Билеты для экзамена по математическому анализу

1 семестр

Искусственный интеллект и наука о данных

На основе учебника
О.Л. Виноградова
«Математический анализ»

Составители:

Deepseek, ChatGPT и Artemka

Билет 1. Теорема о существовании $\sup E$

Определение.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено сверху. Число $b \in \mathbb{R}$ называется **точной верхней гранью** множества E и обозначается $\sup E$, если:

1. $\forall x \in E : x \leq b$ (т.е. b — верхняя граница);
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in E : x > b - \varepsilon$ (т.е. любое число меньшее b не является верхней границей).

Теорема.

[существование $\sup E$] Всякое непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю грань.

Доказательство.

Пусть $E \neq \varnothing$, E ограничено сверху. Выберем $x_0 \in E$ и M — верхнюю границу E ($x_0 \leq M$). Положим $[a_1, b_1] = [x_0, M]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ обладает свойствами:

$$[a_1, b_1] \cap E \neq \varnothing, \quad (b_1, +\infty) \cap E = \varnothing.$$

Рассмотрим середину отрезка $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Если $(c_1, b_1] \cap E \neq \varnothing$, то положим $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$, иначе $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$. В обоих случаях:

$$[a_2, b_2] \cap E \neq \varnothing, \quad (b_2, +\infty) \cap E = \varnothing.$$

Продолжая процесс, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, для которых:

$$[a_n, b_n] \cap E \neq \varnothing, \quad (b_n, +\infty) \cap E = \varnothing, \quad b_n - a_n = \frac{M - x_0}{2^{n-1}} \to 0.$$

По теореме о вложенных отрезках (аксиома Кантора) существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам, причём $a_n \to c$, $b_n \to c$.

Покажем, что $c = \sup E$:

1. Если $x \in E$, то $x \leq b_n$ для всех n (иначе $x > b_n$ для некоторого n, что противоречит свойству $(b_n, +\infty) \cap E = \varnothing$). Переходя к пределу, получим $x \leq c$. Значит, c — верхняя граница.
2. Возьмём $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \to c$, найдётся N такой, что $a_N > c - \varepsilon$. По построению $[a_N, b_N] \cap E \neq \varnothing$, значит, существует $x \in E$, $x \geq a_N > c - \varepsilon$. Таким образом, $c - \varepsilon$ не является верхней границей.

Следовательно, $c = \sup E$. $\square$

Билет 2. Теорема о существовании $\inf E$

Определение.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, E ограничено снизу. Число $a \in \mathbb{R}$ называется **точной нижней гранью** множества E и обозначается $\inf E$, если:

1. $\forall x \in E : x \geq a$ (т.е. a — нижняя граница);
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in E : x < a + \varepsilon$ (т.е. любое число большее a не является нижней границей).

Теорема.

[существование $\inf E$] Всякое непустое ограниченное снизу подмножество $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю грань.

Доказательство.

Пусть E ограничено снизу. Рассмотрим множество $-E = \{-x : x \in E\}$. Оно ограничено сверху (так как E ограничено снизу). По теореме о существовании $\sup E$ у него существует $\sup(-E) = s$. Положим $i = -s$. Докажем, что $i = \inf E$:

1. Для любого $x \in E$ имеем $-x \in -E$, значит, $-x \leq s$, откуда $x \geq -s = i$. Следовательно, i — нижняя граница E.
2. Возьмём $\varepsilon > 0$. Так как $s = \sup(-E)$, существует $y \in -E$ такой, что $y > s - \varepsilon$. Пусть $y = -x$ для некоторого $x \in E$. Тогда $-x > s - \varepsilon$, т.е. $x < -s + \varepsilon = i + \varepsilon$. Значит, $i + \varepsilon$ не является нижней границей.

Таким образом, $i = \inf E$. □

Билет 3. Предел последовательности: определение, свойства, единственность

Определение.

Число $a \in \mathbb{R}$ называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Свойства:

1. **Единственность предела.** Если $x_n \to a$ и $x_n \to b$, то $a = b$.
2. **Ограниченность сходящейся последовательности.** Если $x_n \to a$, то $\exists M > 0\ \forall n : |x_n| \leq M$.
3. **Предельный переход в неравенстве.** Если $x_n \leq y_n$ для всех n и существуют пределы $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то $a \leq b$.
4. **Теорема о сжатой последовательности.** Если $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех n и $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$.

Доказательство.

[единственности] Предположим, что $x_n \to a$ и $x_n \to b$, $a \neq b$. Пусть $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2} > 0$. Тогда:

$$\exists N_1\ \forall n > N_1 : |x_n - a| < \varepsilon, \quad \exists N_2\ \forall n > N_2 : |x_n - b| < \varepsilon.$$

Возьмём $n > \max(N_1, N_2)$. Тогда:

$$|a - b| \le |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|,$$

что противоречиво. Значит, $a = b$. $\square$ **Доказательство.**

[ограниченности] Пусть $x_n \to a$. По определению предела, для $\varepsilon = 1$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется:

$$|x_n - a| < 1.$$

Рассмотрим два случая:

1. Для $n > N$:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

2. Для $n \le N$: конечное множество $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ограничено, так как оно конечно. Обозначим:

$$M_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}.$$

Тогда для всех $n \le N$:

$$|x_n| \le M_1.$$

Выберем:

$$M = \max\{M_1, 1 + |a|\}.$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \le M.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Альтернативное доказательство ограниченности:

Поскольку $x_n \to a$, для $\varepsilon = 1$ найдётся N такое, что для всех $n > N$:

$$|x_n - a| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x_n| < 1 + |a|.$$

Пусть

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |a|\}.$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \le M.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ ограничена. $\square$

Билет 4. $\lim c$, $\lim cx_n$, $\lim(x_n + y_n)$

Теорема.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ (постоянная последовательность).
2. Если $\lim x_n = a$, то $\lim(cx_n) = ca$.

3. Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то $\lim(x_n + y_n) = a + b$.

Доказательство.

1. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $N = 1$. Тогда для всех $n > N$ имеем $|c - c| = 0 < \varepsilon$.
2. Пусть $x_n \to a$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Если $c = 0$, то $cx_n = 0$, предел равен 0. Если $c \neq 0$, выберем N такой, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ для всех $n > N$. Тогда:

$$|cx_n - ca| = |c||x_n - a| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$. Для $\varepsilon > 0$ выберем N_1, N_2 такие, что:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N_1, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > N_2.$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Билет 5. $\lim(x_n y_n)$

Теорема.

Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то $\lim(x_n y_n) = ab$.

Доказательство.

Используем равенство:

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b.$$

Так как $x_n \to a$, последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $\exists M > 0\ \forall n : |x_n| \leq M$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Выберем N_1 такой, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b|+1)}$ для всех $n > N_1$. Выберем N_2 такой, что $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ для всех $n > N_2$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$:

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \cdot |b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Билет 6. $\lim 1/x_n$, $\lim y_n/x_n$

Теорема.

1. Если $\lim x_n = a \neq 0$ и $x_n \neq 0$ для всех n, то $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$.
2. Если $\lim y_n = b$, $\lim x_n = a \neq 0$ и $x_n \neq 0$, то $\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{b}{a}$.

Доказательство.

1. Пусть $a \neq 0$. Покажем, что $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \to 0$. Имеем:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n||a|}.$$

Так как $x_n \to a$, найдётся N_1 такой, что $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$ для всех $n > N_1$. Тогда $|x_n| > \frac{|a|}{2}$. Далее, для $\varepsilon > 0$ выберем N_2 такой, что $|x_n - a| < \frac{\varepsilon|a|^2}{2}$ для всех $n > N_2$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n > N$:

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| < \frac{\frac{\varepsilon|a|^2}{2}}{\frac{|a|}{2} \cdot |a|} = \varepsilon.$$

2. По пункту 1 $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$, по теореме о пределе произведения $y_n \cdot \frac{1}{x_n} \to b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$.

$\square$

Билет 7. Предельные неравенства

Теорема.

1. Если $x_n \leq y_n$ для всех n и существуют пределы $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то $a \leq b$.
2. Если $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех n и $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$.

Доказательство.

1. Предположим, что $a > b$. Пусть $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Тогда:

$$\exists N_1\ \forall n > N_1 : x_n > a - \varepsilon, \quad \exists N_2\ \forall n > N_2 : y_n < b + \varepsilon.$$

Для $n > \max(N_1, N_2)$ имеем:

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n,$$

что противоречит условию $x_n \leq y_n$. Значит, $a \leq b$.

2. Для $\varepsilon > 0$ выберем N такой, что для всех $n > N$ одновременно:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

Тогда $|y_n - a| < \varepsilon$, значит, $y_n \to a$.

$\square$

Билет 8. Предел монотонной возрастающей последовательности

Теорема.

Если последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, то она сходится, причём:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

Доказательство.

Пусть $E = \{x_n\}$. Так как E ограничено сверху, по теореме о существовании $\sup E$ существует $s = \sup E$. Покажем, что $x_n \to s$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению супремума существует N такой, что $x_N > s-\varepsilon$. В силу возрастания для всех $n > N$ имеем $x_n \geq x_N > s-\varepsilon$. Кроме того, $x_n \leq s$ для всех n. Следовательно, для всех $n > N$:

$$s-\varepsilon < x_n \leq s < s+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x_n - s| < \varepsilon.$$

$\square$

Билет 9. Предел монотонной убывающей последовательности

Теорема.

Если последовательность $\{y_n\}$ убывает и ограничена снизу, то она сходится, причём:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\}.$$

Доказательство.

Аналогично предыдущему. Пусть $i = \inf\{y_n\}$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Существует N такой, что $y_N < i+\varepsilon$. В силу убывания для всех $n > N$ имеем $y_n \leq y_N < i+\varepsilon$. Кроме того, $y_n \geq i$. Следовательно, для всех $n > N$:

$$i \leq y_n < i+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |y_n - i| < \varepsilon.$$

$\square$

Билет 10. Теорема Кантора о вложенных промежутках

Теорема.

Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных отрезков, т.е.:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n.$$

Пусть также выполняется условие:

$$b_n - a_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}.$$

Рассмотрим два подхода к доказательству.

Доказательство через супремум и инфимум (кратко) Множество $\{a_n\}$ ограничено сверху (например, числом b_1), а множество $\{b_n\}$ ограничено снизу (числом a_1). Пусть:

$$c = \sup\{a_n\}, \quad d = \inf\{b_n\}.$$

Так как $a_n \leq b_m$ для любых n, m (в частности, $a_n \leq b_n$), то $c \leq d$. Из условия $b_n - a_n \to 0$ следует, что $c = d$. Любое число $c \leq x \leq d$ принадлежит всем отрезкам. В частности, c принадлежит всем отрезкам, так как $a_n \leq c \leq b_n$ для всех n.

Доказательство через пределы (подробно)

1) Существование:

Из вложенности отрезков следует, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху (например, b_1), а последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу (например, a_1). Следовательно, существуют пределы:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Переходя к пределу в неравенстве $a_n \leq b_n$, получаем:

$$a \leq b.$$

Рассмотрим разность $b - a$. Из неравенств $a_n \leq a$ и $b \leq b_n$ следует:

$$b - a \leq b_n - a_n \quad \forall n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$0 \leq b - a \leq \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Следовательно, $b - a = 0$, то есть $a = b$. Обозначим эту общую точку через $c = a = b$.

Докажем, что $c \in [a_n, b_n]$ для всех n. Из монотонности и пределов:

$$a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n \leq b_n.$$

Таким образом, c принадлежит всем отрезкам.

2) Единственность:

Предположим, существует ещё одна точка $c_0 \in [a_n, b_n]$ для всех n. Тогда для любого n выполняется:

$$|c_0 - c| \leq b_n - a_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем:

$$|c_0 - c| \leq \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Следовательно, $c_0 = c$, что доказывает единственность точки пересечения.

Теорема Кантора о вложенных отрезках является одной из эквивалентных формулировок полноты множества действительных чисел.

Билет 11. Критерий Коши (необходимость)

Определение.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной** (сходящейся в себе), если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n, m > N : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Теорема.

[необходимость] Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальна.

Доказательство.

Пусть $x_n \to a$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Существует N такой, что для всех $n > N$ выполнено $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любых $n, m > N$:

$$|x_n - x_m| \le |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Билет 12. Критерий Коши (достаточность)

Теорема.

В $\mathbb{R}^m$ всякая фундаментальная последовательность сходится.

Доказательство.

