

М. А. КОЛТУНОВ, А. С. КРАВЧУК, В. П. МАЙБОРОДА

**ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА
ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Прикладная математика»



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра теории упругости и пластичности
Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского
(зав. кафедрой — проф. В. П. Малков);
кафедра теории упругости и пластичности
Ростовского государственного университета
(зав. кафедрой — чл.-кор. АН СССР, проф. И. И. Ворович).

Колтунов М. А., Кравчук А. С., Майборода В. П.

К60 Прикладная механика деформируемого твердого тела:
Учеб. пособие для студентов вузов.—М.: Выш. школа,
1983.—349 с., ил.
В пер.: 95 к.

Е книга изложены теория деформировання упругих, упругопластических и упруговязких тел, методы определения параметров уравнений состояния, методы решения задач и примеры. При изложении методов использованы новейшие достижения теории и практики численного анализа.

Особенностью книги является широкое освещение современных приближенных методов решения задач о напряженном и деформированном состоянии конструкционных элементов с применением ЭВМ.

Для студентов механических специальностей университетов, вузов. Может быть использована инженерами-расчетчиками, проектировщиками.

К 2105000000—040
001(01)—83 94—83

ББК 22.23
531

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге изложены основы механики твердого деформируемого тела, методы и алгоритмы решения соответствующих краевых и начально-краевых задач на ЭВМ и некоторые вопросы математического исследования этих задач и алгоритмов. Основное внимание уделено задачам и методам классической теории упругости.

Принципиальное отличие предлагаемой вниманию читателя книги от классических руководств состоит в ориентации на приобретение навыков построения приближенных решений, как правило, с применением современных ЭВМ с большой памятью и быстродействием.

Ориентация на использование ЭВМ обусловлена не только сложностью решаемых задач, но и существующей в настоящее время тенденцией к «кatalogизации» накопленных решений и методов в памяти ЭВМ — созданию обширных библиотек проблемно-ориентированных программ.

Книга написана на базе специальных курсов, читаемых авторами в течение ряда лет студентам факультета прикладной математики Московского института электронного машиностроения, специализирующимся в области применения ЭВМ для решения инженерных задач, в частности для решения задач механики деформируемого твердого тела.

Считаем своим приятным долгом выразить благодарность рецензентам — кафедре теории упругости Горьковского государственного университета, возглавляемой профессором В. П. Малковым, члену-корреспонденту АН СССР, заведующему кафедрой теории упругости Ростовского государственного университета профессору И. И. Воровичу, а также доценту, канд. физ.-мат. наук А. В. Гусеву, чьи пожелания и замечания были учтены при доработке рукописи.

Все критические замечания по улучшению книги будут приняты с благодарностью. Письма просьба направлять в адрес издательства: Москва, К-52, Неглинная ул., 29/14.

Авторы

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 1.1. Способы изучения движений деформируемых тел

Пусть деформируемое тело (твердое или жидкое) занимает в пространстве область Ω . Каждую материальную точку тела будем отождествлять с той точкой пространства (области Ω), которую она занимает в данный момент времени t . Движение тела Ω будем изучать, начиная с некоторого момента времени $t = t_0$ и до момента $t = T$, $T \geq t_0$.

Кинематика определяется заданием координат всех точек области Ω как функций времени $t \in [t_0, T]$ относительно некоторой неподвижной системы отсчета, которую выберем декартовой:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = x^i(t) \mathbf{k}_i. \quad (1.1)$$

Положение тела в момент времени $t = t_0$ будем считать известным; область Ω для этого момента времени обозначим через Ω_0 , координаты точек — через a , т. е.

$$\mathbf{x}(t_0) = a^i \mathbf{k}_i.$$

Таким образом, по определению, движение деформируемого тела считается известным, если известны три функции:

$$x^i = x^i(a^1, a^2, a^3, t) \equiv x^i(\mathbf{a}, t), \quad (1.2)$$

где t изменяется в пределах от t_0 до T (иногда $t_0 = -\infty$, $T = +\infty$).

Зная зависимости (1.2), можно определить другие характеристики движений:

поле перемещений

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{a}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{a}_i, t) - \mathbf{a}, \quad (1.3)$$

поле скоростей

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{a}, t) = \partial \mathbf{u} / \partial t = \partial \mathbf{x} / \partial t, \quad (1.4)$$

поле ускорений

$$\ddot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{v} / \partial t = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \partial^2 \mathbf{x} / \partial t^2, \quad (1.5)$$

а также рассчитать в соответствии с физическими законами, описывающими физические свойства материала тела в точке x ,

изменение других полей, сопровождающих движение деформируемого тела Ω , например изменение поля температур

$$T = T(\mathbf{x}, t) = T(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, t), t), \quad (1.6)$$

плотности среды

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, t), t), \quad (1.7)$$

давление в данной точке и т. д.

Предполагается, что зависимости (1.2) непрерывно дифференцируемы и

$$\det \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right\| \equiv \det \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial \alpha^j} \right\| \neq 0 \quad (1.8)$$

в любой момент времени t . Отсюда следует, во-первых, что

$$\det \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial \alpha^j} \right\| > 0, \quad \forall t \in [t_0, T], \quad (1.9)$$

поскольку при $t = 0$ $\det \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial \alpha^j} \right\| = +1$; во-вторых, что зависимость (1.2) разрешима относительно $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\alpha^i = \alpha^i(x^1, x^2, x^3, t) \equiv a^i(\mathbf{x}, t). \quad (1.10)$$

Поэтому, зная изменение любого поля (температуры, плотности и др.) для любой частицы $\boldsymbol{\alpha}$, можно определить, каким будет значение этого поля в данной точке \mathbf{x} пространства в данный момент времени t ; для этого достаточно подставить зависимости (1.10) в заданные формулы

$$T = T(\boldsymbol{\alpha}, t), \quad \rho = \rho(\bar{\boldsymbol{\alpha}}, t), \dots$$

Определение. Способ изучения (описания) движения деформируемых тел, в основе которого лежат зависимости (1.2), называется способом Лагранжа; способ изучения движения деформируемых тел, при котором все поля (скорость, ускорение, температура, плотность и т. д.) определяются как функции пространственных координат \mathbf{x} (и времени), — способом Эйлера.

Пусть движение по способу Лагранжа задано; переход к переменным Эйлера \mathbf{x} осуществляется, как было отмечено, с использованием соотношений (1.10), обратных (1.2). Заметим, что при использовании переменных Лагранжа $\boldsymbol{\alpha}$ скорость изменения какого-либо параметра (например, температуры) определяется частной производной от этого параметра по времени.

Пусть теперь известно описание движения по способу Эйлера; осуществим переход к переменным Лагранжа. Для этого прежде всего рассмотрим материальную частицу, находящуюся в данный момент времени t в точке пространства \mathbf{x} ; эта частица обладает скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и в момент времени $t + dt$ будет иметь координаты

$$\bar{\mathbf{x}} + d\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{v} dt. \quad (1.11)$$

Из зависимости (1.11) следует система уравнений

$$dx^i/dt = v^i(x^1, x^2, x^3, t), \quad (1.12)$$

представляющая собой систему обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений относительно координат точек тела Ω .

Как известно, общее решение системы (1.12)

$$x^i = x^i(c^1, c^2, c^3, t) \quad (1.13)$$

зависит от трех произвольных постоянных, которые определяются из условия

$$x^i(c^1, c^2, c^3, t_0) = a^i \in \Omega. \quad (1.14)$$

Разрешив систему алгебраических уравнений (1.14) относительно констант c^i и подставив решение в (1.13), получим:

$$x^i = x^i(a^1, a^2, a^3, t) \quad (1.15)$$

(вид функций x^i при этом изменится).

Этим завершается переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа, ибо, если известно поле плотности

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t), \quad (1.16)$$

то подстановкой (1.15) в (1.16) перейдем к переменным Лагранжа.

Пусть теперь задано поле некоторой скалярной (типа температуры) или тензорной величины $f = f(\mathbf{x}, t)$ как функции эйлеровых переменных и пусть требуется вычислить скорость изменения этой величины для конкретной физической частицы, находящейся в данный момент времени t в данной точке \mathbf{x} пространства. При решении этого вопроса \mathbf{x} константой считать нельзя, так как координаты частицы меняются во времени, и, следовательно, $f = f(\mathbf{x}(t), t)$. Производная этой функции по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (1.17)$$

дает искомую скорость; величина $\partial f / \partial t$ называется локальной производной; производная

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\text{grad } f(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t)) \quad (1.18)$$

называется конвективной; сумма локальной и конвективной скоростей дает полную скорость (производную) изменения данного параметра f .

§ 1.2. Тензоры деформаций. Линеаризация.

Тензор скоростей деформации.

Изменение площади элемента поверхности

Все рассуждения предыдущего параграфа формально можно отнести как к твердым, так и к деформируемым телам, т. е. таким телам, движение которых сопровождается изменением

взаимных расстояний между любыми двумя точками. Для того чтобы рассчитать деформацию среды, необходимо, как это будет видно из дальнейшего, связать такие характеристики деформации, как относительное удлинение и изменение угла между любыми материальными волокнами, с сопровождающими деформацию внутренними усилиями, которые называются *напряжениями*.

Относительным удлинением материального волокна, проходящего через точку \mathbf{x} в направлении $d\mathbf{x}$, в точке \mathbf{x} называется величина

$$\epsilon = \frac{|\mathbf{d}\mathbf{x}| - |\mathbf{d}\mathbf{a}|}{|\mathbf{d}\mathbf{a}|}, \quad (1.19)$$

где $d\mathbf{a}$ — элемент волокна в момент времени t_0 , в результате деформации переходящий в элемент $d\mathbf{x}$.

Рассмотрим теперь два волокна $d\mathbf{x}_1$ и $d\mathbf{x}_2$, проходящих через одну и ту же точку \mathbf{x} и имеющих направления в пространстве, определяемые единичными векторами \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Тогда, если $d\mathbf{a}_1$ и $d\mathbf{a}_2$ — элементы волокон, соответствующие элементам $d\mathbf{x}_1$ и $d\mathbf{x}_2$, то изменение угла вследствие деформации в точке \mathbf{x} определится формулой

$$\gamma = \cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{(d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2)}{|d\mathbf{x}_1| |d\mathbf{x}_2|} - \frac{(d\mathbf{a}_1, d\mathbf{a}_2)}{|d\mathbf{a}_1| |d\mathbf{a}_2|}. \quad (1.20)$$

Для нахождения основных характеристик деформации (1.19) и (1.20) вычислим разность квадратов длин волокон до и после деформации

$$\beta = |\mathbf{d}\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{d}\mathbf{a}|^2 \equiv ds^2 - ds_0^2 \quad (1.21)$$

для любого элемента волокна $d\mathbf{x}$ в точке \mathbf{x} пространства.

Поскольку $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a})$ (зависимость от t сейчас несущественна), то

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a^i} da^i, \quad (1.22)$$

$$ds^2 = |\mathbf{d}\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{d}\mathbf{x}, \mathbf{d}\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial a^j} da^i da^j. \quad (1.23)$$

Пользуясь предположением о том, что система отсчета — общая декартова, найдем

$$ds_0^2 = \mathbf{d}\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}\mathbf{a} = da^p da^p,$$

$$ds^2 = \frac{\partial x^q}{\partial a^i} \frac{\partial x^q}{\partial a^j} da^i da^j. \quad (1.24)$$

Подстановка формул (1.24) в (1.21) дает

$$\beta = \left[\frac{\partial x^q}{\partial a^i} \frac{\partial x^q}{\partial a^j} da^i da^j - da^p da^p \right] = \left[\frac{\partial x^q}{\partial a^i} \frac{\partial x^q}{\partial a^j} - \delta_{ij} \right] da^i da^j, \quad (1.25)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера в декартовой системе.

Совокупность величин

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial x^q}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial a^j} - \delta_{ij} \right] \equiv e_{ij}^G \quad (1.26)$$

представляет собой совокупность координат тензора второго ранга; это следует из определений § I.1 приложения I.

Тензор

$$\hat{\epsilon}^G = \epsilon_{ij}^G k_i \otimes k_j \quad (1.27)$$

называется *тензором конечных деформаций Грина*.

Выразим координаты $\hat{\epsilon}^G$ через компоненты вектора перемещений $u = u^i k_i$. По определению имеем

$$u^i = x^i - a^i, \quad \frac{\partial x^i}{\partial a^j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \delta_{ij}. \quad (1.28)$$

Подстановка (1.28) в (1.26) дает

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial a^j} + \frac{\partial u^j}{\partial a^i} + \frac{\partial u^q}{\partial a^i} \frac{\partial u^q}{\partial a^j} \right). \quad (1.29)$$

Если поле тензора $\hat{\epsilon}^G$ известно, то можно выписать основные характеристики деформации ϵ и γ . Пусть

$$da^i = v_0^i ds_0,$$

тогда

$$\beta = ds^2 - ds_0^2 = 2\epsilon_{ij}^G v_0^i v_0^j ds_0^2$$

и

$$\epsilon = \sqrt{1 + 2\epsilon_{ij}^G v_0^i v_0^j} - 1. \quad (1.30)$$

Пусть теперь

$$da_1 = v_{01} ds_0, \quad da_2 = v_{02} ds_0, \quad (1.31)$$

тогда

$$\gamma = v_{01}^i v_{02}^j [(2\epsilon_{ij}^G + \delta_{ij}) ds_{01} ds_{02} / (ds_1 ds_2) - \delta_{ij}], \quad (1.32)$$

что и требовалось установить [величины ds_{0i}/ds_i определяются предварительно по формулам (1.30)].

Добавление 1.1. Пусть система отсчета криволинейная с метрическим тензором $\hat{g}_0 = g_{ij}^0 e^i \otimes e^j$; тогда формулы (1.26) и (1.29) заменяются следующими:

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} (\nabla_i x^p \nabla_j x^q g_{pq}^0 - g_{ij}^0), \quad (1.26')$$

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j + \nabla_i u_q \nabla_j u_q). \quad (1.29')$$

Повторяя выкладки для случая, когда движение среды задается формулой

$$a = a(x, t),$$

найдем, что

$$ds^2 - ds_0^2 = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a^p}{\partial x^i} \frac{\partial a^p}{\partial x^j} \right) dx^i dx^j. \quad (1.33)$$

* Определение операций типа \otimes , rot , div , \times , \cdot — см. в приложении I.

Совокупность величин

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{\partial a^q}{\partial x^i} \frac{\partial a^q}{\partial x^j} \right) \quad (1.34)$$

представляет собой совокупность координат некоторого тензора второго ранга; этот тензор называется *тензором деформации Альманси—Гамеля*.

Вводя вектор перемещений $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, найдем

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - \frac{\partial u^p}{\partial x^i} \frac{\partial u^p}{\partial x^j} \right). \quad (1.35)$$

Зная поле этого тензора, можно по-прежнему вычислить ϵ и γ ; вывод соответствующих формул представляется в качестве упражнения.

Добавление 1.2. В криволинейной системе отсчета с метрическим тензором g_{ij}^0 вместо (1.34) и (1.35) получим

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(g_{ij}^0 - g_{pq}^0 \nabla_i u^p \nabla_j u^q \right), \quad (1.34')$$

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \nabla_i u_p \nabla_j u_p). \quad (1.35')$$

Во многих задачах механики, когда градиенты перемещений точек деформируемого тела малы (смысл этого предположения определяется точностью, которую необходимо получить в расчетах), нелинейными слагаемыми в определении тензоров деформации ϵ_{ij}^G и ϵ_{ij}^A пренебрегают; в этом случае имеем

$$\epsilon_{ij}^G \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j} + \frac{\partial u_j}{\partial a^i} \right) \equiv \epsilon_{ij}, \quad (1.36)$$

$$\epsilon_{ij}^A \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad (1.37)$$

это компоненты различных тензоров, так как они относятся к различным независимым переменным.

Тензор (1.36) был введен О. Коши и обычно называется *тензором деформаций Коши*.

При изучении движений сплошной среды в переменных Эйлера используется тензор бесконечно малых деформаций среды за время dt , когда вводится вектор относительных перемещений точки \boldsymbol{u} за время dt , равный

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t + dt) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) dt. \quad (1.38)$$

Соответствующий этому вектору тензор бесконечно малых деформаций получается по формуле (1.37) (за состояние отсчета берется состояние среды в момент времени t):

$$\epsilon_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) dt \equiv v_{ij} dt \quad (1.39)$$

Тензор $\hat{v} = v_{ij} \boldsymbol{k}_i \otimes \boldsymbol{k}_j$ называется *тензором скоростей деформации*.

Формула для его компонентов

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \quad (1.40)$$

называется *формулой Стокса*.

Выясним механический смысл тензора деформаций Коши (1.36). Для этого применим уже найденные формулы (1.30) и (1.32), воспользовавшись при этом малостью величин ϵ_{ij} . Пусть вектор v_0 в (1.30) совпадает по направлению с вектором k_1 : $v_0 = k_1$; тогда

$$\epsilon \equiv \epsilon_1 = \sqrt{1 + 2\epsilon_{11}} - 1 \approx \epsilon_{11} \quad (1.41)$$

[последнее из равенств (1.41) получается разложением функции $(1 + 2\epsilon_{11})^{0.5}$ в ряд по ϵ_{11} и линеаризацией по ϵ_{11} этого разложения]. Таким образом, ϵ_{11} — относительное удлинение волокна, в недеформированном состоянии направленного вдоль оси 1; аналогичная интерпретация получается, очевидно, и для компонентов ϵ_{22} , ϵ_{33} .

Возьмем теперь формулу (1.32) и положим в ней $v_{01} = k_1$, $v_{02} = k_2$, тогда $\cos \theta_0 = 0$; пользуясь малостью отклонения θ_{12} угла θ от значения $\pi/2$: $\theta_{12} = \pi/2 - \theta$, найдем, что $\cos \theta = \sin \theta_{12} \approx \theta_{12}$, и из (1.32) получим

$$2\epsilon_{12} = \theta_{12}, \quad (1.42)$$

т. е. компонентов ϵ_{12} тензора Коши с точностью до малых второго порядка относительно ϵ_{ij} равен половине изменения угла между первоначально перпендикулярными волокнами, идущими вдоль координатных осей 1 и 2. Аналогичная интерпретация получается, очевидно, и для других компонентов ϵ_{ij} , $i \neq j$.

Заметим, что градиент поля перемещений $\nabla \otimes u$ можно представить в виде (напомним, что используется неподвижная декартова система координат)

$$(\text{grad } u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial a^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j} + \frac{\partial u_j}{\partial a^i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j} - \frac{\partial u_j}{\partial a^i} \right) = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (1.43)$$

Выясним геометрический смысл тензора с компонентами

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j} - \frac{\partial u_j}{\partial a^i} \right). \quad (1.44)$$

Для этого введем вектор $\text{rot } u = \nabla \times u$; легко видеть, что

$$(\text{rot } u)_i = -\omega_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial a^j} - \frac{\partial u_j}{\partial a^k} \right), \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (1.45)$$

Рассмотрим подобласть Ω_1 области Ω достаточно малых размеров (по сравнению с Ω) и две точки M и N в Ω_1 . Пусть радиус-вектор точки $M = a$, $N = a + \Delta a$. Определим вектор u_{MN} смещения точки N относительно точки M с точностью до величин

первого порядка относительно $|\Delta \alpha|$:

$$\begin{aligned} u_{MN} &= u(a + \Delta \alpha) - u(a) \simeq \operatorname{grad} u(a) \Delta \alpha = \\ &= e_{ij}(u(a)) (\Delta \alpha)^j k^i + \omega_{ij}(u(a)) (\Delta \alpha)^j k^i \end{aligned} \quad (1.46)$$

Здесь $e_{ij}(u(a))$ и $\omega_{ij}(u(a))$ определены по формулам (1.36) и (1.44).

Применив формулы Коши (1.36), найдем (дифференцировать при этом будем по переменным $(\Delta \alpha)^j$, считая a постоянным):

$$\left. \begin{aligned} e_{ij}(u_{MN}) &= e_{ij}(u(a)); \\ e_{ij}(\omega_{pq}(u(a)) (\Delta \alpha)^p k^q) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

Таким образом, тензор с компонентами ω_{pq} (вектор $\operatorname{rot} u$) определяет поворот подобласти Ω_1 (в пределах точности линейной теории) как жесткого целого; деформация описывается тензором с компонентами e_{ij} . Тензор $\hat{\omega} = \omega_{ij} k^i \otimes k^j$ называется тензором вращения.

Добавление 1.3. Решим задачу об изменении площади элемента поверхности в теле при его деформации. Для этого рассмотрим два вектора da_1 и da_2 , исходящих из одной и той же точки a . Площадь элементарного параллелограмма, построенного на векторах da_1 и da_2 , равна модулю векторного произведения $da_1 \times da_2 = dS_0$. В декартовой системе координаты вектора dS определяются по формуле (см. приложение I)

$$dS_{0i} = E_{ijk} da_1^j da_2^k. \quad (1.48)$$

После деформации векторы da_1 и da_2 перейдут соответственно в dx_1 и dx_2 , исходящие из точки $x = x(a)$; площадь элементарного параллелограмма, построенного на векторах dx_1 и dx_2 , будет равна модулю вектора dS с компонентами

$$dS_i = E_{ijk} dx_1^j dx_2^k. \quad (1.49)$$

Имеем

$$dx_1^j = \frac{\partial x^j}{\partial a^p} da_1^p, \quad dx_2^k = \frac{\partial x^k}{\partial a^q} da_2^q. \quad (1.50)$$

Подстановка (1.50) в (1.49) дает

$$dS_i = E_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial a^p} \frac{\partial x^k}{\partial a^q} da_1^p da_2^q. \quad (1.51)$$

Имеет место тождество

$$E_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^p} \frac{\partial x^j}{\partial a^q} \frac{\partial x^k}{\partial a^r} = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right\| E_{pqr} \quad (1.52)$$

[формула (I.73) приложения I].

Умножая равенство (1.51) на $\partial x^i / \partial a^r$ и используя тождество (1.52), найдем

$$dS_i \frac{\partial x^i}{\partial a^r} = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right\| E_{pqr} da_1^p da_2^q = \det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right\| dS_{0i}. \quad (1.53)$$

следовательно,

$$dS^2 = |dS|^2 = dS_i dS_i = \left(\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right\| \right)^2 \frac{\partial a^i}{\partial x^p} \frac{\partial a^j}{\partial x^p} dS_{0i} dS_{0j}, \quad (1.54)$$

и аналогично

$$dS_0^2 = |dS_0|^2 = \left(\det \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} \right\| \right)^{-1} \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^r} \frac{\partial x^j}{\partial \alpha^s} dS_i dS_j. \quad (1.55)$$

Формулы (1.54) и (1.55) решают поставленную задачу. Заметим, что совокупности величин

$$\frac{\partial \alpha^i}{\partial x^p} \frac{\partial \alpha^j}{\partial x^q}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial \alpha^r} \frac{\partial x^j}{\partial \alpha^s}$$

представляют собой совокупности координат тензоров второго ранга. Эти тензоры носят название *тензоров деформации Фингера*

§ 1.3. Определение поля перемещений по линейному тензору деформации.

Условия сплошности

Пусть во всех точках внутри области Ω задано поле тензора деформаций e_{ij} , причем функции e_{ij} непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы. Требуется определить поле перемещений $u = u(x^1, x^2, x^3)$.

Поставленная задача не имеет единственного решения. В самом деле, если каким-либо способом найдены смещения, соответствующие данным компонентам деформации, то, присоединив произвольное (бесконечно малое) смещение всего тела как жесткого целого, получим другие значения смещений, соответствующие тем же самым компонентам деформации. Чтобы сделать задачу определенной, зададим смещения u^0 произвольно выбранной точки $M_0(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ тела, а также компоненты вращения ω_{ij}^0 в этой точке.

Заданное поле тензора деформаций не может быть совершенно произвольным. Действительно, три компонента вектора смещения удовлетворяют системе шести дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2e_{ij}.$$

Для разрешимости этой системы необходимо подчинить e_{ij} некоторым дополнительным условиям; эти условия будут получены после решения поставленной задачи.

Пусть область Ω — односвязна и пусть $M_1(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ — некоторая точка области Ω , в которой разыскивается вектор смещений $u = u(x_1^1, x_1^2, x_1^3)$. Соединим точки M_0 и M_1 некоторой кривой, лежащей целиком в Ω . Если бы частные производные $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ были известны, то компоненты искомого вектора перемещения можно было бы определить криволинейным интегралом

$$u_i = u_i^0 + \int_{M_0, M_1} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^k. \quad (1.56)$$

Так как $\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = e_{ik} + \omega_{ik}$, то

$$u_i = u_i^0 + \int_{M_0, M_1} (e_{ik} dx^k) + \int_{M_0, M_1} \omega_{ik} dx^k. \quad (1.57)$$

В первом интеграле подынтегральная функция известна. Второй интеграл преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{M_0, M_1} \omega_{ik} dx^k &= - \int_{M_0, M_1} \omega_{ik} d(x_1^k - x^k) = \\ &= -\omega_{ik} (x_1^k - x^k) \Big|_{x_0^k}^{x_1^k} + \int_{M_0, M_1} (x_1^k - x^k) d\omega_{ik} = \\ &= \omega_{ik}^0 (x_1^k - x_0^k) + \int_{M_0, M_1} (x_1^k - x^k) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^r} dx^r. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^r} = \frac{\partial e_{ir}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{kr}}{\partial x^i}, \quad (1.59)$$

получаем решение поставленной задачи в виде

$$u_i = u_i^0 + \omega_{ik}^0 (x_1^k - x_0^k) + \int_{M_0, M_1} \left\{ e_{ir} + (x_1^k - x^k) \left[\frac{\partial e_{ir}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{kr}}{\partial x^i} \right] \right\} dx^r. \quad (1.60)$$

Формула (1.60) впервые установлена Е. Чезаро.

Поскольку $u_i = u_i(x^1, x^2, x^3)$ и не должны зависеть от пути интегрирования M_0, M_1 , то криволинейный интеграл в (1.60) не должен зависеть от пути интегрирования. Если ввести обозначения

$$W_{ir} = (x_1^k - x^k) \left(\frac{\partial e_{ir}}{\partial x^k} - \frac{\partial e_{kr}}{\partial x^i} \right) + e_{ir}, \quad (1.61)$$

то для независимости криволинейного интеграла от пути необходимо и достаточно, чтобы было

$$\partial W_{ir} / \partial x^s = \partial W_{is} / \partial x^r. \quad (1.62)$$

Подставляя (1.61) в (1.62) и воспользовавшись тем, что точка M произвольна, получим искомые дополнительные условия, которым должны удовлетворять функции e_{ij} :

$$\frac{\partial^2 e_{ir}}{\partial x^k \partial x^s} - \frac{\partial^2 e_{kr}}{\partial x^i \partial x^s} = \frac{\partial^2 e_{is}}{\partial x^k \partial x^r} - \frac{\partial^2 e_{ks}}{\partial x^i \partial x^r}. \quad (1.63)$$

Зависимости (1.63) называются условиями совместности и были впервые установлены Сен-Венаном; они суть следствие непрерывности перемещений и для непрерывного поля перемещений обращаются в тождества. Зависимости (1.63) обычно записывают в виде двух групп по три уравнения в каждой:

$$\frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial x^s \partial x^s} + \frac{\partial^2 e_{ss}}{\partial x^i \partial x^i} = 2 \frac{\partial^2 e_{is}}{\partial x^s \partial x^i}, \quad (1.64)$$

$$\frac{\partial^2 e_{kk}}{\partial x^i \partial x^r} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(-\frac{\partial e_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial e_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial x^r} \right). \quad (1.65)$$

Формула (1.64) получена из (1.63) при $i=r\neq k=s$, а формула (1.65) — при $i\neq r\neq k=s; k=s$ (напомним, что по полуожириным индексам суммирования нет).

Все шесть различных соотношений, содержащиеся в (1.64) — (1.65), линейно независимы, в чем нетрудно убедиться, заметив, что в каждое соотношение входит слагаемое, не содержащееся в оставшихся пяти.

Отметим часто применяемую форму записи условий совместности с использованием символов Леви — Чивита:

$$E_{ipq} E_{jrs} \frac{\partial^2 e_{qs}}{\partial x_p \partial x_r} = 0, \quad (1.66)$$

или в инвариантной форме:

$$\text{rot rot } \hat{e} = 0.$$

Пусть теперь область Ω многосвязна, т. е. в ней существуют контуры, которые нельзя непрерывным образом стянуть в точку (например, тор). Многосвязное тело можно превратить в односвязное, мысленно проводя надлежащие разрезы.

Условия совместности Сен-Венана обеспечивают сплошность полученного таким способом односвязного тела. Но если приближаться к разрезу с двух различных сторон, то компоненты перемещения по (1.60) будут получаться различными. Пусть u^+ и u^- — значения вектора u , полученные при приближении к некоторой точке разреза с той или другой стороны. Условие неразрывности деформаций для тела в целом будет выполнено только в том случае, если наряду с условиями совместности соблюдены дополнительные требования $u^+ = u^-$ вдоль всех разрезов, мысленно проведенных в теле с целью сделать его односвязным.

Замечание. В настоящее время интенсивно развивается так называемая теория дислокаций, в которой выполнение условий совместности не имеет места. Возможные случаи невыполнения условий совместности были впервые рассмотрены Вольтерра, который разработал теорию внутренних напряжений, образующихся в результате вырезания и выбрасывания части упругого тела и последующего соединения краев разреза. Вообще говоря, при такой операции возникают сингулярности, в которых поле напряжений возрастает до бесконечности. Вольтерра показал, что для образования непрерывных однозначных полей напряжений без сингулярностей должны быть выполнены два условия: а) разрез должен пересекать «рукав» многосвязного тела; б) края разреза должны быть жестко смещены друг относительно друга (на постоянный вектор смещения плюс вектор поворота).

Состояния внутреннего напряжения, образованные таким способом, называются дислокациями Вольтерры и характеризуются тем, что интеграл $\oint \mathbf{du}$ по замкнутому контуру имеет конечное приращение \mathbf{b} ; вектор \mathbf{b} называется вектором Бюргерса.

В качестве примера рассмотрим толстостенный цилиндр с разрезом, обозначенным полуплоскостью, проходящей через его ось. Если в разрез вставлен клин или края разреза смещены друг относительно друга в радиальном направлении, то имеем так называемую *краевую дислокацию*; если же края разреза смещены в направлении оси цилиндра, то соответствующая дислокация называется *винтовой*.

Добавление 1.4. Для нелинейных тензоров деформации ϵ_{ij}^G и ϵ_{ij}^A аналога формулы Чезаро не установлено. Условия совместности в случае коических деформаций представляют собой условия сохранения «евклидовости» пространства: как известно из геометрии, для того чтобы область Ω пространства R_n после деформации также была областью евклидова пространства, необходимо и достаточно, чтобы тензор кривизны деформированного пространства был нулем. Тензор кривизны — тензор четвертого ранга компоненты которого в произвольной криволинейной системе имеют вид

$$R_{prst} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 G_{pt}}{\partial a^r \partial a^s} + \frac{\partial^2 G_{rs}}{\partial a^p \partial a^t} - \frac{\partial^2 G_{ps}}{\partial a^r \partial a^t} - \frac{\partial^2 G_{rt}}{\partial a^p \partial a^s} \right) + \\ + G^{mn} [\Gamma_{m, rs} \Gamma_{n, pt} - \Gamma_{m, rt} \Gamma_{n, ps}], \quad (1.67)$$

где

$$G_{ij} = \frac{\partial x}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial x}{\partial a^j}, \quad \|G^{ij}\| = \|G_{ij}\|^{-1}, \quad (1.68)$$

$\Gamma_{i, jk}$ — символы Кристоффеля I рода, равные

$$\Gamma_{i, jk} = G_{im} \Gamma_{jk}^m, \quad (1.69)$$

где Γ_{jk}^m — символы Кристоффеля II рода, определяемые по формулам (I.124) приложения I, в которых в качестве g_{ij} берется тензор, определяемый формулой (1.68).

Можно проверить, что линеаризация условий $R_{prst} = 0$ по вектору перемещений u приводит к условиям совместности Сен-Венана (1.63).

§ 1.4. Силы в механике сплошной среды. Внутренние напряжения

Движение любой сплошной среды происходит вследствие того, что на частицы среды оказывают воздействие внешние, по отношению к изучаемой сплошной среде, материальные объекты. По определению, внешние силы есть количественная мера воздействия внешних объектов на частицы сплошной среды. Кроме внешних сил в механике сплошных сред вводятся в рассмотрение внутренние силы, характеризующие взаимное воздействие частиц, составляющих сплошную среду. Теоретическая механика внутренние силы не учитывает, так как они не дают вклада в работу; в механике же сплошной среды определение внутренних сил представляет собой одну из основных задач.

По характеру своего воздействия внешние силы подразделяются на сосредоточенные и распределенные по объему или по поверхности. Силы, распределенные по области Ω сплошной среды (т. е. действующие на любую часть среды внутри этой области, причем так, что при стремлении объема части к нулю главный вектор этих сил стремится к нулю), называются *объемными* или *массовыми*. Выделим в области Ω элемент $\Delta\Omega_M$, содержащий точку M , и пусть масса элемента $\Delta\Omega_M$

$$\Delta m = \int_{\Delta\Omega_M} \rho d\Omega,$$

где ρ — плотность, предполагаемая непрерывной в Ω функцией координат.

Обозначим через \mathbf{F}_M главный вектор массовых сил, действующих на элемент массы Δm .

Плотностью массовой силы в точке M называется предел

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta\Omega_M \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_M}{\int_{\Delta\Omega_M} \rho d\Omega}. \quad (1.70)$$

Плотностью объемной силы в точке M называется предел

$$\Phi = \lim_{\Delta\Omega_M \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_M}{\Delta\Omega_M}. \quad (1.71)$$

Предполагается, что указанные пределы существуют и не зависят от закона стремления $\Delta\Omega_M$ к нулю. Если $\rho = \rho(x)$ — непрерывная функция координат, то имеет место равенство

$$\Phi = \rho F. \quad (1.72)$$

В качестве примера массовых сил можно указать на силы тяжести, плотность которых g обычно считается постоянной величиной. Массовыми силами являются также силы инерции с плотностью, равной ускорению $d\mathbf{v}/dt$ рассматриваемой частицы, и силы электромагнитного взаимодействия.

Предположим теперь, что поверхность S , ограничивающая область Ω , занятую деформируемым телом, регулярна, и рассмотрим элемент ΔS_N этой поверхности, содержащий точку N . Пусть главный вектор внешних сил, действующий на элемент ΔS_N , равен \mathbf{t}_N .

Плотностью распределенных поверхностных сил в точке N называется предел

$$t = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}_N}{\Delta S_N} \quad (1.73)$$

в предположении, что он существует и не зависит от стремления ΔS_N к нулю.

Примером распределенных поверхностных сил является давление жидкости на стенки сосуда, давление сжатого газа на стенки баллона, давление шины автомобиля на дорожное покрытие и т. д.

Если пределы (1.70), (1.71), (1.73) бесконечны, но существуют конечные, не зависящие от закона стремления $\Delta\Omega_M$ и ΔS_N к нулю пределы $\lim_{\Delta\Omega_M \rightarrow 0} \mathbf{F}_M = \mathbf{F}_M^{(0)}$ и $\lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \mathbf{t}_N = \mathbf{t}_N^{(0)}$, то говорят,

что в точке M тела Ω (в точке N поверхности S) приложена сосредоточенная сила интенсивности $\mathbf{F}_M^{(0)}(\mathbf{t}_N^{(0)})$. Для математического описания сосредоточенных сил используется дельта-функция Дирака со свойствами

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \xi) d\Omega = \varphi(\xi), \quad \xi \in \Omega.$$

С помощью этой функции плотность сосредоточенной силы записывается в виде

$$\mathbf{F} = F_M^0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_M), \quad (1.74)$$

где \mathbf{x}_M — радиус-вектор точки M .

Понятие сосредоточенной силы является идеализацией, полезной при решении ряда задач механики сплошной среды.

При действии внешних сил тело Ω деформируется, в нем возникают внутренние силы, которые изучаются с помощью метода сечений, состоящего в следующем. Деформированное тело, занимающее область Ω , мысленно рассекается поверхностью Σ на две части Ω_1 и Ω_2 и изучается силовое действие части Ω_1 на Ω_2 , при этом делаются следующие вытекающие из опыта предположения:

а) это действие есть действие соприкосновения;

б) это действие может быть представлено поверхностными силами, распределенными по поверхности Σ и имеющими в каждой точке плотность t ;

в) вектор t зависит только от точки M на поверхности Σ и от единичного вектора v , направленного по нормали к Σ в точке M (для определенности будем предполагать, что вектор v направлен внутрь Ω_2), но не от вида самой поверхности Σ ; иначе говоря, при другом разбиении с помощью поверхности Σ^1 , отличной от Σ , но имеющей с ней общую точку M и общую касательную плоскость в этой точке, в M получаем ту же плотность $t = t(M, v)$.

Таким образом, внутренние силы определяются посредством векторной функции $t = t(M, v)$, зависящей от пяти аргументов (трех координат точки M и двух параметров, фиксирующих направление вектора v). Мы будем предполагать, что функция $t(M, v)$ непрерывна относительно этих пяти переменных.

Используя непрерывность $t(M, v)$ и тот факт, что при равновесии среды в равновесии находится произвольно выделенная ее часть, легко доказать, что

$$t(M, v) = -t(M, -v). \quad (1.75)$$

Величина $t(M, v)$ называется вектором напряжения в точке M , действующим на площадке, нормальной к вектору v . Скалярное произведение $(v, t(M, v)) = t_N$ называется нормальным напряжением, действующим на этой площадке. Если t_N положительно, то в точке M по направлению v материал подвергается растяжению, если t_N отрицательно — сжатию.

Вектор $t_T(M, v) = t(M, v) - vt_N$ определяет касательное напряжение или напряжение сдвига, действующее на площадке, нормальной к вектору v .

С точки зрения размерностей ясно, что любая численная мера напряжения имеет размерность силы, деленной на площадь.

Зафиксируем теперь точку M и выясним зависимость функции $t(M, v)$ от вектора v , т. е. изучим, как изменяется вектор

напряжения в зависимости от ориентации площадки, проходящей через точку M . При этом будем исходить из следующего принципа равновесия: если часть сплошной среды, ограниченная замкнутой поверхностью S , покоятся или движется, то массовые силы, действующие в данный момент на эту часть, находятся в равновесии с поверхностными силами, действующими в данный момент на поверхность S , причем при движении среды силы инерции должны включаться в массовые силы (принцип затвердевания).

Применим этот принцип к бесконечно малому тетраэдру (рис. 1.1), три ребра которого MQ_1 , MQ_2 , MQ_3 имеют направления координатных осей. Пусть грань $Q_1Q_2Q_3$ имеет площадь dS

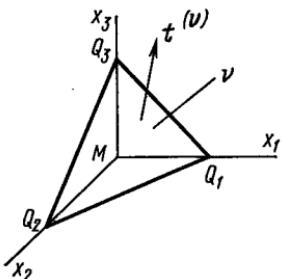


Рис. 1.1

и внешнюю нормаль v . Тогда площади граней MQ_2Q_3 , MQ_3Q_1 , MQ_1Q_2 записутся в виде $dS_1 = dS \cos(v, Ox_1) \equiv dSv_1$, $dS_2 = dSv_2$, $dS_3 = dSv_3$, где v_i — компоненты вектора v . Внешние нормали к этим площадкам имеют направления, противоположные направлениям координатных векторов. Действующее на элемент $Q_1Q_2Q_3$ напряжение t обозначим через $t^{(v)}$, а напряжения, соответствующие положительным координатным направлениям, — через t_1 , t_2 , t_3 . Тогда результирующая

поверхностных сил, действующих на грани тетраэдра, выразится в виде

$$t^{(v)} dS - t_i dS_i = [t^{(v)} - t_i v_i] dS. \quad (1.76)$$

Результирующая массовых сил пропорциональна объему тетраэдра $1/3 dSh$, где h — высота, опущенная из точки M .

Если уменьшить размеры тетраэдра вдоль координат в одинаковом отношении, то равнодействующая массовых сил будет стремиться к нулю как $O(dSh)$, в то время как равнодействующая поверхностных сил стремится к нулю как $O(dS)$. В предельном случае для равновесия тетраэдра необходимо выполнение следующего соотношения:

$$t^{(v)} = t_i v_i. \quad (1.77)$$

Таким образом, между множеством возможных направлений вектора v в данной точке и множеством векторов напряжений $t^{(v)}$ существует линейная однородная зависимость. Как показано в приложении I, оператор, определяющий эту зависимость, является тензором. Этот тензор, который в дальнейшем будет обозначаться через \hat{t} (или $\hat{\sigma}$), называется *тензором напряжений*.

Введя обозначения t_{ij} для j -го компонента вектора t_i и записав равенство (1.77) в координатной форме, получаем, что

$$t^{(v)} = t_{ij} v_j k_i \equiv \hat{t} \cdot v. \quad (1.78)$$

Таким образом, величины t_{ij} , зависящие от положения точки M , являются компонентами тензора напряжений. Выясним теперь механический смысл компонент t_{ij} . Так как вектор t_1 представляет собой напряжение, которое действует на элемент поверхности, перпендикулярный оси Mx_1 , то величина t_{11} представляет собой нормальное напряжение на рассматриваемой площадке; t_{12} и t_{13} направлены по касательным к рассматриваемому элементу и представляют собой касательные напряжения (напряжения сдвига). Аналогичным путем выясняется механический смысл остальных компонент тензора напряжений.

Замечание. Сформулированные выше предположения а), б), в) являются идеализацией; замена этих гипотез другими, точнее отражающими физику явлений, в настоящее время используется как одна из возможностей построения новых теорий в механике сплошной среды. Например, в так называемых иелокальных теориях сплошной среды предполагается, что кроме действия соприкосновения существует действие массовых сил со стороны объема Ω на объем Ω_1 . Широкое распространение получили моментные теории, в которых предположение б) дополняется гипотезой о том, что действие объема Ω_2 на Ω_1 характеризуется распределенными по поверхности моментами. В этих теориях в разряд внешних нагрузок включаются дополнительно распределенные по поверхности Σ и по объему Ω моментные воздействия. (В качестве примера распределенных объемных моментных воздействий можно привести воздействие внешнего магнитного поля на частицы сплошной среды.)

Введенный выше по формуле (1.78) тензор напряжений называется *тензором напряжений Эйлера*; он определяется в каждый момент времени t в точке x движущегося тела.

Для определения других тензоров напряжения предположим, что вектор поверхностных усилий на некоторой площадке с нормалью v в движущемся теле рассчитывается на единицу площади недеформированного тела; соответствующую плотность будем обозначать через t_0 . Очевидно, векторы t и t_0 связаны соотношением

$$t \, dS = t_0 \, dS_0, \quad (1.79)$$

где dS и dS_0 — площади элементарных площадок соответственно после и до деформации.

По аналогии с формулой (1.78) введем тензор второго ранга \hat{T}_0 :

$$t_0 = T_0^{ij} v_{0j} k_i, \quad (1.80)$$

где v_{0j} — компоненты вектора единичной нормали к той площадке в области $\Omega(t_0) = \Omega_0$, которая переходит в площадку, на которой действует усилие $t \, dS$.

Тензор с компонентами T_0^{ij} называют тензором напряжений Лагранжа; этот тензор несимметричен (упражнение).

Широкое распространение в механике получил тензор напряжений Пиола — Кирхгоффа, который вводится по формуле, аналогичной (1.80), но в качестве базиса для определения компонентов выбирается локальный базис в деформированном теле, соответствующий криволинейной системе координат a^i с базис-

ными векторами $\mathbf{G}_i = \partial \mathbf{x} / \partial a^i$:

$$\mathbf{t}_0 = t_0^{ij} \mathbf{v}_{0i} \mathbf{G}_j. \quad (1.81)$$

Преимущества и недостатки использования каждого из введенных тензоров напряжений выясняются ниже.

Предположим, что рассматриваемый класс механических задач таков, что можно произвести линеаризацию всех зависимостей по перемещениям \mathbf{u} и по производным от \mathbf{u} в частности, любой из тензоров напряжений будет линейным оператором от \mathbf{u}^* . Как видно из формулы (1.79), в этом случае $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$, и для того чтобы зависимости (1.78), (1.81) были линейными по \mathbf{u} , необходимо положить $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$, $\mathbf{G}_i = \mathbf{k}_i$, следовательно, в линейном варианте теории все тензоры напряжений совпадут. Для того чтобы отличать тензор напряжений для этого линейного случая от других, будем использовать специальное обозначение $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{k}_j. \quad (1.82)$$

§ 1.5. Законы сохранения массы, импульса и момента импульса

Для того чтобы рассчитать теоретически процессы деформирования сплошных тел, необходимо использовать физические законы, управляющие этими процессами. Эти законы можно разделить на две группы: в первую группу входят физические зависимости универсального характера, которые справедливы для любых тел и любых процессов; вторая группа закономерностей определяет частные свойства рассматриваемой среды.

К закономерностям первой группы относятся законы сохранения — массы, количества движения, энергии и некоторые другие. Законы сохранения массы запишем в двух формах — с использованием эйлеровых и лагранжевых переменных.

Начнем со случая эйлеровых переменных. Рассмотрим произвольную подобласть Ω_1 движущегося тела в произвольный момент времени t . Масса вещества в области Ω_1 определяется интегралом:

$$m_1 = \int_{\Omega_1} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad (1.83)$$

где $\rho(\mathbf{x}, t)$ — плотность массы в точке \mathbf{x} в момент времени t .

Зафиксируем область Ω_1 и ограничивающую ее поверхность $S_1 = \partial \Omega_1$, тогда закон сохранения гласит: изменение количества вещества (массы) в объеме Ω_1 равно потоку вещества, проходящего через поверхность S_1 за единицу времени.

*. Как будет показано ниже, для математической постановки задач механики необходимо установить связь между такими параметрами, как тензор деформаций, тензор напряжений, температура, плотность и т. д.; эти зависимости называются определяющими уравнениями и в линейной теории они линейны.

Применим этот закон для бесконечно малого промежутка времени dt ; за время dt масса в объеме Ω_1 изменится на величину

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dt d\Omega_1.$$

Здесь x — пространственные координаты. Через поверхность S_1 за время dt пройдет (выйдет из Ω_1) количество вещества, равное

$$\left(\int_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt,$$

где \mathbf{n} — единичная внешняя нормаль к поверхности S_1 .

Таким образом, математическое выражение закона сохранения массы следующее:

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (1.84)$$

Преобразовав поверхностный интеграл в объемный по теореме Гаусса — Остроградского, найдем

$$\int_{\Omega_1} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] d\Omega_1 = 0. \quad (1.85)$$

Так как подобласть Ω_1 — произвольна, то из равенства (1.85) следует локальная форма закона сохранения массы в эйлеровых переменных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.86)$$

Поскольку

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1.87)$$

и, по определению,

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v}, \quad (1.88)$$

то уравнение (1.86) можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.89)$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} (\ln \rho) = -\operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (1.90)$$

Для несжимаемого материала по определению $\rho = \text{const}$, следовательно, в этом случае уравнение сохранения массы приобретает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.91)$$

При использовании лагранжевых переменных проследим за произвольной подобластью Ω_1 тела Ω в ее движении; закон сохранения массы гласит: *масса объема Ω_1 при движении неизменна*, т. е.

$$m_1 = \int_{\Omega_1(t)} \rho(x, t) d\Omega = \int_{\Omega_1(t_0)} \rho(a, t_0) d\Omega_0, \quad t \geq t_0. \quad (1.92)$$

Произведем в первом интеграле замену переменных

$$x = x(a, t), \quad (1.93)$$

тогда, как известно из курса анализа,

$$d\Omega = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right| d\Omega_0. \quad (1.94)$$

Подставляя зависимость (1.94) в (1.92) и пользуясь произвольностью области $\Omega_1(t_0)$, получим закон сохранения массы в лагранжевых переменных в локальной форме

$$\rho(a, t) \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right| = \rho(a, t_0) \equiv \rho_0 \quad (1.95)$$

или [см. формулу (I.81) приложения I] в форме

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial a^j} \right| = V^- g = \det \left| \delta_i^j + \frac{\partial u^i}{\partial a^j} \right| \quad (1.96)$$

(напомним, что $g = \det(e_i, e_j)$).

В случае несжимаемости, очевидно,

$$\sqrt{g} = 1. \quad (1.97)$$

Закон сохранения импульса. Выделим в движущемся теле произвольную подобласть Ω_1 с границей $S_1 = d\Omega_1$. Постулируется, что к деформируемому телу, занимающему область Ω_1 , в любой момент времени применим закон сохранения импульса (этот постулат называют принципом затвердевания), который гласит: *скорость изменения количества движения тела Ω_1 равна импульсу приложенных к нему сил*.

К телу Ω_1 приложены объемные силы с плотностью $\rho F(x, t)$ и поверхностные с плотностью $t^{(v)}(x, t) \equiv t(x, t) = \hat{t} \cdot v$, следовательно, математическое выражение закона сохранения импульса имеет вид

$$\int_{\Omega_1} \rho \frac{dv}{dt} d\Omega = \int_{\Omega_1} \rho F d\Omega + \int_{S_1} \hat{t} \cdot v dS. \quad (1.98)$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Гаусса — Остроградского и используя произвольность области Ω_1 , найдем уравнение закона сохранения импульса в локальной форме (которое называется также законом движения, или уравнением движения

в эйлеровых переменных):

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{t}} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.99)$$

или в проекциях на оси декартовой системы:

$$\frac{\partial t^i}{\partial x^j} + \rho F^i_j = \rho \frac{dv^i}{dt}. \quad (1.100)$$

Линеаризуя уравнение (1.100) по \mathbf{u} и \mathbf{v} , найдем

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \rho_0 \mathbf{F} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1.101)$$

(здесь \mathbf{F} рассчитывается на единицу объема недеформированного тела). При выводе уравнения (1.101) использовано выражение для полной производной:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}, \quad (1.102)$$

при линеаризации которого нелинейное слагаемое $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}$ отброшено.

Выделим произвольную подобласть Ω_{10} в теле в начальный момент времени $t = t_0$; используя определение плотности $t_0 = \hat{T}_0 \cdot \mathbf{v}_0$ поверхностных усилий на единицу площади недеформированного тела и повторив приведенные выше рассуждения, получим уравнение движения в лагранжевых переменных:

$$\operatorname{div}_0 \hat{T}_0 + \rho_0 \mathbf{F}_0 = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}, \quad (1.103)$$

где div_0 содержит производные по переменным a^i .

Уравнение (1.103) в проекциях на оси декартовой системы имеет вид

$$\frac{\partial T_0^{ij}}{\partial a^j} + \rho_0 F_0^i = \rho_0 \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}. \quad (1.104)$$

Используя определение (1.81) тензора Пиола — Кирхгоффа и вытекающую из этого определения связь между t_0 и \hat{T}_0

$$T_0^{ij} = t_0^{ip} \frac{\partial x^j}{\partial a^p}, \quad (1.105)$$

найдем соответствующие уравнения движения (в декартовых координатах):

$$\frac{\partial}{\partial a^j} \left(t_0^{ip} \frac{\partial x^j}{\partial a^p} \right) + \rho_0 F_0^i = \rho_0 \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2}. \quad (1.106)$$

В линейном случае уравнения (1.100), (1.103), (1.106) приводятся к одному уравнению (1.101), которое в декартовой системе имеет форму

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a^j} + \rho_0 F_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (1.107)$$

(напомним, что в декартовой системе различие между нижними и верхними индексами исчезает).

Добавление 1.5. Для многокомпонентных сред, когда необходимо учитывать различие физических свойств компонентов и их превращения друг в друга (вследствие, например, химических реакций), уравнения сохранения массы и движения изменяются. В этом случае уравнение сохранения массы записывается для каждого компонента среды

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} d\Omega = - \int_{S_1} \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dS + \sum_{j=1}^r \int_{\Omega_1} v_{jk} q_j d\Omega; \quad (1.108)$$

где ρ_k , \mathbf{v}_k — плотность и скорость компонента номер k ; q_j — скорость j -й реакции в среде; v_{jk} — доля компонента номер k , образующегося в j -й реакции.

Локальная форма закона сохранения массы k -х компонентов в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_k \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^r v_{jk} q_j = 0. \quad (1.109)$$

Уравнение сохранения импульса имеет вид

$$\int_{\Omega_1} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega = \int_{S_1} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega_1} \sum_{k=1}^{N_0} \rho_k F_k d\Omega. \quad (1.110)$$

Здесь \mathbf{v} — скорость центра тяжести частицы ρ $d\Omega$, состоящей из N_0 компонентов,

$$\mathbf{v} = \left(\sum_{k=1}^{N_0} \rho_k \mathbf{v}_k \right) / \left(\sum_{k=1}^{N_0} \rho_k \right). \quad (1.111)$$

Закон сохранения момента импульса рассмотрим только в эйлеровых переменных. Согласно этому закону скорость изменения момента количества движения любой подобласти Ω_1 тела Ω равна моменту импульса приложенных к Ω_1 сил:

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{x} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{x} \times \rho \mathbf{F} d\Omega + \int_{S_1} \mathbf{x} \times (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}) dS. \quad (1.112)$$

В проекциях на оси декартовой системы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} E_{ijk} x^j \left(\rho \frac{d\mathbf{v}^k}{dt} \right) d\Omega &= \int_{\Omega_1} E_{ijk} x^j (\rho F^k) d\Omega + \\ &+ \int_{S_1} E_{ijk} x^j t^{kr} v_r dS. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Преобразуем последний интеграл по формуле Гаусса — Остроградского:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} E_{ijk} x^j t^{kr} v_r dS &= \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_r} (E_{ijk} x^j t^{kr}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_1} E_{ijk} \delta_r^{t^{kr}} d\Omega + \int_{\Omega_1} E_{ijk} x^j \frac{\partial t^{kr}}{\partial x^r} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_1} E_{ijk} t^{kj} d\Omega + \int_{\Omega_1} E_{ijk} x^j \frac{\partial t^{kr}}{\partial x^r} d\Omega. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь E_{ijk} — символы Леви — Чивита (см. приложение I)

Подставим (1.114) в (1.113) и, воспользовавшись уравнениями движения в эйлеровых переменных (1.100), найдем

$$\int_{\Omega_1} E_{ijk} t^{kj} d\Omega = 0. \quad (1.115)$$

Так как Ω_1 — произвольно, то

$$E_{ijk} t^{kj} = 0, \quad (1.116)$$

т. е. тензор напряжений Эйлера (а вместе с ним и линеаризованный тензор напряжений σ_{ij}) симметричен.

Ясно, что уравнение, вытекающее из закона сохранения момента импульса, накладывает связи в виде трех алгебраических уравнений и на компоненты тензоров \hat{T}_0 и \hat{t}_0 , например

$$T_0^{im} k_m \cdot \frac{\partial x}{\partial a^j} = T_0^{jm} k_m \cdot \frac{\partial x}{\partial a^i}.$$

Упражнение 1.1. Доказать, что

$$t^{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x^p}{\partial a^j} \frac{\partial x^q}{\partial a^i} t_0^{pq}; \quad (1.117)$$

$$t_0^{ij} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial a^p}{\partial x^j} \frac{\partial a^q}{\partial x^i} t^{pq}; \quad (1.118)$$

$$T_0^{ij} = \frac{\partial x^l}{\partial a^q} t_0^{iq}. \quad (1.119)$$

Заметим, что, как вытекает из (1.118), (1.119), тензор напряжений Лагранжа несимметричен, тензор Пиола — Кирхгоффа симметричен.

Отметим также, что связи (1.117) — (1.119) позволяют считать, что напряженное состояние в точке определяется одним лишь тензором напряжений, например тензором \hat{t} ; все другие получаются из t с помощью линейных преобразований и замен переменных $x = x(a)$, $a = a(x)$.

§ 1.6. Законы сохранения энергии и баланса энтропии

Закон сохранения энергии и баланса энтропии относится к законам феноменологической термодинамики и для их формулировки необходимо прежде всего определить, что понимается под термодинамической системой в механике деформируемых сред.

За термодинамическую систему в механике деформируемых сред принимается малая подобласть сплошной среды, содержащая, однако, достаточно большое количество атомов и молекул для того, чтобы основные гипотезы механики непрерывных (сплошных) сред оставались справедливыми.

Объем этой подобласти будем обозначать через $d\Omega$ и обращаться с ним так, как это делается с элементом объема в интегральном исчислении.

Состояние системы (определение которой дано выше) известно, если известны значения некоторых параметров μ^1, \dots, μ^r , с по-

мощью которых можно определить характеристики системы. Число параметров $\{\mu^i\}$, называемых параметрами состояния, может быть бесконечным; ниже будем предполагать, что для малой подобласти сплошной среды объема $d\Omega$ число параметров состояния конечно.

Параметры состояния могут иметь геометрическую природу — пространственные координаты, скорость, характеристики деформации, они могут быть физическими или химическими (температура, плотность, концентрация компонентов в многокомпонентной среде и т. д.).

Система параметров состояния $\{\mu^i\}_{i=1}^n$ — базис, если параметры этой системы могут быть заданы независимо, а все другие параметры состояния можно выразить через базисные, причем форма этих выражений универсальна, т. е. не зависит от данной конкретной задачи.

Очевидно, что выбор базиса неоднозначен. Диктуется этот выбор тем, что нужно определить в данной конкретной задаче, и соображениями удобства.

Пространством состояний называют n -мерное пространство, каждое измерение которого соответствует одному из параметров состояния.

Любое состояние системы изображается точкой в пространстве состояний. Последовательность состояний системы во времени, изображаемая кривой в пространстве состояний, называется *процессом*.

Будем рассматривать лишь процессы, изображаемые непрерывными кривыми в пространстве состояний. Отметим, что процессы, которым соответствуют кривые с разрывами первого рода, представляют собой модели некоторых физических процессов (типа взрывов) и их исследование составляет часть механики деформируемых сред.

Ниже, говоря об энергии, будем иметь в виду различные конкретные виды энергии — кинетическую, потенциальную, энергию электромагнитного поля и др. Будем предполагать, что: существуют признаки, по которым можно отличать один вид энергии от другого; можно измерять приток энергии к системе от окружающей среды; существуют и могут быть измерены переходы одного вида энергии в другой.

Пусть μ^1, \dots, μ^n — базис в пространстве состояний. Придадим параметрам μ^i бесконечно малые приращения $d\mu^i$ и измерим количества различных видов энергии, притекающих к системе при этих изменениях параметров состояния. Данные об этих притоках определяются физическими свойствами конкретной среды, т. е. соответствующие закономерности не имеют столь универсального характера, как законы сохранения.

Полный приток энергии, соответствующий приращениям $\{d\mu^i\}_{i=1}^n$, представим в виде трех слагаемых:

$$\delta A^e + \delta Q^e + \delta Q^{**}, \quad (1.120)$$

где δA^e — приток механической энергии, т. е. работа внешних массовых и поверхностных сил; δQ^e — приток теплоты; δQ^{**} объединяет все остальные притоки энергии, отличные от механического и теплового.

Это разбиение обусловлено тем, что наиболее важную роль в рассматриваемых ниже задачах играют притоки δA^e и δQ^e и переходы тепловой энергии в механическую и наоборот.

Притоки δA^e и $\delta Q^* = \delta Q^e + \delta Q^{**}$ имеют вид линейных дифференциальных форм:

$$\delta A^e = P^i d\mu^i, \quad \delta Q^* = Q^i d\mu^i, \quad (1.121)$$

коэффициенты которых представляют собой функции параметров μ^1, \dots, μ^n . Это утверждение — гипотеза, обобщение которой состоит в том, что P^i, Q^i — функционалы параметров $\{\mu^i\}_{i=1}^n$, т. е. P^i и Q^i зависят от пути перехода из некоторой начальной точки в пространстве состояний в рассматриваемую точку.

Ни одно из приращений в (1.121) не представляет собой полного дифференциала некоторой функции (поэтому величины приращений обозначены буквой δ).

Закон сохранения энергии (первый закон термодинамики) гласит: *при замкнутом процессе* (т. е. процессе, изображаемом непрерывной замкнутой кривой в пространстве состояний) *полный приток энергии к системе равен нулю*.

Следствием этого закона является то, что выражение (1.120) представляет собой полный дифференциал некоторой функции E , называемой *полной энергией*:

$$dE = \delta A^e + \delta Q^e + \delta Q^{**}. \quad (1.122)$$

Выделим из полной энергии E плотность (на единицу массы) кинетической энергии $d\tilde{E} = d\frac{v^2}{2}$. Оставшаяся часть полной энергии называется *внутренней энергией* и обозначается U . Таким образом,

$$dE = d\tilde{E} d\Omega + dU \rho d\Omega, \quad (1.123)$$

где ρ — плотность массы в рассматриваемой точке (средняя плотность частицы) среды.

Выделим в движущемся теле в момент времени t произвольную подобласть Ω_1 с границей $S_1 = \partial\Omega_1$ и проинтегрируем (1.122) по этой области; учитывая, что внешними по отношению к Ω_1 силами являются массовые силы с плотностью ρF и поверхностные с плотностью $t = \hat{t} \cdot v$, найдем:

$$\int_{\Omega_1} \delta A^e d\Omega = \int_{\Omega_1} \rho F \cdot v dt d\Omega + \int_{S_1} (\hat{t} \cdot v) \cdot v dt dS. \quad (1.124)$$

Преобразуем последний интеграл, воспользовавшись формулой Гаусса — Остроградского и определением тензора скоростей дефор-

маций v_{ij} :

$$\int_{\Omega_1} (\hat{t} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} dt dS = \int_{\Omega_1} t^{ij} \mathbf{v}_j v_i dt dS = \\ = \int_{\Omega_1} \frac{\partial}{\partial x_j} (t^{ij} v_i) dt d\Omega = \int_{\Omega_1} \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} v_i dt d\Omega + \int_{\Omega_1} t^{ij} v_{ij} dt d\Omega. \quad (1.125)$$

При последнем переходе в формуле (1.125) использована симметрия тензора t^{ij} , вследствие которой

$$t^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x^j} = t^{ij} v_{ij}. \quad (1.126)$$

Подставляя (1.125) и (1.123) в проинтегрированное по Ω_1 равенство (1.122), найдем

$$\int_{\Omega_1} \left[d \frac{v^2}{2} + dU \right] \rho d\Omega = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt d\Omega + \\ + \int_{\Omega_1} \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} v_i dt d\Omega + \int_{\Omega_1} t^{ij} v_{ij} dt d\Omega + \int_{\Omega_1} [\delta Q^e + \delta Q^{**}] d\Omega. \quad (1.127)$$

Возьмем теперь уравнение движения (для простоты в декартовой системе)

$$\frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad (1.128)$$

умножим здесь левую и правую части на $\mathbf{v} dt$ и проинтегрируем по Ω_1 :

$$\int_{\Omega_1} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt d\Omega \equiv \int_{\Omega_1} \rho d \left(\frac{v^2}{2} \right) d\Omega = \\ = \int_{\Omega_1} \frac{\partial t^{ij}}{\partial x^j} v_i dt d\Omega + \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt d\Omega. \quad (1.129)$$

Учитывая полученное равенство (называемое теоремой об изменении кинетической энергии), из (1.127) получим

$$\int_{\Omega_1} dU \rho d\Omega = \int_{\Omega_1} t^{ij} v_{ij} dt d\Omega + \int_{\Omega_1} (\delta Q^e + \delta Q^{**}). \quad (1.130)$$

Введем вместо полных притоков δQ^e и δQ^{**} их плотности δq^e и δq^{**} по формулам

$$\delta Q^e = \delta q^e \delta \Omega, \quad \delta Q^{**} = \delta q^{**} \delta \Omega.$$

Тогда, учитывая произвольность области Ω_1 , перепишем уравнение (1.130) в локальной форме:

$$dU = \frac{1}{\rho} t^{ij} v_{ij} dt + \frac{1}{\rho} \delta q^e + \frac{1}{\rho} \delta q^{**}. \quad (1.131)$$

Уравнение (1.131) называется *уравнением притока теплоты*.

В дальнейшем понадобится еще одна форма закона сохранения энергии, получающаяся из уравнения притока теплоты (1.131) при выражении $v_{ij} dt$ через de_{ij}^G . Для получения этого выражения вспомним определение (для простоты в декартовой системе)

$$e_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^p}{\partial a^i} \frac{\partial x^p}{\partial a^j} - \delta_{ij} \right) \quad (1.132)$$

и вычислим полную производную:

$$\begin{aligned} \frac{de_{ij}^G}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^p}{\partial a^i} \frac{\partial x^p}{\partial a^j} + \frac{\partial x^p}{\partial a^i} \frac{\partial v^p}{\partial a^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^p}{\partial x^q} \frac{\partial x^q}{\partial a^i} \frac{\partial x^p}{\partial a^j} + \frac{\partial v^p}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial a^i} \frac{\partial x^p}{\partial a^j} \right) = \frac{\partial x^p}{\partial a^i} \frac{\partial x^r}{\partial a^j} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v^p}{\partial x^r} + \frac{\partial v^r}{\partial x^p} \right] \right\} = \frac{\partial x^p}{\partial a^i} \frac{\partial x^r}{\partial a^j} v_{pr}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Из (1.133) следует, что

$$v_{ij} dt = \frac{\partial a^r}{\partial x^i} \frac{\partial a^s}{\partial x^j} de_{rs}^G. \quad (1.134)$$

Подстановка (1.134) в (1.131) дает

$$dU = \frac{1}{\rho} t^{ij} \frac{\partial a^r}{\partial x^i} \frac{\partial a^s}{\partial x^j} de_{rs}^G + \frac{1}{\rho} \delta q^e + \frac{1}{\rho} \delta q^{**},$$

или, если учесть (1.118),

$$dU = \frac{1}{\rho_0} t_0^{rs} de_{rs}^G + \frac{1}{\rho} \delta q^e + \frac{1}{\rho} \delta q^{**}. \quad (1.135)$$

Второй закон термодинамики и связанное с ним уравнение баланса энтропии учитывают направление и скорость протекания физических процессов.

Процессы, описываемые соотношениями, в которые не входят величины скоростей изменения параметров состояния, называются *равновесными*. Заметим, что направление изменения параметров состояния в равновесном процессе может быть существенным.

Процессы, для которых все уравнения для бесконечно малых изменений параметров удовлетворяются также при замене этих приращений на обратные, называются *обратимыми*.

Равновесный процесс может быть необратимым, как, например, установившийся процесс теплопередачи в покоящейся среде.

Обратимые и необратимые процессы могут быть составлены из последовательности равновесных или неравновесных состояний рассматриваемой физической системы.

По второму закону термодинамики существует функция состояния системы S , называемая *энтропией*, такая, что для любого необратимого процесса, связывающего два бесконечно близких состояния, имеет место соотношение

$$T dS = \delta Q^e + \delta Q', \quad (1.136)$$

где T — параметр состояния, называемый температурой; величина

$$\delta Q' \geq 0 \quad (1.137)$$

называется *некомпенсированной теплотой*.

Уравнение (1.136) называется *уравнением баланса энтропии*, совокупность соотношений (1.136), (1.137) представляет собой математическую формулировку второго закона термодинамики.

Если процесс обратим, то $\delta Q' = 0$, однако из условия $\delta Q' = 0$ не следует, что процесс обратим.

Для практического использования уравнения (1.136) необходимо уметь вычислять δQ^e и $\delta Q'$. Вместо величины $\delta Q'$ вводится мощность W^* (называемая также функцией рассеяния) по формуле

$$\delta Q' = \delta q' d\Omega = W^* dt d\Omega, \quad W^* dt \geq 0. \quad (1.138)$$

Явный вид функции рассеяния определяется физическими свойствами среды; обычно W^* определяется косвенным путем, при этом неравенство (1.137) служит критерием физической корректности построенных соотношений.

В теории механического поведения деформируемых сред обычно предполагается, что приток теплоты dQ^e осуществляется только за счет теплопроводности. В соответствии с этим предположением в среде существует поле вектора $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, представляющего собой количество теплоты, передаваемой в единицу времени через единицу площади сечения, перпендикулярного вектору \mathbf{q} и разделяющего две соседние частицы тела. Таким образом, через элемент поверхности dS с нормалью \mathbf{v} за время dt поступит количество теплоты, равное $\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} dS$; в произвольную подобласть тела Ω_1 с границей S_1 поступит количество теплоты

$$\int_{\Omega_1} \delta Q^e = \int_{\Omega_1} \delta q^e d\Omega = - \int_{S_1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} dt dS. \quad (1.139)$$

Преобразовав интеграл справа в равенстве (1.139) по формуле Гаусса — Остроградского, найдем, что

$$\delta q^e = - (\operatorname{div} \mathbf{q}) dt. \quad (1.140)$$

Если теплота поступает в систему за счет других механизмов теплопередачи, то, вводя соответствующие плотности q_μ , найдем, что

$$\delta q^e = - (\operatorname{div} \mathbf{q}) dt + \sum_\mu q_\mu dt. \quad (1.141)$$

Вектор \mathbf{q} обычно связывается с градиентом температуры T ; в простейшем случае \mathbf{q} — линейный оператор от градиента температуры ∇T , т. е.

$$\mathbf{q} = - \hat{\lambda} \cdot \operatorname{grad} T, \quad (1.142)$$

здесь $\hat{\lambda}$ — тензор второго ранга, определяющий теплопроводность среды (называемый тензором теплопроводности); зависимость (1.142) называется *законом теплопроводности Фурье*.

Подстановка (1.142) в (1.140) дает

$$\delta q^e = \operatorname{div}(\hat{\kappa} \cdot \operatorname{grad} T) dt. \quad (1.143)$$

В случае когда теплопроводность среды по всем направлениям одинакова, тензор $\hat{\kappa}$ — шаровой:

$$\hat{\kappa} = \kappa \cdot \hat{g}$$

и в декартовой системе вместо (1.143) будем иметь

$$\delta q^e = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) dt. \quad (1.144)$$

Если κ — константа (среда однородна в отношении свойств теплопроводности), то

$$\delta q^e = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^i \partial x^i} dt = \kappa \Delta T dt, \quad (1.145)$$

где Δ — оператор Лапласа по переменным x^i .

Вводя по аналогии с тем, как были введены плотности δq^e , δq^{**} , $\delta q'$, плотность энтропии s в данной частице

$$dS = ds d\Omega, \quad (1.146)$$

можем получить формулировку второго закона термодинамики в локальной форме:

$$T ds = \delta q^e + \delta q'; \quad (1.147)$$

$$\delta q' = W^* dt \geq 0. \quad (1.148)$$

Подставляя δq^e , найденное в соответствии с уравнением (1.147), в уравнение (1.135), получим полезное для дальнейшего следствие первого и второго законов термодинамики

$$dU = \frac{1}{\rho_0} t_{ij}^{ij} de_{ij}^G + \frac{1}{\rho_0} T ds - \frac{\delta q'}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0} \delta q^{**}. \quad (1.149)$$

Добавление 1.6. При рассмотрении сред, состоящих из нескольких реагирующих между собой компонентов, полезным является разделение систем на закрытые — не обменивающиеся с внешней средой массой, но обменивающиеся энергией, и открытые — обменивающиеся с внешней средой и массой, и энергией. В этом случае все полученные выше зависимости следует переписать, учитывая притоки энергии (и энтропии) за счет переноса массы к данной частице.

Добавление 1.7. При исследовании необратимых процессов, сопровождающихся переходом одного вида энергии в другой, большую роль играет следующее утверждение, установленное И. Пригожиным: в равновесном процессе ежесекундное приращение энтропии в каждой частице имеет минимальную величину, совместимую с некоторыми дополнительными условиями, которые должны быть сформулированы для каждого конкретного случая.

Добавление 1.8. Проведенные выше рассуждения можно было бы провести для произвольной конечной подобласти деформируемого тела, при этом под параметрами состояния следовало бы понимать соответствующие функции координат точек рассматриваемой подобласти. Окончательные соотношения для плотностей получились бы теми же,

§ 1.7. О постановках задач в механике деформируемых сред. Краевые условия

Рассмотрим класс задач механики деформируемых сред, в которых основную роль играет взаимодействие внутренних напряжений и деформаций; влиянием температуры и других немеханических параметров можно пренебречь. В этих задачах соотношения, вытекающие из первого и второго законов термодинамики, не нужны и полученные выше соотношения можно рассматривать как системы уравнений.

В переменных Лагранжа имеем систему:

- 1) связь вектора перемещений \boldsymbol{u} с тензором деформации ϵ_{ij}^G :

$$\epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial a^j} + \frac{\partial u^j}{\partial a^i} + \frac{\partial u^k}{\partial a^i} \frac{\partial u^k}{\partial a^j} \right); \quad (1.150)$$

- 2) уравнение сохранения массы (называемое также уравнением неразрывности):

$$\rho_0 = \rho \det \left\| \delta_i^l + \frac{\partial u^i}{\partial a^l} \right\|; \quad (1.151)$$

- 3) уравнение движения:

$$\frac{\partial T_0^{ij}}{\partial a^j} + \rho_0 F_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2},$$

или через компоненты тензора Пиола — Кирхгоффа

$$\frac{\partial}{\partial a^j} \left[t_0^{ip} \left(\frac{\partial u^j}{\partial a^p} + \delta_j^i \right) \right] + \rho_0 F_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.152)$$

неизвестными в которой являются

$$u^i, \epsilon_{ij}^G, \rho, T_0^{ij}, \text{ (или } t_0^{ij})$$

в количестве $3 + 6 + 1 + 6 = 16$ (если учесть симметрию ϵ_{ij}^G и три соотношения для $T_0^{ij}(t_0^{ij})$, вытекающие из закона сохранения момента импульса).

В переменных Эйлера имеем систему:

- 1) связь тензора скоростей деформации с вектором скорости частиц:

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right); \quad (1.153)$$

- 2) уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0; \quad (1.154)$$

- 3) уравнение движения:

$$\frac{\partial t_0^{ij}}{\partial x^j} + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad (1.155)$$

неизвестными в которой являются

$$v_i, v_{ij}, \rho, t^H$$

в количестве $3 + 6 + 1 + 6 = 16$.

Приведем систему уравнений в линеаризованном [относительно вектора перемещений \boldsymbol{u} и (производных)] случае:

1) связь компонентов тензора Коши с вектором перемещений \boldsymbol{u} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j} + \frac{\partial u_j}{\partial a^i} \right); \quad (1.156)$$

2) уравнение неразрывности (1.151);

3) уравнение движения:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial a^j} + \rho_0 F_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.157)$$

Неизвестными в этой системе являются $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \rho$ в количестве 16.

Заметим, что в линеаризованном случае связь тензора напряжений с тензором деформаций обычно не содержит плотности ρ , следовательно, если такая связь построена, то система уравнений (1.156) — (1.157) станет замкнутой, а уравнение неразрывности в этом случае служит для определения изменения плотности по известному из решения системы (1.156) — (1.157) вектору $\boldsymbol{u}(x, t)$.

Таким образом, системы уравнений, вытекающие из общих законов и общих геометрических соображений, незамкнуты, что естественно, поскольку никакие индивидуальные физические свойства среды в этих системах не отражены.

Естественно, что незамкнутыми будут и системы, учитывающие влияние температурных и иных воздействий немеханической природы и вытекающие из первого и второго законов термодинамики.

Прежде чем переходить к формулировке физических законов, позволяющих замкнуть системы (1.150) — (1.152), (1.153) — (1.155) и строить теории поведения конкретных сред, рассмотрим вопрос о краевых и начальных условиях.

Уравнения (1.150) — (1.152), (1.153) — (1.155) представляют собой уравнения в частных производных и, как известно из общей теории краевых задач для систем уравнений с частными производными, для выделения единственного решения необходимо задать краевые условия (для ограниченных тел), условия на бесконечности (для неограниченных тел) и начальные условия, если независимая переменная — время t является существенной. Эти требования представляют собой математическое отражение того факта, что в одной и той же среде могут происходить различные процессы (деформации и др.) в зависимости от того, какие из искомых параметров и каким образом заданы на границе тела, на бесконечности и в момент начала развития процесса.

На границе S области Ω , занятой деформируемым телом,

могут быть заданы механические граничные условия следующих трех основных типов:

1) динамические (или силовые), когда на S задан вектор плотности поверхностных усилий \mathbf{P} ; в силу третьего закона Ньютона

$$\mathbf{t}|_S = \mathbf{P}|_S, \quad (1.158)$$

где \mathbf{t} — вектор напряжений; в эйлеровых переменных условие (1.158) принимает вид

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}|_S = \mathbf{P}|_S, \quad (1.159)$$

или в проекциях на оси декартовой системы

$$t^i \mathbf{v}_i|_S = P_i|_S; \quad (1.159')$$

в лагранжевых переменных

$$\hat{T}_0 \cdot \mathbf{v}_0|_{S_0} = \mathbf{P}_0|_{S_0}, \quad S_0 = S(t_0). \quad (1.160)$$

Заметим, что в большинстве практически важных задач \mathbf{P} можно задать лишь в виде функций пространственных координат, следовательно, при использовании переменных Лагранжа для решения таких задач в правой части условия (1.160) будут содержаться производные от вектора перемещений, заранее неизвестных; вид этой зависимости можно конкретизировать, если задать форму начальной границы (в момент времени $t = t_0$) S_0 ; очевидно, что динамическое граничное условие можно записать и через компоненты тензора Пиола — Кирхгоффа;

2) кинематические граничные условия, когда на S :

а) в переменных Лагранжа задан вектор перемещений:

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{g}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in S_0; \quad (1.161)$$

б) в переменных Эйлера задан вектор скорости:

$$\mathbf{v}|_S = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S = S(t); \quad (1.162)$$

3) смешанные граничные условия, когда на S задано некоторое соотношение между \hat{T}_0 (или $\hat{\mathbf{t}}_0$) и \mathbf{u} или между $\hat{\mathbf{t}}$ и \mathbf{v} .

На практике чаще всего встречаются случаи, когда поверхность S деформируемого тела состоит из нескольких кусков, на каждом из которых задано свое граничное условие типа 1), 2) или 3).

Пример 1.1. Рассмотрим равновесие жидкости в сосуде с вертикальными стенками и горизонтальным дном в поле силы тяжести (с ускорением g , направленным вертикально вниз) (рис. 1.2).

Имеем следующие граничные условия:

а) на горизонтальной свободной поверхности S_1 — условие отсутствия напряжений:

$$\mathbf{t}(x_1, x_2) = 0, \quad x_2 = H,$$

или в компонентах:

$$t^{12} = t^{22} = t^{32} = 0, \quad \text{при } x_2 = H;$$

б) на боковой поверхности S_2 — условие линейного возрастания нормального давления с глубиной:

$$\begin{cases} t^{11} = \rho g (H - x_3), \\ t^{21} = 0, \quad t^{31} = 0; \end{cases} \quad \text{при } x_1 = 0;$$

в) на нижней поверхности S_3 — условие постоянства нормального давления:

$$t^{12} = t^{32} = 0, \quad t^{22} = \rho g H.$$

Пример 1.2. Рассмотрим условие непроницаемости некоторой среды (жидкости или твердого тела) через абсолютно гладкую стенку (преграду). Пусть преграда задана уравнением

$$G(\xi, t) \equiv G(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = 0. \quad (1.163)$$

Пусть частица M , в момент времени t имеющая координаты x , находится на стенке, тогда

$$G(x, t) = 0. \quad (1.164)$$

Условия непроницаемости (без отлипания) означают, что в момент времени $t + dt$ частица снова будет находиться на преграде; учитывая, что ее координаты в момент времени $t + dt$ равны $x + v dt$, найдем

$$G(x + v dt, t + dt) = 0 \quad (1.165)$$

или, предполагая функцию G дифференцируемой,

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \operatorname{grad} G \cdot v = 0. \quad (1.166)$$

Введем обозначение $v = \operatorname{grad} G / |\operatorname{grad} G|$, тогда из условия (1.166) найдем

$$v_v = (v, v) = - \frac{1}{|\operatorname{grad} G|} \frac{\partial G}{\partial t} \quad (1.167)$$

и это условие означает совпадение нормального компонента скорости частицы, попавшей на преграду, со скоростью движения преграды в направлении своей нормали. Если стенка неподвижна, то $v_v = 0$.

Абсолютная гладкость стенки означает равенство нулю тангенциальной составляющей вектора напряжений на этой стенке, т. е.

$$t_T \equiv t - t_v v = 0, \quad (1.168)$$

где $t = \hat{t} \cdot v$.

Таким образом, условия непроницаемости на абсолютно гладкой стенке представляют пример смешанных краевых условий; здесь эти условия записаны в эйлеровых переменных. В качестве упражнения рекомендуется переписать эти условия в лагранжевых переменных.

§ 1.8. О построении определяющих уравнений. Примеры

Уравнения, отражающие физические свойства среды, с помощью которых можно замкнуть системы типа (1.150) — (1.152), (1.153) — (1.155), (1.156) — (1.157), называются *определяющими*.

В качестве примера определяющего уравнения можно привести сформулированный выше закон теплопроводности Фурье (1.143) [или (1.144)].

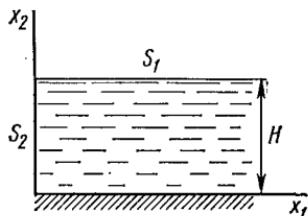


Рис. 1.2

Рассмотрим сначала тот же класс задач, что и в § 1.7, когда влиянием температуры и других немеханических параметров на процессы деформации можно пренебречь.

Сформулируем некоторые общие, вытекающие из опыта принципы, на которых основывается теория определяющих уравнений.

Рассмотрим деформируемое тело, в момент времени t занимающее область Ω , и зафиксируем материальную частицу с координатами a в начальный момент времени $t = t_0$. Пусть напряженное состояние в окрестности этой частицы в момент времени $t \geq t_0$ определяется тензором напряжений $\hat{\tau} = \hat{\tau}(a, t)$.

I. Принцип детерминизма. Тензор напряжений $\hat{\tau} = \hat{\tau}(a, t)$ полностью определяется движением тела Ω до момента времени t ; другими словами, поле тензора $\hat{\tau}(a, t)$ известно, если известна история системы до момента времени t ; история определяется зависимостью

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{b}, \tau), \quad (1.169)$$

где \mathbf{b} пробегает все лагранжевые координаты всех частиц тела Ω , $\tau \in [t_0, t]$ (заметим, что t_0 может быть равным $-\infty$, в этом случае лагранжевые координаты можно определить как координаты частиц в произвольный фиксированный момент времени $t_1 > -\infty$).

Символически этот принцип записывается в виде

$$\hat{\tau}(a, t) = \hat{F}\{\mathbf{a}, t, \mathbf{x}(\mathbf{b}, \tau)\}_{\tau \leq t, \mathbf{b} \in \Omega}, \quad (1.170)$$

где \hat{F} — тензор-оператор, являющийся функцией переменных a и t и функционалом (т. е. функцией от функции — см. приложение II) по переменной \mathbf{x} .

Принцип детерминизма очень общий, так как он включает возможность влияния на напряженное состояние в данной точке процессов, происходящих на конечном расстоянии от данной точки. Вообще говоря, такая возможность не исключена (соответствующие теории предложены и они называются нелокальными), но чрезмерная общность данного предположения не позволяет построить пригодных для практики теорий, поэтому эффектом действия на расстоянии чаще всего пренебрегают.

II. Принцип локального действия. Оператор \hat{F} зависит только от функций $\mathbf{x}(\mathbf{b}, \tau)$, где \mathbf{b} принадлежит произвольно малой окрестности точки a . Другими словами, на напряженное состояние в точке a оказывают влияние лишь процессы, протекающие в бесконечно близких к ней точках.

Практический способ удовлетворить данному принципу состоит в том, чтобы предположить, что оператор \hat{F} зависит только от значения $\mathbf{x}(a, \tau)$ и от производных функции \mathbf{x} по пространственным координатам, вычисленным в точке a .

Влияние производных порядка выше первого не исключено; такие теории предложены и носят название моментных. Однако больших практических приложений эти теории пока не нашли, поэтому ограничимся случаем, когда в зависимости \hat{F} от \mathbf{x} сохра-

няются только первые производные от x по пространственным координатам в точке a (такие материалы называются простыми).

Совокупность первых производных от x по пространственным координатам образует тензор второго ранга ($= \nabla \otimes x$); вместо этого тензора можно использовать любой из тензоров деформации (e_{ij}^G, e_{ij}^A), что и будем делать.

Естественным требованием, которое предъявляется к определяющим уравнениям, является требование их независимости от выбора системы координат. Этот принцип называют *принципом материальной независимости* от системы отсчета. Математические ограничения на вид оператора \hat{F} , вытекающие из принципа материальной независимости, здесь построены не будут — будет дана лишь формулировка.

III. Принцип материальной независимости от системы отсчета. Оператор \hat{F} инвариантен по отношению к любым (непрерывным и непрерывно дифференцируемым) преобразованиям системы координат.

На практике этим принципом пользуются как одним из критериев проверки корректности той или иной физической теории.

Данный принцип распространяется и на преобразования переменной t ; выведем отсюда одно важное следствие. Итак, пусть

$$t = t' + c, \quad c = \text{const} \quad (1.171)$$

(величины, зависящие от переменной t' , будем помечать штрихом); система отсчета, по предположению, неизменна.

Имеем:

$$\hat{t}'(a, t') = \hat{t}(a, t) = \hat{t}(a, t' + c), \quad (1.172)$$

$$x'(b, t') = x(b, t) = x(b, t' + c). \quad (1.173)$$

Зависимость (1.170) можно переписать в виде

$$\hat{t}(a, t) = \hat{F}\{a, t, x(b, t-s)\}_{s \geq 0, b \in \Omega_0}. \quad (1.174)$$

Так как в соответствии с принципом III оператор \hat{F} не зависит от момента начала отсчета времени, то

$$\begin{aligned} \hat{t}'(a, t') &= \hat{F}\{a, t', x'(b, t'-s)\} = \hat{F}\{a, t-c, x(b, t'+c-s)\} = \\ &= \hat{F}\{a, t-c, x(b, t'+c-s)\} = \hat{t}(a, t). \end{aligned} \quad (1.175)$$

Отсюда вытекает, что время t явно в зависимости (1.170) и (1.174) входить не может.

Совокупность принципов I — III известна как *система аксиом Нолла*.

Следствием из принципа II является возможность (принципиальная) определения оператора \hat{F} из экспериментов с однородным (т. е. не зависящим от координат) напряженным и деформированным состоянием на образцах конечных размеров.

Отметим также, что принцип II был сформулирован А. А. Ильинским под названием *принцип макроскопической определимости*.

Оператор \hat{F} называется *оператором* (функционалом) *памяти*. Различие физических свойств деформируемых сред определяется, в частности, их памятью, т. е. величиной вклада предыстории в напряженное состояние в данный момент времени t .

В качестве первого примера рассмотрим случай полного отсутствия памяти, следовательно, здесь

$$\hat{t}(a, t) = \hat{F}\{a, x(a, t)\} \quad (1.176)$$

и оператор \hat{F} превращается в функцию своих аргументов.

Если переменные a в явном виде не входят в зависимость (1.176) и (1.170), то соответствующие среды называются *однородными*. Ниже рассмотрим однородные среды.

Предположим, что при отсутствии внешних воздействий деформации и напряжения в теле отсутствуют; это предположение о существовании естественного (ненапряженного и недеформированного) состояния не всегда реализуемо. За параметры a выберем координаты точек в естественном состоянии тела относительно некоторой неподвижной системы отсчета.

Рассмотрим другое состояние тела, характеризуемое полем перемещений:

$$x = x(a, t) \equiv x(a). \quad (1.177)$$

В соответствии с принципом II аргументами функции \hat{F} являются $x(a)$ и $\nabla_a \otimes x$, однако учитывая то, что внутренние напряжения в теле возникают только при наличии изменений взаимных расстояний между любыми точками тела, заключаем, что

$$\hat{t} = \hat{F}(\nabla_a \otimes x(a)). \quad (1.178)$$

Материалы, поведение которых подчиняется определяющему уравнению (1.178), называются *упругими*.

Зависимость (1.178) не произвольная, так как принцип материальной независимости от системы отсчета налагает определенные ограничения на вид оператора \hat{F} .

В линеаризованном случае вместо соотношения (1.178) будем иметь

$$\hat{\sigma} = \hat{F}(\hat{e}), \quad (1.179)$$

где \hat{F} — линейный оператор от \hat{e} . В соответствии с определениями приложения I линейная зависимость между тензорами второго ранга определяется некоторым тензором четвертого ранга ${}^4\hat{a} {}^*$, называемым *тензором модулей упругости*. Таким образом, в рассматриваемом частном случае зависимость (1.179) приобретает

* Индекс слева от буквы означает ранг тензора.

форму

$$\hat{\sigma} = {}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{e}, \quad (1.180)$$

или в декартовой системе

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}. \quad (1.181)$$

Это определяющее уравнение называется законом Гука.

Заметим, что соотношение (1.181), определяющее поведение линейно-упругого тела, может быть получено формальной линеаризацией (около нуля) более общей зависимости (1.179) по переменной \hat{e} , в декартовой системе

$$\sigma_{ij} \simeq F_{ij}(0) + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kh}} \varepsilon_{kh}. \quad (1.182)$$

Из предположения о существовании естественного состояния (см. выше) вытекает, что $F_{ij}(0) = 0$ и, следовательно, зависимость (1.182) совпадает с (1.181), если положить

$$a_{ijkh} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial \varepsilon_{kh}}(0). \quad (1.183)$$

Из симметрии тензоров ε_{ij} и σ_{ij} вытекает, что

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk}, \quad (1.184)$$

следовательно, среди коэффициентов a_{ijkh} имеется всего 36 независимых.

Заметим, однако, что из требования отсутствия памяти вытекает, в частности, что значение интеграла

$$A = \int_0^{\hat{\sigma}} \sigma'_{ij} d\varepsilon'_{ij}$$

(имеющего смысл плотности работы внутренних сил при переходе из естественного состояния в состояние, характеризуемое тензором напряжений $\hat{\sigma}$; σ'_{ij} , ε'_{ij} — текущие значения тензора напряжений и деформаций соответственно) не зависит от пути перехода из 0 в $\hat{\sigma}$; пользуясь известным критерием независимости криволинейного интеграла от пути, имеем

$$\partial \sigma_{ij} / \partial \varepsilon_{kh} = \partial \sigma_{hh} / \partial \varepsilon_{ij},$$

откуда и из формулы (1.181) следует, что

$$a_{ijkh} = a_{khi}$$

и, таким образом, число независимых упругих модулей в законе Гука (1.181) сокращается до 21.

Зависимость (1.178) замыкает систему общих уравнений (1.150) — (1.152), зависимость (1.181) — систему (1.156) — (1.157).

Приведем замкнутую систему уравнений линейной теории упругости в перемещениях, которая получается после подстановки формул Коши (1.156) в закон Гука (1.181) и подстановки получившегося выражения в систему (1.157):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^i} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u})) + \rho_0 F_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.185)$$

К этой системе следует присоединить начальные и граничные условия; предположив, что вся граница тела состоит из двух частей $S_u + S_\sigma$, причем на части S_u заданы перемещения, на S_σ — поверхностные усилия, граничные условия можем записать в форме:

$$\boldsymbol{u}|_{S_u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \in S_u, \quad (1.186)$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_j|_{S_\sigma} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_j|_{S_\sigma} = P_i(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \in S_\sigma. \quad (1.187)$$

Начальные условия определяют положение частиц тела Ω и их скорости в начальный момент времени t_0 :

$$\boldsymbol{u}|_{t=t_0} = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \in \Omega, \quad (1.188)$$

$$\left. \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} \in \Omega. \quad (1.189)$$

Совокупность уравнений и условий (1.185) — (1.189) представляет собой полную постановку начально-краевой задачи для линейно-упругого тела.

В качестве второго примера рассмотрим деформируемые среды, обладающие бесконечно короткой памятью; другими словами, напряженное состояние в данной частице в данный момент времени t считается зависящим только от состояния в предшествующий бесконечно малый промежуток времени $(t - dt, t)$. Математическая реализация этого требования состоит в том, что формула

$$\hat{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{a}, t) = \hat{F}\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, \tau)\} \quad (1.190)$$

в действительности представляет собой зависимость не операторную, а функциональную от $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)$, $\nabla \otimes \boldsymbol{x}$ и производных по времени от этих переменных в момент времени t :

$$\hat{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{a}, t) = \hat{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t), \nabla \otimes \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t), \partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)/\partial t, \dots). \quad (1.191)$$

Будем считать среду однородной, т. е. \boldsymbol{a} в (1.191) явно не входит.

Определение. Деформируемая среда, сопротивление которой сдвигу стремится к нулю при стремлении к нулю скоростей деформаций, называется жидкостью, если же это сопротивление отлично от нуля и конечно при любых постоянных во времени значениях деформаций, то среда называется твердым телом.

(Приведенное определение не является наиболее общим, но поскольку основной предмет изучения здесь — твердое тело, обобщений производить не будем.)

Таким образом, зависимость (1.191) будет определять поведение некоторой жидкой среды, если аргументами функции \hat{F} будут первые производные по времени от параметров, характеризующих сдвиговую деформацию среды.

В предельном (простейшем) случае сопротивление тела сдвиговому деформированию всегда равно нулю. (Наличие сопротивления означает, что при возникновении в теле скоростей деформаций возникают соответствующие силовые реакции, характеризуемые тензором напряжений.) Такие среды называются *идеальными жидкостями*.

Тензор напряжений в идеальной жидкости в любой декартовой системе координат имеет диагональную форму. В соответствии с леммой о дельта-тензоре, тензор напряжений в идеальной жидкости — шаровой, т. е.

$$\hat{\boldsymbol{t}} = -p\hat{\boldsymbol{g}}, \quad (1.192)$$

или в декартовой системе

$$t_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (1.193)$$

где p — давление.

Уравнение движения идеальной жидкости в эйлеровых переменных получается подстановкой зависимости (1.193) в уравнение (1.155):

$$-\frac{\partial p}{\partial x^i} + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \quad (1.194)$$

или по-другому (в форму Эйлера):

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \quad (1.195)$$

Эти уравнения нелинейны, так как

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v}. \quad (1.196)$$

Система (1.195) вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad (1.197)$$

незамкнута, так как в нее входят пять неизвестных функций \boldsymbol{v} , p , ρ .

Если в качестве дополнительного условия принять условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad (1.198)$$

то получим следующую замкнутую систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p; \\ \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0; \\ \frac{dp}{dt} = 0, \end{array} \right\} \quad (1.199)$$

определенная движение идеальной несжимаемости жидкости.

Если среда такова, что давление p и плотность ρ связаны взаимно однозначной зависимостью

$$p = \varphi(\rho), \quad (1.200)$$

называемой *условием баротропии*, то замкнутая система уравнений (1.196), (1.197), (1.200) определяет движение так называемой баротропной жидкости. Частным случаем условия баротропии является уравнение Клапейрона

$$p = \rho RT,$$

где $R = \text{const}$; T — в изотермическом процессе — известная постоянная величина.

Среда, в которой

$$\hat{t} = \hat{F}(\hat{v}), \quad (1.201)$$

где $\hat{v} = 0,5 (\partial v_i / \partial x^j + \partial v_j / \partial x^i) k_i \otimes k_j$ — тензор скоростей деформаций, называется *вязкой жидкостью*.

В простейшем варианте зависимость (1.201) — линейная и в наиболее общем случае по форме совпадает с зависимостью (1.180). Однако в отличие от твердых

тел сопротивление жидкостей деформированию в обычных условиях не зависит от направления деформирования, потому линейная зависимость \hat{t} от \hat{v} здесь приобретает специальную форму. Для построения формы этой зависимости применим частный прием, основанный на следующих соображениях.

Пусть поле скоростей деформации определено следующим образом: $v = (v_{12} x_2, 0, 0)$, $v_{12} = \text{const} \neq 0$, тогда компоненты тензора скоростей деформации будут равны:

$$v_{12} = \text{const} \neq 0, \quad v_{11} = v_{22} = v_{33} = v_{13} = v_{23} = 0. \quad (1.202)$$

Такое поле скоростей деформации возникает в горизонтальном слое жидкости, все точки которой движутся в горизонтальном направлении параллельно оси x_1 декартовой системы, причем распределение скоростей по высоте линейно (рис. 1.3).

В этом случае возникает лишь один компонент тензора напряжений t_{12} , все прочие недиагональные компоненты равны нулю. Последнее доказывается следующим образом. Пусть, например, $t_{13} \neq 0$. В силу предположения о линейности $t_{13} = k_{13} v_{12}$. Изменим направление оси x_2 , тогда нетрудно подсчитать, что в новой координатной системе t_{13} будет тем же, компонент v_{12} изменит знак. Так как среда изотропна, k_{13} в обеих системах одно и то же, следовательно, $k_{13} = 0$.

Таким образом, в силу предположения о линейности

$$t_{12} = 2\mu v_{12}, \quad (1.203)$$

$\mu = \text{const} > 0$ (множитель 2 введен для удобства).

Аналогично устанавливается, что

$$t_{13} = 2\mu v_{13}$$

и вообще

$$t_{ij} = 2\mu v_{ij}, \quad i \neq j \quad (1.204)$$

(совпадение коэффициентов пропорциональности в зависимостях $t_{12} \sim v_{12}$, $t_{13} \sim v_{13}$, $t_{23} \sim v_{23}$ устанавливается с помощью преобразований поворотов на $\pi/2$).

Зависимость диагональных компонентов тензора t_{ij} от компонент v_{ij} определяется неоднозначно, так как и при отсутствии скоростей деформации в жидкости может возникать гидростатическое давление, когда

$$t_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

Следовательно, в общем случае

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + \Pi_{ij}, \quad i = j,$$

где зависимость части Π_{ij} от компонентов тензора \hat{v} линейна.

Рассмотрим для определенности компонент Π_{11} , имеем

$$\Pi_{11} = k_{11}v_{11} + k_{12}v_{12} + k_{13}v_{13} \quad (1.205)$$

(Π_{11} не зависит от недиагональных компонентов матрицы v_{ij} , что устанавливается методом от обратного с использованием преобразований одной декартовой системы в другую).

Так как среда изотропна, то компоненты v_{22} и v_{33} должны входить в зависимость (1.205) равноправно, следовательно, $k_{12} = k_{13} \equiv k_1$. Введем следующие обозначения:

$$\lambda = k_1, \quad 2\mu' = k_{11} - k_1, \quad (1.206)$$

тогда

$$\Pi_{11} = 2\mu'v_{11} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Следовательно, для всех $i = j$

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu'v_{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}\delta_{ij}. \quad (1.207)$$

Нетрудно видеть, что коэффициент μ' в (1.207) совпадает с коэффициентом μ в (1.204). В самом деле, рассмотрим течение, показанное на рис. 1.3; здесь $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, будем предполагать также, что $p = 0$. В данном случае

$$\tau_{12} = 2\mu v_{12} \quad (1.208)$$

и это запись общей связи $\hat{t} = \hat{F}(\hat{v})$ в линеаризованном случае в системе координат, показанной на рис. 1.3. Повернем эту систему на угол $\pi/4$ около оси x_3 и посмотрим, как запишется зависимость (1.208) в новой системе координат.

Применив тензорный закон преобразования (см. приложение I), найдем, что в новой системе координат будут отличны от нуля t_{11} , v_{11} , t_{22} , v_{22} , причем

$$t_{11} = 2\mu v_{11}, \quad t_{22} = 2\mu v_{22}, \quad (1.209)$$

и поскольку формула (1.209) должна совпадать с зависимостью (1.207), переписанной для данного частного случая, т. е.

$$t_{11} = 2\mu' v_{11}, \quad t_{22} = 2\mu' v_{22}$$

(здесь $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, $-p = 0$), то отсюда и вытекает, что $\mu = \mu'$.

Объединяя формулы (1.171) и (1.207) с учетом того, что $\mu = \mu'$, найдем

$$t_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu v_{ij} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \delta_{ij} \quad (1.210)$$

для любых значений i и j .

Выделим из тензора t_{ij} шаровую часть

$$\left. \begin{aligned} t_{ij} &= \frac{1}{3} (t_{kk}) \delta_{ij} + t_{ij}^D; \\ t_{ij}^D &= t_{ij} - \frac{1}{3} (t_{kk}) \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (1.211)$$

(тензор с компонентами t_{ij}^D называется *девиатором*), тогда легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} (t_{kk}) &= -p + \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) (v_{kk}); \\ t_{ij}^D &= 2\mu v_{ij}^D. \end{aligned} \right\} \quad (1.212)$$

Коэффициент μ называется *коэффициентом вязкости*; его механический смысл и способы экспериментального определения ясны из примера, изображенного на рис. 1.3.

Коэффициент $\lambda' = \lambda + 2/3\mu$ называется *коэффициентом второй вязкости* (вязкости по отношению к объемным деформациям).

Зависимость (1.210) называется *обобщенным законом Ньютона течения вязкой жидкости*.

Подстановка зависимостей (1.210) в уравнения движения (1.155) дает

$$-\frac{\partial p}{\partial x^i} + 2\mu \frac{\partial v_{ij}}{\partial x^j} + \lambda \frac{\partial}{\partial x^j} (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \rho F_i = \rho \frac{dv_i}{dt}. \quad (1.213)$$

Заметим, что

$$2 \frac{\partial v_{ij}}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^i \partial x^j} = \Delta v_i + \frac{\partial}{\partial x^i} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.214)$$

где Δ — оператор Лапласа.

В векторной форме с учетом формулы (1.214) уравнения (1.213) записываются следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho \mathbf{F}. \quad (1.215)$$

Система (1.215) описывает движение вязкой жидкости и называется системой Навье — Стокса.

Эта система незамкнута; для ее замыкания можно использовать условие несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ или условие баротропии $p = p(\rho)$.

Полная постановка краевых задач включает, как и в предыдущем примере, граничные условия (и, если нужно, условия на бесконечности) и начальные условия, определяющие начальные скорости в начальный момент времени t_0 .

Рассмотрим теперь среду, обладающую «длинной» памятью, которая помнит всю историю деформации в данной точке. Рассмотрим сразу линеаризованный случай, когда

$$\hat{\sigma}(t) = \hat{F}\{\hat{e}(\tau)\}_{\tau \leq t}. \quad (1.216)$$

Для того чтобы выяснить, как выглядит оператор \hat{F} , проведем рассуждение, предложенное впервые Больцманом.

Предположим, что процесс деформирования в теле начинается в момент времени $t=0$, и разобьем весь интервал $[0, t]$ на некоторые подинтервалы точками $0=\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N=t$. Будем считать, что на каждом из подинтервалов (τ_{k-1}, τ_k) деформация постоянна и равна $\hat{e}(\tau_k)$ (в декартовой системе $e_{ij}(\tau_k)=\text{const}$). Каждая такая деформация влияет на напряженное состояние в данной частице в момент времени $\tau_N=t$, и это влияние, по предположению, линейно, следовательно, связь между тензором $\Delta\hat{\sigma}_k(t)$ вклада деформации $\hat{e}(\tau_k)$ с этой деформацией осуществляется с помощью тензора четвертого ранга ${}^4\Gamma={}^4\Gamma(t, \tau_k)$. Полное напряжение представляет собой сумму вкладов $\Delta\hat{\sigma}_k(t)$ от отдельных деформаций $\hat{e}(\tau_k)$:

$$\hat{\sigma}(t) = \sum_{k=0}^n {}^4\Gamma(t, \tau_k) \cdot \hat{e}(\tau_k) \Delta\tau_k \quad (1.217)$$

(влияние продолжительности деформации $\hat{e}(\tau_k)$ учтено множителем $\Delta\tau_k$).

В компонентах в декартовой системе имеем

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{k=0}^n \Gamma_{ijkh}(t, \tau_k) e_{kh}(\tau_k) \Delta\tau_k. \quad (1.218)$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta\tau_k \rightarrow 0$, найдем, что

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \Gamma_{ijkh}(t, \tau) e_{kh}(\tau) d\tau. \quad (1.219)$$

Соотношение, обратное (1.219), также линейно:

$$e_{ij}(t) = \int_0^t K_{ijkh}(t, \tau) \sigma_{kh}(\tau) d\tau. \quad (1.220)$$

Если $\Gamma_{ijkh}(t, \tau) = a_{ijkh}\delta(t-\tau)$, где $a_{ijkh}=\text{const}$, $\delta(t-\tau)$ — дельта-функция Дирака, то зависимость (1.219) переходит в рассмотренный ранее закон Гука.

Опыт показывает, что в соотношениях (1.219) или, что то же

$$\hat{\sigma}(t) = \int_0^t {}^4\Gamma(t, \tau) \cdot \cdot \hat{e}(\tau) d\tau \quad (1.221)$$

функции ${}^4\hat{\Gamma}$ содержат аддитивную сингулярную часть и регулярные слагаемые, т. е.

$${}^4\hat{\Gamma}(t, \tau) = {}^4\hat{a} - {}^4\hat{\pi}(t, \tau). \quad (1.222)$$

Следовательно, связь напряжений с деформациями такова:

$$\hat{\sigma}(t) = {}^4\hat{a} \cdot \cdot \hat{e}(t) - \int_0^t {}^4\hat{\pi}(t, \tau) \cdot \cdot \hat{e}(\tau) d\tau \quad (1.223)$$

или в декартовой системе:

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl} e_{kl}(t) - \int_0^t \pi_{ijkl}(t, \tau) e_{kl}(\tau) d\tau. \quad (1.224)$$

Зависимости (1.219) – (1.224) описывают поведение твердых так называемых вязкоупругих сред и несут название *линейного закона наследственной вязкоупругости*.

Материалы, свойства которых во времени неизменны, называются *нестареющими* («стабильными»). Для нестареющих вязкоупругих материалов зависимость между напряжениями и деформациями инвариантна по отношению к преобразованию сдвига по временной переменной:

$$t' = t + c, \quad c = \text{const},$$

следовательно, для таких материалов ядра \hat{K} , $\hat{\Gamma}$, $\hat{\pi}$, ... в зависимостях (1.219), (1.220), (1.223), ... будут разностными, т. е. зависеть от разности $t - \tau$.

ГЛАВА 2

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ТЕЛ

§ 2.1. Закон Гука для случая изотропии и экспериментальное определение констант

Предположим, что сопротивление среды деформированию не зависит от направления деформирования, т. е. среда изотропна. Это означает, что если в теле создать определенное состояние деформации, описываемое тензором деформации ε_{ij} , а затем систему координат подвергнуть произвольному преобразованию (для простоты речь идет о декартовых системах) и после этого в теле создать состояние деформации, по отношению к новой системе описываемое теми же компонентами ε_{ij} тензора деформации, что и в первом случае, то компоненты тензора напряжений в обоих случаях совпадут.

Пользуясь этим свойством и рассмотрев (аналогично тому, как это было сделано в примере (1.5 § 1.8)) состояние чистого сдвига, когда

$$\varepsilon_{12} \neq 0, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad (2.1)$$

найдем, что

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad i \neq j, \quad \mu = \text{const}. \quad (2.2)$$

Рассмотрев далее одноосное напряженное состояние в теле, когда

$$\sigma_{11} \neq 0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad (2.3)$$

и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям примера § 1.8, получим, что

$$\sigma_{ii} = 2\mu\varepsilon_{ii} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

где через λ обозначен коэффициент:

$$\lambda = \frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E} = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}.$$

Здесь E — модуль Юнга — коэффициент пропорциональности в зависимости σ_{11} от ε_{11} в опыте на одноосное растяжение; ν — отношение поперечной деформации (ε_{22} или ε_{33}) к продольной (ε_{11}) в том же опыте.

Объединяя (2.2) и (2.4), получим закон Гука для изотропного тела:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (2.5)$$

где

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33};$$

λ и μ — константы, называемые константами Ламе.

Для определения коэффициентов Ламе λ и μ в эксперименте образцы, изготовленные из соответствующего материала, подвергают таким испытаниям, при которых создаются достаточно легко контролируемые виды напряженного и деформированного состояний. Наиболее простым из этих испытаний является растяжение образца — прямого цилиндра равномерно распределенной по основаниям нагрузкой напряжения интенсивности q . Если выбрать систему координат так, чтобы ось Ox_1 была параллельна образующей цилиндра, а две другие оси лежали в плоскости поперечного сечения, то легко видеть, что матрица компонентов тензора напряжений будет иметь вид

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Вычислим компоненты тензора деформаций согласно (2.5)

$$\varepsilon_{11} = q = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$0 = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{22},$$

$$0 = \lambda (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33}, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0, \quad (2.8)$$

откуда

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu (3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu (3\lambda + 2\mu)} \sigma_{11}. \quad (2.10)$$

Величина ε_{11} в опыте определяется путем измерения относительного удлинения образца вдоль образующей, а ε_{22} , ε_{33} — путем измерения сокращения поперечных размеров. Таким образом, соотношения (2.9) — (2.10) представляют собой систему двух уравнений, из которых определяются λ и μ .

