Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления» (ИУ)

КАФЕДРА «Информационная безопасность» (ИУ8)

Отчёт

по лабораторной работе № 1
по дисциплине «Теория Систем и Системный Анализ»

Тема: «Исследование методов прямого поиска экстремума унимодальной функции одного переменного»

Вариант №15

Выполнил: Петросян А.Р.,
студент группы ИУ8-32

Проверил: Коннова Н. С.,
доцент каф. ИУ8

г. Москва,
2020 г.

1. Цель работы

Исследовать функционирование и провести сравнительный анализ различных алгоритмов прямого поиска экстремума (пассивный поиск, метод дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи) на примере унимодальной функции одного переменного.

2. Постановка задачи

Унимодальная функция: $x^2 \cdot \sin(x)$

Отрезок поиска: $[9, 12]$

Методы поиска: оптимальный пассивный, Фибоначчи

Наибольшая длина интервала неопределенности: 0.1

3. Ход работы

Рисунок 1 демонстрирует график унимодальной функции.

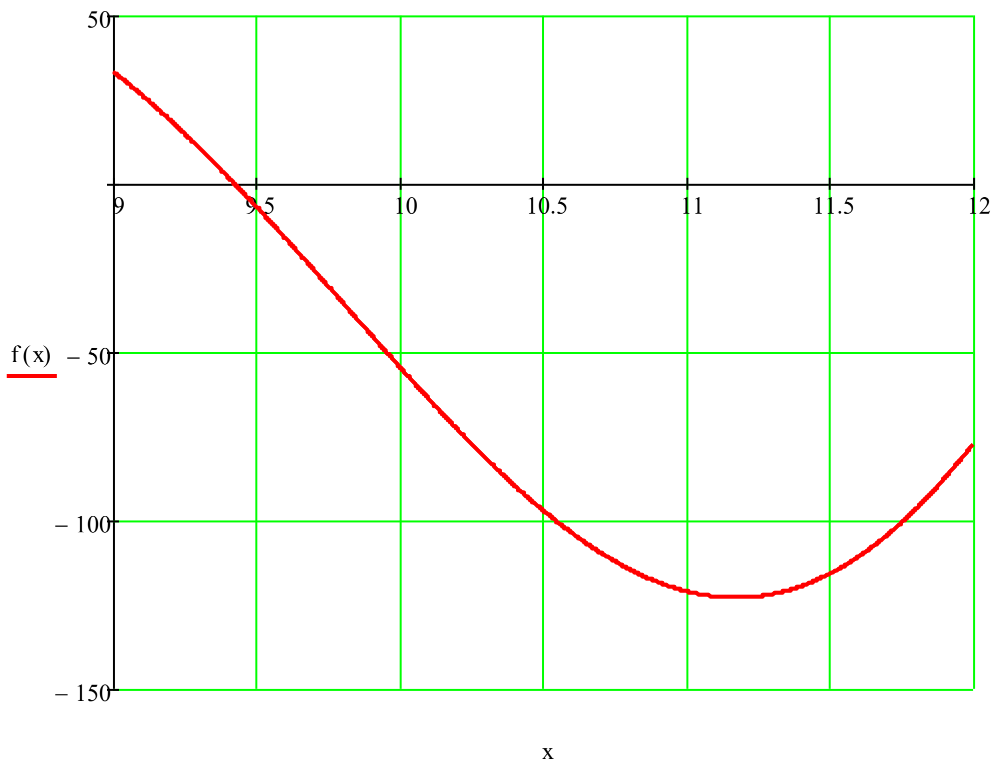

Рисунок 1 – график функции

Оптимальный пассивный поиск

Количество точек N на 1 меньше, чем количество отрезков.

$N = \frac{2(b-a)}{\varepsilon} - 1 = \frac{2\cdot(12-9)}{0.1} - 1 = 59$, где ε – наибольшая длина интервала неопределенности

Для интервала неопределенности 0.1 погрешность равна 0.05. Количество точек равно 59.

