0^2(\Omega)$ , то  $v - \psi \in L^\infty(\Omega)$ ; обозначим через  $(L^\infty(\Omega))'$  пространство, топологически сопряженное к  $L^\infty(\Omega)$ ,  $\ll, \gg$  — билинейную форму, относительно которой  $(L^\infty(\Omega))'$  и  $L^\infty(\Omega)$  приведены в двойственность,  $\Lambda$  — положительный конус в пространстве  $(L^\infty(\Omega))'^{-1}$ , т. е.

$$(4.47) \quad \Lambda = \{ \mu \mid \mu \in (L^\infty(\Omega))', \ll\mu, v\gg \geq 0 \quad \forall v \in L^\infty(\Omega), v \geq 0 \text{ п. в.} \}.$$

Определим далее лагранжиан  $\mathcal{L}: H_0^2(\Omega) \times (L^\infty(\Omega))' \rightarrow \mathbb{R}$  по формуле

$$(4.48) \quad \mathcal{L}(v, \mu) = J_0(v) + \ll\mu, \psi - v\gg;$$

предположим (для упрощения), что в любой окрестности границы  $\Gamma$  функция  $\psi$  отрицательна, тогда  $K \neq \emptyset$  и существует элемент  $v_0 \in K$ , такой, что  $v_0 - \psi \geq \delta$ , где  $\delta$  — некоторая строго положительная константа; из результатов, изложенных в разд. 5 гл. 3 работы Экланда и Темама [1], вытекает, что на множестве  $H_0^2(\Omega) \times \Lambda$  лагранжиан  $\mathcal{L}$  имеет единственную седловую точку, которую мы будем обозначать через  $(u, \lambda)$ ; здесь  $u$  — решение задачи (4.45). ■

*Замечание 4.9.* Сформулированный выше результат о существовании седловой точки справедлив и для случая, когда  $f \in H^{-2}(\Omega)$ . ■

### Решение задачи (4.45) при помощи алгоритмов двойственности

Отметим, что задача примера 3 в бесконечномерном случае не входит в класс задач в гильбертовом пространстве, для которых в разд. 4 гл. 2 были изучены алгоритмы двойственности, позволяющие находить седловые точки некоторых лагранжианов. Это затруднение исчезает при рассмотрении конечномерных задач, аппроксимирующих (4.45); для решения этих задач мы будем использовать конечномерный вариант алгоритма, описание которого дается ниже и который в бесконечномерном случае теряет смысл:

(4.49)    элемент  $\lambda^0 \geq 0$  выбирается произвольно,

зная  $\lambda^n$ , определяем  $u^n$  и  $\lambda^{n+1}$  из решения следующих задач:

$$(4.50) \quad \begin{aligned} \Delta^2 u^n &= f + \lambda^n \text{ в } \Omega, \\ \gamma_0 u^n &= \gamma_1 u^n = 0, \end{aligned}$$

$$(4.51) \quad \lambda^{n+1} = [\lambda^n + \rho_n (\psi - u^n)]^+, \quad \rho_n > 0.$$

<sup>1)</sup> При условии  $K \neq \emptyset$ , которое ниже мы будем предполагать выполненным.

Краевую задачу (4.50) с бигармоническим оператором также можно решать при помощи методов двойственности, изученных в разд. 4.2.1. Конечномерный вариант алгоритма (4.49)–(4.51) применительно к решению одной задачи типа (4.45) будет приведен в разд. 4.7. ■

### 4.3. Новая вариационная формулировка задачи Дирихле для оператора $\Delta^2$

#### План изложения

Отметим, что при использовании алгоритма (4.4)–(4.6) необходимо удовлетворить краевому условию, в которое в явном виде входит след  $\gamma_1 u = \partial u / \partial n$ , что может повлечь за собой усложнение численной реализации данного метода при решении приближенных задач; кроме того (см. замечание 4.4), представляется желательным иметь возможность использования аппроксимаций, которые были бы внутренними для задач второго порядка и внешними для задач четвертого порядка. По этим причинам мы приведем сейчас эквивалентную вариационную формулировку задачи (4.2), в которой используются только пространства  $L^2(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega)$  и  $H_0^1(\Omega)$  и для которой условие  $\partial u / \partial n = 0$  является естественным; конечноэлементные аппроксимации, опирающиеся на эту новую формулировку, будут рассмотрены в разд. 4.5. ■

Мы будем сейчас предполагать, что  $f \in L^2(\Omega)$ , однако все сказанное ниже переносится без изменений и на случай  $f \in H^{-1}(\Omega)$ <sup>1</sup>. Пусть  $W$  — подпространство пространства  $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , определяемое по формуле

$$(4.52) \quad W = \{(v, q) \mid (v, q) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = \int_{\Omega} q \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^1(\Omega)\};$$

имеет место

**Теорема 4.5.** Задачи (4.2), (4.3) и задача

$$(4.53) \quad \min_{(v, q) \in W} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} q^2 \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx \right]$$

эквивалентны между собой.

<sup>1</sup>) В случае  $f \in H^{-s}(\Omega)$ ,  $s > 1$  возникают дополнительные трудности технического характера, и поэтому данный случай не будет рассмотрен в данном — достаточно конспективном — разделе.

*Доказательство.* Любое решение  $(u, p)$  задачи (4.53) характеризуется условиями

$$(4.54) \quad \int_{\Omega} pq \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall (v, q) \in \mathcal{L}, \quad (u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$$(4.55) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = \int_{\Omega} p \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^1(\Omega).$$

Выбирая  $\mu \in H_0^1(\Omega)$  в условии (4.55), найдем, что

$$(4.56) \quad -\Delta u = p \text{ в } \Omega,$$

откуда следует, что  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ , если только граница  $\Gamma$  достаточно регулярна.

Учитывая условия (4.55), (4.56), имеем

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^1(\Omega),$$

откуда с использованием формулы Грина имеем

$$-\int_{\Omega} \Delta u \mu \, dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \mu \, d\Gamma = - \int_{\Omega} \Delta u \mu \, dx \quad \forall \mu \in H^1(\Omega);$$

следовательно,

$$(4.57) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \mu \, d\Gamma = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

что в совокупности с условием  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  дает  $u \in H_0^2(\Omega)$ .

Пусть  $v \in H_0^2(\Omega)$ ; можно доказать, что  $(v, -\Delta v) \in W$ , и из условия (4.54) и отмеченных выше свойств элемента  $u$  вытекает, что

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

$$u \in H_0^2(\Omega),$$

следовательно,  $u$  — решение задачи (4.2), (4.3). ■

Можно доказать, что, обратно, если  $u$  — решение задачи (4.2), (4.3), то пара  $(u, -\Delta u)$  удовлетворяет всем необходимым и достаточным условиям (4.54), (4.55). ■

*Замечание 4.10.* Для задачи

$$(4.58) \quad \Delta^2 u = f \text{ в } \Omega$$

$\gamma_0 u = g_1$ ,  $\gamma_1 u = g_2$ ;  $g_1$ ,  $g_2$  — достаточно регулярные функции, пространство  $\bar{W}$  (см. формулу (4.52)) следует заменить на

$$\begin{aligned} W_g &= \left\{ (v, q) / (v, q) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \mu dx = \right. \\ &= \left. \int_{\Omega} q \mu dx + \int_{\Gamma} g_2 \gamma_0 \mu d\Gamma \quad \forall \mu \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = g_1 \right\}, \end{aligned}$$

где через  $g$  обозначена пара  $\{g_1, g_2\}$ .

Таким образом, задача (4.58) эквивалентна задаче минимизации

$$(4.59) \quad \min_{(v, q) \in W_g} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} q^2 dx - \int_{\Omega} fv dx \right],$$

эквивалентная вариационная формулировка задачи (4.59) имеет вид

$$(4.60) \quad \int_{\Omega} pq dx = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall (v, q) \in W, (u, p) \in W_g. \blacksquare$$

#### 4.4. Итерационный метод решения задачи Дирихле для оператора $\Delta^2$ , основанный на вариационной формулировке разд. 4.3

Мы сейчас приведем развернутую формулировку одного из вариантов алгоритма (4.4)–(4.6), основанную на использовании вариационной формулировки (4.53) задачи (4.2), (4.3); чтобы разобраться в рассматриваемом ниже алгоритме, задачу (4.53) удобно (и естественно) интерпретировать как задачу оптимального управления.

Пусть  $\mathcal{M}$  — дополнение пространства  $H_0^1(\Omega)$  до  $H^1(\Omega)$ , тогда

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \mathcal{M};$$

задача (4.53) теперь эквивалентна следующей задаче оптимального управления с ограничениями на состояние:

$$(4.61) \quad \min_{q \in L^2(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} q^2 dx - \int_{\Omega} fv dx \right];$$

состояние  $v$  связано с управлением  $q$  посредством уравнения состояния

$$(4.62) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \mu dx = \int_{\Omega} q \mu dx \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega),$$

$$v \in H_0^1(\Omega),$$

кроме того,  $q$  и  $v$  должны удовлетворять следующему ограничению на состояние:

$$(4.63) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = \int_{\Omega} q \mu \, dx \quad \forall \mu \in \mathcal{M}.$$

Пусть  $u$  — решение задачи (4.2), (4.3); так как задача (4.61) — (4.63) эквивалентна задаче (4.53), а следовательно, и задаче (4.2), (4.3), то она имеет единственное решение  $p = -\Delta u$ , где  $u$  — соответствующая функция состояния.

Лагранжиан  $\mathcal{L}: L^2(\Omega) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  (в котором функция  $v$  связана с  $q$  уравнением (4.62)), соответствующий задаче (4.61) — (4.63), определяется по формуле

$$(4.64) \quad \mathcal{L}(q, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q^2 \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx - \int_{\Omega} q \mu \, dx.$$

Таким образом, доказана

**Теорема 4.6.** Пусть  $u$  — решение задачи (4.2), (4.3),  $p = -\Delta u$ ; предположим, что  $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ <sup>1)</sup>, тогда пара  $\{p, p_2\}$  представляет собой единственную седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}$  на множестве  $L^2(\Omega) \times \mathcal{M}$ , причем  $p_2$  определяется следующим образом:

$$p = p_1 + p_2, \quad p_1 \in H_0^1(\Omega), \quad p_2 \in \mathcal{M}. \quad \blacksquare$$

Из теоремы 4.6 вытекает, что для разыскания седловой точки лагранжиана  $\mathcal{L}$  можно применить алгоритм (4.12), (4.13) разд. 4.3 гл. 2, а именно:

(4.65) элемент  $\lambda^0 \in \mathcal{M}$  выбирается произвольно,

(4.66)  $\mathcal{L}(p^n, \lambda^n) \leq \mathcal{L}(q, \lambda^n) \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad p^n \in L^2(\Omega),$

(4.67)  $b(\lambda^{n+1}, \mu) = b(\lambda^n, \mu) + \rho_n \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{grad} u^n \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx - \int_{\Omega} p^n \mu \, dx \right\}$

$\forall \mu \in \mathcal{M}$ ,

$\lambda^{n+1} \in \mathcal{M}, \quad \rho_n > 0$ ;

в формуле (4.67) представляет некоторую билинейную непрерывную симметричную форму, коэрцитивную на множестве  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ .

Сильная сходимость последовательности  $p^n$  к  $p$  обеспечена, если только  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1$ , где  $\alpha_1$  достаточно мало.

Получим сейчас развернутую формулировку задачи (4.66). Учитывая определение (4.64), заключаем, что (4.66) представляет собой задачу оптимального управления без ограничений,

<sup>1)</sup> Если  $\Gamma$  регулярна, то это верно для  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

которая (см. гл. 2 книги Лионса [2]) имеет единственное решение  $p^n$ , характеризующееся тем, что существует сопряженное состояние  $y^n \in H_0^1(\Omega)$ , такое, что

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} u^n \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = \int_{\Omega} p^n \mu \, dx \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega),$$

$$u^n \in H_0^1(\Omega),$$

$$(4.68) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} y^n \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = \int_{\Omega} f \mu \, dx - \int_{\Omega} \operatorname{grad} \lambda^n \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx$$

$$\forall \mu \in H_0^1(\Omega),$$

$$y^n \in H_0^1(\Omega),$$

$$(4.69) \quad p^n = y^n + \lambda^n.$$

Учитывая формулу (4.69), соотношения (4.68), (4.69) можно заменить соотношениями

$$\int_{\Omega} \operatorname{grad} p^n \cdot \operatorname{grad} \mu \, dx = \int_{\Omega} f \mu \, dx \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega),$$

$$p^n - \lambda^n \in H_0^1(\Omega),$$

из которых получаем развернутую формулировку задачи (4.66)

$$(4.70) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} p^n \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$p^n - \lambda^n \in H_0^1(\Omega),$$

$$(4.71) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u^n \cdot \operatorname{grad} v \, dx = \int_{\Omega} p^n v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$u^n \in H_0^1(\Omega);$$

следовательно, определение  $u^n$  приводится к решению двух задач Дирихле для оператора  $-\Delta$ ; нетрудно видеть, что из (4.71) и сильной сходимости в  $L^2(\Omega)$  последовательности  $p^n$  к  $-\Delta u$  следует сильная сходимость в  $H^2(\Omega)$  последовательности  $u^n$  к решению  $u$ . ■

## 4.5. Апроксимация задачи (4.2), (4.3) при помощи смешанных конечных элементов

### 4.5.1. План изложения

Следуя работе Сиарле и Равьяра [3], будем аппроксимировать задачу (4.2), (4.3) — с использованием эквивалентной в-

риационной формулировки (4.53) — по методу конечных элементов, являющемуся внутренним в  $H^1(\Omega)$  и внешним в  $H^2(\Omega)$  (см. замечание 4.4). ■

#### 4.5.2. Апроксимация пространств $L^2(\Omega)$ , $H^1(\Omega)$ , $H_0^1(\Omega)$ , $\mathcal{M}$

Предположим для простоты, что область  $\Omega$  — многоугольник из  $\mathbb{R}^2$ ; пусть  $\mathcal{T}_h$  — триангуляция области  $\Omega$ , удовлетворяющая предположениям разд. 1.3 настоящей главы (будем использовать здесь обозначения разд. 1.3), и пусть  $P_k$  — пространство полиномов от двух переменных степени, не превосходящей  $k$  по совокупности переменных; аппроксимируем пространства  $L^2(\Omega)$  и  $H^1(\Omega)$  следующим образом:

$$V_h = \{v_h \mid v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_T \in P_k \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

пространство  $H_0^1(\Omega)$  — по формуле

$$V_{0h} = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h = 0 \text{ на } \Gamma\}.$$

В качестве  $\mathcal{M}_h$  можно взять любое дополнение  $V_{0h}$  до  $V_h$ , но наиболее простой выбор состоит в том, чтобы положить

$$\mathcal{M}_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h|_T = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \partial T \cap \Gamma = \emptyset\},$$

и только это дополнение будет рассмотрено ниже.

#### 4.5.3. Апроксимация задачи (4.53)

Пусть  $W_h$  — аппроксимация пространства  $W$  (см. определение (4.52)), определяемая по формуле

$$W_h = \left\{ (v_h, q_h) \mid (v_h, q_h) \in V_{0h} \times V_h, \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h dx = \int_{\Omega} q_h \mu_h dx \quad \forall \mu_h \in V_h \right\};$$

задачу (4.53) аппроксимируем следующим образом:

$$(4.72) \quad \min_{(v_h, q_h) \in W_h} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |q_h|^2 dx - \int_{\Omega} f v_h dx \right].$$

Данную аппроксимацию по методу конечных элементов называют смешанной (см. работу Сиарле и Равьяра [3]). ■

#### 4.5.4. Результаты о сходимости ( $k \geq 2$ )

Предположим, что углы треугольников из  $\mathcal{T}_h$  ограничены снизу равномерно относительно  $h$  некоторой константой  $\theta_0 > 0$  и, кроме того, что триангуляция  $\mathcal{T}_h$  удовлетворяет предполо-

жению (которое называется обратной гипотезой):

$$(4.73) \quad \frac{\max_{T \in \mathcal{T}_h} h(T)}{\min_{T \in \mathcal{T}_h} h(T)} \leq \tau \quad \forall \mathcal{T}_h, \tau \text{ не зависит от } h,$$

величина  $h(T)$  в неравенстве (4.73) равна длине наибольшей стороны треугольника  $T$ . В цитированной выше работе Сиарле и Равьяра установлено, что при выполнении указанных выше предположений имеет место оценка

$$(4.74) \quad \|u_h - u\|_{H^1(\Omega)} + \|(-\Delta u) - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} h^{k-1},$$

где  $C$  — константа, не зависящая от  $h$  и  $u$ . ■

**Замечание 4.11.** Если  $u \notin H^{k+2}(\Omega)$ , то при  $h \rightarrow 0$  и выполнении указанных выше предположений относительно  $\mathcal{T}_h$  имеет место сильная сходимость последовательности  $u_h$  к элементу  $u$ , однако оценок погрешности аппроксимаций в этих пространствах не установлено. ■

#### 4.5.5. Случай $k = 1$

Если  $k = 1$ , то в общем случае сходимость последовательности  $\{u_h, p_h\}$  к элементу  $\{u, -\Delta u\}$  не имеет места; одно условие, достаточное для того, чтобы  $\{u_h, p_h\} \rightarrow \{u, -\Delta u\}$  сильно в пространстве  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , состоит в том, чтобы предположить, что  $\mathcal{T}_h$  порождается тремя семействами параллельных прямых (кроме, возможно, некоторой окрестности границы  $\Gamma$ , мера которой стремится к нулю).

Кроме того, если при  $k = 1$  в определении  $W_h$  условие

$$(4.75) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h dx = \int_{\Omega} q_h \mu_h dx \quad \forall \mu_h \in V_h$$

заменить условием<sup>1)</sup> (см. рис. 4.1)

$$(4.76) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h dx = \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \sum_{i=1}^3 q_h(M_{iT}) \mu_h(M_{iT}),$$

которое получается при численном интегрировании в правой части формулы (4.75), то в случае, когда  $\Omega$  — прямоугольник<sup>2)</sup>,

<sup>1)</sup>  $A(T)$  — площадь треугольника  $T$ .

<sup>2)</sup> Это верно и в случае, когда  $\Gamma$  представляет собой объединение отрезков, параллельных координатным осям; кроме того, для оценки слагаемого  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |q_h|^2 dx$  в формуле (4.72) необходимо использовать ту же формулу численного интегрирования.

с триангуляцией, показанной на рис. 4.2, имеем классическую 13-точечную схему дискретизации задачи Дирихле для оператора  $\Delta^2$ . ■

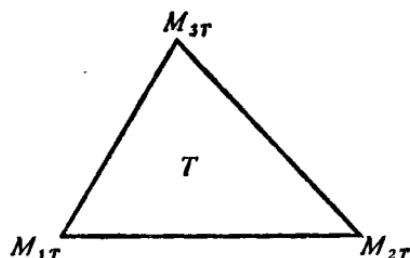


Рис. 4.1.

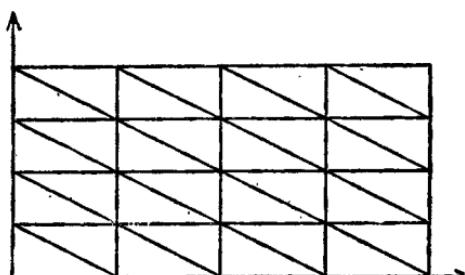


Рис. 4.2.

## 4.6. Итерационный метод решения приближенной задачи (4.72). Обобщение на случай неравенств 4-го порядка

### 4.6.1. Описание алгоритма

Так как подход, основанный на использовании аналогии с задачами оптимального управления разд. 4.4, пригоден и в случае конечномерной задачи (4.72), то для решения этой задачи можно применить алгоритм<sup>1)</sup>:

(4.77) элемент  $\lambda_h^n \in M_h$  выбирается произвольно;

пусть  $\lambda_h^n$  найдено, тогда  $p_h^n$ ,  $u_h^n$ ,  $\lambda_h^{n+1}$  определяются следующим образом:

$$(4.78) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} p_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_{0h}, \\ p_h^n - \lambda_h^n \in V_{0h},$$

$$(4.79) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx = \int_{\Omega} p_h^n v_h dx \quad \forall v_h \in V_{0h}, \\ u_h^n \in V_{0h},$$

$$(4.80) \quad \beta_h(\lambda_h^{n+1}, \mu_h) = \beta_h(\lambda_h^n, \mu_h) + \rho_h \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_h^n \cdot \operatorname{grad} \mu_h dx - \right. \\ \left. - \int_{\Omega} p_h^n \mu_h dx \right\} \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h,$$

$$\lambda_h^{n+1} \in \mathcal{M}_h, \quad \rho_h > 0,$$

<sup>1)</sup> Представляющий собой конечномерный вариант алгоритма (4.65), (4.70), (4.71), (4.67).

в задаче (4.80)  $\beta_h : \mathcal{M}_h \times \mathcal{M}_h \rightarrow \mathbb{R}$  — билинейная непрерывная симметрическая положительно-определенная форма. ■

*Замечание 4.12.* Разумеется, в случае  $k=1$  правые части в формулах (4.79), (4.80) можно заменить выражениями, получающимися при использовании формулы (4.76) вместо (4.75). ■

#### 4.6.2. Сходимость алгоритма (4.77)–(4.80)

В работе Сиарле и Гловински [1] доказано, что если выполнено условие

$$0 < \alpha_0 \leq \rho_h \leq \alpha_1,$$

где  $\alpha_1$  достаточно мало, то

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \{u_h^n, p_h^n, \lambda_h^n\} = \{u_h, p_h, \lambda_h\},$$

где  $\{u_h, p_h\}$  — решение задачи (4.72),  $\lambda_h \in \mathcal{M}_h$  — составляющая элемента  $p_h$  при разложении  $V_h = V_{0h} \oplus \mathcal{M}_h$ . ■

Ниже через  $2\sigma_h^2$  будем обозначать верхнюю грань значений  $\alpha_1$ , обеспечивающих сходимость алгоритма (4.77)–(4.80).

#### 4.6.3. Замечания о выборе $\beta_h$

Свойствами, описанными в разд. 4.6.1, обладают следующие билинейные формы:

$$(4.81) \quad \beta_h^1(\lambda_h, \mu_h) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} \lambda_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h \, dx,$$

$$(4.82) \quad \beta_h^2(\lambda_h, \mu_h) = \int_{\Gamma} \lambda_h \mu_h \, d\Gamma.$$

Использование этих форм наталкивается на то затруднение, что при определении  $\lambda_h^{n+1}$  из уравнения (4.80) необходимо на каждой итерации алгоритма (4.77)–(4.80) решать линейную систему уравнений<sup>1</sup>). Для выхода из создавшегося положения можно (и полезно) воспользоваться численным интегрированием, с тем чтобы получить билинейную форму, матрица которой в переменных, определяющих аппроксимацию в рассматриваемых конечных элементах, имеет диагональную структуру; это, в частности, будет иметь место в случае, когда форма  $\beta_h^2$  аппроксимируется

<sup>1)</sup> Следует, однако, отметить, что матрица этой системы симметрична, положительно определена и имеет ленточную структуру, причем ширина ленты достаточно мала; следовательно, при решении можно использовать факторизацию Холесского, которую можно осуществить один раз для всех итераций.

следующим образом:

$$(4.83) \quad \beta_h^3(\lambda_h, \mu_h) = \frac{1}{2} \sum_i |M_i M_{i+1}| (\lambda_i \mu_i + \lambda_{i+1} \mu_{i+1}), \quad k=1,$$

$$(4.84) \quad \beta_h^4(\lambda_h, \mu_h) = \frac{1}{6} \sum_i |M_i M_{i+1}| (\lambda_i \mu_i + 4\lambda_{i+1/2} \mu_{i+1/2} + \\ + \lambda_{i+1} \mu_{i+1}), \quad k=2,$$

обозначения в формулах (4.83), (4.84) совпадают с обозначениями разд. 1.3.2 настоящей главы.

#### 4.6.4. Поведение $\sigma_h$ при $h \rightarrow 0$

Пусть  $\sigma_0$  — константа, определяемая по формуле (4.8); предположим также, что используемая форма  $\beta_h$  совпадает с формой (4.82). Доказано (см. работу Сиарле и Гловински [1]), что при выполнении сформулированных в разд. 4.5.4 предположений относительно  $\mathcal{T}_h$  и для  $\forall k \geq 1$  имеем

$$(4.85) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_h = \sigma_0.$$

Это утверждение сохраняется и в случае, когда форма  $\beta_h^k$  при  $k=1$  аппроксимируется по формуле (4.83), при  $k=2$  — по формуле (4.84).

Формула (4.85) позволяет получить фактическую оценку величины  $\sigma_h$ , если область  $\Omega$  такова, что для нее мы умеем определить или по крайней мере оценить константу  $\sigma_0$  (см. работу Дж. Смита [1]). ■

#### 4.6.5. Приложение к решению вариационных неравенств 4-го порядка

Будем рассматривать неравенства, полученные в примерах 1 и 2 разд. 4.2.2. Ниже, ограничившись случаями  $k=1$  и  $k=2$ , будем предполагать, что используются билинейные формы, определяемые по формулам (4.83), (4.84).

Отметим также, что линейное отображение  $\mathcal{M}_h \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\mu_h \rightarrow \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h \, dx - \int_{\Omega} q_h \mu_h \, dx,$$

можно всегда привести к виду (используемые обозначения совпа-

дают с обозначениями разд. 1.3.2)<sup>1)</sup>

$$(4.86) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h dx - \int_{\Omega} q_h \mu_h dx = \sum_{M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma} \mu_i G_i(v_h, q_h), \quad k=1,$$

$$(4.87) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} v_h \cdot \operatorname{grad} \mu_h dx - \int_{\Omega} q_h \mu_h dx = \sum_{M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma} \mu_i G_i(v_h, q_h) + \\ + \sum_{M_{i+1/2} \in \Sigma_h \cap \Gamma} \mu_{i+1/2} G_{i+1/2}(v_h, q_h), \quad k=2.$$

*Приближенное решение неравенства (4.29)*

Аппроксимируем множество  $\Lambda = L_+^2(\Gamma)$  следующим образом:

$$\Lambda_h = \{\mu_h \mid \mu_h \in \mathcal{M}_h, \mu_h(P) \geq 0 \quad \forall P \in \Sigma_h \cap \Gamma, k=1, \\ \forall P \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma, k=2\};$$

следовательно, для приближенного решения неравенства (4.29) можно использовать алгоритм (представляющий собой конечно-мерный вариант алгоритма (4.33)–(4.35)):

(4.88) элемент  $\lambda_h^n \in \Lambda_h$  выбирается произвольно,

(4.89) зная  $\lambda_h^n \in \Lambda_h$ , определяем  $p_h^n$ ,  $u_h^n$  из решения уравнений (4.78), (4.79), а после этого—приближение  $\lambda_h^{n+1}$  по формулам,

$$(4.90)_1 \quad \lambda_i^{n+1} = \left[ \lambda_i^n + \rho_n \frac{2}{|M_{i-1}M_i| + |M_iM_{i+1}|} G_i(u_h^n, p_h^n) \right]^+ \\ \forall M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma, \quad k=1,$$

$$\lambda_i^{n+1} = \left[ \lambda_i^n + \rho_n \frac{6}{|M_{i-1}M_i| + |M_iM_{i+1}|} G_i(u_h^n, p_h^n) \right]^+$$

(4.90)<sub>2</sub>  $\forall M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma,$

$$\lambda_{i+1/2}^{n+1} = \left[ \lambda_{i+1/2}^n + \rho_n \frac{3}{2|M_iM_{i+1}|} G_{i+1/2}(u_h^n, p_h^n) \right]^+ \\ \forall M_{i+1/2} \in \Sigma'_h \cap \Gamma, \quad k=2,$$

где  $\rho_n > 0$ ). ■

*Приближенное решение неравенства (4.36)*

Аппроксимируем множество  $\Lambda$  (см. формулу (4.38)) следующим образом:

$$\Lambda_h = \{\mu_h \mid \mu_h \in \mathcal{M}_h, |\mu_h(P)| \leq 1 \quad \forall P \in \Sigma_h \cap \Gamma, k=1, \\ \forall P \in (\Sigma_h \cup \Sigma'_h) \cap \Gamma, k=2\};$$

<sup>1)</sup> Разумеется, все это справедливо и тогда, когда в случае  $k=1$  вместо формулы (4.75) используется формула (4.76).

для приближенного решения неравенства (4.36) используем приведенный ниже конечномерный вариант алгоритма (4.41)–(4.43):

(4.91) элемент  $\lambda_h^n \in \Lambda_h$  выбирается произвольно,

(4.92) зная  $\lambda_h^n \in \Lambda_h$ , определяем  $p_h^n$ ,  $u^n$  из решения уравнений (4.78), (4.79), после этого находим  $\lambda_h^{n+1}$ :

$$(4.93)_1 \quad \lambda_i^{n+1} = P_{[-1, +1]} \left( \lambda_i^n + \rho_n g \frac{2}{|M_{i-1}M_i| + |M_iM_{i+1}|} G_i(u_h^n, p_h^n) \right),$$

$$\forall M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma, k=1,$$

$$\lambda_i^{n+1} = P_{[-1, +1]} \left( \lambda_i^n + \rho_n g \frac{6}{|M_{i-1}M_i| + |M_iM_{i+1}|} G_i(u_h^n, p_h^n) \right),$$

$$(4.93)_2 \quad \forall M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma,$$

$$\lambda_{i+1/2}^{n+1} = P_{[-1, +1]} = \left( \lambda_{i+1/2}^n + \rho_n g \frac{3}{|M_iM_{i+1}|} G_{i+1/2}(u_h^n, p_h^n) \right)$$

$$\forall M_{i+1/2} \in \Sigma'_h \cap \Gamma, k=2,$$

где  $\rho_n > 0$ ,  $P_{[-1, +1]}(a) = \max(-1, \min(a, 1)) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ . ■

*Сходимость алгоритмов (4.88)–(4.90), (4.91)–(4.93)*

Пусть  $\sigma_h$  — та же константа, что и в разд. 4.6.2; можно доказать, что при выполнении условий

(4.94)  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < 2\sigma_h^2$  для задачи (4.29),

(4.95)  $0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < \frac{2}{g^2} \sigma_h^2$  для задачи (4.36)

имеет место сходимость последовательностей, определяемых алгоритмами (4.88)–(4.90), (4.91)–(4.93), к паре  $\{u_h, p_h\}$ , в свою очередь при  $h \rightarrow 0$  и выполнении сформулированных в разд. 4.5.4 предположений относительно  $\mathcal{T}_h$  последовательность  $\{u_h, p_h\}$  сходится сильно в пространстве  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$  к элементу  $\{u, -\Delta u\}$ , где  $u$  — решение соответствующей непрерывной задачи.

*Замечание 4.13.* При численном решении задачи (4.15) примера 3 разд. 4.2.2 серьезных затруднений не возникает; в самом деле, решение задачи (4.45) при надлежащим образом выбранной аппроксимации можно привести к решению последовательности задач типа (4.72), которые в свою очередь можно решить с помощью алгоритма (4.77)–(4.80) (см. ниже разд. 4.7). ■

## 4.7. Пример и численное решение

### План изложения

Для иллюстрации приведенных в разд. 4 методов аппроксимации и решения в данном разделе выбрана задача типа примера 3 разд. 4.2.2; по поводу решения других задач 4-го порядка методами, аналогичными рассматриваемым здесь, см. работу Бурга [2]. ■

#### 4.7.1. Формулировка задачи

Пусть  $\Omega$  и  $E$ —две открытые ограниченные области из  $\mathbb{R}^2$ , и пусть  $\bar{E} \subset \Omega$ ; обозначим через  $K$  замкнутое выпуклое множество из  $H_0^2(\Omega)$ , определяемое по формуле

$$K = \{v | v \in H_0^2(\Omega), v(x) \geq C \quad \forall x \in E\}.$$

При этих условиях задача

$$(4.96) \quad \min_{v \in K} \int_{\Omega} |\Delta v|^2 dx$$

имеет решение, и притом только одно, и, кроме того, задача (4.96) и вариационное неравенство 4-го порядка

$$(4.97) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta (v - u) dx \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

$$u \in K$$

эквивалентны. ■

#### 4.7.2. Аппроксимация задачи (4.96), (4.97)

Ниже будем предполагать, что область  $\Omega$ —многоугольник; для аппроксимации задач (4.96)–(4.97) будем использовать метод конечных элементов разд. 4.5 с конечными элементами 1-го порядка, что законно, если (см. разд. 4.5.5) триангуляция  $\mathcal{T}_h$  всюду, за исключением, возможно, некоторой окрестности границы  $\Gamma$ , порождается тремя семействами параллельных прямых.

Обозначим через  $W_h$  пространство, определяемое по формуле

$$W_h = \{(v_h, q_h) | (v_h, q_h) \in V_{0h} \times V_h, (v_h, q_h) \text{ удовлетворяет соотношению (4.76)}\},$$

через  $\Sigma_h$ —множество вершин треугольников из  $\mathcal{T}_h$ ; множество  $K$  и задачи (4.96), (4.97) аппроксимируем следующим образом:

$$(4.98) \quad K_h = \{(v_h, q_h) | (v_h, q_h) \in W_h, v_h(P) \geq C \quad \forall P \in \bar{E} \cap \Sigma_h\},$$

$$(4.99) \quad \min_{(v_h, q_h) \in K_h} \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \sum_{i=1}^3 q_h^2(M_{iT}).$$

Приближенная задача (4.99) имеет решение, и притом только одно, это решение мы будем обозначать через  $(u_h, p_h)$ . ■

#### 4.7.3. Итерационные методы решения

##### Первый метод решения

Данный метод представляет собой дискретный вариант алгоритма (4.49)–(4.51); пусть  $M_h$ —количество элементов множества  $\Sigma_h \cap \bar{E}$ , лагранжиан  $\mathcal{L}_h$ :  $W_h \times \mathbb{R}_{+}^{M_h} \rightarrow \mathbb{R}$ , соответствующий задаче (4.99), определим по формуле

$$(4.100) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_h(v_h, q_h; z_h) = & \frac{1}{6} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \sum_{i=1}^3 q_h^2(M_{iT}) + \\ & + \frac{1}{3} \sum_{P \in \bar{E} \cap \Sigma_h} \bar{A}(P) (C - v_h(P)) z_h(P); \end{aligned}$$

здесь  $\bar{A}(P)$ —сумма площадей треугольников из  $\mathcal{T}_h$ , одна из вершин каждого из которых—точка  $P$ . Так как лагранжиан  $\mathcal{L}_h$  имеет на  $W_h \times \mathbb{R}_{+}^{M_h}$  седловую точку  $(u_h, p_h, y_h)$ , где  $(u_h, p_h)$ —решение задачи (4.99), то для решения этой задачи можно использовать следующую „аппроксимацию“ алгоритма (4.49)–(4.51):

$$(4.101) \quad \text{элемент } y_h^0 \in \mathbb{R}_{+}^{M_h} \text{ выбирается произвольно, зная } y_h^n, \text{ определяем } (u_h^n, p_h^n) \text{ и } y_h^{n+1};$$

$$(4.102) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_h(u_h^n, p_h^n; y_h^n) \leqslant \mathcal{L}_h(v_h, q_h; y_h^n) \quad \forall (v_h, q_h) \in W_h \\ (u_h^n, p_h^n) \in W_h, \end{aligned}$$

$$(4.103) \quad y_h^{n+1}(P) = [y_h^n(P) + \rho_n(C - u_h^n(P))]^{+} \quad \forall P \in \bar{E} \cap \Sigma_h, \rho_n > 0.$$

Если  $0 < \alpha_0 \leqslant \rho_n \leqslant \alpha_1$ , где  $\alpha_i$  достаточно мало, то последовательность  $(u_h^n, p_h^n)$  сходится к решению  $(u_h, p_h)$ . Отметим, что задача (4.102) принадлежит классу задач, рассмотренных в разд. 4.6.1, следовательно, для ее решения можно применить алгоритм (4.77)–(4.80). ■

##### Второй метод решения

Комбинируя алгоритмы (4.101)–(4.103) и (4.77)–(4.80), можно получить следующий алгоритм (используются обозначения разд. 4.5.5 и 4.6.5):

$$(4.104) \quad \text{пара } (\lambda_h^0, y_h^0) \in \mathcal{M}_h \times \mathbb{R}_{+}^{M_h} \text{ выбирается произвольно,}$$

зная  $(\lambda_h^n, y_h^n)$ , определяем  $(u_h^n, p_h^n)$  и  $(\lambda_h^{n+1}, y_h^{n+1})$  следующим образом:

$$(4.105) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} p_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx = \int_{\Omega} f v_h dx + \frac{1}{3} \sum_{P \in \bar{E} \cap \Sigma_h} \bar{A}(P) y_h^n(P) v_h(P)$$

$$\forall v_h \in V_{0h},$$

$$p_h^n - \lambda_h^n \in V_{0h},$$

$$(4.106) \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} u_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h dx = \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \sum_{i=1}^3 p_h^n(M_{iT}) v_h(M_{iT})$$

$$\forall v_h \in V_{0h},$$

$$u_h^n \in V_{0h},$$

$$(4.107) \quad \lambda_i^{n+1} = \lambda_i^n + \rho_n^1 \frac{2}{|M_{i-1}M_i| + |M_iM_{i+1}|} G_i(u_h^n, p_h^n)$$

$$\forall M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma, \rho_n^1 > 0,$$

$$(4.108) \quad y_h^{n+1}(P) = [y_h^n(P) + \rho_n^2(C - u_h^n(P))]^+ \quad \forall P \in \bar{E} \cap \Sigma_h, \quad \rho_n^2 > 0.$$

Можно доказать, что при выполнении условия  $0 < \alpha_0^i \leq \rho_n^i \leq \alpha_1^i$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\alpha_i^i$  достаточно мало, последовательность  $(u_h^n, p_h^n)$  сходится к решению  $(u_h, p_h)$ ; задача определения последовательности  $(\rho_n^1, \rho_n^2)_n$ , обеспечивающей наивысшую скорость сходимости алгоритма (4.104)–(4.108), в настоящее время не решена. ■

#### 4.7.4. Пример

Геометрические параметры:

$\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[, E$  — круг с центром в точке  $(0,5, 0,5)$  радиуса  $0,25$ ,  $C = 0,0625$ .

#### Триангуляция области $\Omega$

Она совпадает с триангуляцией, показанной на рис. 1.9 разд. 1.7.1 настоящей главы, и содержит 800 треугольников, 441 узел, в том числе 361 внутренних узлов. Отметим, что  $\mathcal{T}_h$  порождена тремя семействами параллельных прямых. Заметим также, что

$$\bar{A}(P) = \frac{3}{400} \quad \forall P.$$

#### Алгоритм решения

Используется алгоритм (4.104)–(4.108).

Начальные данные для алгоритма (4.104) — (4.108)

$$\lambda_h^0 = 0, \quad y_h^0(P) = 100 \quad \forall P \in \bar{E} \cap \Sigma_h.$$

Решение задач Дирихле (4.105), (4.106).

Эти задачи решаются по методу Холесского.

Выбор параметров  $\rho_n^1, \rho_n^2$ .

Были выбраны значения:  $\rho_n^1 = \rho^1 = 1,25, \rho_n^2 = \rho^2 = 750$ , отметим, что порядки значений этих параметров различаются весьма сильно.

### Анализ результатов

В табл. 4.1 указаны вариации величин

$$R_{1h}^n = \max_{P \in \Sigma_h} |u_h^{n+1}(P) - u_h^n(P)|$$

и

$$R_{2h}^n = \sum_{M_i \in \Sigma_h \cap \Gamma} |G_i(u_h^n, p_h^n)|$$

в зависимости от числа итераций, величина  $R_{2h}^n$  представляет интерес по той причине, что она является аппроксимацией  $\int \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| d\Gamma$ , следовательно, зная  $R_{2h}^n$ , мы можем проверить, выполняется ли условие  $\partial u / \partial n = 0$  (по крайней мере приближенно).

Время выполнения 100 итераций на ЭВМ СИИ 10070 равно 2 мин 40 с, вычисления при этом осуществлялись с двойной точностью.

На рис. 4.3 показаны линии уровня найденного решения  $u_h$ , на рис. 4.4 — зависимость  $x_1 \rightarrow u_h(x_1, 0, 5)$ .

*Замечание 4.14.* Так как область  $\Omega$  — это упругая тонкая пластина, то можно предвидеть — и предсказать теоретически, — что область контакта пластиинки с препятствием, представляю-

Таблица 4.1

Число итераций	$R_{1h}^n$	$R_{2h}^n$
50	$9 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$
100	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$
200	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
300	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
400	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$1,07 \cdot 10^{-4}$
500	$9,7 \cdot 10^{-7}$	$8,6 \cdot 10^{-5}$
600	$7,7 \cdot 10^{-7}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$
700	$6,25 \cdot 10^{-7}$	$5,6 \cdot 10^{-5}$
750	$5,6 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-5}$

щим собой прямой цилиндр с основанием  $E$  и высотой  $C$ , ограничена окружностью радиуса 0,25, возвышающейся над пластинкой на расстояние  $C$ . Отсюда вытекает, что множитель  $u_h$  при  $h \rightarrow 0$  не имеет предела в  $L^2(\Omega)$ <sup>1)</sup>; это — типичная ситуация,

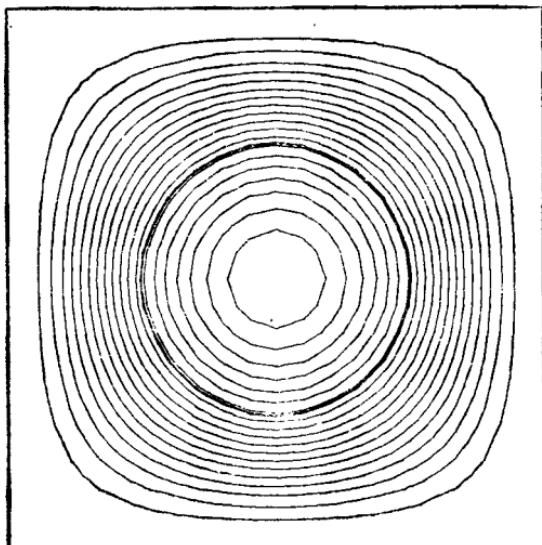


Рис. 4.3. Линии уровня функции  $u_h$ .

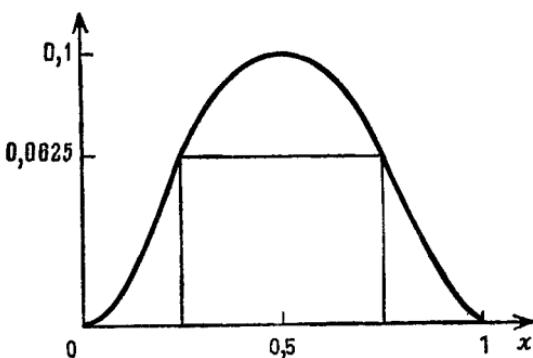


Рис. 4.4. График функции  $u_h$  ( $x_1, 0,5$ ).

когда алгоритм (4.49) — (4.51) теряет смысл. Отметим также, что множитель  $u_h$  равен нулю всюду, за исключением точек  $\Sigma_h \cap \bar{E}$ ,

<sup>1)</sup> На самом деле предел последовательности  $u_h$  не является функцией. Аналогичные задачи для оболочек другим методом — с выделением особенностей и использованием интегральных уравнений для регулярной составляющей решения — исследованы в докторской диссертации В. М. Толкачева. — Прим. перев.

примыкающих к окружности  $\partial E$  — границе множества  $E$ ; в этих точках  $y_h$  принимает значения тем большие, чем меньше параметр  $h$  (для используемой триангуляции  $\mathcal{T}_h$  порядка 1000). ■

**Замечание 4.15.** Очевидно, что для рассматриваемой области  $\Omega$  и используемой триангуляции  $\mathcal{T}_h$  приближенную задачу (4.99), относящуюся к примеру разд. 4.7.4, можно было бы описать на языке метода конечных разностей; мы не наставляем на этой точке зрения по той причине, что метод конечных разностей в задачах 4-го порядка применим практически только в случаях, когда граница области  $\Omega$  представляет собой объединение отрезков, параллельных координатным осям; в то же время конечноэлементные аппроксимации, изученные в настоящем разделе, свободны от этого ограничения. ■

## 5. Комментарии

Отметим, что материал разд. 1, 2 и 3 изложен в данной главе из соображений методологического характера, однако используемые методы представляют определенный интерес и в более общем плане и применяются в различных важных прикладных задачах (см., например, работу Фремона [2]).

По нашему мнению, методы разд. 4 хорошо приспособлены также для решения некоторых задач механики жидкости. В самом деле, функции  $u$  и  $p$  ( $p = -\Delta u$ ); (обозначения см. в разд. 4.3) можно трактовать как соответственно функцию тока<sup>1)</sup> и вихря<sup>2)</sup>, если течения Стокса и Навье—Стокса описываются при помощи дифференциальных уравнений в частных производных 4-го порядка; метод конечных элементов разд. 4.5, где мы следовали работе Сиарле и Равьяра [3], обладает помимо других положительных качеств тем достоинством, что он дает непрерывную аппроксимацию функции тока и вихря. Кроме того, из результатов разд. 4.6, где мы следовали работам Сиарле и Гловински [1], [2], вытекает, что для решения задачи Дирихле для оператора  $\Delta^2$  достаточно иметь в своем распоряжении программу метода конечных элементов для решения задачи Дирихле для оператора  $-\Delta$  (в действительности аппроксимации разд. 4.5 были построены именно для этой цели). Исследования алгоритмов итерационного типа, аналогичных тем, которые были рассмотрены в разд. 4, можно найти, в частности<sup>3)</sup>, в работах Смита [1], [2], [3], Боссавита [1], Эрлиха [1],

1) Обозначаемую обычно через  $\Psi$ .

2) Обозначаемый обычно через  $\omega$ .

3) Подробная библиография по данному вопросу имеется в работах Гловински [6] и Сиарле и Гловински [1], [2].

однако изученные в этих работах методы применимы только к конечноразностным аппроксимациям в областях, границы которых представляют собой объединение отрезков, параллельных координатным осям. Эти методы в совокупности с конечноэлементными аппроксимациями использованы в работе Гловински [6], там же дана интерпретация упомянутых выше алгоритмов как алгоритмов разыскания седловой точки; последняя точка зрения систематически использовалась в работах Сиарле и Гловински [1], [2] и разд. 4 настоящей главы, где показана возможность комбинации этих итерационных методов практически с любыми конечноэлементными аппроксимациями (исключая элементы 1-го порядка — по этому поводу см. разд. 4.5.5).

## Глава 5

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ СРЕДЫ БИНГАМА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТРУБОПРОВОДЕ

## Введение

В настоящей главе результаты и методы гл. 1 и 2 будут применены для численного исследования задачи течения, рассмотренной в разд. 1.4 гл. 1.

## 1. Постановка непрерывной задачи.

**Физическая интерпретация. План изложения**

### 1.1. Постановка непрерывной задачи

Будем использовать обозначения разд. 1.4 гл. 2; пусть  $\Omega$  — открытая ограниченная область из  $\mathbb{R}^2$  с границей  $\Gamma$ ; определим на  $H_0^1(\Omega)$  билинейную форму

$$(1.1) \quad a(u, v) = \mu \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

и функционалы

$$(1.2) \quad J_0(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f v \, dx \quad (f \in L^2(\Omega)),$$

$$(1.3) \quad j(v) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| \, dx,$$

$$(1.4) \quad J_g(v) = J_0(v) + g j(v), \quad g = \text{const} \geqslant 0,$$

и рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$(1.5) \quad (P_0): \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J_g(v).$$

Так как функционал  $J_g$  — непрерывный и строго выпуклый на  $H_0^1(\Omega)$ , причем

$$\lim_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow +\infty} J_g(v) = +\infty,$$

то, применив теорему 2.1 разд. 2.1 гл. 1, заключаем, что существует, и притом только одно, решение задачи  $(P_0)$ . Будем

обозначать это решение через  $u_g$ ; элемент  $u_g$  удовлетворяет также вариационному неравенству

$$(1.6) \quad a(u, v-u) + gj(v) - gj(u) \geq \int_{\Omega} f(v-u) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$u \in H_0^1(\Omega),$$

которое эквивалентно задаче  $(P_0)$ . ■

## 1.2. Физическая интерпретация

В гл. 6 книги Дюво и Лионса [1]—после определения среды Бинггама—установлено, что в частном случае установившегося ламинарного течения данной среды в цилиндрической трубе с поперечным сечением  $\Omega$  поле скоростей является решением задач (1.5), (1.6), величина  $f$ —перепад давления (на практике константа),  $g$ —положительная постоянная, представляющая собой предельное значение напряжений, ниже которого материал ведет себя как абсолютно жесткая среда, выше—как несжимаемая вязкая жидкость с вязкостью  $\mu$ , далее будем полагать  $\mu=1$ .

Более общее исследование течения среды Бинггама при помощи численных методов можно найти в работах Бежи [1], Фортена [1] и в гл. 6 настоящей работы. ■

## 1.3. План изложения

В разделе 2 будут сформулированы некоторые свойства решения задачи  $(P_0)$ ; с точки зрения численного анализа главная трудность рассматриваемой задачи заключается в недифференцируемости функционала  $J_g$ ; в разд. 6 и 7 будет приведено описание методов регуляризации (см. разд. 3.3 гл. 1) и двойственности (см. разд. 3.4 гл. 1 и разд. 4 гл. 2), позволяющих построить решение задачи  $(P_0)$ <sup>1</sup>, или, более точно, аппроксимаций задачи  $(P_0)$ : сами аппроксимации изучаются в разд. 3, 4, 5.

В разделе 8 полученные результаты применяются для решения задачи упругопластического кручения стержня (изученной ранее в гл. 4) в форме, использующей результаты двойственности разд. 9.1.1 гл. 3. ■

<sup>1)</sup> Еще один алгоритм, основанный на использовании обобщенного лагранжиана, приведен в разд. 9 (определение см. в разд. 6 гл. 2).

## 2. Некоторые свойства решения непрерывной задачи

### 2.1. Результаты, связанные с регулярностью

Для случая, когда  $\Omega$ —открытая ограниченная область с достаточно регулярной границей, в работе Брезиса [6] доказано, что если  $f \in L^2(\Omega)$ , то для решения  $u_g$  задачи  $(P_0)$  выполнено включение

$$(2.1) \quad u_g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

*Замечание 2.1.* В разд. 2.3 мы увидим, что указанный выше порядок регулярности является—по крайней мере в пространствах Соболева целого порядка—наилучшим. ■

### 2.2. Зависимость решения от параметра $g$

В работе Дюво и Лионса (разд. 8.3 гл. 6) доказано, что имеет место

**Теорема 2.1.** Функция  $g \rightarrow u_g$  из  $\mathbb{R}^+ \rightarrow H_0^1(\Omega)$  непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Кроме того,

(2.2)  $u_g = 0$  для  $g \geq g_0$ , где  $g_0$ —некоторое предельное значение, зависящее от  $\Omega$  и  $f$ ;

(2.3) функция  $g \rightarrow a(u_g, u_g)$  (соответственно  $g \rightarrow j(u_g)$ )—непрерывная и убывающая (нуль, если  $g \geq g_0$ ).

В частном случае (особенно важном в приложениях), когда  $f = \text{const}$ , утверждение (2.2) можно уточнить, а именно (см. работу Гловински [2]) можно доказать, что

$$(2.4) \quad g_0 = \gamma |f|,$$

где

$$(2.5) \quad \frac{1}{\gamma} = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|_{L^1(\Omega)} \geq 1}} j(v). \blacksquare$$

Мы сейчас дополним утверждение 2.2, доказав, что имеет место

**Теорема 2.2.** Отображение  $g \rightarrow a(u_g, u_g)$  из  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  обладает свойством выпуклости.

*Доказательство.* По определению элемент  $u_g$  — решение неравенства (1.6); полагая в неравенстве (1.6)  $v = 0$  и  $v = 2u_g$ , получим

$$(2.6) \quad a(u_g, u_g) + gj(u_g) = \int_{\Omega} fu_g dx,$$

откуда следует, что

$$(2.7) \quad J_g(u_g) = -\frac{1}{2} a(u_g, u_g).$$

Используя еще раз определение  $u_g$ , имеем

$$(2.8) \quad J_g(u_g) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left( \frac{1}{2} a(v, v) + gj(v) - \int_{\Omega} fv dx \right);$$

отображение  $g \rightarrow J_g(u_g)$  представляет собой нижнюю грань некоторого семейства аффинных функций параметра  $g$ , следовательно, это отображение вогнутое, откуда в силу формулы (2.7)<sup>1)</sup> вытекает нужное нам свойство выпуклости.

*Замечание 2.2.* Другие свойства решения задачи  $(P_0)$  можно найти в цитированной выше работе Дюво и Лионса; отметим, в частности, что из условия  $f \geq 0$  вытекает неравенство:  $u_g \geq 0$  в  $\Omega$ . ■

*Замечание 2.3.* Применим к рассматриваемой задаче, следуя Рокафеллару [1], теорию двойственности (этую теорию можно найти также в книге Экланда и Темама [1]).

Положим<sup>2)</sup>

$$(2.9) \quad F(v) = g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx - (f, v), \quad v \in H_0^1(\Omega) = V,$$

$$(2.10) \quad G(q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |q|^2 dx, \quad q \in (L^2(\Omega))^n = Y,$$

$$(2.11) \quad \Lambda = \operatorname{grad} v^3), \quad \Lambda \in \mathcal{L}(V; Y).$$

Тогда рассматриваемая задача эквивалентна разысканию

$$(2.12) \quad \inf_v [F(v) + G(\Lambda v)].$$

Имеет место неравенство

$$(2.13) \quad \inf_v [F(v) + G(\Lambda v)] = \sup_q [-F^*(\Lambda^* q) - G^*(-q)],$$

<sup>1)</sup> Отметим, что в приведенном доказательстве не используется частная структура формы  $a(u, v)$  и функционала  $j(v)$ .

<sup>2)</sup> Эти определения пригодны в случае  $n > 2$ .

<sup>3)</sup> Оператор  $\Lambda$  не следует смешивать с замкнутым выпуклым множеством, о котором речь идет ниже и которое обозначается той же буквой.

где  $F^*$  и  $G^*$  — функции, сопряженные к  $F$  и  $G$ ,  $\Lambda^*$  — оператор, сопряженный к  $\Lambda$ .

Следовательно,

$$(2.14) \quad G^*(q) = \sup_{\varphi} \left[ \int_{\Omega} q \cdot \varphi \, dx - G(\varphi) \right] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |q|^2 \, dx,$$

$$\Lambda^* q = -\operatorname{div} q$$

и

$$(2.15) \quad F^*(\Lambda^* q) = \sup_v \left[ - \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \, dx - g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| \, dx + (f, v) \right].$$

Если  $w$  — решение задачи

$$(2.16) \quad -\Delta w = f, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

то

$$(f, v) = (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} v),$$

и, следовательно, если положить

$$p = q + \operatorname{grad} w,$$

то будем иметь

$$F^*(\Lambda^* q) = \sup_v \left[ \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{grad} v \, dx - g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| \, dx \right].$$

Из этого равенства заключаем, что

$$F^*(\Lambda^* q) = \begin{cases} 0, & \text{если } \left| \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{grad} v \, dx \right| \leq g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| \, dx \quad \forall v, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть

$$(2.17) \quad K = \left\{ p \mid p \in (L^\infty(\Omega))^n, \quad \left| \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{grad} v \, dx \right| \leq g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| \, dx \right. \\ \left. \forall v \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Тогда

$$F^*(\Lambda^* q) = \begin{cases} 0, & \text{если } p \in gK, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Если размерность задачи равна 1, то

$$K = \{p, |p(x)| \leq 1\}.$$

Двойственная задача в этом случае принимает форму

$$\sup_{p \in gK} -\frac{1}{2} |p - \operatorname{grad} w|^2,$$

| — норма пространства  $(L^2(\Omega))^n$ .

Следовательно,

$$(2.18) \quad a(u_g, u_g) = \inf_p |p - \operatorname{grad} w|^2, \quad p \in gK.$$

Из этой формулы для  $n=1$  и  $K=\{p \mid |p(x)| \leq 1\}$  вытекает явное выражение для формы  $a(u_g, u_g)$ :

$$a(u_g, u_g) = \int_{|h(x)| \geq g} (g - f(x))^2 dx,$$

где элемент

$h = \frac{w}{dx}$  принадлежит пространству  $H^1(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ , что вытекает из формулы (2.16), если только  $f \in L^2(\Omega)$ .

Из этого результата следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a(u_g, u_g) &= 2 \int_{|h(x)| \geq g} (g - |h(x)|) dx \leq 0, \\ \frac{d^2}{dg^2} a(u_g, u_g) &= 2 \int_{|h(x)| \geq g} dx. \end{aligned}$$

Если множество, на котором  $|h(x)| = c$ , имеет меру нуль  $\forall c$ , то

$$\frac{d^2}{dg^2} a(u_g, u_g) = 0, \text{ если } g = g_c.$$

Отсюда получаем, что  $a(u_g, u_g) \sim -m(g - g_c)^3$  в окрестности значения  $g_c$  ( $m \geq 0$ ) и что

$$\frac{d^3}{dg^3} a(u_g, u_g) = -2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \operatorname{mes} \{x \mid g \leq |h| \leq g + \epsilon\} \leq 0.$$

Для общего случая (2.18) имеем

$$a(u_g, u_g) = g^2 \inf_{k \in K} \left| k - \frac{h^2}{g} \right|.$$

Пусть  $P_K$  — оператор ортогонального проектирования на множество  $K$  в пространстве  $(L^2(\Omega))^n$ , тогда

$$(2.19) \quad a(u_g, u_g) = g^2 |P_K(h/g) - h/g|^2.$$

Соотношение двойственности

Пусть  $q_0$  — решение двойственной задачи, тогда

$$q_0 = p_0 - \operatorname{grad} w, \quad p_0 = g P_K \left( \frac{\operatorname{grad} w}{g} \right).$$

Имеем

$$G(\Lambda u) + G^*(-q_0) = \langle \Lambda u, -q_0 \rangle,$$

т. е.

$$\frac{1}{2} |\Lambda u|^2 + \frac{1}{2} |q_0|^2 = -(\Lambda u, q_0),$$

или

$$\Lambda u + q_0 = 0.$$

Следовательно,

$$(2.20) \quad \text{grad } u = \text{grad } \omega - g P_K \left( \frac{\text{grad } \omega}{g} \right). \blacksquare$$

## 2.3. Некоторые частные случаи, когда решение известно

### 2.3.1. Первый пример

Выберем  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $f = c > 0$ ; это соответствует течению среды Бингама между двумя плоскими пластинами, отстоящими друг от друга на расстояние 1.

Задача  $(P_0)$  в данном случае определяется следующим образом:

$$(2.21) \quad \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx + g \int_0^1 |v'| dx - c \int_0^1 v dx \right],$$

где  $v' = dv/dx$ .

Решение задачи (2.21) дается формулой

$$(2.22) \quad u_g = 0, \text{ если } g \geq g_0 = c/2,$$

и если  $g < c/2$ , то

$$(2.23) \quad \begin{aligned} u_g(x) &= \frac{g}{2} x (1-x) - g x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{g}{c}, \\ u_g(x) &= \frac{g}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{g}{c} \right)^2, & \text{если } \frac{1}{2} - \frac{g}{c} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{g}{c}, \\ u_g(x) &= \frac{c}{2} x (1-x) - g (1-x), & \text{если } \frac{1}{2} + \frac{g}{c} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Можно доказать, что для  $g < c/2$  решение  $u_g \in H_0^1(0, 1) \cap H^2(0, 1)$ , однако

$$u_g \notin H^2(0, 1). \blacksquare$$

На рис. 2.1 показано решение задачи (2.21), соответствующее значениям  $g = 1$  и  $c = 10$  (в данном случае  $\frac{1}{2} - g/c = 0,4$ ).

### 2.3.2. Второй пример

Выберем  $\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$ ,  $f = c > 0$ ; решение задачи  $(P_0)$  здесь определяется по формуле

$$(2.24) \quad u_g = 0, \text{ если } g \geq g_0 = cR/2,$$

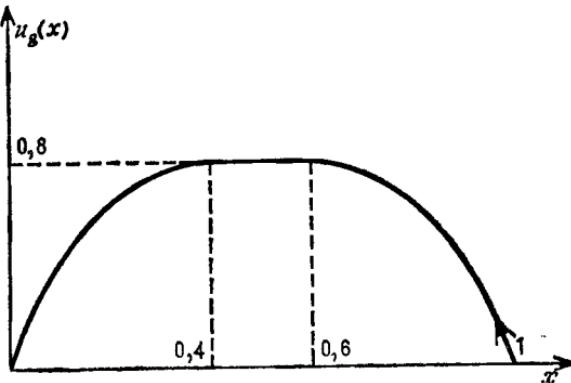


Рис. 2.1.

и если  $g < cR/2$ , то

$$(2.25) \quad \begin{aligned} u_g(x) &= \frac{(R-r)}{2} \left[ \frac{c}{2} (R+r) - 2g \right], \text{ если } R' \leq r \leq R, \\ u_g(x) &= \frac{(R-R')}{2} \left[ \frac{c}{2} (R+R') - 2g \right], \text{ если } 0 \leq r \leq R', \end{aligned}$$

где

$$(2.26) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad R' = 2g/c.$$

*Замечание о неединственности решения двойственной задачи*

Нетрудно доказать, что в примере разд. 2.3.1 двойственная задача

$$(2.27) \quad \max_{\mu \in \Lambda} \min_{v \in H_0^1(0, 1)} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2 dx + g \int_0^1 \mu v' dx - c \int_0^1 v dx \right],$$

$$\Lambda = \{\mu \mid \mu \in L^\infty(0, 1), |\mu(x)| \leq 1 \text{ п. в.}\}$$

имеет решение, и притом только одно, которое выписывается без труда!

Как мы сейчас увидим, в примере разд. 2.3.2 двойственная задача имеет бесконечное множество решений. В самом деле, перейдем к полярной системе координат, в которой будем ис-

пользовать обозначение  $\mu = \{\mu_r, \mu_\theta\}$ ; тогда

$$(2.28) \quad \operatorname{div} \mu = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_\theta}{\partial \theta}.$$

Используя формулу (2.28) и совокупность характеристических условий

$$(2.29) \quad \begin{aligned} -\Delta u - g \operatorname{div} \lambda &= c, \\ u|_{\Gamma} &= 0, \\ \lambda &\in \Lambda, \\ \lambda \cdot \operatorname{grad} u &= |\operatorname{grad} u|, \end{aligned}$$

где  $u(\lambda)$  — решение задачи  $(P_0)$  (соответственно двойственной задачи), можно доказать, что элемент  $\lambda$ , определяемый по формулам

$$(2.30) \quad \lambda_r = -1, \quad \lambda_\theta = 0, \quad \text{если } R' < r < R,$$

$$(2.31) \quad \lambda_r = -r/R', \quad \lambda_\theta = \beta(r), \quad \text{если } 0 < r < R',$$

где

$$(2.32) \quad \beta \in L^\infty(0, R'), \quad |\beta(r)| \leq \sqrt{1 - (r/R')^2} \text{ п. в. на } (0, R'),$$

представляет собой решение двойственной задачи, которая, таким образом, имеет бесконечное множество решений, однако лишь одно из этих решений, получающееся из формулы (2.31) при значении  $\beta = 0$ , обладает радиальной симметрией. ■

*Замечание 2.4.* Другие примеры точных решений, например решение для области  $\Omega$  в виде кругового кольца, можно найти в работе Мосолова и Мясникова [1].

*Замечание 2.5.* Замечание 2.1 теперь можно дополнить: в двух рассмотренных выше примерах, когда исходные данные обладают сильной регулярностью, а константа  $g$  достаточно мала, имеем

$$u_g \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \text{ но } u_g \notin C^2(\bar{\Omega}), \quad u_g \notin H^3(\Omega). \quad ■$$

### 3. Внутренняя аппроксимация задачи $(P_0)$ при помощи метода конечных элементов

Ниже решение задачи  $(P_0)$  — за исключением особо оговориваемых случаев — будем обозначать просто через  $u$ .

#### План изложения

В этом разделе будет дано определение аппроксимации задачи  $(P_0)$  при помощи конечных элементов 1-го порядка, т. е.

при помощи функций, непрерывных на  $\bar{\Omega}$  и кусочно-аффинных на любой триангуляции области  $\Omega$ ; сходимость данного метода будет изучена в разд. 5, в разд. 6 и 7 будут приведены численные методы решения приближенной задачи. ■

### 3.1. Триангуляция области $\Omega$ .

#### Определение пространства $V_h$

Будем действовать по способу разд. 4.1.1 гл. 3 и использовать введенные там обозначения; таким образом можно построить внутреннюю—в смысле определения разд. 4 гл. 1—аппроксимацию пространства  $H_0^1(\Omega)$  некоторым семейством  $V_h$  подпространств  $H_0^1(\Omega)$ . ■

### 3.2. Определение приближенной задачи

Приближенную задачу  $(P_{0h})$  определим следующим образом:

$$(3.1) \quad (P_{0h}) \min_{v_h \in V_h} J_g(v_h). \quad ■$$

### 3.3. О разрешимости приближенной задачи

Из непрерывности и строгой выпуклости функционала  $J_g$  на  $V_h$ , условия  $\lim_{\|v_h\| \rightarrow +\infty} J_g(v_h) = +\infty$  и результатов разд. 2.1 гл. 2 вытекает, что задача  $(P_{0h})$  имеет решение, и притом только одно, которое мы будем обозначать через  $u_h$ . Приближенное решение  $u_h$  характеризуется следующей совокупностью условий:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a(u_h, v_h - u_h) + gj(v_h) - gj(u_h) &\geq \int_{\Omega} f(v_h - u_h) dx \quad \forall v_h \in V_h, \\ u_h \in V_h. \end{aligned}$$

### 3.4. Развёрнутая формулировка приближенной задачи

Формулы разд. 4.1.4 гл. 3 позволяют получить явное выражение функционала  $J_g(v_h)$  через узловые значения  $v_M = v_h(M)$   $M \in \Sigma_h$ ; таким образом приближенная задача  $(P_0)$  приводится к минимизации некоторого недифференцируемого функционала на всем пространстве  $\mathbb{R}^N$  ( $N = \dim V_h = \text{card}(\Sigma_h)$ ). ■

### 3.5. Об использовании конечных элементов порядка выше 1

Если используется аппроксимация при помощи конечных элементов первого порядка, градиент  $v_h$  — константа на любом треугольнике из  $\mathcal{T}_h$  — и выражение  $j(v_h) = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h| dx$  через узловые значения  $v_M$  получается без труда; однако аналогичные

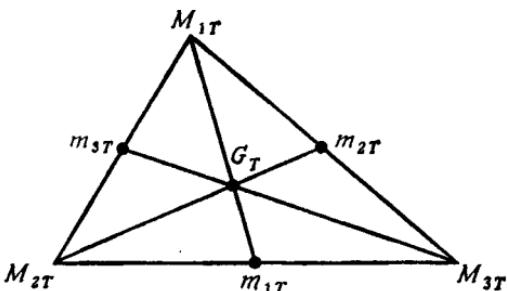


Рис. 3.1.

выражения в случае аппроксимации конечными элементами порядка  $k$ ,  $k \geq 2$  получить невозможно, и, следовательно, необходимо использовать какую-либо из аппроксимаций данного интеграла; из имеющихся возможностей укажем следующую ( $A(T)$  — площадь треугольника  $T$ ,  $G_T$  — центр тяжести  $T$ , остальные обозначения указаны на рис. 3.1):

$$(3.3) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) |\operatorname{grad} v_h(G_T)|,$$

$$(3.4) \quad \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \sum_{i=1}^3 |\operatorname{grad} v_h(M_{iT})|,$$

$$(3.5) \quad \frac{1}{3} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \sum_{i=1}^3 |\operatorname{grad} v_h(m_{iT})|.$$

В разделе 7 будет приведен пример, заимствованный из работы Фортена, когда решение задачи  $(P_0)$  аппроксимируется конечными элементами 2-го порядка, а интеграл  $\int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx$  заменяется выражениями (3.3) и (3.5). ■

Учитывая не очень высокую степень регулярности решения, следует отметить, что использование конечных элементов порядка выше 1 при условии равенства степеней свободы (с числом степеней свободы в аппроксимации элементами первого порядка), не дает, по-видимому, никаких преимуществ. ■

## 4. Внешние аппроксимации задачи ( $P_0$ )

Будем использовать обозначения и конструкции разд. 3.2.1 и 5 гл. 3.