В практике широкое распространение получили другие упругие постоянные — модуль Юнга E и коэффициент Пуассона v , которые через λ и μ выражаются формулами

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.11)$$

С использованием (2.11) соотношения (2.9) и (2.10) записутся в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{v}{E} \sigma_{11} = -v\varepsilon_{11}. \quad (2.12)$$

Для определения упругих модулей изотропного тела иногда используют два опыта — на чистый сдвиг, при котором

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

и опыт на всестороннее сжатие (сжатие в камере высокого давления), когда

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

При чистом сдвиге будем иметь

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \quad (2.15)$$

поэтому коэффициент μ называют *модулем сдвига*. Из опыта на всестороннее сжатие находим

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -p = (\lambda + \frac{2}{3}\mu)\theta, \quad (2.16)$$

где θ представляет собой относительное изменение объема и, следовательно, легко измеряется.

Коэффициент $\lambda + \frac{2}{3}\mu$ обозначается через K и называется *модулем всестороннего растяжения — сжатия*. Зная K и μ , легко найти λ .

Отметим теперь следующие неравенства, очевидным образом вытекающие из механических соображений:

$$\mu > 0, \quad K > 0, \quad E > 0. \quad (2.17)$$

Выразив μ и K через E и v :

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}; \quad K = \frac{E}{3(1-2v)}, \quad (2.18)$$

получаем следующие ограничения на пределы изменения v :

$$-1 < v \leq 0,5. \quad (2.19)$$

Отметим, что в опытах не обнаружено материала, для которого v было бы отрицательным.

Неравенства (2.17), (2.19) используются при математическом исследовании уравнений, описывающих поведение изотропных упругих тел.

Подставляя закон Гука (2.5) в уравнения движения (1.157) и проводя преобразования, аналогичные проведенным при получении системы Навье — Стокса, получим следующую систему уравнений:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{F} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (2.20)$$

которая описывает движение упругой изотропной среды в линейном приближении; эта система называется *системой уравнений Ламе*.

§ 2.2. Применение законов термодинамики к описанию процесса деформирования упругих тел. Закон Дюамеля — Неймана и система уравнений линейной термоупругости

Как показывает опыт, деформация сплошной среды неразрывно связана с распределением температуры; при этом изменяющееся во времени поле деформаций вызывает изменение поля температуры и наоборот. Построение теории сплошной среды, учитывающих эффект взаимного влияния температурного и деформационного полей, возможно лишь с привлечением общих законов термодинамики и дополнительных феноменологических гипотез.

Пусть в ненапряженном и недеформированном состоянии тело имеет температуру T_0 (гипотеза о существовании естественного состояния). Вследствие действия внешних нагрузок, тепловых источников внутри тела, нагрева и охлаждения поверхности тело будет деформироваться, а его температура изменяться; возникает поле перемещений $u = u(x, t)$, приращение температуры составит $\delta T = T - T_0$. Будем предполагать, что величина δT не слишком велика, так что упругие и тепловые характеристики от δT не зависят.

Для построения определяющих уравнений воспользуемся:

а) уравнением притока теплоты в форме (1.135), которое в рассматриваемом линеаризованном случае имеет вид

$$dU = \frac{1}{\rho_0} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{\rho_0} \delta q^e + \frac{1}{\rho_0} \delta q^{**}; \quad (2.21)$$

б) уравнением баланса энтропии в локальной форме (1.147):

$$T ds = \delta q^e + \delta q'. \quad (2.22)$$

Напомним, что $\delta q' = W^* dt \geq 0$, где W^* — функция рассеяния.

Примем гипотезы о том, что в упругом теле рассеяние отсутствует и что приток энергии за счет механизмов, отличных от механического и теплового, равен нулю; следовательно,

$$\delta q' = 0, \quad \delta q^{**} = 0. \quad (2.23)$$

Из соотношений (2.21), (2.22) с учетом (2.23) имеем

$$dU = \frac{1}{\rho_0} \sigma^{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{\rho_0} T ds \quad (2.24)$$

Вводя вместо внутренней энергии U свободную энергию F (функцию Гельмгольца)

$$F = U - sT/\rho_0, \quad (2.25)$$

из соотношения (2.24) найдем

$$dF = \frac{1}{\rho_0} \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{\rho_0} s dT. \quad (2.26)$$

Умножим левые и правые части соотношений (2.24), (2.26) на ρ_0 и введем обозначения

$$\rho_0 U = \bar{U}, \quad \rho_0 F = \bar{F}. \quad (2.27)$$

Легко видеть, что

$$T = (\partial \bar{U} / \partial s)_e; \quad s = -(\partial \bar{F} / \partial T)_e; \quad (2.28)$$

$$\sigma_{ij} = (\partial \bar{U} / \partial \varepsilon_{ij})_s; \quad \sigma_{ij} = (\partial \bar{F} / \partial \varepsilon_{ij})_T \quad (2.29)$$

[нижние индексы e , s , T в формулах (2.28), (2.29) означают, что соответствующая операция дифференцирования проводится при постоянном значении соответствующего параметра состояния].

Напомним, что процессы, при которых температура неизменна, носят название *изотермических*, процессы с постоянным значением энтропии называются *адиабатическими*. Таким образом, первая из формул (2.29) имеет место для адиабатических процессов, вторая — для изотермических. В дальнейшем будем использовать второе из соотношений (2.29), так как необходимо найти зависимость σ_{ij} от ε_{ij} и δT ; для упрощения обозначений черту над F будем опускать.

Разложим функцию $F = F(\varepsilon_{ij}, T)$ в ряд Тейлора в окрестности естественного состояния $T = T_0$, $\varepsilon_{ij} = 0$ и, воспользовавшись предположениями о малости ε_{ij} , δT , ограничимся линейными и квадратичными членами этого разложения:

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_{ij}, T) = & F(0, T_0) + \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial T} \delta T + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + 2 \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \varepsilon_{ij} \delta T + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial T^2} (\delta T)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Согласно второй из формул (2.29) имеем

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \varepsilon_{kl} + \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} \delta T. \quad (2.31)$$

Гипотеза о существовании естественного состояния означает, что $\partial F(0, T_0) / \partial \varepsilon_{ij} = 0$. Введем обозначения

$$\frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = a_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 F(0, T_0)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T} = -\beta_{ij} \quad (2.32)$$

и перепишем формулу (2.31) следующим образом:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij} \delta T. \quad (2.33)$$

Соотношения (2.33) известны как *закон термоупругости Дюамеля — Неймана*; они представляют собой закон Гука, обобщенный на случай учета температуры.

Отметим, что константы a_{ijkl} являются изотермическими упругими модулями. Если бы аналогичные рассуждения проводились для первой из формул (2.29), то получились бы так называемые адиабатические упругие модули; различие между изотермическими и адиабатическими модулями невелико и на практике этим различием пренебрегают (что и будем делать).

Как вытекает из формулы (2.26), выражение $\sigma^{ij} de_{ij}$ в изотермическом процессе представляет собой полный дифференциал, следовательно,

$$\partial\sigma_{ij}/\partial e_{kl} = \partial\sigma_{kl}/\partial e_{ij}. \quad (2.34)$$

Учитывая определение (2.32), имеем

$$a_{ijkl} = a_{klij}, \quad (2.35)$$

и, как было отмечено ранее, наличие симметрии (2.35) сокращает число независимых упругих (изотермических) модулей до 21.

Симметрия (2.35) имеет место и для адиабатических процессов, что вытекает из формулы (2.24) и условий (2.34), отражающих тот факт, что выражение $dW = \sigma^{ij} de_{ij}$ — полный дифференциал. Пусть процесс деформации изотермический, тогда с учетом зависимостей Гука функция $W(e_{ij})$, полным дифференциалом которой является выражение $\sigma_{ij} de_{ij}$, преобразуется к виду

$$W(e_{ij}) = a_{ijkl} e_{kl} e_{ij} / 2. \quad (2.36)$$

Объединив надлежащим образом константы a_{ijkl} , с тем чтобы удовлетворить соотношениям (2.35) и (1.184), выражение для W представим в форме

$$\begin{aligned} W = & e_{11} [1/2A_{11}e_{11} + A_{12}e_{22} + A_{13}e_{33} + A_{14}e_{23} + A_{15}e_{13} + A_{16}e_{12}] + \\ & + e_{22} [1/2A_{22}e_{22} + A_{23}e_{33} + A_{24}e_{23} + A_{25}e_{13} + A_{26}e_{12}] + \\ & + e_{33} [1/2A_{33}e_{33} + A_{34}e_{23} + A_{35}e_{13} + A_{36}e_{12}] + \\ & + e_{23} [1/2A_{44}e_{23} + A_{45}e_{13} + A_{46}e_{12}] + e_{13} [1/2A_{55}e_{13} + A_{56}e_{12}] + \\ & + e_{12} [1/2A_{66}e_{12}]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Предположим, упругая среда такова, что в каждой ее точке имеется плоскость симметрии, параллельная плоскости Ox_1x_2 ; это означает, что выражение для W не изменится при изменении направления Ox_3 на противоположное. Производя преобразование переменных $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = -x_3$, приходим к выводу, что для неизменности, или, как говорят, инвариантности W по отношению к этому преобразованию, достаточно, чтобы было

$$A_{14} = A_{15} = A_{24} = A_{25} = A_{34} = A_{35} = A_{46} = A_{56} = 0, \quad (2.38)$$

и число упругих постоянных сокращается до 13.

Если в упругой среде имеется три плоскости симметрии, то в добавок к условию (2.38) найдем, что

$$A_{16} = A_{26} = A_{36} = A_{45} = 0, \quad (2.39)$$

и число упругих постоянных сокращается до 9.

Если же среда такова, что три плоскости симметрии взаимно заменяются, то, требуя инвариантности W по отношению к преобразованию:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2, & x_2 &= x_1, & x_3 &= x_6, \\ x_1 &= x_3, & x_3 &= x_1, & x_2 &= x_5, \\ x_1 &= x_5, & x_2 &= x_3, & x_3 &= x_2, \end{aligned}$$

найдем

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = A_{33}; \\ A_{44} &= A_{55} = A_{66}; \\ A_{23} &= A_{12} = A_{13}, \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

и число упругих постоянных сокращается до 3.

Если в добавок ко всем предыдущим ограничениям потребовать инвариантности W по отношению к поворотам на малый угол α около оси Ox_1 , то придем к случаю изотропного тела, в котором

$$A_{11} = A_{22} + 2A_{44}. \quad (2.41)$$

Вводя обозначения

$$A_{44} = \mu, \quad A_{12} = \lambda, \quad (2.42)$$

снова получим закон Гука для изотропного упругого тела:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.43)$$

Тензор, компоненты которого в рассматриваемой декартовой системе равны числам β_{ij} , определяет взаимное влияние температурного поля и поля деформации и называется *тензором коэффициентов температурного расширения*.

В изотропном случае этот тензор шаровой, т. е.

$$\beta_{ij} = \gamma \delta_{ij}, \quad (2.44)$$

и, следовательно, если тело изотропно в отношении механических и тепловых свойств, то закон Дюамеля — Неймана приобретает форму

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \delta T \delta_{ij}. \quad (2.45)$$

Смысл и способ определения постоянной γ в (2.45) выясняется в следующем эксперименте. Пусть элемент объема свободно расширяется под воздействием только температуры, т. е. $\sigma_{ij} = 0$, $\delta T \neq 0$. Тогда, разрешив (2.45) относительно компонентов тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma}{3K} \delta T \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\mu + 3\lambda} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (2.46)$$

найдем

$$\sigma_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\gamma}{3K} \delta T \delta_{ij} \equiv \alpha_T \delta T \delta_{ij} = \frac{\gamma_v}{3} \delta T \delta_{ij}. \quad (2.47)$$

Коэффициент γ_v называется *коэффициентом температурного расширения объема*; $\alpha_T = \gamma_v/3$ — *коэффициентом линейного температурного расширения*. Способы определения величин γ_v и α_T , а следовательно, и γ очевидным образом вытекают из (2.47).

§ 2.3. Полная система уравнений и условий трехмерной задачи теории упругости

Напомним сначала основные соотношения линейной теории упругости, полученные в первой главе. Пусть $\Omega \subset R^3$ — открытая область в трехмерном евклидовом пространстве R^3 , соответствующая начальному положению исследуемого деформируемого тела, S — граница Ω , $x = \{x_i\}$ — декартовы координаты точек Ω (в линейной теории различие между x и a при постановке задачи исчезает). Если тело является линейно упругим, то в области Ω имеют место следующие соотношения:

1) соотношения Коши между вектором перемещений $u = u(x)$ и компонентами тензора деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (2.48)$$

2) связь ε_{ij} с компонентами тензора напряжений σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}, \quad \varepsilon_{ij} = A_{ijkh} \sigma_{kh}; \quad (2.49)$$

в изотропном случае

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{kk}) \delta_{ij} \right], \quad (2.50)$$

где λ , μ , E , ν — модули упругости, смысл которых был выяснен выше;

3) уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0 \quad (2.51)$$

(в этой главе рассматриваем только статические и квазистатические задачи);

4) условия совместности

$$E_{ipq} E_{jrs} \frac{\partial^2 \varepsilon_{qs}}{\partial x_p \partial x_r} = 0, \quad (2.52)$$

или в другом виде

$$\Delta \varepsilon_{ii} + \theta_{,ii} - (\varepsilon_{ik,ik} + \varepsilon_{ik,ik}) = 0; \quad (2.53)$$

здесь запятая означает дифференцирование по переменной x с индексом, следующим после запятой; двойной индекс означает

вторую производную по соответствующей паре независимых переменных.

На границе S области Ω чаще всего встречаются следующие типы краевых условий:

1) условия в перемещениях:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на } S = S_u, \quad (2.54)$$

в дальнейшем будем использовать также обозначения

$$\mathbf{u}|_s = \mathbf{g};$$

2) условия в напряжениях:

$$\sigma_{ij} v_j = P_i \quad \text{на } S = S_\sigma; \quad (2.55)$$

$\mathbf{v} = \{v_j\}$ — вектор внешней нормали к поверхности S ;

3) смешанные граничные условия, когда на части S_u поверхности S заданы соотношения вида (2.7), на части S_σ — соотношения (2.55), причем $S \neq S_u$, $S \neq S_\sigma$, $S = S_u \cup S_\sigma$. Иногда приходится рассматривать другие типы граничных условий, например, так называемые условия контактного типа, когда на границе (или части ее) частично заданы перемещения, частично — напряжения; условия контактного типа в общем случае могут быть записаны в виде

$$L_1(\mathbf{u}) + L_2(\hat{\sigma}) = \mathbf{F} \quad \text{на } S, \quad (2.56)$$

где L_i — некоторые линейные операторы (не дифференциальные); \mathbf{F} — известная функция координат точек границы. В некоторых проблемах необходимо учитывать трение, возникающее при контакте тела S с другими телами; соответствующие краевые условия являются уже нелинейными и требуют отдельного достаточно сложного рассмотрения.

Выписанные соотношения позволяют поставить следующие краевые задачи линейной теории упругости:

a) задача в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u})) + \rho F_i = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{на } S_u, \quad (2.58)$$

$$a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) v_j = P_i \quad \text{на } S_\sigma. \quad (2.59)$$

Для изотропной среды из (2.57), (2.59) [учитывая (2.48)] имеем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i + \rho F_i = 0,$$

или в векторной форме

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.57')$$

$$[\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})] v_j = P_i \quad \text{на } S_\sigma. \quad (2.59')$$

Отметим сразу же, что при $S_\sigma = \emptyset$ ^{*)} данная задача в математическом плане аналогична задаче Дирихле для уравнения Пуассона, при $S_u = \emptyset$ — задаче Неймана и в общем случае при $S_\sigma \neq \emptyset, S_u \neq \emptyset$ — смешанной краевой задаче.

Аналог задачи Дирихле (т. е. $S_\sigma = \emptyset$) известен также под названием первой основной задачи теории упругости, $S_u = \emptyset$ — второй и общий случай — третьей основной задачи;

б) постановка в напряжениях (возможна только при $S_u = \emptyset$):

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad (2.60)$$

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk})_{,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} (\operatorname{div} \mathbf{F}) \delta_{ij} + \\ + \rho F_{i,j} + \rho F_{j,i} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (2.61)$$

$$\sigma_{ij} v_j = P_i \quad \text{на } S. \quad (2.62)$$

Уравнения (2.61) получаются подстановкой зависимостей (2.50) [при одновременном использовании уравнений равновесия (2.51)] в соотношения Сен-Венана (2.53) и называются *уравнениями Бельтрами-Митчелла*.

§ 2.4. Плоские задачи

На практике встречаются случаи, когда из тех или иных соображений системы (2.57) — (2.59), (2.60) — (2.62) можно упростить, уменьшая число независимых переменных и искомых функций.

В качестве первого примера рассмотрим так называемую плоскую деформацию, характеризуемую следующим полем перемещений:

$$u_1 = u_1(x, y), \\ u_2 = u_2(x, y), \quad u_3 = 0 **). \quad (2.63)$$

Поле вида (2.63) описывает процесс деформаций, происходящий в плоскости (x_1, x_2) . Подобные процессы имеют место в длинных цилиндрических телах под воздействием сил, не зависящих от координаты, отсчитываемой вдоль оси цилиндра, принятой за ось Ox_3 .

Из соотношений Коши (2.48) следует, что

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0. \quad (2.64)$$

Для удобства примем дополнительное соглашение о том, что греческие индексы изменяются в пределах от 1 до 2; тогда можно записать

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{\alpha\alpha}. \quad (2.65)$$

^{*)} \emptyset — пустое множество.

^{**} Приводимые ниже рассуждения без труда обобщаются в случае, когда $u_3 = c_1 + c_2 z$.

Из соотношений Гука (2.50) и формулы (2.65) имеем

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda\theta\sigma_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (2.66)$$

Компонент σ_{33} тензора напряжений

$$\sigma_{33} = \lambda\theta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

не зависит от x_3 и может быть найден после того, как будут определены σ_{11} , σ_{22} , кроме того, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$.

Первые два уравнения равновесия примут вид

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho F_\alpha = 0, \quad (2.67)$$

третье уравнение обратится в тождество

$$\rho F_3 = 0, \quad (2.68)$$

а граничные условия в напряжениях записаны в виде

$$\sigma_{\alpha\beta} v_\beta = P_\alpha \text{ на } S_\sigma. \quad (2.69)$$

Очевидно, должно быть $P_3 = 0$ на S_σ . Граничные условия в перемещениях будут

$$u_\alpha = f_\alpha \text{ на } S_u. \quad (2.70)$$

По определению (2.63) имеем $u_3 = 0$ на S_u .

Существует другая ситуация, по физическому содержанию совершенно отличная от только что рассмотренной, но приводящая к той же краевой задаче (2.67), (2.69), (2.70). Это задача о равновесии тонкой пластинки под воздействием системы сил, параллельных срединной плоскости пластины (рис. 2.1).

Предположим, что заданные внешние усилия распределены симметрично относительно срединной плоскости, а ее поверхности $x_3 = \pm h$ свободны от напряжений. Это так называемый случай обобщенного плоского напряженного состояния.

Из физических соображений ясно, что изменения напряжений и перемещений вдоль x_3 (т. е. по толщине) будут малы по сравнению с изменениями тех же величин вдоль x_1 , x_2 , поэтому для практических целей можно ограничиться отысканием средних по толщине величин:

$$\left. \begin{aligned} u_\alpha^* &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_\alpha(x_1, x_2, x_3) dx_3, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

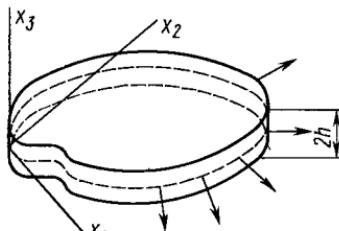


Рис. 2.1

Так как по постановке задачи

$$\sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad (2.72)$$

то

$$\frac{\partial \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h)}{\partial x_3} = 0. \quad (2.73)$$

Отсюда и из третьего уравнения равновесия следует, что

$$\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad x_3 = \pm h. \quad (2.74)$$

Вводя гипотезу о гладкости функции σ_{33} по переменной x_3 , с помощью разложения в ряд Тейлора по этой переменной и с использованием равенства (2.74) убеждаемся, что σ_{33} имеет порядок малости h^2 :

$$\sigma_{33} = O(h^2) \quad (2.75)$$

и, следовательно, ограничиваясь теорией, погрешность которой имеет порядок $O(h^2)$, можем положить

$$\sigma_{33} = 0 \quad (2.76)$$

Применив операцию осреднения (2.71) к первым двум уравнениям равновесия, найдем [учитывая (2.73)]

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^*}{\partial x_\beta} + \rho F_\alpha^* = 0. \quad (2.77)$$

Применив эту же операцию к зависимостям Гука и исключив ε_{33}^* с помощью (2.76), получим зависимость

$$\sigma_{\alpha\beta}^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \theta^* \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}^*, \quad (2.78)$$

с математической точки зрения не отличающуюся от найденных ранее формул (2.66), если в последних константу Ламе λ заменить на $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\lambda} = 2\lambda\mu/(\lambda+2\mu), \quad (2.79)$$

а компоненты тензоров напряжений и деформаций заменить средними по толщине.

Аналогичным способом получаются условия на границе плоской области $\Omega = \{x_1, x_2\}$:

$$\sigma_{ij}^* v_j = P_i^*. \quad (2.80)$$

Рассмотрим теперь случай плоского напряженного состояния, когда

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \quad (2.81)$$

Для изотропного тела из третьего из условий (2.81) имеем

$$\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} = 0. \quad (2.82)$$

Отсюда находим

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (2.83)$$

следовательно,

$$\theta = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (2.84)$$

и

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \theta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \epsilon_{\alpha\beta} \quad (2.85)$$

или с использованием (2.79):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \theta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \epsilon_{\alpha\beta}. \quad (2.86)$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют обычный вид

$$(\hat{\lambda} + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \mu \Delta u_\alpha + \rho F_\alpha = 0. \quad (2.87)$$

Заметим, что здесь

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, x_3). \quad (2.88)$$

Кроме того, ограничения на внешние воздействия, при которых имеет место гипотеза (2.81), достаточно сложны и на практике редко реализуемы (анализ этого вопроса см. в [21]).

§ 2.5. Приведение плоских задач к задачам для бигармонического уравнения

Рассмотрим теперь постановку плоских задач в напряжениях. Для определенности рассмотрим случай плоской деформации; случай обобщенного плоского напряженного состояния исследуется совершенно аналогично. Соответствующая краевая задача содержит уравнения равновесия (2.67), граничные условия (2.70) и условия совместности Сен-Венана (2.61), которые с учетом выражения для

$$\sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.89)$$

и формул связи между упругими константами E , ν , λ , μ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (\sigma_{yy}) + \frac{\nu}{1-\nu} (\operatorname{div} \mathbf{F}) \delta_{\alpha\beta} + \rho F_{\alpha,\beta} + \rho F_{\beta,\alpha} &= 0; \\ \Delta \sigma_{33} = -\frac{\rho\nu}{1-\nu} (F_{1,1} + F_{2,2}), \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа.

Предположим теперь, что известно частное решение $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ уравнений (2.67), (2.90), соответствующее массовым силам $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x_1, x_2)$; граничным условиям решение $\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$ может не удовлетворять. В ряде практически важных случаев это решение находится достаточно просто. Например, для поля сил тяжести, параллельных оси Ox_2 , имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (0, g), \\ \sigma_{1\alpha}^{(0)} &= 0, \quad \sigma_{22}^{(0)} = -\rho g x_2. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Для разности $\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}$, которую снова будем обозначать через $\sigma_{\alpha\beta}$, получим однородные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (2.92)$$

однородные условия совместности

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{\alpha\beta} + (\sigma_{\gamma\gamma})_{,\alpha\beta} &= 0; \\ \Delta \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

и, быть может, измененные граничные условия

$$\sigma_{\alpha\beta} v_\beta = P_\alpha^{(0)}. \quad (2.94)$$

Заметим сразу же, что первые два из уравнений совместности будут тождественны четвертому, третье тождественно удовлетворяется в силу однородных уравнений равновесия; четвертое уравнение с учетом зависимости (2.89) приобретает форму

$$\Delta \sigma_{\gamma\gamma} = 0,$$

или в развернутом виде

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (2.95)$$

В самом деле, рассмотрим для примера случай $\alpha = \beta = 1$:

$$\Delta \sigma_{11} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (2.96)$$

Продифференцировав первое из условий (2.92) по x_1 , второе — по x_2 , найдем, что

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} = - \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (2.97)$$

Заменив во втором слагаемом уравнения (2.96) $\partial^2 \sigma_{11} / \partial x_1^2$ на $\partial^2 \sigma_{22} / \partial x_2^2$, получим

$$\Delta \sigma_{11} + \Delta \sigma_{22} = 0,$$

что совпадает с (2.95). Аналогичный вывод справедлив для остальных значений α, β в (2.93).

Первое из уравнений равновесия (2.92)

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$$

показывает, что выражение

$$\sigma_{11} dx_2 - \sigma_{12} dx_1 \quad (2.98)$$

есть полный дифференциал dA некоторой функции $A = A(x_1, x_2)$, т. е.

$$\sigma_{11} = \partial A / \partial x_2, \quad \sigma_{12} = - \partial A / \partial x_1 \quad (2.99)$$

Из второго уравнения (2.92) вытекает существование некоторой

функции $B = B(x_1, x_2)$, такой, что

$$\sigma_{12} dx_2 - \sigma_{22} dx_1 = dB(x_1, x_2) \quad (2.100)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{12} = \partial B / \partial x_2; \quad \sigma_{22} = -\partial B / \partial x_1. \quad (2.101)$$

Сравнивая два выражения для σ_{12} , заключаем, что существует функция $V = V(x_1, x_2)$ и

$$A = \partial V / \partial x_2; \quad B = -\partial V / \partial x_1, \quad (2.102)$$

и, следовательно,

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}; \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}. \quad (2.103)$$

Функция V называется *функцией напряжений*, формулы (2.103) были впервые получены Эри и носят его имя.

Из (2.95) и (2.103) следует уравнение, которому должна удовлетворять функция V :

$$\Delta \Delta V = 0. \quad (2.104)$$

Это уравнение называется *бигармоническим*, а функции, удовлетворяющие этому уравнению, называются *бигармоническими функциями*.

Для получения граничных условий, которым должна подчиняться функция V , используем соотношения (2.94), при чем индекс «0» у P_α будем опускать. Рассмотрим часть границы Γ области Ω с внешней нормалью v . Будем предполагать, что уравнение рассматриваемого куска границы представлено в параметрическом виде

$$x_\alpha = x_\alpha(s), \quad (2.105)$$

где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки M_0 до текущей точки M (рис. 2.2).

Компоненты v_α вектора внешней единичной нормали v к контуру выражаются по известным из дифференциальной геометрии формулам:

$$v_1 = dx_2/ds, \quad v_2 = -dx_1/ds. \quad (2.106)$$

Из (2.94), (2.103) и (2.106) следует, что на границе имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} V_{,22} \frac{dx_2}{ds} + V_{,12} \frac{dx_1}{ds} &= P_1; \\ -V_{,12} \frac{dx_2}{ds} - V_{,11} \frac{dx_1}{ds} &= P_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.107)$$

Оказывается, что эти условия могут быть приведены к граничным условиям для V и ее нормальной производной, т. е.

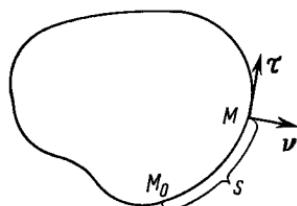


Рис. 2.2

задача о плоской деформации эквивалентна с математической точки зрения задаче изгиба тонкой пластиинки, на границе которой задан прогиб и перерезывающая сила (см. ниже). В самом деле, заметим, что выражения в левой части (2.107) представляют собой полные производные по s :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial V}{\partial x_2} \right) &= P_1, \\ \frac{d}{ds} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1} \right) &= P_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

Зафиксируем на контуре точку M_0 и зададим в ней произвольно

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = a, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = b. \quad (2.109)$$

(Напомним, что функция V определяется с точностью до полинома первой степени по x_1 и x_2 .) Тогда, если M_1 — любая точка на контуре Γ , то, вычисляя в (2.108) криволинейные интегралы от M_0 до M_1 , найдем значения первых производных от V в этой точке:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_2} &= b + \int_{M_0}^{M_1} P_1(s) ds; \\ \frac{\partial V}{\partial x_1} &= a - \int_{M_0}^{M_1} P_2(s) ds. \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

Вводя в каждой точке контура локальную систему координат (v, t) , можем вычислить производные от V по v и по s :

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial v}; \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s}. \quad (2.112)$$

Интегрируя соотношение (2.112) [с учетом (2.110)] вдоль контура Γ от точки M_0 до произвольной точки M_2 , получим первое граничное условие для функции V :

$$V|_{\Gamma} = c_1 + a x_1(s) + b x_2(s) + \int_{M_0}^{M_2} \left[-\frac{\partial x_1}{\partial s} \int_{M_0}^{M_1} P_2(s') ds' + \frac{\partial x_1}{\partial s} \int_{M_0}^{M_1} P_1(s') ds' \right] ds. \quad (2.113)$$

Соотношение (2.111) после подстановки в него выражений (2.110) превращается во второе граничное условие для нормальной производной от V :

$$\frac{\partial V}{\partial v}|_{\Gamma} = \left[a - \int_{M_0}^{M_1} P_2(s) ds \right] \frac{\partial x_1}{\partial v} + \left[b + \int_{M_0}^{M_1} P_1(s) ds \right] \frac{\partial x_2}{\partial v}. \quad (2.114)$$

Следует учитывать, что на контуре

$$\frac{\partial x_1}{\partial s} = \cos(\tau, Ox_1) = -\cos(v, Ox_2) = -v_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s} = \cos(\tau, Ox_2) = v_1.$$

Таким образом, окончательно имеем для V следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta V = 0 \text{ в } \Omega; \\ V = g_1, \\ \frac{\partial V}{\partial v} = g_2 \end{array} \right\} \text{на } \Gamma = \partial\Omega; \quad (2.115)$$

эквивалентную исходной задаче о плоском деформированном состоянии.

Замечание 2.1. Можно показать, что задача об обобщенном плоском напряженном состоянии также сводится к задаче (2.115).

Задача о плоском напряженном состоянии, хотя и сводится к разысканию скалярных функций от двух независимых переменных, не является проблемой вида (2.115) (см. [12]).

Наибольшее распространение получил метод Колосова — Мусхелишивили сведения краевых задач для бигармонического уравнения к граничным задачам теории аналитических функций. Методом Колосова — Мусхелишивили заниматься не будем рекомендую читателю книгу [27].

§ 2.6. Теория кручения цилиндрических стержней

Пусть область Ω , в которой разыскивается решение уравнений теории упругости, представляет собой прямой цилиндр (не обязательно круговой) с боковой поверхностью S_2 и горцами S_0 и S_1 (рис. 2.3).

Предположим, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, а на S_0 и S_1 заданы произвольные силовые воздействия. Из механических соображений ясно, что если характерный размер поперечного сечения цилиндра мал по сравнению с его высотой, то на достаточном удалении от торцов характер распределения внешних воздействий не будет сказываться на напряженно-деформированном состоянии — главную роль будут играть такие интегральные характеристики, как главный вектор и главный момент внешних воздействий. Это обстоятельство было отмечено в многочисленных экспериментальных наблюдениях, проверено прямыми вычислениями и высказано Сен-Венаном в виде общего принципа, называемого сейчас *принципом Сен-Венана*, который формулируется так:

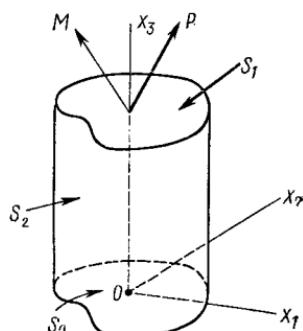


Рис. 2.3

замена заданной системы внешних воздействий другой системой, статически эквивалентной исходной и распределенной по тому же участку границы (или объема), не влияет на напряженно-деформированное состояние в точках тела, удаленных от области приложения внешних воздействий на расстояние порядка характерного размера области приложения внешних воздействий.

Значение этого принципа состоит в том, что он позволяет изменять распределение внешних воздействий на границе тела таким образом, чтобы решение задачи становилось более простым (и даже в некоторых случаях выражалось в виде простых формул). Другими словами, при использовании принципа Сен-Венана отказываются от точного удовлетворения граничных условий и проверяют эти условия лишь в интегральном смысле — в смысле равенства главных векторов и главных моментов внешних воздействий и внутренних напряжений на границе.

Будем решать задачу об определении напряженно-деформированного состояния цилиндра с использованием принципа Сен-Венана. Предположим, что перемещение некоторой точки O на S_0 равно нулю, так же как и тензор вращения в этой точке, и выберем начало декартовой системы отсчета в этой точке. Ось Ox_3 направим параллельно образующим цилиндра, а оси Ox_1 и Ox_2 расположим в плоскости сечения S_0 . Пусть главный вектор внешних воздействий на S_1 равен P , главный момент — M . Тогда

$$\begin{aligned} P &= P_i e_i \equiv P_1 e_1 + P_2 e_2 + P_3 e_3; \\ M &= M_i e_i \equiv M_1 e_1 + M_2 e_2 + M_3 e_3. \end{aligned}$$

В силу линейности исследуемых систем уравнений можно разыскивать решение, соответствующее системе внешних нагрузок, эквивалентных P и M в виде суммы частных решений, соответствующих отдельным компонентам векторов P и M . Решение, соответствующее компоненту P_3 , — известное решение элементарной задачи о растяжении стержня продольной силой. Задача, соответствующая компоненту M_3 , называется *задачей кручения*; две различные задачи, одна из которых соответствует компоненту P_1 или P_2 , а вторая — M_1 или M_2 , называют *задачами об изгибе стержней концевой силой и моментом*.

Начнем с рассмотрения задачи кручения, когда системы внешних сил на S_0 и S_1 статически эквивалентны парам с моментом, по модулю равным $M_3 = M$; естественно, что момент пары на S_0 противоположен по направлению моменту пары на S_1 .

Предположим, что массовые силы отсутствуют и что сечение цилиндра плоскостью $x_3 = \text{const}$ — односвязная область: в плоскости (x_1, x_2) . Для решения задачи применим полуобратный метод, т. е. попытаемся угадать вид некоторых характеристик напряженно-деформированного состояния, остальные же величины будем искать таким образом, чтобы удовлетворить всем уравнениям теории упругости.

Предположим, что поле перемещений в цилиндре имеет вид

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2, x_3) = -\alpha x_2 x_3; \\ u_2 &= u_2(x_1, x_3) = \alpha x_1 x_3, \quad \alpha = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_2) = \alpha \varphi(x_1, x_2). \quad (2.117)$$

Гипотеза (2.116) вытекает из того, что каждое сечение цилиндра плоскостью $x_3 = \text{const}$ поворачивается около оси Ox_3 на угол, пропорциональный x_3 (α — коэффициент пропорциональности); (2.117) означает, что точки, расположенные на прямой $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, смещаются вдоль Ox_3 на одну и ту же величину.

Поле перемещений (2.116) — (2.117) дает следующее выражение для компонентов тензора деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{13} &= \frac{\alpha}{2} \left(-x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right); \\ \varepsilon_{23} &= \frac{\alpha}{2} \left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right); \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

Отсюда следует, что отличны от нуля лишь два компонента тензора напряжений:

$$\sigma_{13} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right), \quad \sigma_{23} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right). \quad (2.119)$$

Подставляя (2.119) в уравнение равновесия, находим уравнение, которому должна удовлетворять функция φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \equiv \Delta \varphi = 0. \quad (2.120)$$

Нетрудно проверить, что если φ удовлетворяет (2.120), то условия совместности также выполнены. Таким образом, φ является гармонической функцией в области $\tilde{\Omega}$, занимаемой поперечным сечением цилиндра в плоскости (x_1, x_2) . (В дальнейшем эту область будем обозначать просто через Ω .)

В теории кручения часто используют другие функции, отыскание которых эквивалентно решению поставленной задачи. Одна из этих функций вводится следующим образом. Заметим, что на основании выражений (2.118) и закона Гука из трех уравнений равновесия является нетождественным только одно:

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0,$$

которое показывает, что выражение

$$\sigma_{13} dx_2 - \sigma_{23} dx_1$$

является полным дифференциалом некоторой функции $\theta = \theta(x_1, x_2)$, для которой

$$\sigma_{13} = \mu\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\mu\alpha \frac{\partial\theta}{\partial x_1} \quad (2.121)$$

(множитель $\mu\alpha$, где μ — модуль сдвига, вводится для удобства дальнейших вычислений).

Сравнивая (2.119) и (2.121), получим связь между функциями φ и θ :

$$-x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{\partial\theta}{\partial x_2}, \quad x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\theta}{\partial x_1}. \quad (2.122)$$

Исключая во втором из этих соотношений φ с помощью первого (или наоборот), получим уравнение для θ :

$$\Delta\theta + 2 = 0. \quad (2.123)$$

Уравнение (2.123) является *уравнением Пуассона*. Заметим, что уравнение такого типа появляется и в задаче об изгибе тонкой мембранны, где θ имеет смысл прогиба мембранны (вывод уравнения изгиба мембранны имеется в большинстве курсов уравнений математической физики).

Заметим, что функция

$$\Psi = \theta + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \quad (2.124)$$

удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической. Так как

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \quad (2.125)$$

то функция Ψ является сопряженной φ , а функция $\varphi + i\Psi$ является аналитической функцией комплексного переменного $x_1 + ix_2$.

Получим теперь граничные условия, которым должны удовлетворять функции φ , θ , Ψ . Для этого вспомним, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений и, следовательно,

$$\sigma_{13}v_1 + \sigma_{23}v_2 = 0 \quad (2.126)$$

на контуре Γ области Ω , занимаемой в плоскости (x_1, x_2) попечным сечением цилиндра.

Подставим в условие (2.126) выражения для напряжений (2.121) и воспользуемся тем, что

$$v_1 = \frac{dx_2}{ds}, \quad v_2 = -\frac{dx_1}{ds}; \quad (2.127)$$

$$\mu\alpha \left[\frac{\partial\theta}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} - \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1} \right) \left(-\frac{dx_1}{ds} \right) \right] \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (2.128)$$

Вспоминая, что на контуре $\theta = \theta(x_1(s), x_2(s))$, и используя определение производной сложной функции, из условия (2.128) получим

$$\frac{d\theta}{ds} = 0, \quad (2.129)$$

т. е.

$$\theta(x_1, x_2) = \text{const} \text{ на } \Gamma. \quad (2.130)$$

Поскольку функция θ определяется с точностью до константы (прибавление к θ постоянного слагаемого не меняет напряженного состояния), то можно положить

$$\theta|_{\Gamma} = 0. \quad (2.131)$$

Таким образом, функция θ является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \theta = -2; \\ \theta|_{\Gamma} = 0, \end{array} \right\} \quad (2.132)$$

а функция Ψ — решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \Psi = 0; \\ \Psi|_{\Gamma} = -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \end{array} \right\} \quad (2.133)$$

Для функции φ на Γ имеем

$$\mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right) v_1 + \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right) v_2 = 0. \quad (2.134)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}|_{\Gamma} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} v_2, \quad (2.135)$$

приходим к заключению, что функция φ является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}|_{\Gamma} = (x_2 v_1 - x_1 v_2)|_{\Gamma}. \end{array} \right\} \quad (2.136)$$

Как уже было отмечено, определяемое решение соответствует некоторому специальному заданию внешних силовых воздействий на S_0 и S_1 . Покажем, что эти воздействия статически эквивалентны паре с некоторым моментом M , параллельным оси Ox_3 . В самом деле, проекция главного вектора внешних воздействий на Ox_1 равна:

$$P_1 = \iint_{\Omega} \sigma_{13} dx_1 dx_2 = \mu \alpha \iint_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} dx_1 dx_2. \quad (2.137)$$

Преобразуя последний интеграл по теореме Стокса

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \oint_{\Gamma} p dx_1 + q dx_2, \quad (2.138)$$

найдем, что $P_1 = 0$. Аналогичным способом доказывается, что проекция P_2 главного вектора внешних усилий на ось Ox_2 также

равна нулю. Таким образом, внешние воздействия эквивалентны паре с моментом; вектор этой пары параллелен Ox_3 , так как усилия на S_0 и S_1 перпендикулярны этой оси. Момент внешних воздействий находится по формуле

$$M = \iint_{\Omega} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) d\Omega = -\mu \alpha \iint_{\Omega} \left(x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) d\Omega.$$

Из тождества

$$x_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_1 \theta)}{\partial x_1} + \frac{\partial (x_2 \theta)}{\partial x_2} = -2\theta,$$

формулы (2.138) при $p = x_1 \theta$, $q = -x_2 \theta$ и условия (2.131) следует, что

$$M = 2\mu \alpha \iint_{\Omega} \theta dx_1 dx_2. \quad (2.139)$$

Величина

$$D = 2\mu \alpha \iint_{\Omega} \theta (x_1, x_2) d\Omega \quad (2.140)$$

называется *жесткостью вала на кручение*. Зная величину крутящего момента M и жесткость D вала на кручение, можем найти угол закручивания $\alpha = M/D$ на единицу длины вала.

Заметим, что поле напряжений внутри цилиндра не изменится, если к найденному полю перемещений добавить поле вида

$$\left. \begin{array}{l} u_1^g = a_2 x_3 - a_3 x_2 + b_1; \\ u_2^g = a_3 x_1 - a_1 x_3 + b_2; \\ u_3^g = a_1 x_2 - a_2 x_1 + b_3, \end{array} \right\} \quad (2.141)$$

где a_i и b_i — константы. Надлежащим выбором этих констант можно удовлетворить условиям закрепления в любой заранее выбранной точке. Принятые в начале этого параграфа условия закрепления начала системы координат будут выполнены, если принять

$$\left. \begin{array}{l} b_1 = b_2 = b_3 = 0; \quad b_3 = -a\varphi(0, 0); \\ 2a_2 = \alpha\varphi_{,1}(0, 0); \quad 2a_1 = -2\varphi_{,2}(0, 0). \end{array} \right\} \quad (2.142)$$

Укажем два простых примера, в которых функция $\theta = \theta(x_1, x_2)$ легко находится в явном виде.

1. Поперечное сечение цилиндра — круг радиуса R с центром в начале координат; в этом случае

$$\theta = 1/2 (R^2 - x_1^2 - x_2^2).$$

2. Поперечное сечение — эллипс с полуосами a и b ; здесь

$$\theta = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right).$$

В заключение этого параграфа отметим, что в рассуждениях существенным образом использовались предложения об односвязности области Ω , занимаемой поперечным сечением цилиндра в плоскости (x_1, x_2) . Если же эта область является многосвязной с внешним контуром Γ и внутренними $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ (см. рис. 2.4), то приведенные выше рассуждения показывают, что на каждом контуре $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ функция θ равна константе, но эта константа может быть выбрана произвольным образом лишь на одном контуре, например на внешнем. Константы, соответствующие остальным n контурам, являются неизвестными и их необходимо найти в процессе решения задачи. Для их определения строится система линейных алгебраических уравнений (см., например, [18]).

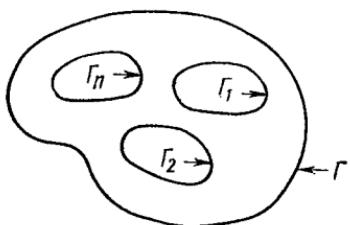


Рис. 2.4

§ 2.7. Теория изгиба стержней Сен-Венана

Начнем с более простой задачи об изгибе стержня моментом $M = M_2 e_2$, которую называют также задачей о чистом изгибе. Предположим дополнительно, что ось Ox_3 является геометрическим местом центров тяжести поперечных сечений цилиндра, а оси Ox_2 и Ox_3 направлены по главным осям инерции сечения S_0 ; из этих предположений следует, что

$$\iint_{\Omega} x_1 d\Omega = \iint_{\Omega} x_2 d\Omega = \iint_{\Omega} x_1 x_2 d\Omega = 0. \quad (2.143)$$

Так как стержень находится в равновесии, то поверхностные воздействия на S_0 эквивалентны паре с моментом $M = -M_2 e_2$.

Будем искать решение, соответствующее следующему частному закону распределения внешних нагрузок на S_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{23} = 0; \\ \sigma_{33} = cx_1; \quad c = \text{const.} \end{array} \right\} \quad (2.144)$$

Легко проверить, что эта система усилий статически эквивалентна паре с моментом $M = M_2 e_2$, причем

$$M_2 = -\iint_{\Omega} cx_1^2 d\Omega = -cI_2, \quad (2.145)$$

где I_2 — момент инерции поперечного сечения S_1 относительно оси, параллельной Ox_2 . Таким образом, в условиях (2.144) следует положить

$$c = -M_2/I_2. \quad (2.146)$$

Распределение нагрузок на S_0 будет получаться из (2.144) заменой c на $-M_2/I_2$.

Легко проверить, что поле тензора напряжений вида

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0; \\ \sigma_{33} = -M_2 x_2 / I_2 \end{array} \right\} \quad (2.147)$$

является решением поставленной задачи.

Если закон распределения внешних усилий на S_1 , S_0 не совпадает с (2.144), но эти нагрузки статически эквивалентны паре с моментом $M = M_2 e_2$, то в соответствии с принципом Сен-Венана найденное решение (2.147) является приближенным решением и этих задач.

Перейдем теперь к задаче об изгибе стержня концевой силой. Будем предполагать, что система заданных внешних нагрузок на S_1 эквивалентна силе $P = P_1 e_1$, приложенной в точке пересечения оси Ox_3 с S_1 . Задачи с другой точкой приложения силы P сводятся, очевидно, к поставленной задаче и к уже решенной задаче кручения с моментом $M_3 = \pm P_1 a$, где a — расстояние от точки приложения силы P до оси Ox_3 .

Рассматривая часть стержня, расположенную левее некоторого сечения $x_3 = \text{const}$, убеждаемся, что для равновесия этой части необходимо к сечению приложить систему сил, статически эквивалентную силе $P = P_1 e_1$ и паре с моментом $M = (l - x_3) P_1 e_2$, где l — длина стержня. В соответствии с решением, полученным в задаче о чистом изгибе, можем утверждать, что моменту $M = (l - x_3) P_1 e_2$ соответствует следующее поле напряжений:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{23}^{(1)} = 0; \\ \sigma_{33}^{(1)} = -P_1 / I_2 (l - x_2) x_1. \end{array} \right\} \quad (2.148)$$

Данное поле не удовлетворяет дифференциальным уравнениям задачи теории упругости в напряжениях. Нетрудно убедиться в том, что, заменив в (2.148) компонент $\sigma_{13}^{(1)}$ по формуле

$$\sigma_{13}^{(1)} = -\frac{P_1}{2I_2} \left(x_1^2 - \frac{\nu x_2^2}{1+\nu} \right), \quad (2.149)$$

удовлетворим упомянутым уравнениям.

Для того чтобы удовлетворить граничным условиям задачи, добавим к построенному полю $\sigma_{ij}^{(1)}$ поле $\sigma_{ij}^{(2)}$, где $\sigma_{13}^{(2)} = \partial \psi / \partial x_2$, $\sigma_{23}^{(2)} = -\partial \psi / \partial x_1$.

$$\left. \begin{array}{l} \psi = \psi(x_1, x_2), \quad \Delta \psi = 0; \\ \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{33}^{(2)} = 0. \end{array} \right\} \quad (2.150)$$

Сравнивая (2.150) с (2.121), видим, что поле (2.150) удовлетворяет уравнениям равновесия и уравнениям Бельтрами — Митчелла. Введение функции ψ позволяет удовлетворить граничным условиям на S_2 ; в самом деле, в любой точке на S_2

$$\sigma_{13} v_1 + \sigma_{23} v_2 = 0. \quad (2.151)$$

Подставляя сюда вместо σ_{13} , σ_{23} сумму $\sigma_{13}^{(1)} + \sigma_{13}^{(2)}$, ..., найдем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} v_2 = \frac{P_1}{2I_2} \left(x_1^2 - \frac{vx_2^2}{1+v} \right)_{\Gamma} v_1. \quad (2.152)$$

Учитывая, что

$$v_1 = dx_2/ds; \quad v_2 = -dx_1/ds \quad (2.153)$$

и фиксируя значение ψ в некоторой точке M_0 контура Γ :

$$\psi(M_0) = \psi_0, \quad (2.154)$$

интегрируем (2.152) по s , получим граничное условие для функции ψ :

$$\psi = \psi(M)_{M \in \Gamma} = \psi_0 + \int_{M_0}^M \frac{P_1}{2I_2} \left(x_1^2 - \frac{vx_2^2}{1+v} \right) \frac{dx_2}{ds} ds. \quad (2.155)$$

Таким образом, для определения функции $\psi(x_1, x_2)$ имеем задачу Дирихле. Напомним, что ψ определяется с точностью до константы, поэтому выбор ψ_0 в (2.155) не имеет никакого значения; можно просто положить $\psi_0 = 0$. Выбором ψ_0 функция ψ на Γ определяется однозначно, так как

$$\frac{P_1}{2I_2} \oint_{\Gamma} \left(x_1^2 - \frac{vx_2^2}{1+v} \right) dx_2 = \frac{P_1}{I_2} \iint_{\Omega} x_1 d\Omega = 0. \quad (2.156)$$

Читателю в качестве упражнения предлагается проверить, что распределение внешних нагрузок на S_1 , отвечающее решению $\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$, статически эквивалентно силе $P = P_1 e_1$ и, быть может, паре с моментом $M = M_3 e_3$. Если $M_3 \neq 0$, то к найденному полю напряжений следует добавить поле, соответствующее задаче кручения с моментом $-M_3 e_3$; таким образом, полное решение поставленной задачи будет иметь вид

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(3)},$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ найдено в явном виде по формулам (2.150) и (2.151); $\sigma_{ij}^{(2)}$ получается из решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа; $\sigma_{ij}^{(3)}$ находится из решения одной из трех задач, полученных для задачи кручения.

§ 2.8. Элементарная теория изгиба

Для построения элементарной теории изгиба определим поле перемещений $u = u(x_1, x_2, x_3)$, возникающее в стержне при его изгибе моментом, и проведем анализ этого поля перемещений.

Для определения поля перемещений воспользуемся формулой Чезаро (§ 1.3), предполагая, что в точке 0 перемещения u_i^0 и тензор вращения $\omega_{ij}^{(0)}$ равны нулю, и выбирая в качестве контура интегрирования ломаную линию, состоящую из прямолинейных отрезков $[(0, 0, 0), (x_1, 0, 0)], [(x_1, 0, 0), (x_1, x_2, 0)], [(x_1, x_2, 0),$

(x_1, x_2, x_3) . Такой выбор удобен тем, что вычисление криволинейного интеграла в формуле (1.60) сводится к вычислению трех определенных однократных интегралов по прямолинейным отрезкам, так как на первом из указанных выше кусков контура интегрирования $dx_2 = dx_3 = 0$, на втором $dx_1 = dx_3 = 0$ и на третьем $dx_1 = dx_2 = 0$.

Подставляя поле напряжений (2.147) в закон Гука для изотропного тела (2.50) и проводя указанные вычисления, найдем, что

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{M_2}{2EI_2} [x_3^2 - v(x_1^2 - x_3^2)]; \\ u_2 &= \frac{vM_2}{EI_2} x_1 x_2, \quad u_3 = -\frac{M_2}{EI_2} x_1 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.157)$$

Учитывая, что точки стержня, до деформации имеющие координаты x_i , после деформации займут положения

$$\tilde{x}_i = x_i + u_i, \quad (2.158)$$

найдем уравнение кривой, в которую перейдет волокно, до деформации совпадающее с осью Ox_3 :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_2 &= 0 + u_2 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0, \\ \tilde{x}_1 &= 0 + u_1 \Big|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = M_2 x_3^2 / 2EI_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

Так как $u_3 = 0$ при $x_1 = x_2 = 0$, то искомая кривая представляет собой параболу в плоскости (x_1, x_3) :

$$\tilde{x}_1 = \frac{M_2}{2EI_2} x_3^2. \quad (2.160)$$

Вспоминая выражение для кривизны κ плоской линии

$$\kappa = (\tilde{x}_1)_{,33} / [1 + ((\tilde{x}_1)_{,1})^2]^{3/2}, \quad (2.161)$$

подставляя (2.160) в (2.161) и линеаризуя получающееся выражение, найдем

$$\kappa \simeq M_2/EI_2. \quad (2.162)$$

Зависимость (2.162) в элементарной теории изгиба известна как закон Эйлера — Бернулли.

Сечение стержня плоскостью $x_3 = c \equiv \text{const}$ после деформации остается плоским и перпендикулярным кривой (2.160). В самом деле, положение точек рассматриваемого сечения после деформации будет:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= (x_3 + u_3)_{x_3=c} = \left(x_3 - \frac{M_2}{2EI_2} \right)_{x_3=c} = \\ &= c \left(1 - \frac{M_2}{2EI_2} x_1 \right) = c (1 - \kappa x_1). \end{aligned} \quad (2.163)$$

С точностью, принимаемой в линеаризованной теории, можно принять

$$\tilde{x}_3 = c(1 - \kappa \tilde{x}_1), \quad (2.164)$$

что и доказывает сформулированное утверждение.

В элементарной теории изгиба утверждение о том, что сечения стержня плоскостью, перпендикулярной оси Ox_3 , после деформации остаются плоскими и перпендикулярными той линии, в которую переходит ось Ox_3 , принимается в качестве исходной гипотезы (гипотеза плоских сечений).

Построение элементарной теории проведем для простейшего случая изгиба стержня, имеющего плоскость симметрии, нагружками, перпендикулярными образующей стержня и имеющими ту же плоскость симметрии. Выберем плоскость симметрии за плоскость (x_1, x_3) . Ось Ox_2 направим перпендикулярно этой плоскости (система координат декартова) (рис. 2.5).

Будем предполагать, что размер стержня в направлении оси Ox_3 много больше характерного размера поперечного сечения. По предположению вектор внешних воздействий (массовых) имеет компоненты $\rho F_i = \rho F_i(x_1, x_2, x_3)$, причем

$$\left. \begin{aligned} \rho F_1(x_1, x_2, x_3) &= \rho F_1(x_1, -x_2, x_3); \\ \rho F_2(x_1, x_2, x_3) &= -\rho F_2(x_1, -x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.165)$$

Для того чтобы не учитывать растяжение стержня, необходимо предполагать, что

$$\iint_S \rho F_3(x_1, x_2, x_3) dS = 0,$$

а для того чтобы не учитывать изгиб в плоскости x_2, x_3 , — предполагать, что $\rho F_3(x_1, x_2, x_3) = \rho F_3(x_1, -x_2, x_3)$.

Тогда суммарный момент этих воздействий относительно оси Ox_1 будет равен нулю.

Ввиду малости поперечного сечения эффект внешних воздействий приближенно можно описать суммарными $\rho F^* = q$ по сечению усилиями, которые можно считать приложенными к линии, совпадающей с осью Ox_3 :

$$\begin{aligned} \rho F_1^* = q &= \int_{-b}^a dx_1 \int_{f_1(x_1, x_3)}^{f_2(x_1, x_3)} \rho F_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 = \\ &= \iint_S \rho F_1 dS = q(x_3). \end{aligned} \quad (2.166)$$

Из симметрии следует, что суммарное усилие в направлении оси Ox_2 равно нулю. Кроме суммарных усилий (главных векторов)

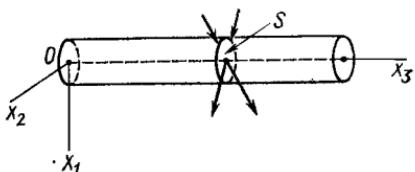


Рис. 2.5

ров, действующих в сечениях $x_3 = \text{const}$) введем в рассмотрение главный момент относительно точки $(0, 0, x_3)$; заметим, что усилие F_1 в любом сечении $x_3 = \text{const}$ не дает момента относительно осей, параллельных Ox_1 и Ox_2 , в этом сечении. Для того чтобы не рассматривать кручение, следует предполагать, что главный момент внешних усилий относительно Ox_3 равен нулю (это вытекает из указанной симметрии). Таким образом, остается лишь один компонент главного момента внешних воздействий — относительно оси Ox_2 :

$$m = \iint_S \rho F_3(x_1, x_2, x_3) x_1 dx_1 dx_2. \quad (2.167)$$

Если имеются не только объемные, но и внешние поверхностные нагрузки, например давление, то их можно суммировать аналогичным образом и добавить к уже найденному главному вектору и главному моменту (естественно, что при построении уравнений изгиба в плоскости $x_1 x_3$ необходимо принимать те же гипотезы о симметрии, что и относительно усилий ρF). Например, если сечение стержня — прямоугольник шириной a и высотой b и к верхнему сечению приложено нормальное давление интенсивности $p = p(x_3)$, то суммарное усилие в сечении $x_3 = \text{const}$ будет равно $q + pa$.

Проведем теперь анализ внутренних напряжений в стержне. Для этого проведем сечение стержня плоскостью $x_3 = \text{const}$ и отбросим часть стержня, лежащую правее этого сечения. Тогда для равновесия оставшейся части необходимо по сечению распределить усилия с плотностью

$$t_i = \sigma_{ij} v_j = \sigma_{i3} v_3 = \sigma_{i3}. \quad (2.168)$$

Следуя используемой методике, будем предполагать, что эффект этих усилий может быть описан их суммой по сечению (т. е. главным вектором) и главным моментом относительно точки $(0, 0, x_3)$. Из предположений о симметрии следует, что будет отличен от нуля один компонент главного вектора по сечению $x_3 = \text{const}$, равный

$$Q = \iint_S \sigma_{13} dx_1 dx_2, \quad (2.169)$$

и один компонент главного момента

$$M = \iint_S \sigma_{33} x_1 dx_1 dx_2. \quad (2.170)$$

Сила Q называется перерезывающей, момент M — изгибающим моментом.

Получим теперь дифференциальные уравнения равновесия; для этого выделим произвольный участок стержня $x_3^{(1)} = \text{const}$ и $x_3^{(2)} = \text{const}$ ($x_3^{(2)} > x_3^{(1)}$) и приравняем нулю главный вектор и главный момент усилий, действующих на этот участок.

Условие равновесия усилий:

$$\int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} q(x_3) dx_3 + Q(x_3^{(2)}) - Q(x_3^{(1)}) = 0. \quad (2.171)$$

Предположим, что функция $Q(x_3)$ дифференцируема и перепишем уравнение (2.171) в виде

$$\int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} \left[q(x_3) + \frac{dQ}{dx_3} \right] dx_3 = 0. \quad (2.172)$$

Пользуясь произвольностью выбора $x_3^{(1)}$ и $x_3^{(2)}$, заключаем, что

$$dQ(x_3)/dx_3 = -q(x_3). \quad (2.173)$$

Составим теперь уравнение равновесия моментов, выбрав за точку приведения $(0, 0, x_3^{(1)})$

$$\begin{aligned} & - \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} q(x_3) x_3 dx_3 - Q(x_3^{(2)}) (x_3^{(2)} - x_3^{(1)}) + \\ & + \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} m(x_3) dx_3 + M(x_3^{(2)}) - M(x_3^{(1)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.174)$$

Предполагая функции $Q(x_3)$, $M(x_3)$ дифференцируемыми по x_3 , перепишем уравнение (2.172) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{x_3^{(1)}}^{x_3^{(2)}} \left[-q(x_3) (x_3 - x_3^{(1)}) - \frac{d[Q(x_3)(x_3 - x_3^{(1)})]}{dx_3} + \right. \\ & \left. + m(x_3) + \frac{dM(x_3)}{dx_3} \right] dx_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Учитывая уравнение (2.173) и используя произвол в выборе точек $x_3^{(1)}$ и $x_3^{(2)}$, из уравнения (2.175) получаем

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} + m(x_3) - Q(x_3) = 0. \quad (2.176)$$

Примем теперь предположение о том, что связь кривизны $\kappa \simeq (\dot{x}_1)_{,33} = d^2 u_3 / dx_3^2 = d^2 w / dx_3^2$ и изгибающего момента M определяется законом Бернулли – Эйлера (2.162):

$$d^2 w / dx_3^2 = -M/EI_2 \quad (2.177)$$

[появление знака «–» объясняется выбором системы координат: положительным значениям M соответствуют отрицательные значения второй производной от прогиба $w = u_3(0, 0, x_3)$].

После подстановки (2.177) в уравнение (2.176) и получившегося при этом выражения для Q (через w) в уравнение (2.173)

получим окончательное уравнение равновесия

$$\frac{d^4w}{dx_3^4} = \frac{1}{D} q + \frac{1}{D} \frac{dm}{dx_3}, \quad (2.178)$$

в котором величина $D = EI_2$ называется изгибной жесткостью.

В элементарной теории момент $m = m(x_3)$ обычно не учитывается; обозначая для краткости $x_3 = x$, будем иметь

$$\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{1}{D} q(x). \quad (2.179)$$

Легко видеть, что в случае $I_2 = I_2(x)$ вместо уравнения (2.179) получится уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI_2 \frac{d^2w}{dx^2} \right] = q(x). \quad (2.180)$$

Рассмотрим типы наиболее часто встречающихся граничных условий для этого уравнения:

а) условие шарнирного закрепления означает, что стержень может свободно вращаться около неподвижной оси Ox_2 , следовательно, на kraю стержня равны нулю прогиб и изгибающий момент M :

$$w = 0, \quad M = EI_2 \frac{d^2w}{dx^2} = 0; \quad (2.181)$$

б) условие жесткой заделки означает равенство нулю прогиба и угла поворота на соответствующей границе:

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0; \quad (2.182)$$

в) свободный край — равенство нулю изгибающего момента M и перерезывающей силы Q ; из закона Эйлера — Бернулли и уравнения (2.176) следует, что на свободном крае

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3w}{dx^3} = 0. \quad (2.183)$$

Отметим, что если необходимо учитывать силы инерции, то $w = w(x, t)$, где t — время. Повторяя для этого случая проведенные выше рассуждения, получим уравнения колебаний стержня:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_2(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \rho S(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2.184)$$

[суммарная сила инерции движения по сечению $x_3 = \text{const}$ равна $\rho S(x) \partial^2 w / \partial t^2$ и добавляется к силе $q(x, t)$; моментом сил инерции обычно пренебрегают].

При постановке задач для уравнения (2.184) одновременно с граничными условиями следует ставить начальные условия:

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = w_1(x). \quad (2.185)$$

§ 2.9. Теория изгиба тонких пластин

Под пластиной будем подразумевать упругое тело в форме прямого цилиндра (не обязательно кругового), высота которого h много меньше размеров в плане. Плоскость, равноотстоящую от торцов, будем называть *срединной плоскостью*.

Выберем оси Ox_1 , Ox_2 декартовой системы лежащими в срединной плоскости, а ось Ox_3 — перпендикулярной этой плоскости. Обозначим через Ω область в плоскости (x_1, x_2) , занимаемую сечением пластинки $x_3 = 0$; через Γ — границу Ω . Таким образом, пластина занимает область трехмерного евклидова пространства R^3 :

$$V = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, (x_1, x_2) \in \Omega, -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2} \right\}. \quad (2.186)$$

Напомним, что в соответствии с принятым соглашением (см. приложение II) латинские индексы принимают значение от единицы до трех, греческие — от единицы до двух; повторяющиеся индексы означают суммирование в соответствующих пределах.

Проведем анализ поля напряжений пластинки с целью упрощения общих зависимостей трехмерной теории. Прежде всего заметим, что ввиду малости h зависимость внешних воздействий $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x_1, x_2, x_3)$ от x_3 будет не очень сильной (через F_i будем обозначать произведение ρF_i) и, следовательно, эффект этих воздействий приближенно эквивалентен эффекту суммарных по толщине h :

$$F_i^* = F_i^*(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} F_i(x_1, x_2, x_3) dx_3. \quad (2.187)$$

В дальнейшем вместо F_i^* будет использовано общепринятое обозначение $q_i = q_i(x_1, x_2)$.

В отличие от случая обобщенного плоского напряженного состояния будем учитывать, кроме средних усилий q_i моменты первого порядка относительно осей Ox_1 , Ox_2 :

$$m_i = \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{i3k} x_3 F_k(x_1, x_2, x_3) dx_3. \quad (2.188)$$

Очевидно, $m_3 = 0$. Заметим, что операции (2.187) — (2.188) можно интерпретировать как приведение системы сил, распределенных по линии $x_i = c_i = \text{const}$, к главному вектору $\mathbf{q} = q_i e_i$ и главному моменту $\mathbf{m} = m_i e_i$, причем за точку приведения выбирается точка $(c_1, c_2, 0)$.

Рассмотрим теперь сечение пластинки плоскостью или гладкой цилиндрической поверхностью, ортогональной срединной плоскости. Мысленно отбрасывая часть пластинки, расположенную по одну из сторон сечения, придем к выводу, что для равновесия

оставшейся части необходимо к сечению приложить поверхностные силы с плотностью

$$t_i = \sigma_{ij} v_j = \sigma_{i\alpha} v_\alpha, \quad (2.189)$$

где $v = (v_1, v_2, 0)$ — внешняя по отношению к остающейся части нормаль к сечению.

Будем предполагать, что эффект воздействия $t_i = t_i(x_1, x_2, x_3)$ может быть приближенно охарактеризован их суммарными по толщине воздействиями $R_i(x_1, x_2)$ и первыми моментами $M_i = M_i(x_1, x_2)$ (главными векторами и главными моментами сил, распределенных по линиям $x_2, x_1 = \text{const}$):

$$R_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} v_j dx_3, \quad (2.190)$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{ijk} x_3 \sigma_{kl} v_l dx_3. \quad (2.191)$$

Учитывая независимость v от x_3 , заключаем, что поле напряжений в пластинке приближенно может быть описано с помощью двух тензорных полей в двумерной области Ω :

тензора усилий $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, x_2)$

$$\Sigma_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3 \quad (2.192)$$

и тензора моментов усилий M_{ij}

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{ijk} x_3 \sigma_{kj} dx_3, \quad (2.193)$$

обладающих следующими свойствами:

$$\Sigma_{ij} = \Sigma_{ji}, \quad R_i = \Sigma_{ij} v_j = \Sigma_{i\alpha} v_\alpha, \quad (2.194)$$

$$M_{3\alpha} = 0, \quad M_{\alpha\alpha} = 0, \quad M_i = M_{ij} v_j = M_{i\alpha} v_\alpha. \quad (2.195)$$

Пусть теперь Ω_1 — любая подобласть области Ω с достаточно регулярной границей Γ_1 . Рассматривая равновесие части пластиинки, соответствующей этой области, под воздействием усилий R_i и моментов M_i , заданных на кривой Γ_1 , усилий q_i и моментов m_i , заданных в Ω_1 , приходим к следующим уравнениям равновесия:

$$\int_{\Omega_1} q_i dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_1} \Sigma_{i\alpha} v_\alpha d\Gamma = 0, \quad (2.196)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} E_{ijk} x_j q_k dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_1} E_{ijk} x_j \Sigma_{k\alpha} v_\alpha d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega_1} m_i dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma_1} M_{i\alpha} v_\alpha d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Преобразовав контурные интегралы в интегралы по области Ω_1 , получим уравнения:

$$\int_{\Omega_1} (q_i + \sum_{i\alpha, \alpha}) dx_1 dx_2 = 0, \quad (2.198)$$

$$\int_{\Omega_1} [E_{ijk}x_j f_k + m_i + (E_{ijk}x_j \sum_{k\alpha})_{,\alpha} + M_{i\alpha, \alpha}] dx_1 dx_2 = 0.$$

Учитывая, что Ω_1 — произвольная подобласть Ω , находим дифференциальные уравнения равновесия:

$$\sum_{i\alpha, \alpha} + q_i = 0, \quad (2.199)$$

$$E_{ijk}x_j q_k + m_i + (E_{ijk}x_j \sum_{k\alpha})_{,\alpha} + M_{i\alpha, \alpha} = 0. \quad (2.200)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} E_{ijk}x_j q_k + (E_{ijk}x_j \sum_{k\alpha})_{,\alpha} &= E_{ijk}x_j q_k + \\ &+ E_{ijk}x_j \sum_{k\alpha, \alpha} + E_{i\alpha k} \sum_{k\alpha} = E_{i\alpha k} \sum_{k\alpha}. \end{aligned} \quad (2.201)$$

Таким образом, вместо (2.200) будем иметь

$$E_{i\alpha k} \sum_{k\alpha} + M_{i\alpha, \alpha} + m_i = 0. \quad (2.202)$$

Полагая в (2.202) поочередно $i = 1, 2, 3$, найдем

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{23} + M_{1\alpha, \alpha} + m_1 &= 0; \\ -\Sigma_{31} + M_{2\alpha, \alpha} + m_2 &= 0; \\ -\Sigma_{12} + \Sigma_{21} + 0 + 0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.203)$$

т. е. для $i = 3$ уравнение (2.202) удовлетворяется тождественно.

Подстановка Σ_{13} и Σ_{23} из (2.203) в третье из уравнений (2.199) приводит к уравнению

$$M_{2\alpha, \alpha 1} - m_{2, 1} - M_{1\alpha, \alpha 2} - m_{1, 2} + q_3 = 0, \quad (2.204)$$

которое будет использовано в дальнейшем для получения уравнения прогиба (под прогибом будем понимать перемещение точек срединной поверхности параллельно оси Ox_3).

При исследовании характера деформированного состояния пластинки рассмотрим сначала случай изгиба пластинки нормальной нагрузкой $q_3 = q_3(x_1, x_2) \equiv q(x_1, x_2)$, т. е.

$$F_1(x_1, x_2) = F_2(x_1, x_2) = 0.$$

Из этого предположения, очевидно, следует, что

$$q_1 = q_2 = 0, \quad m_i = 0.$$

Примем теперь дополнительные гипотезы, вытекающие из опыта и позволяющие провести раздельно исследование поля перемещений, параллельных срединной плоскости пластинки и поля перемещений точек из этой плоскости.

1. Перемещения точек срединной плоскости коллинеарны Ox_3 ; это означает, что

$$u_1(x_1, x_2, 0) = u_2(x_1, x_2, 0) = 0. \quad (2.205)$$

2. Частицы, до деформации лежащие на прямой, перпендикулярной срединной плоскости, после деформации будут лежать на прямой, перпендикулярной той поверхности, в которую перейдет срединная плоскость в результате деформации (гипотеза прямых нормалей).

Данная гипотеза в сочетании с предыдущей позволяет утверждать, что

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_3 c_\alpha(x_1, x_2). \quad (2.206)$$

Для нахождения функций $c_\alpha(x_1, x_2)$, а также для оценки точности гипотез 1 и 2 предположим, что компоненты вектора перемещения являются аналитическими функциями координаты x_3 (на самом деле достаточно потребовать существования ограниченной второй производной по x_3); это позволяет записать следующее разложение:

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = u_\alpha(x_1, x_2, 0) + \frac{\partial u_\alpha(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3} x_3 + O(h^2). \quad (2.207)$$

Из (2.205), (2.206) и (2.207) следует, что

$$c_\alpha = \frac{\partial u_\alpha(x_1, x_2, 0)}{\partial x_3}, \quad (2.208)$$

а также утверждение о том, что погрешность в значениях перемещений, найденных с использованием гипотез 1, 2, имеет порядок $O(h^2)$.

3. Данная гипотеза носит динамический характер и касается поля напряжений:

$$\sigma_{i3}(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (2.209)$$

Детальный анализ, который проводить не будем, показывает, что хотя в каждой точке среды значения компонентов σ_{i3} много меньше значений остальных компонентов тензора напряжений, тем не менее усилия $\Sigma_{\alpha 3}$ имеют тот же порядок, что и производные от моментов $M_{3\alpha\beta}$ и, следовательно, в уравнениях (2.203) отбрасывать усилия $\Sigma_{\alpha 3}$ нельзя.

$$4. \quad u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2, 0). \quad (2.210)$$

Погрешность, вносимая этой гипотезой, имеет тот же порядок, что и погрешность гипотез (2.206); заметим здесь же, что компонент $\varepsilon_{33} \neq 0$ будет найден из третьей формулы (2.209).

Используем теперь закон Гука в форме

$$\sigma_{ij} = \frac{t}{1+v} \left[\varepsilon_{ij} + \frac{v}{1-2v} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right]. \quad (2.211)$$

Из (2.209) и (2.211) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0; \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{v}{1-v} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.212)$$

Введем общепринятое обозначение для прогиба

$$w(x_1, x_2) \equiv u_3(x_1, x_2, 0). \quad (2.213)$$

Из первых двух равенств (2.212) и разложений (2.206) [с учетом (2.218)] найдем

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_\alpha}. \quad (2.214)$$

Отсюда следует выражение для компонентов тензора деформации:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad \epsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}; \\ \epsilon_{12} &= -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.215)$$

или сокращенно

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -x_3 w_{,\alpha\beta}. \quad (2.216)$$

Отметим здесь же, что величины $w_{,11}$, $w_{,12}$ представляют собой кривизны поверхности $x_3 = w(x_1, x_2)$ в трехмерном евклидовом пространстве; $w_{,12}$ — кручение этой же поверхности.

Третья из формул (2.212) дает выражение для ϵ_{33} :

$$\epsilon_{33} = -\frac{v}{1-v} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}). \quad (2.217)$$

Учитывая (2.215), получим

$$\epsilon_{33} = \frac{vx_3}{1-v} \Delta w. \quad (2.218)$$

Подставляя найденные выражения для ϵ_{ij} в формулы закона Гука (2.211), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -x_3 \frac{E}{1-v^2} (w_{,11} + vw_{,22}); \\ \sigma_{22} &= -x_3 \frac{F}{1-v^2} (w_{,22} + vw_{,11}); \\ \sigma_{12} &= -x_3 \frac{E}{1+v} w_{,12}. \end{aligned} \right\} \quad (2.219)$$

По формулам (2.193) подсчитаем выражения для моментов $M_{\alpha\beta}$, входящих в уравнение равновесия (2.204):

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &= -M_{22} = \frac{E}{1+v} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}; \\ M_{12} &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right); \\ M_{21} &= -\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.220)$$

Усилия $\Sigma_{\alpha\beta}$, определенные формулой (2.192), будут, очевидно, равны нулю. Напомним, что усилия $\Sigma_{\alpha\beta}$ в уравнении (2.204) отбрасывать нельзя; их интенсивность определяется косвенным образом через производные от моментов по (2.203). Заметим также, что уравнения равновесия (2.199) для $i = 1, 2$ будут удовлетворяться тождественно.

Подстановка (2.220) в (2.204) дает

$$\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \Delta \Delta w = q. \quad (2.221)$$

Уравнение (2.221) представляет собой дифференциальное уравнение изгиба пластиинки; оно было найдено впервые Софи Жермен и носит ее имя. Левая часть уравнения содержит бигармонический оператор $\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}$, встречавшийся ранее в плоской задаче.

Величина

$$\frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \equiv D \quad (2.222)$$

называется *цилиндрической жесткостью пластиинки*.

Рассмотрим теперь основные типы граничных усилий, встречающихся в практических задачах расчета пластиин на изгиб.

а) Условия жесткого защемления:

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial v}|_{\Gamma} = 0. \quad (2.223)$$

Первое из этих условий означает, что край пластиинки не может смещаться в вертикальном направлении, второе — что пластиинка не может вращаться около неподвижных осей, касательных к ее краю (к кривой Γ).

б) Условие шарнирного опирания — пластиинка может свободно вращаться около неподвижных осей, касательных к ее краю. Требование неподвижности осей означает равенство нулю прогиба на Γ :

$$w|_{\Gamma} = 0. \quad (2.224)$$

Условие же того, что пластиинка имеет возможность свободно поворачиваться около этих осей, означает равенство нулю тангенциальной составляющей M_{τ} моментов усилий, действующих на краю. Учитывая, что

$$M_{\tau} = -M_1 v_2 + M_2 v_1, \quad (2.225)$$

также выражение (2.195) для M_i , получим второе краевое условие при шарнирном закреплении:

$$-[(1-v)w_{,12}v_1 + (w_{,22} + vw_{,11})v_2]v_2 + \\ + [-(w_{,11} + vw_{,22})v_1 - (1-v)w_{,12}v_2]v_1 = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (2.226)$$

Это условие можно упростить, вводя в каждой точке контура Γ локальную систему декартовых осей (v, τ) (рис. 2.6) и учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} v_2; \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial \tau} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} v_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} v_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.227)$$

Вводя в рассмотрение радиус R кривизны контура Γ и учитывая, что

$$R = -v_1 \frac{dv_2}{ds} + v_2 \frac{dv_1}{ds}, \quad (2.228)$$

можно с использованием (2.227) привести условие (2.226) к виду

$$\left[\Delta w - \frac{1-v}{R} \frac{\partial w}{\partial v} \right]_{\Gamma} = 0. \quad (2.229)$$

Если край пластиинки прямолинеен и ось Ox_2 направлена по этому краю, то условие (2.226) [или (2.229)] сводится, очевидно, к следующему:

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=0} = 0, \quad (2.230)$$

совпадающему с краевым условием для уравнения изгиба стержней (в элементарной теории) при шарнирном закреплении конца этого стержня.

в) Свободный край означает отсутствие силовых воздействий моментов и усилий на границе. Условие отсутствия тангенциальной составляющей момента на границе имеет тот же вид (2.226) или (2.229), что и в условиях шарнирного закрепления.

Оказывается, что условия отсутствия нормальной составляющей моментов M_h и отличного от нуля усилия R_3 на границе Γ сводятся к одному условию вида

$$\left(R_3 - \frac{\partial M_h}{\partial v} \right)_{\Gamma} = 0, \quad (2.231)$$

что с учетом выражения (2.194) для R_3 и для M_h :

$$M_h = M_1 v_1 + M_2 v_2$$

приводит к искомому условию на Γ :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial v} \Delta w + (1-v) \frac{\partial}{\partial s} [v_1 v_2 (w_{,22} - w_{,11}) + (v_1^2 - v_2^2) w_{,12}] \right\}_{\Gamma} = 0. \quad (2.232)$$

Приведем вывод условия (2.231), принадлежащий Кирхгофу. Для этого рассмотрим участок границы пластиинки длины ds , (рис. 2.7), ограниченный отрезками AA_1, BB_1 прямых, перпендикулярных срединной поверхности. Элемент AA_1B_1B границы

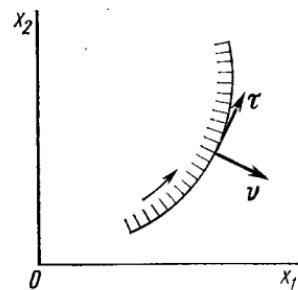


Рис. 2.6

подвергли воздействию момента M_h^A , вектор которого направлен по нормали к контуру. Этот момент можно рассматривать как момент пары сил, одна из которых направлена вдоль AA_1 , а другая — вдоль B_1B и противоположна первой. Обозначая величину каждой из сил пары через F_3^A , будем иметь

$$M_h^A = F_3^A ds.$$

Рассмотрев элемент BB_1C_1C границы пластинки и предположив, что M_h является достаточно гладкой функцией длины дуги s контура Γ , придем к выводу, что нормальная составляющая M_h^B момента на этом элементе будет равна:

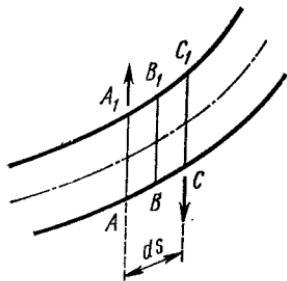


Рис. 2.7

$$M_h^B = \left(M_h^A + \frac{\partial M_h^A}{\partial s} ds \right) = F_3^B ds. \quad (2.233)$$

Подсчитывая суммарный эффект усилий F_3^A и F_3^B , действующих вдоль линии BB_1 , получим, что вдоль BB_1 действует перерезывающая сила интенсивности $(-\partial M_h/\partial s)$.

Таким образом, воздействие распределенных по границе моментов,

имеющих только составляющую, нормальную к контуру, эквивалентно воздействию перерезывающей силы с интенсивностью $(-\partial M_h/\partial s)$; добавляя эти усилия к заданным (R_3), приходим к условию свободного края в виде (2.231). Заметим, что при выводе этой формулы существенным образом используется предположение о гладкости функции $M_h = M_h(s)$ и о гладкости самого контура Γ . Если эти условия нарушаются, то при замене распределенных моментов M_h соответствующим распределением перерезывающих сил можем получить на границе нагрузки в виде сосредоточенных сил.

Пусть теперь на пластинку кроме нормальной нагрузки $q_3(x_1, x_2)$ действуют усилия $q_1(x_1, x_2)$, $q_2(x_1, x_2)$, параллельные срединной плоскости пластиинки, и, возможно, усилия $P_1(x_1, x_2)$, $P_2(x_1, x_2)$, где $(x_1, x_2) \in \Gamma$. Простейшее обобщение изложенной теории состоит в учете влияния усилий $\Sigma_{\alpha\beta}^0$, возникающих вследствие действия нагрузок q_α и P_α , на третье из условий равновесия (2.202) при одновременном пренебрежении влиянием прогибов ω на величину этих усилий. Более точно, пусть $\sigma_{\alpha\beta}^0$ — решение задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии с массовыми $q_\alpha = q_\alpha(x_1, x_2)$ и поверхностными нагрузками $P_\alpha = P_\alpha(x_1, x_2)$. Выделим из пластиинки произвольную подобласть $V_1 \in R^3$, представляющую собой цилиндр с образующей, параллельной оси Ox_3 , тогда вектор плотности поверхностных усилий на боковой поверхности этого цилиндра, определяемый полем

напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^0$,

$$t_\alpha^0 = \sigma_{\alpha\beta}^0 v_\alpha. \quad (2.234)$$

При изгибе пластинки составляющая t_α^0 повернется на угол $\partial\omega/\partial x_\alpha$ около оси Ox_β и ее проекция на ось Ox_3 будет равна

$$(t_\alpha^0)_3 = t_\alpha \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} = \sigma_{\alpha\beta}^0 v_\beta w_{,\alpha}. \quad (2.235)$$

Составим уравнение равновесия усилий выделенной части V_1 в проекции на ось Ox_3 с учетом добавочных слагаемых (2.235):

$$\iiint_{V_1} [F_3 + \sigma_{3\alpha,\alpha}] d\Omega + \iint_S \sigma_{\alpha\beta}^0 v_\beta w_{,\alpha} dS = 0. \quad (2.236)$$

Преобразовав поверхностный интеграл в объемный по формуле Гаусса — Остроградского, получим

$$\iiint_{V_1} [F_3 + \sigma_{3\alpha,\alpha} + (\sigma_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha})_{,\beta}] d\Omega = 0. \quad (2.237)$$

Сводя тройной интеграл к повторному, найдем

$$\int_{\Omega_1} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [F_3 + \sigma_{3\alpha,\alpha} + (\sigma_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha})_{,\beta}] dx_3 \right\} d\Omega = 0. \quad (2.238)$$

Используя введенные ранее обозначения для суммарных по толщине усилий и учитывая независимость функций $\sigma_{\alpha\beta}$ и w от x_3 , найдем

$$\int_{\Omega_1} [q_3 + \Sigma_{3\alpha,\alpha} + h(\sigma_{\alpha\beta} w_{,\alpha})_{,\beta}] d\Omega = 0. \quad (2.239)$$

Учитывая произвольность области Ω_1 , заключаем, что

$$\Sigma_{3\alpha,\alpha} + h(\sigma_{\alpha\beta} w_{,\alpha})_{,\beta} + q_3 = 0. \quad (2.240)$$

Подставляя сюда вместо $\Sigma_{3\alpha}$ их выражения через моменты, вытекающие из первых двух уравнений (2.203), и используя (2.220), получим уравнение

$$\Delta \Delta w - \frac{h}{D} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sigma_{\alpha\beta}^0 \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{q}{D}, \quad (2.241)$$

называемое *уравнением устойчивости*.

Это название объясняется тем, что краевые задачи для уравнения (2.241) могут иметь нетривиальные решения даже при нулевых внешних воздействиях. Физически это объясняется тем, что пластина, сжатая силами, параллельными ее срединной плоскости, может иметь изогнутую форму равновесия; переход от неизогнутой формы равновесия ($w \equiv 0$) к изогнутой называется *потерей устойчивости*.

Отметим в заключение этого параграфа, что в задачах динамики следует учитывать в составе сил $q_3(x_1, x_2)$ силы инерции, являющиеся массовыми силами с плотностью:

$$\mathbf{F} = \left(0, 0, -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (2.242)$$

С учетом сил инерции уравнение Софи Жермен принимает форму

$$D\Delta \Delta \omega + \rho h \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^2} = q_3(x_1, x_2, t). \quad (2.243)$$

Уравнение (2.243) называют *уравнением колебаний пластинки*. При решении задач о колебаниях необходимо кроме указанных выше краевых условий задавать начальные условия.

§ 2.10. Фундаментальные решения. Функция Грина

Этот и остальные параграфы настоящей главы посвящены одному из важнейших методов решения задач теории упругости — методу сингулярных интегральных уравнений. Преимущество этого метода состоит в том, что получающиеся уравнения записываются на многообразиях размерности на единицу меньше размерности исходной задачи (например, в трехмерной задаче получаются уравнения на поверхностях, т. е. многообразиях размерности 2), однако за это «снижение» размерности приходится расплачиваться усложнением методов решения и исследования соответствующих уравнений и систем.

Для того чтобы разобраться в рассуждениях и определениях, относящихся к задачам теории упругости в наиболее общей постановке, иллюстрируем основные идеи на примере более простых задач — для уравнения Лапласа и Пуассона в плоских и трехмерных областях.

Начнем с рассмотрения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (встречающегося в задаче кручения призматических стержней):

$$-\Delta u = f, \quad x \in \Omega, \quad (2.244)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g. \quad (2.245)$$

Фундаментальным решением для оператора Лапласа Δ называется решение $v = v(x, y)$ уравнения (2.244) с правой частью в виде дельта-функции, т. е.

$$\Delta_x v(x, y) = \delta(|x - y|) \quad (2.246)$$

(индекс x указывает, по какой переменной производится дифференцирование). Равенство (2.246) по определению означает, что

$$\int_{R^n} \Delta_x v(x, y) u(y) d\Omega_y = u(x) \quad \forall u(x) \in D(R^n), \quad (2.247)$$

где $D(R^n)$ — множество достаточно гладких функций, в дальнейшем предполагаемых непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми до второго порядка включительно*.

Известно, что

$$v(x, y) = v(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi r}, & n = 3, \\ \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{r}, & n = 2, \quad r = |x - y|. \end{cases} \quad (2.248)$$

* Гельфанд Н. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. I. М., Физматгиз, 1958.

Для дальнейших преобразований понадобится следствие из теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS, \quad (2.249)$$

которое называется *второй формулой Грина* и выводится следующим образом.

В формуле Гаусса — Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u d\Omega = \int_S u \cdot v dS$$

полагаем

$$u = (uv, 0, \dots, 0).$$

Тогда

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} v + u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} uv v_1 dS, \quad (2.250)$$

или в другом виде:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} v d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\partial\Omega} uv v_1 dS. \quad (2.251)$$

Формула (2.251) называется *формулой интегрирования по частям* и будет использована ниже.

Подставим в (2.251) вместо u величину $\partial u / \partial x_1$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} v_1 v dS, \quad (2.252)$$

заменим здесь индекс 1 на 2, 3, ..., n и сложим все получившиеся при этом равенства:

$$\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega = - \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS. \quad (2.253)$$

Меняя в (2.253) u и v местами и вычитая из получившегося равенства (2.253), придем ко второй формуле Грина (2.249).

Подставим в эту формулу в качестве v фундаментальное решение $v(x, y) \equiv v(|x - y|)$ (переменной интегрирования будем считать y) и будем предполагать ее регулярной. В результате, используя свойство (2.247), найдем

$$u(x) = \int_{\Omega} v(x, y) \Delta u(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS_y. \quad (2.254)$$

(Разумеется, законность такой подстановки требует специального

обоснования, ибо формула Грина выводится в таких предположениях, которым фундаментальное решение не удовлетворяет.)

Полученная формула (2.254) называется *формулой Стокса*.

Пусть теперь $u = u(y)$ — решение поставленной задачи (2.244) — (2.245), тогда из формулы Стокса будем иметь

$$u(x) = \int_{\Omega} v(x, y) f(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} \left[g \frac{\partial v}{\partial v} - v \frac{\partial u}{\partial v} \right] dS_y. \quad (2.255)$$

Если бы значение нормальной производной $\partial u / \partial v$ решения на границе было известно, то формула (2.255) давала бы решение задачи, однако в данном случае $\partial u / \partial v$ на границе $\partial\Omega$ неизвестно, и в действительности задавать значения u и $\partial u / \partial v$ на границе нельзя, так как подобная задача, вообще говоря, решения не имеет.

Цель дальнейших преобразований состоит в том, чтобы исключить специальным образом производную $\partial u / \partial v$ из-под знака поверхностного интеграла в выражении (2.255).

Для этого вводится в рассмотрение произвольная пока гармоническая (т. е. удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$) функция без особенностей W , которая подставляется вместо v в формулу Грина (2.249):

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial W}{\partial v} - W \frac{\partial u}{\partial v} \right) dS + \int_{\Omega} W \Delta u d\Omega, \quad (\Delta W = 0). \quad (2.256)$$

Сложив (2.254) и (2.256), получим

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial G}{\partial v} - G \frac{\partial u}{\partial v} \right] dS_y, \quad (2.257)$$

где введено обозначение

$$G(x, y) = v(x, y) + W. \quad (2.258)$$

Построим теперь $W = W(x, y)$, чтобы

$$G|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.259)$$

Тогда, если u — решение задачи (2.244), (2.245), то оно в соответствии с (2.257) и условиями (2.258), (2.259) будет определяться следующим образом:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x, y)}{\partial v} dS_y. \quad (2.260)$$

Для определения функции $G = G(x, y)$, которая называется функцией Грина, достаточно решить задачу:

$$\Delta W = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.261)$$

$$W|_{\partial\Omega} = -v(|x - y|)|_{\partial\Omega}. \quad (2.262)$$

Если для данной фиксированной области функция $W(x, y)$ найдена, то после этого решение задачи (2.244), (2.245) при любых заданных функциях f и g будет определяться формулой (2.260).

Для задачи Неймана

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega, \quad (2.263)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega} = h, \quad (2.264)$$

функция Грина конструируется, очевидно, следующим образом:

$$G(x, y) = v(x, y) + W(x, y), \quad (2.265)$$

где $v(x, y)$ — фундаментальное решение для оператора Лапласа; $W(x, y)$ представляет собой решение следующей стандартной для заданной области Ω задачи:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta W = 0; \\ \frac{\partial W}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial v}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega}. \end{array} \right\} \quad (2.266)$$

Если эту задачу можно решить в явном виде, то решение задачи (2.263), (2.264) будет иметь вид

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} [-G(x, y)] h(y) dS_y. \quad (2.267)$$

Аналогичным образом можно дать определение функции Грина для смешанной задачи:

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ в } \Omega; \\ u|_{S_D} = g, \quad \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{S_N} = h, \quad S_D \cup S_N = \partial\Omega. \end{array} \right\} \quad (2.268)$$

Вывод формулы для решения представляется в качестве упражнения.

Обратимся теперь к уравнениям трехмерной задачи теории упругости:

$$(\bar{A} \cdot u)_i \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ijk} e_{kj}(u)) = \rho F_i. \quad (2.269)$$

Оператор в левой части формулы (2.269) (оператор Ламе) будем считать тензором-оператором второго порядка в трехмерном пространстве и обозначать через \bar{A} ; результат воздействия этого оператора на вектор u будем считать сверткой $A \cdot u$. В декартовой системе координат оператор \bar{A} задается матрицей, коэффициенты которой — дифференциальные операторы первого и второго порядка; в действительности \bar{A} проще записать в виде суммы таких матриц. Для получения соответствующих выраже-

ний проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u})_i &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ijkh} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} a_{ijkh} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{1}{2} a_{ijkh} \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ijkh}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) = \\ &\equiv A_{ik}^{(jh)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_h} + D_{ik}^{(jh)} \frac{\partial u_k}{\partial x_h}. \end{aligned} \quad (2.270)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} A_{ik}^{(jh)} &= \frac{-1}{2} (a_{ijkh} + a_{ijhk}); \\ D_{ik}^{(jh)} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ijkh}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{ijhk}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.271)$$

Таким образом, имеется девять матриц $A_{ik}^{(jh)}$ (номер матрицы определяется индексом jh , номер ее элемента — индексом ik) и три матрицы $D_{ik}^{(jh)}$. Тензор $\hat{\mathbf{A}}$ в декартовой системе имеет вид

$$(\hat{\mathbf{A}})_{ik} = \sum_{j=1}^3 \sum_{h=1}^3 A_{ik}^{(jh)} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_h} + \sum_{h=1}^3 D_{ik}^{(jh)} \frac{\partial}{\partial x_h}. \quad (2.272)$$

Свертка $\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u}$ в декартовой системе определяется как умножение матрицы (2.272) на вектор-столбец \mathbf{u} .

Поскольку правая часть уравнений теории упругости — вектор, то при определении фундаментального решения дельта-функцию можно ставить поочередно на место первого, второго или третьего компонента этого вектора, фундаментальные решения при этом будут получаться различными.

Объединим эти три решения в матрицу, каждый столбец которой — фундаментальное решение, отвечающее одной из указанных выше правых частей. Задачу построения этих решений запишем в виде

$$\hat{\mathbf{A}}_x \cdot \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (2.273)$$

где δ — единичная матрица; $\delta(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ — дельта-функция Дирака.

Выражение слева понимается как матричное умножение, а само равенство (2.273) — как матричное равенство.

Функция-матрица $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определяемая уравнением (2.273), называется *фундаментальным решением оператора Ламе*.

Равенство (2.273) означает, что

$$\int_{R^n} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega_y = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (2.274)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — произвольная достаточно гладкая функция (точные определения см. в книге Н. М. Гельфанд, Г. Е. Шилова «Обобщенные функции и действия над ними»).

Для того чтобы построить определение функции Грина, необходимо иметь аналоги второй формулы Грина и формулы Стокса для оператора Ламе.

Аналог второй формулы Грина получается из следующей формулы Гаусса — Остроградского:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u})) v_i d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) v_i v_j dS, \end{aligned} \quad (2.275)$$

которую с учетом определения (2.270) и определений

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \quad (2.276)$$

$$(\hat{\sigma}(\mathbf{u}))_{ij} = a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u}) \quad (2.277)$$

можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} d\Omega = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dS, \quad (2.278)$$

здесь \mathbf{v} — вектор-строка.

Меняя в формуле (2.278) \mathbf{u} и \mathbf{v} местами и вычитая из получившегося при этом равенства равенство (2.254), придем ко второй формуле Грина для оператора Ламе:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{v}] d\Omega = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{u} \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \hat{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] dS. \quad (2.279)$$

Для того чтобы подставлять в (2.279) матрицу фундаментальных решений $\hat{\mathbf{K}}(x, y)$, следует выяснить смысл выражения $\hat{\sigma}(\hat{\mathbf{K}})$. Имеем по определению

$$(\hat{\sigma}(\mathbf{v}))_{ij} = a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \equiv ({}^4 \hat{\epsilon} \cdot \cdot \hat{\epsilon}(\mathbf{v}))_{ij}. \quad (2.280)$$

Следовательно, надо научиться вычислять $\hat{\epsilon}(\hat{\mathbf{K}})$.

По определению

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T), \quad (2.281)$$

где

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{v})_{ij} & \equiv (\text{grad } \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \\ (\nabla \mathbf{v})_{ij}^T & = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (2.282)$$

Следовательно, формально

$$\hat{\epsilon}(\hat{\mathbf{K}}) = \frac{1}{2} (\nabla \hat{\mathbf{K}} + (\nabla \hat{\mathbf{K}})^T). \quad (2.283)$$

Здесь умножение на оператор Гамильтона ∇ понимается как диадное.

В компонентах в декартовой системе

$$\left. \begin{aligned} \nabla \hat{\mathbf{K}} &= \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_p} k_i \otimes k_j \otimes k_p; \\ \nabla \hat{\mathbf{K}}^T &= \frac{\partial K_{ij}}{\partial x_p} k_p \otimes k_j \otimes k_i, \end{aligned} \right\} \quad (2.284)$$

и окончательно

$$(\hat{\epsilon}(\hat{K}))_{ijp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial x_p} + \frac{\partial K_{pj}}{\partial x_i} \right). \quad (2.285)$$

(Этот результат можно было бы получить сразу, фиксируя столбец матрицы \hat{K} (номер j) и вычисляя деформацию поля перемещений, соответствующую этому столбцу.)

Для оператора напряжений имеем

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\hat{K}) &= {}^t\hat{a} \cdot \hat{\epsilon}(\hat{K}); \\ \hat{\sigma}(\hat{K})_{ijq} &= a_{ijkh} (\hat{\epsilon}(\hat{K}))_{kqh}, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2.286)$$

т. е. $\hat{\sigma}(\hat{K})$ — тензор третьего ранга; свертка его слева и справа с двумя векторами будет соответствовать суммированию по индексам i и q .

Подставим теперь во вторую формулу Грина (2.279) фундаментальное решение $\hat{K}(x, y)$; учитывая определение (2.274), найдем, что

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} \hat{K}(x, y) \cdot \hat{A}_y \cdot u(y) d\Omega_y + \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\hat{K} \cdot \hat{\sigma}(u) \cdot v - u \cdot \hat{\sigma}(\hat{K}) \cdot v] dS_y. \end{aligned} \quad (2.287)$$

Это формула Стокса для оператора Ламе.

Заметим, что при получении формулы Стокса учтена симметрия фундаментального решения по переменным x и y .

Дальнейшие рассуждения, приводящие к понятию функции (матрицы) Грина, проводятся так же, как и для оператора Лапласа. Пусть $\hat{W} = \hat{W}(x, y)$ — матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\hat{A}_y \cdot \hat{W}(x, y) = 0.$$

Подставим эту матрицу в (2.279) вместо функции v :

$$0 = \int_{\Omega} \hat{W} \cdot \hat{A}_y \cdot u(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} [\hat{W} \cdot \hat{\sigma}(u) \cdot v - u \cdot \hat{\sigma}(\hat{W}) \cdot v] dS_y. \quad (2.288)$$

Складывая (2.287) и (2.288), найдем

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} \hat{G}(x, y) \cdot \hat{A}_y \cdot u(y) d\Omega_y + \\ &+ \int_{\partial\Omega} [\hat{G} \cdot \hat{\sigma}(u) \cdot v - u \cdot \hat{\sigma}(\hat{G}) \cdot v] dS_y, \end{aligned} \quad (2.289)$$

где введено обозначение

$$\hat{G}(x, y) = \hat{K}(x, y) + \hat{W}(x, y). \quad (2.290)$$

Дальнейшее определение функции $\hat{G}(x, y)$ зависит от рассматриваемой задачи.

I основная задача теории упругости:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} = \rho F; \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}. \end{array} \right\} \quad (2.291)$$

. Построим матрицу $\hat{\mathbf{W}}(x, y)$ как решение трех («стандартных» для фиксированной области Ω) задач:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{W}} = 0; \\ \hat{\mathbf{W}}|_{\partial\Omega} = -\hat{\mathbf{K}}|_{\partial\Omega}. \end{array} \right\} \quad (2.292)$$

Тогда, очевидно, $\hat{\mathbf{G}}|_{\partial\Omega} = 0$, и из формулы (2.289) получаем следующее выражение для решения задачи (2.291):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, y) \cdot \rho F(y) d\Omega_y - \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\mathbf{G}}) \cdot \mathbf{v} dS_y. \quad (2.293)$$

Функция (матрица) $\hat{\mathbf{G}}$ в этом выражении называется *функцией Грина* для задачи (2.291).

II основная задача:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} = \rho F; \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{P}. \end{array} \right\} \quad (2.294)$$

Здесь $\hat{\mathbf{W}}(x, y)$ строится как решение следующих трех задач:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{W}} = 0; \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = -\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega}. \end{array} \right\} \quad (2.295)$$

Если решение этих задач найдено, то при любых ρF и \mathbf{P} решение задачи (2.294) имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, y) \cdot \rho F(y) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, y) \cdot \mathbf{P}(y) dS_y. \quad (2.296)$$

III основная задача:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \rho F; \\ \mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{g}; \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}|_{S_\sigma} = \mathbf{P}. \end{array} \right\} \quad (2.297)$$

Здесь $\hat{\mathbf{W}}(x, y)$ следует определить из решения трех задач:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{W}} = 0; \\ \hat{\mathbf{W}}|_{S_u} = -\hat{\mathbf{K}}|_{S_u}; \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\mathbf{W}}) \cdot \mathbf{v}|_{S_\sigma} = -\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{v}|_{S_\sigma}. \end{array} \right\} \quad (2.298)$$

После решения этих задач решение задачи (2.297) для любых

ρF , \mathbf{g} , \mathbf{P} будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \int_{\Omega} \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \rho F(\mathbf{y}) d\Omega_y - \\ & - \int_{S_u} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{o}}(\hat{\mathbf{G}}) \cdot \mathbf{v} dS_y + \int_{S_\sigma} \hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{P} dS_y. \end{aligned} \quad (2.299)$$

§ 2.11. Построение функции Грина для однородной изотропной среды (тензора Кельвина — Сомилиано)

Построение функции Грина в общем случае представляет собой весьма сложную задачу, которая в настоящее время решена лишь для областей достаточно простой формы и для изотропных и однородных материалов.

В настоящем разделе будет рассмотрен случай, когда область Ω совпадает со всем пространством R^3 . Деформация этой области происходит под действием массовых сил с плотностью ρF , расположенных по ограниченной подобласти пространства R^n , вне этой подобласти — плотность $\rho F = 0$.

Для решения задачи о построении функции Грина, в данном случае совпадающей с фундаментальным решением, применим прием, позволяющий свести задачу к построению фундаментальных решений для оператора Лапласа и, следовательно, использовать выражения (2.248).

Известно, что при не слишком ограничительных предположениях на гладкость вектор-функция $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ может быть представлена в виде суммы

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \operatorname{rot} \Psi; \quad (2.300)$$

слагаемое $\nabla \varphi$ называется потенциальной частью функции \mathbf{u} , $\operatorname{rot} \Psi$ — вихревой; функции φ и Ψ подлежат определению.

Представление, аналогичное (2.300), можно записать и для заданной плотности F :

$$\mathbf{F} = \nabla \Phi + \operatorname{rot} \Psi. \quad (2.301)$$

Используя тождество

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}, \quad (2.302)$$

приведем уравнения равновесия (Ламе)

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho F = 0 \quad (2.303)$$

к виду

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \rho F = 0. \quad (2.304)$$

Заметим, что

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \varphi, \quad (2.305)$$

поскольку $\operatorname{grad} \operatorname{rot} \psi = 0$; кроме того,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi) = \operatorname{rot} (\nabla \operatorname{div} \psi - \Delta \psi) = -\operatorname{rot} \Delta \psi. \quad (2.306)$$

Подставим теперь выражение (2.300) в уравнения равновесия (2.303); учитывая (2.305) и (2.306), найдем

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \Delta \varphi + \rho \Phi] + \operatorname{rot} [\mu \Delta \psi + \rho \Psi] = 0 \quad (2.307)$$

Это уравнение будет удовлетворено, если положить

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= -\frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \Phi, \\ \Delta \psi &= -\frac{\rho}{\mu} \Psi. \end{aligned} \quad (2.308)$$

Решение (2.308) уравнения (2.307) будет единственным, если потребовать (что всюду ниже будем делать), чтобы все разыскиваемые функции стремились к нулю на бесконечности. В самом деле, если к функциям φ и ψ прибавить функции φ_1 и ψ_1 такие, что

$$\nabla (\Delta \varphi_1) = 0, \quad \operatorname{rot} (\Delta \psi_1) = 0, \quad (2.309)$$

то уравнение (2.307) будет удовлетворено.

Обозначим

$$\Delta \varphi_1 = \Phi_1, \quad \Delta \psi_1 = \Psi_1 \quad (2.310)$$

и воспользуемся тем, что уравнение Пуассона

$$\Delta v = f$$

имеет единственное исчезающее на бесконечности решение, определяемое по формуле

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \frac{f(\mathbf{y})}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\Omega_y, \quad (2.311)$$

вытекающей из формулы Стокса (2.254) (если предположить, что функция v регулярна на бесконечности *).

Из уравнений (2.310) следует, что функции φ_1 и Φ_1 , ψ_1 и Ψ_1 связаны формулами

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \frac{\Phi_1(y)}{r(x, y)} d\Omega_y, \quad \Psi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \frac{\Psi_1(y)}{r(x, y)} d\Omega_y. \quad (2.312)$$

Подсчитывая теперь значения $\nabla \varphi_1$ и $\operatorname{rot} \psi_1$ и пользуясь при этом условиями (2.309), находим, что величины $\nabla \varphi_1$ и $\operatorname{rot} \psi_1$ равны нулю, и, следовательно, с самого начала можно положить $\varphi_1 = 0$, $\psi_1 = 0$, поскольку в соответствии с формулой (2.300) такой выбор не влияет на поле перемещений.

Воспользовавшись еще раз следствием (2.311) из формулы

*). Определения см. в книге А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Уравнения математической физики», гл. IV; там же см. условия регулярности на бесконечности.

Стокса, из уравнений (2.308) находим, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{\rho}{4\pi(\lambda+2\mu)} \int_{R^n} \frac{\Phi(y) d\Omega_y}{r(x, y)}; \\ \Psi(\mathbf{x}) &= \frac{\rho}{4\pi\mu} \int_{R^n} \frac{\Psi(y) d\Omega_y}{r(x, y)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.313)$$

Задача теперь состоит в том, чтобы выразить функции Φ и Ψ через заданную плотность \mathbf{F} (после этого можно будет подставить вместо \mathbf{F} соответствующие дельта-функции, что будет с механической точки зрения соответствовать приложению сосредоточенных сил). Для решения этой задачи вернемся к формуле (2.301), применив к левой и правой частям которой оператор-дивергенцию, найдем, что

$$\Delta\Phi = \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (2.314)$$

Применяя теперь к формуле (2.307) оператор Лапласа Δ , получим, что

$$\Delta\mathbf{F} = \operatorname{grad} \Delta\Phi - \operatorname{rot} \Delta\Psi = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{rot} \Delta\Psi. \quad (2.315)$$

Имеет место тождество

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta\mathbf{F}, \quad (2.316)$$

подставляя которое в выражение (2.315), найдем

$$\operatorname{rot} (\Delta\Psi - \operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0. \quad (2.317)$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$\Delta\Psi = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} \chi, \quad (2.318)$$

где χ — произвольная достаточно гладкая функция, которую можно положить равной нулю, так как выбор χ не оказывает влияния на поле перемещений (что устанавливается так же, как это было сделано выше в отношении функций φ_1 и Ψ_1).

Из уравнения (2.318) имеем

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \operatorname{div} \mathbf{F}(y) \frac{1}{r(x, y)} d\Omega_y. \quad (2.319)$$

Для упрощения предположим, что \mathbf{F} (а, стало быть, и $\operatorname{div} \mathbf{F}$) равна нулю вне некоторой ограниченной области Ω из R^n (например, шара достаточно большого радиуса R); преобразуем выражение (2.319) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left[\mathbf{F}(y) \frac{1}{r(x, y)} \right] d\Omega_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{F}(y) \operatorname{grad} \frac{1}{r(x, y)} d\Omega_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(y) \cdot \mathbf{n} \frac{1}{r(x, y)} d\Omega_y - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{F}(y) \operatorname{grad} \frac{1}{r(x, y)} d\Omega_y = \\ &= - \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \mathbf{F}(y) \operatorname{grad} \frac{1}{r(x, y)} d\Omega_y. \end{aligned} \quad (2.320)$$

[Заметим, что градиент в последнем из выражений (2.320) можно считать по переменной \mathbf{x} , что ниже и будем делать.]

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\Psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{y}) \frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} d\Omega_y. \quad (2.321)$$

Принимая прежние предположения относительно поведения \mathbf{F} на бесконечности, из формулы Гаусса — Остроградского получаем

$$\int_{R^n} \frac{\partial F_i(y)}{\partial y_j} f(y) d\Omega_y = - \int_{R^n} F_i(y) \frac{\partial f(y)}{\partial y_j} d\Omega_y. \quad (2.322)$$

Воспользовавшись формулой (2.322), из (2.231) окончательно находим

$$\Psi(\mathbf{x}) = - \frac{1}{4\pi} \int_{R^n} \mathbf{F}(\mathbf{y}) \times \operatorname{grad} \left[\frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right] d\Omega_y. \quad (2.323)$$

Оператор-градиент вычисляется по переменной \mathbf{x} .