1. Фундаментальная последовательность ограничена (лемма 6, § 3).
2. По принципу Больцано–Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to a$.
3. Покажем, что вся последовательность $x_n \to a$. Возьмём $\varepsilon > 0$. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, существует N_1 такой, что $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n, m > N_1$. Так как $x_{n_k} \to a$, существует K такой, что $|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $k > K$. Выберем k так, чтобы $n_k > \max(N_1, K)$. Тогда для любого $n > N_1$:

$$|x_n - a| \le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Билет 13. Бесконечные пределы, бесконечно большие и малые последовательности

Определение.

- $\lim x_n = +\infty$, если $\forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N : x_n > E$.
- $\lim x_n = -\infty$, если $\forall E > 0 \ \exists N \ \forall n > N : x_n < -E$.

- $\lim x_n = \infty$, если $\forall E > 0\ \exists N\ \forall n > N : |x_n| > E$.
- Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\lim x_n = 0$.
- Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\lim x_n = \infty$ (или $\pm\infty$).

Связь. Если $x_n \neq 0$, то $\{x_n\}$ бесконечно большая $\iff$ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая.

Билет 14. Число e, последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Конспект ТП

Теорема.

Последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и ограничена снизу.

Доказательство.

1. Ограниченность: $y_n > 1$.
2. Убывание: Рассмотрим отношение:
$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}.$$
   Используя неравенство Бернулли $(1+x)^r \geq 1 + rx$ при $x > -1$, получаем:
$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n^2-1}.$$
   После преобразований получаем $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$, т.е. $y_{n-1} \geq y_n$.

Следовательно, y_n сходится, и $\lim y_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$. $\square$

Билет 15. Число e, последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Конспект ТП

Теорема.

Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена сверху, её предел обозначается через e.

Доказательство.

Из предыдущего билета $y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ убывает. Так как $x_n = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}$, а $1 + \frac{1}{n} \to 1$, то x_n сходится к тому же пределу e.

Можно также доказать возрастание x_n непосредственно через неравенство Бернулли. $\square$

Определение.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Билет 16. Предел в терминах окрестностей; подпоследовательности. Конспект ТП

Определение.

[предела в терминах окрестностей] $\lim x_n = a$, если для любой окрестности V_a точки a существует N такой, что $x_n \in V_a$ для всех $n > N$.

Определение.

[подпоследовательности] Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда $\{x_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Теорема.

Если $x_n \to a$, то любая подпоследовательность $x_{n_k} \to a$.

Доказательство.

Пусть V_a — окрестность a. Существует N такой, что $x_n \in V_a$ для всех $n > N$. Так как $n_k \to \infty$, найдётся K такой, что $n_k > N$ для всех $k > K$. Тогда $x_{n_k} \in V_a$ для всех $k > K$. □

Билет 17. Принцип выбора Больцано–Вейерштрасса. Конспект ТП

Теорема.

Из всякой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^m$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.

Пусть последовательность $\{x^{(n)}\}$ ограничена. Тогда все её точки содержатся в некотором замкнутом кубе I. Куб I компактен в $\mathbb{R}^m$ (по теореме Гейне–Бореля). В компакте из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (свойство секвенциальной компактности). □

Билет 18. Точка сгущения; последовательность, стремящаяся к точке сгущения. Конспект ТП 1 ТП 2

Определение.

Точка a называется **точкой сгущения** (предельной точкой) множества D, если в любой проколотой окрестности $\dot{V}_a$ содержится хотя бы одна точка из D.

Теорема.

Точка a является точкой сгущения множества D тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\} \subset D$, $x_n \neq a$, такая, что $x_n \to a$.

Доказательство.

1. $\Rightarrow$: Для каждого n возьмём проколотую окрестность $\dot{V}_a\left(\frac{1}{n}\right)$. В ней найдётся $x_n \in D$,

$x_n \neq a$. По построению $x_n \to a$.

2. $\Leftarrow$: Если $x_n \to a$, то в любой проколотой окрестности $\dot{V}_a$ лежат почти все члены последовательности, т.е. точки из D.

$\square$

Билет 19. Предел функции в терминах окрестностей и в терминах ε–δ. Конспект ТП

Определение.

[по Коши] Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Число A называется **пределом функции** f при $x \to a$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Определение.

[по Гейне] $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, выполняется $f(x_n) \to A$.

Эквивалентность определений доказывается стандартно.

Билет 20. Теорема о пределе функции и пределах последовательностей

Теорема.

Пусть a — предельная точка D. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ (по Коши).
2. Для любой последовательность $\{x_n\} \subset D$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, выполнено $\lim f(x_n) = A$.

Доказательство.

1. $1 \to 2$: Пусть выполнено определение по Коши. Возьмём $\{x_n\} \to a$, $x_n \neq a$. Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ из определения Коши. Для этого δ найдётся N такой, что для всех $n > N$ выполнено $0 < |x_n - a| < \delta$. Тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Значит, $f(x_n) \to A$.

2. $2 \to 1$: Допустим, что определение по Коши не выполнено. Тогда:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in D : 0 < |x - a| < \delta \text{ и } |f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и выберем x_n соответственно. Тогда $x_n \to a$, $x_n \neq a$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$, противоречие.

$\square$

Билет 21. Единственность предела функций; $\lim c$; $\lim cf$; $\lim(f+g)$

Определение.

[Предел функции по Коши] Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D, $A \in \mathbb{R}$. Говорят, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D :\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема.

[Единственность предела функции] Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то $A = B$.

Доказательство.

Предположим противное: $A \neq B$. Пусть $\varepsilon = \frac{|A-B|}{2} > 0$. По определению предела:

- $\exists \delta_1 > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$,
- $\exists \delta_2 > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - B| < \varepsilon$.

Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Для любого x, удовлетворяющего $0 < |x-a| < \delta$, имеем:

$$|A-B| \leq |A - f(x)| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = |A-B|,$$

что противоречит выбору ε. Следовательно, $A = B$. □

Теорема.

[Предел постоянной функции] Пусть $f(x) = c$ для всех $x \in D$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Доказательство.

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмём любое $\delta > 0$. Тогда при $0 < |x-a| < \delta$:

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

□

Теорема.

[Предел произведения функции на константу] Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то для любой константы $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} (cf(x)) = cA.$$

Доказательство.