### 4.1. Аппроксимация функционала $J_0$

Будем аппроксимировать функционал

$$J_0(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv dx$$

функцией  $J_{0h}: V_h \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$(4.1) \quad J_{0h}(v_h) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} |\delta_k q_h v_h|^2 dx - \int_{\Omega} f q_h v_h dx,$$

развернутое выражение для функции (4.1) имеет вид

$$(4.2) \quad J_{0h}(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \left( \frac{v_{i+1,j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{i-1,j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left( \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right)^2 \right] - h^2 \times \\ \times \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} f_{ij} v_{ij}; \quad v_{pq} = 0, \text{ если } M_{pq} \notin \Omega_h$$

где

$$(4.3) \quad f_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{\bar{\Omega}_h^0(M_{ij})} f(x) dx \quad \forall M_{ij} \in \Omega_h.$$

Определение множеств  $\Omega_h$ ,  $\bar{\Omega}_h$  было приведено в разд. 3.2.1 гл. 3. ■

*Замечание 4.1.* В качестве внешней аппроксимации можно было бы использовать также построенную в разд. 5.1.2 гл. 3 аппроксимацию  $J_0$  по формуле (5.4), но так как никаких численных примеров для данного случая не было рассмотрено, ниже мы ограничились использованием только формулы (4.2). ■

### 4.2. Внешние аппроксимации функционала $j$

В этом разделе мы приведем четыре возможные внешние аппроксимации  $j$ ; наиболее естественной является, очевидно, следующая:

$$(4.4) \quad j_h^1(v_h) = \int_{\Omega} \sqrt{|\delta_1 q_h v_h|^2 + |\delta_2 q_h v_h|^2} dx,$$

развернутое выражение которой через значения  $v_{ij}$  имеет вид

$$(4.5) \quad j_h^1(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} \left[ \left( \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2} + \right. \\ + \left( \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2} + \\ + \left( \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2} + \\ \left. + \left( \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2} \right], \\ v_{pq} = 0, \text{ если } M_{pq} \notin \Omega_h.$$

Как видно из формулы (4.5), функция  $j_h^1(v_h)$  представляет собой сумму примерно  $4 \times \text{card}(\Omega_h)$  недифференцируемых слагаемых, для уменьшения количества этих слагаемых до величины порядка  $\text{card}(\Omega_h)$  можно использовать следующие аппроксимации:

$$(4.6) \quad j_h^2(v_h) = \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{2} \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$(4.7) \quad j_h^3(v_h) = \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{2} \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \delta_1 q_h v_h \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right) \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \delta_2 q_h v_h \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$(4.8) \quad j_h^4(v_h) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left| \frac{\delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) + \delta_1 q_h v_h \left( x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right)}{2} \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{\delta_2 q_h v_h \left( x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) + \delta_2 q_h v_h \left( x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right)}{2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Нетрудно получить развернутые выражения аппроксимаций

(4.6), (4.7), (4.8) через значения  $v_{ij}$ :

$$(4.9) \quad j_h^2(v_h) = h^2 \sum_{M_{i+1/2,j+1/2} \in \Sigma_h} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij+1}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j+1} - v_{i+1j}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2}, \\ v_{pq} = 0, \text{ если } M_{pq} \notin \Omega_h,$$

$$(4.10) \quad j_h^3(v_h) = h^2 \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2}, \\ v_{pq} = 0, \text{ если } M_{pq} \notin \Omega_h,$$

$$(4.11) \quad j_h^4(v_h) = h^2 \sum_{M_{i+1/2,j+1/2} \in \Sigma_h} \left( \left| \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij}}{h \sqrt{2}} \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{i+1j}}{h \sqrt{2}} \right|^2 \right)^{1/2}, \quad v_{pq} = 0, \text{ если } M_{pq} \notin \Omega_h.$$

**Замечание 4.2.** Аппроксимацию (4.10) можно заменить следующей:

$$(4.10') \quad j_h^3(v_h) = h^2 \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \alpha_{ij} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{1/2}, \\ \text{где } \alpha_{ij} = 1, \text{ если } M_{ij} \in \Omega_h; \quad \alpha_{ij} = \sqrt{3}/2, \\ \text{если } M_{ij} \notin \Omega_h, \text{ причем два соседних с точкой } (i, j) \\ \text{узла принадлежат } \Omega_h; \quad \alpha_{ij} = \sqrt{2}/2, \text{ если } M_{ij} \in \Omega_h, \\ \text{причем лишь один из ближайших к рассматриваемой} \\ \text{точке узлов принадлежит } \Omega_h.$$

Эти формулы соответствуют ситуации, изображенной на рис. 5.3, 5.4 разд. 5.2 гл. 3. ■

### 4.3. Формулировка приближенной задачи

В качестве приближенной будем рассматривать следующую задачу:

$$(4.12) \quad (P_{0h})_l: \min_{v_h \in V_h} [J_{0h}(v_h) + g j_h^l(v_h)]; \quad l = 1, 2, 3, 4.$$

#### 4.4. О разрешимости приближенной задачи

Для исследования разрешимости можно применить результаты разд. 2.1 гл. 1, если заметить, что отображение

$$(4.13) \quad v_h \rightarrow \left( \int_{\Omega} (|\delta_1 q_h v_h|^2 + |\delta_2 q_h v_h|^2) dx \right)^{1/2}$$

определяет норму в пространстве  $V_h$ ; таким образом, учитывая непрерывность функционалов  $j_h^l$  ( $l=1, 2, 3, 4$ ) и их выпуклость, заключаем, что решение задачи  $(P_{0h})_l$ ,  $l=1, 2, 3, 4$  существует и оно — единственное. ■

### 5. Сходимость внутренних и внешних аппроксимаций

#### План изложения

В этом разделе мы исследуем вопрос о сходимости построенных в разд. 3 и 4 аппроксимаций; при исследовании внутренних аппроксимаций используем методы разд. 4 гл. 1, внешних — методы разд. 5 гл. 1.

Доказательство сходимости предложенных выше аппроксимаций основывается на плотности вложения  $\mathcal{D}(\Omega)$  в  $H_0^1(\Omega)$ . ■

#### 5.1. Сходимость метода конечных элементов разд. 3

Сходимость конечноэлементных аппроксимаций 1-го порядка, описание которых было приведено в разд. 3, будем изучать на основании результатов разд. 4.3 и 4.4 гл. 1; будем использовать при этом обозначения разд. 3 и разд. 6.2.1 гл. 3.

Имеет место

**Теорема 5.1.** Пусть  $\theta$  — какой-либо из углов треугольника  $T$ ,  $T \in \mathcal{T}_h$ , и пусть существует константа  $\theta_0$ , такая, что  $\theta \geq \theta_0$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall h$ . Предположим также, что  $\Omega - \Omega_h \rightarrow 0$  (это означает, что для любого компакта  $E$  из  $\Omega$  и для достаточно малых  $h$  имеет место включение  $E \subset \Omega_h$ ). Пусть  $u_h(u)$  — решение задачи  $(P_{0h})((P_0))$ , тогда  $u_h \rightarrow u$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ .

#### Доказательство

1) В формуле (3.2) разд. 3.3 положим  $v_h = 0$ :

$$(5.1) \quad a(u_h, u_h) + gj(u_h) \leq \int_{\Omega} f u_h dx;$$

отсюда и из неравенства  $j(u_h) \geq 0$  следует оценка

$$(5.2) \quad \|u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall h,$$

где  $C_0 = 1/\sqrt{\lambda_0}$ ,  $\lambda_0$  — наименьшее собственное значение оператора  $-\Delta$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ .

2) Из результатов, полученных при доказательстве теоремы 6.1 разд. 6.2.1 гл. 3, и из плотности вложения  $\mathcal{D}(\Omega)$  в  $H_0^1(\Omega)$  вытекает, что  $\forall v \in H_0^1(\Omega)$  можно подобрать последовательность  $r_h v$ , такую, что

$$(5.3) \quad \begin{aligned} r_h v &\in V_h \quad \forall h, \\ r_h v &\rightarrow v \text{ сильно в } H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Пусть  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ , тогда (ср. формулу (1.6) разд. 1.1):

$$(5.4) \quad a(u, u_h - u) + gj(u_h) - gj(u) \geq \int_{\Omega} f(u_h - u) dx \quad \forall h.$$

Аналогичным образом получаем, что (см. формулу (3.2) разд. 3.3)

$$(5.5) \quad a(u_h, r_h u - u_h) + gj(r_h u) - gj(u_h) \geq \int_{\Omega} f(r_h u - u_h) dx.$$

Складывая полученные формулы, найдем

$$(5.6) \quad \begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) &\leq a(u_h, r_h u - u) + g(j(r_h u) - j(u)) + \\ &+ \int_{\Omega} f(u - r_h u) dx. \end{aligned}$$

Из (5.6) с учетом оценки (5.2) нетрудно получить, что

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \left\{ C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} + g \sqrt{\text{mesure}(\Omega)} \right\} \times \\ &\times \|r_h u - u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \|r_h u - u\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

и так как  $r_h u \rightarrow u$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ , то из неравенства (5.7) и вытекает сильная сходимость последовательности  $(u_h)_h$  в пространстве  $H_0^1(\Omega)$ . ■

**Замечание 5.1.** Достаточно общее определение сходимости последовательности  $\Omega_h$  к  $\Omega$  было дано в разд. 6.2.1 гл. 3; при условиях несколько более ограничительных, которые на практике выполняются почти всегда и по поводу которых мы отсылаем, например, к работе Сиарле и Равьяра [1], можно построить

**оператор**  $r_h: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h$ , такой, что<sup>1)</sup>

$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  имеем оценки:

$$(5.8) \quad \|r_h v - v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1(v) h^{1/2},$$

$$\|r_h v - v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2(v) h.$$

Условие (5.8) выполняется, в частности, в случае, когда  $r_h$  определяется следующим образом:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} r_h v &= \text{проекции } v \text{ на } V_h \text{ в смысле} \\ &\text{нормы } v \rightarrow \sqrt{a(v, v)} \end{aligned}$$

в данном случае, очевидно, имеем

$$(5.10) \quad a(v_h, r_h v - v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v_h \in V_h.$$

Учитывая оценки (5.6), (5.8) и формулу (5.10), окончательно имеем

$$(5.11) \quad \|u_h - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \alpha g h^{1/2} + \beta h,$$

$\alpha$  и  $\beta$  не зависят от  $g$  и  $h$ .

## 5.2. Сходимость внешних аппроксимаций

В этом разделе мы изучим на основании результатов разд. 5 гл. 1 вопрос о сходимости внешних аппроксимаций, описание которых было приведено в разд. 4; будем использовать при этом обозначения разд. 4.

### 5.2.1. Редукция задачи $(P_{0h})_l$ к вариационному неравенству

Задача  $(P_{0h})_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$  эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} a_h(u_h, v_h - u_h) + g j_h^l(v_h) - g j_h^l(u_h) &\geq \int_{\Omega} f q_h(v_h - u_h) dx \\ \forall v_h \in V_h, \quad u_h \in V_h; \quad l &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$(5.13) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \delta_k q_h u_h \delta_k q_h v_h dx. \quad \blacksquare$$

1) Напомним, что  $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h}$  (площадь  $T$ ).

Функции  $f$  поставим в соответствие форму  $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(5.14) \quad L(v) := \int_{\Omega} fv dx.$$

### 5.2.2. Внешние аппроксимации $H_0^1(\Omega)$ , $a$ , $j$ , $L$

#### 1) Внешние аппроксимации $H_0^1(\Omega)$ , $a$ , $L$

Так как введенная выше билинейная форма  $a_h$  есть не что иное, как форма, которую ранее, в разд. 6.3.1 гл. 3, мы обозначали через  $a_h^l$ , то, сославшись на результаты, установленные в разд. 6.3.2, можно утверждать, что

$$V_h, a_h, v_h \rightarrow \int_{\Omega} f q_h v_h dx$$

реализуют внешние аппроксимации (в смысле определений разд. 5 гл. 1) соответственно пространства  $H_0^1(\Omega)$ , билинейной формы  $a$  и линейной формы  $L$ . ■

#### 2) Внешние аппроксимации функционала $j$

Имеет место

**Предложение 5.1.** Функционалы  $j_h^l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$  реализуют внешние аппроксимации  $j$ .

**Доказательство.** Нужно доказать (см. разд. 5.2 гл. 1), что

$$(5.15) \quad \{q_h v_h, \delta_1 q_h v_h, \delta_2 q_h v_h\} \rightarrow \left\{v, \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2}\right\}$$

в  $(L^2(\Omega))^3$  слабо  $\Rightarrow \liminf j_h^l(v_h) \geq j(v)$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ .

$$(5.16) \quad \{q_h v_h, \delta_1 q_h v_h, \delta_2 q_h v_h\} \rightarrow \left\{v, \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2}\right\}$$

в  $(L^2(\Omega))^3$  сильно  $\Rightarrow \lim j_h^l(v_h) = j(v)$ ;  $l = 1, 2, 3, 4$ .

Проверка выполнения условий (5.15), (5.16) для  $j_h^l$  производится без труда; используя обозначения разд. 6.3.2 гл. 3, имеем также

$$(5.17) \quad \begin{aligned} j_h^l(v_h) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{2} |\tau_{z_1}(h/2) \delta_1 q_h v_h|^2 + \frac{1}{2} |\tau_{z_2}(-h/2) \delta_1 q_h v_h|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} |\tau_{z_1}(h/2) \delta_2 q_h v_h|^2 + \frac{1}{2} |\tau_{z_2}(-h/2) \delta_2 q_h v_h|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx, \end{aligned}$$

$$(5.18) \quad j_h^3(v_h) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \frac{1}{2} |\tau_{1(h/2)} \delta_1 q_h v_h|^2 + \frac{1}{2} |\tau_{1(-h/2)} \delta_1 q_h v_h|^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} |\tau_{2(h/2)} \delta_2 q_h v_h|^2 + \frac{1}{2} |\tau_{2(-h/2)} \delta_2 q_h v_h|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

$$(5.19) \quad j_h^4(v_h) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left| \frac{\tau_{2(h/2)} \delta_1 q_h v_h + \tau_{2(-h/2)} \delta_1 q_h v_h}{2} \right|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{\tau_{1(h/2)} \delta_2 q_h v_h + \tau_{1(-h/2)} \delta_2 q_h v_h}{2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Условия (5.15), (5.16) вытекают теперь, что почти очевидно, из свойств трансляции, определение которых было дано в разд. 6.3.2 разд. 3 при доказательстве предложения 6.1 (см. формулы (6.72), (6.73)). ■

### 5.2.3. Один результат о сильной сходимости

Учитывая результаты разд. 5.2.1, 5.2.2, заключаем, что при исследовании задач  $(P_{0h})_l$ ,  $l=1, 2, 3, 4$ —более точно, эквивалентных формулировок (5.12) этих задач—можно использовать теорему 5.2 разд. 5.4 гл. 1; таким образом, имеет место

**Теорема 5.2.** Пусть  $u_h^l$ —решение задачи  $(P_{0h})_l$ ,  $u$ —решение задачи  $(P_0)$ ; если  $h \rightarrow 0$ , то

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \{q_h u_h^l, \delta_1 q_h u_h^l, \delta_2 q_h u_h^l\} &\rightarrow \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} \text{ сильно в } (L^2(\Omega))^3, \\ J_{0h}(u_h^l) &\rightarrow J_c(u), \\ j_h^l(u_h^l) &\rightarrow j(u) \\ \forall l = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

## 6. Методы решения, использующие регуляризацию функционала $j$

### План изложения

В этом разделе будет дана реализация методов регуляризации, описание которых приведено в разд. 3.3 гл. 1. В разд. 6.1 будет рассмотрена регуляризация задачи  $(P_0)$  и исследована зависимость возникающей при этом погрешности от параметра регуляризации  $\varepsilon$ . В разд. 6.2, 6.3 будет изучена регуляризация приближенных задач, полученных в разд. 3, 4, и методы численного решения регуляризованных приближенных задач; практическое применение этих методов будет продемонстрировано на нескольких примерах в разд. 6.4. ■

## 6.1. Регуляризация непрерывной задачи ( $P_0$ )

### 6.1.1. Формулировка регуляризованной задачи

Недифференцируемое слагаемое  $\int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx$  можно регуляризовать различными способами, но мы ограничимся лишь двумя аппроксимациями, определение которых дается ниже.

Рассмотрим следующие выпуклые, неотрицательные и принадлежащие классу  $C^1$  на  $\mathbb{R}$  функции  $\phi_{1\varepsilon}$  и  $\phi_{2\varepsilon}$ :

$$(6.1) \quad \phi_{1\varepsilon}(\tau) = \sqrt{\tau^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon,$$

$$(6.2) \quad \phi_{2\varepsilon}(\tau) = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{\pi} \left( 1 - \cos \frac{\pi\tau}{2\varepsilon} \right), & \text{если } |\tau| \leq \varepsilon, \\ |\tau| - \varepsilon \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right), & \text{если } |\tau| > \varepsilon. \end{cases}$$

Этим функциям соответствуют приближенные задачи ( $P'_\varepsilon$ ), полученные из ( $P_0$ ) при помощи регуляризации:

$$(6.3) \quad (P'_\varepsilon): \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ J_0(v) + g \int_{\Omega} \phi_{l\varepsilon}(|\operatorname{grad} v|) dx \right]; \quad l = 1, 2. \quad \blacksquare$$

### 6.1.2. О разрешимости регуляризованных задач.

*Сходимость и оценка погрешности регуляризации*

Обозначим  $j_{l\varepsilon}(v) = \int_{\Omega} \phi_{l\varepsilon}(|\operatorname{grad} v|) dx$ ,  $l = 1, 2$ ; имеет место

**Предложение 6.1.** Каждая из приближенных задач ( $P'_\varepsilon$ ),  $l = 1, 2$  имеет решение, и притом только одно, которое мы будем обозначать через  $u_\varepsilon^l$  и которое характеризуется условиями:

$$(6.4) \quad \begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon^l + g j'_{l\varepsilon}(u_\varepsilon^l) &= f \text{ в } \Omega, \\ u_\varepsilon^l &= 0 \text{ на } \Gamma, \end{aligned}$$

(где  $j'_{l\varepsilon}$  — градиент функционала  $j_{l\varepsilon}$ ), а также условиями

$$(6.5) \quad \begin{aligned} a(u_\varepsilon^l, v - u_\varepsilon^l) + g j_{l\varepsilon}(v) - g j_{l\varepsilon}(u_\varepsilon^l) &\geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon^l) dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u_\varepsilon^l &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Доказательство вытекает из результатов разд. 2 и 3.3 гл. 1 и общей теории монотонных операторов (см., например, книгу Лионса [1]), поскольку функционалы  $v \rightarrow J_0(v) + g j_{l\varepsilon}(v)$  строго выпуклые, непрерывные, дифференцируемые и, кроме того,  $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} [J_0(v) + g j_{l\varepsilon}(v)] = +\infty$ . ■

Обоснование предложенного выше способа регуляризации дается следующей теоремой

**Теорема 6.1.** Пусть  $u'_\varepsilon$  — решение задачи  $(P'_\varepsilon)$ ,  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ , тогда для  $l = 1, 2$ :

$$(6.6) \quad \|u'_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_l \sqrt{\varepsilon};$$

где  $C_l$  — константа, не зависящая от  $\varepsilon$ .

*Доказательство.* Имеют место неравенства (см. формулы (1.6) и (6.5)):

$$(6.7) \quad a(u, u'_\varepsilon - u) + gj(u'_\varepsilon) - gj(u) \geq \int_{\Omega} f(u'_\varepsilon - u) dx,$$

$$(6.8) \quad a(u'_\varepsilon, u - u'_\varepsilon) + gj_{1\varepsilon}(u) - gj_{1\varepsilon}(u'_\varepsilon) \geq \int_{\Omega} f(u - u'_\varepsilon) dx,$$

складывая которые, находим

$$(6.9) \quad \|u'_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = a(u'_\varepsilon - u, u'_\varepsilon - u) \leq \\ \leq g[(j_{1\varepsilon}(u) - j(u)) + (j(u'_\varepsilon) - j_{1\varepsilon}(u'_\varepsilon))].$$

Без труда доказывается, что

$$(6.10) \quad \begin{aligned} |\tau - \phi_{1\varepsilon}(\tau)| &\leq \varepsilon, \\ |\tau - \phi_{2\varepsilon}(\tau)| &\leq \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\varepsilon; \end{aligned}$$

отсюда и из определения  $j_{\varepsilon l}$  имеем

$$(6.11) \quad \|u'_\varepsilon - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq 2g\gamma_l \operatorname{mes}(\Omega)\varepsilon,$$

где  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = (1 - 2/\pi)$ . Отсюда и вытекает оценка (6.6), причем

$$(6.12) \quad \begin{aligned} C_1 &= \sqrt{2g \operatorname{mes}(\Omega)}, \\ C_2 &= \sqrt{2g(1 - 2/\pi) \operatorname{mes}(\Omega)}. \end{aligned} \blacksquare$$

*Замечание 6.1.* Приведенное доказательство сохраняется и для случая, если линейную непрерывную форму  $v \rightarrow \int_{\Omega} fv dx$  заменить на  $L \in H^{-1}(\Omega)$ . ■

### 6.1.3. Оценки погрешности регуляризации в одномерном случае

Можно (и естественно) предполагать, что оценка (6.6) погрешности регуляризации не является наилучшей; в этом разделе для частного случая одномерной задачи, рассмотренной ранее в разд. 2.3.1, мы получим оценку более точную, нежели (6.6); ограничимся при этом регуляризацией с помощью функции  $\phi_{1\varepsilon}$ .

Задача  $(P_0)$  записывается следующим образом:

$$(6.13) \quad (P_0) \min_{v \in H_0^1(0, 1)} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + g \int_0^1 |v| dx - c \int_0^1 v dx \right],$$

регуляризованная задача  $(P_\varepsilon)$  имеет вид

$$(6.14) \quad (P_\varepsilon) \min_{v \in H_0^1(0, 1)} \left[ \frac{1}{2} \int_0^1 |v'|^2 dx + g \int_0^1 \sqrt{\varepsilon^2 + v'^2} dx - c \int_0^1 v dx \right].$$

Задачи  $(P_0)$  и  $(P_\varepsilon)$  допускают единственные решения, которые ниже мы будем обозначать через  $u_0$  и  $u_\varepsilon$ . Докажем, что имеет место

**Теорема 6.2.** *Если  $c \geqslant 2g > 0$ , то*

$$(6.15) \quad \|u_0 - u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, 1)} \leqslant C_1 \varepsilon, \quad C_1 \text{ не зависит от } \varepsilon,$$

$$(6.16) \quad \|u_0 - u_\varepsilon\|_{H_0^1(0, 1)} \leqslant C_2 \varepsilon \sqrt{-\log \varepsilon}, \quad C_2 \text{ не зависит от } \varepsilon.$$

**Доказательство.** Доказательство сводится к несложным выкладкам; из соображений симметрии можно ограничиться интер-

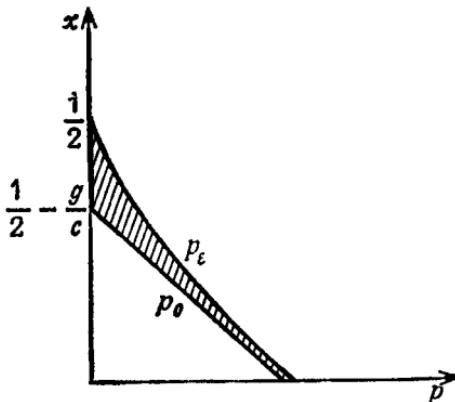


Рис. 6.1.

валом  $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ . Положим  $p_0 = u_0$ ,  $p_\varepsilon = u_\varepsilon'$ ; в разд. 2.3.1 было установлено

$$(6.17) \quad p_0(x) = \begin{cases} c \left( \frac{1}{2} - x \right) - g, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - g/c, \\ 0 & \text{если } \frac{1}{2} - g/c \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

кроме того,

$$(6.18) \quad p_\varepsilon(x) \left( 1 + \frac{g}{\sqrt{\varepsilon^2 + p_\varepsilon^2(x)}} \right) = c \left( \frac{1}{2} - x \right) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Графики функций  $p_0$  и  $p_\varepsilon$  показаны на рис. 6.1.

*Доказательство оценки (6.15).* Удвоенная площадь заштрихованной фигуры на рис. 6.1 есть не что иное, как  $\|u'_\varepsilon - u'_0\|_{L^1(0,1)}$ , следовательно, учитывая формулы (6.17), (6.18), имеем

$$(6.19) \quad \|u'_\varepsilon - u'_0\|_{L^1(0,1)} \leq \frac{2g}{c} \int_c^{+\infty} \left( 1 - \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 + p^2}} \right) dp = \frac{2g}{c} \varepsilon.$$

Из неравенства (6.19) и формулы  $u_\varepsilon(x) - u_0(x) = \int_0^x (u'_\varepsilon(\xi) - u'_0(\xi)) d\xi$  находим оценку

$$(6.20) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(0,1)} \leq \frac{g}{c} \varepsilon,$$

которая доказывает и уточняет (6.15). ■

*Доказательство (6.16).* Так как решение  $u_\varepsilon$  задачи (6.14) одновременно является решением краевой задачи

$$(6.21) \quad -u''_\varepsilon - g \frac{d}{dx} \left( \frac{u'_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + u'^2_\varepsilon}} \right) = c, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0,$$

то оно принадлежит  $C^\infty$ ; из формулы (6.18) следует, что

$$(6.22) \quad \|p'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,1)} \leq c/2 \quad \forall \varepsilon$$

и

$$(6.23) \quad p'_\varepsilon \left( 1 + \frac{g\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + p_e^2)^{3/2}} \right) = -c,$$

из этих формул вытекает оценка

$$(6.24) \quad \|p'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,1)} \leq c \quad \forall \varepsilon.$$

Таким образом, семейство функций  $(p_\varepsilon)_\varepsilon$  равномерно удовлетворяет условию Липшица, следовательно, учитывая неравенство (6.22), к этому семейству можно применить теорему Асколи, из которой вытекает, что

$$(6.25) \quad p_\varepsilon \rightarrow p_0 \text{ равномерно;}$$

в частности,

$$(6.26) \quad p_\varepsilon \left( \frac{1}{2} - g/c \right) \rightarrow 0.$$

Ниже будем использовать обозначение  $p_e = p_\varepsilon \left( \frac{1}{2} - g/c \right)$ ; таким образом, имеем

$$(6.27) \quad p_e + g \frac{p_e}{\sqrt{\varepsilon^2 + p_e^2}} = g,$$

отсюда следует, что

$$(6.28) \quad p_c = \frac{g\epsilon^2}{(p_c + V\epsilon^2 + p_c^2)\sqrt{\epsilon^2 + p_c^2}}.$$

Если  $\epsilon \rightarrow 0$ , то  $p_c \rightarrow 0$  и  $p_c/V\sqrt{p_c^2 + \epsilon^2} \rightarrow 1$ , таким образом,  $\epsilon/p_c \rightarrow 0$ , и, следовательно,

$$(6.29) \quad p_c \simeq \frac{g\epsilon^2}{2p_c^2} \Rightarrow p_c \simeq \sqrt[3]{g/2} \epsilon^{2/3}. \blacksquare$$

Имеет место равенство

$$\|u_\epsilon - u_0\|_{H_0^1(0,1)} = \left[ 2 \int_0^{1/2-g/c} |p_\epsilon(x) - p_0(x)|^2 dx + \right. \\ \left. + 2 \int_{1/2-g/c}^{1/2} |p_\epsilon(x) - p_0(x)|^2 dx \right]^{1/2};$$

положим по определению

$$I_1 = \int_{1/2-g/c}^{1/2} |p_\epsilon(x) - p_0(x)|^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{1/2-g/c} |p_\epsilon(x) - p_0(x)|^2 dx.$$

*Оценка  $I_1$*

На отрезке  $\left[\frac{1}{2}-g/c, \frac{1}{2}\right]$  величина  $p_0(x) = 0$ , следовательно,

$$(6.30) \quad I_1 = \int_{1/2-g/c}^{1/2} p_\epsilon^2(x) dx.$$

Положим

$$(6.31) \quad p_\epsilon = \epsilon \sinh \phi,$$

тогда

$$(6.32) \quad \epsilon \sinh \phi + g \tanh \phi = c \left(\frac{1}{2} - x\right),$$

и, следовательно,

$$(6.33) \quad I_1 = \frac{\epsilon^2}{c} \int_0^{\phi_c} \sinh^2 \phi \left( \epsilon \cosh \phi + \frac{g}{\sinh^2 \phi} \right) d\phi, \quad \phi_c = \operatorname{Arg} \sinh \frac{p_\epsilon}{\epsilon}.$$

Элементарные вычисления дают

$$(6.34) \quad I_1 = \frac{\epsilon^2}{c} \left( \frac{\epsilon}{3} \sinh^3 \phi_c + g\phi_c - g \tanh \phi_c \right).$$

Из формул (6.29), (6.33), (6.34) следует, что

$$(6.35) \quad I_1 \simeq -(g/3c)(\epsilon^2 \log \epsilon). \blacksquare$$

*Оценка  $I_2$*

На отрезке  $[0, \frac{1}{2} - g/c]$  сумма  $p(x) + g \operatorname{th} \phi = c \left( \frac{1}{2} - x \right)$ ,  
 $p_0(x) + g = c \left( \frac{1}{2} - x \right)$ , следовательно,

$$(6.36) \quad p(x) - p_0(x) = g(1 - \operatorname{th} \phi) = g(e^{-\phi}/\operatorname{ch} \phi),$$

учитывая формулу (6.32), находим, что

$$(6.37) \quad I_2 \leq \frac{g^2}{c} \int_{\phi_c}^{+\infty} \frac{e^{-2\phi}}{\operatorname{ch}^2 \phi} \left( \varepsilon \operatorname{ch} \phi + \frac{g}{\operatorname{ch}^2 \phi} \right) d\phi.$$

Полагая  $t = e^\phi$  и выполняя необходимые вычисления, получим:

$$(6.38) \quad \int_{\phi_c}^{+\infty} \frac{e^{-2\phi}}{\operatorname{ch}^2 \phi} \left( \varepsilon \operatorname{ch} \phi + \frac{g}{\operatorname{ch}^2 \phi} \right) d\phi = 2\varepsilon (e^{-\phi_c} - \operatorname{Arctg} e^{-\phi_c}) + \\ + \frac{8g}{3} \frac{1}{(e^{2\phi_c} + 1)^3},$$

учитывая, что  $e^{\phi_c} \simeq \sqrt[3]{4g} e^{-1/3}$ , найдем

$$(6.39) \quad \int_{\phi_c}^{+\infty} \frac{e^{-2\phi}}{\operatorname{ch}^2 \phi} \left( \varepsilon \operatorname{ch} \phi + \frac{g}{\operatorname{ch}^2 \phi} \right) d\phi \simeq \frac{\varepsilon^2}{3g},$$

следовательно,

$$(6.40) \quad I_2 \leq \frac{g}{3c} \varepsilon^2 [1 + \alpha(\varepsilon)], \quad \text{причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0. \blacksquare$$

Из формулы (6.35) и оценки (6.40) немедленно имеем

$$(6.41) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(0,1)} \simeq \sqrt{2g/3c} \varepsilon \sqrt{-\log \varepsilon},$$

что и завершает доказательство теоремы 6.2.  $\blacksquare$

*Замечание 6.2.* Рассмотрим задачу

$$(P_0): \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) + gj(v) - c \int_{\Omega} v dx \right],$$

регуляризация которой имеет вид

$$(P_\varepsilon): \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) + g \int_{\Omega} \sqrt{\varepsilon^2 + |\operatorname{grad} v|^2} dx - c \int_{\Omega} v dx \right].$$

Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 6.2, можно установить, что и в случае, когда  $\Omega$  — круг

радиуса  $R$ , имеют место оценки

$$(6.42) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \varepsilon, \quad C_1 \text{ не зависит от } \varepsilon,$$

$$(6.43) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_2 \varepsilon \sqrt{V - \log \varepsilon}, \quad C_2 \text{ не зависит от } \varepsilon,$$

где  $u_0$  — решение задачи  $(P_0)$ ,  $u_\varepsilon$  — решение задачи  $(P_\varepsilon)$ . ■

*Замечание 6.3.* Пусть  $\Omega$  — произвольная область из  $\mathbb{R}^2$ ,  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ; рассмотрим задачи

$$(6.44) \quad \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) + gj(v) - \langle f, v \rangle \right],$$

$$(6.45) \quad \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) + g \int_{\Omega} \sqrt{V \varepsilon^2 + |\operatorname{grad} v|^2} dx - \langle f, v \rangle \right].$$

Пусть  $u_0$  — решение задачи (6.44),  $u_\varepsilon$  — задачи (6.45); можно предположить на основании полученных выше явных оценок, что

$$(6.46) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{2/3}, \quad C \text{ не зависит от } \varepsilon. \quad ■$$

#### 6.1.4. Применение регуляризации для получения результатов двойственности

В настоящем разделе изложенный выше метод регуляризации будет использован с целью элементарного доказательства характеристических условий — типа „двойственности“ — разд. 3.4 гл. 1 (формулы (3.48) — (3.51)); ниже будем предполагать, что  $f \in H^{-1}(\Omega)$ .

Задачу  $(P_0)$  сформулируем в виде эквивалентного ей вариационного неравенства:

$$(6.47) \quad \begin{aligned} a(u, v - u) + gj(v) - gj(u) &\geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u &\in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

соответствующую регуляризованную задачу — в виде

$$(6.48) \quad \begin{aligned} a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + g \left( \int_{\Omega} \sqrt{V \varepsilon^2 + |\operatorname{grad} v|^2} dx - \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \sqrt{V \varepsilon^2 + |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2} dx \right) &\geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u_\varepsilon &\in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Полагая последовательно  $v = 0$  и  $v = 2u$  в формуле (6.47), не трудно доказать, что

$$(6.49) \quad a(u, u) + gj(u) = \langle f, u \rangle;$$

отметим также, что решение  $u_\varepsilon$  задачи (6.48) характеризуется условиями

$$(6.50) \quad a(u_\varepsilon, v) + g \int_{\Omega} \frac{\operatorname{grad} u_\varepsilon \cdot \operatorname{grad} v}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2}} dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega).$$

Пусть  $\Lambda = \{\mu \mid \mu = (\mu_1, \mu_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \mu_1^2(x) + \mu_2^2(x) \leq 1$  п. в.}; определим  $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$  по формуле

$$(6.51) \quad \lambda_\varepsilon = \frac{\operatorname{grad} u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\operatorname{grad} u_\varepsilon|^2}}.$$

Тогда существуют элемент  $\lambda \in \Lambda$  и последовательность, которую мы по-прежнему будем обозначать через  $(\lambda_\varepsilon)_\varepsilon$ , такие, что

$$(6.52) \quad \lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda \text{ -слабо в } L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega).$$

Из неравенства (6.48) имеем

$$(6.53) \quad a(u_\varepsilon, v) + g \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \cdot \operatorname{grad} v dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$(6.54) \quad a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + g \int_{\Omega} \lambda_\varepsilon \cdot \operatorname{grad} u_\varepsilon dx = \langle f, u_\varepsilon \rangle,$$

учитывая, что последовательность  $u_\varepsilon$  сходится сильно к решению  $u$  (см. теорему 6.1), и переходя к пределу в равенствах (6.53), (6.54), получаем

$$(6.55) \quad a(u, v) + g \int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} v dx = \langle f, v \rangle,$$

$$(6.56) \quad a(u, u) + g \int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u dx = \langle f, u \rangle.$$

Сравнивая формулы (6.49) и (6.56), находим, что

$$(6.57) \quad \int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u dx = \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u| dx.$$

Заметим, что имеет место эквивалентность условий

$$(6.58) \quad \left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \cdot \operatorname{grad} u dx &= \int_{\Omega} |\operatorname{grad} u| dx \\ \lambda \in \Lambda \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda \cdot \operatorname{grad} u &= |\operatorname{grad} u| \text{ п. в.,} \\ \lambda \in \Lambda \end{aligned} \right.$$

из которых с учетом равенства (6.55) следует, что

$$(6.59) \quad -\Delta u - g \operatorname{div} \lambda = f,$$

$$u|_{\Gamma} = 0,$$

$$(6.60) \quad \lambda \cdot \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u|,$$

$$\lambda \in \Lambda,$$

что и требовалось установить. ■

## 6.2. Регуляризация приближенных задач

### 6.2.1. Случай внутренней аппроксимации разд. 3

Будем использовать обозначения разд. 3, 6.1.1 и 6.1.2; регуляризованную задачу, соответствующую приближенной задаче (3.1) разд. 3.2, определим следующим образом:

(6.61)

$$a(u_{eh}^l, v_h - u_{eh}^l) + g j_{le}(v_h) - g j_{le}(u_{eh}^l) \geq \int_{\Omega} f(v_h - u_{eh}^l) dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$u_{eh}^l \in V_h,$$

где  $l = 1, 2$ . Нетрудно доказать, что имеет место

**Теорема 6.3.** Задача (6.61) имеет решение, и притом только одно; если  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то  $\forall l = 1, 2$  имеем

$$(6.62) \quad u_{eh}^l \rightarrow u_h,$$

где  $u_h$  — решение приближенной задачи  $(P_{0h})$  (см. формулу (3.1) разд. 3.2).

**Замечание 6.4.** Легко доказать, что имеют место следующие результаты о сходимости:

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_{eh}^l = u_e^l \text{ сильно в } H_0^1(\Omega),$$

(6.63) где  $u_e^l$  — решение задачи  $(P_e^l)$  (см. формулу (6.3) разд. 6.1.1),

(6.64)  $\lim_{e, h \rightarrow 0} u_{eh}^l = u$  сильно в  $H_0^1(\Omega)$ , где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ .

В самом деле, принимая те же предположения, что и при получении оценки (5.11) (см. замечание 5.1 разд. 5.1), можно доказать, что, когда  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ ,

$$(6.65) \quad \|u - u_{eh}^l\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \alpha h + g(\beta h^{1/2} + \gamma_l \varepsilon),$$

$\alpha, \beta, \gamma_l$  не зависят от  $h$  и  $\varepsilon$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от  $l$ . ■

Для численного решения (6.61) будет использована эквивалентная формулировка задачи  $(P_0)$  в виде вариационного неравенства:

$$(6.66) \quad a(u_{eh}^l, v_h) + g(j'_{le}(u_{eh}^l), v_h) = \int_{\Omega} fv_h dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$u_{eh}^l \in V_h,$$

в котором при  $l=1$

$$(6.67) \quad (j'_{le}(u_{eh}^1), v_h) = \int_{\Omega} \frac{\operatorname{grad} u_{eh}^1 \cdot \operatorname{grad} v_h}{\sqrt{V_{\varepsilon^2} + |\operatorname{grad} u_{eh}^1|^2}} dx,$$

(в случае  $l=2$  записать задачу в явном виде несколько сложнее).

Используя формулы разд. 4.1.4 гл. 3, в принципе нетрудно получить развернутую формулировку задачи (6.66) в виде системы  $N^1$  нелинейных уравнений относительно неизвестных — значений  $u_{eh}^l$  в узлах  $M \in \Sigma_h$  триангуляции  $\mathcal{T}_h$ . ■

### 6.2.2. Случай внешних аппроксимаций разд. 4

Будем использовать обозначения разд. 4, 6.1.1 и 6.1.2; аппроксимации функционалов  $j_h^k$ ,  $k=1, 2, 3, 4$ , разд. 4.2 по методу регуляризации определим следующим образом:

$$(6.68) \quad j_{he}^{ll}(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left[ \phi_{le} \left( \sqrt{\left| \frac{v_{i+1j}-v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1}-v_{ij}}{h} \right|^2} \right) + \right.$$

$$+ \phi_{le} \left( \sqrt{\left| \frac{v_{i-1j}-v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1}-v_{ij}}{h} \right|^2} \right) +$$

$$+ \phi_{le} \left( \sqrt{\left| \frac{v_{i-1j}-v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1}-v_{ij}}{h} \right|^2} \right) +$$

$$\left. + \phi_{le} \left( \sqrt{\left| \frac{v_{i+1j}-v_{ij}}{h} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij-1}-v_{ij}}{h} \right|^2} \right) \right],$$

$$(6.69) \quad j_{le}^{ll}(v_h) = h^2 \sum_{M_{l+1/2, l+1/2} \in \Sigma_h} \phi_{le} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j+1}-v_{ij+1}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j}-v_{ij}}{h} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij+1}-v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j+1}-v_{i+1j}}{h} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

<sup>1)</sup>  $N = \dim V_h = \operatorname{card}(\Sigma_h)$ .

$$(6.70) \quad j_{he}^{3l}(v_h) = h^2 \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}} \alpha_{ij}^2 \phi_{le} \times \\ \times \left[ \frac{1}{\alpha_{ij}} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v_{lj-1} - v_{ij}}{h} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$(6.71) \quad j_{he}^{4l}(v_h) = h^2 \sum_{M_{i+1/2, j+1/2} \in \Sigma_h} \phi_{le} \times \\ \times \left( \sqrt{\left| \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij}}{h \sqrt{2}} \right|^2 + \left| \frac{v_{ij+1} - v_{i+1j}}{h \sqrt{2}} \right|^2} \right),$$

где  $v_{pq} = 0$ , если  $M_{pq} \notin \Omega_h$ ; в формуле (6.70) параметры  $\alpha_{ij} = 1$ , если функционал  $j_h^3$  задан по формуле (4.10); в случае, когда регуляризуется функционал  $j_h^3$ , заданный по формуле (4.10'), параметры  $\alpha_{ij}$  принимают значения, указанные в этой же формуле.

Приближенные задачи, соответствующие регуляризациям (6.68), ..., (6.71) задачи (4.12), имеют вид

$$(6.72) \quad \min_{v_h \in V_h} [J_{0h}(v_h) + g j_{he}^{kl}(v_h)]; \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad l = 1, 2.$$

Нетрудно доказать, что имеет место

**Теорема 6.4.** Задача (6.72) имеет решение, и притом только одно, которое мы будем обозначать через  $u_{he}^{kl}$ ; при  $\epsilon \rightarrow 0$   $\forall l = 1, 2$  имеем

$$(6.73) \quad u_{he}^{kl} \rightarrow u_h^k,$$

где  $u_h^k$  — решение приближенной задачи  $(P_{0h})_k$  — (4.12) разд. 4.3.

Задача (6.72) эквивалентна следующей системе  $N$ <sup>1)</sup> нелинейных уравнений с  $N$  неизвестными

$$(6.74) \quad h^2 \left( -\frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2} - f_{ij} \right) + \\ + g \frac{\partial}{\partial v_{ij}} j_{he}^{kl}(u_{he}^{kl}) = 0, \quad M_{ij} \in \Omega_h, \\ u_{pq} = 0, \quad \text{если } M_{pq} \notin \Omega_h,$$

где  $u_{he}^{kl} = (u_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h}$ .

Очевидно, что методы численного решения задачи (6.72) нужно строить на основании эквивалентной формулировки (6.74).

1)  $N = \dim V_h = \text{card}(\Omega_h)$ .

**Замечание 6.5.** Система (6.74) при значениях  $k = 1, 2, 4$  ( $k = 3$ ) соответствует дискретизации непрерывной регуляризованной задачи по 9-точечной (13-точечной) схеме метода конечных разностей; расположение узлов этих схем см. на рис. 8.2 разд. 8.2.5 (рис. 8.1 разд. 8.2.4) гл. 3. ■

### 6.3. Решение приближенных регуляризованных задач (I). Метод поточечной верхней релаксации

#### 6.3.1. Описание и исследование сходимости метода

Построенные в разд. 6.2 различные приближенные регуляризованные задачи относятся к следующему типу (используются обозначения разд. 1 гл. 2):

$$(6.75) \quad \min_{v \in \mathbb{R}^N} J(v),$$

где  $J: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  принадлежит классу  $C^1$ , обладает свойством сильной выпуклости<sup>1)</sup>, и, кроме того,

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty;$$

следовательно, для эффективного решения задачи минимизации (6.75) можно применить описанный в разд. 1.1 гл. 2 алгоритм релаксации, сходимость которого вытекает из теоремы 1.1 этого же раздела:

$$(6.76) \quad u^0 = \{u_1^0, \dots, u_N^0\} \text{ задается,}$$

зная элемент  $u^n$ , определяем последовательно координаты элемента  $u^{n+1}$  из решения следующих задач:

$$(6.77) \quad \begin{aligned} J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots) &\leq J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n, \dots) \\ \forall v_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Разумеется, задача (6.77) эквивалентна задаче

$$(6.78) \quad \frac{\partial J}{\partial v_i}(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots) = 0$$

Скорость сходимости данного алгоритма можно попытаться увеличить путем введения параметра верхней или нижней релаксации (определения для случая линейных уравнений см. в разд. 1.4 гл. 2), при этом получаются два возможных варианта алгоритма (6.76), (6.77).

<sup>1)</sup> То есть  $(J'(v) - J'(u)) \cdot (v - u) \geq \alpha \|v - u\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0$ .

*Первый алгоритм*

(6.79)  $u^0 = \{u_1^0, \dots, u_N^0\}$  задается,

зная элемент  $u^n$ , определяем поочередно координаты приближения  $u^{n+1}$  из решения следующих задач:

(6.80)  $\frac{\partial J}{\partial v_i} (u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, \bar{u}_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots) = 0,$

(6.81)  $u_i^{n+1} = u_i^n + \omega (\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n),$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ . ■

*Второй алгоритм*

Зная элемент  $u^n$ , определяем поочередно координаты приближения  $u^{n+1}$  следующим образом:

(6.82) 
$$\begin{aligned} & \frac{\partial J}{\partial v_i} (u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, u_{i+1}^n, \dots) = \\ & = (1 - \omega) \frac{\partial J}{\partial v_i} (u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^n, u_{i+1}^n, \dots), \end{aligned}$$

где  $i = 1, 2, \dots, N$ . ■

В примерах, численное решение которых было фактически построено с помощью методов регуляризации и верхней релаксации, функционал  $\int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx$  заменялся регуляризованным функционалом  $\int_{\Omega} \sqrt{v^2 + |\operatorname{grad} v|^2} dx$ , что обеспечивает принадлежность функционала  $J$  задачи (6.75) классу  $C^\infty$  и положительную определенность гессиана  $J''(v)$  в любой точке  $v \in \mathbb{R}^N$ . Как следует из результатов, установленных в работах Шехтера [1], [2], [3], этих двух условий достаточно для обеспечения сходимости алгоритма (6.75), (6.80), (6.81), если только

(6.83)  $0 < \omega < \beta \leq 2,$

точное определение границы  $\beta$  на практике в общем случае затруднительно. Насколько нам известно, теоретического исследования алгоритма (6.79), (6.82) к настоящему времени, по-видимому, не проведено, несмотря на то, что во многих случаях данный алгоритм оказывается „сильнее“ алгоритма (6.79), (6.80), (6.81). ■

*Замечание 6.6.* В рассмотренных ниже примерах (см. разд. 6.3.2) нелинейные уравнения (6.80) и (6.82) решались по методу Ньютона, алгоритм которого, например, в задаче (6.80) определения

$\bar{u}_i^{n+1}$  записывается следующим образом:

$$(6.84) \quad \bar{u}_i^{n+1, i} = u_i^n,$$

$$(6.85) \quad \bar{u}_i^{n+1, m+1} = \bar{u}_i^{n+1, m} - \frac{\frac{\partial J_h}{\partial v_i}(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, \bar{u}_i^{n+1, m}, u_{i+1}^n, \dots)}{\frac{\partial^2 J_h}{\partial v_i^2}(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, \bar{u}_i^{n+1, m}, u_{i+1}^n, \dots)}.$$

Аналогичные соотношения можно было бы написать для определения  $u_i^{n+1}$  из решения задачи (6.82).

По поводу метода Ньютона напомним, что, как установлено в цитированных выше работах Шехтера, при использовании алгоритма (6.79), (6.80), (6.81) (в предположении о том, что а)  $J \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ; б)  $J''(v)$  положительно определен для  $\forall v \in \mathbb{R}^N$ ; в) параметр  $\omega$  выбран надлежащим образом) для определения  $u_i^{n+1}$  можно ограничиться только одной итерацией по Ньютону, т. е. вычислять  $u_i^{n+1}$  (используя обозначения (6.84), (6.85)) по формуле

$$(6.86) \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \omega (\bar{u}_i^{n+1, i} - u_i^n),$$

и сходимость алгоритма при этом не нарушается. ■

*Замечание 6.7.* Если при вычислении  $u_i^{n+1}$  в алгоритмах (6.79), (6.80), (6.81) и (6.79), (6.28) ограничиться лишь одной итерацией по Ньютону, то полученные таким способом новые алгоритмы совпадают. ■

### 6.3.2. Приложения

Пусть область  $\Omega$  — круг радиуса 4,  $f = \text{const} = C$ ; решение задачи  $(P_0)$  для данного случая определено в разд. 2.3.2 — формулы (2.19), ..., (2.21).

Использовалась внутренняя аппроксимация по методу конечных элементов 1-го порядка, описание которой дано в разд. 3; соответствующая триангуляция  $\mathcal{T}_h$  показана на рис. 6.2 — она содержит 1054 треугольника, 545 узлов и 481 внутренний узел, следовательно, приближенная задача содержит 481 неизвестную.

Регуляризация проводилась только при помощи функции  $\phi_{ie}$ . Используя обозначения разд. 6.2.1, имеем, таким образом, следующую приближенную регуляризованную задачу:

$$(6.87) \quad \begin{aligned} & a(u_{eh}^1, v_h - u_{eh}^1) + g \int_{\Omega} \sqrt{e^2 + |\operatorname{grad} v_h|^2} dx - \\ & - g \int_{\Omega} \sqrt{e^2 + |\operatorname{grad} u_{eh}^1|^2} dx \geqslant \\ & \geqslant C \int_{\Omega} (v_h - u_{eh}^1) dx \quad \forall v_h \in V_h, \\ & u_{eh}^1 \in V_h, \end{aligned}$$

эквивалентную разысканию

(6.88)

$$\min_{v_h \in V_h} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v_h|^2 dx + g \int_{\Omega} \sqrt{\epsilon^2 + |\operatorname{grad} v_h|^2} dx - C \int_{\Omega} v_h dx \right].$$

Для задачи (6.88) сохраняются все результаты разд. 6.3.1, частности к ней относится и замечание 6.6. Следовательно,

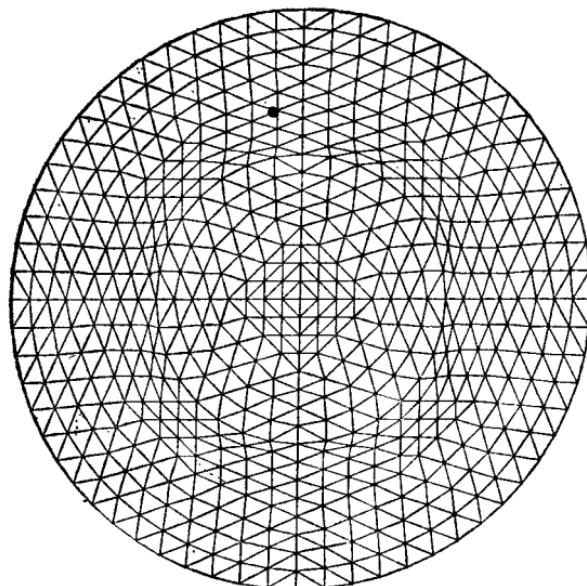


Рис. 6.2.

для решения задачи (6.88) можно применить нелинейный вариант метода верхней релаксации с одной итерацией Ньютона на этапе определения элемента  $u_M^{n+1}$  ( $M \in \Sigma_h$ ).

Вычисления в соответствии с описанным выше алгоритмом были проведены для следующих значений параметров:

$$(6.89) \quad C = 10, \quad g = 1 \text{ и } 10, \quad \epsilon = 10^{-2}.$$

„Остаточный член“ определим по формуле

$$(6.90) \quad R(n) = \frac{\sum\limits_{M \in \Sigma_h} |u_M^{n+1} - u_M^n|}{\sum\limits_{M \in \Sigma_h} |u_M^{n+1}|}.$$

<sup>1)</sup> Индекс  $\epsilon$  опущен.

Начальное приближение для алгоритма нелинейной верхней релаксации с одной итерацией Ньютона выбиралось в виде

$$(6.91) \quad u_h^0 = 0,$$

по поводу реализации отметим следующее.

— Каждая итерация требует примерно 2 с машинного времени ЭВМ СИИ 10070.

— Для  $g=1$  оптимальное значение параметра  $\omega$  равно примерно 1,4, и для того, чтобы при этом значении  $\omega$  величина  $R(n)$  имела порядок  $10^{-5}$ , требуется примерно 500 итераций. Соответствующие затраты машинного времени, по нашему мнению, слишком велики, если их сравнить с теми, которые необходимы для реализации методов, приведенных в следующих разделах. Приближенное решение достаточно хорошо аппроксимирует точное: для  $n=500$

$$(6.92) \quad \max_{M \in \Sigma_h} \frac{|u_M^n - u(M)|}{|u(M)|} < 10^{-8},$$

где  $u$  — точное решение задачи  $(P_0)$ .

— Для  $g=10$  затраты машинного времени, необходимые для достижения удовлетворительной аппроксимации точного решения, слишком велики, и используемые методы в этом случае нельзя считать оперативными. ■

## 6.4. Решение приближенных регуляризованных задач (II).

Градиентный метод с промежуточным оператором

### 6.4.1. Описание и сходимость метода

В разд. 2.1 гл. 2 — со ссылкой на работу Сеа [2] — было показано, что для решения задач типа (6.75) можно применить алгоритм

$$(6.93) \quad u^0 \text{ задается,}$$

$$(6.94) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_n J'(u^n),$$

(6.95)  $\rho_n > 0$  — параметр, выбираемый надлежащим образом.

Полезен следующий вариант данного алгоритма: пусть  $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$  — симметричная положительно определенная матрица, обобщение алгоритма (6.93), (6.94), (6.95) состоит в том, что  $u^{n+1}$  определяется по формуле

$$(6.96) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_n S^{-1} J'(u^n),$$

случай (6.93), (6.94), (6.95) соответствует  $S = I$ ; путем надлежащего выбора матрицы  $S$  (по этому поводу см. ниже разд. 6.4.2)

скорость сходимости алгоритма можно значительно увеличить — по сравнению со случаем  $S = I$  — по крайней мере тогда, когда  $J'(u)$  представляет собой дискретизацию некоторого неограниченного линейного или нелинейного оператора (что имеет место в примерах, рассматриваемых в этой книге).

Что касается сходимости алгоритма (6.93), (6.96), (6.95), то здесь имеет место

**Теорема 6.5.** Если

$$(6.97) \quad (J'(v_2) - J'(v_1), v_2 - v_1) \geq \alpha \|v_2 - v_1\|^2, \quad \alpha > 0,$$

$$(6.98) \quad \|J'(v_2) - J'(v_1)\| \leq \beta \|v_2 - v_1\|, \quad \beta \text{ не зависит от } v_1, v_2 \in \mathbb{R}^N,$$

и, кроме того,

$$(6.99) \quad 0 < r_1 \leq \rho_n \leq r_2 < 2\alpha\sigma/\beta^2,$$

где  $\sigma$  — наименьшее собственное значение  $S$ , то  $\forall u^0 \in \mathbb{R}^N$  последовательность  $u^n$ , определяемая алгоритмом (6.93), (6.96), сходится к решению  $u$  задачи (6.75)<sup>1)</sup>.

**Доказательство.** Доказательство представляет собой вариант стандартных рассуждений, которые проводятся при установлении сходимости градиентного метода; будем полагать  $\|v\| = (Sv, v)^{1/2}$ . Так как решение  $u$  задачи (6.75) удовлетворяет равенству

$$(6.100) \quad u = u - \rho_n S^{-1} J'(u) \quad \forall n,$$

то, вычитая это равенство из (6.96) (и обозначая  $\bar{u}^n = u^n - u$ ), получим

$$(6.101) \quad \bar{u}^{n+1} = \bar{u}^n - \rho_n S^{-1} (J'(u^n) - J'(u)),$$

возведя в квадрат (в смысле введенного выше скалярного умножения), отсюда найдем

$$(6.102) \quad \begin{aligned} \|\bar{u}^{n+1}\|^2 &= \|\bar{u}^n\|^2 - 2\rho_n (J'(u^n) - J'(u), \bar{u}^n) + \\ &+ \rho_n^2 (S^{-1} (J'(u^n) - J'(u)), J'(u^n) - J'(u)), \end{aligned}$$

учитывая формулы (6.97), (6.98) и то обстоятельство, что  $\|S^{-1}\| = 1/\sigma$ , из формулы (6.102) можно получить оценку

$$(6.103) \quad \|\bar{u}^n\|^2 - \|\bar{u}^{n+1}\|^2 \geq \rho_n (2\alpha - \rho_n \beta^2 / \sigma) \|\bar{u}^n\|^2,$$

из которой и следует сходимость к элементу  $u^n$ , если только выполнено условие (6.99). ■

<sup>1)</sup> Элемент  $u$ , о котором здесь идет речь, не имеет никакого отношения (по меньшей мере сейчас) к решению  $u$  задачи  $(P_0)$  (задачи (1.5)).

*Замечание 6.8.* Обозначая (как обычно)  $\rho(S) = \|S\|$ , нетрудно, используя соотношения (6.97), (6.98), (6.103), доказать, что

$$(6.104) \quad \|\bar{u}^{n+1}\|^2 \leq \|\bar{u}^n\|^2 \left(1 - 2\rho_n \frac{\alpha}{\rho(S)} + \rho_n^2 \frac{\beta^2}{\sigma^2}\right),$$

откуда следует, что разность  $\|\bar{u}^n - u\|$  стремится к нулю со скоростью геометрической прогрессии, если выполнено условие

$$(6.105) \quad 0 < r_1 \leq \rho_n \leq r_2 < \frac{2\alpha\sigma}{\beta^2} \left(\frac{\sigma}{\rho(S)}\right)$$

— несколько более ограничительное, нежели условие (6.96) (исключая случай  $S = I$ ). ■

*Замечание 6.9.* Исследование сходимости алгоритма типа (6.93), (6.96) с приложениями к решению некоторых нелинейных задач можно найти в работах Брезиса и Сибони [2] и Сибони [1], где принимаются несколько более слабые предположения, нежели те, которые были использованы при доказательстве теоремы 6.5. ■

*Замечание 6.10.* Читатель может убедиться в том, что алгоритм (3.20) замечания 3.2 разд. 3.1 гл. 1 представляет собой бесконечномерный вариант (изложенный в форме вариационного неравенства) алгоритма (6.93) — (6.96). ■

Отметим, что градиент регуляризованных аппроксимаций функционалов разд. 6.2 удовлетворяет всем условиям теоремы 6.5, константа  $\beta$  в условии Липшица при этом имеет форму

$$(6.106) \quad \beta = \frac{\beta_0}{\epsilon} (1 + O(\epsilon)), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} O(\epsilon) = 0. \quad ■$$

#### 6.4.2. Один пример

Рассмотрим частный случай задачи  $(P_0)$ , когда  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 1$  и  $1,6$ .

*Способ дискретизации:* по методу конечных разностей (внешняя аппроксимация) недифференцируемое слагаемое аппроксимируется выражением (4.10)' для  $j_h^3$  и функционалом  $j_h^4$  (см. формулу (4.11)).

*Способ регуляризации:* при помощи функции  $\phi_{2\epsilon}$ <sup>1</sup>) (см. формулу (6.2)).

1) Несмотря на то, что эта аппроксимация функции  $\tau \rightarrow |\tau|$  намного сложнее аппроксимации  $\tau \rightarrow \sqrt{\epsilon^2 + \tau^2}$ , она широко используется (по крайней мере ее первые и вторые производные) в анализе переходных процессов в электрических цепях, так как известны способы построения ее физической модели.

*Шаг дискретизации:*  $h = 1/20$ .

*Параметр регуляризации:*  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-4}$ .

*Реализация алгоритма (6.93), (6.96)*

С использованием введенных выше внешних аппроксимаций и соответствующих обозначений алгоритм (6.93), (6.96) применительно к решению приближенных регуляризованных задач приводится к следующей форме:

$$(6.107) \quad \begin{aligned} u_h^0 &\text{ задается,} \\ u_h^{n+1} &= u_h^n - \rho_n S_h^{-1} F_h(u_h^n), \end{aligned}$$

где  $F_h$  — оператор из  $V_h \rightarrow V_h$ , определяемый левой частью равенства (6.74) ( $l = 2, k = 3, 4$ ),  $S_h$  — дискретизация надлежащим образом выбранного эллиптического оператора. В качестве  $S$  вначале был выбран оператор  $S = I$ , однако оказалось, что при таком выборе  $S$  скорость сходимости слишком мала. Поэтому впоследствии была использована рекомендация Годунова и Прокопова [1] (относящаяся к линейным эллиптическим задачам), когда

$$S = S_2 = \left( I - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \left( I - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right),$$

граничные условия для каждого из множителей здесь — однородные условия задачи Дирихле. Еще одна возможность состоит в том, чтобы взять  $S_3 = -\Delta$  с однородными условиями Дирихле. Как было установлено, при одном и том же условии останова (см. ниже условие (6.108)) оба метода примерно эквивалентны в отношении количества итераций, однако при использовании оператора  $S_2$  возникающую на каждой итерации промежуточную задачу можно решать прямым методом Гаусса или Холесского (если учесть трехдиагональную структуру дискретизаций операторов  $I - \partial^2/\partial x_1^2$ ,  $I - \partial^2/\partial x_2^2$ ), что приводит к сокращению времени вычислений примерно в 10 раз по сравнению со случаем, когда используется оператор  $S_3 = -\Delta$ , а промежуточные задачи Дирихле решаются методом точечной верхней релаксации с оптимальным значением параметра релаксации.

### Численные результаты

Результаты, касающиеся сходимости алгоритма (6.107) и полученные при использовании условия останова вида

$$(6.108) \quad R^n = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| \leq 10^{-8},$$

выбора в качестве  $u_h^0$  сужения функции  $xy(1-x)(1-y)$  на область  $\Omega_h$  и использовании в качестве оператора  $S$  оператора  $S_2$ , сгруппированы в табл. 6.1:

Таблица 6.1

$g$	$/h$	$\rho_n$	Число итераций, необходимых для достижения сходимости
1	$/h^3$	Полагаем сначала $\rho_0 = 1$ и далее сохраняем $\rho_n = 1$ до тех пор, пока величина $\mathbb{R}^n$ убывает; при нарушении этого условия полагаем $\rho_n = 1/20$	134
	$/h^4$		164
	$/h^8$		133
1,6	$/h^4$		210

Затраты машинного времени на решение каждой из указанных задач на ЭВМ IBM 360/91 составляют примерно 3 с.

Что касается достигаемой точности, отметим, что полученные результаты с точностью до  $10^{-3}$  (в относительных величинах) совпадают с результатами, полученными ниже в разд. 7 в этих же задачах методами двойственности. Дополнительные данные по этому вопросу можно найти в работе Гурса [2]. ■

## 7. Методы двойственности

### План изложения

В этом разделе мы рассмотрим применение результатов и алгоритмов двойственности, изложенных в разд. 3.4, 3.5 гл. 1 и разд. 4 гл. 2. После краткого напоминания основных положений метода (разд. 7) рассмотренные ранее для непрерывных задач варианты метода будут применены к решению непрерывных задач (разд. 7.1 и 7.2), полученных с помощью внешних аппроксимаций в разд. 4 и конечных элементов — разд. 3. ■

### 7.1. Применение к решению непрерывной задачи

Из результатов разд. 3.4 гл. 1 вытекает, что решение задачи (1.5) характеризуется тем, что существует элемент  $\lambda \in \Lambda = \{\mu | \mu \in L^2(\Omega) \times L_\Omega^2, |\mu(x)| \leq 1 \text{ п. в.}\}$ , такой, что

$$(7.1) \quad \lambda \cdot \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u|,$$

$$(7.2) \quad -\Delta u - g \operatorname{div} \lambda = f \text{ в } \Omega, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Условия (7.1), (7.2), очевидно, означают, что пара  $\{\mu, \lambda\}$  представляет собой седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}: H_0^1(\Omega) \times (L^2(\Omega))^2 \rightarrow \mathbb{R}$  на множестве  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda$ , где

$$(7.3) \quad \mathcal{L}(\mu, v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + g \int_{\Omega} \mu \cdot \operatorname{grad} v \, dx.$$

Следовательно, для решения задачи можно применить (как уже было отмечено в замечании 4.9 разд. 4.4 гл. 2) алгоритм двойственности (4.12), (4.13) разд. 4.3 гл. 2, множество  $\Lambda$  для которого определено выше;

$$(7.4) \quad V = H_0^1(\Omega), \quad M = V,$$

$$(7.5) \quad L = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

$$(7.6) \quad \phi: V \rightarrow L \text{ определяется из формулы } \phi v = \operatorname{grad} v.$$

Что касается оператора проектирования  $P_{\Lambda}: L \rightarrow \Lambda$ , то здесь он имеет вид

$$(7.7) \quad P_{\Lambda}(\mu) = \frac{\mu}{\sup(1, |\mu|)},$$

$$|\mu| = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}, \text{ если } \mu = \{\mu_1, \mu_2\}.$$

Таким образом, алгоритм, о котором идет речь, в развернутом виде записывается следующим образом:

$$(7.8) \quad \lambda^0 \text{ задается (произвольно),}$$

зная  $\lambda^n (\in \Lambda)$ , определяем элемент  $u^n$ , после этого — приближение  $\lambda^{n+1}$ :

$$(7.9) \quad \begin{aligned} -\Delta u^n - g \operatorname{div} \lambda^n &= f \text{ в } \Omega, \\ u^n &= 0 \text{ на } \Gamma, \end{aligned}$$

$$(7.10) \quad \lambda^{n+1} = P_{\Lambda}(\lambda^n + \rho_n \operatorname{grad} u^n).$$

Используя результаты, установленные при доказательстве теоремы 4.1 разд. 4.3 гл. 2, можно получить

**Предложение 7.1.** *Если*

$$(7.11) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < 2/g,$$

то последовательность  $u^n$ , определяемая алгориттом (7.8), (7.9), (7.10), обладает тем свойством, что

$$(7.12) \quad u^n \rightarrow u \text{ сильно в } H_0^1(\Omega),$$

где  $u$  — решение задачи (1.5). ■

## 7.2. Применение к решению приближенных задач (I). Случай внешних аппроксимаций разд. 4

### 7.2.1. Алгоритм двойственности в решении приближенных задач разд. 4

Ограничимся рассмотрением приближенной задачи (4.12) (см. разд. 4.3), соответствующей аппроксимации  $j_h^k$  (по формуле (4.11)), так как нетрудно убедиться в том, что из всех приближенных задач (4.12) именно эта задача имеет наиболее простую двойственную формулировку<sup>1)</sup>.

Используя обозначения разд. 4 настоящей главы и разд. 5.1.2 гл. 3, определим пространство  $L_h$ :

$$L_h = \{\mu_h \mid \mu_h = \{\mu_h^1, \mu_h^2\}, \mu_h^k = \{\mu_{i+1/2j+1/2}^k\}_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h}, k = 1, 2\}, \quad (7.13)$$

замкнутое выпуклое множество  $\Lambda_h$  пространства  $L_h$ :

$$(7.14) \quad \Lambda_h = \{\mu_h \mid \mu_h \in L_h, |\mu_{i+1/2j+1/2}^1|^2 + |\mu_{i+1/2j+1/2}^2|^2 \leq 1 \quad \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h\}$$

и отображение  $G_h: V_h \rightarrow L_h$  (дискретный аналог оператора grad):

$$(7.15) \quad G_{i+1/2j+1/2}^1(v_h) = \frac{v_{i+1j+1} - v_{ij+1} + v_{i+1j} - v_{ij}}{2h},$$

$$G_{i+1/2j+1/2}^2(v_h) = \frac{v_{i+1j+1} - v_{i+1j} + v_{ij+1} - v_{ij}}{2h}.$$

При этих условиях можно доказать, что решение<sup>2)</sup>  $u_h$  задачи  $(P_{0h})$  характеризуется тем, что существует элемент  $\lambda_h \in \Lambda_h$  такой, что

$$(7.16) \quad \begin{aligned} & \frac{u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}}{h^2} = f_{ij} + \\ & + g \left( \frac{\lambda_{i+1/2j+1/2}^1 - \lambda_{i-1/2j+1/2}^1 + \lambda_{i+1/2j-1/2}^1 - \lambda_{i-1/2j-1/2}^1}{2h} + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_{i+1/2j+1/2}^2 - \lambda_{i+1/2j-1/2}^2 + \lambda_{i-1/2j+1/2}^2 - \lambda_{i-1/2j-1/2}^2}{2h} \right) \end{aligned}$$

$\forall M_{ij} \in \Omega_h, u_{pq} = 0$ , если  $M_{pq} \notin \Omega_h$ ,

$$(7.17) \quad \sqrt{|G_{i+1/2j+1/2}^1(u_h)|^2 + |G_{i+1/2j+1/2}^2(u_h)|^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^2 \lambda_{i+1/2j+1/2}^k G_{i+1/2j+1/2}^k(u_h) \quad \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h,$$

<sup>1)</sup> По этому поводу см. статью Сеа и Гловински [1].