Для упрощения вычислений предположим временно, что со средоточенная сила приложена в начале координат в направлении оси Ox_3 , т. е.

$$\mathbf{F} = (0, 0, \delta(|\mathbf{y}|)/\rho). \quad (2.324)$$

Подставляя выражение (2.324) в (2.320) и (2.323) и воспользовавшись определением дельта-функции, найдем

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= - \frac{1}{4\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{1}{r(\mathbf{x}, 0)} \right]; \\ \Psi_i(\mathbf{x}) &= - \frac{1}{4\pi\rho} E_{i3k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{r(\mathbf{x}, 0)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (2.325)$$

или в развернутом виде

$$\Psi_1(\mathbf{x}) = - \frac{x_2}{4\pi r^3(\mathbf{x}, 0)}, \quad \Psi_2(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{4\pi r^3(\mathbf{x}, 0)}, \quad \Psi_3 = 0. \quad (2.326)$$

Подставляя выражения (2.325) и (2.326) в (2.313) и производя вычисления, получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{8\pi(\lambda+2\mu)} \frac{x_3}{r(\mathbf{x}, 0)}; \\ \psi_1 &= - \frac{1}{8\pi\mu} \frac{x_2}{r(\mathbf{x}, 0)}, \quad \psi_2 = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{x_1}{r(\mathbf{x}, 0)}, \quad \psi_3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.327)$$

Обозначая

$$A = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad B = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

и подставляя выражения (2.327) в (2.300), получим

$$u_i^{(3)} = A \left[B \frac{\delta_{i3}}{r(\mathbf{x}, 0)} - \frac{\partial^2 r(\mathbf{x}, 0)}{\partial x_i \partial x_3} \right]. \quad (2.328)$$

Верхний индекс «3» указывает на то, что часть (2.328) фундаментального решения соответствует сосредоточенной силе, параллельной оси Ox_3 ; заменив этот индекс свободным индексом « j », получим решение для сосредоточенной силы, приложенной в направлении оси номер j :

$$u_i^{(j)} = A \left[B \frac{\delta_{ij}}{r(x, 0)} - \frac{\partial^2 r(x, 0)}{\partial x_i \partial x_j} \right]. \quad (2.329)$$

Заменив здесь величину $r(x, 0)$ на $r(x, y)$, получим компоненты фундаментального решения (тензора Грина для бесконечной однородной изотропной среды) в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} (\hat{G}(x, y))_{ij} &= A \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{ij}}{r(x, y)} + \frac{x_i x_j}{r^3(x, y)} \right] \equiv \\ &\equiv A \left[\frac{B}{r(x, y)} \delta_{ij} - \frac{\partial^2 r(x, y)}{\partial x_i \partial x_j} \right]. \end{aligned} \quad (2.330)$$

Этот тензор называется также тензором Кельвина – Сомилиано. Механический смысл его компонентов (2.330) состоит в том, что $(\hat{G}(x, y))_{ij}$ определяет компонент номер i вектора смещения в точке x от сосредоточенной силы, приложенной в точке y в направлении координатной оси номер j .

§ 2.12. Приведение основных задач теории упругости к интегральным уравнениям

Рассмотрим снова формулу Стокса (для оператора Ламе) (2.287), предполагая, что \mathbf{u} – регулярное на бесконечности решение уравнений Ламе, плотность массовых сил равна нулю вне некоторой определенной ограниченной области; тогда, очевидно,

$$\mathbf{u}(x) = \int_{R^n} \hat{K}(x, y) \cdot \rho F(y) d\Omega_y. \quad (2.331)$$

Пусть требуется решить задачу:

$$\hat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega \Subset R^n, \quad (2.332)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}. \quad (2.333)$$

Идея метода состоит в том, чтобы, выбрав вспомогательную поверхность S_1 , не совпадающую с поверхностью $\partial\Omega$, распределить на ней массовые силы таким образом, чтобы решение задачи теории упругости для бесконечной среды с воздействиями, распределенными по поверхности S_1 , удовлетворяло условию (2.333). Это решение в области Ω_1 и будет решением поставленной задачи (2.332) – (2.333).

Зафиксируем поверхность S_1 и обозначим через $X(y)$ – плотность усилий, которые необходимо распределить по S_1 и найти из условия:

$$\mathbf{g}(x) = \int_{S_1} \hat{K}(x, y) \cdot X(y) dS_y, \quad x \Subset \partial\Omega. \quad (2.334)$$

Условие (2.334) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма I рода для функции $X(y)$.

Отметим, что при его решении возникают следующие основные трудности.

1. Задача решения уравнения Фредгольма I рода — это некорректно поставленная задача математической физики, и для ее решения следует применять специальные методы *).

2. Если поверхность S_1 расположена далеко от $\partial\Omega_1$, то при использовании приближенных методов решения уравнения (2.334), основанных на переходе к линейной алгебраической системе, матрица последней будет плохо обусловленной.

3. Если поверхность S_1 (или часть ее) совпадает с поверхностью $\partial\Omega_1$, то уравнение (2.334) становится сингулярным — ядро его будет иметь неинтегрируемую особенность [интеграл в (2.334) в этом случае следует понимать в смысле главного значения по Коши].

Используя формулу (2.331) и вытекающее из нее выражение для напряжений

$$\hat{\sigma}(u) = \int_{R^n} \hat{\sigma}(\hat{K}(x, y)) \cdot \rho F(y) d\Omega_y, \quad (2.335)$$

нетрудно получить интегральное уравнение Фредгольма I рода, отвечающее II основной задаче теории упругости:

$$P(x) = \int_{S_1} v(x) \cdot \hat{\sigma}(\hat{K}(x, y)) \cdot X dS_y. \quad (2.336)$$

Здесь $P = P(x)$ — заданная на границе $\partial\Omega$ области Ω плотность поверхностных усилий; относительно решения этого уравнения остаются в силе замечания, сделанные выше относительно уравнения (2.334).

Другой тип интегральных уравнений, решение которых эквивалентно решению основных задач теории упругости, получается на основании теории потенциала. Напомним кратко основные идеи.

Пусть масса (заряд) распределена непрерывным образом на области Ω в R^3 , тогда потенциал [т. е. функция, градиент которой равен силе, действующей на единичную массу (заряд) в точке x] равен:

$$u(x) = \int_{\Omega} \frac{\rho(y)}{r(x, y)} d\Omega_y. \quad (2.337)$$

Здесь $\rho(y)$ — плотность массы (заряда) в точке y .

Если масса (заряд) распределена по бесконечному цилиндру (равномерно вдоль оси цилиндра), прямое сечение которого совпа-

* Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1974.

дает с областью Ω в R^2 , то потенциал такого тела будет

$$u(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} \mu^{(n)}(y) \ln \frac{1}{r(x, y)} d\Omega_y. \quad (2.338)$$

Объемный потенциал (2.337) — (2.338) — дважды дифференцируемая по параметру \mathbf{x} функция и, кроме того,

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \begin{cases} -4\pi\rho, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases} \quad (2.339)$$

Пусть теперь масса (заряд) непрерывным образом распределена по поверхности S в R^3 с плотностью $\mu(y)$, тогда потенциалом простого слоя будет называться интеграл

$$V(\mathbf{x}) = \iint_S \frac{\mu(y)}{r(x, y)} dS_y. \quad (2.340)$$

Пусть в точке \mathbf{x} на некоторой прямой помещен сосредоточенный заряд $+m$, на расстоянии Δl от него — заряд $-m$; эта совокупность зарядов называется диполем с моментом $N = \Delta l m$. Устремляя Δl к нулю в предположении, что N остается постоянным, так же как и направление Δl в пространстве, найдем, что в пределе потенциал диполя равен:

$$W_D = N \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2.341)$$

где r — радиус-вектор точки, к которой устремляются точки расположения зарядов $+m$ и $-m$.

Рассмотрев пару параллельных поверхностей с расположенным на этих поверхностях зарядами таким образом, что заряд элемента одной поверхности равен по абсолютной величине и противоположен по знаку заряду элемента другой поверхности (оба элемента вырезаются общими нормалями к обеим поверхностям), и устремляя расстояние между поверхностями к нулю при сохранении момента диполя, можем считать, что на предельной поверхности S_1 непрерывно распределены диполи с плотностью $\mu^{(n)}(y)$. Общий потенциал всех диполей равен:

$$W(\mathbf{x}) = - \iint_S \mu^{(n)}(y) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{r(x, y)} \right) dS_y. \quad (2.342)$$

Потенциал (2.342) называется *потенциалом двойного слоя*; при переходе от поверхностей в пространстве R^3 к кривым в пространстве R^2 величину $1/r(x, y)$ в (2.342) следует заменить на $\ln(1/r(x, y))$ [это замечание относится и к потенциальному (2.340)].

Имеют место теоремы (для краткости формулировки приводим только для пространства R^3):

1) потенциал простого слоя непрерывен при переходе через поверхность S ;

2) потенциал двойного слоя разрывен при переходе через S ; величина разрыва определяется из формул:

$$\begin{aligned} W_{\text{внутр}}(\mathbf{x}_0) &= W(x_0) + 2\pi\mu^{(d)}(x_0), \\ W_{\text{внешн}}(\mathbf{x}_0) &= W(x_0) - 2\pi\mu^{(d)}(x_0), \quad x_0 \in S. \end{aligned} \quad (2.343)$$

Индекс «внутр» и «внешн» означает, что переход на поверхность S осуществляется при движении изнутри области Ω — вдоль вектора внешней нормали \mathbf{v} , или же извне — противоположно направлению вектора \mathbf{v} ;

3) производная по направлению нормали \mathbf{v} от потенциала простого слоя разрывна, причем

$$\begin{aligned} \lim_{\text{изнутри}} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right] &= \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right]_S + 2\pi\mu^{(n)}(\mathbf{x}_0), \\ \lim_{\text{извне}} \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right] &= \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} \right]_S - 2\pi\mu^{(n)}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0 \in S; \end{aligned} \quad (2.344)$$

4) вне поверхности S потенциал простого и двойного слоя удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta U = 0$.

Идея использования потенциалов для решения основных задач для уравнения Пуассона навеяна формулой Стокса, в соответствии с которой решение

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Omega_y + \int_{\partial\Omega} \left[g \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} - v \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \right] dS_y \quad (2.345)$$

представляет собой комбинацию потенциалов объемного и потенциалов простого и двойного слоев [если учесть выражение (2.248) и выбрать подходящим образом системы единиц измерения].

Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta U = 0, \quad (2.346)$$

$$U|_{\partial\Omega} = g \quad (2.347)$$

отыскивается в виде потенциала двойного слоя:

$$U(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \mu^{(d)}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \left[\frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right] dS_y, \quad (2.348)$$

где $\mu^{(d)}$ — неизвестная пока плотность. Выбор решения в форме (2.348) позволяет удовлетворить уравнению (2.346); для удовлетворения условию (2.347) перейдем в формуле (2.348) к пределу при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega$. Воспользовавшись формулой (2.343), получим следующее уравнение для плотности

$$\int_{\partial\Omega} \mu^{(d)}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_y} \left[\frac{1}{r(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right] dS_y + 2\pi\mu^{(n)}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.349)$$

представляющее собой интегральное уравнение Фредгольма II рода.

Аналогичным образом устанавливаем, что если искать решение задачи Неймана

$$\Delta U = 0, \quad (2.350)$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} \Big|_{\partial\Omega} = h \quad (2.351)$$

в виде потенциала простого слоя

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} \mu^{(n)}(y) \frac{1}{r(x, y)} dS_y, \quad (2.352)$$

то из (2.344) и (2.351) получается следующее интегральное уравнение Фредгольма II рода для плотности $\mu^{(n)}(y)$:

$$\int_{\partial\Omega} \mu^{(n)}(y) \frac{\partial}{\partial v_x} \left[\frac{1}{r(x, y)} \right] dS_y - 2\pi \mu^{(n)}(x) = h(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.353)$$

Сравнивая формулу Стокса (2.287) для оператора Ламе с (2.345), видим, что для задач теории упругости роль объемного потенциала играет интеграл

$$\int_{\Omega} \hat{K}(x, y) \cdot f(y) d\Omega, \quad (2.354)$$

роль потенциала простого слоя — интеграл

$$\int_{\partial\Omega} \hat{K}(x, y) \cdot \mu^{(n)}(y) dS, \quad (2.355)$$

роль потенциала двойного слоя — интеграл

$$\int_{\partial\Omega} \mu^{(n)}(y) \cdot \hat{\sigma}(\hat{K}(x, y)) \cdot v dS. \quad (2.356)$$

Точные формулировки и доказательства аналогов указанных выше теорем относительно свойств потенциалов (2.354) — (2.356) имеются в монографиях *). Воспользовавшись этими свойствами, отметим, что I основная задача теории упругости

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u)) = 0; \\ & u|_{\partial\Omega} = g \end{aligned} \right\} \quad (2.357)$$

приводится к интегральному уравнению Фредгольма II рода вида

$$\int_{\partial\Omega} \mu^{(n)}(y) \cdot \hat{\sigma}(\hat{K}(x, y)) \cdot v(y) dS_y + \mu^{(n)}(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (2.358)$$

[множитель 2π исчезает по той причине, что в формуле (2.358) ядро строится на основании фундаментального решения].

*) Купрадзе В. Д., Гегелия Г. Г., Башелашвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической упругости и термоупругости. М., Наука, 1976; Парсон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М., Наука, 1977.

Аналогичным образом устанавливается, что II основная краевая задача теории упругости

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u})) &= 0, \\ \hat{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \mathbf{v}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{P} \end{aligned} \right\} \quad (2.359)$$

приводится к следующему интегральному уравнению Фредгольма II рода:

$$\int_{\partial\Omega} \mu^{(n)}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\sigma}(\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dS - \mu^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (2.360)$$

Отметим в заключение, что в случае, когда массовые силы отличны от нуля, для построения уравнений (2.358) и (2.360) необходимо предварительно массовые силы исключить с помощью частного решения неоднородных уравнений Ламе; это решение можно выбрать в виде объемного потенциала (2.354).

§ 2.13. Постановка динамических задач

Динамические задачи теории упругости (т. е. задачи, в которых нельзя пренебречь влиянием сил инерции) можно разделить на два типа — задачи о распространении волн и задачи об установившихся колебаниях; различие между этими двумя группами задач определяется как математическими свойствами соответствующих уравнений, так и методами их решения.

В качестве наиболее общего примера задачи о распространении волн приведем трехмерную задачу теории упругости:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u})) + \rho F_i(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (2.361)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_u; \\ \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}(\mathbf{x}, t)) v_j &= P_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (2.362)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{u}(\mathbf{x}, 0) &= \boldsymbol{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} &= \boldsymbol{u}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.363)$$

Условия (2.363) называются начальными и определяют распределение скоростей и перемещений частиц в теле Ω в начальный момент времени $t = 0$.

В изотропном случае вместо системы (2.361) имеем систему

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu \Delta \boldsymbol{u} + \rho \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}. \quad (2.364)$$

Если среда бесконечна (заполняет все пространство R^3) и однородна, то из (2.364) можно получить некоторые интересные для практики следствия. Применим к левой и правой частям уравнения (2.364) оператор дивергенции:

$$(\lambda + \mu) \Delta \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu \operatorname{div} \Delta \boldsymbol{u} + \rho \operatorname{div} \mathbf{F} = \rho \operatorname{div} \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}. \quad (2.365)$$

Обозначим через $\theta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ и воспользуемся перестановочностью дифференциальных операторов, входящих в уравнение (2.365):

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \theta + \rho \operatorname{div} \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \quad (2.366)$$

вводя обозначение

$$a^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \quad (2.367)$$

перепишем уравнение (2.366) в виде

$$\Delta \theta + \frac{1}{a^2} \operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \quad (2.368)$$

Полученное уравнение (2.368) — неоднородное волновое уравнение, определяющее распространение возмущений, сопровождающихся изменением объема; скорость распространения таких возмущений определяется выражением (2.367). Более детальный анализ, который здесь не проводится, показывает, что при распространении возмущений, описываемых уравнением (2.365), смещения частиц направлены перпендикулярно фронту волны, поэтому такие волны называются *продольными*.

Применим к уравнению (2.364) оператор-ротор; после несложных преобразований находим

$$\Delta \omega + \frac{1}{b^2} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad (2.369)$$

где

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (2.370)$$

Таким образом, возмущения, связанные с вращением частиц тела, описываемым полем вектора вращения $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$, распространяются со скоростью $b^2 = \mu/\rho$; можно показать, что при распространении таких возмущений перемещения частиц направлены по касательной к фронту волны, поэтому такие волны называются *поперечными*.

Можно также доказать, что других волн, отличных от продольных и поперечных, в безграничной однородной изотропной среде не возникает; однако в случае, когда тело имеет границы, возможно возникновение волновых движений, отличных от тех, которые описываются уравнениями (2.368), (2.370), и обладающих весьма интересными физическими свойствами.

Не вдаваясь в подробности, приведем два примера таких движений.

1. Пусть среда полубесконечна, граница ее — плоскость $x_2 = 0$; оси x_1 и x_3 декартовой системы направим по границе полупространства. Рассмотрим для простоты случай плоской задачи, когда искомые функции не зависят от координаты x_3 , и будем разыскивать их в форме:

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad u_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad u_3 = 0. \quad (2.371)$$

Подставляя (2.371) в уравнения движения (2.364) и исключая поочередно φ и ψ , придем к уравнениям

$$\Delta\varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.372)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, скорости a и b определяются формулами (2.367) и (2.370).

Решения уравнений (2.372) разыскиваются в форме

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = \Phi(x_2) e^{iv(t - x_1/p)}, \\ \psi = \Psi(x_2) e^{iv(t - x_1/p)}, \end{array} \right\} \quad (2.373)$$

причем требуется, чтобы $\Phi(x_2) \rightarrow 0$, $\Psi(x_2) \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow +\infty$, параметр p определяет скорость распространения возмущений и подлежит определению.

Форма (2.373) решения подсказана известным экспериментальным фактом существования волновых движений, распространяющихся только по поверхности тела и быстро затухающих с глубиной.

Подстановка выражений (2.373) в (2.372) приводит к следующим решениям для φ и ψ :

$$\left. \begin{array}{l} \varphi = A e^{iv(t - x_1/p) - yv \sqrt{p^{-2} - a^{-2}}}, \\ \psi = B e^{iv(t - x_1/p) - yv \sqrt{p^{-2} - a^{-2}}}. \end{array} \right\} \quad (2.374)$$

Для определения констант A и B получается однородная система уравнений

$$\left. \begin{array}{l} (2p^{-2} - b^{-2}) A - i \frac{2}{p} \sqrt{p^{-2} - b^{-2}} B = 0; \\ i \frac{2}{p} \sqrt{p^{-2} - a^{-2}} A + (2p^{-2} - b^{-2}) B = 0, \end{array} \right\} \quad (2.375)$$

вытекающая из краевых условий на границе $x=0$ полупространства $x_2 \geq 0$:

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (2.376)$$

Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы (2.375) был равен нулю, т. е.

$$(2p^{-2} - b^{-2})^2 - 4p^{-2} \sqrt{p^{-2} - b^{-2}} \sqrt{p^{-2} - a^{-2}} = 0. \quad (2.377)$$

Доказано (доказательство приводить не будем), что существует единственный положительный действительный корень p этого уравнения, который соответствует распространению поверхностных волн, называемых волнами Рэлея.

2. Рассматривая распространение упругих волн в бесконечном слое с плоскими границами

$$-h \leq x_2 \leq +h, \quad -\infty \leq x_1 \leq +\infty, \quad -\infty \leq x_3 \leq +\infty,$$

можно обнаружить, что существует возможность распространения возмущений, скорость которых зависит от частоты распространяющейся волны. Это интересное физическое явление обнаруживается в экспериментах, и впервые было теоретически объяснено в работах Рэлея и Лэмба; оно называется дисперсией. Отметим, что наличие внешних границ — лишь одна из возможных причин дисперсии, существуют многие другие причины дисперсии волн, исследование которых имеет важные технические приложения.

Весьма сложные волновые движения могут возникать в анизотропных упругих средах, таких, например, как кристаллы, широко применяемые в технике. Рассмотрим для примера простейший случай плоской монохроматической волны в анизотроп-

ной, но однородной упругой среде; поле перемещений в такой волне имеет вид

$$u(x, t) = u_0(x) e^{i(k \cdot x - \omega t)}. \quad (2.378)$$

Здесь u_0 — постоянный вектор, называемый *векторной амплитудой волны*; величина

$$\varphi = k \cdot x - \omega t \quad (2.379)$$

называется *фазой волны*; параметр ω связан с числом колебаний v вектора смещения за 1 с формулой $\omega = 2\pi v$ и называется *круговой частотой*.

Напишем условие постоянства фазы φ :

$$k \cdot x - \omega t = c = \text{const}. \quad (2.380)$$

Введем направляющий вектор n направления k :

$$k = kn, \quad |k| = k, \quad |n| = 1, \quad (2.381)$$

тогда уравнение (2.380) можно привести к виду

$$n \cdot x = (c + \omega t)/k = \xi. \quad (2.382)$$

Таким образом, уравнение поверхности равных фаз представляет собой уравнение плоскости (что и объясняет название — *плоская волна*). Эта плоскость с течением времени перемещается параллельно самой себе, ее удаление от начала координат равно ξ , скорость движения определяется по формуле

$$v = d\xi/dt = \omega/k \quad (2.383)$$

и называется *фазовой скоростью волны*.

Вектор

$$v = vn = \frac{\omega}{k} n \quad (2.384)$$

называется *вектором фазовой скорости*; этот вектор, как и вектор n , очевидно, перпендикулярен поверхности равных фаз.

Вектор k называется *волновым*, его длина равна

$$k = \omega/v. \quad (2.385)$$

Длина волны λ определяется по формуле

$$\lambda = v/\nu = 2\pi v/\omega \quad (2.386)$$

Подставляя выражение (2.378) в уравнение движения (2.361), после сокращения на $e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ найдем (массовые силы считаем равными нулю и учитываем, что, по предположению, среда однородна, т. е. модули a_{ijkh} от x не зависят):

$$a_{ijkh} n_j n_k u_{0h} - v^2 \rho u_{0i} = 0. \quad (2.387)$$

Введем обозначение

$$\lambda_{ijkh} = \frac{1}{\rho} a_{ijkh}. \quad (2.388)$$

Тогда уравнение (2.387) можно привести к виду

$$(\lambda_{ijkh} n_j n_k - v^2 \delta_{hi}) u_{0h} = 0, \quad (2.389)$$

где δ_{hi} — символ Кронекера.

Нетрудно видеть, что совокупность величин

$$\Lambda_{ih} = \lambda_{ijkh} n_j n_k \quad (2.390)$$

представляет собой совокупность координат некоторого тензора второго ранга, обладающего свойством симметрии и положительной определенности. С учетом обозначения (2.390) уравнение (2.389) принимает форму

$$(\Lambda_{ih} - v^2 \delta_{ih}) u_{0h} = 0. \quad (2.391)$$

Для существования нетривиального решения нужно, чтобы определитель системы (2.391) был равен нулю, т. е.

$$\det \|\Lambda_{ih} - v^2 \delta_{ih}\| = 0. \quad (2.392)$$

Уравнение (2.392) называется *уравнением Кристоффеля*; оно является основным в теории распространения волн в кристаллах. Из этого уравнения для каждого направления n получаются три скорости распространения плоских волн; в изотропном случае для любого направления n получаются две скорости [два из трех корней уравнения (2.392) совпадают].

Обратимся теперь ко второму из указанных выше типов динамических задач — задачам об установившихся колебаниях. Здесь предполагается, что внешние воздействия или отсутствуют, или представляют собой периодические функции времени, т. е.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \omega t, \quad (2.393)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{P}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \omega t, \quad (2.394)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \omega t, \quad (2.395)$$

где ω — заданная величина — круговая частота внешних воздействий.

Естественно предположить, что компоненты вектора перемещений \mathbf{u} , а следовательно, напряжений и деформаций будут зависеть от времени таким же образом, как и функции (2.393) — (2.395):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \omega t; \\ \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \omega t + \mathbf{e}_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \omega t; \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}) \cos \omega t + \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}) \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (2.396)$$

заметим, что

$$\mathbf{e}_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x})), \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.397)$$

Подставляя выражения (2.396) в уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

найдем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(\alpha)}}{\partial x_j} + \rho F_i^{(\alpha)} = -\rho \omega^2 u_i^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.398)$$

Из закона Гука

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kh} (u)$$

следует, что

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = a_{ijkl} \varepsilon_{kh}^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.399)$$

И наконец, из краевых условий следует, что

$$\left. \begin{aligned} u^{(\alpha)}(x) &= g^{(\alpha)}(x), \quad x \in S_u, \alpha = 1, 2; \\ \sigma_{ij}^{(\alpha)}(x) v_j &= P_i^{(\alpha)}, \quad x \in S_\sigma, \alpha = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (2.400)$$

Начальные условия в данной задаче не ставятся.

Таким образом, для определения амплитуд получилась задача специального вида, не совпадающая ни с одной из рассмотренных ранее задач.

Отметим, что задачи, соответствующие индексам $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, по форме совпадают, следовательно, окончательная постановка задачи об установившихся (стационарных) колебаниях упругого тела в перемещениях такова:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl} \varepsilon_{kh} (u(x)) + \rho F_i(x) + \rho \omega^2 u_i(x) &= 0; \\ u|_{S_u} &= g(x); \\ \sigma_{ij} v_j|_{S_\sigma} &= P_i(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.401)$$

В действительности в (2.401) содержатся две связанные друг с другом задачи. Первая задача состоит в отыскании тех значений параметра ω , для которых существуют нетривиальные решения задачи (2.401) в случае, когда $\rho F = 0$, $g = 0$, $P = 0$. Эти значения параметра ω называются *собственными частотами колебаний тела Ω* ; соответствующие собственным частотам решения, определяемые с точностью до числового множителя, называются *собственными формами колебаний*.

Вторая задача состоит в отыскании решения краевой задачи (2.401) при фиксированном значении ω , не совпадающем ни с одной из собственных частот.

§ 2.14. Вариационные методы исследования основных краевых задач

В этом разделе краевые задачи будут преобразованы в удобные для построения решений на ЭВМ, а также для доказательства теорем о существовании и единственности решения.

Идея рассматриваемых преобразований, по существу, представляет собой формализацию принципа возможных перемещений.

Одномерные задачи. Для того чтобы разобраться в основных положениях, рассмотрим подробно простейшую модельную задачу о растяжении стержня переменного поперечного сечения массовыми силами, параллельными оси стержня. Такая задача ранее не рассматривалась, но основное уравнение для нее получается тривиальным путем из условия равновесия произвольного участка стержня.

Стержнем будем называть тело, ограниченное, например, поверхностью вращения и двумя плоскими поверхностями, перпендикулярными оси вращения.

Будем рассматривать только смещения точек стержня в направлении оси x , предполагая, что эти смещения зависят только от координаты x ; в качестве внешних воздействий рассмотрим объемные силы с плотностью $\rho F = \rho F(x)$, рассчитываемые на единицу площади поперечного сечения. Площадь поперечного сечения обозначим через $S = S(x)$.

Деформация рассматриваемого тела будет определяться величиной

$$\varepsilon = du/dx, \quad (2.402)$$

имеющей смысл относительного удлинения бесконечно малого отрезка длины dx , напряженное состояние — плотностью поверхностных усилий $\sigma(x)$ в любом сечении $x = \text{const}$, направленных параллельно оси вращения и рассчитываемых на единицу площади сечения.

Связь между σ и ε определяется одномерным законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.403)$$

Составляя уравнение равновесия произвольного участка стержня между сечениями $x_1 = \text{const}$ и $x_2 = \text{const}$, $x_2 > x_1$, получим следующее дифференциальное уравнение равновесия:

$$-\frac{d}{dx} \left[ES(x) \frac{du}{dx} \right] = \rho F(x) S(x) \equiv f(x). \quad (2.404)$$

Рассмотрим сначала случай, когда края стержня неподвижны, т. е.

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \quad (2.405)$$

Задача (2.404) — (2.405) представляет собой простейшую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Разумеется, для исследования вопроса о существовании и единственности решения этой задачи можно было бы воспользоваться надлежащими теоремами из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, однако здесь будет использована теория, изложенная в приложении II, с тем чтобы потом построить естественные обобщения на случай более сложных задач для уравнений с частными производными.

Для применения теории (приложение II) необходимо прежде всего указать пространство функций, в котором соответствующим образом построенный оператор обладал бы нужными свойствами.

Если в качестве пространства V , о котором идет речь, выбрать пространство $L^2(\Omega)$, то теорию применить нельзя, так как не у всех функций из $L^2(\Omega)$ существуют производные второго порядка и, следовательно, оператор в левой части уравнения (2.404) смысла не имеет; с другой стороны, если в качестве V взять подмножество функций, обладающих вторыми производными, то такое подмножество не будет полным пространством по отношению к нормам, естественным образом связанным с оператором уравнения (2.404).

Поэтому попытаемся прежде всего построить такое «расширение» оператора в уравнении (2.404), для которого соответствующее множество функций было бы гильбертовым пространством. Для этого возьмем функцию $v = v(x)$, обладающую первыми производными и удовлетворяющую условиям (2.405); умножим левую и правую части уравнения (2.404) на эту функцию и результат проинтегрируем по отрезку $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left[ES(x) \frac{du}{dx} \right] v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx. \quad (2.406)$$

Интеграл в левой части уравнения (2.406) возьмем по частям, пользуясь при этом свойствами функции $v(x)$ и считая, что $u(x)$ — решение задачи (2.404) — (2.405); в итоге получим

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad (2.407)$$

где введены обозначения:

$$a(u, v) = \int_0^l ES(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx, \quad (2.408)$$

$$\langle f, v \rangle = \int_0^l f(x) v(x) dx. \quad (2.409)$$

Будем считать теперь, что $u(x), v(x)$ в формуле (2.408) — (2.409) — элементы пространства V

$$\begin{aligned} V &= \{v(x) \mid x \in (0, l); v(0) = v(l) = 0, \\ &\quad v \in H^1(0, l)\} \equiv H_0^1(0, l) \end{aligned} \quad (2.410)$$

[по поводу определения пространства $H^1(0, l)$ см. приложение II].

Для наших целей достаточно предполагать, что $f(x) \in L^2(0, l)$; в этом случае линейная форма $\langle f, v \rangle$, очевидно, непрерывна на V .

Форма $a(u, v)$, задаваемая по формуле (2.408), — билинейная, симметричная и непрерывная на V , если только функция $S(x)$ — достаточно гладкая [например, $S(x) \in L^\infty(0, l)$]; кроме того, эта форма положительно определена. В самом деле, из физических соображений вытекает, что

$$ES(x) \geq c_0 = \text{const} > 0. \quad (2.411)$$

Имеет место неравенство

$$\|v\|_{L^2(0, l)}^2 \leq c_1 \|v'\|_{L^2(0, l)}, \quad \forall v \in V \quad (2.412)$$

(представляющее собой частный случай теоремы вложения С. Л. Соболева); для доказательства неравенства (2.412) заметим, что

$$v(x) = \int_0^x v'(x) dx;$$

отсюда по неравенству Коши — Буняковского находим

$$v^2(x) \leq x \int_0^x (v'(x))^2 dx \leq x \int_0^l (v'(x))^2 dx = x \|v'\|_{L^2(0, l)}^2; \quad (2.413)$$

интегрируя оценку (2.403) в пределах от 0 до l , найдем, что

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{l}{2} \|v'\|_{L^2(0, l)}^2,$$

т. е. неравенство (2.412) имеет место при $c_1 = l/2$.

Используя оценки (2.411), (2.412), получаем, что

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq c_0 \int_0^l (v'(x))^2 dx = \frac{c_0}{2} \left[\int_0^l (v'(x))^2 dx + \int_0^l (v'(x))^2 dx \right] \geq \\ &\geq \frac{c_0}{2} \left[\frac{2}{l} \|v\|_{L^2(0, l)}^2 + \|v'\|_{L^2(0, l)}^2 \right] \geq c \|v\|_V^2, \quad c = \frac{c_0}{2} \min \left\{ \frac{2}{l}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.414)$$

Это означает, что форма $a(u, v)$ положительно определена.

По теореме Лакса — Мильграма заключаем, что уравнение

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (2.415)$$

(которое представляет собой, по существу, уравнение принципа возможных перемещений) имеет решение и притом только одно; кроме того, решение уравнения (2.415) эквивалентно задаче минимизации функционала

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle \equiv \frac{1}{2} \int_0^l ES(x) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \\ &- \int_0^l f(x) v(x) dx \end{aligned} \quad (2.416)$$

в пространстве V .

Очевидно, не всякие решения уравнения (2.415) являются решением задачи (2.404) — (2.405), поэтому решения уравнения (2.415) называют иногда обобщенными решениями задачи (2.404) — (2.405). Нетрудно доказать, что решения уравнения (2.415), обладающие вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяют и уравнению (2.404) [условиям (2.405) эти решения удовлетворяют по определению]. В самом деле, пусть $v(x) \in$

$\in D(0, l)$ — пространству бесконечно дифференцируемых функций с носителем, компактным в $(0, l)$; из уравнения (2.415) с помощью интегрирования по частям и с учетом того, что $v(0) = v(l) = v'(0) = v'(l) = \dots = 0$ для $\forall v(x) \in D(0, l)$ находим

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left[ES(x) \frac{du}{dx} \right] v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx. \quad (2.417)$$

Известно, что $D(0, l)$ плотно в $V = H_0^1(0, l)$, следовательно, из уравнения (2.417) следует, что элемент $u(x)$ удовлетворяет (в обобщенном смысле) уравнению (2.404), что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай неоднородных краевых условий.

1. Пусть

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_1. \quad (2.418)$$

Подберем дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u_1(x)$, удовлетворяющую условиям (2.418), и введем новую неизвестную функцию $\tilde{u}(x)$:

$$\tilde{u}(x) = u(x) - u_1(x). \quad (2.419)$$

Для определения $\tilde{u}(x)$ имеем задачу:

$$-\frac{d}{dx} \left(ES(x) \frac{d\tilde{u}}{dx} \right) = f(x) + \frac{d}{dx} \left[ES(x) \frac{du_1}{dx} \right] \equiv \tilde{f}(x); \quad (2.420)$$

$$\tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{u}(l) = 0, \quad (2.421)$$

к которой можно применить все рассуждения и выводы, полученные для задачи (2.404) — (2.405). Заметим только, что уравнение (2.415) и функционал (2.416) можно рассматривать не на всем пространстве V , а на подмножестве функций из V , удовлетворяющих условиям (2.418), если в уравнении

$$a(\tilde{u}, v) = \langle \tilde{f}, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

и функционале

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle \tilde{f}, v \rangle$$

перейти обратно к искомой функции $u(x)$ по формуле (2.419). Следовательно, при практическом решении задач с условиями типа (2.418) нет необходимости строить функцию $u_1(x)$ *).

2. Пусть

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = u'_1. \quad (2.422)$$

В этом случае получаем

$$V = \{v(x) \mid x \in (0, l), v(0) = 0, v(x) \in H^1(0, l)\}. \quad (2.423)$$

*). Обоснование возможности подбора и исследование дифференциальных свойств таких функций в случае неодномерных задач составило важную задачу теории функций и функционального анализа, которая, в частности, привела Слободецкого к построению соболевских пространств дробного порядка.

При построении уравнения типа (2.415) в данном случае получим

$$\int_0^l ES(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^l f(x) v(x) dx + E[S(l) v(l) u'_1]. \quad (2.424)$$

Поскольку $v(l) \neq 0$, следовательно, вместо уравнения (2.415) будем иметь уравнение

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.425)$$

где

$$L(v) = \langle f, v \rangle + ES(l) u'_1 v(l). \quad (2.426)$$

При прежних ограничениях на внешние воздействия и геометрию задача (2.425) имеет решение и притом только одно; кроме того, решение уравнения (2.425) эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v). \quad (2.427)$$

Докажем, что решение уравнения (2.427), обладающее вторыми (хотя бы обобщенными) производными, удовлетворяет уравнению (2.404) и условиям (2.422). Уравнение (2.404) получается так же, как и в предыдущем случае; первое из условий (2.422) удовлетворяется по определению V ; для получения второго из условий (2.422) умножим (2.404) на произвольный элемент $v(x) \in V$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l :

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left[ES(x) \frac{du}{dx} \right] v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx. \quad (2.428)$$

Интеграл в левой части уравнения (2.428) возьмем по частям:

$$\int_0^l ES(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^l f(x) v(x) dx + ES(l) \frac{du}{dx} \Big|_{x=l}. \quad (2.429)$$

Воспользовавшись тем, что $u(x)$ в равенстве (2.429) – решение уравнения (2.425), найдем, что

$$ES(l) \left[\frac{du}{dx} \Big|_{x=l} - u'_1 \right] v(l) = 0. \quad (2.430)$$

Так как $ES(l) > 0$, $v(l)$ произвольно, то из условия (2.430) следует, что решение этого уравнения удовлетворяет второму из условий (2.422), что и требовалось доказать.

Заметим, что при приближенном решении задач (2.425) и минимизации функционала (2.427) второму из условий удовлетворять не обязательно; если эти задачи решены точно, то, как только что установлено, второе из условий (2.422) удовлетворяется автоматически. Условия такого типа в вариационном исчислении называются *естественными*. Условия типа (2.405), которые необ-

ходимо включать в определение пространства V , называются *главными*.

3. Пусть теперь

$$\frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = u'_0, \quad \frac{du}{dx} \Big|_{x=l} = u'_l. \quad (2.431)$$

В данном случае решение задачи (2.404), (2.431) существует не при любых внешних воздействиях. В самом деле, пусть $u(x)$ — решение задачи (2.404), (2.431): проинтегрируем уравнение (2.404) по x в пределах от 0 до l :

$$\begin{aligned} - \int_0^l \frac{d}{dx} \left[ES(x) \frac{du}{dx} \right] dx &= \int_0^l f(x) dx = - ES(x) \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=l} + \\ &+ ES(0) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = ES(0) u'_0 - ES(l) u'_l. \end{aligned} \quad (2.432)$$

Таким образом, решение задачи существует лишь при условии, что правые части в уравнении и краевых условиях удовлетворяют соотношению (2.432).

Заметим теперь, что пространство $V = H^1(0, l)$ не подходит для построения уравнений типа (2.407), (2.425), так как если $u(x)$ — какое-нибудь решение задачи (2.404), (2.431), то $u(x) + + \text{const}$ — также решение этой же задачи.

В качестве V можно взять подмножество функций из $H^1(0, l)$, удовлетворяющих условию типа (2.432), т. е.

$$\int_0^l v(x) dx = ES(0) u'_0 - ES(l) u'_l \quad (2.433)$$

(конечно, нужно проверять, представляет ли такое подмножество гильбертово пространство; соответствующую проверку можно найти в книге С. Г. Михлина [25]).

Можно показать, что любое решение задачи (2.404), (2.431) удовлетворяет вариационному уравнению

$$a(u, v) = L(v) \equiv \langle f, v \rangle + ES(l) u'_l - ES(0) u'_0, \quad (2.434)$$

а также является решением задачи минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - L(v) \quad (2.435)$$

в указанном выше пространстве.

При приближенном решении уравнения (2.434) и минимизации функционала (2.435) базисные функции должны удовлетворять условию (2.433).

Рассмотрим теперь второй пример одномерной задачи — задачу об изгибе стержня переменного поперечного сечения:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2w}{dx^2} \right] = q(x), \quad x \in (0, l). \quad (2.436)$$

Единственное принципиальное отличие от предыдущего примера состоит в том, что условия на краях, включающие нулевую и первую производные

от прогиба w , — главные, вторую и третью — естественные, поэтому приведем лишь сводку результатов, предоставляемых вывод в качестве упражнения:

$$a(w, 0) = w'(0) = 0, \quad a(l) = w'(l) = 0 \quad (2.437)$$

Функциональное пространство здесь

$$\begin{aligned} V = \{v(x) : x \in (0, l), v(0) = v'(0) = 0, v(l) = v'(l) = 0, \\ v(x) \in H^2(0, l)\} \equiv H_0^2(0, l); \end{aligned} \quad (2.438)$$

вариационное уравнение

$$a(w, v) = \langle q, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (2.439)$$

где по определению

$$a(w, v) = \int_0^l EI(x) \frac{d^2w}{dx^2} \frac{d^2v}{dx^2} dx, \quad (2.440)$$

$$\langle q, v \rangle = \int_0^l q(x) v(x) dx. \quad (2.441)$$

Функционал для задачи минимизации имеет обычный вид

$$J(v) = 1/2a(v, v) - \langle q, v \rangle. \quad (2.442)$$

$$b) w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(l) = w_i'', \quad w'''(l) = w_i'''. \quad (2.443)$$

В данном случае:

$$V = \{v(x) : x \in (0, l), v(0) = v'(0) = 0, v(x) \in H^2(0, l)\}, \quad (2.444)$$

$$a(w, v) = L(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.445)$$

$$\begin{aligned} L(v) = \langle q, v \rangle - v'(l) EI(l) w_i'' - \\ - v(l) \left[\frac{d}{dx} (EI(x)) \Big|_{x=l} w_i'' + EI(x) \Big|_{x=l} w_i''' \right]. \end{aligned} \quad (2.446)$$

$$b) w''(0) = w_0'', \quad w'''(0) = w_0''', \\ w''(l) = w_i'', \quad w'''(l) = w_i'''. \quad (2.447)$$

При условиях (2.447) решение задачи существует не всегда, а лишь при определенных ограничениях на правые части в уравнении (2.436) и условиях (2.447), которые получаются:

1) интегрированием уравнения (2.436) по x в пределах от 0 до l :

$$\begin{aligned} \int_0^l q(x) dx = \frac{d}{dx} (EI(x)) \Big|_{x=l} w_i'' + EI(l) w_i''' - \\ - \frac{d}{dx} (EI(x)) \Big|_{x=0} w_0'' - EI(0) w_0'''; \end{aligned} \quad (2.448)$$

2) умножением уравнения (2.436) на x и последующим интегрированием по x в пределах от 0 до l :

$$\int_0^l q(x) x dx = l \frac{d}{dx} (EI(x)) \Big|_{x=l} w_i'' + l EI(l) w_i''' - EI(l) w_i''' + EI(0) w_0'''. \quad (2.449)$$

Механический смысл ограничений (2.448) состоит в том, что главный вектор и главный момент внешних воздействий, приложенных к изгибающему стержню, должен равняться нулю; в противном случае статическая постановка задачи смысла не имеет.

Пространство $V(x)$ в данной задаче строится так же, как и в аналогичной ситуации в предыдущем примере; функции этого пространства должны удов-

петворять условиям, витекаючим із (2.448) — (2.449); ввиду громоздкості ці формули ще раз переписувати не будемо.

Інтерес представляє варіаційне рівняння, відповідаюче задачі (2.436), (2.447); воно отримується умноженням рівняння (2.436) на произвольний елемент $v \in V$, інтегруванням результату по x в пределах від 0 до l і двократного застосування формул інтегрування по частям:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V; \quad (2.450)$$

$$L(v) = \langle q, v \rangle - v(l) \left[\frac{d}{dx} EI(x) \Big|_{x=l} w''_i + EI(l) w'''_i \right] + \\ + v(0) \left[\frac{d}{dx} (EI(x)) \Big|_{x=0} w''_0 + EI(0) w'''_0 \right] + v'(l) EI(l) w'_i - v'(0) EI(0) w'_0. \quad (2.451)$$

Другі можливі види краївих умов розглядати не будемо — вони отримуються комбінацією розглянутих вище умов і переносом побудованої попередньої задачі на розглядувану тут.

Плоскі задачі (задачі кручения і изгиба стержнів в постановці Сен-Венана). Як було встановлено вище, ці задачі приходяться до задач Дірихле і Неймана для рівнянь Лапласа і Пуассона, поєтому має смысль розглядати їх загальні постановки.

Начнемо з задачі Дірихле для рівняння Пуассона:

$$-\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = Au = f(x), \quad x \in \Omega \subset R^n, \quad (2.452)$$

$$u|_S = 0, \quad S = \partial\Omega, \quad (2.453)$$

виконуючу в проблемі Сен-Венана для прямокутних об'єктів умову мембрани.

При обчисленні виразу $\langle Au, v \rangle$ понадобиться слідуюча формула інтегрування по частям:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega + \int_S uv v_i dS, \quad (2.454)$$

якщо використовуємо формулу Гаусса — Остроградського

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u v d\Omega = \int_S u \cdot v dS \quad (2.455)$$

при $u_i = uv$, $u_1 = \dots = u_{i-1} = u_{i+1} = \dots = u_n = 0$; понадобиться також формула Грина для оператора Лапласа:

$$-\int_{\Omega} v \Delta u d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v d\Omega - \int_S v \frac{\partial u}{\partial v} ds, \quad (2.456)$$

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) d\Omega = \int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial v} - u \frac{\partial v}{\partial v} \right) dS. \quad (2.457)$$

Пространство V , в якому будемо розв'язувати задачу (2.452) — (2.453), визначимо формулою

$$V \equiv H_0^1(\Omega) = \left\{ u \mid u = u(x), \quad x \in \Omega \subset R^n, \quad u|_S = 0, \right. \\ \left. u \in L_2(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), \quad \|u\|_V = \|u\|_{H^1(\Omega)} \right\}. \quad (2.458)$$

Пусть u, v — произвольные функции из области определения оператора A ; на основании (2.456), (2.453) имеем

$$a(u, v) \equiv (Au, v) = - \int_{\Omega} \Delta u v \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega. \quad (2.459)$$

Очевидно, что последний интеграл имеет смысл для любых $u, v \in H_0^1(\Omega)$, поэтому $a(u, v)$ можно считать заданной на $V = H_0^1(\Omega)$.

Непрерывность формы (2.459) на V очевидна, положительная определенность следует из неравенства Фридрихса:

$$\int_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 \, d\Omega \geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (2.460)$$

являющегося, как и неравенство (2.412), частным случаем теоремы вложения С. Л. Соболева.

Следовательно, на основании теоремы II.1 приложения II имеем существование и единственность решения задачи (2.452) — (2.453) в V (в обобщенном смысле); теорема II.2 позволяет привести эту задачу к проблеме минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - \langle f, v \rangle \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 \, d\Omega - \int_{\Omega} fv \, d\Omega, \quad (2.461)$$

теорема II.3 — к проблеме решения вариационного уравнения:

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V. \quad (2.462)$$

Исследуем теперь следующую задачу — задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$-\Delta u \equiv Au = f \text{ в } \Omega \subset R^n, \quad (2.463)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad (2.464)$$

встречающуюся в задаче Сен-Венана для призм и об изгибе мембран.

Как известно, задача (2.463) — (2.464) разрешима не при любой f , а лишь для f , ортогональных единице:

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = 0. \quad (2.465)$$

Необходимость условия (2.465) доказывается так же, как это было сделано в аналогичных ситуациях для одномерных задач [умножением уравнения (2.463) скалярно на единицу с последующим применением формулы Грина и условия (2.464)].

Решение задачи (2.463) — (2.464) будет единственным, если оно разыскивается в классе функций, также ортогональных единице, т. е.

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0. \quad (2.466)$$

Докажем это утверждение. Для этого введем гильбертово про-

странство $H^1(\Omega)$ обычным образом и рассмотрим в $H^1(\Omega)$ подмножество $\tilde{H}^1(\Omega)$ функций, удовлетворяющих условию (2.466). Можно проверить, что $\tilde{H}^1(\Omega)$ является гильбертовым пространством и, следовательно, подпространством $H^1(\Omega)$. В качестве области определения D_A оператора A задачи (2.463) – (2.464) примем множество функций, обладающих непрерывными вторыми производными. Так как $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, а D_A содержит в себе плотное в $L_2(\Omega)$ множество финитных функций, то D_A плотно в $H^1(\Omega)$. В соответствии с замечаниями, сделанными выше относительно разрешимости задачи Неймана, целесообразно рассмотреть в качестве области определения оператора A задачи множество функций из D_A , удовлетворяющих условию (2.466). Можно доказать, что $D_A \cap H^1(\Omega)$ плотно в $\tilde{H}^1(\Omega)$.

Вводя билинейную форму (2.459), можем считать ее заданной на всем пространстве $\tilde{H}^1(\Omega)$, тем самым производится нужное нам «расширение» оператора A . Свойство непрерывности формы $a(u, v)$ на $H^1(\Omega)$ очевидно, положительная определенность следует из неравенства Пуанкаре:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_1 \|\operatorname{grad} u\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_2(u, 1)^2. \quad (2.467)$$

Если $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$, то из (2.467) следует, что

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_1 \|\operatorname{grad} u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (2.468)$$

и, следовательно,

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (2.469)$$

где

$$\alpha = \min\{1/2, 1/2c_1\}. \quad (2.470)$$

Из теоремы II.1 приложения II следует существование и единственность решения задачи (2.463) – (2.464) в $\tilde{H}^1(\Omega)$, из теоремы II.2 – ее эквивалентность задаче минимизации функционала (2.461) на $V = \tilde{H}^1(\Omega)$, из теоремы II.3 – задаче решения вариационного уравнения (2.462) на $\tilde{H}^1(\Omega)$.

Отметим, что функции, входящие в $\tilde{H}^1(\Omega)$, не обязаны удовлетворять краевому условию (2.464), т. е. это условие для функционала (2.463) в данной задаче является естественным.

Аналогично тому, как это было в задаче об изгибе стержня, доказывается, что:

а) задача

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega \subset R^n, \quad (2.471)$$

$$u|_S = g(x), \quad x \in S \quad (2.472)$$

эквивалентна задаче минимизации функционала (2.461) на множестве функций из $H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условию (2.468) и не являющихся, очевидно, подпространством;

б) задача

$$-\Delta u = 0 \text{ в } \Omega \subset R^n, \quad (2.473)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_S = h(x), \quad x \in S \quad (2.474)$$

эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_S h(x) v(x) dx \quad (2.475)$$

на пространстве $H^1(\Omega)$, причем для разрешимости задачи (2.476) — (2.477) необходимо потребовать, чтобы было

$$\int_S h(x) dS = 0. \quad (2.476)$$

В случае смешанной задачи

$$-\Delta u = f \text{ в } \Omega \subset R^n, \quad (2.477)$$

$$u|_{S_1} = 0, \quad S_1 \neq \emptyset, \quad (2.478)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{S_2} = 0, \quad S_1 \cup S_2 = S \quad (2.479)$$

в качестве пространства V выбирается подпространство функций из $H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (2.478); если условие типа (2.479) является неоднородным, то в функционале $J(v)$ возникает поверхностный интеграл, который берется только по S_2 .

В качестве примера приложения полученных результатов рассмотрим задачи для функций напряжений в задаче кручения Сен-Венана:

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta \theta = 2 \text{ в } \Omega \subset R^2; \\ \theta|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega; \end{array} \right\} \quad (2.480)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega \subset R^2; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_{\Gamma} = x_2 v_1 - x_1 v_2. \end{array} \right\} \quad (2.481)$$

Задача (2.480) эквивалентна задаче минимизации функционала:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega - 2 \iint_{\Omega} \theta d\Omega; \quad (2.482)$$

задача (2.481) — минимизации функционала

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega - \int_{\Gamma} (x_2 v_1 - x_1 v_2) \varphi d\Gamma. \quad (2.483)$$

Преобразуем функционал (2.483), воспользовавшись формулой Стокса:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [(x_2 v_1 - x_1 v_2) \varphi] d\Gamma = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial (x_2 v_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial (x_1 v_2)}{\partial x_2} \right] d\Omega = \iint_{\Omega} \left[x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (2.484)$$

Подстановка (2.484) в (2.483) дает:

$$J(\varphi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right] d\Omega - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) d\Omega. \quad (2.485)$$

Учитывая, что последний интеграл не содержит искомой функции φ , заключаем, что задача (2.481) эквивалентна задаче о минимизации функционала:

$$J_1(\varphi) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right] d\Omega. \quad (2.486)$$

Приведем одно следствие, вытекающее из подстановок задач в форме задач на минимизацию функционала (2.482), (2.486), важное для механических приложений. Предположим, что известны приближенные решения θ_n , φ_n задач минимизации функционалов $J(\theta)$, $J_1(\varphi)$, и покажем, что эти решения позволяют дать двустороннюю оценку для жесткости D_0 стержня на кручение, определяемой формулой

$$D_0 = 2\mu \iint_{\Omega} \theta_0 d\Omega, \quad (2.487)$$

где θ_0 — точное решение.

В самом деле, по определению

$$J(\theta_n) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} (|\operatorname{grad} \theta_n|^2 - 4\theta_n) d\Omega \geq \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (|\operatorname{grad} \theta_0|^2 - 4\theta_0) d\Omega. \quad (2.488)$$

Интеграл в (2.488) справа преобразуем:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (|\operatorname{grad} \theta_0|^2 - 4\theta_0) d\Omega &= \iint_{\Omega} [-\Delta \theta_0 \theta_0 - 4\theta_0] d\Omega = \\ &= -2 \iint_{\Omega} \theta_0 d\Omega = -\frac{D_0}{\mu}. \end{aligned} \quad (2.489)$$

Подстановка (2.489) в (2.488) дает

$$D_0 \geq -2\mu J(\theta_0). \quad (2.490)$$

Аналогичным образом

$$J_1(\varphi_n) \geq J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + x_1 \right)^2 \right] d\Omega. \quad (2.491)$$

Учитывая соотношения между θ и φ

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - x_2, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -\left(x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right), \quad (2.492)$$

найдем, что

$$J_1(\varphi_n) \geq \frac{1}{2} \iint_{\Omega} |\operatorname{grad} \theta_0|^2 d\Omega = \iint_{\Omega} \theta_0 d\Omega = \frac{D_0}{2\mu}. \quad (2.493)$$

Окончательно имеем

$$-2\mu J(\theta_n) \leq D_0 \leq 2\mu J_1(\varphi_n), \quad (2.494)$$

что и требовалось доказать.

Исследование задач теории упругости в общем случае. Начнем с исследования задачи в перемещениях в форме

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u})) \equiv A\boldsymbol{u} = \rho F_i \text{ в } \Omega \subset R^n, \quad (2.495)$$

$$\boldsymbol{u}|_S = 0, \quad S = \partial\Omega, \quad (2.496)$$

где a_{ijkh} — модули упругости, зависящие от координат и обладающие свойствами симметрии

$$a_{ijkh} = a_{jikh} = a_{ijhk} = a_{khhij} \quad (2.497)$$

и положительной определенности

$$a_{ijkh} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kh} \geq \alpha \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (2.498)$$

Связь компонентов тензора деформаций ε_{ij} с вектором перемещений \boldsymbol{u} дается формулами Коши:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Пространство V , в котором будем исследовать задачу (2.495) — (2.496), определим формулой

$$\begin{aligned} V = (H_0^1(\Omega))^n &= \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \subset R^n, \\ &\quad \boldsymbol{v} \in (L_2(\Omega))^n, \quad \partial \boldsymbol{v} / \partial x_i \in (L_2(\Omega))^n, \end{aligned} \quad (2.499)$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_V^2 = \|\boldsymbol{v}\|_{(L_2(\Omega))^n}^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} \right)_{(L_2(\Omega))^n}, \quad \boldsymbol{v}|_S = 0,$$

где

$$\begin{aligned} (L_2(\Omega))^n &= \left\{ \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n), \quad v_i = v_i(\boldsymbol{x}), \right. \\ &\quad \left. \boldsymbol{x} \in \Omega \subset R^n, \quad \|\boldsymbol{v}\|_{L_2(\Omega)^n}^2 = \iint_{\Omega} |\boldsymbol{v}|^2 d\Omega < +\infty \right\}. \end{aligned} \quad (2.500)$$

В дальнейшем неоднократно будет использована следующая формула Грина для оператора A , заданного формулой (2.495):

$$\begin{aligned} (A \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &\equiv - \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\boldsymbol{u})) v_i d\Omega = \\ &= \iint_{\Omega} \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) d\Omega - \iint_S \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) v_j v_i dS, \end{aligned} \quad (2.501)$$

где σ_{ij} — компонент тензора напряжений, связанный с \mathbf{u} посредством закона Гука и формул Коши:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}). \quad (2.502)$$

Формула (2.501) находится с помощью формулы Гаусса — Остроградского для тензорных полей с использованием свойств симметрии тензоров a_{ijkh} и ε_{ij} :

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) v_i) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = - \int_S \sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j v_i dS + \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega. \quad (2.503)$$

Учитывая (2.503) и определение (2.499), заключаем, что для доказательства положительной определенности формы $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv (A\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на V достаточно иметь оценку:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega \geq \beta \left[\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) d\Omega \right], \\ \forall \mathbf{u} \in V = (H_0^1(\Omega))^n. \quad (2.504)$$

Оценка (2.504) вытекает, как будет показано ниже, из следующего основного неравенства:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega \geq c \|\mathbf{u}\|_{(H^1(\Omega))^n}^2, \\ \forall \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^n, \quad c = \text{const} > 0, \quad (2.505)$$

известного в теории упругости как неравенство Корна. Доказательство этого неравенства представляет собой основную проблему в доказательстве теоремы существования и единственности краевых задач упругости; в настоящее время эта проблема решена в достаточно общей форме. Доказательством неравенства (2.505) заниматься не будем.

Так как неравенство, обратное к (2.505), очевидно, то в (2.505) содержится утверждение об эквивалентности двух норм на $(H^1(\Omega))^n$: нормы, введенной в определении (2.499), и нормы, определяемой левой частью неравенства (2.505).

Предположим теперь, что (2.505) имеет место; покажем, что из этого предположения следует выполнение неравенства (2.504), т. е. положительная определенность формы $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на V . Для этого достаточно показать, что существует константа $c_0 > 0$ такая, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega \geq c_0 \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega, \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (2.506)$$

В самом деле:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega \right] \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega + \\ &+ \frac{c_0}{2} \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega \geq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{c_0}{2} \right\} \left[\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega + \int_{\Omega} u_i u_i d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (2.507)$$

Докажем, что (2.506) имеет место для любых $\boldsymbol{u} \in V$, удовлетворяющих условию

$$\int_{\Omega} u_i u_i d\Omega = 1. \quad (2.508)$$

Переход к произвольным $\boldsymbol{u} \in V$ очевиден.

Таким образом, нужно доказать, что

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega \geq c_0, \quad \forall \boldsymbol{u} \in V, \quad (2.509)$$

причем \boldsymbol{u} удовлетворяют условию (2.508).

Докажем (2.509) от противного: предположим, что существует последовательность $\boldsymbol{u}_n \in V$, такая, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}_n) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}_n) d\Omega &\rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow \infty, \\ \int_{\Omega} u_{ni} u_{ni} d\Omega &= 1. \end{aligned} \quad (2.510)$$

Из (2.505) следует, что

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_V \leq c = \text{const}. \quad (2.511)$$

Из всякой последовательности, ограниченной по норме в гильбертовом пространстве, можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\boldsymbol{u} \in V$.

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}_n) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}_n) d\Omega \geq \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) d\Omega. \quad (2.512)$$

В силу (2.510) последний интеграл равен нулю, следовательно, $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0$ и поле перемещений \boldsymbol{u} может быть только полем, возникающим при смещении и повороте Ω как жесткого целого. Поскольку граница Ω закреплена, то из $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0$ следует, что $\boldsymbol{u} \equiv 0$; последнее равенство противоречит тому, что

$$\int_{\Omega} u_i u_i d\Omega = 1, \quad (2.513)$$

и тем самым неравенство (2.509), а вместе с ним и положительная определенность формы $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ на V доказана.

По теореме Лакса — Мильграма имеем существование и единственность решения задачи (2.495) — (2.496) в V , по теореме II.2 — ее эквивалентность задаче минимизации функционала

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho F \cdot \mathbf{v} d\Omega \quad (2.514)$$

на V .

Рассмотрим теперь несколько более сложный случай, когда вся граница S свободна от напряжений, т. е. вместо (2.496) имеет место следующее однородное условие:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j |_S = 0. \quad (2.515)$$

Данный случай аналогичен разобранному выше случаю задачи Неймана для уравнения Пуассона и может быть исследован таким же образом, как это было сделано; ниже излагается другой возможный путь исследования проблемы существования и единственности задач с условиями типа (2.515).

Интегрируя уравнения (2.495) по области Ω с последующими преобразованиями левой части по формуле Гаусса — Остроградского и используя (2.515), найдем, что

$$\int_{\Omega} \rho F d\Omega = 0, \quad (2.516)$$

т. е. решение будет существовать не при всяких массовых силах F . Еще одно ограничение на ρF получается путем векторного умножения уравнения (2.495) на радиус-вектор \mathbf{r} точки области Ω и последующим интегрированием по Ω :

$$-\int_{\Omega} E_{pqr} \frac{\partial \sigma_{qj}}{\partial x_j} x_r d\Omega = \int_{\Omega} \rho E_{pqr} F_q x_r d\Omega. \quad (2.517)$$

Здесь E_{pqr} — символы Леви — Чивита.

Преобразуем интеграл в левой части (2.517):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} E_{pqr} \frac{\partial \sigma_{qj}}{\partial x_j} x_r d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (E_{pqr} \sigma_{qj} x_r) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} E_{pqr} \sigma_{qj} \delta_{rj} d\Omega = \int_S E_{pqr} \sigma_{qj} x_r v_j dS - \int_{\Omega} E_{pqr} \sigma_{qj} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.518)$$

Интеграл по поверхности S в (2.518) будет равен нулю в силу условия (2.515), последний интеграл обратится в нуль вследствие симметрии тензора σ_{ij} . Таким образом, имеем еще одно ограничение на ρF :

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho F d\Omega = 0. \quad (2.519)$$

Условия (2.516), (2.519) допускают следующую механическую интерпретацию: они означают равенство нулю главного вектора

и главного момента внешних сил, действующих на упругое тело, занимающее область Ω .

Определим пространство $V = (H^1(\Omega))^n$ формулой, отличающейся от (2.499) лишь тем, что элементы $v \in H$ не удовлетворяют никаким граничным условиям. Величина $\|v\|_V^2$, определенная формулой (2.499), будет лишь полунонормой на V , так как $\|v\|=0$ и из этого следует, что $v \in R$, где R — множество смещений Ω как жесткого целого. Поэтому для исследования разрешимости исследуемой задачи целесообразно ввести пространство $\tilde{V} = V/R$, элементы которого — классы функций $\tilde{v} = v + \rho$, где $v \in V$, а ρ пробегает все R (\tilde{V} называется смежным к V по подпространству R). Норма в \tilde{V} определяется равенством

$$\|\tilde{v}\|_{\tilde{V}} = \inf_{\rho \in R} \|v + \rho\|_V. \quad (2.520)$$

Оператор A и соответствующую ему форму $a(u, v) = (Au, v)$ будем считать заданными на \tilde{V} , определив их формулой

$$\left. \begin{aligned} a(u, \tilde{v}) &= a(u, v), \quad u \in \tilde{V}, \quad v \in V, \\ A\tilde{u} &= Au, \quad u \in V. \end{aligned} \right\} \quad (2.521)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в предыдущей задаче, убеждаемся в том, что билинейная форма $a(\tilde{u}, \tilde{v})$ является положительно определенной на \tilde{V} , непрерывность ее очевидна. Следовательно, по теореме Лакса — Мильграма задача (2.495), (2.515) [в (2.495), (2.515) u необходимо заменить на \tilde{u}] имеет в V решение и при этом единственное. По теореме I.2 эта проблема эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J(\tilde{v}) = 1/2a(\tilde{v}, \tilde{v}) - \int_{\Omega} \rho F \cdot \dot{v} d\Omega. \quad (2.522)$$

По определению

$$a(\tilde{v}, \tilde{v}) = a(v, v), \quad v \in V. \quad (2.523)$$

Кроме того, из (2.516) и (2.519) следует, что

$$\int_{\Omega} \rho F \cdot \dot{v} d\Omega = \int_{\Omega} \rho F \cdot v d\Omega, \quad v \in V, \quad (2.524)$$

следовательно, рассматриваемая задача эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - \int_{\Omega} \rho F \cdot v d\Omega \quad (2.525)$$

в пространстве V . Из доказанного выше следует, что решение этой последней проблемы существует, но определяется с точностью до произвольного $\rho \in R$. Для выделения единственного

решения в V достаточно потребовать, например, чтобы решение удовлетворяло равенствам

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \, d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \mathbf{u} \, d\Omega = 0. \quad (2.526)$$

Отметим, что в практических расчетах единственное решение $\mathbf{u} \in V$ можно выделить заданием компонентов смещения и вращения в одной каким-либо образом выбранной точке среды; используются также дополнительные уравнения, вытекающие из (2.526).

Если условие (2.515) является неоднородным, т. е.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j|_S = P_i, \quad (2.527)$$

то вместо (2.516), (2.519) будем иметь ограничения

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \, d\Omega + \int_S \mathbf{P} \, dS = 0, \quad (2.528)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{F} \, d\Omega + \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{P} \, dS = 0, \quad (2.529)$$

а вместо проблемы минимизации функционала (2.525) — проблему минимизации

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} \, dS. \quad (2.530)$$

Естественно, что ситуация с единственностью решения здесь такая же, как и в предыдущей задаче.

В общем случае, когда $S = S_u \cup S_\sigma$ и $S_u \neq \emptyset$,

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{g}, \quad (2.531)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j|_{S_\sigma} = P_i, \quad (2.532)$$

проблема приводится к минимизации функционала вида (2.530), в котором возникает поверхностный интеграл по S_σ ; множество элементов, на котором отыскивается минимум, состоит из функций, удовлетворяющих краевому условию (2.531).

Приведем одно следствие из формулы Грина (2.501), имеющее важное значение для механических приложений: если к упругому телу, занимающему область Ω , приложить систему внешних объемных сил с плотностью $\rho F^{(1)}$, поверхностных $\mathbf{P}^{(1)}$, а затем заменить эту систему другой, характеризуемой полями $\rho F^{(2)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$, то работа A_{12} сил $\rho F^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(1)}$ первой системы на перемещениях $\mathbf{u}^{(2)}$, вызванных второй системой, равна работе A_{21} сил $\rho F^{(2)}$, $\mathbf{P}^{(2)}$ второй системы на перемещениях $\mathbf{u}^{(1)}$, вызванных первой системой.

Это утверждение известно в теории упругости под названием теоремы Бетти о взаимности работ; по существу оно эквивалентно утверждению о симметричности оператора A , заданного формулой (2.495).

Доказательство теоремы Бетти. По определению

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= \int_{\Omega} \rho F^{(1)} \cdot u^{(2)} d\Omega + \int_S P^{(1)} \cdot u^{(2)} dS = \int_{\Omega} A(u^{(1)}) \cdot u^{(2)} d\Omega + \\
 &+ \int_S \sigma_{ij}(u^{(1)}) v_j u_i^{(2)} dS = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u^{(1)}) \varepsilon_{ij}(u^{(2)}) d\Omega - \sigma_{ij}(u^{(1)}) v_j u_i^{(2)} dS = \\
 &= \int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u^{(1)}) \varepsilon_{ij}(u^{(2)}) d\Omega = \int_{\Omega} a_{khi} \varepsilon_{ij}(u^{(2)}) \varepsilon_{kh}(u^{(1)}) d\Omega = \\
 &= \int_{\Omega} (A u^{(2)}) \cdot u^{(1)} d\Omega + \int_S \sigma_{ij}(u^{(2)}) v_j u_i^{(1)} dS = \\
 &= \int_{\Omega} \rho F^{(2)} \cdot u^{(1)} d\Omega + \int_S P^{(2)} \cdot u^{(1)} dS = A_{21}.
 \end{aligned}$$

Краевые задачи для уравнения Софи Жермен

$$\Delta \Delta w = g/D \quad (2.533)$$

исследуются по схемам, аналогичным тем, которые были использованы выше. Здесь всегда имеет место существование и единственность в соответствующем образом подобранных функциональных пространствах; при однородных силовых граничных условиях проблема сводится к минимизации функционала:

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(w_{,11})^2 + 2(w_{,12})^2 + (w_{,22})^2] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{D} q w d\Omega, \quad (2.534)$$

если же силовые условия неоднородные, то в правой части (2.534) необходимо добавить соответствующие контурные интегралы.

Краевые задачи для уравнения устойчивости

$$\Delta \Delta w - (h/D)(\sigma_{\alpha\beta}^0 w)_{,\alpha\beta} = q/D \quad (2.535)$$

имеют единственное решение не всегда, а лишь при дополнительных ограничениях на характер распределения напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^0$ в срединной плоскости, подробное исследование этих задач можно найти в книге С. Г. Михлина [23].

Если соответствующие ограничения на $\sigma_{\alpha\beta}^0$ выполнены, то при однородных силовых граничных условиях краевые задачи для (2.535) сводятся к задаче минимизации функционала

$$\begin{aligned}
 J(w) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ [(w_{,11})^2 + 2(w_{,12})^2 + (w_{,22})^2] + \right. \\
 &\left. + \frac{h}{D} [\sigma_{11}^0 (w_{,1})^2 + 2\sigma_{12}^0 w_{,1} w_{,2} + \sigma_{22}^0 (w_{,2})^2] - \frac{q}{D} w \right\} d\Omega. \quad (2.536)
 \end{aligned}$$

Пусть теперь $q \equiv 0$ и краевые условия для w однородны, тогда любая краевая задача для (2.535) всегда имеет решение $w = 0$. Если $\sigma_{\alpha\beta}^0$ таковы, что единственность решения места не имеет, то наряду с нулевым решением возможно, вообще говоря, существование нетривиальных решений $w \neq 0$. Появление этих решений имеет механическую интерпретацию: пластинка, сжатая

силами, действующими в ее плоскости, может при определенных значениях этих сил терять плоскую форму равновесия, или, как говорят, терять устойчивость. Подобные явления потери устойчивости и наблюдаются в действительности, для их исследования необходимы специальные методы; один из них сейчас кратко будет рассмотрен.

Вариационные методы в задаче о собственных значениях. Эти методы опираются на теоремы II.4 и II.5 приложения II, применимость которых следует из установленных выше результатов. На основании этих теорем заключаем, что:

а) задача определения собственных частот продольных колебаний закрепленного по краям стержня приводится к минимизации функционала

$$J(v) = \frac{a(v, v)}{\langle v, v \rangle} \equiv \left[\int_0^l ES(x) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \right] / \int_0^l \rho S(x) v^2 dx \quad (2.537)$$

на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям $u(0) = 0$, $u(l) = 0$, и, кроме того, при определении λ_k надо требовать, чтобы

$$\int_0^l \rho S v u_i dx = 0, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

где u_1, \dots, u_{k-1} — собственные элементы, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$.

б) задача определения собственных частот поперечных колебаний стержня переменного сечения (а также критических нагрузок при исследовании явления потери устойчивости) приводится (для определенности рассматривается случай жесткой заделки) к минимизации следующего функционала:

$$\left. \begin{aligned} J(w) &= \left(\int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \right) / \left(\int_0^l \rho S(x) w^2 dx \right); \\ w(0) &= w(l) = 0, \quad w'(0) = w'(l) = 0; \\ \int_0^l \rho S(x) w w_i dx &= 0, \quad i = 1, \dots, k-1, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, w_0 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.538)$$

в) задача определения собственных частот колебаний мембранны (или, что то же, собственных значений оператора Лапласа) при условиях жесткого закрепления приводится к минимизации функционала

$$J(v) = \left(\int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 d\Omega \right) / \left(\int_{\Omega} v^2 d\Omega \right) \quad (2.539)$$

в пространстве $V = H_0^1(\Omega)$ при условиях

$$\int_{\Omega} v u_i d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, k-1;$$

г) задача определения собственных частот колебаний упругих тел в трехмерном случае при условии $u|_S = 0$ приводится к задаче минимизации функционала

$$J(v) = \left(\int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(v) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega \right) / \left(\int_{\Omega} v_i v_i d\Omega \right) \quad (2.540)$$

в пространстве $H_0^1(\Omega)$ при условиях

$$\int_{\Omega} u_i v d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, k-1;$$

д) задача определения собственных частот поперечных колебаний жестко защемленной тонкой пластинки толщиной h приводится к задаче минимизации функционала

$$J(w) = \left(\int_{\Omega} w_{,\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} d\Omega \right) / \left(\int_{\Omega} \frac{\rho h}{D} w^2 d\Omega \right) \quad (2.541)$$

в пространстве $H_0^s(\Omega)$ при условиях

$$\int_{\Omega} \frac{\rho h}{D} w w_i d\Omega = 0;$$

е) если предположить, что к краю пластинки прикладываются усилия, параллельные ее срединной плоскости, пропорциональные некоторому параметру q , то задача определения критических значений этого параметра q , при которых возможна потеря устойчивости пластинки, приводится к минимизации следующего функционала (для определенности рассматриваются условия жесткого защемления):

$$J(w) = \left(\int_{\Omega} w_{,\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} d\Omega \right) / \left(\int_{\Omega} \frac{h}{D} \sigma_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} w_{,\beta} d\Omega \right) \quad (2.542)$$

в пространстве $H_0^s(\Omega)$ при условиях

$$\int_{\Omega} \frac{h}{D} \sigma_{\alpha\beta}^0 w_{,\alpha} w_{,\beta} d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad (2.543)$$

где σ_{ij}^0 — тензор напряжений в плоскости, отвечающей единичному значению упомянутого выше параметра.

В качестве упражнения рекомендуется построить задачи минимизации, отвечающие другим, не рассмотренным в данном разделе краевым условиям, а также функционал, соответствующий задаче определения собственных частот колебаний пластинки с учетом напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^0$ в плоскости пластинки.

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА ЭВМ (I)

Настоящая глава посвящена изложению одного из наиболее перспективных способов дискретизации непрерывных задач — методу конечных элементов. Метод будет сформулирован как обобщение матричных методов сил и перемещений строительной механики на случай континуальных систем. Преимущества такой формулировки — в очевидных возможностях обобщения на случай нелинейных и неконсервативных систем, недостаток — в завуалированности связи с традиционными вариационными методами — Ритца и Бубнова — Галеркина, а также в трудностях перенесения на краевые задачи немеханического происхождения.

В главе 4 будет дана другая формулировка метода конечных элементов, эквивалентная предыдущей, но использующая непосредственно идеологию методов Ритца и Бубнова — Галеркина. Преимущество этого подхода — в открытии возможностей для обоснования, усовершенствования и обобщения на широкие классы краевых задач математической физики, недостаток — в трудностях машинной реализации соответствующего алгоритма для проблем, содержащих в качестве неизвестных вектор-функции или дифференциальные операторы порядка выше второго.

Отметим, что метод конечных элементов полностью ориентирован на применение ЭВМ, хорошо приспособлен для решения краевых задач в областях сложной формы, мало чувствителен к переменности коэффициентов дифференциальных операторов и виду правых частей. Наиболее бурное развитие этого метода относится к последним двум десятилетиям, но основы метода были заложены еще в работе Р. Куранта [17], где указано, что идея соответствующего алгоритма была навеяна работой Л. Эйлера примерно двухсотлетней давности, в которой исследуются условия минимума интеграла.

§ 3.1. Одномерная задача

Пусть область Ω , занятая линейно-упругой средой, ограничена некоторой поверхностью вращения S_2 и двумя плоскими участками S_0 и S_1 , перпендикулярными оси вращения (рис. 3.1).

Для определенности предположим, что сечение S_0 жестко защемлено («приkleено»), а S_1 — свободно от усилий. За ось вращения выберем ось Ox декартовой системы с началом 0 в сечении S_0 .

Пусть заданы массовые силы с плотностью $F = F(x)$, параллельные оси Ox ; требуется определить перемещения всех точек рассматриваемой области.

Предположим, что с достаточной точностью задачу можно решать как одномерную, т. е. можно считать, что все характеристики напряженного и деформированного состояния зависят только от координаты x . Обозначим через $u = u(x)$ перемещения точек стержня вдоль оси Ox , через $\epsilon = du/dx$ — продольную деформацию, $\sigma = \sigma(x)$ — напряжения в сечениях, перпендикулярных оси Ox ; площадь этих сечений — $S(x)$.

Примем

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{du}{dx}, \quad (3.1)$$

где E — модуль Юнга; тогда полное усилие $P = P(x)$ в любом поперечном сечении будет

$$P = P(x) = \sigma S(x) = ES(x) \frac{du}{dx}. \quad (3.2)$$

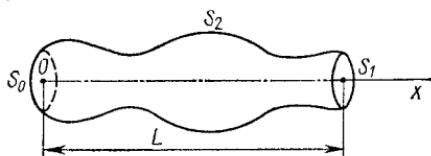


Рис. 3.1

Для приближенного решения задачи об определении перемещений $u = u(x)$ под воздействием усилий $F = F(x)$ применим следующий прием. Мысленно разобъем область Ω (которую для краткости будем называть стержнем) на отдельные участки сечениями $x_k = \text{const}$, перпендикулярными оси Ox ; предположим, что таких участков N . Длину k -го участка, для которого

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k \quad (k = 1, \dots, N, x_0 = 0), \quad (3.3)$$

будем обозначать через h_k ; очевидно,

$$h_k = x_k - x_{k-1}. \quad (3.4)$$

Предположим, что в пределах каждого участка перемещение $u = u(x)$ с достаточной точностью можно аппроксимировать линейной функцией

$$u(x) \simeq u^k(x) = a_0^k + a_1^k x, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k. \quad (3.5)$$

Для того чтобы в дальнейшем использовать непрерывность перемещений при переходе через сечения, введем вместо коэффициентов a_0^k , a_1^k значения перемещений

$$u_k = u(x_k), \quad (3.6)$$

которые и будем считать искомыми неизвестными. Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} u_{k-1} &= a_0^k + a_1^k x_{k-1}; \\ u_k &= a_0^k + a_1^k x_k. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Решая систему (3.7), найдем

$$\left. \begin{aligned} a_1^k &= \frac{1}{h_k} (u_k - u_{k-1}); \\ a_0^k &= \frac{1}{h_k} (u_{k-1}x_k - u_kx_{k-1}). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Таким образом, в пределах k -го участка

$$u(x) \simeq u^k(x) = \frac{1}{h_k} [u_{k-1}(x_k - x) + u_k(-x_{k-1} + x)]. \quad (3.9)$$

Введем вектор-столбец узловых перемещений $\{\delta^k\}$ на k -м элементе

$$\{\delta^k\} = \begin{Bmatrix} u_{k-1} \\ u_k \end{Bmatrix}$$

и матрицу $[N^k]$ (строку в данном случае) аппроксимирующих функций (называемых также функциями формы)*)

$$[N^k] = \{(x_k - x)/h_k, (x - x_{k-1})/h_k\},$$

тогда формула (3.9) перепишется следующим образом:

$$u(x) \simeq u^k(x) = [N^k] \{\delta^k\}. \quad (3.9')$$

С учетом (3.9') имеем:

$$e(x) \simeq e^k(x) = \left[\frac{dN^k}{dx} \right] \{\delta^k\} \equiv [B^k] \{\delta^k\}, \quad [B^k] = [-h_k^{-1}, h_k^{-1}], \quad (3.10)$$

$$\sigma(x) \simeq \sigma^k(x) = E[B^k] \{\delta^k\}. \quad (3.11)$$

Все силы, действующие на k -й участок (конечный элемент) стержня, приведем к силам, приложенным к его концам $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$; совокупность этих сил объединим в вектор-столбец:

$$\{R^k\} = \begin{Bmatrix} R_{k-1} \\ R_k \end{Bmatrix}.$$

Цель дальнейших рассуждений — связать $\{R^k\}$ и $\{\delta^k\}$ и получить разрешающую систему уравнений из условий равновесия сил во всех сечениях $x = x_k$, $k = 1, 2, \dots$

Для решения первой задачи подсчитаем работу всех внешних приложенных к k -му участку сил на возможном перемещении

$$\delta u^k(x) = [N^k] \delta \{\delta^k\} \quad (3.12)$$

здесь δ — значок вариации, отличается от перемещений отсутствием индексов). Поскольку, по предположению, все силы приведены к сосредоточенным в узлах (на концах), то возможная работа

$$\delta A^k = \{R^k\}^T \delta \{\delta^k\} \quad (3.13)$$

(T — операция транспонирования).

* Принятые здесь обозначения векторов отличаются от использованных выше и согласованы с обычно применяемыми обозначениями метода конечных элементов.

С другой стороны,

$$\delta A^k = -\sigma S \delta u|_{x=x_{k-1}} + \sigma S \delta u|_{x=x_k}; \quad (3.14)$$

здесь учтено, что внешняя нормаль к сечению $x=x_{k-1}$ противоположна направлению оси Ox ; кроме того, индекс k , означающий аппроксимацию, будет введен в тот момент, когда вместо соответствующих функций будут подставлены их аппроксимации.

Преобразуем выражение (3.14), используя уравнение равновесия

$$\frac{d}{dx}(\sigma S) + FS = 0, \quad (3.15)$$

получающееся элементарным путем из условия равновесия произвольно выделенной части стержня.

Имеем:

$$\begin{aligned} \delta A^k &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{d}{dx}(\sigma S \delta u) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{d}{dx}(\sigma S) \delta u dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sigma S \frac{d \delta u}{dx} dx = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (-FS) \delta u dx + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sigma S \delta e dx \simeq \int_{x_{k-1}}^{x_k} (-FS) \delta u^k dx + \\ &\quad + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sigma S \delta e^k dx = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (-FS) [N^k] dx \right) \delta \{\delta^k\} + \\ &\quad + \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} E[B^k] \{\delta^k\} S[B^k] dx \right) \delta \{\delta^k\} = \{R^k\}^T \delta \{\delta^k\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Сравнивая коэффициенты при независимых вариациях, получаем

$$\{R^k\} = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} [B^k]^T (ES) [B^k] dx \right) \{\delta^k\} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} [N^k]^T FS dx \quad (3.17)$$

(при выводе последней формулы использован тот факт, что транспонирование произведения матриц равно произведению транспонированных матриц в обратном порядке).

Матрица

$$[K^k] = \int_{x_{k-1}}^{x_k} [B^k]^T (ES) [B^k] dS = \frac{1}{h_k^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} ES dx \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

называется локальной матрицей жесткости k -го элемента; вектор

$$\{R^{kF}\} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} [N^k]^T FS dx = \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_{k-1}}^{x_k} FS(x_k - x)/h_k dx \\ \int_{x_{k-1}}^{x_k} FS(x - x_{k-1})/h_k dx \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

эквивалентен воздействию распределенных по длине k -го элемента сил.

С использованием обозначений (3.18) – (3.19) формула (3.17) записывается в следующей компактной форме:

$$\{R^k\} = [K^k] \{\delta^k\} - \{R^{kF}\}. \quad (3.20)$$

Если ввести глобальный вектор неизвестных

$$\{\delta\}^T = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\} \equiv \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_N\}, \quad (3.21)$$

то составление условий равновесия во всех сечениях $x = x_k$ будет эквивалентно составлению системы уравнений

$$[K] \{\delta\} = \{B\}. \quad (3.22)$$

Матрица $[K]$, называемая *глобальной матрицей жесткости* или просто *матрицей жесткости системы*, получается сложением локальных матриц жесткости $[K^k]$ по следующему правилу: сначала к нулевой матрице размерности $N \times N$ добавляется матрица, в левом верхнем углу которой стоит локальная матрица жесткости 1-го элемента, к получившейся матрице добавляется матрица размера $N \times N$, ненулевые элементы которой расположены на пересечении 2-го и 3-го столбцов и 2-й и 3-й строк и равны соответствующим элементам локальной матрицы жесткости для 2-го элемента и т. д.; на k -м шаге добавляется матрица, ненулевые элементы которой расположены на пересечении k и $k+1$ строк и k и $k+1$ столбцов и равны соответствующим элементам локальной матрицы жесткости k -го элемента.

Это правило получается из тех соображений, что условие равновесия сил в сечении $x = x_k$ имеет форму

$$R_2^k + R_1^{k+1} = 0, \quad (3.23)$$

или с учетом выражений для $\{R^k\}$

$$\begin{aligned} & -\frac{I_k}{h_k^2} u_{k-1} + \left(\frac{I_k}{h_k^2} + \frac{I_{k+1}}{h_{k+1}^2} \right) u_k - \frac{I_{k+1}}{h_{k+1}^2} u_{k+1} = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{FS}{h_k} (x - x_{k-1}) dS + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{FS}{h_k} (x_k - x) dx, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где для краткости введено обозначение

$$I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} ES dx.$$

Из формулы (3.24) легко усмотреть и правило вычисления вектора правой части $\{B\}$ в системе (3.22) через компоненты векторов $\{R^{kF}\}$. Заметим, что по граничным условиям $u_0 = \delta_0 = 0$; кроме того, если на правый конец стержня $x = x_N = L$ действует усилие P , то необходимо учесть вклад этого усилия при состав-

лении последнего уравнения ($k = N$), в правой части этого уравнения добавится слагаемое $P = \sigma S|_{x=L}$.

Очевидно, матрица системы (3.22) является симметричной трехдиагональной; для ее обращения существуют экономичные устойчивые схемы (типа прогонки).

§ 3.2. Алгоритм решения плоских и пространственных задач теории упругости

Изложенный выше метод решения задач теории упругости обобщается на случай плоских и пространственных задач. Рассмотрим, для определенности, случай плоской деформации при $u_3 = 0$, $u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2)$, $\alpha = 1, 2$. Область в плоскости (x_1, x_2) , в которой происходит процесс деформации упругого тела, обозначим через Ω , ее границу — через S . Рассмотрим некоторую триангуляцию области Ω — ее разбиение на треугольные подобласти T_e , подчиняющееся следующим предположениям:

а) диаметр любого T_e не превосходит заданного числа h ;

б) два различных треугольника либо вовсе не имеют общих точек, либо имеют одну общую вершину, либо имеют одну общую сторону.

Для простоты предположим, что

$$\bar{\Omega} = \bigcup_e T_e, \quad (3.25)$$

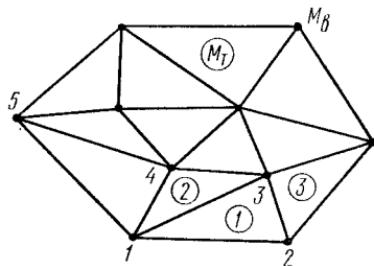


Рис. 3.2

что возможно только в случае полигональной области Ω .

Пронумеруем все вершины треугольников целыми числами от 1 до M_b , а сами треугольники — целыми числами (в кружочке) от 1 до M_T (рис. 3.2).

Рассмотрим какой-либо треугольник с номером e , номера вершин которого — числа $i \equiv k(1)$, $j \equiv k(2)$, $k \equiv k(3)$, координаты вершин

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_{k(1)} \equiv \mathbf{a}^i = (x_i, y_i) \equiv (x_{k(1)}, y_{k(1)}); \\ \mathbf{a}_{k(2)} \equiv \mathbf{a}^j = (x_j, y_j) \equiv (x_{k(2)}, y_{k(2)}); \\ \mathbf{a}_{k(3)} \equiv \mathbf{a}^k = (x_k, y_k) \equiv (x_{k(3)}, y_{k(3)}). \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

(Для удобства будем использовать для независимых переменных как обозначение (x_1, x_2) , так и обозначение (x, y) .) Последовательность номеров вершин каждого треугольника будем предполагать упорядоченной определенным образом, что отражено наличием в (3.26) двух типов индексов; практически для такого упорядочения в памяти машины необходимо сформировать массив номеров вершин треугольников вида

$$N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, N_3^{(1)}, N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, N_3^{(2)}, \dots, N_1^{(M_T)}, N_2^{(M_T)}, N_3^{(M_T)},$$

где $N_i^{(r)}$ — номер i -й по порядку вершины r -го треугольника.

Следуя идеям предыдущего параграфа, предположим, что поле перемещений

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y)) \equiv (u(x, y), v(x, y)) \quad (3.27)$$

с достаточной для наших целей точностью внутри треугольника можно аппроксимировать полиномом первой степени по x, y :

$$u_\alpha(x, y) \simeq u_\alpha^e(x, y) = a_0^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)}x + a_2^{(\alpha)}y. \quad (3.28)$$

Вводя в рассмотрение перемещения

$$\delta_i = \begin{cases} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \end{cases}, \quad \delta_j = \dots \quad (3.29)$$

вершин треугольника T_i , выразим коэффициенты в аппроксимации (3.28) через $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{\alpha k}$; для этого необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} u_\alpha(\mathbf{a}_i) = \delta_{\alpha i}; \\ u_\alpha(\mathbf{a}_j) = \delta_{\alpha j}; \\ u_\alpha(\mathbf{a}_k) = \delta_{\alpha k}. \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Решение системы (3.30) нетрудно получить в явном виде [см. (3.34)]. Практически очень часто используется решение систем типа (3.30) с помощью ЭВМ, подобная конструкция программы является несколько более удобной, особенно в универсальных программах, предусматривающих использование аппроксимаций различной степени.

Следуя Зенкевичу, введем обозначения для вектора-столбца перемещений рассматриваемого элемента

$$\{\mathbf{u}^e\} = \begin{pmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

вектора-столбца перемещений вершин (узлов)

$$\{\delta^e\} = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \end{pmatrix}, \quad (3.31')$$

для вектора компонентов тензора деформаций

$$\{\varepsilon^e\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

и компонент тензора напряжений

$$\{\sigma^e\} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Смысл введения множителя 2 в формуле (3.32) выяснится ниже [формула (3.43)]. Разрешив систему (3.30) (либо вручную, либо с помощью стандартной подпрограммы на ЭВМ), подставим найденное решение в формулу (3.28):

$$\{u^e\} = [N^e] \{\delta^e\}, \quad (3.34)$$

$$[N^e] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & 0 \\ 0 & a_i + b_i x + c_i y \\ a_j + b_j x + c_j y & 0 \\ 0 & a_j + b_j x + c_j y \end{bmatrix}$$

[выражения для коэффициентов a_i, a_j, \dots, c_k см. ниже — формула (3.38)]. Подставив (3.34) в формулу (3.32), найдем

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e] \{\delta^e\}. \quad (3.35)$$

Приведем выражение для матрицы $[B^e]$:

$$[B^e] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

здесь

$$2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{array}{l} a_i = x_j y_k - x_k y_j, \\ b_i = y_j - y_k, \\ c_i = x_k - x_j \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (3.38)$$

Выражения для $a_j, a_k, b_j, b_k, c_j, c_k$ получаются из (3.38) циклической перестановкой индексов ($i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$).

Связь между векторами $\{\sigma^e\}$ и $\{\varepsilon^e\}$ устанавливается на основании закона Гука (см. главу 1):

$$\{\sigma^e\} = [D^e] \{\varepsilon^e\}, \quad (3.39)$$

где $[D^e]$ — симметричная положительно-определенная матрица, коэффициенты которой могут, вообще говоря, зависеть от координат. Для случая однородного изотропного тела в предположе-

нии о плоской деформации

$$[D^e] \equiv [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \\ \times \begin{bmatrix} 1 & \nu(1-\nu) & 0 \\ \nu(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

где E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Для случая обобщенного плоского напряженного состояния и плоского напряженного состояния

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Цель дальнейших преобразований состоит в приведении распределенных по границе и внутри элемента T_e сил к сосредоточенным в узлах-вершинах элемента для того, чтобы можно было составить соответствующие уравнения равновесия этих сил.

Для решения этой задачи подсчитаем двумя различными способами работу $\delta A^{(e)}$ всех внешних приложенных к элементу сил на некотором элементарном перемещении $\delta u^{(e)}$, а затем приравняем ее работе внутренних сил (т. е. применим принцип возможных перемещений).

Вспомним прежде всего, что работа внутренних напряжений на возможном перемещении δu_i определяется по формуле

$$\delta A^{(e)} = \int_{T_e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega. \quad (3.42)$$

Из определений (3.32) — (3.33) следует, что

$$\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\}, \quad (3.43)$$

где индекс T означает операцию транспонирования.

Учитывая (3.35), найдем

$$\{\delta \varepsilon\} = [B^e] \{\delta(\delta^e)\}. \quad (3.44)$$

Подстановка выражений (3.43) — (3.44) в (3.42) дает

$$\delta A^{(e)} = \left(\int_{T_e} \{\sigma\}^T [B^e] d\Omega \right) \{\delta(\delta^e)\}. \quad (3.45)$$

Внешними по отношению к элементу T_e будем считать сосредоточенные в его вершинах силы, характеризуемые вектором

$$\{R^e\} = \begin{pmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ \vdots \\ R_{2k} \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

и распределенные по объему силы с плотностью ρF_i , предполагая одновременно, что в механическом плане эффект действия сил $\{R^e\}$ эквивалентен эффекту действия распределенных в действительности по поверхности элемента сил. По определению имеем

$$\delta A^{(e)} = \{R^e\}^T \{\delta(\delta^e)\} + \int \rho F_i \delta u_i d\Omega \quad (3.47)$$

Вводя вектор-столбец $\{f\}$ плотности массовых сил

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \rho F_1 \\ \rho F_2 \end{Bmatrix},$$

получим

$$\rho F_i \delta u_i = \{f\}^T \{\delta u\}. \quad (3.48)$$

Из (3.34) следует, что

$$\{\delta u^e\} = [N^e] \{\delta(\delta^e)\}. \quad (3.49)$$

Подстановка выражений (3.48) — (3.49) в (3.47) дает

$$\delta A^{(e)} = \left[\{R^e\}^T + \int_{T_e} \{f\}^T [N^e] d\Omega \right] \{\delta(\delta^e)\}. \quad (3.50)$$

Приравнивая выражения (3.45) и (3.50), найдем

$$\{R^e\} = \int_{T_e} ([B^e] \{\sigma^e\} - [N^e]^T \{f\}) d\Omega. \quad (3.51)$$

Преобразуем правую часть равенства (3.51), учитывая закон Гука (3.39) и формулу (3.35):

$$\{R^e\} = \left[\int_{T_e} ([B^e]^T [D] [B^e]) d\Omega \right] \{\delta^e\} - \int_{T_e} [N^e]^T \{f\} d\Omega. \quad (3.52)$$

Формула (3.59) решает поставленную задачу о приведении приложенных к элементу T_e распределенных сил к системе сил, сосредоточенных в вершинах.

Предположим, что граница S области Ω состоит из двух кусков S_u и S_σ , причем

$$u|_{S_u} = g, \quad (3.53)$$

$$\sigma_{ij} v_j|_{S_\sigma} = P_i. \quad (3.54)$$

Введем обозначения:

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.55)$$

Предположим, что часть границы ∂T_e элемента T_e лежит на S_σ , тогда при подсчете работы внешних сил нужно выделить часть работы, относящуюся к силам P_i (так как определяемая

этими силами составляющая сосредоточенных в узлах сил известна):

$$\begin{aligned}\delta A^{(e)} = & \{R^e\}^T \{\delta(\delta^e)\} + \int_{T_e} \rho F_i \delta u_i d\Omega + \\ & + \int_{\partial T_e \in S_\sigma} P_i \delta u_i dS.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Преобразования, аналогичные приведенным выше, дают

$$\begin{aligned}\delta A^{(e)} = & \left(\{R^e\}^T + \int_{T_e} \{f\}^T [N^e] d\Omega + \right. \\ & \left. + \int_{\partial T_e \in S_\sigma} \{P\}^T [N^e]_S dS \right) \{\delta(\delta^e)\}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Индекс S у $[N^e]_S$ означает, что элементы матрицы $[N^e]$ вычисляются в точках границы S ; в дальнейшем в аналогичной ситуации этот значок будем опускать. Таким образом, из формул (3.35), (3.39), (3.45) и (3.57) следует, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned}\{R^e\} = & \left[\int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega \right] \{\delta^e\} - \\ & - \int_{T_e} [N^e]^T \{f\} d\Omega - \int_{\partial T_e \in S_\sigma} [N^e]^T [P] dS.\end{aligned}\quad (3.58)$$

Заметим теперь, что если вершина (узел) $\alpha_{k(r)} \in S_u$, то в этой точке перемещения известны, т. е.

$$\{\delta_r\} = \{g(\alpha_{k(r)})\}, \quad (3.59)$$

следовательно, вариации перемещений, принадлежащих S_u вершин треугольника, равны нулю, и из равенства:

$$\begin{aligned}\delta A^{(e)} = & \left(\int_{T_e} \{\sigma\}^T [B]^e d\Omega \right) \delta \{\delta^e\} = \\ = & \left(\{R^e\}^T + \int_{T_e} \{f\}^T [N^e] d\Omega \right) \delta \{\delta^e\}\end{aligned}\quad (3.60)$$

можно найти выражения для сосредоточенных сил в узлах, не лежащих на S_u , в виде

$$\begin{aligned}R_{s_\alpha}^e = & \left(\left(\int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega \right) \{\delta^e\} \right)_{s_\alpha} - \\ & - \left(\int_{T_e} [N^e]^T \{f\} d\Omega \right)_{s_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,\end{aligned}\quad (3.61)$$

где s — номер вершины, не лежащей на S_u ; α — номер компонента усилия в этой вершине [возможен, конечно, случай, когда для $\alpha=1$ задано перемещение, для $\alpha=2$ усилие, тогда формулу (3.61) можно написать только для $\alpha=2$].

Предположим для определенности, что в треугольнике T_e вершины имеют номера i, j, k и что $a_i \in S_u$, $a_j \notin S_u$, $a_k \notin S_u$ перепишем для этого случая выражение (3.61) в виде

$$R_{s_a}^e = \left(\left(\int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega \right) \begin{Bmatrix} g_1(a_i) \\ g_2(a_i) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \right)_{s_a} + \left(\left(\int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{j1} \\ \vdots \\ \delta_{k2} \end{Bmatrix} \right)_{s_a} - \left(\int_{T_e} [N^e]^T \{f^e\} d\Omega \right)_{s_a}. \quad (3.62)$$

Для того чтобы построенный алгоритм имел однородную структуру, запишем (чисто формально) равенство (3.58) и для узла $a_i \in S_u$, «забыв» временно о том, что перемещения на S_u заданы:

$$\{R^e\} = [K^e] \{\delta^e\} - \{R^{eF}\}, \quad (3.63)$$

где для краткости введены обозначения

$$\left. \begin{array}{l} [K^e] = \int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] d\Omega; \\ [R^{eF}] = \int_{T_e} [N^e]^T \{f^e\} d\Omega. \end{array} \right\} \quad (3.64)$$

Введем теперь в рассмотрение вектор перемещений $\{\delta\}$, компоненты которого — компоненты перемещений всех узлов; порядок их следования определяется принятой нумерацией узлов. Вектор перемещений $\{\delta^e\}$ вершин отдельного элемента представим формулой

$$\{\delta^e\} = [\Phi^e] \{\delta\}, \quad (3.65)$$

где $[\Phi^e]$ — прямоугольная матрица размером $6 \times 2M_b$. Матрица $[\Phi^e]$ состоит, очевидно, из нулей и единиц; практически в памяти машины эту матрицу не формируют, а ее элементы вычисляют по номерам строк и столбцов, где они расположены, с помощью несложной процедуры.

Введем расширенный вектор усилий

$$\{R^{ee}\} = [\Phi^e] \{R^e\}, \quad (3.66)$$

ненулевые компоненты которого равны соответствующим компонентам вектора усилий $\{R^e\}$, действующих в вершинах треугольника T_e ; соответствие определяется, очевидно, расположением компонентов вектора $\{\delta^e\}$ в векторе $\{\delta\}$. Ненулевые компоненты

вектора $\{R^{ee}\}$ таковы:

$$\begin{aligned} R_{2i-1}^{ee} &= R_{1i}^e, \quad R_{2i}^{ee} = R_{2i}^e, \quad R_{2j-1}^{ee} = R_{1j}^e, \\ R_{2j}^{ee} &= R_{2j}^e, \quad R_{2k-1}^{ee} = R_{1k}^e, \quad R_{2k}^{ee} = R_{2k}^e. \end{aligned}$$

По аналогии с (3.66) определим

$$\begin{aligned} \{R^{eeF}\} &= [\Phi^e]^T \{R^{eF}\}, \\ \{R^{eeP}\} &= [\Phi^e]^T \{R^{eP}\}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где в соответствии с определением (3.64):

$$\{R^{eP}\} = \int_{\partial T \in S_\sigma} [N^e]^T [P] dS. \quad (3.68)$$

Составим теперь уравнения равновесия сил, действующих в каждом узле, не лежащем на S_u ; для этого необходимо определить значение двух компонентов вектора $\{R^e\}$, соответствующих данной вершине и действующих на треугольник T_e , а затем составить две суммы по всем треугольникам, имеющим рассматриваемый узел своей вершиной, и приравнять их нулю. Значение компонентов определяется по формулам:

а) (3.52) — если рассматриваемый узел принадлежит треугольнику, не имеющему вершин на границе S ;

б) (3.58) — если рассматриваемый треугольник имеет хотя бы одну сторону на S_σ . Нетрудно видеть, что описанная процедура эквивалентна составлению основного векторного уравнения

$$\sum_e \{R^{ee}\} = 0. \quad (3.69)$$

[Формально уравнение (3.69) относится также к узлам, принадлежащим части границы S_u .]

Подставим теперь в уравнение (3.69) выражения (3.63), (3.66), (3.67):

$$\left(\sum_e [\Phi^e]^T [K^e] [\Phi^e] \right) \{\delta\} = \sum_e \{R^{eeF}\} + \sum_{e, \partial T_e \in S_\sigma} \{R^{eeP}\}. \quad (3.70)$$

Матрица

$$[K] = \sum_e [\Phi^e]^T [K^e] [\Phi^e] \quad (3.71)$$

называется *глобальной матрицей жесткости* (в отличие от $[K^e]$, которая называется *локальной*).

Вспомним теперь, что часть компонентов вектора $\{\delta\}$ — заданные величины, равные значениям перемещений на S_u , и перенесем произведения их на соответствующие элементы матрицы $[K]$ в правую часть системы уравнений (3.71); вспомним также, что уравнения, соответствующие узлам на S_u , незаконны и вычеркнем их из системы (3.70). В результате этих преобразований получим новую систему уравнений с матрицей размерности $2 \times (M_b - M_{ub})$, где M_{ub} — количество лежащих на S_u вершин.

Обозначим эту матрицу через $[\tilde{K}]$, она получается вычеркиванием строк и столбцов матрицы $[K]$ с номерами $(2i-1)$ и $(2i)$, где i пробегает номера вершин на S_u (заметим, что программная реализация этого процесса достаточно проста).

Введем обозначение

$$\{B\} = \sum_e \{R^{eeF}\} + \sum_{e, \partial T_e \in S_\sigma} \{R^{eeP}\} - \{R^{eeg}\}, \quad (3.72)$$

где

$$\{R^{eeg}\}_{p\alpha} = \sum_{a_q \in S_u} (K_{2p-2+\alpha, 2q-2+\beta}) g_\beta(a_q), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (3.73)$$

Тогда итоговая система уравнений примет вид

$$[\tilde{K}] \{\delta\} = \{B\}, \quad (3.74)$$

где $\{\tilde{\delta}\}$ получается из $\{\delta\}$ удалением известных по условиям задачи компонентов. Отметим, что матрица этой системы симметрична, так как симметричной является исходная матрица:

$$[K] = \sum_e [\Phi^e]^T [K^e] [\Phi^e],$$

что следует из симметрии матрицы модулей упругости $[D]$; она является положительно определенной, если только $S_u \neq \emptyset$; следовательно, при указанных ограничениях система (3.74) имеет решение и притом только одно.

Отметим, что матрица жесткости имеет структуру, близкую к ленточной, т. е. все ее ненулевые элементы сосредоточены вблизи главной диагонали. Именно это свойство обеспечило широкое распространение описанного выше метода для решения задач механики сплошных сред, так как нули матрицы $[K]$ хранить в памяти не нужно, а при решении системы (3.74) матрицу $[K]$ можно обрабатывать блоками, вызывая их поочередно из внешней памяти машины; следовательно, при помощи ЭВМ даже со сравнительно небольшой оперативной памятью можно добиться высокой точности расчетов.

Отметим теперь возможные обобщения.

1. Увеличивая число точек на треугольнике, в котором разыскивается решение, можно увеличить степень полинома в аппроксимации перемещений; например, выбирая в качестве неизвестных перемещения в точках, показанных на рис. 3.3, можем аппроксимировать u , v полиномами второй степени по совокупности переменных:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &\simeq u^e(x, y) = a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \\ &+ a_{10}y + a_{11}xy + a_{20}y^2, \\ v(x, y) &\simeq v^e(x, y) = b_{00} + b_{01}x + b_{02}x^2 + \\ &+ b_{10}y + b_{11}xy + b_{20}y^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

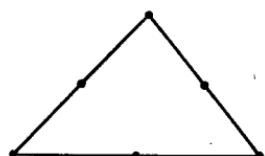


Рис. 3.3

Алгоритм дальнейших преобразований остается тем же, с той лишь разницей, что теперь необходимо в программе различать уравнения, относящиеся к вершинам и к узлам, лежащим на стороне; кроме того, вместо системы шести уравнений (3.30) будем иметь систему двенадцати уравнений, матрица $[B^e]$ в формуле (3.35) оказывается зависящей от координат и т. д.

Отметим, что дальнейшее повышение степени аппроксимирующих полиномов влечет за собой необходимость введения внутренних (по отношению к T_e) узлов; наличие этих узлов сильно усложняет алгоритм решения, поэтому возникает проблема удаления внутренних узлов (подробнее об этих проблемах см. § 4.2).

2. Вместо простейших треугольных элементов можно рассмотреть более сложные многоугольные элементы, практическое же

применение нашли лишь четырехугольные элементы.

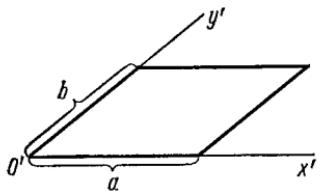


Рис. 3.4

Простейшие четырехугольные элементы — параллелограммы; только для этих элементов оказывается возможным выбор искомых перемещений и построение аппроксимаций, для которых в процессе реализации описанного выше алгоритма не встречаются иррациональные функции. Подробнее об этом будет сказано

в следующей главе; сейчас укажем только вид аппроксимирующих функций для перемещений в плоской задаче теории упругости. Для этого введем косоугольную систему координат, показанную на рис. 3.4. В этой системе имеем аппроксимации:

$$\left. \begin{aligned} u &= 1/ab [(a-x')(b-y')u_1 + x'(b-y')u_2 + \\ &\quad + x'y'u_3 + (a-x')y'u_4]; \\ v &= 1/ab [(a-x')(b-y')v_1 + x'(b-y')v_2 + \\ &\quad + x'y'v_3 + (a-x')y'v_4]. \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Для вычисления деформаций необходимо перейти к общей декартовой системе координат; это преобразование является, очевидно, аффинным — именно это обстоятельство обуславливает преимущества параллелограммов перед другими типами четырехугольных элементов. Произвольный четырехугольник преобразуется в прямоугольник с помощью, вообще говоря, неаффинного преобразования.

Заметим, что аппроксимирующий полином в формуле (3.76) является полиномом степени 1 по каждой переменной в отдельности. При увеличении количества точек на параллелограмме, в которых разыскивается решение или, как говорят, при увеличении числа степеней свободы до девяти, как показано на рис. 3.5, аппроксимирующий полином будет полиномом степени два по

каждой переменной в отдельности, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u &= a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + \\ &+ a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + \\ &+ a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{22}x^2y^2, \\ v &= \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.76')$$

3. Описанный алгоритм без труда обобщается на случай осесимметричной задачи теории упругости, основное отличие от плоской задачи будет состоять в том, что:

а) разбиение на конечные элементы необходимо производить в каком-либо сечении области полу плоскостью, проходящей через ось симметрии;

б) векторы деформаций и напряжений будут иметь размерность 4:

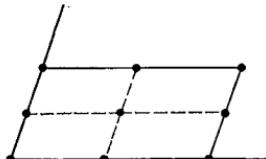


Рис. 3.5

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ 2\varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial v / \partial z \\ \partial u / \partial r \\ u / r \\ \partial u / \partial z + \partial v / \partial r \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}, \quad (3.77)$$

соответственно изменится размерность других матриц $[D]$, $[B^e]$, ...;

в) даже при линейной аппроксимации перемещений матрица $[B^e]$ и вектор $\{\varepsilon\}$ будут функциями координат, что видно из (3.77);

г) если имеются точки тела, лежащие на оси симметрии, при реализации алгоритма необходимо осуществить предельный переход при $r \rightarrow 0$, так как в получаемых выражениях возникает неопределенность типа 0/0 на оси симметрии.

4. Обобщения на случай трехмерных задач ограничены лишь возможностями оперативной памяти ЭВМ, так как в соответствующих элементах число степеней свободы резко возрастает. При переходе от плоской задачи к трехмерной аналогом треугольника будет тетраэдр; линейные аппроксимации перемещений приобретают вид

$$u_\alpha(x_1, x_2, x_3) \simeq a_0^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)}x_1 + a_2^{(\alpha)}x_2 + a_3^{(\alpha)}x_3, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.78)$$

Искомыми неизвестными являются 12 перемещений вершин тетраэдра, векторы деформаций и напряжений имеют размерность, равную шести.

При использовании аппроксимаций второй степени по совокупности переменных используют тетраэдralные элементы, за степени свободы которых выбирают перемещения вершин и перемещения середин ребер; при использовании аппроксимаций степени k по каждой переменной в отдельности в качестве конечных элементов используют параллелепипеды (не обязательно прямоугольные).

В заключение этого параграфа отметим, что описываемые здесь аппроксимации перемещений обеспечивают непрерывность перемещений при переходе через границы конечных элементов и не обеспечивают непрерывности первых производных.

§ 3.3. Алгоритм решения задач об изгибе тонких пластин

В данном параграфе будет рассмотрена приближенная постановка задачи теории упругости, описанная в § 1.6. Принципиальное отличие данной постановки от рассмотренных в предыдущих параграфах состоит в том, что характер деформации в данной точке пластинки нельзя описать заданием значения единственного имеющегося в нашем распоряжении компонента перемещения — прогиба w , здесь необходимо вводить в качестве искомых неизвестных производные от w , имеющие смысл углов поворота окрестности рассматриваемой точки.