Если $c = 0$, утверждение очевидно. Пусть $c \neq 0$. Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta$:

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Тогда:
$$|cf(x) - cA| = |c| \cdot |f(x) - A| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

□

Теорема.

[Предел суммы функций] Если $\lim_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim_{x \to a} g(x) = B$, то:
$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$$

Доказательство.

Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$:
$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Билет 22. $\lim fg$; $\lim 1/f$; $\lim g/f$

Теорема.

[Предел произведения функций] Если $\lim_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim_{x \to a} g(x) = B$, то:
$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = AB.$$

Доказательство.

Запишем:
$$f(x)g(x) - AB = f(x)(g(x) - B) + B(f(x) - A).$$

Поскольку $f(x)$ имеет предел, она ограничена в некоторой проколотой окрестности: $|f(x)| \leq M$. Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$:

- $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$,
- $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда:
$$|f(x)g(x) - AB| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |B| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)} < \varepsilon.$$

□

Теорема.

[Предел обратной функции] Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, то:

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}.$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ при $0 < |x - a| < \delta_1$. Тогда:

$$|f(x)| \geq |A| - |A - f(x)| > \frac{|A|}{2}.$$

Теперь для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta_2 > 0$:

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{|A|^2\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{A}\right| = \frac{|f(x) - A|}{|f(x)||A|} < \frac{|f(x) - A|}{(|A|/2)|A|} = \frac{2|f(x) - A|}{|A|^2} < \varepsilon.$$

□

Теорема.

[Предел частного функций] Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство.

Применяем теоремы о пределе произведения и обратной функции:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) = A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}.$$

□

Билет 23. $\lim f$, $\lim g$ при $f(x) \leq g(x)$; $\lim f$, $\lim g$, $\lim h$ при $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Теорема.

[Предельный переход в неравенстве] Пусть $f(x) \leq g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a, и существуют конечные пределы:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Тогда $A \leq B$.

Доказательство.

Предположим противное: $A > B$. Возьмём $\varepsilon = \frac{A-B}{2} > 0$. Найдём $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad |g(x) - B| < \varepsilon.$$

Тогда:

$$f(x) > A - \varepsilon = \frac{A+B}{2}, \quad g(x) < B + \varepsilon = \frac{A+B}{2},$$

откуда $f(x) > g(x)$, что противоречит условию. $\square$

Теорема.

[Теорема о сжатой функции] Пусть в некоторой проколотой окрестности точки a:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

и

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A.$$

Тогда $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство.

Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x-a| < \delta$:

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad |h(x) - A| < \varepsilon.$$

Тогда:

$$A - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \varepsilon,$$

следовательно, $|g(x) - A| < \varepsilon$. $\square$

Билет 24. Предел монотонной функции

Определение.

Функция $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ называется:

- возрастающей, если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- строго возрастающей, если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- убывающей, если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
- строго убывающей, если $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Теорема.

[О пределе монотонной функции] Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ возрастает и ограничена сверху. Тогда существует конечный предел:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Аналогично, если f убывает и ограничена снизу, то:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Доказательство.

Пусть $M = \sup\limits_{x \in \langle a,b \rangle} f(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $x_0 \in \langle a, b \rangle$ такое, что:

$$f(x_0) > M - \varepsilon.$$

Тогда для всех $x \in (x_0, b)$ в силу возрастания:

$$M - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq M.$$

Положим $\delta = b - x_0$. Тогда при $0 < b - x < \delta$ (т.е. $x > x_0$) имеем:

$$|f(x) - M| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = M$. □

Билет 25. Критерий Коши существования конечного предела функции (необходимость)

Теорема.

[Критерий Коши для функции] Пусть $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a — предельная точка D. Конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_1, x_2 \in D : \; 0 < |x_1 - a| < \delta, \; 0 < |x_2 - a| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема.

[Необходимость условия Коши] Если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то выполняется условие Коши.

Доказательство.

Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$:

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых x_1, x_2, удовлетворяющих $0 < |x_1 - a| < \delta$, $0 < |x_2 - a| < \delta$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Билет 26. Критерий Коши существования конечного предела функции (достаточность)

Теорема.

[Достаточность условия Коши] Если для функции f выполняется условие Коши, то существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Доказательство.

1. Покажем, что f ограничена в некоторой проколотой окрестности a. Возьмём $\varepsilon = 1$. Найдём $\delta_0 > 0$ такое, что для любых x_1, x_2 из проколотой δ_0-окрестности:
$$|f(x_1) - f(x_2)| < 1.$$
Зафиксируем x_0 из этой окрестности. Тогда для любого x:
$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|.$$
2. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Покажем, что $\{f(x_n)\}$ сходится. Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ из условия Коши. Так как $x_n \to a$, найдётся N такое, что при $n > N$:
$$0 < |x_n - a| < \delta.$$
Тогда для $n, m > N$:
$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$
Значит, $\{f(x_n)\}$ — фундаментальная, следовательно, сходится.
3. Покажем, что все такие последовательности сходятся к одному пределу. Пусть $x_n \to a$, $y_n \to a$, $f(x_n) \to A$, $f(y_n) \to B$. Рассмотрим смешанную последовательность $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = y_n$. Тогда $z_n \to a$, и $\{f(z_n)\}$ сходится (по п.2). Отсюда $A = B$.
4. По определению предела по Гейне, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

$\square$

Билет 27. Шкала бесконечно малых

Определение.

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если:
$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Определение.

Говорят, что $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$, если:
$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Теорема.

[Шкала бесконечно малых при $x \to 0$] Для натуральных n, m:

- $x^n = o(x^m)$ при $n > m$,
- $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{arctg} x \sim x$,
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$,
- $\ln(1+x) \sim x$,
- $e^x - 1 \sim x$,
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Билет 28. Существование неравенства для $\ln(1+x)$

Теорема.

Для любого $x > -1$, $x \neq 0$, верно неравенство:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $f(t) = \ln(1+t)$. По формуле Лагранжа на отрезке $[0, x]$ (при $x > 0$):

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \frac{1}{1+\theta x} \cdot x, \quad \theta \in (0,1).$$

Так как $1 < 1 + \theta x < 1 + x$, то:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Для $x \in (-1, 0)$ аналогично на отрезке $[x, 0]$:

$$\ln(1+x) = \ln(1) + \frac{1}{1+\theta x} \cdot x, \quad \theta \in (0,1),$$

и так как $1 + x < 1 + \theta x < 1$, то снова:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

$\square$

Билет 29. Существование неравенства для e^x

Теорема.