Точки расположены равномерно по отрезку, следовательно, координата точки с номером k:

$$x_k = \frac{k}{N+1}(b-a)$$

Таблица 1 – применение оптимального пассивного поиска

N	x	f(x)
1	9,0500	29,9817
2	9,1000	26,4245
3	9,1500	22,7167
4	9,2000	18,8654
5	9,2500	14,8784
6	9,3000	10,7641
7	9,3500	6,5312
8	9,4000	2,1892
9	9,4500	-2,2522
10	9,5000	-6,7824
11	9,5500	-11,3907
12	9,6000	-16,0660
13	9,6500	-20,7964
14	9,7000	-25,5700
15	9,7500	-30,3743
16	9,8000	-35,1967
17	9,8500	-40,0240
18	9,9000	-44,8431
19	9,9500	-49,6404
20	10,0000	-54,4021
21	10,0500	-59,1145
22	10,1000	-63,7635
23	10,1500	-68,3350
24	10,2000	-72,8150
25	10,2500	-77,1893
26	10,3000	-81,4438
27	10,3500	-85,5646
28	10,4000	-89,5377
29	10,4500	-93,3495
30	10,5000	-96,9865

31	10,5500	-100,4353
32	10,6000	-103,6830
33	10,6500	-106,7171
34	10,7000	-109,5251
35	10,7500	-112,0954
36	10,8000	-114,4164
37	10,8500	-116,4773
38	10,9000	-118,2678
39	10,9500	-119,7780
40	11,0000	-120,9988
41	11,0500	-121,9217
42	11,1000	-122,5388
43	11,1500	-122,8431
44	11,2000	-122,8281
45	11,2500	-122,4882
46	11,3000	-121,8187
47	11,3500	-120,8157
48	11,4000	-119,4759
49	11,4500	-117,7973
50	11,5000	-115,7786
51	11,5500	-113,4192
52	11,6000	-110,7198
53	11,6500	-107,6819
54	11,7000	-104,3079
55	11,7500	-100,6013
56	11,8000	-96,5664
57	11,8500	-92,2087
58	11,9000	-87,5344
59	11,9500	-82,5509

Минимум функции в точке -11.15 ± 0.05, значение функции в этой точке -122.8431.

Метод Фибоначчи

На первой итерации необходимо определить положение левой и правой точки:

$$x_1 = a + \frac{F(N-2)}{F(N)}(b-a), \qquad x_2 = a + \frac{F(N-1)}{F(N)}(b-a)$$

На следующих итерациях происходит исключение отрезка. Оставшаяся точка внутри нового отрезка поиска уже будет расположена в правильном отношении. Следовательно, необходимо найти только одну координату для новой точки.

После выполнения итераций (то есть, когда все точки будут расставлены) происходит вычисление интервала неопределенности. Если длина интервала неопределенности удовлетворяет условию, то вычисления прекращаются. Иначе, происходит переход к первой итерации с N, большим чем предыдущий на 1.