<sup>2)</sup> Верхний индекс „4“ ниже будем опускать.

эти условия представляют собой дискретный аналог условий (7.1), (7.2); пара  $\{u_h, \lambda_h\}$  представляет собой седловую точку лагранжиана  $\mathcal{L}_h$ :

$$(7.18) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = J_{0h}(v_h) + \\ + gh^2 \sum_{M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} \sum_{k=1}^2 \mu_{i+1/2j+1/2}^k G_{i+1/2j+1/2}^k(v_h) \end{aligned}$$

на множестве  $V_h \times \Lambda_h$ .

Следовательно, здесь, в пространстве конечного числа измерений, можно использовать результаты разд. 4 гл. 2, откуда имеем дискретный аналог алгоритма (7.8), (7.9), (7.10):

$$(7.19) \quad \lambda_h^n \text{ задается,}$$

зная  $\lambda_h^n$ , определяем  $u_h^n$ , а затем  $\lambda_h^{n+1}$ :

$$(7.20) \quad \begin{aligned} - \frac{u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^n + u_{ij+1}^n + u_{ij-1}^n - 4u_{ij}^n}{h^2} = f_{ij} + \\ + g \left( \frac{\lambda_{i+1/2j+1/2}^{1n} - \lambda_{i-1/2j-1/2}^{1n} + \lambda_{i+1/2j-1/2}^{1n} - \lambda_{i-1/2j-1/2}^{1n}}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{i+1/2j+1/2}^{2n} - \lambda_{i+1/2j-1/2}^{2n} + \lambda_{i-1/2j+1/2}^{2n} - \lambda_{i-1/2j-1/2}^{2n}}{2h} \right) \end{aligned}$$

$$\forall M_{ij} \in \Omega_h, u_{pq}^n = 0, \text{ если } M_{pq} \notin \Omega_h,$$

$$(7.21) \quad \begin{aligned} (\lambda_{i+1/2j+1/2}^{1n+1}, \lambda_{i+1/2j+1/2}^{2n+1}) = P_D(\lambda_{i+1/2j+1/2}^{1n} + \\ + \rho_n G_{i+1/2j+1/2}^1(u_h^n), \lambda_{i+1/2j+1/2}^{2n} + \rho_n G_{i+1/2j+1/2}^2(u_h^n)) \\ \forall M_{i+1/2j+1/2} \in \Sigma_h \end{aligned}$$

(использованы обозначения замечания 8.10 разд. 8.3.3 гл. 3).

Так как для исследования полученного здесь алгоритма можно применить теорему 4.1 разд. 4.3 гл. 2, то последовательность  $u_h^n$ , определяемая алгоритмом (7.19), (7.20), (7.21), сходится к решению  $u_h$  задачи  $(P_{0h})_4$ , если только

$$(7.22) \quad 0 < \alpha_{0h} \leq \rho_n \leq \alpha_{1h}, \text{ где } \alpha_{1h} \text{ достаточно мало. } \blacksquare$$

*Замечание 7.1.* Соотношения (7.16), (7.17), (7.20), (7.21) представляют собой „естественные“ дискретизации соответствующих соотношений (7.2), (7.1), (7.9), (7.10) в непрерывном случае.  $\blacksquare$

## 7.2.2. Частный случай, когда известно точное решение

### Построение тестовой задачи

Точное решение задачи  $(P_0)$  для случая  $f = \text{const} = C$  в области  $\Omega$  в виде круга радиуса  $R$  было дано в разд. 2.3.2. Пусть  $u$  — сужение на область  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  решения задачи  $(P_0)$

в круге радиуса  $R = \sqrt{2}/2$  с центром в точке  $(0,5, 0,5)$  для значений  $\mu = 1$ ,  $C = 10$ ,  $g = 1,25 = 5/4$  (откуда  $R' = 1/4$ , ср. рис. 7.1).

Основное из того, что уже было сказано в этой главе, применимо и к решению следующей неоднородной вариационной задачи:

$$(7.22)' \quad \min_{v \in H} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) + gj(v) - (f, v) \right],$$

$$H = \{v | v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}\},$$

решение которой совпадает, очевидно, с элементом  $u$ ; в частности, для приближенного решения задачи (7.22) можно при-

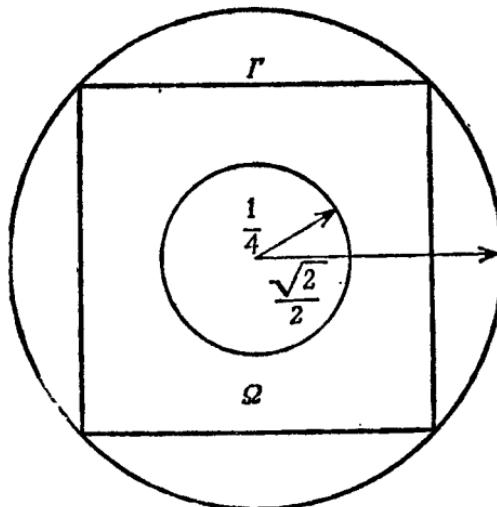


Рис. 7.1.

менить алгоритм (7.19), (7.20), (7.21). Для этого достаточно на этапе (7.20) условие  $u_p^n = 0$  в точках  $M_{pq} \notin \Omega_h$  (в данном случае в точках  $\Gamma$ ) заменить условием  $u_{pq}^n = u(M_{pq})$  в точках  $M_{pq} \in \Gamma$ . ■

### Решение приближенных задач Дирихле (7.20)

Это решение производится по методу поточечной верхней релаксации с оптимальным значением параметра релаксации. Обозначая через  $u_h^{n,m}$  последовательность итераций, определяемых алгоритмом верхней релаксации, в качестве начального приближения при вычислении  $u_h^n$  используем элемент

$$(7.23) \quad u_h^{n,0} = u_h^{n-1},$$

в качестве условия останова — условие

$$(7.24) \quad \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} \left| u_{ij}^{n,m} - u_{ij}^{n,m-1} \right| \leq 10^{-4}. ■$$

*Начальное приближение для алгоритма (7.19), (7.20), (7.21), (7.25):*

$$\lambda_h^0 = 0.$$

*Условие останова алгоритма (7.19), (7.20), (7.21), (7.26):*

$$R^n = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| \leq 3 \cdot 10^{-4}.$$

*Выбор параметра  $\rho_n$ . Использовалось значение  $\rho_h = \rho = 1/g = \frac{4}{5}$ .*

#### *Анализ численных результатов*

Введем обозначение

$$(7.27) \quad E^n = \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u(M_{ij})|,$$

где  $u$  — точное решение задачи (7.22); результаты, касающиеся сходимости и достигаемой точности, сгруппированы в табл. 7.1.

*Таблица 7.1*

$h$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
Число итераций $N$ , необходимых для достижения сходимости	25	25	36
$R^N$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$
$E^N$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$
Время вычислений на IBM 360/91	0,35 с	1,53 с	9,62 с

*Замечание 7.2. Для  $h = 1/20$  величина  $\max_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{25} - u(M_{ij})| \approx$*

$\simeq 10^{-4}$ . ■

Более детальный анализ сходимости алгоритма (7.19), (7.20), (7.21) и полученных численных результатов, в том числе вопроса о зависимости решения от параметра  $g$ , приводится ниже, в разд. 7.2.3. ■

### 7.2.3. Другие примеры (I)

Рассмотрим теперь задачи, точное решение которых неизвестно<sup>1)</sup>.

*Определение области и численных значений параметров*

Выберем  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ; что касается выбора  $g$ , то здесь мы рассмотрим несколько значений с тем, чтобы исследовать зависимость решения от этого параметра.

*Шаг дискретизации:  $h = 1/20$ .*

*Решение приближенных задач Дирихле (7.20).*

Методом точечной верхней релаксации с оптимальным значением параметра.

*Начальные приближения и условие останова алгоритмов*

Совпадают с теми, которые были использованы в примере разд. 7.2.2.

*Выбор значений  $\rho_n$ .* Полагаем  $\rho_n = \rho$ .

*Анализ численных результатов*

Зависимость числа итераций, необходимых для сходимости метода, от параметра  $\rho$  для значения  $g = 1$  показана на рис. 7.2.

Для значения  $\rho = 2/g = 2$  метод еще сходится (за 136 итераций), для значения  $\rho = 2,1$  имеет место расходимость. Следовательно, ограничение (2.11), относящееся к непрерывной задаче, очень близко к действительности и для приближенной задачи  $(P_{oh})_4$ . Для  $\rho = 1,1$  (что примерно соответствует оптимальному значению параметра  $\rho$ ) алгоритм (7.19), (7.20), (7.21) сходится за 12 итераций, что соответствует 1с машинного времени ЭВМ IBM 360/91. Количество итераций метода верхней релаксации, необходимых для решения приближенных задач Дирихле (7.20) с начальными приближениями (7.23) и условием останова (7.24) (для  $g = 1$ ,  $\rho = 1$ ), иллюстрируется рис. 7.3.

На рис. 7.4, 7.5 показаны области течения<sup>2)</sup> и застойные области<sup>3)</sup> (заштрихованные), соответствующие значениям  $g = 1$  и  $g = 1,8$ .

На рис. 7.6 приведен график функции  $x_1 \rightarrow u\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$  для значений  $\mu = 1$ ,  $g = 1$ ,  $f = 10$ .

<sup>1)</sup> Исключая случай достаточно больших значений  $g$ , когда решение равно нулю.

<sup>2)</sup> То есть  $|\operatorname{grad} u| > 0$ .

<sup>3)</sup> То есть  $|\operatorname{grad} u| = 0$ .

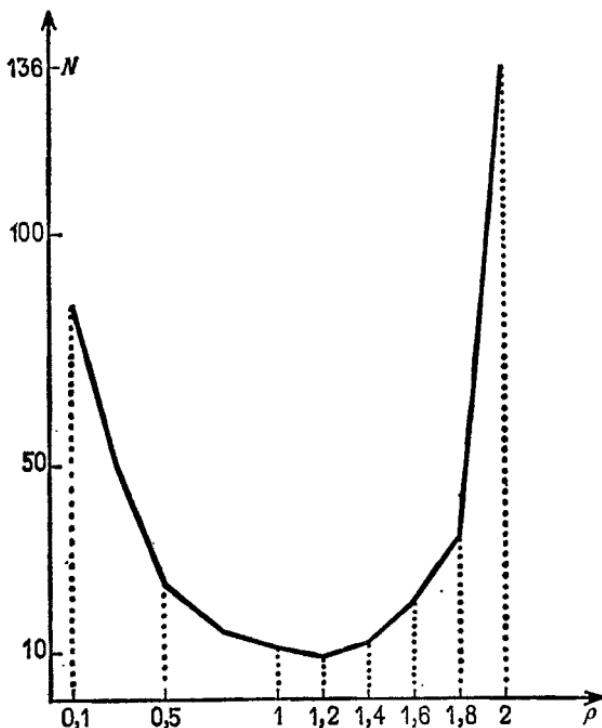


Рис. 7.2. Зависимость числа итераций, необходимых для достижения сходимости, от числа  $\rho$  ( $g = 1$ ).

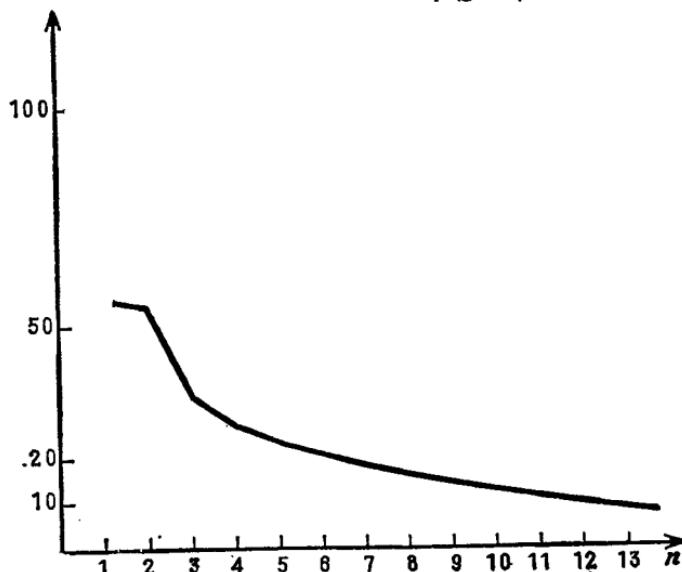


Рис. 7.3. Изменение числа итераций верхней релаксации, необходимых для решения приближенных задач Дирихле (7.20) ( $g = 1$ ,  $\rho = 1$ ).

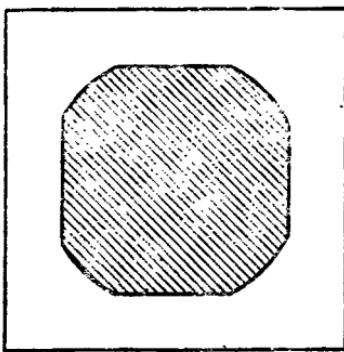
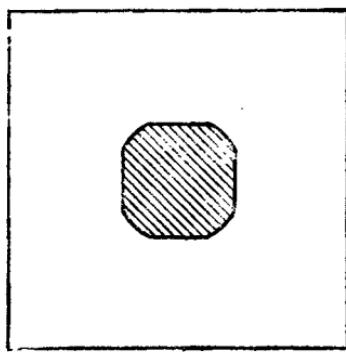


Рис. 7.4.  $\mu=1, g=1, f=10,$   
 $u_{\max}=0,291.$

Рис. 7.5.  $\mu=1, g=1,8,$   
 $f=10, u_{\max}=0,080.$

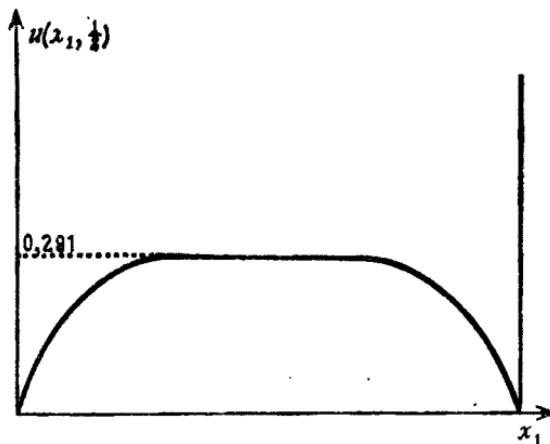


Рис. 7.6. График функции  $u(x_1, 1/2), \mu=1, g=1, f=10.$

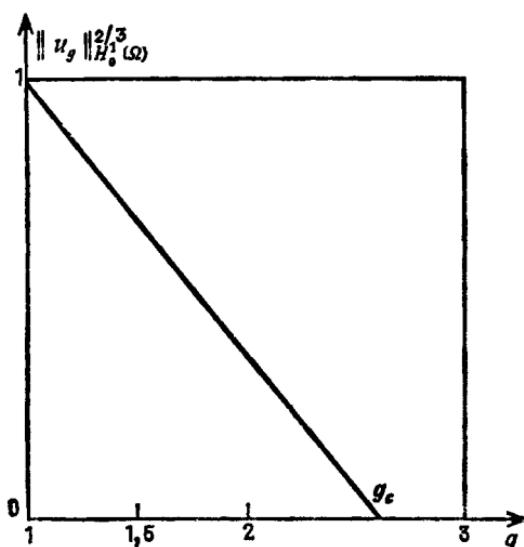


Рис. 7.7. График функции  $g \rightarrow \|u_g\|_{H_0^1(\Omega)}^{2/3}.$

Интерес, на наш взгляд, представляет показанное на рис. 7.7 убывание нормы  $\|u_g\|_{H_0^1(\Omega)}$  с ростом параметра  $g$ ; для области  $\Omega$  в виде круга в случае  $f = \text{const}$  из условий (2.20) разд. 2.3.2 нетрудно получить, что величина  $\|u_g\|_{H^1(\Omega)}^2$  пропорциональна  $|g - g_c|^3$ ; была построена — на основании очень большого количества значений параметра  $g$  — зависимость  $g \rightarrow \|u_g\|_{H_0^1(\Omega)}^{2/3}$ , график этой зависимости — прямая линия, поэтому можно, по-видимому, сделать вывод о том, что и в случае, когда область  $\Omega$  — квадрат, а функция  $f = \text{const}$ , установленная для круга зависимость величины  $\|u_g\|_{H_0^1(\Omega)}$  от параметра  $|g - g_c|^{3/2}$  остается справедливой (с точностью, определяемой погрешностями аппроксимации и вычислений).

#### 7.2.4. Другие примеры (II)

В этом разделе также будет рассмотрен пример, точное решение для которого неизвестно (по крайней мере для достаточно малых значений  $g$ ).

*Задание области и численных значений параметров*

Выберем область  $\Omega$  в виде полукруга радиуса  $1/2$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 0,75$ .

*Шаг дискретизации:*  $h = 1/20$ .

*Анализ численных результатов*

Как и в предшествующих примерах, был использован алгоритм (7.19), (7.20), (7.21); распределение построенных в про-

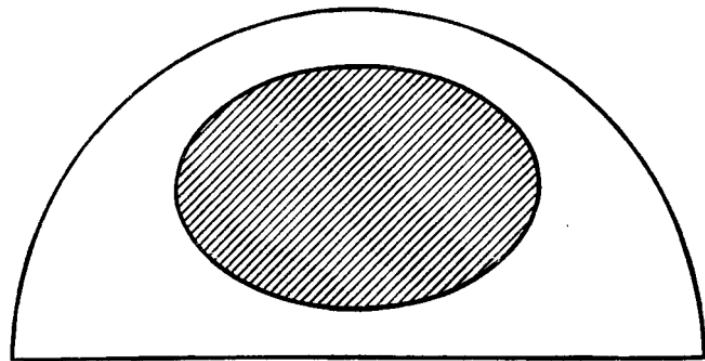


Рис. 7.8. Полукруговой трубопровод ( $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 0,75$ ).

цессе решения областей течения и застойных областей (заштрихованных) показано на рис. 7.8.

### 7.3. Применение к решению приближенных задач (II). Случай конечноэлементных аппроксимаций

#### 7.3.1 Случай аппроксимации конечными элементами разд. 3

Описание и исследование сходимости алгоритма двойственности

Будем использовать обозначения разд. 3 и разд. 8.3.2 гл. 3; решение  $u_h$  задачи (3.1) (и эквивалентной задачи (3.2)) характеризуется тем, что существует элемент  $\lambda_h \in \Lambda_h$ , такой, что

$$(7.28) \quad a(u_h, v_h) + g \int_{\Omega} \lambda_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$u_h \in V_h,$$

$$(7.29) \quad |\operatorname{grad} u_h| = \lambda_h \cdot \operatorname{grad} u_h;$$

эти условия представляют собой дискретный аналог условий (7.1), (7.2). Пара  $\{u_h, \lambda_h\}$  является седловой точкой лагранжиана  $\mathcal{L}_h$

$$(7.30) \quad \mathcal{L}_h(v_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) + g \int_{\Omega} \mu_h \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx - \int_{\Omega} f v_h \, dx$$

на множестве  $V_h \times \Lambda_h$ .

Таким образом, здесь, в пространстве конечного числа измерений, можно использовать результаты разд. 4 гл. 2, откуда имеем дискретный аналог алгоритма (7.8), (7.9), (7.10):

$$(7.31) \quad \lambda_h \text{ задается,}$$

зная  $\lambda_h^n$ , определяем  $u_h^n$ , а затем  $\lambda_h^{n+1}$ :

$$(7.32) \quad a(u_h^n, v_h) + g \int_{\Omega} \lambda_h^n \cdot \operatorname{grad} v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$u_h^n \in V_h,$$

$$(7.33) \quad \lambda_h^{n+1} = P_{\Lambda_h}(\lambda_h + \rho_n \operatorname{grad} u_h^n),$$

напомним, что здесь  $P_{\Lambda_h}: L_h \rightarrow \Lambda_h$  определяется по формуле

$$(7.34) \quad P_{\Lambda_h}(q_h) = \frac{q_h}{\max(1, |q_h|)}.$$

Применив для исследования полученного здесь алгоритма теорему 4.1 разд. 4.3 гл. 2, заключаем, что последовательность  $u_h^n$ , определяемая алгоритмом (7.31), (7.32), (7.33), сходится к решению  $u_h$  задачи (3.1), если (как и в случае непрерывной задачи) выполнено условие

$$(7.35) \quad 0 < \alpha_0 \leq \rho_n \leq \alpha_1 < 2/g. \blacksquare$$

*Замечание 7.2.* Используя формулы разд. 4.1.4 гл. 3, нетрудно получить развернутую форму уравнений (7.28), (7.29) и (7.32), (7.33). ■

### 7.3.2. Случай аппроксимации конечными элементами разд. 3 (II). Примеры<sup>1)</sup>

Решение приближенных задач Дирихле (7.32).

Эти задачи решаются методом точечной верхней релаксации со значением  $\omega = 1,5$  для всех рассматриваемых примеров; начальное приближение при вычислении  $u_h^n$  выбиралось равным  $u_h^{0,n} = u_h^{n-1}$ , где через  $u_h^{p,n}$  обозначается итерация номер „ $p$ “ в методе верхней релаксации.

#### Условия останова

Определим величины  $D_m(n)$ :

$$(7.36) \quad D_m(n) = \sum_{M \in \Sigma_h} |u_M^n - u_M^{n-1}| / \sum_{M \in \Sigma_h} |u_M^n|,$$

и  $D_m^n(p)$ :

$$(7.37) \quad D_m^n(p) = \sum_{M \in \Sigma_h} |u_M^{p,n} - u_M^{p-1,n}| / \sum_{M \in \Sigma_h} |u_M^{p,n}|$$

и для рассматриваемых ниже примеров выберем условие останова в виде

$$(7.38) \quad D_m(n) \leq 10^{-4}$$

для алгоритма (7.31), (7.32), (7.33) и

$$(7.39) \quad D_m^n(p) \leq \varepsilon_n,$$

где

$$(7.40) \quad \varepsilon_n = \min(\varepsilon_{n-1}, D_m(n-1)/5), \quad \varepsilon_1 = 10^{-3}$$

для алгоритма верхней релаксации.

Начальное приближение для алгоритма (7.31), (7.32), (7.33):  $\lambda_h^0 = 0$ .

Выбор значений  $\rho_n$ . Во всех рассмотренных примерах было выбрано  $\rho_n = \rho = 0,7$ .

*Пример 1.* Рассмотрим пример, когда точное решение известно — задано формулами (2.20) разд. 2.3.2; итак, пусть область  $\Omega$  — круг радиуса  $1/2$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 1,25$ , следовательно,  $R' = 1/4$ . Используется триангуляция, показанная на рис. 7.9,

<sup>1)</sup> Численные результаты в рассматриваемых ниже задачах получены Ж. Ф. Бурга.

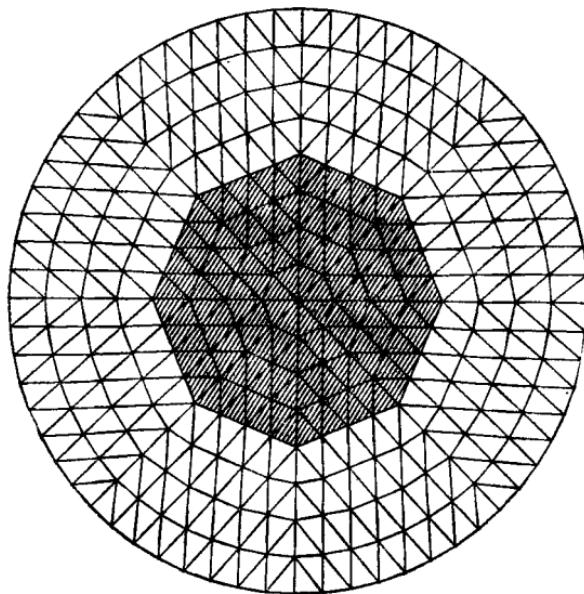


Рис. 7.9.  $\mu = 1$ ,  $\rho = 10$ ,  $g = 1,25$ .

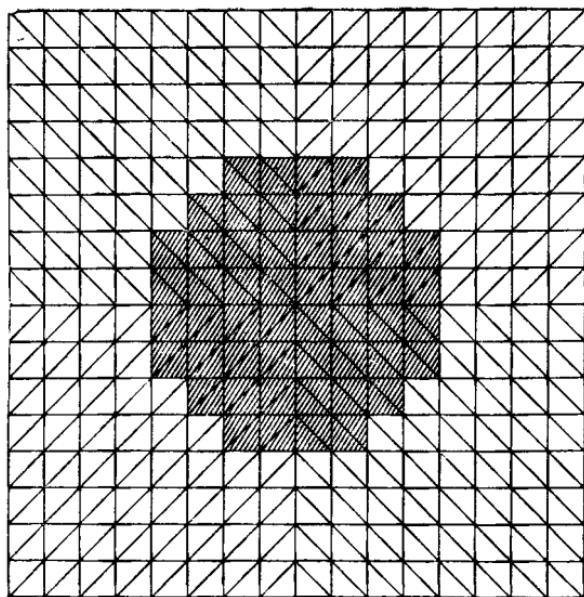


Рис. 7.10.  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 1$ .

содержащая 512 треугольников и 225 внутренних узлов; при выполнении указанных выше условий алгоритм (7.31), (7.32), (7.33) сходится за 10 итераций, что соответствует 90 с машинного времени ЭВМ СII 10070; отметим, что

$$\max_{M \in \Sigma_h} |u_h^{10}(M) - u(M)| = 6 \cdot 10^{-4},$$

где  $u$  — точное решение задачи.

Расчетные области течения и застоя (заштрихована) показаны на рис. 7.9.

*Пример 2.* Выберем  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 1$ . При использовании приведенной на рис. 7.10 триангуляции, содержащей 512 треугольников, имеет место сходимость за 14 итераций, что соответствует 2 м 30 с машинного времени ЭВМ СII 10070. Расчетные зоны течения и застойные зоны (заштрихованы) показаны также на рис. 7.10.

*Пример 3.* Выберем в качестве  $\Omega$  полукруг радиуса  $1/2$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 0,75$ . При использовании приведенной на рис. 7.11

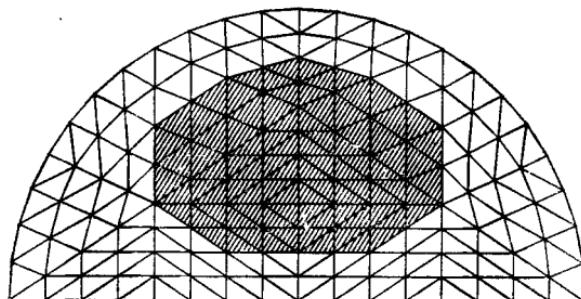


Рис. 7.11.  $\mu = 1$ ,  $f = 10$ ,  $g = 0,75$ .

триангуляции, содержащей 256 треугольников, имеет место сходимость за 23 итерации, что соответствует 1 м 10 с машинного времени ЭВМ СII 10070. Расчетные области течения и застоя (заштрихованы) показаны на рис. 7.11.

### 7.3.3. Случай аппроксимации конечными элементами Лагранжа 2-го порядка

#### Общая теория

Приведенные ниже рассуждения взяты из работы Фортена [1]. Пусть задана некоторая аппроксимация пространства  $H_0^1(\Omega)$  семейством подпространств  $V_h$  непрерывных функций, сужение которых на любой треугольник  $T$  триангуляции  $\mathcal{T}_h$  области  $\Omega$

есть полином степени не выше 2; как уже отмечалось в разд. 3.5, при использовании данного типа элементов для решения задачи (1.5) возникают некоторые проблемы, связанные с аппроксимацией недифференцируемого слагаемого  $g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx$ .

Так как используемая аппроксимация является лагранжевой со степенями свободы, совпадающими со значениями функции  $v_h$  в точках  $M_{iT}$ ,  $m_{iT}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), расположение которых показано на рис. 3.1 разд. 3.5, то для аппроксимации функционала  $g \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v| dx$  можно использовать квадратурные формулы; функционал

$$J_g(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + g j(v) - \int_{\Omega} f v dx$$

будем аппроксимировать функционалом вида

(7.41)

$$J_{gh}(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) + g \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) |\operatorname{grad} v_h(G_T)| - \int_{\Omega} f v_h dx,$$

а также

$$(7.42) \quad J_{gh}^2(v_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) +$$

$$+ g \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{A(T)}{3} \sum_{i=1}^3 |\operatorname{grad} v_h(m_{iT})| - \int_{\Omega} f v_h dx,$$

где  $G_T$  — центр тяжести  $T$ ,  $A(T)$  — площадь треугольника  $T$ .

Нетрудно доказать, что приближенные задачи

$$(7.43) \quad \min_{v_h \in V_h} J_{gh}^1(v_h),$$

$$(7.44) \quad \min_{v_h \in V_h} J_{gh}^2(v_h)$$

имеют единственные решения, которые мы будем обозначать через  $u_h^1$  и  $u_h^2$ , и что при  $h \rightarrow 0$  (как и в теореме 5.1 разд. 5.1) имеет место сильная сходимость:

$$(7.45) \quad u_h^i \rightarrow u \text{ сильно в } H_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ <sup>1)</sup>.

1) Последнее утверждение следует почти сразу из общих результатов относительно сходимости конечноделементных аппроксимаций (см., например, работы Фикса и Стренга [1], Сиарло и Равьяра [1]).

Пусть лагранжианы  $\mathcal{L}_h^1$ ,  $\mathcal{L}_h^2$  определены по формулам

$$(7.46) \quad \mathcal{L}_h^1(v_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) +$$

$$+ g \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \mu_T \cdot \operatorname{grad} v_h(G_T) - \int_{\Omega} f v_h dx,$$

$$(7.47) \quad \mathcal{L}_h^2(v_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(v_h, v_h) +$$

$$+ g \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{A(T)}{3} \sum_{i=1}^3 \mu_{iT} \cdot \operatorname{grad} v_h(m_{iT}) - \int_{\Omega} f v_h dx,$$

где  $\mu_T$ ,  $\mu_{iT}$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $\in \mathbb{R}^3$ ; тогда можно доказать, что приведенные ниже конечномерные варианты алгоритма (7.8), (7.9), (7.10) определяют последовательности  $u_h^{i,n}$  ( $i = 1, 2$ ), сходящиеся к соответствующим элементам  $u_h^i$  — решениям задач (7.41), (7.44).

*Случай i = 1:*

$$(7.48) \quad \{\lambda_T^i\}_{T \in \mathcal{T}_h} \text{ задается,}$$

зная  $\lambda_T^n$ , определяем  $u_h^n$  и  $\lambda_T^{n+1}$ :

$$(7.49) \quad a(u_h^n, v_h) + g \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A(T) \lambda_T^n \cdot \operatorname{grad} v_h(G_T) = \int_{\Omega} f v_h dx \quad \forall v_h \in V_h,$$

$$u_h^n \in V_h,$$

$$(7.50) \quad \lambda_T^{n+1} = P_D(\lambda_T^n + \rho_n A(T) \operatorname{grad} u_h^n(G_T)), \quad T \in \mathcal{T}_h,$$

$$(7.51) \quad 0 < \alpha_{0h}^1 \leq \rho_n \leq \alpha_{1h}^1, \quad \alpha_{1h}^1 \text{ достаточно мало. } \blacksquare$$

*Случай i = 2:*

$$(7.52) \quad \{(\lambda_{1T}^0, \lambda_{2T}^0, \lambda_{3T}^0)\}_{T \in \mathcal{T}_h} \text{ задается,}$$

зная  $(\lambda_{1T}^0, \lambda_{2T}^0, \lambda_{3T}^0)$ , определяем  $u_h^n$  и  $(\lambda_{1T}^{n+1}, \lambda_{2T}^{n+1}, \lambda_{3T}^{n+1})$

$$(7.53) \quad a(u_h^n, v_h) + g \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{A(T)}{3} \sum_{i=1}^3 \lambda_{iT}^n \cdot \operatorname{grad} v_h(m_{iT}) = \int_{\Omega} f v_h dx$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad u_h^n \in V_h,$$

$$(7.54) \quad \lambda_{iT}^{n+1} = P_D\left(\lambda_{iT}^n + \rho_n \frac{A(T)}{3} \operatorname{grad} u_h^n(m_{iT})\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad T \in \mathcal{T}_h,$$

$$(7.55) \quad 0 < \alpha_{0h}^2 \leq \rho_n \leq \alpha_{1h}^2, \quad \alpha_{1h}^2 \text{ достаточно мало. } \blacksquare$$

Напомним, что, если  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$ , то

$$P_D(y) = \frac{y}{\max(1, \sqrt{y_1^2 + y_2^2})}.$$

*Применение к задаче, точное решение которой известно*

Рассмотрим снова неоднородную задачу разд. 7.2.2; мы не будем входить во все детали, касающиеся тех изменений, которые необходимо произвести при использовании (4.79), (7.53), а также касающиеся реализации этих алгоритмов двойственности. Отметим только, что при использовании триангуляции со 128 треугольниками полученные приближенные решения та-ковы, что

$$(7.56) \quad \max_P |u_h^1(P) - u(P)| = 6 \cdot 10^{-3},$$

$$(7.57) \quad P \in \{(m_{iT})_{i=1,2,3}\}_{T \in \mathcal{T}_h} \cup \{M_{iT}\}_{i=1,2,3}_{T \in \mathcal{T}_h},$$

$$\max_P |u_h^2(P) - u(P)| = 8,5 \cdot 10^{-4},$$

$$P \in \{(m_{iT})_{i=1,2,3}\}_{T \in \mathcal{T}_h} \cup \{(M_{iT})_{i=1,2,3}\}_{T \in \mathcal{T}_h},$$

причем максимальные отклонения приближенных решений от точного имеют место в окрестности границы раздела областей тече-ния и областей застоя (так как производные порядка выше первого терпят разрыв при переходе через эту границу). ■

## 8. Применение к решению задачи упругопластического кручения гл. 3

### 8.1. План изложения

Напомним, что в разд. 9.1.1 гл. 3 был сформулирован алго-ритм двойственности (формулы (9.5), (9.6), (9.7)), позволяющий решить задачу упругопластического кручения гл. 3. При реали-зации этого алгоритма помимо всего прочего возникает необхо-димость минимизировать недифференцируемый функционал типа, который очень близок к рассмотренному в разд. 1 и 7 данной главы. Для решения недифференцируемой<sup>1)</sup> задачи ниже будет также использован вариант алгоритма (7.8), (7.9), (7.10) разд. 7.1. ■

### 8.2. Переформулировка алгоритма (9.5), (9.6), (9.7) разд. 9.1.1 гл. 3

Для более четкого разъяснения основных идей мы проведем сейчас переформулировку алгоритма (9.5), (9.6), (9.7) разд. 9.1.1

<sup>1)</sup> Так для краткости автор называет задачу минимизации функционала с недифференцируемым слагаемым.— *Прим. перев.*

гл. 3, используя введенные там обозначения и определения. Итак, определим множество

$$(8.1) \quad \Lambda_1 = L^2_+(\Omega),$$

оператор

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \phi_1: H_0^1(\Omega) &\rightarrow L^2(\Omega), \text{ где} \\ \phi_1(v) &= |\operatorname{grad} v| - 1, \end{aligned}$$

и лагранжиан  $\mathcal{L}_1: H_0^1(\Omega) \times \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(8.3) \quad \mathcal{L}_1(v, q) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Omega} q \phi_1(v) dx.$$

Из формулы

$$(8.4) \quad \sup_{q \in \Lambda_1} \int_{\Omega} q \phi_1(v) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |\operatorname{grad} v| \leq 1, \\ +\infty & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

вытекает, что, если существует седловая точка  $\{u, p\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_1$  на множестве  $H_0^1(\Omega) \times \Lambda_1$ , то  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ :

$$(8.5) \quad (P_0): \min_{v \in K_0} \left[ \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv dx \right],$$

$$(8.6) \quad K_0 = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), |\operatorname{grad} v| \leq 1 \text{ п. в.}\}.$$

Таким образом, если выполнены предположения (4.10), (4.11) разд. 4.3 гл. 2, то для решения задачи  $(P_0)$  можно применить алгоритм (4.12), ..., (4.15) разд. 4.3 гл. 2:

зная  $p^n (\in \Lambda_1)$ , определяем  $u^n$  — элемент  $H_0^1(\Omega)$ , минимизирующий функционал

$$(8.7) \quad \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} fv dx + \int_{\Omega} p^n \phi_1(v) dx,$$

$$(8.8) \quad p^{n+1} = \sup(0, p^n + \rho_n \phi_1(u^n)),$$

$$(8.9) \quad \rho_n > 0 \text{ и достаточно мало.} \blacksquare$$

### 8.3. Реализация алгоритма (8.7), (8.8), (8.9)

Мы ограничимся решением приближенной задачи  $(P_{0h})_{14}$  разд. 5.3 гл. 3; будем использовать обозначения разд. 5 гл. 3 и разд. 7.2 гл. 5.

### 8.3.1. О существовании седловой точки. Описание и исследование сходимости алгоритма двойственности

*О существовании седловой точки*

Определим множество

$$(8.10) \quad \Lambda_{1h} = \{q_h \mid q_h = \{q_{l+1/2j+1/2}\}_{M_{l+1/2j+1/2} \in \Sigma_h}, q_{l+1/2j+1/2} \geq 0 \\ \forall M_{l+1/2j+1/2} \in \Sigma_h\},$$

в приближенной задаче  $(P_{0h})_{14}$  лагранжиану  $\mathcal{L}_1$  поставим в соответствие аппроксимацию  $\mathcal{L}_{1h}$  по формуле

$$(8.11) \quad \mathcal{L}_{1h}(v_h, q_h) = J_{0h}(v_h) + h^2 \sum_{M_{l+1/2j+1/2} \in \Sigma_h} q_{l+1/2j+1/2} \times \\ \times (\sqrt{|G_{l+1/2j+1/2}^1(v_h)|^2 + |G_{l+1/2j+1/2}^2(v_h)|^2} - 1).$$

Доказательство предложения 9.1 разд. 9.2.1 гл. 3 без труда переносится на рассматриваемый здесь случай, следовательно, существует седловая точка  $\{u_h, p_h\}$  лагранжиана  $\mathcal{L}_{1h}$  на множестве  $V_h \times \Lambda_{1h}$ , причем

$$(8.12) \quad u_h — решение задачи  $(P_{0h})_{14}$ ,$$

$$P_{l+1/2j+1/2}(\sqrt{|G_{l+1/2j+1/2}^1(u_h)|^2 + |G_{l+1/2j+1/2}^2(u_h)|^2} - 1) = 0 \\ \forall M_{l+1/2j+1/2} \in \Sigma_h.$$

*Описание алгоритма и исследование сходимости*

Используем следующий конечномерный вариант алгоритма (8.7), (8.8), (8.9):

$$(8.13) \quad \text{зная } p_h^n (\in \Lambda_{1h}), \text{ определяем } u_h^n — элемент } V_h, \text{ минимизирующий функцию } \mathcal{L}_{1h}(v_h, p_h^n),$$

$$(8.14) \quad p_{l+1/2j+1/2}^{n+1} = \max(0, p_{l+1/2j+1/2}^n + \\ + \rho_n (\sqrt{|G_{l+1/2j+1/2}^1(u_h^n)|^2 + |G_{l+1/2j+1/2}^2(u_h^n)|^2} - 1)) \\ \forall M_{l+1/2j+1/2} \in \Sigma_h,$$

$$(8.15) \quad \rho_{1n} > 0 \text{ и достаточно мало.}$$

Из результатов теоремы 4.1 разд. 4.3 гл. 2 вытекает, что последовательность  $(u_h^n)_n$ , определяемая алгоритмом (8.13), (8.14), (8.15), сходится к решению задачи  $(P_{0h})_{14}$ . ■

### 8.3.2. Решение недифференцируемой задачи (8.13)

Методы, рассмотренные в разд. 7.2.1, нетрудно приспособить для решения недифференцируемой задачи (8.13); таким образом, для вычисления приближения  $u_h^n$  по известному  $p_h^n$  можно исполь-

зователь следующий вариант алгоритма (7.19), (7.20), (7.21) разд. 7.2.1:

$$(8.16) \quad \lambda_h^{n,0} \text{ задается (будем полагать } \lambda_h^{n,0} = \lambda_h^{n-1});$$

зная  $\lambda_h^{n,m}$ , определяем  $u_h^{n,m}$ , а после этого —  $\lambda_h^{n,m+1}$  следующим образом:

$$(8.17) \quad -\frac{u_{i+1,j}^{n,m} + u_{i-1,j}^{n,m} + u_{i,j+1}^{n,m} + u_{i,j-1}^{n,m} - 4u_{i,j}^{n,m}}{h^2} = \\ = f_{ij} + \left( \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{1,n,m} - \lambda_{i-1/2,j+1/2}^{1,n,m} + \lambda_{i+1/2,j-1/2}^{1,n,m} - \lambda_{i-1/2,j-1/2}^{1,n,m}}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{2,n,m} - \lambda_{i+1/2,j-1/2}^{2,n,m} + \lambda_{i-1/2,j+1/2}^{2,n,m} - \lambda_{i-1/2,j-1/2}^{2,n,m}}{2h} \right)$$

$$\forall M_{ij} \in \Omega_h, \quad u_{pq}^{n,m} = 0 \quad M_{pq} \notin \Omega_h,$$

$$(8.18) \quad (\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{1,n,m+1}, \lambda_{i+1/2,j+1/2}^{2,n,m+1}) = \\ = P_{p_{i+1/2,j+1/2}^n} (\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{1,n,m} + \rho_{2m}^n G_{i+1/2,j+1/2}^1 (u_h^{n,m}), \\ \lambda_{i+1/2,j+1/2}^{2,n,m} + \rho_{2m}^n G_{i+1/2,j+1/2}^2 (u_h^{n,m})) \quad \forall M_{i+1/2,j+1/2} \in \Sigma_h,$$

где с учетом того, что  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $q \geq 0$ :

$$(8.19) \quad P_q(y) = 0, \text{ если } q = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^2, \\ P_q(y) = \frac{qy}{\max(q, \sqrt{y_1^2 + y_2^2})}, \text{ если } q > 0.$$

Так как и здесь можно применить теорему 4.1 разд. 4.3 гл. 2, то можно утверждать, что последовательность  $u_h^{n,m}$ , определяемая алгоритмом (8.16), (8.17), (8.18), сходится к решению  $u_h^n$  задачи (8.13), если только константа  $\rho_{2m}^n > 0$  и достаточно мала. ■

## 8.4. Решение конкретной задачи<sup>1)</sup>

Вернемся вновь к основной задаче гл. 3, где  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $f = 10$ .

*Шаг дискретизации:  $h = 1/20$ .*

*Решение приближенных задач Дирихле (8.17)*

Это решение производится методом поточечной верхней релаксации с оптимальным значением параметра, начальными приближениями  $u_h^{n,m-1}$  и условием останова типа (7.24). ■

Начальное приближение для алгоритма (8.16), (8.17), (8.18)

$$(8.20) \quad \lambda_h^{n,0} = \lambda_h^{n-1}.$$

<sup>1)</sup> Численная реализация алгоритма для данного примера произведена М. Гурса.

Условие останова алгоритма (8.16), (8.17), (8.18):

$$(8.21) \quad \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^{n,m} - u_{ij}^{n,m-1}| \leq 10^{-3}.$$

Начальное приближение для алгоритма (8.13), (8.14), (8.15):

$$(8.22) \quad p_h^0 = 0.$$

Условие останова алгоритма (8.13), (8.14), (8.15):

$$(8.23) \quad \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| \leq 10^{-3}.$$

Выбор параметров  $\rho_{1n}$  и  $\rho_{2m}^n$ :  $\rho_{1n} = \rho_1 = 1$ ,  $\rho_{2m}^n = \rho_2 = 0,1$ .

Численные результаты

Алгоритм сходится за 12,57 с работы ЭВМ IBM 360/91, общее количество итераций метода верхней релаксации при этом равно 794. ■

## 8.5. Один вариант алгоритма (8.13), (8.14), (8.15)

Так как время работы алгоритма в примере (8.4) слишком велико, был использован следующий алгоритм:

$$(8.24) \quad (u_h^0, p_h^0, \lambda_h^0) \text{ задается,}$$

зная  $u_h^n$ ,  $p_h^n$ ,  $\lambda_h^n$ , определяем  $p_h^{n+1}$ ,  $\lambda_h^{n+1}$ ,  $u_h^{n+1}$

$$(8.25) \quad p_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} = \max (0, p_{i+1/2,j+1/2}^n + \\ + \rho_{1n} (\sqrt{|G_{i+1/2,j+1/2}^1(u_h^n)|^2 + |G_{i+1/2,j+1/2}^2(u_h^n)|^2} - 1)) \quad \forall M_{i+1/2,j+1/2} \in \Sigma_h, \quad (\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{1,n+1}, \lambda_{i+1/2,j+1/2}^{2,n+1}) =$$

$$(8.26) \quad = P_{p_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}} (\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{1,n+1} + \rho_{2n} G_{i+1/2,j+1/2}^1(u_h^n), \\ \lambda_{i+1/2,j+1/2}^{2,n+1} + \rho_{2n} G_{i+1/2,j+1/2}^2(u_h^n)) \quad \forall M_{i+1/2,j+1/2} \in \Sigma_h;$$

отметим, что  $u_h^{n+1}$  определяется через  $u_h^n$  с использованием лишь одной итерации при решении системы линейных уравнений

$$(8.27) \quad - \frac{v_{i+1,j} + v_{ij+1} + v_{i-1,j} + v_{ij-1} - 4v_{ij}}{h^2} = \\ = f_{ij} + \left( \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{1,n+1} - \lambda_{i-1/2,j+1/2}^{1,n+1} + \lambda_{i+1/2,j-1/2}^{1,n+1} - \lambda_{i-1/2,j-1/2}^{1,n+1}}{2h} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{i+1/2,j+1/2}^{2,n+1} - \lambda_{i+1/2,j-1/2}^{2,n+1} + \lambda_{i-1/2,j+1/2}^{2,n+1} - \lambda_{i-1/2,j-1/2}^{2,n+1}}{2h} \right)$$

$\forall M_{ij} \in \Omega_h$ ,  $v_{pq} = 0$ , если  $M_{pq} \notin \Omega_h$ ,

методом верхней релаксации.

Начиная с точки  $u_h^0 = 0, p_h^0 = 0, \lambda_h^0 = 0$ , выбирая в качестве условия останова условие

$$(8.28) \quad \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} |u_{ij}^n - u_{ij}^{n-1}| \leq 10^{-3}$$

и используя значения  $\rho_{1n} = \rho_1 = 0,4, \rho_{2n} = \rho_2 = 0,2$ , получаем сходимость после 140 итераций, что соответствует 3,9с работы ЭВМ IBM 360/91. ■

*Замечание 8.1.* Развитый в этом разделе применительно к решению задачи упругопластического кручения метод двойственности представляется в значительной степени менее совершенным по сравнению с другими вариантами метода двойственности, рассмотренными в разд. 9 гл. 3, в частности этот метод требует большего объема машинной памяти по сравнению с методом разд. 3.4. Единственное преимущество состоит в том, что матрица приближенной задачи Дирихле, которую необходимо решать на каждой итерации, не зависит от номера итерации, что не имеет места в случае применения алгоритма (9.74), (9.75), (9.76) разд. 9.4.1 гл. 3 из-за того, что матрица приближенной задачи Дирихле (9.74) зависит от  $p_h^n$ . ■

## 9. Комментарии

Результаты разд. с 1 по 7 этой главы представляют собой развитие результатов статьи Сеа и Гловински [1], в которой авторы ограничились аппроксимациями по методу конечных разностей.

Анализируя результаты этой главы, можно заключить, что для решения задачи  $(P_0)$ , определяемой соотношениями (1.5), в произвольной области лучше всего, видимо, использовать комбинацию аппроксимации конечными элементами 1-го порядка разд. 3 и варианта (7.31), (7.32), (7.33) (см. разд. 7.3.1) алгоритма двойственности (7.8), (7.9), (7.10) разд. 7.1. Тем не менее мы сочли полезным уделить достаточно большое внимание — этому был посвящен весь разд. 6 — методу регуляризации. Это было сделано по той причине, что данный метод, как нам кажется, лучше всего подходит, по крайней мере сейчас, для численного решения некоторых задач оптимального управления, когда привычное нам уравнение состояния заменяется вариационным неравенством, содержащим недифференцируемую часть. Подобные задачи оптимального управления на практике можно аппроксимировать регуляризованными задачами, заменяя „неравенство состояния“ некоторым нелинейным уравнением состояния, и для которых можно в явном виде записать необходимые

условия оптимальности; по этому поводу см. работы Ивона [1], [2]; по поводу применений метода регуляризации отметим, что Брезис в своей работе [6], посвященной доказательству принадлежности решения задачи  $(P_0)$  пространству  $H^2$  (свойство, о котором упоминалось в разд. 2.1), использовал помимо других приемов регуляризацию недифференцируемого слагаемого  $\int |\operatorname{grad} v| dx$ .

По поводу методов двойственности мы хотели бы отметить, что решение задачи (1.5) при помощи следующего конечномерного варианта алгоритма двойственности<sup>1)</sup>:

$$(9.1) \quad \lambda^0 \text{ задается } (\in \Lambda), \quad u^0 \text{ задается } (\in H_0^1(\Omega)),$$

$$(9.2) \quad u^{n+1} = u^n - \rho_1 S^{-1} (-\Delta u^n - g \operatorname{div} \lambda^n - f), \quad \rho_1 > 0,$$

$$(9.3) \quad \lambda^{n+1} = P_\Lambda(\lambda^n + \rho_2 \operatorname{grad} u^{n+1}), \quad \rho_2 > 0,$$

где в качестве  $S$  выбирается оператор

$$(9.4) \quad S = \left( I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left( I - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

с однородными условиями на  $\Gamma$  типа Дирихле не привело<sup>2)</sup> к уменьшению затрат машинного времени по сравнению с теми, которые получаются при использовании конечномерных вариантов алгоритма (7.8), (7.9), (7.10) разд. 7.1. ■

В заключение этой главы нам хотелось бы привести формулировку одного алгоритма решения задачи (1.5), представляющего собой вариант алгоритма (10.5)–(10.7) разд. 10 гл. 3, обозначения которого мы сейчас используем. Итак, пусть

$$\begin{aligned} L &= L^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ j(v, q) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} q^2 dx + g \int_{\Omega} |q| dx - \int_{\Omega} fv dx, \end{aligned}$$

тогда задача  $(P_0)$  эквивалентна задаче

$$(9.5) \quad \min j(v, q), \quad (v, q) \in H_0^1(\Omega) \times L, \quad \nabla v - q = 0.$$

Пусть  $u$ —решение задачи  $(P_0)$ , тогда пара  $(u, \nabla u)$ —решение (единственное) задачи (9.5). Лагранжиан, соответствующий задаче (9.5), естественно определить следующим образом:

$$\mathcal{L}(v, q; \mu) = j(v, q) + \int_{\Omega} \mu \cdot (\nabla v - q) dx.$$

<sup>1)</sup> Типа алгоритма Эрроу—Гурвица (см. разд. 4.4 гл. 2)

<sup>2)</sup> Отметим, что единственный случай, который имеет практический интерес и для которого можно (и выгодно) реализовать алгоритм (9.1), (9.2), (9.3) с оператором  $S$ , определяемым по формуле (9.4)—это случай областей с прямыми линейными границами и аппроксимаций по методу конечных разностей

Так как — при фиксированных  $\mu$  и  $q$  — лагранжиан  $\mathcal{L}$  не является коэрцитивным по переменной  $v$ , используем здесь еще и метод штрафа относительно ограничения  $\nabla v - q = 0$ :

$$\mathcal{L}_\varepsilon(v, q; \mu) = \mathcal{L}(v, q; \mu) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla v - q|^2 dx.$$

Можно доказать, что существует единственная седловая точка лагранжиана  $\mathcal{L}_\varepsilon$  в пространстве  $H_0^1(\Omega) \times L \times L$  вида  $(u, \nabla u, \lambda)$ , где  $u$  — решение задачи  $(P_0)$ ,  $\lambda$  — решение задачи, двойственной к  $(P_0)$ , явное определение которой было дано в разд. 3.5 гл. 1.

Для разыскания этой точки применим алгоритм Удзавы:

$$(9.6) \quad \lambda^0 \in L \text{ задается,}$$

зная  $\lambda^n$ , определяем последовательно  $u^n$ ,  $p^n$ ,  $\lambda^{n+1}$  следующим образом:

$$(9.7) \quad \mathcal{L}_\varepsilon(u^n, p^n; \mu^n) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(v, q; \mu^n) \quad \forall (v, q) \in H_0^1(\Omega) \times L,$$

$$(u^n, p^n) \in H_0^1(\Omega) \times L,$$

$$(9.8) \quad \lambda^{n+1} = \lambda^n + \rho_n (\nabla u^n - p^n), \quad \rho_n > 0.$$

Учитывая, что седловая точка лагранжиана  $\mathcal{L}_\varepsilon$  в пространстве  $H_0^1(\Omega) \times L \times L$  существует, и предполагая выполненным условие

$$(9.9) \quad 0 < r_0 \leq \rho_n \leq r_1 < 2/\varepsilon,$$

заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u^n, p^n) = (u, \nabla u) \text{ сильно в } H_0^1(\Omega) \times L.$$

Заметим, что определение  $(u^n, p^n)$  из решения задачи (9.7) представляет собой задачу минимизации недифференцируемого функционала в пространстве бесконечного числа измерений, однако учитывая структуру этого функционала, нетрудно видеть, что для решения задачи (9.7) можно применить методы релаксации, описание и исследование которых приведено в работе Сеа и Гловински [2]. По поводу подробностей реализации алгоритма (9.6) — (9.8), основанной на использовании аппроксимации конечными элементами 1-го порядка, мы отсылаем к работе Фортена, Гловински и Марокко [1].

## Глава 6

# ОБЩИЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ И РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

### Введение

В этой главе мы будем изучать нестационарные задачи. Вариационные неравенства мы будем рассматривать с общих позиций, детально анализируя вопросы аппроксимации и построения решений.

Мы изучим три основных типа неравенств: параболические неравенства I типа; параболические неравенства II типа и эволюционные неравенства второго порядка относительно временной переменной. Каждый из этих типов проблем будет рассмотрен отдельно; особое внимание при этом будет уделено конкретным задачам, которые будут приводиться к используемой далее общей форме. Эта общая формулировка позволит нам исчерпывающим образом изучить аппроксимацию по методу конечных разностей<sup>1)</sup>, после этого для каждого из указанных типов неравенств мы изучим методы численного решения на примере нескольких модельных задач.

Для того чтобы поставить задачи, заметим, что с физической точки зрения и общих математических соображений естественной представляется попытка распространить формализм, примененный выше к стационарным вариационным неравенствам

$$(Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in K, u \in K,$$

на случай, когда решение меняется во времени; это приводит к исследованию задач следующих типов:

— *Параболические неравенства I типа*: найти функцию  $t \rightarrow u(t)$  с областью определения  $t \in [0, T]$  и областью значений  $K \subset V$ , такую, что

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}(t) + Au(t) - f(t), v - u(t) \right) + j(v) - j(u(t)) \geq 0$$

$$\forall v \in K, u(t) \in K, u(0) = u_0 \text{ задано.}$$

— *Параболические неравенства II типа*: найти функцию  $t \rightarrow u(t)$  с областью определения  $t \in [0, T]$  и значениями в  $V$ ,

<sup>1)</sup> Все сказанное ниже остается в силе (и принимает несколько более простую форму) и для внутренних аппроксимаций типа конечноэлементных; впрочем, в разд. 11 мы используем метод, относящийся именно к внутренним.

такую, что:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}(t) + Au(t) - f(t), v - \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) + j(v) - j\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) \geq 0$$

$$\forall v \in K, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t) \in K.$$

— Гиперболические неравенства (или неравенства, корректные по Петровскому): найти функцию  $t \rightarrow u(t)$  с областью определения  $t \in [0, T]$  и со значениями в  $V$ , такую, что

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) + Au(t) - f(t), v - \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right) + j(v) - j\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) \geq 0$$

$$\forall v \in K, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t) \in K.$$

## 1. Основные определения и обозначения

В этом разделе, продолжая материал разд. 1.1 гл. 1, мы в скатой форме изложим основные нужные для нас понятия функционального анализа. Все наиболее существенное, относящееся к этим понятиям, можно найти, например, в гл. 1 книги Дюво и Лионса [1]. Для более глубокого ознакомления читатель может обратиться к трудам Лионса и Мадженеса [1], Шварца [1], Соболева [1].

### 1.1. Векторные пространства функций и распределений

Пусть имеется интервал  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  (в общем случае  $T < +\infty$ ) и банахово пространство  $X$  с нормой  $\|\cdot\|_X$ ; через  $L^p(0, T; X)$  будем обозначать пространство (классов) функций  $t \rightarrow f(t): [0, T] \rightarrow X$ , измеримых (по  $dt$ ) и таких, что

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < +\infty \quad (p \neq +\infty),$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in (0, T)} \|f(t)\|_X < +\infty.$$

Пространства  $L^p(0, T; X)$  банаховы; при  $p \neq +\infty$  норма в них определяется первым из приведенных выше выражений, при  $p = +\infty$  — вторым.

Если  $X$  — гильбертово со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_X$ , то  $L^2(0, T; X)$  также гильбертово со скалярным произведением

$$(f, g)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (f(t), g(t))_X dt.$$

Обозначим через  $\mathcal{D}([0, T[; X)$  пространство бесконечно дифференцируемых функций с носителем, компактным в  $]0, T[$ , и со значениями в  $X$ , через  $\mathcal{D}'([0, T[; X)$  пространство распределений на интервале  $]0, T[$  со значениями в  $X$ , определенное как

$$\mathcal{D}'([0, T[; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}([0, T[); X)),$$

где, как обычно,  $\mathcal{L}(M; N)$  означает пространство линейных непрерывных отображений из  $M \rightarrow N$ .

В частности, функции  $f \in L^p(0, T; X)$  можно поставить в соответствие некоторое распределение  $\tilde{f}: \mathcal{D}([0, T[) \rightarrow X$  по формуле

$$\tilde{f}(\phi) = \int_0^T f(t) \phi(t) dt, \quad \phi \in \mathcal{D}([0, T[).$$

Отображение  $\phi \rightarrow \tilde{f}(\phi)$ , очевидно, линейно и непрерывно из  $\mathcal{D}([0, T[) \rightarrow X$ . Более того, отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  инъективно, и мы условимся отождествлять элементы  $f$  и  $\tilde{f}$ . Кроме того,  $f \rightarrow 0$  в  $L^p(0, T; X) \Rightarrow \tilde{f} \rightarrow 0$  в  $\mathcal{D}'([0, T[; X)$ , т. е.  $\tilde{f}(\phi) \rightarrow 0$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{D}([0, T[)$ . Таким образом, имеет место алгебраическое и топологическое вложение

$$L^p(0, T; X) \subset \mathcal{D}'([0, T[; X).$$

Для любой  $f \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$  производную  $d^k f / dt^k$  определим по формуле

$$f^{(k)}(\phi) = (-1)^k f(\phi^{(k)}) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}([0, T[),$$

из этого определения следует, в частности, что  $f^{(k)} \in \mathcal{D}'([0, T[; X)$ ,  $\forall k$ . ■

## 1.2. Функциональные пространства

Если в стационарных задачах мы использовали одно гильбертово пространство  $V$  (или в некоторых случаях—банахово), то в эволюционных задачах необходимо использовать два гильбертовых (и в некоторых случаях—банаховых, однако здесь мы ограничимся рамками гильбертовых пространств) пространства. Итак, пусть  $V$  и  $H$ —два гильбертовых пространства, причем (1.1)  $V \subset H$ ,  $V$  плотно в  $H$  и непрерывно в него вложено.

Обозначим через  $((,))$  (соответственно через  $(,)$ ) скалярное произведение в  $V$  (в  $H$ ) и через  $\| \cdot \|$  (соответственно  $| \cdot |$ )—соответствующие этим скалярным произведениям нормы. Тогда

$$(1.2) \quad |v| \leq c \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Пространство  $H$  отождествим с его двойственным; при таком отождествлении, совместимым с указанным выше, будем иметь  
(1.3)  $V \subset H \subset V'$  ( $V'$  — двойственное к  $V$ ).

Снабдим пространство  $V'$  „двойственной“ нормой

$$\|w\|_* = \sup_{v \in V} (w, v), \|v\| = 1.$$

Определим пространство  $W(0, T)$  по формуле

$$W(0, T) = \left\{ v \mid v \in L^2(0, T; V), v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; V') \right\}.$$

Снабженное скалярным произведением

$$(u, v)_{L^2(0, T; V)} + (u', v')_{L^2(0, T; V')},$$

пространство  $W(0, T)$  является гильбертовым. Любая функция  $v \in W(0, T)$ , надлежащим образом измененная (в случае необходимости) на некотором множестве меры нуль, является непрерывной функцией из  $[0, T] \rightarrow H$ .

Теперь можно определить замкнутое аффинное подпространство пространства  $W(0, T)$  по формуле

$$W_0(0, T) = \{v \mid v \in W(0, T), v(0) = u_0, u_0 — заданный элемент H\}.$$

## 2. Введение в теорию параболических эволюционных неравенств I типа

В этом разделе мы сформулируем основные положения теории параболических вариационных неравенств I типа, опираясь при этом на два конкретных примера.

### 2.1. Примеры параболических неравенств I типа

#### 2.1.1. Пример I

Рассмотрим снова задачу диффузии, в качестве первого примера приведенную в разд. 1.1 гл. 1. Однако здесь эту задачу мы будем рассматривать с общих позиций, считая основным вопросом определение зависимости давления в жидкости от времени, когда на внешней поверхности тонкой полупроницаемой стенки задается давление. Таким образом, вместо того чтобы разыскивать давление в покоящейся жидкости, мы ставим задачу определения изменения давления во времени в любой точке области  $\Omega$ , от некоторого начального момента, когда к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$  прикладывается давление, и до заданного

момента времени  $T$  (если  $T$  достаточно велико, давление должно приближаться к тому, которое имеет место в стационарном случае).

Поставленная физическая задача формализуется следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \Omega$ , такую, что

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad (x, t) \in Q = ]0, T[ \times \Omega,$$

с граничными условиями ( $h(x)$  — приложенное извне в точке  $x \in \Gamma$  давление)

$$(2.2) \quad u(x, t) > h(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \text{ фиксировано}$$

(если давление внутри области превосходит внешнее, полупроницаемая стенка не позволяет жидкости вытекать из области),

$$(2.3) \quad u(x, t) \leq h(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) \geq 0, \quad x \in \Gamma,$$

(если внешнее давление больше внутреннего, расход жидкости сквозь полупроницаемую стенку во внешнюю часть области  $\Omega$  положителен; в данном случае из условия непрерывности следует, что может иметь место только равенство  $u(x, t) = h(x)$ ) и начальным условием

$$(2.4) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{где } u_0(x) \text{ задано, } x \in \Omega \quad (u_0 \geq h),$$

(очевидно, что изменение давления во времени зависит от давления в начальный момент).

Поставленную задачу мы преобразуем к эволюционному вариационному неравенству. Для того чтобы это сделать, положим:

$$(2.5) \quad V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega),$$

$$(2.6) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx,$$

$$(2.7) \quad (f, g) = \int_{\Omega} fg \, dx,$$

$$(2.8) \quad K = \{v \mid v \in V, \quad v \geq h \text{ на } \Gamma\},$$

и обозначим через  $u(t)$  функцию  $x \rightarrow u(x, t)$ ; рассмотрим теперь следующую задачу:

найти  $u(t) \in K$  ( $t$  пробегает отрезок  $[0, T]$ ), такую, что

$$(2.9) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) - (f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad u(0) = u_0.$$

Применив в (2.9) формулу Грина, получим неравенство

$$(2.10) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f, v - u \right) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v - u) \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad u \in K,$$

используя которое, без труда проверяем, что задачи (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) и (2.8), (2.9) эквивалентны.

Еще одна возможная эквивалентная форма задачи следующая:  
Полагаем

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \mathcal{K} &= \{v \mid v \in W(0, T), v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\}, \\ \mathcal{K}_0 &= \{v \mid v \in W_0(0, T), v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\}, \end{aligned}$$

и рассматриваем задачу

найти  $u \in \mathcal{K}_0$ , такое, что

$$(2.12) \quad \int_0^T (u', v - u) dt + \int_0^T a(u, v - u) dt - \int_0^T (f, v - u) dt \geqslant 0,$$

$\forall v \in \mathcal{K}.$

полученную из неравенства (2.9) путем интегрирования.

Нетрудно доказать, что задача (2.9) представляет собой следствие задачи (2.12).

### 2.1.2. Пример II

В предыдущем примере мы получили эволюционное вариационное неравенство, решение которого принадлежит некоторому замкнутому выпуклому множеству. В следующем примере мы введем эволюционное неравенство, в котором содержится недифференцируемое слагаемое. Это неравенство будет вытекать из постановки задачи *климатизации* для нестационарного случая (см. книгу Дюво и Лионса [1], гл. 1, разд. 2.3.1).

Будем использовать следующие обозначения:  $\Omega$  — область внутри преграды (стенки),  $\Gamma$  — граница области  $\Omega$ ,  $u(x, t)$  — температура в точке  $x \in \Omega$  в момент времени  $t$ . Предположим, что в нашем распоряжении имеется устройство искусственного климата, с помощью которого можно создавать поток тепла через границу  $\Gamma$ , если только температура  $u(x, t)$ ,  $x \in \Gamma$  выходит за пределы допустимого интервала  $[h_1, h_2]$ . Предполагается также, что при

$$u(x, t) \notin [h_1, h_2], \quad x \in \Gamma,$$

интенсивность создаваемого потока тепла пропорциональна разности между  $u(x, t)$ ,  $x \in \Gamma$  и ближайшим из чисел  $h_1, h_2$ .

Задача ставится следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in \Omega$ , такую, что

$$(2.13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad (x, t) \in Q = \Omega \times [0, T],$$

с граничным условием

$$(2.14) \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = \phi(u), \quad x \in \Gamma,$$

в котором функция  $\phi(v)$ , определяемая по формуле

$$(2.15) \quad \phi(\lambda) = \begin{cases} g_1(\lambda - h_1), & \lambda \leq h_1, \\ 0, & h_1 \leq \lambda \leq h_2, \\ g_2(\lambda - h_2), & \lambda \geq h_2, \end{cases}$$

где

$$g_1 < 0 < g_2, \quad h_1 \leq h_2,$$

в некоторых точках, очевидно, недифференцируема. Кроме того, задано начальное условие

$$(2.16) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{где } u_0(x) \text{ — заданное начальное распределение температуры, } x \in \Omega.$$

Поставленную задачу можно записать в форме эволюционного вариационного неравенства. С этой целью воспользуемся определениями (2.5), (2.6), (2.7); введем также

$$(2.17) \quad j(v) = \int_{\Gamma} \phi(v) d\Gamma$$

и рассмотрим задачу:

найти функцию  $u(t) \in V$ , где  $t$  пробегает отрезок  $[0, T]$ , такую, что

$$(2.18) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) + a(u, v - u) - (f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0$$

$$\forall v \in V, \quad u(0) = u_0.$$

Применив в (2.18) формулу Грина, получим неравенство

(2.19)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f, v - u \right) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} (v - u) d\Gamma + \int_{\Gamma} [\phi(v) - \phi(u)] d\Gamma \geq 0,$$

используя которое, можно показать, что задачи (2.13), (2.14), (2.15), (2.16) и (2.17), (2.18) эквивалентны и что в свою очередь эти задачи эквивалентны следующей:

найти  $u \in W_0(0, T)$ , такую, что

$$(2.20) \quad \int_0^T (u', v - u) dt + \int_0^T a(u, v - u) dt - \int_0^T (f, v - u) dt +$$

$$+ \int_0^T [j(v) - j(u)] dt \geq 0 \quad \forall v \in W(0, T). \blacksquare$$

## 2.2. Абстрактная формулировка

Всюду ниже, говоря о параболических вариационных неравенствах I типа, мы будем использовать следующие обозначения и определения:

(2.21)  $V, V', H, \|\cdot\|, ((\cdot)), |\cdot|, (\cdot)$  — определены так, как это было сделано выше (см. формулы (1.1), (1.2), (1.3)).

(2.22)  $K$  — замкнутое выпуклое множество в  $V$ ,

(2.23)  $u_0 \in K$  — элемент, фигурирующий в начальном условии.

(2.24)  $A \in \mathcal{L}(V; V)$ , причем

(2.25)  $(Au, v) \geq \alpha \|v\|^2, \alpha = \text{const} > 0$ .