Для любого $x \neq 0$ верно неравенство:

$$1 + x < e^x \quad \text{при } x > 0, \quad e^x < 1 + x \quad \text{при } x < 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим $f(t) = e^t$. По формуле Лагранжа на отрезке $[0, x]$ (при $x > 0$):

$$e^x = 1 + e^{\theta x} \cdot x, \quad \theta \in (0,1).$$

Так как $e^{\theta x} > 1$, то $e^x > 1 + x$. При $x < 0$ на отрезке $[x, 0]$:

$$1 = e^x + e^{\theta x} \cdot (-x), \quad \theta \in (0,1),$$

откуда $e^x = 1 - e^{\theta x} \cdot |x| < 1 - |x| = 1 + x$. $\square$

Билет 30. Существование неравенства для $(1+x)^{1/x}$

Теорема.

Для $x > 0$ верно:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Доказательство.

Из неравенства для логарифма (билет 28):

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

Умножаем на $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} < x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1.$$

Экспонируем:

$$e^{\frac{x}{x+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e.$$

Так как $e^{\frac{x}{x+1}} = e^{1-\frac{1}{x+1}} < e$, левое неравенство усилить нельзя. Для правого: умножим исходное неравенство на $x+1 > 0$:

$$1 < (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{x+1}{x}.$$

Экспонируем:

$$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} < e^{\frac{x+1}{x}}.$$

$\square$

Билет 31. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

Теорема.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Доказательство.

Используем неравенство из билета 28:

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \quad \text{при } x > 0,$$

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x} \quad \text{при } -1 < x < 0.$$

По теореме о сжатой функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$\square$

Билет 32. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

Теорема.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Доказательство.

Сделаем замену $y = e^x - 1$, тогда $x = \ln(1+y)$, $y \to 0$ при $x \to 0$.

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \to \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = 1.$$

□

Билет 33. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

Теорема.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Доказательство.

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

Так как $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ (билет 31), по непрерывности экспоненты:

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

□

Билет 34. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^r$

Теорема.

Для любого $r \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^r = 1.$$

Доказательство.

$$(1+x)^r = e^{r\ln(1+x)}.$$

Так как $\ln(1+x) \to 0$, то $r\ln(1+x) \to 0$, и по непрерывности экспоненты:

$$\lim_{x\to 0} e^{r\ln(1+x)} = e^0 = 1.$$

□

Билет 35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

Теорема.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство.

Для $x \in (0, \pi/2)$ имеем (см. геометрическое построение):

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Делим на $\sin x > 0$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Переворачиваем:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как $\cos x \to 1$ при $x \to 0$, по теореме о сжатой функции:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Для $x < 0$ замена $y = -x$ даёт тот же результат. □

Билет 36. Непрерывность функции в точке; арифметические операции над непрерывными функциями

Определение.

[Непрерывность в точке по Коши] Функция $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in D$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Теорема.

[Сумма непрерывных функций] Если f и g непрерывны в точке a, то $f + g$ также непрерывна в a.

Доказательство.

Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$:

- $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$,
- $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда:

$$|(f + g)(x) - (f + g)(a)| \le |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

□

Теорема.

[Произведение непрерывных функций] Если f и g непрерывны в точке a, то $f \cdot g$ непрерывна в a.

Доказательство.

Используем представление:

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)).$$

Так как f непрерывна, она ограничена в окрестности a: $|f(x)| \leq M$. Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta_1, \delta_2 > 0$:

- $|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2(|g(a)|+1)}$,
- $|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда:

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |g(a)| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|g(a)| + 1)} < \varepsilon.$$

□

Теорема.

[Частное непрерывных функций] Если f и g непрерывны в точке a и $g(a) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ непрерывна в a.

Доказательство.

Сначала покажем, что $\frac{1}{g}$ непрерывна в a. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы $|g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|}{2}$ при $|x - a| < \delta_1$. Тогда:

$$|g(x)| \geq |g(a)| - |g(a) - g(x)| > \frac{|g(a)|}{2}.$$

Теперь для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta_2 > 0$:

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \frac{|g(a)|^2 \varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)} \right| = \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(x)||g(a)|} < \frac{|g(x) - g(a)|}{(|g(a)|/2)|g(a)|} = \frac{2|g(x) - g(a)|}{|g(a)|^2} < \varepsilon.$$

Теперь $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ непрерывна как произведение непрерывных. □

Билет 37. Односторонняя непрерывность функции; Классификация разрывов

Определение.

[Односторонняя непрерывность] Функция $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна **слева** в точке $a \in D$, если:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Аналогично определяется непрерывность **справа**.

Определение.

[Точка разрыва] Точка a называется точкой разрыва функции f, если f не является непрерывной в a.

Теорема.

[Классификация разрывов]

1. **Устранимый разрыв**: существуют конечные односторонние пределы $f(a^-) = f(a^+)$, но не равны $f(a)$ (или $f(a)$ не определено).
2. **Разрыв первого рода (скачок)**: существуют конечные односторонние пределы $f(a^-)$ и $f(a^+)$, но они не равны.
3. **Разрыв второго рода**: хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует.

Билет 38. Непрерывность и разрывы монотонной функции

Теорема.

Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ монотонна. Тогда:

1. f не может иметь разрывов второго рода.
2. В каждой точке $x_0 \in (a, b)$ существуют конечные пределы:
$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$
причём $f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+)$ (для возрастающей).
3. f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$.

Доказательство.

Пусть f возрастает. Для $x_0 \in (a, b)$ множество $f(x)$ при $x < x_0$ ограничено сверху $f(x_0)$. По теореме о пределе монотонной функции (билет 24) существует конечный предел $f(x_0^-) = \sup_{x<x_0} f(x)$. Аналогично, $f(x_0^+) = \inf_{x>x_0} f(x)$. Так как f возрастает, $f(x_0^-) \le f(x_0) \le f(x_0^+)$. Если $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$, то f непрерывна в x_0. Если же $f(x_0^-) < f(x_0)$ или $f(x_0) < f(x_0^+)$, то это разрыв первого рода. $\square$

Билет 39. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций

Теорема.