Реализуем метод Фибоначчи при N от 8 до 12, проанализируем точностью (рис. 2) (на последнем шаге примем $\delta = 0.0001$):

```
Метод  Фибоначчи:
Итерация|a       |b       |Длина   |x       |f(x)         |x1      |x2       |
0       | 9,0000 |12,0000 |3,0000  |10,5000 |-96,9865     |10,1455 |10,8545 |
1       |10,1455 |12,0000 |1,8545  |11,0727 |-122,2406    |10,8545 |11,2909 |
2       |10,8545 |12,0000 |1,1455  |11,4273 |-118,6024    |11,2909 |11,5636 |
3       |10,8545 |11,5636 |0,7091  |11,2091 |-122,7906    |11,1273 |11,2909 |
4       |10,8545 |11,2909 |0,4364  |11,0727 |-122,2406    |11,0182 |11,1273 |
5       |11,0182 |11,2909 |0,2727  |11,1545 |-122,8550    |11,1273 |11,1818 |
6       |11,1273 |11,2909 |0,1636  |11,2091 |-122,7906    |11,1818 |11,2364 |
7       |11,1273 |11,2364 |0,1091  |11,1818 |-122,8708    |11,1817 |11,1819 |
8       |11,1273 |11,1817 |0,0544  |11,1545 |-122,8549    |11,1817 |11,1819 |
Достигнутая точность при N = 8 равна 0.0272227
Минимум функции в точке x = 11.1545
Значение функции в этой точке f(x) = -122.855
-----------------------------------------------------------
Итерация|a       |b       |Длина   |x       |f(x)         |x1      |x2       |
0       | 9,0000 |12,0000 |3,0000  |10,5000 |-96,9865     |10,1461 |10,8539 |
1       |10,1461 |12,0000 |1,8539  |11,0730 |-122,2444    |10,8539 |11,2921 |
2       |10,8539 |12,0000 |1,1461  |11,4270 |-118,6128    |11,2921 |11,5618 |
3       |10,8539 |11,5618 |0,7079  |11,2079 |-122,7963    |11,1236 |11,2921 |
4       |10,8539 |11,2921 |0,4382  |11,0730 |-122,2444    |11,0225 |11,1236 |
5       |11,0225 |11,2921 |0,2697  |11,1573 |-122,8609    |11,1236 |11,1910 |
6       |11,1236 |11,2921 |0,1685  |11,2079 |-122,7963    |11,1910 |11,2247 |
7       |11,1236 |11,2247 |0,1011  |11,1742 |-122,8760    |11,1573 |11,1910 |
8       |11,1236 |11,1910 |0,0674  |11,1573 |-122,8609    |11,1572 |11,1574 |
9       |11,1572 |11,1910 |0,0338  |11,1741 |-122,8760    |11,1572 |11,1574 |
Достигнутая точность при N = 9 равна 0.0169039
Минимум функции в точке x = 11.1741
Значение функции в этой точке f(x) = -122.876
-----------------------------------------------------------
Итерация|a       |b       |Длина   |x       |f(x)         |x1      |x2       |
0       | 9,0000 |12,0000 |3,0000  |10,5000 |-96,9865     |10,1458 |10,8542 |
1       |10,1458 |12,0000 |1,8542  |11,0729 |-122,2430    |10,8542 |11,2917 |
2       |10,8542 |12,0000 |1,1458  |11,4271 |-118,6089    |11,2917 |11,5625 |
3       |10,8542 |11,5625 |0,7083  |11,2083 |-122,7941    |11,1250 |11,2917 |
4       |10,8542 |11,2917 |0,4375  |11,0729 |-122,2430    |11,0208 |11,1250 |
5       |11,0208 |11,2917 |0,2708  |11,1563 |-122,8588    |11,1250 |11,1875 |
6       |11,1250 |11,2917 |0,1667  |11,2083 |-122,7941    |11,1875 |11,2292 |
7       |11,1250 |11,2292 |0,1042  |11,1771 |-122,8749    |11,1667 |11,1875 |
8       |11,1250 |11,1875 |0,0625  |11,1563 |-122,8588    |11,1458 |11,1667 |