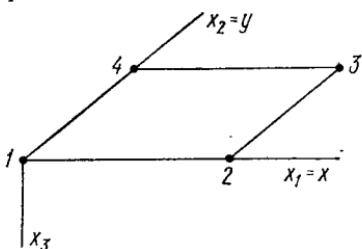


Рис. 3.6

конечные элементы в виде прямоугольников. Рассмотрим отдельный конечный элемент, вершины которого имеют номера $i = k(1)$, $j = k(2)$, $k = k(3)$, $l = k(4)$; для краткости вершины будем помечать соответственно индексами 1, 2, 3, 4 (рис. 3.6).

Нетрудно видеть, что угол поворота края $y = \text{const}$ относительно оси x_1 равен $\theta_1 = -\partial w / \partial x_2$, края $x = \text{const}$ относительно оси $y - \theta_2 = \partial w / \partial x_1$, в качестве неизвестных (искомых) величин в p -м узле ($p = 1, 2, 3, 4$) выберем величины w_p , θ_{1p} , θ_{2p} , которые объединим в вектор

$$\{\delta_p\} = \begin{pmatrix} w_p \\ \theta_{1p} \\ \theta_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(\mathbf{a}_p) \\ -\partial w(\mathbf{a}_p)/(\partial y) \\ \partial w(\mathbf{a}_p)/(\partial x) \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Совокупность искомых перемещений и прогибов, характеризующих приближенно деформацию всего элемента, объединим в вектор

$$\{\delta^*\} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{11} \\ \theta_{21} \\ w_2 \\ \theta_{12} \\ \vdots \\ \theta_{24} \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

имеющий размерность 12; будем говорить, что конечный элемент в этом случае имеет двенадцать степеней свободы.

Обозначим множество полиномов от n переменных степени k по совокупности переменных через P_k^n , множество полиномов от n переменных степени k по каждой переменной в отдельности — через Q_k^n . Как было выяснено, для треугольных и тетраэдральных элементов в обычной постановке задач теории упругости подходят полиномиальные аппроксимации перемещений полиномами из P_k^n , для четырехугольных и параллелепипедов — аппроксимации полиномами из Q_k^n . В рассматриваемом случае ни один из этих типов полиномов не может быть использован, тем не менее попытаемся аппроксимировать прогиб w полиномом, вид которого будем выбирать из тех соображений, чтобы обеспечить непрерывность w при переходе через границы конечных элементов. Так как величины прогибов и поворотов в узлах (вершинах) являются общими для соседних элементов, то в случае непрерывности прогибов форма прогиба на границах рассматриваемого элемента будет определяться четырьмя параметрами (по два в каждом узле) — w и θ_{1p} на границе $x_2 = \text{const}$, θ_{2p} — на границе $x_1 = \text{const}$.

В случае когда w является полиномом, его значение на любой прямой будет полиномом от одной переменной, и если полином от одной переменной определяется четырьмя параметрами, то этот полином — кубический. Приведенные соображения позволяют написать следующую аппроксимацию для w :

$$w(x, y) \simeq w^e(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3 + a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{31}x^3y + a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + a_{13}xy^3, \quad (3.81)$$

полученному из $p \in P_3^2$ добавлением симметричного по x и y выражения $(a_{31}x^3y + a_{13}xy^3)$.

Заметим, что градиент w имеет на границах элемента компоненты, являющиеся полиномами второй степени от одной переменной. Каждый такой полином определяется тремя параметрами, но для нахождения этих параметров имеется всего два условия на концах прямолинейного участка границы, следовательно, производная от w при переходе через границы терпит разрыв и, следовательно, соответствующее поле перемещений не входит в область определения функционалов, встречающихся в задаче изгиба пластинки. Несмотря на это обстоятельство, численные эксперименты показали, что подобные конечные элементы позволяют получать удовлетворительную точность (в последнее время данный прием получил и теоретическое обоснование). Поэтому такие элементы широко используются в конкретных расчетах.

Алгоритм дальнейших преобразований тот же, что и в предыдущих примерах. Коэффициенты a_{ij} в аппроксимации (3.81) выражаются через компоненты вектора $\{\delta^e\}$ посредством решения сле-

дующей системы 12 уравнений с 12 неизвестными:

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = w^{(e)}(x_1, y_1); \\ \theta_{11} = -\partial w^{(e)}(x_1, y_1)/(\partial y); \\ \theta_{21} = \partial w^{(e)}(x_1, y_1)/(\partial x); \\ w_2 = w^{(e)}(x_2, y_2); \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_{24} = \partial w^{(e)}(x_4, y_4)/(\partial x). \end{array} \right\} \quad (3.82)$$

Решив систему (3.82) (вручную или на ЭВМ), найдем

$$w^{(e)}(x, y) = [N^e] \{\delta^e\}, \quad (3.83)$$

где $[N^e]$ — матрица размерности (1×12) , элементы которой зависят от координат; выражение для $[N_i^e]$ опускаем.

Как было выяснено в § 2.9, деформированное состояние пластиинки полностью определяется заданием поля тензора

$$w_{,\alpha\beta} = \partial^2 w / (\partial x_\alpha \partial x_\beta), \quad (3.84)$$

компоненты которого объединим в вектор

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} w_{,11} \\ w_{,22} \\ 2w_{,12} \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Множитель 2 у $w_{,12}$ вводится по той же причине, что и в формуле (3.32) предыдущего параграфа. Напряженное состояние пластиинки характеризуется совокупностью моментов M_{11} , M_{22} , M_{12} , которую будем представлять вектором

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix}.$$

Подстановка выражения (3.83) в формулу (3.85) дает

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e] \{\delta^e\}. \quad (3.86)$$

Связь между $\{\sigma\}$ и $\{\varepsilon\}$ такова (см. § 2.9):

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (3.87)$$

где (для изотропного тела)

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)2 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Дальнейшие преобразования осуществляются так же, как и в предыдущем параграфе; в результате их проведения получается

следующее выражение для вектора сосредоточенных усилий (и моментов) $\{R^e\}$, действующих в вершинах элемента:

$$\begin{aligned} \{R^e\} = & \left[\int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] dx dy \right] \{\delta^e\} - \\ & - \int_{T_e} [N^e]^T q(x, y) dx dy, \end{aligned} \quad (3.89)$$

где $q = q(x, y)$ — интенсивность поперечной нагрузки; матрица

$$[K^e] = \int_{T_e} [B^e]^T [D] [B^e] dx dy, \quad (3.90)$$

характеризующая жесткость отдельного конечного элемента, имеет размерность 12×12 . Явное выражение этой матрицы для случаев изотропного и ортотропного однородного материала приведено в [10]. Отметим еще раз, что ручное вычисление матрицы $[K^e]$ позволяет экономить машинное время, но программы с автоматическим вычислением $[K^e]$ обладают большей универсальностью, так как они нечувствительны к виду анизотропии материала, переменности толщины пластинки и зависимости ее модулей упругости от координат.

Использование треугольных конечных элементов в рассматриваемой задаче изгиба пластин наталкивается на ряд затруднений, связанных с тем обстоятельством, что естественно, казалось бы, аппроксимации для ω приводят или к вырожденности матрицы системы уравнений (3.82), или в случае смещения элемента как жесткого целого дают отличные от нуля деформации внутри элемента. Преодоление этих трудностей облегчается использованием барицентрических координат точек треугольника.

Напомним определение барицентрических координат в общем случае. Пусть a_1, \dots, a_{n+1} — совокупность точек в R_n , не лежащих в одной гиперплоскости; n -симплексом T , порожденным точками a_1, \dots, a_{n+1} , называется замкнутая выпуклая оболочка множества $\{a\}_{i=1}^{n+1}$, т. е. множество линейных комбинаций точек вида

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a_k, \quad (3.91)$$

где

$$\lambda_k \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1. \quad (3.92)$$

Понятие n -симплекса является обобщением понятия треугольника на n -мерный случай. Число λ_k называется барицентрической координатой точки \mathbf{x} относительно вершины a_k ; очевидно, $\lambda_k = 1$, если $\mathbf{x}_k = a_k$ и $\lambda_k = 0$, если $\mathbf{x}_k = a_e$, $e \neq k$; именно это свойство барицентрических координат и обусловило их использование в теории и практике аппроксимации функций по кускам. Для дальнейшего понадобится выражение барицентрических координат

через декартовы; в случае $n=2$ имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = (a_1 + b_1x + c_1y)/2\Delta; \\ \lambda_2 = (a_2 + b_2x + c_2y)/2\Delta; \\ \lambda_3 = (a_3 + b_3x + c_3y)/2\Delta, \end{array} \right\} \quad (3.93)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = x_2y_3 - x_3y_2; \\ b_1 = y_2 - y_3; \\ c_1 = x_3 - x_2, \end{array} \right\} \quad (3.94)$$

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (3.95)$$

Выражения для a_2 , b_2 , c_2 , a_3 , b_3 , c_3 получаются из (3.94) циклической перестановкой индексов. В формулах (3.94) — (3.95) x_i , y_i — декартовы координаты i -й вершины треугольника. Заметим, что барицентрические координаты, по существу, были уже использованы в предыдущем параграфе [формула (3.34), переписанная с учетом равенств (3.37) — (3.38)].

Рассмотрим теперь разбиение пластинки на треугольные конечные элементы и рассмотрим отдельный элемент с номерами вершин $i=k(1)$, $j=k(2)$, $k=k(3)$, которые для краткости будем заменять числами 1, 2, 3. Поле перемещений $w=w(x, y)$ внутри элемента разделим на поле w^* , возникающее за счет чистой деформации, и поле w^R , описывающее смещение и поворот треугольника как жесткого целого; имеем

$$w = w^* + w^R. \quad (3.96)$$

Поскольку рассматривается чистый изгиб пластинки, то точки срединной поверхности смещаются строго по вертикали, поэтому

$$w^R = \sum_i w_i f_i(x),$$

где $w_i = w(a_i)$, $f_i(x)$ — линейные (точнее, аффинные) функции координат, причем $f_i(a_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символы Кронекера).

Заметим, что f_i совпадают с барицентрическими координатами в треугольнике, т. е.

$$w^R = w_1 \lambda_1 + w_2 \lambda_2 + w_3 \lambda_3. \quad (3.97)$$

Так как $w^R(a_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$, то $w^*(a_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Подчеркнем, что поле (3.97) описывает смещение и поворот элемента как жесткого целого лишь в рамках точности гипотез теории изгиба тонких пластин.

Очевидно, поле w^* в каждом узле характеризуется лишь двумя углами поворота:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{1p}^* = -\partial w^*(a_p)/(\partial x); \\ \theta_{2p}^* = \partial w^*(a_p)/(\partial y), \quad p = 1, 2, 3. \end{array} \right\} \quad (3.98)$$

Введем в дополнение к вектору $\{\delta^e\}$, определенному ранее формулой (3.80), вектор $\{\delta^{*e}\}$:

$$\{\delta^{*e}\} = \begin{pmatrix} \delta_1^* \\ \delta_2^* \\ \delta_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11}^* \\ \theta_{21}^* \\ \theta_{12}^* \\ \vdots \\ \theta_{23}^* \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

который будем называть *вектором относительных смещений*.

Предположим, что аппроксимация w^* построена (построением ее зайдемся ниже) и выясним, как определяется матрица жесткости элемента с помощью данной аппроксимации. Для этого прежде всего определим связь между компонентами векторов $\{\delta^e\}$ и $\{\delta^{*e}\}$; она находится подстановкой выражений (3.96) – (3.97) в (3.98):

$$\left. \begin{array}{l} \theta_{1p}^* = \theta_{1p} + \frac{\partial w^R}{\partial y} = \theta_{1p} + (c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3)/2\Delta; \\ \theta_{2p}^* = \theta_{2p} - \frac{\partial w^R}{\partial x} = \theta_{2p} - (b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3)/2\Delta. \end{array} \right\} \quad (3.100)$$

Для программирования алгоритма зависимость (3.100) удобно представлять в матричной форме

$$\{\delta^{*e}\} = [\theta^e] \{\delta^e\}, \quad (3.101)$$

где

$$[\theta^e] = \begin{bmatrix} c_1 & 2\Delta & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 2\Delta & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 \\ \hline c_1 & 0 & 0 & c_2 & 2\Delta & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 2\Delta & -b_3 & 0 & 0 \\ \hline -c_1 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & -c_3 & 2\Delta & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 2\Delta \end{bmatrix}. \quad (3.102)$$

Оперируя с вектором полных смещений $\{\delta^e\}$, можно вычислить вектор сосредоточенных узловых усилий

$$\{R^e\}^T = \{R_1^e, R_{11}^e, R_{21}^e, R_2^e, R_{12}^e, \dots, R_{23}^e\} \quad (3.103)$$

точно в таком же виде, как это было сделано для треугольного элемента.

Так как выражение для w^R фиксировано, то в дальнейшем необходимо производить аппроксимацию лишь w^* . В связи с этим является целесообразным введение вектора усилий

$$\{R^{*e}\}^T = \{R_{11}^{*e}, R_{21}^{*e}, R_{12}^{*e}, \dots, R_{23}^{*e}\}, \quad (3.104)$$

соответствующего вектору относительных смещений, причем работа вектора полных усилий (3.103) на любом элементарном перемещении $\{\delta(\delta^e)\}$ должна быть равна работе вектора усилий (3.104) на элементарном перемещении

$$\{\delta(\delta^e)\} = [\theta^e] \{\delta(\delta^e)\}. \quad (3.105)$$

Работа внешних усилий на перемещениях, соответствующих смещению и повороту элемента как жесткого целого, равна нулю, так как эти усилия уравновешены.

Имеет место равенство

$$\{R^e\}^T \{\delta(\delta^e)\} = \{R^{*e}\}^T \{\delta(\delta^{*e})\} = \{R^{*e}\}^T [\theta^e] \{\delta(\delta^e)\}. \quad (3.106)$$

Из (3.106) следует, что

$$\{R^e\} = [\theta^e]^T \{R^{*e}\}. \quad (3.107)$$

Повторяя рассуждения, проведенные ранее для вектора $\{R^e\}$, найдем, что связь между $\{R^{*e}\}$ и $\{\delta^{*e}\}$ представлена формулой

$$\begin{aligned} \{R^{*e}\} &= \left(\int_{T_e} [B^{*e}]^T [D] [B^{*e}] dx dy \right) \{\delta^{*e}\} - \int_{T_e} [N^{*e}]^T q(x, y) dx dy = \\ &\equiv [K^{*e}] \{\delta^{*e}\} - \{q^{*e}\} \end{aligned} \quad (3.108)$$

(с соответствующей модификацией для случая, когда одна или несколько вершин лежат на границе пластинки), причем связь между $[K^e]$ и $[K^{*e}]$ имеет вид

$$[K^e] = [\theta^e]^T [K^{*e}] [\theta^e]. \quad (3.109)$$

Таким образом, построение матрицы жесткости $[K^e]$ треугольного элемента свелось к построению матрицы $[K^{*e}]$ размерности (6×6) , что в свою очередь эквивалентно нахождению матриц $[N^{*e}]$ и $[B^{*e}]$, связывающих $\{\delta^{*e}\}$, w^{*e} и $\{e^{*e}\}$:

$$\begin{aligned} w^{*e} &= [N^{*e}] \{\delta^{*e}\}; \\ \{e^{*e}\} &= [B^{*e}] \{\delta^{*e}\}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Очевидно, $[N^{*e}]$ имеет размерность (1×6) :

$$[N^{*e}] = [N_{11}^*, N_{21}^*, N_{12}^*, N_{22}^*, N_{13}^*, N_{23}^*].$$

Коэффициенты N_{ij}^* находятся из условий, вытекающих из определения

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*(a_q)}{\partial y} &= \\ &= \left[\frac{\partial N_{11}^*}{\partial y}, \frac{\partial N_{21}^*}{\partial y}, \frac{\partial N_{12}^*}{\partial y}, \frac{\partial N_{22}^*}{\partial y}, \frac{\partial N_{13}^*}{\partial y}, \frac{\partial N_{23}^*}{\partial y} \right] \cdot \{0_{11}^*, 0_{21}^*, 0_{12}^*, 0_{22}^*, 0_{13}^*, 0_{23}^*\}^T, \\ \frac{\partial w^*(a_q)}{\partial x} &= \left[\frac{\partial N_{11}^*}{\partial x}, \frac{\partial N_{21}^*}{\partial x}, \frac{\partial N_{12}^*}{\partial x}, \frac{\partial N_{22}^*}{\partial x}, \frac{\partial N_{13}^*}{\partial x}, \frac{\partial N_{23}^*}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Имеем

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial N_{1p}^*(\alpha_q)}{\partial y} = -\delta_{pq}, \quad \frac{\partial N_{2p}^*(\alpha_q)}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial N_{1p}^*(\alpha_q)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial N_{2p}^*(\alpha_q)}{\partial x} = \delta_{pq}. \end{array} \right\} \quad (3.112)$$

Перебором возможных вариантов решения системы (3.111) — (3.113) можно убедиться в том, что простейшим решением будет

$$\left. \begin{array}{l} N_{11}^* = (b_2 \lambda_2 - b_3 \lambda_3) \lambda_1^2; \\ N_{21}^* = (c_3 \lambda_2 - c_2 \lambda_3) \lambda_1^2, \end{array} \right\} \quad (3.113)$$

остальные четыре соотношения получаются из соотношений (3.113) циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$.

Экспериментально было установлено, что аппроксимация перемещений, обеспечивающая независимость напряжений от координат внутри отдельного элемента, всегда дает сходимость последовательности приближенных решений к точному, поэтому при построении простейших вариантов метода целесообразно использовать аппроксимации, при которых вектор $\{e^e\}$ — константа внутри T_e . Принимая указанное требование в рассматриваемой проблеме, найдем, что

$$\left. \begin{array}{l} N_{11}^* = b_3 \left(\lambda_1^2 \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) - b_2 \left(\lambda_1^2 \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right); \\ N_{21}^* = c_3 \left(\lambda_1^2 \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) - c_2 \left(\lambda_1^2 \lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right) \end{array} \right\} \quad (3.114)$$

$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1).$

Отметим, что использованные при построении формул (3.114) эмпирические соображения будут несколько систематизированы и обоснованы с общих позиций в следующей главе.

Легко видеть, что аппроксимация (3.114) обеспечивает непрерывность прогибов при переходе через границы конечных элементов и не обеспечивает непрерывность первых производных.

Один из возможных способов построения аппроксимаций, удовлетворяющих требованию непрерывности первых производных всюду, состоит в следующем. Предположим, что существуют функции $\bar{\Phi}_{pq} = \bar{\Phi}_{pq}(x)$, $p \neq q$, удовлетворяющие следующим требованиям:

- $\bar{\Phi}_{pq}(x) \in C^1(T_e)$;
- $\bar{\Phi}_{pq}(x) = 0$, $C^1(T_e)$ при $x \in \partial T_e$;
- $\frac{\partial \bar{\Phi}_{pq}(x_s)}{\partial x_i} = 0$, $1 \leq p, q, s \leq 3$, $1 \leq i \leq 2$;
- $$\left. \frac{\partial \bar{\Phi}_{pq}}{\partial v} \right|_{\partial T_e} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [a_p, a_r], x \in [a_q, a_r], \\ & p \neq r, q \neq r, 1 \leq r \leq 3 \\ a_0 + a_1 s + a_2 s^2 & \text{при } x \in [a_p, a_q] \\ 1 & \text{при } x = 1/2(a_p + a_q), \end{cases}$$

где $[a_p, a_q], \dots$ — множество точек, лежащих на отрезке, соединяющем a_p и a_q ; s — длина дуги границы, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки.

В качестве упражнения рекомендуется проверить, что набор функций $\bar{\Phi}_{pq}$ может быть задан по формуле

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}_{pq} &\equiv \Phi_r = \frac{\lambda_r \lambda_p^2 \lambda_q^2}{(\lambda_r + \lambda_p)(\lambda_r + \lambda_q)}, \\ p \neq q \neq r \neq p, \quad 1 &\leqslant p, q, r \leqslant 3. \end{aligned} \right\} \quad (3.115)$$

Очевидно, что добавление любой из функций $\bar{\Phi}_{pq}$ к ранее построенным аппроксимациям, которые будем обозначать через $w^{(ct)}$, не изменит вектора узловых перемещений (именно из этого условия функции $\bar{\Phi}_{pq}$ и строились). Составим комбинацию

$$w^e = w^{ct} + \gamma_1 \bar{\Phi}_1 + \gamma_2 \bar{\Phi}_2 + \gamma_3 \bar{\Phi}_3 \equiv w^{ct} + \{\gamma\}^P \{\bar{\Phi}\}, \quad (3.116)$$

где числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ подберем так, чтобы нормальная производная от функции $w^{(e)}$ на каждой стороне треугольника T_e была линейной функцией параметра s . Покажем, что такой выбор возможен в силу требований а) — г), наложенных на $\bar{\Phi}_{pq}$. В самом деле, введем вектор нормальных производных в серединах сторон треугольника

$$\{\gamma^v(f)\} = \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial f(0,5(a_2+a_3))}{\partial v} \\ &\frac{\partial f(0,5(a_1+a_3))}{\partial v} \\ &\frac{\partial f(0,5(a_1+a_2))}{\partial v} \end{aligned} \right\}. \quad (3.117)$$

В силу свойства г) имеем

$$\{\gamma^v(\gamma_1 \bar{\Phi}_1 + \gamma_2 \bar{\Phi}_2 + \gamma_3 \bar{\Phi}_3)\} = \{\gamma\}. \quad (3.118)$$

Имея явное выражение для w^{ct} , всегда можем найти

$$\{\gamma^v(w^{ct})\} = [Z] \{\delta^e\}. \quad (3.119)$$

Нормальная производная от $w^{(e)}$ всегда должна быть линейной функцией от s , тогда можно выразить значение этой линейной функции через ее граничные значения, которые, в свою очередь, линейно выражаются через компоненты вектора $\{\delta^e\}$; таким образом,

$$\{\gamma^v(w^{(e)})\} = [Y^e] \{\delta^e\}, \quad (3.120)$$

где $[Y^e]$ — известная матрица. С другой стороны, в силу аддитивности $\{\gamma^v(f)\}$ имеем

$$\{\gamma^v(w^{(e)})\} = [Z] \{\delta^e\} + \{\gamma\}. \quad (3.121)$$

Сравнивая выражение (3.120) с (3.121), найдем искомые значения для γ_1 , γ_2 , γ_3 :

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \{\gamma\} = ([Y^e] - [Z^e]) \{\delta^e\}. \quad (3.122)$$

Другой способ обеспечения непрерывности первых производных состоит в введении дополнительных узлов на серединах сторон треугольников и дополнительных неизвестных в этих узлах — значений нормальных производных в этих узлах. В этом варианте величины γ_1 , γ_2 , γ_3 нужно с самого начала включить в состав компонентов вектора $\{\delta^e\}$, при этом общее число степеней свободы возрастет с 9 до 12 и, следовательно, метод усложнится.

§ 3.4. Алгоритм определения собственных значений и собственных элементов

Рассмотрим уравнение

$$Au = \lambda Bu, \quad (3.123)$$

где A и B — самосопряженные и положительно определенные линейные операторы; λ — числовая параметр. Требуется найти значения λ , при которых уравнение (3.123) имеет нетривиальное решение (а также решения, которые определяются, очевидно, с точностью до числового множителя).

Будем использовать результаты § 3.1, 3.3. Предположим, что область Ω (одно-, дву- или трехмерная) представлена в виде объединения конечных элементов T_e , выберем степени свободы (исковые параметры), которые на элементе T_e объединим в вектор $\{\delta^e\}$, так что

$$\{u(x)\}_{T_e} \simeq \{u^e(x)\} = [N^e(x)] \{\delta^e\}; \quad (3.124)$$

построим вектор глобальных неизвестных $\{\delta\}$ (см. § 3.2), матрицу жесткости системы

$$[K] = \sum_e [\Phi^e]^T [K^e] [\Phi^e]$$

и вектор правой части уравнения (3.123), равный

$$\sum_e [\Phi^e]^T \{\tilde{R}^e\},$$

где

$$\{\tilde{R}^e\} = \lambda \int_{T_e} [N^e]^T \{Bu\} d\Omega - \lambda [B^e] \{\delta^e\}, \quad (3.125)$$

так что уравнение (3.124) приведено к линейной алгебраической системе вида

$$[K]\{\delta\} = \lambda [M]\{\delta\}, \quad (3.126)$$

где матрица $[M]$ образуется из локальных матриц $[M^e]$, введенных по формуле

$$[M^e] = \int_{T_e} [N^e]^T [B] [N^e] d\Omega \quad (3.127)$$

в соответствии с алгоритмом, описание которого дано в § 3.2. (В задачах об определении собственных частот колебаний матрица $[M]$ называется *матрицей масс*.)

В качестве примера рассмотрим задачу § 2.14, здесь [см. систему (3.28)]:

$$([K]\{\delta\})_k = u_{k-1}\left(\frac{ES(x_k)}{h_k}\right) + u_k\left(-\frac{ES(x_k)}{h_k} - \frac{ES(x_k)}{h_{k+1}}\right) + u_{k+1}\left(\frac{ES(x_k)}{h_k}\right), \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} ([M]\{\delta\})_k &= u_{k-1}\left[\frac{1}{h_k^3} \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) S(x) (x - x_{k-1}) (x_k - x) dx\right] + \\ &+ u_k\left[-\frac{1}{h_k^3} \int_{x_{k-1}}^{x_k} p(x) S(x) (x_{k-1} - x) (x_{k-1} - x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_{k+1}^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) S(x) (x_{k+1} - x) (x_k - x) dx\right] + \\ &+ u_{k+1}\left[\frac{1}{h_{k+1}^3} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) S(x) (x_{k+1} - x) (-x_k + x) dx\right]. \quad (3.129) \end{aligned}$$

[Выражение (3.129) следует из системы (3.28) с учетом формулы (3.27).]

Итак, по методу конечных элементов мы перешли к уравнению

$$[K]\{\delta\} = \lambda[M]\{\delta\}, \quad (3.130)$$

где $[K]$ и $[M]$ — квадратные матрицы размера $N \times N$, обладающие свойством симметрии и положительной определенности. Задача отыскания ненулевых λ_i , при которых система (3.130) имеет не-тривиальное решение, представляет собой хорошо изученную задачу линейной алгебры; для ее решения, как известно, надо составить и решить уравнение

$$\det |[K] - \lambda[M]| = 0 \quad (3.131)$$

относительно параметра λ ; обозначая корни уравнения (3.131) через $\lambda_1^N, \dots, \lambda_N^N$ и подставляя их в (3.130), можем определить собственные элементы u_1^N, \dots, u_N^N .

При определенных ограничениях имеет место сходимость

$$\lambda_i^N \rightarrow \lambda_i, \quad u_i^N \rightarrow u_i,$$

где λ_i — точные значения собственных чисел уравнения (3.123), u_i — собственные элементы.

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА ЭВМ (II)

§ 4.1. Приведение метода конечных элементов к форме метода Ритца

Цель настоящего параграфа — показать, что сформулированные в предыдущей главе методы решения задач теории упругости по существу совпадают с описанным в § 2 приложения II методом Ритца при специальном выборе базисных функций φ_i , и наметить путь к обоснованию, состоящему в доказательстве теорем о сходимости и оценке погрешности.

Начнем со случая простейшей задачи о растяжении стержня, рассмотренной в начале предыдущей главы. На k -м участке $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ имеем следующую аппроксимацию перемещений:

$$u(x) \simeq u^{(k)}(x) = \frac{1}{h_k} [u_{k-1}(x_k - x) + u_k(-x_{k+1} + x)]. \quad (4.1)$$

Потребовав непрерывности перемещений $u^{(k)}(x)$ при переходе через границу участка, объединим формулы (4.1), записав следующее основное представление для аппроксимации $u_h(x)$ поля перемещений $u(x)$ во всем стержне:

$$u(x) \simeq u_h(x) = \sum_{k=1}^N u_k \varphi_k(x), \quad (4.2)$$

где

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_k} (x - x_{k-1}), & x_{k-1} \leq x \leq x_k, \\ \frac{1}{h_{k+1}} (x_{k+1} - x), & x_k \leq x \leq x_{k+1}, \\ 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}], \end{cases} \quad (4.3)$$

причем при $k=N$ в определении (4.3) выпадает вторая строка.

Как было установлено в § 2.14, рассматриваемая простейшая задача эквивалентна интегральному тождеству:

$$\int_0^L E S(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^L F(x) S(x) v(x) dx, \quad \forall v \in V, \quad (4.4)$$

где

$$V = \{v \mid v \in H^1(0, L), v(0) = 0\}. \quad (4.5)$$

Реализуя метод Ритца для приближенного решения уравнения (4.4) с базисными функциями φ_k , определенными формулой

(4.3), придем к следующей системе относительно искомых величин u_k :

$$\sum_{k=1}^N u_k \int_0^L ES(x) \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_e}{dx} dx = \int_0^L F(x) S(x) \varphi_e(x) dx. \quad (4.6)$$

Так как $\varphi_e \not\equiv 0$ только на отрезке $[x_{e-1}, x_{e+1}]$, $\varphi_k \not\equiv 0$ на отрезке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ (с соответствующим изменением для $k, l = N$), то систему (4.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & -u_{e-1} \left[\frac{1}{h_e^2} \int_{x_{e-1}}^{x_e} ES(x) dx \right] + u_e \left[\frac{1}{h_e^2} \int_{x_{e-1}}^{x_e} ES(x) dx + \frac{1}{h_{e+1}^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} ES(x) dx \right] - \\ & \quad - u_{e+1} \left[\frac{1}{h_{e+1}^2} \int_{x_e}^{x_{e+1}} ES(x) dx \right] = \\ & = \int_{x_{e-1}}^{x_e} F(x) S(x) \frac{1}{h_e} (x - x_{e-1}) dx + \int_{x_e}^{x_{e+1}} F(x) S(x) \frac{1}{h_{e+1}} (x_e - x) dx, \quad (4.7) \\ & e = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

что совпадает с системой уравнений метода конечных элементов (3.46) предыдущей главы.

Таким образом, предложенный в предыдущей главе метод конечных элементов совпадает, по существу, с методом Ритца. Из общих результатов § 2 приложения II следует, что для доказательства сходимости метода при $h = \max h_k \rightarrow 0$ достаточно проверить полноту системы функций (4.3) в V ; последняя проблема сводится к исследованию возможности аппроксимации функции из V кусочно-полиномиальными функциями.

Обратимся теперь к плоской задаче теории упругости. Рассмотрим триангуляцию области Ω , подчиняющуюся сформулированным в § 3.2 предыдущей главы условиям. Обозначим, как и ранее, через a_i радиус-векторы вершин треугольников; для простоты предположим, что $S = S_n$ и нумерация осуществлена таким образом, что вершины, не лежащие на S_n , имеют номера от 1 до N , будем обозначать совокупность этих вершин через $\{a_i\}_{i=1}^N$. Предположим, что существует совокупность $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ непрерывных функций (скалярный базис):

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq N; \quad (4.8)$$

$$\varphi_i(x) \in P_1(T_e), \quad x \in T_e. \quad (4.9)$$

Вид функции φ_i , соответствующей внутреннему узлу (вершине), показан на рис. 4.1. Фактическое построение таких функций будет произведено в следующем параграфе.

Введем в рассмотрение векторные базисные функции $w_{\alpha i}$, $1 \leq \alpha \leq n$ (n — размерность пространства искомых функций, в дан-

ном случае равная 2) — каждой точке a_i поставим в соответствие n функций

$$\{\mathbf{w}_{1i}, \dots, \mathbf{w}_{ni}\} = \{\mathbf{w}_{\alpha i}\}_{\alpha=1}^n, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{w}_{\alpha i} = (0, \dots, 0, \varphi_i, 0, \dots, 0), \quad (4.11)$$

причем отличный от нуля компонент вектора $\mathbf{w}_{\alpha i}$ имеет номер α .

Базисные функции должны быть, во-первых, векторными, поскольку само решение принадлежит пространству вектор-функций, и, во-вторых, коэффициенты разложения по соответствующему базису должны быть равны компонентам исходного решения:

$$\mathbf{u} \simeq \mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha=1}^n u_{hi}(\mathbf{a}_i) \mathbf{w}_{\alpha i}. \quad (4.12)$$

Из этой формулы вытекает, что

$$\mathbf{w}_{\alpha i}(\mathbf{a}_k) = \delta_{ik} \mathbf{k}_\alpha,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера; \mathbf{k}_α — единичный вектор декартова базиса; отсюда и следует представление (4.12).

Записав плоскую задачу теории упругости в виде (в случае $S_\sigma = \emptyset$)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (4.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} a_{ijhh} \epsilon_{hh}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

будем разыскивать ее приближенное решение в подпространстве V_h , натянутое на функции $\mathbf{w}_{\alpha i}$, $1 \leq \alpha \leq n$, $1 \leq i \leq N$. Специальная структура функций $\mathbf{w}_{\alpha i}$ позволяет написать следующее представление для функций:

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_h(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^n u_{h\beta}(\mathbf{a}_j) \mathbf{w}_{\beta j}. \quad (4.15)$$

Подставляя разложение (4.15) в равенство (4.13) и полагая поочередно в этом равенстве $\mathbf{v} = \mathbf{w}_{\alpha i}$, придем к следующей системе уравнений:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^n u_{h\beta}(\mathbf{a}_j) a(\mathbf{w}_{\beta j}, \mathbf{w}_{\alpha i}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_{\alpha i} \rangle, \quad (4.16)$$

$$1 \leq \alpha \leq n, \quad 1 \leq i \leq N$$

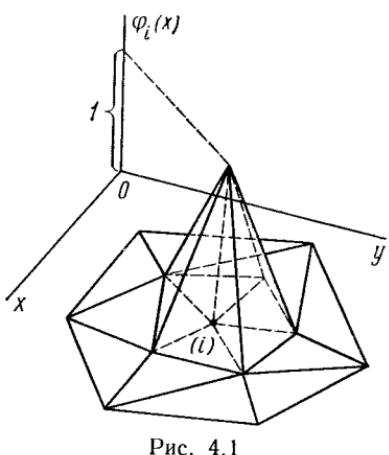


Рис. 4.1

для определения приближенных значений компонентов перемещений $u_{\alpha\beta}(\boldsymbol{a}_j)$ в узлах \boldsymbol{a}_j .

Используя явный вид функций $\varpi_{\alpha\beta}$, нетрудно убедиться в том, что полученная система уравнений (4.16) совпадает с найденной ранее системой (3.70) или (3.74).

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для случая разбиения Ω на четырехугольные подобласти, при использовании аппроксимаций степени выше первой, для трехмерных задач теории упругости. В задаче изгиба тонких пластин необходимо различать базисные функции, соответствующие прогибу и производным от прогиба, в связи с чем простая система уравнений (4.8) для определения базисных функций заменяется достаточно громоздкой системой; подробнее об этом будет сказано позже.

Таким образом, описанный в предыдущей главе метод решения краевых задач теории упругости может быть сведен к методу Ритца при специальном выборе базисных функций в последнем и, следовательно, может быть перенесен на любые задачи, которые поставлены в форме интегрального тождества $a(u, v) = \langle f, v \rangle$.

Для изучения сходимости метода, т. е. изучения поведения решения u_h при $h = \max_e h_e = \max_e \text{diam } T_e \rightarrow 0$ достаточно на основании результатов общей теории изучить погрешность аппроксимации функций из V функциями, определенными кусочным образом так, как это описано выше.

§ 4.2. Интерполяция Лагранжа и конечные элементы для операторов II порядка

Цель настоящего параграфа — некоторая формализация проведенных ранее построений, удобная для формулировок и доказательства соответствующих теорем; изложение следует в основной работе П. Равьяра.

Пусть $\Sigma = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^N$ — совокупность попарно различных точек из R_n и T — замкнутая выпуклая оболочка этого множества; будем предполагать, что точки \boldsymbol{a}_i не расположены все в одной гиперплоскости, а P — конечно-мерное пространство вещественных функций, заданных на T .

Определение. Будем говорить, что Σ является P -разрешимым, если для любых N скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ существует функция $p \in P$ и притом только одна, для которой

$$p(\boldsymbol{a}_i) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.17)$$

Определение. Пусть имеется функция v , заданная на Σ , и Σ — P -разрешимо; P — интерполяцией Лагранжа функции v на T будем называть функцию $(\pi v)(\boldsymbol{x}) \in P$, для которой

$$(\pi v)(\boldsymbol{a}_i) = v(\boldsymbol{a}_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.18)$$

Из определения P -разрешимости вытекает единственность интерполяций.

Пусть Σ является P -разрешимым, определим базис в P — набор функций $\{p_i\}_{i=1}^N$ из условий:

$$p_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (4.19)$$

где, как обычно, δ_{ij} означает символ Кронекера; определение (4.19) удобно для построения интерполяций метода конечных элементов.

Легко видеть, что если существует N функций, таких, что для любых i, j найдется одна функция p_i , для которой

$$p_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (4.20)$$

то, во-первых, Σ является P -разрешимым, а во-вторых, набор $\{p_i\}_{i=1}^N$ может быть выбран за базис.

Цель дальнейших определений и рассуждений состоит в том, чтобы привести проблему построения функций базиса p_i для произвольной области (из рассматриваемого класса областей) к аналогичной проблеме для возможно более простой (канонической) области.

Определение. Два множества $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ и $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$ называются эквивалентными, если существует обратимое аффинное преобразование F из R_n в R_n такое, что

$$\mathbf{a}_i = F(\hat{\mathbf{a}}_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (4.21)$$

Если функция $v = v(\mathbf{x})$ задана в некоторой области T , то, применяя к точкам этой области преобразование F^{-1} , обратное F , можем считать, что v задана в области \hat{T} , полученной из T с помощью аффинного преобразования F^{-1} ; введем обозначения:

$$\left. \begin{array}{l} v(\mathbf{x}) = v(F(\hat{\mathbf{x}})) \equiv \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{v} = v \circ F; \\ v(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{v}(F^{-1}(\mathbf{x})) \equiv v(\mathbf{x}), \quad v = \hat{v} \circ F^{-1}, \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

где значок « \circ » означает суперпозицию функций.

В дальнейшем все функции, заданные в преобразованной области \hat{T} , будем помечать значком « \wedge »*). Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.1. Пусть $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^N$ является \hat{P} -разрешимым и $\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^N$ — множество, эквивалентное $\hat{\Sigma}$, тогда Σ является P -разрешимым, где

$$P = \{p \mid \forall p \in P \exists \hat{p} \in \hat{P}, p = \hat{p} \circ F^{-1}\}. \quad (4.23)$$

*). Напомним, что ранее значком « \wedge » были помечены тензорные величины; из контекста всегда будет ясно, о чём идет речь.

Доказательство. Пусть $\{\hat{p}_i\}_{i=1}^N$ — базис в \hat{P} , такой, что

$$\hat{p}_i(\hat{a}_j) = \delta_{ij}. \quad (4.24)$$

Определим функции

$$p_i = \hat{p}_i \circ F^{-1}. \quad (4.25)$$

Очевидно,

$$p_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}. \quad (4.26)$$

Так как F по определению невырожденное, то размерность P равна N , следовательно, $\{p_i\}$ является базисом в P ; как было отмечено выше, в таком случае Σ является P -разрешимым.

Пусть \hat{v} — некоторая функция, заданная на $\hat{\Sigma}$, ее \hat{P} -интерполяцию Лагранжа будем обозначать через $\hat{\pi}\hat{v}$:

$$\hat{\pi}\hat{v} = \sum_{i=1}^N v(\hat{a}_i) \hat{p}_i. \quad (4.27)$$

Имеет место равенство, важное для дальнейшего:

$$\hat{\pi}\hat{v} = \pi\hat{v}. \quad (4.28)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}\hat{v} &= \sum_{i=1}^N \hat{v}(\hat{a}_i) \hat{p}_i = \sum_{i=1}^N \hat{v}(F^{-1}(\mathbf{a}_i)) \hat{p}_i(F^{-1}(\mathbf{x})) = \\ &= \sum_{i=1}^N (v(\mathbf{a}_i) p_i \circ F) = \pi\hat{v}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь некоторые примеры. Пусть $P = P_k$ пространство полиномов степени k по совокупности n переменных, T — n -симплекс в R_n с вершинами, т. е. множество точек \mathbf{x} вида см. § 3.3)

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \lambda_i(\mathbf{x}),$$

где $\lambda_i(\mathbf{x}) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\mathbf{x}) = 1$. В качестве \hat{T} выберем n -симплекс с вершинами

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0); \\ \hat{\mathbf{a}}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0); \\ \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_n = (0, 0, 0, \dots, 1); \\ \hat{\mathbf{a}}_{n+1} = (0, 0, 0, \dots, 0). \end{array} \right\} \quad (4.29)$$

Такой n -симплекс будем называть *опорным* или *базисным* и именно для него проводить построение базисных функций.

Заметим, что совокупность вершин Σ любого невырожденного n -симплекса эквивалентна (в смысле данного выше определения) множеству $\hat{\Sigma}$ вершин опорного n -симплекса.

Пусть $\hat{\lambda}_i$ — барицентрические координаты точки \hat{x} в опорном n -симплексе; по определению имеем

$$\left. \begin{aligned} \hat{\lambda}_i(\hat{x}) &= \hat{x}_i, \quad 1 \leq i \leq n; \\ \hat{\lambda}_{n+1}(\hat{x}) &= 1 - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Докажем, что барицентрические координаты точки в n -симплексе являются инвариантами аффинного преобразования, в самом деле

$$x = F(\hat{x}) = F\left(\sum_{i=1}^{n+1} \hat{\lambda}_i \hat{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i F(\hat{a}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i. \quad (4.31)$$

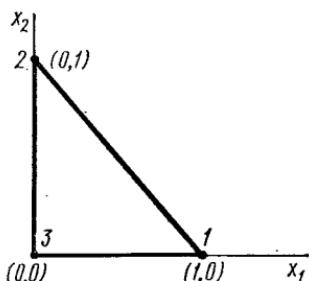


Рис. 4.2

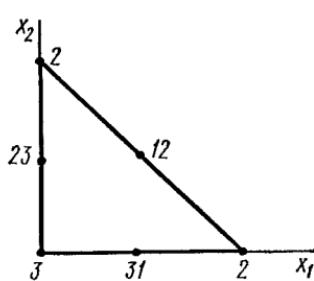


Рис. 4.3

Таким образом, если построить базисные функции p_i в виде функций от барицентрических координат на \hat{T} , то тем самым будут построены базисные функции для любого T , полученного из \hat{T} с помощью невырожденного аффинного преобразования.

Пример 4.1. Совокупность вершин $\hat{\Sigma} = \{\hat{a}_i\}_{i=1}^{n+1}$ опорного n -симплекса является P_1 -разрешимой, базисные функции \hat{p}_i совпадают с барицентрическими координатами

$$\hat{p}_i = \hat{\lambda}_i. \quad (4.32)$$

В случае $n=2$ опорный n -симплекс — треугольник, показанный на рис. 4.2; базисные функции

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_1 &= \hat{x}_1, \\ \hat{p}_2 &= \hat{x}_2, \\ \hat{p}_3 &= 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Пример 4.2. Пусть Σ — совокупность вершин и середин ребер некоторого n -симплекса в R_n ; утверждается, что Σ является P_2 -разрешимым, причем, если занумеровать точки, лежащие на серединах ребер, соединяющих вершины a_i , a_j , двойным индексом ij (порядок следования i и j несуществен, рис. 4.3), то выражение для базисных функций приобретает вид

$$p_i = \lambda_i (2\lambda_i - 1), \quad p_{ij} = 4\lambda_i \lambda_j. \quad (4.34)$$

Доказательство сформулированных утверждений осуществляется путем перехода к базисному n -симплексу с учетом того, что число коэффициентов в полиноме наиболее общего вида из P_k в R_n равно числу сочетаний c_{n+k}^k , а число ребер n -симплекса равно $n(n+1)/2$.

Пример 4.3. Выберем в качестве Σ множество вершин n -симплекса T и множество точек $\{a_{ijk}\}$, каждая из которых является барицентром трех вершин a_i, a_j, a_k , не обязательно различных. В случае $i \neq j \neq k \neq i$ a_{ijk} является центром тяжести треугольника с вершинами a_i, a_j, a_k , если $i=j, i=k$, то $a_{iji}=a_{iij}=a_{jii}=1/3(2a_i+a_j)$ и т. д. Выбор барицентров в качестве элементов Σ обусловлен тем, что барицентры являются инвариантами афинного преобразования.

Утверждается, что множество

$$\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n+1} \cup \{a_{ijk}\}_{1 \leq i < j < k \leq n+1} \quad (4.35)$$

является P_3 -разрешимым, функции базиса для данного случая определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1) (3\lambda_i - 2), & 1 \leq i \leq n+1, \\ p_{ij} &= \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1), & 1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j, \\ p_{ijk} &= 27\lambda_i \lambda_j \lambda_k, & 1 \leq i < j < k \leq n+1. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Доказательство этого утверждения, как и в предыдущем примере осуществляется путем перехода к опорному n -симплексу с использованием явных формул для λ_i и сравнением числа коэффициентов в полиноме из P_3 с количеством точек в (3.35).

Расположение точек в данном примере и их нумерация для $n=2$ показано на рис. 4.4.

Нетрудно осуществить построение множества Σ , являющегося P_k -разрешимым для любого k . Но как было показано в примере 4.3, начиная с $k=3$, появляются узлы интерполяции, лежащие внутри области T , это обстоятельство затрудняет формирование

матрицы жесткости системы. Была поставлена следующая проблема: каким образом можно увеличить степень аппроксимирующих полиномов, не вводя внутренних (по отношению к T) узлов интерполяции. Оказалось, что ответ на этот вопрос является положительным, если искать подходящие интерполяции в соответствующем подпространстве P_k . Рассмотрим подробно решение поставленной проблемы для случая $k=3$.

Пример 4.4. В качестве Σ рассмотрим следующее множество точек:

$$\Sigma = \{a_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j}, \quad (4.37)$$

полученное из множества Σ предыдущего примера отбрасыванием внутренних узлов; расположение точек Σ на T для $n=2$ показано на рис. 4.5. Для получения ограничений, которым следует подчинять коэффициенты полинома из P_3 , с тем чтобы число независимых коэффициентов стало равным числу точек в рассматриваемом множестве Σ , используем то обстоятельство, что значение

любой $v \in P_2$ в центре тяжести выражается через ее значения в узлах, лежащих на границе; указанную связь и примем в качестве искомых ограничений на коэффициенты полинома из P_3 . Имеет место следующая лемма.

Лемма 4.2. Пусть $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k$ — вершины треугольника T в R_n , $n \geq 2$, $i \neq j \neq k \neq i$ и $\mathbf{a} = 1/3(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k)$ — центр тяжести треугольника T , тогда $\forall v(\mathbf{x}) \in P_2$ имеем

$$v(\mathbf{a}) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}_i) + \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq 3, i \neq j} v(\mathbf{a}_{ij}). \quad (4.38)$$

Доказательство. Применив формулу Тейлора для выражения $v(\mathbf{a}_i)$ через $v(\mathbf{a})$ и учитывая, что $v(\mathbf{x}) \in P_2$ и, следовательно, третьи производные от v равны нулю, найдем

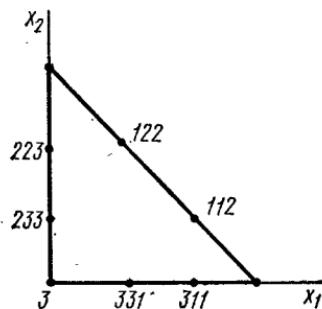


Рис. 4.5

$$\begin{aligned} v(\mathbf{a}_i) &= v(\mathbf{a}) + \nabla v(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}) + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

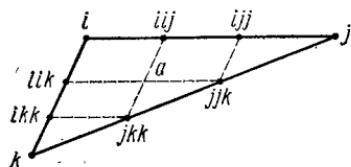


Рис. 4.6

где ∇ — оператор Гамильтона:

$$\left. \begin{aligned} \nabla v(\mathbf{x}) &= \frac{\partial v}{\partial x_i} e_i, \\ \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \xi &= \frac{\partial v}{\partial x_i} \xi_i, \\ \nabla \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \cdot ab &= \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} a_i a_j. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Из очевидных геометрических соображений имеем (рис. 4.6):

$$\mathbf{a}_{iik} - \mathbf{a} = 1/3(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j). \quad (4.41)$$

Применив еще раз формулу Тейлора, получим

$$\begin{aligned} v(\mathbf{a}_{iik}) &= v(\mathbf{a}) + \nabla v(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}_{iik} - \mathbf{a}) + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_{iik} - \mathbf{a})(\mathbf{a}_{iik} - \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Подстановка зависимостей (4.41) в разложение (4.42) дает

$$\begin{aligned} v(\mathbf{a}_{iik}) &= v(\mathbf{a}) + \frac{1}{3} \nabla v(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) + \\ &+ \frac{1}{18} \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Смысл дальнейших преобразований — в исключении из разложений (4.39), (4.43) производных от v .

Меняя местами в (4.43) индексы i и j и складывая получающиеся при этом равенства с (4.43), найдем

$$v(\mathbf{a}_{iik}) + v(\mathbf{a}_{jjk}) = 2v(\mathbf{a}) + \frac{1}{9} \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j). \quad (4.44)$$

Получив из (4.44) циклической перестановкой индексов еще два равенства и сложив их все, найдем

$$\sum_{1 \leq i, j \leq 3} v(\mathbf{a}_{ij}) = 6v(\mathbf{a}) + \frac{1}{9} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j). \quad (4.45)$$

С другой стороны, просуммировав по i левую и правую части разложения (4.39), получим

$$\sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}_i) = 3v(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}). \quad (4.46)$$

Исключим теперь из соотношений (4.45) — (4.46) вторые производные от v ; для этого заметим, что

$$\begin{aligned} & 3 \sum_{i=1}^3 \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}) = \\ & = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Доказательство равенства (4.47) осуществляется непосредственной проверкой с использованием билинейности двойной свертки

$$\begin{aligned} & \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}) = \\ & = \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i - \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{a} - \dots \end{aligned} \quad (4.48)$$

и определения барицентра

$$\mathbf{a} = \frac{1}{3} (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k). \quad (4.49)$$

Умножим соотношение (4.45) на $1/4$, (4.46) — на $1/6$ и вычтем (4.46) из (4.45); учитя тождество (4.47), придем к искомому представлению (4.48).

Определим теперь пространство P формулой

$$\begin{aligned} P = & \left\{ p \mid p \in P_3, \quad \forall_{i,j,k}, \quad i \neq j \neq k \neq i, \right. \\ & p(\mathbf{a}_{ijk}) = -\frac{1}{6} [p(\mathbf{a}_i) + p(\mathbf{a}_j) + p(\mathbf{a}_k)] + \\ & + \frac{1}{4} [p(\mathbf{a}_{iij}) + p(\mathbf{a}_{ijj}) + p(\mathbf{a}_{jjk}) + p(\mathbf{a}_{jkk}) + p(\mathbf{a}_{khi}) + p(\mathbf{a}_{kii})] \Big\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Заметим, что в силу леммы 4.2

$$P_2 \subset P \subset P_3. \quad (4.51)$$

Нетрудно подсчитать, что $\dim P = (n+1)^2$, что совпадает с количеством точек в множестве Σ , определенном формулой (4.47).

Для доказательства P -разрешимости множества (4.47) покажем, что для любых $(n+1)^2$ скаляров

$$\{\alpha_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{\alpha_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j}$$

можно найти функцию $p \in P$ и притом только одну:

$$p(\mathbf{a}_i) = \alpha_i, \quad p(\mathbf{a}_{ij}) = \alpha_{ij}. \quad (4.52)$$

В самом деле, определим для $i \neq j \neq k \neq i$ числа

$$\begin{aligned} \alpha_{ijk} &= 1/6 (\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k) + \\ &+ 1/4 (\alpha_{iij} + \alpha_{ijj} + \alpha_{jik} + \alpha_{jkk} + \alpha_{kki} + \alpha_{kii}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Как и в примере 4.3, определим функцию $p \in P_3$, такую, что

$$\left. \begin{array}{l} p(\mathbf{a}_i) = \alpha_i, \quad \forall i, \\ p(\mathbf{a}_{ij}) = \alpha_{ij}, \quad \forall i, j, i \neq j, \\ p(\mathbf{a}_{ijk}) = \alpha_{ijk}, \quad \forall i, j, k, i \neq j \neq k \neq i. \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

Равенствами (4.54) функция p определяется единственным образом, в силу соотношений (4.53) она принадлежит P .

Построение базисных функций в данном примере можно осуществить непосредственно, составляя $(n+1)^2$ систем из $(n+1)^2$ уравнений вида $p_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{ij}, \dots$, а можно их найти, используя результаты предыдущего примера. Продемонстрируем второй способ определения функций p_i ; для этого заметим, что P -интерполяция функции v в примере 4.3 имеет вид

$$\begin{aligned} \pi v &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1) (3\lambda_i - 2) v(\mathbf{a}_i) + \\ &+ \sum_{1 \leq i, j \leq n+1} \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) v(\mathbf{a}_{ij}) + \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} 27 \lambda_i \lambda_j \lambda_k v(\mathbf{a}_{ijk}). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Так как в исследуемом примере $v \in P$, то $v(\mathbf{a}_{ijk})$ представимо в виде (4.38); подставляя зависимость (4.38) в разложение (4.55) и группируя слагаемые, найдем

$$\begin{aligned} \pi v &= \sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_i (3\lambda_i - 1) (3\lambda_i - 2) - \frac{27}{6} \sum_{1 \leq j < k \leq n+1} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \right\} v(\mathbf{a}_i) + \\ &+ \sum_{1 \leq i, j \leq n+1, i \neq j} \left\{ \frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1) + \frac{27}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_i \lambda_j \lambda_k \right\} v(\mathbf{a}_{ij}). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Выражения в фигурных скобках и будут базисными функциями в данном примере.

Кроме n -симплексов (треугольников в R_2 и тетраэдров в R_3) в практике используются также параллелотопы (параллелограммы в R_2 и параллелепипеды в R_3). В этом случае в качестве пространств P , по отношению к которым соответствующие множества точек являются P -разрешимыми, используются пространства (или подпространства) полиномов Q_k , степень которых не превосходит k по каждой переменной в отдельности; размерность Q_k равна, очевидно, $(k+1)^n$.

Для упрощения обозначений рассмотрим случай R_2 ; в качестве опорного выпуклого множества \hat{T} примем единичный квадрат с вершинами

$$\hat{a}_1 = (0, 0), \quad \hat{a}_2 = (1, 0), \quad \hat{a}_3 = (1, 1), \quad \hat{a}_4 = (0, 1). \quad (4.57)$$

Для того чтобы некоторый четырехугольник T с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 был образом \hat{T} при невырожденном аффинном преобразовании F , необходимо и достаточно, чтобы

$$F \hat{a}_{(i)} = a_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.58)$$

и T был невырожденным параллелограммом. Всюду ниже будем предполагать, что T является невырожденным параллелограммом и что

$$Q_k = \{q \mid q \circ F \in \hat{Q}_k\}. \quad (4.59)$$

Пример 4.5. Пусть Σ — совокупность вершин единичного квадрата \hat{T} , Σ — совокупность вершин некоторого параллелограмма, тогда Σ является \hat{Q}_1 -разрешимым, базисные функции определяются формулами:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\rho}_1 = (1 - \hat{x}_1)(1 - \hat{x}_2), \quad \hat{\rho}_2 = \hat{x}_1(1 - \hat{x}_2), \\ \hat{\rho}_3 = \hat{x}_1\hat{x}_2, \quad \hat{\rho}_4 = \hat{x}_2(1 - \hat{x}_1). \end{array} \right\} \quad (4.60)$$

Σ является Q_1 -разрешимым, базисные функции определяются формулой

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 = (1 - G_1)(1 - G_2), \quad \rho_2 = G_1(1 - G_2), \\ \rho_3 = G_1G_2, \quad \rho_4 = G_2(1 - G_1), \end{array} \right\} \quad (4.61)$$

где $G_i = (F^{-1}(x))_i$.

Пример 4.6. Возьмем в качестве $\hat{\Sigma}$ множество точек, показанных на рис. 4.7 (a_5, a_6, a_7, a_8 — середины сторон, a_9 — центр тяжести), подобный выбор множества Σ обусловлен, как и ранее, тем, что середины сторон, так же как и центр тяжести, являются инвариантами аффинного преобразования. Утверждается, что Σ является \hat{Q}_2 -разрешимым, причем базисные функции даются формулами:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\rho}_1 = \hat{x}_3(2\hat{x}_3 - 1)\hat{x}_4(2\hat{x}_4 - 1), \quad \hat{\rho}_2 = \hat{x}_4(2\hat{x}_4 - 1)\hat{x}_1(2\hat{x}_1 - 1), \\ \hat{\rho}_3 = \hat{x}_1(2\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_2(2\hat{x}_2 - 1), \quad \hat{\rho}_4 = \hat{x}_2(2\hat{x}_2 - 1)\hat{x}_3(2\hat{x}_3 - 1), \\ \hat{\rho}_5 = -4\hat{x}_3(\hat{x}_3 - 1)\hat{x}_4(2\hat{x}_4 - 1), \quad \hat{\rho}_6 = -4\hat{x}_4(\hat{x}_4 - 1)\hat{x}_1(2\hat{x}_1 - 1), \\ \hat{\rho}_7 = -4\hat{x}_1(\hat{x}_1 - 1)\hat{x}_2(2\hat{x}_2 - 1), \quad \hat{\rho}_8 = -4\hat{x}_2(\hat{x}_2 - 1)\hat{x}_3(2\hat{x}_3 - 1), \\ \hat{\rho}_9 = 16\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_3\hat{x}_4, \quad \text{где } \hat{x}_3 = 1 - \hat{x}_1, \quad \hat{x}_4 = 1 - \hat{x}_2. \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

Тем же приемом, что и в примере 4.4, можно исключить из рассмотрения внутренний узел, при этом получим множество точек, показанных на рис. 4.8. Базисные функции здесь получаются следующими:

$$p_1 = x_3 x_4 (2\hat{x}_3 + 2\hat{x}_4 - 3), \quad \hat{p}_5 = -4\hat{x}_3 (\hat{x}_3 - 1) \hat{x}_4. \quad (4.63)$$

Остальные шесть функций получаются из (4.63) циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Аналогичным способом могут быть построены множества точек Σ , являющиеся \hat{Q}_k -разрешимыми для любого k , а также может быть произведено исключение узлов, внутренних по отношению к T . В подобных построениях и преобразованиях, кроме увеличения объема выкладок, никаких принципиальных трудностей не возникает, поэтому на них не останавливаемся.

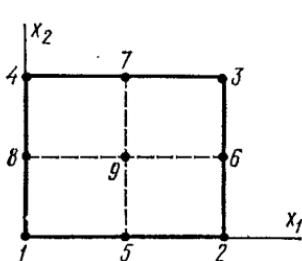


Рис. 4.7

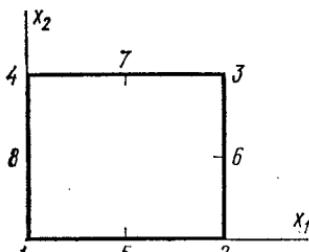


Рис. 4.8

Определение. Совокупности, состоящие из множества точек Σ , области T — замкнутой выпуклой оболочки Σ и пространства функций P , заданных на T , по отношению к которому Σ является P -разрешимым, называются *конечным элементом* и обозначаются через (Σ, T, P) .

Определение. Конечный элемент (Σ, T, P) называется конечным элементом класса C^0 , если для всякой грани T' размерности $(n-1)$ значения πv на этой грани зависят только от значений v на $\Sigma' = \Sigma \cap T'$.

Смысл последнего определения состоит в том, что конечные элементы класса C^0 обеспечивают непрерывность интерполяций при переходе через границы областей T .

Сформулируем теорему, дающую удобный для практики критерий принадлежности элемента классу C^0 .

Теорема 4.1. Конечный элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^0 тогда и только тогда, когда для любой v , заданной на Σ , на любой грани T' размерности $(n-1)$ из $v=0$ на Σ' следует, что $\pi v=0$ на T' .

Доказательство. Если (Σ, T, P) принадлежит классу C^0 , то, очевидно, из $v=0$ на $\Sigma' \Rightarrow \pi v=0$ на T' . Обратно, пусть из того, что $v=0$ на $\Sigma' \Rightarrow \pi v=0$ на T' . По определению

$$\pi v = \sum_{i=1}^N v(\alpha_i) p_i, \quad (4.64)$$

где p_i — функции базиса в P . Если $\alpha_i \in \Sigma'$, то $p_i=0$ на Σ' , и по условию теоремы $\pi p_i \equiv p_i=0$ на T' . Таким образом,

$$(\pi v)|_{T'} = \sum v(\alpha_i) p_i|_{T'}, \quad (4.65)$$

т. е. $(\pi v)_T$ зависит только от значений v на Σ' , т. е. (Σ, T, P) является элементом класса C^0 .

Нетрудно убедиться в том, что все конечные элементы, построенные в приведенных выше примерах, принадлежат классу C^0 .

В заключение этого параграфа несколько слов о реализации варианта метода конечных элементов, в котором с самого начала в явном виде используются базисные функции (см. предыдущий параграф). Для определенности рассмотрим плоскую задачу теории упругости в виде

$$\int_{\Omega} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \int_{\Omega} \rho F \cdot v d\Omega, \quad \forall v \in V. \quad (4.66)$$

Пусть

$$\Omega = \bigcup_l T_l \quad (4.67)$$

и на каждом T_l выбрано множество точек Σ , для которого подобрано пространство P , по отношению к которому Σ является P -разрешимым, построены скалярные базисные функции p_i , а по p_i — векторные базисные функции $w_{\alpha i}$ так, как это описано в предыдущем параграфе. Тогда вместо точной постановки задачи (4.66) перейдем к приближенной задаче разыскания компонентов $u_{h\beta}(a_j)$ в выбранных точках $a_i \in \Sigma$ в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{\beta=1}^2 u_{h\beta}(a_j) \sum_{l=1}^{M_T} \int_{T_l} a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(w_{\beta j}) \varepsilon_{ij}(w_{\alpha i}) d\Omega = \\ & = \sum_{l=1}^{M_T} \int_{T_l} \rho F \cdot w_{\alpha i} d\Omega, \quad \forall \alpha, i, \quad \alpha = 1, 2; \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.68)$$

(Для простоты предполагается, что $S_u = S$ и $u|_{\Gamma_u} = 0$.)

От интегрирования по произвольному треугольнику T_l целесообразно перейти к интегрированию по базисному треугольнику \hat{T} , пусть

$$\left. \begin{aligned} \hat{x} &= F^{-1}(x) = [M]x + c, \\ x &= F(\hat{x}) = [N]\hat{x} + b \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

и пусть номера вершин треугольника T_l суть $k(1), k(2), k(3)$; легко найти, что

$$[N] = \begin{bmatrix} x_{k(2)} - x_{k(1)} & x_{k(3)} - x_{k(1)} \\ y_{k(2)} - y_{k(1)} & y_{k(3)} - y_{k(1)} \end{bmatrix},$$

$$b = (x_{k(1)}, y_{k(1)}),$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta} (y_{k(3)} - y_{k(1)}) & \frac{1}{\Delta} (x_{k(1)} - x_{k(3)}) \\ \frac{1}{\Delta} (y_{k(1)} - y_{k(2)}) & \frac{1}{\Delta} (x_{k(2)} - x_{k(1)}) \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

$$c = \frac{1}{\Delta} (x_{k(3)}y_{k(1)} - x_{k(1)}y_{k(3)}; \quad y_{k(2)}x_{k(1)} - y_{k(1)}x_{k(2)}),$$

$$\Delta = (y_{k(1)} - y_{k(3)})(x_{k(1)} - x_{k(2)}) - (y_{k(1)} - y_{k(2)})(x_{k(1)} - x_{k(3)}).$$

Имеем

$$\int_{T_l} f(x, y) dx dy = \int_{\hat{T}} f(x(\hat{x}, \hat{y}), y(\hat{x}, \hat{y})) |J(\hat{x}, \hat{y})| d\hat{x} d\hat{y}, \quad (4.71)$$

где

$$|J(\hat{x}, \hat{y})| = |\det[N]|. \quad (4.72)$$

При вычислении компонентов тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(\hat{\mathbf{w}}_{\alpha k})$ необходимо учитывать, что система (\hat{x}, \hat{y}) для T_l является аффинной; так как компонент номер α вектора $\mathbf{w}_{\alpha k}$ равен соответствующей скалярной базисной функции, то на T_l :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}(\mathbf{w}_{1k(1)}) &= \frac{\partial \hat{p}_{k(1)}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}_{k(1)}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x}, \\ \varepsilon_{12}(\mathbf{w}_{1k(1)}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{p}_{k(1)}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}_{k(1)}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{22}(\mathbf{w}_{1k(1)}) &= 0, \\ \varepsilon_{11}(\mathbf{w}_{2k(1)}) &= 0, \\ \varepsilon_{12}(\mathbf{w}_{2k(1)}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{p}_{k(1)}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}_{k(1)}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{y}}{\partial x} \right), \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

Используя явный вид базисных функций и связь (4.69) \hat{x} с x по формулам (4.73) находим деформации в любом треугольнике T_l , подстановкой их в уравнение (4.68) и суммированием по всем T_l подсчитываем матрицу жесткости всей системы.

Таким образом, при составлении программы в рассматриваемой задаче необходимо организовать пять вложенных друг в друга циклов по β , j , α , i , l . Отметим, что иногда используется другой алгоритм, при котором вместо цикла по l по треугольникам организуется цикл по вершинам. Данный вариант более удобен тем, что при его реализации формируется целиком строка, относящаяся к данной вершине; это обстоятельство является особенно выгодным при использовании внешней памяти ЭВМ.

Если краевые условия являются неоднородными, то необходимо в программе иметь операторы, определяющие принадлежность рассматриваемого узла тому или иному участку границы, а также подпрограммы вычисления добавок к правой части системы (4.58), обусловленных неоднородностью краевых условий. Соответствующие модификации нетрудно осуществить, используя соответствующие формы функционалов, но на этом останавливаться не будем.

§ 4.3. Интерполяция Эрмита и конечные элементы для операторов порядка выше двух

При решении задач об определении напряженно-деформированного состояния тонких пластин и оболочек с помощью описанного выше приема — разбиения соответствующих областей на подобласти — в качестве основных искомых параметров используются, во-первых, значения искомых функций в отдельных точках-узлах интерполяции, а во-вторых, значения производных в этих же или других точках, имеющие, как было указано, смысл углов поворота кусков пластины или оболочки около координатных осей при деформации. Для математического обоснования подобных методов и изучения способов их обобщения на другие классы задач необходимо исследовать возможные способы восстановления функций в области по заданным значениям ее самой и некоторых ее производных в заранее выбранных точках, т. е. интерполяцию Эрмита.

Начнем со случая наиболее простого, когда кроме значений самой функции учитываются значения только первых производных; в этот класс задач входят, как было выяснено, задачи об изгибе тонких пластин.

Пусть дано два множества точек из R_n :

$$\Sigma^0 = \{\alpha_i^0\}_{i=1}^{N_0}, \quad \Sigma^1 = \{\alpha_i^1\}_{i=1}^{N_1}, \quad (4.74)$$

вообще говоря, различных. Будем предполагать, что каждой точке $\alpha_i^1 \in \Sigma^1$ соответствует d_i векторов $\xi_{i,1}^1, \dots, \xi_{i,d_i}^1$ из R_n ; каждый вектор $\xi_{i,j}^1$ определяет направление, производная по которому от искомой функции в данной точке α_i^1 является искомым параметром приближенной задачи; подпространство R_n , натянутое на векторы $\xi_{i,1}^1, \dots, \xi_{i,d_i}^1$, будем обозначать через X_i^1 .

Положим

$$\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \quad N = N_0 + \sum_{i=1}^{N_1} d_i. \quad (4.75)$$

Будем говорить, что N есть число степеней свободы множества Σ .

Пусть T — замкнутая выпуклая оболочка множества Σ , предполагаемая невырожденной, и пусть P — конечномерное пространство действительно-значных функций, заданных на T .

Определение. Будем говорить, что множество Σ является P -разрешимым, если для любых N_0 чисел α_i и любых N_1 линейных форм $A_i^1 \in L(R_n; R)$ существует некоторая функция $p \in P$ и при этом только одна:

$$\left. \begin{aligned} p(\alpha_i^0) &= \alpha_i^0, \quad 1 \leq i \leq N_0, \\ \nabla p(\alpha_i^1) \cdot \xi_{i,k}^1 &= A_i^1(\xi_{i,k}^1), \\ 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq k \leq d_i. \end{aligned} \right\} . \quad (4.76)$$

Одно необходимое условие P -разрешимости — совпадение размерности P с числом степеней свободы N множества Σ .

Определение. Пусть Σ — некоторое P -разрешимое множество и v — некоторая функция, заданная на Σ : заданы значения v в точках множества Σ^0 и значения производных по направлениям $\xi_{i,k}$ в точках множества Σ^1 , P -интерполяцией Эрмита функций v на T будем называть функции $(\pi v)(x) \in P$, для которых

$$\left. \begin{aligned} (\pi v)(\alpha_i^0) &= v(\alpha_i^0), \quad 1 \leq i \leq N_0, \\ (\nabla \pi v)(\alpha_i^1) \cdot \xi_{i,k}^1 &= \nabla v(\alpha_i^1) \cdot \xi_{i,k}^1, \\ 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq k \leq d_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Из определения P -разрешимости вытекает единственность P -интерполяции Эрмита.

Определение. Назовем базисом в P совокупность функций $\{p_i^0\}_{i=1}^{N_0} \cup \{p_{i,k}^1\}_{1 \leq i \leq N_1, 1 \leq k \leq d_i}$, таких, что:

$$\left. \begin{aligned} p_i^0(\alpha_j^0) &= \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N_0; \\ \nabla p_i^0(\alpha_j^0) \cdot \xi_{j,k}^1 &= 0, \quad 1 \leq i \leq N_0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq d_j; \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{i,k}^1(\alpha_j^0) &= 0, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq k \leq d_i, \quad 1 \leq j \leq N_0; \\ \nabla p_{i,k}^1(\alpha_j^0) \cdot \xi_{j,l}^1 &= \delta_{ij} \delta_{kl}; \quad 1 \leq i, j \leq N_1, \\ 1 \leq k \leq d_i, \quad 1 \leq l \leq d_j. \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

Легко видеть, что при известных функциях базиса P -интерполяция функции v , заданной на Σ , записывается в виде

$$\pi v = \sum_{i=1}^{N_0} v(\alpha_i^0) p_i^0 + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{d_i} (\nabla v(\alpha_i^1) \xi_{i,k}^1) p_{i,k}^1. \quad (4.80)$$

Если пространство P фиксировано, но базисные функции неизвестны, то для их определения необходимо составить N систем из N уравнений, каждая из которых вида (4.78) или (4.79).

Наличие двух типов сумм в разложении (4.80) сильно осложняет программирование алгоритма, использующего с самого начала это разложение, поэтому в отличие от случая интерполяции Лагранжа на практике чаще используют варианты метода конечных элементов, аналогичные описанным в § 3.3.

Фактическое построение базисных функций, как и в предыдущем параграфе, сводится к более простой проблеме их построения на опорном элементе путем введения понятия эквивалентных множеств.

Определение. Два множества Σ и $\hat{\Sigma}$ называются эквивалентными, если существует обратимое аффинное преобразование F из R_n в R_n , для которого

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^0 &= F(\hat{\alpha}_i^0), \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq N_0; \\ \alpha_i^1 &= F(\hat{\alpha}_i^1), \quad X_i^1 = \{\xi \in R^n \mid \forall \xi \exists \hat{\xi} \in \hat{X}_i^1, \xi = F \cdot \hat{\xi}\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

Так как F — аффинно, то $\nabla F(\hat{\alpha}_i^1)$ не зависит от точки и обозначается ∇F .

Лемма 4.3. Пусть $\hat{\Sigma}$ является \hat{P} -разрешимым и пусть Σ — множество, эквивалентное $\hat{\Sigma}$, тогда Σ является P -разрешимым, где

$$P = \{p \mid p_0 F \in \hat{P}\}. \quad (4.82)$$

Доказательство. В силу обратимости F размерности P и \hat{P} совпадают. Покажем, что функции

$$\left. \begin{array}{l} p_i^0 = \hat{p}_i^0 \circ F^{-1}, \quad 1 \leq i \leq N_0, \\ p_{i,k}^1 = \hat{p}_{i,k}^1 \circ F^{-1}, \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq k \leq d_i \end{array} \right\} \quad (4.83)$$

являются функциями базиса в P , в самом деле:

$$\left. \begin{array}{l} p_i^0(\mathbf{a}_i^0) = \hat{p}_i^0(\hat{\mathbf{a}}_i^0) = \delta_{ij}; \\ \Delta p_i^0(\mathbf{a}_j^1) \cdot \xi_{j,k}^1 = \Delta \hat{p}_i^0(\hat{\mathbf{a}}_j^1) \cdot (\nabla F^{-1} \cdot \xi_{j,k}^1) = 0; \\ p_{i,k}^0(\mathbf{a}_j^0) = 0; \\ \nabla p_{i,k}^1(\mathbf{a}_j^1) \cdot \xi_{j,l}^1 = \nabla \hat{p}_{i,k}^1(\hat{\mathbf{a}}_j^1) \cdot (\nabla F^{-1} \cdot \xi_{j,l}^1) = \delta_{ij} \delta_{kl}. \end{array} \right\} \quad (4.84)$$

Отметим, что второе и четвертое из равенств (4.84) имеют место только тогда, когда за базисные векторы в X_i^1 выбраны образы векторов $\xi_{i,k}$ базиса в \hat{X}_i^1 , что накладывает определенные ограничения на вид эквивалентных множеств; направление дифференцирования на \hat{T} и направление дифференцирования на T должны быть связаны отображениями ∇F :

$$\xi_{i,k}^1 = \nabla F \cdot \hat{\xi}_{i,k}^1. \quad (4.85)$$

Условие (4.85) в действительности является ограничением в построении конкретных конечных элементов, так как это условие не выполняется, например, вообще говоря, для случая, когда в качестве одной из неизвестных выбирается производная по нормали к границе элемента.

Пусть имеется некоторая функция v , заданная на Σ , поставим ей в соответствие функцию \hat{v} , заданную на $\hat{\Sigma}$ по формуле

$$\left. \begin{array}{l} \hat{v}(\hat{\mathbf{a}}_i^0) = v(F(\mathbf{a}_i^0)) = v(\mathbf{a}_i^0); \\ \nabla \hat{v}(\hat{\mathbf{a}}_i^0) \cdot \xi_{i,k}^1 = \nabla v \cdot (\mathbf{a}_i^0) \nabla F(\nabla F^{-1} \xi_{i,k}^1) = \nabla v(\mathbf{a}_i^0) \cdot \xi_{i,k}^1. \end{array} \right\} \quad (4.86)$$

Из определения эквивалентных множеств и формулы (4.86) следует, что

$$\hat{\pi} \hat{v} = \pi \hat{v}, \quad (4.87)$$

где $\hat{\pi} \hat{v}$ означает \hat{p} -интерполяцию функции \hat{v} на \hat{T} .

Определение. Совокупность, состоящая из множества точек $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma'$, области T , являющейся замкнутой выпуклой оболоч-

кой множества Σ , и пространства функций P , по отношению к которому Σ является P -разрешимым, называется *конечным элементом* и обозначается (Σ, T, P) .

Определение. Конечный элемент (Σ, T, P) называется конечным элементом класса C^1 , если для всякой грани T' размерности $(n-1)$ оболочки T значения $\pi v, \nabla \pi v$ на этой грани зависят только от значений v в точках

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^1 &= \Sigma'^0 \cup \Sigma'^1; \\ \Sigma'^r &= \{a'_i \mid a'_i \in T' \cap \Sigma'\}, \quad r = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

Элемент класса C^0 в данном случае определяется так же, как и в предыдущем параграфе, необходимо только соответствующим образом изменить понятие задания функции на множестве Σ . Для элементов класса C^1 остается справедливой теорема, доказанная в предыдущем параграфе для элементов класса C^0 : элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^1 тогда и только тогда, когда для любой v , заданной на Σ , на любой грани T размерности $(n-1)$ из $v=0$ на Σ' следует, что

$$\pi v = 0; \quad \nabla(\pi v) = 0 \text{ на } T'. \quad (4.89)$$

Доказательство этой теоремы такое же, как и в предыдущем параграфе.

Использование конечных элементов класса C^1 позволяет, очевидно, обеспечить непрерывность интерполяций и их первых производных при переходе через границы областей T ; как будет показано позже, это условие является одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость метода в задачах для самосопряженных операторов четвертого порядка.

Прежде чем переходить к примерам, отметим, что введенные определения нетрудно обобщить на случай учета производных любого порядка: вместо двух множеств Σ^0, Σ^1 в рассуждениях появятся $(s+1)$ множество $\Sigma^0, \Sigma^1, \dots, \Sigma^s$; вместо линейных форм A_i^1 в определении P -разрешимости будут фигурировать r -линейные формы на R_n ($r = 1, \dots, s$) и т. п.; принципиальных затруднений здесь нет, лишь формулы в определении базисных функций P -интерполяции эквивалентных множеств будут более громоздкими.

Перейдем теперь к рассмотрению примеров конечных элементов, применяемых для решения конкретных задач. Условимся на чертежах, иллюстрирующих проводимые построения для $n=2$, обозначать жирной точкой те точки, где задаются значения самой функции, стрелкой (\rightarrow), исходящей из a_i^1 , — соответствующие направления дифференцирования. Начнем с рассмотрения n -симвлексов с прежними обозначениями a_i, a_j, a_k для вершин и a_{ijk} — для центров тяжести.

Пример 4.7. Пусть

$$\Sigma^0 = \{a_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{a_{ijk}\}, \quad 1 \leq i < j < k \leq n+i,$$

$$\Sigma^1 = \{a_i\}_{i=1}^{n+1}.$$

За базис в x_i^1 в точке a_i выберем векторы $\xi_{i,k} = a_k - a_i$, идущие вдоль ребер, исходящих из a_i (рис. 4.9.) *).

Теорема 4.2. Множество Σ является P_3 -разрешимым, конечный элемент (Σ, T, P_3) принадлежит классу C^0 .

Доказательство. Число N степеней свободы множества равно

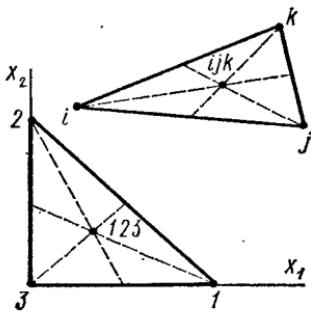


Рис. 4.9

$$N = N_0 + \sum_{i=1}^{N+1} d_i = (n+1) + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + n(n+1) = C_{n+3}^n,$$

что совпадает с размерностью пространства P_3 .

Покажем, что функции базиса для данного случая даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} p_i^0 &= \lambda_i^2 (3 - 2\lambda_i) - 7\lambda_i \sum_{\substack{1 \leq j < k \leq n+1 \\ i, k \neq i}} \lambda_i \lambda_k, \quad 1 \leq i \leq n+1; \\ p_{ijk}^0 &= 27\lambda_i \lambda_j \lambda_k, \quad 1 \leq i < j < k \leq n+1; \\ p_{i,k}^1 &= \lambda_i \lambda_k (2\lambda_i + \lambda_k - 1). \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

Проверка этого утверждения осуществляется путем перехода к опорному n -симплексу \hat{T} , определяемому так же, как и в предыдущем параграфе; проведем проверку лишь для производных от функций $p_{i,k}^1$. Вывод остальных равенств, которым обязаны подчиняться базисные функции, предоставляем читателю.

В соответствии с определениями (4.90) имеем

$$\begin{aligned} \nabla p_{i,k}^1 &= \lambda_k (2\lambda_i + \lambda_k - 1) \nabla \lambda_i + \lambda_i (2\lambda_i + \lambda_k - 1) \nabla \lambda_k + \\ &+ \lambda_i \lambda_k (2\nabla \lambda_i + \nabla \lambda_k) = \lambda_k (4\lambda_i + \lambda_k - 1) \nabla \lambda_i + \\ &+ \lambda_i (2\lambda_i + 2\lambda_k - 1) \nabla \lambda_k. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Из определения барицентрических координат следует, что

$$\lambda_i(a_j) = 0, \quad i \neq j, \quad (4.92)$$

кроме того,

$$\lambda_k(a_j)[1 - \lambda_k(a_j)] = 0 \quad \forall k. \quad (4.93)$$

* На рис. 4.9—4.17, 4.20—4.22 точки $a_1, a_2, \dots, a_i, a_j, \dots$ обозначены цифрами 1, 2, ... и буквами i, j, \dots (на рис. 4.9, 4.11 стрелки опущены).

Следовательно, при $i \neq j$ $\nabla p_{i,k}^t(\mathbf{a}_j) = 0$. (4.94)

Имеем при $k \neq i$

$$\lambda_i(\mathbf{a}_i) = 1, \quad \lambda_k(\mathbf{a}_i) = 0,$$

откуда (для $k \neq i$)

$$\nabla p_{i,k}^t(\mathbf{a}_i) = \nabla \lambda_k. \quad (4.95)$$

Вычислим

$$\nabla p_{i,k}^t(\mathbf{a}_i) \cdot \xi_{i,j}^t \equiv \nabla p_{i,k}^t(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) = \nabla \lambda_k(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i). \quad (4.96)$$

Если $1 \leq k \leq n$, то $\lambda_k = \hat{x}_k$ (вычисления производятся в опорном n -симплексе) и, следовательно, $\nabla \lambda_k(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)$ — есть k -я декартова координата вектора $\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$, т. е. это единица при $k = j$ и нуль при $k \neq j$. Если же $k = n+1$, то

$$\lambda_k = 1 - \sum_{i=1}^n \hat{x}_i. \quad (4.97)$$

Нетрудно подсчитать, что в этом случае

$$\nabla \lambda_k \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) = \begin{cases} 0, & j \neq n+1, \\ 1, & j = n+1. \end{cases} \quad (4.98)$$

Таким образом, в любом случае

$$\nabla p_{i,k}^t(\mathbf{a}_i) \cdot \xi_{i,j}^t = \delta_{jk}. \quad (4.99)$$

Совокупность равенств (4.94) и (4.99) эквивалентна последнему из условий (4.84), определяющих базисную функцию $p_{i,k}^t$, что и необходимо было проверить.

Таким образом, Σ является P_3 -разрешимым с базисом (3.90).

Докажем теперь, что исследуемый конечный элемент принадлежит классу C^0 и не принадлежит классу C^1 . Для этого используем сформулированный выше признак принадлежности элемента классу C^p ($p = 0, 1$). Применим этот признак для грани T' , являющейся гиперплоскостью $\lambda_{n+1} = 0$. Пусть v определена на Σ , причем $v = 0$ на $\Sigma' = \Sigma'^0 \cup \Sigma'^1$, где в данном случае:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma'^0 = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{n'} \cup \{\mathbf{a}_{i/k}\}_{1 \leq i < j < k \leq n}, \\ \Sigma'^1 = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n. \end{array} \right\} \quad (4.100)$$

Так как $\pi v \in P_3$, то значения πv на T' принадлежат P'_3 -сужению на T' пространства полиномов P_3 . По только что доказанному множеству Σ' является P'_3 -разрешимым, следовательно, из $v = 0$ на T' следует, что $\pi v = 0$ на T' (в определении Σ' следует указать направления дифференцирования $\xi_{i,j}^t = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i$, $i \neq j$, $1 \leq j \leq n$).

Очевидно, любой компонент $\nabla(\pi v)$ принадлежит P_2 , значение этого компонента на T' принадлежит P'_2 . Очевидно также, что $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n$ не является P'_2 -разрешимым (поскольку $\Sigma = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n$ является P'_1 -разрешимым), следовательно, можно найти v , такую, что

$v = 0$ на Σ' , но $\nabla(v) \neq 0$ на T' и, следовательно, элемент не может принадлежать классу C' .

Построенный элемент неудобен для вычислений из-за наличия узлов, внутренних по отношению к T ; исключение этих узлов осуществляется с помощью приема, описанного в предыдущем параграфе.

Пример 4.7. Пусть $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1$, где

$$\left. \begin{aligned} \Sigma^0 &= \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{n+1}, \\ \Sigma^1 &= \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{n+1}, \quad X_i^1 = R_n, \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

и базис в X_i^1 тот же, что и в предыдущем примере (рис. 4.10).

Лемма 4.4. Пусть $\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k$ — вершины треугольника T в R_n , $n \geq 2$, $i \neq j = k \neq i$ и пусть \mathbf{a} — центр тяжести T , тогда $\forall v(\mathbf{x}) \in P_2$ имеем

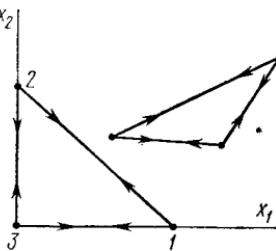


Рис. 4.10

$$v(\mathbf{a}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}_i) - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \nabla v(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}). \quad (4.102)$$

Доказательство. Применив формулу Тейлора так же, как и в аналогичной лемме предыдущего параграфа, найдем

$$\sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}_i) = 3v(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}). \quad (4.103)$$

Применив формулу Тейлора к производной $\nabla v(\mathbf{a}_i)$, получим

$$\nabla v(\mathbf{a}_i) = \nabla v(\mathbf{a}) + \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}), \quad (4.104)$$

откуда

$$\sum_{i=1}^3 \nabla v(\mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 \nabla \nabla v(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a})(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}). \quad (4.105)$$

Подстановка зависимости (4.105) в разложение (4.103) приводит к искомому тождеству (4.102), что и требовалось доказать.

Теорема 4.3. Пусть T — n -симплекс в R_n с вершинами $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{n+1}$, тогда множество Σ , определяемое формулой (4.101), является P -разрешимым, где

$$\begin{aligned} P = \{p \mid p \in P_3, \quad &p(\mathbf{a}_{ijk}) = \frac{1}{3}[p(\mathbf{a}_i) + p(\mathbf{a}_j) + p(\mathbf{a}_k)] - \\ &- \frac{1}{6}[\nabla p(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{ijk}) + \nabla p(\mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{ijk}) + \\ &+ \nabla p(\mathbf{a}_k) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ijk})]\}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

а элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^0 .

Доказательство. Доказательство аналогично проведенному в предыдущем параграфе, тем же способом, что и ранее, определяем набор базисных функций:

$$\left. \begin{aligned} p_i^0 &= \lambda_i^2(3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_i \sum_{1 \leq i < k \leq n+1} \lambda_j \lambda_k; \\ p_{i,k}^1 &= \frac{1}{2} \lambda_i \lambda_k (1 + \lambda_i - \lambda_k), \quad i \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

Дополнение. Несмотря на то что построенные в примерах 4.6 – 4.7 конечные элементы не позволяют обеспечить непрерывность первых производных приближенных решений (в английской и американской литературе используется термин non-Conforming – несовместные элементы), они широко применяются для решения конкретных задач об изгибе тонких пластин, ибо, как было выяснено в численных экспериментах, данные элементы дают хорошие результаты. Теоретическое объяснение этого обстоятельства выходит за рамки настоящего пособия (см., например, работы Сиарле [40], [43]).

В следующем примере дан способ построения конечных элементов класса C^1 .

Пример 4.8. Для упрощения рассматривается случай $n=2$. В качестве Σ выбирается следующее множество (рис. 4.11):

$$\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \quad \Sigma^0 = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^3, \quad \Sigma^1 = \{\mathbf{a}_{ij}\}_{i=1}^3 \cup \{\mathbf{a}_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq 3}, \quad (4.108)$$

где $\mathbf{a}_{ij} = \mathbf{a}_{ji}$ – середины сторон отрезка $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$; точкам $\mathbf{a}_i \in \Sigma^1$ соответствует подпространство $X_i^1 = R_2$, за базис в котором выбраны векторы $(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)$, $j \neq i$; точкам $\mathbf{a}_{ij} \in \Sigma^{1+}$ соответствуют одномерные подпространства из R_2 , порождаемые векторами $\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ij}$, $k \neq i \neq j \neq k$. Принятый выбор множества Σ^1 и направлений дифференцирования в точках этого множества обусловлен требованиями инвариантности соответствующих характеристик при аффинных преобразованиях.

Введем три функции $p_{ij, k}^1$, симметричные по первым двум индексам; обозначим их $p_{12,3}^1$, $p_{23,1}^1$, $p_{31,2}^1$ и будем разыскивать из условий:

$$\begin{aligned} p_{ij, k}^1(\mathbf{a}_e) &= 0, \quad 1 \leq e \leq 3, \\ \nabla p_{ij, k}^1(\mathbf{a}_e) &= 0, \quad 1 \leq e \leq 3, \\ \nabla p_{ij, k}^1(\mathbf{a}_{em}) &= 0, \quad 1 \leq e, m \leq 3, \quad (e, m) \neq (i, j), \\ \nabla p_{ij, k}^1(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ij}) &= 1 \end{aligned} \quad (4.109)$$

(см. § 3.3).

Множество функций, удовлетворяющих условиям (4.109), непусто; нетрудно проверить, что в качестве $p_{ij, k}^1$ можно взять следующий набор дробно-рациональных функций:

$$p_{ij, k}^1 = \frac{4\lambda_i^2\lambda_k}{(\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_j + \lambda_k)}. \quad (4.110)$$

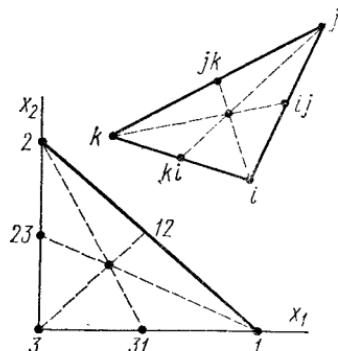


Рис. 4.11

Определим функции p_i^0 и $p_{i,k}^1$ формулами:

$$\left. \begin{aligned} p_i^0 &= \lambda_i^2 (3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 1/4 p_{ij,k}^1 - 1/2 p_{jk,i}^1 + 1/4 p_{ik,j}^1, \\ &\quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad i \neq j \neq k \neq i; \\ p_{i,k}^1 &= 1/2\lambda_i\lambda_k (1 + \lambda_i - \lambda_k) + 1/4 p_{ik,j}^1 - 3/8 p_{ij,k}^1 - 1/8 p_{kj,i}^1, \\ &\quad 1 \leq i, \quad k \leq 3, \quad i \neq k \neq j \neq l. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

Утверждается, что описанное выше множество Σ является P -разрешимым, где P — конечномерное пространство, натянутое на функции:

$$p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_{1,3}^1, p_{2,3}^1, p_{3,2}^1, p_{1,3}^1, p_{1,2,3}^1, p_{2,3,1}^1, p_{3,1,1}^1, \quad (4.112)$$

причем функции (4.112) образуют базис с требуемыми свойствами.

Кроме того, утверждается, что если выполнены следующие предположения:

1) сужение $p_{i,j,k}^1$ на любую сторону треугольника совпадает с некоторым полиномом из P_3^1 ;

2) для любого $\xi \in R_2$ сужение $\nabla p_{i,j,k}^1 \cdot \xi$ на любую сторону треугольника совпадает с некоторым полиномом из P_2^1 , то элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^1 .

Нетрудно видеть, что набор функций (4.110) удовлетворяет этим требованиям.

Доказательство сформулированных утверждений осуществляется, как и ранее, непосредственной их проверкой на опорном треугольнике \hat{T} , эта проверка предоставляется в качестве упражнения; докажем здесь лишь принадлежность рассматриваемого элемента классу C^1 .

Пусть $T' = [\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ — некоторая сторона треугольника T , и пусть v определена на Σ , причем $v = 0$ на $\Sigma' = \Sigma \cap T'$. Согласно первому предположению сужение πv на T' принадлежит P_3^1 и, следовательно, полностью определяется четырьмя коэффициентами соответствующего полинома. По предположению $v = 0$ на Σ' , т. е.

$$\left. \begin{aligned} v(\mathbf{a}_i) &= v(\mathbf{a}_j) = 0, \\ \nabla v(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i) &= \nabla v(\mathbf{a}_j) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j). \end{aligned} \right\} \quad (4.113)$$

Составляя для определения коэффициентов в выражении для πv на T' систему (4.113), убеждаемся в том, что все эти коэффициенты — нули, т. е. из того, что $v = 0$ на Σ' следует, что $\pi v = 0$ на T' и, следовательно, элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^0 .

Поскольку $\pi v = 0$ на T' , то и первая производная вдоль отрезка $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j]$ равна нулю, т. е.

$$\nabla \pi v(\mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = 0. \quad (4.114)$$

По свойству базисных функций

$$\nabla \pi v(\mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ij}) = 0. \quad (4.115)$$

Следовательно,

$$\nabla \pi v(\mathbf{a}_{ij}) = \nabla \pi v(\mathbf{a}_i) = \nabla \pi v(\mathbf{a}_j) = 0. \quad (4.116)$$

Согласно второму предположению сужение $\nabla v \cdot \xi$ для любого ξ на $[a_i, a_j]$ принадлежит P_2^1 , отсюда и из равенств (4.116) выводим, что $\Delta v = 0$ на $[a_i, a_j]$, что и означает принадлежность (ξ, T, P) классу C^1 .

Построенный пример совместного элемента можно несколько упростить, исключив из рассмотрения степени свободы в серединах сторон с помощью приема, использованного выше.

Пример 4.9. Пусть $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1$, где

$$\Sigma^0 = \{a_i\}_{i=1}^3, \quad \Sigma^1 = \{a_i\}_{i=1}^3,$$

и каждой точке из Σ^1 соответствует конечномерное пространство $X_i^1 = R_2$ с базисом $a_j - a_i$, $j \neq i$ (рис. 4.12).

Лемма 4.5. Пусть a_i и a_j — две различные точки из R_n и пусть a_{ij} — середина отрезка $[a_i, a_j]$, тогда для любой $v(x) \in P_1$ имеем

$$v(a_{ij}) = \frac{1}{2}[v(a_i) + v(a_j)]. \quad (4.117)$$

Доказательство очевидно.

Теорема 4.4. Множество Σ , определяемое формулой (4.77), является P -разрешимым, где $P = \{p\}$ p принадлежит пространству примера 4.8; кроме того,

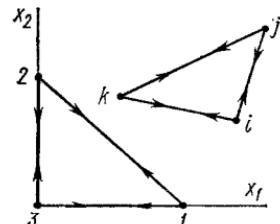


Рис. 4.12

$$\nabla p(a_{ij}) \cdot (a_k - a_{ij}) = \frac{1}{2} [\nabla p(a_i) + \nabla p(a_j)] \cdot (a_k - a_{ij}), \quad (4.118)$$

базисные функции в P даются выражениями

$$\begin{aligned} p_i^0 &= \lambda_i^2(3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_i\lambda_2\lambda_3 + 1/4p_{ij, k}^1 + 1/4p_{ik, j}^1 - 1/2p_{jk, i}^1; \\ p_{i, k}^1 &= 1/2\lambda_i\lambda_k(1 + \lambda_i - \lambda_k) + 1/8p_{ij, k}^1 - 1/8p_{kj, i}^1; \\ p_{i, j}^1 &= 1/2\lambda_i\lambda_j(1 + \lambda_i - \lambda_j) + 1/8p_{ik, j}^1 - 1/8p_{jk, i}^1. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^1 .

Доказательство этой теоремы осуществляется обычным образом.

В следующих двух примерах будут построены конечные элементы, среди искомых параметров на которых присутствуют вторые производные неизвестной функции. Условимся помечать точки на T (при $n=2$), в которых разыскиваются значения самой функции, совокупностей ее первых и вторых производных,

символом \odot

Пример 4.10. Для простоты, как и в двух предыдущих примерах (и всюду ниже), рассматривается случай $n=2$. Множество в данном примере состоит из трех типов точек:

$$\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2,$$

где (рис. 4.13)

$$\left. \begin{aligned} p_i^0 &= \lambda_i^0 (3 - 2\lambda_i) + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 1/4 p_{ij, k}^1 + 1/4 p_{ik, j}^1 - 1/2 p_{jk, i}^1; \\ p_{i, k}^1 &= 1/2\lambda_i\lambda_k (1 + \lambda_i - \lambda_k) + 1/8 p_{ij, k}^1 - 1/8 p_{kj, i}^1; \\ p_{i, j}^1 &= 1/2\lambda_i\lambda_j (1 + \lambda_i - \lambda_j) + 1/8 p_{ik, j}^1 - 1/8 p_{jk, i}^1, \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

причем каждой точке a_i из Σ^1 поставлено в соответствие пространство $X_i^1 = R_2$ с базисом $(a_j - a_i)$, $i \neq j$; каждой точке a_{ij} из Σ^1 — одномерное пространство X_{ij}^1 , порожденное вектором $(a_k - a_{ij})$, $k \neq i \neq j \neq k$; каждой точке a_i из Σ^2 поставлено в соответствие пространство X_i^2 , являющееся прямым произведением $R_2 \otimes R_2$.

Утверждается, что множество Σ является P_5 -разрешимым, элемент (Σ, T, P_5) принадлежит классу C^1 . Доказательство этого утверждения производится по обычной схеме; основную трудность представляет построение 21 базисной функции путем составления соответствующей совокупности 21 системы из 21 уравнения каждая; ввиду громоздкости соответствующие выражения приводить не будем.

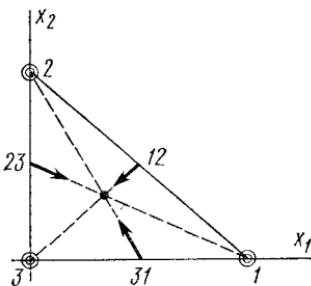


Рис. 4.13

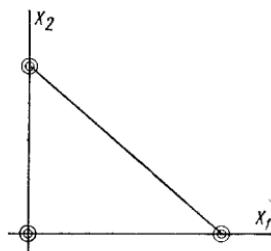


Рис. 4.14

Пример 4.11. Данный пример строится на основании предыдущего путем исключения степеней свободы, соответствующих производным в серединах сторон треугольника по направлению медиан (рис. 4.14). Указанное исключение производится на основании следующей леммы.

Лемма 4.6. Пусть a_i, a_j — две различные точки из R_2 ; a_{ij} — середина отрезка $[a_i, a_j]$, тогда для любой $v \in P_3$ имеем

$$v(a_{ij}) = 1/2 [v(a_i) + v(a_j)] + \\ + 1/8 [\nabla v(a_i) \cdot (a_j - a_i) + \nabla v(a_j) \cdot (a_i - a_j)]. \quad (4.121)$$

Доказательство. Применив формулу Тейлора к функции $v \in P_3$ и к форме ∇v , найдем:

$$2v(a_{ij}) = v(a_i) + v(a_j) + \frac{1}{2} \nabla \nabla v(a_i) \cdot (a_{ij} - a_i) (a_{ij} - a_i) + \\ + \frac{1}{2} \nabla \nabla v(a_j) \cdot (a_{ij} - a_j) (a_{ij} - a_j);$$

$$0 = -\nabla v(a_i) - \nabla v(a_j) + \nabla \nabla v(a_i) \cdot (a_{ij} - a_i) (a_{ij} - a_i) - \\ - \nabla \nabla v(a_j) \cdot (a_{ij} - a_j) (a_{ij} - a_j),$$

откуда и следует представление (4.121).

Теорема 4.5. Множество $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, где

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma^0 = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^3; \\ \Sigma^1 = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^3, \quad X_i^1 = R_2; \\ \Sigma^2 = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^3, \quad X_i^2 = R_2 \otimes R_2, \end{array} \right\} \quad (4.122)$$

является P -разрешимым, где

$$\begin{aligned} P = & \{p \mid p \in P_5, \quad \nabla p(\mathbf{a}_{ij}) \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ij}) = \\ & = \frac{1}{2} [\nabla p(\mathbf{a}_i) + \nabla p(\mathbf{a}_j)] \cdot (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ij}) + \\ & + \frac{1}{8} [(\nabla \nabla p(\mathbf{a}_i) - \nabla \nabla p(\mathbf{a}_j)) \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_{ij})]\}; \end{aligned} \quad (4.123)$$

элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^1 .

Доказательство этой теоремы проводится по обычной схеме.

Следующие (и последние) два примера будут построены для случая R_2 , когда в качестве T используется параллелограмм.

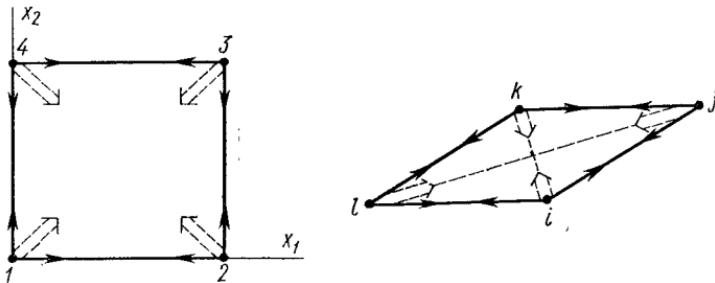


Рис. 4.15

Проверку основных утверждений будем производить для опорного элемента — единичного квадрата \hat{T} с вершиной 1 в начале координат (рис. 4.15, 4.16).

Пунктирная стрелка (рис. 4.15), исходящая из некоторой точки, означает, что за одну из неизвестных — степень свободы — берется одно из значений вторых производных в этой точке; конкретный способ вычисления этой производной ясен из приводимого ниже определения Σ^2 (на единичном квадрате \hat{T} — это с точностью до знака обычная смешанная вторая производная).

Напомним, что через \hat{Q}_k обозначалось пространство полиномов степени k по каждой переменной в отдельности:

$$Q = \{q \mid q \circ F \in \hat{Q}_k\}, \quad (4.124)$$

где F — некоторое невырожденное аффинное преобразование, такое, что

$$F(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i,$$

где $\hat{\mathbf{a}}_i$ — вершины; \hat{T} , \mathbf{a}_i — вершины параллелограмма T .

Пример 4.12. Пусть $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2$, где (рис. 4.15)

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma^0 = \{a_i\}_{i=1}^4; \\ \Sigma^1 = \{a_i\}_{i=1}^4, \quad X_i^1 = R_2; \\ \Sigma^2 = \{a_i\}_{i=1}^4; \\ X_i^2 = (a_{i+1} - a_i)(a_{i-1} - a_i), \end{array} \right\} \quad (4.125)$$

причем за базисные векторы в X_i^1 берутся векторы

$$\left. \begin{array}{l} \xi_i^1, 1 = a_{i+1} - a_i; \\ \xi_i^2, 2 = a_{i-1} - a_i \end{array} \right\} \quad (4.126)$$

с тем соглашением, что

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= a_4 && \text{при } i=1; \\ a_{i+1} &= a_1 && \text{при } i=4; \end{aligned}$$

последовательные скобки в последней из формул (4.125) означают диаду — тензор второго ранга.

Теорема 4.6. Множество Σ является Q_3 -разрешимым, элемент (Σ, T, Q) принадлежит классу C^1 .

Доказательство. Размерность $Q_3 = 16$ совпадает с числом степеней свободы множества Σ ; составив в соответствии с определением функции базиса 16 систем из 16 уравнений каждая, найдем функции базиса для опорного квадрата:

$$\left. \begin{array}{l} p_1^0(\hat{x}) = \hat{x}_3^2(3 - 2\hat{x}_3)\hat{x}_4^2(3 - 2\hat{x}_4); \\ p_{1,1}^1(\hat{x}) = \hat{x}_3^2(1 - \hat{x}_3)\hat{x}_4^2(3 - 2\hat{x}_4); \\ p_{1,2}^1(\hat{x}) = \hat{x}_3^2(3 - 2\hat{x}_3)\hat{x}_4^2(1 - \hat{x}_4); \\ p_1^2(\hat{x}) = \hat{x}_3^2(1 - \hat{x}_3)\hat{x}_4^2(1 - \hat{x}_4), \end{array} \right\} \quad (4.127)$$

остальные 12 функций получаются циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Докажем принадлежность исследуемого элемента классу C^1 . Пусть \hat{v} определена на $\hat{\Sigma}$ и пусть $\hat{v} = 0$ на $\hat{\Sigma}' = \hat{\Sigma} \cap \hat{T}'$, где, например, $\hat{T}' = [\hat{a}_1, \hat{a}_2]$. Очевидно, $\hat{\pi}\hat{v}$ на T' есть полином от одной переменной \hat{x}_1 степени, не превосходящей 3. Так как

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\pi}\hat{v}(\hat{a}_1) = \hat{\pi}\hat{v}(\hat{a}_2) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} (\hat{\pi}\hat{v})(\hat{a}_1) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} (\hat{\pi}\hat{v})(\hat{a}_2) = 0, \end{array} \right\} \quad (4.128)$$

то $\hat{\pi}\hat{v}$ на T' — нуль и, следовательно, $\partial(\hat{\pi}\hat{v})/\partial x_1$ на T' — также нуль. С другой стороны, значение $\partial(\hat{\pi}\hat{v})/\partial x_2$ на T' есть полином от одной переменной \hat{x}_1 степени, не превосходящей 3, причем

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} (\hat{\pi}\hat{v})(\hat{a}_1) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} (\hat{\pi}\hat{v})(\hat{a}_2) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} (\hat{\pi}\hat{v}) \right)(\hat{a}_1) = \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} (\hat{\pi}\hat{v}) \right)(\hat{a}_2) = 0,$$

следовательно, этот полином — нуль на T' . Таким образом, всюду на $T' \nabla(\hat{\pi}\hat{v}) = 0$, что означает принадлежность элемента классу C^1 .

Упражнение 4.1. Показать, что естественным образом построенные элементы (рис. 4.16) не являются Q_3 -разрешимыми.

Следующий пример получается из примера (4.12) исключением из числа неизвестных второй производной в вершине. Это исключение производится на основании следующей леммы.

Лемма 4.7. Пусть a_i — вершины некоторого параллелограмма в R_2 , тогда для любой $v \in P_3$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla v(a_i) \cdot (a_{i+1} - a_i)(a_{i-1} - a_i) &= - \sum_{j=1}^4 (-1)^{j-1} v(a_j) + \\ &+ [\nabla v(a_{i+1}) - \nabla v(a_{i-1})](a_{i+1} - a_i) + \\ &+ [\nabla v(a_{i-1}) - \nabla v(a_i)] \cdot (a_{i-1} - a_i), \quad 1 \leq i \leq 4. \end{aligned} \quad (4.129)$$

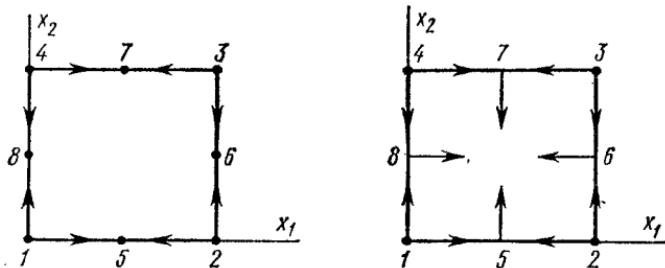


Рис. 4.16

Доказательство. Переходя от произвольного параллелограмма к единичному квадрату, перепишем равенство (4.129) в виде (для $i=1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} &= -v(0, 0) + v(0, 1) - v(1, 1) + v(1, 0) + \\ &+ \frac{\partial v(0, 1)}{\partial x_1} - \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x_1} + \frac{\partial v(1, 0)}{\partial x_2} + \frac{\partial v(1, 0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x_2}, \\ &\forall v \in P_3. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Проверка последней формулы производится непосредственно.

Пример 4.13. Рассмотрим множество Σ вида (рис. 4.17)

$$\left. \begin{aligned} \Sigma &= \Sigma^0 \cup \Sigma^1, \quad \Sigma^0 = \{a_i\}_{i=1}^4; \\ \Sigma^1 &= \{a_i\}_{i=1}^4, \quad X_i^1 = R_2, \quad 1 \leq i \leq 4, \end{aligned} \right\} \quad (4.131)$$

причем за базисные векторы в X_i^1 выберем

$$\xi_{i,1}^1 = a_{i+1} - a_i, \quad \xi_{i,2}^1 = a_{i-1} - a_i. \quad (4.132)$$

Теорема 4.7. Множество Σ является P -разрешимым, где

$$\begin{aligned} P = \{p \mid p \in Q_3, \nabla \nabla p(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i) = \\ = - \sum_{j=1}^4 (-1)^{j-1} p(\mathbf{a}_j) + (\nabla p(\mathbf{a}_{i+1}) - \nabla p(\mathbf{a}_i)) \cdot (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i) + \\ + (\nabla p(\mathbf{a}_{i-1}) - \nabla p(\mathbf{a}_i)) \cdot (\mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i), \end{aligned} \quad (4.133)$$

элемент (Σ, T, P) принадлежит классу C^0 .