Будем полагать

(2.26)  $a(u, v) = (Au, v), a(u) = (Au, u)$ ,

$j: K \rightarrow \mathbb{R}, \neq \pm \infty$  на  $K$ ; кроме того, этот функционал полу-

(2.27) непрерывен снизу, выпуклый на  $K$  и интегрируемый для

любого  $v \in L^2(0, T; K)$ , т. е.  $\left| \int_0^T j(v) dt \right| < +\infty$ ,

(2.28)  $f \in L^2(0, T; V')$ ,

(2.29)  $\mathcal{K} = \{v | v \in W(0, T), v(t) \in K \text{ почти для всех } t \in [0, T]\}$ ,

$\mathcal{K}_0 = \{v | v \in W_0(0, T), v(t) \in K \text{ почти для всех } t \in [0, T]\}$ .

Изучаемая здесь общая задача имеет вид

найти  $u \in \mathcal{K}_0$ , такое, что

(2.30)  $\int_0^T (u' + Au - f, v - u) dt + \int_0^T [j(v) - j(u)] dt \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}$ ,

эквивалентная локальная (или мгновенная) формулировка этой задачи следующая:

найти  $u \in \mathcal{K}_0$ , такое, что

(2.31)  $(u' + Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0, \forall v \in K$ ,  
почти для всех  $t \in [0, T]$ .

Решение задачи (2.30) или (2.31) (если оно существует) называется сильным решением.

Известно, что имеет место

**Теорема 2.1.** Если выполнены условия (2.21), ..., (2.29) и, кроме того,

$$(2.32) \quad f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; V'),$$

$$(2.33) \quad j(v) \equiv 0,$$

$$(2.34) \quad f(0) - Au_0 \in H,$$

то задача (2.31) (или (2.30)) имеет единственное решение  $u$ . Кроме того, это решение обладает следующим свойством:

$$u, u' \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H). \blacksquare$$

**Замечание 2.1.** В случае, когда  $j(v) \not\equiv 0$ , сформулированная теорема остается в силе при условии замены гипотезы (2.34) гипотезой, куда входит значение  $j(u_0)$  (см., например, разд. 5.2 гл. 1 книги Дюво и Лионса [1] и работы Брезиса [1], [2]).

**Замечание 2.2.** Излагаемые ниже численные методы позволяют доказать эту теорему. ■

**Замечание 2.3.** Анализируя предположения, необходимые для доказательства существования решения задачи (2.30) или (2.31), можно перейти к рассмотрению „слабой“ формулировки задачи (2.30), (2.31). Для того чтобы это сделать, определим множество

$$\mathcal{K}_f = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\}$$

и рассмотрим задачу:

найти  $u \in \mathcal{K}_f$ , такое, что

$$(2.35) \quad \int_0^T (v' + Au - f, v - u) dt + \int_0^T [j(v) - j(u)] dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_0.$$

Нетрудно доказать, что любое решение задачи (2.30) является решением и задачи (2.31); обратное, однако, неверно, исключая случай, когда принимаются дополнительные предположения (например, (2.32), (2.33), (2.34)).

Решение  $u$  задачи (2.35) называется слабым решением рассматриваемой задачи.

Имеет место

**Теорема 2.2.** При выполнении условий (2.21), ..., (2.29) задача (2.35) имеет единственное слабое решение. ■

**Замечание 2.4.** Если  $j(v)$  является выпуклым всюду дифференцируемым функционалом с градиентом  $j'(v)$ , то в неравенствах (2.30) и (2.35) можно заменить

$$\int_0^T [j(v) - j(u)] dt \text{ на } \int_0^T (j'(v), v - u) dt,$$

в неравенстве (2.31)

$$j(v) - j(u) \text{ на } (j'(v), v-u). \blacksquare$$

**Замечание 2.5.** Здесь мы предполагаем, что  $A$ ,  $j$  не зависят от  $t \in [0, T]$ . По поводу задач, в которых  $K$  зависит от  $t$ , см. работу Брезиса [4], Аттуша и Дамламяна [1], Ж. Моро [4], Дж. С. Пералба [1]. Рассматриваемая здесь постановка избрана только из тех соображений, чтобы не утяжелять исследование слишком большим количеством предположений.  $\blacksquare$

**Замечание 2.6.** В случае, когда  $K = V$ , а функционал  $j(v)$  — дифференцируемый и выпуклый, неравенства переходят в уравнения, например вместо неравенства (2.31) получается уравнение:

найти  $u \in W_0(0, T)$ , такое, что

$$u' + Au - f + j'(u) = 0, \quad x \in \Omega, \text{ почти для всех } t \in [0, T]. \blacksquare$$

### 3. Аппроксимация параболических неравенств I типа

#### План изложения

В этом разделе мы произведем построения, необходимые для численного решения неравенства (2.31). Для этого мы определим семейство неравенств, „близких“ к неравенству

$$(3.1) \quad \int_0^T (u' + Au - f, v - u) dt + \int_0^T [j(v) - j(u)] dt \geqslant 0 \\ \forall v \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{K}_0,$$

или к эквивалентному неравенству в локальной форме

$$(3.2) \quad (u' + Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geqslant 0 \\ \forall v \in K, \quad u \in \mathcal{K}_0, \quad t \in [0, T],$$

и решение которых без труда можно найти численными методами. Решения этих неравенств мы будем разыскивать в пространствах  $L^2(0, T; V_h)$ , где  $V_h$  конечномерно. Обозначая одно из этих решений через  $u_h$ , мы докажем, что при стремлении размерности  $V_h$  к бесконечности

$$u_h \rightarrow u \text{ слабо в } L^2(0, T; V),$$

где  $u$  — слабое решение неравенства

$$(3.3) \quad \int_0^T (v' + Au - f, v - u) dt + \int_0^T [j(v) - j(u)] dt \geqslant 0 \\ \forall v \in \mathcal{K}_0, \quad u \in \mathcal{K}_f,$$

и что в случае, когда (3.1) имеет единственное сильное решение,

$$u_h \rightarrow u \text{ сильно в } L^2(0, T; V).$$

В общем случае аппроксимация эволюционных задач состоит из следующих этапов:

- пространственная дискретизация (дискретизация области  $\Omega$ );
- дискретизация по временной переменной (дискретизация отрезка  $[0, T]$ );
- аппроксимация пространства  $V$  пространством  $V_h$  функций, которые позволяют аппроксимировать надлежащим образом любой элемент  $V$ , и изучение того, в каком смысле  $V_h$  аппроксимирует пространство  $H^1$ );
- аппроксимация выпуклого множества  $K \subset V$  некоторым множеством  $K_h \subset V_h$ , таким, чтобы любому элементу  $v \in K$  можно было поставить в соответствие достаточно „близкий“ элемент из  $V_h$ ;
- аппроксимация неравенства (3.1) неравенством, совместимым с другими данными аппроксимации.

В следующем разделе мы проведем анализ этих этапов и сформулируем основные предположения, позволяющие получить дискретные формулировки изучаемой задачи, близкие к ее постановке в общем виде (3.2). ■

### 3.1. Основные гипотезы относительно аппроксимации

Как и в разд. 5 гл. 1, мы сначала проведем „аксиоматизацию“ гипотез, касающихся аппроксимации. Сейчас мы ограничимся рассмотрением только внешней аппроксимации (см. разд. 5.2 гл. 1). Развиваемая теория сохраняется (и даже несколько упрощается) и в случае внутренних аппроксимаций (типа конечно-элементных).

#### 3.1.1. Аппроксимация $V$ и $H$

Рассмотрим пространства  $V$ ,  $H$  с нормами  $\| \cdot \|$ ,  $| \cdot |$ , определение которых было дано в разд. 1.2 этой главы, и введем одновременную внешнюю аппроксимацию  $V$  и  $H$  с помощью задания

(3.4) гильбертова пространства  $\Phi$  со скалярным произведением  $[, ]_\Phi$  и нормой  $[ ]_\Phi$ ;

<sup>1)</sup> Это — один из новых моментов по сравнению со стационарным случаем.

- (3.5)  $F = H \times \Phi$ , снабженного скалярным произведением и нормой произведения пространства<sup>1)</sup>;
- (3.6)  $\pi: F \rightarrow H$  — первого канонического проекционного оператора;
- (3.7)  $\bar{\omega}: F \rightarrow \Phi$  — второго канонического проекционного оператора;
- (3.8)  $\sigma: V \rightarrow F$  — изоморфного расширения  $V$  на  $\sigma V \subset F$ ,
- (3.9) такого, что  $\pi\sigma$  — тождественный оператор;
- (3.10) параметра  $h$ , который мы будем устремлять к нулю.
- гильбертова пространства  $V_h$  со скалярным произведением  $(( , ))_h$  и нормой  $\| \|_h = \| \|_{V_h}$  (в общем случае это пространство будет конечномерным размерности  $N(h)$ ,  $N(h) \rightarrow +\infty$  при  $h \rightarrow 0$ ),
- (3.11) (3.12) линейного оператора  $p_h: V_h \rightarrow F$ , называемого оператором продолжения  $V_h$  на  $F$  и удовлетворяющего условию устойчивости:
- (3.13)  $\| p_h v_h \|_F \leq C \| v_h \|_h$ , где  $C$  — константа, не зависящая от  $h$ ,  $\forall v_h \in V_h$ , и условию сходимости (см. формулу (5.27) гл. 1):
- (3.14)  $\forall v \in V, \exists v_h \in V_h$ , такое, что  $p_h v_h \rightarrow \sigma v$  сильно в  $F$  и  $\| v_h \|_h \leq C$ .

Кроме того, задается

- (3.15) линейный оператор  $q_h: V_h \rightarrow H$ , обладающий свойством инъективности и такой, что  $q_h = \pi p_h$ .

На пространстве  $V_h$  задается второе скалярное произведение и вторая норма

$$(v_h, w_h)_h, |v_h|_h,$$

„аппроксимирующие“ скалярное произведение  $(, )$  и норма на  $H$ , по формуле

$$(3.16) \quad (v_h, w_h)_h = (q_h v_h, q_h w_h), \\ v_h |_h = |q_h v_h|,$$

причем предполагается, что  $\forall v_h \in V_h$  имеет место неравенство

$$(3.17) \quad |v_h|_h \leq C \| v_h \|_h \text{ (аналогичное неравенству } || \leq C \| \|).$$

<sup>1)</sup> Для того чтобы несколько упростить изложение, мы не будем вводить пространства  $\tilde{H}$  — „расширения“ пространства  $H$  (см. работу Сеа [3] и Равьера [1]).

и что

$$(3.18) \quad \|v_h\|_h \leq S(h)|v_h|_h, \text{ где в общем случае } S(h) \rightarrow \infty \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Определение пространства  $V_h$  и аппроксимации  $\Omega_h$  области  $\Omega$  будут уточнены при переходе к конкретным задачам. ■

*Типичный пример.* Как и в разд. 5.1 гл. 1, положим:

$$V = H_0^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad \Phi = (L^2(\Omega))^n,$$

$$\sigma v = \left( v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right);$$

если

$$f = \{f_0, \phi\} \in H \times \Phi: \pi f = f_0, \bar{\omega}f = \phi;$$

$V_h$  задается по формуле (5.10) гл. 1;

$$p_h v_h = \{\cdot_h, \delta_1 v_h, \dots, \delta_h v_h\}, \quad q_h v_h = v_h.$$

Можно показать, что в рассматриваемом примере имеет место неравенство (3.18), в котором

$$S(h) = \frac{C}{|h|}. \quad ■$$

### 3.1.2. Дискретизация по времени и аппроксимация оператора дифференцирования

Зададимся некоторым разбиением отрезка  $[0, T]$  на  $N = N(k)$  интервалов длины  $k$ ,  $k$  в дальнейшем будем устремлять к нулю, при этом  $N(k) \rightarrow +\infty$ . Аппроксимацию решения неравенства (3.1) мы будем разыскивать в классе ступенчатых на  $[0, T]$  функций со значениями в пространстве  $V_h$ .

Пусть  $v_h^i \in V_h$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $\chi_k^i(t)$  — характеристическая функция множества  $[ik, (i+1)k[$ . Положим<sup>1)</sup>

$$v_{h,k} = \sum_{i=0}^N v_h^i \chi_k^i.$$

С помощью этих функций оператор  $u \rightarrow u' = \frac{du}{dt}$  аппроксимируем следующим образом:

$$(3.19) \quad \delta v_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t+k) - v_{h,k}(t)}{k}$$

или

$$(3.20) \quad \bar{\delta} v_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t) - v_{h,k}(t-k)}{k} = \delta v_{h,k}(t-k). \quad ■$$

<sup>1)</sup> В случае необходимости мы будем определять  $v_{h,k}(t)$  на отрезке  $[0, T+k]$ , образуя сумму от 0 до  $N+1$ .

**Замечание 3.1.** Оператор  $v \rightarrow v'$  можно аппроксимировать также при помощи операторов дискретизации второго порядка, третьего порядка и т. д. При использовании операторов второго порядка полагают

$$\delta^* v_{h,k}(t) = \frac{1}{2k} [3v_{h,k}(t) - 4v_{h,k}(t-k) + v_{h,k}(t-2k)]. \blacksquare$$

### 3.1.3. Апроксимация множества $\mathcal{K}$ и начального условия

Множества  $K$  и  $\mathcal{K}$  определим соответственно по формулам (2.22) и (2.29) и зададим  $K_h$  — замкнутое выпуклое множество в пространстве  $V_h$ .

Мы будем использовать следующие результаты, доказательство которых осуществляется без труда (см., например, работу Тремольера [4]).

**Лемма 3.1** (о консистентности). Предположим, что совокупность  $\{K_h, K\}$  является консистентной (см. определение (5.33) гл. 1).

Пусть  $v_{h,k}(h, k \rightarrow 0)$  — последовательность функций, обладающих следующими свойствами:

$$\begin{aligned} v_{h,k}(t) &\in K, \quad t \in [0, T], \\ q_h v_{h,k} &\rightarrow v \text{ —слабо в } L^\infty(0, T; H),^1 \\ p_h v_{h,k} &\rightarrow \tilde{v} \text{ слабо в } L^2(0, T; F), \end{aligned}$$

тогда  $v \in K$  почти для всех  $t \in [0, T]$ ,  $\tilde{v} = \sigma v$ .

**Лемма 3.2** (о сходимости). Предположим, что совокупность  $\{K_h, K\}$  является сходящейся (см. определение (5.34) гл. 1). Тогда

$$\forall v \in L^2(0, T; K), \quad \exists v_{h,k} \in L^2(0, T; K_k) \quad (\text{параметр } h \text{ не связан с } k),$$

такая, что

$$q_h v_{h,k} \rightarrow v \text{ сильно в } L^2(0, T; H),$$

$$p_h v_{h,k} \rightarrow \sigma v \text{ сильно в } L^2(0, T; F),$$

и если вдобавок  $v' \in L^2(0, T; V')$ , то

$$q_h \delta v_{h,k} \rightarrow v' \text{ сильно в } L^2(0, T; V').$$

<sup>1)</sup> Это означает, что

$$\int_0^T (q_h v_{h,k}, \phi) dt \rightarrow \int_0^T (v, \phi) dt \quad \forall \phi \in L^1(0, T; H).$$

Кроме того, предполагается, что элемент  $u_0 \in K \subset V$ , фигурирующий в начальном условии, можно аппроксимировать некоторой последовательностью  $u_{0,h} \in K_h$  ( $h \rightarrow 0$ ), такой, что

$$(3.21) \quad p_h u_{0,h} \rightarrow \sigma u_0 \text{ сильно в } F,$$

$$(3.22) \quad \|u_{0,h}\|_h \leq C, \text{ где } C \text{ — константа, не зависящая от } h. \blacksquare$$

### 3.1.4. Аппроксимация формы $a(u, v)$

Пусть форма  $a(u, v) = (Au, v)$  задана по формулам (2.24), (2.25), (2.26). Зададим форму  $a_h(u_h, v_h) = (A_h u_h, v_h)_h$ , удовлетворяющую предположениям (5.28), (5.29), (5.30), (5.31) главы 1,  $A_h \in \mathcal{L}(V_h; V_h)$ .

Нетрудно доказать, что имеют место следующие результаты.

**Лемма 3.3** (о консистентности). *Пусть задана  $v_{h,k}(t) \in K_h$ , почти для всех  $t \in [0, T]$ , такая, что*

$$p_h v_{h,k} \rightarrow \sigma v \text{ слабо в } L^2(0, T; F),$$

*и пусть совокупность  $\{a_h(\cdot, \cdot), a(\cdot, \cdot)\}$  является консистентной (см. определение (5.31) гл. 1), тогда*

$$\liminf_0^T a_h(v_{h,k}, v_{h,k}) dt \geq \int_0^T a(v, v) dt.$$

**Лемма 3.4** (о сходимости). *Пусть заданы элемент  $v \in L^2(0, T; K)$ ,  $w \in L^2(0, T; K)$  и*

*$v_{h,k}(t) \in K_h$ ,  $w_{h,k}(t) \in K_h$  почти для всех  $t \in [0, T]$ , причем*

$$p_h v_{h,k} \rightarrow \sigma v \text{ слабо в } L^2(0, T; F),$$

$$p_h w_{h,k} \rightarrow \sigma w \text{ сильно в } L^2(0, T; F),$$

*тогда, если совокупность  $\{a_h(\cdot, \cdot), a(\cdot, \cdot)\}$  является сходящейся (см. определение (5.30) гл. 1), имеем*

$$\int_0^T a_h(v_{h,k}, w_{h,k}) dt \rightarrow \int_0^T a(v, w) dt,$$

$$\int_0^T a_h(w_{h,k}, v_{h,k}) dt \rightarrow \int_0^T a(w, v) dt. \blacksquare$$

### 3.1.5. Аппроксимация функционала $j(v)$

Пусть  $j(v)$  определен по формуле (2.27); зададим семейство аппроксимаций функционала  $j$  функциями  $j_h$ , являющимися полу-непрерывными снизу, интегрируемыми при любом  $v_h \in L^2(0, T; K_h)$  и удовлетворяющими условиям (5.35), (5.36) гл. 1.

Нетрудно доказать, что имеют место следующие свойства:

- полуунепрерывность снизу:

из того, что  $v_{h,k} \rightarrow u_{h,k}$  сильно в  $L^2(0, T; V_h)$   
( $h$  и  $k$  фиксированы),

$$(3.23) \quad v_{h,k}(t), u_{h,k}(t) \in K_h, \text{ следует, что}$$

$$\liminf \int_0^T j_h(v_{h,k}) dt \geq \int_0^T j_h(u_{h,k}) dt;$$

— консистентность:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} v_{h,k}(t) &\in K_h \text{ почти для всех } t \in [0, T], \\ p_h v_{h,k} &\rightarrow \sigma v \text{ слабо в } L^2(0, T; F) \\ \Rightarrow \liminf \int_0^T j_{h,k}(v_{h,k}) dt &\geq \int_0^T j(v) dt; \end{aligned}$$

— сходимость:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} v_{h,k}(t) &\in K_h \text{ почти для всех } t \in [0, T], \\ p_h v_{h,k} &\rightarrow \sigma v \text{ сильно в } L^2(0, T; F) \\ \Rightarrow \int_0^T j_h(v_{h,k}) dt &\rightarrow \int_0^T j(v) dt. \blacksquare \end{aligned}$$

### 3.1.6. Аппроксимация $f(t)$

Зададим элемент  $f \in L^2(0, T; V')$  и семейство функций  $f_{h,k} \in L^2(0, T; V_h)$ , таких, что

$$(3.26) \quad \begin{aligned} t \rightarrow f_{h,k}(t) &\text{ константа относительно } t \text{ на каждом} \\ &\text{отрезке} \\ [ik, (i+1)k], \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{причем} \\ \|f_{h,k}(t)\|_h^* &\leq C, \quad C \text{ — константа, не зависящая от } h \text{ и } k, \end{aligned}$$

и удовлетворяющих условиям:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} v_{h,k}(t) &\in K \text{ почти для всех } t \in [0, T], \\ p_h v_{h,k} &\rightarrow v \text{ слабо в } L^2(0, T; F), \\ \Rightarrow \int_0^T (f_{h,k}, v_{h,k})_h dt &\rightarrow \int_0^T (f, v) dt. \end{aligned}$$

Например, если  $f \in L^2(0, T; H)$ , можно выбрать

$$f_{h,k} = \sum_{i=0}^N f_i^k \chi_k^i,$$

где  $\chi_k^t$  — характеристическая функция отрезка  $[ik, (i+1)k]$

$$f_h^t = \frac{1}{k} \int_{ik}^{(i+1)k} f_h(t) dt$$

$f_h(t)$  аппроксимирует  $f(t)$  в смысле определения разд. 5.2 гл. 1; если же  $f$  непрерывна и принадлежит пространству  $C(0, T; H)$ , то можно положить

$$(3.27)' \quad f_h^t = f_h(ik);$$

можно также выбрать  $f_h^t = f((i-1)k)$  или  $f\left(\left(i - \frac{1}{2}\right)k\right)$ ; ниже численные примеры будут приведены для случая

$$f_h^t = f_h(ik). \blacksquare$$

### 3.2. Схемы аппроксимации параболических неравенств I типа

В этом разделе мы изложим основные принципы аппроксимации параболического неравенства общего вида (3.2). Напомним это неравенство:

$$(3.28) \quad \text{найти } u \in \mathcal{K}_0, \text{ такое, что почти для всех } t \in [0, T] \\ (u' + Au - f, v - u) + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \forall v \in K.$$

Учитывая те предположения относительно аппроксимации, которые были сделаны в предыдущем разделе приходим к следующей, достаточно естественной, задаче или схеме:

$$\text{найти } u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i, \text{ такое, что}$$

$$(3.29) \quad u_h^0 = u_{0,h}, \text{ и для любых } t \in [k, T]$$

$$(\delta u_{h,k} + A_h u_{h,k} - f_{h,k}, v_h - u_{h,k})_h + j_h(v_h) - j_h(u_{h,k}) \geq 0 \\ \forall v_h \in K_h, u_{h,k}(t) \in K_h \quad \forall t \in [0, T].$$

Эту задачу можно записать в следующем, более привычном для численного анализа, виде:

найти числа  $u_h^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , полагая  $u_h^0 = u_{0,h}$ , такие, что для  $i = 0, \dots, N$ ,

$$(3.30) \quad \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h u_h^{i+1} - f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} \right)_h + \\ + j_h(v_h) - j_h(u_h^{i+1}) \geq 0 \\ \forall v_h \in K_h, u_h^{i+1} \in K_h.$$

Эта схема называется полностью неявной из-за слагаемого  $A_h u_h^{i+1}$ , фигурирующего в рассматриваемом неравенстве. Использование выражения  $A_h u_h^{i+1}$  часто влечет за собой определенные затруднения при численном решении, поэтому в некоторых задачах может оказаться выгодным (мы увидим это на примерах) заменить этот член на  $A_h u_h^i$ ; в таком случае говорят о явной<sup>1)</sup> схеме.

Заметим, что задачу (3.30) можно записать в виде

(3.31)

$$( (I/k + A_h) u_h^{i+1} - u_h^i / k - f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} )_h + j_h(v_h) - j_h(u_h^{i+1}) \geq 0,$$

предполагая  $u_h^i$  известным (что справедливо для  $u_h^0$ ), и при условии симметрии оператора  $A_h$  определение  $u_h^{i+1}$  сводится к решению следующей задачи минимизации:

$$\begin{aligned} & \text{минимизировать } \frac{1}{2} \left( \left( \frac{I}{k} + A_h \right) v_h, v_h \right)_h - \\ (3.32) \quad & \cdot - \left( \frac{u_h^i}{k} + f_h^{i+1}, v_h \right)_h + j_h(v_h), \\ & v_h \in K_h. \blacksquare \end{aligned}$$

Для того чтобы несколько упростить исследование явных и неявных схем, будем предполагать, что  $j=0$ , а для того, чтобы не повторять доказательства схожих утверждений, введем в рассмотрение „схему I“:

$$\begin{aligned} (3.33) \quad & \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h u_h^{i+0} - f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} \right)_h \geq 0 \quad \forall v_h \in K_h, \\ & u_h^{i+1} \in K_h, \quad u_h^0 = u_{0h}, \\ & u_h^{i+0} = u_h^i + \theta (u_h^{i+1} - u_h^i), \end{aligned}$$

здесь  $\theta$  — фиксированное число из интервала  $[0, 1]$ .

При  $\theta=1$  (соответственно  $\theta=0$ ) речь идет о неявной (явной) схеме.

Если  $\theta=\frac{1}{2}$  и  $K_h=V_h$ , то мы имеем классическую схему Кранка—Николсона. ■

*Замечание 3.2.* Другая категория схем задается схемой II (эта схема называется „расщепленной“ — в противоположность

1) В действительности здесь мы злоупотребляем истинным смыслом слов: при вычислении  $u_h^{i+1}$  необходимо решать вариационное неравенство, соответствующее тождественному отображению на  $K_h$ , т. е. необходимо строить проекцию  $P_{K_h}$  на множество  $K_h$  в смысле скалярного произведения  $(\cdot, \cdot)$  (см. также задачу (3.34)).

схеме I, которая расщепленной не является):

$$\text{найти: } u_{h,k}^* = \sum_{i=0}^N u_h^{i+1/2} \chi_k^i \text{ и } u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i,$$

удовлетворяющие условию  $u_h^0 = u_{0,h}$  и такие, что

$$(3.34) \quad \frac{u_h^{i+1/2} - u_h^i}{k} + A_h (\theta^- u_h^i + \theta^* u_h^{i+1/2} + \theta^+ u_h^{i+1}) - f_h^{i+1} = 0,$$

$u_h^{i+1} = P_{K_h}[u_h^{i+1/2}]$  (проекция на  $K_h$  в смысле

нормы  $(\cdot, \cdot)_h$ ), где  $\theta^- \geq 0, \theta^* \geq 0, \theta^+ \geq 0$  удовлетворяют условию  $\theta^- + \theta^* + \theta^+ = 1$ .

Можно доказать, что эта схема содержит схему I (нерасщепленную) как частный случай (нужно положить  $\theta^* = 0$ , и тогда нетрудно видеть, что, если элемент  $u_{h,k}$  удовлетворяет задаче (3.34), то он является решением и задачи (3.33)). ■

### 3.3. Сходимость решений приближенных неравенств

В этом разделе мы изучим полную аппроксимацию с помощью схемы I. (По поводу задач, в которых  $j \neq 0$ , и исследования схемы (3.34) см. работу Тремольера [4].)

Для удобства напомним здесь „непрерывное“ и „дискретное“ неравенства

$$(3.35) \quad (u' + Au - f, v - u) \geq 0, \quad t \in [0, T] \\ \forall v \in K, u \in \mathcal{K}_0,$$

$$(3.36) \quad \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h u_h^{i+0} - f_h^{i+1}, v_h - u_h^{i+1} \right)_h \geq 0, \\ \forall v_h \in K_h, u_h^{i+1} \in K_h, i = 0, 1, \dots, N, \text{ где } u_h^0 = u_{0,h}, \\ u_h^{i+0} = u_h^i + \theta(u_h^{i+1} - u_h^i), \theta \in [0, 1].$$

Мы сейчас докажем, что при надлежащем выборе значений параметров  $h$  и  $k$  решение

$$(3.37) \quad u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i$$

задачи (3.36) можно рассматривать как аппроксимацию решения неравенства (3.35).

Доказательство содержит четыре этапа:

- определение дискретного „слабого“ неравенства,
- исследование устойчивости,
- исследование слабой сходимости,
- исследование сходимости по норме.

Прежде чем переходить к доказательству, заметим, что существование и единственность решения  $u_h^{i+1}$  следуют немедленно из свойства коэрцитивности оператора  $(I + \theta A_h) \quad \forall \theta \in [0, 1]$  (см. гл. 1, теоремы 2.1 и 2.2). (В случае  $\theta = 0$  коэрцитивность следует рассматривать относительно нормы  $\| \cdot \|_h \geq 1/S(h) \| \cdot \|_h$ ,  $S(h) \in ]0, +\infty[$ ,  $\forall h$ .)

### 3.3.1. Определение дискретного „слабого“ неравенства

Имеет место

**Лемма 3.5.** Пусть  $v_{h,k} = \sum_{i=0}^N v_h^i \chi_k^i$ ,  $u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i$ .

Тогда

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \left( \frac{v_h^{i+1} - v_h^i}{k}, v_h^{i+1} - u_h^{i+1} \right)_h &= \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k}, v_h^{i+1} - u_h^{i+1} \right)_h + \\ &+ \frac{1}{2k} \| v_h^{i+1} - u_h^{i+1} \|_h^2 - \frac{1}{2k} \| v_h^i - u_h^i \|_h^2 + \\ &+ \frac{1}{2k} \| v_h^{i+1} - v_h^i - (u_h^{i+1} - u_h^i) \|_h^2, \end{aligned}$$

и если

$$(3.39) \quad \int_k^T (\bar{\delta} u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \geq 0,$$

то

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \int_0^T (\bar{\delta} v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt &\geq \\ &\geq \frac{1}{2} \| v_{h,k}(T) - u_{h,k}(T) \|_h^2 - \frac{1}{2} \| v_{h,k}(0) - u_{h,k}(0) \|_h^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Доказательство.** Для доказательства (3.38) заметим, что

$$\begin{aligned} (v_h^{i+1} - v_h^i, v_h^{i+1} - u_h^{i+1})_h &= (u_h^{i+1} - u_h^i, v_h^{i+1} - u_h^{i+1})_h + \\ &+ (v_h^{i+1} - v_h^i - (u_h^{i+1} - u_h^i), v_h^{i+1} - u_h^{i+1})_h, \end{aligned}$$

и используем известное равенство

$$(3.41) \quad (a - b, a) = \frac{1}{2} |a|^2 - \frac{1}{2} |b|^2 + \frac{1}{2} |a - b|^2.$$

Суммируя соотношения (3.38) для значений  $i = 0, \dots, N - 1$ , получим

$$\int_k^T (\bar{\delta}u_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \leq \int_k^T (\bar{\delta}v_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |v_h^i - u_h^i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} |v_h^i - u^i|^2,$$

используя эту оценку в неравенстве (3.39), придем к нужному нам неравенству (3.40). ■

**Замечание 3.3.** В случае, когда  $v_{h,k}(0) = u_{h,k}(0)$ , из (3.39) следует, что

$$(3.42) \quad \int_k^T (\bar{\delta}v_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \geq 0. \quad ■$$

### 3.3.2. Исследование устойчивости

Мы сейчас докажем, что решение (единственное) задачи (3.36), построенное в виде (3.37) с использованием значений  $h$  и  $k$ , связанных (если это необходимо) условием устойчивости, ограничено. (Для облегчения доказательства мы будем предполагать, что  $0 \in K$ ). Полагая в неравенстве (3.36)  $v = 0$  и опуская временно индекс  $h$ , получим

$$\frac{1}{k} (u^{i+1} - u^i, u^{i+1}) + a(u^{i+\theta}, u^{i+1}) \leq (f^{i+1}, u^{i+1}).$$

Используя равенство (3.41), найдем, что

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2k} [|u^{i+1}|^2 - |u^i|^2 + |u^{i+1} - u^i|^2] + \\ + a(u^{i+\theta}, u^{i+1}) \leq (f^{i+1}, u^{i+1}). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} a(u^{i+\theta}, u^{i+1}) &= \theta a(u^{i+1}, u^{i+1}) + (1-\theta) a(u^i, u^{i+1}) = \\ &= \theta a(u^{i+1}, u^{i+1}) + (1-\theta) a(u^i, u^i) + \\ &\quad + (1-\theta) a(u^i, u^{i+1} - u^i) \end{aligned}$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} (f^{i+1}, u^{i+1}) &= (f^{i+1}, u^{i+\theta}) + (f^{i+1}, u^{i+1} - u^{i+\theta}) = \\ &= (1-\theta) (f^{i+1}, u^i) + \theta (f^{i+1}, u^{i+1}) + (1-\theta) (f^{i+1}, u^{i+1} - u^i), \end{aligned}$$

так что из неравенства (3.43) следует<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} |u^{i+1}|^2 - |u^i|^2 + |u^{i+1} - u^i|^2 + 2k[0a(u^{i+1}) + (1-\theta)a(u^i)] &\leqslant \\ &\leqslant 2k[0(f^{i+1}, u^{i+1}) + (1-\theta)(f^{i+1}, u^i) + \\ &+ (1-\theta)(f^{i+1}, u^{i+1} - u^i)] - 2k(1-\theta)a(u^i, u^{i+1} - u^i). \end{aligned}$$

Отсюда, используя классическое неравенство

$$(3.43') \quad 2(a, b) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} |a|^2 + \varepsilon |b|^2 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

имеем оценку

$$\begin{aligned} (f^{i+1}, u^{i+1}) &\leqslant \|f^{i+1}\|_* \|u^{i+1}\| \leqslant \frac{1}{2\alpha} \|f^{i+1}\|_*^2 + \frac{1}{2} a(u^{i+1}), \quad (\varepsilon = \alpha), \\ (f^{i+1}, u^i) &\leqslant \|f^{i+1}\|_* \|u^i\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|f^{i+1}\|_*^2 + \frac{1}{4} a(u^i), \quad \left(\varepsilon = \frac{\alpha}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f^{i+1}, u^{i+1} - u^i) &\leqslant \|f^{i+1}\|_* \|u^{i+1} - u^i\| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \|f^{i+1}\|_*^2 + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} S(h)^2 |u^{i+1} - u^i|^2, \quad (\varepsilon > 0 \text{ любое}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a(u^i, u^{i+1} - u^i)| &\leqslant C \|u^i\| \|u^{i+1} - u^i\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{4} a(u^i) + \frac{C^2}{\alpha} S(h)^2 |u^{i+1} - u^i|^2, \quad \left(\varepsilon = \frac{2}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

внося которую в неравенство (3.43), получим, что для  $\forall \varepsilon > 0$

$$(3.44) \quad \begin{aligned} |u^{i+1}|^2 - |u^i|^2 + \left[1 - \left(\varepsilon + \frac{2}{\alpha} C^2\right) k S(h)^2 (1-\theta)\right] \times \\ \times |u^{i+1} - u^i|^2 + (1-\theta) k a(u^i) + 0 k a(u^{i+1}) \leqslant C k \|f^{i+1}\|_*^2. \end{aligned}$$

Введем теперь предположение, которое называется гипотезой устойчивости:

$$(3.45) \quad 1 - \frac{2C^2}{\alpha} k S(h)^2 (1-\theta) \geqslant \beta > 0 \quad \forall h, k.$$

(Очевидно, что эта гипотеза беспредметна, если  $\theta = 1$ .)

Тогда из неравенства (3.44) найдем (мы снова вводим индекс  $h$ ):

$$\begin{aligned} |u_h^{i+1}|_h^2 - |u_h^i|_h^2 + \beta |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2 + \alpha k [(1-\theta) \|u_h^i\|_h^2 + \\ + 0 \|u_h^{i+1}\|_h^2] \leqslant C k \|f_h^{i+1}\|_*^2. \end{aligned}$$

Используя предположение (3.26) относительно  $f_{h,k}$ , с помощью суммирования от  $i=0$  до  $n \leqslant N-1$  получим неравенство

$$|u_h^{n+1}|_h^2 + \beta \sum_{i=0}^n |u_h^{i+1} - u_h^i|_h^2 + \alpha \sum_{i=0}^n k [(1-\theta) \|u_h^i\|_h^2 + \theta \|u_h^{i+1}\|_h^2] \leqslant C,$$

<sup>1)</sup> Напомним, что  $a(v) = a(v, v)$ .

из которого находим, что для всех  $h, k$ , удовлетворяющих условию (3.45):

$$(3.46) \quad p_h u_{h,k} \text{ ограничено в } L^2(0, T; F),$$

$$(3.47) \quad q_h u_{h,k} \text{ ограничено в } L^\infty(0, T; H),$$

$$(3.48) \quad \sum_{i=0}^{N-1} \|u_h^{i+1} - u_h^i\|_h^2 \leq C, \quad C \text{ — фиксированная константа.} \blacksquare$$

### 3.3.3. Слабая сходимость

Пусть  $v \in \mathcal{K}$  и  $v_{h,k}$  выбрана так, как это было сделано в лемме 3.2. Внося  $v_{h,k}$  в неравенство (3.36), получаем оценку:

$$\int_k^T (\bar{\delta} u_{h,k} + A_h u_{h,k}^0 - f_{h,k}, v_{h,k} - u_{h,k})_h dt \geq 0,$$

из которой с учетом леммы 3.5 и замечания 3.3 получаем, полагая  $v_{h,h}(0) = u_{0,h}$ ,

$$(3.49) \quad \begin{aligned} & \int_k^T (\bar{\delta} v_{h,k} + A_h u_{h,k}^0 - f_{h,k}, v_{h,k})_h dt \geq \\ & \geq \int_k^T (\bar{\delta} v_{h,k}, u_{h,k}) dt + \int_k^T (A_h u_{h,k}^0, u_{h,k}) dt - \\ & - \int_k^T (f_{h,k}, u_{h,k}) dt; \end{aligned}$$

напомним, что здесь используется обозначение

$$u_{h,k}^0(t) = u_{h,k}(t-k) + \theta[u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t-k)].$$

С другой стороны, на основании утверждений (3.46), (3.47) и леммы 3.1 (о консистентности) заключаем, что из последовательности  $u_{h,k}$  можно извлечь подпоследовательность, по-прежнему обозначаемую через  $u_{h,k}$ , такую, что:

$$q_h u_{h,k} \rightharpoonup u \text{ слабо в } L^\infty(0, T; H),$$

$$p_h u_{h,k} \rightharpoonup \sigma u \text{ слабо в } L^2(0, T; F),$$

где  $u \in K$ .

Переходя в неравенство (3.49) к пределу, получаем, что

$$(3.50) \quad \int_0^T (v' + Au - f, v - u) dt \geq \liminf \int_k^T (A_h u_{h,k}^0, u_{h,k} - u_{h,k}^0)_h dt.$$

Осталось доказать, что правая часть неотрицательна.

Для этого заметим, что имеют место оценки:

$$\begin{aligned}
 Y_{h,k} &= \left| \int_k^T (A_h u_{h,k}^\theta, u_{h,k} - u_{h,k}^\theta)_h dt \right| = \\
 &= \left| \sum_{i=0}^N k (A_h u_h^{i+\theta}, u_h^{i+1} - u_h^{i+\theta})_h \right| = \\
 &= \sum_{i=0}^N k (1-\theta) |(A_h u_h^{i+\theta}, u_h^{i+1} - u_h^i)_h| \leqslant \\
 &\leqslant (1-\theta) \sqrt{k} S \sum_{i=0}^N \sqrt{k} \|u_h^{i+\theta}\|_h \|u_h^{i+1} - u_h^i\|_h \leqslant \\
 &\leqslant (1-\theta) S(h) \sqrt{k} \left( \sum_{i=0}^N k \|u_h^{i+\theta}\|_h^2 \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \left( \sum_{i=0}^N \|u_h^{i+1} - u_h^i\|_h^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Используя утверждения (3.46), (3.48) и гипотезу о сходимости (которая не нужна, если  $\theta=1$ )

$$(3.51) \quad (1-\theta) k S(h)^2 \rightarrow 0, \text{ если } h, k \rightarrow 0,$$

найдем, что

$$Y_{h,k} \rightarrow 0, \text{ если } h, k \rightarrow 0,$$

откуда вытекает неравенство

$$\int_0^T (v' + Au - f, v - u) dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_0, u \in \mathcal{K}_f,$$

следовательно,  $u$  — „слабое“<sup>1)</sup> решение задачи. ■

### 3.3.4. Сходимость по норме

Мы сейчас докажем, что элемент  $u_{h,k}$  аппроксимирует решение (сильное) неравенства (3.35). Для этого мы сначала предположим, что условия существования и единственности решения выполнены. Мы знаем (см. замечание 2.2), что в этом случае

<sup>1)</sup> Отметим, что — в отличие от уравнений — в рассматриваемом случае неравенств на устойчивость не обязательно следует сходимость.

неравенства

$$(3.52) \quad \int_0^T (u' + Au - f, v - u) dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}^e, \quad u \in \mathcal{K}_0,$$

$$(3.53) \quad \int_0^T (v' + Au - f, v - u) dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_0, \quad u \in \mathcal{K}^e,$$

эквивалентны, т. е. решение  $u \in \mathcal{K}^e$ , неравенства (3.53) в действительности принадлежит множеству  $\mathcal{K}_0$  и удовлетворяет неравенству (3.52). Таким образом, мы теперь знаем, что последовательность  $p_h u_{h,k}$  слабо сходится в  $L^2(0, T; F)$  к элементу  $u$ , где  $u$  — сильное решение неравенства (3.52). Мы сейчас докажем, что в действительности  $p_h u_{h,k}$  сходится сильно к  $u$  в  $L^2(0, T; F)$ . Для этого рассмотрим некоторую последовательность  $\tilde{u}_{h,k}$ , аппроксимирующую элемент  $u$  и удовлетворяющую условиям, указанным в лемме 3.2; оценим величину

$$(3.54) \quad X_{h,k} = \int_k^T (A_h u_{h,k} - A_h \tilde{u}_{h,k}, u_{h,k} - \tilde{u}_{h,k})_h dt$$

и докажем, что она стремится к нулю.

Полагая в неравенстве (3.42)  $v_{h,k} = \tilde{u}_{h,k}$ , учитывая лемму 3.5 и замечание 3.3, найдем, что

$$(3.55) \quad \begin{aligned} \int_k^T (A_h u_{h,k}^0, u_{h,k})_h dt &\leqslant \int_k^T (\bar{\delta} \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt + \\ &+ \int_k^T (A_h u_{h,k}^0, \tilde{u}_{h,k}) dt - \int_k^T (f_k, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(3.56) \quad \begin{aligned} X_{h,k} &= \int_k^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k})_h dt - \int_k^T (A_h u_{h,k}, \tilde{u}_{h,k})_h dt + \\ &+ \int_k^T (A_h \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt. \end{aligned}$$

Но

$$(3.57) \quad u_{h,k}^0(t) = u_{h,k}(t) + (\theta - 1)(u_{h,k}(t) - u_{h,k}(t-k)),$$

следовательно,

$$(3.58) \quad \begin{aligned} \int_k^T (A_h u_{h,k}, u_{h,k})_h dt &= \int_k^T (A_h u_{h,k}^0, u_{h,k})_h dt - \\ &- (\theta - 1) \int_k^T (A_h u_{h,k}(t) - A_h u_{h,k}(t-k), u_{h,k})_h dt, \end{aligned}$$

подстановка (3.58), (3.55) в (3.56) дает

$$\begin{aligned} X_{h,k} \leqslant & \int_k^T (\bar{\delta} \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt + \int_k^T (A_h u_{h,k}^0, \tilde{u}_{h,k})_h dt - \\ & - \int_k^T (f_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt - \\ & - (0-1) \int_k^T (A_h u_{h,k}(t) - A_h u_{h,k}(t-k), u_{h,k})_h dt - \\ & - \int_k^T (A_h u_{h,k}, \tilde{u}_{h,k})_h dt + \int_k^T (A_h \tilde{u}_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt, \end{aligned}$$

или с использованием (3.57)

$$(3.59) \quad X_{h,k} \leqslant \int_k^T (\bar{\delta} \tilde{u}_{h,k} + A_h \tilde{u}_{h,k} - f_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt + \\ + (\theta-1) \int_k^T (A_h u_{h,k}(t) - A_h u_{h,k}(t-k), \\ \tilde{u}_{h,k}(t) - u_{h,k}(t))_h dt.$$

Докажем теперь, что величина

$$Z_{h,k} = (1-\theta) \left| \sum_{i=0}^{N-1} k (A_h(u_h^{i+1} - u_h^i), \tilde{u}_h^{i+1} - u_h^{i+1})_h \right|$$

стремится к нулю. Имеет место оценка

$$(3.60) \quad Z_{h,k} \leqslant (1-\theta) S(h) \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{k} \|u_h^{i+1} - u_h^i\|_h \sqrt{k} \|\tilde{u}_h^{i+1} - u_h^{i+1}\|_h,$$

из которой следует, что

$$\begin{aligned} Z_{h,k} \leqslant & (1-\theta) \sqrt{k} S(h) \left( \sum_{i=0}^{N-1} \|u_h^{i+1} - u_h^i\|_h^2 \right)^{1/2} \times \\ & \times \left( \sum_{i=0}^{N-1} k \|\tilde{u}_h^{i+1} - u_h^{i+1}\|_h^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя неравенство (3.48), ограниченность  $p_h \tilde{u}_{h,k}$  и  $p_h u_{h,k}$  в  $L^2(0, T; F)$  и предполагая выполненным условие сходимости (3.51), найдем

$$Z_{h,k} \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $X_{h,k} \rightarrow 0$ , если только

$$\int_0^T (\bar{\delta} \tilde{u}_{h,k} + A_h \tilde{u}_{h,k} - f_{h,k}, \tilde{u}_{h,k} - u_{h,k})_h dt \rightarrow 0,$$

что следует непосредственно из утверждений (3.46), (3.47), предположений леммы 3.2 относительно  $\tilde{u}_{h,k}$ , результатов леммы 3.4 относительно  $A_h \tilde{u}_{h,k}$  и предположений (3.26), (3.27) относительно  $f_h$ . Таким образом,  $X_{h,k} \rightarrow 0$ , и из равномерной относительно  $h$  коэрцитивности оператора  $A_h$  выводим, что

$$p_h(u_{h,k} - \tilde{u}_{h,k}) \rightarrow 0,$$

следовательно,

$$p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \text{ сильно в } L^2(0, T; F).$$

Совокупность установленных нами результатов позволяет сформулировать теорему:

**Теорема 3.1.** Если  $0 \in [0, 1]$ ,  $u$ , кроме того

$(1-\theta)kS(h)^2 \rightarrow 0$  (эта гипотеза не нужна, если  $\theta = 1$ ),

то при  $h, k \rightarrow 0$  решения  $u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i$  схемы I (3.33) удовлетворяют условиям

$$q_h u_{h,k} \rightarrow u \text{ -слабо в } L^\infty(0, T; H),$$

$$p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \text{ слабо в } L^2(0, T; F),$$

где  $u$  — единственное (слабое) решение неравенства (3.53). Если это решение является единственным сильным решением неравенства (3.52), то

$$p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \text{ сильно в } L^2(0, T; F). \blacksquare$$

**Замечание 3.4.** Если параметры  $h$  и  $k$  можно устремлять к нулю так, что при этом не обязательно  $kS(h)^2 \rightarrow 0$ , то говорят, что схема безусловно устойчива и сходится. Таким образом, именно такую схему мы получаем здесь при  $\theta = 1$ . В противном случае ( $0 \leq \theta < 1$ ) схема называется условно устойчивой и сходящейся.

**Замечание 3.5.** В работе Тремольера [4] доказано, что приведенная в замечании 3.2 схема II — условно устойчивая и сходящаяся, исключая случай, когда

$$(3.61) \quad \theta^+ = 1, \theta^- = 0, \theta^* = 0,$$

или

$$(3.62) \quad \theta^* \geq \frac{1}{2}, \theta^- = 0, K_h = V_h, K = V.$$

В последнем случае задача, которую необходимо решить, представляет собой вариационное уравнение (если  $j$  — дифферен-

цируемый функционал). При выполнении предположений (3.61), (3.62) схема II—безусловно устойчивая и сходящаяся. Отсюда, в частности, еще раз вытекает безусловная устойчивость и сходимость схем Кранка—Николсона (см. работы Равъяра [1], Темама [3]). ■

*Замечание 3.6.* Результаты разд. 3.3.3 обосновывают существование слабого решения.

## 4. Численное решение некоторых параболических неравенств I типа

В этом разделе мы займемся решением трех конкретных примеров параболических неравенств I типа. Эти примеры позволяют нам сравнить достоинства и недостатки явных схем (схема I,  $\theta = 0$ ), неявных схем с проекцией (схема I,  $\theta = 1$ ) и неявных схем для уравнений (схема II,  $\theta^* = 1$ ,  $\theta^- = \theta^+ = 0$ ). Одновременно мы изучим чувствительность этих схем к значениям параметров  $h$  и  $k$  и отношения  $k/h^2 \simeq kS(h)^2$ .

Это исследование мы проведем на следующих примерах:

- модельной задаче на выпуклых множествах, встретившихся в задачах гл. 3;
- задаче о трении;
- задаче о деформации мембраны.

### 4.1. Модельная задача

Рассмотрим параболическое неравенство

$$(4.1) \quad (u' - \Delta u - f, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \\ u \in \mathcal{K}_0, \text{ для почти всех } t \in [0, T],$$

где

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), |v(x)| \leqslant d(x, \Gamma) \text{ п. в. в } \Omega\},$$

$$\mathcal{K}_0 = \{v \mid v \in W_0(0, T), v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\},$$

$d(x, \Gamma)$ —евклидово расстояние от точки  $x \in \Omega$  до границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Положим  $\Omega = ]0, 1[$ , интервал времени  $[0, 1]$ . Можно показать, что для функции  $f(x, t)$ , заданной по формуле

$$f(x, t) = \begin{cases} 100, & \text{если } x < t/2 \text{ или } x > 1 - t/2, \\ -[1/(t-1)^2](x^2 - x - t(t-2)/4) - 2/(t-1), & \text{если } t/2 \leqslant x \leqslant 1 - t/2, \end{cases}$$

и начального условия

$$u_0(x) = x(1-x),$$

точное решение задачи имеет вид (см. рис. 4.1):

$$u(x, t) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x \leq t/2, \\ [1/(t-1)][x^2 - x + t^2/4], & \text{если } t/2 < x < 1-t/2, \\ 1-x, & \text{если } 1-t/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Область  $\Omega = [0, 1]$  разбивается на  $M+1$  интервалов длины  $h$ , промежуток времени  $[0, T=1]$  — на  $N$  интервалов длины  $k$ .

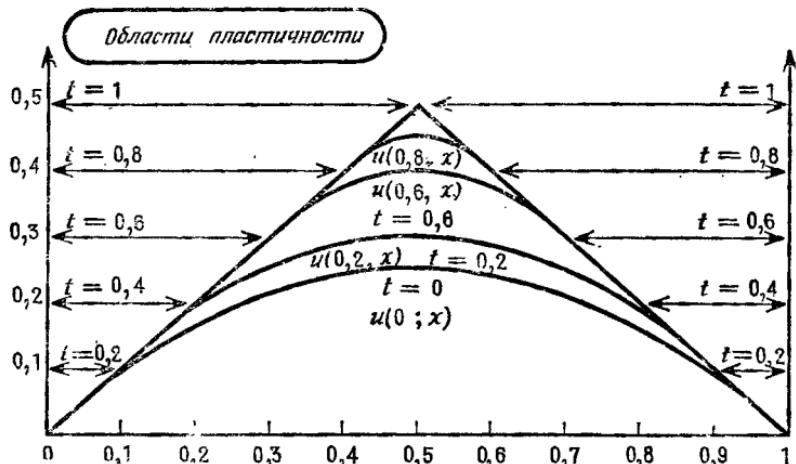


Рис. 4.1. Изменение во времени решения модельной задачи упругой пластичности.

Дискретное решение задачи будем разыскивать в следующем виде ( $\theta_h^i$  — характеристическая функция бруса  $\phi_h^i(ih)$ ):

$$u_{h,k}(t) = \sum_{i=0}^{M+1} u_i^n \theta_h^i, \quad t \in [nk, (n+1)k[,$$

оценку отклонения найденного решения от точного в момент времени  $nk$  определим по формуле:

$$\text{ECART}_2 = \left( \sum_{i=1}^M |u(ih, nk) - u_i^n|^2 \right)^{1/2}.$$

Положим

$$(4.2) \quad \begin{aligned} u_i^0 &= ih(1-ih), \quad i = 0, \dots, M+1, \\ f_i^n &= f(ih, nk), \quad i = 0, \dots, M+1, \quad n = 0, \dots, N, \\ d_i &= \min \{ih, M+1-ih\}. \end{aligned}$$

Все результаты, касающиеся решения задачи (4.1), были получены на ЭВМ ROLL-GE-265, затраты машинного времени (включая трансляцию) измеряются в 1/6 с.

Таблица 4.1. Явная схема

<i>h</i>	<i>k</i>	Значение <i>t</i> ∈ [0, 1]						Время решения
		<i>t</i> = <i>k</i>	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
1/1000	0	0,0033	0,0021	0,0048	0,0018	0,0065	0,0010	0,0003
1/600	0	0,0035	0,0023	0,0051	0,0020	0,0039	0,0011	0,0004
1/500	0	0,0036	0,0024	0,0052	0,0021	0,0070	0,0012	0,0012
1/400	0	0,0038	0,0026	0,0055	0,0023	0,0073	0,0013	0,0014
1/250	0,0001	0,0042	0,0033	0,0062	0,0030	0,0080	0,0018	0,0123
1/200	0,0001	0,0046	0,0038	0,0067	0,0034	0,0085	0,0022	0,0128
1/150	0,0003	0,0058	0,0016	28,9	1004	35381	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>
Неустой- чивость	{ 1/100	0,0006	0,1126	135	84054	5·10 <sup>2</sup>	10 <sup>10</sup>	10 <sup>18</sup>
						10 <sup>18</sup>	10 <sup>18</sup>	10 <sup>21</sup>
								95
1/1000	0	0,0010	0,0013	0,0014	0,0014	0,0012	0,0010	0,0007
1/800	0	0,0011	0,0015	0,0016	0,0015	0,0014	0,0011	0,0008
1/20	{ 1/700	0	0,5630	3560				
Неустой- чивость	{ 1/100	0,0008	3632					

ECART<sub>3</sub> (точное решение — построенное решение) × 1 / V<sub>h</sub>

#### 4.1.1. Исследование явной схемы

Для  $n = 0, \dots, N - 1$  схема записывается в виде

$$u_i^{n+1} = \max \left( -d_i, \min \left( u_i^n + \frac{k}{h^2} (-2u_i^n + u_{i-1}^n) + kf_i^{n+1}, d_i \right) \right),$$

$$u_i^{n+1} = \max \left( -d_i, \min \left( u_i^n + \frac{k}{h^2} (u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n) + hf_i^{n+1}, d_i \right) \right),$$

$$i = 1, \dots, M - 1,$$

$$u_M^{n+1} = \max \left( -d_M, \min \left( u_M^n + \frac{k}{h^2} (u_{M-1}^n - 2u_M^n) + kf_M^{n+1}, d_M \right) \right),$$

к ней, конечно, надо добавить начальное условие (4.2); для любого  $n$

$$u_0^n = u_{M+1}^n = 0.$$

Полученные результаты приведены в табл. 4.1.

#### 4.1.2. Исследование схемы, неявной в уравнениях

Для  $n = 0, \dots, N$  схема записывается в виде

$$(4.3) \quad u_i^{n+1/2} - \frac{k}{h^2} (u_{i+1}^{n+1/2} - 2u_i^{n+1/2} + u_{i-1}^{n+1/2}) = u_i^n + kf_i^{n+1},$$

$$i = 1, \dots, M,$$

$$(4.4) \quad u_i^{n+1} = \max \left( -d_i, \min \left( u_i^{n+1/2}, d_i \right) \right), \quad i = 1, \dots, M,$$

$u_i^0$  задается по формуле (4.2),  $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$  для любого  $n$ .

Для каждого значения  $n = 0, 1, \dots$  необходимо найти решение системы уравнений (4.3), в результате определяется  $u_i^{n+1/2}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , после этого по формуле (4.4) получаем  $u_i^{n+1}$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Система (4.3) была решена по методам Гаусса—Зейделя и сопряженных градиентов. Условие останова, общее для обоих методов определения решения  $u^{n+1/2}$  в момент  $t = nk$ , имеет вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^M |J'_i(v^n)|^2} \leq 10^{-6},$$

где

$$J'_i = \left( 1 + 2 \frac{k}{h^2} \right) v_i^n - \frac{k}{h^2} v_{i-1}^n - \frac{k}{h^2} v_{i+1}^n - u_i^{n-1} - kf_i^n,$$

$u^{n-1}$  — решение для момента времени  $t = (n-1)k$ .

Вычисления были приведены на ЭВМ BULL-GE-265, затраты машинного времени измеряются в 1/6 с.

Зависимость оптимальных значений  $\omega_{\text{opt}}$  параметра  $\omega$  от параметров  $h$  и  $k$  в методе Гаусса—Зейделя приведена в табл. 4.2<sup>1)</sup>; эта зависимость представлена также на рис. 4.2.

Результаты, полученные при помощи упомянутых выше двух методов, собраны в табл. 4.3.

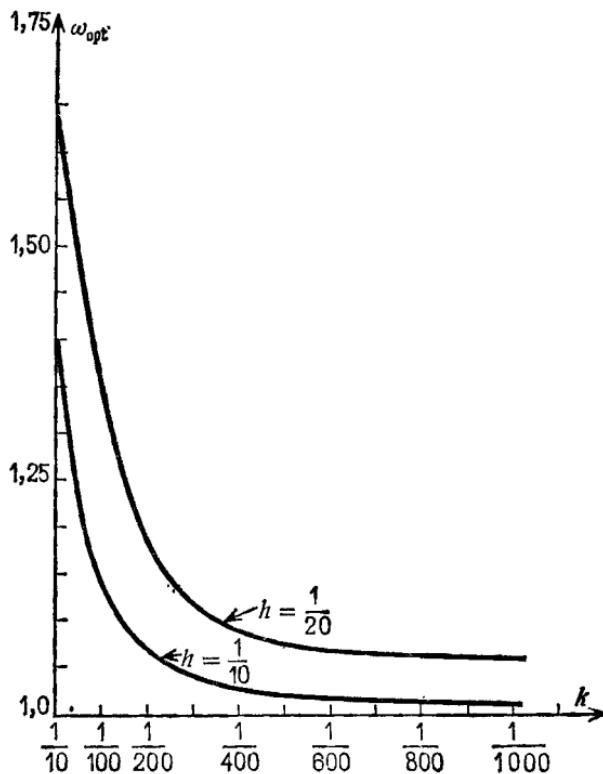


Рис. 4.2.

#### 4.1.3. Схема, неявная в неравенствах

Для  $n = 0, \dots, N$  схема записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^M \left( u_i^{n+1} - u_i^n - \frac{k}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - kf_i^{n+1}, v_i - u_i^{n+1} \right) \geqslant 0$$

$\forall v = (v_1, \dots, v_N)$ , причем  $|v_i| \leq d_t$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,

$u^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})$ , где  $|u_i^{n+1}| \leq d_t$ ,  $i = 1, \dots, M$ ,

$u_i^0$  задано по формуле (4.2) и для всех  $n$ ,  $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$ .

<sup>1)</sup> Значение  $\omega_{\text{opt}}$  было получено при помощи итерационного метода, предложенного в работе Варги [1] для решения задачи без ограничений (см. также работу Тремольера [4] и Бурга и Тремольера [1]).

Таблица 4.2

$h$	$k$	Теоретическое значение $\omega_{\text{опт}}$	Время вычислений
$1/10$	$1/600$	1,01458	54
	$1/400$	1,02654	52
	$1/200$	1,06403	53
	$1/150$	1,08732	57
	$1/100$	1,12786	73
	$1/50$	1,21296	53
	$1/10$	1,40481	56
	$1/5$	1,45676	55
	$1/2$	1,49533	58
$1/20$	$1/800$	1,06990	91
	$1/100$	1,35260	108
	$1/10$	1,63948	112
	$1/5$	1,67912	113
$1/30$	$1/100$	1,49955	109
	$1/10$	1,74324	137

Решение для момента времени  $t = nk$  может быть найдено путем минимизации функции  $J(v)$ , градиент которой  $J'(v) = \{J'_1(v), \dots, J'_M(v)\}$  имеет компоненты

$$J'_i(v) = v_i - u_i^n - \frac{k}{h^2} (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) - kf_i^{n+1}$$

на множестве

$$K = \{v \mid |v_i| \leq d_i, i = 0, \dots, M+1\}.$$

Эта минимизация была проведена по методу Гаусса—Зейделя с проекцией при оптимальном значении параметра, выбираемом из табл. 4.2<sup>1)</sup>. Условие останова на этапе построения решения для момента времени  $t = nk$  имеет вид

$$\sqrt{\sum_{i=1}^M |\tilde{J}'_i(v^n)|^2} \leq 10^{-6},$$

1) Оптимальным значением параметра  $\omega$  мы называем теоретическое оптимальное значение для задачи без ограничений. Для случая неравенств это значение не имеет никакого отношения к оптимальному; здесь в качестве оптимального надо было бы выбирать  $\omega_{\text{опт}}$  для задачи Дирихле в области, ограниченной свободной границей, т. е. зоне, где  $|u| < d$  (см. замечание 3.7 гл. 3).

Таблица 4.3. Схема, неявная в уравнениях

Значение параметров		$\frac{1}{\sqrt{h}} E1ART_2$ : (точные решения — построенные решения)										Время решения
Значение $i \in [0, T]$	$k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
$h = 1/1000$	0	0,0030	0,0085	0,0279	0,0252	0,0267	0,0262	0,0211	0,0191	0,0250	0	1,302
$h = 1/600$	0	0,0030	0,0134	0,0468	0,0417	0,0477	0,0417	0,0324	0,0427	0,0270	0	1,103
$h = 1/400$	0	0,0031	0,0205	0,0752	0,0523	0,0792	0,0533	0,0531	0,0500	0,0250	0	958
$h = 1/10$	0	0,0031	0,0382	0,1225	0,1148	0,1121	0,0871	0,0759	0,0500	0,0250	0	740
$h = 1/50$	0	0,0031	0,0842	0,1643	0,1592	0,1404	0,1061	0,0759	0,0500	0,0250	0	360
$h = 1/100$	0	0,0031	0,1489	0,2020	0,1727	0,1404	0,1061	0,0759	0,0500	0,0250	0	302
$h = 1/500$	0	0,0032	0,0355	0,0442	0,0452	0,0414	0,0409	0,0380	0,0340	0,0250	0	138
$h = 1/200$	0	0,0089	0,0355	0,0442	0,0452	0,0414	0,0409	0,0380	0,0340	0,0250	0	169
	6										9	8
												2,789

$\nabla$  — Метод сопряженных градиентов  
 $\Delta$  — Метод Гаусса—Зейделя при  $\omega = \omega_{\text{опт. теор.}}$

В верхних треугольниках  $\nabla$  указано число итераций, необходимых для построения решения в момент времени  $t = lk$ . Число итераций, необходимых для построения решения в тот же момент времени по методу Гаусса—Зейделя  $\Delta$ , оптимальным значением  $\omega$  (фот. теор. см. табл. 4.2), указано в нижних треугольниках  $\Delta$ .  
 В верхних треугольниках последнего столбца указано время, затраченное при использовании метода сопряженных градиентов, в нижних — метода Гаусса—Зейделя.

где

$$\tilde{J}'_i(v^n) = \begin{cases} J'_i(v^n), & \text{если } |v_i^n| < d_i, \\ J'_i(v^n), & \text{если } |v_i^n| = d_i \text{ и } J'_i(v^n)v_i^n \geq 0, \\ 0, & \text{если } v_i^n = d_i \text{ и } J'_i(v^n)v_i^n < 0. \end{cases}$$

Полученные результаты приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4. Схема, неявная в неравенствах

		$\frac{1}{\sqrt{h}}$ ECART <sub>2</sub> (точное решение — построенное решение) для различных моментов времени $t$										
$h$	$k$	$t = k$	= 0,1	= 0,2	= 0,3	= 0,4	= 0,5	= 0,6	= 0,7	= 0,8	= 0,9	= 1
1/100	1/100	10 <sup>-5</sup>	0,0031	0,0013	0,0044	0,0012	0,0063	0,0006	0,0100	0,0001	0,022	0
	1/50	10 <sup>-4</sup>	0,0032	0,0012	0,0046	0,0011	0,0065	0,0006	0,0106	0,0002	0,022	0
	1/10	10 <sup>-3</sup>	0,0038	0,0004	0,0055	0,0007	0,0079	0,0006	0,0121	0,0003	0,024	0
1/20	1/100	10 <sup>-5</sup>	0,0003	0,0005	0,0005	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003	0,0001	10 <sup>-5</sup>	0
	1/10	10 <sup>-4</sup>	0,0008	0,0010	0,0008	0,0008	0,0006	0,0004	0,0008	0,0001	10 <sup>-6</sup>	0
1/30	1/100	10 <sup>-5</sup>	0,0005	0,0002	0,0007	0,0003	0,0010	0,0003	0,0018	0,0001	0,0043	0
	1/10	10 <sup>-4</sup>	0,0005	0,0011	0,0005	0,0009	0,0009	0,0003	0,0021	0,0001	0,0046	0

*Замечание 4.1.* Схема, неявная в неравенствах, была также решена с помощью другого метода, представляющего собой адаптацию метода сопряженных градиентов и позволяющего учесть наложенные ограничения. Этот метод (см. работу Тремольера [4]) несколько лучше метода Гаусса — Зейделя, однако его программирование сложнее. ■

#### 4.1.4. Выводы из разд. 4.1

По поводу рассмотренной здесь модельной задачи можно сделать следующие замечания:

##### 1. По поводу явной схемы

- программирование здесь очень простое,
- очень важен надлежащий выбор параметров  $k$  и  $h$ :  $k/h^2 \leq \text{const} \sim 1/5$ ,
- наблюдается расходимость и переполнение для слишком больших значений  $k$ ,
- таким образом, учитывая, что оценка константы устойчивости здесь отсутствует, этот метод требует „численного нащупывания“.

**2. Схема, неявная в уравнениях**

- программирование достаточно простое (если только проектирование не доставляет затруднений),
- при одних и тех же значениях  $k$  и  $h$  схема оказывается меньше точной и работает в два раза медленнее явной схемы,
- опасность расходимости уменьшается.

**3. Схема, неявная в неравенствах**

- программирование более сложное,
- достигаемая точность<sup>1)</sup> очень хорошая, и при одних и тех же значениях  $h$  и  $k$  схема работает быстрее предшествующей и при одинаковой точности — быстрее явной схемы. ■

**4.2. Модельная эволюционная задача о трении<sup>2)</sup>**

Для  $t \in [0, T]$  рассмотрим неравенство

$$(4.5) \quad (u, v-u) + a(u, v-u) + j(v) - j(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v \in V, u \in \mathcal{V}_0,$$

где

$$\Omega = ]0, 1[, T = 1,$$

$$V = \{v | v \in H^1(\Omega), v|_{x=0} = 0\},$$

$$\mathcal{V}_0 = \{v | v \in W(0, T), v(0) = u_0 \in V, u_0 \text{ задано}\},$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx,$$

$$j(v) = g |v|_{x=1}, \quad g = 10 \left| t \left( \frac{3}{4} - t \right) \right|,$$

$$f = 20x \left( \frac{3}{2} - x \right) \left( \frac{3}{4} - 2t \right) + 40t \left( \frac{3}{4} - t \right),$$

эквивалентное следующей задаче:

$$u' - \Delta u = f \text{ в } \Omega,$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq g \text{ в точке } x = 1,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial n} + g|u| = 0 \text{ в точке } x = 1.$$

Поставленная выше задача в случае  $u_0 = 0$  имеет точное решение

$$u = 20x \left( \frac{3}{2} - x \right) t \left( \frac{3}{4} - t \right),$$

график которого приведен ниже, на рис. 4.3.

<sup>1)</sup> Наблюдаемая экспериментально.

<sup>2)</sup> Физическая интерпретация этой задачи отсутствует. — Прим. перев.

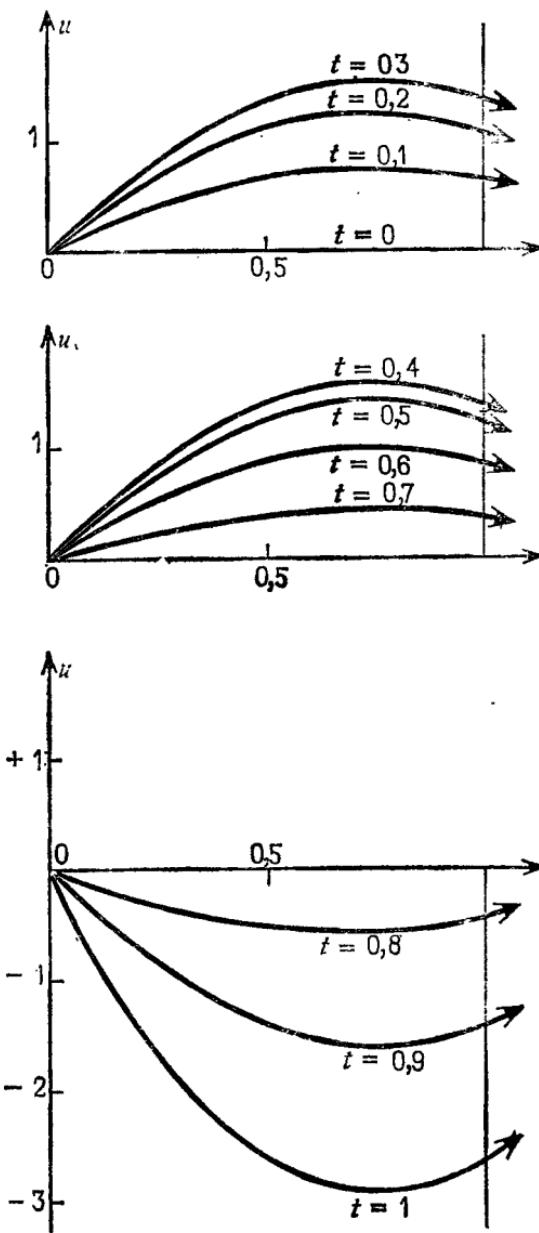


Рис. 4.3. Изменение во времени точного решения модельной эволюционной задачи о трении.