Если $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $a \in D$, а $g : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $f(a) \in E$, и $f(D) \subset E$, то композиция $g \circ f$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$. Так как g непрерывна в $f(a)$, найдём $\delta_1 > 0$:

$$|y - f(a)| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Так как f непрерывна в a, для $\delta_1 > 0$ найдём $\delta > 0$:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

Тогда:

$$|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

□

Билет 40. Непрерывность $\ln x$

Теорема.

Функция $\ln x$ непрерывна на $(0, +\infty)$.

Доказательство.

Пусть $a > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $|x - a| < \delta$:

$$|\ln x - \ln a| < \varepsilon.$$

Заметим, что:

$$|\ln x - \ln a| = \left|\ln \frac{x}{a}\right|.$$

Потребуем, чтобы:

$$e^{-\varepsilon} < \frac{x}{a} < e^{\varepsilon}.$$

Тогда:

$$a(e^{-\varepsilon} - 1) < x - a < a(e^{\varepsilon} - 1).$$

Выберем $\delta = a \min(1 - e^{-\varepsilon}, e^{\varepsilon} - 1)$. Тогда при $|x - a| < \delta$:

$$|\ln x - \ln a| < \varepsilon.$$

□

Билет 41. Непрерывность e^x

Теорема.

Функция e^x непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Пусть $a \in \mathbb{R}$. Для $\varepsilon > 0$ найдём $\delta > 0$ такое, что при $|x - a| < \delta$:

$$|e^x - e^a| < \varepsilon.$$

Заметим, что:

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1|.$$

Из непрерывности e^t в нуле: найдём $\delta_1 > 0$:

$$|t| < \delta_1 \Rightarrow |e^t - 1| < \frac{\varepsilon}{e^a}.$$

Положим $\delta = \delta_1$. Тогда при $|x - a| < \delta$:

$$|e^x - e^a| < e^a \cdot \frac{\varepsilon}{e^a} = \varepsilon.$$

□

Билет 42. Непрерывность x^r

Теорема.

Степенная функция x^r непрерывна на своей области определения:

- $(0, +\infty)$ при любом $r \in \mathbb{R}$,
- $[0, +\infty)$ при $r > 0$,
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ при r целом отрицательном и т.д.

Доказательство.

Запишем:

$$x^r = e^{r \ln x}.$$

Так как $\ln x$ непрерывен на $(0, +\infty)$ (билет 40), а экспонента непрерывна на $\mathbb{R}$ (билет 41), композиция $e^{r \ln x}$ непрерывна на $(0, +\infty)$. При $r > 0$ докажем непрерывность в нуле справа: Пусть $x_n \to 0+$. Тогда $\ln x_n \to -\infty$, $r \ln x_n \to -\infty$, $e^{r \ln x_n} \to 0 = 0^r$. □

Билет 43. Непрерывность $\sin x$

Теорема.

Функция $\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Используем формулу разности синусов:

$$|\sin x - \sin a| = \left|2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq |x - a|.$$

Для $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta = \varepsilon$. Тогда при $|x - a| < \delta$:

$$|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \varepsilon.$$

□

Билет 44. Непрерывность $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Теорема.

1. $\cos x$ непрерывен на $\mathbb{R}$.
2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ непрерывен на $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.
3. $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывен на $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$.

Доказательство.

1. $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ — композиция непрерывных.
2. $\operatorname{tg} x$ — частное непрерывных функций, знаменатель не обращается в ноль в указанных точках.
3. Аналогично для $\operatorname{ctg} x$.

□

Билет 45. Теорема об отображении отрезка

Теорема.

[Вейерштрасс] Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то её образ $f([a, b])$ является отрезком.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса f ограничена на $[a, b]$. Пусть $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. По теореме Больцано–Коши (билет 47) для любого $y \in [m, M]$ найдётся $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = y$. Следовательно, $f([a, b]) = [m, M]$. □

Билет 46. Теорема об обращении непрерывной функции в ноль

Теорема.

[Больцано–Коши, первая форма] Если f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство.

Метод половинного деления. Положим $a_0 = a, b_0 = b$. На каждом шаге n рассматриваем середину $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Если $f(c_n) = 0$, доказано. Иначе выбираем $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ так, чтобы $f(a_{n+1}) \cdot f(b_{n+1}) < 0$. Получаем последовательность вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю. По теореме Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам. По непрерывности $f(c) = 0$. □

Билет 47. Теорема о промежуточном значении

Теорема.

[Больцано–Коши] Если f непрерывна на $[a,b]$, то для любого числа C между $f(a)$ и $f(b)$ найдётся точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = C$.

Доказательство.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Тогда $g(a) \cdot g(b) < 0$. По теореме билета 46 найдётся $c \in (a,b)$: $g(c) = 0$, т.е. $f(c) = C$. $\square$

Билет 48. Существование обратной непрерывной функции

Теорема.

Пусть f непрерывна и строго монотонна на промежутке $\langle a,b\rangle$. Тогда:

1. f обратима, f^{-1} определена на промежутке $f(\langle a,b\rangle)$.
2. f^{-1} строго монотонна того же типа.
3. f^{-1} непрерывна.

Доказательство.

1. Строгая монотонность обеспечивает обратимость.
2. Монотонность f^{-1} следует из монотонности f.
3. Непрерывность f^{-1} следует из теоремы о сохранении промежутка и теоремы о разрывах монотонной функции (билет 38).

$\square$

Билет 49. Непрерывность $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$

Теорема.

Обратные тригонометрические функции непрерывны на своих областях определения:

- $\arcsin x$ на $[-1,1]$,
- $\arccos x$ на $[-1,1]$,
- $\operatorname{arctg} x$ на $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{arcctg} x$ на $\mathbb{R}$.

Доказательство.

Эти функции являются обратными к непрерывным строго монотонным функциям:

- arcsin — обратная к sin на $[-\pi/2, \pi/2]$,
- arccos — обратная к cos на $[0, \pi]$,
- arctg — обратная к tg на $(-\pi/2, \pi/2)$,
- arcctg — обратная к ctg на $(0, \pi)$.

По теореме билета 48 они непрерывны. □

Билет 50. Равномерная непрерывность функций; Теорема Кантора

Определение.

[Равномерная непрерывность] Функция $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на D, если:
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_1, x_2 \in D: \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема.