9       |11,1458 |11,1875 |0,0417  |11,1667 |-122,8738    |11,1666 |11,1668 |
10      |11,1666 |11,1875 |0,0209  |11,1770 |-122,8750    |11,1666 |11,1668 |
Достигнутая точность при N = 10 равна 0.0104667
Минимум функции в точке x = 11.177
Значение функции в этой точке f(x) = -122.875
```

```
-----------------------------------------------------------
Итерация|a       |b       |Длина  |x       |f(x)         |x1      |x2      |
0       | 9,0000 |12,0000 |3,0000 |10,5000 |-96,9865     |10,1459 |10,8541 |
1       |10,1459 |12,0000 |1,8541 |11,0730 |-122,2435    |10,8541 |11,2918 |
2       |10,8541 |12,0000 |1,1459 |11,4270 |-118,6104    |11,2918 |11,5622 |
3       |10,8541 |11,5622 |0,7082 |11,2082 |-122,7949    |11,1245 |11,2918 |
4       |10,8541 |11,2918 |0,4378 |11,0730 |-122,2435    |11,0215 |11,1245 |
5       |11,0215 |11,2918 |0,2704 |11,1567 |-122,8596    |11,1245 |11,1888 |
6       |11,1245 |11,2918 |0,1674 |11,2082 |-122,7949    |11,1888 |11,2275 |
7       |11,1245 |11,2275 |0,1030 |11,1760 |-122,8755    |11,1631 |11,1888 |
8       |11,1245 |11,1888 |0,0644 |11,1567 |-122,8596    |11,1502 |11,1631 |
9       |11,1502 |11,1888 |0,0386 |11,1695 |-122,8755    |11,1631 |11,1760 |
10      |11,1631 |11,1888 |0,0258 |11,1760 |-122,8755    |11,1759 |11,1761 |
11      |11,1631 |11,1759 |0,0128 |11,1695 |-122,8755    |11,1759 |11,1761 |
Достигнутая точность при N = 11 равна 0.00638777
Минимум функции в точке x = 11.1695
Значение функции в этой точке f(x) = -122.876
-----------------------------------------------------------
Итерация|a       |b       |Длина  |x       |f(x)         |x1      |x2      |
0       | 9,0000 |12,0000 |3,0000 |10,5000 |-96,9865     |10,1459 |10,8541 |
1       |10,1459 |12,0000 |1,8541 |11,0729 |-122,2433    |10,8541 |11,2918 |
2       |10,8541 |12,0000 |1,1459 |11,4271 |-118,6098    |11,2918 |11,5623 |
3       |10,8541 |11,5623 |0,7082 |11,2082 |-122,7946    |11,1247 |11,2918 |
4       |10,8541 |11,2918 |0,4377 |11,0729 |-122,2433    |11,0212 |11,1247 |
5       |11,0212 |11,2918 |0,2706 |11,1565 |-122,8593    |11,1247 |11,1883 |
6       |11,1247 |11,2918 |0,1671 |11,2082 |-122,7946    |11,1883 |11,2281 |
7       |11,1247 |11,2281 |0,1034 |11,1764 |-122,8753    |11,1645 |11,1883 |
8       |11,1247 |11,1883 |0,0637 |11,1565 |-122,8593    |11,1485 |11,1645 |
9       |11,1485 |11,1883 |0,0398 |11,1684 |-122,8750    |11,1645 |11,1724 |
10      |11,1645 |11,1883 |0,0239 |11,1764 |-122,8753    |11,1724 |11,1804 |
11      |11,1645 |11,1804 |0,0159 |11,1724 |-122,8762    |11,1723 |11,1725 |
12      |11,1723 |11,1804 |0,0081 |11,1763 |-122,8753    |11,1723 |11,1725 |
Достигнутая точность при N = 12 равна 0.00402878
Минимум функции в точке x = 11.1763
Значение функции в этой точке f(x) = -122.875
-----------------------------------------------------------

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.245 s
Press any key to continue.
```