Эта задача была решена с помощью явной схемы и схемы, неявной в неравенствах. Определение решения по явной схеме на каждой итерации по временной переменной производилось методом двойственности (см. гл. 2), учитываяшим наличие недифференцируемого слагаемого  $j(v)$ .

Дискретное (по пространственной переменной на интервале  $]0, 1[$ ) решение разыскивалось в форме

$$u_h = \sum_{i=1}^M u_i \theta_h^i,$$

где  $\theta_h^i$  — характеристическая функция интервала  $\left[\left(i - \frac{1}{2}\right)h, \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right]$  для  $i = 1, \dots, M-1$ ,  $\theta_h^M$  — характеристическая функция интервала  $[1-h/2, 1[$ , где  $M$  — целое число, равное  $1/h$ .

Пространство таких функций мы будем обозначать через  $V_h$ .

Прежде чем переходить к численным результатам, мы сейчас кратко укажем способ построения используемых схем.

#### 4.2.1. Построение неявной схемы

Для упрощения рассмотрим сначала случай полуdiscретных аппроксимаций (дискретных по времени, но не пространству). Для момента времени  $t = nk$  ( $k = 1/N$ ,  $N$  — целое),  $n = 0, 1, \dots, N$ , неравенство записывается следующим образом:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{k}, v - u^{n+1} \right) + \int_{\Omega} \operatorname{grad} u^{n+1} \cdot \operatorname{grad} (v - u^{n+1}) dx - \\ & - (f^{n+1}, v - u^{n+1}) + j^{n+1}(v) - j^{n+1}(u^{n+1}) \geq 0 \\ & \forall v \in V, u^{n+1} \in V, u^0 = u_0 \text{ задано.} \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что это неравенство эквивалентно задаче

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & \text{минимизировать } \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx - (v, u^n) + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx - \\ & - k(f^{n+1}, v) + k j^{n+1}(v), v \in V, \end{aligned}$$

или, учитывая частную форму функционала  $j(v)$  (см. гл. 4) — задаче

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \max_{\substack{|p| \leq 1 \\ p \in \mathbb{R}}} \min_{v \in V} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2 dx - (v, u^n) + \frac{k}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 dx - \\ & - k(f^{n+1}, v) + k p g^{n+1} v_M. \end{aligned}$$

Произведем теперь дискретизацию по пространственной переменной (деля при этом на  $h$ , учитывая, что длина последнего

интервала разбиения равна  $h/2$ , и полагая  $u_0^{n+1} = 0$ ):

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \max_{|p| \leq 1} \min_{v_h \in V_h} L_h^n(v_h, p) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M-1} |v_i|^2 + \frac{1}{4} |v_M|^2 - \\ &- \sum_{i=1}^{M-1} v_i u_i^n - \frac{1}{2} v_M u_M^n + \frac{k}{2h^2} \sum_{i=1}^M |v_i - v_{i-1}|^2 - \\ &- \sum_{i=1}^{M-1} k f_i^{n+1} v_i - \frac{k}{2} f_M^{n+1} v_M + \frac{k}{h} p g^{n+1} v_M. \end{aligned}$$

Далее записываются условия оптимальности: найти  $u_1^{n+1}, \dots, u_M^{n+1}$  и  $p$ , такие, что

$$(4.10) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{1}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - f_i^{n+1} = 0, \\ i = 1, \dots, M-1,$$

$$(4.11) \quad \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{k} + \frac{2}{h^2} (u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}) - f_M^{n+1} + \frac{2}{h} p g^{n+1} = 0,$$

$$(4.12) \quad \left( \frac{k}{h} g^{n+1} u_M^{n+1}, q - p \right) \geq 0 \quad \forall q, |q| \leq 1, |p| \leq 1.$$

Теперь, ссылаясь на метод двойственности (полунеявный), можно указать алгоритм, позволяющий по известному  $u_h^n$  (напомним, что  $u_0^n$  задано) определить  $u_h^{n+1}$  следующим образом (через  $u_h^{n+1(i)}$  обозначается  $i$ -я итерация процесса разыскания  $u_h^{n+1}$ ):

- выбирается какой-нибудь элемент  $p^0$ , например  $p^0 = \text{sign}(u_M^n) \times 1$ , и шаг  $\rho > 0$  надлежащей длины,
- далее решается задача (4.10), (4.11) при выбранном  $p = p^0$ , что позволяет определить  $u_M^{n+1(0)}$ ,
- вычисляется  $p^1 = P[p^0 + \rho g^{n+1} u_M^{n+1(0)}]$ , где  $P$  — оператор проектирования на  $[0, 1]$ ,
- решается задача (4.10), (4.11) при  $p = p^1$  (что определяет  $u_M^{n+1(1)}$ ),
- вычисляется  $p^2 = P[p^1 + \rho g^{n+1} u_M^{n+1(1)}]$  и т. д.

Можно построить многочисленные варианты приведенных схем: например, в задаче (4.9) величину

$$\frac{1}{h^2} |u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}|^2$$

можно заменить выражением

$$\left| \frac{\partial}{\partial u_h} (u_h)_{x=1} \right|^2 = \left| \frac{1}{2h} (3u_M - 4u_{M-1} + u_{M-2}) \right|^2,$$

представляющей собой не что иное, как квадрат „квадратичной“ аппроксимации производной в точке  $x=1$ .

### 4.2.2. Построение полностью явной схемы

Заменим, что теоретически пока не обосновано, условия (4.10), (4.11), (4.12) условиями

$$(4.13) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{1}{h^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - f_i^{n+1} = 0, \\ i = 1, \dots, M-1,$$

$$(4.14) \quad \frac{u_M^{n+1} - u_M^n}{k} + \frac{2}{h^2} (u_M^n - u_{M-1}^n) - f_M^{n+1} + \frac{2}{h} pg^{n+1} = 0,$$

$$(4.15) \quad p = \text{sign}(u_M^n) \times 1.$$

### 4.2.3. Численные результаты

Определим с целью анализа качества используемых схем и аппроксимаций следующие величины:

— дискретную нормальную производную точного решения в точке  $x=1$  и момент времени  $t=nk$ ,

$$\nabla_h u_{ex}^n|_{x=1} = \frac{u(1, nk) - u(1-h, nk)}{h},$$

— дискретную нормальную производную приближенного решения в точке  $x=1$  и момент времени  $t=nk$

$$\nabla_h u_h^n|_{x=1} = \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{k},$$

— а также величины

$$\nabla = \max_{n=1, \dots, N=1/k} |\nabla_h u^n - \nabla_h u_h^n|_{x=1}, \\ U = \max_{\substack{n=1, \dots, N \\ i=1, \dots, M}} |u(ih, nk) - u_h(ih, nk)|,$$

и, наконец, отклонение точного решения от найденного приближенным способом в момент  $t=nk$ :

$$\text{ECART}_{?}^{t=nk} = \left( \sum_{i=1}^M [u(ih, nk) - u_i^n]_h^2 \right)^{1/2}.$$

Обе схемы были исследованы на ЭВМ BULL-GE-265; затраты машинного времени (включая трансляцию) измеряются в 1/6 с.

Результаты, полученные с помощью явной схемы, приведены в табл. 4.5, неявной — в табл. 4.6. Уравнения (4.10), (4.11) явной схемы решались методом Гаусса—Зейделя, использованное при этом значение параметра верхней релаксации  $\omega_{\text{opt. exp}}$  определялось экспериментально (см. табл. 4.7), параметр  $\rho$  был фиксирован и равен 0,1. Зависимости величин  $U$  и  $\Delta$  от  $h$  и  $k$  для явной и неявной схем приведены в табл. 4.8.

Таблица 4.5. Эволюционная задача о трении: явная схема

$h$	$k$	$t = k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	Время
1/100	0,004	18	$10^{16}$	$10^{11}$	$10^{16}$	$10^{21}$	$10^{25}$	$10^{39}$	$10^{35}$	$0,0111$	$0,0142$	$0,0174$	—
1/500	0,0001	0,0025	0,0012	0,0005	0,0014	0,0033	0,0056	0,0083	0,0111	$0,0142$	$0,0174$	145	
1/1000	0,000045	0,00078	0,00064	0,00025	0,00070	0,00167	0,00284	0,00415	0,00558	0,00710	0,00869	247	
1/2000	0,000011	0,00039	0,00032	0,00012	0,00035	0,00083	0,00142	0,00207	0,00276	0,00353	0,00434	463	
1/100	0,0065	$10^8$	$10^{20}$	$10^{32}$	...	...	...	...	...	...	...	...	—
1/500	0,0026	$10^{13}$	$10^{36}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—
1/1000	0,000066	0,00077	0,00064	0,00024	0,00058	0,00164	0,00280	0,00410	0,00552	0,00702	0,00859	427	
1/2000	0,000016	0,00038	0,00032	0,00012	0,00034	0,00082	0,00140	0,00205	0,00276	0,00351	0,00425	802	
1/100	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—
1/500	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—
1/1000	0,000081	$10^{16}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	—
1/2000	0,000020	0,00038	0,00032	0,00011	0,00033	0,00082	0,00139	0,00194	0,00274	0,00349	0,00427	1548	

Таблица 4.6. Эволюционная задача о трении: неявная схема

$h$	$k$	$t = k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,751	0,8	0,9	1,0	Время
1/100	90·10 <sup>-5</sup>	81·10 <sup>-4</sup>	14·10 <sup>-3</sup>	19·10 <sup>-3</sup>	23·10 <sup>-3</sup>	26·10 <sup>-3</sup>	28·10 <sup>-3</sup>	31·10 <sup>-3</sup>	32·10 <sup>-3</sup>	33·10 <sup>-3</sup>	34·10 <sup>-3</sup>	210	
1/500	36·10 <sup>-6</sup>	16·10 <sup>-4</sup>	29·10 <sup>-4</sup>	39·10 <sup>-4</sup>	47·10 <sup>-4</sup>	53·10 <sup>-4</sup>	58·10 <sup>-4</sup>	63·10 <sup>-4</sup>	64·10 <sup>-4</sup>	67·10 <sup>-4</sup>	68·10 <sup>-4</sup>	506	
1/1000	91·10 <sup>-7</sup>	81·10 <sup>-5</sup>	14·10 <sup>-4</sup>	19·10 <sup>-4</sup>	23·10 <sup>-4</sup>	26·10 <sup>-4</sup>	29·10 <sup>-4</sup>	31·10 <sup>-4</sup>	32·10 <sup>-4</sup>	33·10 <sup>-4</sup>	35·10 <sup>-4</sup>	840	
1/100	88·10 <sup>-5</sup>	79·10 <sup>-4</sup>	14·10 <sup>-3</sup>	19·10 <sup>-3</sup>	22·10 <sup>-3</sup>	25·10 <sup>-3</sup>	28·10 <sup>-3</sup>	30·10 <sup>-3</sup>	31·10 <sup>-3</sup>	32·10 <sup>-3</sup>	33·10 <sup>-3</sup>	586	
1/500	36·10 <sup>-6</sup>	16·10 <sup>-4</sup>	28·10 <sup>-4</sup>	38·10 <sup>-4</sup>	46·10 <sup>-4</sup>	52·10 <sup>-4</sup>	56·10 <sup>-4</sup>	61·10 <sup>-4</sup>	63·10 <sup>-4</sup>	65·10 <sup>-4</sup>	67·10 <sup>-4</sup>	1349	
1/1000	90·10 <sup>-7</sup>	80·10 <sup>-5</sup>	14·10 <sup>-4</sup>	19·10 <sup>-4</sup>	23·10 <sup>-4</sup>	26·10 <sup>-4</sup>	28·10 <sup>-4</sup>	30·10 <sup>-4</sup>	31·10 <sup>-4</sup>	32·10 <sup>-4</sup>	33·10 <sup>-4</sup>	2020	
1/100	82·10 <sup>-5</sup>	78·10 <sup>-4</sup>	14·10 <sup>-3</sup>	18·10 <sup>-3</sup>	22·10 <sup>-3</sup>	25·10 <sup>-3</sup>	28·10 <sup>-3</sup>	31·10 <sup>-3</sup>	32·10 <sup>-3</sup>	33·10 <sup>-3</sup>	33·10 <sup>-3</sup>	1183	
1/500	36·10 <sup>-6</sup>	15·10 <sup>-4</sup>	28·10 <sup>-4</sup>	38·10 <sup>-4</sup>	45·10 <sup>-4</sup>	51·10 <sup>-4</sup>	56·10 <sup>-4</sup>	61·10 <sup>-4</sup>	62·10 <sup>-4</sup>	64·10 <sup>-4</sup>	66·10 <sup>-4</sup>	2786	
1/1000	50·10 <sup>-7</sup>	80·10 <sup>-5</sup>	14·10 <sup>-4</sup>	19·10 <sup>-4</sup>	23·10 <sup>-4</sup>	25·10 <sup>-4</sup>	28·10 <sup>-4</sup>	30·10 <sup>-4</sup>	31·10 <sup>-4</sup>	32·10 <sup>-4</sup>	33·10 <sup>-4</sup>	4333	

1) Для значений  $t$  в этом столбце решение равно нулю, а  $J(t)$  не является «дифференцируемым».

Таблица 4.7

$h$	1/10		1/20		1/30	
$k$	1/100	1/500	1/1000	1/100	1/500	1/1000
Значение параметра $\omega = \omega_{\text{опт. эксп.}}$	1,4	1,1	1,1	1,45	1,15	1,1
Число итераций	11	6	5	20	9	7
					28	13
						10

Таблица 4.8. Относительная точность различных схем

$h$	$k$	Явная схема		Неявная схема	
		$U$	$\Delta$	$U$	$\Delta$
$1/10$	1/100	Расходимость и переполнение		$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	1/500	$2 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
	1/1000	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$
	1/2000	$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	Этот случай не рассмотрен	
$1/20$	1/100	Расходимость и переполнение		$8 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}$
	1/500	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$
	1/1000	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-5}$
	1/2000	Этот случай не рассмотрен			
$1/30$	1/100	Расходимость и переполнение		$8 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	1/500	$10^{-3}$		$2 \cdot 10^{-3}$	$10^{-5}$
	1/1000	$2 \cdot 10^{-3}$		$10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-6}$
	1/2000	Этот случай не рассмотрен			

## 4.2.4. Выводы из разд. 4.2

Для модельной эволюционной задачи о трении мы имеем следующее:

## 1. При использовании полностью явной схемы

- опасность неустойчивости,
- устойчивость соответствует примерно  $k/h^2 \leqslant 1/2$ .

## 2. Неявная схема

— имеет хорошую точность, практически не зависящую от значений  $h$  и  $k$  (заметим, однако, что точное решение здесь является „квадратичным“),

— при одной и той же точности работает намного медленнее явной схемы. ■

### 4.3. Модельная задача о деформации мембранны

Рассмотрим мембрану, жестко закрепленную на горизонтальной рамке прямоугольного очертания с постоянным натяжением  $F$  и подвергающуюся воздействию нагрузки  $q(x, t)$  (положительной или отрицательной). Перемещения этой мембранны ограничены неподвижной горизонтальной плоскостью, находящейся на расстоянии  $a$  от рамки. Определению подлежит прогиб  $u(x, t)$ .

Пусть  $\Omega$  — плоская область, ограниченная рамкой,  $\Omega_0$  — область соприкосновения мембранны с горизонтальной плоскостью преградой. Задача ставится следующим образом: для  $t \in [0, T]$  и  $u(x, 0) = u_0(x)$ , где  $u_0(x)$  задано, найти функцию  $u(x, t)$ , такую, что

$$u' - \Delta u = \frac{q(x, t)}{F} \text{ в области } \Omega - \Omega_0,$$

$$u(x, t) = a \text{ на } \Omega_0.$$

Если  $f = q/F$ ,  $a = 0$ <sup>1)</sup>, то приходим к следующей задаче<sup>2)</sup>: для  $t \in [0, T]$  решить неравенство:

$$(u' - \Delta u - f, v - u) \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \quad u \in \mathcal{K},$$

где

$$(4.16) \quad K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \text{ в } \Omega\},$$

$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in W(0, T), \quad v(0) = u_0, \quad u_0 \text{ задано}, \quad v \in K\}.$$

В примерах мы будем выбирать  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ,  $T = 1$ . Положим

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\pi t),$$

и в качестве точного решения возьмем функцию

$$u = \begin{cases} -100x(x - \alpha(t))^2y(1 - y), & x \leqslant \alpha(t), \\ 0 & , \quad x > \alpha(t), \end{cases}$$

<sup>1)</sup> То есть предполагается, что в состоянии равновесия мембрана лежит на горизонтальной плоскости.

<sup>2)</sup> Представляющей собой нестационарный вариант модельной задачи, рассмотренной в разд. 5 гл. 2.

с начальным условием

$$u_0 = \begin{cases} -100x \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y(1-y), & x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Этому решению соответствует следующая правая часть:

$$(4.17) \quad f = \begin{cases} u' - \Delta u, & x \leq \alpha(t), \\ \leq 0 & \text{произвольна, } x > \alpha(t). \end{cases}$$

Профиль точного решения в плоскости  $y = \frac{1}{2}$ ,  $x \in [0, 1]$  в моменты времени  $t = 0, 01, 0,2, \dots, 1$  показан на рис. 4.4. Стрелкой  $\leftrightarrow$  на этом же рисунке указаны области в  $\Omega$ , где

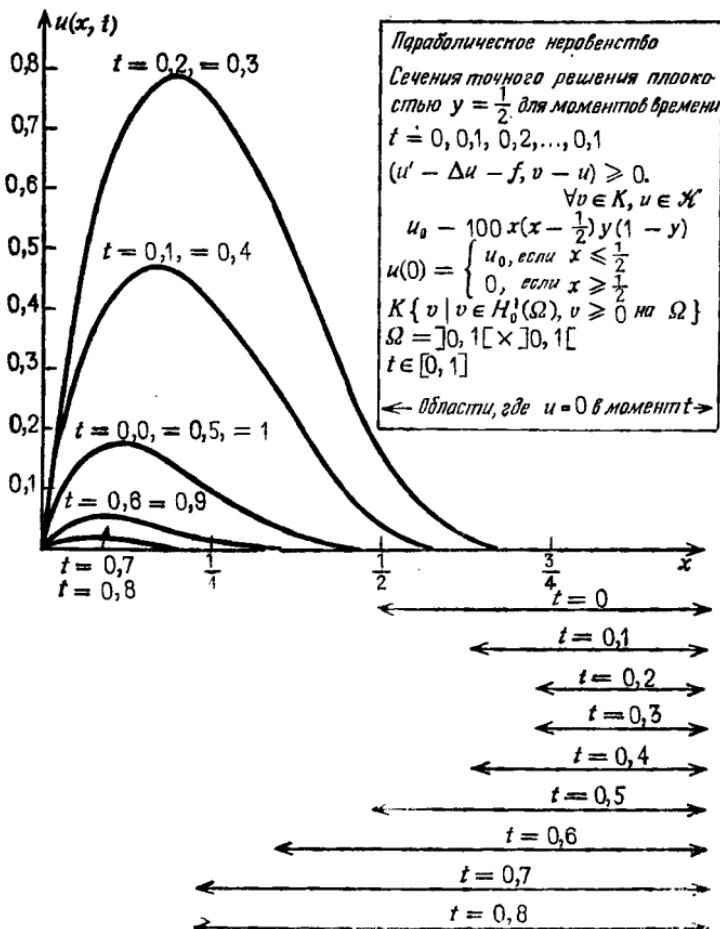


Рис. 4.4.

$u = 0$  (множества точек, в которых ограничения выполняются со знаком строгого равенства).

Дискретизация по пространственной переменной представляет собой стандартную дискретизацию пространства  $H_0^1(\Omega)$  (см. разд. 3 гл. 3):

$$h = h_x = h_y = 1/20 \text{ или } 1/40,$$

(таким образом,  $N_h = 1/h - 1$ , и мы имеем  $N_h^2$  переменных),

$u_{0,h} = \sum_{M \in \Omega_h} u_0(M) \theta_h^M$ ,  $\theta_h^M$  — характеристическая функция бруса  $\bar{\omega}_h^0(M)$ ,

$V_h$  — пространство кусочно-постоянных на  $\Omega_h$  функций, равных нулю на границе и постоянных на каждом брусе  $\bar{\omega}_h^0(M)$ ,  $M \in \Omega_h$ ,  
 $K_h = \{v_h \mid v_h \in V_h, v_h \geq 0 \text{ на } \Omega_h\}$ .

При дискретизации по временной переменной мы выбирали

$$k = 5 \cdot 10^{-4}, \quad 10^{-3}, \quad 2 \cdot 10^{-3}, \quad 5 \cdot 10^{-3}.$$

Аппроксимация функции  $f$  в точках  $t \in [nk, (n+1)k]$  имеет вид

$$f_{h,k}^n = \sum_{M \in \Omega_h} f(M, (n+1)k) \theta_h^M.$$

Так как, с другой стороны, выбор  $f \leq 0$  в точках  $x > \alpha(t)$  безразличен, мы провели эксперименты для  $f = 0$ ,  $f = -\frac{1}{2}(x - \alpha(t))$ ,  $f = -4(x - \alpha(t))$ ,  $f = -100(x - \alpha(t))$  в точках  $x > \alpha(t)$ . Полученные при этом численные результаты для всех использованных схем практически совпадают (см. работу Тремольера [4]).

Ниже численные результаты будут приведены для  $f = -\frac{1}{2}(x - \alpha(t))$ .

Аппроксимация оператора  $\Delta$  задается по формуле

$$\Delta_h u_h(x) = \sum_{i=1,2} \frac{u_h(x + \vec{h} e_i) - 2u_h(x) + u_h(x - \vec{h} e_i)}{h^2}.$$

#### 4.3.1. Схемы аппроксимации

Были исследованы следующие схемы:

S1 — Явная схема

$$\frac{u_h^{n+1/2} - u_h^n}{k} - \Delta_h u_h^n - f_{h,k}^n = 0,$$

$u_h^{n+1} = P_{K_h}[u_h^{n+1/2}]$ , где  $P_{K_h}$  — оператор проектирования по отношению к скалярному произведению  $(\cdot, \cdot)_h$

$$u_h^0 = u_{0, h}.$$

S2 — Схема неявная в уравнениях

$$\frac{u_h^{n+1/2} - u_h^n}{k} - \Delta_h u_h^{n+1/2} - f_{h, k}^n = 0,$$

$$u_h^{n+1} = P_{K_h}[u_h^{n+1/2}],$$

$$u_h^0 = u_{0, h}.$$

S3 — Схема Кранка — Николсона<sup>1)</sup>

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \Delta_h \left( \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right) - f_{h, k}^n, v_h - u_h^{n+1} \right)_h \geqslant 0$$

$$\forall v_h \in K_h, \quad u_h^{n+1} \in K_h,$$

$$u_h^0 = u_{0, h}.$$

S4 — Полностью неявная схема

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \Delta_h u_h^{n+1} - f_{h, k}^n, v_h - u_h^{n+1} \right)_h \geqslant 0$$

$$\forall v_h \in K_h, \quad u_h^{n+1} \in K_h,$$

$$u_h^0 = u_{0, h}.$$

#### 4.3.2. Численные результаты

Определение  $u_h^{n+1}$  проводилось — исключая случай применения явной схемы — по методу Гуасса — Зейделя с учетом наложенных ограничений ( $u_h^n \geqslant 0$ ), параметр релаксации при этом подсчитывается по формуле (см. работу Варги [1]<sup>2)</sup>):

$$\omega = \frac{2}{1 + \left( 1 - \left[ \frac{(1 - \pi h^2/2) 4h^2}{4 + 2h^2/k^2} \right]^2 \right)^{1/2}}.$$

Условие останова при вычислении  $u_h^{n+1}$  по методу Гуасса — Зейделя с проекцией было выбрано в виде

$$e_h = \sum_{M \in \Omega_h} |u_h^{n+1(m+1)}(M) - u_h^{n+1(m)}(M)| \leqslant 10^{-6},$$

1) Вариант этой схемы может быть получен путем замены первого из соотношений неравенством:

$$\left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} - \Delta_h \left( \frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right) - f_{h, k}^n, v_h - \frac{u_h^n + u_h^{n+1}}{2} \right)_h \geqslant 0.$$

2) Это значение параметра оптимально при отсутствии ограничений.

где  $u_h^{n+1(m)}$  — вектор, определяемый на  $m$ -й итерации,  $u_h^{n+1(m+1)}$  — на итерации номер  $m+1$ . (Одна итерация соответствует одному прохождению по всем координатам.)

Оценка эффективности той или иной схемы в каждый момент времени  $t = nk$  определяется величиной

$$\text{ECART} = \sum_{M \in \Omega_h} |u_h^n(M) - u(M; nk)|,$$

где  $u_h^n$  — определяемое численно в момент  $t = nk$  решение,  $u(M; nk)$  — точное решение для  $t = nk$  в точке  $M$ .

Было установлено, что схема S1 расходится при  $h = 1/20$  и  $k = 10^{-3}$ , начиная с первых итераций по временной переменной (получаются неверные результаты и наступает переполнение для  $t = 100$ ,  $k = 0, 1$ , в то время как  $T = 1$ ). Во втором эксперименте со значениями  $h = 1/20$ ,  $k = 5 \cdot 10^{-4}$  результаты получились удовлетворительные.

Для схемы S2 в нескольких экспериментах было установлено, что при  $h = 1/20$  наиболее выгодный шаг по времени примерно равен  $k = 10^{-3}$ ; аналогичный результат имеет место и для схем S3 и S4.

Наилучшие из полученных с помощью этих четырех схем результаты сведены в табл. 4.9.

Таблица 4.9. Сравнение различных схем

Схемы	Значения параметров	ECART											Время
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	
S1	$h = \frac{1}{20}$ $k = 0,5 \times 10^{-3}$	0,28	0,51	0,78	0,74	0,38	0,12	0,04	0,39	0,08	0,16	0,28	10 мин 5
S2		0,29	0,53	0,81	0,74	0,38	0,12	0,04	0,04	0,08	0,16	0,29	24 мин
S3		0,27	0,54	0,82	0,74	0,38	0,13	0,04	0,04	0,07	0,16	0,28	24 мин
S4		0,43	0,70	0,78	0,56	0,27	0,10	0,03	0,03	0,09	0,17	0,43	26 мин

#### 4.3.3. Выводы из разд. 4.3

При решении неравенства (4.16) с ограничениями во внутренних точках  $\Omega$  мы имеем следующие результаты:

1. При использовании явной схемы

— существует опасность расходимости и переполнения,

— корректная оценка устойчивости имеет вид  $k/h^2 \leq \frac{1}{6}$ .

- при одинаковой точности затраты времени вдвое меньше, чем при использовании других схем.
- 2. При использовании других схем
  - установлено, что схемы, неявная в уравнениях, полуявная с проекцией и полностью неявная в рассматриваемой задаче, примерно эквивалентны. ■

## 5. Введение в теорию параболических неравенств II типа

Приведем для начала два примера из теории терморегулирования.

### 5.1. Пример 1

Рассматривается сплошная среда, заполняющая область  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ , температура которой на границе регулируется таким образом, чтобы со временем внутри она не уменьшалась; это делается путем подвода тепла через границу (стенку пренебрежимо малой толщины). Задача формулируется следующим образом (см. книгу Дюво и Лионса [1]): найти решение

— уравнения теплопроводности в области  $\Omega$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in ]0, T[.$$

— при заданном начальном распределении температуры

$$(5.1) \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

и заданных граничных условиях на  $\Gamma \times ]0, T[$  (управлении)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \geqslant 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Используя формулу Грина, эту задачу можно записать следующим образом: найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую условию (5.1), и  $u \geqslant 0$  на  $\Gamma$ , такую, что почти для всех  $t \in [0, T]$  имеет место неравенство

$$(5.2) \quad (u' - \Delta u - f, v - u') \geqslant 0 \quad \forall v \geqslant 0 \text{ на } \Gamma.$$

Для того чтобы задача имела смысл, потребуем, чтобы

$$(5.3) \quad u, u' \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$$

и чтобы условие (5.1) выполнялось для всех  $v \in H^1(\Omega)$ ,  $v > 0$  на  $\Gamma$ . ■

## 5.2. Абстрактная формулировка и теорема существования

Используем снова определения и условия (1.1), (1.2), (1.3) и (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26)<sup>1</sup>), (2.28), (2.29) и примем предположение (являющееся здесь основным<sup>2</sup>)) о том, что

(5.4)  $A$  симметричен и от времени не зависит<sup>3</sup>.

Положим

$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in W(0, T), v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\},$$

$$\mathcal{K}_0 = \{v \mid v \in W_0(0, T), v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\},$$

$$\mathcal{K}_0^* = \{u \mid u \in L^2(0, T; V), u' \in \mathcal{K}_0\}.$$

Общая форма задачи, для которой мы будем строить и изучать методы аппроксимации и решения, такова:

найти  $u \in \mathcal{K}_0^*$ , такое, что

$$(5.5) \quad \int_0^T (u' + Au - f, v - u') dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}.$$

Напомним (см. работы Дюво и Лионса [1], Брезиса [1]) следующую теорему существования:

**Теорема 5.1.** Пусть для элементов  $f$  и  $u_0$  выполнены гипотезы:

$$(5.6) \quad f, f' \in L^2(0, T; H), u_0 \in V,$$

$$(5.7) \quad \begin{aligned} &\exists v_0 \in K, \text{ удовлетворяющее неравенству} \\ &(v_0 + Au_0 - f(0), v - v_0) \geqslant 0 \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Тогда существует единственная функция  $u$ , такая, что

$$(5.8) \quad u, u' \in L^\infty(0, T; V),$$

$$(5.9) \quad u(0) = u_0,$$

$$(5.10) \quad u'(t) \in K \text{ почти для всех } t \in [0, T],$$

$$(5.11) \quad (u' + Au - f, v - u') \geqslant 0 \quad \forall v \in K \text{ почти для всех } t \in [0, T];$$

<sup>1</sup>) Для упрощения мы не будем рассматривать случай, когда параболическое неравенство II типа содержит функционал  $j$ . Отметим тем не менее, что все доказательства без труда переносятся на случай  $j \neq 0$  (см., впрочем, замечание 5.4).

<sup>2</sup>) Необходимо, чтобы по меньшей мере „главная часть“ оператора  $A$  была симметричной.

<sup>3</sup>) Последнее предположение принимается только для некоторого упрощения доказательств.

кроме того,

$$(5.12) \quad u'' \in L^2(0, T; H),$$

$$(5.13) \quad u'(0) = v_0.$$

**Замечание 5.1.** Без труда доказывается, что неравенства (5.5) и (5.11) эквивалентны.  $\blacksquare$

**Замечание 5.2.** Предположение (5.7) выполнено, если

$$(5.14) \quad K \text{ ограничено в } V$$

или же если

$$(5.15) \quad -[Au_0 - f(0)] \in K. \blacksquare$$

**Замечание 5.3.** Можно доказать, что имеет место неравенство

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u'(t)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left\{ a(v_0, v_0) + \int_0^T |f'(t)|^2 dt \right\}.$$

Этот результат позволяет утверждать, что, если элемент  $v_0$  существует (см. замечание 5.2), то  $u'$  ограничена в  $K$  по норме пространства  $L^2(0, T; V)$ , а также  $L^\infty(0, T; V)$ . Таким образом, нетрудно видеть, что в случае, когда  $K$  неограничено, можно определить такое выпуклое множество

$$K_R = \{v \mid v \in K, \|v\| \leq R < +\infty\},$$

где  $R$  — достаточно большое число, что задача (5.11) на множестве  $K_R$  будет иметь то же решение, что и исходная задача. Следовательно, без ограничения общности (но обязательно при выполнении гипотезы (5.7)) всегда можно считать, что

$$(5.16) \quad K \text{ ограничено в } V.$$

Это замечание будет полезным при исследовании методов аппроксимации.  $\blacksquare$

**Замечание 5.4.** Можно было бы рассматривать также решение неравенств более общих (по сравнению с неравенством (5.5)):

$$(5.17) \quad \int_0^T (u' + Au - f, v - u') dt + \int_0^T [j(v) - j(u')] dt \geq 0$$

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{K}_0,$$

где  $j$  — функционал типа (2.27).  $\blacksquare$

## 6. Аппроксимация параболических неравенств II типа

### 6.1. Основные гипотезы, необходимые для построения аппроксимаций

Для изучения аппроксимаций мы снова примем все предположения и обозначения разд. 3.1 и, кроме того, предположим, что

$$(6.1) \quad a_h(u_h, v_h) \text{ симметрична,}$$

$K_h$  ограничено в  $V_h$  независимо от  $h$ , т. е.

$$(6.2) \quad \|v_h\|_h \leq C \quad \forall v_h \in K_h \text{ и } \forall h, h \rightarrow 0.$$

(По поводу последнего предположения см. замечание 5.3.)

Будем использовать результаты разд. 3.1.3 применительно к множествам  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{K}_0^*$ .

Из предположения (5.6) следует, что  $f \in \mathcal{C}^0(0, T; H)$ , и мы будем полагать:

$$f_{h,k} = \sum_{i=0}^M f_h^i \chi_k^i,$$

как это было сделано и в разд. 3.1.6, где  $f_h^i$  определяются по формуле (3.27'). ■

### 6.2. Схема аппроксимации параболических неравенств II типа

Принимая все упомянутые выше гипотезы, изучим аппроксимацию неравенства

$$(6.3) \quad (u' + Au - f, v - u') \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{K}_0^*, \quad \text{почти для всех } t \in [0, T],$$

задачей

$$(6.4) \quad (\delta u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_h - \delta u_{h,k})_h \geq 0 \\ \forall v_h \in K_h, \quad \delta u_{h,k} \in K_h, \quad t \in [0, T], \quad u_{h,k}(0) = u_{0,h},$$

где

$$u_{h,k}^\theta(t) = u_{h,k}(t) + \theta [u_{h,k}(t+k) - u_{h,k}(t)] = u_{h,k}(t) + k\theta \delta u_{h,k}(t), \\ \theta \in [0, 1].$$

В „локальной“ форме задача (6.4) записывается следующим образом: найти  $u_h^1, u_h^2, \dots, u_h^N$ , такие, что

$$(6.5) \quad \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h [u_h^i + \theta (u_h^{i+1} - u_h^i)] - f_h^i, v - \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \right)_h \geq 0 \\ \forall v \in K, \quad \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \in K, \quad u_h^0 = u_{0,h}.$$

Заметим, что неравенство (6.5) можно представить в форме

$$(6.6) \quad ((I_h + \theta k A_h) \delta_h^i + \theta A_h u_h^i - f_h^i, v - \delta_h^i)_h \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

где

$$(6.7) \quad \delta_h^i = \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k}.$$

Это неравенство имеет единственное решение  $\delta_h^i$ ; таким образом, перебирая следующие друг за другом значения индекса  $i$ , заключаем, что все

$$u_h^{i+1}, i = 0, 1, \dots, (u_h^{i+1} = u_h^i + k \delta_h^i)$$

существуют и определяются единственным образом.

Отметим также, что в силу симметрии оператора  $A_h$  элементы  $u_h^{i+1}, i = 0, 1, \dots$  определяются единственным образом из решений  $N$  соответствующих задач минимизации ( $i = 0, \dots, N-1$ )

$$(6.8) \quad \begin{aligned} & \text{минимизировать } \frac{1}{2} |\delta_h^i|_h^2 + \frac{1}{2} \theta k (A_h \delta_h^i, \delta_h^i)_h - \\ & - (\theta A_h u_h^i - f_h^i, \delta_h^i)_h \text{ при ограничениях } \delta_h^i = \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \in K_h, \end{aligned}$$

где  $u^i$  для значений ( $i \geq 1$ ) представляют собой решения предыдущей задачи,  $u_h^0 = u_{h,0}$ . Полагаем  $u_h^{i+1} = u_h^i + k \delta_h^i$ .

Будем использовать следующую терминологию:

- явная схема, если  $\theta = 0$ ,
- схема Кранка — Николсона, если  $\theta = \frac{1}{2}$ ,
- неявная схема, если  $\theta = 1$ .

**Замечание 6.1.** Аналогичным образом при решении неравенства

$$(u' + Au - f, v - u') + j(v) - j(u') \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{X}_0, u \in \mathcal{X}_0^*$$

(где  $j(v)$  определено по формуле (2.27)) приходим к следующей схеме (мы опускаем индекс  $h$ ):

$$\left( \frac{u^{i+1} - u^i}{k} + A [u^i + \theta (u^{i+1} - u^i)] - f^i, v - \frac{u^{i+1} - u^i}{k} \right) + \\ + j(v) - j \left( \frac{u^{i+1} - u^i}{k} \right) \geq 0 \quad \forall v \in K, \frac{u^{i+1} - u^i}{k} \in K,$$

или, учитывая симметрию оператора  $A$ , к задаче

$$\text{минимизировать } \frac{1}{2} |\delta_h^i|_h^2 + \theta k (A_h \delta_h^i, \delta_h^i) - (A_h u_h^i - f_h^i, \delta_h^i)_h + j(\delta_h^i)$$

при тех же ограничениях, что и в задаче (6.8). ■

**Замечание 6.2.** Таким же образом, как это было сделано для параболических неравенств I типа, можно было бы определить

и здесь схемы расщепления:

$$\frac{\tilde{u}_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h [u_h^i + \theta (\tilde{u}_h^{i+1} - u_h^i)] - f_h^i = 0,$$

$$u^{i+1} = u^i + k P_{K_h} \left[ \frac{\tilde{u}_h^{i+1} - u_h^i}{k} \right],$$

где  $P_{K_h}$  — оператор проектирования на множество  $K_h$  в смысле нормы  $(\cdot, \cdot)_h$ . ■

### 6.3. Сходимость решений приближенных неравенств

Мы исследуем сейчас схему (6.5), которую перепишем еще раз (опуская для простоты записи индекс  $h$ ):

$$(6.9) \quad (\delta^i + A u^{i+1} - f^i, v - \delta^i) \geq 0 \quad \forall v \in K, \quad \delta^i \in K, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

где

$$u^0 = u_0 \text{ задано},$$

$$\delta^i = \frac{u^{i+1} - u^i}{k},$$

$$u^{i+1} = u^i + \theta [u^{i+1} - u^i].$$

Кроме того, используем следующие обозначения:

$$\delta^{i+1} = \frac{u^{i+1+\theta} - u^{i+1}}{k} = \delta^i + \theta [\delta^{i+1} - \delta^i],$$

$$\gamma^i = \frac{\delta^{i+1} - \delta^i}{k} = \frac{u^{i+2} - 2u^{i+1} + u^i}{k^2},$$

$$g^i = \frac{f^{i+1} - f^i}{k}.$$

#### 6.3.1. Устойчивость

Докажем, что имеет место

**Теорема 6.1.** *Если  $(h, k) \rightarrow 0$*

— произвольно, если  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ ,

— подчиняясь условию устойчивости

$$(6.10) \quad C k S(h)^2 \leq 1 - \beta, \quad \text{если } 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \\ (\beta \text{ фиксировано на } ]0, 1[),$$

то для всех  $n = 0, 1, \dots, N$

$$(6.11) \quad \|u_h^n\|_h \leq C,$$

$$(6.12) \quad \left\| \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k} \right\|_h \leq C$$

и

$$(6.13) \quad \sum_{i=1}^n k \left| \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} \right|_h^2 \leq C.$$

*Доказательство.* Запишем неравенство (6.9) для значения  $(i+1)$

$$(6.14) \quad (\delta^{i+1} + Au^{i+1+\theta} - f^{i+1}, v - \delta^{i+1}) \geq 0 \quad \forall v \in K, \delta^{i+1} \in K.$$

Полагая в неравенстве (6.9)  $v = \delta^{i+1}$ , в (6.14)  $v = \delta^i$  и складывая, получаем

$$|\delta^{i+1} - \delta^i|^2 + a(u^{i+1+\theta} - u^{i+\theta}, \delta^{i+1} - \delta^i) \leq (f^{i+1} - f^i, \delta^{i+1} - \delta^i),$$

или, деля на  $k$ ,

$$k|\gamma^i|^2 + a(\delta^{i+\theta}, \delta^{i+1} - \delta^i) \leq k \left( \frac{f^{i+1} - f^i}{k}, \gamma^i \right) \leq \frac{k}{2}|g^i|^2 + \frac{k}{2}|\gamma^i|^2.$$

Умножая это неравенство на 2, найдем

$$k|\gamma^i|^2 + 2a(\delta^i, \delta^{i+1} - \delta^i) + 2a(\delta^{i+1} - \delta^i) \leq k|g^i|^2,$$

или, учитывая симметрию формы  $a$ ,

$$(6.15) \quad k|\gamma^i|^2 + a(\delta^{i+1}) - a(\delta^i) + (2\theta - 1)a(\delta^{i+1} - \delta^i) \leq k|g^i|^2.$$

Далее будем различать два случая:

I случай:  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ .

Так как слагаемое  $(2\theta - 1)$  неотрицательно, его можно опустить, и складывая получающиеся из (6.15) неравенства для значений  $i = 0, \dots, N-1$ , находим

$$\sum_{i=0}^n k|\gamma^i|^2 + a(\delta^{n+1}) \leq \sum_{i=0}^n k|g^i|^2 + a(\delta^0).$$

Из предположения (6.2) следует, что  $a(\delta^0) \leq C$ . В силу гипотезы (5.6) и выбора (3.27') отсюда сразу вытекает утверждение (6.13). Используя коэрцитивность формы  $a(., .)$ , получаем неравенство (6.12). Оценка (6.11) представляет собой следствие неравенства (6.12) и  $a(\delta^0) \leq C$ , если только учесть, что

$$u_h^{n+1} = u_h^0 + k \sum_{i=0}^n \delta^i.$$

II случай:  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ .

Используем оценку

$$a(\delta^{i+1} - \delta^i) = h^2 a(\gamma^i) \leq C k^2 S(h^2) |\gamma^i|^2,$$

из которой следует, что

$$(2\theta - 1) a(\delta^{i+1} - \delta^i) \geq (2\theta - 1) C k^2 S(h^2) |\gamma^i|^2,$$

из неравенства (6.15) теперь вытекает, что

$$(6.16) \quad k[1 + (2\theta - 1) C k S(h^2)] |\gamma^i|^2 + a(\delta^{i+1}) - a(\delta^i) \leq k |g^i|^2.$$

Отсюда, предполагая, что при  $2\theta - 1 < 0$  выполнено условие

$$1 - C k S(h^2) \geq \beta > 0, \quad \beta \text{ фиксировано на } ]0, 1[,$$

получаем

$$\beta k |\gamma^i|^2 + a(\delta^{i+1}) - a(\delta^i) \leq k |g^i|^2,$$

суммируя эти неравенства и действуя таким же образом, как и в первом случае, доказываем утверждения (6.11), (6.12), (6.13). ■

*Замечание 6.3.* В случае, когда для  $\forall h, k \rightarrow 0$  неравенство (6.9) для значения  $i = 0$  в действительности представляет собой уравнение (ограничения не работают) и мы имеем

$$\delta^0 + A u^{0+\theta} - f^0 = 0,$$

откуда следует оценка

$$\|\delta^0\| = \|A(u^0 + \theta k \delta^0) - f^0\| \leq \|A u^0\| + \theta k \|A \delta^0\| + \|f^0\|,$$

и если учесть, что  $\|A u^0\| \leq C$ ,  $\|A \delta^0\| \leq C$ , то мы получаем неравенство

$$(1 - \theta k C) \|\delta^0\| \leq C,$$

так что для достаточно малых значений  $k$  величина  $\delta^0$  ограничена по норме пространства  $V_h$  независимо от  $h$  и  $k$  и, следовательно, предположение (6.2) на самом деле оказывается ненужным. ■

### 6.3.2. Слабая сходимость

Если  $h, k \rightarrow 0$  (таким образом, что в случае  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$  выполнено условие (6.10)), то в силу теоремы 6.1 существует подпоследовательность, обозначаемая снова через  $u_{h,k}$ , и элементы (6.17)  $u \in L^\infty(0, T; V)$ ,  $v \in L^\infty(0, T; V)$ ,  $w \in L^2(0, T; H)$ ,  $\xi \in V$ ,

такие, что

$$(6.18) \quad p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; F),$$

$$q_h u_{h,k} \rightarrow u \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; H),$$

$$(6.19) \quad p_h \delta u_{h,k} \rightarrow \sigma v \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; F),$$

$$q_h \delta u_{h,k} \rightarrow v \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; H),$$

$$(6.20) \quad q_h \delta^2 u_{h,k} \rightarrow w \text{ слабо в } L^2(0, T; H),$$

$$(6.21) \quad p_h u_h^N \rightarrow \sigma \xi \text{ слабо в } F,$$

$$q_h u_h^N \rightarrow \xi \text{ слабо в } H.$$

Таким же образом, как и в лемме 3.1, доказывается, что (см. работу Вио [1])

$$(6.22) \quad v = u', \quad w = u'', \quad \xi = u(T), \quad u' \in K,$$

так что  $u$  удовлетворяет условиям (5.8), (5.9), (5.10), (5.12).

Докажем, что элемент  $u$  удовлетворяет неравенству (5.11).

Итак, пусть  $v \in \mathcal{K}$  и  $v_{h,k} = \sum_{i=0}^N v_h^i \chi_k^i$  — последовательность, аппроксимирующая элемент  $v$  в смысле, указанном в лемме 3.2. Положим в неравенстве (6.9)  $v = v_h^k$ , просуммируем по  $i$  от 0 до  $N-1$  и умножим результат на  $k$ ; в итоге получим (опуская временно индекс  $h$ )

$$(6.23) \quad \sum_{n=0}^{N-1} [k(\delta^i, v^i) + ka(u^{i+0}, v^i) - k(f^i, v - \delta^i)] \geq \sum_{i=0}^{N-1} k|\delta^i|^2 + X,$$

где

$$(6.24) \quad X = \sum_{i=0}^{N-1} ka(u^{i+0}, \delta^i).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=0}^{N-1} a(u^{i+0}, u^{i+1} - u^i) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} [a(u^{i+1}) - a(u^i) + (2\theta - 1)a(u^{i+1} - u^i)] = \\ &= \frac{1}{2} a(u^N) - \frac{1}{2} a(u^0) + Y. \end{aligned}$$

где

$$Y = (2\theta - 1) \sum_{i=0}^{N-1} a(u^{i+1} - u^i).$$

Будем различать два случая (снова будем использовать индекс  $h$ ):

I случай:  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ .

Тогда

$Y \geq 0$ , откуда следует, что  $X \geq \frac{1}{2} a_h(u_h^N) - \frac{1}{2} a_h(u_h^0)$ ,

$$(6.25) \quad \liminf_{n, k \rightarrow 0} X \geq \frac{1}{2} a(u(t)) - \frac{1}{2} a(u^0).$$

Используя оценки (6.23), (6.25), гипотезы о консистентности, относящиеся к  $\mathcal{K}$ ,  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $f$ , и установленные выше результаты (6.18), (6.19), получаем неравенство

$$\int_0^T (u' + Au - f, v - u') dt \geq 0,$$

справедливое для всех  $v \in \mathcal{K}$ , из которого вытекает, что  $u$  — решение задачи (5.5) и (6.3).

II случай:  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ .

В этом случае  $Y \leq 0$ , однако полученный выше результат остается в силе при  $Y \rightarrow 0$ .

С другой стороны,

$$(6.26) \quad a_h(u_h^{i+1} - u_h^i) \leq Ck^2 a_h(\delta_h^i) \leq (\text{в силу (6.12)}) \leq Ck^2.$$

Отсюда следует, что

$$(6.27) \quad |Y| \leq kC \sum_{i=0}^N k \leq kC,$$

так что в самом деле выполняется условие  $Y \rightarrow 0$ .

Для завершения доказательства заметим, что из единственности решения  $u$  вытекает справедливость утверждений (6.24), ..., (6.27) для всей последовательности.

Теперь можно сформулировать следующую теорему:

**Теорема 6.2.** Если  $h, k \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ , причем

$CkS(h)^2 \leq 1 - \beta$ ,  $\beta$  фиксировано на  $[0, 1]$ ,  
то

$$(6.28) \quad \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} p_h u_{h,k} &\rightarrow \sigma u \\ p_h \delta u_{h,k} &\rightarrow \sigma u' \end{aligned} \right\} \text{*-слабо в } L^\infty(0, T; F), \\ & \left. \begin{aligned} q_h u_{h,k} &\rightarrow u \\ q_h \delta u_{h,k} &\rightarrow u' \end{aligned} \right\} \text{*-слабо в } L^\infty(0, T; H), \\ & q_h \delta^2 u_{h,k} \rightarrow u'' \text{*-слабо в } L^2(0, T; H), \\ & p_h u_h^N \rightarrow \sigma u(T) \text{ слабо в } F, \\ & q_h u_h^N \rightarrow u(T) \text{ слабо в } H. \end{aligned} \blacksquare$$

**Замечание 6.4.** Заметим, что мы доказали существование по крайней мере одного решения задачи (5.5), (6.3). ■

### 6.3.3. Сильная сходимость

Мы сейчас докажем (см. работу Вио [1]) следующий результат.

**Теорема 6.3.** Если  $h, k \rightarrow 0$ ,  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ , причем

$$(6.29) \quad CkS(h)^2 \leq 1 - \beta, \quad \beta \text{ фиксировано на } ]0, 1[, \\ \text{то}$$

$$(6.30) \quad p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{сильно в } L^\infty(0, T; F), \\ p_h \delta u_{h,k} \rightarrow \sigma u' \end{array} \right.$$

$$(6.31) \quad p_h \delta u_{h,k} \rightarrow \sigma u' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{сильно в } L^\infty(0, T; F), \\ p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \end{array} \right.$$

$$(6.32) \quad q_h u_{h,k} \rightarrow u \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{сильно в } L^\infty(0, T; H), \\ q_h \delta u_{h,k} \rightarrow u' \end{array} \right.$$

$$(6.33) \quad q_h \delta u_{h,k} \rightarrow u' \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{сильно в } L^\infty(0, T; H). \\ \blacksquare \end{array} \right.$$

*Доказательство теоремы 6.3.* Предположим здесь, что форму  $a(\cdot, \cdot)$  можно „распространить“ на  $F$ ; другими словами, можно определить  $\tilde{a}$  на  $F \times F$ , такую, что

$$\tilde{a}(\sigma u, \sigma v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V,$$

обладающую свойством симметрии и сохраняющую на  $F$  те же константы коэрцитивности  $\alpha$  и непрерывности  $C$ , которыми характеризуется форма  $a(\cdot, \cdot)$  (см. ниже замечание 6.5); кроме того, выберем

$$a_h(u_h, v_h) = \tilde{a}(p_h u_h, p_h v_h).$$

Положим (для упрощения записи индексы  $h$  и  $k$  мы иногда будем опускать)

$$(6.34) \quad X(t) = v \int_0^t |q_h \delta u_{h,k} - u'|^2 ds + \frac{1}{2} \tilde{a}(\sigma u(t) - p_h u_{h,k}(t), \mathbf{1})$$

где

$$v = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta \geq \frac{1}{2}, \\ 1 - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) CkS(h)^2, & \text{если } \theta < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

так что  $v \rightarrow 1$ , если  $h \rightarrow 0$ .

Величину  $X(t)$  запишем в виде

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t) + X_3(t),$$

---

<sup>1)</sup>  $\tilde{a}(v) = \tilde{a}(v, v), v \in F$ .

где

$$X_1(t) = v \int_0^t |u'|^2 ds + \frac{1}{2} a(u(t)),$$

$$X_2(t) = -2v \int_0^t (q_h \delta u_{h,k}, u') ds - \tilde{a}(\sigma u(t), p_h u_h(t)),$$

$$X_3(t) = v \int_0^t |q_h \delta u_{h,k}|^2 ds + \frac{1}{2} a_h(u_h(t)).$$

Исследуем поочередно эти три слагаемых с тем, чтобы показать, что  $X(t) \rightarrow 0$ .

1-е слагаемое:  $X_1(t)$ .

Из того, что  $u, u' \in L^\infty(0, T; V)$ ,  $u(0) = u_0$ , и симметрии  $a(u, v)$  получаем, что

$$\frac{1}{2} a(u(t)) = \frac{1}{2} a(u_0) + \int_0^t a(u, u') ds,$$

следовательно,

$$X_1(t) = \int_0^t v [|u'|^2 + a(u, u')] ds + \frac{1}{2} a(u_0).$$

2-е слагаемое:  $X_2(t)$ .

Положим  $\tilde{u}_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} u(i+1)k \chi_k^i$ . Нетрудно доказать, что для  $t \in [nk, (n+1)k]$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\sigma u(t), p_h u_{h,k}(t)) &= \tilde{a}(\sigma u_0, p_h u_h^0) + \int_0^t \tilde{a}(\sigma u', p_h u_{h,k}) ds + \\ &+ \int_0^k \tilde{a}(\sigma \tilde{u}_k, p_h \delta_k u_{h,k}) ds, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} X_2(t) &= -2v \int_0^t (q_h \delta_k u_{h,k}, u') ds - \int_0^t \tilde{a}(\sigma u', p_h u_{h,k}) ds - \\ &- \int_0^{nk} \tilde{a}(\sigma \tilde{u}_k, p_h \delta_k u_{h,k}) ds - \tilde{a}(\sigma u_0, p_h u_h^0). \end{aligned}$$

Замечая, что  $\tilde{u}_k \rightarrow u$  сильно в  $L^2(0, T; V)$ , используя свойства (6.28) и учитывая условие (6.29), после перехода к пре-

делу имеем

$$X_2(t) \rightarrow -2 \int_0^t [ \| u' \|^2 + a(u', u) ] ds - a(u_0).$$

3-е слагаемое:  $X_3(t)$ .

В силу леммы 3.2 можно построить последовательность  $v_{h,k} \in L^2(0, T; K)$ , аппроксимирующую элемент  $u'$  в следующем смысле:

$$(6.35) \quad \begin{aligned} q_h v_{h,k} &\rightarrow u' \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \\ p_h v_{h,k} &\rightarrow \sigma u' \text{ сильно в } L^2(0, T; F), \\ q_h \delta v_{h,k} &\rightarrow u'' \text{ сильно в } L^2(0, T; V'). \end{aligned}$$

Внося эту последовательность в дискретное неравенство (6.4) и интегрируя, получаем (индекс  $k$  мы опускаем)

$$(6.36) \quad \begin{aligned} &\int_0^T [ \| \delta u_h \|^2_h + a_h(u_h^0, \delta u_h) ] ds \leqslant \\ &\leqslant \int_0^t [ (\delta u_h + A_h u_h^0, v_h)_h - (f_h, v_h - \delta u_h)_h ] ds. \end{aligned}$$

Без труда доказывается, что для  $t \in [nk, (n+1)k]$  имеет место равенство

$$(6.37) \quad \begin{aligned} &\int_0^t a_h(u_h^0, \delta u_h) ds = \frac{1}{2} [ a_h(u_h(t)) - a_h(u_h^0) ] + \\ &+ k \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \int_0^{nk} a_h(\delta u_h, \delta u_h) ds + \int_{nk}^t a_h(u_h^0, \delta u_h) ds. \end{aligned}$$

Используя в случае  $\theta < \frac{1}{2}$  оценку

$$0 \geqslant k \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \int_0^{nk} a_h(\delta u_h, \delta u_h) ds \geqslant \left( \theta - \frac{1}{2} \right) C k S(h)^2 \int_0^t \| \delta u_h \|^2_h ds,$$

олучаем, что

$$(6.38) \quad \begin{aligned} &\int_0^t [ \| \delta u_h \|^2_h + a_h(u_h^0, \delta u_h) ] ds \geqslant \frac{1}{2} [ a_h(u_h(t)) - a_h(u_h^0) ] + \\ &+ v \int_0^t \| \delta u_h \|^2_h ds + \int_{nk}^t a_h(u_h^0, \delta u_h) ds. \end{aligned}$$

Объединяя неравенства (6.36) и (6.38), находим

$$\begin{aligned} X_3(t) \leqslant & \int_0^t [(\delta u_h + A_h u_h^0, v_h)_h - (f_h, v_h - \delta u_h)_h] ds + \\ & + \frac{1}{2} a_h(u_h^0) - \int_{nk}^t a_h(u_h^0, \delta u_h) ds. \end{aligned}$$

Замечая, что последний интеграл в правой части полученного неравенства стремится к 0, и используя гипотезы (6.28), (6.35) о сходимости, после перехода к пределу получаем

$$\limsup_{n, k \rightarrow 0} X_3(t) \leqslant \int_0^t [|u'|^2 + a(u, u')] ds + \frac{1}{2} a(u^0).$$

Объединив установленные для  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  результаты, имеем  $X(t) \rightarrow 0$  при  $h, k \rightarrow 0$  (при соблюдении условия (6.29)).

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} a_h \delta u_{h,k} &\rightarrow u' \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \\ p_h u_h(t) &\rightarrow \sigma u(t) \text{ сильно в } F \text{ почти для всех } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

По теореме Лебега из  $*$ -слабой сходимости в  $L^\infty(0, T; F)$  и сходимости по норме пространства  $F$  последовательности  $p_h u_{h,k}$  к элементу  $\sigma u$  вытекает

$$p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u \text{ сильно в } L^2(0, T; F).$$

Кроме того, нетрудно доказать, что для  $t \in [nk, (n+1)k[$  имеет место равенство (мы опускаем индекс  $k$ )

$$\begin{aligned} \|\sigma u(t) - p_h u_h(t)\|_F^2 &= \|\sigma u_0 - p_h u_h^0\|_F^2 + \\ &+ 2 \int_0^t ((\sigma u', \sigma u - p_h u_h))_F ds - k \int_0^{nk} \|\delta u_h\|_h^2 ds + \\ &+ 2 \int_0^{nk} ((p_h \delta u_h(s), p_h u_h(s+k) - \tilde{u}_k(s+k))) ds, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} u(ik) \chi_k^i,$$

а также, что

$$\begin{aligned} |u'(t) - q_h \delta u_h(t)|^2 &= |v_0 - q_h \delta u_h^0|^2 + \\ &+ 2 \int_0^{nk} (u'', u' - q_h \delta u_h) ds - k \int_0^{nk} |\delta^2 u_h|^2 ds + \\ &+ 2 \int_0^{nk} (q_h \delta^2 u_h(s), q_h \delta u_h(s+h) - \tilde{u}'_k(s+k)) ds, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{u}'_k(t) = \sum_{t=0}^{N-1} u'(ik) \chi_k^t.$$

Из этих двух формул вытекает, что

$$\begin{aligned} p_h u_{h,k} &\rightarrow \sigma u \text{ сильно в } L^\infty(0, T; F), \\ q_h \delta u_{h,k} &\rightarrow u' \text{ сильно в } L^\infty(0, T; H), \end{aligned}$$

и тем самым доказательство теоремы завершается. ■

*Замечание 6.5.* В общем случае, когда  $V$  обладает тем свойством, что  $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$ , в качестве  $F$  выбирается пространство  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N$  ( $\Omega$  — открытая ограниченная область в  $\mathbb{R}^N$ ), и если

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

то полагаем

$$\tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_{\Omega} u_0 v_0 \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_i v_i \, dx,$$

где  $u = (u_0, u_1, \dots, u_N) \in F$ ,  $\tilde{v} = (v_0, v_1, \dots, v_N) \in F$ , и для  $u \in V$  определяет оператор

$$\sigma u = \left( u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Если

$$p_h: v_h \in V_h \rightarrow (v_h|_{\Omega}; \nabla_{h,i} v_h|_{\Omega}, \dots, \nabla_{h,N} v_h|_{\Omega})$$

и

$$\|v_h\|_h = \|p_h v_h\|_F,$$

то легко проверить, что форма  $\tilde{a}(,)$  удовлетворяет всем требованиям, сформулированным в начале доказательства теоремы 6.3. ■

## 7. Численное решение параболических неравенств II типа

В этом разделе мы приведем некоторые результаты, относящиеся к проблеме численного решения двух задач, сформулированных в разд. 5.

Напомним прежде всего, что дискретизация этих задач приводит к следующим неравенствам:

$$(7.1) \quad \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} + A_h [u_h^i + \theta (u_h^{i+1} - u_h^i)] - f_h^i, v_h - \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \right) \right)_h \geqslant 0$$

$$\forall v_h \in K_h, \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \in K_h, \quad i = 0, 1, \dots, N = \frac{T}{k},$$

$$u_h^0 = u_{0,h} \text{ задано; } \theta \in [0, 1].$$

Эти неравенства можно переписать еще и так: для  $i = 0, 1, \dots$  найти решение  $w_h^{i+1}$  неравенства

$$(7.2) \quad (w_h^{i+1} + A_h [u_h^i + k\theta w_h^{i+1}] - f_h^i, v_h - w_h^{i+1})_h \geqslant 0$$

$$\forall v_h \in K_h, w_h^{i+1} \in K_h,$$

и определить

$$(7.3) \quad u_h^{i+1} = u_h^i + k w_h^{i+1}.$$

Полагая  $\tilde{f}_h^i = A_h u_h^i - f_h^i$ , перепишем (7.2) в виде

$$(7.4) \quad ((I_h + k\theta A_h) w_h^{i+1} - \tilde{f}_h^i, v_h - w_h^{i+1})_h \geqslant 0 \quad \forall v_h \in K_h, w_h^{i+1} \in K_h,$$

или в виде (учитывая симметрию оператора  $A_h$ )

$$(7.5) \quad \text{минимизировать } J_h(w_h) = \frac{1}{2} ((I_h + k\theta A_h) w_h, w_h)_h - (\tilde{f}_h^i, w_h),$$

$$w_h \in K_h;$$

решение последней задачи дает нам  $w_h^{i+1}$ .

В двух следующих ниже примерах задача (7.5) будет решена методом релаксации с ограничениями (см. разд. 1.2 гл. 2). Отметим, что оптимальное значение параметра релаксации связано непосредственно с оператором  $(I_h + \theta k A_h)$  и зависит, кроме того, от вида областей, в которых ограничения выполняются со знаком строгого равенства (а также, очевидно, от параметра  $h$ ). В численных расчетах, о которых речь пойдет ниже, значение  $\theta$  выбиралось по критерию минимума затрат машинного времени. Зависимость принятых значений  $\theta$  от параметра  $\lambda = \theta k$  показана на рис. 7.1.

При оценке качества тех или иных схем и анализе условий устойчивости мы будем использовать задачи, которые допускают точные аналитические решения.

В примерах I и II будем полагать

$$\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[, \quad T = 0, 1,$$

$f(x, t)$  и  $u(x, t)$  — непрерывные функции.

Точное описание дискретизации области  $\Omega$  для каждой из рассматриваемых задач будет дано отдельно; положим по определению

$$f_h = \sum_{M \in \Omega_h} f[M, ik] \theta_h^M,$$

$$u_{0, h} = \sum_{M \in \Omega_h} u(M, 0) \theta_h^M,$$

где  $\theta_h^M$  — характеристическая функция бруса  $\bar{\omega}_h^0(M)$ .

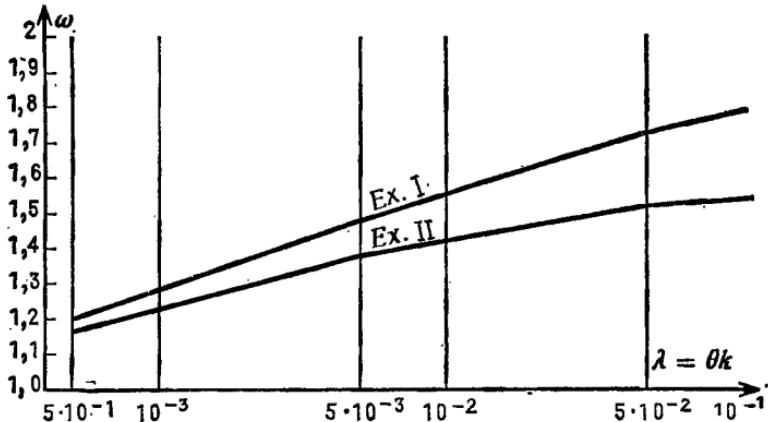


Рис. 7.1. Зависимость параметра релаксации  $\omega$  от  $\lambda = \theta k$  (для двух рассмотренных примеров).

Исследование будет проведено при следующих данных:

$$h = 1/20,$$

$k$  заключено между  $10^{-1}$  и  $2 \cdot 10^{-4}$ ,

$0=0$  (явная схема),  $\theta = \frac{1}{2}$  (схема типа Кранка—Николсона),  $0=1$  (неявная схема). ■

Вычисления проводились на ЭВМ СII10070. ■

## 7.1. Решение задачи I

В этой задаче

$$(7.6) \quad V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega),$$

$$K = \{u \in H^1(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ почти для всех } x \in \Gamma\}.$$

В области  $\Omega = ]0,1[ \times ]0,1[$  рассмотрим сетку

$$R_h = \{M = (m_1 h, m_2 h), \quad m_1, m_2 = 0, 1, \dots, 20 = 1/h\}$$

и определим

$$\Omega_h = \{M \in R_h \mid \bar{\omega}_h^1(M) \cap \Omega \neq \emptyset\},$$

$$\Gamma_h = \{M \in R_h \mid M \in \Gamma\},$$

$$V_h = \left\{ u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} u_h^M \theta_h^M(x), \quad u_h^M \in \mathbb{R} \right\},$$

$$(7.7) \quad K_h = \{u_h \in V_h \mid u_h(M) \geq 0 \quad \forall M \in \Gamma_h\},$$

$$(7.8) \quad (u_h, v_h)_h = \int_{\Omega} u_h(x) v_h(x) dx, \quad u_h \text{ и } v_h \in V_h,$$

$$(7.9) \quad (A_h u_h, v_h)_h = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega} \delta_i u_h(x) \delta_i v_h(x) dx \quad \forall u_h \text{ и } v_h \in V_h,$$

где

$$(7.10) \quad \delta_i u_h(x) = \frac{u_h\left(x + \frac{h}{2} \vec{e}_i\right) - u_h\left(x - \frac{h}{2} \vec{e}_i\right)}{h}.$$

Можно доказать, что в рассматриваемом случае

$$S(h) = 2\sqrt{2}/h.$$

Как было сказано выше, на каждой „итерации“ по времени ( $i = 0, 1, \dots, N = T/k$ ) мы вычисляем элемент  $w_h^{i+1}$  (зная который,

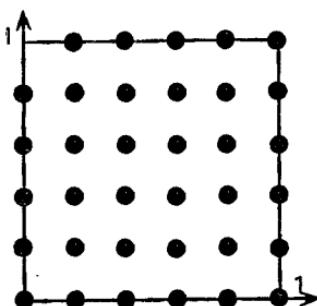


Рис. 7.2.  $\Omega_h$  для  $h = 1/5$ .

можно определить  $w_h^{i+1}$ ), решая задачу типа (7.5) методом релаксации с параметром, выбираем параметр релаксации в соответствии с рис. 7.1.

Алгоритм метода релаксации, определяющий  $w_h^{i+1}$ , прекращает свою работу тогда, когда норма (в  $L^\infty$ ) разности двух последовательных итераций  $w_h^{i+1(n-1)}$  и  $w_h^{i+1(n)}$  становится меньше  $10^{-4}$ , т. е.

$$(7.11) \quad \sum_{M \in \Omega_h} |w_h^{i+1(n)}(M) - w_h^{i+1(n-1)}(M)| \leq 10^{-4}.$$

Кроме того, для оценки качества различных схем исследуется зависимость от времени нормы в  $L^2$  относительной ошибки (от-

носительно различных точных решений)

$$(7.12) \quad E(u) = \left( \sum_{M \in \Omega_h} |u_h^t(M) - u(M; ik)|^2 / \sum_{M \in \Omega_h} |u(M; ik)|^2 \right)^{1/2}.$$

(Для рассматриваемых здесь точных решений знаменатель этой дроби строго положителен.)