[Кантора] Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

От противного. Пусть f не равномерно непрерывна. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся $x, y \in [a, b]$: $|x - y| < \delta$, но $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$. Получим последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$ такие, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. По теореме Больцано–Вейерштрасса выделим сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} \to c$. Тогда и $\{y_{n_k}\} \to c$. По непрерывности f в точке c:
$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(c) - f(c)| = 0,$$
что противоречит условию $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. □

Билет 51. Определение производной и односторонней производной

Определение.

[Производная] Функция $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ имеет производную в точке $x_0 \in \langle a, b \rangle$, если существует конечный предел:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Определение.

[Односторонняя производная] Правая производная:
$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Левая производная:
$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Билет 52. Дифференцируемость функции; связь дифференцируемости и существования производной

Определение.

[Дифференцируемость] Функция f дифференцируема в точке x_0, если существует такое число A, что:
$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Теорема.

Функция дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная $f'(x_0)$, причём $A = f'(x_0)$.

Доказательство.

1. Если f дифференцируема, то:
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{o(h)}{h} \to A.$$

2. Если существует $f'(x_0)$, то:
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \to 0,$$
откуда:
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha(h)h.$$

□

Билет 53. $(cf)'$, $(f+g)'$, $(fg)'$

Теорема.

Если f и g дифференцируемы в точке x, то:

1. $(cf)'(x) = cf'(x)$,
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Доказательство.

1. $$\frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to cf'(x).$$

2.

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to f'(x)+g'(x).$$

3.

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f(x)g'(x)+g(x)f'($$

□

Билет 54. $(1/f)'$, $(g/f)'$

Теорема.

Если f дифференцируема в точке x и $f(x) \neq 0$, то:

1. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$,
2. $\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}$.

Доказательство.

1.

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x+h)f(x)} \to -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

2. Применяем правило произведения: $\frac{g}{f} = g \cdot \frac{1}{f}$, тогда:

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = g' \cdot \frac{1}{f} + g \cdot \left(-\frac{f'}{f^2}\right) = \frac{g'f - gf'}{f^2}.$$

□

Билет 55. $(g(f))'$, $(f^{-1})'$

Теорема.

[Производная композиции] Если f дифференцируема в точке x, а g дифференцируема в точке $f(x)$, то:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Доказательство.

Пусть $y = f(x)$, $k = f(x+h) - f(x)$. Тогда:

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(y+k)-g(y)}{k} \cdot \frac{k}{h}.$$

Если $k \neq 0$, то при $h \to 0$ первый множитель стремится к $g'(y)$, второй — к $f'(x)$. Если $k = 0$, то левая часть равна нулю, и формула также верна. □

Теорема.

[Производная обратной функции] Если f непрерывна и строго монотонна на промежутке, дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $y = f(x)$, и:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Доказательство.

Пусть $y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$. Тогда $h = f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)$.

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} \to \frac{1}{f'(x)}.$$

□

Билет 56. Первая теорема Вейерштрасса

Теорема.

[Первая теорема Вейерштрасса] Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$.

Доказательство.

От противного. Пусть f не ограничена. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдётся $x_n \in [a, b]$ такое, что $|f(x_n)| > n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, по теореме Больцано–Вейерштрасса выделяем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. По непрерывности f в точке c: $f(x_{n_k}) \to f(c)$, но $|f(x_{n_k})| > n_k \to \infty$ — противоречие. □

Билет 57. Вторая теорема Вейерштрасса

Теорема.

[Вторая теорема Вейерштрасса] Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$.

Доказательство.

По первой теореме Вейерштрасса f ограничена. Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда найдётся последовательность $\{x_n\} \subset [a, b]$ такая, что $f(x_n) \to M$. Выделим сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c \in [a, b]$. По непрерывности $f(c) = \lim f(x_{n_k}) = M$. Аналогично для минимума. □

Билет 58. Теорема Ферма

Теорема.

[Ферма] Если функция f имеет локальный экстремум в точке x_0 (внутренней точке области определения) и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.

Пусть x_0 — точка локального максимума. Тогда для малых $h > 0$: $f(x_0 + h) \le f(x_0)$, откуда:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le 0 \Rightarrow f'_+(x_0) \le 0.$$

Для $h < 0$: $f(x_0 + h) \le f(x_0)$, откуда:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \ge 0 \Rightarrow f'_-(x_0) \ge 0.$$

Так как f дифференцируема, $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, следовательно, $f'(x_0) = 0$. □

Билет 59. Теорема Ролля

Теорема.

[Ролль] Если функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.

По теореме Вейерштрасса f достигает на $[a, b]$ наибольшего M и наименьшего m значений. Если $M = m$, то f постоянна, и $f'(x) = 0$ для всех x. Если $M > m$, то хотя бы одно из этих значений достигается во внутренней точке $c \in (a, b)$. По теореме Ферма $f'(c) = 0$. □

Билет 60. Теорема Лагранжа

Теорема.

[Лагранж] Если функция f непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Тогда $F(a) = F(b) = 0$. По теореме Ролля найдётся $c \in (a, b)$: $F'(c) = 0$, т.е.:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

□

Билет 61. Теорема Коши

Теорема.

[Коши] Если функции f и g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Заметим, что $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля $g'(x) = 0$ для некоторого x). Рассмотрим функцию:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Тогда $F(a) = F(b) = 0$. По теореме Ролля найдётся $c \in (a, b)$: $F'(c) = 0$, т.е.:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

□

Билет 62. c', x', $(x^n)'$, $(1/x^n)'$

Теорема.

1. $(c)' = 0$.
2. $(x)' = 1$.
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$ для $n \in \mathbb{N}$.
4. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ для $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

1. По определению производной.
2. $\frac{(x+h)-x}{h} = 1$.
3. По индукции или через бином Ньютона.
4. Применяем правило для $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

□

Билет 63. $(e^x)'$, $(\ln x)'$

Теорема.

1. $(e^x)' = e^x$.
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ для $x > 0$.

Доказательство.

1. $$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \cdot 1 = e^x.$$
2. $$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \cdot \frac{1}{x} \to 1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

$\square$

Билет 64. $(x^r)'$

Теорема.

Для любого $r \in \mathbb{R}$:
$$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad x > 0.$$

Доказательство.

$x^r = e^{r \ln x}$. По правилу дифференцирования композиции:
$$(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot \frac{r}{x} = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

$\square$

Билет 65. $(\sin x)'$, $(\cos x)'$

Теорема.

