

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА



---

Отчёт по лабораторной работе № 3  
“Амортизационный анализ”  
по дисциплине “Алгоритмы и структуры данных”  
Семестр 2

---

Выполнил студент:  
Мавров Артём Николаевич  
гр. J3113  
ИСУ 466574  
Отчет сдан: 13.04.2025

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Доказательство</b>	<b>4</b>
2.1	Модель и вводные данные . . . . .	4
2.2	Анализ: амортизированная стоимость . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Пошаговый тест-кейс</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>6</b>

# Введение

Рассматривается модифицированная реализация хеш-таблицы с открытой адресацией, где вместо мгновенного удвоения при переполнении элементы постепенно переносятся в новую таблицу. Необходимо строго показать, что амортизированная стоимость вставки в худшем случае, даже при большом числе коллизий, остаётся  $O(1)$ , используя метод бухгалтерского учёта.

# Доказательство

## Модель и вводные данные

- Изначально имеется хеш-таблица  $T_0$  размера  $n$ , в которой хранится  $n$  элементов.
- Когда таблица заполняется, создаётся новая таблица  $T_1$  размера  $2n$ .
- Вместо мгновенного копирования всех элементов, на каждую вставку в  $T_1$  дополнительно переносится один элемент из  $T_0$  в  $T_1$ .
- После переноса всех  $n$  элементов старая таблица  $T_0$  удаляется.

### Стоимость операций (в монетах):

- Вставка нового элемента в текущую таблицу: 1 монета.
- Перенос одного элемента из старой таблицы в новую: 1 монета.

### Бухгалтерский учёт:

- Каждая вставка “платит” 3 монеты.
  - 1 монета — на непосредственную вставку.
  - 1 монета — на будущий перенос этого элемента.
  - 1 монета — для переноса одного старого элемента.

## Анализ: амортизированная стоимость

### Фаза без расширения

Пока таблица  $T_0$  не переполнена, все вставки занимают ровно одну реальную монету. Мы взимаем 3 монеты и храним 2 в банке (на счету у элемента и на перенос старого).

### Фаза расширения

Пусть таблица была размера  $n$ , и начинается перенос в  $T_1$  размера  $2n$ .

- За  $n$  следующих вставок мы накопим  $n$  монет на перенос старых элементов.
- Этих монет достаточно, чтобы за  $n$  вставок полностью перенести все элементы из  $T_0$ .
- Кроме того, каждый новый элемент сам “оплачивает” свою вставку и будущий перенос.

Следовательно, ни один элемент не вызывает чрезмерных затрат, и банк не уходит в минус.

## Пошаговый тест-кейс

Пусть начальный размер таблицы  $n = 4$ , и мы вставим 8 элементов.

1. Вставка 1–4: таблица  $T_0$  заполняется. С каждой вставки:

- 1 монета — вставка;
- 1 монета — на перенос;
- 1 монета — на перенос старого.

Всего:  $4 \times 3 = 12$  монет.

- 4 монеты потрачены на вставку,
- 4 монеты накоплены у элементов на перенос,
- 4 монеты накоплены на перенос старых.

2. Начинается расширение. Таблица  $T_1$  размера 8.

3. Вставка 5:

- 1 монета на вставку,
- 1 монета на перенос себя в будущем,
- 1 монета используется для переноса первого элемента из  $T_0$ .

4. Вставка 6:

- 1 монета на вставку,
- 1 монета на перенос,
- 1 монета — второй перенос из  $T_0$ .

5. Вставка 7 и 8 — аналогично.

6. После вставки 8 все 4 элемента из  $T_0$  перенесены в  $T_1$ , и  $T_0$  можно удалить.

**Общий баланс:** ни на одном шаге банк не уходит в минус. Амортизированная стоимость вставки — 3 монеты.

## Вывод

Мы показали, что при взимании амортизированной платы в 3 монеты:

- каждый новый элемент оплачивает свою вставку и будущий перенос;
- перенос старых элементов также финансируется без долга;
- в сумме не происходит взрывного роста стоимости ни на одном шаге.

**Следовательно, амортизированная стоимость вставки остаётся  $O(1)$ , даже при большом количестве коллизий. Доказательство с помощью метода бухгалтерского учёта является достаточным и строгим.**