Рассмотрим точное решение, определяемое на  $Q = ]0, T[ \times \Omega = ]0, 0, 1[ \times ]0, 1[ \times ]0, 1[$  по формуле

$$(7.13) \quad u(x, y, t) = 1 + 100(2x+1)(x-1)^2y^2[(\sin 10t - y)^+]^3 + \\ + 100(2y+1)(y-1)^2x^2[(\sin 10t - x)^+]^3 - \\ - 100x^2(1-x)y(1-y)^2[(y - \sin 10t)^+]^3 - \\ - 100y^2(1-y)x(1-x)^2[(x - \sin 10t)^+]^3,$$

здесь по определению

$$g^+ \begin{cases} = g, & \text{если } g \geq 0, \\ = 0, & \text{если } g \leq 0 \end{cases}$$

для любой величины  $g$ .

При начальном условии

$$u_0(x, y) = u(x, y, 0)$$

и правой части

$$(7.14) \quad f(x, y, t) = u'(x, y, t) - \Delta u(x, y, t)$$

задача

$$(7.15) \quad (u' - \Delta u - f, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in K, u \in \mathcal{K}_0^*$$

(где  $K$  задается по формуле (7.6),  $\mathcal{K}_0^*$  определяется так, как это было сделано в разд. 5.2) имеет единственное точное решение (7.13)<sup>1)</sup>.

Отметим также, что к функции  $u$  можно добавить любую константу, не меняя при этом правой части  $f$  (см. формулу (7.14)). С помощью такой процедуры относительную ошибку можно было бы сделать, очевидно, сколько угодно малой, поэтому отметим, что в рассматриваемом случае

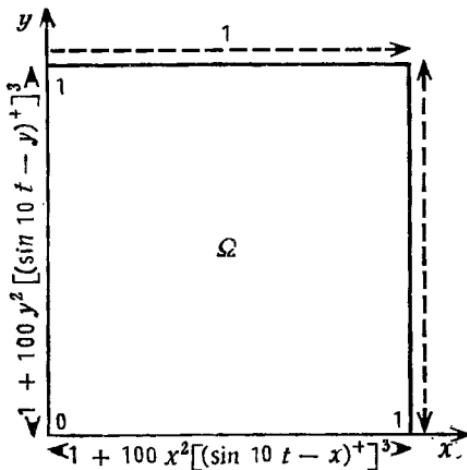
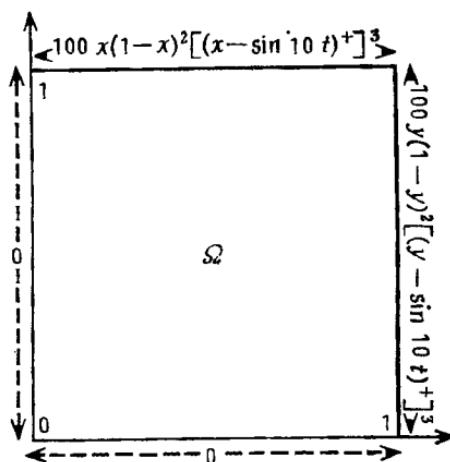
$$\max_{(x, y, t) \in Q} u(x, y, t) \approx 3,2.$$

Значения  $u$  и  $\partial u / \partial t$  на границе  $\Gamma$  указаны на рис. 7.3 и 7.4.

Зависимость ошибки  $E(u)$  от времени для различных значений  $k$  и для схем — неявной, Кранка—Николсона и явной — по-

<sup>1)</sup> Заметим, что функция  $f$  выбрана здесь так, что решение (7.13) одновременно является решением задачи (7.15) в случае, когда множество  $K$  определено не по формуле (7.6), а  $K = H^1(\Omega)$ ; следовательно, неравенство (7.15) здесь превращается в уравнение.

казана на рис. 7.5, 7.6, 7.7. Для  $h = 1/20$  неявные схемы и схема Кранка—Николсона дают наименьшую ошибку при  $k = 10^{-3}$ , и при этом значении  $k$  они почти эквивалентны. Для явной схемы при  $k = 7 \cdot 10^{-4}$  наблюдается переполнение разрядной сетки; результаты, полученные с помощью этой схемы при  $k = 2 \cdot 10^{-4}$ , примерно совпадают с теми, которые получаются при использовании остальных схем для  $k = 10^{-3}$ .

Рис. 7.3. Значения  $u$  на  $\Gamma$ .Рис. 7.4. Значения  $du/dn$  на  $\Gamma$ .

Для решения задачи требуется (на ЭВМ СИ10070):  $\approx 2,5$  мин при использовании неявных и полунеявных схем и  $h = 1/20$ ,  $k = 10^{-3}$ ;  $\approx 6$  мин при использовании явной схемы и  $h = 1/20$ ,  $k = 2 \cdot 10^{-4}$ . ■

## 7.2. Решение задачи II

В этой задаче

$$(7.16) \quad V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \\ K = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ почти для всех } x \in \Omega\}.$$

Выберем  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  и сетку  $R_h$  так, как это было сделано в разд. 7.1, и определим

$$\Omega_h = \{M \in R_h \mid \bar{\omega}_h^1(M) \subset \Omega\},$$

$$V_h = \left\{ u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} u_h^M \theta_h^M(x), \quad u_h^M \in \mathbb{R} \right\},$$

$$K_h = \{u_h \in V_h \mid u_h(M) \geq 0 \quad \forall M \in \Gamma\}.$$

$(,)_h$ ,  $A_h$ ,  $f_h$ ,  $u_{0,h}$ , как в разд. 7.1.

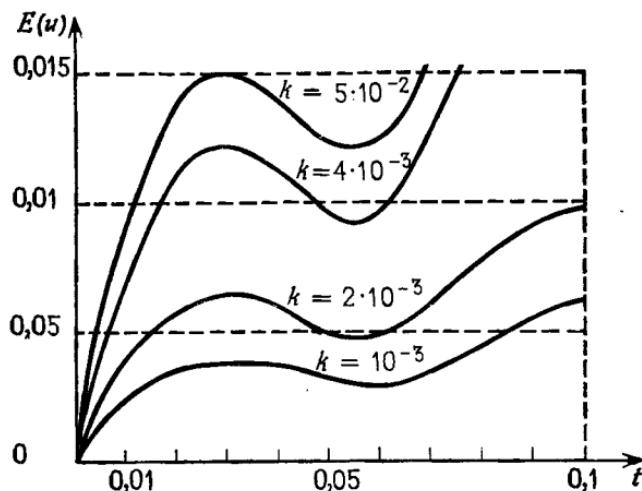


Рис. 7.5. Неявная схема.

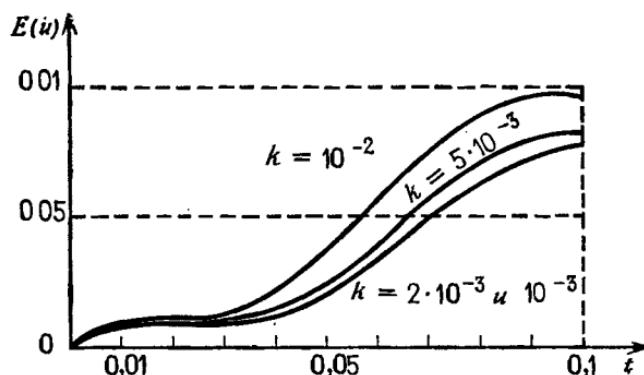


Рис. 7.6. Полунеявная схема.

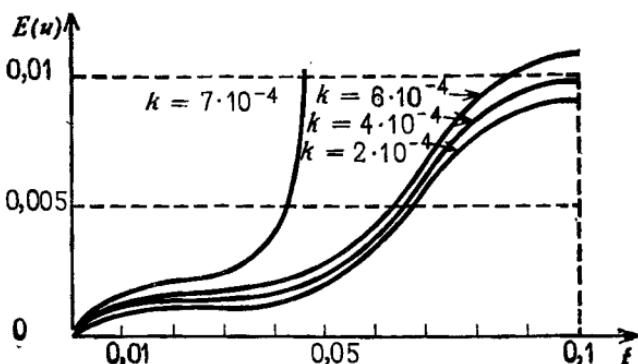


Рис. 7.7. Явная схема.

При указанных условиях рассматриваемая задача, как и предыдущая, приводится к виду (7.5); решение производится по методу релаксации с параметром  $\omega$ , выбираемым в соответствии с рис. 7.1, и условием останова (7.11).

Качество используемых схем оценивается величиной  $E(u)$  (см. формулу (7.12)) и

$$E(u') = \left( \sum_{M \in \Omega_h} \left| \frac{u_h^{i+1}(M) - u_h^i(M)}{k} - u'(M; (i+\theta)k) \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{M \in \Omega_h} |u'(M; (i+\theta)k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Можно доказать, что и здесь  $S(h) = 2\sqrt{2}/h$ .

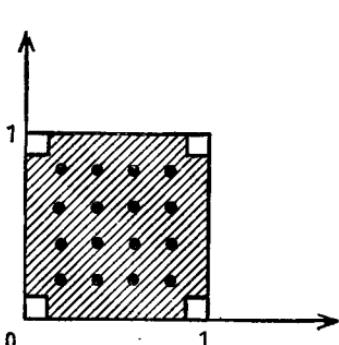


Рис. 7.8.  $\Omega_h$  для  $h=1/5$ .

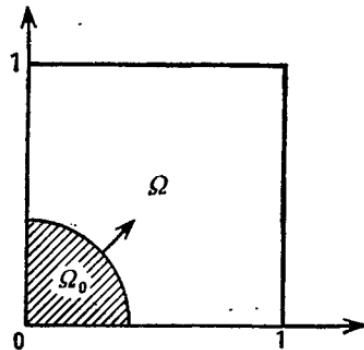


Рис. 7.9.  $u' = 0$  на  $\Omega_0^t$ .

Будем исследовать приближенное решение неравенства

$$(7.17) \quad (u' - \Delta u - f, v - u') \geqslant 0 \quad \forall v \in K, u \in \mathcal{K}_0^*$$

(где  $K$  задано по формуле (7.16),  $\mathcal{K}_0^*$  определяется так, как это было сделано в разд. 5.2).

Выберем

$$(7.18) \quad f(x, y, t) = u' - \Delta u - 100(10 \sin t - x^2 - y^2)^+,$$

$$(7.19) \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y),$$

что соответствует точному решению

$$(7.20) \quad u(x, y, t) = 10 \sin x \sin y (1-x)(1-y) - \\ - 10xy(1-x)(1-y)[(x^2 + y^2 - 10 \sin t)^+]^3.$$

В области

$$\Omega_0^t = \{(x, y) \in \Omega \mid 10 \sin t \geqslant x^2 + y^2\},$$

$u' = 0$  (см. рис. 7.9).

Полученные результаты приведены на рис. 7.10, 7.11, 7.12, 7.13. Для решения задачи требуется:

$\simeq 1,2$  мин при использовании неявных и полуяявных схем и  $h = 1/20$ ,  $k = 10^{-3}$ ;

$\simeq 3,5$  мин при использовании явной схемы и  $h = 1/20$ ,  $k = 2 \cdot 10^{-4}$ .

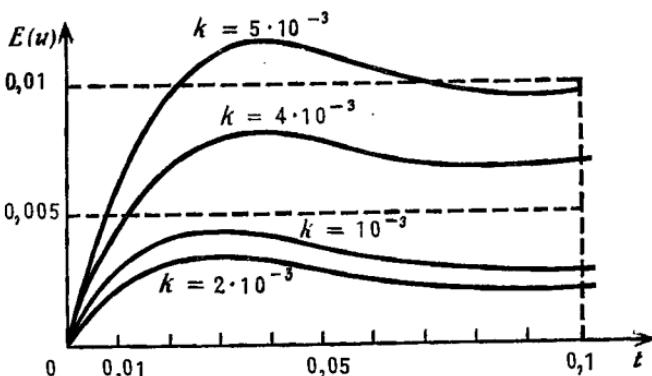


Рис. 7.10. Неявная схема.

При использовании явной схемы переполнение наступает при  $k \geqslant 7 \cdot 10^{-4}$  (см. рис. 7.13).

В данной задаче наилучшие результаты получаются при использовании неявной схемы. ■

### 7.3. Заключение

Итак, на примере рассмотренных в этом разделе двух задач установлено, что при одной и той же точности схемы неявного типа приводят к цели в 2—3 раза быстрее явных схем. Последние расходятся, если шаг по времени недостаточно мал. Другие примеры, подтверждающие полученные здесь результаты, для неравенств II типа приведены в работе Вио [1]. ■

## 8. Введение в теорию эволюционных неравенств второго порядка по $t$

### 8.1. Пример I

В качестве первого примера рассмотрим задачу, представляющую собой упрощенный вариант (модель) тех задач, к которым приводит теория вязкоупругих материалов с учетом трения и

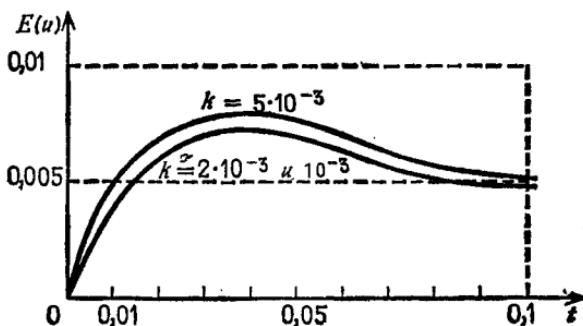


Рис. 7.11. Полунеявная схема.

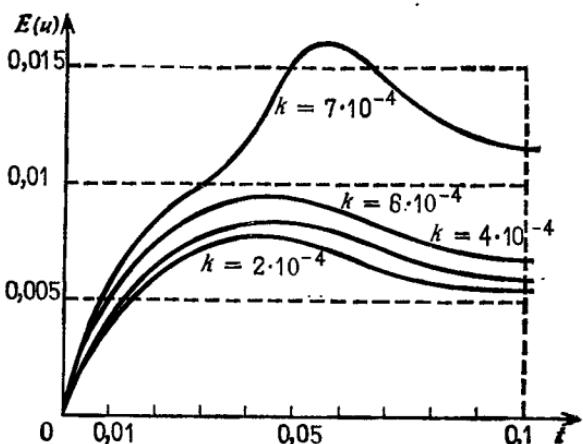
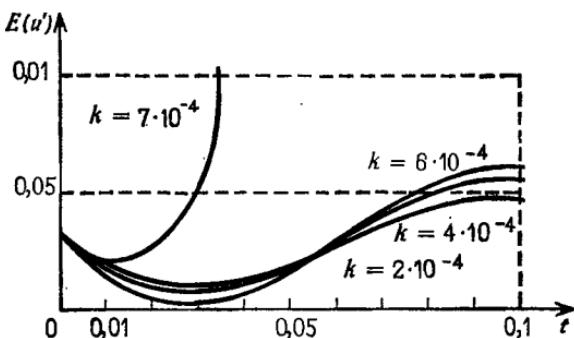


Рис. 7.12. Явная схема.

Рис. 7.13. Величина  $E(u')$  в случае явной схемы.

границе (см. книгу Дюво и Лионса [1]): найти функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \text{ в } \Omega \times ]0, T[,$$

начальным

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$$

и краевым условиям

$$u = 0 \text{ на части } \Gamma_0 \times ]0, T[ \text{ границы } \Gamma \times ]0, T[,$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leq g \text{ на } \Gamma_1 \times ]0, T[, \quad \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma,$$

$$u \frac{\partial u}{\partial n} + g|u| = 0 \text{ на } \Gamma_1 \times ]0, T[.$$

Без труда доказывается, что поставленная задача может быть приведена к вариационному неравенству 2-го порядка по  $t$

$$(8.1) \quad \begin{aligned} (u'', v - u') + a_1(u', v - u') + a_0(u, v - u') + j(v) - j(u') &\geq \\ &\geq (f, v - u') \quad \forall v \in V, u' \in V \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{aligned}$$

где

$$V = \{v | v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$a_0(u, v) = a_1(u, v) - \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v dx,$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_1} g|v| d\Gamma. \blacksquare$$

## 8.2. Пример II

При описании некоторых физических явлений (см. книгу Дюво и Лионса [1]) возникает задача: найти функцию  $u$ , удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u'' - \Delta u - f &\geq 0, \quad u' \geq 0, \\ u'(u'' - \Delta u - f) &= 0 \text{ в } \Omega \times ]0, T[, \end{aligned}$$

сформулированным выше начальным условиям и условиям на границе, например

$$u = 0 \text{ на } \Gamma \times ]0, T[.$$

Эту задачу также можно сформулировать в виде вариационного неравенства 2-го порядка по  $t$

$$(8.2) \quad \begin{aligned} (u'', v - u') + a(u, v - u') &\geq (f, v - u') \quad \forall v \in K, \\ u'(t) \in K, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{aligned}$$

где

$$K = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \text{ в } \Omega\},$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx. \blacksquare$$

### 8.3. Абстрактная формулировка

Используя те же функциональные пространства, что и в разд. 5.2 ( $V \subset H \subset V'$ ), определим замкнутые выпуклые множества

$$\mathcal{K} = \{v \mid v \in W(0, T), \quad v(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\},$$

$$\mathcal{K}^* = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), \quad v' \in \mathcal{K}\},$$

$$\mathcal{K}_0^* = \{v \mid v \in \mathcal{K}^*, \quad v(0) = u_0, \quad v'(0) = u_1\}$$

(где  $K$  — замкнуто и выпукло в  $V$ ,  $u_0$ ,  $u_1$  заданы) и будем рассматривать неравенства вида:

$$(8.3) \quad L(u, v) = \int_0^T (u'' - Au - f, v - u') \, dt \geqslant 0$$

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{K}^*$$

при условии  $u(0) = u_0$ ,  $u'(0) = u_1$ ; будем предполагать, что оператор  $A$  и функция  $f$  обладают свойствами, о которых шла речь в разд. 5.2, в частности оператор  $A$  предполагается симметричным<sup>1)</sup> (и, очевидно, коэрцитивным и непрерывным).

Неравенство (8.3) чаще записывается в виде

$$(8.4) \quad (u'' - Au - f, v - u') \geqslant 0 \quad \forall v \in K, \quad u \in \mathcal{K}_0^*$$

Существование решения  $u$  неравенства (8.3) обеспечивается следующей теоремой (см. Лионс [1]):

**Теорема 8.1.** Пусть

$$(8.5) \quad f, f' \in L^2(0, T; H),$$

$$(8.6) \quad Au_0 \in H,$$

$$(8.7) \quad u_1 \in K,$$

тогда существует единственная функция  $u$ , удовлетворяющая неравенству (8.3) (или (8.4)), причем

$$(8.8) \quad u, u' \in L^\infty(0, T; V),$$

$$(8.9) \quad u'' \in L^\infty(0, T; H). \blacksquare$$

<sup>1)</sup> На самом деле достаточно, чтобы симметричной была только главная часть оператора  $A_0$ . Можно также рассматривать задачи, когда  $a$  зависит от  $t$ . Отметим, что случай (8.1) исследуется теми же методами.

**Замечание 8.1.** Вводя множество

$$\mathcal{K}_f = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), v' \in L^2(0, T; V), v(0) = u_0,$$

$$v'(t) \in K, \text{ почти для всех } t \in [0, T]\},$$

можно исследовать вопрос о существовании слабых решений неравенства

$$\int_0^T (v'' - Au - f, v' - u') dt \geqslant 0 \quad \forall v \in \mathcal{K}_0^*, \quad u \in \mathcal{K}_f.$$

По поводу этой задачи см. работы Брезиса [2], Брезиса и Лионса [1]. ■

**Замечание 8.2.** Некоторое обобщение (по сравнению с (8.3)) задачи состоит в том, чтобы исследовать неравенство

$$(8.10) \quad \int_0^T (u'' + Au - f, v - u') dt + \int_0^T [j(v) - j(u')] dt \geqslant 0$$

$$\forall v \in \mathcal{K}, \quad u \in \mathcal{K}_0^*,$$

где  $j(v)$  — функционал типа (2.27). ■

**Замечание 8.3.** Установленное выше свойство (8.8) решения задачи позволяет утверждать, что в случае, когда  $K$  не ограничено, можно определить такое множество  $K_R$  (как это было сделано в замечании 5.3), которое было бы в  $V$  ограниченным и на котором задача (8.3) имела бы то же решение, что и исходная задача (на множестве  $K$ ). Таким образом, можно считать, что

$$(8.11) \quad K \text{ ограничено в } V.$$

Это замечание, как и в случае параболических неравенств II типа, полезно при исследовании аппроксимации. ■

## 9. Аппроксимация неравенств второго порядка по $t$

В этом разделе мы проведем исследования аппроксимации гиперболических неравенств вида (8.4).

### 9.1. Предположения

Будем использовать определения и обозначения разд. 6.1. Аппроксимации функций будем обозначать, как обычно, через  $v_{h,k}$ , причем

$$v_{h,k}(t) = \sum_{i=0}^N v_h^i \chi_k(t), \quad v_h^i \in V_h.$$

Будем полагать:

$$\delta v_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t+k) - v_{h,k}(t)}{k},$$

$$dv_{h,k}(t) = \frac{v_{h,k}(t+k) - v_{h,k}(t-k)}{2k},$$

$$\gamma v_{h,k}(t) = \frac{\delta v_{h,k}(t) - \delta v_{h,k}(t-k)}{k}.$$

Относительно аппроксимаций  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $\mathcal{K}^*$ ,  $a(u, v) = (Au, v)$ ,  $f(t)$  примем следующие предположения.

### Аппроксимация начальных данных

Будем предполагать, что для  $u_0 \in V$ ,  $u_1 \in K$  существует

$$(9.1) \quad u_{0,h} \in V_h, \text{ такое, что } p_h u_{0,h} \rightarrow \sigma u_0 \text{ сильно в } F \text{ и } \|u_{0,h}\|_h \leq C,$$

$$(9.2) \quad u_{1,h} \in K_h, \text{ такое, что } p_h u_{1,h} \rightarrow \sigma u_1 \text{ сильно в } F \text{ и } \|u_{1,h}\|_h \leq C.$$

### Аппроксимация $\mathcal{K}^*$

Предположим, что аппроксимация консистентна, т. е. для любого семейства функций  $v_{h,k} \in L^2(0, T; V_h)$ , ( $h, k \rightarrow 0$ ), таких, что

$$(9.3) \quad \begin{aligned} & dv_{h,k}(t) \in K_h, \quad t \in [0, T], \\ & q_h v_{h,k} \rightarrow v \text{ -*слабо в } L^\infty(0, T; H), \\ & p_h v_{h,k} \rightarrow \sigma v_1 \text{ -*слабо в } L^\infty(0, T; F), \\ & p_h v_{h,k}(T) \rightarrow \sigma v_2 \text{ и } p_h v_{h,k}(0) \rightarrow \sigma v_2^0 \text{ слабо в } V, \\ & q_h dv_{h,k} \rightarrow v_3 \text{ -*слабо в } L^\infty(0, T; H) \\ & \quad (\text{или же } q_h \delta v_{h,k} \rightarrow v_3), \\ & p_h dv_{h,k} \rightarrow \sigma v_4 \text{ -*слабо в } L^\infty(0, T; F) \\ & \quad (\text{или же } q_h \delta v_{h,k} \rightarrow \sigma v_4), \\ & q_h \delta v_{h,k}(T-k) \rightarrow v_5 \text{ и } q_h \delta v_{h,k}(0) \rightarrow v_5^0 \text{ слабо в } H, \\ & q_h \gamma v_{h,k} \rightarrow v_6 \text{ -*слабо в } L^\infty(0, T; F), \\ & \quad \text{имеем } v \in \mathcal{K}^*, \text{ и} \\ & v_1 = \sigma v, \quad v_2 = \sigma v(T), \quad v_2^0 = \sigma v(0), \quad v_3 = v', \\ & v_4 = \sigma v', \quad v_5 = v'(T), \quad v_5^0 = v'(0), \quad v_6 = v''. \end{aligned}$$

Кроме того, будем предполагать, что аппроксимация является сходящейся, т. е. для любой функции  $\tau \in L^2(0, T; V)$ ,  $v(t) \in K$ , почти для всех  $t \in [0, T]$  существует последовательность  $v_{h,k}$  ( $h, k \rightarrow 0$ ), такая, что

$$(9.4) \quad \begin{aligned} & v_{h,k}(t) \in K_h, \quad t \in [0, T], \\ & q_h v_{h,k} \rightarrow v \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \\ & p_h v_{h,k} \rightarrow \sigma v \text{ сильно в } L^2(0, T; F). \end{aligned}$$

Будем предполагать (см. замечание 8.3 и (8.11)), что  
(9.5)  $K_h$  ограничено в  $V_h$ .

По поводу последней гипотезы см. замечание 9.4. ■

### Аппроксимация $a(u, v)$

Будем предполагать (см. условие (8.6)), что  
(9.6)  $|A_h u_{0,h}|_h \leq C$ ,  $C$  — постоянная, не зависящая от параметра  $h$ .

Остальные гипотезы совпадают с аналогичными гипотезами разд. 6.2, в частности форма  $a_h(u_h, v_h)$  предполагается симметричной.

### Аппроксимация $f$

Замечания разд. 6.2 здесь остаются в силе. Мы будем предполагать, что

$$f, f' \in L^\infty(0, T; H),$$

следовательно,

$$f \in \mathcal{C}^0([0, T]; H),$$

и мы задаем

$$f_{h,k}(t) = \sum_{i=0}^N f_i \chi_k^i(t),$$

такую, что

$$(9.7) \quad q_h f_{h,k} \rightarrow f \text{ в } L^\infty(0, T; H), \|f_{h,k}\|_h \leq C, \\ p_h \delta f_{h,k} \rightarrow f' \text{ в } L^\infty(0, T; H), \|\delta f_{h,k}\|_h^* \leq C.$$

## 9.2. Схемы аппроксимации

Используя введенные выше предположения и обозначение

$$u_{h,k}^\theta(t) = u_{h,k}(t) + \theta [u_{h,k}(t+k) - u_{h,k}(t)], \theta \in [0, 1],$$

будем исследовать следующую аппроксимацию неравенства (8.4):

$$(9.8) \quad (\gamma u_{h,k} + A_h u_{h,k}^\theta - f_{h,k}, v_h - du_{h,k})_h \geq 0, \\ \forall v_h \in K_h, du_{h,k} \in K_h, t \in [k, T], \\ u_{h,k}(0) = u_{0,h}, u_{h,k}(k) = u_{0,k} + k u_{1,k}.$$

Ниже мы используем обозначения (индекс  $h$  опускается):

$$\begin{aligned}\delta^i &= \frac{u^{i+1} - u^i}{k}, \\ d^i &= \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} = \frac{\delta^i + \delta^{i-1}}{2} = \left( \frac{k\gamma^i}{2} + \delta^{i-1} \right), \\ \gamma^i &= \frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{k} = \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} = 2 \left( \frac{d^i - \delta^{i-1}}{k} \right), \\ u^{i+\theta} &= u^i + \theta [u^{i+1} - u^i] = u^i + \theta k \delta^i = u^i + 2\theta k d^i - \theta k \delta^{i-1}, \\ \delta^{i+\theta} &= \frac{u^{i+1+\theta} - u^{i+\theta}}{k^2} = \delta^i + \theta [\delta^{i+1} - \delta^i], \\ g^i &= \frac{f^{i+1} - f^i}{k}.\end{aligned}$$

Схема (9.8) теперь записывается следующим образом: найти  $u^2, u^3, \dots, u^N$ , такие, что

$$(9.9) \quad \left( \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} + A u^{i+\theta} - f^i, v - \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} \right) \geq 0,$$

$$(i \geq 1) \quad \forall v \in K, \quad \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} \in K,$$

$$(9.10) \quad u^0 = u_0, \quad u^1 = u_0 + k u_1.$$

Как установлено в теории эллиптических неравенств, задача (9.9), которую с использованием обозначения

$$\tilde{f}^i = -\delta^{i-1} + \frac{k}{2} [A u^i - \theta k A \delta^{i-1} - f^i]$$

можно записать в виде

$$((I + \theta k^2 A) d^i + \tilde{f}^i, v - d^i) \geq 0,$$

имеет решение, и притом только одно.

Таким образом, учитывая начальные условия (9.10), мы можем последовательно определить все

$$u^{i+1} = u^{i-1} + k d^i, \quad (i \geq 1).$$

Заметим, что из симметрии  $A$  вытекает возможность определения  $u^{i+1} (i \geq 1)$  по решениям  $d^i (N-1)$  задач минимизации ( $i = 1, \dots, N-1$ ):

минимизировать  $\frac{1}{2} \|d^i\|^2 + \frac{1}{2} \theta k^2 (A d^i, d^i) + (\tilde{f}^i, d^i)$  при ограничениях

$$d^i \in K,$$

где  $\delta^{i-1}, u^{i-1}, u^i = u^{i-1} + k \delta^{i-1}$  для  $i \geq 2$  получаются из решения предшествующей задачи; для  $i = 1$ ,  $\delta^0 = u_1$ ,  $u^0 = u_0$ ,  $u^1 = u_0 + k \delta^1$ .

Будем использовать следующую терминологию:

- явная схема, если  $\theta = 0$ ,
- полуявная схема, если  $0 < \theta < 1$ ,
- неявная схема, если  $\theta = 1$ . ■

**Замечание 9.1.** Аналогичным образом при решении неравенства

$$(u'' + Au - f, v - u') + j(v) - j(u') \geq 0 \quad \forall v \in K, u \in \mathcal{K}_c^*,$$

где  $j(v)$  определено по формуле (2.27), приходим к схеме

$$\left( \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} + Au^{i+1} - f^i, v - \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} \right) + \\ + j(v) - j\left(\frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k}\right) \geq 0 \quad \forall v \in K, \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} \in K,$$

или, учитывая симметрию оператора  $A$ , к решению задачи:

$$\text{минимизировать } \frac{1}{2} \|d^i\|^2 + \frac{1}{2} \theta k^2 (Ad^i, d^i) + (\tilde{f}^i, d^i) + j(d^i)$$

при ограничении  $d^i \in K$ . ■

**Замечание 9.3.** Можно построить большое количество других схем. Приведем несколько из них (опуская индекс  $h$ ).

*Схема I*

$$(9.11) \quad \left( \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} + A\bar{u}^i - f^i, v - \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} \right) \geq 0 \\ \forall v \in K, \frac{u^{i+1} - u^{i-1}}{2k} \in K,$$

$$(9.12) \quad \bar{u}^i = \theta^- u^{i-1} + \theta^0 u^i + \theta^+ u^{i+1}, \\ \theta^-, \theta^0, \theta^+ \in [0, 1], \theta^- + \theta^0 + \theta^+ = 1.$$

*Схема II*

$$(9.13) \quad \left( \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} + A\bar{u}^i - f^i, v - \frac{u^{i+1} - u^i}{k} \right) \geq 0 \\ \forall v \in K, \frac{u^{i+1} - u^i}{k} \in K,$$

$\bar{u}^i$  определено по формуле (9.12).

*Схема III (схема расщепления)*

$$\frac{u^{i+1/2} - 2u^i + u^{i-1}}{k^2} + A\bar{u}^{i+1/2} - f^i = 0, \\ u^{i+1} = u^i + kP_h \left[ \frac{u^{i+1/2} - u^i}{k} \right],$$

или

$$u^{i+1} = u^{i-1} + 2k P_{K_h} \left[ \frac{u^{i+1/2} - u^{i-1}}{2k} \right],$$

где  $P_{K_h}$  — проекция на множество  $K_h$  в смысле нормы  $(\cdot, \cdot)_h$ . ■

Исследование схем I и II проведено в работе Тремольера [4]. ■

### 9.3. Сходимость решений приближенных неравенств

Мы сейчас исследуем устойчивость и сходимость схемы (9.9) при  $h, k \rightarrow 0$ . Используя обозначения разд. 9.2, перепишем схему (9.9) в виде

$$(9.14) \quad (\gamma^i, v - d^i) + a(u^{i+\theta}, v - d^i) \geq (f^i, v - d^i), \quad (i \geq 1)$$

$$\forall v \in K, \quad d^i \in K.$$

Прежде чем переходить к исследованию, напомним лемму Гронуолла:

**Лемма 9.1.** Если  $p_i, i = 0, 1, \dots, n$  — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leq p_1 \leq C_1,$$

$$0 \leq p_{n+1} \leq C_1 + C_2 \sum_{i=1}^n k_i p_i, \quad n = 1, \dots, N,$$

где  $C_1, C_2$  — неотрицательные константы, и если

$$k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N k_i = T, \quad T \text{ положительно,}$$

то

$$p_n \leq C_1 \exp \left( C_2 \sum_{i=1}^n k_i \right) \leq C_1 \exp (C_2 T)$$

для  $n = 2, 3, \dots, N$ . ■

#### 9.3.1. Устойчивость

Докажем, что имеет место

**Теорема 9.1.** Если  $(h, k) \rightarrow 0$

- (9.15) — произвольно, если  $\theta = 1$ ,
- подчиняясь условию устойчивости  $Ck^2S(h)^2 \leq 1 - \beta$ ,  
( $\beta$  фиксировано на  $[0, 1]$ ), если  $0 \leq \theta < 1$ ,

то для всех  $n = 0, 1, \dots$

$$(9.16) \quad \|u_h^n\|_h \leq C,$$

$$(9.17) \quad \left\| \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k} \right\|_h \leq C, \quad \left\| \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n-1}}{2k} \right\|_h \leq C,$$

$$(9.18) \quad \left\| \frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{k^2} \right\|_h \leq C.$$

Докажем предварительно, что имеет место

**Лемма 9.2.** При выполнении гипотез (9.6) и (9.5) имеем оценку

$$(9.19) \quad |\gamma^1|_h^2 \leq C,$$

где  $C$  — константа, не зависящая от  $h$  и  $k$ .

*Доказательство леммы 9.2.* Заметим, что

$$(\gamma^1 + A(u^1 + \theta k \delta^1) - f^1, v - d^1) \geq 0 \quad \forall v \in K,$$

полагая здесь  $v = \delta^0$  и учитывая, что

$$d^1 - \delta^0 = \frac{k}{2} \gamma^1 \text{ и что } u^1 + \theta k \delta^1 = u^0 + (1 + \theta) k \delta^0 + \theta k^2 \gamma^1,$$

получаем

$$\left( \gamma^1 + A(u^0 + (1 + \theta) k \delta^0 + \theta k^2 \gamma^1) - f^1, \frac{k}{2} \gamma^1 \right) \leq 0,$$

умножая это неравенство на  $2/k$  и отбрасывая неотрицательную величину  $a(\gamma^1, \gamma^1)$ , имеем

$$|\gamma^1|^2 \leq |a(u^0, \gamma^1)| + (1 + \theta) |a(\delta^0, \delta^1 - \delta^0)|.$$

Отсюда сразу следует нужная нам оценка (9.19), если учесть гипотезы (9.6), (9.5). ■

*Доказательство теоремы 9.1.* Запишем неравенство (9.14) для  $(i+1)$ :

$$(9.20) \quad (\gamma^{i+1}, v - d^{i+1}) + a(u^{i+1+\theta}, v - d^{i+1}) \geq (f^{i+1}, v - d^{i+1}).$$

Полагая  $v = d^{i+1}$  в (9.14),  $v = d^i$  в (9.20) и складывая результаты, найдем

$$\begin{aligned} (\gamma^{i+1} - \gamma^i, d^{i+1} - d^i) + a(u^{i+1+\theta} - u^{i+\theta}, d^{i+1} - d^i) &\leq \\ &\leq (f^{i+1} - f^i, d^{i+1} - d^i). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d^{i+1} - d^i &= \frac{\delta^{i+1} + \delta^i}{2} - \frac{\delta^i + \delta^{i-1}}{2} = \frac{\delta^{i+1} - \delta^{i-1}}{2} = \\ &= \frac{\delta^{i+1} - \delta^i + \delta^i - \delta^{i-1}}{2} = \frac{k}{2} (\gamma^{i+1} + \gamma^i); \end{aligned}$$

отсюда после умножения на  $2/k$  получаем неравенство

$$(9.21) \quad (\gamma^{i+1} - \gamma^i, \gamma^{i+1} + \gamma^i) + a(\delta^{i+0}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}) \leq k(g^i, \gamma^{i+1} + \gamma^i),$$

из которого с учетом симметрии формы  $a(,)$  имеем

$$\begin{aligned} a(\delta^{i+0}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}) &= (1-\theta)a(\delta^i, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}) + \\ &+ \theta a(\delta^{i+1}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}) = (1-\theta)[a(\delta^i, \delta^{i+1}) - \\ &- a(\delta^i, \delta^{i-1})] + \frac{\theta}{2}[a(\delta^{i+1}) - a(\delta^{i-1}) + a(\delta^{i+1} - \delta^{i-1})] \end{aligned}$$

для  $1 \leq n \leq N-1$ , отсюда находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a(\delta^{i+0}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}) &= (1-\theta)[a(\delta^n, \delta^{n+1}) - a(\delta^0, \delta^1)] + \\ &+ \frac{\theta}{2} \left[ a(\delta^{n+1}) + a(\delta^n) - a(\delta^1) - a(\delta^0) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^n a(\delta^{i+1} - \delta^{i-1}) \right] = (1-\theta)[a(\delta^n, \delta^{n+1} - \delta^n) - \\ &- a(\delta^0, \delta^1)] + \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)a(\delta^n) + \frac{\theta}{2} \left[ a(\delta^{n+1}) - a(\delta^1) - \right. \\ &\left. - a(\delta^0) + \sum_{i=1}^n a(\delta^{i+1} - \delta^{i-1})\right]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |a(\delta^0, \delta^1)| &\leq \frac{1}{2}a(\delta^0) + \frac{1}{2}a(\delta^1), \\ |a(\delta^n, \delta^{n+1} - \delta^n)| &\leq \frac{1}{2}a(\delta^n) + \frac{1}{2}k^2a(\gamma^{n+1}); \end{aligned}$$

отбрасывая здесь величину  $\frac{\theta}{2}a(\delta^{n+1})$ , которая неотрицательна, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a(\delta^{i+0}, \delta^{i+1} - \delta^{i-1}) &\geq (1-\theta) \left[ -\frac{1}{2}a(\delta^n) - \frac{1}{2}k^2a(\gamma^{n+1}) \right] + \\ &+ \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)a(\delta^n) - \frac{1}{2}a(\delta^0) - \frac{1}{2}a(\delta^1) \geq \frac{1}{2}a(\delta^n) - \\ &- \frac{(1-\theta)}{2}k^2a(\gamma^{n+1}) - \frac{1}{2}a(\delta^0) - \frac{1}{2}a(\delta^1). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k(g^i, \gamma^{i+1} + \gamma^i) &\leq \sum_{i=1}^n Ck(|\gamma^{i+1}| + |\gamma^i|) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n 2Ck|\gamma^i| + Ck|\gamma^{n+1}| \leq C + \\ &+ C \sum_{i=1}^n k|\gamma^i|^2 + \frac{1}{2}|\gamma^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенства (9.21), просуммированного по  $i$  от единицы до  $n \leq N-1$ , имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\gamma^{n+1}|^2 + \frac{1}{2}a(\delta^n) &\leq C + C \sum_{i=1}^n k|\gamma^i|^2 + \frac{1-\theta}{2}k^2a(\gamma^{n+1}) + \\ &+ \frac{1}{2}a(\delta^0) + \frac{1}{2}a(\delta^1) + |\gamma^1|^2. \end{aligned}$$

Умножая здесь на 2 и используя лемму 9.2 ( $|\gamma^1| \leq C$ ), предположения (9.5) ( $a(\delta^1) \leq C$ ) и (9.2) ( $a(\delta^0) \leq C$ ), получаем

$$(9.22) \quad [1 - (1-\theta)Ck^2S(h)^2]|\gamma^{n+1}|^2 + a(\delta^n) \leq C + C \sum_{i=1}^n k|\gamma^i|^2.$$

Учитывая условия (9.15) в случае  $0 \leq \theta < 1$  и используя лемму Гропуолла, находим нужную нам оценку (9.18). Оценка (9.17), а вслед за ней (9.16), без труда следует из неравенства (9.22). ■

*Замечание 9.4.* В случае, когда для всех  $h, k \rightarrow 0$  неравенство (9.14) в действительности представляет собой уравнение (ограничения не работают), имеем

$$\frac{\delta^1 - \delta^0}{k} + Au^{1+\theta} - f^0 = 0,$$

откуда вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|\delta^1\| &= \|\delta^0 + kAu^1 + \theta k^2 A \delta^1 - kf^0\| \leq \\ &\leq \|\delta^0\| + k\|Au^1\| + \theta k^2 \|A\delta^1\| + k\|f^0\|, \end{aligned}$$

из которого следует, что для достаточно малых значений  $k$  величина  $\delta^1$  ограничена по норме пространства  $V_h$  независимо от  $h$  и  $k$ , и, следовательно, предположение (9.5) на самом деле оказывается ненужным. ■

### 9.3.2. Слабая сходимость

В силу предположений (9.1), (9.2), (9.3) и в условиях теоремы 9.1 из последовательности

$$u_{h,k} = \sum u_h^k \chi_k^t$$

можно извлечь подпоследовательность, обозначаемую по-прежнему через  $u_{h,k}$  и обладающую следующими свойствами:

$$(9.23) \quad \begin{aligned} q_h u_{h,k} &\rightarrow \bar{u} \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; H), \bar{u} \in \mathcal{K}^*, \\ p_h u_{h,k} &\rightarrow \bar{\sigma} \bar{u} \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; F), \\ p_h d u_{h,k} &\rightarrow \bar{\sigma} \bar{u}' \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; F), \\ q_h \gamma u_{h,k} &\rightarrow \bar{u}'' \text{ ---слабо в } L^\infty(0, T; H), \\ p_h u_{h,k}(T) &\rightarrow \bar{\sigma} \bar{u}(T), p_h u_{h,k}(0) \rightarrow \bar{\sigma} \bar{u}(0) \text{ слабо в } V, \\ q_h \delta u_{h,k}(T-k) &\rightarrow u'(T), q_h \delta u_{h,k}(0) \rightarrow \bar{\sigma} \bar{u}'(0) \text{ слабо в } H. \end{aligned}$$

Итак, пусть  $v$  — произвольный элемент пространства  $L^2(0, T; V)$ ,  $v(t) \in K$  почти для всех  $t \in [0, T]$ ,  $v_{h,k}$  — последовательность, сходящаяся к  $v$  в смысле (9.4).

Заменяя в неравенстве (9.14)  $v$  на  $v_h^t$ , получаем (9.24)

$$(9.24) \quad \begin{aligned} &\left( \frac{u_h^{t+1} - 2u_h^t + u_h^{t-1}}{k^2} + A_h u_h^{t+\theta}, v_h^t \right)_h - \left( f_h^t, v_h^t - \frac{u_h^{t+1} - u_h^{t-1}}{2k} \right) \geqslant \\ &\geqslant D_{h,k}^t = \left( \frac{u_h^{t+1} - 2u_h^t + u_h^{t-1}}{k^2} + A_h u_h^{t+\theta}, \frac{u_h^{t+1} - u_h^{t-1}}{2k} \right)_h. \end{aligned}$$

Мы сейчас докажем, что отсюда с помощью умножения на  $k$  и суммирования по  $i$  от 1 до  $N-1$  следует неравенство

$$(9.25) \quad \int_0^T (\bar{u}'' + A\bar{u}, v) dt - \int_0^T (f, v - \bar{u}') dt \geqslant \int_0^T (\bar{u}'' + A\bar{u}, \bar{u}') dt,$$

которое означает, что  $\bar{u}$  — решение задачи. Левая часть неравенства (9.25) получается без труда; остается провести анализ правой части (9.24).

Умножая правую часть неравенства (9.24) на  $2k$ , получаем

$$\begin{aligned} 2kD_{h,k}^t &= (\delta^t - \delta^{t-1}, \delta^t + \delta^{t-1})_h + (A_h u_h^{t+\theta}, u_h^{t+1} - u_h^{t-1}) = \\ &= |\delta^t|_h^2 - |\delta^{t-1}|_h^2 + (A_h u_h^{t+\theta}, u_h^{t+1} - u_h^{t-1}). \end{aligned}$$

С другой стороны (опуская индекс  $h$ ),

$$(9.26) \quad \begin{aligned} 2a(u^{t+\theta}, u^{t+1} - u^{t-1}) &= a(u^{t+1}) - a(u^{t-1}) + \\ &+ (1-\theta)[a(u^t) - a(u^{t-1})] + \theta a(u^{t+1} - u^{t-1}), \end{aligned}$$

Суммируя по  $i$  от 1 до  $N-1$  (опуская индекс  $h$ ) и используя (9.26), находим

$$(9.27) \quad \begin{aligned} 2D_{h,k} &= \sum_{i=1}^{N-1} 2k D_{h,k}^i = |\delta^{N-1}|^2 - |\delta^0|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (a(u^N) + a(u^{N-1}) - a(u^1) - a(u^0) + \\ &+ (1-\theta) [a(u^1 - u^0) - a(u^N - u^{N-1})] + \\ &+ \theta \sum_{i=1}^{N-1} a(u^{i+1} - u^{i-1})). \end{aligned}$$

Имеют место следующие утверждения:

$$\liminf_i |\delta^{N-1}|^2 \geq |\bar{u}'(T)|^2 \quad (\text{в силу (9.23)}),$$

$$|\delta^0| \rightarrow |u_1|^2 = |\bar{u}'(0)|^2 \quad (\text{в силу (9.2) и (9.23)}),$$

$$\left. \begin{aligned} \liminf_i a(u^N) &\geq a(\bar{u}(T)) \\ \liminf_i a(u^{N-1}) &\geq a(\bar{u}(T)) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &(\text{в силу консистентности} \\ &\text{формы } a(\cdot, \cdot) \text{ и (9.23)}), \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a(u^1) - a(u_0) &= a(\bar{u}(0)) \\ a(u^0) - a(u_0) &= a(\bar{u}(0)) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &(\text{в силу свойства сходи-} \\ &\text{мости } a(\cdot, \cdot) \text{ и (9.23)}), \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\liminf_i 2D_{h,k} \geq 2D = |\bar{u}'(T)|^2 - |\bar{u}'(0)|^2 + a(\bar{u}(T)) - a(\bar{u}(0)) + \liminf_i r,$$

где

$$r = \frac{1}{2} \left( (1-\theta) [a(u^1 - u^0) - a(u^N - u^{N-1})] + \theta \sum_{i=1}^{N-1} a(u^{i+1} - u^{i-1}) \right).$$

Используя формулу Грина (см. лемму 1.4)<sup>1)</sup>, после деления на 2 получаем

$$D = \int_0^T (\bar{u}'', \bar{u}') dt + \int_0^T a(\bar{u}, \bar{u}') dt + \liminf \frac{r}{2}.$$

Суммируя неравенства (9.24) и переходя к пределу, находим теперь, что

$$(9.28) \quad \int_0^T (\bar{u}'' + A\bar{u} - f, v - \bar{u}') dt \geq \liminf \frac{r}{2}.$$

<sup>1)</sup> Из симметрии  $A(t)$  следует, что для любого  $v, v, v' \in L^2(0, T; V)$  имеем

$$\int_0^T (A(t)v, v') dt = \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A(t)v, v) dt - \frac{1}{2} \int_0^T (A'v, v) dt.$$

Заметим прежде всего, что в случае  $\theta = 1$   $\liminf r \geq 0$  и, следовательно,  $\bar{u}$  — решение исходного неравенства (8.3). В других случаях ( $\theta < 1$ ) имеем

$$r = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \theta) [k^2 a(\delta^0) - k^2 a(\delta^{N-1})] + \theta \sum_{i=1}^{N-1} k^2 a(d^i) \right\}.$$

С другой стороны,

$$a(\delta^0) \leq C \| \delta^0 \|_h^2 \leq C \quad (\text{по предположению}),$$

$$a(\delta^{N-1}) \leq C \| \delta^{N-1} \|_h^2 \leq C \quad (\text{в силу (9.17)}),$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} k^2 a(d^i) \leq C \sum_{i=1}^{N-1} k^2 \left\| \frac{\delta^i + \delta^{i-1}}{2} \right\|^2 \leq C \sum_{i=1}^{N-1} k^2 \quad (\text{в силу (9.17)}),$$

откуда вытекает, что

$$|r| \leq (1 - \theta) k^2 C + \theta k C \sum_{i=1}^{N-1} k \leq (1 - \theta) k^2 C + \theta k C,$$

следовательно,  $\liminf |r| = 0$  и, очевидно,

$$(9.29) \quad \liminf r = 0,$$

что и доказывает (см. неравенство (9.28) с учетом условия (9.29)), что  $\bar{u}$  — решение исходного неравенства. Так как решение  $\bar{u}$  единственное, то нет необходимости извлекать подпоследовательность — вся последовательность сходится к  $\bar{u}$ . Таким образом, можно сформулировать следующую теорему:

**Теорема 9.2.** Если  $(h, k) \rightarrow 0$

— произвольно, если  $\theta = 1$ ,

— подчиняясь условию устойчивости

$Ck^2 S(h)^2 \leq 1 - \beta$  ( $\beta$  фиксировано на  $[0, 1]$ ), если  $0 \leq \theta < 1$ , тогда

$q_h u_{h,k} \rightarrow u$  \*-слабо в  $L^\infty(0, T; H)$ ,

$p_h u_{h,k} \rightarrow \sigma u$  \*-слабо в  $L^\infty(0, T; F)$ ,

$p_h \delta u_{h,k} \rightarrow \sigma u'$  \*-слабо в  $L^\infty(0, T; F)$ ,

$q_h \gamma u_{h,k} \rightarrow u''$  \*-слабо в  $L^\infty(0, T; H)$ ,

где  $u$  — решение исходного неравенства (8.3).

**Замечание 9.5.** Таким образом, мы доказали, что существует элемент  $u \in \mathcal{K}_0^*$  — решение неравенства (8.3). ■

### 9.3.3. Сильная сходимость

В этом разделе (последнем) мы докажем, что имеет место

**Теорема 9.3.** Если  $(h, k) \rightarrow 0$

— произвольно, если  $\theta = 1$ ,

— подчиняясь условию устойчивости

$Ck^2S(h)^2 \leq 1 - \beta$  ( $\beta$  фиксировано на  $[0, 1]$ ), если  $0 \leq \theta < 1$ , тогда

$$\begin{aligned} p_h u_{h,k}(t) &\rightarrow \sigma u(t) \text{ сильно в } V, \quad t \in [0, T], \\ q_h \delta u_{h,k}(t) &\rightarrow u'(t) \text{ сильно в } H, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

где  $u$  — решение исходного неравенства (8.3). ■

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, обратим внимание на то, что мы будем выбирать  $a(.,)$ ,  $\tilde{a}(.)$  так, как это было сделано в разд. 6.3.3, и, если это не будет приводить к недоразумениям, опускать операторы  $q_h$ ,  $p_h$ ,  $\sigma$ .

Займемся сейчас оценкой величины

$$X(t) = |u' - q_h \delta u_{h,k}|^2 + \tilde{a}(u(t) - p_h u_{h,k}(t)),$$

которую в развернутом виде запишем следующим образом:

$$X(t) = X_1(t) - 2X_2(t) + X_3(t),$$

где

$$X_1(t) = |u'|^2 + \tilde{a}(u),$$

$$X_2(t) = (u', \delta u_{h,k}) + \tilde{a}(u, p_h u_{h,k}),$$

$$X_3(t) = |\delta u_{h,k}|^2 + \tilde{a}(p_h u_{h,k}).$$

Используя введенные выше предположения и леммы относительно интегрирования по частям, первое из слагаемых приведем к виду

$$X_1(t) = 2 \int_0^t (u'', u') ds + 2 \int_0^t a(u, u') ds + a(u_0) + |u'(0)|^2. ■$$

Проанализируем второе слагаемое. Пусть  $nk$  таково, что  $t \in [nk, (n+1)k]$ ; положим

$$\tau_k u = \sum_{i=0}^{N-1} u^{i+1} \chi_k^i, \quad \text{где } u' = u(ik).$$

Напомним, что  $u_{h,k} = \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i$  и что форма  $a(.,)$  симметрична и не зависит от времени. Нетрудно получить, что (оператор  $p_h$

опускаем)

$$\tilde{a}(u(t), p_h u_{h,k}(t)) = \int_{nk}^t \tilde{a}(u', u_h^n) ds + \tilde{a}(u^n, u_h^n).$$

Для  $i = 1, \dots, N$  имеем равенство

$$\int_{(i-1)k}^{ik} \tilde{a}(u', u_h^{i-1}) ds = \tilde{a}(u^i, u_h^{i-1}) - \tilde{a}(u^{i-1}, u_h^{i-1}),$$

добавляя к обеим частям которого величину  $\tilde{a}(u^i, u_h^i)$ , находим

$$\tilde{a}(u^i, u_h^i) = \int_{(i-1)k}^{ik} \tilde{a}(u', u_h^{i-1}) ds + \tilde{a}(u^i, u_h^i - u^{i-1}) + \tilde{a}(u^{i-1}, u_h^{i-1}),$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{a}(u(t), p_h u_{h,k}(t)) &= \int_0^t \tilde{a}(u', p_h u_{h,k}) ds + \int_0^{nk} \tilde{a}(\tau_k u, p_h \delta u_{h,k}) ds + \\ &\quad + \tilde{a}(u(0), u_{h,k}(0)). \end{aligned}$$

Оценим теперь величину  $(u', \delta u_{h,k})$  (речь все время идет о втором слагаемом). Имеем

$$(u', \delta u_{h,k}) = \int_{nk}^t (u'', \delta^n) ds + (u'(nk), \delta^n).$$

С другой стороны,

$$\int_{(i-1)k}^{ik} (u'', \delta^{i-1}) ds = (u'(ik), \delta^{i-1}) - (u'((i-1)k), \delta^{i-1}),$$

добавляя к обеим частям этого равенства величину  $(u'(ik), \delta^{i-1})$ , получаем

$$\begin{aligned} (u'(ik), \delta^i) &= \int_{(i-1)k}^{ik} (u'', \delta^{i-1}) ds + \int_{(i-1)k}^{ik} (u'(ik), \gamma^i) ds + \\ &\quad + (u'((i-1)k), \delta^{i-1}), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(u', \delta u_{h,k}) = \int_0^t (u'', q_h \delta u_{h,k}) ds + \int_0^{nk} (\tau_k u', q_h \gamma u_{h,k}) ds + (u'(0), q_h \delta^0).$$

Таким образом, в выражении для  $X_2$  можно перейти к пределу, что дает

$$\lim X_2(t) = X_1(t).$$

Исследуем теперь третье слагаемое. Запишем сначала неравенство в интегральной форме. Для этого используем обозначения:

$$\begin{aligned} u_{h,k}(t) &= \sum_{i=0}^N u_h^i \chi_k^i(t), \\ u_{h,k}^0(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} (u_h^i + \theta [u_h^{i+1} - u_h^i]) \chi_k^i(t), \\ \delta u_{h,k}(t) &= \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{u_h^{i+1} - u_h^i}{k} \right) \chi_k^i(t), \\ du_{h,k}(t) &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u_h^{i+1} - u_h^{i-1}}{2k} \chi_k^i(t), \\ \gamma u_{h,k}(t) &= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{u_h^{i+1} - 2u_h^i + u_h^{i-1}}{k^2} \chi_k^i(t). \end{aligned}$$

Неравенство (9.14) можно с применением этих обозначений написать в интегральной форме для  $t \in [k, T-k]$ :

$$(9.30) \quad \int_k^t (\gamma u_{h,k} + A_h u_{h,k}^0, du_{h,k}) ds \leq \int_k^t (\gamma u_{h,k} + A_h u_{h,k}^0, v_{h,k}) ds + \\ + \int_k^t (f_{h,k}, du_{h,k} - v_{h,k}) ds,$$

где  $v_{h,k} = \sum_{i=1}^{N-1} v_h^i \chi_k^i$ , причем

$$p_h v_{h,k} \rightarrow \sigma u' \text{ сильно в } L^2(0, T; F) \text{ и } v_h^i \in K_h.$$

С другой стороны, для  $t \in [nk, (n+1)k]$ ,  $n \geq 1$ , имеем

$$(9.31) \quad \int_k^{(n+1)k} = \int_k^{(n+1)k} - \int_t^{(n+1)k} = \sum_{i=1}^n \int_{ik}^{(i+1)k} - \int_t^{(n+1)k}, \\ \int_{ik}^{(n+1)k} (\gamma u_{h,k}^0 + A_h u_{h,k}, du_{h,k}) ds =$$

$$(9.32) \quad = \left( \frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{k} + Au^{i+0}, \frac{\delta^i + \delta^{i-1}}{2} \right) k = \\ = \frac{1}{2} \{ |\delta^i|^2 - |\delta^{i-1}|^2 + (Au^{i+0}, \delta^i + \delta^{i-1}) k \},$$

откуда с использованием равенств (9.31), (9.32), (9.26) и условия  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$  находим, что

$$(9.33) \quad \begin{aligned} 2 \int_k^t (\gamma u_{h,k} + A_h u_{h,k}^0, du_{h,k}) ds = \varepsilon(k) + |\delta u_{h,k}(t)|^2 - \\ - \left| \varepsilon u_{h,k}(0) \right|^2 + \frac{1}{2} \left\{ [a(u_{h,k}(t+k)) + a(u_{h,k}(t)) - \right. \\ \left. - a(u_{h,k}(k)) - a(u_{h,k}(0))] + (1-\theta)[a(u^1 - u^0) - \right. \\ \left. - a(u^{n+1} - u^n)] + \theta \sum_{i=1}^n a(u^{i+1} - u^{i-1}) \right\}. \end{aligned}$$

Замечая, что  $\frac{1}{2} a(u_{h,k}(t)) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) a(u_{h,k}(t))$ , из неравенства (9.30) с учетом (9.33) имеем

$$(9.34) \quad \begin{aligned} X_3(t) \leqslant |\delta u_{h,k}(0)|^2 - \frac{1}{2} \left\{ [a(u_{h,k}(t+k)) + a(u_{h,k}(t)) - \right. \\ \left. - a(u_{h,k}(k)) - a(u_{h,k}(0))] + (1-\theta)[a(u^1 - u^0) - \right. \\ \left. - a(u^{n+1} - u^n)] + \theta \sum_{i=1}^n a(u^{i+1} - u^{i-1}) \right\} + \\ + 2 \int_k^t (\gamma u_{h,k} + A_h u_{h,k}^0, v_{h,k}) ds - 2 \int_k^t (f_{h,k}, du_{h,k} - v_{h,k}) ds. \end{aligned}$$

Переходя здесь к пределу, получаем

$$\lim X_3(t) = |u'(0)|^2 + a(u(0)) + 2 \int_0^t (u'' + Au, u') ds.$$

Собирая полученные результаты, найдем, что

$$\lim X(t) = \lim X_1(t) - 2 \lim X_2(t) + \lim X_3(t) = 0,$$

что и доказывает теорему. ■

## 10. Численное решение неравенств второго порядка по $t$

В этом разделе мы займемся решением задач I и II разд. 8, упростив несколько их постановку. Результаты численного исследования позволяют нам сравнить достоинства и недостатки явных и неявных схем, а также точность предложенных аппроксимаций в зависимости от  $h$  и  $k$ .

## 10.1. Решение задачи I

Основываясь на примере I, будем разыскивать для  $t \in [0, T]$  решение неравенства

$$(10.1) \quad \begin{aligned} & (u'', v - u') + a_1(u', v - u') + a_0(u, v - u') + j(v) - \\ & - j(u') \geq (f, v - u') \quad \forall v \in V, u' \in V, \\ & u(0) = u_0, u'(0) = u'_0, \end{aligned}$$

где

$\Omega$  — открытая ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$  с границей

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ на } \Gamma_0\},$$

$$j(v) = g \int_{\Gamma_1} |v| d\Gamma.$$

Будем сравнивать решение  $u$  задачи (10.1) с решением  $\tilde{u}$  „квазистатической“ задачи (см. книгу Дюво и Лионса [1]):

$$(10.2) \quad \begin{aligned} & a_1(\tilde{u}', v - \tilde{u}') + a_0(\tilde{u}, v - \tilde{u}') + j(v) - j(\tilde{u}') \geq (f, v - \tilde{u}') \\ & \forall v \in V, \tilde{u}' \in V, \tilde{u}(0) = \tilde{u}, \tilde{u}'(0) = \tilde{u}'_0. \end{aligned}$$

В обеих задачах мы полагаем:

$$a_0 = a_1 = a, \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v dx,$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ (см. рис. 10.1),}$$

$$f = 40 \sin 2\pi x,$$

$$g = 0,2.$$

Дискретизация области  $\Omega$ , как и определение пространства  $V_h$  и дискретизации  $a(u, v)$  и  $f$ , определяется обычным образом.

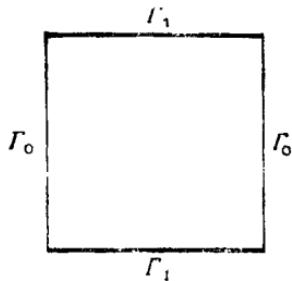


Рис. 10.1.

В вычислениях использованы значения

$$h = 1/20, \quad k = 10^{-3}.$$

Начальные данные были приняты в виде

$$(10.3) \quad u_0 = 0, \quad u'_0 = 0,$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}'_0 = 0,$$

$$(10.4) \quad u_0 = 0, \quad u'_0 = 0,2,$$

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}'_0 = 0,2.$$

Оба неравенства аппроксимировались полунеявными схемами. Полагая

$$\delta^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{k}, \quad \frac{u^n + u^{n+1}}{2} = u^n + \frac{k}{2} \delta^n,$$

запишем дискретизацию неравенства (10.1) в виде

$$\left( \frac{\delta^n - \delta^{n-1}}{k}, v - \delta^n \right) + a_1(\delta^n, v - \delta^n) + a_0 \left( u^n + \frac{k}{2} \delta^n, v - \delta^n \right) + \\ + j(v) - j(\delta^n) \geq (f, v - \delta^n) \quad \forall v \in V,$$

дискретизацию задачи (10.2) — в виде

$$a_1(\delta^n, v - \delta^n) + a_0 \left( u^n + \frac{k}{2} \delta^n, v - \delta^n \right) + j(v) - j(\delta^n) \geq (f, v - \delta^n), \\ v \in V.$$

Сходимость  $u(t) \rightarrow \tilde{u}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  оценивалась при помощи величины

$$D = \sup_{M \in \Omega_h} |u_h(M) - \tilde{u}_h(M)|.$$

Результаты, представленные в табл. 10.1, подтверждают, что указанная сходимость в действительности имеет место.

Для решения обоих неравенств (методом верхней релаксации на каждом шаге по времени) потребовалось 5 м (до  $t = 10$ ) на ЭВМ СII 10070. Результаты, полностью аналогичные тем, которые представлены в табл. 10.1, получены при замене пространства  $V$  множеством

$$K = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0, v \geq 0 \text{ на } \Gamma_1\}$$

и для  $g = 0$ . ■

Таблица 10.1

$D$	$t$	0,5	2	4	8
Случай (10.3)		$2,1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
Случай (10.4)		$2,2 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$

## 10.2. Решение задачи II

Речь пойдет о решении неравенства

$$(10.5) \quad (u'' - \Delta u - f, v - u') \geqslant 0 \quad \forall v \in K, u \in \mathcal{K}_0,$$

где

$V = H_0^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  — открытая ограниченная область из  $\mathbb{R}^2$

$K = \{v | v \in V, v \geqslant 0, \text{ п. в. в } \Omega\}$ ,

$\mathcal{K}_0 = \{v | v, v' \in L^2(0, T; V), v'' \in L^2(0, T; V')\}$ ,

заданы:  $v(0) = u_0$ ,  $v'(0) = u_1$ ,  $v' \geqslant 0$ , п. в. на  $Q = ]0, T[ \times \Omega$ .

Положим  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ ;  $f, u_0, u_1$  зададим таким образом, чтобы получилось точное решение

$$u = \begin{cases} 10 \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right)x(1-x)y(1-y), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}, \\ 10x(1-x)y(1-y), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}, \\ 10\left(1 - \sin\frac{3\pi}{2}t\right)x(1-x)y(1-y), & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 = T. \end{cases}$$

Для значений  $t$  из промежутка от 0 до  $1/3$  решение „растет“ (см. рис. 10.2), стабилизируется для  $t$  от  $1/3$  до  $2/3$  и для  $t$  от  $2/3$  до 1 снова начинает расти. Для того чтобы эта задача на самом деле была неравенством (а не уравнением), правая часть была выбрана в виде

$$f = \begin{cases} u'' - \Delta u & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}, \\ -\Delta u - \left(t - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - t\right), & \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}, \\ u'' - \Delta u, & \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Дискретизация пространства  $V$  производилась обычным образом. В вычислениях использовалось

$$h = 1/20.$$

### 10.2.1. Описание схем

Аппроксимация неравенства производилась при помощи схем, описание которых приведено выше. Для всех случаев

$$u_h^0 = u(0) = 0, \quad \delta_h^0(M) = u'(0, M), \quad u_h^1 = u_h^0 + k\delta_h^0, \\ \delta_h^i = (u_h^{i+1} - u_h^i)/k.$$

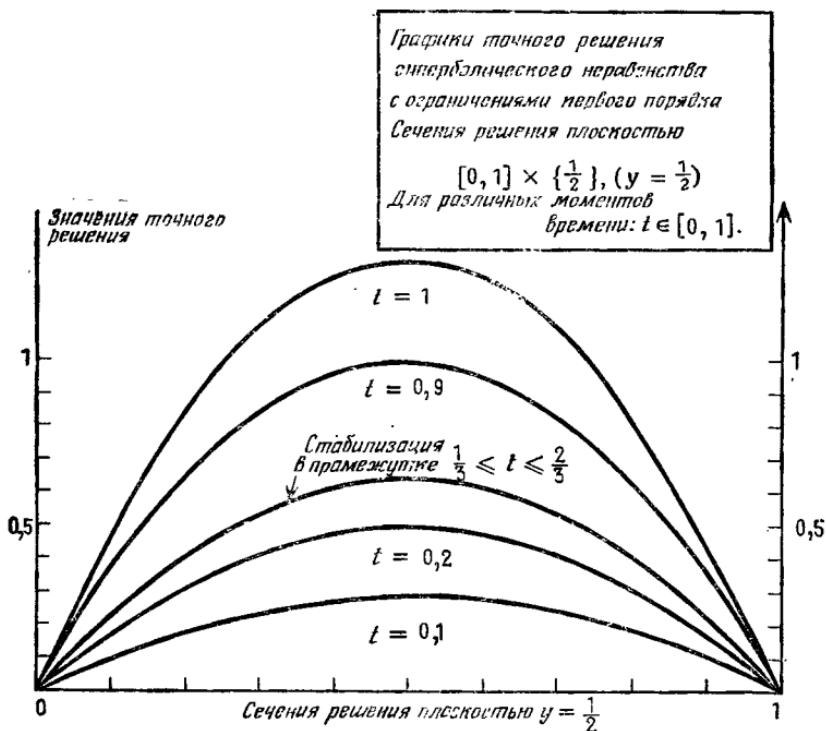


Рис. 10.2

Схемы записываются следующим образом (индекс  $h$  опущен):  
**Явная схема:**

$$\frac{\tilde{\delta}^i - \delta^{i-1}}{k} - \Delta u^i - f^i = 0,$$

$$\delta^i = \max [\tilde{\delta}^i, 0], \quad u^{i+1} = u^i + k\delta^i.$$

**Схема, неявная в уравнении:**

$$\frac{\tilde{\delta}^i - \delta^{i-1}}{k} - \Delta \tilde{u}^i - f^i = 0, \quad \text{где } \tilde{u}^i = u^{i-1} + k\delta^i,$$

$$\delta^i = \max [\tilde{\delta}^i, 0], \quad u^{i+1} = u^i + k\delta^i.$$

**Схема, полунеявная в неравенстве:**

$$\left( \frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{k} - \Delta \left( \frac{u^i + u^{i+1}}{2} \right) - f^i, v - \delta^i \right) \geq 0 \quad \forall v \geq 0, \quad \delta^i \geq 0,$$

где  $u^{i+1} = u^i + k\delta^i$ .

**Схема, неясная в неравенстве:**

$$\left( \frac{\delta^i - \delta^{i-1}}{k} - \Delta u^{i+1} - f^i, v - \delta^i \right) \geq 0 \quad \forall v \geq 0, \quad \delta^i \geq 0,$$

где  $u^{i+1} = u^i + k\delta^i$ .