Доказательство. Совпадение размерности P с числом степеней свободы Σ очевидно. Записав P -интерполяцию функции v для предыдущего примера и группируя слагаемые после исключения второй производной с помощью определения (4.133), построим функции базиса (для опорного элемента):

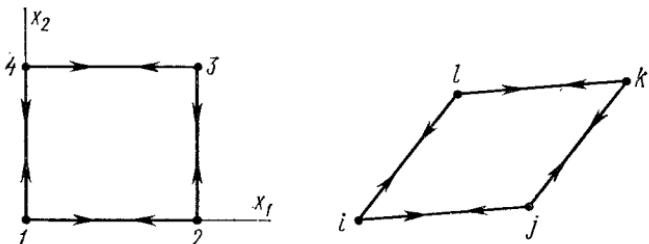


Рис. 4.17

$$\left. \begin{aligned} p_1^0(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_3 \hat{x}_4 [-1 + \hat{x}_3(3 - 2\hat{x}_3) + \hat{x}_4(3 - 2\hat{x}_4)]; \\ p_{1,1}^1(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_3^2 (1 - \hat{x}_3) \hat{x}_4; \\ p_{1,2}^1(\hat{\mathbf{x}}) &= \hat{x}_4^2 (1 - \hat{x}_4) \hat{x}_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.134)$$

остальные 9 функций получаются циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Построением базисных функций завершается доказательство P -разрешимости; принадлежность (Σ, T, P) классу C^0 доказывается обычным образом.

§ 4.4. Исследование погрешности интерполяции для отдельного элемента

На основании результатов § II.2 доказательство сходимости метода конечных элементов сводится к оценке погрешности интерполяции функций из пространства V , в котором отыскивается решение базисными функциями метода конечных элементов. В настоящем параграфе будет приведено очень краткое описание схемы получения оценок погрешности для отдельного конечного элемента. В следующих ниже формулировках используется понятие

тие введенного в § II.1 пространства С. Л. Соболева W_p^m функций с нормой

$$\|v\|_{W_p^m(\Omega)} = \|v\|_{m, p, \Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^\alpha v(x)}{\partial x^\alpha} \right|^p d\Omega \right)^{1/p}, \quad (4.135)$$

$1 \leq p \leq +\infty$

где

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad (4.136)$$

или с нормой

$$\|v\|_{m, p, \Omega} = \left(\sum_{l=0}^m \int_{\Omega} \|\nabla^l v(x)\|^p d\Omega \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad (4.137)$$

$$\|\nabla^l v(x)\| = \sup_{\substack{\xi \in R^n \\ \xi_i \neq 0}} \frac{|\nabla^l v(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_n)|}{\|\xi_1\| \dots \|\xi_n\|}, \quad (4.138)$$

эквивалентной норме (4.135). Будут использованы также полу-нормы на $W_p^m(\Omega)$:

$$|v|_{m, p, \Omega} = \left(\int_{\Omega} \|\nabla^m v(x)\|^p d\Omega \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (4.139)$$

Определения (4.135), (4.137), (4.139) обычными способами обобщаются на случай $p = +\infty$.

Основой исследования является следующая лемма, принадлежащая Дени и Лионсу, которую сформулируем без доказательства.

Лемма 4.8. Пусть Ω — открытая ограниченная область в R_n с достаточно гладкой границей и пусть заданы числа: $1 \leq p \leq +\infty$, k — любое целое неотрицательное, тогда для любой $v \in \tilde{W}_p^{k+1}(\Omega)$ имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} c_1 \inf \|v + w\|_{k+1, p, \Omega} &\leq |v|_{k+1, p, \Omega} \leq \\ &\leq c_2 \inf_{m \in P_k} \|v + w\|_{k+1, p, \Omega}, \end{aligned} \quad (4.140)$$

где $c_i = \text{const}$, P_k — как обычно пространство полиномов степени, не превосходящей k по совокупности переменных.

Определение. Области Ω и $\hat{\Omega}$ называются аффинно-эквивалентными (в этом параграфе — просто эквивалентными), если существует невырожденное аффинное преобразование F , такое, что для $\forall x \in \Omega \exists \hat{x} \in \hat{\Omega}$, что

$$x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b \quad (4.141)$$

(здесь B — квадратная матрица с отличным от нуля определителем).

Как и ранее, каждой функции $v = v(x)$, заданной на Ω , поставим в соответствие функцию $\hat{v} = \hat{v}(\hat{x})$, заданную на $\hat{\Omega}$ по формуле $\hat{v} = v \circ F$; обратно, $v = \hat{v} \circ F^{-1}$.

Лемма 4.9. Если области Ω и $\hat{\Omega}$ эквивалентны и $v(x) \in W_p^m(\Omega)$, то $\hat{v} \in W_p^m(\hat{\Omega})$, причем

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} \leq c \|B\|^m |\det B|^{-1/p} |v|_{m,p,\Omega}. \quad (4.142)$$

Имеет место также неравенство

$$|v|_{m,p,\Omega} \leq c \|B^{-1}\|^m [\det B]^{1/p} |\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} \quad (4.143)$$

[здесь $\|B\|$ — операторная норма матрицы B отображения (4.141)].

Доказательство. Предположим сначала, что $v \in C^m(\Omega)$ (C^m — пространство m раз непрерывно дифференцируемых функций), тогда, очевидно, $\hat{v} \in C^m(\hat{\Omega})$.

По определению

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} = \left(\int_{\hat{\Omega}} |\hat{v}^m(\hat{x})|^p d\hat{\Omega} \right)^{1/p}. \quad (4.144)$$

Учитывая правило дифференцирования сложной функции и связь x с \hat{x} (4.141), найдем, что

$$\hat{v}^m(\hat{x}) \cdot (\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_m) = \nabla^m v(x) \cdot (B\xi_1 \otimes \dots \otimes B\xi_m). \quad (4.145)$$

Из определения (4.138) с учетом (4.145) вытекает:

$$\|\hat{v}^m(\hat{x})\| \leq \|\nabla^m v(x)\| \cdot \|B\|^m. \quad (4.146)$$

Производя в интеграле (4.144) замену переменных интегрирования по формуле (4.141) и одновременно учитывая неравенство (4.146), получим

$$\begin{aligned} |\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}} &\leq \left[\int_{\hat{\Omega}} (\|B\|^m \|\nabla^m v(x)\|^p |\det B^{-1}|) d\hat{\Omega} \right]^{1/p} = \\ &= \|B\|^m (\det B^{-1})^{1/p} |v|_{m,p,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Принимая теперь во внимание плотности вложения $C^m(\Omega)$ в $W^m(\Omega)$, непрерывность линейного оператора L : $v \in C^m(\Omega) \rightarrow \hat{v} \in W_p^m(\hat{\Omega})$ (по отношению к введенным выше нормам) и определение единственного расширения L на все пространство $W_p^m(\Omega)$, заключаем, что оценка (4.147) справедлива для всех $v \in W_p^m(\Omega)$.

Неравенство (4.143) доказывается аналогично.

Лемма 4.10. Пусть h и \hat{h} — диаметры областей Ω и $\hat{\Omega}$, $\hat{\rho}$ — максимумы диаметров сфер, содержащихся в $\hat{\Omega}$ и Ω .

Тогда

$$\|B\| \leq h/\hat{\rho}, \|B^{-1}\| \leq \hat{h}/\rho. \quad (4.148)$$

Доказательство. Норму матрицы B можно определить по формуле

$$\|B\| = \frac{1}{\hat{\rho}} \sup_{\|\xi\|=1} \|B\xi\|. \quad (4.149)$$

По определению $\hat{\rho}$ существует сфера диаметра $\hat{\rho}$, содержащаяся в области $\hat{\Omega}$, следовательно, для любого вектора ξ с нормой, равной $\hat{\rho}$, существуют элементы \hat{y}, \hat{t} , такие, что $B\xi = y - t$, где $y = B\hat{y} + b$, $t = B\hat{t} + b$. Таким образом, из определения h вытекает, что $\|y - t\| \leq h$, следовательно,

$$\|B\| \leq h/\rho,$$

что и требовалось доказать.

Вторая из оценок (4.147) устанавливается аналогично.

Теорема 4.8. Пусть: 1) задано два пространства Соболева $W_p^{k+1}(\hat{\Omega})$ и $W_q^m(\hat{\Omega})$, причем $W_p^{k+1}(\hat{\Omega})$ непрерывно вложено в $W_q^m(\hat{\Omega})$; 2) задан линейный непрерывный оператор $\hat{\pi}$ из $W_p^{k+1}(\hat{\Omega})$ в $W_q^m(\hat{\Omega})$, такой, что

$$\hat{\pi}\hat{p} = \hat{p}, \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{\Omega}), \quad (4.150)$$

где $P_k(\hat{\Omega})$ — пространство полиномов степени k по совокупности переменных [ниже в качестве $\hat{\pi}$ будет использован оператор P -интерполяции, обладающий, очевидно, свойством (4.150)]; 3) для любой области Ω , эквивалентной $\hat{\Omega}$, определим оператор π_Ω по формуле

$$\widehat{\pi_\Omega v} = \hat{\pi}\hat{v}; \quad (4.151)$$

крышка над выражением $\pi_\Omega v$ означает, что после отображения $v \rightarrow \pi_\Omega v$ производится замена независимых переменных по формуле (4.141), тогда

$$|v - \pi_\Omega v|_{m, q, \Omega} \leq c(\hat{\pi}, \hat{v}) (\text{mes } \Omega)^{1/q - 1/p} \frac{h_{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1, p, \Omega}. \quad (4.152)$$

Доказательство. Используя свойство (4.150), заключаем, что

$$\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v} = (I - \hat{\pi})(\hat{v} + \hat{p}), \quad \forall \hat{v} \in W_p^{k+1}(\hat{\Omega}), \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{\Omega}), \quad (4.153)$$

где I — тождественное отображение из $W_p^{k+1}(\hat{\Omega})$ в $W_q^m(\hat{\Omega})$, обладающее свойством непрерывности (в силу предположения о непрерывном вложении).

Из (4.153), используя отмеченное свойство непрерывности, найдем, что

$$|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{m, q, \hat{\Omega}} \leq \|I - \hat{\pi}\| \inf_{\hat{p} \in P_k(\hat{\Omega})} \|\hat{v} + \hat{p}\|_{k+1, p, (\hat{\Omega})}. \quad (4.154)$$

Лемма 4.8 позволяет найти оценку

$$|\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{m, q, \hat{\Omega}} \leq c(\hat{\pi}, \hat{\Omega}) |\hat{v}|_{k+1, p, \hat{\Omega}}. \quad (4.155)$$

Используя теперь $\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v} = \widehat{v - \pi_\Omega v}$ и лемму 4.9, получаем

$$|v - \pi_\Omega v|_{m, q, \hat{\Omega}} \leq c \|B^{-1}\|^m |\det B|^{1/q} |\hat{v} - \hat{\pi}\hat{v}|_{m, q, \hat{\Omega}}. \quad (4.156)$$

Подставляя неравенство (4.156) в (4.155), используя еще раз лемму 4.9, а после нее — лемму 4.10, получим нужное неравенство (4.152), если только учтем, что

$$|\det B| = \operatorname{mes} \Omega / \operatorname{mes} \hat{\Omega}. \quad (4.157)$$

Теперь можно сформулировать и доказать основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 4.9. Пусть $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$ — конечный элемент, s — наивысший порядок производных, входящих в определение $\hat{\Sigma}$, $m \geq 0$ — заданное целое число; $\rho, q \in [1, +\infty]$ — действительные числа, такие, что

$$W_p^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow G^s(\hat{T}), \quad (4.158)$$

$$W_p^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow W_q^m(\hat{T}) \quad (4.159)$$

(значок \hookrightarrow означает непрерывное вложение),

$$P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset W_q^m(\hat{T}); \quad (4.160)$$

(Σ, T, P) — элемент, эквивалентный $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$, т. е. множества Σ и $\hat{\Sigma}$ и областях T и \hat{T} эквивалентны в смысле данных выше определений; тогда

$$|v - \pi_T v|_{m, q, T} \leq C(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P}) (\operatorname{mes} T)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m} |v|_{k+1, p, T}, \quad (4.161)$$

где $\pi_T v$ — оператор P -интерполяции на T ; $(\operatorname{mes} T)$ — мера T ; h_T — диаметр T ; ρ_T — максимум диаметров сфер, содержащихся в T .

Доказательство. Нужно проверить, что выполняются все предположения теоремы 4.8.

Оператор π_T в рассматриваемом сейчас случае задан, по нему строим с помощью аффинного преобразования оператор $\hat{\pi}$ и без труда убеждаемся в том, что

$$\hat{\pi}\hat{v} = \hat{v}, \quad \forall \hat{v} \in P_k(\hat{T}). \quad (4.162)$$

Для доказательства применимости теоремы 4.8 необходимо убедиться в том, что $\hat{\pi}$ непрерывен. Область определения оператора $\hat{\pi}$ — множество функций $C^s(\hat{T}) + P(\hat{T})$; заметим, что из $\hat{v} \in W_p^{k+1}(\hat{T})$ следует, что v принадлежит области определения оператора π в силу предположения (4.158).

Предположим для определенности, что $s=2$ (что покрывает все рассмотренные ранее случаи), тогда

$$\begin{aligned} \hat{\pi}\hat{v} &= \sum_i \hat{v}(\hat{a}_i) \hat{p}_i^0 + \sum_{i, k} (\hat{\nabla} \hat{v}(\hat{a}_i^k) \cdot \hat{\xi}_{i, k}^1) \hat{p}_{i, k}^1 + \\ &+ \sum_{i, k, l} [\hat{\nabla}^2 \hat{v}(\hat{a}_i^k) \cdot (\hat{\xi}_{i, k}^2 \otimes \hat{\xi}_{i, l}^2)] \hat{p}_{i, kl}^2. \end{aligned} \quad (4.163)$$

Линейность данного отображения (рассматриваемого как оператор из $W_p^{k+1} \rightarrow W_q^m$) очевидна; докажем его непрерывность. Имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{\pi}\hat{v}\|_{m, q, \hat{T}} &\leq \sum_i |\hat{v}_i(\hat{a}_i^0)| \cdot \|\hat{p}_i^0\|_{m, q, \hat{T}} + \\ &+ \sum_{i, k} |\hat{\nabla}\hat{v}(\hat{a}_i^k) \cdot \hat{\xi}_{i, k}^1| \cdot \|\hat{p}_{i, k}^1\|_{m, q, \hat{T}} + \\ &+ \sum_{i, k, l} |\hat{\nabla}^2\hat{v}(\hat{a}_i^k) \cdot (\hat{\xi}_{i, k}^2 \otimes \hat{\xi}_{i, l}^2) | \|\hat{p}_{i, k l}^2\|_{m, q, \hat{T}} \leqslant \\ &\leq c(\|\hat{p}_i^0\|, \|\hat{p}_{i, k}^1\|, \|\hat{p}_{i, k l}^2\|) \|\hat{v}\|_{2, \infty, \hat{T}}. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Имеет место вложение (4.158), из которого следует, что

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{T}} \|\hat{\nabla}^2\hat{v}(\hat{x})\| \leq \|\hat{v}\|_{2, \infty, \hat{T}} \leq \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{T}}. \quad (4.165)$$

Подставляя неравенство (4.165) в оценку (4.164), найдём

$$\|\hat{\pi}\hat{v}\|_{m, q, \hat{T}} \leq c(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P}) \|\hat{v}\|_{k+1, p, \hat{T}},$$

что и требовалось доказать.

Применив теперь теорему 4.8, приходим к неравенству (4.161), что и требовалось.

Отметим, что полученный основной результат представляет собой оценку погрешности интерполяции полиномиальными функциями на отдельном конечном элементе; этот результат можно привести к виду

$$\|v - \pi_T v\|_{m, q, T} \leq c(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P}) (\operatorname{mes} T)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} h_T^{k+1-m} |v|_{k+1, p, T}. \quad (4.166)$$

В самом деле, предположим, что

$$h_T/\rho_T \leq \sigma = \text{const} \quad (4.167)$$

(такие разбиения называются регулярными), тогда из теоремы 4.9 следует, что

$$|v - \pi_T v|_{l, q, T} \leq c_1 (\operatorname{mes} T)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} h_T^{k+1-l} |v|_{k+1, p, T},$$

$$l = 0, 1, \dots, m. \quad (4.168)$$

Пусть теперь $h_T \rightarrow 0$, тогда, начиная с некоторого момента,

$$h^{k+1-l} \leq h^{k+1-m}; \quad l \leq m. \quad (4.169)$$

Подставляя оценку (4.169) в неравенства (4.168), возводя каждое из получившихся при этом неравенств в степень q , складывая результаты и извлекая корень степени q , придем к (4.166).

Приведем таблицу, иллюстрирующую точность различных конечных элементов (см. табл. 4.1), заимствованную из работы [43]. Верхняя строка таблицы указывает порядок погрешности интерполяции на элементе, во второй строке указана предполагаемая гладкость интерполируемой функции (принимается $p = q = 2$).

§ 4.5. О сходимости приближенных решений и об оценке их погрешности

Используя результаты предыдущего параграфа и § II.2, можно доказать, что последовательность приближенных решений, полученных методом конечных элементов, сходится к точному решению задачи, и получить асимптотическую (при $h_T \rightarrow 0 \forall T$) оценку погрешности.

Рассмотрим для простоты случай задач с положительным самосопряженным оператором второго порядка, когда решение принадлежит пространству V , где

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega). \quad (4.170)$$

Рассмотрим задачу

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V; \\ u &\in V. \end{aligned} \right\} \quad (4.171)$$

Обозначим через V_h конечномерное подпространство V , построенное с помощью метода конечных элементов так, как это было описано в главе 4, и рассмотрим приближенную задачу:

$$\left. \begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h; \\ u_h &\in V. \end{aligned} \right\} \quad (4.172)$$

Заметим, что в постановке приближенной задачи (4.172) содержится предположение о том, что формы $a(u, v)$ и $\langle f, v \rangle$ на элементах из V_h вычисляются точно, т. е. здесь игнорируется ошибка, возникающая при использовании квадратурных (кубатурных) формул и из-за ограниченности разрядной сетки ЭВМ. (Исследование влияния данного типа ошибок выходит за рамки настоящего пособия.)

Обозначим через X_h множество функций, образуемых склейкой всех P -интерполяций; X_h отличается от V_h только тем, что функции из V_h не обязаны удовлетворять граничным условиям.

Лемма 4.11. Пусть:

- 1) разбиение области Ω на подобласти T_i регулярно, т. е. $h_T/\rho_T \leq \sigma = \text{const}$, $\forall T$;
- 2) все элементы (Σ, T, P) эквивалентны одному (базисному) элементу $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$;
- 3) все элементы принадлежат классу C^0 ;
- 4) существуют целые числа $k \geq 0$ и $l \geq 0$, такие, что $k \geq l$ и

$$P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^l(\hat{T}), \quad (4.173)$$

$$H^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow C^s(\hat{T}), \quad (4.174)$$

Таблица 4.1

7 Колтунов М. А. и др.

$\ v - \pi_T v\ $	$O(h^{2-m})$ $0 \leq m \leq 2$ $k=1$	$O(h^{3-m})$ $m=0, 1, 2, 3$ $k=2$	$O(h^{4-m})$ $0 \leq m \leq 4$ $k=3$			
$v \in$	$H^2(T)$	$H^3(T)$	$H^4(T)$			
Верхняя грань значений n, s , при которых $H^{k+1}(T) \subset C^s(T)$	$n \leq 3$ $s=0$	$n \leq 5$ $s=0$	$n \leq 3$ $s=1$	$n \leq 7$ $s=0$	$n \leq 5$ $s=1$	$n \leq 3$ $s=2$
Типы треугольных элементов, с помощью которых реализуется указанная в 1-й строке точность аппроксимации						
Типы четырехугольных элементов						

где s — максимальный порядок производных в определении $\hat{\Sigma}$; тогда для любой функции $v \in H^{k+1}(\Omega) \cap V$ имеем

$$\|v - \pi_h v\|_{m, 2, \Omega} \leq ch^{k+1-m} |v|_{k+1, 2, \Omega}, \quad 0 \leq m \leq \min(1, l), \quad (4.175)$$

где $\pi_h v$ — склейка P -интерполяций — функция из X_h , c — константа, не зависящая от h .

Доказательство. Применив оценку (4.166) предыдущего параграфа (с $p=q=2$ и с учетом того, что $P \subset H^l$), получим (индекс l в очевидных случаях опускаем)

$$\begin{aligned} \|v - \pi_h v\|_{m, 2, T} &\leq ch_T^{k+1-m} |v|_{k+1, 2, T}, \\ 0 \leq m &\leq \min(k+1, l). \end{aligned} \quad (4.176)$$

По определению

$$(\pi_h v)_T = \pi_T v, \quad h = \max_T h_T,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\sum_T \|v - \pi_h v\|_{m, 2, T}^2 \right)^{1/2} &\leq ch^{k+1-m} \left(\sum_T |v|_{k+1, 2, T}^2 \right)^{1/2} = \\ &= ch^{k+1-m} |v|_{k+1, 2, \Omega}. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Воспользовавшись аддитивностью интеграла [свойством, которое было использовано в последнем переходе в (4.177)], из (4.177) получим оценку (4.175).

Теорема 4.10. Пусть выполнены предположения леммы 4.12 при $l=1$ и пусть решение u задачи (4.171) принадлежит пространству $H^{k+1}(\Omega)$.

Тогда

$$\|u - u_h\|_{1, 2, \Omega} \leq ch^k |u|_{k+1, 2, \Omega}, \quad (4.178)$$

где c — константа, не зависящая от h ; u_h — решение задачи (4.172).

Доказательство. Используя теорему II.1, заключаем, что

$$\|u - u_h\|_{1, 2, \Omega} \leq c \inf_{v_h} \|u - v_h\|_{1, 2, \Omega}. \quad (4.179)$$

Так как $\pi_h u \in V_h$, то отсюда следует, что

$$\|u - u_h\|_{1, 2, \Omega} \leq c \|u - \pi_h u\|_{1, 2, \Omega}. \quad (4.180)$$

Воспользовавшись утверждением (4.175) леммы (4.12) при $m=1$, из неравенства (4.180) получаем требуемую оценку (4.178).

Для того, чтобы воспользоваться полученным результатом на практике, необходимо иметь результаты о достаточной регулярности решения; в частности, если используются конечные элементы Лагранжа класса C^0 с $k=1$, то для применения теоремы 4.10 необходимо иметь $u \in H^2(\Omega)$, что в общем случае неверно, так как теорема существования в рассматриваемом случае дает лишь $u \in H^1(\Omega)$.

Оказывается, факт сходимости можно установить, опираясь только на результаты, вытекающие из теоремы существования.

Теорема 4.11. Пусть выполнены предположения 1) — 3) леммы 4.12, максимальный порядок производных s в определении $\hat{\Sigma}$ равен 0 или 1 и, кроме того,

$$P_1(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{T}); \quad (4.181)$$

тогда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1, 2, \Omega} = 0. \quad (4.182)$$

Доказательство. Определим пространство

$$V = W_\infty^2(\Omega) \cap V. \quad (4.183)$$

Известно, что

$$\left. \begin{aligned} W_\infty^2(\hat{T}) &\hookrightarrow C^s(\hat{T}), \\ W_\infty^2(\hat{T}) &\hookrightarrow H^1(\hat{T}), \quad s = 0, 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.184)$$

Используя (4.181), (4.184) и применяя оценку (4.166) предыдущего параграфа (при $k=1$, $p=+\infty$, $m=1$, $q=2$), находим

$$\|v - \pi_T v\|_{1, 2, T} \leq c (\operatorname{mes} T)^{1/2} h_T \|v\|_{2, \infty, T}. \quad (4.185)$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим

$$\|v - \pi_h v\|_{1, 2, \Omega} \leq ch (\operatorname{mes} \Omega)^{1/2} \|v\|_{2, \infty, \Omega}. \quad (4.186)$$

Пусть теперь u — точное решение задачи, v — произвольный элемент V , тогда

$$\|u - \pi_h v\|_{1, 2, \Omega} \leq \|u - v\|_{1, 2, \Omega} + \|v - \pi_h v\|_{1, 2, \Omega}. \quad (4.187)$$

Зададим произвольное $\epsilon > 0$ и, воспользовавшись отмеченными выше свойствами пространства V , найдем элемент $v_\epsilon \in V$, для которого

$$\|u - v_\epsilon\| < \epsilon/2. \quad (4.188)$$

Из неравенства (4.186) следует, что существует число $h_0 > 0$, такое, что при всех $h \leq h_0$

$$\|v_\epsilon - \pi_h v_\epsilon\|_{1, 2, \Omega} \leq \epsilon/2. \quad (4.189)$$

Из оценок (4.187) — (4.189) следует, что

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \|u - v_h\|_{1, 2, \Omega} = 0. \quad (4.190)$$

Вспоминая лемму Сеа (теорему II.1), заключаем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1, 2, \Omega} = 0, \quad (4.191)$$

что и требовалось доказать.

§ 4.6. Построение криволинейных элементов

Предположим, что область Ω неполигональна, и покажем (на примере), что для достижения заданной точности возникнет необходимость использования элементов с непрямолинейными границами. Рассмотрим простейшую задачу:

$$\Delta u = f \quad \text{в } \Omega \subset R^2, \quad (4.192)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.193)$$

которая приводит к вариационному уравнению вида

$$\left. \begin{aligned} a(u, v) &= \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega); \\ u &\in V, \end{aligned} \right\} \quad (4.194)$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega. \quad (4.195)$$

Произведем разбиение Ω на конечные элементы T_i с прямыми линейными границами; для простоты предположим, что (рис. 4.18)

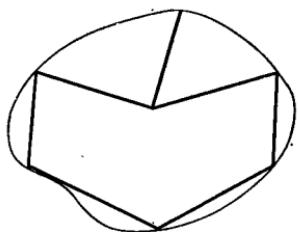


Рис. 4.18

$$\bigcup_i T_i \subset \Omega. \quad (4.196)$$

Если бы область $\bar{\Omega}$ была полигональна, $\bigcup T_i = \bar{\Omega}$, и было бы известно, что $u \in H^3(\Omega) \cap V$, то из результатов предыдущих параграфов вытекает, что при использовании кусочно-полиномиальных аппроксимаций степени не ниже второй по совокупности переменных (т. е. $k = 2$) имела бы место оценка

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = O(h^2), \quad h = \max_T h_T. \quad (4.197)$$

В качестве конечных элементов выберем элементы (Σ, T, P_2) , где Σ и T выбраны так, как показано на рис. 4.3. Легко увидеть, что построенное с помощью таких элементов пространство V_h не является подпространством V , так как, во-первых, функции из V не равны нулю на $\partial\Omega_h$, а, во-вторых, функции из V_h не определены на $\Omega - \Omega_h$. Продолжим функции из V_h нулем вне Ω_h , тогда будем иметь $V_h \subset V$.

В качестве нормы на V_h и V выберем величину $\|v\|_{1,2,\Omega}$ [которая является нормой в силу условия (4.193)]. Пусть u — точное решение задачи (4.192) — (4.193), u_h — приближенное, тогда (см. теорему II.8)

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega_h} = \min_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,2,\Omega_h}. \quad (4.198)$$

(Здесь использовано также то обстоятельство, что $u_h = v_h = 0$ вне Ω_h .)

Обозначим через $\pi_h u$ и P -интерполяцию решения; очевидно, что

$$\pi_h u \notin V_h, \quad (4.199)$$

так как u не обязательно равно нулю на $\partial\Omega_h$.

Введем в рассмотрение элемент u_1 , совпадающий с решением u во внутренних (не лежащих на $\partial\Omega_h$) узлах сетки конечных элементов, равный нулю в узлах на $\partial\Omega_h$, и, кроме того,

$$u_1|_{T_l} \in P_2. \quad (4.200)$$

Очевидно, что $u_1 \in V_h$; кроме того, $u_1 = \pi_h u$ во всех треугольниках, не имеющих сторон на границе $\partial\Omega_h$.

Имеем

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,2,\Omega_h} &\leqslant |u - u_1|_{1,2,\Omega_h} = |u - \pi_h u + \pi_h u - u_1|_{1,2,\Omega_h} \leqslant \\ &\leqslant |u - \pi_h u|_{1,2,\Omega_h} + |\pi_h u - u_1|_{1,2,\Omega_h}. \end{aligned} \quad (4.201)$$

[Заметим, что элемент u_1 был введен с той целью, чтобы его можно было подставить в правую часть неравенства (4.198); с элементом $\pi_h u$ этого делать нельзя, так как $\pi_h u \notin V_h$.]

Из результатов § 4.4 следует, что

$$|\pi_h u - u_1|_{1,2,\Omega_h} \leq ch^2 |u_3|_{3,2}\Omega_h. \quad (4.202)$$

Для оценки $|\pi_h u - u_1|_{1,2,\Omega_h}$ рассмотрим один из приграничных треугольников T_l (рис. 4.19), где эта разность отлична от нуля; легко видеть, что

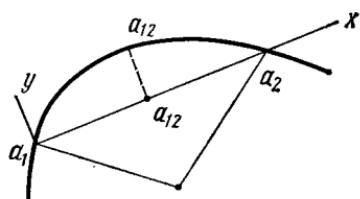


Рис. 4.19

$$\pi_h u - u_1 = u(\alpha_{1,2}) p_{1,2}^1(x), \quad (4.203)$$

где $p_{1,2}^1(x)$ — базисная функция, соответствующая узлу a_{12} . Из (4.203) следует, что

$$\begin{aligned} |\pi_h u - u_1|_{1,2,T_l} &\leqslant |u(a_{12})| \|p_{1,2}^1(x)\|_{1,2,T_l} \leqslant \\ &\leqslant |u(a_{12})| \|B^{-1}\| |\det B|^{1/2} |P_{1,2}^1|_{1,2,\hat{T}} \leqslant \\ &\leqslant |u(a_{12})| \frac{\hat{h}}{\rho_T} \frac{h}{\hat{\rho}} |\hat{p}_{12}|_{1,2,\hat{T}} \leqslant c(\hat{\Sigma}, \hat{T}, P_{1,2}^1) |u(a_{12})|. \end{aligned} \quad (4.204)$$

[Последний переход в оценке (4.204) использует предположение о регулярности разбиения $\Omega_h = \bigcup_l T_l$.]

Для оценки $|u(a_{12})|$ предположим, что граница области Ω — достаточно гладкая кривая (описываемая уравнением с ограниченными третьими производными); проведем из точки a_{12} перпендикуляр до пересечения с границей, точку пересечения обозначим через \tilde{a}_{12} . По условию

$$u(\tilde{a}_{12}) = 0. \quad (4.205)$$

Введем локальную систему координат (x, y) , как показано на рис. 4.18, и заметим, что

$$u(\alpha_{12}) = u(\tilde{\alpha}_{12}) + \int_{\tilde{\alpha}_{12}}^{\alpha_{12}} \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (4.206)$$

Из (4.205) и (4.206) следует, что

$$|u(\alpha_{12})| \leq |\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12}| \|u\|_{1, \infty, \Omega}. \quad (4.207)$$

Из определения нормы в пространстве $H^3(\Omega)$ и неравенства (4.207) получаем оценку:

$$|u(\alpha_{12})| \leq c |\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12}| \|u\|_{3, 2, \Omega}. \quad (4.208)$$

Уравнение дуги границы в локальной системе координат запишем в виде

$$y = f(x). \quad (4.209)$$

Используя введенные выше предположения о гладкости функции $f(x)$, найдем, что

$$y(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + O(x^3). \quad (4.210)$$

Очевидно, что $f(0) = 0$; $f(|\alpha_2 - \alpha_1|) = 0$, следовательно,

$$f'(0) = O(|\alpha_2 - \alpha_1|) = O(h_T), \quad (4.211)$$

и окончательно

$$|\tilde{\alpha}_{12} - \alpha_{12}| \equiv f(|\alpha_1 + \alpha_2|/2) \leq ch_T^2. \quad (4.212)$$

Подставляя оценку (4.212) в неравенство (4.208), найдем, что

$$|u(\alpha_{12})| \leq ch_T^2 \|u\|_{3, 2, \Omega} \quad (4.213)$$

(буквой c здесь и ниже обозначаются различные константы). Таким образом,

$$\begin{aligned} |u_1 - \pi_h u|_{1, 2, \Omega_h} &= \left(\sum_l |u_1 - \pi_h u|_{1, 2, T_l}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c \|u\|_{3, 2, \Omega_h} \left(\sum_l h_{T_l}^4 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.214)$$

Заметим, что последняя сумма в оценке (4.214) распространяется по всем треугольникам, имеющим на границе хотя бы одну сторону; если обозначить длину контура $\partial\Omega$ через L , то, используя предположение (4.196), найдем, что

$$|u_1 - \pi_h u|_{1, 2, \Omega_h} \leq c \|u\|_{3, 2, \Omega_h} L h^{3/2}, \quad h = \max_T h_T. \quad (4.215)$$

Объединяя неравенства (4.202) и (4.215), заключаем, что при $h \rightarrow 0$

$$\|u - u_h\|_{1, 2, \Omega_h} \equiv \|u - u_h\|_{1, 2, \Omega_h} = O(h^{3/2}),$$

и эту оценку нельзя улучшить, усиливая предположения относительно регулярности и увеличивая степень интерполирующих полиномов; единственный выход состоит в том, чтобы более точно аппроксимировать криволинейную границу.

Приведем краткое описание методики построения криволинейных конечных элементов. Основная идея, которая здесь используется, состоит в том, что по-прежнему используются базисные конечные элементы $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$ с прямолинейными границами, однако переход к произвольным элементам осуществляется теперь с помощью преобразования

$$\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.216)$$

уже не являющегося, вообще говоря, аффинным.

Построение криволинейных элементов включает два этапа:

- 1) построение отображения F ;
- 2) построение базисных функций $p_i(\mathbf{x})$ с помощью суперпозиции

$$p_i(\mathbf{x}) = \hat{p}_i(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x})), \quad (4.217)$$

где $p_i(\mathbf{x})$ — построенные ранее базисные функции метода.

Отметим, что даже в случае, когда $F(\hat{\mathbf{x}})$ — полином (степени выше первой), базисные функции (4.217) не являются полиномиальными — в этом основная трудность использования криволинейных элементов.

Приведем краткое описание первого этапа; начнем с конечных элементов Лагранжа. Зададим $F = F(\hat{\mathbf{x}})$ в виде комбинации некоторых функций с неопределенными параметрами, эти параметры будем определять, потребовав, чтобы заданный набор точек $\hat{\Sigma}_F$ на \hat{T} переходил в заданный набор точек $\Sigma_F \in T_I$. Естественное ограничение состоит в требовании непрерывности $F(\hat{\mathbf{x}})$ при переходе от данного элемента T_I к соседнему (между смежными элементами не должно быть «щелей»). Заметим, что набор $\hat{\Sigma}_F$ вовсе не обязан совпадать с множеством $\hat{\Sigma}$; если $\hat{\Sigma}_F \supset \hat{\Sigma}$, то соответствующий криволинейный элемент называется субпараметрическим, если $\hat{\Sigma}_F = \hat{\Sigma}$, то — изопараметрическим, если $\hat{\Sigma}_F \subset \hat{\Sigma}$, то — суперпараметрическим (очевидно, что возможны более сложные ситуации, однако на практике используются только элементы с перечисленными выше свойствами).

Рассмотрим изопараметрические конечные элементы Лагранжа. Указанному выше условию непрерывности проще всего удовлетворить, задав $F(\hat{\mathbf{x}})$ в виде комбинации тех же базисных функций, с помощью которых производится аппроксимация:

$$\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_i \hat{p}_i(\hat{\mathbf{x}}) \alpha_i, \quad (4.218)$$

$$\alpha_i = \text{const.}$$

Потребуем, чтобы точка \hat{a}_i переходила при отображении (4.218) в точку $a_i \in \Sigma$, тогда, очевидно, $a_i = \hat{a}_i$ и мы имеем

$$x = \sum_{a_i \in \Sigma} \hat{p}_i(\hat{x}) a_i. \quad (4.219)$$

В качестве базисных функций на $T = F(\hat{T})$ выбираем совокупности $\{p_i(x)\}$, где

$$p_i(x) = \hat{p}_i(F^{-1}(x)). \quad (4.220)$$

Функции $\{p_i(x)\}$ линейно независимы, что следует из линейной независимости функций $\{\hat{p}_i\}$ и невырожденности преобразования F ; кроме того,

$$p_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad (4.221)$$

следовательно, множество Σ является P -разрешимым, где P — пространство, порожденное базисом $\{p_i\}$.

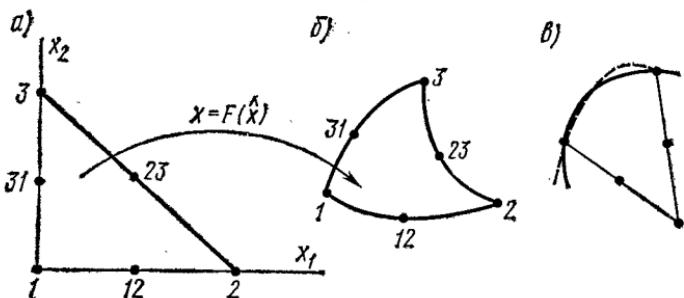


Рис. 4.20

Пример 4.14. Пусть задан элемент $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$, показанный на рис. 4.20, а. Задав шесть точек в области, в которой строится решение, и построив по этим точкам преобразование F , получим криволинейный элемент, показанный на рис. 4.20, б, границы которого — отрезки кривых второго порядка. Заметим, что на самом деле нет необходимости использовать элементы, все грани которого криволинейные, так как криволинейные элементы необходимы только для более точной аппроксимации границы. Поэтому на практике можно ограничиться элементами вида, показанного на рис. 4.20, в, при этом внутри области можно по-прежнему применять элементы с прямыми гранями.

Пример 4.15. Пусть задан элемент $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$, приведенный на рис. 4.21, а, и пусть T — произвольный четырехугольник (рис. 4.21, б). Из аналитической геометрии известно, что в таком случае $F(\hat{x})$ не будет аффинным, следовательно, базисные функции на T не будут полиномиальными со всеми вытекающими отсюда затруднениями.

Рассмотрим теперь криволинейные элементы Эрмита. Для простоты ограничимся элементами первого порядка (наивысший порядок производных равен единице). Пусть задан базисный элемент $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$, где

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} &= \hat{\Sigma}^0 \cup \hat{\Sigma}^1; \\ \hat{\Sigma}^0 &= \left\{ \hat{a}_i^0 \right\}_{i=1}^{N_0}, \quad \hat{\Sigma}^1 = \left\{ \hat{a}_i^1 \right\}_{i=1}^{N_1} \end{aligned} \quad (4.222)$$

и в точках \hat{a}_i^1 заданы направления дифференцирования

$$\xi_{i,k}^1, \quad k = 1, \dots, d_i,$$

Задавая геометрию криволинейного элемента, необходимо наметить соответствие степеней свободы на T и \hat{T} , т. е. указать, в каких точках разыскивается значение функции, в каких — значение производных (и по какому направлению). Строя отображение F в виде комбинации базисных функций пространства P и потребовав, чтобы было

$$\mathbf{a}_i^0 = F(\hat{\mathbf{a}}_i^0), \quad \mathbf{a}_i^1 = F(\hat{\mathbf{a}}_i^1), \quad \nabla F(\hat{\mathbf{a}}_i^1) \cdot \xi_{i,k}^1 = \xi_{i,k}^1, \quad (4.223)$$

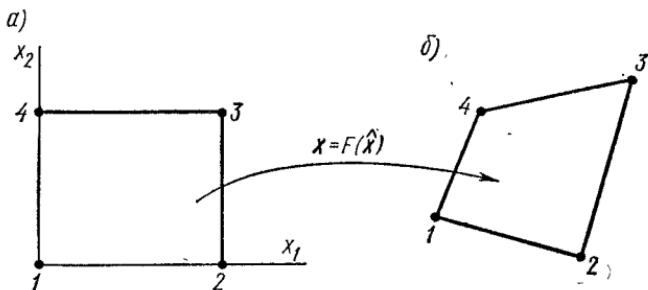


Рис. 4.21

получим слишком много уравнений для искомых коэффициентов линейных комбинаций ($N_0 + N_1 + \sum d_i$ уравнений относительно $N_0 + \sum d_i$ коэффициентов). Поэтому поступают следующим образом: отбрасывают второе из условий (4.223) и разыскивают $F(\hat{x})$ из уравнений

$$\mathbf{a}_i^0 = F(\hat{\mathbf{a}}_i^0), \quad \nabla F(\hat{\mathbf{a}}_i^1) \cdot \xi_{i,k}^1 = \xi_{i,k}^1. \quad (4.224)$$

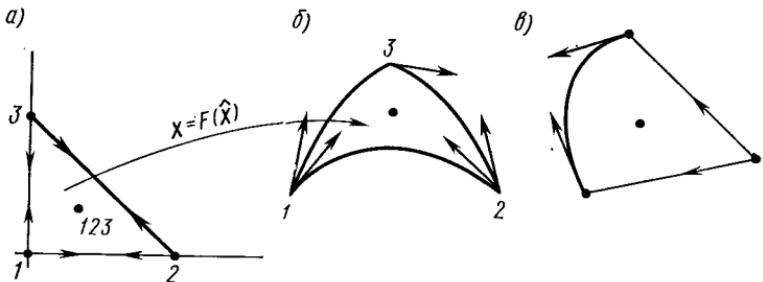


Рис. 4.22

Нетрудно проверить, что $F(\hat{x})$ имеет вид

$$x = F(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{N_0} \hat{p}_i \hat{\mathbf{a}}_i^0 + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{d_i} \hat{p}_{i,k}^1 \xi_{i,k}^1. \quad (4.225)$$

Пример 4.16. Пусть задан элемент $(\hat{\Sigma}, \hat{T}, \hat{P})$, показанный на рис. 4.22, а. Здесь $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1$,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Sigma}^0 &= \{\hat{\mathbf{a}}_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{\hat{\mathbf{a}}_{ijk}\}_{1 \leq i < j < k \leq n+1}; \\ \hat{\Sigma}^1 &= \{\hat{\mathbf{a}}_i\}_{i=1}^{n+1}; \\ \xi_{i,k}^1 &= \hat{\mathbf{a}}_k - \hat{\mathbf{a}}_i \end{aligned} \right\} \quad (4.226)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n+1} \hat{p}_i^0 a_i^0 + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} \hat{p}_{i,j,k}^0 a_{i,j,k}^0 + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^n \hat{p}_{i,k}^1 \xi_{i,k}^1. \quad (4.227)$$

Базисные функции \hat{p}_i^0 , $\hat{p}_{i,j,k}^0$, $\hat{p}_{i,k}^1$ были определены в § 4.3. Как было установлено, здесь $P = P_3$, т. е. границы конечного элемента (в R^2) — отрезки дуг кривых третьего порядка.

Отметим, что в действительности достаточно использовать криволинейные элементы лишь с одной непрямолинейной гранью (типа, показанного на рис. 4.22, б).

При практическом применении криволинейных элементов интегрирование осуществляется путем перехода к базисному элементу, при этом все затруднения с криволинейностью сводятся к вычислению якобиана преобразования $\mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}})$ и к вычислению производных, встречающихся в формах $a(u, v)$.

Обоснование данного варианта метода доставляет по сравнению с предыдущим затруднения больше технического характера и по своему объему выходит за рамки настоящего пособия (см. работы [42], [43]).

§ 4.7. Равновесные и смешанные конечные элементы

Как известно, постановка задачи в перемещениях не является единственной возможной. В ряде случаев более целесообразным является использование постановки задачи в напряжениях. Краевая задача для соответствующей системы дифференциальных уравнений здесь использована не будет, а будет произведен переход сразу к вариационной постановке — минимизации (максимизации) соответствующего функционала с помощью применения преобразования Фридрихса [17] к полученным ранее проблемам минимизации функционалов вида

$$J(v) = 1/2 a(v, v) - \langle f, v \rangle. \quad (4.228)$$

Напомним преобразование Фридрихса на примере более простой задачи — минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} v|^2 d\Omega \quad (4.229)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$v|_S = g. \quad (4.230)$$

Данная задача встречалась в проблеме Сен-Венана для призматических стержней.

Будем считать частные производные $\partial v / \partial x_i$ и саму функцию v независимыми функциональными аргументами, тогда, вводя обозначение

$$p_i = \partial v / \partial x_i,$$

придем к следующей формулировке задачи.

Задача I. Найти минимум функционала

$$J = \int_{\Omega} p_i p_i d\Omega \quad (4.231)$$

при добавочных условиях

$$p_i = \partial v / \partial x_i \text{ в } \Omega, \quad v|_S = g. \quad (4.232)$$

Внося условие (4.232) в функционал с помощью правила множителей Лагранжа, получим следующую задачу без добавочных условий.

Задача II. Найти стационарное значение выражения

$$L(v, \mathbf{p}, \rho, \lambda) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} p_i p_i + \lambda_i \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - p_i \right) \right] d\Omega - \int_S \rho (v - g) dS, \quad (4.233)$$

где λ и ρ — множители Лагранжа, соответствующие добавочным условиям (4.232).

Составляя условия стационарности функционала (4.233) (в виде равенства нулю функциональных производных по соответствующим аргументам), найдем:

$$\left. \begin{array}{l} p_i - \lambda_i = 0; \\ \operatorname{div} \lambda = 0; \\ [\lambda_i v_i - \rho]_S = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial x_i} - p_i = 0; \\ (v - g)|_S = 0. \end{array} \right\} \quad (4.234)$$

Присоединяя к задаче 4.2 в качестве добавочных последние два из условий (4.234), вернемся к задаче 4.1; если же в качестве добавочных присоединить к проблеме 4.2 первые три из условий (4.234), то тем самым будет произведено преобразование Фридрихса, которое приведет к задаче III.

Задача III. Найти стационарное значение выражения

$$J^*(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} p_i p_i d\Omega + \int_S p_i v_i g dS; \quad (4.235)$$

внутри области должно быть

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = 0. \quad (4.236)$$

Обычным способом доказывается, что стационарное значение функционала (4.235) есть максимум и этот максимум единственен.

Применим теперь преобразование Фридрихса для случая общей трехмерной задачи теории упругости:

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\mathbf{u})) = \rho F_i \text{ в } \Omega, \quad (4.237)$$

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{g}, \quad (4.238)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) v_j|_{S_\sigma} = P_i. \quad (4.239)$$

Как было показано, данная задача эквивалентна минимизации функционала

$$J(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh}(\boldsymbol{v}) \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \rho F \cdot \boldsymbol{v} d\Omega - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} dS \quad (4.240)$$

на множестве функций, удовлетворяющих условию (4.238).

Считая в функционале (4.240) ϵ_{ij} и \boldsymbol{v} независимыми функциональными аргументами, сформулируем исследуемую задачу.

Задача I. Найти минимум функционала

$$J(\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkh} \epsilon_{kh} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \rho F \cdot \boldsymbol{v} d\Omega - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} dS \quad (4.241)$$

при добавочных условиях внутри области

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.242)$$

и на границе

$$\boldsymbol{v}|_{S_u} = \boldsymbol{g}. \quad (4.243)$$

Внося условия (4.242) — (4.243) в функционал (4.241) с помощью множителей Лагранжа, получим задачу без добавочных ограничений.

Задача II. Найти стационарное значение выражения

$$\begin{aligned} & L(\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\mu}) = \\ & = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} a_{ijkh} \epsilon_{kh} \epsilon_{ij} - \sigma_{ij} \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) - \rho F \cdot \boldsymbol{v} \right] d\Omega - \\ & - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} dS - \int_{S_u} \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{g}) dS, \end{aligned} \quad (4.244)$$

где σ_{ij} , $\boldsymbol{\mu}$ — множители Лагранжа, соответствующие добавочным условиям (4.242) — (4.243).

Так как σ_{ij} — симметричный тензор, то

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i d\Omega = \int_S \sigma_{ij} v_i v_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i d\Omega. \end{aligned} \quad (4.245)$$

Подставляя равенство (4.245) в функционал (4.244), придем к проблеме нахождения стационарного значения выражения

$$\begin{aligned} & L(\hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\mu}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} a_{ijkh} \epsilon_{kh} \epsilon_{ij} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i \right) v_i \right] d\Omega - \\ & - \int_{S_\sigma} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} dS - \int_{S_u} \boldsymbol{\mu} \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{g}) dS + \int_S \sigma_{ij} v_i v_j dS. \end{aligned} \quad (4.246)$$

Составляя условие стационарности функционала (4.246) в виде равенства нулю функциональных производных по соответствующим аргументам, найдем:

$$\left. \begin{array}{l} -\sigma_{ij} + a_{ijkh}\epsilon_{kh} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0; \\ [-P_i + \sigma_{ij}v_j]s_\sigma = 0; \\ [-\mu_i + \sigma_{ij}v_j]s_u = 0, \end{array} \right\} \quad (4.247)$$

$$\left. \begin{array}{l} [u - g]s_u = 0; \\ \epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0. \end{array} \right\} \quad (4.248)$$

Условия (4.247) позволяют дать механическую интерпретацию введенным множителям Лагранжа: совокупность множителей σ_{ij} представляет собой совокупность координат тензора напряжений, μ — плотность вектора напряжений на части поверхности S_u .

Присоединяя к задаче II в качестве добавочных условий (4.428), вернемся к задаче I; если же в качестве добавочных к задаче II присоединить условия (4.247), то тем самым будет произведено преобразование Фридрихса и мы получим задачу III.

Задача III. Найти стационарное значение функционала

$$J^*(\hat{\sigma}) = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} A_{ijkh} \sigma_{kh} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{S_u} \sigma_{ij} v_j g_i dS, \quad (4.249)$$

где A_{ijkh} — тензор, обратный a_{ijkh} (тензор модулей податливости). Функционал (4.249) называется *функционалом Кастильяно*; обычным образом доказывается, что его стационарное значение есть максимум и этот максимум единствен. Максимум функционала Кастильяно разыскивается на множестве тензоров напряжений, которые обязаны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0 \quad (4.250)$$

и силовым граничным условиям

$$\sigma_{ij} v_j |_{S_\sigma} = P_i; \quad (4.251)$$

в этом основная трудность его практического использования.

Произведем теперь разбиение области Ω , в которой разыскивается решение

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_l T_l. \quad (4.252)$$

Выбирая степени свободы (искомые параметры) и строя соответствующие интерполяции, можно с помощью описанных выше приемов приводить задачи минимизации функционалов (4.235),

(4.249) к системам линейных алгебраических уравнений. Соответствующие конечные элементы были впервые предложены Фрайш де Вебеком в работе [44] и получили название равновесных (equilibrium model). Эти элементы имеют определенные достоинства и получили некоторое распространение в расчетах конкретных конструкций.

Основное затруднение при построении равновесных элементов состоит в необходимости удовлетворять уравнениям равновесия (4.250). Отметим, что определенный прогресс здесь был достигнут путем перехода от требования (4.250) к более простому в реализации требованию: интеграл от выражений типа (4.250) для базисных функций метода по отдельному элементу должен быть равен нулю.

В этой связи весьма привлекательным представляется использование промежуточных вариационных формулировок типа (4.233), (4.244), (4.246), когда на варьируемые функции (а стало быть, и на базисные функции в методе конечных элементов) не налагаются никаких ограничений. Соответствующие варианты метода конечных элементов получили название *смешанных*.

Приведем краткое описание одного из вариантов метода смешанных конечных элементов. Для этого перепишем функционал (4.246) в следующей форме [с учетом первого и четвертого из условий (4.247)]:

$$R(\hat{\sigma}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\sigma_{ij}(\hat{\epsilon}(\mathbf{v}))_{ij} - \frac{1}{2} A_{ijkh} \sigma_{kh} \sigma_{ij} - \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \right] d\Omega - \\ - \int_{S_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} v_j (v_i - g_i) dS. \quad (4.253)$$

Функционал (4.253) называется *функционалом Рейсснера*, независимыми переменными здесь являются $\hat{\sigma}$ и \mathbf{v} .

Введем: а) разбиение (4.252) области Ω на конечные элементы T_i ; б) точки a_i^u , в которых разыскиваются значения перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$; в) точки a_i^σ , в которых разыскиваются значения напряжений $\hat{\sigma}(\mathbf{x})$; г) базисные функции $w_{\alpha i}(\mathbf{x})$ и $\hat{w}_j^{\gamma\delta}(\mathbf{x})$, с помощью которых строятся интерполяции Лагранжа соответственно перемещений и напряжений.

Тогда приближенные выражения для решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_h^0 &= \sum_{\alpha, i} v_{h\alpha}(a_i^u) w_{\alpha i}(\mathbf{x}); \\ \hat{\sigma}_h^0 &= \sum_{\gamma, \delta, i} \sigma_{\gamma\delta}^0(a_i^\sigma) \hat{w}_j^{\gamma\delta}(\mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (4.254)$$

Составим условие стационарности функционала Рейсснера в виде равенства нулю функциональной производной на решении $(\hat{\sigma}^0, \mathbf{v}^0)$ в произвольном направлении $(\hat{\sigma}, \mathbf{v})$ [формально считая

пару $(\hat{\sigma}, \mathbf{v})$ одной независимой переменной]:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \epsilon_{ij}(\mathbf{v}^0) \sigma_{ij} - A_{ijkh} \sigma_{kh}^0 \sigma_{ij} - \rho F \cdot \mathbf{v}] d\Omega - \\ - \int_{S_\sigma} P \cdot \mathbf{v} dS - \int_{S_u} [\sigma_{ij}^0 v_j v_i + (v_i^0 - g_i) \sigma_{ij} v_j] dS = 0, \quad \forall (\hat{\sigma}, \mathbf{v}). \quad (4.255)$$

Подставляя выражения (4.254) в уравнение (4.255) и полагая поочередно $\sigma_{ij} = (\hat{\omega}_p^{v\delta})_{ij}$, $v = w_{\alpha i}$, придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $v_{h\alpha}^0$ (a_i^α), $\sigma_{v\delta}^0$ (a_j^α).

Здесь возникает проблема (новая по сравнению с методом § 4.4 1—6) разрешимости полученной системы линейных алгебраических уравнений. Напомним, что ранее разрешимость системы уравнений метода конечных элементов вытекала из общих теорем приложения II (Лакса — Мильграма) и того обстоятельства, что $V_h \subset V$. Обобщение теоремы Лакса — Мильграма на случай уравнений вида (4.255) получено в работе Бабушки [39].

Приведем простейшие соображения, позволяющие указать ограничения на аппроксимации (4.254), обеспечивающие разрешимость системы алгебраических уравнений.

Расчленим систему (4.255) на две, одна из которых соответствует паре $(\hat{\sigma}, 0)$, вторая — $(0, \mathbf{v})$:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} [-\epsilon_{ij}(\mathbf{v}^0) - A_{ijkh} \sigma_{kh}^0] \sigma_{ij} d\Omega + \int_{S_u} (v_i^0 - g_i) \sigma_{ij} v_j dS = 0; \\ & \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^0 \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \rho F \cdot \mathbf{v}] d\Omega - \int_{S_\sigma} P \cdot \mathbf{v} dS - \int_{S_u} \sigma_{ij}^0 v_j v_i dS = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.256)$$

Определим матрицы

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \left[\sum_l \int_{T_l} \epsilon_{pq} (w_{\alpha i}) (\hat{\omega}_l^{v\delta})_{pq} d\Omega \right]; \\ [H] &= \left[\sum_l \int_{T_l} A_{ijkh} (\hat{\omega}_p^{v\delta})_{kh} (\hat{\omega}_q^{\alpha\beta})_{ij} d\Omega \right]; \\ [M_u] &= \left[\sum_{\partial T_l \in S_u} \int_{T_l} (w_{\alpha i})_p (\omega_l^{v\delta})_{pq} v_q dS \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.257)$$

и векторы

$$\left. \begin{aligned} \{B_\sigma\} &= \left\{ \sum_{\partial T_l \in S_u} \int_{\partial T_l} g_p (\hat{\omega}_l^{v\delta})_{pq} v_q dS \right\}, \\ \{B_u\} &= \sum_l \left\{ \int_{T_l} \rho F_p (w_{\alpha i})_p d\Omega + \sum_{\partial T_l \in S_\sigma} \int_{\partial T_l} P_p (w_{\alpha i})_p dS \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.258)$$

Тогда система линейных алгебраических уравнений, о которой выше шла речь, приведется к виду (через $\{\sigma\}$ обозначим вектор

неизвестных, связанных с напряжениями, через $\{\delta\}$ с перемещениями)

$$\left. \begin{aligned} [M]\{\delta\} + [H]\{\sigma\} - [M_u]\{\delta\} &= -\{B_\sigma\}; \\ [M]^T\{\sigma\} - [M_u]^T\{\sigma\} &= \{B_u\} \end{aligned} \right\} \quad (4.259)$$

(значком T обозначена операция транспонирования).

Матрица H — квадратная, положительно определенная, симметричная; следовательно, из первого из уравнений (4.259) можем найти, что

$$\{\sigma\} = -[H]^{-1}[M]\{\delta\} + [H]^{-1}M_u\{\delta\} - [H]^{-1}\{B_\sigma\}. \quad (4.260)$$

Подставляя это выражение во вторую из систем (4.259), получим систему уравнений относительно $\{\delta\}$:

$$\begin{aligned} [M - M_u]^T[H]^{-1}[M - M_u]\{\delta\} &= \\ &= -\{B_u\} - [M - M_u]^T[H]^{-1}\{B_\sigma\}. \end{aligned} \quad (4.261)$$

Матрица этой системы симметрична, но не обязательно положительно определена; последнее зависит от количества неизвестных $\{\sigma\}$ и $\{\delta\}$; одно из необходимых условий разрешимости состоит, очевидно, в том, чтобы выбирать $\dim\{\sigma\} \leq \dim\{\delta\}$.

§ 4.8. Гибридные конечные элементы

Во всех предыдущих вариантах метода конечных элементов предполагалось, что приближенное решение принадлежит некоторому подпространству исходного функционального пространства; например, при построении конечных элементов Лагранжа для решения задач теории упругости требовалось, чтобы объединения P -интерполяций были непрерывны при переходе через границы конечных элементов.

Удовлетворить подобным требованиям не всегда просто, поэтому были предприняты попытки (и небезуспешные) построения конечных элементов, для которых предположение о принадлежности приближенного решения исходному функциональному пространству (в частности, предположение о непрерывности) не выполняется. Такие конечные элементы получили название *гибридных* и нашли широкое применение в расчете различных инженерных конструкций, в частности авиационных.

Приведем краткое описание методики построения гибридных конечных элементов.

Прежде всего отметим, что сформулированные ранее вариационные принципы в данном случае не работают, так как рассматриваемые здесь поля перемещений не являются кинематически допустимыми, поля напряжений — статически допустимыми. Поэтому первая проблема здесь — построить надлежащие обобщения классических вариационных принципов. Идею таких обобщений поясним сначала на примере классической задачи Дирихле для

уравнения Лапласа:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \text{ в } \Omega; \\ u|_S &= g, \quad S = \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.262)$$

Произведем разбиение Ω на отдельные подобласти T_l , границы которых будем обозначать через ∂T_l . Рассмотрим отдельную подобласть T_l и временно предположим, что нормальная производная от u на ∂T_l известна, тогда, по доказанному ранее, решение задачи (4.262) в области T_l эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J_l(v) = \frac{1}{2} \int_{T_l} |\operatorname{grad} v|^2 d\Omega - \int_{\partial T_l} \frac{\partial v}{\partial \nu} v dS. \quad (4.263)$$

Если часть $\partial T_l \in S$, то поверхностный интеграл по этой части исчезает и требуется, чтобы было выполнено второе из условий (4.262).

Предположим теперь, что v может претерпевать разрыв при переходе через границы подобластей T_l , но нормальные производные $\partial v / \partial \nu$ для смежных элементов совпадают, тогда, просуммировав равенство (4.263) по всем подобластям T_l (и внося краевое условие в функционал с помощью метода множителей Лагранжа), придем к задаче нахождения стационарного значения функционала

$$\begin{aligned} \tilde{J}\left(v, \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial T_l}\right) &= \frac{1}{2} \sum_l \int_{T_l} |\operatorname{grad} v|^2 d\Omega - \\ &- \sum_l \int_{\partial T_l} \frac{\partial v}{\partial \nu} v dS - \sum_{\partial T_l \in S_n} \int_{\partial T_l} \frac{\partial v}{\partial \nu} (g - v) dS, \end{aligned} \quad (4.264)$$

причем здесь v и $\partial v / \partial \nu|_{\partial T_l}$ считаются независимыми функциональными аргументами (как и в смешанных вариационных принципах); v — функция, определенная кусочным образом всюду по подобластям T_l ; $\partial v / \partial \nu|_{\partial T_l}$ — функция, определенная на границах подобластей.

Полученная проблема нахождения стационарного значения функционала (4.264) является все еще континуальной, для ее дискретизации необходимо выбрать неизвестные параметры в заранее намеченных точках на T_l и ∂T_l , произвести соответствующую интерполяцию v на T_l и $\partial v / \partial \nu$ на ∂T_l , после чего алгоритм решения, в принципе, будет тем же, что и во всех рассмотренных ранее примерах.

Отметим без доказательства, что числа независимых параметров в интерполяции v на T_l и $\partial v / \partial \nu$ на ∂T_l не являются независимыми, связь между ними вытекает из требования существования и единственности решения дискретизированной задачи. Например, в случае, когда $n = 2$, T_l — треугольники на плоскости, для аппроксимации v на T_l можно использовать функции из P_k , для аппроксимации $\partial v / \partial \nu$ — полиномы от одной переменной — длины дуги ∂T_l — степени m ; из условия разрешимости системы

алгебраических уравнений следует, что

$$k \geq m+1, \text{ если } m \text{ четно;}$$

$$k \geq m+2, \text{ если } m \text{ нечетно.}$$

В простейшем случае, когда $m=0$, т. е. $\partial v / \partial v$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, необходимо аппроксимировать v внутри T_i полиномом от двух переменных степени не ниже первой; если же $m=1$, то $k \geq 3$.

Проводя аналогичные рассуждения для случая, когда в качестве исходного используется функционал (4.235), и предполагая, что v является непрерывной функцией при переходе через границы конечных элементов, а $\partial v / \partial v$ — разрывной, получим еще один вариант метода гибридных конечных элементов: найти стационарное значение функционала

$$\begin{aligned} \tilde{J}^*(p, v|_{\partial T_i}) = & - \sum_l \int_{T_i} \frac{1}{2} p_i p_i d\Omega + \\ & + \sum_l \int_{\partial T_i \notin S} p_i v_i v dS + \sum_l \int_{\partial T_i \in S} p_i v_i g dS, \end{aligned} \quad (4.265)$$

причем стационарное значение разыскивается на множестве функций, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{div} \mathbf{p} = \partial p_i / \partial x_i = 0. \quad (4.266)$$

Обратимся к решению задач теории упругости (4.237) — (4.239). Произведя разбиение Ω на подобласти T_i и считая временно перемещения на ∂T_i заданными, придем к выводу, что решение этой задачи в области T_i эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J_i(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{T_i} a_{ijkl} \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{T_i} \rho F \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial T_i} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (4.267)$$

где

$$\mathbf{t} = t_i \mathbf{k}_i = \sigma_{ij} v_j \mathbf{k}_i \quad (4.268)$$

— вектор усилий на границе элемента. Предполагая, что на общей части границы ∂T_i двух соседних элементов векторы \mathbf{t} совпадают (с точностью до направления), а перемещения разрывны, просуммируем выражения (4.267) по всем T_i ; придем к задаче нахождения стационарного значения функционала

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\mathbf{v}, \mathbf{t}|_{\partial T_i}) = & \sum_l \int_{\partial T_i} \frac{1}{2} a_{ijkl} \epsilon_{kh}(\mathbf{v}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega - \\ & - \sum_l \int_{T_i} \rho F \cdot \mathbf{v} d\Omega - \sum_l \int_{\substack{\partial T_i \notin S_g, \\ \partial T_i \notin S_u}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \\ & - \sum_l \int_{\substack{\partial T_i \in S_g}} P \cdot \mathbf{v} dS - \sum_l \int_{\substack{\partial T_i}} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{v}) dS. \end{aligned} \quad (4.269)$$

Дальнейшие преобразования проводятся так же, как и в предыдущем примере: аппроксимируется поле перемещений внутри T_i и вектор усилий \mathbf{t} на границе ∂T_i , с помощью какого-либо набора функций, например полиномиальных, и далее составляется линейная алгебраическая система уравнений.

Если в качестве исходного взять функционал Кастильяно и предположить, что вектор перемещений непрерывен всюду в Ω , а вектор плотности поверхностных усилий может претерпевать разрывы при переходе через границы конечных элементов, то, повторяя проведенные выше рассуждения, придем к следующему варианту метода гибридных конечных элементов: найти стационарное значение функционала

$$J^*(\sigma, \mathbf{v} |_{\partial T_i}) = - \sum_l \int_{T_l} A_{ijkh} \sigma_{kh} \sigma_{ij} d\Omega + \sum_{\substack{l \\ \partial T_l \notin S_u, \\ \partial T_l \notin S_\sigma}} \int_{\partial T_l} \sigma_{ij} v_j v_i dS + \\ + \sum_{\substack{l \\ \partial T_l \in S_\sigma}} \int_{\partial T_l} (P_i - \sigma_{ij} v_j) v_i dS + \sum_{\substack{l \\ \partial T_l \notin S_u}} \int_{\partial T_l} \sigma_{ij} v_j g_i dS, \quad (4.270)$$

причем стационарное значение разыскивается на множестве функций (тензоров), удовлетворяющих в T_i уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0. \quad (4.271)$$

Исследование разрешимости получающихся в результате аппроксимации систем алгебраических уравнений здесь проведено не будет.

Приведенные здесь варианты гибридных конечных элементов не исчерпывают всего многообразия имеющихся возможностей; вводя те или иные предположения о непрерывности нормальных и касательных составляющих векторов \mathbf{t} и \mathbf{v} при переходе через границы конечных элементов, можно построить новые функционалы для приближенного решения задач теории упругости.

ГЛАВА 5

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НА ЭВМ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

В этой главе будут рассмотрены некоторые типичные задачи механики твердого деформируемого тела, описывающие развивающиеся во времени процессы, и некоторые нелинейные задачи. Цель таких рассмотрений — иллюстрация общих методов решения на ЭВМ подобных задач; отметим сразу, что сами методы возникли из потребностей практического решения данных задач.

§ 5.1. Общая схема решения нестационарных задач

Рассмотрим задачи, в которых существенную роль играет временная переменная t ; к этим задачам относятся задачи динамики сплошных сред, а также задачи расчета медленно развивающихся во времени процессов, инерционными эффектами в которых можно пренебречь. К последнему классу задач относятся, например, квазистатические задачи вязкоупругости, задачи о расчете неуставновившихся температурных полей.

При решении данного типа задач возможны два подхода. Первый подход состоит в приложении использованных выше рассуждений в каждый момент времени t , т. е. производится дискретизация только по пространственным переменным; искомые параметры здесь являются функциями времени и для их определения получаются алгебраические, обыкновенные или интегро-дифференциальные уравнения — в зависимости от исходной задачи, которые решаются известными методами с помощью разработанных программ (Рунге — Кутта, Адамса и т. д.). При втором подходе независимая переменная — время t — считается формально равноправной с пространственными переменными x_i и производится разбиение на конечные элементы цилиндра, любое сечение которого плоскостью $t = \text{const}$ — область изменения независимых переменных x_i ; переменная t отсчитывается вдоль образующей цилиндра. Недостаток данного подхода — резкое увеличение размерности задачи, если только для движения вдоль временной переменной не применять специальные методы. Приведем описание первого подхода (представляющего собой, впрочем, частный случай второго).

В качестве примера рассмотрим задачу теории упругости, в которой пренебрежение силами инерции является недопустимым; в этом случае все характеристики напряженно-деформированного состояния будут функциями пространственных координат и врем-

мени t . В общем виде такие задачи, называемые нестационарными, можно представить в форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au - f(x, t) = 0, \quad (5.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = u_1, \quad (5.2)$$

где A — линейный оператор, действующий в соответствующим образом построенном пространстве функций V ; $u = u(x, t)$ — искомая функция, которая, в частности, может быть скалярной; $f(t) = f(x, t)$, $u_0 = u_0(x)$, $u_1 = u_1(x)$ — заданные величины.

Опишем кратко алгоритм решения задачи (5.1) — (5.2) с использованием метода конечных элементов. (Заметим, что этот способ был известен до изобретения метода конечных элементов под названием метода Бубнова — Галеркина; метод конечных элементов дал лишь способ построения базисных функций, удобных для реализации метода на ЭВМ.) Итак, пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ — базис, построенный одним из описанных выше способов; функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ зависят только от пространственных координат. Будем искать приближенное решение задачи (5.1) — (5.2) в виде линейной комбинации функций $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ с коэффициентами, являющимися функциями времени t :

$$u_N = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k. \quad (5.3)$$

Подстановка разложения (5.3) в уравнение (5.1) при некоторых конкретных значениях $a_k(t)$ не обращает это уравнение в тождество, в левой части уравнения (5.1) будет получаться некоторая отличная от нуля величина, называемая *невязкой*.

Будем определять коэффициенты $a_k(t)$ при условии, чтобы эта невязка была ортогональна в V ко всем функциям системы $\varphi_1, \dots, \varphi_N$; это требование приводит к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \frac{d^2 a_k(t)}{dt^2} (\varphi_k, \varphi_l) + \sum_{k=1}^N a_k(t) (A \varphi_k, \varphi_l) - (f(t), \varphi_l) = 0. \quad (5.4)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} (\varphi_k, \varphi_l) &= M_{kl}, \quad (A \varphi_k, \varphi_l) \equiv a(\varphi_k, \varphi_l) = A_{kl}; \\ (f(t), \varphi_l) &= F_l, \quad d^2 a_k / dt^2 \equiv \ddot{a}_k, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5.5)$$

перепишем систему (5.4) в виде

$$\sum_{k=1}^N \ddot{a}_k(t) M_{kl} + \sum_{k=1}^N a_k(t) \cdot A_{kl} = F_l \quad (5.6)$$

или в матричной форме

$$[M]\ddot{\alpha} + [A]\dot{\alpha} = F(t). \quad (5.7)$$

Алгоритмы построения матрицы $[A]$, называемой *матрицей жесткости системы*, были описаны выше; матрица $[M]$, называемая *матрицей масс системы*, строится аналогичным способом с той лишь разницей, что на каждом шаге необходимо вычислять не величину $a(\varphi_k, \varphi_l) = (A\varphi_k, \varphi_l)$, а скалярное произведение (φ_k, φ_l) . В узкоспециализированных программах для сокращения времени работы ЭВМ можно вычислить вручную матрицы масс отдельных подобластей T_i , из которых суммированием строится матрица масс системы $[M]$; примеры таких вычислений имеются в [10].

Начальные условия для системы обыкновенных уравнений (5.7) получаются естественным образом из начальных условий (5.2): разложение (5.3) подставляем в зависимости (5.2) и значения $a(0)$, $da/dt|_{t=0}$ получаем из условия ортогональности невязки всем функциям системы $\varphi_1, \dots, \varphi_N$; данная процедура приводит к следующим двум системам линейных алгебраических уравнений относительно:

$$\begin{aligned} & a_1(0), \dots, a_N(0) \\ & \sum_{k=1}^N a_k(0) (\varphi_k, \varphi_l) = (u_0, \varphi_l), \quad l = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.8)$$

и

$$\begin{aligned} & \dot{a}_1(0), \dots, \dot{a}_N(0) \\ & \sum_{k=1}^N \dot{a}_k(0) (\varphi_k, \varphi_l) = (u_1, \varphi_l), \quad l = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Решение систем (5.8), (5.9) можно интерпретировать как приближенное решение задач минимизации функционалов

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \|u(0) - u_0\|^2, \\ J_2(u) &= \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} - u_1 \right\|^2 \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (5.10)$$

на подпространстве, натянутом на векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_N$.

Для решения задачи Коши для системы (5.7) с начальными условиями, определяемыми из систем (5.8) — (5.9) существует много методов, доведенных до стандартных программ; отметим, что экономичные методы решения данной задачи строятся по аналогии со способами, применяемыми в различных вариантах метода сеток. Формулировку метода для параболических уравнений можно найти в книге Стрэнга и Фикса [33].

Отметим сразу же, что метод Бубнова — Галеркина переносится без изменения на тот случай, когда A является несамосопряженным оператором, а также интегро-дифференциальным оператором вида, встречающегося в наследственной теории вязкоупругости Больцмана — Вольтерра.

§ 5.2. Теория линейно-вязкоупругих сред

В современной технике широко применяются материалы, сочетающие упругие, вязкие и пластические свойства. Такие материалы обладают релаксационными свойствами — процессы их деформирования зависят от времени.

К таким материалам относятся полимеры, бетоны, сплавы, металлы (при повышенных температурах) и др. Некоторые конструкции под нагрузкой (например, амортизирующие и виброзащитные устройства) в целом ведут себя как упруговязкие системы.

Основные физические уравнения, связывающие напряжения и деформации упруговязких сред, содержат фактор времени. Опыт показывает существенное влияние скоростей нагружения — фактора времени — на диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$, ползучести и релаксации. В качестве теории, описывающей процессы деформирования во времени, здесь принята наследственная теория вязкоупругости, построенная на основе принципа суперпозиции Больцмана (см. § 1.8).

В этом параграфе будут изложены способы экспериментального определения ядер \hat{K} и $\hat{\Pi}$, определяющих связь напряжений с деформациями. Рассмотрим сначала случай однородного напряженного и деформированного состояния, характеризуемого единственным компонентом тензора напряжений $\sigma(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$. Выделяя из ядра \hat{K} сингулярную составляющую, запишем связь между $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ в форме

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \int_0^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau; \quad (5.11)$$

связь $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ примем в форме

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) - E \int_0^T T(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (5.12)$$

(E — мгновенный модуль Юнга).

Предположим, что материал нестареющий, в этом случае зависимости (5.11) и (5.12) должны быть инвариантны по отношению к преобразованию сдвига по времени. [Напомним, что нуль в соотношениях (5.11) — (5.12) — это момент начала приложения нагрузки.] Из этого требования вытекает, что ядра $K(t, \tau)$ и $T(t, \tau)$ — разностные, т. е.

$$K(t, \tau) = K(t - \tau), \quad T(t, \tau) = T(t - \tau).$$

Вместо зависимостей типа (5.11) — (5.12) иногда используют зависимости:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad (5.13)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau). \quad (5.14)$$

Физический смысл функций $\Pi(t-\tau)$ и $R(t-\tau)$ и их связь с ядрами $K(t-\tau)$ и $T(t-\tau)$ будет выяснена ниже.

Свойства упруговязких сред обычно изучают в опытах на ползучесть и релаксацию. Ценную информацию можно получить из диаграммы $\sigma \sim \epsilon$, снятых при разных скоростях нагружения или деформирования. Остановимся подробнее на процессах ползучести и релаксации.

Ползучесть. Процесс изменения деформаций напряженного тела во времени называется ползучестью.

Обычно ползучесть изучают при постоянных уровнях напряжений, возникающих в теле за весьма малый промежуток времени, т. е. в результате так называемого ступенчатого нагружения $\sigma(t) = \sigma_k h(t)$, где $\sigma_k = \text{const}$, $h(t)$ — функция Хевисайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$, $h(t) = 1$ при $t \geq 0$) (рис. 5.1, а).

В начальный момент времени нагружения в теле возникают упругие деформации, или упругопластические (при достаточно

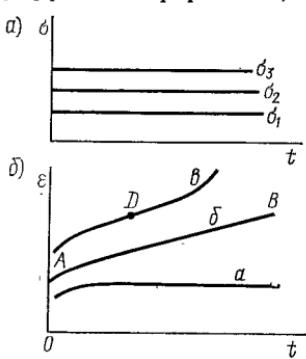


Рис. 5.1

больших σ_k), а затем во времени развиваются высокоэластические, или деформации ползучести. При этом кривая $\epsilon(t)$ при $t = 0$ переходит от упругой или упругопластической ее части к высокоэластической плавно, без излома. Этот факт можно записать в виде требования, чтобы при $t = 0$ $d\epsilon/dt = \infty$.

Во времени скорость ползучести уменьшается и через некоторый промежуток времени может стать нулевой, или конечной, величиной, а иногда скорость ползучести после убывания начинает возрастать. В первом случае

($\dot{\epsilon} = 0$) ползучесть называется ограниченной [кривая a на рис. 5.1, б], во втором ($\dot{\epsilon} = \text{const}$) — установившейся [кривая b на рис. 5.1, б]. При достаточно большом уровне напряжений участок AB установившейся ползучести может сократиться и перейти в точку перегиба D , разделяющую участки кривой с убывающей и возрастающей скоростями деформаций [кривая δ в рис. 5.2, б].

В последних двух случаях деформации ползучести растут до момента разрушения образца. Такую ползучесть называют неограниченной.

Для практики в большинстве случаев представляет интерес определение небольших напряжений, при которых имеет место ограниченная ползучесть.

Ордината MN кривой ползучести в момент времени t (рис. 5.2, б) включает в себя значения упругой деформации ϵ_y , высокоэластической ϵ_{y_0} и пластической ϵ_p , т. е.

$$\epsilon(t) = \epsilon_y + \epsilon_{y_0} + \epsilon_p.$$

Эти составляющие могут быть определены из опытов на ползучесть при ступенчатом нагружении и разгрузке (рис. 5.2, а).

Однако технические трудности осуществления ступенчатого нагружения и фиксирования положения точек A и C (см. рис. 5.2, б) в опытах затрудняют определение составляющих деформаций. Заметим, что отрезок OA , равный значению деформации $\varepsilon(t)$ в момент $t = 0$, содержит упругую и, может быть, пластическую составляющую. Определение упругой части деформации составляет важную задачу, поскольку из этой величины можно найти модуль упругости материала ($E = \sigma_k / \varepsilon_y$).

Величина $\Pi(t) = \varepsilon(t)/\sigma_k$ называется *податливостью материала*. Если пластическая составляющая отсутствует ($\varepsilon_p = 0$), то при $t = 0$ величина податливости

$$\Pi(0) = \varepsilon(0)/\sigma_k = 1/E. \quad (5.15)$$

При $\sigma(t) = \sigma_k = \text{const}$ из (5.11) имеем уравнение ползучести

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right]. \quad (5.16)$$

Дифференцируя уравнение (5.16) по t , получим

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_k} \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (5.17)$$

откуда видно, что функция влияния $K(t)$ пропорциональна скорости ползучести $\dot{\varepsilon} \equiv d\varepsilon/dt$. Так как при $t = 0$, $d\varepsilon/dt \rightarrow \infty$, то функция $K(t)$ должна обладать свойством сингулярности, т. е. $K(0) = \infty$, причем в силу (5.16) интеграл от $K(t)$ должен быть конечной величиной. Такие функции называются *слабосингулярными* или *функциями со слабой особенностью*. Для удобства в дальнейшем будем называть функции $K(t)$ функциями скорости ползучести. Как видно из (5.17), график такой функции может быть построен по результатам дифференцирования кривой ползучести. Характерные кривые $K(t)$ даны на рис. 5.3.

Заметим, что уравнение (5.11) можно получить из уравнения (5.13), интегрируя его по частям:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \Pi(t - \tau) \sigma(\tau) |_{0}^t + \int_0^t \Pi'(\tau) \sigma(\tau) d\tau = \\ &= \Pi(0) \sigma(t) + \frac{1}{E} \int_0^t \Pi'(\tau) \sigma(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Потребовав, чтобы

$$\Pi(0) = \frac{1}{E}; \quad \Pi'(t) = \frac{1}{E} K(t), \quad (5.18)$$

получим уравнение (5.11).

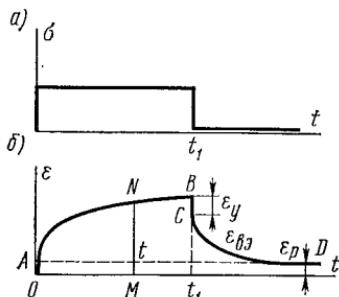


Рис. 5.2

При ступенчатом нагружении $\sigma(t) = \sigma_k h(t)$ и из (5.13) имеем

$$e(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) \sigma_k \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau = \sigma_k \int_0^t \Pi(t-\tau) \delta(\tau) d\tau,$$

используя определение дельта-функции Дирака $\delta(\tau)$, имеем

$$e(t) = \sigma_k \Pi(t). \quad (5.19)$$

В дальнейшем податливость $\Pi(t)$ будем называть *функцией ползучести*, с функцией скорости ползучести она связана формулой (5.18). Заметим, что в области линейности свойств деформаций функции ползучести совпадают для всех σ_k и t . Наибольшее из значений σ_k , для которых кривые $\Pi(t)$ совпадают, будем называть *границей области линейности свойств деформаций*. Применение уравнений (5.11) или (5.13) законно только для этой области.

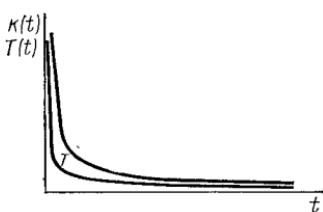


Рис. 5.3

Если напряжения превосходят граничное значение σ_k и, следовательно, кривые податливостей $\Pi(t)$ не укладываются в узкий пучок кривых линейной области, то применение линейных уравнений (5.11) и (5.13) незаконно. В таких случаях для описания процесса ползучести выбирают

подходящий вариант нелинейной теории связи напряжений и деформаций во времени.

Если материал изотропен и работает в условиях сложного напряженного состояния, то закон линейного деформирования можно записать в виде уравнения для сдвигов и уравнения объемного деформирования. Уравнение для сдвигов имеет вид

$$e_{ij}^D \equiv e_{ij}(t) = \frac{S_{ij}(t)}{2G} + \frac{1}{2G} \int_0^t K_c(t-\tau) S_{ij}(\tau) d\tau, \quad (5.20)$$

или

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi_c(t-\tau) dS_{ij}(\tau), \quad (5.21)$$

где $e_{ij}(t)$ — компоненты девиатора тензора деформаций:

$$e_{ij} = e_{ij} - 1/3 (\epsilon_{kk}) \delta_{ij} \equiv e_{ij} - (\bar{\epsilon}) \delta_{ij}; \quad (5.22)$$

$S_{ij}(\tau)$ — компоненты девиатора тензора напряжений:

$$S_{ij} \equiv \sigma_{ij} - 1/3 (\sigma_{kk}) \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \tilde{\sigma} \delta_{ij}, \quad (5.23)$$

δ_{ij} — символы Кронекера; ϵ_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров деформаций и напряжений (в декартовой системе отсчета); G — модуль сдвига или модуль упругости второго рода, связанный с модулем E и коэффициентом Пуассона ν формулой $G = E/2(1+\nu)$,

$$\tilde{\epsilon} = 1/3 (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 1/3 \theta. \quad (5.24)$$

где \tilde{e} — объемная деформация; θ — дилатация;

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad (5.25)$$

$\tilde{\sigma}$ — среднее давление; $K_c(t)$ — функция скорости сдвиговой ползучести; $\Pi_c(t)$ — функция сдвиговой ползучести, причем

$$\Pi'_c(t) = \frac{1}{2G} K_c(t). \quad (5.26)$$

Уравнение объемного деформирования будет

$$\theta(t) = \frac{\tilde{\sigma}(t)}{B} + \frac{1}{B} \int_0^t K_v(t-\tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (5.27)$$

или

$$\theta(t) \equiv \int_0^t \Pi_v(t-\tau) d\tilde{\sigma}(\tau), \quad (5.28)$$

где B — объемный модуль упругости, связанный с продольным модулем упругости E и упругим коэффициентом Пуассона v_0 формулой

$$B = \frac{E}{3(1-2v_0)}; \quad (5.29)$$

$K_v(t)$ — функция скорости объемной ползучести, причем

$$\Pi'_v(t) = \frac{1}{B} K_v(t). \quad (5.30)$$

Уравнения линейной ползучести в условиях сложного напряженного состояния при постоянных нагрузках, когда $S_{ij} = S_{ij}^0$, $\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}_k$, получим из линейных уравнений (5.20), (5.27):

$$e_{ij}(t) = \frac{S_{ij}^0}{2G} \left[1 + \int_0^t K_c(\tau) d\tau \right], \quad \theta(t) = \frac{\tilde{\sigma}_k}{B} \left[1 + \int_0^t K_v(\tau) d\tau \right]. \quad (5.31)$$

Дифференцируя обе части уравнений (5.31), получим функции скоростей сдвиговой и объемной ползучести:

$$K_c(t) = \frac{2G}{S_{ij}^0} \frac{de_{ij}}{dt}, \quad K_v(t) = \frac{B}{\tilde{\sigma}_k} \frac{d\theta}{dt};$$

при $S_{ij}(t) = S_{ij}^0(t)$, $\tilde{\sigma}(t) = \tilde{\sigma}_k h(t)$ уравнения (5.31) и (5.28) дают

$$e_{ij}(t) = S_{ij}^0 \Pi_c(t), \quad \theta(t) = \tilde{\sigma}_k \Pi_v(t),$$

откуда имеем сдвиговую Π_c и объемную Π_v функции ползучести

$$\Pi_c(t) = \frac{e_{ij}(t)}{S_{ij}^0}, \quad \Pi_v(t) = \frac{\theta(t)}{\tilde{\sigma}_k}. \quad (5.32)$$

Входящие в уравнения (5.13), (5.16), (5.20) и (5.21) величины e , e_{ij} , θ , σ , S_{ij} , $\tilde{\sigma}$ изменяются во время опытов на ползучесть,

а величины E , G , B , $K(t)$, $K_c(t)$, $K_v(t)$ или соответствующие функции $\Pi(t)$ подлежат определению по данным измеренных величин.

Релаксация. Процесс изменения напряжений во времени в деформированном теле называется релаксацией.

Релаксацию напряжений обычно изучают при постоянном уровне деформации.

Выражение для релаксирующих напряжений можно получить из уравнения (5.12) при $\varepsilon(t) = \varepsilon_k = \text{const}$. Имеем

$$\sigma(t) = E\varepsilon_k \left[1 - \int_0^t T(\tau) d\tau \right]; \quad (5.33)$$

здесь $T(\tau)$ — функция скорости релаксации,

$$T(t) = -\frac{1}{E\varepsilon_k} \frac{dG(t)}{dt}. \quad (5.34)$$

Выражение (5.12) для $\sigma(t)$ является решением уравнения (5.11), причем, как это следует из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода, между функциями $K(t)$ и $T(t)$ существует связь

$$T(t) - K(t) = \int_0^t K(t-\tau) T(\tau) d\tau, \quad (5.35)$$

позволяющая по одной из известных функций, например $T(t)$, найти другую $K(t)$.

В теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода функция $T(t)$ называется *ядром уравнения* (5.12), а функция $K(t)$ — его *резольвентой*. Если для ядра $T(t)$ найдена резольвента $K(t)$, то уравнение (5.11) называется решением уравнения (5.12), и, наоборот, уравнение (5.12) будет решением уравнения (5.11), если для ядра $K(t)$ уравнения (5.11) найдена резольвента $T(t)$.

Уравнение (5.12) можно записать в краткой форме

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad (5.36)$$

интегрируя по частям которое и потребовав, чтобы

$$R(0) = E, \quad R'(t) = ET(t),$$

получим уравнение (5.12).

При ступенчатом деформировании $\varepsilon(t) = \varepsilon_k h(t)$ из (5.36) получим уравнение релаксации в форме

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_k \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau = \varepsilon_k \int_0^t R(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \varepsilon_k R(t). \quad (5.37)$$

Функция

$$R(t) = \sigma(t)/\varepsilon_k \quad (5.38)$$

называется модулем релаксации или функцией релаксации, причем при $t=0$

$$R(0) = \sigma(0)/\epsilon_k = E. \quad (5.39)$$

Между функциями $\Pi(t)$ и $R(t)$ существует связь

$$\Pi^* R^* = 1, \quad (5.40)$$

где $*$ означает преобразование Лапласа — Карсона:

$$\Pi^* = p \int_0^\infty e^{-pt} \Pi(t) dt, \quad R^* = p \int_0^\infty e^{-pt} R(t) dt. \quad (5.41)$$

Кривые релаксации напряжений при ступенчатом деформировании имеют вид, показанный на рис. 5.4. При достаточно малом уровне деформаций релаксирующие напряжения через некоторое время могут принять нулевые (кривая 1) или постоянные (кривая 2) значения — в обоих случаях $d\sigma/dt \rightarrow 0$, при достаточно больших значениях деформации кривая релаксации может принять вид кривой 3, где, начиная с некоторого момента времени, скорость релаксации становится постоянной. При очень больших ϵ_k кривая $\sigma(t)$ может принять форму кривой 4. В этом случае обычно наблюдается образование шейки образца при его деформировании.

Для линейных свойств деформаций материала кривые модулей релаксации $R(t)$ совпадают (или укладываются в узкий пучок, ширина которого обусловлена разбросом эксперимента).

В случаях когда материал работает в условиях сложного напряженного состояния, линейное уравнение связи напряжений и деформаций может быть получено как решение интегральных уравнений (5.20) и (5.27).

Имеем

$$S_{ij}(t) = 2G e_{ij}(t) - 2G \int_0^t T_c(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau, \quad (5.42)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = B \theta(t) - B \int_0^t T_v(t-\tau) \theta(\tau) d\tau, \quad (5.43)$$

или в более краткой форме

$$S_{ij}(t) = \int_0^t R_c(t-\tau) de_{ij}(\tau), \quad (5.44)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = \int_0^t R_v(t-\tau) d\theta(\tau), \quad (5.45)$$

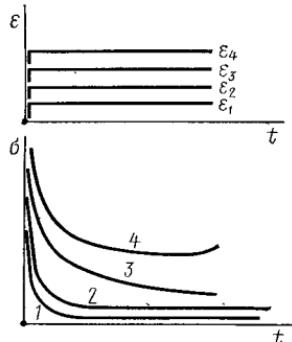


Рис. 5.4

где $T_c(t)$, $T_v(t)$ — функции скоростей сдвиговой и объемной релаксации; $R_c(t)$, $R_v(t)$ — модули сдвиговой и объемной релаксации.

При ступенчатом деформировании $e_{ij}(t) = e_{ij}^0 h(t)$, $\theta(t) = \theta^0 h(t)$ и из (5.42) и (5.43) получим уравнения сдвиговой и объемной релаксации:

$$S_{ij}(t) = 2G e_{ij}^0 \left[1 - \int_0^t T_c(\tau) d\tau \right], \quad (5.46)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = B \theta^0 \left[1 - \int_0^t T_v(\tau) d\tau \right], \quad (5.47)$$

откуда

$$T_c(t) = -\frac{1}{2G e_{ij}^0} \frac{dS_{ij}(t)}{dt}, \quad T_v(t) = -\frac{1}{B} \frac{d\tilde{\sigma}}{dt}. \quad (5.48)$$

Уравнения в краткой записи

$$S_{ij}(t) = \int_0^t R_c(t-\tau) de_{ij}(\tau), \quad \tilde{\sigma}(t) = \int_0^t R_v(t-\tau) d\theta(\tau) \quad (5.49)$$

при ступенчатом деформировании дают

$$S_{ij}(t) = e_{ij}^0 R_c(t), \quad \tilde{\sigma}(t) = \theta^0 R_v(t),$$

откуда модули сдвиговой и объемной релаксации будут:

$$\left. \begin{aligned} R_c(t) &= \frac{S_{ij}(t)}{e_{ij}}, & R_v(t) &= \frac{\tilde{\sigma}(t)}{\theta^0}; \\ R_c(0) &= 2G, & R_v(0) &= B. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

В более общем случае анизотропной упруговязкой среды, на которую воздействуют не только механические, но и температурные поля, линейные соотношения между деформациями и напряжениями имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) d[\epsilon_{kl}(\tau) - \alpha_{kl} \Delta(T(\tau))]; \\ \epsilon_{ij}(t) &= \alpha_{ij}(\Delta T(t)) + \int_0^t \Pi_{ijkl}(t-\tau) d\sigma_{kl}(\tau), \\ (\alpha_{ij} &= 0), \quad (i \neq j). \end{aligned}$$

Здесь R_{ijkl} — тензор функций релаксации; Π_{ijkl} — тензор функций ползучести; α_{ij} — тензор коэффициентов температурного расширения вещества; $\Delta(T(t))$ — разность между текущей $T(t)$ и начальной T_0 температурами; $\sigma_{ij}(t)$ и $\epsilon_{ij}(t)$ — тензоры напряжений и деформаций соответственно.

Например, для ортотропных материалов типа тканых стеклопластиков, работающих в условиях плоского напряженного состояния и стационарных температурных полях ($\Delta T(t) = 0$), уравнения

связи напряжений и деформаций в развернутом виде будут:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) &= B_{1111} \varepsilon_{11} - B_{1111} \int_0^t T_{1111}(t-\tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + \\ &+ B_{1122} \varepsilon_{22} - B_{1122} \int_0^t T_{1122}(t-\tau) \varepsilon_{22}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{22}(t) &= B_{2211} \varepsilon_{11} - B_{2211} \int_0^t T_{2211}(t-\tau) \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + \\ &+ B_{2222} \varepsilon_{22} - B_{2222} \int_0^t T_{2222}(t-\tau) \varepsilon_{22}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{12}(t) &= 2B_{1212} \varepsilon_{12} - 2B_{1212} \int_0^t T_{1212}(t-\tau) \varepsilon_{12}(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

коэффициенты B_{ijkl} здесь связаны с техническими модулями E_{ij} формулами:

$$\begin{aligned}B_{1111} &= \frac{E_{11}}{1-v_1 v_2}, \quad B_{1122} = \frac{v_1 E_{22}}{1-v_1 v_2} = \frac{v_2 E_{11}}{1-v_1 v_2} = B_{2211}; \\ B_{2222} &= \frac{E_{22}}{1-v_1 v_2}, \quad 2B_{1212} = G = \frac{E_{45}}{2(1-v_{45})},\end{aligned}$$

причем E_{11} — модуль упругости вдоль основы при растяжении вдоль основы, E_{22} — вдоль утка, E_{45} — под углом 45° к основе; v_1 , v_2 — упругие коэффициенты Пуассона вдоль основы и утка соответственно; $T_{ijkl}(t)$ — функции скоростей релаксации.

Уравнение ползучести или релаксации для анизотропных сред строится аналогично предыдущему при $\sigma_{ij}(t) = \text{const}$, $\varepsilon_{ij} = \text{const}$.

Более подробные сведения об анизотропных упругих и упруговязких средах можно найти в [21].

Для определения модулей упругости и функций влияния понадобятся экспериментальные кривые ползучести и релаксации при ступенчатом нагружении или деформировании. Однако такие опыты трудно осуществимы на практике, ибо всегда какое-то время приходится затрачивать на процесс нагружения или деформирования.

Другой трудностью является осуществление опытов на всестороннее растяжение или сжатие.

Покажем, что эти трудности можно обойти, выразив объемные и сдвиговые характеристики через величины, определяемые при растяжении или сжатии образцов, а кривые при ступенчатом нагружении получить из опытных кривых с временем нагружения $t_k \neq 0$ путем введения некоторой обоснованной поправки.

По опытным данным ползучести растянутых или сжатых образцов, т. е. по измеренным величинам продольных $\varepsilon_x(t)$ и поперечных $\varepsilon_y(t)$ деформаций, можно построить функции продольной $\Pi_x(t)$ и поперечной $\Pi_y(t)$ ползучести, зная которые нетрудно получить функции сдвиговой и объемной $\Pi_c(t)$, $\Pi_v(t)$ ползучести.

В самом деле, пусть к образцу приложена сила, действующая вдоль его оси Ox . Тогда из компонентов тензора напряжений $\sigma_{11} \neq 0$, а остальные равны нулю. Так как $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$, $\tilde{\sigma} = 1/3\sigma_{11}$, $\theta = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}$, то девиатор тензора напряжений будет равен:

$$S_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\tilde{\sigma}(t) = \begin{vmatrix} 2/3\sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -1/3\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -1/3\sigma_{11} \end{vmatrix},$$

а девиатор тензора деформаций

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}(t) - \delta_{ij}\tilde{\varepsilon}(t) = \\ = \begin{vmatrix} 2/3\varepsilon_{11} - 1/3\varepsilon_{22} - 1/3\varepsilon_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 2/3\varepsilon_{22} - 1/3\varepsilon_{11} - 1/3\varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2/3\varepsilon_{33} - 1/3\varepsilon_{11} - 1/3\varepsilon_{22} \end{vmatrix},$$

откуда имеем:

$$S_{11} = \sigma_{11} - \tilde{\sigma} = 2/3\sigma_{11}, \quad S_{22} = S_{33} = \sigma_{22} - \tilde{\sigma} = -1/3\sigma_{11}, \quad (5.51)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} - 1/3\theta = 2/3(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 1/3(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}). \quad (5.52)$$

Уравнения

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi_c(t-\tau) dS_{ij}(\tau), \quad \theta(t) = \int_0^t \Pi_v(t-\tau) d\tilde{\sigma}(t)$$

в случае растяжения (или сжатия) примут вид:

$$\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \int_0^t \Pi_c(t-\tau) d\sigma_{11}(\tau), \quad (5.53)$$

$$3\varepsilon_{11} - 6\varepsilon_{22} = \int_0^t \Pi_v(t-\tau) d\sigma_{11}(\tau), \quad (5.54)$$

где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_y$ — измеряемые в процессе опыта величины продольной и поперечной деформаций, возникающих в результате действия напряжений $\sigma_{11} \equiv \sigma_x$. Из (5.53) и (5.54) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{1}{9} \int_0^t [6\Pi_c(t-\tau) + \Pi_v(t-\tau)] d\sigma_{11}, \\ \varepsilon_{22}(t) &= \frac{1}{9} \int_0^t [-3\Pi_c(t-\tau) + \Pi_v(t-\tau)] d\sigma_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

В опытах на ползучесть растянутого образца можно получить функцию продольной ползучести $\Pi_{11}(t)$, входящую в уравнение

$$\varepsilon_{11}(t) = \int_0^t \Pi_{11}(t-\tau) d\sigma_{11}(\tau), \quad (5.56)$$

и функцию поперечной ползучести $\Pi_{21}(t)$ (индекс 21 означает деформирование в направлении 2, т. е. в направлении оси y , под действием силы в направлении 1, т. е. x), входящую в уравнение

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = - \int_0^t \Pi_{21}(t-\tau) d\sigma_{11}(\tau). \quad (5.57)$$

Сравнивая (5.56) и (5.57) с формулами (5.55), получим:

$$\begin{aligned} 6\Pi_c(t) + \Pi_v(t) &= 9\Pi_{11}(t), \\ 3\Pi_c(t) - \Pi_v(t) &= 9\Pi_{21}(t), \end{aligned} \quad (5.58)$$

откуда

$$\begin{aligned} \Pi_v(t) &= 3(\Pi_{11}(t) - 2\Pi_{21}(t)), \\ \Pi_c(t) &= \Pi_{11}(t) + \Pi_{21}(t). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Формулы (5.59) позволяют определить функции объемной $\Pi_v(t)$ и сдвиговой $\Pi_c(t)$ ползучести по известным функциям продольной $\Pi_{11}(t)$ и поперечной $\Pi_{21}(t)$ ползучести растянутых (сжатых) образцов.

Можно установить связь между $\Pi_v(t)$ и $\Pi_c(t)$. Введем отношение измеряемых в опыте величин ε_{11} и ε_{22}

$$v(t) = \left| \frac{\varepsilon_{22}(t)}{\varepsilon_{11}(t)} \right| \quad (5.60)$$

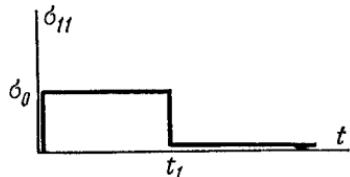


Рис. 5.5

таким образом, что при $t = 0$ оно дает значение упругого коэффициента Пуассона $v(0) = v_0$. Учитывая (5.55), имеем

$$v(t) = \frac{\int_0^t [-\Pi_v(t-\tau) + 3\Pi_c(t-\tau)] d\sigma_{11}(\tau)}{\int_0^t [\Pi_v(t-\tau) + 6\Pi_c(t-\tau)] d\sigma_{11}(\tau)}. \quad (5.61)$$

Проведем ступенчатое нагружение и разгрузку образца по закону (рис. 5.5):

$$\sigma_{11} = \sigma_0 h(t) - \sigma_0 h(t-t_1), \quad (5.62)$$

где $h(t)$ — функция Хевисайда.,

$$d\sigma_{11}(\tau) = [\sigma_0 \delta(\tau) - \sigma_0 \delta(t-\tau)] d\tau = \sigma_0 [\delta(\tau) - \delta(t-\tau)] d\tau. \quad (5.63)$$

Используя определения дельта-функции, придадим выражению (5.61) следующий вид:

$$v(t) = \frac{3\Pi_c(t) - \Pi_v(t) - [3\Pi_c(t-t_1) - \Pi_v(t-t_1)] h(t-t_1)}{6\Pi_c(t) + \Pi_v(t) - [6\Pi_c(t-t_1) + \Pi_v(t-t_1)] h(t-t_1)}. \quad (5.64)$$

При $t > t_1$ $h(t-t_1) = 1$, а потому из (5.64) имеем

$$v(t) = \frac{3[\Pi_c(t) - \Pi_c(t-t_1)] - \Pi_v(t) + \Pi_v(t-t_1)}{6[\Pi_c(t) - \Pi_c(t-t_1)] + \Pi_v(t) - \Pi_v(t-t_1)}. \quad (5.65)$$

При $t < t_1$ $h(t - t_1) = 0$ и (5.64) примет вид

$$v(t) = \frac{3\Pi_c(t) - \Pi_v(t)}{6\Pi_c(t) + \Pi_v(t)}, \quad (5.66)$$

откуда

$$\Pi_v(t) = \frac{3(1-2v)}{1+v} \Pi_c(t). \quad (5.67)$$

Заметим, что если $\Pi_v(t) = 0$, т. е. материал несжимаем, то из (5.65) имеем $v = 1/2$. Если функции $\Pi_v(t)$ и $\Pi_c(t)$ пропорциональны, т. е. $\Pi_v(t) = a\Pi_c(t)$, то

$$v(t) = \frac{(3-a)\Pi_c(t) - (3-a)\Pi_c(t-t_1)}{(6-a)\Pi_c(t) - (6+a)\Pi_c(t-t_1)} = \frac{3-a}{6+a} = \text{const}. \quad (5.68)$$

Теперь построим формулы для определения функций скоростей объемной и сдвиговой ползучести по данным одноосных опытов.

Запишем уравнения процессов продольного и поперечного деформирования образца, растянутого нагрузкой $\sigma_{11}(t)$:

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right], \quad (5.69)$$

$$\varepsilon_{22}(t) = -\frac{v_0}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right]. \quad (5.70)$$

Для компонента ε_{11} девиатора имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{2}{3} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = \frac{2}{3} \frac{1}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right] + \\ &\quad + \frac{2}{3} \frac{v_0}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{2(1+v_0)}{3E} \sigma_{11}(t) + \frac{2}{3E} \int_0^t (K_{11} + v_0 K_{21}) \sigma_{11}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как $S_{11} = 2/3\sigma_{11}$, $\sigma_{11} = 3/2S_{11}$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{1+v_0}{E} \left[S_{11}(t) + \int_0^t \frac{K_{11} + v_0 K_{21}}{1+v_0} S_{11}(\tau) d\tau \right] = \\ &= \frac{1+v_0}{E} \left[S_{11}(t) + \int_0^t K_c(t-\tau) S_{11}(\tau) d\tau \right], \end{aligned}$$

где

$$K_c(t) = \frac{K_{11}(t) + v_0 K_{21}}{1+v_0}. \quad (5.71)$$

Уравнение ползучести в случае растяжения будет:

$$\theta = \frac{1}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right] - \\ - \frac{2v_0}{E} \left[\sigma_{11}(t) + \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau \right];$$

так как $\sigma_{11} = 3\tilde{\sigma}$, то

$$\theta = \frac{1-2v}{E} 3\tilde{\sigma}(t) + \int_0^t \left(\frac{1}{E} K_{11} - \frac{2v_0}{E} K_{21} \right) 3\tilde{\sigma}(\tau) d\tau = \\ = \frac{3(1-2v)}{E} \left[\tilde{\sigma}(t) + \int_0^t \frac{K_{11} - 2v_0 K_{21}}{1-2v_0} \tilde{\sigma}(\tau) d\tau \right] = \\ = \frac{3(1-2v)}{E} \left[\tilde{\sigma}(t) + \int_0^t K_v(t-\tau) \tilde{\sigma}(\tau) d\tau \right], \quad (5.72)$$

где

$$K_v(t) = \frac{K_{11} - 2v_0 K_{21}}{1-2v_0}.$$

Формулы (5.71) и (5.72) позволяют определить функции скоростей сдвиговой (K_c) и объемной (K_v) ползучести по известным из опыта на ползучесть растянутых или сжатых образцов функциям продольной K_{11} и поперечной K_{21} ползучести. Поэтому в дальнейшем будем исследовать одноосную ползучесть и релаксацию.

Отметим, что мгновенные процессы нагружения или деформирования трудно осуществимы на практике и в реальных опытах для нагружения образца до заданного уровня σ_k (или ϵ_k) затрачивается некоторое время t_k . Опыт показывает [14], что кривые ползучести в этом случае не будут совпадать ни при каких t с кривыми ползучести при том же σ_k , достигнутом за другое время. Исключение составляет лишь случай ограниченной ползучести. Такой же эффект наблюдается и для процессов релаксации. Из приведенных выше экспериментальных кривых видно, что при одном и том же уровне напряжений σ_k , достигнутых за различное время, кривые установившейся ползучести идут параллельно друг другу вплоть до разрушения образца. То же относится и к процессам релаксации.

На рис. 5.6 приведены экспериментальные кривые сдвиговой ползучести закрученных трубчатых образцов из полизэфирного стеклопластика при одном и том же уровне напряжений $\sigma_{12} = 25,2$ МПа, достигнутом за различные промежутки времени нагружением с разными постоянными скоростями: $\dot{\sigma}_{12}^{(1)} = 14,14$ МПа/мин, $\dot{\sigma}_{12}^{(2)} = 1,414$ МПа/мин, $\dot{\sigma}_{12}^{(3)} = 0,1414$ МПа/мин.

Из рассмотрения этих (и других) опытных кривых можно сделать следующие выводы: а) чем выше скорость нагружения

образца для достижения одного и того же уровня напряжений, тем выше располагается кривая ползучести, т. е. тем больше полная деформация; б) кривые ползучести при одном и том же уровне напряжений, достигнутых за разные промежутки времени, различны и располагаются параллельно друг другу при всех t вплоть до разрушения; в) пластическая или необратимая составляющая полной деформации уменьшается с увеличением времени нагружения; г) кривые обратной ползучести (их часто называют кривыми обратного последействия), снятые после мгновенной разгрузки образцов, параллельны между собой; д) при малых скоростях нагружения для достижения одного и того же уровня напряжений деформации ползучести развиваются слабее, прочностные свойства материала падают — образец может разрушиться,

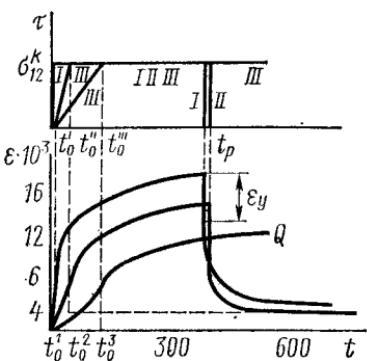


Рис. 5.6

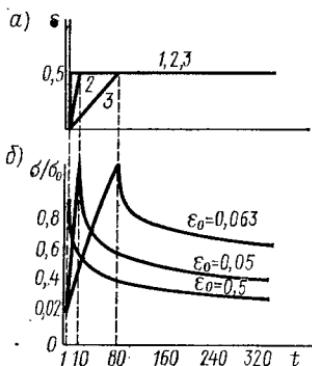


Рис. 5.7

не достигнув значений деформации ползучести образца, нагруженного за меньший период времени; е) если скорость нагружения достаточно мала, образец может разрушиться в процессе нагружения, не достигнув заданного напряжения, меньшего, чем временное сопротивление, определенное при больших скоростях.

На рис. 5.6 точками t_0^1 , t_0^2 , t_0^3 отмечен конец процесса нагружения до заданного значения $\sigma_{12}^k = 2,52$ МПа = const.

Такие же явления наблюдаются и при деформировании образцов с различными постоянными скоростями достижения заданных уровней деформации. На рис. 5.7 приведены законы деформирования (а) и соответствующие им процессы релаксации напряжений в растянутых образцах наполненной резины (б). Деформирование образца производится со скоростями (ε_0^0) 0,5; 0,05 и 0,0063 %/мин. Время деформирования составило соответственно 1, 10, 80 мин, а достигнутые напряжения при этом были 0,127; 0,0864 и 0,0645 МПа. После окончания деформации достигнутые напряжения релаксируют тем интенсивнее, чем больше скорость деформирования. Как видно из опытов, кривые релаксации для всех ε_k идут параллельно друг другу с постепенным снижением скорости $d\sigma/dt$ от ∞ до 0. Заметим, что при малых скоростях

деформирования заданного уровня деформаций можно не достигнуть — образец может разрушиться в процессе деформирования.