Рисунок 3 – решение методом Фибоначчи

Заметим, что в последней строке x_1 и x_2 уже не нужны – в таблицах просто отображаются значения предыдущего шага.

Зависимость точности от числа итераций N:

N	Точность	x_{min}	$f(x_{min})$
8	0,0272227	11.1545	-122.855
9	0,0169039	11.1741	-122.876
10	0,0104667	11.177	-122.875
11	0,00638777	11.1695	-122.876
12	0,00402878	11.1763	-122.875

Для метода пассивного поиска зависимость точности от числа N:

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2(N+1)}$$

На Рисунке 3 приведен график зависимостей погрешности от количества итераций.

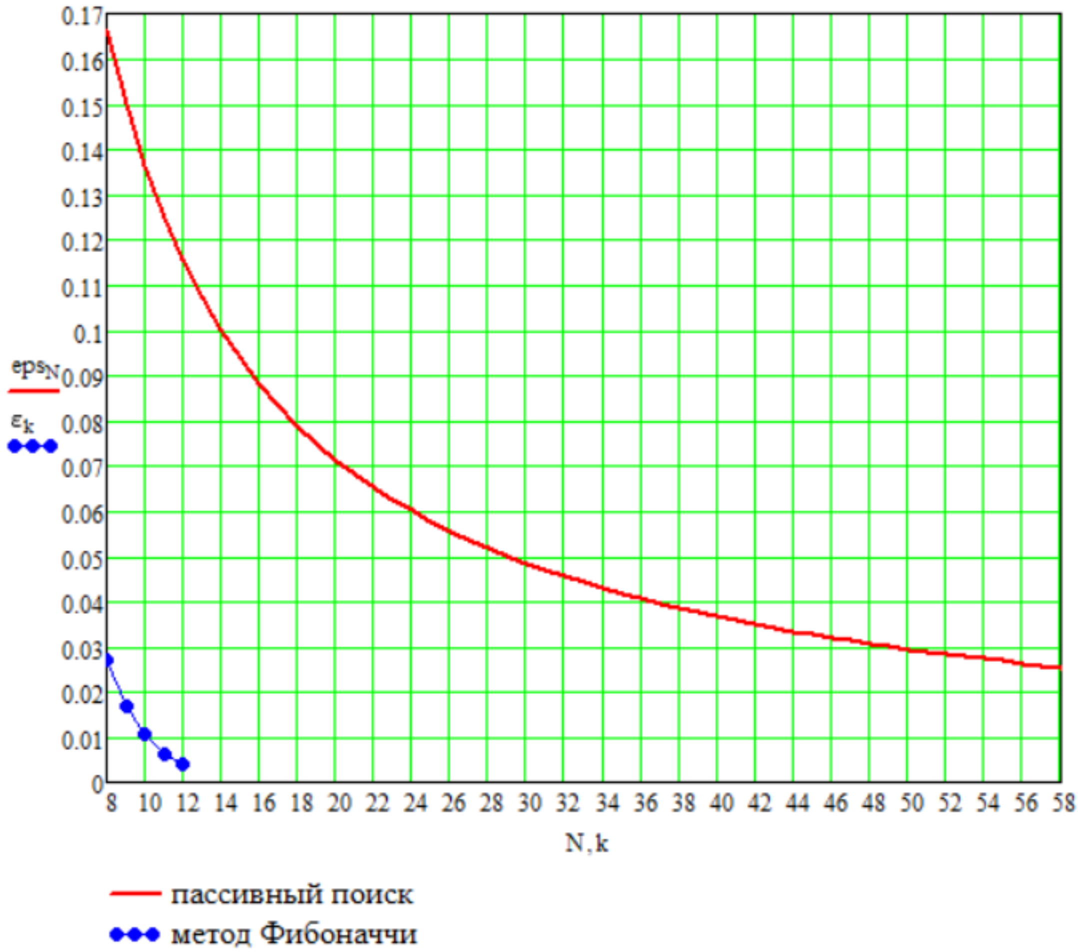

Рисунок 3 – график зависимости погрешности от количества итераций

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода оптимального пассивного поиска?

Ответ:

Заданный отрезок поиска делится на N+1 частей точками с координатами $x_k = \frac{b-a}{N+1} * k + a, k = 1, \dots, N$. Далее вычисляется значение функции в каждой из этих точек, среди которых ищется экстремум.

2. Поясните принцип разбиения интервала при последовательном поиске методами дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи.

Ответ:

- Для метода дихотомии на каждой итерации k интервал делится пополам, потом от середины интервала отступаем на δ влево и вправо, получаем в итоге две точки $x_{k1} = \frac{a+b}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{a+b}{2} + \delta$.
- Для метода «золотого сечения» интервал на каждой итерации делится по принципу «золотого сечения» - это такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей. Первая точка получается при делении в такой пропорции от начала отрезка, а вторая от его конца, т.е. в обоих направлениях.
- Для метода Фибоначчи на каждой итерации k интервал делим двумя точками, первая из которых делит отрезок в соотношении (части к целому) $\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}$, а вторая в соотношении $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$. Всего используем $n+1$ чисел Фибоначчи.