### 10.2.2. Результаты для различных схем

Результаты, полученные при помощи схем, описанных в разд. 10.2.1, приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2. Параболическое неравенство примера 11

$h = 1/20$			$1/h$ ECART <sub>1</sub> (точное решение — построенное решение)										
Схемы	$k$	Время	$t = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
Явная	$10^{-3}$	4 мин	2,05	7,471	4,141	6,681	3,681	6,681	6,591	4,771	2,19	10,6	—
	$5 \cdot 10^{-4}$	16 мин	1,00	3,63	7,12	9,71	9,71	9,71	9,62	8,02	6,75	4,58	—
	$2 \cdot 10^{-4}$	30 мин	0,39	1,42	2,63	3,00	3,00	3,00	2,89	2,73	2,66	2,12	—
	$10^{-4}$	57 мин	0,19	0,70	1,19	1,48	1,48	1,48	1,43	1,38	1,31	1,02	—
Неявная в уравн.	$10^{-3}$	16 мин	0,05	0,19	0,36	0,41	0,41	0,41	0,31	0,01	0,23	0,32	0,24
Полупе- ниявная в неравен- стве	$10^{-3}$	16 мин	0,02	0,10	0,19	0,22	0,22	0,22	0,12	0,16	0,37	0,46	0,40
Неявная в неравен- стве	$10^{-3}$	16 мин	0,05	0,19	0,36	0,41	0,41	0,41	0,31	0,01	0,23	0,32	0,24

При использовании схем, отличных от явной, на каждом шаге по времени использовался метод Гаусса — Зейделя или метод Гаусса — Зейделя с проекцией, значение  $\omega$  при этом выбиралось равным

$$\omega = 2 \left[ 1 + \left( \frac{1 - 2(1 - (\pi^2/2)h^2)h^2}{2 + h^2/k^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}.$$

Условие останова для метода Гаусса — Зейделя имеет вид

$$\sum_{M \in \Omega_h} |\delta_h^{(n+1)}(M) - \delta_h^{(n)}(M)| < 10^{-5},$$

где  $\delta_h^{(n)}$  — решение, найденное на  $i$ -й итерации. Эффективность используемых аппроксимаций оценивалась при помощи величины

$$\text{ECART}_1 = \sum_{M \in \Omega_h} |u_i^t(M) - u(M; ik)|.$$

Решение задач производилось на ЭВМ СИ 10070. ■

### 10.2.3. Выводы из разд. 10

Для рассматриваемой здесь задачи (10.5) мы имеем:  
 В случае явной схемы

- опасность расходимости из-за переполнения, которая существует всегда;
- устойчивость примерно при  $k/h \leq 2 \cdot 10^{-3}$ .

Для других схем

- эти схемы примерно эквивалентны,
- приемлемое значение  $k/h$  равно  $2 \cdot 10^{-2}$ ,
- при одной и той же точности эти схемы работают втрое быстрее явной. ■

## 11. Численное исследование течений среды Бингама

### 11.1. Обозначения и постановка задачи

Мы приведем здесь лишь те результаты, которые необходимы для понимания вопросов, связанных с численным исследованием, и отсылаем к книге Дюво и Лионса [1] по поводу более полного обсуждения проблемы; через  $\Omega$  будем обозначать открытую ограниченную область из  $\mathbb{R}^n$  с границей  $\Gamma$ . Ниже мы ограничимся, исключая особо сговариваемые случаи, двумерными задачами ( $n = 2$ ). Пусть  $v = \{v_1, \dots, v_n\}$  — функция со значениями в  $\mathbb{R}^n$ ; положим

$$(11.1) \quad D_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

$$(11.2) \quad D_{II}(v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}(v))^2,$$

$$(11.3) \quad a(v, w) = 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} D_{ij}(v) D_{ij}(w) dx,$$

$$(11.4) \quad j(v) = 2 \int_{\Omega} (D_{II}(v))^{1/2} dx,$$

$$(11.5) \quad B(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx,$$

$$(11.6) \quad V = \{v \mid v \in (H_0^1(\Omega))^n; \operatorname{div} v = 0\},$$

$$(11.7) \quad H = \{v \mid v \in (L^2(\Omega))^n; \operatorname{div} v = 0, v \cdot n|_{\Gamma} = 0\},$$

$H$  — замыкание  $V$  по норме  $(L^2(\Omega))^n$ , и

$$(11.8) \quad V \subset H \subset V',$$

$V$  снабжается топологией пространства  $(H_0^1(\Omega))^n$ , и через  $\|v\|$  обозначается норма  $v$  в  $V$ . Норму  $v$  в пространстве  $H$  будем обозначать через  $|v|$ .

Очевидно, что для любой  $v \in V$

$$(11.9) \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2; \quad \alpha > 0.$$

Мы рассмотрим следующую задачу:

*Задача 1.* Найти функцию  $u(t)$ , удовлетворяющую (на интервале  $[0, T]$ ) следующим условиям:

$$(11.10) \quad u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \quad u' \in L^2(0, T; V'),$$

$$(11.11) \quad (u'(t), v - u(t)) + va(u(t), v - u(t)) + B(u(t), u(t), v) + + gj(v) - gj(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)) \quad \forall v \in V, \text{ почти для всех } t,$$

$$(11.12) \quad u(0) = u_0 \in H, \quad f \in L^2(0, T; V').$$

Вариационное неравенство (11.11) в совокупности с условиями (11.10) и (11.12) представляет собой математическую модель течений жестковязкопластической среды Бингама с вязкостью  $v$  и пределом текучести  $g$  (см. цитированную выше книгу Дюво и Лионса)<sup>1)</sup>. Заметим, что при  $g=0$  мы получаем известную вариационную формулировку уравнений Навье—Стокса для ньютоновских жидкостей. Если  $g > 0$ , то наблюдаются области, где рассматриваемая среда ведет себя как жидкость с вязкостью  $v$ . Отметим, что вариационная формулировка автоматически учитывает наличие неизвестной границы, отделяющей области течения от застойных областей<sup>2)</sup>, определение этой границы представляет собой одно из главных затруднений при численном исследовании задачи.

Напомним также, что тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  в среде Бингама связан с тензором скоростей деформаций  $D_{ij}$  определяющим уравнением

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + g(D_{ij}/(D_{11})^{1/2}) + 2\mu D_{ij},$$

которое имеет смысл только в случае  $D_{11} \neq 0$ .

Если  $D_{11}=0$ , тензор напряжений не определен, и мы имеем застойную область; с ростом  $g$  эти области увеличиваются и для достаточно больших значений  $g$  могут полностью блокировать течение. Скалярная величина  $-p$  характеризует шаровую часть тензора напряжений; можно условиться, что  $p$  — это давление.

*Замечание 11.1.* Практически возможны случаи, когда в неравенстве (11.11), описывающем поведение среды Бингама ( $g > 0$ ),

<sup>1)</sup> Впервые исследование вариационной постановки этой задачи было проделано Ильюшиным в работе [1\*]. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Так называемого жесткого языка течения. — Прим. ред.

можно пренебречь нелинейными слагаемыми, обусловленными наличием трилинейной формы  $b(u, u, v)$ . Если такое упрощение допустимо, то большинство результатов, установленных ниже для двумерных задач, будут иметь место и для задач произвольного числа измерений.

Доказательства следующих ниже результатов имеются в книге Дюво и Лионса [1].

**Теорема 11.1.** В случае, когда размерность пространства  $n=2$ , задача I имеет единственное решение.

**Теорема 11.2.** Пусть  $u(t)$  — решение задачи I,  $n=2$ , тогда существуют функции  $m_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 2$ ), такие, что

$$(11.13) \quad m_{ij} \in L^\infty(Q), \quad m_{ij} = m_{ji} \quad (Q = \Omega \times ]0, T[),$$

$$(11.14) \quad \sum_{t, i=1}^2 m_{ij} m_{ij} \leq 1 \text{ н. в. в } Q,$$

$$(11.15) \quad \sum_{t, i=1}^2 m_{ij} D_{ij}(u) = \left( \sum_{t, i=1}^2 D_{ij}(u) D_{ij}(u) \right)^{1/2} \text{ н. в. в } Q,$$

$$(11.16) \quad (u', v) + va(u, v) + b(u, u, v) + \\ + V\bar{g} \int_{\Omega} \sum_{t, i=1}^2 m_{ij} D_{ij}(v) dx = (f, v) \quad \forall v \in V \text{ почти для всех } t.$$

Обратно, если выполнены условия (11.13) — (11.16) и, кроме того,

(11.17)  $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ ,  $u' \in L^2(0, T; V')$ ,  $u(0) = u_0$ ,  
то  $u$  — решение задачи I. ■

## 11.2. Численные схемы

Мы рассмотрим сейчас предельно простую схему, применение которой для аппроксимации задачи I на практике привело к хорошим результатам. Вопросы, возникающие при практической реализации, будут рассмотрены в разд. 11.3. Что касается пространственной дискретизации, то здесь для упрощения мы будем предполагать, что аппроксимация  $V_h$  пространства  $V$  является внутренней<sup>1)</sup>; по ходу дела будут указаны те незначительные изменения, которые необходимо произвести в случае, когда используется внешняя аппроксимация  $\tilde{V}_h$ . Излагаемые здесь результаты без труда можно было бы перенести на любой другой

1) Некоторые указания относительно построения пространств  $V_h$ ,  $\tilde{V}_h$  будут даны в конце этого раздела.

тип дискретизации, не затрагивая при этом основной принцип построения схемы. Для любого целого  $n$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , положим

$$(11.18) \quad f_k^{n+\theta} = \frac{1}{k} \int_{n^k}^{(n+1)^k} f(t) dt \in V' \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

Пусть задана некоторая триангуляция  $\tau_h$  области  $\Omega$ ; предположим, что  $u_h^n$  — заданный элемент из  $V_h$ , который выбран таким образом, что  $u_h^n$  стремится к  $u$  при  $h \rightarrow 0$ . Будем предполагать, что  $\|u_h^n\|$  остается при этом ограниченной. Рекуррентным образом определим теперь последовательность  $u_h^n$  элементов пространства  $V_h$ , которой поставим в соответствие „приближенные функции“. Будем писать

$$(11.19) \quad u_h^{n+\theta} = \theta u_h^{n+1} + (1-\theta) u_h^n \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

С тем, чтобы несколько упростить обозначения, последовательность, которая в действительности зависит от  $h$  и  $k$ , мы обозначим через  $u_h^n$ .

Предполагая, что  $u_h^0, \dots, u_h^n$  известны, определим элемент  $u_h^{n+1}$  как решение в  $V_h$  неравенства

$$(11.20) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + va(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + \\ & + b(u_h^{n+1}, u_h^{n+1}, v_h) + gj(v_h) - gj(u_h^{n+1}) \geq \\ & \geq (f_k^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Для  $\theta > 0$  имеем

$$(11.21) \quad u_h^{n+1} = \frac{1}{\theta} u_h^{n+\theta} - \frac{(1-\theta)}{\theta} u_h^n,$$

откуда вытекает, что

$$(11.22) \quad \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} = \frac{u_h^{n+\theta} - u_h^n}{\theta k}.$$

Следовательно, неравенство, решение которого нам нужно найти, имеет вид

$$(11.23) \quad \begin{aligned} & (u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + k\theta va(u_h^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) + \\ & + k\theta b(u_h^{n+1}, u_h^{n+1}, v_h) + k\theta gj(v_h) - k\theta gj(u_h^{n+1}) \geq \\ & \geq (u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + k\theta (f_k^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Очевидно, что при  $\theta = 0$  неравенство (11.23) смысла не имеет. В этом случае следовало бы применить полунеявную схему

$$(11.24) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + va(u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + \\ & + b(u_h^n, u_h^n, v_h - u_h^{n+1}) + gj(v_h) - gj(u_h^{n+1}) \geq \\ & \geq (f_k^{n+1}, v_h - u_h^{n+1}) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Задача (11.24) на  $V_h$  не обладает свойством коэрцитивности, что влечет за собой определенные затруднения при решении вопроса о существовании (и практическом вычислении)  $u_h^{n+1}$ . ■

Используя методы гл. 4, можно доказать

**Предложение 2.1.** В случае, когда размерность пространства  $n=2$ , неравенство (11.20) (и, следовательно, (11.23)) определяет  $u_h^{n+\theta}$  и  $u_h^{n+1}$  единственным образом, если только  $\theta > 0$  и  $k$  „достаточно мало“.

Методами, аналогичными тем, которые были использованы выше, можно доказать (подробности см. в работе Фортена [1]), что  $u_h^n$  и  $u_h^{n+\theta}$ , найденные из (11.20), при  $\theta \geq \frac{1}{2}$  обладают следующими свойствами:

$$(11.25) \quad |u_h^n|^2 \leq C \quad (0 \leq n \leq N),$$

$$(11.26) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+3}\|^2 \leq C,$$

$$(11.27) \quad \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|^2 \leq C,$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $k$  и  $h$ , если

$$(11.28) \quad kS^2(h) \leq C_0, \quad C_0 \text{ — некоторая постоянная.}$$

В случае  $\theta > \frac{1}{2}$  условие (11.28) является излишним, и мы имеем вдобавок, что

$$(11.29) \quad k \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^{n+1} - u_h^n\|^2 \leq C_1.$$

Приведенных выше оценок достаточно для того, чтобы для линейных операторов в неравенствах доказать сходимость, однако в случае неравенств (и уравнений) с нелинейными операторами этих оценок мало. Здесь необходимо получить дополнительную оценку, которая позволяет перейти к пределу, используя свойство компактности. Для этой цели применяется метод, предложенный в работе Л. Тартара и Р. Темама [1] (см. также работу Темама [2] и библиографию к ней).

Запишем неравенство (11.20) в следующей форме<sup>1)</sup>:

$$(11.30) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+\theta} - v_h(t)) \leq v a(u_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta} - v_h(t)) - \\ & - b(u_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta}, u_h^{n+\theta} - v_h(t)) + g j(v_h(t)) - g j(u_h^{n+\theta}) + \\ & + (f_k^{n+\theta}, u_h^{n+\theta} - v_h(t)) \quad \forall v_h \in L^2(0, T; V_h) \\ & \forall t \in [nk, (n+1)k]. \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть неравенства (11.30). Определяя  $u_h(t)$  как функцию, линейную на каждом интервале  $[nk, (n+1)k]$  и равную  $u_h^n$  в точке  $nk$ , будем иметь

$$(11.31) \quad \begin{aligned} \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+\theta} - v_h(t)) = & \frac{1}{k} (u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+\theta}) - \\ & - (u'_h(t), v_h(t)). \end{aligned}$$

Пусть теперь  $v_h(t) = \frac{1}{\sigma} \int_{t-\sigma}^t u_h(s) ds$ ; здесь (для удобства) мы полагаем  $u_h(s) = u_h^0$  для  $s \leq 0$ .

Интегрируя от 0 до  $T$ , находим

$$(11.32) \quad \begin{aligned} & - \int_0^T (u'_h(t), v_h(t)) dt = \int_0^T (u_h(t), v'_h(t)) dt + (u_h(0), v_h(0)) - \\ & - (u_h(T), v_h(T)) = \int_0^T \frac{(u_h(t), u_h(t) - u_h(t-\sigma))}{\sigma} dt + \\ & + |u_h^0|^2 - (u_h(T), v_h(T)). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$(11.33) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \frac{(u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+\theta})}{k} dt = \sum_{n=0}^{N-1} (u_h^{n+1} - u_h^n, u_h^{n+\theta}) = \\ & = \frac{(2\theta-1)}{2} \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|^2 + \frac{1}{2} |u_h^N|^2 - \frac{1}{2} |u_h^0|^2. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Заметим, что в  $b(u, v, w) = -b(u, w, v) = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) v_j w_j dx$  (формула интегрирования по частям) и что  $b(u, v, v) = 0$  для  $u \in V$  и  $\forall v \in (H_0^1(\Omega))^n$ .

Имеем также, что

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \frac{(u_h(t), u_h(t) - u_h(t-\sigma))}{\sigma} dt = \int_0^T \frac{|u_h(t)|^2}{\sigma} dt - \\
 & - \int_{-\sigma}^0 \frac{(u_h(t), u_h(t-\sigma))}{\sigma} dt - \int_0^\sigma \frac{(u_h(t), u_h^0)}{\sigma} dt = \\
 (11.34) \quad & = \frac{1}{2} \int_{-\sigma}^T \frac{|u_h(t) - u_h(t-\sigma)|^2}{\sigma} dt + \frac{1}{2} \int_0^\sigma \frac{|u_h(t)|^2}{\sigma} dt - \\
 & - \int_0^\sigma \frac{(u_h(t), u_h^0)}{\sigma} dt + \frac{1}{2} \int_{T-\sigma}^T \frac{|u_h(t)|^2}{\sigma} dt.
 \end{aligned}$$

Следовательно, используя неравенство (11.30), получим, что

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{-\sigma}^T \frac{|u_h(t) - u_h(t-\sigma)|^2}{\sigma} dt + \frac{(2\theta-1)}{2} \sum_{n=0}^{N-1} |u_h^{n+1} - u_h^n|^2 + \\
 & + \frac{1}{2} |u_h^N|^2 + \frac{1}{2} \int_{T-\sigma}^T \frac{|u_h(t)|^2}{\sigma} dt - (u_h^N, v_h(T)) + \\
 (11.35) \quad & + \frac{1}{2} |u_h^0|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\sigma \frac{|u_h(t)|^2}{\sigma} dt - \left( u_h^0, \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma u_h(t) dt \right) \leqslant \\
 & \leqslant \int_0^T (f_h(t), \tilde{u}_h(t) - v_h(t)) dt + g \int_0^T j(v_h(t)) dt,
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}_h$  — кусочно-постоянная функция, равная  $u_h^{n+\theta}$  на  $[nk, (n+1)k]$ .

С другой стороны, имеет место неравенство

$$(11.36) \quad |(u_h^N, v_h(T))| \leqslant \frac{1}{2} |u_h^N|^2 + \frac{1}{2} |v_h(T)|^2$$

и, кроме того,

$$(11.37) \quad |v_h(T)|^2 \leqslant \frac{1}{\sigma^2} \left| \int_{T-\sigma}^T u_h(t) dt \right|^2 \leqslant \frac{1}{\sigma} \int_{T-\sigma}^T |u_h(t)|^2 dt.$$

Аналогично,

$$(11.38) \quad \left| \left( u_h^0, \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma u_h(t) dt \right) \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_0^\sigma \frac{|u_h(t)|^2}{\sigma} dt + \frac{1}{2} |u_h^0|^2.$$

Следовательно,

$$(11.39) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \frac{|u_h(t) - u_h(t-\sigma)|^2}{\sigma} dt \leq \int_0^T (f_h(t), \tilde{u}_h(t) - v_h(t)) dt + \\ + g \int_0^T j(v_h(t)) dt.$$

Оценим теперь правую часть. Рассмотрим сначала линейные слагаемые

$$(11.40) \quad v \int_0^T a(\tilde{u}_h(t), \tilde{u}_h(t) - v_h(t)) dt \leq \frac{v}{2} \int_0^T \|\tilde{u}_h(t)\|^2 dt + \\ + \frac{v}{2} \int_0^T \|\tilde{u}_h(t) - v_h(t)\|^2 dt \leq \frac{v}{2} \int_0^T \|\tilde{u}_h(t)\|^2 dt + \\ + v \int_0^T \|\tilde{u}_h(t)\|^2 dt + v \int_0^T \|v_h(t)\|^2 dt.$$

С другой стороны,

$$\int_0^T \|v_h(t)\|^2 dt \leq C \int_0^T \|u_h(t)\|^2 dt \leq Cte, \text{ если } kS^2(h) \leq C.$$

Аналогично,

$$(11.41) \quad \int_0^T (f_k^{n+6}, \tilde{u}_h(t) - v_h(t)) dt \leq C \int_0^T |f(t)|_*^2 dt + \text{Const.}$$

Для нелинейных членов имеем равенство

$$(11.42) \quad \int_0^T b(\tilde{u}_h(t), \tilde{u}_h(t) - v_h(t)) dt = \int_0^T b(\tilde{u}_h(t), v_h(t), \tilde{u}_h(t)) dt,$$

из которого с использованием оценок разд. 3 гл. 6 книги Дюво и Лионса [1] получаем

$$(11.43) \quad \int_0^T b(\tilde{u}_h(t), v_h(t), \tilde{u}_h(t)) dt \leq C \int_0^T |\tilde{u}_h(t)| \|\tilde{u}_h(t)\| \|v_h(t)\| dt \leq \\ \leq C' \int_0^T \|\tilde{u}_h(t)\|^2 dt + C' \int_0^T \|v_h(t)\|^2 dt \leq \text{Const.}$$

И наконец,

$$(11.44) \quad g \int_0^T j(v_h(t)) dt \leq C + g \int_0^T \|v_h(t)\|^2 dt \leq \text{Const.}$$

Таким образом, мы доказали, что приближенная функция  $u_h(t)$  удовлетворяет условию

$$(11.45) \quad \int_0^{T-\sigma} |u_h(t+\sigma) - u_h(t)|^2 dt \leq C\sigma,$$

если  $kS^2(h) \leq C_0$ , где  $C_0$  — некоторая константа; следовательно, для любого  $\epsilon > 0$  имеем утверждение

$$(11.46) \quad u_h(t) \text{ ограничена в } H^{1/2-\epsilon}(0, T; H). \blacksquare$$

Полученные выше оценки в совокупности с компактностью вложения  $V \rightarrow H$  позволяют перейти к пределу. Таким образом, имеет место

**Теорема 11.3.** Предположим, что  $h$  и  $k \rightarrow 0$  произвольно, если  $\theta > \frac{1}{2}$ , подчиняясь условию (11.28), если  $\theta = \frac{1}{2}$ . Тогда  $u_h \rightarrow u$   $*$ -слабо в  $L^\infty(0, T; H)$ , слабо в  $L^2(0, T; V)$ .  $\blacksquare$

**Замечание 11.2.** По поводу подробностей доказательства теоремы 11.3 и результатов, касающихся сильной сходимости, мы отсылаем к работе Фортена [1].  $\blacksquare$

### Построение внутренних и внешних аппроксимаций пространства $V$

Существуют три основных способа аппроксимации  $V$  пространством  $V_h$ :

(i) внутренняя аппроксимация  $V_h \subset V$ ;

(ii) внутренняя аппроксимация пространства  $(H_0^1(\Omega))^n$ , ( $n=2$  или 3), когда условие  $\operatorname{div} v = 0$  удовлетворяется только приближенно;

(iii) аппроксимация пространствами функций, не лежащими в  $(H^1(\Omega))^n$  (несовместные аппроксимации)<sup>1)</sup>.  $\blacksquare$

Исчерпывающего исследования затронутых в этом разделе вопросов здесь мы предпринимать не будем и приведем лишь некоторые сведения общего характера. По поводу доказательств мы отсылаем к работам, указанным в списке литературы, в частности к работе Крузей и Равьяра [1].

Будем предполагать, что  $\Omega$  — полиздрическая область из  $\mathbb{R}^n$ ; пусть  $\mathcal{T}_h$  — разбиение  $\Omega$  на невырожденные симплексы  $K^2$ ; через

<sup>1)</sup> Последний термин заимствован из метода конечных элементов, где в свою очередь он появился из теории упругости и строительной механики. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Не смешивать с замкнутым выпуклым множеством из  $V$  (см. выше). — Прим. перев.

$h(K)$  (соответственно  $\rho(K)$ ) будем обозначать диаметр  $K$  (диаметр сферы, вписанной в  $K$ ) и предполагать, что

$$\sup_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h(K)}{\rho(K)} = \sigma < \infty.$$

Пусть  $K \in \mathcal{T}_h$ ,  $a_{i,K}$ ,  $i = 1, 2, \dots, (n+1)$  — вершины  $K$ ; через  $\lambda_{i,K}(x)$  обозначаются барицентрические координаты точки  $x$  из  $\mathbb{R}^n$  относительно точек  $a_{i,K}$ .

*Пример 1* (случай (ii)). Рассмотрим (для простоты) случай  $n=2$ ; через  $W_h$  обозначим пространство функций  $v_h$ , непрерывных в  $\bar{\Omega}$  и таких, что

- 1)  $v_h|_K \in$  пространству полиномов степени  $\leq 2(P_2)$   $\forall K \in \mathcal{T}_h$ ,
- 2)  $v_h|_\Gamma = 0$ .

Любая функция  $v_h \in W_h$  определяется своими значениями в вершинах  $a_{i,K}$  и в серединах  $a_{ij,K}$  ребер  $[a_{i,K} a_{j,K}]$ .

Определим далее  $V_h$  — подпространство  $(H_0^1(\Omega))^2$ , не являющееся, однако, подпространством  $V$ :  $v_h \in W_h^2$  и

$$(11.47) \quad \int_K \operatorname{div} v_h dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Пусть  $u_h$  (соответственно  $u$ ) — решение приближенной (непрерывной) линейной стационарной задачи; можно доказать (см. работу Крузей и Равьяра [1]), что

$$(11.48) \quad \|u_h - u\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq Ch,$$

где  $h$  — максимум диаметров  $K \in \mathcal{T}_h$ . ■

*Пример 2* (случай (ii)). Оценка (11.48) не дает порядка аппроксимации, на который можно было бы рассчитывать, используя полиномы 2-й степени. Этот факт обусловлен, очевидно, тем обстоятельством, что, с формальных позиций, аппроксимация (11.47) условия « $\operatorname{div} v = 0$ » имеет только первый порядок.

Оказывается, оценки можно улучшить без введения полиномов 3-й степени общего вида. Будем вместо  $\lambda_{i,K}(x)$  писать  $\lambda_i$  и определим

$$(11.49) \quad P_K = \text{пространство, порожденное полиномами } \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1 \lambda_2, \lambda_2 \lambda_3, \lambda_3 \lambda_1 \text{ и } \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

Введем теперь пространство

$$(11.50) \quad W_h = \{v_h | v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h = 0 \text{ на } \Gamma\};$$

любой элемент  $v_h \in W_h$  определяется своими значениями в вершинах  $a_{i,K}$ , серединах ребер  $a_{ij,K}$  и центрах тяжести  $K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Определим далее пространство

$$(11.51) \quad V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in W_h^1, \int_K q \operatorname{div} v_h dx = 0 \quad \forall q \in P_1 \right. \\ \left. (\text{полиномы степени } \leq 1), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Можно доказать (см. работу Крузей и Равьяра [1]), что

$$(11.52) \quad \|u_h - u\|_{(H^1(\Omega))^2} \leq Ch^2. \quad \blacksquare$$

Метод, приведенный в примере 1, был предложен в работе Фортена [1]; там же произведено обобщение рассмотренных выше аппроксимаций на случай  $n=3$  и исследованы аппроксимации более высокого порядка. ■

*Пример 3* (случай (i)). Для  $n=2$  классический способ построения функций, удовлетворяющих условию  $\operatorname{div} v = 0$ , состоит в переходе к функции тока, при этом используется тот факт, что в случае односвязной ограниченной открытой области  $\Omega$  отображение

$$(11.53) \quad \psi \rightarrow u = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right\}$$

представляет собой изоморфизм из  $H^1(\Omega)$  на  $V$ . Далее строится аппроксимация пространства  $H^2(\Omega)$  при помощи отображения (11.53) полиномов пятой степени, заданных на  $K$  (оэтому по-виду см. работы Фортена [1], Томассе [1], Борзенберже [1] и курс лекций Темама [2]).

*Пример 4* (случай (iii)). Положим по определению (как и выше, для простоты предполагая  $n=2$ )

$$(11.54) \quad W_h = \left\{ v_h \mid v_h |_K \in P_1, \forall K, v_h \text{ непрерывна в точках,} \right. \\ \left. \text{лежащих на серединах отрезков } [a_{i,K}, a_{j,K}], \text{ и} \right. \\ \left. \text{равна нулю в точках } a_{i,K}, \text{ принадлежащих} \right. \\ \left. \text{границе } \Gamma \right\}.$$

Введем пространство

$$(11.55) \quad V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in (W_h)^2, \int_K \operatorname{div} v_h dx = 0 \quad \forall K \right\}.$$

Форма  $a(u, v)$  в этом случае на  $V_h$  не определена, и поэтому мы вводим новую форму

$$(11.56) \quad a_h(u_h, v_h) = 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K D_{ij}(u_h) D_{ij}(v_h) dx,$$

что позволяет дать определение приближенного решения  $u_h$  задачи Стокса:

$$(11.57) \quad a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v \in V_h, u_h \in V_h.$$

Оценка погрешности здесь совпадает с оценкой (11.48) (см. работу Крузей и Равьяра [1]). ■

### 11.3. Численные результаты

Предположим, что пространство  $V_h$  задано, тогда задача сводится к численному решению неравенства (11.23)<sup>1)</sup>. Если ввести нелинейный (конечномерный) оператор  $A$  по формуле

$$(11.58) \quad (Au, v) = (u, v) + k\theta a(u, v) + k\theta b(u, v),$$

то это неравенство перепишется в виде

$$(11.59) \quad (Au_h^{n+0}, v_h - u_h^{n+0}) + k\theta g[i(v_h) - i(u_h^{n+0})] \geqslant (u_h^n + k\theta f_h^{n+0}, v_h - u_h^{n+0}) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Используя дискретный аналог теоремы 11.2, заключаем, что задача (11.59) эквивалентна следующей (которая отражает то обстоятельство, что  $\{u_h^{n+0}, q_h^{n+0}\}$  — седловая точка соответствующего лагранжиана):

$$(11.60) \quad (Au_h^{n+0}, v_h) + k\theta \sqrt{2}g(q_h^{n+0}, Dv_h) = (u_h^n + k\theta f_h^{n+0}, v_h) \\ \forall v_h \in V_h^0,$$

$$(11.61) \quad (Du_h^{n+0}, q - q_h^{n+0}) \leqslant 0 \quad \forall q \in K,$$

где

$$(11.62) \quad K = \{q \mid q_{ij} = q_{ji} \in L^\infty(\Omega), |q| \leqslant 1\}.$$

Применим здесь алгоритм Удзавы; для упрощения записи положим

$$(11.63) \quad u_h^{n+0} = \omega, \quad q_h^{n+0} = m.$$

Начиная с произвольного элемента  $m^0$ , определим  $\omega^1, m^1, \omega^2, m^2, \dots$  следующим образом:

$$(11.64) \quad (Aw^{s+1}, v_h) + k\theta \sqrt{2}g(m^s, Dv_h) = (u^s + k\theta f_h^{n+0}, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \\ m^{s+1/2} = m^s + \rho \theta k \sqrt{2}g D\omega^{s+1}, \\ m^{s+1} = P_K(m^{s+1/2}), \quad P_K — оператор проектирования на множество K в пространстве (L^2(\Omega))^4.$$

Если параметр  $\rho > 0$  в алгоритме (11.64) выбран таким образом, что

$$(11.65) \quad \rho < v/k\theta g^2,$$

<sup>1)</sup> Ниже используется обозначение  $Dv = \{D_{ij}(v)\}$

<sup>2)</sup> В случае несовместных конечных элементов интегралы по области  $\Omega$  здесь заменяются суммой интегралов по симплексам, на которые разбивается область  $\Omega$ .

то можно доказать (см. работу Фортена [1]), что приведенный выше алгоритм сходится.

В цитированной выше работе Фортена проведено также исследование алгоритма Эрроу—Гурвица, там же можно найти дополнительные сведения, касающиеся реализации этих алгоритмов. По поводу исследования различных способов ускорения сходимости мы отсылаем к работе Бежи [1].

Естественно, что наибольший интерес в проведенных численных экспериментах представляет задача определения областей застоя<sup>1)</sup>.

По поводу этой задачи отметим, что в случае, когда  $\sum m_{ij}^2 < 1$ , условиям (11.15) и (11.14) одновременно можно удовлетворить, только полагая  $D_{ij}u = 0$ .

Следовательно,

(11.66)    если  $\sum m_{ij}^2(x) < 1$ , то точка  $x$  принадлежит застойной области.

Эта информация используется совместно с информацией о значении  $|Du_h^{n+0}(x)|$ , что дает хорошие результаты при практическом построении области застоя.

### *Некоторые численные результаты*

Мы приводим здесь лишь некоторые из результатов, полученных, в частности, в работах Фортена [1] и Бежи [3].

В работе Фортена используется метод конечных элементов, описание которого дано в примере 1. Представленные здесь результаты цитированной выше работы Бежи получены при помощи метода конечных разностей, следовательно, в данном случае мы имеем дело с внешней аппроксимацией (отметим, что при обобщении изложенных выше теоретических результатов на случай внешних аппроксимаций возникают дополнительные осложнения технического характера).

На рис. 11.1 показано распределение областей застоя (заштрихованы) в момент времени 0,005 при нулевой правой части и ненулевых начальных условиях (данная задача входит в рамки общей теории).

Распределение областей застоя для значения  $g$  несколько большего, чем то, которому соответствует рис. 11.1 (при прочих равных условиях), представлено на рис. 11.2. Видно, что — в соответствии с тем, как это и должно быть из физических соображений — область застоя растет с ростом  $g$ , что подтверждается рис. 11.3, соответствующим еще большему значению  $g$ .

Рис. 11.4 соответствует случаю, когда  $f \neq 0$ , краевые усло-

1) Относительно которых известно очень мало результатов, отличных от тех, которые „очевидны“ из численных экспериментов.

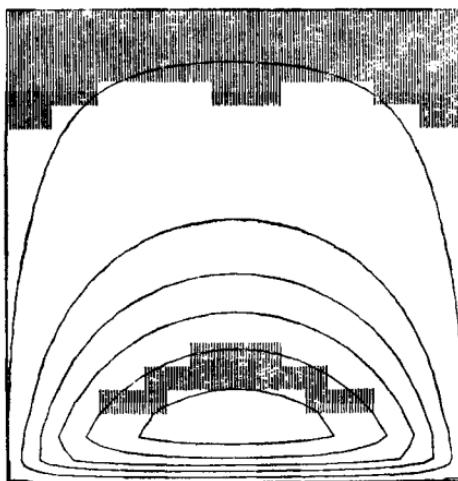


Рис. 11.1. Момент времени  $t = 0,005$ ;  $g = 2,5$ .

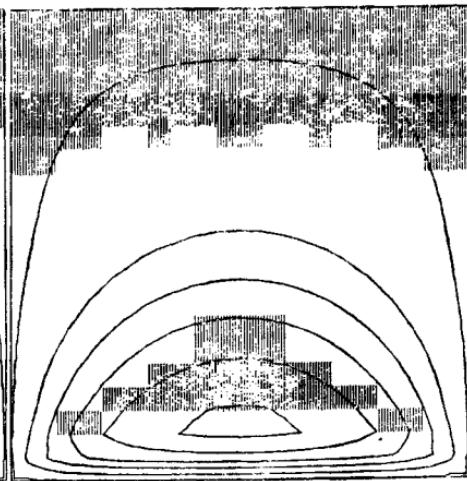
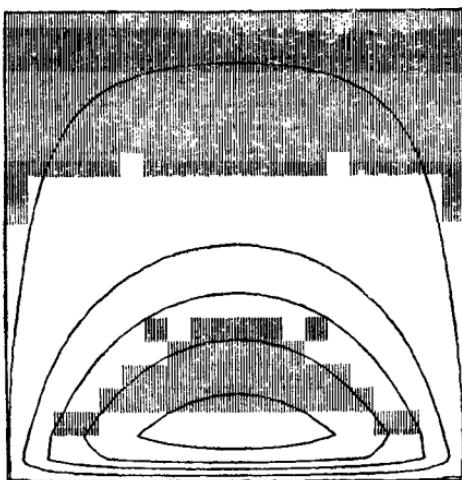


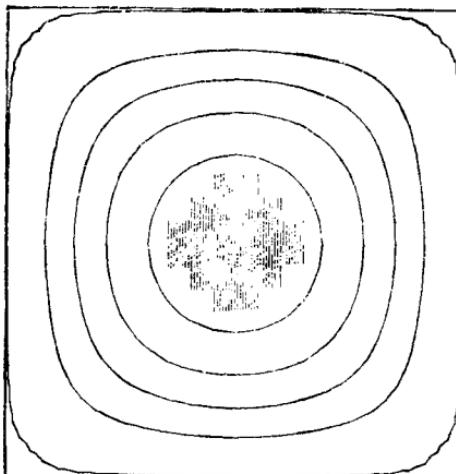
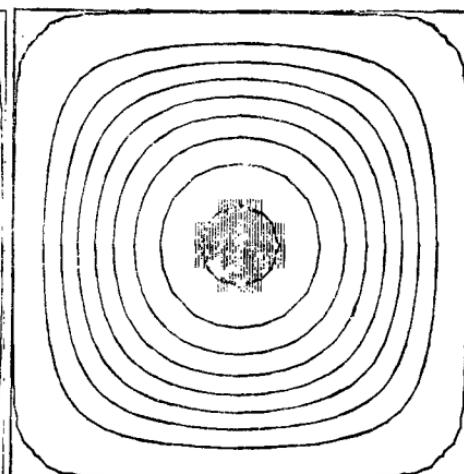
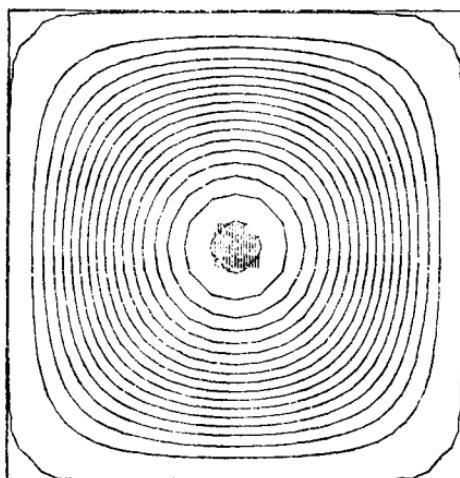
Рис. 11.2. Момент времени  $t = 0,005$ ;  $g = 5$ .



<b>Параметры</b>	<b>Вязкость</b>	1,0
<b>Границные условия</b>	<b>Внешние воздействия</b>	$F_1(x_1, x_2, T) = 0,0$
		$F_2(x_1, x_2, T) = 0,0$
<b>Начальное условие</b>	<b>Нормальная компонента скорости</b>	0,0
	<b>Тангенциальная компонента скорости</b>	0,0 при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$
		1,0 при $x_2 = 0$
	<b>Начальная скорость</b>	0,0

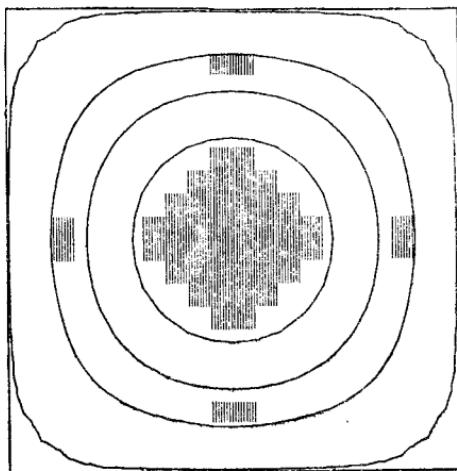
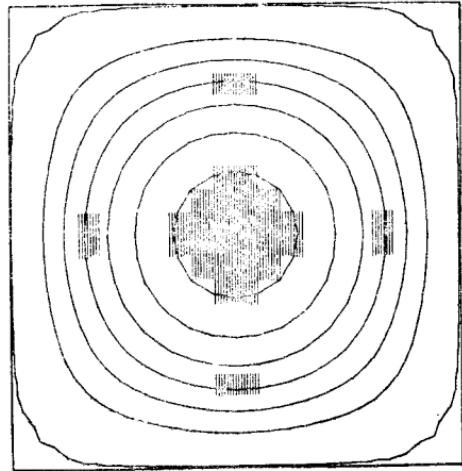
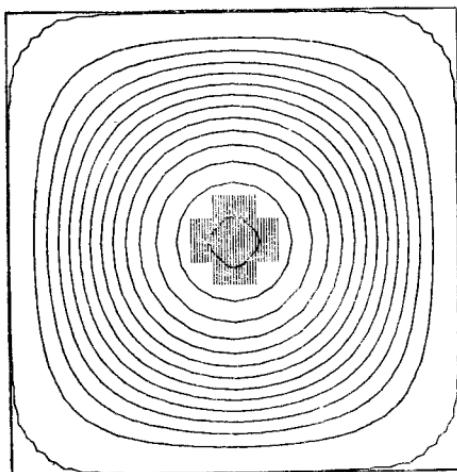
-Кривые разных значений функции тока  
|||| Области застоя

Рис. 11.3. Момент времени  $t = 0,005$ ;  $g = 10$ .

Рис. 11.4. Момент времени  $t = 0,005$ .Рис. 11.4'. Момент времени  $t = 0,010$ .

<b>Параметры</b>	<b>Преcел текучести</b>	<b>2,5</b>
	<b>Вязкость</b>	<b>1,0</b>
	<b>Внешние воздействия</b>	$F_1(x^1, x^2, T) = 300 * (x^2 - 0,5)$
		$F_2(x^1, x^2, T) = -300 * (x^1 - 0,5)$
<b>Границные условия</b>	<b>Нормальная компонента скорости</b>	<b>0,0</b>
	<b>Тангенциальная компонента скорости</b>	<b>0,0</b>
<b>Начальное условие</b>	<b>Начальная скорость</b>	<b>0,0</b>
	<b>-Кривые равных значений функции тока</b>	
	<b>или Областиq застоя</b>	

Рис. 11.5. Момент времени  $t = 0,040$ .

Рис. 11.6. Момент времени  $t=0,005$ .Рис. 11.7. Момент времени  $t=0,010$ .**Параметры**

Предел текучести 5,0  
Вязкость 1,0

Внешние воздействия  $F_1(x_1, x_2, T) = 300 * (x_2 - 0,5)$   
 $F_2(x_1, x_2, T) = -300 * (x_1 - 0,5)$

**Границные условия**

Нормальная компонента скорости 0,0

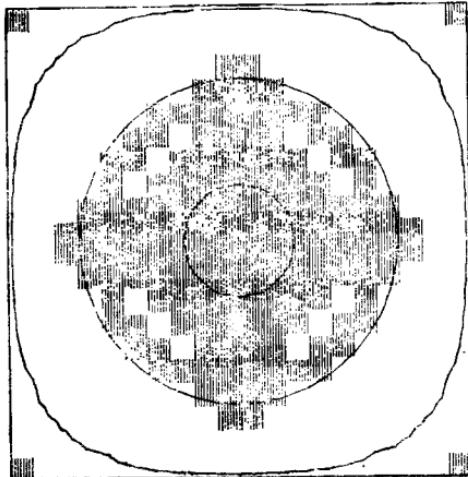
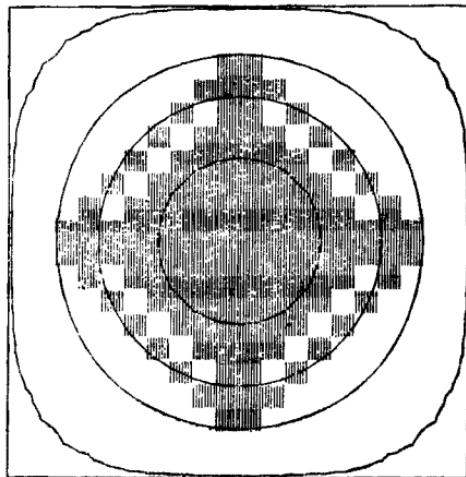
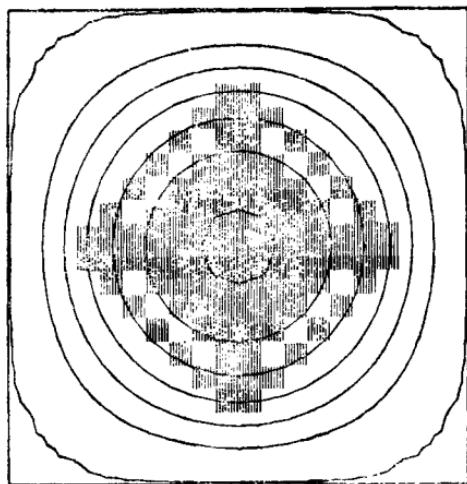
Тангенциальная компонента скорости 0,0

**Начальное условие**

Начальная скорость 0,0

-Крайевые равных значений функции тока  
или областя застоя

Рис. 11.8. Момент времени  $t=0,040$ .

Рис. 11.9. Момент времени  $t = 0,005$ .Рис. 11.10. Момент времени  $t = 0,010$ .**Параметры**

<i>Предел текучести</i>	10,0
<i>Вязкость</i>	<i>Вязкость</i>

$$\begin{aligned} \text{Внешнее воздействие } F_1(x_1, x_2, T) &= 300 * (x_2 - 0,5) \\ F_2(x_1, x_2, T) &= -300 * (x_1 - 0,5) \end{aligned}$$

**Границные условия**

Нормальная компонента скорости 0,0  
Тангенциальная компонента скорости 0,0

**Начальное условие**

Начальная скорость 0,0

-Кривые разных значений функции ток  
или Области застоя

Рис. 11.11. Момент времени  $t = 0,040$ .

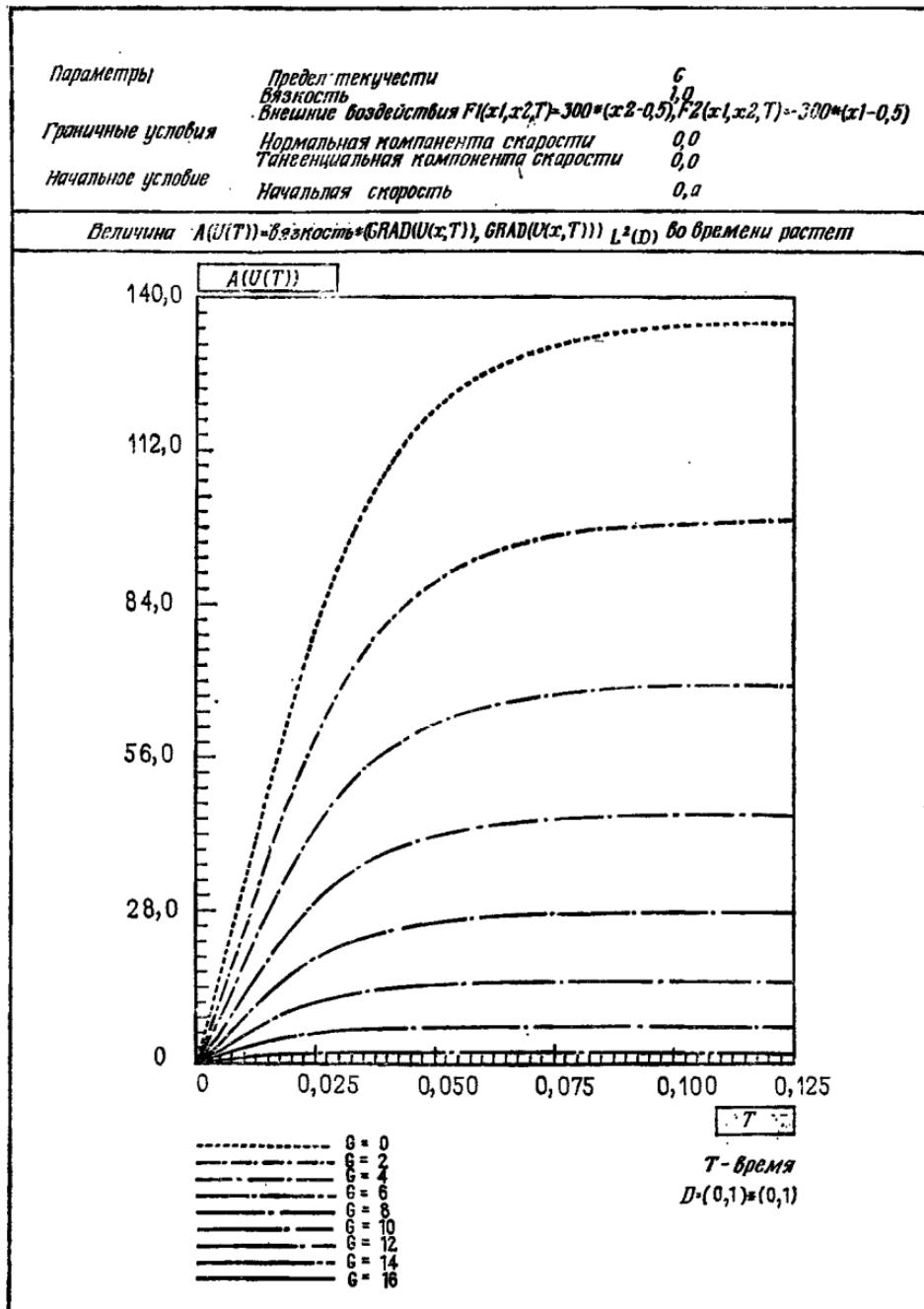


Рис. 11.12.

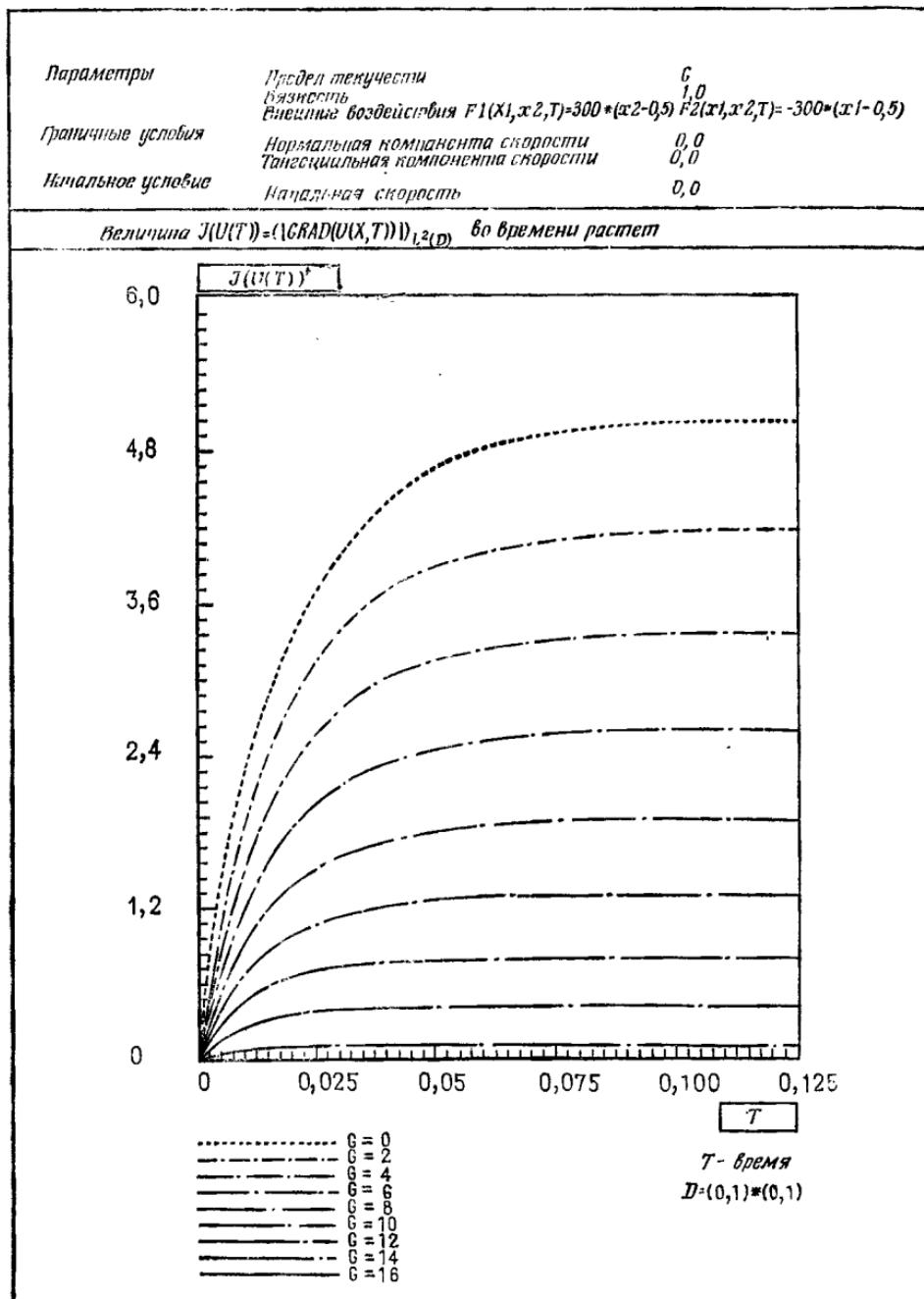


Рис. 11.13.

вия — нулевые. Сравнивая рис. 11.4 с рис. 11.5, соответствующим большему значению  $t$ , видим, что с ростом  $t$  область застоя уменьшается.

Следующее предположение подтверждается приведенными на графиках результатами и интуитивно представляется близким к истине: пусть  $u$  — решение задачи 1 для случая, когда  $f(t) = f$  не зависит от времени и  $u_0 = 0$ ; тогда с ростом  $t$  область застоя уменьшается<sup>1)</sup>, стремясь при этом к зоне, соответствующей стационарному режиму.

Рис. 11.6, 11.7 и 11.8 иллюстрируют случай, аналогичный приведенному на рис. 11.4 и 11.5, но с большим значением  $g$ ; как видно из сравнения, рост  $g$  привел к росту областей застоя (аналогичное замечание относится и к результатам, приведенным на рис. 11.9, 11.10, 11.11).

Графики функций  $t \rightarrow a(u_g(t))$  и  $t \rightarrow J(u_g(t))$  для различных значений  $g$  показаны на рис. 11.12 и 11.13.

Видно, что  $a(u_g(t))$  и  $J(u_g(t))$  стремятся к равновесному значению, растут во времени и для фиксированного значения  $t$  представляют собой растущие функции параметра  $g$ .

Строгое доказательство этих утверждений, интуитивно весьма правдоподобных, было бы очень интересным.

Другие численные результаты приведены в цитированной выше работе Бежи.

## 12. Комментарии

Обобщение результатов Равьяра [1] на случай аппроксимации эволюционных вариационных неравенств было намечено в работе Лионса [5], дополнено и подробно исследовано в работах Тремольера [4] и Вио [1]; в частности, в работе Тремольера [4] читатель может найти исследование параболических неравенств I типа и неравенств 2-го порядка по  $t$  более подробное, чем то, которое изложено в этой книге. По поводу параболических неравенств II типа можно обратиться к работе Вио [1], там же можно найти результаты, относящиеся к различным неравенствам с „запаздыванием“ (рассмотрение вопросов, относящихся к уравнениям с запаздыванием, имеется в работе Артоля [1], исследование их численных аппроксимаций — в работе Реверди [1]<sup>2)</sup>). По этим вопросам см. также работу Бурга [1].

Численное исследование неравенств, описывающих течения среды Бингама (вывод см. в работах Дюво и Лионса [1], Чио-

<sup>1)</sup> В смысле включения множеств.

<sup>2)</sup> В отечественной литературе имеется много книг, посвященных уравнениям с запаздыванием — см., например, Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — Прим. перев.

рапеску и Марголиса [1], [2]), проведено в работе Фортена [1] (более подробное по сравнению с разд. 11 этой книги изложение результатов Фортена читатель может найти в оригинальных публикациях автора). Отметим, что неравенства, описывающие поведение среды Бингама, в качестве частного случая содержат уравнения Навье—Стокса, однако наше исследование не перекрывает, разумеется, всех работ (количество которых огромно!), касающихся численных аппроксимаций уравнений Навье—Стокса; по этому вопросу мы отсылаем к работе Темама [2] и работам, указанным в библиографии к ней<sup>1)</sup>). Отметим также, что в проблеме численного исследования течений среды Бингама имеется еще много нерешенных задач. Например, по ходу изложения мы кратко наметили доказательство того, что последовательность приближенных решений  $u_n$  сходится к решению задачи  $u$ , однако вопрос о том, сходится ли поверхность раздела „жидкость — твердое тело“ для  $u_n$  к поверхности раздела, соответствующей точному решению  $u$ , остается открытым. Заметим, впрочем, что эта проблема (нерешенная) может быть поставлена для всех рассмотренных в этой главе задач. Как нам кажется, для параболических неравенств I типа на замкнутых выпуклых множествах  $K$  вида  $\{v | v \leqslant \psi \text{ на } \Omega\}$  ее можно было бы решить, обобщив метод Байокки [2], однако это пока не сделано. Неисследованным остается пока встречающееся в этой же задаче явление пограничного слоя (по поводу сингулярных возмущений применительно к неравенствам, которые здесь не рассматривались, мы отсылаем к работе Лионса [8]).

Здесь мы не затрагивали также методов расщепления и декомпозиций, введенных в работе Лионса и Темама [1] (см. также работу Бенсуссана, Лионса и Темама [1]) и представляющих собой обобщение классического метода дробных шагов (см. книги Яненко [1], Марчука [1] и библиографии к этим книгам).

Методы, изложенные в этой главе, можно применить для аппроксимации других эволюционных вариационных неравенств. Примеры таких приложений имеются в работе Бежи [1]. Результаты данной главы обобщаются также на системы связанных уравнений, например на системы уравнений термоупругости или магнитогидродинамики (см. работу Дюво и Лионса [3]), получающихся при помощи „энергетических“ методов. Такое обобщение, однако, не произведено даже для случая среды Бингама, коэффициент вязкости которой зависит от температуры (см. работу Дюво и Лионса [2]). Сходимость надлежащих аппроксимаций этой системы представляет собой нерешенную задачу (так как метод, использованный для доказательства существования в работе Дюво и Лионса [2], не является конструктив-

<sup>1)</sup> См. также О. А. Ладыженская. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — Прим. перев.

ным). Примеры различных „связанных“ эволюционных неравенств приведены в работе Лионса [6]; в качестве примера укажем на задачу теплопроводности с учетом тепловыделения или поглощения; численное исследование этих задач (имеющее отчасти эвристический характер) проведено в работе Марокко [2].

Эволюционные неравенства встречаются в задачах типа Стефана (см. работу Дюво [1]), а также в задачах с операторами гиперболического типа 1-го порядка (типа „операторов Максвелла“ — см. задачи об антенном разряде в гл. 7 книги Дюво и Лионса [1]); в последнем случае возникают некоторые новые проблемы общего характера, которых здесь мы не затрагиваем. Заметим, в частности, что определенный интерес представляет выяснение вопроса о том, в какой мере результаты Лесэна [1], полученные им для случая гиперболических уравнений 1-го порядка, можно было бы обобщить на „гиперболические неравенства 1-го порядка“.

Системы, поведение которых описывается эволюционными неравенствами, встречаются также в теории оптимального управления. По этому вопросу мы отсылаем к работам Керневсца [1], Ивона [1], Миньо [1].

В значительной степени нерешенными представляются вопросы оценки погрешности. Было бы очень интересно выяснить, в какой степени на случай неравенств можно перенести оценки, установленные в работах Дугласа и Дюпона [1], Равьяра [2].

Эволюционные неравенства с условиями роста на бесконечности встречаются в теории оптимального управления и теории игр (см. работы Бенсуссана и Лионса [1], Фридмана [1], [2]). Численного исследования таких неравенств здесь мы не предпринимали. При численном исследовании вариационных неравенств в случае, когда выпуклое множество ограничений и/или недифференцируемый функционал зависят от времени, особых затруднений не возникает, однако, если выпуклые множества ограничений „нерегулярным“ образом зависят от времени, появляются серьезные трудности теоретического характера; именно к такого рода задачам относится задача с препятствием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f &\geq 0, \quad u - \psi \geq 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - f \right) (u - \psi) &= 0, \end{aligned}$$

$u = 0$  на границе и в момент  $t = 0$ , где  $\psi = \psi(x, t)$  — „нерегулярная“ функция от  $x$  и  $t$ .

Существование слабого минимального решения этой задачи доказано в работе Миньо и Пюэля [1]. Это решение представляет собой предел решений семидискретизованных задач со штрафом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Абади (Abadie J.)

- [1] Non linear programming. North-Holland, 1967.
- [2] Integer and non linear programming. North-Holland, 1970.

Абади, Карпантier (Abadie J., Carpentier J.)

- [1] Generalization of the Wolfe reduced gradient method to the case of non linear constraints. B: Optimization, R. Fletcher, Ed., Acad. Press, 1969, 37—49.

Альтман (Altman M.)

- [1] Generalized gradient methods of minimizing a functional. *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 14 (1966), 313—318.

Линин (Linin B. D.)

- [1] Existence and 'Uniqueness of the solution of the elastic-plastic torsion of a cylindrical bar of oval cross section. *J. of Appl. Math. Mech.* 29 (1965), 1038—1047.

Антошиевич, Рейнболдт (Antosiewicz H. A., Rheinboldt W. C.)

- [1] Conjugate direction methods and the method of steepest descent. B: J. Todd, Ed. *A Survey of Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1962, 501—512.

Аргирис (Argyris J. H.)

- [1] Elasto-plastic matrix displacement analysis of three-dimensional continua. *J. of Royal Aeronautical Soc.*, 69 (1965), 633—635.
- [2] Elasto-plastic Analysis of three-dimensional media. *Acta Technica Academiae Sci. Hungaricae*, 54 (1966), 219—238.
- [3] Continua and discontinua. Proc. First Conference Matrix Methods in Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.

Аргирис, Балмер, Долсинис, Уильям (Argyris J. H., Balmer H., Doltsinis J., William K. J.)

- [1] Finite element Analysis of thermo-mechanical problems, Third Conference Matrix Methods Struct. Mech. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1971.

Аргирис, Шарпф (Argyris J. H., Scharpf D. W.)

- [1] Methods of elasto-plastic Analysis. Proc. of the ISD—ISSC Symposium on Finite Element Techniques. Institut für Statik und Dynamik der Luft und Raumfahrt-Konstruktionen, Stuttgart, 1969.

Аргирис, Шарпф, Спунер (Argyris J. H., Scharpf D. W., Spooner J. B.)

- [1] The elasto-plastic calculation of general structures and continua. Proc. Third Conference on Dimensioning. Budapest, 1969, 345—384.
- [2] Die elasto-plastische Berechnung von allgemeinen Tragwerken und Kontinua. *Ingénieur Archiv.*, 37 (mai 1969), 326—352.

Артола (Artola M.)

- [1] Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard. *Annales E.N.S.*, 2 (1969), 137—253.

Аттуш, Дамламян (Attouch H., Damlamian A.)

- [1] Equations d'évolution multivoques dans les espaces de dimension finie. (Готовится к печати.)

Ауслендер (Auslender A.)

- [1] Une méthode générale pour la décomposition et la minimisation de fonctions non différentiables. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **271** (1970), 1078—1081.
- [2] Méthodes numériques pour la décomposition et la minimisation de fonctions non différentiables. *Numer. Math.*, **18** (1972), 213—223.
- [3] Résolution numérique d'inégalités variationnelles. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **276** (1973), 1063—1066.

Ауслендер, Гурганд, Гийе (Auslender A., Gourgand M., Guillet A.)

- [1] Résolution numérique d'inégalités variationnelles. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **219** (1974), 341—344.

Байокки (Baiocchi C.)

- [1] Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica. *Annali Mat. Pura ed Appl.*, **92** (1972), 107—127.
- [2] Sur la convergence des frontières libres (Готовится к печати.)

Байокки, Коминчиоли, Мадженес, Поззи (Baiocchi C., Comincioli V., Magenes E., Pozzi G. A.)

- [1] Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media. Existence and uniqueness theorems. *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, **97** (1973), 1—82.

Баяйда (Bayada G.)

- [1] Inéquations variationnelles elliptiques avec conditions aux limites périodiques. Application à la résolution de l'équation de Reynold. Thèse de 3-e cycle, Université de Lyon (1972).

Балакришнан, Нейштадт (Balakrishnan A. V., Neustadt L. W.)

- [1] Computing Methods in Optimization Problems. Acad. Press, New York (1964).

Бекман (Beckmann F. S.)

- [1] The solution of linear equations by the conjugate gradient Method. B: Mathematical Methods for Digital Computers, Ralston, A. and Wilf, H. S. Ed., Wiley (1960), 62—72.

Бежи (Begis D.)

- [1] Analyse numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Paris VI (1972).
- [2] Résolution numérique de problèmes de convection et de transfert de chaleur. Rapport LABORIA, n°15 (1973).
- [3] Etude numérique du comportement d'un fluide de Bingham. Rapport LABORIA, n°42 (1973).

Бежи, Гловински (Begis D., Glowinski R.)

- [1] Dual Numerical Techniques for some variational Problems involving Biharmonic Operator. B: Techniques of Optimization. A. V. Balakrishnan Ed., Acad. Press, New York, 1972, 159—174.

Бенсуссан, Лионс (Bensoussan A., Lions J. L.)

- [1] Problèmes de temps d'arrêt optimal et inéquations variationnelles paraboliques. *Journal of Applicable Analysis*, **3** (1973), 267—294.
- [2] Livre en préparation sur les inéquations quasi variationnelles.

Бенсуссан, Гурса, Лионс (Bensoussan A., Goursat M., Lions J. L.)

- [1] Contrôle impulsif et inéquations quasi variationnelles stationnaires. *C. R. Acad. Sci., Paris, série A*, **276** (1973), 1279—1284.

Бенсуссан, Лионс, Темам (Bensoussan A., Lions J. L., Temam R.)

- [1] Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordinatisations et applications. *Cahier de l'IRIA*, № 11 (1972), 5—189.

Берж (Berge C.)

- [1] Espaces topologiques, Dunod, Paris, 1959.

Бидо (Bidaut M. J.)

- [1] Théorème d'existense et d'existence «en général» pour des système

- регис par des équations aux dérivées partielles non linéaires. Thèse, Université de Paris VI (1973).
- Блюм (Blum E. K.)**
- [1] A convergent gradient procedure in pre-Hilbert spaces. *Pacific J. of Mathematics*, 18, № 1 (1966).
- Бокс, Дэвис, Свэнн (Box M. J., Davies O., Swann W. H.)**
- [1] Non linear Optimization Techniques. I. C. I. Monograph, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1969.
- Борзенбергер (Borsenberger A.)**
- [1] (Готовится к печати.)
- Боссавит (Bossavit A.)**
- [1] Une méthode de décomposition de l'opérateur biharmonique. Note H. I. 585/2, Electricité de France, 1971.
- Браудер (Browder F. E.)**
- [1] The fixed-point theory of multi-valued problems. *Math. Annalen*, 177 (1968), 283—301.
- Брезис (Brezis H.)**
- [1] Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité. *Annales de l'Institut Fourier*, 18 (1968), 115—175.
  - [2] Problèmes unilatéraux. *J. de Math. Pures et Appliquées*, 51 (1972), 1—168.
  - [3] Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Elsevier (1973).
  - [4] Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 274 (1972), 310—312.
  - [5] Multiplicateur de Lagrange en torsion élasto-plastique. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 49 (1972), 32—40.
  - [6] Monotonicity methods in Hilbert Spaces and some applications to non linear partial differential equations. B: Contribution to Non-linear Functional Analysis. E. Zarantonello, Ed., Acad. Press (1971), 101—156.
- Брезис, Дюво (Brezis H., Duvaut G.)**
- [1] Ecoulement avec sillage autour d'un profil symétrique sans incidence. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 276 (1973), 875—878.
- Брезис, Лионс (Brezis H., Lions J. L.)**
- [1] Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 264 (1967), 928—931.
- Брезис, Сибони (Brezis H., Sibony M.)**
- [1] Equivalence de deux inéquations variationnelles et applications. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 41 (1971), 254—265.
  - [2] Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 28 (1968), 59—82.
- Брезис, Стампакья (Brezis H., Stampacchia G.)**
- [1] Une nouvelle méthode pour l'étude d'écoulements stationnaires. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 276 (1973), 129—132.
  - [2] Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. *Bull. Soc. Mathématique de France*, 96 (1968), 153—180.
- Брем, Саати (Bram J., Saaty T. C.)**
- [1] Non linear Mathematics. McGraw-Hill, 1964.
- Брембл, Шаш (Bramble J. H., Schatz A. M.)**
- [1] Rayleigh—Ritz—Galerkin Methods for Dirichlet's problem using subspaces without boundary conditions. *Comm. Pure and Applied Math.*, 23 (1970), 115—175.
- Бурга (Bourgat J. F.)**
- [1] Analyse numérique du problème de la torsion élasto-plastique. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Paris VI (1971).
  - [2] Numerical application of a dual iterative method for solving a finite

- element approximation of the first biharmonic equation. Computer Meth. Appl. Mech. Eng. (Готовится к печати.)
- Бурга, Дюво (Bourgat J. F., Duvaut G.)
- [1] Calcul numérique de l'écoulement avec ou sans sillage autour d'un profil bidimensionnel symétrique et sans incidence. Int. J. Num. Methods in Eng. (Готовится к печати.)
- Бурга, Тремольер (Bourgat J. F., Trémolières R.)
- [1] Analyse numérique du refroidissement d'un cylindre radio-actif. Rapport LABORIA, n°17, 1973.
- Бюи-Тронг-Лиё, Хуард (Bui-Trong-Lieu, Huard P.)
- [1] La méthode des centres dans un espace topologique. *Num. Math.*, 8 (1966), 56—67.
- Вайнберг М. М.
- [1] Вариационные методы исследования нелинейных операторов. —М.: Гостехиздат, 1956.
- Вараяя (Varayia P. P.)
- [1] Non-linear programming in Banach spaces. *SIAM J. Applied Math.*, 15, n° 2 (1967)
  - [2] Notes on Optimization. Van Nostrand, Rheinbold, 1972.
- Варга (Varga R. S.)
- [1] Matrix iterative analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- Вио (Viaud D.)
- [1] Approximation numérique des problèmes d'asservissement et d'asservissement retardé. Thèse, Université de Paris VI, 1973.
- Вулф (Wolfe P.)
- [1] Methods of non-linear programming, B: Recent Advances in Mathematical Programming, R. L. Graves et P. Wolfe, Ed. McGraw-Hill, New York (1963), 67—86.
- Габей, Мерсье (Gabay D., Mercier B.)
- [1] A dual algorithm for the solution of non-linear variational problems via finite element approximation. *Comp. and Math. with Applic.*, 2 (1976), 17—40.
- Гловински (Glowinski R.)
- [1] Méthodes numériques pour l'écoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible, B: Proc. of the 2nd Int. Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, M. Holt, Ed. Lecture Notes in Physics, 8, Springer-Verlag, 1971, 385—394.
  - [2] Sur l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique. *J. de Mécanique*, 13, n°4 (1973), 601—621.
  - [3] Méthodes itératives duales pour la minimization de fonctionnelles convexes. B: Constructive aspects of functional Analysis, G. Geymonat, Ed. Cremonese, Rome, 1973, 263—290.
  - [4] La méthode de relaxation. *Rendiconti di Mathematica*, 14 Università di Roma, 1971.
  - [5] Sur la minimization, par surrelaxation avec projection, de fonctionnelles quadratiques dans les espaces de Hilbert, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 276 (1973), 1421—1423.
  - [6] Approximations externes, par éléments finis de Lagrange d'ordre un et deux, du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique. Méthodes itératives de résolution des problèmes approchés. B: Topics in Numerical Analysis. J. J. H. Miller, Ed. Acad. Press, Londres, 1973, 123—171.
  - [7] Numerical Methods for some non linear elliptic boundary value problems. Notes du Séminaire de Mathématiques supérieures de l'Université de Montréal, été 1975. (Готовится к печати.)