Такие же эффекты (которые будем называть эффектами необратимости) наблюдаются и в других случаях напряженного или деформированного состояния, в том числе и при сложных напряженных состояниях и нагружениях.

Исходя из наследственной теории вязкоупругости, опишем наблюдаемые процессы эффекта необратимости в одноосном случае и рассмотрим, как из наблюдаемых в опыте кривых ползучести получить кривые ползучести при ступенчатых нагружениях. Напомним, что в дальнейшем понадобятся функции $\Pi(t) = \varepsilon(t)/\sigma_k$, для которых $\Pi_0 = 1/E$, и функции модуля релаксации $R(t) = \sigma(t)/\varepsilon_k$, такие, что $R(0) = E$, где E — модуль упругости.

Пусть имеем два процесса нагружения (рис. 5.8, а): 1) $\sigma(t) = \sigma_k h(t)$ и 2) $\sigma(t) = \dot{\sigma}_k t$ при $0 \leq t \leq t_k$, $\dot{\sigma}_k = \text{const}$, $\sigma(t) = \sigma_k$ при $t \geq t_k$.

Для случая 1) уравнение ползучести будет:

$$\varepsilon_1(t) = \frac{\sigma_k}{E} \left[1 + \int_0^t K(\tau) d\tau \right], \quad t > 0. \quad (5.73)$$

Для нагружения на участке $0 \leq t < t_k$ имеем

$$\varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}_k t}{E} + \frac{\dot{\sigma}_k}{G} \int_0^t K(t-\tau) \tau d\tau,$$

а на участке $t \geq t_k$

$$\varepsilon_2(t) = \frac{\sigma_k}{E} + \frac{1}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \dot{\sigma}_k \tau d\tau + \frac{1}{E} \int_{t_k}^t K(t-\tau) \sigma_k d\tau. \quad (5.74)$$

Разность значений деформаций при одних и тех же t будет:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) &= \frac{\sigma_k}{E} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right] - \frac{\sigma_k}{E} - \frac{\dot{\sigma}_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \tau d\tau - \\ &\quad - \left(\frac{\sigma_k}{E} \int_{t_k}^0 K(t-\tau) d\tau + \frac{\sigma_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{\sigma_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) d\tau - \frac{\dot{\sigma}_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \tau d\tau = \\ &= \frac{\sigma_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) d\tau - \frac{\sigma_k}{E t_k} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \tau d\tau, \end{aligned}$$

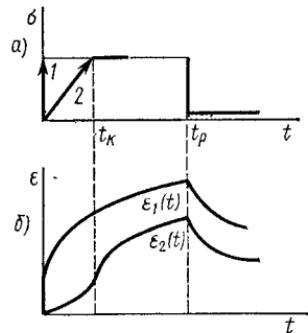


Рис. 5.8

откуда

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \frac{\sigma_k}{E} \int_0^t K(t-\tau) \left(1 - \frac{\tau}{t_k}\right) d\tau. \quad (5.75)$$

Следовательно, кривую $\varepsilon_1(t)$ ползучести при ступенчатом нагружении (рис. 5.8, б), на участке $t \geq t_k$ можно получить из наблюдаемой в опыте кривой ползучести $\varepsilon_2(t)$ путем прибавления к ординатам $\varepsilon_2(t)$ величины, стоящей в правой части (5.75).

Сделаем в (5.75) замену $t-\tau=\xi$, $t-t_k=x$. Тогда $t_k-\tau=t-\tau-(t-t_k)=\xi-x$. Применяя к интегралу в (5.75) теорему о среднем, получим

$$\int_0^{t_k} K(t-\tau) \left(\frac{t_k-\tau}{t_k}\right) d\tau = \int_{t-t_k}^t K(\xi) \frac{\xi-x}{t_k} d\xi = K(t-vt_k).$$

Следовательно,

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon_1(t) - \varepsilon_2(t) = \frac{\sigma_k}{E} K(t-vt_k) \frac{t_k}{2}, \quad \text{где } 0 < v < 1, \quad (5.76)$$

откуда

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) + \frac{\sigma_k t_k}{2E} K(t-vt_k). \quad (5.77)$$

В случае ограниченной ползучести скорость деформирования, начиная с некоторого t , становится равной нулю и, следовательно, $K(t-vt_k)=0$. В этом случае кривые $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ при достаточно больших t сливаются в одну.

В случае установившейся ползучести, начиная с некоторого t , скорость ползучести становится постоянной, а потому на основании (5.75) $K(t-vt_k)$ также принимает постоянное значение. В этом случае для получения $\varepsilon_1(t)$ надо к опытным значениям $\varepsilon_2(t)$ прибавить постоянную для всех $t > t_k$ величину

$$\delta(\varepsilon) = \frac{\sigma_k t_k}{2E} \frac{E}{\sigma_k} \dot{\varepsilon}_k = \frac{t_k}{2} \dot{\varepsilon}_k, \quad (\dot{\varepsilon}_k = \text{const}).$$

Имеем

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) + \frac{\dot{\varepsilon}_k t_k}{2}, \quad (t \geq t_k), \quad (5.78)$$

где $\dot{\varepsilon}$ — тангенс угла наклона касательной к опытной кривой установившейся ползучести.

Этот вывод, как было отмечено выше, подтверждается опытными данными. В дальнейшем понадобится оценка разности податливостей, которую получим из (5.75):

$$E[\Pi_1(t) - \Pi_2(t)] = K(t-vt_k) \frac{t_k}{2}. \quad (5.79)$$

После мгновенной разгрузки образца в момент t_p (что осуществимо в опытах) значения деформаций $\varepsilon(t)$ начнут убывать во времени, в результате чего будем иметь кривую релаксации деформаций, которую называют кривой обратной ползучести или кривой обратного последействия.

Уравнением кривой $\varepsilon_2(t)$ будет:

$$\tilde{\varepsilon}_2(t) = \frac{\sigma_k}{E} \int_{t_k}^{t_p} K(t-\tau) d\tau + \frac{\dot{\sigma}_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \tau d\tau, \quad (5.80)$$

а уравнением кривой $\varepsilon_1(t)$ обратной ползучести будет:

$$\tilde{\varepsilon}_1(t) = \frac{\sigma_k}{E} \int_{t-t_p}^t K(t) d\tau = \frac{\sigma_k}{E} \int_0^{t_p} K(t-\tau) d\tau. \quad (5.81)$$

Разность между ними также определяется формулой (5.75). В самом деле,

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_1(t) - \tilde{\varepsilon}_2(t) &= \frac{\sigma_k}{E} \int_0^{t_p} K(t-\tau) d\tau - \frac{\sigma_k}{E} \int_{t_k}^{t_p} K(t-\tau) d\tau - \\ &- \frac{\dot{\sigma}_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \tau d\tau = \frac{\sigma_k}{E} \int_0^{t_k} K(t-\tau) \left(1 - \frac{\tau}{t_k}\right) d\tau, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{\varepsilon}_1(t) - \tilde{\varepsilon}_2(t) = \frac{\sigma_k t_k}{2E} K(\eta), \quad \eta = t - vt_k, \quad (5.82)$$

т. е. после разгрузки кривые обратной ползучести первого и второго случаев нагружения также параллельны между собой или совпадают в случае напряжений, вызывающих ограниченную ползучесть. Этот эффект подтверждается экспериментом (5.16).

Подобные оценки можно получить и для процессов релаксации напряжений, вызванных деформированием образцов с разными скоростями достижения заданных уровней деформаций (рис. 5.9, а). Уравнения кривой релаксации 1 (рис. 5.9, б), полученной после деформирования образца по ступенчатому закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_k h(t)$, и кривой 2 на том же рисунке, полученной после деформирования образца по закону

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_n(t) & \text{при } t \leq t_n, \\ \varepsilon_n & \text{при } t \geq t_n, \end{cases}$$

запишутся соответственно в виде:

$$\sigma_1(t) = E \varepsilon_n \left[1 - \int_0^t T(t-\tau) d\tau \right];$$

$$\sigma_2(t) = E \dot{\varepsilon}_n t_n - E \dot{\varepsilon}_n \int_0^{t_n} T(t-\tau) \tau d\tau - E \int_{t_n}^t T(t-\tau) \varepsilon_n d\tau.$$

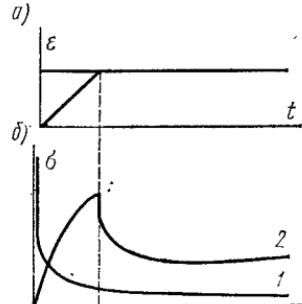


Рис. 5.9

Разность значений напряжений в произвольный момент времени t на участке $t > t_n$ будет:

$$\sigma_2(t) - \sigma_1(t) = Ee_n \int_0^{t_n} T(t-\tau) \left(1 - \frac{\tau}{t_n}\right) d\tau.$$

Применяя теорему о среднем, имеем после замены $t - \tau = \xi$

$$\delta(\sigma) \equiv \sigma_2(t) - \sigma_1(t) = Ee_n T(t - vt_n) \frac{t_n}{2}. \quad (5.83)$$

Таким образом, по имеющейся опытной кривой релаксации можно получить кривую $\sigma_1(t)$ релаксации при ступенчатом деформировании:

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) - Ee_n T(t - vt_n) \frac{t_n}{2}. \quad (5.84)$$

Из (5.82) следует, что в линейной области деформирования на участке, где $T(t) = 0$, кривые релаксации сольются.

Так как по данным реальных опытов теперь можно строить кривые ползучести и релаксации при ступенчатых процессах нагружения или деформирования, то в дальнейшем будем строить методику определения характеристик упруговязких сред (функции влияния и упругих постоянных) по данным ползучести или релаксации при мгновенном нагружении или деформировании.

Как было отмечено выше, кривые функций скоростей ползучести $K(t)$ и релаксации $T(t)$ можно построить по данным дифференцирования опытных кривых ползучести и релаксации.

Однако ошибки субъективного характера часто приводят к неверным данным или слишком грубым результатам. Поэтому на практике пользуются аналитической формой записи функций влияния, содержащих некоторое число параметров, которые подлежат определению по опытным данным.

Часто встречающиеся в литературе функции влияния в виде экспоненты $Ae^{-\beta t}$

или суммы экспонент $\sum A_n e^{-\beta_n t}$ здесь не будем рассматривать, поскольку такие функции не описывают процесс в начальный период: при $t=0$ они имеют конечную величину.

Запишем условия, которым должны удовлетворять функции $T(t)$ и $K(t)$.

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} K(t) = \infty.$$

В самом деле, касательная в точке A перехода от упругой деформации к высокоэластической является общей для упругого участка OA и участка AB кривой ползучести (пунктир 1 на рис. 5.10). Случай скачка касательной в точке A из положения 1 в положение 2 физически не оправдан. Следовательно, в точке A ,

т. е. при $t = 0$, должно быть $d\sigma/dt = \infty$. Поскольку $K(t) = \frac{\sigma_k}{E} \frac{d\sigma}{dt}$, то при $t = 0$ $K(0) = \infty$.

2. Из уравнения (5.35) следует, что

$$T(t) = K(t) + \int_0^t K(t-\tau) T(\tau) d\tau. \quad (5.85)$$

Отсюда, поскольку $K(0) = \infty$, замечаем, что $T(0) = \infty$.

3. Интеграл $\int_0^t K(\tau) d\tau$ должен сходиться.

4. Интеграл $\int_0^t T(\tau) d\tau$ должен быть не больше единицы. В самом деле, обозначая в уравнении релаксации (5.33) величину $E\sigma_0$ через σ_0 , имеем

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \sigma_0 \int_0^t T(\tau) d\tau,$$

откуда

$$\int_0^t T(\tau) d\tau = 1 - \frac{\sigma(t)}{\sigma_0} \leq 1, \quad (5.86)$$

так как всегда $\sigma(t) \leq \sigma_0$.

Функции, удовлетворяющие указанным условиям, называются *слабосингулярными* или *функциями со слабой особенностью*.

Такие функции хорошо описывают скорости релаксационных процессов, если содержат достаточное число параметров.

В дальнейшем для удобства будем называть функцию скорости релаксации $T(t)$ ядром, а соответствующую ему функцию скорости ползучести $K(t)$ — резольвентой.

Приведем пример определения резольвенты по данному ядру. Возьмем простейшее и в то же время достаточно общее ядро в виде

$$T(t) = A e^{-\beta t^{\alpha-1}} \quad (0 < \alpha < 1). \quad (5.87)$$

Преобразование по Лапласу $\left(f^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt\right)$ уравнений (5.11) и (5.12) дает

$$\frac{1}{E} \sigma^* = \varepsilon^* (1 - T^*), \quad E\varepsilon^* = \sigma^* (1 + K^*),$$

откуда

$$K^*(p) = \frac{T^*(p)}{1 - T^*(p)}. \quad (5.88)$$

Изображение функции (5.87) будет:

$$T^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{A e^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}} dt = A \int_0^\infty \frac{e^{-(\beta+p)t}}{t^{1-\alpha}} dt = \frac{A \Gamma(\alpha)}{(p+\beta)^\alpha}. \quad (5.89)$$

Внося (5.89) в (5.88), получим изображение резольвенты

$$K^*(p) = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(p+\beta)^{\alpha} - A\Gamma(\alpha)}. \quad (5.90)$$

Чтобы найти резольвенту $K(t)$, воспользуемся теоремой о смещении, на основании которой оригинал функции (5.90) будет:

$$K(t) = e^{-\beta t} \tilde{K}(t), \quad (5.91)$$

где $\tilde{K}(t)$ — оригинал функции

$$\tilde{K}^* = \frac{A\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha} - A\Gamma(\alpha)}. \quad (5.92)$$

Правую часть (5.92) можно представить в виде суммы убывающей геометрической прогрессии

$$\tilde{K}^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A\Gamma(\alpha)}{p^{\alpha}} \right]^n. \quad (5.93)$$

Легко убедиться, что изображением функции $f(t) = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$, ($k > 1$) является функция $f^*(p) = 1/p^k$. Следовательно, оригиналом функции (5.93) будет:

$$\tilde{K}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A\Gamma(\alpha)|^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n)}$$

и искомой резольвентой согласно (5.91) будет функция

$$K(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A\Gamma(\alpha)|^n t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha n)}. \quad (5.94)$$

Ряд в (5.94) равномерно сходится по t на любом конечном интервале времени.

Можно показать, что для больших значений t резольвента имеет асимптотическую формулу

$$K(t) \simeq \frac{1}{\alpha} [A\Gamma(\alpha)]^{1/\alpha} e^{(A\Gamma(\alpha))^{1/\alpha} - \beta t}. \quad (5.95)$$

Из (5.95) следует, что для достаточно больших t :

$$a) \quad \frac{\beta^{\alpha}}{A\Gamma(\alpha)} > 1, \quad K(t) \rightarrow 0, \quad (5.96)$$

т. е. согласно (5.17) скорость деформаций ползучести при $\sigma = \text{const}$ стремится к нулю, что имеет место в случае ограниченной ползучести;

$$b) \quad \frac{\beta^{\alpha}}{A\Gamma(\alpha)} < 1, \quad K(t) \rightarrow \infty, \quad (5.97)$$

что означает согласно (5.17) возрастание скорости деформаций до бесконечности. Этому соответствует случай неограниченной ползучести (см. рис. 5.1);

$$b) \quad \frac{\beta^\alpha}{A\Gamma(\alpha)} = 1, \quad K(t) \rightarrow \text{const}, \quad (5.98)$$

что соответствует случаю установившейся ползучести, где, начиная с некоторого t , скорость деформирования $\dot{\epsilon} = \text{const}$.

Определение параметров функций влияния, модуля упругости и коэффициента Пуассона можно осуществить по данным квазистатических опытов на ползучесть и релаксацию.

Запишем уравнения релаксации и ползучести в виде

$$\frac{\sigma_k - \sigma(t)}{\sigma_k} = \int_0^t T(t) dt, \quad \frac{\epsilon(t) - \epsilon_k}{\epsilon_k} = \int_0^t K(t) dt,$$

где $\sigma_k = E\epsilon_k = \text{const}$, $\epsilon_k = \frac{1}{E}\sigma_k = \text{const}$. Экспериментальная кривая

$$\sigma_s(t) \equiv \frac{\sigma_k - \sigma(t)}{\sigma} \sim t \quad (5.99)$$

и теоретическая кривая

$$\sigma_r(t) \equiv \int_0^t R(t) dt \sim t \quad (5.100)$$

должны совпадать.

То же можно сказать и о кривых

$$\epsilon_s(t) \equiv \frac{\epsilon(t) - \epsilon_k}{\epsilon_k} \sim t, \quad \epsilon_r(t) \equiv \int_0^t K(t) dt \sim t. \quad (5.101)$$

Поэтому полезно иметь достаточное количество теоретических кривых $\sigma_r \sim t$ и $\epsilon_r \sim t$ для того, чтобы среди них найти ту, которая совпадает с экспериментальной кривой $\sigma_s \sim t$ или $\epsilon_s \sim t$, построенной в том же масштабе. Поскольку теоретические кривые $\sigma_r(t)$ и $\epsilon_r(t)$ будут определяться конкретными значениями параметров α_l , β_l , A_l , то уравнения опытных кривых релаксации и ползучести будут содержать функции Γ и K с теми же числовыми значениями параметров α , β , A , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_k - \sigma(t)}{\sigma_k} &= \int_0^t T(t, \alpha_l, \beta_l, A_l) dt; \\ \frac{\epsilon(t) - \epsilon_k}{\epsilon_k} &= \int_0^t K(t, \alpha_l, \beta_l, A_l) dt. \end{aligned}$$

Однако поскольку начальные деформации $\epsilon(0) = \epsilon_k$ из опыта найти не удается и, следовательно, величину $(\epsilon(t) - \epsilon_k)/\epsilon_k$ нельзя

считать известной, указанное сравнение кривых $\bar{\epsilon}_s(t)$ и $\bar{\epsilon}_r(t)$ затруднительно. Но если известен модуль упругости, то легко находится $\epsilon_k = \sigma_k/E$ и метод становится удобным.

Определение модуля упругости и параметров ядра можно осуществить путем сравнения экспериментальных кривых податливости

$$\bar{\epsilon}_s(t) = \epsilon(t)/\sigma_k \quad (5.102)$$

и теоретических кривых

$$\bar{\epsilon}_r(t) = 1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau, \quad (5.103)$$

построенных в логарифмической сетке координат.

В самом деле, из уравнения ползучести

$$E \frac{\epsilon(t)}{\sigma_k} = 1 + \int_0^t K(t) dt \quad (5.104)$$

следует, что

$$\ln E + \ln \frac{\epsilon(t)}{\sigma_k} = \ln \left(1 + \int_0^t K(t) dt \right). \quad (5.105)$$

Расстояние между подобными кривыми $\bar{\epsilon}_s$ и $\bar{\epsilon}_r$ в этой сетке координат будет равно $\ln E$ для любого t при любой $K(t)$, т. е.

$$E = \frac{\bar{\epsilon}_r(t)}{\bar{\epsilon}_s(t)} = \frac{1 + \int_0^t K(t) dt}{\epsilon(t)/\sigma_k} = \text{const.} \quad (5.106)$$

Поскольку $K(t)$ зависит от времени и параметров A , α , β , то с помощью ЭВМ составляются таблицы функций

$$\bar{\epsilon}_r = 1 + \int_0^t K(t, \alpha_i, \beta_i, A_i) dt \quad (5.107)$$

для разных значений параметров в широком интервале времени и по таким таблицам строится в логарифмической сетке координат семейство кривых (5.107), среди которых всегда найдется кривая, подобная экспериментальной кривой (5.102), построенной в той же сетке координат.

При этом может оказаться, что кривая $\bar{\epsilon}_s(t)$ не совпадает с подобной ей кривой $\bar{\epsilon}_r(t)$ и для их совмещения потребуется сдвиг кривой $\bar{\epsilon}_r(t)$ вдоль оси $\ln t$ и вдоль вертикальной оси. Но, как видно из (5.105), величина сдвига вдоль оси ординат будет равна $\ln E$, а сдвиг вдоль оси $\ln t$ будет равносителен линейному преобразованию координаты t . В самом деле, пусть на рис. 5.11 кривая 2 — экспериментальная $\bar{\epsilon}_s = \epsilon(t)/\sigma_k$, а кривая 1 — подобная ей теоретическая, построенная по формуле (5.107) с вполне определенными значениями параметров α_r , β_r , A_r . Для того чтобы

совместить кривые 1 и 2, надо сдвинуть кривую 1 влево на величину AB , т. е. на величину

$$\ln k = \ln t_s - \ln t_r, \quad (5.108)$$

где $\ln t_s$ — абсцисса («время») точки A кривой 1, а $\ln t_r$ — абсцисса соответствующей точки подобной ей кривой 2. Следовательно, для перевода любой точки кривой 1 из положения A в положение B в обычной сетке достаточно в уравнении (5.107) сделать замену:

$$t_r = kt_s. \quad (5.109)$$

Нетрудно убедиться, что при такой замене вид функций влияния сохранится. В самом деле, запишем уравнение (5.107) для теоретической кривой:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \\ &= 1 + \int_0^{t_r} \frac{e^{-\beta_r \tau_r}}{\tau_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_r \Gamma(\alpha_r)]^n \tau_r^{\alpha_r n}}{\Gamma(\alpha_r n)} d\tau_r. \end{aligned}$$

Внося сюда замену $t_r = kt_s$, $\tau_r = k\tau_s$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_s &= 1 + \int_0^{kt_s} \frac{e^{-k\beta_s \tau_s}}{k\tau_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[k^{\alpha_s} A_r \Gamma(\alpha_s)]^n \tau_s^{\alpha_s n}}{\Gamma(\alpha_s n)} k d\tau_s = \\ &= 1 + \int_0^{kt_s} \frac{e^{-\beta_s \tau_s}}{\tau_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_s \Gamma(\alpha_s)]^n \tau_s^{\alpha_s n}}{\Gamma(\alpha_s n)} d\tau_s, \end{aligned} \quad (5.110)$$

где $\alpha_s = \alpha_r = \alpha$; $A_s = k^\alpha A_r$; $\beta_s = k\beta_r$; $k = t_r/t_s$.

Следовательно,

$$K_s(t_s) = \frac{e^{-\beta_s t_s}}{t_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_s \Gamma(\alpha)]^n t_s^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (5.111)$$

где параметры материала α , A_s , β_s определяются формулами (5.110) через известные параметры α , β_r , A_r подобной теоретической кривой.

Аналогичным образом найдем, что

$$T_s = \frac{A_s e^{-\beta_s t_s}}{t_s^{1-\alpha}}. \quad (5.112)$$

Таким образом, имея подобную опытной теоретическую кривую с конкретными параметрами α , β_r , A_r , легко найдем параметры опытной кривой для данного материала, причем его мгновенный модуль упругости E (или G , B) найдем по формуле (5.106), при использовании которой не нужно знать начальную точку деформирования $\epsilon(0)$.

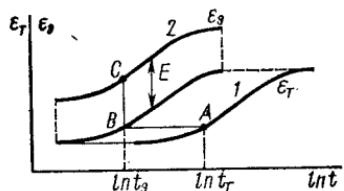


Рис. 5.11

Для того чтобы найденные по опытным кривым ползучести значения параметров α , β_s , A_s и модуль упругости E можно было приписать уравнению релаксации того же материала при тех же условиях, надо показать, что ядро T_s и резольвента K_s удовлетворяют основному уравнению

$$K_s(t_s) - T_s(t_s) = \int_0^{t_s} T_s(t_s - \tau_s) K_s(\tau_s) d\tau_s.$$

С этой целью в уравнении

$$K_t(t_t) - T_t(t_t) = \int_0^{t_t} T_t(t_t - \tau_t) K_t(\tau_t) d\tau_t$$

выполним замену (5.109), т. е. положим $t_t = kt_s$, $\tau_t = k\tau_s$. В левой части уравнения будем иметь

$$\begin{aligned} K_t(t_t) - T_t(t_t) &= \frac{e^{-\beta_s t_s}}{kt_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A_s \Gamma(\alpha)]^n t_s^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)} - \\ &- \frac{A_s e^{-\beta_s t_s}}{k t_s^{1-\alpha}} = \frac{1}{k} [K_s(t_s) - T_s(t_s)]; \end{aligned}$$

в правой части

$$\int_0^{t_t} T_t(t_t - \tau_t) K_t(\tau_t) d\tau_t = \frac{1}{k} \int_0^{t_s} T_s(t_s - \tau_s) K_s(\tau_s) d\tau_s.$$

Следовательно, уравнение связи ядра и резольвенты удовлетворяется и в шкале времени t_s .

Таким образом, найденные параметры α , β_s , A_s могут быть внесены в уравнение релаксации и в уравнение связи $\sigma \sim e \sim t$.

Таков же метод определения параметров ядра и модуля по опытным кривым релаксации напряжений, с той лишь разницей, что здесь совмещаются опытные кривые модуля релаксации

$$\sigma_s(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_k}$$

с теоретическими кривыми $1 - \int_0^t T(\tau) d\tau$, что следует из уравнения релаксации

$$\sigma(t) = E \varepsilon_k \left(1 - \int_0^t T(\tau) d\tau \right).$$

Модуль упругости $E = \frac{\sigma(t)/\varepsilon_k}{1 - \int_0^t T(\tau) d\tau}$ также определяется величиной вертикального сдвига.

Для применения методики определения параметров сингулярных ядра и резольвенты, а также модуля упругости, коэффициента Пуассона необходимо иметь достаточное количество кривых:

$$\bar{\epsilon}_t(t) \equiv 1 + \int_0^t K(\tau, \alpha_i, \beta_i, A_i) d\tau \sim t;$$

$$\sigma_t(t) \equiv 1 - \int_0^t T(\tau, \alpha_i, \beta_i, A_i) d\tau \sim t,$$

<i>N</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>A</i>	0,004	0,008	0,012	0,015	0,019	0,023	0,027	0,031	0,035	0,039	0,043	0,047	0,051	0,054	0,058	0,062

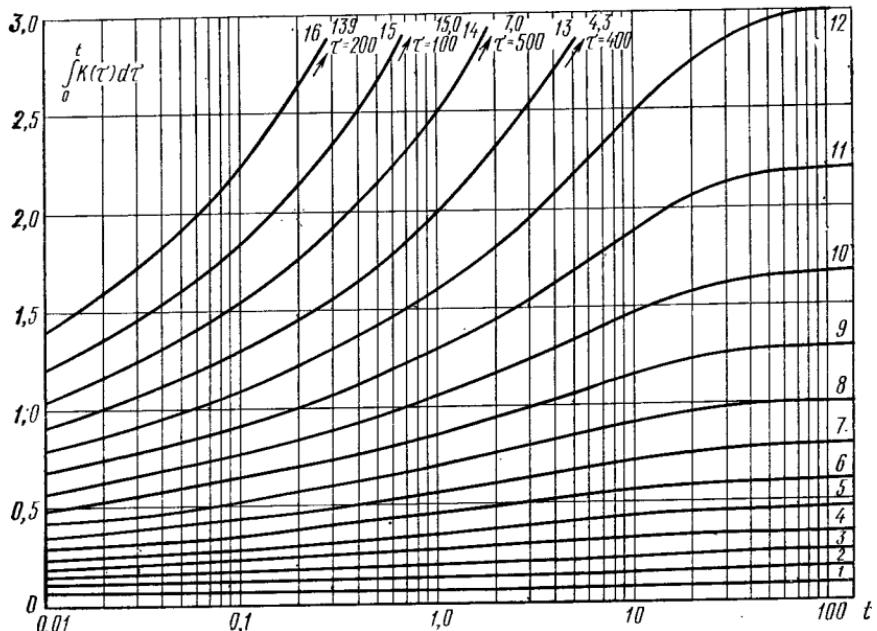


Рис. 5.12

а также их таблицы. Такие кривые и таблицы для функций

$$T(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}; \quad K(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A \Gamma(\alpha)]^n t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}$$

и интегралов от них построены в результате вычисления на ЭВМ для достаточно широкого диапазона изменения параметров α_i , β_i , A_i и интервала времени $t \geq 0,0001$.

Для каждого значения α и A таблица имеет свой номер. Значение β всюду принято равным 0,05. Время t такое же, как в опытах: если опытные кривые ползучести построены в координатах $\epsilon(t)/\sigma$ ($\text{см}^2/\text{кг}$) $\sim t$ (с), то в таблицах t следует считать в секундах.

Кривые $\bar{e}_t \sim t$, $\bar{\sigma}_t \sim t$ построены на стандартной логарифмической бумаге и перенесены на кальку. Опытную кривую $e_s = e(t)/\sigma_k$ (или $\sigma_s = \sigma(t)/e_k$) также следует строить на стандартной логарифмической бумаге и совмещать путем сдвигов с подобной ей кривой \bar{e}_t на кальке.

Одно из семейств кривых $\bar{e}_t(t)$ и $\bar{\sigma}_t(t)$ приведено на рис. 5.12 в уменьшенном масштабе для параметров $\alpha = 0,075$; $\beta = 0,05$ и различных A . Все кривые и таблицы приведены в книге [14].

§ 5.3. Постановка и решение краевых задач линейной вязкоупругости

Наиболее общая постановка краевых задач линейной теории вязкоупругости содержит:

1) уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad (5.113)$$

2) связь вектора перемещений с тензором деформаций (формула Коши)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.114)$$

(причем при переходе к постановкам задач в напряжениях могут понадобиться условия совместности Сен-Венана — дифференциальные уравнения относительно компонентов e_{ij});

3) связь тензора напряжений с тензором деформаций (определяющее уравнение), которую будем использовать в форме

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijkl} e_{kl}(t) - \int_0^t b_{ijkl}(t, \tau) e_{kl}(\tau) d\tau; \quad (5.115)$$

4) краевые условия; рассмотрим только классический случай, когда $\partial\Omega = S_\sigma \cup S_u$, причем

$$u|_{S_u} = g(x, t), \quad x \in S_u, \quad (5.116)$$

$$\sigma_{ij}(u) v_j|_{S_\sigma} = P_i(x, t), \quad x \in S_\sigma. \quad (5.117)$$

Будем считать, что $t \in [0, T]$, и рассмотрим подробнее квазистатические задачи [т. е. задачи, в которых в уравнении (5.113) можно пренебречь слагаемым $\rho \partial^2 u / \partial t^2$] для тел из нестареющих изотропных материалов. Связь напряжений с деформациями в данном случае удобно использовать в виде пары соотношений (5.44) — (5.45), т. е.

$$\left. \begin{aligned} S_{ij}(t) &= \int_0^t R_c(t-\tau) de_{ij}(\tau); \\ \tilde{\sigma}(t) &= \int_0^t R_v(t-\tau) d\theta(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Для решения таких задач применяется аппарат преобразования Лапласа — Карсона во временной переменной; напомним, что

если функция $f(t)$ определена на интервале $[0, \infty]$, то преобразованием по Лапласу — Карсону [или кратко — изображением $\hat{f}(t)$] называется следующая функция комплексной переменной p :

$$\hat{f}^*(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \quad (5.119)$$

Имеет место теорема о свертке: если $g(0) = 0$ и

$$\Psi(t) = \int_0^t f(t-\tau) dg(\tau), \quad (5.120)$$

то

$$\Psi^*(p) = \hat{f}^*(p) g^*(p). \quad (5.121)$$

Используя эту теорему и применив преобразования (5.119) ко всем условиям и уравнениям краевой задачи линейной теории вязкоупругости для нестареющих изотропных сред, получим краевую задачу в изображениях, формально совпадающую с обычной краевой задачей линейной теории упругости; отличие от обычной задачи состоит в том, что все заданные и искомые функции, а также модули упругости зависят от комплексной переменной p как от параметра.

Если решение соответствующей упругой задачи записывается аналитически (в виде формулы), то, заменив в этой формуле заданные функции и модули упругости преобразованными по Лапласу — Карсону величинами и произведя переход к оригиналам, т. е. возвращаясь к старой переменной t с помощью, например, преобразования Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} \hat{f}^*(p) dp, \quad (5.122)$$

получим решение вязкоупругой задачи.

Использовать формулу Меллина (5.122) на практике достаточно сложно, поэтому для построения решений конкретных задач применяются различные вспомогательные приемы, основанные на использовании теоремы о свертке, знаний зависимостей, обратных (5.118), и других предположений и теорем, относящихся к обращению выражений специального вида.

Для разъяснения некоторых из этих приемов введем изображения основных операторов $R_c^* \equiv 2G^*$, $R_v^* \equiv K^*$, Π_c^* , Π_v^* и вспомогательных, встречающихся при переходе от постановок задач в оригиналах к постановкам в изображениях:

$$\left. \begin{aligned} v^* &= \frac{3R_v^* - R_c^*}{6R_v^* + R_c^*} = \frac{3K^* - 2G^*}{6K^* + 2G^*}; \\ \lambda^* &= R_v^* - R_c^*/3 = K^* - 2G^*/3; \\ \mu^* &= R_c^*/2 = G^*; \\ E^* &= \frac{9R_v^* R_c^*}{6R_v^* + R_c^*} = \frac{9K^* G^*}{3K^* + G^*.} \end{aligned} \right\} \quad (5.123)$$

Отметим, что линейной комбинации изображений соответствует линейная комбинация оригиналов, произведению — свертка оригиналов (теорема о свертке), возведению изображения в степень -1 — оператор типа свертки, обратный по отношению к такому же типа оператору с ядром, совпадающим с оригиналом преобразуемого изображения. К сожалению, этих операций в общем случае недостаточно для того, чтобы осуществить переход от изображений к оригиналам для построения вязкоупругого решения, и главное осложнение связано со сложной зависимостью решения от коэффициента Пуассона v (в изображениях — от v^*). Как показывает анализ, все известные к настоящему времени точные решения задач теории упругости представляют собой рациональные функции (т. е. отношение двух целых) от коэффициента Пуассона v , следовательно, представимы в виде суммы некоторого числа элементарных дробей и полинома. Построим формулы обращения изображений в виде элементарной дроби и степени и после этого приведем решения некоторых конкретных задач.

В действительности, более удобным оказывается использование вместо коэффициента Пуассона v параметра ω_0 и соответствующего ему изображения (оператора) ω^* , которые вводятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1-2v}{1+v} = \frac{2G}{3K}, \quad \omega^* = \frac{1-2v^*}{1+v^*} = \\ &= \frac{1}{3\Pi_c^* R_v^*} = \frac{1}{3} R_c^* \Pi_v^*; \\ v &= \frac{1-\omega_0}{2+\omega_0}, \quad v^* = \frac{1-\omega^*}{2+\omega^*}. \end{aligned} \right\} \quad (5.124)$$

Ниже понадобится также величина $(\omega^*)^{-1} = \Pi^*$, которую будем отождествлять с оператором, обратным оператору типа свертки, определяемому ядром $\omega(t)$ (такое отождествление удобно производить для всех изображений, что и будем делать).

Предполагая известными функции $\Pi_c(t)$, $\Pi_v(t)$, $R_c(t)$, $R_v(t)$ и используя теорему о свертке в следующем варианте: если

$$f^*(p) = g^*(p) h^*(p),$$

то

$$\begin{aligned} f(t) &= g(0) h(t) + \int_0^t h(t-\tau) dg(\tau) = \\ &= g(t) h(0) + \int_0^t g(t-\tau) dh(\tau), \end{aligned} \quad (5.125)$$

найдем, что

$$\begin{aligned} 3\omega(t) &= R_c(0) \Pi_v(t) + \int_0^t \Pi_v(t-\tau) dR_c(\tau) = \\ &= \Pi_v(0) R_c(t) + \int_0^t R_c(t-\tau) d\Pi_v(\tau), \end{aligned} \quad (5.126)$$

а также, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \pi(t) &= \Pi_c(0) R_v(t) + \int_0^t R_v(t-\tau) d\Pi_c(\tau) = \\ &= R_v(0) \Pi_c(t) + \int_0^t \Pi_c(t-\tau) dR_v(\tau). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Заметим, что в решениях задач в изображениях встречаются выражения вида

$$\varphi_n^* = N^* (\omega^*)^n \varphi^*, \quad (5.128)$$

где N^* — изображение одного из ядер Π_c , Π_v , или R_c , R_v ; ϕ^* — изображение заданной функции (например, массовых сил); n — произвольное целое положительное или отрицательное число. Из определения (5.128) вытекает, что для $n \geq 1$

$$\varphi_n^* = \omega^* \varphi_{n-1}^* = \pi^* \varphi_{n+1}^*. \quad (5.129)$$

Учитывая, что

$$\varphi_0(t) = \int_0^t N(t-\tau) d\varphi_0(\tau) \quad (5.130)$$

[предполагается $\varphi_0(0) = 0$], получим для положительных степеней:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau) d\varphi_0(\tau), \\ \dots &\dots \\ \varphi_n(t) &= \int_0^t \omega(t-\tau) d\varphi_{n-1}(\tau), \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (5.131)$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{-1}(t) &= \int_0^t \pi(t-\tau) d\varphi_0(\tau), \\ \vdots &\quad \vdots \\ \varphi_{-n}(t) &= \int_0^t \pi(t-\tau) d\varphi_{n-1}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (5.132)$$

Пусть теперь решение (напряжение, деформация или перемещение) в изображениях имеет следующую структуру:

$$f^*(p) = N^*(p) \Phi^*(p) \varphi^*(p), \quad (5.133)$$

где N^* и Φ^* имеют тот же смысл, что и в формуле (5.128).

$$\Phi^* = \sum_{k=1}^N \left(\frac{c_k^1}{1 + \beta_k \omega^*} + \frac{c_k^2}{(1 + \beta_k \omega^*)^2} + \dots \right), \quad (5.134)$$

где c_k^t , β_k — действительные числа. Для построения оригинала (5.133) достаточно построить оригинал дроби

$$g_\beta^* = 1/(1 + \beta\omega^*) = \pi^*/(\beta + \pi^*) \quad (5.135)$$

(поскольку обращение степеней было разобрано выше).

Итак, пусть

$$f^* = g_\beta^*\psi^*, \quad (5.136)$$

или, что то же,

$$f^* + \beta\omega^*f^* = \psi^*. \quad (5.137)$$

Переходя к оригиналам, для определения f получаем следующее интегральное уравнение:

$$f(t) = \psi_\lambda(t) - \lambda_0 \int_0^t \omega'(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (5.138)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= \beta/(1 + \beta\omega(0)), \quad \omega(0) \equiv \omega_0 = (1 - 2v)/(1 - v), \\ \varphi_\lambda(t) &= \lambda_0/\beta\psi(t), \quad \omega'(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (5.139)$$

Уравнение (5.138) решается каким-либо из известных методов. Предположим, что это решение найдено; запишем его в виде

$$\varphi(t) = \psi_\lambda(t) + \int_0^t \Gamma'_\beta(t-\tau)\psi_\lambda(\tau)d\tau, \quad (5.140)$$

где $\Gamma'_\beta(t)$ — резольвента ядра $\lambda_0\omega'(t)$.

Для построения функции $g_\beta(t)$ предположим, что функция $\Gamma'_\beta(t)$ является производной некоторой функции $\Gamma_\beta(t)$, для которой $\Gamma_\beta(0) = 1$, тогда в соответствии с определением будем иметь

$$f^* = \Gamma_\beta^*\psi_\lambda^* = \frac{\lambda_0}{\beta} \Gamma_\beta^*\psi^* = \frac{1}{1 + \beta\omega(0)} \Gamma_\beta^*\psi^*. \quad (5.141)$$

Сравнивая уравнения (5.136) и (5.141), получим

$$g_\beta^* = \frac{1}{1 + \beta\omega(0)} \Gamma_\beta^*, \quad (5.142)$$

следовательно,

$$g_\beta(t) = \frac{1}{1 + \beta\omega(0)} \Gamma_\beta(t) = \frac{1}{1 + \beta\omega(0)} \left[1 + \int_0^t \Gamma'_\beta(\tau)d\tau \right]. \quad (5.143)$$

Отметим, что резольвента $\Gamma'_\beta(t)$ может быть представлена в виде ряда

$$\Gamma'_\beta(t) = \sum_{m=1}^{\infty} K_{\beta m}(t), \quad (5.144)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K_{\beta m+1}(t) &= \int_0^t K_{\beta 1}(t-\tau) K_{\beta m}(\tau) d\tau; \\ K_{\beta 1}(t) &= -\lambda_0 \omega'(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.145)$$

Существуют и другие способы построения функций $g_\beta(t)$, связанные с конкретным способом аппроксимации исходных ядер Π и R , а также с постановкой специальных экспериментов на ползучесть и релаксацию вязкоупругих образцов, соединенных с упругой пружиной.

Предположим для упрощения, что материал не обладает объемной релаксацией (ползучестью), т. е.

$$\tilde{\sigma} = B\theta, \quad B = \text{const}, \quad (5.146)$$

тогда нетрудно найти, что

$$\left. \begin{aligned} \omega(t) &= R_c(t)/3B, \quad \pi(t) = 3B\Pi_c(t), \\ g_\beta^* &= \frac{3B}{3B + \beta R_c^*} = \frac{3B\Pi_c^*}{\beta + 3B\Pi_c^*}. \end{aligned} \right\} \quad (5.147)$$

Пример 5.1. Пусть рассматривается задача о растяжении цилиндрического стержня длины l , плоские торцы которого перпендикулярны образующей, верхний торец жестко заделан, нижний свободен и действует объемная сила плотности $p = p(t) = \rho g$ (ρ — плотность материала, g — ускорение свободного падения), тогда максимальное из перемещений точек стержня вдоль образующей в упругой задаче

$$u_{\max} = -\frac{\rho l^2}{18B} \left(1 + \frac{2}{\omega_0} \right) \quad (5.148)$$

(напомним, что по предположению $B = \text{const}$). В соответствии со сказанным выше решение вязкоупругой задачи имеет вид

$$u_{\max}(t) = -\frac{l^2}{18B} \left[p(t) + 2 \int_0^t \pi(t-\tau) dp(\tau) \right]. \quad (5.149)$$

Пример 5.2. К границе полупространства приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивности $p = p(t)$, отличная от нуля в круге радиуса a ; перемещение в центре круга в упругой задаче

$$u = \frac{p}{\pi a G} \left(2 - \frac{3}{2 + \omega_0} \right). \quad (5.150)$$

Следовательно, решение аналогичной вязкоупругой задачи имеет форму

$$u(t) = \frac{1}{\pi a} \left\{ 4 \int_0^t \Pi(t-\tau) dp(\tau) - 3 \int_0^t Q_0(t-\tau) dp(\tau) \right\}, \quad (5.151)$$

где

$$Q_0(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) dg_{1/2}(\tau) + g_{1/2}(0) \pi(t) \quad (5.152)$$

Число таких примеров без труда можно увеличить, используя другие точные решения упругих задач.

Естественно, что в практически встречающихся задачах аналитическое решение построить, как правило, не удается и, следовательно, изложенная выше методика, на первый взгляд, не применима. Было, однако, установлено, что удовлетворительные (с точки зрения практики) результаты дает методика аппроксимации решения (напряжений, деформаций и перемещений) в наиболее интересных точках с помощью описанных выше выражений от упругих констант (степенных функций и рациональных дробей), для которых переход от пространства изображений к пространству оригиналов сводится к вычислению интегралов по времени. Фактически поступают следующим образом: задают вполне определенную форму зависимости решения от параметра ω_0 ; например, в случае когда на всей поверхности тела заданы перемещения, полагают

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \omega_0 u_1(\mathbf{x}) + \pi_0 u_{-1}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^N \frac{u_{\beta_k}}{1 + \beta_k \omega_0} \quad (5.153)$$

(здесь \mathbf{x} — фиксированная точка тела), решают упругую задачу (например, изложенным выше методом конечных элементов) для ряда значений ω_0 , аппроксимируют получающуюся зависимость выражением вида (5.153), подбирая коэффициенты u_i , u_{β_k} , β_k (например, по методу наименьших квадратов). Очевидно, что коэффициенты $u_i(\mathbf{x})$ будут пропорциональны заданным перемещениям (в силу линейности уравнений), и если предположить, что заданные на границе перемещения пропорциональны одной функции времени $f(t)$, то на эту же функцию будут умножаться и коэффициенты u_i , u_{β_k} . Если таких функций необходимо ввести несколько, с тем чтобы полностью описать процесс нагружения тела, то приведенные здесь рассуждения и выкладки необходимо проводить для каждой функции. Аналогичная проблема возникает, если на части поверхности заданы усилия, на части — перемещения. Заметим, что в последнем случае перемещения будут пропорциональны прикладываемым усилиям, деленным на модуль сдвига, что очевидным образом меняет алгоритм перехода к изображениям.

После перехода к изображениям и обращения получившихся выражений получаем вязкоупругое решение в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) = & u_0(\mathbf{x}) f(t) + u_1(\mathbf{x}) \int_0^t \omega(t-\tau) df(\tau) + \\ & + u_{-1}(\mathbf{x}) \int_0^t \pi(t-\tau) df(\tau) + \sum_{k=1}^N u_{\beta_k}(\mathbf{x}) \int_0^t g_{\beta}(t-\tau) df(\tau). \end{aligned}$$

Вернемся теперь к общему случаю (5.115), когда материал анизотропен. Если материал нестареющий — ядра разностные, то с помощью преобразования Лапласа — Карсона краевые задачи вязкоупругости приводятся к краевым задачам теории упругости для анизотропного тела. Описанную выше методику преобразова-

ния решений (аналитических или численных) упругих задач в решения вязкоупругих задач формально можно перенести и на этот случай. Отметим, однако, что вопрос о форме зависимости решения от упругих модулей и о возможных способах аппроксимации этой зависимости здесь не имеет столь четкого решения, как это было в случае изотропии, поэтому данная методика для анизотропных упругих сред в настоящее время широкого применения не нашла.

Рассмотрим одну из возможных процедур численного решения краевых задач для тел, поведение которых описывается определяющим уравнением (5.115), известную под названием метода шагового интегрирования по времени. Для этого используем постановку задачи в перемещениях в форме принципа возможных перемещений (Лагранжа):

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(t)) - \int_0^t b_{ijkl}(t, \tau) \epsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(\tau)) d\tau \right] \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} d\Omega + \int_{S_{\sigma}} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} dS \equiv L(\boldsymbol{v}, t), \end{aligned} \right\} \quad (5.154)$$

$$\forall \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}|_{S_u} = 0, \boldsymbol{u}|_{S_u} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in S_u,$$

получающуюся умножением дифференциальных уравнений движения (в квазистатике) на произвольное (возможное) перемещение $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$, сложением их и интегрированием по области Ω с последующим применением формулы Грина.

Рассматриваемый промежуток времени $[0, T]$ разобьем на подинтервалы $[t_k, t_{k+1}]$, $t_0 = 0$, $t_N = T$ и воспользуемся следующей простейшей квадратурной формулой:

$$\int_0^{t_m} f(\tau) d\tau \simeq \sum_{l=0}^{m-1} f(t_l) \Delta t_l, \quad \Delta t_l = t_{l+1} - t_l \quad (5.155) ^*)$$

(формулой прямоугольников с абсциссой, совпадающей с левым концом интервала).

Подставляя в (5.155) вместо $f(\tau)$ величину $b_{ijkl}(t, \tau) \epsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(\tau))$ (t — фиксировано), перейдем от задачи (5.154) к такой последовательности задач:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[a_{ijkl} \epsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(t_m)) - \sum_{l=0}^{m-1} b_{ijkl}(t_m, t_l) \Delta t_l \epsilon_{kl}(\boldsymbol{u}(t_l)) \right] \epsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{F}(t_m) \cdot \boldsymbol{v} d\Omega + \int_{S_{\sigma}} \boldsymbol{P}(t_m) \cdot \boldsymbol{v} dS \equiv L(\boldsymbol{v}, t_m), \quad \forall \boldsymbol{v}, \end{aligned} \quad (5.156)$$

$$m = 0, 1, \dots, N; \quad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_m) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, t_m), \quad \boldsymbol{x} \in S_u, \quad (5.157)$$

каждая из которых решается с помощью обычного метода конечных элементов.

^{*)} Можно рекомендовать для случая регулярных ядер без особенностей.

Заметим, что матрица жесткости на каждом шаге одна и та же; влияние вязкости учитывается с помощью фиктивных массовых сил, плотность работы которых на возможном перемещении равна

$$\sum_{l=0}^{m-1} b_{ijkl}(t_m, t_l) \Delta t_l e_{kl}(\boldsymbol{u}(t_l)) e_{ij}(\boldsymbol{v}) d\Omega \quad (5.158)$$

и для вычисления которой на m -м этапе необходимо знать поле деформаций во все предшествующие моменты времени t_0, t_1, \dots, t_{m-1} , и, следовательно, в памяти ЭВМ постоянно надо хранить массивы чисел $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_l)$, $l = 0, 1, \dots, m-1$. Поскольку память ЭВМ ограничена, то указанное обстоятельство ограничивает длину временного интервала $[0, T]$, на котором может быть найдено решение. Выход из этого затруднения состоит в использовании специального вида ядер $b_{ijkl}(t, \tau)$; известно, что $b_{ijkl}(t, \tau) \rightarrow 0$ при $t - \tau \rightarrow +\infty$ обычно по закону, близкому к экспоненциальному, следовательно, для вычисления выражения (5.158) в памяти ЭВМ достаточно хранить лишь несколько состояний тела, ближайших к рассматриваемому моменту времени, количество которых определяется скоростью убывания ядер b_{ijkl} на бесконечности.

Одно из возможных обобщений изложенной методики состоит в использовании более точных — по сравнению с (5.155) — квадратурных формул, например формулы трапеций (для простоты $\Delta t_i \equiv \Delta t = \text{const}$):

$$\int_0^{t_m} f(\tau) d\tau \simeq \Delta t \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{l=1}^{m-1} f(t_l) + \frac{1}{2} f(t_m) \right]. \quad (5.159)$$

В последнем случае возникает такая последовательность краевых задач:

$$\begin{aligned} & \int_Q \left\{ \left[a_{ijkl} - \frac{\Delta \tau}{2} b_{ijkl}(t_m, t_m) \right] e_{kl}(t_m) - \right. \\ & - \Delta \tau \left[\frac{1}{2} b_{ijkl}(t_m, 0) e_{kl}(0) + \sum_{l=1}^{m-1} b_{ijkl}(t_m, t_l) e_{kl}(t_l) \right] \left. \right\} e_{ij}(\boldsymbol{v}) d\Omega = \\ & = L(\boldsymbol{v}, t_m), \quad \forall \boldsymbol{v}, \quad m = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.160)$$

Недостаток этой модификации состоит в том, что в случае нестабильного материала матрицу жесткости в системе уравнений метода конечных элементов при каждом новом значении t_m следует пересчитывать заново; определенные затруднения возникают и в случае сингулярных ядер. Если же материал стабилен, то схема (5.160) может дать значительный выигрыш во времени в сравнении со схемой (5.156).

Сделаем теперь несколько замечаний о решении динамических задач. Наиболее универсальным, но, естественно, и наиболее трудоемким является метод, рассмотренный в § 5.1. Применяется он, как правило, в сочетании с численными или аналитическими ме-

тодами решения получающихся интегро-дифференциальных уравнений. Если в качестве базисных используются функции метода конечных элементов в том виде, в каком они были построены в главе 4, то размерность системы интегро-дифференциальных уравнений динамической вязкоупругости очень велика, что не позволяет добиваться высокой точности расчетов. Более эффективным оказался метод, расщепляющий алгоритм решения на два этапа: на первом этапе с помощью метода конечных элементов строится новая система базисных функций, совпадающих с формами собственных колебаний соответствующего упругого тела, на втором этапе по методу § 5.1 строится система интегро-дифференциальных уравнений по времени относительно коэффициентов разложения решения по собственным формам колебаний упругого тела. Использование этой методики позволяет значительно сократить число уравнений по времени без снижения точности расчетов.

Используя известную информацию относительно каких-либо специальных свойств материала или происходящих в теле процессов, можно построить менее универсальные (по сравнению с численными), но более эффективные методы решения динамических задач. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Метод осреднения. Этот метод применим в тех случаях, когда вязкость среды достаточна мала, так что имеется возможность ввести малый параметр ε и построить решения, асимптотически точные (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Используем связь между напряжениями и деформациями в следующей форме:

$$S_{ij}(t) = 2Ge_{ij}(t) - 2G \int_0^t T_c(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau, \quad (5.161)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = B\theta(t) - B \int_0^t T_v(t-\tau) \theta(\tau) d\tau. \quad (5.162)$$

Предположение о малости вязкости означает, что

$$0 \leq \int_0^t T_c(\tau) d\tau \ll 1, \quad 0 \leq \int_0^t T_v(\tau) d\tau \ll 1, \quad (5.163)$$

поэтому соотношения (5.161) – (5.162) можно записать в виде

$$S_{ij}(t) = 2Ge_{ij}(t) - 2Ge \int_0^t T_c(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau, \quad (5.164)$$

$$\tilde{\sigma}(t) = B\theta(t) - Be \int_0^t T_v(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \quad (5.165)$$

и e считать малым параметром; в окончательных результатах в следует положить равным единице.

Подставляя зависимости (5.164) – (5.165) в уравнения движения (в дифференциальной форме или в форме принципа возможных перемещений) и используя метод конечных разностей, метод ко-

нечных элементов в обычной или модифицированной указанным выше способом форме или еще какой-нибудь метод для дискретизации задачи по пространственным переменным, придем к системе интегро-дифференциальных уравнений вида

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{a}} + [\mathbf{A}] \dot{\mathbf{a}} = \varepsilon \int_0^t [\mathbf{T}(t-\tau)] \mathbf{a}(\tau) d\tau + \varepsilon_1 \mathbf{F}(t), \quad (5.166)$$

где $[\mathbf{M}]$ — матрица масс системы; $[\mathbf{A}]$ — матрица жесткости; $[\mathbf{T}(t-\tau)]$ — матрица ядер релаксации, представляющая собой комбинацию ядер T_c и T_v (в качестве упражнения рекомендуется вывести формулу для матрицы $[\mathbf{T}(t-\tau)]$ по методу конечных элементов в виде, описанном в главе 3); вектор $\varepsilon_1 \mathbf{F}$ выражается через внешние воздействия, при этом параметр ε_1 определяет порядок величины внешних воздействий по отношению к порядку величины сил вязкого сопротивления среды.

Матрицы $[\mathbf{M}]$ и $[\mathbf{A}]$ симметричны и положительно определены, следовательно, существует невырожденное линейное преобразование (замена искомых функций в нашем случае), приводящее эти матрицы одновременно к диагональному виду [5]. Предположим, что такое преобразование произведено, тогда система (5.166) приобретает форму

$$\ddot{Y}_i + \omega^2 Y_i = \varepsilon \int_0^t T_{ij}(t-\tau) Y_j(\tau) d\tau + \varepsilon_1 F_i(t) \quad (5.167)$$

(повторяющийся индекс означает, как обычно, суммирование от 1 до N , где N — количество неизвестных Y_i).

Предположим для упрощения, что $\varepsilon_1 = \varepsilon$, тогда известными методами систему (5.167) можно привести к стандартному виду (определение и методы приведения к стандартному виду см. в книгах [2], [35]):

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon \left\{ [f(t)] c + \int_0^t [\omega(t, \tau)] c(\tau) d\tau + \varphi(t) \right\}. \quad (5.168)$$

Здесь c — вектор новых неизвестных размерности $2N$; $[f(t)]$ и $[\omega(t, \tau)]$ — квадратные матрицы размера $(2N) \times (2N)$; $\varphi(t)$ — заданный вектор.

Метод осреднения состоит в переходе от системы вида (5.168) к более простой (осредненной) системе

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon g(\xi), \quad (5.169)$$

где

$$g(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ [f(t)] \xi + \int_0^t [\omega(t, \tau)] \xi(\tau) d\tau + \varphi(t) \right\} dt. \quad (5.170)$$

При весьма общих предположениях доказано (см. книги [2], [35]), что решение $\xi(t)$ системы (5.169) близко к решению $c(t)$ системы (5.168).

Пример 5.3. Рассмотрим поперечные колебания стержня из вязкоупругого материала, описываемые уравнением

$$\frac{\rho S}{EI} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \varepsilon \int_0^t T_r(t-\tau) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial \tau^4} d\tau + \varepsilon \frac{q(x, t)}{EI} \quad (5.171)$$

при условиях шарнирного опирания; плотность материала ρ , площадь поперечного сечения S , модуль Юнга E и момент инерции поперечного сечения I предполагаются постоянными; w — прогиб; $q(x, t)$ — поперечная нагрузка; $T_r(t-\tau)$ представляет собой комбинацию ядер T_c и T_v .

Решение разыскивается в форме

$$w(x, t) = \Gamma_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (5.172)$$

(l — длина стержня, но m суммирование от 1 до N).

Предположим, что нагрузка $q(x, t)$ также представлена в виде ряда

$$eq(x, t) = \varepsilon \rho S \Phi_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}. \quad (5.173)$$

После подстановки разложений (5.172) и (5.173) в (5.171) приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\Gamma}_m + \omega_m^2 \Gamma_m &= \varepsilon \left[\varphi_m + \omega_m^2 \int_0^t T_r(t-\tau) \Gamma_m(\tau) d\tau \right]; \\ \omega_m^2 &= (m\pi/l)^4 EI/\rho S, \end{aligned} \right\} \quad (5.174)$$

не связанных, очевидно, друг с другом.

Приведение к стандартной форме осуществим методом вариации произвольных постоянных, т. е. с помощью замены

$$\Gamma(t) = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t \quad (5.175)$$

(индекс m здесь и ниже опускаем).

Из уравнения (5.174) находим, что

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_1(t) &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \sin \omega t \left[\varphi + \omega^2 \int_0^t T_r(t-\tau) (C_1(\tau) \cos \omega \tau + C_2(\tau) \sin \omega \tau) d\tau \right]; \\ \dot{C}_2(t) &= \frac{\varepsilon}{\omega} \cos \omega t \left[\varphi + \omega^2 \int_0^t T_r(t-\tau) (C_1(\tau) \cos \omega \tau + C_2(\tau) \sin \omega \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.176)$$

Следуя методике осреднения, перейдем к системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= -g_{10} - g_{11}\xi_1 - g_{12}\xi_2; \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= -g_{20} - g_{21}\xi_1 - g_{22}\xi_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.177)$$

где

$$g_{10} = \frac{1}{\omega} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) \sin \omega t \, dt;$$

$$g_{20} = \frac{1}{\omega} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) \cos \omega t \, dt;$$

$$g_{11} = \omega \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \, dt \int_0^t T_r(t-\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = -\frac{\omega}{2} T_s(\omega);$$

$$g_{12} = \omega \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \, dt \int_0^t T_r(t-\tau) \sin \omega \tau \, d\tau = \frac{\omega}{2} T_c(\omega);$$

$$g_{21} = \omega \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \, dt \int_0^t T_r(t-\tau) \cos \omega \tau \, d\tau = \frac{\omega}{2} T_c(\omega);$$

$$g_{22} = \omega \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \, dt \int_0^t T_r(t-\tau) \sin \omega \tau \, d\tau = -\frac{\omega}{2} T_s(\omega).$$

Примем

$$T_s(\omega) = \int_0^\infty T_r(\tau) \sin \omega \tau \, d\tau;$$

$$T_c(\omega) = \int_0^\infty T_r(\tau) \cos \omega \tau \, d\tau$$

— соответственно синус Т- и косинус Т- образы ядра $T_r(\tau)$ в преобразовании Фурье; заметим, что параметр ϵ в системе (5.177) равен единице.

Используя известные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, из системы (5.177) находим осредненное решение:

$$\begin{aligned} T(t) = & \left[A \cos \omega \left(1 - \frac{1}{2} T_c \right) t + B \sin \omega \left(1 - \frac{1}{2} T_c \right) t \right] \exp \left[-\frac{\omega}{2} T_s(t) \right] + \\ & + \frac{2}{\omega} \sqrt{\frac{g_{10}^2 + g_{20}^2}{T_s^2 + T_c^2}} \cos (\omega t + \psi_1 + \psi_2), \end{aligned} \quad (5.178)$$

где $\psi_1 = \operatorname{arctg} T_s/T_c$, $\psi_2 = \operatorname{arctg} g_{10}/g_{20}$.

Общее решение получается в виде суммы произведений решений (5.178) на функции $\sin m\pi x/l$.

Пример 5.4. Задачу о виброзащитите изделий, устанавливаемых на транспортных средствах, сведем к расчетной схеме (рис. 5.13), где 1 — платформа транспортного средства; 2 — вязкоупругий виброзащитный слой; 3 — абсолютно жесткое изделие массой m_2 ; u_i , φ_i — соответственно вертикальные и угловые перемещения платформы ($i=1$) и изделия ($i=2$); l — расстояние между центрами тяжести подressорных масс транспортного средства и изделия; $a+b$ — длина вязкоупругого виброзащитного слоя.

Виброзащитный слой 2 выполнен из полимерного материала, обладающего вязкоупругими свойствами, или эквивалентен конструкции с аналогичными свойствами.

Внешние механические воздействия, передающиеся полимерному слою от платформы, задаются функциями:

$$u_1 = A_u \sin \omega t + B_u \cos \omega t,$$

$$\varphi_1 = A_\varphi \sin \omega t + B_\varphi \cos \omega t.$$

Для построения условий, обеспечивающих заданные нормалами перемещения и перегрузки защищаемого объекта, модель виброзащитного устройства наделяется вязкоупругими свойствами, при которых связь между усилиями $p_x(t)$ и перемещениями $u_x(t)$ принимается в форме наследственной теории Больцмана — Вольтерра:

$$p_x(t) = \int_0^t R_p(t-s) du_x(s),$$

или

$$p_x(t) = R_p(0) u_x(t) - \int_0^t T(t-s) u_x(s) ds, \quad (5.179)$$

где $T(t) = -\frac{dR_p(t)}{dt}$ — ядро уравнения или функция скорости релаксации системы; $R_p(0)$ — постоянная, характеризующая упругие свойства системы. Параметры ядра $T(t)$ и упругие константы определяют, следуя описанной выше методике. Здесь A_u , A_φ , B_u , B_φ — константы, зависящие от m_2 , характеристик транспортного средства, профиля дороги, скорости движения; ω — частота внешнего механического воздействия.

Запишем перемещения в i -м сечении слоя в виде

$$u_x = u_1 - u_2 + x(\varphi_1 - \varphi_2) + l\varphi_2. \quad (5.180)$$

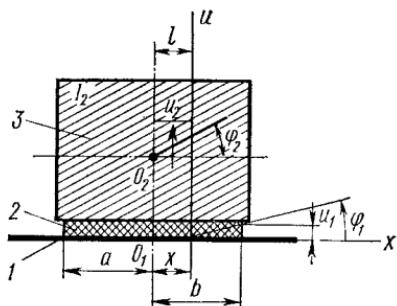


Рис. 5.13

С учетом основного соотношения (5.179) вертикальную и угловую реакции вязкоупругого виброзащитного слоя на изделие найдем суммированием $p_x(t)$ и $x p_x(t)$ по длине x в виде:

$$P = \int_{-a}^b p_x dx = R_0 \int_{-a}^b u_x dx - \int_{-a}^b \int_0^t T(t-\tau) u_x(\tau) d\tau dx;$$

$$M = \int_{-a}^b p_x x dx = R_0 \int_{-a}^b u_x x dx - \int_{-a}^b \int_0^t T(t-\tau) u_x(\tau) d\tau x dx,$$

а с учетом (5.180):

$$P = c_1 u_1 - c_1 u_2 + c'_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2 - \varepsilon \int_0^t T(t-\tau) [c_1 u_1 - c_1 u_2 + c'_1 \varphi_1 - c_2 \varphi_2] d\tau;$$

$$M = c_4 u_1 - c_4 u_2 + c'_3 \varphi_1 - c_3 \varphi_2 - \varepsilon \int_0^t T(t-\tau) [c_4 u_1 - c_4 u_2 + c'_3 \varphi_1 - c_3 \varphi_2] d\tau.$$

Здесь:

$$c_1 = R_0(a+b); \quad c'_1 = \frac{b^2-a^2}{2}R_0; \quad c_2 = \left[\frac{b^2-a^2}{2} - l(b+ \right] R_0;$$

$$c_3 = \left[\frac{b^3+a^3}{3} - \frac{b^2-a^2}{2}l \right] R_0;$$

$$c_4 = c'_2; \quad c'_3 = \frac{b^3+a^3}{3}R_0; \quad \varepsilon = 1/R_0 \text{ — малый параметр.}$$

Система уравнений, описывающая колебания изделий, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} m_2 \ddot{u}_2 + c_1 u_2 + c_2 \varphi_2 &= \varepsilon \left\{ \int_0^t T(t-\tau) [\alpha_{11}^0 \sin \omega \tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_{12}^0 \cos \omega \tau] d\tau - \int_0^t T(t-\tau) [c_1 u_2 + c_2 \varphi_2] d\tau \right\} + \\ &\quad + \varepsilon_1 (\alpha_{11}^0 \sin \omega t + \alpha_{12}^0 \cos \omega t); \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_4 u_2 + c_3 \varphi_2 &= \varepsilon \left\{ \int_0^t T(t-\tau) [\alpha_{21}^0 \sin \omega \tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_{22}^0 \cos \omega \tau] d\tau - \int_0^t T(t-\tau) [c_4 u_2 + c_3 \varphi_2] d\tau \right\} + \\ &\quad + \varepsilon_1 (\alpha_{21}^0 \sin \omega t + \alpha_{22}^0 \cos \omega t), \end{aligned} \right\} \quad (5.181)$$

где $\alpha_{11}^0 = c_1 A_u + c'_1 A_\varphi$; $\alpha_{12}^0 = c_1 B_u + c'_1 B_\varphi$; $\alpha_{21}^0 = c_4 A_u + c'_3 A_\varphi$; $\alpha_{22}^0 = c_4 B_u + c'_3 B_\varphi$; J_2 — момент инерции изделия; ε_1 — постоянный множитель, $\varepsilon/\omega^2 \ll 1$.

Рассмотрим нерезонансный случай. Составляя и решая характеристическое уравнение для порождающей системы ($\varepsilon = 0$), соответствующей (5.181), получим собственные частоты:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{c_3}{I_2} + \frac{c_1}{m_2} \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{c_3}{I_2} + \frac{c_1}{m_2} \right]^2 - \frac{c_1 c_3 - c_2 c_4}{m_2 I_2}}.$$

Осуществим переход в (5.181) к нормальным формам колебаний

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &= a_{11} \varphi_1(t) + a_{12} f_2(t), \\ \varphi_2(t) &= a_{21} f_1(t) + a_{22} f_2(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.182)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — нормальные формы колебаний.

Соотношения между амплитудами $\gamma_1 = a_{21}/a_{11}$, $\gamma_2 = a_{22}/a_{12}$ определяем, удовлетворяя уравнения (5.181) при $\varepsilon = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ функциями

$$\begin{aligned} u_j &= a_{1j} \sin(\omega_j t + \alpha_j); \\ \varphi_j &= a_{2j} \sin(\omega_j t + \alpha_j); \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

В результате получим:

$$\gamma_1 = a_{21} = \frac{m_2 \omega_1^2 - c_1}{c_2}; \quad \gamma_2 = a_{22} = \frac{m_2 \omega_2^2 - c_1}{c_2};$$

$$a_{11} = a_{12} = 1.$$

Таким образом с учетом ортогональности нормальных форм колебаний система (5.181) приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_1^2 f_1 &= \varepsilon \left\{ \int_0^t T(t-\tau) [\alpha_{11} \sin \omega \tau + \alpha_{12} \cos \omega \tau] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t T(t-\tau) f_1(\tau) d\tau \right\} + \varepsilon_1 (\alpha_{11} \sin \omega t + \alpha_{12} \cos \omega t); \\ \ddot{f}_2 + \omega_2^2 f_2 &= \varepsilon \left\{ \int_0^t T(t-\tau) [\alpha_{21} \sin \omega \tau + \alpha_{22} \cos \omega \tau] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t T(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right\} + \varepsilon_1 (\alpha_{21} \sin \omega t + \alpha_{22} \cos \omega t), \end{aligned} \right\} \quad (5.183)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{\alpha_{11}^0 a_{11} + \alpha_{21}^0 a_{21}}{m_2 a_{11}^2 + J_2 a_{21}^2}; & \alpha_{12} &= \frac{\alpha_{12}^0 a_{11} + \alpha_{22}^0 a_{21}}{m_2 a_{11}^2 + J_2 a_{21}^2}; \\ \alpha_{21} &= \frac{\alpha_{11}^0 a_{12} + \alpha_{21}^0 a_{22}}{m_2 a_{12}^2 + J_2 a_{22}^2}; & \alpha_{22} &= \frac{\alpha_{12}^0 a_{12} + \alpha_{22}^0 a_{22}}{m_2 a_{12}^2 + J_2 a_{22}^2}. \end{aligned}$$

Решение системы (5.183) ищем в виде

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= f_{1H}(t) + f_{10}(t), \\ f_2(t) &= f_{2H}(t) + f_{20}(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.184)$$

где f_{1H} , f_{2H} — решения порождающей системы, которые для (5.183) при $\varepsilon = 0$ определяются выражениями:

$$\begin{aligned} f_{1H} &= \varepsilon_1 \left[\frac{\alpha_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{\alpha_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} \cos \omega t \right], \\ f_{2H} &= \varepsilon_1 \left[\frac{\alpha_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{\alpha_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} \cos \omega t \right]. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (5.182) имеем:

$$\begin{aligned} u_{2H} &= \varepsilon_1 \left[\frac{a_{11}\alpha_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{12}\alpha_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \sin \omega t + \varepsilon_1 \left[\frac{a_{11}\alpha_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{12}\alpha_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \cos \omega t, \\ \varphi_{2H} &= \varepsilon_1 \left[\frac{a_{21}\alpha_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{22}\alpha_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \sin \omega t + \varepsilon_1 \left[\frac{a_{21}\alpha_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{22}\alpha_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \cos \omega t. \end{aligned}$$

В результате замены (5.184) уравнения (5.183) приобретут вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{f}_{10} + \omega_1^2 f_{10} &= \varepsilon \left\{ \int_0^t T(t-\tau) [\alpha_{11} \sin \omega \tau + \alpha_{12} \cos \omega \tau] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t T(t-\tau) [f_{10}(\tau) + f_{1H}(\tau)] d\tau \right\}, \\ \ddot{f}_{20} + \omega_2^2 f_{20} &= \varepsilon \left\{ \int_0^t T(t-\tau) [\alpha_{21} \sin \omega \tau + \alpha_{22} \cos \omega \tau] d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t T(t-\tau) [f_{20}(\tau) + f_{2H}(\tau)] d\tau \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.185)$$

Решения уравнений (5.185) получим с помощью метода осреднения. Приведем (5.185) к стандартной форме методом вариаций произвольных постоянных с помощью замены:

$$f_{10}(t) = C_{11}(t) \cos \omega_1 t + C_{12}(t) \sin \omega_1 t;$$

$$f_{20}(t) = C_{21}(t) \cos \omega_2 t + C_{22}(t) \sin \omega_2 t.$$

Дифференцируя последние соотношения по t [с учетом (5.185)] и применяя метод осреднения, получим соответственно для первой и второй нормальных форм колебаний усредненные системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_{11}}{d\tau} &= -\frac{\omega_1}{2} [q_{11} T_s(\omega_1) + q_{12} T_c(\omega_1)]; \\ \frac{dq_{12}}{d\tau} &= \frac{\omega_1}{2} [q_{11} T_c(\omega_1) + q_{12} T_s(\omega_1)]; \\ \frac{dq_{21}}{d\tau} &= -\frac{\omega_2}{2} [q_{21} T_s(\omega_2) + q_{22} T_c(\omega_2)]; \\ \frac{dq_{22}}{d\tau} &= \frac{\omega_2}{2} [q_{21} T_c(\omega_2) - q_{22} T_s(\omega_2)], \end{aligned} \right\} \quad (5.186)$$

где $T_s(\omega) = \int_0^t T(\tau) \sin \omega \tau d\tau$, $T_c(\omega) = \int_0^t T(\tau) \cos \omega \tau d\tau$ — синус- и косинус-образы Фурье ядра $T(\tau)$. Системы (5.186) приводятся к уравнениям второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_{11} + T_s(\omega_1) \dot{q}_{11} + \left\{ \frac{\omega_1^2}{2} [T_s^2(\omega_1) + T_c^2(\omega_1)] \right\} q_{11} &= 0; \\ \ddot{q}_{22} + T_s(\omega_2) \dot{q}_{22} + \left\{ \frac{\omega_2^2}{2} [T_s^2(\omega_2) + T_c^2(\omega_2)] \right\} q_{22} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.187)$$

корни характеристических уравнений которых суть

$$\lambda_{11}^{1,2} = -\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) \pm \frac{\omega_1}{2} T_c(\omega_1);$$

$$\lambda_{22}^{1,2} = -\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) \pm \frac{\omega_2}{2} T_c(\omega_2).$$

Подставляя решения уравнений (5.187) в выражения для $f_{10}(t)$ и $f_{20}(t)$, для нормальных форм получаем:

$$\begin{aligned} f_{10}(t) &= \left[K_{11} \cos \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + \right. \\ &\quad \left. + K_{12} \sin \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \right] \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) t \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{20}(t) &= \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &\quad \left. + K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем приближенное решение системы (5.181) в нерезонансном случае:

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &\approx e_1 \left[\frac{a_{11}\alpha_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{12}\alpha_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \sin \omega t + \\ &+ e_1 \left[\frac{a_{11}\alpha_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{12}\alpha_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \cos \omega t + a_{11} \left[K_{11} \cos \omega_1 \times \right. \\ &\times \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + K_{12} \sin \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) t \right] + a_{12} \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &\left. + K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right]; \\ \varphi_2(t) &\approx e_1 \left[\frac{a_{21}\alpha_{11}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{22}\alpha_{21}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \sin \omega t + \\ &+ e_1 \left[\frac{a_{21}\alpha_{12}}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{a_{22}\alpha_{22}}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \cos \omega t + a_{21} \left[K_{11} \cos \omega_1 \times \right. \\ &\times \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + K_{12} \sin \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \right] \times \\ &\times \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} T_c(\omega_1) t \right] + a_{22} \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &\left. + K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.188)$$

где K_{11} , K_{12} , K_{21} , K_{22} — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

Колебания изделия складываются из вынужденных колебаний, обусловленных возмущающими силами, и свободных затухающих колебаний.

Рассмотрим решение системы (5.181) для резонансного случая. Заметим, что величины $e_1\alpha_{11}$, $e_1\alpha_{12}$, $e_1\alpha_{21}$, характеризующие «нормальные вибровозмущения» на систему, во многих случаях оказываются малыми. Поэтому принимаем

$$e = e_1; \quad e\alpha_{ij} = e_1\alpha_{ij}; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \quad (5.189)$$

Учитывая (5.189) и проводя аналогичные преобразования (5.183), получим для двух нормальных форм колебаний $f_1(t)$, $f_2(t)$ в первом приближении метода усреднения следующие системы усредненных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_{11}}{dt} + \frac{\omega_1}{2} [q_{11}T_s(\omega_1) + q_{12}T_c(\omega_1)] &= -\bar{m}_{11}; \\ \frac{dq_{12}}{dt} - \frac{\omega_1}{2} [q_{11}T_c(\omega_1) - q_{12}T_s(\omega_1)] &= \bar{m}_{12}; \end{aligned} \right\} \quad (5.190)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_{21}}{dt} + \frac{\omega_2}{2} [q_{21}T_s(\omega_2) + q_{22}T_c(\omega_2)] &= -\bar{m}_{21}; \\ \frac{dq_{22}}{dt} - \frac{\omega_2}{2} [q_{21}T_c(\omega_2) - q_{22}T_s(\omega_2)] &= \bar{m}_{22}; \end{aligned} \right\} \quad (5.191)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_{i1} &= \frac{1}{\omega_i} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega_i t [\alpha_{i1} \sin \omega_i t + \alpha_{i2} \cos \omega_i t] dt; \\ m_{i2} &= \frac{1}{\omega_i} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega_i t [\alpha_{i1} \sin \omega_i t + \alpha_{i2} \cos \omega_i t] dt; \\ i &= 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (5.192)$$

Для резонанса первой нормальной формы ($\omega = \omega_1$) имеем:

$$m_{11} = \alpha_{11}/2\omega_1; \quad m_{12} = \alpha_{12}/2\omega_1; \quad m_{21} = 0; \quad m_{22} = 0.$$

По аналогии с предыдущим системы (5.190), (5.191) приводятся к двум независимым дифференциальным уравнениям второго порядка, решения которых записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &\cong \frac{a_{11}}{\omega_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2}{T_s^2(\omega_1) + T_c^2(\omega_1)}} \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \\ &+ a_{11} \left[K_{11} \cos \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + \right. \\ &+ K_{12} \sin \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) t \right] + \\ &+ a_{12} \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &+ K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right]; \\ \varphi_2(t) &\cong \frac{a_{21}}{\omega_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2}{T_s^2(\omega_1) + T_c^2(\omega_1)}} \cos(\omega_1 t - \psi_2) + \\ &+ a_{21} \left[K_{11} \cos \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + \right. \\ &+ K_{12} \sin \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) t \right] + \\ &+ a_{22} \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &+ K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.193)$$

где $\psi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} - \operatorname{arctg} \frac{T_s(\omega_1)}{T_c(\omega_1)}$ определяет начальную фазу колебаний для первой нормальной формы. Для резонанса второй нормальной формы ($\omega = \omega_2$) получим:

$$\left. \begin{aligned} u_2(t) &\equiv \frac{a_{12}}{\omega_2^2} \sqrt{\frac{\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2}{T_s^2(\omega_2) + T_c^2(\omega_2)}} \cos(\omega_2 t - \psi_2) + \\ &+ a_{11} \left[K_{11} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + \right. \\ &+ K_{12} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \left. \right] \exp \left(-\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) t \right) + \\ &+ a_{12} \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &+ K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right]; \\ \varphi_2(t) &\equiv \frac{a_{22}}{\omega_2^2} \sqrt{\frac{\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2}{T_s^2(\omega_2) + T_c^2(\omega_2)}} \cos(\omega_2 t - \psi_2) + \\ &+ a_{21} \left[K_{11} \cos \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t + \right. \\ &+ K_{12} \sin \omega_1 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_1) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_1}{2} T_s(\omega_1) t \right] + \\ &+ a_{22} \left[K_{21} \cos \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t + \right. \\ &+ K_{22} \sin \omega_2 \left(1 - \frac{1}{2} T_c(\omega_2) \right) t \left. \right] \exp \left[-\frac{\omega_2}{2} T_s(\omega_2) t \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.194)$$

где $\psi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} - \operatorname{arctg} \frac{T_s(\omega_2)}{T_c(\omega_2)}$ определяет начальную фазу колебаний для второй нормальной формы.

Из решений (5.193), (5.194) следует, что амплитуды вынужденных колебаний в резонансных случаях зависят от параметров синус- и косинус-образов Фурье ядра Т, смещения фаз ψ_1 , ψ_2 и от соотношений амплитуд внешних возмущений.

Установившиеся колебания. Предположим, что вязкоупругое тело совершает периодические колебания под действием внешних поверхностных периодических воздействий с частотой ω (внешние массовые силы предполагаются равными нулю). В этом случае по истечении достаточно большого промежутка времени переходные процессы в системе практически затухнут и решение с достаточной степенью точности будет представлено в виде:

$$\left. \begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u^c(\mathbf{x}) \cos \omega t + u^s(\mathbf{x}) \sin \omega t; \\ e_{ij}(\mathbf{x}, t) &= e_{ij}^c(\mathbf{x}) \cos \omega t + e_{ij}^s(\mathbf{x}) \sin \omega t; \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{ij}^c(\mathbf{x}) \cos \omega t + \sigma_{ij}^s(\mathbf{x}) \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (5.195)$$

причем связь e_{ij}^c , e_{ij}^s с u^c , u^s дается обычными формулами Коши;

связь σ_{ij}^c , σ_{ij}^s с ε_{ij}^c , ε_{ij}^s дается законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^c &= \tilde{T}_{cc}\varepsilon_{ij}^c + \left(\tilde{T}_{vc} - \frac{1}{3}\tilde{T}_{cc} \right) \theta^c \delta_{ij} - \\ &\quad - \tilde{T}_{cs}\varepsilon_{ij}^s + \left(\tilde{T}_{vs} - \frac{1}{3}\tilde{T}_{cs} \right) \theta^s \delta_{ij}; \\ \sigma_{ij}^s &= \tilde{T}_{cs}\varepsilon_{ij}^c + \left(\tilde{T}_{vs} - \frac{1}{3}\tilde{T}_{cc} \right) \theta^c \delta_{ij} + \\ &\quad + \tilde{T}_{cc}\varepsilon_{ij}^s + \left(\tilde{T}_{vc} - \frac{1}{3}\tilde{T}_{cc} \right) \theta^s \delta_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (5.196)$$

который получается путем подстановки выражений (5.195) в определяющее уравнение вида

$$\left. \begin{aligned} s_{ij}(t) &= \int_0^t T_c(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau; \\ \sigma_{ij}(t) &= \int_0^t T_v(t-\tau) \theta(\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (5.197)$$

T_c и T_v здесь очевидным образом выражаются через введенные ранее в соотношениях (5.48) и (5.49) функции скоростей сдвиговой и объемной релаксации T_c и T_v . По определению

$$\left. \begin{aligned} \tilde{T}_{cc} &= \int_0^\infty \tilde{T}_c(\tau) \cos \omega t d\tau; \\ \tilde{T}_{cs} &= \int_0^\infty \tilde{T}_s(\tau) \sin \omega t d\tau; \\ \tilde{T}_{vc} &= \int_0^\infty \tilde{T}_v(\tau) \cos \omega t d\tau; \\ \tilde{T}_{vs} &= \int_0^\infty \tilde{T}_v(\tau) \sin \omega t d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.198)$$

Подстановка выражений (5.196) в уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

приводит к следующей системе шести дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} L_c(u^c) - L_s(u^s) &= -\rho \omega^2 u^c; \\ L_s(u^c) + L_c(u^s) &= -\rho \omega^2 u^s, \end{aligned} \right\} \quad (5.199)$$

где L_s , L_c — оператор Ламе, в котором вместо упругих модулей подставлены следующие комбинации синус- и косинус-образов Фурье ядер \tilde{T}_c и \tilde{T}_v :

- а) в операторе L_c : $\lambda = \lambda_c = T_{vc} - 1/3T_{cc}$, $\mu = \mu_c = 1/2T_{cc}$;
- б) в операторе L_s : $\lambda = \lambda_s = T_{vs} - 1/3T_{cs}$, $\mu = \mu_s = 1/2T_{cs}$.

К системе (5.199) добавляются граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^c|_{s_u} = \mathbf{g}^c, \quad \mathbf{u}^s|_{s_u} = \mathbf{g}^s; \\ \sigma_{ij}^c v_j|_{s_\sigma} = p_i^c, \quad \sigma_{ij}^s v_j|_{s_\sigma} = p_i^s. \end{array} \right\} \quad (5.200)$$

Для решения системы (5.199) применим метод конечных элементов в обычной форме, описанной в главах 3—4; более эффективным оказывается метод конечных элементов, когда решение задачи разбивается на два этапа: на первом строятся собственные формы колебаний соответствующего упругого тела, на втором построенные собственные формы применяются в качестве базисных функций метода Бубнова — Галеркина.

Свободные затухающие колебания. Пусть вязкоупругое тело подвергается внешним воздействиям в течение некоторого промежутка времени $[0, t_0]$ и требуется определить движение тела после снятия этих воздействий. В этой задаче перемещения, деформации и напряжения интегрируемы с квадратом на интервале $[0, \infty]$ и, следовательно, решение можно разыскивать в виде разложения Фурье (интеграла)

$$\mathbf{u}(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathbf{u}^*(\omega, x) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (5.201)$$

Подстановка выражения (5.201) в (5.197) дает:

$$s_{ij}(t, x) = \int_0^t \tilde{T}_c(\tau) e_{ij}(\tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty T_c(\omega, t) e_{ij}^*(\omega, x) e^{-i\omega t} d\omega;$$

$$\sigma(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tilde{T}_v(\omega, t) \vartheta^*(\omega, x) e^{-i\omega t} d\omega,$$

причем при $t \rightarrow \infty$:

$$\tilde{T}_c(\omega, t) \rightarrow T_c^*(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \tilde{T}_c(t) dt;$$

$$\tilde{T}_v(\omega, t) \rightarrow T_v^*(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \tilde{T}_v(t) dt,$$

и, следовательно, для достаточно больших значений t можно перейти к системе для образов Фурье:

$$(\tilde{T}_v^* + \tilde{T}_c^*/6) d\omega u^* + (T_c^*/2) \Delta u^* + \rho \omega^* u^* - \rho F^* = 0,$$

которую можно решать с помощью методов, применяемых для решения стационарных задач.

§ 5.4. Деформационная теория пластичности и физически нелинейная теория упругости

Упруго-пластическое поведение деформирующейся среды характеризуется тем, что зависимость между напряжениями и деформациями является нелинейной и неоднозначной. Неоднозначность этой зависимости обусловлена тем, что значения напряжений определяются не только мгновенными значениями деформаций, но и последовательностью возникновения этих деформаций (в соответствии с классификацией сред по характеру памяти — см. § 1.8 — упругопластическая среда обладает «длинной» памятью, причем, как будет видно из дальнейшего, характер этой памяти с трудом поддается аналитическому описанию).

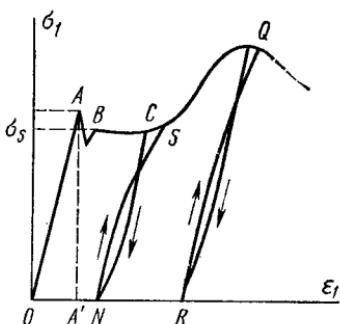


Рис. 5.14

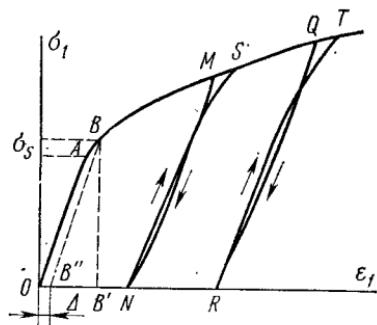


Рис. 5.15

Для того чтобы разобраться в механике процессов пластического деформирования и сформулировать соответствующие определения, гипотезы и уравнения, рассмотрим простейший процесс деформирования — чистое растяжение цилиндрического образца. Этот процесс описывается диаграммой — графиком зависимости нормального напряжения σ_1 в среднем сечении и относительным продольным удлинением ε_1 . Как установлено в экспериментах, типичные диаграммы $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$ имеют вид, представленный на рис. 5.14 и 5.15.

Диаграмма на рис. 5.14 характерна для мягких сталей, на рис. 5.15 — для цветных металлов и закаленных сталей.

Участок OA на обеих диаграммах почти прямолинеен и соответствует упругому поведению материала: если напряжение в ходе процесса не превышает величины σ_s — предела текучести, то имеет место зависимость

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1.$$

В точке A (см. рис. 5.14) процесс деформирования становится неустойчивым, поэтому за предел текучести принимают ординату точки B , с которой начинается горизонтальный участок BC — так называемая площадка текучести. На диаграмме (см. рис. 5.15) площадки текучести нет; участок AB здесь может

быть участком нелинейной упругости. Для такого материала положение точки B перехода от упругого поведения к пластическому, т. е. значение предела текучести σ_s , можно определить лишь с заданной точностью измерения деформаций. В этом случае определяют условный предел текучести σ_s как ординату точки B , при разгрузке (снятии напряжений) от которой остаточная деформация OB'' равна принятому допуску Δ . В технических справочниках $\Delta = 0,2\%$, обозначают условный предел текучести $\sigma_{s0,2}$. Предельное значение деформации, изображаемое отрезком $OA'(OB')$, называют *пределом упругих деформаций* и обозначают ε_s .

После точки B при монотонном возрастании удлинения (см. рис. 5.14) в некоторой точке C начинается так называемый процесс упрочнения — монотонное возрастание напряжения. Если площадка текучести настолько велика, что процесс упрочнения не играет роли, то материал называют *идеально пластическим*.

Если в какой-либо точке M (см. рис. 5.15) деформация начинает монотонно убывать, то вместе с деформацией начинает убывать и напряжение — происходит так называемый процесс разгрузки, изображаемый кривой MN , причем начальный участок кривой MN почти прямолинеен и параллелен исходному упругому участку OA . Точка N изображает абсциссу остаточной, или, как говорят, пластической деформации. Сравнение с разгрузкой от точки Q показывает, что величина пластической деформации зависит от значения деформации, достигнутой за весь предшествующий разгрузке процесс. При повторном нагружении от точки $N(R)$ процесс деформирования описывается кривой $NS(RT)$, которая, начиная с некоторой точки $S(T)$, близкой, вообще говоря, к точке $M(Q)$, сливается с кривой растяжения без нагрузок. Видно, что одному и тому же значению σ_1 могут соответствовать различные ε_1 в зависимости от того, какую историю процесса нагрузок-разгрузок испытал образец.

Помимо рассмотренных здесь особенностей процесса пластического деформирования сопровождается множеством других своеобразных эффектов, среди которых отметим следующие.

1. Если зафиксировать величину растягивающей силы после перехода за предел текучести, то деформация образца будет самопроизвольно возрастать, вначале быстро, а затем все медленнее и медленнее. Это явление называется *ползучестью* и оно играет очень большую роль при высоких температурах.

2. Если в какой-либо момент процесса зафиксировать удлинение образца, то поддерживающая это удлинение сила начнет самопроизвольно убывать, причем скорость убывания монотонно стремится к нулю. Этот эффект называется *релаксацией*.

3. Вид диаграммы $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$ в пластической области зависит от скорости нагружения. Это свойство материалов называется *вязкостью*.

4. Если к образцу достаточно быстро приложить усилие, превышающее предел текучести, то для некоторых материалов

имеет место запаздывание текучести — задержка во времени процесса развития пластических деформаций.

5. Если образец после растяжения за предел текучести полностью разгружен, после чего к нему приложена сжимающая сила, то оказывается, что предел текучести при сжатии меньше исходного предела текучести. Этот эффект известен как *эффект Баушингера*.

6. При сложном напряженном состоянии пластическая деформация приводит к изменению всех упругих характеристик материала, при этом первоначально изотропный материал становится анизотропным. Совокупность этих эффектов называют *деформационной анизотропией*.

Ясно, что построение теории, в которой учитывались бы все указанные особенности пластического деформирования, является чрезвычайно трудной и, по-видимому, невыполнимой задачей; в настоящее время такой теории не существует.

Для практических расчетов используются упрощенные теории, пригодные для описания более узких классов процессов, упрощения достигаются за счет пренебрежения теми или иными из указанных выше эффектов. Чаще всего принимаются следующие гипотезы.

1. Можно пренебречь временными эффектами — ползучестью, релаксацией; такие процессы и теории пластического деформирования называются *склерономными*.

2. Процесс разгрузки является идеально упругим, деформационная анизотропия отсутствует. Эта гипотеза означает, что кривая разгрузки — повторной нагрузки заменяется прямой линией, параллельной исходному участку. Кроме того, из этой гипотезы вытекает, что тензор полной деформации ε_{ij} в любой момент процесса деформирования представим в виде суммы тензоров упругой ε_{ij}^e и пластической ε_{ij}^p деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (5.202)$$

где ε_{ij}^e связан с тензором напряжений законом Гука, значения упругих постоянных в котором не зависят от деформаций. Таким образом, пластические деформации отождествляются с остаточными — оставшимися в теле после снятия напряжений.

3. Существует взаимно-однозначное соответствие между первыми инвариантами тензора напряжений σ и деформаций θ :

$$\sigma = f(\theta), \quad (5.203)$$

т. е. гидростатическое сжатие не приводит к появлению пластических деформаций. В широком диапазоне давлений зависимость (5.203) линейна:

$$\sigma = B\theta, \quad (5.204)$$

где B — модуль всестороннего растяжения — сжатия (тот же, что и в упругой области). Всюду ниже эти гипотезы будут предполагаться выполненными.

При переходе от одноосного напряженного к сложному напряженному состоянию возникает проблема формулировки условий перехода от упругого деформирования к упругопластическому. Если рассмотреть девятивимерное пространство, каждое измерение которого соответствует одному компоненту тензора напряжений, то, обобщая понятие предела текучести, в этом пространстве можно ввести поверхность текучести, обладающую тем свойством, что при выходе точки, изображающей напряженное состояние данной частицы, на эту поверхность материал переходит в пластическое состояние. Таким образом, условие перехода от упругого состояния к упругопластическому, или, как говорят, условие текучести, может быть записано в виде

$$f(\sigma_{ij}) = 0. \quad (5.205)$$

Поскольку вид поверхности текучести неизменен при изменении системы координат, то, выбрав подходящим образом систему координат, условие текучести можно записать в форме

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (5.206)$$

Уравнение (5.206) предстасвляет собой уравнение поверхности в трехмерном пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Для изотропных в отношении пластических свойств материалов условие текучести, очевидно, может быть представлено следующим уравнением:

$$g(J_1, J_2, J_3) = 0, \quad (5.207)$$

где J_1, J_2, J_3 — инварианты тензора напряжений;

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{ii}; \\ J_2 &= 1/2 (\sigma_{ij}\sigma_{ji} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1); \\ J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1/6 (2\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - 3\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{kk} + \sigma_{ii}\sigma_{jj}\sigma_{kk}). \end{aligned} \right\} \quad (5.208)$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что для металлов гидростатическое давление до 1000 МПа оказывает пренебрежимо малое влияние на условие текучести, поэтому в большинство условий текучести J_1 не входит. Кроме того, в экспериментах выяснено, что можно пренебречь влиянием третьего инварианта J_3 .

Наиболее широко используемыми условиями текучести являются следующие.

1. Условие Треска — Сен-Венана:

$$1/2 |\sigma_1 - \sigma_2| = \tau_s, \quad 1/2 |\sigma_2 - \sigma_3| = \tau_s, \quad 1/2 |\sigma_1 - \sigma_3| = \tau_s, \quad (5.209)$$

где τ_s — постоянная величина — характеристика материала; в трехмерном пространстве главных напряжений уравнения (5.209) определяют шестигранную призму с ребрами, параллельными прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; в сечении этой призмы плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ получается правильный шестиугольник со стороной

$2\sqrt{2/3}\tau_s$. В соответствии с условиями (5.209) τ_s представляет собой предел текучести материала на сдвиг и определяется из эксперимента на чистое кручение тонкостенного цилиндра. Предел текучести на растяжение σ_s связан с τ_s соотношением.

$$\sigma_s = 2\tau_s. \quad (5.210)$$

2. Условие текучести Губера — Мизеса:

$$\sqrt{1/2\sigma_{ii}^D\sigma_{ii}^D} = \sqrt{J_2^D} = \tau_s, \quad (5.211)$$

где J_2^D — второй инвариант девиатора напряжений σ_{ij}^D , который пропорционален октаэдрическому касательному напряжению; τ_s — та же константа, что и в условии Треска — Сен-Венана.

В развернутом виде условие Губера — Мизеса имеет форму

$$\tau_s = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}, \quad (5.212)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \tau_s. \quad (5.213)$$

Из (5.213) видно, что условие Губера — Мизеса в пространстве главных напряжений определяет цилиндрическую поверхность, описанную около призмы Треска — Сен-Венана. В девятимерном пространстве девиатора σ_{ij}^D уравнение (5.211) описывает сферическую поверхность, радиус которой определяется из тех соображений, что при выходе на предел текучести в эксперименте на чистый сдвиг $\sigma_{ij}^D\sigma_{ij}^D = 2\sigma_{12}^2 = 2\tau_s^2$.

Из (5.212) — (5.213) следует, что предел текучести на растяжение σ_s связан с пределом текучести на сдвиг соотношением

$$\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s; \quad \tau_s \approx 0,577\sigma_s. \quad (5.214)$$

Это соотношение лучше согласуется с экспериментальными данными, нежели (5.210).

Если материал не является идеально пластическим, то, как видно из рис. 5.14 и 5.15, предел текучести при повторных нагрузлениях выше исходного предела текучести. Это означает, что поверхность текучести в процессе пластического деформирования претерпевает изменения; она, как установлено в экспериментах, смещается и вытягивается в направлении нагрузления, в точке нагружения образуется зона весьма большой кривизны. Для описания поверхности текучести в процессе деформирования используются всевозможные приближенные модели, как, например, модель изотропного расширения, модель Прагера — Ишлинского кинематического упрочнения (поверхность текучести предполагается смещающейся как жесткое целое в направлении на-

гружения), комбинация моделей изотропного расширения и кинематического упрочнения и ряд других.

Если поверхность текучести и закон ее поведения в зависимости от процесса нагружения известен, то связь характеристик напряженного и деформированного состояния (с учетом введенных выше гипотез) может быть полностью определена.

Эти соображения разыграются здесь дальше не будут, а будет рассмотрен другой подход к построению теории, основанной на геометрической интерпретации процесса нагружения в точке.

Предположим дополнительно, что гидростатическое давление (первый инвариант тензора напряжений) не влияет на зависимость между девиаторами напряжений и деформаций. Строго говоря, эта гипотеза неверна, но для многих металлов и сплавов она выполняется с достаточно большой точностью, введение же этой гипотезы позволяет намного упростить построение теории. Пусть, для простоты, отличны от нуля два компонента девиаторов. Тогда процесс нагружения в фиксированной точке тела будет изображаться кривой на плоскости $\sigma_{11}^D, \sigma_{12}^D$, процесс деформирования — кривой на плоскости $\varepsilon_{11}^D, \varepsilon_{12}^D$. Упомянутая выше зависимость связи напряжений с деформациями от истории нагружения означает, что деформированное состояние в данной точке тела зависит от всей кривой на плоскости $\sigma_{11}^D, \sigma_{12}^D$. Математически этот факт эквивалентен тому, что соотношения между напряжениями и деформациями в пластической области, вообще говоря, будут либо дифференциальными неинтегрируемыми, либо операторными зависимостями. Теории, использующие дифференциальные неинтегрируемые соотношения, известны как теории течения; они, как правило, строятся с использованием введенного выше понятия поверхности текучести. Рассмотрим простейший класс операторных теорий, которые применяются только для специального вида процессов нагружения.

Определение. Нагружение в данной точке тела называется простым, если компоненты девиатора напряжений изменяются пропорционально одному общему параметру, т. е. если кривая нагрузки в пространстве девиатора σ_{ij}^D вырождается в прямую.

Нагружение данного тела в данный момент времени называется активным, если величина J_2^D имеет значение, превышающее все предшествующие значения, и пассивным (или разгрузкой) в противоположном случае. Как видно из анализа диаграмм на рис. 5.14 и 5.15, связь напряжений с деформациями различна при активном нагружении и при разгрузке.

Примем теперь следующую гипотезу, которую называют *частной формой постулата изотропии*: связь σ_{ij}^D и ε_{ij}^D на всех прямых, проходящих через начало координат (в пространстве девиатора σ_{ij}^D), не зависит от ориентации этих прямых. Из этой гипотезы вытекает, что при активном нагружении

$$\hat{\varepsilon}^D = \varphi(J_2^D) \dot{\sigma}^D \quad (5.215)$$

(производя преобразования поворота относительно прямой нагрузки, убеждаемся в том, что связь \hat{e}^D и $\hat{\sigma}^D$ — тензорно-линейная); произведя поворот данной прямой с помощью произвольной матрицы поворота, устанавливаем, что коэффициент пропорциональности в (5.215) может зависеть только от расстояния точки, изображающей напряженное состояние в рассматриваемой точке тела от начала координат; в пространстве девиатора это расстояние равно $(\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D)^{0.5} \equiv \sqrt{2 J_2^D}$.

Зависимость (5.215) впервые была предложена Генки А. А. Ильюшиным всесторонне исследована зависимость

$$\sigma_{ij}^D = \psi(\epsilon_{kl}^D \epsilon_{kl}^D) \epsilon_{ij}^D, \quad (5.216)$$

обратная (5.215).

Для того чтобы выяснить, из каких экспериментов следует определять функцию ψ (или φ), выполним следующие преобразования. Возведем левую и правую части соотношения (5.216) по компонентно в квадрат и сложим:

$$\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D = \psi^2 \epsilon_{ij}^D \epsilon_{ij}^D. \quad (5.217)$$

Выразим левую часть получившегося уравнения через компоненты тензора напряжений σ_{ij} :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D &= \sigma_{11}^{D2} + \sigma_{22}^{D2} + \sigma_{33}^{D2} + 2(\sigma_{12}^{D2} + \sigma_{23}^{D2} + \sigma_{31}^{D2}) = \\ &= 1/3 [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \\ &\quad + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)] \equiv 2/3 \sigma_{ii}^2; \end{aligned} \quad (5.218)$$

здесь введена величина

$$\sigma_{ii}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D, \quad (5.219)$$

называемая *интенсивностью напряжений*.

Аналогичным образом определяем интенсивность деформаций

$$\epsilon_{ij}^D \epsilon_{ij}^D = 3/2 e_{ii}^2, \quad (5.220)$$

где

$$e_{ii}^2 = 2/9 [(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})^2 + (\epsilon_{22} - \epsilon_{33})^2 + (\epsilon_{33} - \epsilon_{11})^2 + \\ + 6(\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2)]. \quad (5.221)$$

Учитывая определения (5.218) и (5.220), будем иметь

$$\psi^2(e_{ii}) = 4/9 \frac{\sigma_{ii}^2(e_{ii})}{e_{ii}^2},$$

или

$$\varphi(e_{ii}) = \frac{2\sigma_{ii}(e_{ii})}{3e_{ii}}. \quad (5.222)$$

Таким образом, зависимость $\sigma_{ij} \sim \epsilon_{ij}$ будет полностью определена [если учсть (5.204)], если будет известна функция

$$\sigma_{ii} = \sigma_{ii}(e_{ii}) = \Phi(e_{ii}). \quad (5.223)$$

Проще всего эта функция определяется в эксперименте на чистое кручение тонкостенного цилиндрического образца, когда $\sigma_{12} \neq 0$, $\varepsilon_{12} \neq 0$, а остальные компоненты тензора напряжений и деформаций равны нулю. Пусть экспериментально построена зависимость

$$\sigma_{12} = F(\varepsilon_{12}). \quad (5.224)$$

В рассматриваемом случае

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} e_u; \quad \sigma_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_u. \quad (5.225)$$

Подстановка (5.225) в зависимость (5.224) дает

$$\sigma_u = \sqrt{3} F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} e_u\right) = \Phi(e_u), \quad (5.226)$$

т. е. искомая зависимость получается изменением масштабов кривой (5.224).

Если функция $\Phi(e_u)$ определяется из опыта на одноосное растяжение, то наряду с ε_{11} необходимо измерить ε_{22} , ε_{33} , т. е. необходимо построить зависимость коэффициента Пуассона от интенсивности деформаций в пластической области. Если же сжимаемостью материала можно пренебречь и положить $\nu = 0,5$, то кривая одноосного растяжения совпадает с кривой $\sigma_u = \Phi(e_u)$, в самом деле, при $\nu = 0,5$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -0,5 \varepsilon_{11},$$

$$e_u = \varepsilon_{11}, \quad \sigma_u = \sigma_{11}.$$

Это обстоятельство объясняет способ выбора коэффициентов в выражениях для интенсивностей σ_u , e_u .

Соотношения (5.216) совместно с (5.222), (5.204), уравнениями движения и зависимостями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.227)$$

образуют замкнутую систему уравнений — модель упругопластической среды.

Сформулируем теперь связь напряжения σ_{ij} с деформациями ε_{ij} при активной деформации и при разгрузке.

Пусть деформация активная, тогда справедлив закон (5.216). Так как

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^D + \frac{1}{3} \sigma \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^D + e \delta_{ij},$$

то, учитывая (5.204), будем иметь

$$\sigma_{ij} = \frac{2\sigma_u}{3e_u} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right) + B \theta \delta_{ij} = \left(B - \frac{2\sigma_u}{9e_u} \right) \theta \delta_{ij} + \frac{2\sigma_u}{3e_u} \varepsilon_{ij}. \quad (5.228)$$

Если величина e_u не превышает предела текучести по деформациям e_s , то

$$\sigma_u = 3Ge_u = 3\mu e_u \quad (5.229)$$

и (5.228) в этом случае представляет собой закон Гука для изотропного тела. Из соотношений (5.228) легко получить зависимости, разрешенные относительно компонентов тензора деформаций ϵ_{ij} :

$$\epsilon_{ij} = \frac{3e_u(\sigma_u)}{2\sigma_u} \sigma_{ij} - \left(\frac{3e_u(\sigma_u)}{2\sigma_u} - \frac{1}{3B} \right) \sigma \delta_{ij}, \quad (5.230)$$

где

$$e_u = e_u(\sigma_u) = \Phi^{-1}(\sigma_u) -$$

зависимость, обратная (5.223).

Пусть в некоторый момент времени, когда деформации имеют значения $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0$, напряжения — $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0, \dots$, начинается разгрузка. В соответствии с принятым выше предположением связь напряжений с деформациями при разгрузке подчиняется закону Гука с той лишь особенностью, что напряжения и деформация отчитываются от момента начала разгрузки, и предел текучести является повышенным:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^0 - \sigma_{ij} &= \lambda(\theta^0 - \theta) \delta_{ij} + 2\mu(\epsilon_{ij}^0 - \epsilon_{ij}); \\ \sigma_u &\leqslant \sigma_u^0. \end{aligned} \right\} \quad (5.231)$$

Замкнутая система уравнений в частных производных относительно вектора перемещений u получается подстановкой зависимостей (5.228) — (5.231) в уравнения движения:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (5.232)$$

Выведем эту систему для случая активного нагружения. Для удобства предварительно введем функцию $\omega = \omega(e_u)$ формулой

$$\sigma_u = 3Ge_u[1 - \omega(e_u)]. \quad (5.233)$$

Очевидно,

$$\omega(e_u) = 1 - \frac{\Phi(e_u)}{3Ge_u}. \quad (5.234)$$

Для диаграмм $\sigma_u \sim e_u$ вида, представленного на рис. 5.15, имеют место неравенства

$$1 > e_u \frac{\partial \omega}{\partial e_u} > \omega \geqslant 0. \quad (5.235)$$

С использованием определения (5.233) формулы (5.228) записываются в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - 2G\omega(e_u) \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} \right]. \quad (5.236)$$

Подстановка закона (5.236) в уравнения (5.232) дает следующую замкнутую систему уравнений деформационной теории пластич-

ности в перемещениях:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \rho F_i - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \\ = 2G \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \omega(e_{ii}) \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} (\operatorname{div} u) \delta_{ij} \right. \right\}. \quad (5.237)$$

К этой системе необходимо присоединить соответствующие граничные и начальные условия.

Запись уравнений в форме (5.237) позволяет сформулировать метод последовательных приближений для их решения, известный под названием *метода упругих решений*. В нулевом приближении правую часть (5.237) полагают тождественно равной нулю, при этом получается краевая задача линейной теории упругости. В первом и последующих приближениях правая часть вычисляется по результатам предыдущего приближения; таким образом, на каждом шаге приходится решать одну и ту же систему уравнений с различными правыми частями. Условия (5.235) обеспечивают сходимость метода последовательных приближений к решению (вообще говоря, обобщенному) краевой задачи для уравнений (5.237).

Дополнение. Уравнения (5.237) были получены при ограничительном предположении о том, что процесс нагружения является простым (прямолинейным). Возникает вопрос, существует ли такой способ изменения внешних нагрузок, действующих на тело сложной конфигурации, при котором процессы нагружения во всех точках тела являются простыми. Ответ на этот вопрос является положительным только для специального вида зависимости $\sigma_{ii} \sim e_{ii}$:

$$\sigma_{ii} = \Phi(e_{ii}) = Ae_{ii}^\kappa; \quad A = \text{const}, \quad \kappa = \text{const} \quad (5.238)$$

и при замене условия $\sigma = B\theta$ условием несжимаемости:

$$\theta = 0. \quad (5.239)$$

Ограничения (5.238) — (5.239) обеспечивают прямолинейность процессов нагружения во всех точках произвольного тела в случае, когда внешние силы возрастают пропорционально одному общему параметру. Однако экспериментально установлено, что и для процессов нагружения, не слишком отличающихся от простых, деформационная теория дает очень хорошие результаты, расхождения с экспериментом имеют место только для резко непрямолинейных путей нагружения. Кроме того, установлено, что при нарушении условий (5.238) — (5.239) и пропорциональном возрастании внешних нагрузок процессы нагружения, хотя и не являются простыми, тем не менее отличаются от простых настолько незначительно, что этим отличием можно пренебречь.

Дополнение. Если окажется, что в некоторых подобластях тела возникает разгрузка, то это означает, что происходит переход от системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (5.237) к системе линейных уравнений:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}(u^0 - u) + \mu \Delta(u^0 - u) + \rho(F^0 - F) = \rho \frac{\partial^2(u^0 - u)}{\partial t^2}, \quad (5.240)$$

и это обстоятельство очень осложняет решение упругопластических задач. Отметим, что метод упругих решений позволяет произвести последовательное определение и уточнение зон разгрузки.