3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для методов оптимального пассивного и последовательного поиска.

Ответ:

Интервал неопределённости – это интервал в котором находится точка экстремума. Для метода пассивного поиска интервал определённости

$\left(x^* - \frac{b-a}{N+1}; x^* + \frac{b-a}{N+1}\right)$, где x^* - полученная точка с минимальным значением функции.

В методах последовательного поиска на каждой итерации k интервал определённости уменьшается ($l_1 -$ начальный отрезок неопределённости, т.е. в этой задаче $l_1 = b - a$):

- Для метода дихотомии длина интервала $l_k = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}} + 2\delta$.
- Для метода «золотого сечения» длина интервала $l_k = \frac{l_1}{\tau^k}, \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.
- Для метода Фибонначи длина интервала неопределенности сжимается с коэффициентом $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$ на каждой k-ой итерации.

4. Выводы

В данной лабораторной работе был найден минимум унимодальной функции с помощью метода оптимального пассивного поиска и метода Фибоначчи. Из приведенного выше хода работы можно сделать вывод, что для достижения заданной погрешности методу Фибоначчи нужно меньше точек, чем методу оптимального пассивного поиска. Однако первый предполагает априорное задание количества шагов поиска.

Приложение 1. Исходный код программы

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <locale>

using namespace std;

double fun(double x)
{
        return x*x*sin(x);
}

double Fibonacci(int N, double aa, double bb)
{

        double *F,a,b,sigma;//последовательность чисел Фибонначи
        F=(double*)calloc(N,sizeof(double));
   F[0]=1;F[1]=1;

        for (int i=2; i <= N+1; i++)
   {
      F[i]=F[i-1]+F[i-2];
   }

   printf("Итерация|a       |b       |Длина  |x       |f(x)\t|x1      |x2      |\n");
   double x1,x2;
   a=aa;b=bb;

   x1=a+F[N-1]*(b-a)/F[N+1];
   x2=a+F[N]*(b-a)/F[N+1];
   sigma=0.0001;

        for (int i=0; i <= N; i++)
   {
      if (i==N-1)
      {
         x1=x1-sigma;
         x2=x2+sigma;
      }
      printf("%d\t|%7.4f |%6.4f |%6.4f |%6.4f |%7.4f\t|%6.4f |%6.4f |\n",i,a,b,b-
a,(a+b)/2,fun((a+b)/2),x1,x2);
```

```
        if (i<N-1)//пока не достигнем F[0]=F[1]=1, тогда
        {
           if (fun(x1)>fun(x2))
              {
                 a=x1;x1=x2;x2=a+F[N-i-1]*(b-a)/F[N-i];
              }
           else
              {
                 b=x2;x2=x1;x1=a+F[N-i-2]*(b-a)/F[N-i];
              }
        }
        if (i==N-1)
        {
        if (fun(x1)>fun(x2)) a=x1;
           else  b=x1;
        }
     }
     free(F);
     cout << "Достигнутая точность при N = " <<N<< " равна "<< (b-a)/2 <<endl;
          return (a+b)/2;
}

int main()
{
     double a,b,xmin,fmin,eps=0.1;
     int Np;

     setlocale(LC_ALL, "russian");
     a=9; b=12;
     //оптимальный пассивный поиск
     Np=2*(b-a)/eps-1;
     printf("N\t|x\t\t|f(x)\t\t|\n");
     for (int i=1; i <= Np+1; i++)
     {
        xmin=a+eps*i/2;
        fmin=fun(xmin);
        printf("%d\t|%7.4f\t|%7.4f\t|\n",i,xmin, fmin);
     }

     cout << "\nМетод  Фибоначчи:"<< endl;

     for (int j=8; j <= 12; j++)
     {
        xmin=Fibonacci(j, a, b);
        fmin=fun(xmin);
```

```
        cout << "Минимум функции в точке x = " << xmin << endl;
        cout << "Значение функции в этой точке f(x) = " << fmin << endl;
        cout <<"------------------------------------------------------------"<< endl;
    }
    return 0;
}
```