- [8] Sur la résolution de l'équation biharmonique par décomposition en problèmes de Dirichlet pour  $-\Delta$  et itérations dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . *C. R. Acad. Sci., Paris* (Готовится к печати.)
- [9] Introduction to the approximation of elliptic variational inequalities. Rapport 76006, Laboratoire d'Analyse Numérique, LA 189, Univ Paris VI, 1976.

Гловински, Ланшон (Glowinski R., Lanchon H.)

- [1] Torsion élasto-plastique d'un barre cylindrique de section multi-conexe. *J. de Mécanique*, 12 (1973), 151—171.

Гловински, Марокко (Glowinski R., Marrocco A.)

- [1] Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un et la résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 178, série A (1974), 1649—1652.
- [2] Sur l'approximation par éléments finis d'ordre un et la résolution par pénalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires. *Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle*, R-2 (1975), 41—76.

Годунов С. К., Прокопов Г. П.

- [1] Вариационный подход к решению линейных систем высокого порядка, возникающих в сильно эллиптических задачах. Тр. ин-та прикл. матем. АН СССР, 1968.

Голдстайн (Goldstein A. A.)

- [1] Cauchy's methods of minimization, *Num. Math.*, 4 (1962), 146—150.
- [2] Convex programming in Hilbert spaces. *Bull. Amer. Math. Society*, 70 (1964), 709—710.

Гольфарб (Goldfarb D.)

- [1] Extension of Davidon's variable metric method to maximization under linear inequality and equality constraints. *SIAM J. Appl. Math.*, 17, n° 4 (1969), 739—764.

Гольфарб, Лапидус (Goldfarb D., Lapidus L.)

- [1] Conjugate gradient method for non linear programming problems with linear constraints. *I. and E. C. Fundamental*, 7 (1968), 142—151.

Гурсат (Goursat M.)

- [1] (Готовится к печати.)
- [2] Analyse numérique de problèmes d'élasto-plasticité et visco-plasticité. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Paris, VI, 1971.

Гревз, Вулф (Graves R. L., Wolfe P.) (Ed.)

- [1] Recent Advances in Mathematical Programming. McGraw-Hill, New York, 1963.

Гринштадт (Greenstadt J. L.)

- [1] On the relative efficiencies of gradient methods. *Math. of Computation*, 21 (1967), 360—367.

Геракович, Ходж (Herakovich C. T., et Hodge P. G.)

- [1] Elastic-plastic torsion of hollow bars by quadratic programming. *Int. Journal Mech. Sciences, Pergamon Press*, 11 (1969), 53—63.

Демьянов В. Ф.

- [1] Минимизация функций на замкнутых выпуклых множествах. *Кибернетика*, 1, № 6 (1965), 65—74.

Дэвидсон (Davidon W. D.)

- [1] Variable metric method for minimization. A. G. G. Res. and Dev. Report. # ANL—5990, 1959.

Дениел (Daniel J. W.)

- [1] The conjugate gradient method for linear and non-linear operator equations. *SIAM J. Num. Analysis*, 4 (1967), 10—26.
- [2] The approximate minimization of functionals. Prentice Hall, 1970.

- Дуглас, Дюпон (Duglas J., Dupont T.)  
 [1] Galerkin methods for parabolic equations. *SIAM J. Num. Analysis*, 1970, 575—626.
- Дюво (Duvaut G.)  
 [1] Résolution d'un problème de Stefan. *C. R. Ac. Sci. Paris, Série A*, 276 (1973), 1461—1463.
- Дюво, Лионс (Duvaut G., Lions J. L.)  
 [1] Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972.  
 [2] Transfert de chaleur dans un fluide de Bingham dont la viscosité dépend de la température. *J. of Funct. Analysis*, 10 (1972).  
 [3] Inéquations en thermo-élasticité et magnéto-hydrodynamique. *Archive Rat. Mech. Analysis*, 46 (1972), 241—279.  
 [4] Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques.  
 (I) Le cas stationnaire. *Journal de mécanique*, B, № 1 (1974).  
 [5] Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques.  
 (II) Le cas d'évolution. *Journal de mécanique*, B, № 1 (1974).
- Дюран (Durand E.)  
 [1] Solutions numériques des équations algébriques. Tomes 1 et 2, Masson, Paris, 1960.
- Жоли (Joly J. C.)  
 [1] Thèse, Faculté des Sciences de Grenoble, 1970.
- Зангвилл (Zangwill W. I.)  
 [1] Non-linear programming: a unified approach. Prentice Hall, 1969.
- Зенкевич О., Чанг И.  
 [1] Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред.— М.: Недра, 1974.
- Зенкевич О.  
 [1] Метод конечных элементов в технике.— М.: Мир, 1975.
- Зенкевич, Кормо (Zienkiewicz O. C., Cormeau J. C.)  
 [1] Visco-plasticity solution by finite element process. *Archive of Mechanics*, 24 (1972), 773—889, Varsovie.
- Зенкевич, Валлиапейн (Zienkiewicz O. C., Valliapan S.)  
 [1] Analysis of real structures for creep plasticity and other complex constitutive laws. Extrait de Structure, Solid Mechanics and Engineering Design. Mc Te'eni, Ed. Wiley, Interscience, 1971, 27—48.
- Зенкевич, Валлиапейн, Кинг (Zienkiewicz O. C., Valliapan S., King J. P.)  
 [1] Elasto-plastic solutions of Engineering problems, initial stress finite element approach. *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, 1 (1969), 75—100.
- Зламал (Zlamal)  
 [1] On the finite element method. *Num. Math.*, 12 (1968), 394—409.  
 [2] On some finite element procedures for solving second order boundary value problems. *Num. Math.*, 14 (1969), 42—48.
- Зойтейдек (Zoutendijk G.)  
 [1] Non-linear programming: a numerical survey. *SIAM J. on Control*, 4 № 1 (1966), 194—210.
- Ивон (Yvon J. P.)  
 [1] Etude de quelques problèmes de contrôle pour des systèmes distribués. Thèse, Université de Paris VI (1973).  
 [2] Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations variationnelles. Rapport LABORIA, № 53 (1974).
- Капурсо (Capurso M.)  
 [1] Principi di minimo per la soluzione incrementale dei problemi elasto-plastici. *Rend. Conti Acad. Naz. Lincei* (1969), 46; I, 417—425; II, 552—560.  
 [2] On the incremental solution of elasto-plastic continua in the range of large displacements. *Meccanica*, V, 1 (1970), 1—9.

- [3] A general method for the incremental solution of elasto-plastic problems. *Meccanica*, IV (1969), 4, 267—280.  
**Капурсо, Майер (Capurso M., Maier G.)**  
[1] Incremental elasto-plastic Analysis and quadratic Optimization. *Meccanica*, V (1970), 1—10.
- Калкер (Kalker J. J.)**  
[1] The significance of a boundary layer in dry friction theory and rolling contact problems. (Готовится к печати.)  
[2] A minimum principle for the law of dry friction with application to elastic cylinders in rolling contact. *J. Appl. Mech.*, 38, E (1971), 875—880; 881—887.
- Карри (Curry B.)**  
[1] The method of steepest descent for non linear minimization problems. *Quart. of Applied Math.*, 2 (1944), 258—261.
- Керневец (Kernevez J. P.)**  
[1] (Готовится к печати.)
- Ки Фан (Ky Fan)**  
[1] Sur un théorème minimax. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 259 (1964), 3925—3928.
- Ковалик, Осборн (Kowalik J., Osborne M. R.)**  
[1] Methods for unconstrained optimization problems, Elsevier, New York, 1968.
- Койтер (Koiter W. I.)**  
[1] General theorems for elastic plastic solids. *Progress in solid Mechanics*. 2. North-Holland, P. C. (1960), 165—221.
- Коминчиоли (Comincioli V.)**  
[1] Metodi di rilassamento per la minimizzazione in uno spazio prodotto *L. A. N., C. N. R.*, 20 (1971), Pavia.
- Коминчиоли, Гуэрри, Вольпи (Comincioli V., Guerri L., Volpi G.)**  
[1] Analisi numerica di un problema di frontiera libera connesso col moto di un fluido attraverso un mezzo poroso. *Publ. 17 du Laboratoire d'analyse numérique de l'Université de Pavie*, 1971.
- Коши (Cauchy A.)**  
[1] Méthodes générales pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 25 (1847), 536—538.
- Крайер (Cryer C. W.)**  
[1] The solution of a quadratic programming problem using systematic over-relaxation. *SIAM J. on Control*, 9, № 3 (1971), 385—392.  
[2] The method of Christopherson for solving free boundary problems. *Math. Comp.*, 25 (1971), 435—443.
- Крокетт, Чернов (Crockett G. B., Chernoff H.)**  
[1] Gradient Methods of Maximization. *Pacific J. of Math.*, 5 (1955), 33—50.
- Крузей (Crouzeix M.)**  
[1] Étude d'une méthode de linéarisation. Résolution numérique des équations de Stokes stationnaires. Applications aux équations de Navier—Stokes stationnaires, dans Approximations et méthodes itératives de résolution d'inéquations variationnelles et de problèmes non linéaires. *Cahier de l'IRIA*, № 12, 139—244 (1974).
- Крузей, Равьяд (Crouzeix M., Raviart P. A.)**  
[1] Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I. *Revue française d'automatique, d'informique et de recherche opérationnelle*, R-3 (1973), 33—76.
- Кун, Таксер (Kuhn H. W., Tucker A. W.)**  
[1] Non linear programming. Proc. Second Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob., University of California Press, 1951, 481—492.

- Курант (Courant R.)
- [1] Variational Method for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Society*, **49** (1943), 1—23.
- Кэнон, Куллем, Полак (Canon M., Cullum C., Polak E.)
- [1] Constrained minimization problems in finite dimensional spaces. *SIAM J. on Control*, **4**, № 3 (1966), 528—547.
- Кэрол (Caroll C. W.)
- [1] An operator research approach to the economic optimization of a kraft pulping process, Ph. D Dissertation, Institute Paper Chemistry, Appleton, Wis. (1959).
- Кюнци Г. П., Крелле В., Оэгтли У.
- [1] Non linear programming. Blaisdell (1966). [См. также Нелинейное программирование.—М.: Советское радио, 1965.]
- Кюнци, Чах, Зендер (Kunzi H. P., Tzsachach H. G., Zehnder C. A.)
- [1] Numerical Methods of Mathematical Optimization. Acad. Press, 1968.
- Лавайн (Lavaine F.)
- [1] Méthodes de décomposition rapidement convergentes pour des inéquations variationnelles. (Готовится к печати.)
- Ланшон (Lanchon H.)
- [1] Solution du problème de torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **279** (1969), 791—794.
  - [2] Torsion élasto-plastique d'un arbre cylindrique de section simplement ou multiplement connexe. Thèse, Université de Paris VI, 1972.
- Левитин Е. С., Поляк Б. Т.
- [1] Методы минимизации при наличии ограничений.—*Ж. ВМ и МФ*, **6**, № 5, 1966, 787—823.
- Леви, Стампакья (Lewy H., Stampacchia G.)
- [1] On the regularity of the solution of variational inequality. *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 153—188.
  - [2] On the smoothness of superharmonics which solve a minimum problem. *Journal d'analyse mathématique*, **23** (1970), 227—236.
- Лемонье (Lemonnier P.)
- [1] Rapport interne IRIA, 1971.
- Лере, Лионс (Leray J., Lions J. L.)
- [1] Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty—Browder. *Bull. Soc. Math. de France*, **93** (1965), 97—107.
- Леруа (Leroy D.)
- [1] Rapport interne IRIA, 1971.
- Лесэн (Lesaint P.)
- [1] Finite element methods for symmetric hyperbolic equations. *Num. Math.*, **21** (1973), 244—255.
- Лионс Ж.-Л. (Lions J. L.)
- [1] Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.—М.: Мир, 1972.
  - [2] Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.—М.: Мир, 1972.
  - [3] Cours d'analyse numérique, Faculté des Sciences, Paris, 1961.
  - [4] Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs hyperboliques du deuxième ordre. Séminaire J. Leray, Collège de France, 1965—1966, II, 17—33.
  - [5] Sur l'approximation de la solution d'inéquations d'évolution. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **263** (1966), 55—57.
  - [6] Sur l'analyse numérique de problèmes d'inéquations couplées. Rome, Istituto di Alta Matematica, 1972.
  - [7] Approximation numérique des inéquations d'évolution dans Constructive Aspects of Functional Analysis, C.I.M. E., 1971, G. Geymonat, Ed., Cremonese, 1973, 295—361.

- [8] Méthodes de perturbations singulières dans les problèmes aux limites et le contrôle optimal. *Lecture Notes in Math.*, Springer, B 323, 1973.  
**Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.**
- [1] Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.  
**Лионс, Стампакья (Lions J. L., Stampacchia G.)**
- [1] Variational Inequalities. *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 493—519.  
**Лионс, Темам (Lions J. L., Temam R.)**
- [1] Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **268** (1966), 563—595.  
**Лоран П.-Ж.**
- [1] Аппроксимация и оптимизация.— М.: Мир, 1975.  
**Лутсма (Lootsma F. A.)**
- [1] Boundary properties of penalty functions for constrained minimization. *Thèse, Eindhoven*, 1970.  
**Лэсдон (Lasdon L. S.)**
- [1] Optimization theory for large systems. Mc Millan Cy, London, 1970.  
**Люэнбергер (Luenberger D. G.)**
- [1] Optimization by vector space methods. Wiley, 1969.  
[2] The conjugate residual method for constrained minimization problems. *SIAM J. Num. Anal.*, **7**, № 3 (1970).  
**Мадженес, Стампакья (Magenes E., Stampacchia G.)**
- [1] I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico. *Ann. Scuola Normale Superiore, Pisa*, **12** (1958), 247—358.  
**Майер (Maier G.)**
- [1] Quadratic programming and theory of elastic perfectly plastic structures. *Mechanica*, **4** (1968), 1—9.  
[2] Some theorems for plastic strain rates and plastic strains. *Journal de Mécanique*, **8** (1969), 5—19.  
**Мандель (Mandel J.)**
- [1] Cours de mécanique des milieux continus. Tome 1: Mécanique des fluides, Tome 2: Mécanique des solides. Gauthier—Villars, Paris, 1966.  
**Мандельбройт (Mandelbrojt S.)**
- [1] Sur les fonctions convexes. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **209** (1939), 977—978.  
**Мангазарян (Mangasarian O. L.)**
- [1] Non linear programming. McGraw-Hill, New York, 1969.  
**Мардзулли (Marzulli)**
- [1] Risoluzione alle differenze finite di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico con condizioni su un contorno libero. *Calcolo, Suppl.* **1**, 5 (1968), 1—22.  
**Марокко (Marocco A.)**
- [1] Application de la méthode de pénalisation à la résolution d'un problème d'élasto-plasticité. *Thèse de 3e cycle*, Paris, 1970.  
[2] Résolution numérique de problèmes de saturation endo ou exothermique. *Rapport IRIA, INF. 7203/72003*, janv. 1972.  
**Марчук Г. И.**
- [1] Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.  
**Мезляков (Mezlyakov)**
- [1] On a relaxation method for solving systems of linear inequalities. *J. of Math. and Phys.*, **2**, № 3 (1962).  
**Мерье (Mercier B.)**
- [1] Approximation par éléments finis et résolution par pénalisation-dualité d'un problème d'élasto-plasticité. *C. R. Acad. Sci., Paris, série A*, **280** (1975), 287—290.  
[2] Rapport interne IRIA, 1971.  
**Минти (Minty G.)**
- [1] Monotone (non linear) operators in Hilbert space. *Duke Math. J.*, **29** (1962), 341—346.

- Миньо, Пюэль (Mignot F., Puel J. P.)  
 [1] Inéquations d'évolution parabolique avec convexe dépendant du temps: application aux I. Q. V. *Archiv. Rat. Mech. Anal.*, 1976.
- Морис (Morice P.)  
 [1] Calcul parallèle et décomposition dans la résolution d'équations aux dérivées partielles de type elliptique. *Rapport IRIA, INF. 7214/72017* (1972)
- Моро (Moreau J. J.)  
 [1] Fonctionnelles convexes. Séminaire J. Leray, Collège de France, 1966.  
 [2] Fonctions de résistance et fonctions de dissipation. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, 1971, n° 6.  
 [3] Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 273 (1971), 118—121.  
 [4] Rafle par un convexe variable. Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, 1971.
- Моско (Mosco U.)  
 [1] Dual variational inequalities. *J. Math. Anal. and Appl.*, 39 (1972), 202—206.  
 [2] Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.*, 3 (4) (1969), 510—585.
- Моско, Стрэнг (Mosco U., Strang G.)  
 [1] One sided approximations and variational inequalities. *Bull. A. M. S.*, 80 (1974), 308—312.
- Мосолов П. П., Мясников В. П.  
 [1] Вариационные методы в теории вязкопластических сред.— ГИММ, 29, № 3, 1965, 468—492.
- Моткин, Шёнберг (Motzkin, Schoenberg)  
 [1] The relaxation method for linear inequalities. *Canadian J. of Math.*, 6, 1954.
- Мьеаллу (Miellou J. C.)  
 [1] Méthodes de Jacobi, Gauss—Seidel, sous/surrelaxation par blocs appliquées à une classe de problèmes non linéaires. *C. R. Acad. Sci., Paris, série A*, 273 (1971), 1257—1259.
- Наяк, Зенкевич (Nayak G., Zienkiewicz O. C.)  
 [1] Note on the "alpha"-constant stiffness method for the analysis of nonlinear problems. *Int. J. of Num. Mech. Eng.*, 4 (1972), 579—582.
- Нечас (Nečas J.)  
 [1] Les méthodes directes dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Masson, Paris, 1967.
- Обен (Aubin J. P.)  
 [1] Approximation of variational inequalities, B: Functional Analysis and Optimization. Calaniello, Ed., Acad. Press, 1966, 7—14.  
 [2] Приближенное решение эллиптических краевых задач. Пер. с англ.— М.: Мир, 1977
- Огаю (Haugazeau Y.)  
 [1] Sur les inéquations variationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris* (1967).  
 [2] Thèse d'Etat, Paris, 1968.
- Ортега, Рейнбולדт (Ortega J., Rheinboldt W. C.)  
 [1] Monotone iterations for non linear equations with applications to Gauss—Seidel methods. *SIAM J. Num. Anal.*, 4 (1967), 171—190.  
 [2] On a class of approximate iterative processes. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 3 (1967), 352—356.  
 [3] Итерационные методы решения систем уравнений со многими неизвестными.— М: Мир, 1975.
- Ортега, Росков (Ortega J., Roskoff M.)  
 [1] Non linear difference equation and Gauss—Seidel type iterative methods. *SIAM J. Num. Anal.*, 3, n° 3 (1966), 497—513.

Паузелл (Powell M. J. D.)

- [1] A method for non-linear optimization in minimization problems, dans Optimization, R. Fletcher, Ed. Acad. Press, New York, 1969.

Пералба (Peralba J. C.)

- [1] Un problème d'évolution relatif à un opérateur sousdifférentiel dépendant du temps. Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier, 1972.

Петришин (Petrichyn W. V.)

- [1] On the generalized over-relaxation method for operator equations. *Proc. Amer. Math. Society*, 14 (1963), 917—921.  
[2] Operator equations in Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.*, 29, 3 (1970), 558—568.

Пирсон (Pearson J. D.)

- [1] On variable metric methods of minimization. *Comput. J.*, 12 (1969), 171—178.

Полак Э. (Polak E.)

- [1] Численные методы оптимизации. — М.: Мир, 1974.

Поляк Б. Т.

- [1] Градиентные методы минимизации функционалов. — ЖВМ и МФ, 3, № 4, 1963, 643—654.  
[2] Один общий метод решения оптимальных задач. — ДАН СССР, 174, № 1 (1967), 33—36.  
[3] О сходимости минимизирующих последовательностей в задачах условного экстремума. — ДАН СССР, 168, № 5 (1966), 764—766.  
[4] Теоремы существования и сходимость минимизирующих последовательностей для задач на экстремум при наличии ограничений. — ДАН СССР, 166, № 2 (1966), 287—290.

Прагер В. (Prager W.)

- [1] Введение в механику сплошных сред. — М.: ИЛ, 1963.  
[2] Problèmes de plasticité théorique, Dunod, 1958.  
[3] Plastic design and thermal stresses. *British Welding Journal* (1956), 355—359.  
[4] On ideal locking materials. *Transaction of the Society of Rheology*, 1 (1957), 169—175.  
[5] Unilateral constraints in Mechanics of continuum. Atti del Simp. Lagrangian Accad. Sc. Torino, 1—11.  
[6] Linearization in Visco-plasticity, *Oesterreiches Ingenieur-Archive*, 15 (1961), 152—157.  
[7] Composite stress-strain relations for elasto-plastic solids. Pros. IUTAM Symp. Vienna, 1966, 315—325.  
[8] On elastic, perfectly locking materials. Proc. Int. Conf. Applied., Mech., 1964, 538—544.

Прагер В., Ходж П.

- [1] Теория идеально-пластических тел. — М.: Гостехиздат, 1956.

Равьят (Raviart P. A.)

- [1] Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires. *J. Math. Pures et Appl.*, 46 (1967), 11—183.  
[2] The use of numerical integration in finite element methods for solving parabolic equations. B. Topics in Numerical Analysis, J. J. H. Miller, Ed. Acad. Press, London, 1973, 233—264.

Реверди (Reverdy J.)

- [1] (Готовится к печати.)

Розен (Rosen J. B.)

- [1] The gradient projection method for non linear programming. Part I, Linear constraints. *SIAM J.*, 8, № 1 (1960), 181—217.  
[2] The gradient projection method for non linear programming. Part II, Non linear constraints. *SIAM J.*, 9, № 4 (1961), 514—532.

- [3] Approximative solution and error bounds for quasilinear boundary value problems. *SIAM J. Num. Anal.*, 7 (1970), 80—103.  
**Рокфеллер (Rockafellar A. T.)**
- [1] Convex functions, monotone operators and variational inequalities. B: NATO Cours, Venice, 1968, Oderisi Ed. (1969), 231—247.
  - [2] Duality and stability in extremum problems involving convex functions. *Pacific J. Math.*, 21 (1962), 167—187.
  - [3] Выпуклый анализ.—М.: Мир, 1974.
  - [4] The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming. *J. Opt. Th. and Appl.*, 12 (1973).
  - [5] Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming. *SIAM J. on Control*. 12, № 2 (1974), 268—285.
- Саусвелл (Southwell)**
- [1] *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, 1, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- Сеа (Cea J.)**
- [1] Частное сообщение.
  - [2] Оптимизация. Теория и алгоритмы.—М.: Мир, 1973.
  - [3] Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Annales de l'Institut Fourier*, 14 (1964), 345—444.
- Сеа, Гловински (Cea J., Glowinski R.)**
- [1] Méthodes numériques pour l'écoulement laminaire d'un fluide rigide visco-plastique incompressible. *Int. J. of Comp. Math.*, B, 3 (1972), 225—255.
  - [2] Sur des méthodes d'optimisation par relaxation. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle* (déc. 1973), R—3, 5—32.
- Сеа, Гловински, Неделек (Cea J., Glowinski R., Nedelec J. C.)**
- [1] Application des méthodes d'optimisation, de différences et d'éléments finis à l'analyse numérique de la torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique, dans Approximation et méthodes itératives de résolution d'inéquations variationnelles et de problèmes non linéaires. Cahier de l'IRIA, № 12 (1974), 7—138.
  - [2] Minimisation de fonctionnelles non différentiables, dans Conference on Applications of Numerical Analysis, Morris Ed., Lecture Notes in Math., B 228, Springer-Verlag, 1971, 19—38.
- Сиарле, Гловински (Ciarlet P. G., Glowinski R.)**
- [1] Sur la résolution numérique du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique. *C. R. Acad. Sci., Paris*, série A, 279 (1974), 239—241.
  - [2] Dual iterative techniques for solving a finite element approximation of the biharmonic equation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 5 (1975), 277—295.
- Сиарле, Равъяр (Ciarlet P. G., Raviart P. A.)**
- [1] General Lagrange and Hermite interpolation in  $R^n$  with applications to finite element methods. *Archive Rat. Mech. Anal.* 46 (1972), 177—199.
  - [2] Interpolation theory over curved element with applications to finite element methods. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 1 (1972), 217—249.
  - [3] A mixed finite element method for the biharmonic equation, dans Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations. C. de Boor, Ed., Acad. Press, New York, 1974. 125—145.
- Сиарле, Вагшал (Ciarlet P. G., Wagschal C.)**
- [1] Multipoint Taylor formulas and Applications to the finite element Method. *Num. Math.*, 17 (1971), 84—100.
- Сибони (Sibony M.)**
- [1] Méthodes itératives pour les équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone. *Calcolo*, 2 (1970), 65—183.

Синьорини (Signorini A.)

- [1] Sopra alcune questioni di Elastostatica. Atti della Società Italiana per il Progresso della Scienza, 1933.

Сион (Sion M.)

- [1] Existence de cols pour les fonctions quasi convexes et semicontinues. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 244 (1954), 2120—2123.  
[2] On general minimax theorems. *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 171—176.

Смит (Smith J.)

- [1] The coupled equation approach to the numerical solution of the bi-harmonic equation by finite differences, I. *SIAM J. Num. Anal.*, 5 (1968), 323—339.  
[2] The coupled equation approach to the numerical solution of the bi-harmonic equation by finite differences, II. *SIAM J. Num. Anal.*, 7 (1970), 104—111.  
[3] On the approximate solution of the first boundary value problem for  $\nabla^4 u = f$ . *SIAM J. Num. Anal.*, 10 (1973), 967—982.

Соболев С. Л.

- [1] Некоторые применения функционального анализа в математической физике.—Л.: ЛГУ, 1950.

Спэнг (Spang H. A.)

- [1] A review of minimizing techniques for non linear functions. *SIAM Review*, 4, № 4 (1962), 343—365.

Стэйт, Ходж (Stout R. B., Hodge P. G.)

- [1] Elastic-plastic torsion of hollow cylinders. *Int. J. Mech. Sci.*, 12 (1970), 91—108.

Стрэнг Г., Фикс Дж.

- [1] Теория метода конечных элементов.—М.: Мир, 1977.

Тартар, Темам (Tartar L., Temam R.)

- [1] Частное сообщение.

Темам (Temam R.)

- [1] Solutions généralisées de certaines équations du type hypersurfaces minima. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 44 (1971), 121—156.  
[2] Theory and Numerical Analysis of Navier—Stokes equations North-Holland/Elsevier, 1976. [Готовится русский перевод в издательстве «Мир».]  
[3] Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires. *Annali di Mat. Pura e Appl.*, 4, 74 (1968), 191—380.

Тинг (Ting T. W.)

- [1] Elastic-plastic torsion problem III. *Archive Rat. Mech. Anal.*, 34 (1969), 228—243.  
[2] Elastic-plastic torsion of convex cylindrical bars. *J. Math. Mech.*, 19 (1969), 531—551.  
[3] Elastic-plastic torsion of simply connected cylindrical bars. *Indiana Univers. Math. J.*, 20, № 11 (1971), 1047—1076.

Томассет (Thomasset F.)

- [1] Rapport interne IRIA, 1972.  
[2] Etude d'une méthode d'éléments finis de degré cinq. Application aux problèmes des plaques et d'écoulement de fluides. Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Paris XI (1974).

Тремольер (Trémolières R.)

- [1] La méthode des centres à troncature variable. Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Paris, 1968.  
[2] Optimisation par la technique des séries divergentes. Rapport interne IRIA, 1969.  
[3] Optimisation non linéaire avec contraintes. Rapport IRIA, 1970.  
[4] Inéquations variationnelles: existence, approximations, résolution. Thèse, Université de Paris VI (1972).

## Удзава Х.

- [1] Итерационные методы вогнутого программирования. В кн.: Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследование по линейному и нелинейному программированию. — М.: ИЛ, 1962, с. 228—246.

## Фалк (Falk R. S.)

- [1] Approximate solutions of some variational inequalities with order of convergence estimates. Ph. D. Thesis, Cornell University, 1971.  
[2] Error estimates for the approximation of a class of variational Inequalities. *Math. of Comp.*, **28**, 128 (1974), 963—971.

## Фенхель (Fenchel W.)

- [1] On conjugate convex functions. *Canadian J. of Math.*, **1** (1949), 73—77.

## Фиакко А., Маккорник Г. (Fiacco A., McCormick G.)

- [1] Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. — М.: Мир, 1972.

## Фикера (Fichera G.)

- [1] Problemi elastostatici con vincoli unilaterali; il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. *Mem. Accad. Naz. dei Lincei*, **8** (7) (1964), 91—140.

## Флетчер (Fletcher R.)

- [1] Optimization. Academic Press, London, 1969.

## Флетчер, Пауэлл (Fletcher R., Powell M.)

- [1] A rapidly convergent method for minimization. *Comp. J.*, **6** (1963), 163—168.

## Флетчер, Ривз (Fletcher R., Reeves C. M.)

- [1] Functional minimization by conjugate gradients. *Comp. Journal*, **7** (1964), 149—153.

## Фортен (Fortin M.)

- [1] Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis. Thèse, Université de Paris VI (1972).

## Фортен, Гловински, Марокко (Fortin M., Glowinski R., Marrocco A.)

- [1] (Готовится к печати.)

## Фрайш де Вёбеке (Fraaijs de Veubeke B.)

- [1] Displacement and equilibrium models in finite element method. Dans Stress Analysis, Chap. 9, O. C. Zienkiewicz et G. S. M虑stek, Ed. Wiley, 1965.

## Франк, Вулф (Frank M., Wolfe P.)

- [1] An algorithm for quadratic programming. *Naval Res. Log. Quart.*, **3** (1956), 95—110.

## Фремон (Fremond M.)

- [1] Solide reposant sur un sol stratifié. *Bull. du Laboratoire des Ponts et Chaussées*. (avril 1972), 85—95.

- [2] Etude des structures visco-élastiques stratifiées soumises à des charges harmoniques et de solides élastiques reposant sur des structures. Thèse, Université de Paris VI (1971).

## Фридман (Friedman A.)

- [1] Stochastic games and variational inequalities. *Archive Rat. Mech. and Anal.*, **51**, № 5 (1973), 321—346.

- [2] Regularity theorems for variational inequalities in unbounded domains and applications to stopping time problems. *Archive Rat. Mech. and Anal.*, **52**, № 2 (1973), 134—160.

## Фушарди, Моско, Скарпини, Скиаффино (Fusciardi A., Mosco U., Scarpini F., Schiaffino A.)

- [1] A dual method for the numerical solution of some variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, **40** (1972), 471—493.

Хедли Дж.

[1] Нелинейное и динамическое программирование.—М.: Мир, 1967.

Хестенс (Hestenes M. R.)

[1] The conjugate gradient method for solving linear systems., 6, Numerical Analysis, 83—102, McGraw-Hill, New York (1956).

[2] Multiplier and Gradient Methods, *J. O. T. A.*, 4, № 5 (1969), 303—320.

Хестенс, Штифель (Hestenes M. R., Stiefel E.)

[1] Methods of conjugate gradient for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bureau of Standards*, 49 (1952), 409—436.

Хёрмандер (Hörmander L.)

[1] Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. *Arkiv. für Mat.*, 3 (1954), 181—186.

Ходж, Геракович, Стагт (Hodge P. G., Herakovich C. T., Stout R. E.)

[1] On numerical comparisons in elastic-plastic torsion. *Transactions of the A. S. M. E.* (1962), 454—459.

Хуард (Huard P.)

[1] Revolution of mathematical programming with non linear constraints by the method of centers Non linear Programming. Abadie, J., Ed., North-Holland, 1967.

Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В.

[1] Вариационные задачи механики и управления.—М.: Наука, 1973.

Чиоринеску, Марголис (Cioranescu D., Margolis B.)

[1] (Готовится к печати.)

Шварц (Schwartz L.)

[1] Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1967.

Шехтер (Schechter S.)

[1] Iterations Method for non linear problems. *Trans. Amer. Math. Society*, 104 (1962), 601—612.

[2] Minimization of convex functions by relaxation, Ch. 7 de Integer and non linear programming, Abadie Ed., North-Holland, 1970, 177—189.

[3] Relaxation method for convex problems. *SIAM J. of Num. Anal.*, 5 (1968), 601—612.

Шоу (Shaw F. S.)

[1] The torsion of solid and hollow prisms in the elastic and plastic range by relaxation methods. Report ACA—11, 1944.

Штифель (Stiefel E.)

[1] Recent developments in relaxation techniques. Proceedings Int. Congress Appl. Math., I (1954), 384—391.

Эблоу, Бригхэм (Ablow C. M., Brigham G.)

[1] An analogue solution of programming problems. *Oper. Research*, 3 (1955), 388—394.

Экланд (Ekeland I.)

[1] Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations elliptiques. *J. of Funct. Analysis*, 9, № 1 (1972), 1—62.

Экланд, Темам (Ekeland I., Temam R.)

[1] Выпуклый анализ и вариационные проблемы. Пер. с англ.—М.: Мир, 1979.

Элкнн (Elkin R. M.)

[1] Convergence theorems for Gauss-Seidel and other minimization algorithms. Technical Report 68—59, University of Maryland, Comp. Sci. Center, College Park, Maryland, 1968.

Эрлих (Ehrlich L. W.)

[1] Solving the biharmonic equation as coupled finite difference equations. *SIAM J. Num. Anal.*, 8 (1971), 278—287.

Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.

[1] Исследования по линейному и нелинейному программированию.—М.: ИЛ, 1962.

Эрроу К. Дж., Гурвиц Л.

- [1] Градиентный метод для вогнутого программирования. В кн.: Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. — М.: ИЛ, 1962, 175—217.

Ямада (Yamada Y.)

- [1] Recent developments in matrix displacement method for elastic problems in Japan, dans Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, R. H. Gallagher, Y. Yamada; J. T. Oden, Ed. University of Alabama Press, 1971, 283—316.

Яиенко Н. Н.

- [1] Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — М.: Наука, 1967.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ, ДОБАВЛЕННЫЙ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

- 1\*. Ильюшин А. А. Деформация вязко-пластичного тела.—Уч. записки МГУ, сер. Механика, вып. 39. М.: Изд-во МГУ, 1940.
- 2\*. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды.—ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 468—492.
- 3\*. Мосолов П. П., Мясников В. П. Вариационные методы в теории течений жёстко-вязко-пластических сред.—М.: Изд-во МГУ, 1971.
- 4\*. Баничук Н. В. Численное решение задачи о прогибе упругой пластины, стеснённой ограничениями.—Инжен. журнал, МТТ, 1967, № 4.
- 5\*. Белоконь А. В. Применение вариационных методов к решению контактных задач.—Изв. Сев.-Кавказского научн. центра высш. школы, сер. естеств. наук, 1973, № 4 с. 10—12.
- 6\*. Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений трехмерных задач теории упругости.—М.: Ин-т проблем механики АН СССР, препринт № 33, 1973.
- 7\*. Картвелишвили П. М. Численное решение двух контактных задач для упругих пластин.—Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 6.
- 8\*. Ковалёв С. И., Ширко И. В. Численное решение задачи о выдавливании металла.—В сб.: Пластическая деформация лёгких и специальных сплавов, М.: Металлургия, 1978.
- 9\*. Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров.—ДАН СССР, 1976, т. 230, № 2.
- 10\*. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования.—ПММ, 1978, т. 42, вып. 3.
- 11\*. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач.—М.: Изд-во МГУ, 1974.
- 12\*. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач.—Л.: изд-во ЛГУ, 1968.
- 13\*. Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н. Введение в минимакс.—М.: Наука, 1972.
- 14\*. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование.—М.: Наука, 1967.
- 15\*. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.
- 16\*. Карманов В. Г. Математическое программирование.—М.: Наука, 1975.
- 17\*. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.—М.: Наука, 1977.
- 18\*. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.—М.: Наука, 1971.
- 19\*. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкrelidze Р. В., Мищенко Е. В. Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1969.
- 20\*. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах.—М.: Наука, 1975.

- 21\*. Трухаев Р. И., Хоменюк В. В. Теория неклассических вариационных задач.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1971.
- 22\*. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления.—М.: Наука, 1973.
- 23\*. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи управления и поиска.—М.: Наука, 1978.
- 24\*. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения.—М.: Наука, 1971.
- 25\*. Итеративные методы в теории игр и программировании: Сб. статей Под ред. Беленьского В. З. и Волкоиского В. А.—М: Наука, 1974.
- 26\*. Монахов В. Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений.—Новосибирск. Наука, 1977.

## ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абади 96, 129, 546  
Алдеева 562, 546  
Альтман 130, 546  
Аннин 18, 546  
Антосевич 130, 546  
Аргирис 264, 269, 546  
Артола 513, 546  
Аттуш 439, 546  
Ауслендер 89, 130, 269, 547

Байокки 10, 269, 547  
Байяда 10, 547  
Балакришнан 129, 547  
Балмер 261, 546  
Баничук 265, 560, 562  
Бежи 268, 269, 338, 369, 536, 543, 544, 547  
Бекман 112, 130, 547  
Белоконь 562  
Бенсуссан 10, 131, 240, 544, 545, 547  
Берж 131, 547  
Бндо 43, 547  
Блюм 130, 548  
Бокс 129, 548  
Болтянский 562  
Борзенберже 534, 548  
Боссавит 366, 548  
Браудер 32, 131, 548  
Брезис 9, 10, 18, 48, 49, 60, 135, 136, 209, 265, 269, 329, 346, 370, 404, 428, 438, 439, 478, 502, 548  
Брем 129, 548  
Брембл 59, 548  
Бурга 10, 205, 207, 265, 269, 461, 543, 549  
Бюи-Тронг-Лиё 131, 549

Вагшал 52, 168, 557  
Вайнберг 129, 549  
Варайя 130, 131, 549  
Варга 82, 130, 461, 475, 522  
Васильев 562  
Вио 269, 487, 543, 549  
Вольни 269, 552  
Вулф 96, 129, 549, 550

Габей 269, 549  
Гамкрелидзе 562

Геракович 134, 265, 269, 550, 560  
Гийе 130, 547  
Гловински 81, 85, 87, 130, 131, 232, 265, 266, 269, 338, 340, 357, 358, 366, 367, 370, 427, 429, 549, 550, 557  
Годунов 29, 550  
Голдстайн 130, 550  
Голдфарб 130, 550  
Гольдштейн 562  
Гольдштейн 563  
Гринштадт 130, 550  
Грэзв 129, 550  
Гурган 130, 547  
Гурса 209, 265, 268, 269, 406, 547, 550  
Гуэрри 269, 552

Дамламян 439, 546  
Данилин 562  
Дейвис 129, 548  
Демьянов 130, 550, 562  
Долцинис 265, 546  
Дуглас 545, 551  
Дэвидон 130, 550  
Дэниел 129, 130, 550  
Дюво 7, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 21, 134, 240, 246, 271, 272, 307, 338, 369—371, 431, 435, 438, 477, 478, 501, 524, 525, 531, 543,—545, 551  
Дюпон 545, 551  
Дюран 130, 551

Жоли 52, 551

Зангвилл 130, 551  
Зенкевич 52, 265, 269, 551  
Зламал 52, 551  
Зойтендейк 129, 551  
Зуховицкий 562

Ивон 428, 545, 551  
Ильюшин 5, 525, 562  
Юффе 562

Калкер 9, 552  
Капурсо 269, 551, 552

- Карманов 562  
 Карпантьер 96, 546  
 Карр 130, 552  
 Картвелишвили 562  
 Кернвец 552  
 Кинг 269, 551  
 Ки Фан 131, 552  
 Клейн 562  
 Ковалев 562  
 Ковалник 129, 552  
 Коитер 9, 552  
 Коминчоли 10, 130, 269, 547, 552  
 Кормо 265, 269, 551  
 Коши 130, 552  
 Кравчук 562  
 Крайер 113, 130, 552  
 Крелле 129, 553  
 Крокет 130, 552  
 Крузей 130, 532, 552  
 Кун 129, 553  
 Куллем 96, 129, 553  
 Курант 33, 130, 553  
 Кэннон 96, 129, 553  
 Кэрол 130, 553  
 Кюнци 129, 553
- Лавен 129, 268, 553  
 Ланион 134, 553  
 Лапидус 130, 550  
 Левитин 81, 130, 553  
 Леви 9, 553  
 Лемонье 269, 553  
 Лере 32, 553  
 Леруа 269, 553  
 Лесэн 545, 553  
 Лионс 5, 7—10, 14, 15, 18, 19, 21, 25,  
 28, 32, 38, 48, 71, 123, 131, 134, 141,  
 172, 240, 246, 268, 269, 272, 280, 307,  
 329, 338, 339, 344, 353, 369, 370, 371,  
 387, 431, 435, 438, 477, 478, 501, 502,  
 524, 525, 531, 543, 544, 545, 551, 553,  
 554  
 Лоран 50, 554  
 Лутсма 131, 554  
 Лэйден 130, 554  
 Люэнбергер 104, 112, 130, 554
- Мадженес 10, 14, 123, 269, 280, 284,  
 339, 431, 554  
 Майер 172, 265, 269, 554  
 Малоземов 562  
 Мангазарян 131, 554  
 Мандель 9, 18, 133, 136, 554  
 Мандельбройт 43, 554  
 Мардзулли 113, 554  
 Марокко 131, 228, 265, 266, 269, 429,  
 545, 554
- Марчук 544, 562  
 Мезляков 130, 554  
 Мерсье 131, 269, 549, 554  
 Минти 32, 554  
 Миньо 545, 554  
 Мищенко 562  
 Монсеев 562  
 Монахов 563  
 Морис 89, 555  
 Моро 9, 43—45, 439, 555  
 Моско 10, 45, 46, 52, 59, 113, 269  
 Мосолов 269, 376, 555, 562  
 Моцкни 130, 555  
 Мъеллу 130, 555  
 Мясников 376, 562, 555, 562
- Наак 265, 555  
 Неделек 131, 265, 266, 269, 557  
 Нейштадт 129,  
 Нечас 15, 555  
 Ниренберг 26,  
 Норкин 543
- Обэн 52, 59, 64, 269, 555  
 Огазо 265, 269  
 Орtega 86, 130, 555  
 Осборн 129, 552  
 Оэтти 130, 553
- Паузэлл 130, 131, 556  
 Пералба 439  
 Петриншин 130, 556  
 Пирсон 130, 556  
 Позэн 10, 269, 547  
 Полак 130, 556  
 Поляк 81, 130, 553, 556  
 Понтрягин 562  
 Прагер 9, 269, 556  
 Прокопов 29, 550  
 Пшеничный 562
- Равъяр 52, 59, 62, 269, 281, 327, 338,  
 353, 354, 366, 383, 457, 532, 533, 535,  
 543, 545, 552, 556, 557  
 Ревердин 543, 556  
 Рейнболдт 86, 130, 555  
 Ривз 130, 559  
 Розен 96, 130, 158, 557  
 Рокафеллар 25, 131, 557  
 Росков 130, 555  
 Рубинов 562
- Саати 129, 548  
 Саульев 85  
 Саусвелл 130, 557  
 Сеа 47, 81, 85, 86, 89, 90, 101, 129—  
 131, 141, 212, 265, 269, 427, 429, 557

- Сиарле 52, 59, 62, 68, 281, 327, 338, 353, 354, 357, 358, 366, 367, 383, 557  
 Сибонн 9, 29, 49, 130, 136, 209, 265, 404, 558  
 Синьорини 9, 19, 558  
 Сион 131, 558  
 Смит 358, 366, 558  
 Соболев 15, 431, 558  
 Соколовский 133  
 Спунер 264, 269  
 Спэнг 129, 558  
 Стампакья 8, 9, 28, 60, 135, 284, 554  
 Старт 134, 265, 558  
 Стрэнг 10, 59, 558
- Таккер 129, 552  
 Тартар 62, 281, 528, 558  
 Темам 43, 131, 268, 457, 528, 558  
 Тинг 9, 558  
 Тихомиров 562  
 Томассе 269, 534, 558  
 Тремольер 26, 52, 71, 130, 131, 236, 240, 269, 443, 448, 456, 461, 464, 543, 558  
 Трухаев 563
- Удзава 131, 561  
 Уильям 265, 546
- Фалк 11, 59, 68, 55  
 Фенхель 43, 559  
 Фиакко 131, 559  
 Фикера 9, 19, 559  
 Фикс 59, 62, 558  
 Флетчер 129, 130, 559  
 Фортен 266, 268, 269, 369, 419, 429, 534, 536, 544, 559  
 Фрайш де Вёбеке 52, 559
- Франк 96, 559  
 Фремон 9, 269, 559  
 Фридман 40, 545, 559  
 Фушарди 46, 113, 269, 559
- Хедли 559  
 Хёрмандер 43, 560  
 Хестенс 130, 131, 560  
 Ходж 49, 134, 265, 269, 560  
 Хомениук 563  
 Хуард 104, 131, 560
- Чанг 551  
 Чах  
 Чернов 130, 552  
 Черноуско 265, 563  
 Чноринеску 544, 560
- Шад 59, 548  
 Шварц 45, 431, 560  
 Шёнберг 130, 560  
 Шехтер 86, 130, 560  
 Шоу 134, 560  
 Штифель 130, 560
- Эблоу 130, 560  
 Экланд 43, 131, 348, 371, 560  
 Элкин 130, 560  
 Эльсгольц 43  
 Эрлих 306, 560  
 Эрроу 131, 561  
 Эскни 562
- Я마다 269, 561  
 Яненко 544, 561

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм Гаусса — Зейделя 82  
— Уձавы 127
- Аппроксимация решения эллиптических вариационных неравенств 27
- Блочная релаксация 81, 85
- Вариационная задача в теории смазки 113  
— — — — — решение методом двойственности 120—124  
— — — — — поточечной верхней релаксации 120
- Вариационное неравенство 20, 23  
— — — стационарное, несимметрический случай 25, 26  
— — — симметрический случай 22
- Внешние аппроксимации 63, 64, 66, 67, 379  
— — схема 68, 69  
— — сходимость 382, 384
- Внутренние аппроксимации 50  
— — схема 53, 58
- Гиперболические неравенства 431
- Градиентные методы 90, 402  
— — случай отсутствия ограничений 90, 91
- Границные условия в виде неравенств 7
- Двойственность 34—35, 38, 39, 43
- Дискретное неравенство Пуанкаре 141
- Задача вариационного исчисления 17  
— Дирихле 63, 115, 314, 410  
— — вариационная формулировка 349, 351  
— диффузии жидкости через полупроницаемую мембрану 270, 433  
— климатизации 9, 270, 435, 436  
— минимизации с ограничением 9  
— Неймана 334  
— — неоднородная 341  
— о движении жидкости в области, ограниченной полупроницаемой мемброй 13
- Задача о кручении упругопластического стержня 18, 132, 133, 422  
— — — — — внешняя аппроксимация 138  
— — — — — внутренняя аппроксимация 151  
— — определении поля перемещений в твердом теле при наличии трения на границе 307  
— — течении 21, 22, 368—376  
— — — неньютоновской жидкости 9
- теории импульсных систем управления 10
- Задачи теории упругости с однородными краевыми условиями 9  
— — — — — краевыми условиями, учитывающими трение 9
- Квазивариационные неравенства 10
- Коисistentность 67, 443, 445
- Краевая задача без неравенств 41
- Лагранжиан 35
- Метод вариационных неравенств 7  
— верхней релаксации 82, 191, 192, 398  
— внешней аппроксимации 160—165  
— внутренней аппроксимации 50, 157—160  
— — — в случае уравнений 53  
— Галеркина 51  
— градиента с проекцией 90, 95, 96  
— двойственности 57, 105, 236—264, 406  
— — схема аппроксимации 57  
— коиечных элементов 51, 152, 274, 317, 376, 378  
— — — сходимость 382  
— нижней релаксации 82  
— последовательных приближений 27  
— поточечной верхней релаксации с проекцией 146, 147, 191  
— — — релаксации 73  
— — — при наличии ограничений 78  
— — — случай отсутствия ограничений 73

- Метод поточечной релаксации при наличии ограничений, сходимость 80  
 — центров 101—104  
 — штрафа 31, 83, 97, 213—236  
 — — внешний 99—101  
 — — внутренний 97  
 — — схема аппроксимации 56—57
- Методы релаксации 73  
 — — схема аппроксимации 57, 145  
 — — сопряженных градиентов
- Минимизация недифференцируемых функционалов 86, 87
- Множитель Лагранжа 114
- Модельная задача о деформации мембранны 472  
 — — теории упругости с трением 19, 132, 133  
 — — упругопластическая задача 18  
 — — эволюционная задача о трении 465
- Неравенство параболического типа 7**
- Оператор коэрцитивный 25**  
 — монотонный 25  
 — сжатия 109  
 — штрафа 31, 215
- Оценка погрешности аппроксимации 59
- Параболические неравенства I типа 430, 437  
 — — — — аппроксимация 439—448  
 — — II типа 430, 431, 477  
 — — — — аппроксимация 480—490  
 — — — — численное решение 491—499
- Принцип двойственности 35
- Пространство банахово 431  
 — бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем 16, 433  
 — гильбертово 15  
 — распределений 432  
 — соболевское 15
- Регуляризация 33  
 Решение вариационных неравенств четвертого порядка 337—349, 358—360
- Седловая точка 107**  
 — — алгоритмы разыскания 107—112
- След функции 15**
- Смешанная задача 314
- Сопряженная выпуклая функция 45
- Среда Бингама 9, 374, 524
- Стационарная задача 10—11
- Стационарные вариационные неравенства 230
- Сходимость алгоритма поточечной релаксации 74  
 — — внешних аппроксимаций 266, 173  
 — — внутренних аппроксимаций 168
- Течение среды Бингама 374, 524  
 — — — численное исследование 524
- Точка блокировки алгоритма 198
- Триангуляция 51, 152, 327
- Уравнение со штрафом 32**
- Функционал со штрафом 33**
- Центр выпуклого множества 102**
- Эволюционная задача 7**
- Эволюционное вариационное неравенство 8, 431  
 — — — — неравенство второго порядка по  $t$  499  
 — — — — — аппроксимация 503—518  
 — — — — — численное решение 518—524
- Экстремальная задача с ограничениями 8
- Эллиптическое вариационное неравенство 8

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
ЧАСТЬ I. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ. ПЕРВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	7
Введение . . . . .	7
<b>Глава 1. Общие методы аппроксимации стационарных вариационных неравенств . . . . .</b>	<b>13</b>
1. Примеры . . . . .	13
1.1. Задачи о движении жидкости в области, ограниченной полупроницаемой мембраной . . . . .	13
1.2. Модельная упругопластическая задача . . . . .	18
1.3. Модельная задача теории упругости с трением . . . . .	19
1.4. Одна задача о течении . . . . .	21
1.5. План дальнейшего изложения . . . . .	22
2. Общая формулировка стационарных вариационных неравенств . . . . .	22
2.1. Симметричный случай . . . . .	22
2.2. Случай несимметричности . . . . .	25
2.3. План дальнейшего изложения . . . . .	27
3. Способы аппроксимации в бесконечномерном варианте . . . . .	27
3.1. Метод последовательных приближений . . . . .	27
3.2. Метод штрафа . . . . .	31
3.3. Регуляризация . . . . .	33
3.4. Двойственность (I) . . . . .	34
3.5. Двойственность (II) . . . . .	38
3.6. Двойственность (III) . . . . .	43
3.7. Различные замечания . . . . .	49
3.8. План дальнейшего изложения . . . . .	50
4. Внутренние аппроксимации . . . . .	50
4.1. Внутренние аппроксимации пространства $V$ . Метод конечных элементов . . . . .	50
4.2. Схемы внутренней аппроксимации для случая уравнений . . . . .	53
4.3. Аппроксимации $K$ . . . . .	54
4.4. Схемы аппроксимации исходной задачи . . . . .	55
4.5. Схемы аппроксимации задач, полученных методом штрафа или регуляризации . . . . .	56
4.6. Схемы аппроксимации задач, полученных методами двойственности . . . . .	57
4.7. Нерешенные задачи. Оценки погрешности аппроксимации . . . . .	59
5. Внешние аппроксимации . . . . .	63
5.1. Пример . . . . .	63
5.2. Внешние аппроксимации $V, a, K, j$ . . . . .	66
5.3. Схемы внешней аппроксимации . . . . .	68
6. Заключение . . . . .	71

<b>Глава 2. Алгоритмы оптимизации . . . . .</b>	73
1. Метод релаксации . . . . .	73
1.1. Описание метода поточечной релаксации. Случай отсутствия ограничений . . . . .	73
1.2. Поточечная релаксация. Минимизация с ограничениями . . . . .	78
1.3. Блочная релаксация . . . . .	81
1.4. Верхняя и нижняя релаксации . . . . .	81
1.5. Один класс недифференцируемых функционалов, минимизируемых методом релаксации . . . . .	86
2. Градиентные методы и метод градиента с проекцией . . . . .	90
2.1. Общие замечания . . . . .	90
2.2. Градиентные методы (случай отсутствия ограничений) . . . . .	90
2.3. Методы сопряженных градиентов (случай отсутствия ограничений) . . . . .	92
2.4. Минимизация с ограничениями . . . . .	94
3. Метод штрафа и его варианты . . . . .	97
3.1. Общие замечания . . . . .	97
3.2. Внутренние методы . . . . .	97
3.3. Внешние методы . . . . .	99
3.4. Метод центров с переменным параметром усечений . . . . .	101
4. Методы двойственности . . . . .	105
4.1. Общие замечания . . . . .	105
4.2. Примеры . . . . .	106
4.3. Первый алгоритм разыскания седловой точки . . . . .	107
4.4. Второй алгоритм разыскания седловой точки . . . . .	109
5. Применение методов релаксации и двойственности для численного исследования одной модельной вариационной задачи . . . . .	113
5.1. Общие замечания . . . . .	113
5.2. Непрерывная задача . . . . .	113
5.3. Приближенная задача . . . . .	115
5.4. Сходимость последовательности приближенных решений при $h \rightarrow 0$ . . . . .	117
5.5. Решение приближенной задачи методом точечной верхней релаксации с ограничениями . . . . .	120
5.6. Решение методом двойственности . . . . .	120
5.7. Анализ численных результатов . . . . .	124
6. Комментарии . . . . .	129
<b>Глава 3. Численное исследование задачи упругопластического кручения цилиндрического стержни . . . . .</b>	132
1. Постановка непрерывной задачи. Физическая интерпретация. Плаи изложения . . . . .	132
1.1. Постановка непрерывной задачи . . . . .	132
1.2. Физическая интерпретация . . . . .	133
1.3. План изложения . . . . .	134
2. Некоторые свойства решения задачи $(P_0)$ . . . . .	135
2.1. Результаты о регулярности . . . . .	135
2.2. Эквивалентная вариационная задача . . . . .	136
2.3. Некоторые частные случаи, когда решение известно . . . . .	136
3. Численное исследование задачи $(P_1)$ . . . . .	138
3.1. Плаи изложения . . . . .	138
3.2. Внешняя аппроксимация задачи $(P_1)$ . . . . .	138
3.3. Сходимость последовательности приближенных решений при $h \rightarrow 0$ . . . . .	140
3.4. Решение приближенной задачи методом поточечной верхней релаксации с проекцией . . . . .	146

3.5. Приложения. Пример 1 . . . . .	147
3.6. Приложения. Пример 2 . . . . .	150
4. Внутренние аппроксимации задачи ( $P_0$ ) . . . . .	151
4.1. Метод конечных элементов . . . . .	152
4.2. Метод внутренней аппроксимации, использующий собственные функции оператора — $\Delta$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	157
5. Внешние аппроксимации задачи ( $P_0$ ) . . . . .	160
5.1. Аппроксимации функционала $J$ . . . . .	160
5.2. Внешние аппроксимации множества $K_0$ . . . . .	162
5.3. Формулировка приближенной задачи . . . . .	165
5.4. Разрешимость приближенной задачи . . . . .	165
6. Сходимость внешних и внутренних аппроксимаций . . . . .	166
6.1. Одна лемма о плотности . . . . .	166
6.2. Сходимость внутренних аппроксимаций . . . . .	168
6.3. Сходимость внешних аппроксимаций . . . . .	173
7. Численное решение приближенной задачи, соответствующей задаче ( $P_C$ ), методами поточечной и поточечной верхней релаксации с последовательной проекцией . . . . .	191
7.1. План изложения . . . . .	191
7.2. Описание метода . . . . .	192
7.3. Результаты о сходимости . . . . .	196
7.4. Приложения. Пример 1 . . . . .	205
7.5. Приложения. Пример 2 . . . . .	209
7.6. Приложения. Пример 3 . . . . .	210
7.7. Различные замечания . . . . .	211
8. Решение приближенной задачи, соответствующей задаче ( $P_0$ ), методами штрафа . . . . .	213
8.1. План изложения . . . . .	213
8.2. Первый вариант метода штрафа . . . . .	214
8.3. Второй вариант метода штрафа . . . . .	223
8.4. Сравнение результатов . . . . .	235
9. Решение приближенной задачи, соответствующей задаче ( $P_0$ ), методами двойственности . . . . .	236
9.1. Введение и план изложения . . . . .	236
9.2. Применение метода двойственности разд. 9.1.2 к решению приближенных задач. Случай коинчноэлементной аппроксимации разд. 4.1 . . . . .	241
9.3. Применение метода двойственности разд. 9.1.2 к решению приближенных задач. Случай внутренней аппроксимации при помощи собственных функций оператора — $\Delta$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$ . . . . .	249
9.4. Применение метода двойственности разд. 9.1.2 к решению приближенных задач. Случай внешних аппроксимаций разд. 5 . . . . .	254
9.5. Применение метода двойственности разд. 9.1.3 к решению приближенных задач . . . . .	258
10. Комментарии . . . . .	264

## ЧАСТЬ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ К СТАЦИОНАРНЫМ И ЭВОЛЮЦИОННЫМ ЗАДАЧАМ

Введение . . . . .

Глава 4. Задачи климатизации, задачи с односторонними ограничениями на границе и вариационные неравенства 4-го порядка . . . . .

1. Задачи климатизации и диффузии жидкости через полупроницаемую мембрану . . . . .

1.1. Постановка задачи . . . . .	270
1.2. Результаты о существовании и единственности решения задачи (1.4), (1.5) . . . . .	272
1.3. Аппроксимации по методу конечных элементов . . . . .	274
1.4. Сходимость последовательности приближенных решений (I). Случай $q=1$ . . . . .	277
1.5. Сходимость последовательности приближенных решений (II). Случай $q=2$ . . . . .	289
1.6. Численное решение приближенных задач . . . . .	293
1.7. Примеры . . . . .	298
2. Задачи с учетом трения . . . . .	307
2.1. Формулировки задач . . . . .	307
2.2. Результаты о существовании и единственности решения задачи (2.1), (2.2) . . . . .	308
2.3. Связь с задачами разд. 1 . . . . .	308
2.4. Зависимость решения от параметра $q$ . . . . .	309
2.5. Свойства сопряженных переменных . . . . .	314
2.6. Аппроксимация по методу конечных элементов . . . . .	317
2.7. Численное решение приближенных задач . . . . .	318
2.8. Пример . . . . .	321
3. Одна задача с односторонними ограничениями на границе . . . . .	328
3.1. План изложения . . . . .	328
3.2. Результаты относительно существования и единственности решения задачи (3.1), (3.2) . . . . .	328
3.3. Задачи, связанные с регулярностью . . . . .	329
3.4. Задачи, связанные с двойственностью . . . . .	329
3.5. Аппроксимация при помощи конечных элементов первого и второго порядков . . . . .	330
3.6. Численное решение приближенных задач . . . . .	333
3.7. Пример . . . . .	336
4. Численное исследование вариационных неравенств четвертого порядка . . . . .	337
4.1. План изложения . . . . .	337
4.2. Итерационный метод решения некоторых вариационных задач четвертого порядка . . . . .	338
4.3. Новая вариационная формулировка задачи Дирихле для оператора $\Delta^2$ . . . . .	349
4.4. Итерационный метод решения задачи Дирихле для оператора $\Delta^2$ , основанный на вариационной формулировке разд. 4.3 . . . . .	351
4.5. Аппроксимация задачи (4.2), (4.3) при помощи смешанных конечных элементов . . . . .	353
4.6. Итерационный метод решения приближенной задачи (4.72). Обобщение на случай неравенств 4-го порядка . . . . .	356
4.7. Пример и численное решение . . . . .	361
5. Комментарии . . . . .	366
<b>Глава 5. Численное исследование стационарного течения среды Бингама в цилиндрическом трубопроводе . . . . .</b>	368
1. Постановка непрерывной задачи. Физическая интерпретация. План изложения . . . . .	368
1.1. Постановка непрерывной задачи . . . . .	368
1.2. Физическая интерпретация . . . . .	369
1.3. План изложения . . . . .	369
2. Некоторые свойства решения непрерывной задачи . . . . .	370
2.1. Результаты, связанные с регулярностью . . . . .	370
2.2. Зависимость решения от параметра $g$ . . . . .	370

2.3. Некоторые частные случаи, когда решение известно . . . . .	374
<b>3. Внутренняя аппроксимация задачи (<math>P_0</math>) при помощи метода конечных элементов . . . . .</b>	<b>376</b>
3.1. Триангуляция области $\Omega$ . Определение пространства $V_h$ . . . . .	777
3.2. Определение приближенной задачи . . . . .	777
3.3. О разрешимости приближенной задачи . . . . .	377
3.4. Разворнутая формулировка приближенной задачи . . . . .	377
3.5. Об использовании конечных элементов порядка выше 1 . . . . .	378
<b>4. Внешние аппроксимации задачи (<math>P_0</math>) . . . . .</b>	<b>379</b>
4.1. Аппроксимация функционала $J_0$ . . . . .	379
4.2. Внешние аппроксимации функционала $J$ . . . . .	379
4.3. Формулировка приближенной задачи . . . . .	381
4.4. О разрешимости приближенной задачи . . . . .	382
<b>5. Сходимость внутренних и внешних аппроксимаций . . . . .</b>	<b>382</b>
5.1. Сходимость метода конечных элементов разд. 3 . . . . .	382
5.2. Сходимость внешних аппроксимаций . . . . .	384
<b>6. Методы решения, использующие регуляризацию функционала <math>J</math> . . . . .</b>	<b>386</b>
6.1. Регуляризация непрерывной задачи ( $P_0$ ) . . . . .	387
6.2. Регуляризация приближенных задач . . . . .	395
6.3. Решение приближенных регуляризованных задач (I). Метод поточечной верхней релаксации . . . . .	398
6.4. Решение приближенных регуляризованных задач (II). Градиентный метод с промежуточным оператором . . . . .	402
<b>7. Методы двойственности . . . . .</b>	<b>406</b>
7.1. Применение к решению непрерывной задачи . . . . .	406
7.2. Применение к решению приближенных задач (I). Случай внешних аппроксимаций разд. 4 . . . . .	408
7.3. Применение к решению приближенных задач (II). Случай конечноэлементных аппроксимаций . . . . .	416
<b>8. Применение к решению задачи упругопластического кручения гл. 3 . . . . .</b>	<b>422</b>
8.1. План взложения . . . . .	422
8.2. Переформулировка алгоритма (9.5), (9.6), (9.7) разд. 9.1.1 гл. 3 . . . . .	422
8.3. Реализация алгоритма (8.7), (8.8), (8.9) . . . . .	423
8.4. Решение конкретной задачи . . . . .	425
8.5. Один вариант алгоритма (8.13), (8.14), (8.15) . . . . .	426
<b>9. Комментарий . . . . .</b>	<b>427</b>
<b>Глава 6. Общие методы аппроксимации и решения эволюционных вариационных неравенств . . . . .</b>	<b>430</b>
1. Основные определения и обозначения . . . . .	431
1.1. Векторные пространства функций и распределений . . . . .	431
1.2. Функциональные пространства . . . . .	432
2. Введение в теорию параболических эволюционных неравенств I типа . . . . .	433
2.1. Примеры параболических неравенств I типа . . . . .	433
2.2. Абстрактная формулировка . . . . .	437
3. Аппроксимация параболических неравенств I типа . . . . .	439
3.1. Основные гипотезы относительно аппроксимации . . . . .	440
3.2. Схемы аппроксимации параболических неравенств I типа . . . . .	445
3.3. Сходимость решений приближенных неравенств . . . . .	446
4. Численное решение некоторых параболических неравенств I типа . . . . .	457
4.1. Модельная задача . . . . .	457
4.2. Модельная эволюционная задача о трении . . . . .	465
4.3. Модельная задача о деформации мембранны . . . . .	472

5. Введение в теорию параболических неравенств II типа . . . . .	477
5.1. Пример I . . . . .	477
5.2. Абстрактная формулировка и теорема существования . . . . .	478
6. Аппроксимация параболических неравенств II типа . . . . .	480
6.1. Основные гипотезы, необходимые для построения аппроксимаций . . . . .	480
6.2. Схема аппроксимации параболических неравенств II типа . . . . .	480
6.3. Сходимость решений приближенных неравенств . . . . .	482
7. Численное решение параболических неравенств II типа . . . . .	491
7.1. Решение задачи I . . . . .	493
7.2. Решение задачи II . . . . .	496
7.3. Заключение . . . . .	499
8. Введение в теорию эволюционных неравенств второго порядка по $t$ . . . . .	499
8.1. Пример I . . . . .	499
8.2. Пример II . . . . .	501
8.3. Абстрактная формулировка . . . . .	502
9. Аппроксимация неравенств второго порядка по $t$ . . . . .	503
9.1. Предположения . . . . .	503
9.2. Схемы аппроксимации . . . . .	505
9.3. Сходимость решений приближенных неравенств . . . . .	508
10. Численное решение неравенств второго порядка по $t$ . . . . .	518
10.1. Решение задачи I . . . . .	519
10.2. Решение задачи II . . . . .	521
11. Численное исследование течений среды Бингама . . . . .	524
11.1. Обозначения и постановка задачи . . . . .	524
11.2. Численные схемы . . . . .	526
11.3. Численные результаты . . . . .	535
12. Комментарии . . . . .	543
Список литературы . . . . .	546
Именной указатель . . . . .	564
Предметный указатель . . . . .	567

## **УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЫ**

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присыпать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».

Р. Гловински и др.  
ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Редактор А. А. Брянданская  
Младший редактор Н. С. Полякова  
Художник Н. Н. Дронова  
Художественный редактор В. И. Шаповалов  
Технический редактор Г. Б. Алюминна  
Корректор Н. И. Баранова

ИБ № 1503

Сдано в набор 23.11.78. Подписано к печати 28.03.79.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага типографская № 1. Гарнитура  
латинская. Печать высокая. Объем 18 бум. л. Усл. печ. л. 36.  
Уч.-изд. л. 31,18. Изд. № 1/9821. Тираж 8100 экз. Зак. 182.  
Цена 2 р. 50 к.

Издательство «Мир»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 6 Ленинградского  
производственного объединения «Техническая книга» Союзпо-  
лиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144 г. Ле-  
нинград, ул. Монсеенко, 10. Заказ 1403  
с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового  
Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени  
А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной  
торговли. Москва, М-54, Валовая, 28.