1. $(\sin x)' = \cos x$.
2. $(\cos x)' = -\sin x$.

Доказательство.

1. $$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \to 1 \cdot \cos x.$$
2. Аналогично или через $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$\square$

Билет 66. $(\operatorname{tg} x)'$, $(\operatorname{ctg} x)'$

Теорема.

1. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$.
2. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$.

Доказательство.

1. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. По правилу частного:
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
2. Аналогично для $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

□

Билет 67. $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$

Теорема.

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для $|x| < 1$.
2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для $|x| < 1$.

Доказательство.

Для $\arcsin x$: пусть $y = \arcsin x$, тогда $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. По теореме о производной обратной функции:
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$
Для $\arccos x$ аналогично или через $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. □

Билет 68. $(\operatorname{arctg} x)'$, $(\operatorname{arcctg} x)'$

Теорема.

1. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
2. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Доказательство.

Для $\operatorname{arctg} x$: пусть $y = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$
Для $\operatorname{arcctg} x$ аналогично или через $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. □

Билет 69. Определение $f^{(n)}(x)$ производной n-го порядка

Определение.

Производная нулевого порядка: $f^{(0)}(x) = f(x)$. Производная первого порядка: $f^{(1)}(x) = f'(x)$. Производная n-го порядка ($n \geq 2$):

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Билет 70. $(cf)^{(n)}$, $(f+g)^{(n)}$

Теорема.

1. $(cf)^{(n)} = cf^{(n)}$.
2. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

Доказательство.

По индукции, используя линейность первой производной. □

Билет 71. $(f(ax+b))^{(n)}$

Теорема.

Если $g(x) = f(ax+b)$, то:

$$g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

Доказательство.

Индукция по n. База $n = 1$: $g'(x) = af'(ax+b)$. Шаг: предположим верно для n, тогда:

$$g^{(n+1)}(x) = \left(a^n f^{(n)}(ax+b)\right)' = a^n \cdot af^{(n+1)}(ax+b) = a^{n+1} f^{(n+1)}(ax+b).$$

□

Билет 72. $(x^k)^{(n)}$

Теорема.

Для натурального k:

$$(x^k)^{(n)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}, & n \leq k, \\ 0, & n > k. \end{cases}$$

Доказательство.

Индукция по n. Для $n = 1$: $(x^k)' = kx^{k-1}$. Предположим верно для n: $(x^k)^{(n)} = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$. Тогда:

$$(x^k)^{(n+1)} = \left(k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}\right)' = k(k-1)\dots(k-n+1)(k-n)x^{k-n-1}.$$

При $n = k$: $(x^k)^{(k)} = k!$. При $n > k$: производная равна нулю. □

Билет 73. $(x^r)^{(n)}$

Теорема.

Для $r \in \mathbb{R}$, $x > 0$:

$$(x^r)^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)x^{r-n}.$$

Доказательство.

Индукция по n. База: $(x^r)' = rx^{r-1}$. Шаг: аналогично билету 72. $\square$

Билет 74. $(e^x)^{(n)}$, $(\ln x)^{(n)}$

Теорема.

1. $(e^x)^{(n)} = e^x$.
2. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ для $n \geq 1$.

Доказательство.

1. Очевидно по индукции.
2. База: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Предположим: $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$. Тогда:

$$(\ln x)^{(n+1)} = \left((-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}\right)' = (-1)^{n-1}(n-1)!(-n)x^{-n-1} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}.$$

$\square$

Билет 75. $(\sin x)^{(n)}$, $(\cos x)^{(n)}$

Теорема.

1. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.
2. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Доказательство.

Индукция по n. База: $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$. Шаг: предположим верно для n, тогда:

$$(\sin x)^{(n+1)} = \left(\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right).$$

Аналогично для $\cos x$. $\square$

Билет 76. $((x-a)^k)^{(n)}$, $((1+x)^r)^{(n)}$, $(\ln(1+x))^{(n)}$

Теорема.

1. $((x-a)^k)^{(n)} = \frac{k!}{(k-n)!}(x-a)^{k-n}$ при $n \leq k$, иначе 0.
2. $((1+x)^r)^{(n)} = r(r-1)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$.
3. $(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ при $n \geq 1$.

Доказательство.

Следует из билетов 72, 73, 74 с соответствующими сдвигами. □

Билет 77. Формула Тейлора для полинома

Теорема.

Если $P(x)$ — полином степени n:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

то для любого a:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Доказательство.

Подставим $x = a + t$, раскроем $P(a+t)$ по степеням t и найдём коэффициенты через производные в точке a. □

Билет 78. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема.

[Тейлор–Пеано] Если функция f имеет в точке a производные до порядка n, то:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Доказательство.

Индукция по n. База $n = 1$: это определение дифференцируемости. Шаг: используем правило Лопиталя или представление через интеграл. □

Билет 79. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема.

[Тейлор–Лагранж] Если f имеет на $[a, x]$ непрерывные производные до порядка n, а на (a, x) — производную порядка $n + 1$, то найдётся точка $c \in (a, x)$ такая, что:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию:

$$R_n(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Покажем, что $R_n(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, применяя теорему Коши к $R_n(t)$ и $(x-t)^{n+1}$. □

Билет 80. Применение формулы Тейлора к e^x

Теорема.

Для любого n:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x) \text{ или } (x, 0).$$

Доказательство.

По формуле Тейлора–Лагранжа с $a = 0$, $f^{(k)}(0) = 1$ для всех k. □

Билет 81. Применение формулы Тейлора к $(1 + x)^r$

Теорема.

Для $r \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k + \binom{r}{n+1}(1+c)^{r-n-1}x^{n+1},$$

где $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}$, c между 0 и x.

Доказательство.

По формуле Тейлора–Лагранжа с $a = 0$, $f^{(k)}(0) = r(r-1)\ldots(r-k+1)$. □

Билет 82. Применение формулы Тейлора к $\ln(1 + x)$

Теорема.

Для $x > -1$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

где c между 0 и x.

Доказательство.

По формуле Тейлора–Лагранжа с $a = 0$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. □

Билет 83. Применение формулы Тейлора к $\sin x$, $\cos x$

Теорема.

1. $$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos c}{(2n+3)!} x^{2n+3}.$$

2. $$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos c}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Доказательство.

По формуле Тейлора–Лагранжа с $a = 0$, учитывая, что производные синуса и косинуса периодичны. □