Существует класс задач, в которых процессами разгрузки можно пренебречь; существуют также материалы, в которых связь при активном нагружении и разгрузке имеет форму (5.228) или (5.230). В этих случаях всегда

получается система дифференциальных уравнений в частных производных (5.237), которая называется *системой уравнений физически нелинейной теории упругости*, вариационные методы решения краевых задач для этой системы будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 5.5. Вариационный метод решения краевых задач физически нелинейной теории упругости

Рассмотрим задачи статики, когда силами инерции можно пренебречь, и запишем систему уравнений (5.237) в векторном виде:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \mu \Delta \boldsymbol{u} - 2\mu \operatorname{div} [\omega(e_u) \hat{e}^D] + \rho \boldsymbol{F} = 0. \quad (5.241)$$

К этой системе присоединим краевые условия:

$$\hat{\sigma} \cdot \boldsymbol{v} |_{S_\sigma} = \boldsymbol{P}, \quad (5.242)$$

$$\boldsymbol{u} |_{S_u} = \boldsymbol{g}; \quad S_u \cup S_\sigma = S = \partial\Omega. \quad (5.243)$$

Ниже функцию \boldsymbol{g} будем полагать равной нулю.

Пусть \boldsymbol{u} решение задачи (5.241)–(5.243), отвечающее заданным внешним воздействиям, и пусть \boldsymbol{v} – кинематически допустимое поле перемещений [удовлетворяющее граничному условию (5.243) и условиям совместности]. Умножим уравнение (5.241) векторно на функцию \boldsymbol{v} и проинтегрируем получившееся выражение по области Ω , воспользовавшись при этом формулой Гаусса – Остроградского и учитывая граничное условие (5.242):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\lambda \theta(\boldsymbol{u}) \theta(\boldsymbol{v}) + 2\mu e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{ij}(\boldsymbol{v})] d\Omega - 2\mu \int_{\Omega} \omega(e_u(\boldsymbol{u})) e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{ij}(\boldsymbol{v}) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} d\Omega + \int_{S_\sigma} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} dS \equiv L(\boldsymbol{v}). \end{aligned} \quad (5.244)$$

Любое решение задачи (5.241)–(5.243) удовлетворяет, таким образом, интегральному тождеству (5.244); обратно, любой элемент \boldsymbol{u} , удовлетворяющий интегральному тождеству (5.244) (которое называется также вариационным уравнением) и обладающий вторыми производными, представляет собой решение задачи (5.241)–(5.243). Таким образом, не всякое решение вариационного уравнения (5.244) – решение исходной задачи (5.241)–(5.243), поэтому решение уравнения (5.244) называют *обобщенным решением задачи* (5.241)–(5.243).

Введем пространство

$$V = \{\boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \Omega; \boldsymbol{v} \in [H^1(\Omega))^3, \|\boldsymbol{v}\|_V = \|\boldsymbol{v}\|_{(H^1(\Omega))^3}, \boldsymbol{v}|_{S_u} = 0\} \quad (5.245)$$

и определим оператор $A(\boldsymbol{u})$ по формуле

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\lambda \theta(\boldsymbol{u}) \theta(\boldsymbol{v}) + 2\mu e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{ij}(\boldsymbol{v}) - 2\mu \omega(e_u(\boldsymbol{u})) e_{ij}(\boldsymbol{u}) e_{ij}(\boldsymbol{v})] d\Omega \equiv \\ & \equiv \langle A(\boldsymbol{u}), (\boldsymbol{v}) \rangle, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \end{aligned} \quad (5.246)$$

Докажем, что этот оператор потенциален и вычислим его потенциал (определения см. в § II.3). Для доказательства потенциальности воспользуемся теоремой — критерием потенциальности, приведенной в § II.3; таким образом, надо проверить, что

$$\langle A'(u, \varphi), \psi \rangle = \langle A'(u, \psi), \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in V. \quad (5.247)$$

Нетрудно получить выражение

$$\begin{aligned} & \langle A'(u, \varphi), \psi \rangle = \\ & = \int_{\Omega} \left\{ \lambda \theta(\varphi) \theta(\psi) + 2\mu e_{ij}(\varphi) e_{ij}(\psi) - 2\mu \left[\omega(e_u(u)) e_u(\varphi) e_u(\psi) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{2}{3} \omega'(e_u(u)) \frac{e_{pg}(u) e_{pg}(\varphi)}{e_u(u)} e_{ij}(u) e_{ij}(\psi) \right] \right\} d\Omega, \end{aligned} \quad (5.248)$$

из которого вытекает, что выполнено условие (5.247), следовательно, оператор A , определяемый по формуле (5.248), потенциален; потенциал A находится по формуле (II.98) приложения II:

$$\begin{aligned} J(v) &= \int_0^A \langle A(tv), v \rangle dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\lambda \theta^2(v) + \mu e_{ij}(v) e_{ij}(v) - 3\mu \int_{\Omega} \left(\int_0^{e_u(v)} \omega(s) s ds \right) d\Omega \right] = \\ &\equiv J_0(v) - j(v). \end{aligned} \quad (5.249)$$

Докажем, что функционал (5.249) обладает свойствами строгой выпуклости и коэрцитивности; отсюда будет вытекать [3], что:

1) решение уравнения (5.244) эквивалентно задаче минимизации функционала (5.249);

2) решение задачи минимизации функционала (5.249) существует и единственno (если только наложить надлежащие ограничения непрерывности на внешние воздействия и границу области, которые здесь анализировать не будем).

Предварительно докажем следующую лемму: если функция $\Phi(e_u)$, определяемая по формуле (5.223), — строго вогнутая и монотонно растущая, причем $\Phi(e_u) \leq 3\mu e_u$, то имеет место оценка:

$$\int_{\Omega} \left[\int_0^{e_u(v)} \omega(s) s ds \right] d\Omega \leq c \|v\|^{2-\epsilon}, \quad (5.250)$$

$$c = \text{const} > 0, \quad \epsilon \leq \text{const}, \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Доказательство. Методом от противного устанавливаем, что существует $0 < \epsilon < 1$, при котором

$$\begin{aligned} \omega(s)s &\leq s^{1-\epsilon} \quad \forall s \in [a, b], \quad \forall a, b, \\ a &= \text{const} \geq 0, \quad b = \text{const} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.251)$$

Из неравенства (5.251) следует

$$\int_0^{e_u(v)} \omega(s) s ds \leq c_1 [e_u(v)]^{2-\epsilon}, \quad c_1 = 1/(1-\epsilon). \quad (5.252)$$

Используя определение нормы в V , имеем

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}\|_V &= \int_{\Omega} [v_i v_i + v_{i,j} v_{i,j}] d\Omega \geq \int_{\Omega} [v_i v_i + e_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v})] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left[v_i v_i + e_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v}) + \frac{1}{3} \theta^2(\boldsymbol{v}) \right] d\Omega \geq \frac{3}{2} \int_{\Omega} e_n^2(\boldsymbol{u}) d\Omega. \end{aligned} \quad (5.253)$$

По неравенству Коши — Буняковского получаем неравенство

$$\int_{\Omega} e_n(\boldsymbol{v}) d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} e_n^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} d\Omega \right)^{1/2} = \text{mes } \Omega^{1/2} \left(\int_{\Omega} e_n^2 d\Omega \right)^{1/2}, \quad (5.254)$$

из которого в совокупности с оценкой (5.253) следует, что

$$\int_{\Omega} e_n^2 d\Omega \leq c_1 \|\boldsymbol{v}\|_V^2, \quad c_1 = \text{const} > 0. \quad (5.255)$$

Для завершения доказательства леммы используем неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 d\Omega &\leq \left(\int_{\Omega} \varphi_1^p d\Omega \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} \varphi_2^q d\Omega \right)^{1/q}, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} &= 1, \quad p > 0, \quad q > 0. \end{aligned} \quad (5.256)$$

Положив в нем $p = 2/(2 - \varepsilon)$, $q = 2/\varepsilon$, $\varphi_1 = e_n^{2-\varepsilon}$, $\varphi_2 = 1$, найдем

$$\int_{\Omega} e_n^{2-\varepsilon} d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} e_n^2 d\Omega \right)^{(2-\varepsilon)/2} (\text{mes } \Omega)^{\varepsilon/2}, \quad (5.257)$$

откуда, а также из неравенств (5.252), (5.255) и вытекает утверждение леммы.

Докажем теперь коэрцитивность $J(\boldsymbol{v})$. Предварительно заметим, что из неравенства положительной определенности тензора модулей упругости

$$\frac{1}{2} \lambda \theta^2(\boldsymbol{v}) + \mu e_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v}) \geq \beta e_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v}), \quad (5.258)$$

$$\forall e_{ij} = e_{ji}, \quad \beta = \text{const} > 0$$

и из неравенства Корна (см. § 2.14) следует оценка:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \lambda \theta^2(\boldsymbol{v}) + \mu e_{ij}(\boldsymbol{v}) e_{ij}(\boldsymbol{v}) \right] d\Omega \geq \alpha^2 \|\boldsymbol{v}\|_V^2, \quad (5.259)$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in V, \quad \alpha \neq 0.$$

Введенная в уравнении (5.244) форма $L(\boldsymbol{v})$ непрерывна на V , следовательно,

$$|L(\boldsymbol{v})| \leq \|L\|_V \|\boldsymbol{v}\|_V. \quad (5.260)$$

Таким образом,

$$J(\boldsymbol{v}) \geq \frac{1}{2} \alpha^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - \|L\| \|\boldsymbol{v}\| - c \|\boldsymbol{v}\|^{2-\varepsilon} \rightarrow +\infty \quad (5.261)$$

при $\|\boldsymbol{v}\| \rightarrow +\infty$,

и тем самым коэрцитивность $J(\boldsymbol{v})$ установлена.

Заметим, что проведенные рассуждения не проходят, если множество S_u пусто; распространение доказательства коэрцитивности $J(\boldsymbol{v})$ на этот случай производится без труда с использованием приемов, указанных в § 2.14.

Для доказательства строгой выпуклости $J(\boldsymbol{v})$ используем критерий (II.90) приложения II. Имеем

$$J''(u, \varphi, \varphi) = \int_{\Omega} \left[\lambda \theta^2(\varphi) + 2\mu e_{ij}(\varphi) e_{ij}(\varphi) - 2\mu \omega(e_u(u)) \frac{3}{2} e_u^3(\varphi) + \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} \omega'(e_u(u))/e_u(u) \right) (e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi))^2 \right] d\Omega. \quad (5.262)$$

По неравенству Коши — Буняковского для сумм

$$(e_{ij}(u) e_{ij}(\varphi))^2 \leq \frac{9}{4} e_u^2(u) e_u^2(\varphi). \quad (5.263)$$

Используя это неравенство, из (5.262) получаем оценку:

$$J''(u, \varphi, \varphi) > 0, \quad \forall u, \varphi, \varphi \neq 0, \quad (5.264)$$

из которой следует строгая выпуклость функционала (5.249).

Для решения задачи минимизации функционала (5.249) могут быть использованы хорошо разработанные методы математического (нелинейного) программирования. Естественно, что для реализации этих методов на ЭВМ задачу необходимо дискретизировать — привести ее к конечно-мерной; эту процедуру можно производить с помощью метода конечных элементов. Приведем для справки результат дискретизации функционала (5.249) и уравнения (5.244) по методу конечных элементов в варианте, описанном в главе 3. Итак, пусть \mathbf{a}_i — узлы сетки метода конечных элементов, $\boldsymbol{w}_{\alpha i}(\mathbf{x})$ — соответствующие векторные базисные функции. Тогда приближенное решение по методу конечных элементов отыскивается в виде

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i) \boldsymbol{w}_{\alpha i}(\mathbf{x}). \quad (5.265)$$

Подставляя эту формулу в функционал (5.249), получим функцию конечного числа переменных $u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i)$:

$$J(u_h) = \frac{1}{2} \sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j \in M_h} \sum_{\beta=1}^n u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i) a(\boldsymbol{w}_{\alpha i}, \boldsymbol{w}_{\beta j}) - \\ - \sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i) \int_{\Omega} \rho \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{w}_{\alpha i} d\Omega - \sum_{\mathbf{a}_i \in S_\sigma} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i) \int_{S_\sigma} \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{w}_{\alpha i} dS - \\ - 3\mu \int_{\Omega} \left[\int_0^{e_u(u_h)} \omega(s) s ds \right] d\Omega, \quad (5.266)$$

где

$$a(\boldsymbol{w}_{\alpha i}, \boldsymbol{w}_{\beta j}) = \int_{\Omega} [\lambda \theta(\boldsymbol{w}_{\alpha i}) \theta(\boldsymbol{w}_{\beta j}) + 2\mu e_{pq}(\boldsymbol{w}_{\alpha i}) e_{pq}(\boldsymbol{w}_{\beta j})] d\Omega. \quad (5.267)$$

Подставляя (5.265) в уравнение (5.244) и полагая поочередно $v = \mathbf{w}_{\beta j}(\mathbf{x})$, придем к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $u_{h\alpha}(\mathbf{a})$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i) a(\mathbf{w}_{\alpha i}, \mathbf{w}_{\beta j}) - 2\mu \int_{\Omega} \omega \left(e_n \left(\sum_{k \in M_h} \sum_{j=1}^n u_{kj}(\mathbf{a}_k) \mathbf{w}_{jk} \right) \right) \times \\ & \times e_{pq} \left(\sum_{i \in M} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(\mathbf{a}_i) \mathbf{w}_{\alpha i} \right) e_{pq}(\mathbf{w}_{\beta j}) d\Omega = \\ & = L(\mathbf{w}_{\beta j}), \quad \forall \beta, j, \beta = 1, \dots, n; j \in M, \end{aligned} \quad (5.268)$$

где $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ по-прежнему определяется равенством (5.267).

Сформулируем итерационный метод решения системы (5.268); для этого введем вектор неизвестных δ , линейную часть системы (5.268) запишем в виде $[\mathbf{A}]\delta$, где $[\mathbf{A}]$ — квадратная матрица, образуемая из чисел $a(\mathbf{w}_{\alpha i}, \mathbf{w}_{\beta j})$, нелинейную часть системы (5.268) представим в виде вектора $\varphi(\delta)$, правую часть вектора — в виде вектора \mathbf{B} . Тогда система (5.265) примет вид

$$[\mathbf{A}]\delta - \varphi(\delta) = \mathbf{B}. \quad (5.269)$$

Для решения эффективным оказывается следующий итерационный процесс:

$$\delta^{N+1} = (1 - \rho) \delta^N + \rho [\mathbf{A}]^{-1} (\mathbf{B} - \varphi(\delta^N)), \quad (5.270)$$

где ρ — итерационный параметр; если $\rho = 1$, то мы приходим к методу упругих решений в его первоначальной формулировке [13]. Численное значение параметра ρ подбирается путем экспериментов на ЭВМ из условия максимальной скорости сходимости процесса (5.270).

Сходимость процесса (5.270) доказывается с помощью известных теорем об итерационных методах решения нелинейных уравнений.

§ 5.6. О решении задач с учетом геометрической нелинейности

В этом параграфе будет приведена общая схема решения краевых задач механики деформируемого твердого тела; при этом не будем вдаваться в анализ возможных форм связи напряжений с деформациями, отметим только, что эта проблема получила удовлетворительное решение лишь для высокоэластичных материалов типа резины (примеры определяющих уравнений будут приведены ниже).

Будем использовать постановку задачи в переменных Лагранжа a^i (см. § 1.7); $a \in \Omega_0$, Ω_0 — область, занятая телом до деформации.

Имеем:

1) уравнения равновесия, которые будем использовать в форме (1.152), глава 1:

$$\rho_0 \ddot{u}_i - \frac{\partial}{\partial a_j} \left[t_0^{ip} \left(\frac{\partial u_j}{\partial a^p} + \delta_p^i \right) \right] = \rho_0 F_{0i}; \quad (5.271)$$

2) связь напряжений с деформациями:

$$t_0^{ij} = \Phi^{ij}(\dot{\epsilon}), \quad (5.272)$$

где $\dot{\epsilon}$ — тензор конечных деформаций Грина, связанный с компонентами u_i вектора перемещений u формулами (все время используется декартова система отсчета):

$$\epsilon_{ij} \equiv \epsilon_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j} + \frac{\partial u_j}{\partial a^i} + \frac{\partial u_k}{\partial a^i} \frac{\partial u_k}{\partial a^j} \right); \quad (5.273)$$

3) краевые условия в перемещениях:

$$u|_{S_{0u}} = 0, \quad S_{0u} \subset \partial \Omega_0; \quad (5.274)$$

4) краевые условия в напряжениях:

$$t|_{S_\sigma} = P(x), \quad x \in S_\sigma \subset \partial \Omega; \quad (5.275)$$

5) в задачах динамики, когда инерционным слагаемым $\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ пренебречь нельзя, нужно добавить начальные условия, которые имеют обычный вид.

Относительно задания внешних силовых воздействий отметим, что как объемные воздействия ρF , так и поверхностные усилия практически можно задать только в виде функций текущих координат x точек (частиц) деформируемого тела; следовательно, правая часть системы уравнений (5.271) представляет собой заданный оператор от искомой функции $x(a) = a + u(a)$. В силу уравнения неразрывности (1.151):

$$F_0 = F(x(a)) (\det \| \delta_j^i + u_{i,j} \|)^{-1}.$$

Перепишем граничное условие (5.275) через компоненты второго тензора напряжений Пиолы — Кирхгофа. В силу (1.79) и определения (1.81), имеем

$$t_0 = t_0^{ij} v_{0i} G_j = \frac{dS}{dS_0} t = kt, \quad (5.276)$$

где v_{0i} — компоненты вектора единичной нормали v_0 к той площадке в недеформированном состоянии, на которую после деформации действует вектор t .

Для того чтобы выразить отношение $k = dS/dS_0$ через компоненты вектора u , используем формулы, связывающие площади dS_{0i} и dS_i проекций ориентированных площадок dS_0 и dS_i на плоскости, перпендикулярные координатным волокнам $a^i = \text{const}$ (напомним, что переменные a^i рассматриваются как криволинейные координаты точки $x = x(a)$ после деформации):

$$dS_{0i} = v_{0i} dS_0, \quad dS_i = v_i dS \sqrt{G}. \quad (5.277)$$

Связь между dS_{0i} и dS_i без труда находится с использованием определений:

$$dS_i = |G_j \times G_k| da^j da^k, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad dS_{0i} = da^j da^k$$

и имеет вид

$$dS_i = \sqrt{GG^{ii}} dS_{0i}. \quad (5.278)$$

Из зависимостей (5.277), (5.278) следует, что

$$v_i dS = v_{0i} dS_0 \sqrt{G}, \quad (5.279)$$

причем здесь v_i — ковариантные компоненты вектора единичной нормали (в косоугольном базисе $\mathbf{G}_i = \partial \mathbf{x} / \partial a^i$) к рассматриваемой площадке.

Воспользовавшись тем, что вектор \mathbf{v} можно определить как векторное произведение двух непараллельных векторов, касательных к рассматриваемой площадке (с последующим делением на модуль получившегося векторного произведения), найдем, что

$$\mathbf{v} = \frac{v_{0r} \mathbf{G}^r}{\sqrt{G^{rs} v_{0r} v_{0s}}}. \quad (5.280)$$

Здесь \mathbf{G}^r — векторы базиса, взаимного к \mathbf{G}_r ,

$$G^{rs} = (\mathbf{G}^r, \mathbf{G}^s) = (G_{rs})^{-1}. \quad (5.281)$$

Подставляя зависимость (5.280) в (5.279), найдем, что

$$\frac{dS}{dS_0} = \sqrt{GG^{rs}v_{0r}v_{0s}}.$$

Для вычисления величины G^{rs} воспользуемся первым из определений (5.281) и тем, что

$$\mathbf{G}^r = \frac{1}{2\sqrt{G}} \mathbf{E}^{rij} \mathbf{G}_i \times \mathbf{G}_j, \quad (5.282)$$

где ϵ^{rij} — символы Леви — Чивита. Подставляя формулу (5.282) в определение (5.281), находим, что

$$G^{rs} = \frac{1}{4G} \mathbf{E}^{rij} \mathbf{E}^{spq} [G_{ip} G_{jq} - G_{jp} G_{iq}].$$

Эта формула позволяет выразить коэффициент k в формуле (5.276) через производные от вектора \mathbf{u} , так как:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{G} &= \det \|\delta_i^i + u_{,i}^i\|, \\ G_{ij} &= (\delta_i^p + u_{,i}^p)(\delta_j^p + u_{,j}^p). \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, учитывая определение (5.213), краевое условие (5.275) в напряжениях преобразуем к виду

$$t_0^{i,p} (\delta_p^i + u_{,p}^i) v_{0i}|_{S_{0\sigma}} = k(\mathbf{u}) P^i(\mathbf{x}(\mathbf{a})), \quad \mathbf{a} \in S_{0\sigma}. \quad (5.283)$$

Следовательно, правая часть краевого условия в напряжениях является оператором (известным) от искомой функции $\mathbf{u}(\mathbf{a})$.

Проведенные выше рассуждения пригодны для любого момента времени t , поэтому аргумент t опускаем.

Пусть теперь $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{a}, t)$ — решение краевой задачи (5.271), (5.272), (5.274), (5.283) (в предположении, что хотя бы одно такое решение существует) и пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{a})$ — кинематически возможное состояние. Умножим i -е уравнение системы (5.271) на v_i , сложим результаты и проинтегрируем по области Ω_0 . Воспользовавшись при этом формулой Гаусса — Остроградского, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} t_0^{ip} (\delta_p^i + u_{,p}^i) v_{,i} d\Omega_0 - \int_{\Omega} \rho_0 F_{0i} v_i d\Omega - \\ & - \int_{S_{00}} kP \cdot \mathbf{v} dS_0 \equiv \langle A(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = - \langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle, \end{aligned} \quad (5.284)$$

где

$$\langle \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} v_i d\Omega_0. \quad (5.284')$$

По аналогии с тем, что было сделано в задачах линейной теории упругости (см. § 1.4) и деформационной теории пластичности (см. § 5.5), решение интегрального тождества (вариационного уравнения) (5.284) называют обобщенным решением задачи (5.271), (5.272), (5.274), (5.283).

Вопрос о существовании решения уравнения (5.284) является намного более сложным, чем во всех рассмотренных ранее случаях, так как он теснейшим образом связан с выбором функционального пространства, в котором оператор $A(\mathbf{u})$, определяемый по формуле (5.284), обладает свойствами, обеспечивающими существование решения. Такое исследование выходит за рамки настоящего пособия; отметим здесь только, что одним из наиболее интересных вопросов в отношении уравнения (5.284) является вопрос о неединственности решения и о точках разветвления решений. Заметим также, что в статических задачах приведение уравнения (5.284) к задаче минимизации функционала даже в случае, когда связь напряжений с деформациями потенциальна (т. е. первый из объемных интегралов в левой части уравнения (5.284) удовлетворяет критерию потенциальности), не всегда возможна, так как для операторов F_0 и kP условия потенциальности, как правило, не выполняются.

Приведем теперь дискретизацию уравнения (5.284) по методу конечных элементов. Пусть \mathbf{a}_i — узлы сетки метода конечных элементов в области Ω_0 ; $\mathbf{w}_{\alpha i}(\mathbf{a})$ — соответствующие базисные функции. Приближенное решение задачи \mathbf{u}_h разыскиваем в виде

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{a}) = \sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(a_i, t) \mathbf{w}_{\alpha i}(\mathbf{a}). \quad (5.285)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.284') и полагая поочередно $\mathbf{v} = \mathbf{w}_{\beta j}(\mathbf{a})$, придем к следующей системе обыкновен-

ных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \left\langle A \left(\sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n u_{h\alpha}(a_i, t) w_{\alpha i}(a) \right), w_{\beta j}(a) \right\rangle = \\ & = \sum_{i \in M_h} \sum_{\alpha=1}^n \ddot{u}_{h\alpha}(a_i, t) \langle \rho_0 w_{\alpha i}(a), w_{\beta j}(a) \rangle \\ & \forall j, \beta; \quad j \in M_h; \quad \beta = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Решать эту систему можно с помощью известных методов и существующих программ решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим, что наибольшие хлопоты при построении системы (5.285) доставляет аппроксимация коэффициента k , однако при использовании конечных элементов с прямыми границами и линейными аппроксимациями перемещений внутри деформации будут постоянны внутри элемента, следовательно, постоянным будет и коэффициент k ; вспоминая, что $k = dS/dS_0$, без труда можем выразить k по простым формулам через координаты вершин элемента до и после деформации. Особенно просто это осуществляется в двухмерных задачах, когда, очевидно,

$$k \approx \frac{|a_2 + u_2(a_2) - a_1 - u_1(a_1)|}{|a_2 - a_1|},$$

где a_i ($i = 1, 2$) – координаты вершины рассматриваемого треугольника, принадлежащие границе.

Рассмотрим несколько подробнее задачи статики, когда можно пренебречь силами инерции. Имеем уравнение

$$\langle A(u(a)), v(a) \rangle = 0, \quad \forall v. \quad (5.286)$$

Заметим, что о существовании решения, как правило, можно говорить в том смысле, что заданному процессу изменения внешних воздействий отвечает некоторый процесс изменения деформаций во всех точках тела, при этом одним и тем же конечным значениям внешних воздействий могут соответствовать совершенно различные напряженно-деформированные состояния тела. Различие в решении может объясняться как различием в процессах нагружения, так и разветвлением процесса деформации начиная с некоторого момента нагружения. Следовательно, уравнение (5.286) может иметь единственное решение только в исключительных случаях.

Таким образом, уравнение (5.286) следует рассматривать как операторное по параметру (обозначим его t), определяющему изменение внешних воздействий от нуля до их конечных значений. Практически решение можно строить шаговым методом, разбивая интервал $[0, T]$ изменения параметра t точками $t_0 = 0, t_1, \dots, t_N = T$ на достаточно малые интервалы $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Обозначим решение $u(a)$, соответствующее значению t_i параметра t , через $u^i(a)$ и

введем разность

$$\delta u^{l+1}(a) = u^{l+1}(a) - u^l(a). \quad (5.287)$$

Простейший шаговый процесс состоит в линеаризации уравнения (5.286) по приращениям (5.287); в результате уравнение (5.286) заменяется приближенно такой последовательностью задач:

$$\langle A'(u^l, \delta u^{l+1}), v \rangle = 0, \quad \forall v, \quad (5.288)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

относительно приращений δu^l , каждая из которых может быть решена по методу конечных элементов.

Более сложные и более точные процедуры могут быть построены по аналогии с тем, как строятся методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка точности.

В заключение приведем несколько используемых на практике аппроксимаций определяющего уравнения (5.272). Для этого воспользуемся формулой (1.135), причем будем предполагать, что:

- 1) $\delta q^l = 0$ (приток теплоты отсутствует);
- 2) $\delta q^{**} = 0$ (приток энергии за счет механизмов, отличных от механического и теплового, отсутствует).

В этом случае из уравнения (1.135) вытекает

$$t_0^{rs} = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{rs}} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rs}}. \quad (5.289)$$

Предположим, что материал изотропен, тогда

$$W = W(J_1, J_2, J_3), \quad (5.290)$$

где J_k — инварианты тензора ε_{rs} ; в качестве J_k выберем [29]:

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 3 + 2\varepsilon_{ii}, \\ J_2 &= 3 + 4\varepsilon_{ii} + 2(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}), \\ J_3 &= 1 + 2\varepsilon_{ii} + 2(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) + \frac{4}{3}E^{ijk}E^{rst}\varepsilon_{ir}\varepsilon_{js}\varepsilon_{kl}, \end{aligned} \right\} \quad (5.291)$$

где E^{ijk} — символы Леви — Чивита. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{rs}} = \frac{\partial W}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{rs}} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{rs}} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{rs}}, \quad (5.292)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{rs}} &= 2\delta^{rs}; \\ \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{rs}} &= 4[\delta^{rs}(1 + \varepsilon_{ii}) - \delta^{rp}\delta^{sq}\varepsilon_{pq}]; \\ \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{rs}} &= 2\delta^{rs}(1 + 2\varepsilon_{ii}) - 4\delta^{rp}\delta^{sq}\varepsilon_{pq} + 4E^{ijk}\varepsilon^{rspq}\varepsilon_{jp}\varepsilon_{kq}. \end{aligned} \right\} \quad (5.293)$$

Если функция W аналитична, по своим аргументам, то ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом

от J_k вида

$$W \approx \sum_{r, s, t} c_{rst} (J_1 - 1)^r (J_2 - 3)^s (J_3 - 1)^t, \quad c_{rst} = \text{const.} \quad (5.294)$$

Предположим, что материал несжимаем, тогда $\rho_0 = \rho$ и, следовательно,

$$J_3 = 1. \quad (5.295)$$

Очевидно, что в этом случае напряжения в материале не полностью определяются деформациями, ибо приложение гидростатического давления не влияет на деформации, но меняет напряжения.

С помощью метода множителей Лагранжа можно показать, что ограничение (5.295) приводит с следующему видоизменению формулы (5.289):

$$t^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} + h G^{ij}, \quad G^{ij} = (G^i, G^j), \quad (5.296)$$

где h — новая неизвестная функция, через которую определяется гидростатическое давление.

Для потенциала W в случае несжимаемости в качестве аппроксимаций также используются полиномы:

$$W \simeq \sum_{rs} c_{rs} (J_1 - 3)^r (J_2 - 3)^s, \quad c_{rs} = \text{const.} \quad (5.297)$$

простейшие из которых имеют вид

$$W \simeq c (J_1 - 3) \quad (5.298)$$

(потенциал Трилоара);

$$W \simeq c_1 (J_1 - 3) + c_2 (J_2 - 3) \quad (5.299)$$

(потенциал Муни);

$$W \simeq c_1 (J_1 - 3) + c_2 (J_2 - 3) + c_3 (J_2 - 3)^2 + c_4 (J_2 - 3)^3 \quad (5.300)$$

(потенциал Клоснера — Сегала);

$$W \simeq c_1 (J_1 - 3) + B_1 (J_1 - 3)^2 + c_2 (J_2 - 3)$$

(потенциал Исихары, Хацисумэ и Татибаны).

Другие аппроксимации для изотропных материалов можно найти в книге [29], для случая анизотропии — в книге [7]. (Отметим также, что в книге [7] имеется ряд аналитических решений конкретных задач, которые могут быть использованы в качестве тестов при отладке программы для ЭВМ.)

§ 5.7 Вариационный метод решения некоторых задач теории идеальной пластичности

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены краевые задачи механики деформируемого твердого тела, приводимые к минимизации функционалов с ограничениями в виде неравенств.

Рассмотрим материал, поведение которого в эксперименте на чистое растяжение описывается идеализированной диаграммой, показанной на рис. 5.16.

Участок OA соответствует линейно-упругому поведению, когда связь растягивающего напряжения σ с продольной деформацией ε дается уравнением:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad E = \text{const.} \quad (5.301)$$

При достижении напряжением σ значения σ_s напряжение остается постоянным, а деформации могут неограниченно расти; фактическое их изменение определяется кинематикой испытательного устройства. Если в некоторой точке B напряжение начнет убывать, то происходит упругая разгрузка вдоль прямой BC , параллельной исходному участку OA ; величина $OC = \varepsilon^p$ называется (как и раньше) *пластической деформацией*.

Связь между напряжениями и деформациями, очевидно, не однозначна; для математического описания этой связи можно применить соотношения в приращениях:

$$d\varepsilon = \frac{1}{E} d\sigma + d\varepsilon^p, \quad (5.302)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} d\varepsilon^p = 0, \text{ если } \sigma < \sigma_s, \text{ или } \sigma = \sigma_s, \quad d\sigma < 0; \\ d\varepsilon^p \geq 0, \text{ если } \sigma = \sigma_s \text{ и одновременно } d\sigma = 0. \end{array} \right\} \quad (5.303)$$

Полезно заметить, что совокупность условий (5.303) может быть переписана в следующей форме:

$$\left. \begin{array}{l} d\varepsilon^p(\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \leq \sigma_s; \\ d\varepsilon^p d\sigma = 0. \end{array} \right\} \quad (5.304)$$

В самом деле, если $\sigma < \sigma_s$, то единственная возможность удовлетворить первому из соотношений (5.304) состоит в том, чтобы положить $d\varepsilon^p = 0$. Если же $\sigma = \sigma_s$ и $d\sigma < 0$, то из второго из соотношений (5.304) следует, что $d\varepsilon^p = 0$; наконец, в случае когда $\sigma = \sigma_s$ и $d\sigma = 0$, из условий (5.304) следует, что $d\varepsilon^p \geq 0$.

Ниже ограничимся рассмотрением процессов, в которых разгрузка заведомо не возникает, или же влияние разгрузки преубеждено мало. В такого рода задачах соотношение (5.302) можно проинтегрировать и записать в конечном виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma + \varepsilon^p, \quad (5.305)$$

при этом пластическая деформация ε^p будет определена одним неравенством:

$$\varepsilon^p(\tau - \sigma) \leq 0, \quad \forall \tau \leq \sigma_s, \quad (5.306)$$

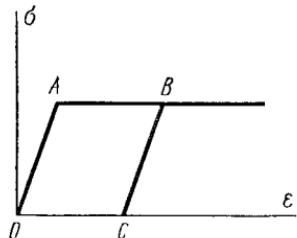


Рис. 5.16

так как второе из соотношений (5.304) нужно было только для того, чтобы учесть возможность появления разгрузки.

Рассмотрим теперь сложное напряженное состояние, когда отличны от нуля все компоненты тензора напряжений σ_{ij} , и предположим, что поверхность текучести (см. § 5.4) описывается уравнением

$$F(\hat{\sigma}) = 0, \quad (5.307)$$

причем функция F выбрана таким образом, что для всех допустимых напряженных состояний $\hat{\tau}$, в пространстве напряжений изображаемых точкой внутри поверхности (5.307) [предполагается, конечно, что поверхность (5.307) замкнута и односвязна; будем также предполагать, что она выпуклая], имеет место неравенство:

$$F(\hat{\tau}) \leq 0. \quad (5.308)$$

Соотношения (5.305) и (5.306) на случай сложного напряженного состояния обобщаются следующим образом:

$$\hat{\varepsilon} = {}^4\hat{A} \cdot \hat{\sigma} + \hat{\varepsilon}^p, \quad (5.309)$$

$$\hat{\varepsilon}^p \cdot (\hat{\tau} - \hat{\sigma}) \leq 0, \quad \forall \hat{\tau}, F(\hat{\tau}) \leq 0, \quad (5.310)$$

или в декартовой системе:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^p, \quad (5.310')$$

$$\varepsilon_{ij}^p (\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leq 0, \quad \forall \tau_{ij}, F(\tau_{ij}) \leq 0. \quad (5.311)$$

Здесь A_{ijkl} — тензор модулей податливости; ε_{ij}^p — тензор пластических деформаций, определяемый как разность между тензором полных и тензором упругих деформаций.

Соотношения (5.309) и (5.310) определяют теорию, которая называется *теорией идеальной пластичности Генки*. Отметим, что условия (5.310) и (5.311) допускают геометрическую и энергетическую интерпретацию, на которой останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь краевую задачу для тела, подчиняющегося зависимостям Генки; будем рассматривать только задачи статики.

Имеем:

1) уравнение равновесия

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} + \rho F = 0 \quad \text{в } \Omega \subset R^n; \quad (5.312)$$

2) краевые условия

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{v}|_{S_\sigma} = P, \quad (5.313)$$

$$\mathbf{u}|_{S_u} = \mathbf{g}, \quad S_u \cup S_\sigma = \partial\Omega; \quad (5.314)$$

3) связь напряжений с деформациями

$$\hat{\varepsilon} = {}^4\hat{A} \cdot \hat{\sigma} + \hat{\varepsilon}^p, \quad (5.315)$$

$$\hat{\varepsilon}^p \cdot (\hat{\tau} - \hat{\sigma}) \leq 0, \quad \forall \hat{\tau}, F(\hat{\tau}) \leq 0; \quad (5.316)$$

4) соотношения Коши

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]. \quad (5.317)$$

Теорема. Пусть \mathbf{u} , $\hat{\mathbf{t}}$ – решение задачи (5.312) – (5.317), тогда поле напряжений $\hat{\mathbf{t}}$ минимизирует функционал

$$J(\hat{\mathbf{t}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^4\hat{A} \cdot \cdot \hat{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{t}} d\Omega - \int_{S_u} \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} dS \quad (5.318)$$

на множестве M , где

$$M = \{ \hat{\mathbf{t}} \mid \hat{\mathbf{t}} \in \hat{L}_2(\Omega); \operatorname{div} \hat{\mathbf{t}} + \rho F = 0; \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} |_{S_u} = \mathbf{P}; F(\hat{\mathbf{t}}) \leqslant 0 \}. \quad (5.319)$$

Доказательство. Проинтегрируем неравенство (5.316) по области Ω :

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}^p \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) d\Omega \leqslant 0, \quad \forall \hat{\mathbf{t}} \in M. \quad (5.320)$$

Подставим сюда вместо $\hat{\varepsilon}^p$ величину $\hat{\varepsilon} - {}^4\hat{A} \cdot \hat{\sigma}$:

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}^p \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) d\Omega \leqslant \int_{\Omega} {}^4\hat{A} \cdot \cdot \hat{\sigma} (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) d\Omega. \quad (5.321)$$

Левую часть неравенства (5.321) преобразуем с помощью теоремы Гаусса – Остроградского, воспользовавшись при этом определением множества M , соотношениями Коши (5.317) и краевым условием (5.314):

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}^p (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) d\Omega = \int_{S_u} \mathbf{g} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dS. \quad (5.322)$$

Подставляя выражение (5.322) в неравенство (5.321), найдем:

$$\int_{\Omega} {}^4\hat{A} \cdot \cdot \hat{\sigma} (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) d\Omega - \int_{S_u} \mathbf{g} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \hat{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dS \geqslant 0, \quad (5.323)$$

$$\forall \hat{\mathbf{t}} \in M.$$

Сославшись теперь на теорему II.3 приложения II, заключаем, что поле напряжений $\hat{\sigma}$ минимизирует функционал (5.318), что и требовалось доказать.

Используя положительную определенность тензора модулей податливости ${}^4\hat{A}$, без труда доказываем, что функционал (5.318) строго выпуклый и коэрцитивный на $L_2(\Omega)$, следовательно, решение задачи минимизации функционала $J(\hat{\mathbf{t}})$ на M существует и единственno.

Таким образом, для отыскания истинного поля напряжений $\hat{\sigma}$ необходимо решить задачу минимизации функционала (5.318) на множестве M . Построение поля перемещений \mathbf{u} , отвечающего полю напряжений $\hat{\sigma}$, представляет собой самостоятельную задачу, на которой останавливаться не будем.

Задача минимизации функционала (5.318) на множестве M является задачей нелинейного программирования, которую можно решить известными методами, используя при этом дискретизацию с помощью равновесных конечных элементов (см. § 4.7).

Рассмотрим задачу о кручении цилиндрического стержня, рассмотренную в § 2.6. Поскольку напряжения в теории Генки ограничены, то, очевидно, задавать произвольный крутящий момент

нельзя, поэтому будем задавать угол закручивания αL (L — длина стержня) верхнего сечения S_1 относительно нижнего сечения S_0 , которое будем считать неподвижным. Итак, имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{на } S_0: \quad u_1 = u_2 = 0; \quad \sigma_{33} = 0; \\ \text{на } S_1: \quad u_1 = -\alpha L x_2; \quad u_2 = \alpha L x_1; \quad \sigma_{33} = 0; \\ \text{на } S_2: \quad \sigma_{ij} v_j = 0 \end{aligned} \quad (5.324)$$

(напомним, что S_2 — боковая поверхность стержня).

В качестве условия перехода в пластическую область выберем условие Мизеса:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D \leq \sigma_s^2. \quad (5.325)$$

Как и в § 2.6, устанавливаем, что $\sigma_{ij} = 0$, за исключением компонентов σ_{13} и σ_{23} ; предполагая материал в упругой зоне изотропным и вводя функцию напряжений θ по формулам

$$\sigma_{13} = \mu \theta_{,2}, \quad \sigma_{23} = \mu \theta_{,1}, \quad (5.326)$$

функционал $J(\hat{\tau})$ приведем к виду

$$J(\hat{\tau}) = J(\theta) = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{grad} \theta|^2 d\Omega - 2\mu \alpha L \int_{\Omega} \theta d\Omega, \quad (5.327)$$

где Ω — область — сечение стержня плоскостью, перпендикулярной образующей;

условие (5.325) — к виду

$$|\operatorname{grad} \theta| \leq \sigma_s / \mu; \quad (5.328)$$

третье из условий (5.324) — к виду

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.329)$$

Таким образом, задача свелась к отысканию одной скалярной функции $\theta = \theta(x_1 x_2)$ из условия минимума функционала (5.327) на множестве функций, удовлетворяющих в области Ω ограничению в виде неравенства (5.328) и граничному условию (5.329).

Преобразование функционала (5.318) к форме (5.327) представляется в качестве упражнения.

§ 5.8. Методы решения задач о соприкосновении твердых деформируемых тел

Начнем с изложения более универсальных вариационных методов и рассмотрим сначала задачу о соприкосновении деформируемого тела с абсолютно жестким гладким неподвижным штампом [15]. Будем предполагать, что граница S тела Ω состоит из трех частей $S = S_a \cup S_b \cup S_c$. На части S_a будем считать известными перемещения (для простоты будем полагать их нулевыми), на части S_b — напряжения:

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{v}|_{S_b} = P. \quad (5.330)$$

Для описания условий на S_c предположим, что граница абсолютно жесткого штампа, который может соприкасаться с телом Ω по части поверхности S_c , задается уравнением

$$\Psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.331)$$

причем внутри штампа $\Psi(\mathbf{x}) < 0$, вне его — $\Psi(\mathbf{x}) > 0$.

Пусть σ — вектор напряжений на поверхности тела; используем представление:

$$\sigma = \sigma_T + \sigma_N \mathbf{v}, \quad (5.332)$$

где σ_T — касательная составляющая вектора σ ; $\sigma_N \mathbf{v}$ — нормальная.

Условие отсутствия трения в зоне соприкосновения означает, что вектор $\sigma_T = 0$; кроме того, в этой зоне должно быть выполнено условие непроникания материала тела внутрь штампа, которое с учетом выбора знака функции Ψ может быть записано следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S_c \quad (5.333)$$

и условие неположительности контактного давления

$$\sigma_N \leq 0. \quad (5.334)$$

В дальнейшем будем предполагать, что величина $|\mathbf{u}(\mathbf{x})|$ достаточно мала, $|\nabla \Psi(\mathbf{x})| > 0$, $\forall \mathbf{x} \in S_c$ и что вторые производные от $\Psi(\mathbf{x})$ ограничены, так что можно произвести линеаризацию по \mathbf{u} условия непроникания (5.333). Таким образом, полная совокупность условий на части S_c поверхности тела такова:

$$\left. \begin{array}{l} \Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow \sigma \equiv \sigma \cdot \mathbf{v} = 0, \\ \Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \sigma_T = 0, \quad \sigma_N \leq 0. \end{array} \right\} \quad (5.335)$$

Подчеркнем, что заранее неизвестно, на каком подмножестве точек S_c имеет место второе из условий (5.335), и в этом основная трудность задачи.

Для решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния тела Ω , зоны соприкосновения (контакта) и контактного давления применим принцип возможных перемещений, в соответствии с которым

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \rho F \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{S_{\sigma}} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dS + \int_{S_{\sigma}} \sigma_{ij} \delta u_i v_j dS, \quad (5.336)$$

где $\delta \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, \mathbf{u} — истинное поле перемещений; \mathbf{v} — кинематически возможное. Заметим, что в определение кинематически возможного перемещения теперь входит условие непроникания:

$$\Psi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Psi(\mathbf{x}) \geq 0; \quad \forall \mathbf{x} \in S_c, \quad (5.337)$$

т. е. ограничение в виде неравенства; $\delta \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u})$.

Уравнение (5.336) можно брать в качестве исходного, а можно получить из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i = 0 \quad (5.338)$$

путем их умножения (скалярного) на величину δu с последующим интегрированием по Ω и применением формулы Гаусса — Остроградского с учетом граничного условия (5.330) (как это делалось ранее в обычных задачах).

Преобразуем интеграл по части поверхности S_c , используя условия (5.333):

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \sigma_{ij} \delta u_i v_j dS &= \int_{S_c} [\sigma_T \cdot \delta u_T + \sigma_N \delta u_N] dS = \\ &= \int_{S_c} \sigma_N \delta u_N dS, \quad \forall \delta u = \delta u_T + \delta u_N v. \end{aligned} \quad (5.339)$$

В тех точках, где соприкосновения нет, $\sigma_N \delta u_N = 0$; предполагая теперь, что форма штампа и тела различаются незначительно, можно положить

$$\nabla \Psi(\mathbf{x}) \simeq -v |\nabla \Psi(\mathbf{x})|, \quad (5.340)$$

заключаем, что в точках соприкосновения

$$\delta u_N \simeq -\delta u \cdot \nabla \Psi \leq 0 \quad (5.341)$$

[последнее неравенство вытекает из условия (5.337), которое должно быть выполнено как для истинного поля $u(\mathbf{x})$, так и для кинематически возможного $v(x)$]: Следовательно,

$$\sigma_N \delta u_N \geq 0 \quad (5.342)$$

во всех точках части поверхности S_c и из уравнения (5.334) следует неравенство

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \geq L(\delta u), \quad \forall v, \quad (5.343)$$

которое называется *вариационным*; в этом неравенстве $L(\delta u)$ — линейная форма, определяемая обычным образом:

$$L(\delta u) = \int_{\Omega} \rho F \cdot \delta u d\Omega + \int_{S_c} p \cdot \delta u dS. \quad (5.344)$$

Используя теорему II.3 приложения II, заключаем, что для линейно-упругого материала решение вариационного неравенства (5.343) эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - L(v) \quad (5.345)$$

на множестве K функций, удовлетворяющих условиям закрепления на S_u и непроникания на S_c :

$$\begin{aligned} K &= \{v \mid V = v(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega; v|_{S_u} = 0; \\ &\Psi(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) \nabla \Psi(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in S_c\}. \end{aligned} \quad (5.346)$$

Если материал подчиняется деформационной теории пластичности без разгрузок (см. § 5.4), то, используя результаты, полученные в § 5.5, и теорему § II.3 приложения II, приходим

к выводу, что вариационное неравенство (5.346) эквивалентно задаче минимизации функционала (5.249) на множестве (5.346).

Существование решения полученных задач минимизации в случае, когда S_u непусто, вытекает из теоремы существования § II.3 приложения II. Случай $S_u = \emptyset$ требует особого рассмотрения; отметим без доказательства, что при $S_u = \emptyset$ для существования решения необходимо потребовать, чтобы было выполнено условие:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{v}) &< 0, \quad \forall \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{a} &= \text{const}, \quad \boldsymbol{b} = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.347)$$

которое называется *сильной гипотезой Синьорини* и обеспечивает фиксацию взаимного положения тела и штампа до начала процесса деформирования.

Обратимся теперь к задаче о соприкосновении нескольких упругих тел [16]. Итак, пусть имеется несколько деформируемых твердых тел конечных размеров, занимающих области $\Omega^1, \dots, \Omega^M$ с границами $S^1 = \partial\Omega^1, \dots, S^M = \partial\Omega^M$.

Будем предполагать, что в недеформированном состоянии тела соприкасаются в точках или по кускам поверхностей, форма и размеры которых определяются из геометрических соображений.

Для упрощения обозначений всюду ниже (где это возможно) условимся, говоря о конкретном теле и относящихся к нему параметрах, индекс (номер тела) опускать; если речь будет идти о двух соприкасающихся телах, индекс, определяющий номер одного из тел, будем опускать, номер второго тела будем заменять штрихом.

Предположим, что граница S одного из тел состоит из трех кусков: $S = S_u \cup S_\sigma \cup S_c$; на S_u и S_σ заданы условия классического типа:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_u; \\ \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_j &= P_i(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in S_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (5.348)$$

Здесь \boldsymbol{r} — радиус-векторы точек Ω по отношению к системе координат, общей для всех тел; \boldsymbol{u} — вектор перемещения точки \boldsymbol{r} ; $\sigma_{ij}(\boldsymbol{u})$ — компоненты тензора напряжений, связанные с вектором $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ с помощью уравнения состояния, вид которого пока фиксировать не будем; \boldsymbol{v}_j — компоненты вектора единичной нормали \boldsymbol{v} к S , внешней к Ω ; $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r})$ — заданные на S_u перемещения, ниже для простоты предполагаемые нулевыми; \boldsymbol{P} — заданные на S_σ поверхностные усилия.

Предположим теперь, что форма и размеры предельных зон контакта, по которым тело Ω может соприкоснуться с другими телами, могут быть указаны из геометрических соображений; совокупность этих зон обозначим S_c . Подчеркнем, что предполагаются известными только предельные размеры зон контакта, фактические же площадки соприкосновения подлежат определению в процессе решения задачи.

Границные условия на S_c представляют собой условие непроникания, условие отсутствия трения и неположительности кон-

тактного давления. Для построения условий непроникания рассмотрим два соприкасающихся тела Ω и Ω' , и пусть S_c , S'_c — предельно возможные зоны контакта. Уравнения, описывающие поверхности S_c и S'_c , примем в форме

$$\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad \Psi'(\mathbf{r}') = 0 \quad (5.349)$$

и выберем функции Ψ , Ψ' таким образом, чтобы было

$$\Psi(\mathbf{r}) > 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega, \quad \Psi(\mathbf{r}) < 0 \text{ при } \mathbf{r} \in \Omega' \quad (5.350)$$

(для функции Ψ' аналогично).

В результате деформации поверхности S_c и S'_c изменяются; докажем, что в первом приближении искажение формы границы тела определяется нормальными (вдоль \mathbf{v}) перемещениями лежащих на границе частиц. Рассмотрим для определенности тело Ω ; пусть \mathbf{r}_0 — радиус-векторы частиц S_c до деформации; \mathbf{r} — после деформации, имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r}_0). \quad (5.351)$$

Из уравнения (5.349) вытекает, что

$$\Psi(\mathbf{r} - \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)) = 0. \quad (5.352)$$

Предположим, что Ψ — дифференцируемая функция с ограниченными вторыми производными; разлагая (5.352) в ряд Тейлора и ограничиваясь линейными по \mathbf{u} слагаемыми, перейдем от уравнения (5.352) к уравнению

$$\frac{\Psi(\mathbf{r})}{|\nabla \Psi(\mathbf{r}_0)|} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \equiv \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) - u_{vN}(\mathbf{r}_0) = 0. \quad (5.353)$$

Полученная зависимость и означает, что в первом приближении форма деформированной границы определяется нормальными перемещениями лежащих на ней частиц.

Условие непроникания на S_c , S'_c будем строить в первом приближении по величине перемещений и зазора между телами Ω и Ω' .

Итак, пусть \mathbf{r}'_0 — радиус-векторы точек S'_c до деформации; в результате деформации, определяемой полем перемещений \mathbf{u}' , эти точки займут положение

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}'_0 + u'_{vb}(\mathbf{r}') \mathbf{v}'(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{r}'_0 + u_{vb}(\mathbf{r}') \quad (5.354)$$

(здесь уже использован установленный выше результат).

Опустим из точки \mathbf{r}^* перпендикуляр на поверхность S_c , радиус-вектор точки пересечения этого перпендикуляра с S_c обозначим \mathbf{r}_{00} . Имеет место неравенство

$$u_{vN}(\mathbf{r}_0) \leq \delta^* = (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_{00}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_{00}). \quad (5.355)$$

Очевидно, что $\mathbf{r}_{00} = \mathbf{r}_{00}(\mathbf{r}'_0, u'_{vb})$; линеаризуем эту зависимость по нормальным перемещениям и по величине ($\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0$), которую будем называть зазором, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор точки пересечения перпендикуляра, проведенного из точки \mathbf{r}'_0 к поверхности S'_c ,

с поверхностью S_c . Заметим, что в неравенстве (5.355) r_{00} с принятой точностью можно заменить на r_0 . В самом деле, используя предположение об ограниченности вторых производных от Ψ , нетрудно подсчитать, что

$$(\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_{00}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_{00}) - (\mathbf{r}^* - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) = O(|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{00}|^2 + (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{00}) \cdot (\mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0 + u'_{vb}(\mathbf{r}'_0))). \quad (5.356)$$

Проведя эту замену, а также заменяя $u_{vN}(\mathbf{r}_{00})$ на $u_{vN}(\mathbf{r}_0)$ (что законно лишь при дополнительном предположении о малости первых производных от перемещений, т. е. деформаций и поворотов), придем к неравенству:

$$[u_{vb}(\mathbf{r}'_0) + \mathbf{r}'_0 - \mathbf{r}_0] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) - u_{vN}(\mathbf{r}_0) \geq 0, \\ \forall \mathbf{r}_0 \in S_c, \quad \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}'_0(\mathbf{r}_0), \quad (5.357)$$

приближенно (в указанном выше смысле) отражающему условие непроникания тел Ω и Ω' друг в друга.

Зависимость $\mathbf{r}'_0(\mathbf{r}_0)$ определяется из формулы

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + t_0 \nabla \Psi(\mathbf{r}_0),$$

где t_0 — корень уравнения

$$\Psi'(\mathbf{r}_0 + t \nabla \Psi(\mathbf{r}_0)) = 0. \quad (5.358)$$

Следуя общей методике, заменим уравнение (5.358) уравнением, линеаризованным по t , из которого вытекает, что

$$\mathbf{r}'_0(\mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0 - \varphi'(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0) / (\mathbf{v}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r}_0)). \quad (5.359)$$

Очевидно, что в приведенных выше рассуждениях тела Ω и Ω' можно поменять ролями; в результате придем к еще одной форме условия непроникания:

$$(u_{vb}(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}'_0)) + \mathbf{r}_0(\mathbf{r}'_0) - \mathbf{r}_0 - u'_{vb}(\mathbf{r}'_0)) \mathbf{v}'(\mathbf{r}'_0) \geq 0. \quad (5.360)$$

Предположим, что поверхности S_c и S'_c близки друг к другу в том смысле, что скалярное произведение разности внешних нормалей к этим поверхностям на вектор перемещения и вектор начального зазора $\mathbf{r}'_0(\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0$ или $\mathbf{r}_0(\mathbf{r}'_0) - \mathbf{r}'_0$ пренебрежимо мало по уравнению с первыми степенями модулей перемещений и зазоров, когда различие между условиями (5.357) и (5.359) также будет пренебрежимо мало. Формально условия (5.357) и (5.359) можно записать в единой форме:

$$u_{vN} + u'_{vb} \leq \delta \quad (5.361)$$

и при решении конкретных задач пользоваться первой из форм условия (5.361), когда независимой переменной является $\mathbf{r}_0 \in S_c$, зазор $\delta = [\mathbf{r}'_0(\mathbf{r}_0) - \mathbf{r}_0] \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}_0)$, или же второй возможной формой этого условия, когда независимая переменная $-\mathbf{r}'_0 \in S'_c$,

$$\delta = [\mathbf{r}_0(\mathbf{r}'_0) - \mathbf{r}'_0] \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{r}'_0).$$

Рассмотрим теперь задачу об определении напряженно-деформированного состояния каждого из тел рассматриваемой системы, зон контакта и контактного давления.

Воспользовавшись принципом возможных перемещений, для каждого из тел Ω можно написать вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}^\alpha d\Omega - \int_{S_c^\alpha} \mathbf{P}^\alpha \cdot \delta \mathbf{u}^\alpha dS - \\ & - \int_{S_c^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS \equiv a^\alpha(u^\alpha, \delta u^\alpha) - L^\alpha(\delta u^\alpha) - \\ & - \int_{S_c^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS = 0, \quad \forall \delta u^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad (5.362) \end{aligned}$$

которое можно получить и формальным путем из уравнений равновесия так, как это делалось выше.

В уравнении (5.362) $\delta u^\alpha \equiv u^\alpha - v^\alpha$ — возможное перемещение из истинного состояния; как истинное поле перемещений u^α , так и кинематически допустимое поле v^α должны удовлетворять условию непроникания (5.361).

Для удобства дальнейших формулировок формализуем проводимые построения следующим образом. Введем пространства:

$$V^\alpha = \{v | v = v(r), r \in \Omega^\alpha; v|_{S_u^\alpha} = 0; v \in H^1(\Omega^\alpha)\}, \quad \alpha = 1, \dots, M \quad (5.363)$$

и их прямое произведение

$$V = V^1 \otimes \dots \otimes V^M. \quad (5.364)$$

Определим далее формы

$$a(u, v) = \sum_\alpha a^\alpha(u, v), \quad L(v) = \sum_\alpha L^\alpha(v) \quad (5.365)$$

(через u, v обозначен произвольный элемент V).

В пространстве V введем подмножество функций K по формуле

$$K = \{v | v \in V; v_{vN}^\alpha + v_{vN}^\beta \leq \delta\}. \quad (5.366)$$

Индексы α и β определяют номера тел, соприкасающихся по кускам своих границ. Суммируя все равенства (5.362), найдем (здесь и ниже суммирование ведется по всем номерам тел)

$$a(u, \delta u) = L(\delta u) + \sum_\alpha \int_{S_c^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS. \quad (5.367)$$

Разобьем последнюю сумму в (5.367) на пары слагаемых, каждая из которых соответствует паре соприкасающихся поверхностей S_c^α и S_c^β , и рассмотрим подробно одну из этих пар

$$\int_{S_c^\alpha} \sigma_{ij}(u^\alpha) \delta u_i^\alpha v_j^\alpha dS + \int_{S_c^\beta} \sigma_{ij}(u^\beta) \delta u_i^\beta v_j^\beta dS. \quad (5.368)$$

Заметим прежде всего, что

$$\sigma_{ij}(u^\alpha) \delta u_i^\alpha v_j^\alpha = \sigma_N(u^\alpha) \delta u_N^\alpha + \sigma_T(u^\alpha) \cdot \delta u_T^\alpha, \quad (5.369)$$

где δu_N^α — нормальный компонент вектора δu^α (проекция на нормаль v^α): δu_T^α — проекция δu^α на касательную плоскость. Так как трение отсутствует, то второе слагаемое в формуле (5.369) равно нулю. Вспомним теперь, что по предположению $v^\alpha \equiv v^B$, $\sigma_N^\alpha = \sigma_N^B$ и что различием между поверхностями при вычислении поверхностных интегралов в геометрически линейной теории можно пренебречь. Из всего сказанного вытекает, что выражение (5.368) имеет форму

$$\int_{S_c^\alpha} \sigma_N^\alpha (\delta u_N^\alpha + \delta u_N^B) dS. \quad (5.370)$$

По предположению $u = (u^1, \dots, u^M)$ — решение задачи, следовательно, $u \in K$. Пусть теперь $v = u + \delta u$ в (5.367) — (5.370) принадлежит K , тогда

$$\delta u_N^\alpha + \delta u_N^B \leq 0 \quad (5.371)$$

и так как $\sigma_N^\alpha \leq 0$, $\forall \alpha$, то подынтегральное выражение в (5.351) неотрицательно.

Таким образом, решение задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет вариационному неравенству, вытекающему из вариационного уравнения (5.367) и неотрицательности пар слагаемых (5.368):

$$a(u, \delta u) \geq L(\delta u), \quad \forall \delta u, \quad v \in K, \quad u \in K. \quad (5.372)$$

Теорема (без доказательства). Решение вариационного неравенства (5.372), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке.

Очевидно, что все рассуждения проходят с небольшими несущественными изменениями и для случая деформационной теории пластичности без разгрузок (физически нелинейной теории упругости), в которой связь напряжений с деформациями имеет форму

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - 2\mu \omega(e_u) e_{ij} \quad (5.373)$$

(обозначения см. в § 5.4).

Вариационное неравенство в данном случае имеет вид

$$a(u, \delta u) - j'(u, \delta u) \geq L(\delta u), \quad \forall \delta u, \quad (5.374)$$

где $a(u, v)$ и $L(v)$ определяются по-прежнему формулами (5.365): $j'(u, v)$ — производная по Гато функционала

$$j(v) = 2\mu \sum_\alpha \int_{\Omega^\alpha} \left[\int_0^{e_u(v^\alpha)} \omega(s) s dS \right] d\Omega^\alpha, \quad (5.375)$$

равная

$$j'(u, v) = 2\mu \sum_\alpha \int_{\Omega^\alpha} \omega(e_u(u^\alpha)) e_{ij}(u^\alpha) e_{ij}(v^\alpha) d\Omega^\alpha. \quad (5.376)$$

Предположим сначала, что все $S_u^\alpha \neq \emptyset$, тогда из неравенства Корна для каждой из форм $a^\alpha(u^\alpha, v^\alpha)$ следует положительная определенность билинейной формы $a(u, v)$ на V :

$$a(v, v) \geq \beta \|v\|^2, \quad \forall v \in V, \quad \beta = \text{const} > 0. \quad (5.377)$$

Нетрудно сформулировать ограничения, при которых формы $L(v)$ и $a(u, v)$ будут непрерывными на V . Можно проверить, что множество K , определенное по формуле (5.366), выпукло в V ; замкнутость этого множества вытекает из теоремы Лионса о следах. Таким образом, имеет место теорема, вытекающая из результатов § II.3 приложения II и § 5.5: решение вариационного неравенства (5.372) эквивалентно проблеме минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - L(v) \quad (5.378)$$

на подмножестве K пространства V ; решение вариационного неравенства (5.374) — проблеме минимизации функционала

$$J(v) = 1/2a(v, v) - j(v) - L(v) \quad (5.379)$$

на подмножестве K пространства V .

Вводя в рассмотрение пространства, смежные к V^α по подмножествам жестких смешений, как это сделано в [25], можно установить аналогичные теоремы и для случая, когда некоторые из тел Ω^α или все они не имеют закрепленных участков границы. При реализации этого процесса возникают трудности, связанные с установлением дополнительных ограничений на $\rho^\alpha F^\alpha, P^\alpha$; более простой путь состоит в непосредственном использовании вариационных неравенств (5.372), (5.374) и относящихся к этим неравенствам теорем, доказанных в работе [45].

Заметим прежде всего, что при $S_u^\alpha \neq \emptyset$ и $\forall \alpha$ существование и единственность решения вытекает из результатов § II.3 приложения II. Рассмотрим случай, когда для всех $\alpha = 1, \dots, M$, $S_u^\alpha = \emptyset$. Будем использовать следующую теорему [45].

Пусть выполнены условия:

1) билинейная на V форма $a(u, v)$ непрерывна

$$|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V; \quad (5.380)$$

2) норма на V эквивалентна норме $p_0(v) + p_1(v)$, где $p_0(v)$ — норма на V , по отношению к которой пространство V предгильбертово; $p_1(v)$ — полунорма на V ;

3) пространство

$$Y = \{v \in V \mid p_1(v) = 0\} \quad (5.381)$$

конечномерно;

4) существует постоянная c_1 , при которой

$$\inf_{y \in Y} p_0(v - y) \leq c_1 p_1(v); \quad (5.382)$$

5) форма $a(v, u)$ удовлетворяет условию

$$a(v, v) \geq c_2 p_1^2(v), \quad \forall v \in V, \quad c_2 = \text{const} > 0; \quad (5.383)$$

- 6) множество $K \subseteq V$ замкнуто и выпукло в V и содержит точку $\{0\}$ (нулевой элемент пространства V);
 7) форма $L(v)$ линейна и непрерывна на V , причем

$$L(y) < 0, \quad \forall y \in Y \cap K.$$

Тогда вариационное неравенство (5.372) имеет по крайней мере одно решение.

Проверим, что все условия сформулированной теоремы в исследуемой проблеме выполнены. Заметим, что в качестве нормы можно выбрать

$$\|v\|_V^2 = \sum_{\alpha=1}^M \left\{ \int_{\Omega^\alpha} [v_i^\alpha v_i^\alpha + \epsilon_{ij}(\mathbf{v}^\alpha) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}^\alpha)] d\Omega^\alpha \right\}. \quad (5.384)$$

Из неравенства Корна, справедливого для каждого из тел Ω^α , следует эквивалентность нормы (5.384) использованной выше норме прямого произведения. Положим

$$\begin{aligned} p_0(v) &= \left\{ \sum_{\alpha} \int_{\Omega^\alpha} v_i^\alpha v_i^\alpha d\Omega^\alpha \right\}^{0.5}; \\ p_1(v) &= \left\{ \sum_{\alpha} \int_{\Omega^\alpha} \epsilon_{ij}(\mathbf{v}^\alpha) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}^\alpha) d\Omega^\alpha \right\}^{0.5}. \end{aligned} \quad (5.385)$$

Очевидно, $p_0(v)$ — норма в L_2 ; по отношению к этой норме H^1 , а следовательно, и V являются предгильбертовыми. Квадратичная форма $p_1^2(v)$ — полунорма на V , так как $\epsilon_{ij}(\mathbf{y}^\alpha) = 0$, где \mathbf{y}^α — смещение тела Ω^α как абсолютно жесткого. Пространство Y , определенное формулой (5.381), конечно, поскольку оно представляет собой прямое произведение конечномерных пространств вида

$$Y^\alpha = \{\mathbf{y}^\alpha \mid \mathbf{y}^\alpha = \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}^\alpha, \mathbf{a} = \text{const}, \mathbf{b} = \text{const}\}. \quad (5.386)$$

Выполнение неравенства (5.382) проверяется методом от противного. Неравенство (5.383) является следствием неравенства Корна для каждого из тел Ω^α . Шестое условие теоремы было установлено выше.

Рассмотрим подробнее седьмое ограничение и выясним его физический смысл. Заметим, что оно в действительности имеет вид

$$L(y) < 0, \quad \forall y \in Y \cap K \setminus G, \quad (5.387)$$

где G — смещение системы тел $\{\Omega^\alpha\}_{\alpha=1}^M$ как единого жесткого целого. В самом деле, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \left\{ \int_{\Omega^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha d\Omega^\alpha + \int_{S_c^\alpha} \mathbf{P}^\alpha dS \right\} &= 0; \\ \sum_{\alpha} \left\{ \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{r}^\alpha \times \rho^\alpha \mathbf{F}^\alpha d\Omega^\alpha + \int_{S_c^\alpha} \mathbf{r}^\alpha \times \mathbf{P}^\alpha dS \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.388)$$

представляющие собой условия равновесия системы тел $\{\Omega^\alpha\}$ в целом. Подставляя в условие $L(y) < 0$ вместо $y = \{y^1, \dots, y^M\}$ выражения для y^α по формуле (5.386) и использовав при этом равенства (5.388), приходим к (5.387).

Теперь нетрудно дать механическую трактовку условия (5.387): работа внешних сил на смещение каждого из тел Ω^α как жесткого целого из состояния, в котором это тело находилось до деформации, строго отрицательна, т. е. условие (5.387) — условие устойчивости системы тел $\{\Omega^\alpha\}$ до деформации.

Естественно, что в результате деформации состояние системы тел $\{\Omega^\alpha\}$ может оказаться неустойчивым; предполагая существование решения (множества решений U) поставленной проблемы и определив множество Z по формуле

$$Z = \{y \mid y \in Y; u + y \in K, \forall u \in U\}, \quad (5.389)$$

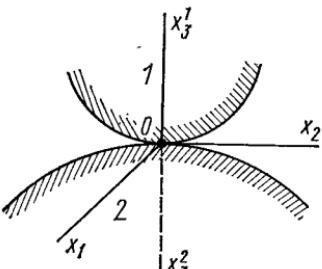
найдем из вариационного неравенства (5.372) и условий (5.388), что

$$L(y) \leq 0, \forall y \in Z \setminus G. \quad (5.390)$$

Условие (5.390) означает, что после деформации система тел $\{\Omega^\alpha\}$ оказалась в состоянии равновесия, являющимся устойчивым или безразличным.

Множества $Y \cap K$ и Z , вообще говоря, не совпадают, так как из условия $u \in Y \in K$ вовсе не следует, что $y \in K$.

Таким образом, можно сказать, что условие (5.387), представляющее собой небольшое обобщение «сильной гипотезы Синьорини», предполагает фиксацию взаимного положения тел Ω^α до деформации; условие же (5.390) фиксирует взаимное положение тел Ω^α после деформации и является следствием нелинейности рассматриваемой задачи.



На основании теоремы Лионса — Стампакъя заключаем, что существует по крайней мере одно решение поставленной задачи; разность двух решений принадлежит множеству смещений системы тел как жесткого целого.

Рассмотрим в заключение классический метод решения задач о соприкосновении упругих деформируемых тел,

принадлежащий Г. Герцу и позволяющий в ряде практических важных случаев получить аналитические решения. Идея метода состоит в том, что в случае, когда зона соприкосновения мала по сравнению с характерными размерами соприкасающихся тел, связь между перемещениями точек границы и контактным давлением на границе приближенно можно выбирать в той форме, в которой она имеет место для полупространства.

Пусть два однородных изотропных тела соприкасаются в точке O , которую выберем за начало декартовой системы отсчета. Оси Ox_1 ,

Рис. 5.17

Ox_2 расположим в общей касательной плоскости, а ось Ox_3^2 — перпендикулярно Ox_1 и Ox_2 (Ox_3^1 — внутрь первого тела, Ox_3^2 — внутрь второго) (рис. 5.17).

Уравнения границ тел 1 и 2 вблизи точки соприкосновения зададим уравнениями

$$x_3^1 = f_1(x_1, x_2), \quad x_3^2 = f_2(x_1, x_2). \quad (5.391)$$

Предположим, что функции f_i достаточно гладкие, так что их можно разложить в ряды Тейлора; ограничимся в этих разложениях членами второй степени:

$$x_3^i \simeq \frac{\partial^2 f_i(0, 0)}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f_i(0, 0)}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f_i(0, 0)}{\partial x_2^2} x_2^2 \quad (5.392)$$

(члены с нулевой степенью исчезают по выбору системы отсчета, с первой — из-за того, что плоскость $Ox_1 x_2$ — касательная к поверхностям (5.391) в точке O).

Независимыми переменными задачи будут x_1, x_2 ; в случае, когда граница одного из тел плоская, придем к граничным условиям, построенным в предыдущей задаче. В рассматриваемой здесь задаче граничные условия сносятся на плоскость $Ox_1 x_2$ и из полученных выше результатов вытекает, что эти условия представляют собой первое приближение по перемещениям точек границы и величине начального зазора.

Зазор здесь определяется как расстояние между точками границ тел 1 и 2, лежащими на нормали к плоскости $Ox_1 x_2$; это расстояние, очевидно, равно:

$$\delta = x_3^1 + x_3^2 = Ax_1^2 + Bx_2^2 + 2Hx_1 x_2, \quad (5.393)$$

где

$$A = \frac{\partial^2 f_1(0, 0)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2(0, 0)}{\partial x_1^2}, \dots$$

Повернем систему координат около оси Ox_3 так, чтобы коэффициент H обратился в нуль; это всегда можно сделать, предполагая положительную определенность формы (5.393). Сохранив старые обозначения для независимых переменных повернутой системы, имеем

$$\delta(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_2^2. \quad (5.394)$$

Допустим, что оба тела прижаты друг к другу силой P , направленной по нормали к общей касательной плоскости, тогда вблизи точки O тела будут соприкасаться по некоторой поверхности. Проекцию этой поверхности на плоскость $Ox_1 x_2$ назовем зоной контакта. Точки, достаточно удаленные от зоны контакта, в результате сжатия сблизятся на одну и ту же заранее неизвестную величину α . Обозначим u_3^i — перемещения точек соприкасающихся поверхностей, лежащих на одной нормали к плоскости $Ox_1 x_2$, тогда при сжатии расстояние между этими точками уменьшится на величину $\alpha - (u_3^1 + u_3^2)$.

Таким образом, для всех точек поверхности соприкосновения имеем

$$x_3^1 + x_3^2 + u_3^1 + u_3^2 = \alpha, \quad (5.395)$$

вне этой поверхности

$$x_3^1 + x_3^2 + u_3^1 + u_3^2 > \alpha. \quad (5.396)$$

Совокупность условий (5.385) – (5.396) есть не что иное, как условие непроникания тел друг в друга в первом приближении.

Учитывая выражение (5.394), уравнение (5.395) преобразуем к виду

$$u_3^1 + u_3^2 = \alpha - Ax_1^2 - Ax_2^2. \quad (5.397)$$

Для определения перемещений u_3^i и контактного давления q предположим, что поверхность соприкосновения очень мала и связь контактного давления с перемещениями u_3^i определяется теми же формулами, что и для полупространства:

$$u_3^1 + u_3^2 = \frac{1}{h_1 + h_2} \iint_{\Omega} \frac{q(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega_y = \alpha - Ax_1^2 - Bx_2^2, \quad (5.398)$$

где $h_i = (\lambda_i + 2\mu_i)/(4\pi\mu_i(\lambda_i + \mu_i))$; λ_i , μ_i – упругие постоянные тел 1 и 2 соответственно.

Таким образом, проблема определения контактного давления (а вместе с ним и перемещений) привелась к решению интегрального уравнения (5.398), являющегося интегральным уравнением Фредгольма I рода, причем специфика задачи состоит в том, что область, где задано это уравнение (зона контакта), заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи.

Оказывается (и это впервые было установлено Г. Герцем), уравнение (5.398) может быть решено в квадратурах. Для построения решения используются следующие результаты из теории потенциала:

1) если имеется заряд, распределенный по плоской области Ω с плотностью $\rho(\mathbf{x})$, то потенциал такого заряда

$$V(\mathbf{x}) = \iint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\Omega_y; \quad (5.399)$$

2) потенциал объемного заряда, равномерно распределенного по эллипсоиду с полуосью a, b, c , является квадратичной функцией координат вида

$$V(\mathbf{x}) = \pi abc \rho \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} - \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} - \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda}}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{0.5}} d\lambda \quad (5.400)$$

(ρ – плотность заряда, $\rho = \text{const}$).

Превратим объемный заряд в поверхностный, распределенный по плоской области, представляющей собой сжатый эллипсоид при $c \rightarrow 0$ (т. е. по эллипсу), причем сжатие будем производить таким образом, чтобы произведение rh , где h – длина отрезка, вырезаемого эллипсоидом из прямой, параллельной оси Ox_3 , оста-

валось неизменным. Операция сжатия дает заряд, распределенный по поверхности эллипса с полуосами a и b с плотностью $p(\mathbf{x})$; величина $p(\mathbf{x})$ подсчитывается путем умножения плотности ρ на величину h , равную $2c\sqrt{1-(x_1^2/a^2)-(x_2^2/b^2)}$, таким образом,

$$p(\mathbf{x}) = 2\rho c \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}}. \quad (5.401)$$

Потенциал такого заряда, с одной стороны, дается формулой (5.399), с другой — представляет собой квадратичную функцию координат вида (5.400) при $c \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow +\infty$, $\rho c = \text{const}$:

$$V(\mathbf{x}) = \pi ab \lim_{c \rightarrow 0} (\rho c) \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} - \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda}}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{0.5}} d\lambda. \quad (5.402)$$

Сравнивая выражения (5.398) и (5.399), заключаем, что можно произвести отождествление контактного давления $q(\mathbf{x})$ и плотности заряда $p(\mathbf{x})$, если только потенциал $V(\mathbf{x})$ представляет собой квадратичную функцию координат. Используя построенный выше потенциал (5.402) и произведя указанное отождествление, можем написать, что

$$\begin{aligned} & (\alpha - Ax_1^2 - Bx_2^2)(h_1 + h_2)^{-1} = \\ & = \pi ab \lim_{c \rightarrow 0} (\rho c) \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} - \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda}}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{0.5}} d\lambda. \end{aligned} \quad (5.403)$$

Для определения величины $\lim_{c \rightarrow 0} (\rho c)$ используем то обстоятельство, что суммарный заряд эллипса в установленной аналогии должен быть равен суммарному контактному давлению; так как по построению суммарный заряд эллипса равен суммарному заряду эллипсоида, то

$$\iint_{\Omega} q(\mathbf{x}) d\Omega = \iiint_V \rho d\Omega = \frac{4}{3} \pi ab c \rho = \iint_{\Omega} p(\mathbf{x}) d\Omega = P. \quad (5.404)$$

Из этого равенства следует, что

$$\lim_{c \rightarrow 0} (\rho c) = \text{const} = \frac{3P}{4\pi ab}. \quad (5.405)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.403) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x_i , найдем:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{3}{4} P (h_1 + h_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{3/2} (b^2 + \lambda)^{1/2} \lambda^{1/2}}; \\ B &= \frac{3}{4} P (h_1 + h_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{1/2} (b^2 + \lambda)^{3/2} \lambda^{1/2}}; \\ \alpha &= \frac{3}{4} P (h_1 + h_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{[(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda]^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.406)$$

Из первых двух уравнений (5.406) находим величины a и b , из третьего — сближение тел α , и тем самым задача полностью решается.

Пример. Пусть соприкасающиеся тела — шары радиусов R_1 и R_2 , тогда

$$a=b, \quad A=B=\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5.407)$$

и из уравнений (5.406) найдем, что

$$A=B=\frac{3}{4} P (h_1+h_2) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2 \lambda^{1/2}}. \quad (5.408)$$

Для вычисления интеграла в первой части равенства (5.408) произведем замену переменных $\lambda=a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$, тогда

$$A=\frac{3P(h_1+h_2)}{4a^3} \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3P(h_1+h_2)\pi}{8a^3}, \quad (5.409)$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{3(h_1+h_2)\pi P}{4(1/R_1+1/R_2)}}; \quad q(x) = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}; \\ \alpha &= \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} P^2 (h_1+h_2)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.410)$$

При $R_2 \rightarrow \infty$ из этого решения можно получить решение задачи о вдавливании шара в полуплоскость (упражнение).

Если одно из соприкасающихся тел абсолютно жесткое, а для второго известна функция Грина, то использованный выше путь приводит к интегральным уравнениям Фредгольма I рода:

$$\iint_{\Omega} G(x, y) q(y) d\Omega_y = f(x), \quad (5.411)$$

отличающимся от уравнения (5.398) видом ядра; ясно, что использованная выше аналогия с задачами теории потенциала в этом случае не проходит.

Отметим, что одним из эффективных методов решения уравнения (5.411) является метод приведения этого уравнения к вариационному неравенству

$$\langle A(q) - f, p \rangle \geqslant 0, \quad \forall p \leqslant 0, \quad (5.412)$$

где угловые скобки означают линейную форму на функциях, заданных на границе рассматриваемой области (или на любом другом многообразии, на которое «сносятся» условия контакта); $A(q)$ — оператор, определяемый левой частью уравнения (5.411).

Для доказательства эквивалентности задач (5.411) и (5.412) необходимо произвести проверку свойств оператора A , указанных в § II.1 приложения II; эта проверка требует привлечения весьма тонких конструкций функционального анализа и на ней остановимся не будем.

§ 5.9. О постановке и решении некоторых задач оптимизации (оптимального управления) в механике систем с распределенными параметрами

Приведем краткое описание простейших задач оптимизации в механике распределенных систем, не вдаваясь в подробности математического обоснования соответствующих постановок. Будет рассмотрен случай одного дифференциального уравнения в частных производных и квадратичного функционала стоимости; при этом будут использованы результаты соответствующих работ [22; 45].

Итак, пусть имеется операторное уравнение

$$Ay = f + Bu, \quad (5.413)$$

отличающееся от рассмотренных ранее уравнений наличием в правой части добавочного члена Bu , где B — линейный оператор из пространства V в пространство образов оператора A , также предполагаемого линейным. Ниже будем считать, что

$$A \in L(V, V'), \quad B \in L(u, V'). \quad (5.414)$$

При надлежащих ограничениях на A каждому u соответствует одно решение $y = y(u)$ уравнения (5.413), называемое *состоянием системы*. В практических задачах состояния системы наблюдать (или измерять), как правило, не удается, поэтому приходится вводить специальное пространство наблюдений H и оператор C из пространства состояний в пространство наблюдений; будем предполагать, что $C \in L(V, H)$.

Качество исследуемой системы будем оценивать функционалом стоимости; используем квадратичный функционал стоимости в виде

$$J(u) = \frac{1}{2} \|Cy(u) - z_d\|_H^2 + \frac{1}{2} (Nu, u)_U, \quad (5.415)$$

где $N \in L(u, u)$ (роль этого оператора выяснится ниже); z_d — заданный элемент пространства U .

Будем предполагать, что множество допустимых управлений принадлежит некоторому подмножеству $U_d \in U$, U_d будем считать замкнутым и выпуклым в U .

Задача оптимизации состоит в определении управления $u \in U_d$, при котором функционал стоимости (5.415) достигает минимального значения.

Используя результаты § II.3 (см. приложение), заключаем, что для существования и единственности решения поставленной задачи достаточно потребовать, чтобы:

- 1) $\langle Ay, y \rangle \geq \alpha \|y\|^2$, $\alpha = \text{const} > 0$;
- 2) $(Nu, u)_U \geq v \|u\|^2$, $v = \text{const} > 0$.

Если же $N = 0$, то функционал $J(u)$ будет только выпуклым, и в этом случае можно утверждать, что поставленная задача имеет не менее одного решения.

Специфика поставленной задачи оптимизации по сравнению с полученными ранее задачами минимизации с ограничениями

состоит в том, что минимизируемый функционал зависит от своего аргумента не непосредственно, а определяется с помощью двух операторов: оператора перехода от управления к состоянию и оператора перехода от состояния к наблюдению. Отметим также, что ранее исходной постановкой задачи была постановка для дифференциальных уравнений с соответствующими условиями на границе.

Оказывается, поставленную задачу с помощью методики, изложенной в § 4.7 (правила множителей Лагранжа с последующим применением необходимых условий стационарности), можно преобразовать к локальному виду.

Итак, пусть y и u — независимые функциональные аргументы, уравнение (5.413) — ограничение на эти аргументы. Составим функцию (функционал) Лагранжа:

$$L(y; u; p) = J + \langle p, Ay + f + Bu \rangle \quad (5.416)$$

(угловые скобки обозначают линейную форму на V , определяющую двойственность между V и V').

Исходная задача минимизации эквивалентна задаче разыскания стационарного значения (по переменным y , u , p) функции Лагранжа (5.416); так как по переменной y теперь никаких ограничений нет, то в точке стационарности

$$L'(y, \omega, u, p) = 0, \forall \omega \in V \quad (5.417)$$

(функциональная производная Гато в точке y по любому направлению ω равна нулю).

Подставляя (5.415) в (5.416) и (5.416) в (5.417), найдем

$$\langle Cy - z_d, C\omega \rangle_H - \langle p, A\omega \rangle = 0. \quad (5.418)$$

Введем в рассмотрение оператор A^* , сопряженный к A , оператор C^* , сопряженный к C и оператор Λ , такой, что

$$(z_1, z_2)_H = \langle \Lambda z_1, z_2 \rangle, \quad (5.419)$$

тогда уравнение (5.418) примет форму

$$\langle C^*\Lambda(Cy - z_d), \omega \rangle - \langle A^*p, \omega \rangle = 0, \forall \omega, \quad (5.420)$$

и окончательно имеем уравнение

$$A^*p = C^*\Lambda(Cy - z_d). \quad (5.421)$$

Условие стационарности функционала L по p совпадает, очевидно, с уравнением (5.413).

Для написания условий стационарности L по переменной применим теорему II.3 [точнее, вариант этой теоремы, выражаемой условием (II.99)]:

$$L'(y; u, v - u; p) \geq 0, \forall v \in U_d. \quad (5.422)$$

Подстановка выражений (5.415), (5.416) в неравенство (5.422) дает

$$\langle p, B(v - u) \rangle + (Nu, v - u)_U \geq 0, \forall v \in U_d \quad (5.423)$$

(здесь использовано дополнительное предположение о самосопряженности оператора N). Вводя оператор B^* , сопряженный к B , и оператор Λ_u по формуле, аналогичной (5.419), из (5.423) найдем, что

$$\langle B^* p + \Lambda_u N u, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in U_d. \quad (5.424)$$

Конкретизируя пространства V , U , можно преобразовать неравенство (5.424) к локальной форме; конечно, в каждой конкретной задаче это делается по-своему.

Таким образом, для того чтобы управление $u \in U_d$ было оптимальным [т. е. таким, на котором реализуется минимум функционала $y(u)$], необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия:

$$Ay = f + Bu; \quad (5.425)$$

$$A^* p = C^* \Lambda (C_y - z_d); \quad (5.426)$$

$$\langle B^* p + \Lambda_u N u, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in U_d. \quad (5.427)$$

Заметим, что неравенство (5.427) можно трактовать как условие минимума функционала

$$J(v) = \langle B^* p(v) + \Lambda_u N v, v \rangle \equiv (\Lambda_u^{-1} B^* p(v) + N v, v)_U \quad (5.428)$$

на множестве $U_d \subset U$.

И наконец, если $U_d = U$, то вместо неравенства (5.427) будем иметь уравнение

$$B^* p + \Lambda_u N u = 0. \quad (5.429)$$

Пример 5.5. Пусть состояние y и управление u связаны краевой задачей:

$$\begin{aligned} Ay &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) + a_0 y = f(x) + u(x); \\ x &\in \Omega \subset R^n; \\ y|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (5.430)$$

Пусть $u \in L_2(\Omega) \equiv U$, в этом случае управление называют распределенным в области Ω .

Краевую задачу (5.430) удобнее заменить (определить) интегральным тождеством (вариационным уравнением)

$$\int_{\Omega} \left[a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + a_0 y \omega \right] d\Omega = \int_{\Omega} (f + u) \omega d\Omega, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega);$$

тогда в качестве V можно выбрать $V = H_0^1(\Omega)$. Очевидно, операторы B и Λ_u в данном случае будут тождественными.

Требуется минимизировать следующий функционал стоимости:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ [y(v) - z_d]^2 + (N v, v) \} d\Omega \quad (5.431)$$

на множестве управлений, принадлежащих заданному замкнутому выпуклому множеству $U_d \subset U$. В функционале (5.431) z_d — задан-

ный элемент из L_2 , т. е. пространство наблюдений H считается совпадающим с $L_2(\Omega)$, следовательно, C — вложение V в H ; Λ — тождественный оператор; N — заданный линейный самосопряженный положительно определенный оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Совокупность условий оптимальности (5.425) — (5.427) в рассматриваемом примере имеет вид:

$$Ay = f + u \text{ в } \Omega, \quad y|_{\partial\Omega} = 0; \quad (5.432)$$

$$A^*p = y - z_d \text{ в } \Omega, \quad p|_{\partial\Omega} = 0; \quad (5.433)$$

$$\int_{\Omega} [p + Nu](v - u) d\Omega \geq 0, \quad \forall v \in U_d. \quad (5.434)$$

Если $U_d = U$, то вместо неравенства (5.434) будем иметь уравнение

$$p = -Nu, \quad (5.435)$$

решив которое, найдем

$$u = -N^{-1}p. \quad (5.436)$$

Подстановка выражения (5.436) в уравнение (5.432) приводит к системе

$$\left. \begin{array}{l} Ay = -N^{-1}p + f; \\ A^*p - y = z_d; \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \quad p|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.437)$$

Полученный результат позволяет увидеть, насколько задачи оптимизации сложнее обычных краевых задач: в рассматриваемом варианте число уравнений удваивается и получается система связанных друг с другом уравнений. В аналогичной ситуации для уравнений теории упругости получилась бы система шести дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций, решить которую при современном уровне развития вычислительной техники можно лишь в крайне редких случаях.

Решив систему (краевую задачу) (5.437), оптимальное управление u находим по формуле

$$= -N^{-1}p.$$

Рассмотрим частный случай, когда

$$U_d = \{v \mid v \geq 0 \text{ в } \Omega\}. \quad (5.438)$$

Из неравенства (5.434) для почти всех $x \in \Omega$ будем иметь:

$$\left. \begin{array}{l} u \geq 0; \\ p + Nu \geq 0; \\ u(p + Nu) = 0. \end{array} \right\} \quad (5.439)$$

Пусть теперь $N = vI$, $v = \text{const} > 0$, I — тождественный оператор, тогда из условий (5.439) следует, что

$$u = -\frac{1}{v} \min(0, p), \quad (5.440)$$

и для определения y , p получим следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{array}{l} Ay + \frac{1}{v} \min(0, p) = f \text{ в } \Omega; \\ A^* p - y = z_d \text{ в } \Omega; \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \quad p|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right\} \quad (5.441)$$

являющуюся, очевидно, нелинейной, т. е. даже если все входящие в постановку задачи операторы линейны, а минимизируемый функционал — квадратичный, то все равно из-за ограничения в виде неравенства задача может оказаться нелинейной.

Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда связь управления с состоянием осуществляется задачей Неймана:

$$Ay = f + u; \quad (5.442)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v_A}|_{\partial\Omega} \equiv \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_j} v_i|_{\partial\Omega} = h. \quad (5.443)$$

Система дифференциальных уравнений для y , p и неравенство для u получаются такими же, как и в предыдущем случае (при том же выборе пространств); меняется только граничное условие для p , которое здесь приобретает вид

$$\frac{\partial p}{\partial v_{A^*}}|_{\partial\Omega} \equiv \sum_{i,j} a_{ji} \frac{\partial p}{\partial x_j} v_i|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5.444)$$

Распределенное по области управление на практике может быть распределением массовых сил, температуры и т. п.; практически реализовать такое управление можно, очевидно, только в одно- и двумерных областях. Более интересным с точки зрения приложений представляется случай управления, распределенного по границе или по ее части.

Пример 5.6. Рассмотрим задачу определения оптимального управления u , которое минимизирует функционал (5.431), причем связь управления u с состоянием $y(u)$ определяется краевой задачей:

$$Ay = f \text{ в } \Omega; \quad (5.445)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v_A}|_{\partial\Omega} = h + u, \quad (5.446)$$

оператор A определяется по формуле (5.430).

Краевую задачу (5.445) — (5.446) удобнее определить интегральным тождеством (вариационным уравнением)

$$\int_{\Omega} \left[a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + a_0 y \omega \right] d\Omega = \int_{\Omega} f \omega d\Omega + \int_{\partial\Omega} (u + h) \omega dS, \quad (5.447)$$

$\forall \omega \in H_0^1(\Omega).$

Будем считать, что пространство управлений $U = L_2(\partial\Omega)$, тогда условие стационарности по u приводится к неравенству

$$\int_{\partial\Omega} (p + Nu)(v - u) dS \geq 0, \quad \forall v \in U_d. \quad (5.448)$$

Пусть $U_d = U$, тогда оптимальное управление u определяется из решения следующей краевой задачи:

$$\left. \begin{array}{l} Ay = f \text{ в } \Omega; \\ \frac{\partial y}{\partial v_A} \Big|_{\partial\Omega} = h + u; \\ A^* p = y - z_d \text{ в } \Omega; \\ \frac{\partial p}{\partial v_A} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (p + Nu) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.449)$$

Пусть $U_d = \{v \mid v \geq 0 \text{ на } \Gamma\}$, тогда вместо последнего из уравнений (5.449) будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} u|_{\partial\Omega} \geq 0, \quad (p + Nu)|_{\partial\Omega} \geq 0; \\ [u(p + Nu)]|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right\} \quad (5.450)$$

В предыдущих примерах предполагалось, что наблюдение является распределенным по области; ясно, что на практике такое предположение может быть эффективно реализовано только в однодименсии и двумерном случае; рассмотрим теперь пример наблюдения, распределенного на границе.

Пример 5.7. Для упрощения предположим, что управление распределено по области, и зададим связь управления с состоянием краевой задачей:

$$\left. \begin{array}{l} Ay = f + u \text{ в } \Omega; \\ y|_{\partial\Omega} = 0, \end{array} \right\} \quad (5.451)$$

которую будем определять интегральным тождеством (вариационным уравнением)

$$\int_{\Omega} \left[a_{ij} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + a_0 y \omega \right] d\Omega = \int_{\Omega} (f + u) \omega d\Omega; \\ \forall \omega \in H_0^1(\Omega). \quad (5.452)$$

Наблюдение $z = z(u)$ зададим равенством:

$$z(u) \Big|_{\partial\Omega} = M \frac{\partial y(u)}{\partial v_A} \Big|_{\partial\Omega}, \quad (5.453)$$

где M — заданная достаточно гладкая функция, связанная с конкретным способом измерения величины z .

Оптимальное управление определяется как элемент $u \in U_d \subset U$, минимизирующий функционал:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left[M \frac{\partial y(u)}{\partial v_A} - z_d \right]^2 dS + \frac{1}{2} (Nu, u)_U. \quad (5.454)$$

Проводя указанные выше рассуждения и выкладки, устанавливаем, что аналог условий (5.425) — (5.427) в рассматриваемой задаче имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} A_y = f + u \text{ в } \Omega; \\ y|_{\partial\Omega} = 0; \\ A^* p = 0; \\ p|_{\partial\Omega} = -M \left[M \frac{\partial y}{\partial v_A} - z_d \right]_{\partial\Omega}; \\ \int\limits_{\Omega} (p + Nu)(v - u) d\Omega \geqslant 0 \quad \forall v \in U_d. \end{array} \right\} \quad (5.455)$$

Здесь использовано предположение о том, что $U = L_2(\Omega)$, при выводе граничного условия для p — формула Гаусса — Остроградского для оператора A .

Комбинируя результаты примеров 5.6 и 5.7, можно построить задачу, когда и управление и наблюдение распределены по границе (упражнение).

В качестве упражнения рекомендуется также проделать все выкладки для случая, когда A — оператор Ламе.

Отметим, что при исследовании вопроса о существовании и единственности решения наибольшие трудности возникают при проверке условий непрерывности (в соответствующем смысле) функционала $J(v)$, в свою очередь связанные с исследованием регулярности решений получаемых краевых задач [типа (5.432) — (5.434), (5.449), (5.455) и т. д.]; ввиду сложности эти вопросы здесь не затрагиваются.

Изложенная схема формально обобщается и на случай нестационарных задач, однако эти задачи намного более полно и глубоко исследованы другими методами, изложение которых выходит за рамки данного пособия.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕНЗОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

§ I.1. Тензоры в декартовом базисе

Теория механического поведения сплошных сред строится на базисе понятий пространства. Линейным (обозначается L) пространством называется множество элементов любой природы, в которое введены операции сложения и умножения на число, подчиняющиеся обычным распределительному, переместительному и сочетательному законам [11]—[14]. В линейном векторном пространстве элементы называются векторами (обозначаются латинскими буквами — жирный шрифт).

Например, пространство L_3 — индекс означает размерность пространства (см. ниже), элементы которого — свободные векторы, рассматриваемые в аналитической геометрии, с обычными операциями сложения и умножения на число.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь вещественных (действительных) линейных пространств — с операцией умножения элемента пространства на действительные числа.

Напомним, что совокупность векторов v^1, \dots, v^n называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha_1 v^1 + \dots + \alpha_n v^n = 0 \quad (I.1)$$

возможно только в случае, когда все $\alpha_i = 0$.

Размерностью линейного пространства называется наибольшее число имеющихся в нем линейно независимых векторов; если размерность конечна, то линейное пространство называется *конечномерным*.

Система векторов e_1, \dots, e_n в пространстве L называется базисом, если эти векторы линейно независимы, и любой вектор $x \in L$ линейно выражается через e_1, \dots, e_n :

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n. \quad (I.2)$$

Пусть имеется пространство L_n размерности n . Нетрудно доказать, что любая совокупность n линейно независимых векторов в L_n является базисом. Из линейной независимости e_1, \dots, e_n следует единственность представления (I.2); числа x^1, \dots, x^n называются координатами вектора x в базисе e_1, \dots, e_n . Примем следующее соглашение о суммировании. Суммы $x^1 y^1 + \dots + x^n y^n$, $x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ сокращенно будем записывать в виде $x^i y^i$, $x^i e_i$, ..., полагая, что по повторяющемуся латинскому или греческому индексу производится суммирование в пределах от 1 до n ; если же суммирования нет, то соответствующие индексы будут полужирными, например: $x^k y^k$.

Говорят, что в линейном пространстве L_n задана скалярная функция $\varphi = \varphi(u)$ векторного аргумента u , если каждому вектору $u \in L_n$ поставлено в соответствие число φ . Функция $\varphi(u)$ называется *линейной формой*, если $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v)$. Скалярная функция $\varphi = \varphi(u^1, \dots, u^p)$ в векторных аргументах называется p -линейной формой, если она линейна по каждому из своих аргументов. В частности, при $p=2$ соответствующая форма называется *билинейной*. Билинейная форма $\varphi(u, v)$ называется:

а) *симметричной*, если $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$;

б) *положительно-определенной*, если $\varphi(u, u) > 0$ при $u \neq 0$ и $\varphi(u, u) = 0$ только при $u = 0$.

В пространстве L_n задано скалярное произведение (умножение), если в L_n задана билинейная симметричная невырожденная форма; для скалярного произведения векторов x и y будем использовать обозначения (x, y) или $x \cdot y$. Невырожденность скалярного произведения означает, что из $(x, x) = 0$ следует $x = 0$.

Линейное пространство со скалярным произведением, определяемым билинейной симметричной положительно определенной формой, называется евклидовым; для обозначения n -мерного евклидова пространства будем использовать символ R^n .

Пусть e_1, \dots, e_n — некоторый базис в R^n ; имеем

$$x = x^i e_i, \quad y = y^i e_i; \quad (I.3)$$

в силу билинейности

$$(x, y) = x^i y^j (e_i, e_j) = g_{ij} x^i y^j, \quad (I.4)$$

следовательно, для задания скалярного произведения достаточно задать матрицу чисел

$$g_{ij} = (e_i, e_j) \quad (I.5)$$

в любом базисе.

Длиной (нормой) вектора $u \in R^n$ называется величина

$$|u| = \sqrt{(u, u)}. \quad (I.6)$$

Углом между векторами u, v называется тот угол (в пределах от 0 до π), косинус которого равен отношению

$$\frac{(u, v)}{|u| |v|}. \quad (I.7)$$

Векторы u, v называются ортогональными, если $(u, v) = 0$. Очевидно, что взаимно-ортогональные ненулевые векторы линейно независимы.

Рассмотрим в R^n два различных базиса: «старый» — e_1, \dots, e_n и «новый» e'_1, \dots, e'_n ; векторы старого и нового базиса и величины, к ним относящиеся, будем отмечать соответственно индексами без штрихов и со штрихами. Очевидно, матрица величин g_{ij} , определяющая скалярное произведение, меняется при переходе от старого базиса к новому; найдем закон этого изменения

Введем в рассмотрение координаты $A_{i'}^i$ вектора e_i в старом базисе:

$$e_i = A_{i'}^i e_{i'}, \quad (I.8)$$

и координаты $A_i^{(-1)i'}$ вектора e_i в новом базисе:

$$e_i = A_i^{(-1)i'} e_{i'}. \quad (I.9)$$

Очевидно, матрицы $A_i^{(-1)i'}$ и $A_{i'}^i$ — взаимно-обратные.

По определению для любого $x \in R^n$ имеем

$$x = x^i e_i = x^{i'} e_{i'} = x^i A_i^{(-1)i'} e_{i'} = x^{i'} A_{i'}^i e_i. \quad (I.10)$$

Отсюда

$$x^i = x^{i'} A_{i'}^i, \quad x^{i'} = x^i A_i^{(-1)i'}. \quad (I.11)$$

Используем теперь независимость скалярного произведения от выбора базиса:

$$(x, y) = g_{ij} x^i y^j = g_{i'j'} x^{i'} y^{j'} = A_i^{(-1)i'} A_j^{(-1)j'} g_{i'j'} x^i y^j = A_{i'}^i A_{j'}^j g_{i'j'} x^{i'} y^{j'}. \quad (I.12)$$

Из (I.12) имеем искомую связь между g_{ij} и $g_{i'j'}$:

$$\left. \begin{aligned} g_{ij} &= A_i^{(-1)i'} A_j^{(-1)j'} g_{i'j'}; \\ g_{i'j'} &= A_{i'}^i A_{j'}^j g_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (I.13)$$

Как известно из линейной алгебры, можно в силу положительной определенности скалярного произведения в R^n подобрать такую матрицу перехода $A_{i'}^i$ к некоторому новому базису, в котором матрица скалярных произведе-

ний $g_{i'i'}$ будет иметь вид

$$e_i \cdot e_{i'} = g_{i'i'} = \begin{cases} 1, & i' = i; \\ 0, & i' \neq i, \end{cases} \quad (I.14)$$

т. е. в соответствии с данным выше определением векторы нового базиса будут взаимно-ортогональными и иметь единичную длину (длину, равную единице); такой базис называется *ортонормированным*.

Далее в этом параграфе ограничимся рассмотрением только ортонормированных базисов, для которых в отличие от косоугольных будем использовать обозначение \mathbf{k}_i . Переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется с помощью матриц $A_{i'}^i$, $A_i^{(-1)i'}$ с определителем, равным ± 1 , причем

$$A_{i'}^i = A_i^{(-1)i}; \quad A_i^{(-1)i'} = A_{i'}^i, \quad (I.15)$$

что следует из (I.8) — (I.9).

Первое определение тензора. Тензором ${}^p\hat{T}$ ранга (валентности) p в R^n называется геометрический или физический объект, который в каждом базисе $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ характеризуется набором чисел t_{i_1}, \dots, t_p , преобразующихся при переходе $\mathbf{k}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{k}_i$ от старого базиса к новому по закону

$$t_{i'_1}, \dots, i'_p = A_{i'_1}^{i_1}, \dots, A_{i'_p}^{i_p} t_{i_1}, \dots, t_{i_p}. \quad (I.16)$$

Отметим, что приведенное определение не является наиболее общим, но оно позволяет выделить в изучаемых ниже объектах некоторые общие черты, совокупность которых характеризует с достаточной для наших целей полнотой эти объекты.

Числа t_{i_1}, \dots, t_{i_p} называются *координатами* (компонентами) тензора ${}^p\hat{T}$ в базисе $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$. Так как тензоры второго ранга будут встречаться чаще других, для краткости используем обозначение ${}^2\hat{T} \equiv \hat{T}$.

Примеры тензоров первого ранга (ранга 1). Как показывает формула (I.11) в совокупности с (I.15), вектор-элемент R^n является тензором ранга 1.

Другой пример тензора ранга 1 связан с введенным выше понятием линейной формы $\varphi = \varphi(\mathbf{u})$ на R^n . В самом деле, для любого $\mathbf{u} \in R^n$ имеем $a_i = \varphi(\mathbf{k}_i)$,

$$\varphi = \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u^i \mathbf{k}_i) = u^i \varphi(\mathbf{k}_i) = u_i a_i. \quad (I.17)$$

Перейдем теперь от старого базиса \mathbf{k}_i к новому $\mathbf{k}_{i'}$:

$$\mathbf{k}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{k}_i. \quad (I.18)$$

Напомним, что теперь рассматриваются только ортонормированные базисы, так что

$$A_{i'}^i = (\mathbf{k}_{i'}, \mathbf{k}_i). \quad (I.19)$$

В силу независимости $\varphi(\mathbf{u})$ от выбора базиса имеем

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(u^i \mathbf{k}_i) = u^i \varphi(\mathbf{k}_i)$$

Используя (I.18), найдем

$$\varphi(\mathbf{u}) = u^i \varphi(A_{i'}^i \mathbf{k}_i) = u^i A_{i'}^i \varphi(\mathbf{k}_i) = u^i a_{i'}, \quad (I.20)$$

где

$$a_{i'} = A_{i'}^i \varphi(\mathbf{k}_i) = A_{i'}^i a_i. \quad (I.21)$$

Сравнивая (I.21) и (I.16), убеждаемся в том, что каждая линейная форма на R^n определяет некоторый тензор ранга 1 с координатами, равными значениям формы φ на векторах выбранного базиса.

Обратно, каждому тензору ранга 1 в R^n можно с помощью формулы (I.17) поставить в соответствие некоторую линейную форму на R^n .

Примеры тензоров второго ранга (ранга 2). Как показывает формула (I.13), совокупность скалярных произведений (e_i, e_j) векторов базиса (неортогонального) представляет собой совокупность координат некоторого тензора ранга 2; этот тензор называется *метрическим*. В ортонормированном базисе компоненты метрического тензора определяются по закону (I.14); совокупность чисел, обладающих свойством (I.14), называется *символом Кронекера* (или дельта-тензором) и обозначается через δ_{ij} ; по определению

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(Заметим, что по отношению к произвольным преобразованиям систем координат символы Кронекера тензора не образуют.)

Лемма (о дельта-тензоре). Тензор, являющийся диагональным в любой ортонормированной системе координат, представим в виде

$$t_{ij} = a\delta_{ij}, \quad (I.22)$$

где a — некоторое число.

Доказательство. Осуществим переход от старого базиса к новому с помощью следующей специальной матрицы перехода:

$$\left\| \mathbf{A}'_i \right\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (I.23)$$

Учитывая диагональность матриц t_{ij} и $t'_{i'j'}$, найдем, что $t_{11} = t_{22}$; изменив соответствующим образом матрицу \mathbf{A}'_i , можно найти, что $t_{11} = t_{33}$, $t_{22} = t_{33}$, и, следовательно, выполнено условие (I.22), где $a = t_{11} = t_{22} = t_{33}$.

Тензор вида $a\delta_{ij}$ называется *шаровым* или *изотропным*.

В качестве второго примера тензорной величины второго ранга рассмотрим линейный оператор из R^n в R^n . Напомним, что оператор

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in R^n, \quad \mathbf{v} \in R^n \quad (I.24)$$

из R^n в R^n называется *линейным*, если

$$\hat{\mathbf{t}}(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{u}) + \mu \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{v}). \quad (I.25)$$

Выбрав некоторый базис $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ в R^n , введя разложения

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{v} = v^k \mathbf{k}_k \quad (I.26)$$

и, воспользовавшись свойством линейности $\hat{\mathbf{t}}$ и ортонормированности $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$, найдем

$$v^i = (\mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{k}_j) \mathbf{u}_j) \equiv t_{ij} u^j. \quad (I.27)$$

Перейдя затем к новому базису $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n'$, убеждаемся в том, что совокупность величин

$$t_{ij} = (\mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{k}_j)) \quad (I.28)$$

представляет собой совокупность координат тензора второго ранга.

Обратно, каждому тензору ранга 2 можно с помощью формулы (I.27) поставить в соответствие линейный оператор из R^n в R^n , т. е. между множеством тензоров ранга 2 и линейных операторов из R^n в R^n существует взаимно-однозначное соответствие.

Пример тензора ранга p . Рассмотрим p -линейную форму $\varphi = \varphi(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(p)})$ на R^n . Выбрав некоторый базис $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ в R^n , в котором

$$\mathbf{u}^{(\alpha)} = u^{i(\alpha)} \mathbf{k}_i, \quad (I.29)$$

и воспользовавшись линейностью φ по каждому из аргументов, найдем, что

$$\varphi = u^{i_1(1)} \dots u^{i_p(p)} \varphi(\mathbf{k}_{i_1}, \dots, \mathbf{k}_{i_p}) \equiv u^{i_1(1)} \dots u^{i_p(p)} t_{i_1, \dots, i_p}. \quad (I.30)$$

Переходя к новому базису $\mathbf{k}_{i'}, \dots, \mathbf{k}_{n'}$, убеждаемся в том, что совокупность величин

$$t_{i_1, \dots, i_p} = \varphi(\mathbf{k}_{i_1}, \dots, \mathbf{k}_{i_p}) \quad (I.31)$$

представляет собой совокупность компонентов тензора ранга p .

Обратно, каждому тензору ранга p можно с помощью формулы (I.30) поставить в соответствие некоторую p -линейную форму на R^n , т. е. между множеством p -линейных форм и множеством тензоров ранга p существует взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, понятие тензора ранга p можно определить с помощью p -линейных форм на R^n .

Операции тензорной алгебры. Пусть даны два тензора $p\hat{t}^{(1)}$ и $p\hat{t}^{(2)}$ с координатами $t_{i_1, \dots, i_p}^{(1)}$ и $t_{i_1, \dots, i_p}^{(2)}$ в некотором базисе e_1, \dots, e_n . Суммой (разностью) тензоров $p\hat{t}^{(1)} \pm p\hat{t}^{(2)}$ называется тензор $p\hat{t}^{(3)}$, компоненты которого в данном базисе являются суммой (разностью) соответствующих тензоров $p\hat{t}^{(1)}$ и $p\hat{t}^{(2)}$:

$$t_{i_1, \dots, i_p}^{(3)} = t_{i_1, \dots, i_p}^{(1)} \pm t_{i_1, \dots, i_p}^{(2)}. \quad (I.32)$$

Операция перестановки индексов (транспонирования) состоит в образовании тензора $p\hat{t}^{(2)}$ с компонентами $t_{i_1, \dots, i_p}^{(2)}$ из компонентов тензора $p\hat{t}^{(1)}$ по закону

$$t_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_r, \dots, i_p}^{(2)} = t_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_k, \dots, i_p}^{(1)}. \quad (I.33)$$

Операция симметрирования (альтернирования) состоит в образовании симметричного (антисимметричного) по индексам i_k, i_r тензора из компонентов данного тензора t_{i_1, \dots, i_p} по законам:

$$\begin{aligned} & t_{i_1, \dots, (i_k, \dots, i_r), \dots, i_p} = \\ & = 1/2 (t_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_r, \dots, i_p} + t_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_k, \dots, i_p}); \end{aligned} \quad (I.34)$$

$$\begin{aligned} & t_{i_1, \dots, [i_k, \dots, i_r], \dots, i_p} = \\ & = 1/2 (t_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_r, \dots, i_p} - t_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_k, \dots, i_p}). \end{aligned} \quad (I.35)$$

Очевидно, имеет место представление:

$$\begin{aligned} & t_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_r, \dots, i_p} = \\ & = t_{i_1, \dots, (i_k, \dots, i_r), \dots, i_p} + t_{i_1, \dots, [i_k, \dots, i_r], \dots, i_p}. \end{aligned} \quad (I.36)$$

Операция тензорного (диадного) умножения состоит в образовании тензора ранга $p+q$ из двух тензоров $t_{i_1, \dots, i_p}^{(1)}$ и $t_{i_1, \dots, i_q}^{(2)}$ по закону

$$t_{i_1, \dots, i_{p+q}}^{(3)} = t_{i_1, \dots, i_p}^{(1)} \cdot t_{i_{p+1}, \dots, i_{p+q}}^{(2)}. \quad (I.37)$$

Данная операция не является, очевидно, коммутативной.

Операция свертки тензора по индексам i_k, i_r состоит в образовании тензора ранга $p-2$ из тензора ранга p по закону

$$t_{i_1, \dots, i_{p-2}} = t_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_k, \dots, i_p} \quad (I.38)$$

(напомним, что повторяющиеся индексы означают суммирование в пределах от 1 до n).

В качестве упражнения рекомендуется показать, что введенные операции являются тензорами, т. е. в результате их выполнения получаются тензоры.

§ I.2. Применение косоугольных систем координат

Пусть e_i — произвольный косоугольный базис в R^n . Вектор u в базисе e_i можно задавать двояко: или с помощью косоугольных проекций u_i , определенных в предыдущем параграфе:

$$u = u^i e_i, \quad (I.39)$$

или с помощью ортогональных проекций на направление e_i (рис. I.1)

$$u_i = (u, e_i). \quad (I.40)$$

Очевидно, что

$$u^i g_{ij} = u_j \quad (I.41)$$

[эта формула вытекает из (I.40) и определения матрицы g_{ij} ; напомним, что $g_{ij} = (e_i, e_j)$].

В дополнение к принятому ранее соглашению о суммировании в косоугольном базисе будем использовать следующие соглашения:

а) положение индекса (вверху или внизу) строго определено, и связь компонентов вектора с нижним индексом (которые называют ковариантными) с компонентами с верхним индексом (называемых контравариантными) дается формулой (I.41) и обратной к ней:

$$u^i = g^{ij} u_j, \quad (I.42)$$

где

$$\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}; \quad (I.43)$$

б) каждому верхнему или нижнему свободному индексу (свободным называется индекс, по которому нет суммирования), стоящему слева от знака равенства, соответствует в точности такой же индекс (верхний или нижний) справа от знака равенства.

Заметим, что в декартовом базисе e_i различие между верхними и нижними индексами исчезает.

Совокупность векторов

$$e^i = g^{ij} e_j \quad (I.44)$$

линейно независима в силу линейной независимости совокупности $\{e_j\}$ и невырожденности матрицы $\|g^{ij}\|$, следовательно, эту совокупность можно взять за базис.

Базис $\{e^i\}_{i=1}^n$ называется взаимным (или сопряженным) к базису $\{e_i\}_{i=1}^n$. Вычислим скалярное произведение

$$(e^i, e_j) = (g^{ik} e_k, e_j) = g^{ik} (e_k, e_j) = g^{ik} g_{kj} = \delta_i^j, \quad (I.45)$$

где δ_i^j — символ Кронекера в косоугольном базисе. Таким образом, векторы e^i и e_j при $i \neq j$ взаимно-ортогональны.

Выясним вопрос о том, как преобразуются ковариантные и контравариантные компоненты вектора при переходе:

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i. \quad (I.46)$$

Имеем

$$u = u^i e_i = u^{i'} e_{i'} = u^{i'} A_{i'}^i e_i, \quad (I.47)$$

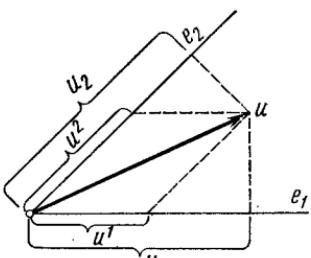


Рис. 1.1

откуда следует, что

$$u^i = A_i^i u^{i'} \quad (I.48)$$

или, разрешая относительно $u^{i'}$,

$$u^{i'} = A_i^{(-1) i'} u^i. \quad (I.49)$$

Аналогичная выкладка показывает, что

$$u_{i'} = A_{i'}^{i'} u_i. \quad (I.50)$$

Таким образом, ковариантные компоненты преобразуются с помощью той же матрицы, что и базисные векторы e_i , контравариантные — с помощью обратной. Это обстоятельство и объясняет название: ковариантные в буквальном переводе означает сопреобразующиеся, контравариантные — противопререворазующиеся (по отношению к закону преобразования векторов базиса e_i).

Пользуясь тем, что каждому тензору соответствует некоторый оператор — линейный или полилинейный в зависимости от того, каковы область определения и область значений этого оператора, дадим новое инвариантное (т. е. не зависящее от выбора базиса $\{e_i\}$) определение тензора.

Второе определение тензора. Тензор $r\hat{t}$ ранга r в R^n это r -линейный оператор из R^n в $R^1 \equiv R$.

Как было показано выше (§ I.1), тензор ранга 1 — это вектор. При использовании косоугольного базиса $\{e_i\}$ этот вектор определяется двояко: или своими ковариантными компонентами t_i

$$t_i = {}^1\hat{t}(e_i), \quad (I.51)$$

или же своими контравариантными компонентами $t^{i'}$:

$$t^{i'} = {}^1\hat{t}(e^{i'}). \quad (I.52)$$

Для того чтобы разобраться, какими компонентами характеризуются (в базисе e_i) тензоры второго и более высоких рангов, вернемся на время к случаю декартова базиса k_i и построим разложение тензора по некоторому базису, аналогичное разложению вектора по базису ($u = u^i k_i$).

Для построения тензорного базиса заметим, что диадное произведение $k_i \otimes k_j$ в базисе $\{k_i\}$ определяется матрицей, на пересечении i -й строки и j -го столбца которых стоит единица, на прочих местах нули. Очевидно, что матрица ${}^2\hat{t}^{ij}$ оператора, соответствующего произвольному тензору второго ранга ${}^2\hat{t}$, может быть представлена в виде суммы (линейной комбинации) матриц, имеющих единственный ненулевой элемент, равный единице на пересечении i -й строки и j -го столбца для всех возможных наборов i и j , т. е. в виде линейной комбинации n^2 таких матриц.

Таким образом,

$${}^2\hat{t} = t^{i'} k_i \otimes k_j, \quad (I.53)$$

и это равенство следует понимать в операторном смысле: оператор ${}^2\hat{t}$ представляет собой линейную комбинацию операторов $k_i \otimes k_j$, в базисе k_j определяемых матрицей вида

$$(i) \begin{pmatrix} (j) \\ 0 & \dots & 000 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 010 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Перейдем к произвольному базису e_i :

$$e_{i'} = A_{i'}^i k_i, \quad k_i = A_i^{(-1) i'} e_i. \quad (I.54)$$

Подстановка (I.54) в (I.53) дает

$$\hat{t} = t^i A_i^{(-1)i'} A_i^{(-1)i'} e_i \otimes e_{i'} \equiv t^{i'i'} e_{i'} \otimes e_{i''}. \quad (\text{I.55})$$

Здесь введено обозначение

$$t^{i'i'} = t^i A_i^{(-1)i'} A_i^{(-1)i'}. \quad (\text{I.56})$$

Числа $t^{i'i}$, преобразующиеся по закону (I.56), называются *контравариантными компонентами тензора* \hat{t} .

Используя введенное выше определение

$$e^i = g^{ij} e_j, \quad e_i = g_{ij} e^j, \quad (\text{I.57})$$

для тензора второго ранга \hat{t} можно получить представления (штрихи опустим):

$$\hat{t} = t^{ij} g_{ik} e^k \otimes e_j = t^{ij} g_{ik} e_i \otimes e^j = t^{ij} g_{ik} g_{jl} t^{kl} \otimes e^l. \quad (\text{I.58})$$

Числа $t_{i,k}^l = t^{ij} g_{ik}$, $t_{i,j}^k = t^{ij} g_{ik}$ называются *смешанными компонентами тензора второго ранга*; $t_{ij} = g_{ik} g_{jl} t^{kl}$ — *ковариантными компонентами тензора второго ранга*.

Заметим, что каждый индекс имеет свое место вверху и внизу, «вакантное» верхнее или нижнее место помечается точкой. (Точки можно не ставить только для симметричных по соответствующим индексам тензоров.)

При переходе от старого базиса $\{e_i\}$ к новому $\{e_{i'}\}$ закон преобразования компонентов тензоров второго ранга содержит две матрицы: матрица, отвечающая за преобразование нижнего индекса, совпадает с $A_{i'}^i$, верхнего — с $A_i^{(-1)i'}$, например:

$$t_{i',j'}^{i,j} = A_i^{(-1)i'} A_{j'}^j t_{i,j}^{i,j}. \quad (\text{I.59})$$

Доказательство сформулированного утверждения [вывод формул типа (I.59)] представляется в качестве упражнения.

Аналогичным путем, вводя триадные произведения трех векторов

$$a \otimes b \otimes c,$$

катриадные произведения

$$a \otimes b \otimes c \otimes d,$$

и, в общем случае, полнадные произведения

$$a^{(1)} \otimes a^{(2)} \otimes \dots \otimes a^{(p)},$$

можно построить тензорный базис в множестве тензоров третьего, четвертого и т. д. рангов и получить представления:

$$\begin{aligned} \hat{t} &= t^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k = t^{ijk} e^i \otimes e_j \otimes e_k = \dots \\ \hat{t} &= t^{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l = \dots; \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

можно определить наборы ковариантных, контравариантных и смешанных компонентов тензора любого ранга и построить законы их преобразования, аналогичные закону (I.59). Правило построения этих законов будет таким же, что и для тензоров второго ранга, а именно: закон преобразования тензора ранга p содержит p матриц, при этом матрица, отвечающая за преобразование нижнего индекса, совпадает с A_i^i , верхнего — совпадает с $A_i^{(-1)i'}$, например:

$$t_{i_1 \dots i_p}^{i'_1 \dots i'_p} = A_{i_1}^{(-1)i'_1} A_{i_2}^{i'_2} \dots A_{i_p}^{i'_p} t_{i_1 \dots i_p}^{i'_1 \dots i'_p}. \quad (\text{I.61})$$

Используя разложения тензоров по тензорным базисам, можно дать инвариантные определения операций свертки, векторного и тензорного умножения тензоров, используемых в механике.

Определение свертки. Сверткой двух тензоров $p\hat{t}^{(1)}$ и $q\hat{t}^{(2)}$ называется тензор ранга $p+q-2$ вида

$$\begin{aligned} p\hat{t}^{(1)} \cdot q\hat{t}^{(2)} &= t^{(1) i_1 \dots i_p} t^{(2) j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes (e_{i_p}, e_{j_1}) \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_q} = \\ &= t^{(1) i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} g_{i_p j_1} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{p-1}} \otimes e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_q}. \end{aligned} \quad (I.62)$$

Применив другие представления тензоров, можно получить выражения для других компонентов свертки.

Операцию свертки можно обобщить, вводя:

а) двукратную свертку, когда скалярно перемножаются векторы e_{i_p} , e_{j_1} и векторы $e_{i_{p-1}}$, e_{j_2} ; очевидно, двукратную свертку можно определить для тензоров ранга не меньше второго; операция двукратной свертки обозначается двумя точками;

б) скалярное умножение векторов e_{i_p} и e_{j_1} заменяют скалярным произведением произвольных векторов из полийадных произведений $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}$ и $e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$.

Определенная в § I.1 операция свертки тензора в декартовом базисе соответствует двукратной свертке тензора $p\hat{t}$ ($p \geq 2$) с диадой $e_{i_r} \otimes e_{i_r}$, когда вектор e_{i_s} умножается скалярно на e_{i_r} , а e_{i_r} — на e_{i_r} .

Свертка произвольного тензора $p\hat{t}$ с вектором \mathbf{a} может быть образована двояко:

а) левая по отношению к вектору (или просто левая) свертка:

$$\mathbf{a} \cdot p\hat{t} = t^{i_1 \dots i_p} a^j g_{j i_1} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} = t^{i_1 \dots i_p} a_{i_1} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p}; \quad (I.63)$$

б) правая свертка:

$$p\hat{t} \cdot \mathbf{a} = t^{i_1 \dots i_p} a^j g_{j i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{p-1}} = t^{i_1 \dots i_p} a_{i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{p-1}}. \quad (I.64)$$

Определение тензорного произведения. Тензорным произведением двух тензоров $p\hat{t}^{(1)}$ и $q\hat{t}^{(2)}$ называется тензор ранга $p+q$ вида

$$p\hat{t}^{(1)} \otimes q\hat{t}^{(2)} = t^{(1) i_1 \dots i_p} t^{(2) j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}. \quad (I.65)$$

Применив другие представления тензоров, можно получить выражения для других компонентов тензорного произведения.

Определение векторного произведения. Начнем с определения векторного произведения двух векторов и далее определим векторное умножение тензора на вектор слева и справа. (Заметим, что последняя операция широко используется в механике.) Пусть \mathbf{k}_i — декартов базис, тогда векторным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, компоненты которого подсчитываются по закону

$$c_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = (\mathbf{k}_i a^j \mathbf{k}_j \times a^k \mathbf{k}_k) = (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \times \mathbf{k}_k) a^j a^k, \quad (I.66)$$

где $(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \times \mathbf{k}_k)$ — смешанное произведение, вычисляемое по правилу

$$(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j \times \mathbf{k}_k) = \begin{cases} +1, & \text{когда } i, j, k \text{ — четная перестановка (например, } i=1, j=2, k=3); \\ -1, & \text{когда } i, j, k \text{ — нечетная перестановка (например, } i=2, j=1, k=3); \\ 0, & \text{когда хотя бы два из трех чисел } i, j, k \text{ совпадают.} \end{cases} \quad (I.67)$$

Для совокупности чисел, обладающих свойством (I.67), вводится специальное обозначение E_{ijk} ; эта совокупность

$$E_{ijk} = (k_i, k_j \times k_k) \quad (I.68)$$

называется символом Леви—Чивита.

Прежде чем переходить к косоугольному базису, выясним некоторые свойства символов Леви—Чивита. Рассмотрим трехмерное пространство ($n=3$); возьмем три вектора a_1, a_2, a_3 , отнесенные к декартову базису k_i , и образуем матрицу

$$\|a\| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}. \quad (I.69)$$

Вспоминая известное правило вычисления определителей, устанавливаем, что

$$\det \|a\| = E_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k. \quad (I.70)$$

При перестановке двух любых столбцов знак определителя меняется, поэтому

$$E_{pqr} \det \|a\| = E_{ijk} a_p^i a_q^j a_r^k. \quad (I.71)$$

Пусть теперь $\|a_p^i\| = \|A_{i'}^i\|$ — матрица перехода от одной декартовой системы к другой, тогда $\det \|A_{i'}^i\| = \pm 1$, и из формулы (I.71) имеем

$$E_{i'j'k'} = \pm A_{i'}^i A_{j'}^j A_{k'}^k = E_{ijk}, \quad (I.72)$$

т. е. символы Леви—Чивита тензора не образуют.

В более общем случае, когда $A_{i'}^i$ — матрица перехода от одной косоугольной системы к другой, из (I.71) находим

$$E_{i'j'k'} = \frac{1}{\det \|A_{i'}^i\|} A_{i'}^i A_{j'}^j A_{k'}^k E_{ijk}. \quad (I.73)$$

Величины, которые при переходе от одной системы к другой преобразуются по формулам типа (I.73) (в общем случае в этих формулах появляется произвольная степень $\det \|A_{i'}^i\|$), называются *относительными тензорами* или *псевдотензорами*; степень детерминанта матрицы $\|A_{i'}^i\|$ в законе преобразования называется *весом псевдотензора*. Таким образом, символ Леви—Чивита — псевдотензор веса -1 .

Пусть теперь e_i — произвольный косоугольный базис в R^n ; введем обозначение

$$\vartheta_{ijk} = (e_i, e_j \times e_k), \quad (I.74)$$

тогда векторное произведение $a \times b$ в базисе e_i можно определить по формуле

$$(a \times b)_i = \vartheta_{ijk} a^j b^k. \quad (I.75)$$

Для вычисления ϑ_{ijk} перейдем к декартову базису k_i , тогда

$$\vartheta_{ijk} = (e_i, e_j \times e_k) = e_i^s k_s, e_j^t k_t \times e_k^m k_m = e_i^s e_j^t e_k^m (k_s, k_t \times k_m) = E_{stm} e_i^s e_j^t e_k^m. \quad (I.76)$$

Применив здесь формулу (I.71), найдем

$$\vartheta_{ijk} = E_{ijk} \det \|e_m^s\|. \quad (I.77)$$

Для дальнейшего упрощения этой формулы вернемся снова к (I.71), в которую вместо a_p^i подставим $g_{ip} = (e_i, e_p) = e_i^s e_p^s$ (e_i^s — компоненты вектора e_i в декартовом базисе k_i); получим

$$E_{pqr} \det \|g_{ip}\| = E_{ijk} e_i^s e_p^t e_q^u e_k^m. \quad (I.78)$$

Умножив левую и правую части полученного равенства на E_{pqr} и воспользовавшись легко проверяемым тождеством

$$E_{pqr} E_{pqr} = 6, \quad (I.79)$$

найдем

$$6 \det \|g_{ij}\| = E_{st\mu} \det \|e_t^s\| E_{st\mu} \det \|e_t^s\| = 6 (\det \|e_t^s\|)^2, \quad (I.80)$$

откуда следует, что

$$|\det \|e_t^s\|| = \sqrt{\det \|g_{ij}\|}. \quad (I.81)$$

Таким образом,

$$\vartheta_{ijk} = \pm E_{ijk} \sqrt{\det \|g_{ij}\|}, \quad (I.82)$$

и знак в этой формуле определяется совпадением или несовпадением ориентаций базисов $\{e_i\}$ и $\{k_i\}$.

Упражнение. Доказать, что совокупность чисел ϑ_{ijk} представляет собой совокупность ковариантных компонентов тензора третьего ранга, смешанные и ковариантные компоненты которого определяются по формулам:

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_{.ik}^{t..} = (e^i, e_j \times e_k); \\ \vartheta_{..k}^{ij..} = (e^i, e^j \times e_k); \\ \vartheta_{i..}^{jk..} = (e_i, e^j \times e^k). \end{array} \right\} \quad (I.83)$$

Итак, векторное произведение в косоугольном базисе e_i определяется по формулам:

$$(a \times b)_i = E_{ijk} a^j b^k \det \|e_t^s\|; \quad (I.84)$$

$$(a \times b)^i = (a \times b)_k g^{ki}. \quad (I.85)$$

Определим теперь векторное умножение произвольного тензора на вектор a слева

$$a \times p\hat{t} = a^{i_1 i_2 \dots i_p} (e_i \times e_{i_1}) \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \quad (I.86)$$

и справа

$$p\hat{t} \times a^{i_1 i_2 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{p-1}} \otimes (e_{i_p} \times e_i). \quad (I.87)$$

Применив другие представления вектора a и тензора $p\hat{t}$, можем получить выражение для двух других компонентов векторного произведения.

§ I.3. Инварианты. Теорема Кэли — Гамильтона

В этом параграфе ограничимся рассмотрением симметричных тензоров второго ранга (симметрия означает, что $t^{ij} = t^{ji}$, $t_{ij} = t_{ji}$; отсюда и из симметрии $g_{ij} = g_{ji}$, $g^{ij} = g^{ji}$ следует, что $t_{i.}^j = t_{.j}^i \equiv t_{.j}^i$).

Главным направлением симметричного тензора второго ранга \hat{t} называется такое направление s , для которого

$$\hat{t} \cdot s = \lambda \hat{t} \cdot s, \quad (I.88)$$

где \hat{t} — единичный тензор второго ранга, при котором для любого симметричного \hat{t} имеем

$$\hat{t} \cdot \hat{t} = \hat{t} \cdot \hat{t} = \hat{t}; \quad (I.89)$$

λ — некоторое число. Легко видеть, что роль единичного тензора играет метрический тензор \hat{g} с компонентами g_{ij}^{ij} , $g_{.j}^{.i} = g_{i.}^{.i} \equiv \delta_{ij}$.

Перепишем уравнение (I.88) в виде

$$t_j^i e_i(e^j, s) - \lambda \delta_j^i e_i(e^j, s) = 0 \quad (I.90)$$

или

$$t_j^i s^j - \lambda s^i = 0. \quad (I.91)$$

Совокупность уравнений (I.91) представляет собой систему трех уравнений для определения трех чисел s^i ; поскольку система однородна, для существования нетривиального решения необходимо, чтобы было

$$\det \| t_j^i - \lambda \delta_j^i \| = 0. \quad (I.92)$$

Коэффициенты этого уравнения называются *главными инвариантами тензора \hat{t}* ; запишем (I.92) в виде

$$-\lambda^3 + I_1(\hat{t})\lambda^2 - I_2(\hat{t})\lambda + I_3(\hat{t}) = 0, \quad (I.93)$$

тогда первый, второй и третий инварианты будут:

$$\left. \begin{aligned} I_1(\hat{t}) &= t_i^i = t_1^1 + t_2^2 + t_3^3; \\ I_2(\hat{t}) &= t_i^i t_j^j - (t_j^i)^2 = t_1^1 t_2^2 - (t_1^1)^2 + t_2^2 t_3^3 - (t_2^2)^2 + t_3^3 t_1^1 - (t_3^3)^2, \quad (i \neq j); \\ I_3(\hat{t}) &= \det \| t_j^i \| \end{aligned} \right\} \quad (I.93)$$

Решения λ_k уравнения (I.93) называются главными (или собственными) значениями тензора \hat{t} ; соответствующие главным значениям λ_k главные направления будем обозначать s_k . (Длину s_k будем считать равной единице.) Из алгебры известно, что решения уравнения (I.93) для случая симметрии $t_j^i = t_i^j$ действительны, а главные направления, соответствующие различным главным значениям, ортогональны.

Выберем в качестве базиса декартов базис, направления векторов k_t , которого совпадают с главными направлениями тензора \hat{t} , тогда

$$\hat{t} = t_j^i s_i \otimes s^j. \quad (I.94)$$

Умножим скалярно (I.94) на вектор s_p , использовав при этом равенство (I.88), найдем

$$\hat{t} \cdot s_p = \lambda_p \hat{t} \cdot s_p = t_j^i s_i \delta_p^j = t_p^i s_i \quad (I.95)$$

(напомним, что по подчеркнутым индексам суммирования нет). Пользуясь представлением единичного тензора \hat{t} в виде $\hat{t} = \delta_j^i s_i \otimes s^j$, из (I.95) найдем

$$\lambda_p \delta_j^i s_i \delta_p^j = \lambda_p s_p = t_p^i s_i.$$

Отсюда следует, что

$$t_p^i = \lambda_p \delta_p^i,$$

т. е. недиагональные компоненты матрицы t_j^i равны нулю.

Таким образом,

$$\hat{t} = \lambda_p s^p \otimes s_p. \quad (I.96)$$

Определение. Квадратом \hat{t}^2 симметричного тензора второго ранга \hat{t} называется тензор второго ранга вида

$$(\hat{t})^2 = \hat{t} \cdot \hat{t}; \quad (I.97)$$

третьей степенью $(\hat{t})^3$ — тензор второго ранга вида

$$(\hat{t})^3 = (\hat{t})^2 \cdot \hat{t}; \quad (I.98)$$

N -й степенью $(\hat{t})^N$ — тензор второго ранга вида

$$(\hat{t})^N = (\hat{t})^{N-1} \cdot \hat{t}. \quad (I.99)$$

Нетрудно видеть, что любая степень симметричного тензора второго ранга — симметричный тензор.

Используя представление (I.96), найдем, что в декартовом базисе s_i :

$$\left. \begin{aligned} (\hat{t})^2 &= \lambda_p^2 s^p \otimes s^p; \\ (\hat{t})^3 &= \lambda_p^3 s^p \otimes s^p; \\ (\hat{t})^N &= \lambda_p^N s^p \otimes s^p. \end{aligned} \right\} \quad (I.100)$$

Теорема (Кэли—Гамильтона). Симметричный тензор \hat{t} удовлетворяет уравнению вида (I.93), т. е.

$$-(\hat{t})^3 + I_1(\hat{t})(\hat{t})^2 - (I_2(\hat{t}))\hat{t} + I_3(\hat{t})\hat{t} = 0. \quad (I.101)$$

Доказательство. В силу формул (I.100) имеем

$$\hat{t}^3 = \lambda_p^3 s^p \otimes s^p. \quad (I.102)$$

Но по определению

$$\lambda_p^3 = I_1(\hat{t})\lambda_p^2 - \lambda_p I_2(\hat{t}) + I_3(\hat{t}). \quad (I.103)$$

Подстановка (I.103) в (I.102) дает

$$(\hat{t})^3 = I_1(\hat{t})\lambda_p^2 s^p \otimes s_p - I_2(\hat{t})\lambda_p s^p \otimes s_p + I_3(\hat{t})s^p \otimes s_p, \quad (I.104)$$

что совпадает с (I.101).

Значение теоремы Кэли—Гамильтона состоит в том, что она позволяет выразить любую степень симметричного тензора второго ранга через нулевую (т. е. единичный тензор), первую и вторую степени этого же тензора; в самом деле, для третьей степени это утверждение уже доказано; для четвертой степени

$$(\hat{t})^4 = (\hat{t})^3 \cdot \hat{t}. \quad (I.105)$$

Выражая здесь $(\hat{t})^3$ по формуле (I.104), придем к случаю третьей степени, для которой все доказано; для N -й степени сформулированное утверждение доказывается по индукции.

§ I.4. Дифференцирование тензорных полей и интегральные теоремы

Основной задачей механики является исследование зависимостей величин тензорной природы от координат (и времени, что в данный момент для нас несущественно):

$$P\hat{t} = P\hat{t}(x), \quad x \in \Omega \subset R^n. \quad (I.106)$$

Здесь Ω — открытая область в R^n с границей $S = \partial\Omega$; x — радиус-вектор точек этой области.

Если используется общая для всего пространства декартова или косоугольная система отсчета, то все введенные выше определения, касающиеся компонентов тензорного поля $P\hat{t}(x)$ и операций с ними, в каждой фиксированной точке x сохраняются. Однако во многих случаях приходится использовать криволинейные системы координат, когда в каждой точке $x \in \Omega$ набор базисных векторов свой и меняется от точки к точке.

Криволинейная система координат определяется следующим образом: вместо независимых переменных x^i ($x = x^i k_i$) вводим новые независимые переменные

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(x^1, \dots, x^n), \quad i' = 1, \dots, n. \quad (I.107)$$

Предполагается, что зависимости (I.107) непрерывно дифференцируемы, причем

$$\det \left\| \frac{\partial \alpha^{i'}}{\partial x^i} \right\| \neq 0. \quad (\text{I.108})$$

Условие (I.108) обеспечивает существование обратного перехода к старым независимым переменным x^i :

$$x^i = x^i(\alpha^1, \dots, \alpha^n). \quad (\text{I.109})$$

Координатной линией называется линия, на которой все переменные $\alpha^{s'}$, кроме одной, например $\alpha^{i'}$, сохраняют постоянное значение.

Через каждую точку x проходит, очевидно, n координатных линий. Вектор

$$e_{i'} = \frac{\partial x}{\partial \alpha^{i'}} \quad (\text{I.110})$$

касается i' -й координатной линии; совокупность всех таких векторов в любой точке x линейно независима в силу условия (I.108) и их можно взять за базис в точке x . Этот базис называется *локальным базисом криволинейной координатной системы* в точке x ; при переходе от точки к точке он изменяется.

Базис e_i — косоугольный; при переходе от старой криволинейной системы (α^i) к новой криволинейной системе $(\alpha^{i'})$ по формуле

$$\alpha^{i'} = \alpha^{i'}(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \quad (\text{I.111})$$

с использованием правила дифференцирования сложной функции найдем

$$e_{i'} = \frac{\partial x}{\partial \alpha^{i'}} = \frac{\partial x}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha^{i'}}, \quad (\text{I.112})$$

т. е. роль матрицы перехода от старого базиса к новому играет матрица первых производных $\|\partial \alpha^i / \partial \alpha^{i'}\|$. Следовательно, все определения и утверждения, приведенные в § I.2, I.3 для случая косоугольной системы, дословно переносятся на случай криволинейной системы с заменой

$$A_{i'}^i = \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha^{i'}}(x). \quad (\text{I.113})$$

Займемся теперь выяснением вопроса о том, как изменяется тензорное поле при переходе из данной точки x в бесконечно близкую точку $x + dx$. Начнем со случая векторного поля $a = a(x)$. Никаких проблем не возникает, если система отсчета — декартова или косоугольная, общая для всего пространства; здесь применяются формулы и определения классического анализа. При использовании криволинейных систем и компонента a^i вектора a и базисные векторы $e_i = \partial x / \partial \alpha^i$ зависят от точки x , поэтому

$$da(x) = a(x + dx) - a(x) = \frac{\partial a}{\partial x^j} dx^j = \frac{\partial a}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} dx^j = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} e_i + a^i \frac{\partial e_i}{\partial \alpha^j} \right) dx^j. \quad (\text{I.114})$$

Разложим производные $\partial e_i / \partial \alpha^j$ по векторам базиса e_i :

$$\frac{\partial e_i}{\partial \alpha^j} = \Gamma_{ij}^k e_k \quad (\text{I.115})$$

и внесем (I.115) в (I.114), найдем

$$da(x) = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} e_i + a^i \Gamma_{ij}^k e_k \right) d\alpha^j = \left(\frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} + a^k \Gamma_{kj}^i \right) e_i d\alpha^j. \quad (I.116)$$

Величина, стоящая в последнем выражении в скобках, обозначается $\nabla_i a^i$ и называется *ковариантной производной* контравариантных компонентов векторного поля $a(x)$:

$$\nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial \alpha^j} + a^k \Gamma_{kj}^i; \quad (I.117)$$

она характеризует скорость изменения векторного поля в зависимости от изменения положения данной точки; первый член в правой части равенства (I.117) определяет эту скорость в зависимости от изменения криволинейных координат, второй — за счет изменения векторов локального базиса при переходе от точки к точке.

Очевидно, в декартовом базисе, общем для всего пространства,

$$\nabla_i a^i = \partial a^i / \partial x^i, \quad (I.118)$$

так как в этом случае $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$.

Используя разложение

$$a = a_i e^i \quad (I.119)$$

и тождество

$$(e^i, e_j) = \delta_j^i, \quad (I.120)$$

из которого следует, что

$$\left(\frac{\partial e^i}{\partial \alpha^k}, e_j \right) = - \left(e^i, \frac{\partial e_j}{\partial \alpha^k} \right) = - \Gamma_{ik}^j, \quad (I.121)$$

получим формулу для ковариантной производной от ковариантных компонентов вектора a :

$$\nabla_i a_j = \frac{\partial a_j}{\partial \alpha^i} - a_k \Gamma_{ij}^k. \quad (I.122)$$

Используя формулы (I.117), (I.122) и полиадные представления тензорного поля в локальном базисе, можем получить формулу для ковариантной производной любых компонентов тензора любого ранга; например,

$$\nabla_k T_{il}^j = \frac{\partial T_{il}^j}{\partial \alpha^k} - T_{il}^j \Gamma_{ik}^l + T_{il}^j \Gamma_{kl}^i. \quad (I.123)$$

Разумеется, что и здесь в общем декартовом базисе ковариантная производная совпадает с обычной.

Совокупность чисел Γ_{ij}^k называется *символом Кристоффеля II рода*; очевидно, символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, что следует из их определения (I.115) и определения векторов $e_i = \partial x / \partial \alpha_i$.

Упражнение. Доказать, что

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^k} \right), \quad (I.124)$$

а также что символы Кристоффеля не являются компонентами тензора третьего ранга.

Введем символический вектор-оператор ковариантного дифференцирования

$$\nabla = e^i \nabla_i, \quad (1.125)$$

компоненты которого — операторы ∇_i , действующие по формулам (I.117), (I.122).

Пользуясь правилом дифференцирования сложных функций, нетрудно показать, что компоненты ∇_i вектора ∇ в действительности подчиняются правилам преобразования ковариантных компонентов вектора.

Формулы (I.117) и (I.122) можно теперь интерпретировать как операции построения диады:

$$\nabla \otimes \mathbf{a} = e^i (\nabla_i a_k) \otimes e^k = \nabla_i a_k e^i \otimes e^k = \nabla_i a^k e \otimes e_k, \quad (1.126)$$

так как без труда доказывается, что эти формулы действительно определяют компоненты некоторого тензора ранга 2 (упражнение).

Тензор $\nabla \otimes \mathbf{a}$ называется градиентом векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{x})$.

Аналогичным образом определяется градиент любого тензорного поля $p_t(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \text{grad } p_t(\mathbf{x}) &= \nabla \otimes p_t = e^i \nabla_i t^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} = \\ &= \nabla_i t^{i_1, \dots, i_p} e^i \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Определение дивергенции и ротора (вихря). Дивергенцией тензорного поля $p_t(\mathbf{x})$ называется свертка вектора ∇ с тензором $p_t(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \text{div } p_t(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot p_t(\mathbf{x}) = (e^i, e_{i_1}) \nabla_i t^{i_1, \dots, i_p} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p} = \\ &= \nabla_i t^{i_1, i_2, \dots, i_p} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p}; \end{aligned} \quad (1.128)$$

ротором (вихрем) тензорного поля $p_t(\mathbf{x})$ называется векторное произведение $p_t(\mathbf{x})$ слева на вектор ∇ :

$$\text{rot } p_t(\mathbf{x}) = \nabla \times p_t(\mathbf{x}) = \nabla_i t^{i_1, \dots, i_p} (e^i \times e_{i_1}) \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_p}. \quad (1.129)$$

Пример. Пусть базис декартов $p_t = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, тогда:

$$\text{div } \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3}, \quad (1.130)$$

$$(\text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{x}))_i = E_{i/k} \nabla_j a_k = E_{i/k} \frac{\partial a_k}{\partial x^j}. \quad (1.131)$$

Теорема Гаусса — Остроградского (обобщенная). Пусть Ω — ограниченная область из R^n , S — ее граница, \mathbf{v} — внешняя по отношению к Ω нормаль к S , тогда

$$\int_{\Omega} \nabla \odot p_t d\Omega = \int_S \mathbf{v} \odot p_t dS, \quad (1.132)$$

где значок « \odot » означает операции свертки, векторного или тензорного умножения.

Пример. а. Пусть $\hat{rot} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\bigcirc = \cdot$; тогда вместо (I.132) будем иметь

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{x}) d\Omega = \int_S a_v dS \equiv \int_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (I.133)$$

(теорема Гаусса — Остроградского).

б. Пусть $\hat{rot} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\bigcirc = \times$, тогда

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{x}) d\Omega = \int_S (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) dS \quad (I.134)$$

(теорема Стокса).

Отметим в заключение этого раздела, что доказательство формулы (I.132) в принципе ничем не отличается от доказательства обычной теоремы Гаусса — Остроградского.

ПРИЛОЖЕНИЕ II
НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ
ИЗ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ
И ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ МЕТОДАМ ИХ РЕШЕНИЯ

§ II.1. Некоторые сведения из теории линейных операторных уравнений

Полученные в § 2.1—2.13 стационарные задачи содержат дифференциальное уравнение или систему уравнений вида

$$Lu = F \quad (\text{II.1})$$

и краевые условия

$$Mu|_{\Gamma} = y, \quad (\text{II.2})$$

представляющие собой ограничения как на саму функцию, так и на ее производные до порядка $2m-1$, где $2m$ — порядок дифференциального оператора L (в рассмотренных примерах $m=1$ и $m=2$).

Для того чтобы при исследовании вопроса о существовании и единственности решения задачи вида (II.1), (II.2) воспользоваться известными из общей теории теоремами, эти задачи необходимо прежде всего представить в виде операторных уравнений в подходящих функциональных пространствах:

$$Au = f. \quad (\text{II.3})$$

В каждой конкретной задаче переход от задачи (II.1), (II.2) к уравнению (II.3) осуществляется по-своему (см. § 2.14); для исследования линейных задач достаточно использовать аппарат теории гильбертовых пространств, точнее говоря, в задачах, содержащих эллиптические операторы порядка $2m$ (в предыдущих разделах было $m=1$ и $m=2$), достаточно использовать пространства С. Л. Соболева $W_p^l(\Omega)$ с $p=2$ и $l=m$. Напомним, что p — число, определяющее степень суммируемости в определении нормы в W_p^l :

$$\|u\|_{W_p^l} = \left\{ \sum_{|q| \leq l} \|u^{(q)}\|_{L_p^p}^p \right\}^{1/p}, \quad (\text{II.4})$$

l — максимальный порядок производных в (II.4);

$$u^{(q)} = \frac{\partial^{|q|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}; \quad (\text{II.5})$$

$$k_1 + \dots + k_n = |q|,$$

причем производные в (II.5) понимаются в обобщенном смысле. Используется также обозначение

$$W_q^l(\Omega) \equiv H^l(\Omega). \quad (\text{II.6})$$

Пусть $D_A \subset V$ — некоторое подмножество пространства V , предполагаемого гильбертовым, и пусть $R_A \subset H$ — подмножество некоторого другого также гильбертова пространства H . Пусть каждому элементу из D_A поставлен в соответствие один и только один элемент из R_A ; в этом случае будем говорить, что задан оператор A из V в H с областью определения D_A и областью значений R_A . Если оператор A обладает свойствами аддитивности и однород-

ности, т. е.

$$\left. \begin{aligned} A(\lambda u + \mu v) &= \lambda Au + \mu Av; \\ \forall u, v \in D_A, \quad \forall \lambda, \mu \in R, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.7})$$

то он называется линейным (R — множество действительных чисел).

Пусть $\{u_n\}$ — некоторая последовательность элементов из D_A , имеющая своим пределом элемент $u_0 \in D_A$; оператор A называется непрерывным, если

$$\lim_{u \rightarrow \infty} Au_n = Au_0. \quad (\text{II.8})$$

Линейный оператор называется ограниченным, если существует константа C , при которой

$$\|Au\| \leq C \|u\|, \quad \forall u \in D_A \quad (\text{II.9})$$

(норма $\|Au\|$ вычисляется, естественно, в пространстве H).

Нормой линейного ограниченного оператора называется величина

$$\|A\| = \sup_{v \in D_A} \frac{\|Av\|}{\|v\|}. \quad (\text{II.10})$$

Если $D_A = V$, то для практического вычисления нормы может быть использована формула

$$\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\|. \quad (\text{II.11})$$

Линейный ограниченный оператор непрерывен; линейный непрерывный оператор ограничен; аддитивный непрерывный оператор линеен. Последнее свойство линейного оператора иногда берется за исходное определение.

Если $H=R$ (R — числовая прямая), то оператор A называется функционалом (для обозначения функционалов будем также применять обозначения $f(u)$, $J(u)$, $\langle f, u \rangle$, ...).

Всякий линейный ограниченный в гильбертовом пространстве функционал $f(u)$ имеет вид скалярного произведения:

$$f(u) = (u, u^*), \quad (\text{II.12})$$

причем $\|f\| = \|u^*\|$ и элемент $u^* \in V$ определяется единственным образом (теорема Рисса).

Заданный на плотном множестве линейный оператор (функционал) можно расширить на все пространство с сохранением нормы (теорема о расширении).

Пусть $V \otimes V$ — прямое произведение гильбертова пространства самого на себя; функционал $a(u, v)$, заданный на $V \otimes V$, называется *билинейным* (билинейная форма), если он является линейным функционалом по каждому аргументу в отдельности. Если в определении билинейной формы положить $u \equiv v$, то функционал $a(u, u)$ можно считать заданным на V ; в этом случае $a(u, u)$ называют *квадратичным функционалом на V* .

Вводя в множестве линейных операторов, имеющих общую область определения D , операции сложения

$$C = A + B, \quad \text{если } Cu = Au + Bu, \quad \forall u \in D \quad (\text{II.13})$$

и умножения на число

$$C = \lambda A, \quad \text{если } Cu = \lambda Au, \quad \forall u \in D, \quad \forall \lambda \in R, \quad (\text{II.14})$$

превратим это множество в линейное пространство, которое будем обозначать $L(V; H)$. Вводя в $L(V; H)$ норму по формуле (II.10), превратим это пространство в нормированное. Если $D = V$ или является плотным подмножеством в V , то $L(V; H)$ будет банаховым.

Если $H=R$, то $L(V; R)$ называется дуальным (двойственным или сопряженным) к V и обозначается V' . Таким образом, V' есть пространство непрерывных линейных функционалов, заданных на V . С использованием V' в про-

странстве V вводится новое определение сходимости, называемой слабой сходимостью; последовательность $\{u_n\}$ называется слабо сходящейся к элементу $u_0 \in V$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u_0), \quad \forall f \in V'. \quad (\text{II.15})$$

Теорема Рисса устанавливает взаимно-однозначное соответствие между V и V' , которое сохраняет норму, следовательно, можно отождествить V и V' (заметим, что такое отождествление невозможно в комплексном случае).

Пусть $a(u, v)$ — билинейная непрерывная форма на $V \otimes V$; этой форме можно поставить в соответствие некоторый линейный оператор из $L(V; V)$, в самом деле, отображение

$$v \rightarrow a(u, v) \quad (\text{II.16})$$

является (при фиксированном u) линейным функционалом на V . По теореме Рисса существует и притом только один элемент $Au \in V$, для которого

$$a(u, v) = (Au, v). \quad (\text{II.17})$$

Оператор $u \rightarrow Au$ является линейным и непрерывным в силу тех же свойств формы $a(u, v)$ по отношению к аргументу u ; тем самым оператор из $L(V; V)$, соответствующий форме $a(u, v)$, построен.

Взаимно, если $A \in L(V; V)$, то оператор

$$(u, v) \rightarrow (Au, v) \quad (\text{II.17}')$$

из $V \otimes V$ в R является билинейным функционалом на $V \otimes V$ и в дальнейшем будет обозначаться через $a(u, v)$.

Рассмотрим вместо (II.16) отображение

$$u \rightarrow a(u, v) \quad (\text{II.18})$$

Как и выше, убеждаемся в том, что существует оператор A^* , для которого

$$a(u, v) = (u, A^*v) \quad (\text{II.19})$$

Таким образом, для всякого $A \in L(V; V)$ можно найти оператор $A^* \in L(V; V)$, для которого

$$(Au, v) = (u, A^*v). \quad (\text{II.20})$$

Оператор A^* называется сопряженным к A .

Если $A^* = A$, то оператор A называется *самосопряженным*.

Билинейная форма называется V -эллиптической (коэрцитивной или положительно определенной на V), если

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in V, \quad (\text{II.21})$$

где $\alpha > 0$ — константа и не зависит от u .

В доказательстве существования и единственности решения краевых задач вида (II.1) — (II.2) основную роль играет следующая теорема.

Теорема II.1 (Лакса — Мильграма). Если $a(u, v)$ — билинейная, непрерывная и V — эллиптическая форма, то эта форма определяет оператор $A \in L(V; V)$, имеющий обратный оператор $A^{-1} \in L(V; V)$, причем

$$\|A\| \leq \alpha^{-1}, \quad \|A^{-1}\| \leq M,$$

где α — константа V -эллиптичности; M — константа непрерывности.

Следствия из теоремы Лакса — Мильграма:

а) если в операторном уравнении (II.3) с линейным непрерывным оператором A элемент $f \in V$ и форма $(Au, v) \equiv a(u, v)$ является V -эллиптической, то это уравнение имеет решение и притом единственное;

б) если $a(u, v)$ — билинейная, непрерывная V -эллиптическая форма, $L(v)$ — линейный непрерывный на V функционал, то существует единственный элемент $u \in V$, для которого

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.22})$$

В самом деле, по теореме Рисса соотношение (II.22) можно записать в виде

$$A(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (\text{II.23})$$

т. е.

$$A(u) = f. \quad (\text{II.24})$$

Следствие а) позволяет утверждать, что решение этого уравнения существует и единственно.

Если форма (Au, v) является V -эллиптической, а оператор A — самосопряженным, то оператор A называют положительно определенным. Важность этого класса операторов заключается в том, что операторы, соответствующие большинству практически важных задач математической физики, в частности рассмотренных в главе 1, являются положительно определенными в соответствующим образом подобранных пространствах.

Докажем теперь теорему, являющуюся основной в применении вариационных методов. Пусть имеется уравнение

$$Au = f, \quad (\text{II.25})$$

где $A \in L(V; V)$, $f \in V$ и область D_A определения оператора A плотна в V . Пусть расширение A на все V по норме V является самосопряженным положительно определенным оператором. Заметим, что из теоремы Лакса — Мильграма следует существование и единственность решения уравнения (II.25), причем это решение может не принадлежать D_A ; будем называть его обобщенным решением уравнения (II.25). В дальнейшем под решением уравнения (II.25) будем всегда понимать обобщенное решение.

Теорема II.2. Решение u_0 уравнения (II.25) сообщает функционалу

$$J(u) = (Au, u) - 2(u, f) \quad (\text{II.26})$$

наименьшее значение. Обратно, элемент $u_0 \in A$, реализующий минимум функционала (II.26), является решением уравнения (II.25).

Доказательство. Пусть u_0 — решение уравнения (II.25), v — произвольный элемент из D_A . Введем разность $\eta = v - u_0$ и вычислим значение функционала (II.26) на элементе $v = u_0 + \eta$:

$$\begin{aligned} J(v) &= J(u_0 + \eta) = (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) + (Au_0, \eta) + \\ &+ (u_0, A\eta) + (A\eta, \eta) - 2(f, \eta) = J(u_0) + (A\eta, \eta) \geq J(u_0). \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Полученное неравенство доказывает первое из утверждений теоремы.

Пусть теперь элемент u_0 реализует минимум функционала (II.26). Как отмечено выше, u_0 может не принадлежать D_A , в этом случае уравнение (II.25) будем понимать в том смысле, который придается дифференциальным уравнениям в теории обобщенных функций.

Пусть v — произвольный элемент D_A ; по предположению

$$J(u_0 + \lambda v) \geq J(u_0), \quad \forall \lambda \in R. \quad (\text{II.28})$$

Из (II.28) следует, что

$$2(Au_0 - f, v) + \lambda^2(Av, v) \geq 0. \quad (\text{II.29})$$

В силу произвольности λ и положительной определенности A из (II.29) имеем

$$(Au_0 - f, v) = 0, \quad \forall v \in D_A. \quad (\text{II.30})$$

Так как D_A плотно в V , то из (II.30) следует (II.25) (с отмеченной выше оговоркой для случая $u_0 \in D_A$).

Докажем теперь теорему, используемую при исследовании некоторых нелинейных задач, и представляющую собой обобщение теоремы II.2.

Определение. Множество $U_d \subset V$ называется выпуклым, если из $u \in U_d$, $v \in U_d$ следует, что

$$(1 - \theta)u + \theta v \in U_d, \quad \forall \theta \in (0, 1). \quad (\text{II.31})$$

Определение. Функционал $J(v)$, заданный на V , называется выпуклым, если

$$J((1-\theta)u+\theta v) \leq J(u)+\theta(J(v)-J(u)), \quad \forall \theta \in (0, 1). \quad (\text{II.32})$$

Если в (II.32) $v \neq u$ имеет строгое неравенство, то $J(v)$ называется строго выпуклым.

Легко проверить, что функционал, определенный формулой (II.26), является строго выпуклым в случае, когда A положительно определен.

Теорема II.3. Пусть выполнены предположения теоремы II.2 относительно функционала $J(v)$ и пусть существует элемент $v_0 \in U_d$, реализующий минимум функционала $J(v)$ на замкнутом выпуклом множестве $U_d \subset A$. Тогда этот элемент характеризуется тем, что

$$a(u_0, v-v_0) \geq (f, v-v_0), \quad \forall v \in U_d. \quad (\text{II.33})$$

Если $U_d \equiv V$, то вместо (II.33) имеем

$$a(u_0, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \quad (\text{II.34})$$

Доказательство. Пусть u_0 реализует минимум $J(v)$ на U_d , т. е.

$$J(u_0) = \inf_{v \in U_d} J(v). \quad (\text{II.35})$$

В силу выпуклости U_d для любых $v \in U_d$ имеем

$$(1-\theta)u_0 + \theta v \in U_d, \quad \forall \theta \in (0, 1). \quad (\text{II.36})$$

Из (II.35) и (II.36) следует, что

$$J(u_0) \leq J((1-\theta)u_0 + \theta v), \quad (\text{II.37})$$

или, что то же

$$\frac{J(u_0 + \theta(v-u_0)) - J(u_0)}{\theta} \geq 0. \quad (\text{II.38})$$

Переходя в (II.38) к пределу при $\theta \rightarrow 0$ и учитывая структуру $J(v)$, получим неравенство (II.33).

Обратно, пусть выполнено неравенство (II.33), в силу выпуклости $J(v)$ и U_d имеем

$$J(v) - J(w) \geq \frac{J((1-\theta)w + \theta v) - J(w)}{\theta} \quad \forall v, w \in U_d, \quad \forall \theta \in (0, 1). \quad (\text{II.39})$$

Полагая здесь $w = u_0$, переходя к пределу при $\theta \rightarrow 0$ и учитывая (II.33), найдем

$$J(v) \geq J(u_0), \quad \forall v \in U_d, \quad (\text{II.40})$$

т. е.

$$J(u_0) = \inf_{v \in U_d} J(v). \quad (\text{II.41})$$

Если $U_d = V$, то в (II.33) можно положить

$$v = u_0 \pm \varphi,$$

где φ — произвольный элемент из V . Таким способом найдем, что

$$a(u_0, v) = (f, v), \quad \forall v \in V,$$

и теорема полностью доказана.

Неравенства вида (II.33) называются *вариационными*; теория существования и единственности решений этих неравенств была построена в работах Лионса и Стампакья.

Уравнение (II.34) называется *обобщенным уравнением Эйлера*, так как из него следует классическое уравнение Эйлера «проблемы минимизации квадратичного функционала».

Уравнение (II.34) является обобщением на бесконечномерный случай условий стационарности функции многих переменных, состоящих в равенстве нулю ее частных производных

В последующем там, где это будет возможно, будем приводить краевые задачи к виду (II.34); этот вид удобен для формулировки и исследований приближенных методов решения.

Рассмотрим задачу о собственных значениях для уравнения

$$Au = \lambda u \quad (II.42)$$

или уравнени

$$Au = \lambda Bu, \quad (II.43)$$

где A и B — линейные операторы, подчиняющиеся определенным ограничениям (см. ниже). Эта задача возникает при определении собственных частот и собственных форм колебаний массивных тел, а также при определении критической нагрузки в задачах потери устойчивости.

Будем предполагать, что операторы A и B действуют в одном и том же гильбертовом пространстве V ; V — область определения A и B , V^* — область значений, где V^* — сопряженное к V , причем существует пространство H , такое, что V плотно в H , тогда H можно отождествить с некоторым подпространством V^* , если H отождествляется со своим двойственным; имеют место вложения: $V \subset H \subset V^*$. Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$. На практике, как правило, $H = L_2(\Omega)$, а V представляет собой пространство типа $H^m(\Omega)$ (или подпространство этого пространства)

Пусть теперь $B = I$ (тождественный), A — положительно определенный самосопряженный оператор. Известно, что в этом случае:

1) собственные значения вещественные и положительные;

2) собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны, т. е. $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, если $i \neq j$.

Перенумеруем собственные значения оператора A [т. е. уравнения (II.42)] в порядке возрастания:

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_k$$

(если одному собственному решению отвечает несколько собственных элементов, то это собственное значение повторяется соответствующее число раз), собственные элементы будем обозначать u_k ; очевидно, что u_k определяются с точностью до числового множителя, поэтому будем предполагать, что $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ для всех i .

Теорема II.4. Пусть A — положительно определенный самосопряженный оператор, тогда задача определения собственных значений и собственных элементов оператора A эквивалентна следующим задачам минимизации:

$$\lambda_1 = \min_v \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}, \quad (II.44)$$

$$\lambda_2 = \min_{\langle v, u_1 \rangle = 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}, \quad (II.45)$$

$$\lambda_k = \min_{\langle v, u_1 \rangle = 0, \dots, \langle v, u_{k-1} \rangle = 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}, \quad \lambda_k = \frac{\langle Au_k, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}. \quad (II.46)$$

Здесь предполагается, что элемент u_k , реализующий минимум функционала $J(v) = \langle Av, v \rangle / \langle v, v \rangle$, существует; естественно, что это предположение требует особого обоснования [25].

Пусть теперь B — также положительно определенный самосопряженный. Имеет место теорема.

Теорема II.5. Задача определения собственных значений и собственных элементов уравнения (II.43) эквивалентна следующим задачам минимизации:

$$\lambda_1 = \min_v \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle Bv, v \rangle}, \quad (\text{II.47})$$

$$\lambda_2 = \min_{\langle Bv, u_1 \rangle = 0} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle Bv, v \rangle}, \quad (\text{II.48})$$

$$\lambda_k = \min_{\substack{\langle Bv, u_j \rangle = 0 \\ j=1, \dots, k-1}} \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle Bv, v \rangle}, \quad \lambda_k = \frac{\langle Au_k, u_k \rangle}{\langle Bu_k, u_k \rangle}. \quad (\text{II.49})$$

(Упорядочение собственных чисел — положительных в силу свойств A и B — и собственных элементов уравнения (II.43) производится так же, как и в предыдущем случае.)

§ II.2. Приближенное решение операторных уравнений

Как было отмечено в предыдущем параграфе, а также в § 2.14, линейные задачи механики сплошной среды могут быть представлены в виде вариационного уравнения (интегрального тождества, принципа возможных перемещений и т. д.):

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (\text{II.50})$$

где $a(u, v)$ — билинейная форма, обладающая свойствами симметрии (что в настоящем параграфе нужно не всегда), положительной определенности и непрерывности; $\langle f, v \rangle$ — линейная непрерывная форма на V . Примеры уравнений вида (II.50) см. в § 2.14.

Большинство существующих в настоящее время методов приближенного решения уравнения (II.50) можно описать следующим образом *).

Пусть $\{h\}$ — последовательность элементов из R_1 , стремящаяся к нулю, и пусть каждому $h \in \{h\}$ соответствует некоторое подпространство $V_h \subset V$. В приложении обычно V_h — конечномерное подпространство. Приближенным решением u_h задачи (II.50) будем называть решение следующей задачи.

Найти $u_h \in V_h$, для которого

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (\text{II.51})$$

Теорема (лемма Сеа). Если

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall v \in A, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad (\text{II.52})$$

$$a(u, v) \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v, \quad M = \text{const}, \quad (\text{II.53})$$

то решение u_h задачи (II.51) существует, единственno и удовлетворяет неравенству

$$\|u_h - u\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|, \quad v_h \in V_h, \quad (\text{II.54})$$

где u — решение исходной задачи (II.50).

Доказательство. Из замкнутости V_h в V следует симметричность, непрерывность и положительная определенность формы $a(u_h, v_h)$ на V_h (предполагается, конечно, что норма в V_h индуцирована из V). По теореме II.1 предыдущего параграфа имеем существование и единственность решения задачи (II.51).

Докажем теперь оценку (II.54). Имеем по определению

$$a(u_h, w_h) = \langle f, w_h \rangle, \quad \forall w_h \in V_h \quad (\text{II.55})$$

*). Заметим, что приводимое ниже описание не включает в себя некоторые из вариантов метода конечных разностей.

Так как $V_h \subset V$, то из (II.50) следует

$$a(u, w_h) = (f, w_h), \quad \forall w_h \in V_h. \quad (\text{II.56})$$

Вычитая равенство (II.56) из (II.55), найдем

$$a(u_h - u, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in V_h. \quad (\text{II.57})$$

Положив в формуле (II.57) $w_h = u_h - v_h$, найдем

$$a(u_h - u, u_h - v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (\text{II.58})$$

Преобразуем равенство (II.58), пользуясь линейностью формы $a(u, v)$ по каждому аргументу:

$$\begin{aligned} a(u_h - u, u_h - v_h) &= a(u_h - u, u_h - u + u - v_h) = \\ &= a(u_h - u, u_h - u) + a(u_h - u, v_h - u) = 0, \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Таким образом,

$$a(u_h - u, u_h - u) = a(u_h - u, u - v_h). \quad (\text{II.60})$$

Используя неравенства (II.52) и (II.53), найдем

$$\alpha \|u_h - u\|^2 \leq M \|u_h - u\| \|v_h - u\|,$$

откуда и следует оценка (II.54).

Заметим, что правая часть оценки (II.54) пропорциональна расстоянию от точного решения u до подпространства V_h , следовательно, если это расстояние стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, то последовательность приближенных решений u_h будет стремиться к точному решению u .

Будем говорить, что последовательность приближенных решений $\{u_h\}$ сходится к точному решению u задачи (II.50), если

$$\lim \|u_h - u\| = 0 \quad (\text{II.61})$$

Следующая теорема удобна для применения при практическом конструировании пространства V_h .

Теорема II.7. Пусть существует пространство $W \subset V$, плотное в V , и отображение r_h из W в V_h , причем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\| = 0, \quad \forall v \in W; \quad (\text{II.62})$$

тогда при прежних предположениях относительно $a(u, v)$ будем иметь

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\| = 0. \quad (\text{II.63})$$

Доказательство. Пусть $\{u_h\}$ — некоторая последовательность из W , которая сходится в V к решению u ; такая последовательность существует в силу плотности W в V . Для каждого h определим $r_h u_h$ — элемент V_h ; по теореме II.6

$$\|u_h - u\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - r_h u_h\|. \quad (\text{II.64})$$

Используя неравенство треугольника, из оценки (II.64) найдем

$$\|u_h - u\| \leq \frac{M}{\alpha} [\|u - u_h\| + \|u_h - r_h u_h\|]. \quad (\text{II.65})$$

По выбору последовательности $\{u_h\}$ имеем

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n = h^{-1}, \quad \|u - u_h\| \leq \frac{\alpha}{2M} \epsilon. \quad (\text{II.66})$$

По предположению (II.62) существует число $h_0 > 0$, для которого при всех $|h| \leq h_0$:

$$\|u_h - r_h u_h\| \leq \frac{\alpha}{2M} \epsilon. \quad (\text{II.67})$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать числа $h_0 > 0$ и $N > 0$, что при $|h| \leq h_0$ и $n > N$ будем иметь

$$\|u_h - u\| < \varepsilon,$$

откуда и следует утверждение (II.63) теоремы.

Заметим, что при доказательстве теоремы II.6 симметричность формы $a(u, v)$ не использовалась. Оказывается, использование этого свойства позволяет в некоторых случаях улучшить оценку теоремы II.6.

Теорема II.8. Если выполнены условия теоремы II.6 и форма $a(u, v)$ симметрична, то

$$\|u_h - u\| \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|, \quad v_h \in V_h. \quad (\text{II.68})$$

Доказательство. По теореме II.2 решение задачи (II.50) эквивалентно задаче минимизации функционала

$$J(v) = a(v, v) - 2(v, f) \quad (\text{II.69})$$

в пространстве V , решение проблемы (II.51) — задаче минимизации функционала

$$J(v_h) = a(v_h, v_h) - 2(v_h, f) \quad (\text{II.70})$$

в пространстве V_h .

Рассмотрим выражение $a(u_h - u, u_h - u)$ и преобразуем его, пользуясь определениями (II.1) и (II.2) и тем, что равенства (II.50) и (II.51) справедливы при подстановке соответственно u вместо v и u_h вместо v_h :

$$\begin{aligned} a(u_h - u, u_h - u) &= a(u_h, u_h) - 2a(u_h, u) + a(u, u) = \\ &= J(u_h) - J(u) + 2(f, u_h) - 2a(u_h, u) + 2a(u, u) - 2(f, u) = \\ &= J(u_h) - J(u) = \inf_{v_h \in V_h} [J(v_h) - J(u)] = \\ &= \inf_{v_h \in V_h} [a(v_h, v_h) - 2(f, v_h) - a(u, u) + 2(f, u)] = \\ &= \inf_{v_h \in V_h} [a(v_h, v_h) - 2(u_h, v_h) - a(u, u) + 2a(u, u)] = \\ &= \inf_{v_h \in V_h} [a(v_h - u, v_h - u)]. \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

Оценивая левую часть неравенства (II.71) снизу по неравенству (II.52), а правую — сверху по (II.53), приходим к искомой оценке (II.68).

Отметим в заключение данного параграфа, что изложенные здесь результаты являются частным случаем общих исследований, проведенных Обеном (см. [28]).

Пример (метод Ритца). Пусть V_h — конечномерное подпространство и пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ — базис в этом подпространстве. Задача (II.51) запишется в виде

$$a(u_h, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (\text{II.72})$$

По определению базиса в конечномерном пространстве имеем разложение

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_{hj} \varphi_j. \quad (\text{II.73})$$

Подставляя формулу (II.73) в (II.72), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов u_{hj} :

$$\sum_{j=1}^N u_{hj} a(\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (\text{II.74})$$

Для случая симметричной формы $a(u, v)$ изложенный метод известен как метод Ритца, он был сформулирован впервые как приближенный способ минимизации квадратичного функционала.

Достаточным условием сходимости метода Ритца является требование того, чтобы $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ были частью полной в V системы функций, т. е. такой системы, для которой:

а) $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ линейно независимы при любом m ;

б) если V_N — подпространство, натянутое на $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$

плотно в V .

В самом деле, выберем в качестве подпространства V_h подпространство V_N , положим $h \sim 1/N$; подпространство W , о котором идет речь в теореме II.7, определим формулой

$$W = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, \quad (\text{II.75})$$

отображение r_h из W в V — формулой

$$r_h v = \pi_N v, \quad \forall v \in W, \quad (\text{II.76})$$

где π_N — оператор ортогонального проектирования из v на подпространство V_N .

Выполнение условия (II.62) теоремы II.7, гарантирующей сходимость последовательности $\{u_h\}$ к точному решению, вытекает из требования полноты

$\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ в V , которое, в частности, означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \pi_N v = v. \quad (\text{II.77})$$

Применение теоремы II.6 позволяет дать оценку погрешности:

$$\|u_h - u\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - \pi_N u\|. \quad (\text{II.78})$$

§ II.3. О решении некоторых нелинейных задач

Предположим, что краевая задача приведена к решению операторного уравнения

$$A(u) = 0 \quad (\text{II.79})$$

с нелинейным оператором A . Для исследования вопроса о существовании и единственности решения уравнение (II.79) иногда удобно привести к задаче минимизации функционала. Для формулировки теорем, обеспечивающих возможность такого перехода, понадобятся некоторые новые определения [3], [31].

Пусть даны два пространства V и H (банаховы или гильбертовы) и оператор A , действующий из V в H , что условно будем записывать в виде $A : V \rightarrow H$.

Пусть для некоторых элементов $u, \varphi \in V$ отношение $\frac{1}{t} [A(u + t\varphi) - A(u)]$ имеет конечный предел при $t \rightarrow 0$, который будем обозначать $A'(u, \varphi)$; этот предел называется *дифференциалом Гато* оператора A в точке u по направлению φ .

Если $A'(u, \varphi)$ существует для любых $\varphi \in V$, то оператор A называется *дифференцируемым по Гато* в точке u . Если $A'(u, \varphi)$ существует для любых $\varphi \in V$ и оператор $\varphi \rightarrow A'(u, \varphi)$ линеен и непрерывен, то этот оператор называется *производной по Гато* оператора A в точке u .

Пусть для некоторых элементов $u, \varphi, \psi \in V$ отношение

$$\frac{1}{t} [A'(u + t\varphi, \psi) - A'(u, \psi)]$$

имеет конечный предел при $t \rightarrow 0$, который будем обозначать $A''(u, \varphi, \psi)$; этот предел называется *вторым дифференциалом* оператора A в точке u по направлениям φ, ψ .

Если $A''(u, \varphi, \psi)$ существует для любых элементов $\varphi, \psi \in V$, то оператор A называется *дважды дифференцируемым по Гато в точке u* .

Рассмотрим теперь случай, когда $H=R$; оператор A теперь называют *функционалом*. Для функционала здесь будем использовать обозначение J ; таким образом, $J : V \rightarrow R$.

Если функционал J дифференцируем по Гато в любой точке отрезка $u + t\varphi$, $t \in [0, 1]$ в направлении φ , то существует число $t_0 \in [0, 1]$, для которого

$$J(u + \varphi) = J(u) + J'(u + t_0\varphi, \varphi). \quad (\text{II.80})$$

Если функционал J дважды дифференцируем по Гато в любой точке отрезка $u + t\varphi$, $t \in [0, 1]$ в направлениях (φ, φ) , то существует число $t_0 \in [0, 1]$, для которого

$$J(u + \varphi) = J(u) + J'(u + \varphi) + \frac{1}{2} J''(u + t_0\varphi, \varphi, \varphi) \quad (\text{II.81})$$

формулы (II.80) и (II.81) называются соответственно *формулой конечных приращений* и *формулой Тейлора*.

Для случая операторов эти формулы обобщаются следующим образом:

$$\langle g, A(u + \varphi) \rangle = \langle g, A(u) \rangle + \langle g, A'(u + t_0\varphi, \varphi) \rangle, \quad (\text{II.82})$$

$$\langle g, A(u + \varphi) \rangle = \langle g, A(u) \rangle + \langle g, A'(u, \varphi) \rangle + \frac{1}{2} \langle g, A''(u + t_0\varphi, \varphi, \varphi) \rangle. \quad (\text{II.83})$$

Здесь $g \in V'$, V' — пространство, сопряженное к V ; угловые скобки означают операцию вычисления функционала g на соответствующем элементе из V .

Пусть задан функционал $J : V \rightarrow R$ и пусть $J'(u, \varphi)$ линеен и непрерывен по φ . Элемент $g \in V'$, для которого

$$J'(u, \varphi) = \langle g, \varphi \rangle, \quad (\text{II.84})$$

называется *градиентом функционала J* в точке и обозначается $\text{grad } J(u)$. Подчеркнем, что определение градиента зависит от того, в каком пространстве

рассматривается данный функционал; например, если $J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx$

задан на $V = \left\{ v \mid v \in L_2(0, 1), v' \in L_2(0, 1), v(0) = v(1) = 0, \|v\|^2 = \int_0^1 (v')^2 dx \right\}$,

то градиент будет тождественным оператором; если же $V = \left\{ v \mid v \in L_2(0, 1), v' \in L_2(0, 1), v(0) = v(1) = 0, \|v\|^2 = \int_0^1 v^2 dx \right\}$, то $\text{grad } J(v) = -d^2v/dx^2$

Отметим также, что в случае, когда V — банахово пространство, фактическое вычисление градиента связано с решением вспомогательной задачи максимизации.

Будем использовать также обозначение

$$\text{grad } J(u) = J'(u).$$

Пусть задан функционал $J : V \rightarrow R$ и пусть второй дифференциал Гато $J''(u, \varphi, \psi)$ линеен и непрерывен по φ и ψ ; тогда оператор $H = H(u) : V \rightarrow V'$, для которого

$$J''(u, \varphi, \psi) = \langle H(u)\varphi, \psi \rangle, \quad (\text{II.85})$$

называется *гессианом функционала J в точке u* ; используется также обозначение

$$H(u) = J''(u).$$

В приложениях к механике очень большую роль играет свойство выпуклости функционалов. Функционал $J : V \rightarrow R$ называется *выпуклым на V* , если

$$J(u + t(v - u)) \leq J(u) + t[J(v) - J(u)], \quad \forall u, v \in V, \quad \forall t \in (0, 1). \quad (\text{II.86})$$

Если при $v \neq u$ в определении (II.86) имеет место строгое неравенство, то функционал называется *строго выпуклым*.

Если функционал $J : V \rightarrow R$ дифференцируем по Гато, то следующие утверждения эквивалентны:

- 1) J выпуклый на V ;
- 2) $J(v) \geq J(u) + J'(u, v - u), \quad \forall v, u \in V.$ (II.87)

Если J — строго выпуклый на V , то это утверждение эквивалентно строгому неравенству

$$J(v) > J(u) + J'(u, v - u), \quad \forall v, u \in V, \quad v \neq u. \quad (\text{II.88})$$

Используя это обстоятельство, можно установить следующий важный для практики критерий выпуклости: если функционал $J : V \rightarrow R$ дважды дифференцируем по Гато, причем

$$J''(u, \varphi, \varphi) \geq 0, \quad \forall u, \varphi \in V, \quad (\text{II.89})$$

то J — выпуклый на V ; если же

$$J''(u, \varphi, \varphi) > 0, \quad \forall u, v \in V, \quad \varphi \neq 0, \quad (\text{II.90})$$

то функционал J строго выпуклый на V .

При исследовании вопроса о существовании и единственности решения задач минимизации

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in K \subset V, \quad u \in K \quad (\text{II.91})$$

[не связанный пока с решением нелинейного уравнения (II.79)] важную роль играет свойство функционала J , называемое слабой полунепрерывностью снизу; функционал $J : V \rightarrow R$ называется *слабо полунепрерывным снизу* (сокращенно с. п. сн.) в точке $u \in V$, если для любой последовательности $\{v_N\}$, слабо сходящейся к u , имеет место неравенство

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} J(v_N) \geq J(u). \quad (\text{II.92})$$

Функционал $J : V \rightarrow R$ называется с. п. сн. в V , если он с. п. сн. в любой точке $u \in V$.

На практике проверять непосредственно свойство с. п. сн. затруднительно, поэтому обычно используется следующий критерий с. п. сн.: если функционал $J : V \rightarrow R$ выпуклый и его первый дифференциал Гато $J'(u, \varphi)$ линеен и непрерывен по φ , то функционал J с. п. сн.

Множество K из банаухова пространства V называется слабо замкнутым, если из любой последовательности $\{v_N\} \subset V$ можно извлечь хотя бы одну последовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $u \in K$.

Имеет место следующая теорема (существования), если:

1) $J(u) \neq +\infty$ и ни в одной точке не обращается в $-\infty$ (иногда для краткости в этом случае говорят, что функционал J собственный);

2) $J(v)$ слабо полунепрерывен снизу;

3) K — замкнутое множество в V ;

4) K — ограничено в V ;

4') $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty$ (в этом случае иногда говорят, что функционал J коэрцитивен на V);

5) V — рефлексивное банаухово пространство; тогда существует по крайней мере одно решение задачи минимизации (II.91).

Если, вдобавок, $J(v)$ строго выпуклый по V , множество K выпукло в V , то решение задачи (II.91) единственно.

Если функционал $J(v)$ дифференцируем по Гато и $K = V$, то в точке u , являющейся решением задачи (II.91), имеет место равенство

$$J'(u, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in V. \quad (\text{II.93})$$

Обратно, любое решение уравнения (II.93) является решением задачи минимизации функционала $J(v)$ на V .

Следовательно, если удается доказать, что уравнение (II.79) приводится к виду (II.93), т. е. что существует функционал $J: V \rightarrow R$, для которого

$$\langle A(u), v \rangle = J'(u, v), \quad \forall v, \quad (\text{II.94})$$

то решение нелинейного операторного уравнения (II.79) сводится к разысканию стационарных точек функционала $J(v)$ (т. е. таких точек, где $J'(u, v) = 0$), в случае выпуклости $J(v)$ — к минимизации функционала $J(v)$.

Если существует функционал $J(v): V \rightarrow R$, для которого выполнено равенство (II.94), то оператор $J(v)$ называется *потенциальным*, а функционал $J(v)$ — *потенциалом оператора* A . В случае когда A потенциален и его потенциал — $J(v)$, то в соответствии с определением (II.84) имеем

$$A(u) = \operatorname{grad} J(u). \quad (\text{II.95})$$

Имеет место теорема [3] (критерий потенциальности оператора $A: V \rightarrow V'$). Пусть:

1) $A: V \rightarrow V'$;

2) $A'(u, \varphi)$ — линеен и непрерывен в каждой точке V ;

3) $A'(u, \varphi)$ — непрерывен по u в V , тогда для того, чтобы оператор A был потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\langle A'(u, \varphi), \psi \rangle = \langle A'(u, \psi), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi, \psi; \quad (\text{II.96})$$

потенциал $J(v)$ при этом определяется по формуле

$$J(v) = J(u_0) + \int_0^1 \langle A(u_0 + t(v - u_0)), v - u_0 \rangle dt, \quad (\text{II.97})$$

где t — переменная интегрирования; u_0 — произвольный фиксированный элемент V ; на практике обычно выбирают $u_0 = 0$, $J(u_0) = 0$ и используют более простую формулу для потенциала:

$$J(v) = \int_0^1 \langle A(tv), v \rangle dt. \quad (\text{II.98})$$

В случае когда K не совпадает со всем V и не является подпространством V , задача (II.91) оказывается эквивалентной задаче решения неравенства

$$J'(u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K, u \in K, \quad (\text{II.99})$$

которое иногда называют *вариационным неравенством*.

Таким образом, если некоторая краевая задача, содержащая наряду с уравнениями некоторые неравенства (пример приведен в главе 5), приводится к неравенству вида

$$\langle A(u), v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K, u \in K, \quad (\text{II.100})$$

где K — выпуклое замкнутое подмножество в V , причем оператор A потенциален с потенциалом $J(v)$, то такая задача приводится к минимизации функционала $J(v)$ с ограничениями вида (II.91).

§ II.4. Преобразование двойственности в задачах минимизации

Материал, изложенный в данном параграфе, используется ниже при описании численных алгоритмов.

Рассматривается задача минимизации [38]

$$(P) \inf_{v \in V} J(v),$$

где $J: V \rightarrow R$, V — банахово (в приложениях — гильбертово) пространство, R — как обычно, множество действительных чисел.

Задача (P) содержит в себе рассмотренные в § 5.5 задачи минимизации с ограничениями, если положить

$$J(v) = \begin{cases} \tilde{J}(v), & v \in K, \\ +\infty, & v \notin K, \end{cases} \quad (\text{II.101})$$

где K — подмножество в V ; $\tilde{J}(v)$ — функционал типа рассмотренных в § 5.7—5.9.

Оказывается, вместо задачи (P) можно рассмотреть целый класс новых задач, решения которых можно получить и решение этой задачи. Один из возможных методов преобразования задачи (P) был определен и использован в § 4.7 (преобразование Фридрихса). Обобщением преобразования Фридрихса на случай задач минимизации с ограничениями является преобразование Юнга (Юнга — Фенхеля — Моро), которое сейчас и рассмотрим.

Введем пространство V^* , двойственное к V относительно билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ и пару пространств Y и Y^* , приведенных в двойственность посредством билинейной формы $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$; элементы пространств Y и Y^* будем обозначать p и p^* . Построим функционал $\Phi(v, p) : V \otimes Y \rightarrow R$, предполагаемый выпуклым по паре аргументов (v, p) , причем

$$\Phi(v, 0) = J(v). \quad (\text{II.102})$$

Функционал Φ называется *возмущением функционала J* .

Рассматривается задача

$$(P_p) \inf_{p \in Y} \Phi(v, p)$$

(p — фиксировано), называемая *возмущением задачи (P)* .

Преобразованием по Юнгу функционала $\Phi(v, p)$ называется функционал $\Phi^*(v^*, p^*) : V^* \otimes Y^* \rightarrow R$, определяемый по формуле

$$\Phi^*(v^*, p^*) = \sup_{\substack{v \in V \\ p \in Y}} \{ \langle v^*, v \rangle_V + \langle p^*, p \rangle - \Phi(v, p) \}. \quad (\text{II.103})$$

Задача

$$(P^*) \sup_{p^* \in Y^*} \{ -\Phi^*(0, p) \}$$

называется *двойственной задаче (P)* .

Теорема II.9. Пусть: 1) V — рефлексивное банахово пространство, 2) $\Phi \not\equiv +\infty$ и нигде не равна $-\infty$; 3) существует элемент $u_0 \in V$, при котором отображение $p \rightarrow \Phi(u_0, p)$ конечно и непрерывно в нуле (по p); 4) $\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(v, 0) = +\infty$, тогда каждая из задач (P) и (P^*) имеет по крайней мере одно решение и, кроме того,

$$\inf_{v \in V} J(v) = \sup \{ -\Phi^*(0, p^*) \}, \quad (\text{II.104})$$

$$\Phi(u, 0) + \Phi^*(0, p^*) = 0, \quad (\text{II.105})$$

где u — решение задачи (P) ; p^* — решение задачи (P^*) ; равенство (II.105) называется *соотношением экстремальности*.

Лагранжианом L относительно введенного возмущения называется функционал

$$L(v, p^*) = -\sup_{p \in Y} \{ \langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(u, p) \}. \quad (\text{II.106})$$

Теорема II.10. При выполнении предположений теоремы II.9 следующие утверждения эквивалентны:

- 1) \bar{u}, \bar{p}^* — соответственно решения задач (P) и (P^*) ;
- 2) пара (\bar{u}, \bar{p}^*) — седловая точка лагранжиана L на пространстве $V \otimes Y^*$, т. е.

$$L(\bar{u}, p^*) \leq L(\bar{u}, \bar{p}^*) \leq L(v, p^*), \quad \forall v, p^*. \quad (\text{II.107})$$

Используя теоремы II.9 и II.10 и вводя различные возмущения $\Phi(v, p)$, можно получить новые задачи, эквивалентные исходной задаче (P) .

Пример. Рассмотрим важный частный случай, когда

$$J(v) = f(v, \Lambda v), \quad (\text{II.108})$$

где $\iota : V \otimes Y \rightarrow R$, $\Lambda \in L(V, Y)$, и, следовательно, задача (P) имеет форму

$$\inf_{v \in V} \iota(v, \Lambda v). \quad (\text{II.109})$$

В качестве возмущения выбирается функционал

$$\Phi(v, p) = f(v, \Lambda v - p). \quad (\text{II.110})$$

Для постановки двойственной задачи надо вычислить

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\substack{v \in V \\ p \in Y}} [\langle p^*, p \rangle - f(v, \Lambda v - p)]. \quad (\text{II.111})$$

Для фиксированного v положим $q = \Lambda v - p$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, p^*) &= \sup_{v \in V} \sup_{q \in Y} [\langle p^*, \Lambda v \rangle - \langle p^*, q \rangle - f(v, q)] = \\ &= \sup_{\substack{v \in V \\ q \in Y}} [\langle \Lambda^* p, v \rangle + \langle -p^*, q \rangle - f(v, q)] = f^*(\Lambda^* p^*, -p^*). \end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

Двойственная задача P^* приобретает вид

$$\sup_{p^* \in Y^*} [-f^*(\Lambda^* p^*, -p^*)]. \quad (\text{II.113})$$

Функционал f в практических задачах имеет структуру

$$f(v, \Lambda v) = F(v) + G(\Lambda v) \quad (\text{II.114})$$

(например, F — линейная форма от перемещений, G — билинейная форма от деформаций, Λ — оператор вычисления деформаций).

Поскольку

$$f^*(v^*, p^*) = F^*(v^*) + G^*(p^*), \quad (\text{II.115})$$

то из приведенных выше рассуждений вытекает, что двойственная задача имеет вид

$$\sup_{p^* \in Y^*} [-F^*(\Lambda^* p^*) - G^*(-p^*)]. \quad (\text{II.116})$$

Пример. Рассмотрим задачу

$$\inf_{\substack{v \in V \\ Bv \leqslant 0}} J(v), \quad (\text{II.117})$$

где B — оператор (возможно нелинейный) из V в Y .

Рассмотрим возмущение (называемое возмущением Эрроу — Гурвица)

$$\Phi(v, p) = J(v) + \chi_{\epsilon_p}(v), \quad (\text{II.118})$$

где χ_{ϵ_p} — функция-индикаторика множества

$$\epsilon_p = \{v \in V : Bv \leqslant p\}. \quad (\text{II.119})$$

Для построения двойственной задачи надо вычислить

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\substack{v \in V \\ p \in Y^*}} \{\langle p^*, p \rangle - \Phi(v, p)\} = \sup_{\substack{v \in V \\ p \in Y^*, Bv \leqslant p}} \{\langle p^*, p \rangle - J(v)\}.$$

Для фиксированного v положим $q = -Bv + p$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, p^*) &= \sup_{v \in V} \sup_{\substack{q \in Y \\ q \geqslant 0}} \{\langle p^*, Bv \rangle + \langle p^*, q \rangle - J(v)\} = \\ &= \chi(-p^*) + \sup_{v \in V} \{\langle p^*, Bv \rangle - J(v)\}, \end{aligned} \quad (\text{II.120})$$

где

$$\chi(p^*) = \begin{cases} +\infty, & p^* < 0, \\ 0, & p^* \geq 0. \end{cases} \quad (\text{II.121})$$

Следовательно, двойственная задача имеет форму

$$\sup_{p^* \leq 0} \inf_{v \in V} \{-\langle p^*, Bv \rangle + J(v)\} \quad (\text{II.122})$$

и представляет собой задачу разыскания седловой точки.

§ II.5. Описание некоторых численных алгоритмов решения экстремальных *) задач

Литература, в том числе учебная, в которой излагаются приближенные методы решения экстремальных задач, в настоящее время насчитывает десятки книг и монографий, поэтому здесь будет приведено описание только некоторых методов, фактически применяемых для решения задач механики деформируемого твердого тела; используются материалы работ [30], [31], [36—38].

Начнем с рассмотрения задач минимизации

$$\min_{v \in K} J(v). \quad (\text{II.123})$$

Предполагается, что все условия, обеспечивающие существование и единственность решения, выполнены; условия, достаточные для сходимости соответствующего метода, будут сформулированы (без доказательства).

Методы, применяемые для решения задачи (II.123), дают последовательность элементов u^0, u^1, \dots , в том или ином смысле приближающихся к решению, причем иногда решение достигается за конечное число шагов (случай довольно редкий).

Градиентные методы. Эти методы представляют собой обобщение на сложнейшие задачи минимизации с ограничениями идеи перехода от данного приближения к следующему по направлению наибыстрейшего убывания функции $J(v)$ (будем считать, что каким-либо из методов функционал $J(v)$ приближен функцией конечного числа переменных, т. е. $v \in R^N$, $N < +\infty$).

Здесь возможны два варианта:

а) определяется направление наибыстрейшего убывания функции $J(v)$ в данной точке u^k (в случае дифференцируемости совпадающее с направлением антиградиента $-\operatorname{grad} J(u^k)$ без учета ограничения $v \in K$, после чего производится движение вдоль направления $-\operatorname{grad} J(u^k)$, т. е. вычисляется величина

$$u^{k+1/2} = u^k - \rho_k \operatorname{grad} J(u^k), \quad (\text{II.124})$$

где ρ_k — числовой параметр, позволяющий управлять сходимостью метода; и наконец, производится проверка условия $u^{k+1} \in K$. Если это условие не выполнено, то происходит возврат за границу множества K кратчайшим путем, т. е. строится элемент

$$u^{k+1} = P_K u^{k+1/2}, \quad (\text{II.125})$$

где P_K — оператор ортогонального проектирования на множество K ;

б) учет ограничения $v \in K$ производится после вычисления направления наибыстрейшего убывания функции $J(v)$; отметим, что если в процессе построения последовательных приближений u^R находится на границе множества K , направление $-\operatorname{grad} J(v)$ идет вдоль границы или вне множества K , то сначала производится проектирование полупрямой, исходящей из точки u^k

*) Под экстремальными задачами понимаются задачи минимизации или задачи разыскания седловой точки функционалов, отвечающие рассматриваемым в книге краевым задачам.

по направлению $\operatorname{grad} J(u^k)$ на границу множества K и после этого производится минимизация $J(v)$ на линии, представляющей собой проекцию упомянутой прямой. Алгоритм а) называется *градиентным методом с поточечным проецированием*, алгоритм б)—*методом проекции градиента*. Особенность просто метод проекции градиента реализуется в случае линейных ограничений. Если приближение u^k находится на гиперплоскости, заданной уравнением

$$Av = b, \quad (II.126)$$

то проекция направления $a = -\operatorname{grad} J(u^k)$ на гиперплоскость (II.126) дается формулой

$$P(a) = [I - A^\top (AA^\top)^{-1} A]a + A^\top (AA^\top)^{-1} b. \quad (II.127)$$

При движении вдоль прямой с направляющим вектором (II.127) может произойти выход за пределы множества K (внутрь попасть нельзя в силу выпуклости этого множества), поэтому в таком случае происходит переход с одной грани множества K на другую (возможно меньшей размерности — на ребро). Если ограничения нелинейны, то сначала в точке u^k производится линеаризация, после чего проектирование градиента производится на плоскость, касательную к границе множества K в точке u^k , после минимизации на полу-прямой — возврат на границу K кратчайшим путем.

При достаточно малом шаге градиентные методы сходятся к решению при выполнении тех же предложений, что и в теореме существования и единственности.

Методы релаксации. Эти методы очень просты в программировании, однако обладают тем недостатком, что в задачах минимизации с ограничениями могут возникать точки блокировки. Приведем поэтому формулировку сразу для случая, когда никаких неприятностей не возникает.

Итак, пусть

$$\left. \begin{aligned} K &= \prod_{i=1}^N K_i, \\ K_i &= [a_i, b_i], \quad a_i = \text{const}; \quad b_i = \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (II.128)$$

(может быть, $a_i = -\infty$, $b_i = +\infty$). Переход от приближения u^k к u^{k+1} осуществляется за N шагов; i -й шаг состоит в решении задачи минимизации функций одной переменной:

$$\begin{aligned} J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, u_{i+1}^k, \dots, u_N^k) &\leqslant \\ &\leqslant J(u_1^k, \dots, u_{i-1}^k, v_i, u_{i+1}^k, \dots, u_N^k), \\ \forall v_i &\in K_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (II.129)$$

Данный метод называется *методом точечной релаксации*. Он является сходящимся при выполнении ограничения (II.128), предположения о непрерывной дифференцируемости функции J и условий теоремы существования и единственности.

Если поиск числа u_i^{k+1} производится с помощью алгоритма

$$u_i^{k+1} = \begin{cases} u_i^k + \delta^k, & \gamma_i^+ < \gamma_i^0, \\ u_i^k, & \gamma_i^0 \leqslant \gamma_i^+ \text{ и } \gamma_i^0 \leqslant \gamma_i^-, \\ u_i^k - \delta^k, & \gamma_i^- < \gamma_i^0, \end{cases} \quad (II.130)$$

где δ^k — заданное положительное число; γ_i^0 — число, стоящее в левой части неравенства (II.129),

$$\gamma_i^+ = J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^k + \delta^k, u_{i+1}^k, \dots, u_N^k),$$

$$\gamma_i^- = J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^k - \delta^k, u_{i+1}^k, \dots, u_N^k)$$

(причем при выполнении равенства

$$J(u^{k+1}) = J(u^k)$$

число δ^k уменьшается по заданному закону), то метод точечной релаксации называется *методом локальных вариаций* [36].

Если

$$V = \prod_{i=1}^N V_i, \quad K = \prod_{i=1}^N K_i, \quad K_i \subset V_i, \quad (\text{II.131})$$

где V_i — подпространство V размерности m_i ; $\sum m_i = N$; K_i — замкнуто и выпукло в V_i , и минимизация $J(v)$ осуществляется по группам переменных, принадлежащих поочередно множествам $K_i \subset V_i$, $i = 1, \dots, M$, то метод называется *методом блочной релаксации*.

Скорость сходимости метода точной релаксации можно увеличить с помощью введения параметра ω . Здесь переход от u_i^k к u_i^{k+1} осуществляется в два этапа: на первом этапе определяется число $u_i^{k+1/2}$, минимизирующее функцию одной переменной:

$$\begin{aligned} J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1/2}, u_{i+1}^k, \dots, u_N^k) &\leqslant \\ &\leqslant J(u_1^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, v_i, u_{i+1}^k, \dots, u_N^k), \end{aligned} \quad (\text{II.132})$$

$$\forall v_i \in R;$$

на втором — определяется u^{k+1} по формуле

$$u_i^{k+1} = P_{K_i}[(1-\omega)u_i^k + \omega u_i^{k+1/2}], \quad (\text{II.133})$$

где P_{K_i} — оператор проектирования на множество K_i .

Для случая квадратичного функционала $J(v)$, обладающего, как предполагалось выше, свойством строгой выпуклости и коэрцитивности, метод (II.132) — (II.133) сходится при

$$0 < \omega < 2. \quad (\text{II.134})$$

Если $\omega < 1$, то метод известен под названием *метода нижней релаксации*, если $\omega > 1$ — *верхней релаксации*.

Аналогичным способом строятся методы блочной верхней и нижней релаксации.

Методы штрафа. Будем предполагать, что множество K в задаче (II.123) определяется следующим образом:

$$K = \{v \mid G_j(v) \geqslant 0, 1 \leqslant j \leqslant m\}, \quad (\text{II.135})$$

где $G_j : V \rightarrow R$ предполагается вогнутой.

Среди методов штрафа различают методы внутренние, когда любое приближение лежит строго внутри множества K , и методы внешние, когда в поиске решения участвуют недопустимые точки. Внутренние методы называют иногда также методами барьерных функций.

Пример внутреннего метода. Вводится функционал

$$I(v, \varepsilon) = J(v) + \varepsilon \sum_{j=1}^m \frac{1}{G_j(v)}, \quad (\text{II.136})$$

где ε — параметр штрафа (при доказательстве сходимости $\varepsilon \rightarrow 0$).

Задача (II.123) заменяется задачей минимизации на множестве K^0 :

$$\min_{v \in K^0} I(v, \varepsilon), \quad (\text{II.137})$$

где K^0 — совокупность внутренних точек множества K .

Если множество K ограничено в V (или решение u достигается в точке, отстоящей от начала координат на конечном расстоянии), множество K^0 не пусто и выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи (II.123), то существует единственное решение u_ε задачи (II.137); $u_\varepsilon \rightarrow u$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где u — решение задачи (II.123); u_ε — решение задачи (II.137).

Пример внешнего метода. Вводится функционал

$$E(v, \varepsilon) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} G(v)^-, \quad (\text{II.138})$$

где

$$G(v)^- = \sum_{i=1}^m \sup [-G_i(v), 0]. \quad (\text{II.139})$$

Задача (II.123) заменяется задачей минимизации без ограничений

$$\min_{v \in V} E(v, \varepsilon). \quad (\text{II.140})$$

При выполнении условий теоремы о существовании и единственности решения задачи (II.123) решение u_ε задачи (II.140) существует и единственно при любом $\varepsilon > 0$ и, кроме того, $u_\varepsilon \rightarrow u$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пример метода штрафа для задач с ограничениями в виде уравнений (такие задачи были получены в § 5.9). Пусть ставится задача

$$\min_{v \in K} J(v), \quad (\text{II.141})$$

где

$$\begin{aligned} K = & \left\{ v \mid \begin{array}{l} G_i(v) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \\ G_i(v) = 0, \quad i = m+1, \dots, p, \end{array} \right\} \\ G_i : & V \rightarrow R, \quad i = 1, \dots, m; \\ G_i : & V \rightarrow Q, \quad i = m+1, \dots, p, \end{aligned} \quad (\text{II.142})$$

Q — векторное пространство

Зададим число $\varepsilon > 0$, положим $t \in R^m$ — вектор из R^m с компонентами t_i и составим функционал

$$J_\varepsilon(v, t) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \sum_{i=1}^m |G_i(v) - t_i|^2 + \sum_{i=m+1}^p \|G_i(v)\|_Q^2 \right\}. \quad (\text{II.143})$$

Задачу (II.141) заменим задачей

$$\min_{v \in V} J_\varepsilon(v, t) \quad t \in (R^m)^-, \quad (\text{II.144})$$

$(R^m)^- = R_1^- \otimes \dots \otimes R_m^-$ — неположительная полуось числовой прямой.

Задача (II.144) проще задачи (II.141) по той причине, что по старым переменным v теперь нет никаких ограничений, новые переменные t удовлетворяют очень простому ограничению неположительности. Кроме того, функционал (II.143) дифференцируем при переходе через границу K (в предположении достаточной гладкости функций G_i), и в этом — определенное преимущество данного метода перед предыдущим.

Методы, основанные на идее двойственности. При применении к задачам минимизации преобразования двойственности (см. предыдущий параграф), а также в процессе выполнения преобразования Фридрихса (см. § 4.7) возникают задачи отыскания седловой точки функционала (возникающие здесь же задачи максимизации решаются методами, изложенными в предыдущих параграфах), для решения которых были изобретены специальные алгоритмы, оказавшиеся весьма эффективными и в задачах механики.

Итак, рассмотрим задачу

$$\sup \inf L(v, p), \quad (\text{II.145})$$

где $B \subset Y$, $K \subset V$, V и Y — гильбертовы пространства; предполагается (как это в действительности и бывает в практических задачах), что лагранжан $L(v, p)$ имеет форму

$$L(v, p) = J(v) + \langle p, \Phi(v) \rangle, \quad (\text{II.146})$$

где $\Phi: K \rightarrow Y$ — оператор, не обязательно линейный.

Идея алгоритма состоит в том, что движение к решению происходит по направлению наибыстрейшего роста L по переменной p , которое совпадает с оператором Φ (упражнение), причем каждый шаг по p чередуется с минимизацией (каким-либо методом) функционала L по переменной v .

Описание алгоритма:

- 1) задается элемент $p^0 \in B$;
- 2) зная p^k , определяем u^k как элемент, минимизирующий $L(v, p^k)$ на множестве K ;
- 3) осуществляется переход от приближения p^k к p^{k+1} в соответствии с алгоритмом градиентного метода с поточечным проектированием:

$$p^{k+1} = P_B [p^k + \rho_k \Phi(u)], \quad (\text{II.147})$$

- 4) переход ко второму этапу.

Данный алгоритм называется *алгоритмом Удзавы*.

Сформулируем теорему о сходимости.

- Пусть:
- 1) множество K замкнуто, выпукло и непусто;
 - 2) множество B замкнуто, выпукло, непусто и ограничено;
 - 3) функционал J дифференцируем по Гато;
 - 4) $\langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq \alpha \|u - v\|_V^2$, $\forall u, v \in V$, $\alpha = \text{const}$, $\alpha > 0$;
 - 5) для всех $p \in B$ функционал $v \mapsto \langle p, \Phi(v) \rangle$ выпуклый полунепрерывный снизу на K ;
 - 6) $\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_Y \leq c \|u - v\|_V$, $\forall u, v \in K$;
 - 7) $0 < \rho_1 \leq \rho_k \leq \rho_2$, ρ_2 — достаточно мало.

Тогда

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - u\| = 0.$$

Рассмотрим теперь случай квадратичного функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} \leq \langle Av, v \rangle - \langle f, v \rangle = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle \quad (\text{II.148})$$

и снова вернемся к задаче (II.145) при условии (II.146), причем будем предполагать, что $K = V$ (т. е. по переменной v никаких ограничений нет) и что $\Phi \in L(V, V)$.

Конкретизируем второй этап алгоритма Удзавы, определив u^k из условия стационарности функционала $L(v, p^k)$ в точке u^k , т. е.

$$J'(u^k) + \Phi^* p^k = 0, \quad (\text{II.149})$$

или, учитывая структуру функционала J :

$$Au^k + \Phi^* p^k - f = 0. \quad (\text{II.150})$$

Если для решения линейного уравнения (II.148) применяется итерационный процесс, то, ограничиваясь лишь одним шагом этого процесса, приходим к алгоритму: зная u^k , p^k , определяем элемент u^{k+1} равенством

$$u^{k+1} = u^k - \rho_k S^{-1} [Au^k + \Phi^* p^k - f], \quad (\text{II.151})$$

где в случае конечного числа измерений S — или единичная матрица, или положительно определенная симметричная матрица, позволяющая увеличить скорость сходимости.

Переход от p^k к p^{k+1} осуществляется по формуле

$$p^{k+1} = P_B [p^k + \rho_{2k} \Phi(u^{k+1})]. \quad (\text{II.152})$$

Описанный алгоритм известен как *алгоритм Эрроу—Гурвица*, обычно полагают $\rho_{2k} = \rho_1 = \text{const}$; $\rho_{2k} = \rho_2 = \text{const}$.

При выполнении условий теоремы о сходимости алгоритма Удзавы алгоритм Эрроу—Гурвица также оказывается сходящимся, если только числа ρ_1 и ρ_2 подобраны надлежащим образом.

Отметим в заключение, что в конкретных задачах очень часто наиболее эффективным приемом оказывается комбинация нескольких методов, однако навыки выбора таких приемов появляются только в результате накопления опыта практической работы и на основе разумного использования информации о физических свойствах исследуемых явлений и процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения — М.: Мир, 1972. 316 с.
2. Богомолов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 3-е изд. — М.: Физматгиз, 1963. 406 с.
3. Вайберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972. 415 с.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. — М.: МГУ, 1971. 375 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967. 575 с.
6. Гловински Р., Лионс Ж.-П., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. — М.: Мир, 1979. 574 с.
7. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. — М.: Мир, 1965. 455 с.
8. Дюво Г., Лионс Ж.-П. Неравенства в механике и физике. — М.: Наука, 1980. 383 с.
9. Жермен П. Механика сплошных сред. — М.: Мир, 1965. 479 с.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975. 541 с.
11. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. — М.: МГУ, 1978. 287 с.
12. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970. 280 с.
13. Ильюшин А. А. Пластичность. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. 380 с.
14. Колтунов М. А., Кравчук А. С. Механика деформируемых сред. — М.: Изд-во МИЭМ, 1973. 162 с.
15. Кравчук А. С. К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров. — Прикл. мат. и мех., т. 41, 1977, № 2. 308—310 с.
16. Кравчук А. С. Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования. — Прикл. мат. и мех., т. 42, 1976, № 3. 466—474 с.
17. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1951. 380 с.
18. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. — М.—Л.: ОГИЗ, 1947. 464 с.
19. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.—Л.: ГИТЛ, 1950. 299 с.
20. Лионс Ж.-П. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. 414 с.
21. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. 939 с.
22. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975. 478 с.
23. Маиборода В. П. К вопросу применимости функций влияния, определяемых из квазистатических опытов, для решения динамических задач виброзащиты. — Механика полимеров, 1974, № 3. 537—540 с.
24. Маиборода В. П., Колтунов М. А. Условия проектирования амортизирующих и виброзащитных систем. — Механика полимеров, 1972, № 6. 1029—1034 с.
25. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. 512 с.
26. Михлин С. Г. Вариационно-сеточная аппроксимация. — В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Т. 48. — М.: Наука, 1974. 32—188 с.
27. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. 707 с.
28. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977. 383 с.

29. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред — М.: Мир, 1976. 464 с.
30. *Пищеничный Б. Н., Данилин Ю. М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975. 319 с.
31. *Сеа Ж.* Оптимизация. — М.: Мир, 1973. 244 с.
32. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. I, II. — М.: Наука, 1973.
33. *Стренг Г., Фикс Дж* Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977. 349 с.
34. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980. 495 с.
35. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциональных и интегро-дифференциальных уравнениях. — Ташкент: ФАН, 1971. 277 с.
36. *Черноуско Ф. Л., Баничук Н. В.* Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. — М.: Наука, 1973. 236 с.
37. Численные методы условной оптимизации: Сб. статей/Под ред. Ф. Гилла и У. Миоррэа: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. 290 с.
38. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные задачи. — М.: Мир, 1979. 399 с.
39. *Babuska I.* Error Bounds for Finite Element Method. *Numer. Math.*, 1971, v. 16, № 3. 322—333 p.
40. *Ciarlet P. G.* Conforming and non—conforming finite elements methods for solving the plate problems. *Sect. Notes Math.* 1974, № 363. 21—31 p.
41. *Ciarlet P. G., Raviart P. A.* Interpolation theory over cusved elements with application to finite element methods. *Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 1972, v. 1, № 3. 217—249 p.
42. *Ciarlet P. G., Raviart P. A.* General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with application fo finite element mèthods. *Arch. for Rat. Mach and Analysis.* 1972, v. 46, № 3. 177—199 p.
43. *Ciarlet P. G.* The finite element method for elliptie problems. Amsterdam, North—Holland P. C., 1978. 530 p.
44. *Fraeis B. de Venbeke.* Displacement and equilibrium models in the finite element methods. Stress Analysis (O. C. Zienkiewicz and Holister Ed) ch. 9 (Wiley) New-Jork, 1965. 360 p.
45. *Lions J.-L., Stampacchia G.* Variational inequalities. *Communs Pure Applied Math.*, 1967, XX. № 3. 493—519 p.
46. *Oden J. T., Lee J. K.* Theory of mixed and hybrid finite element approximations in linear elasticity. *Sect. Notes Math.* 1976, № 303. 90—109 p.
47. *Pin Tong.* An assumed stress hybrid finite element method for an in compressible and near—incompressible material. *Int. J. for sol. and Struct.* 1969, v. 5, № 5, 455—462 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<i>Глава 1.</i> Теория деформаций и напряжений. Законы сохранения	4
§ 1.1. Способы изучения движений деформируемых тел	4
§ 1.2. Тензоры деформаций. Линеаризация. Тензор скоростей деформации. Изменение площади элемента поверхности	6
§ 1.3. Определение поля перемещений по линейному тензору деформации. Условия сплошности	12
§ 1.4. Силы в механике сплошной среды. Внутренние напряжения	15
§ 1.5. Законы сохранения массы, импульса и момента импульса	20
§ 1.6. Законы сохранения энергии и баланса энтропии	25
§ 1.7. О постановках задач в механике деформируемых сред. Краевые условия	32
§ 1.8. О построении определяющих уравнений. Примеры	35
<i>Глава 2.</i> Теория и задачи линейно-упругих тел	47
§ 2.1. Закон Гука для случая изотропии и экспериментальное определение констант	47
§ 2.2. Применение законов термодинамики к описанию процесса деформирования упругих тел. Закон Диамеля — Неймана и система уравнений линейной термоупругости	50
§ 2.3. Полная система уравнений и условий трехмерной задачи теории упругости	54
§ 2.4. Плоские задачи	56
§ 2.5. Приведение плоских задач к задачам для бигармонического уравнения	59
§ 2.6. Теория кручения цилиндрических стержней	63
§ 2.7. Теория изгиба стержней Сен-Венана	69
§ 2.8. Элементарная теория изгиба	71
§ 2.9. Теория изгиба тонких пластин	77
§ 2.10. Фундаментальные решения. Функция Грина	86
§ 2.11. Построение функции Грина для однородной изотропной среды (тензора Кельвина — Сомилиано)	94
§ 2.12. Приведение основных задач теории упругости к интегральным уравнениям	98
§ 2.13. Постановки динамических задач	103
§ 2.14. Вариационные методы исследования основных краевых задач	108
<i>Глава 3.</i> Решение линейных задач на ЭВМ (I)	130
§ 3.1. Одномерная задача	130
§ 3.2. Алгоритм решения плоских и пространственных задач теории упругости	135
§ 3.3. Алгоритм решения задач об изгибе тонких пластин	146
§ 3.4. Алгоритм определения собственных значений и собственных элементов	155
<i>Глава 4.</i> Решение линейных задач на ЭВМ (II)	157
§ 4.1. Приведение метода конечных элементов к форме метода Ритца	157
§ 4.2. Интерполяция Лагранжа и конечные элементы для операторов II порядка	160
§ 4.3. Интерполяция Эрмита и конечные элементы для операторов порядка выше двух	172

§ 4.4. Исследование погрешности интерполяции для отдельного элемента	186
§ 4.5. О сходимости приближенных решений и об оценке их погрешности	192
§ 4.6. Построение криволинейных элементов	196
§ 4.7. Равновесные и смешанные конечные элементы	202
§ 4.8. Гибридные конечные элементы	208
<i>Глава 5.</i> Методы решения на ЭВМ некоторых нестационарных и нелинейных задач	212
§ 5.1. Общая схема решения нестационарных задач	212
§ 5.2. Теория линейно-вязкоупругих сред	215
§ 5.3. Постановка и решение краевых задач линейной вязкоупругости	240
§ 5.4. Деформационная теория пластичности и физически нелинейная теория упругости	262
§ 5.5. Вариационный метод решения краевых задач физически нелинейной теории упругости	272
§ 5.6. О решении задач с учетом геометрической нелинейности	276
§ 5.7. Вариационный метод решения некоторых задач теории идеальной пластичности	282
§ 5.8. Методы решения задач о соприкосновении твердых деформируемых тел	286
§ 5.9. О постановке и решении некоторых задач оптимизации (оптимального управления) в механике систем с распределенными параметрами	301
<i>Приложение I.</i> Некоторые сведения из тензорной алгебры и анализа	308
§ I.1. Тензоры в декартовом базисе	308
§ I.2. Применение косоугольных систем координат	313
§ I.3. Инварианты. Теорема Кэли—Гамильтона	318
§ I.4. Дифференцирование тензорных полей и интегральные теоремы	320
<i>Приложение II.</i> Некоторые сведения из теории операторных уравнений и по приближенным методам их решения	325
§ II.1. Некоторые сведения из теории линейных операторных уравнений	325
§ II.2. Приближенное решение операторных уравнений	331
§ II.3. О решении некоторых нелинейных задач	334
§ II.4. Преобразование двойственности в задачах минимизации	337
§ II.5. Описание некоторых численных алгоритмов решения экстремальных задач	340
<i>Литература</i>	346

**Михаил Андреевич Колтунов
Александр Степанович Кравчук
Валерий Прохорович Майборода**

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Зав. редакцией К. И. Аношина. Редактор М. А. Алексеева. Младший редактор Н. М. Иванова. Художественный редактор Т. А. Дурасова. Технический редактор Е. И. Герасимова.
Корректор Р. К. Косякова

ИБ № 4226

Изд. № ОТ-328. Сдано в набор 20.07.82. Подп. в печать 11.11.82. Формат 60×90^{1/16}.
Бум. тип. № 2. Гварнитура литературная. Печать высокая. Объем 22 усл. печ. л.
22 усл. кр.-отт. 20,47 уч.-изд. л. Тираж 9000 экз. Зак. 1339. Цена 95 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Наглядная ул., д. 29/14

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский просп., 15, в Московской типографии № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, 129041,
Б. Переяславская ул., 46.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
ВЫПУСТИТ В СВЕТ В 1983 ГОДУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВТУЗОВ
СЛЕДУЮЩИЕ УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ:**

Бурчаков Ю. И., Гнедин В. Е., Денисов В. М. Строительная механика: Учеб. пособие. — 22 л., ил. — В пер.: 85 к.

В пособии изложены основные методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем на неподвижную и подвижную нагрузки. Даны основы расчета сооружений с учетом пластических свойств материала применительно к конструкциям подземной крепи и надшахтных сооружений.

Изложена теория расчета подпорных стенок.

Все основные расчеты приводятся в матричной форме.

Для студентов горных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Строительство подземных сооружений и шахт».

Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с франц. — 30 л., ил. — Пер. изд.: Париж, 1973. — В пер. 2 р. 40 к.

Книга является введением в современную механику сплошных сред. В ней изложена общая теория определяющих уравнений и термодинамики сплошных сред. Рассмотрена общая теория деформаций (нелинейный случай), построены модели гиперупругой среды и рассмотрены частные случаи модели пластической среды, вязкоупругость и теория течения вязких жидкостей. В приложениях приведен весь необходимый математический и термодинамический аппарат.

Для студентов, аспирантов и преподавателей вузов.

Рекач В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. — 18 л., ил. — В пер. 85 к.

В пособии изложены методы решения задач прикладной теории упругости, приведены расчеты плоской гибкой нити, сплошного стержня, тонкостенного стержня открытого профиля, тонких пластиночек и оболочек, толстых плит, призматических пространственных рам, массивных тел и непрерывных сред. Каждая глава содержит общие положения, принятые рабочие гипотезы, расчетные уравнения на прочность, устойчивость и ко-

лебания. В конце главы приведены решения характерных задач.

Во 2-е издание (1-е вышло в 1973 г.) введен расчет плоского стержня по деформированному состоянию.

Для студентов строительных специальностей вузов.

Степин П. А. Сопротивление материалов: Учебник. — 7-е изд., стереотип. — 20 л., ил. — В пер.: 80 к.

В учебнике изложены основы сопротивления материалов в соответствии с программой курса в объеме 80—120 часов.

По сравнению с предыдущим изданием (1979 г.) внесены некоторые изменения редакционного характера, учтены новые ГОСТы.

Для студентов немашиностроительных специальностей вузов.

Уважаемые читатели!

Издательство «Высшая школа» выпускает учебники, учебные и методические пособия, плакаты. Подробнее познакомиться с учебной литературой вам поможет аннотированный план выпуска литературы на 1983 год (вузы и техникумы), который имеется в книжных магазинах.

Предварительные заявки на книги вы можете сделать в магазинах Книготорга или потребительской кооперации.

539
К61

ВЫСШЕЕ
ОБРАЗОВАНИЕ

1302579

М.А.КОЛТУНОВ, А.С.КРАВЧУК, В.П.МАЙБОРОДА

ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА
ДЕФОРМИРУЕМОГО
ТВЕРДОГО ТЕЛА