Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Научно иследовательский университет ИТМО
Факультет технологий искуственного интелекта

Лабораторная работа №1
по дисциплине: Математический анализ и основы вычислений

Выполнили студенты:
Мавров Артём Николаевич, гр. J3112
Таряник Антон Александрович, гр. J3112
Вебер Кирилл Владимирович, гр. J3112

Преподаватель:
Табиева Арина Вадимовна

Санкт-Петербург, 2025

Задание 1. Аналитический этап

1. Выбор функции

Выберем функцию средней сложности:

$$f(x) = (x-2)^2 + \sin(3x),$$

где $x \in [a, b]$.

Эта функция комбинация квадратичной и периодической составляющих, что позволяет исследовать её свойства в разных интервалах.

2. Промежуток унимодальности

Выберем промежуток $[0, 2]$. На этом промежутке функция унимодальна, так как имеет одну точку локального минимума.

3. Точки локального экстремума и их тип

1. Найдём производную функции:

$$f'(x) = 2x + 3cos(3x) - 4$$

2. Решим уравнение $f'(x) = 0$:

$$2x + 3cos(3x) - 4 = 0$$

Оно имеет единственное решение на промежутке $[0, 2]$:

$$x \approx 1.65$$

3. Используем вторую производную для определения типа экстремума:

$$f''(x) = 2 - 27\cos^2(x)\sin(x) + 9sin^3(x)$$

Подставляя $x \approx 1.65$, определяем, что это точка локального минимума (так как $f''(1.65) > 0$).

4. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке

Функция достигает минимума при $x \approx 1.65 \Rightarrow min(f(x)) \approx -0.85$.

Так как функция на отрезке $[0, 1.65]$ монотонно убывает, а на отрезке $[1.65, 2]$ монотонно возрастает, то максимум будет в одном из концов отрезков.

$$f(0) = 4, \quad f(2) \approx 0.28$$

$$f(0) > f(2) \Rightarrow max(f(x)) = 0$$

5. Алгоритм дихотомии

Метод дихотомии работает следующим образом:

1. Разделим отрезок $[a, b]$ на две части с помощью точки δ:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \delta, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \delta$$

2. Вычислим значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$: - Если $f(x_1) < f(x_2)$, то новый отрезок $[a, x_2]$. - Если $f(x_1) > f(x_2)$, то новый отрезок $[x_1, b]$. 3. Повторяем, пока длина отрезка не станет меньше заданной точности ε.

6. Сходимость алгоритма

Алгоритм сходится, так как на каждом шаге длина отрезка уменьшается вдвое:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}$$

Для унимодальных функций на отрезке гарантируется нахождение минимума при $\varepsilon > 0$.

7. Число итераций

1)На каждом шаге метода дихотомии длина текущего отрезка уменьшается как

$$L_{k+1} = \frac{L_k}{2}$$

следовательно:

$$L_n = \frac{b-a}{2^n}$$

2)Метод останавливается, когда длина отрезка L_n становится меньше заданной точности ϵ:

$$L_n \leq \varepsilon$$

Совместим 1) и 2):

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

$$2^n \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$$

$$n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

$$n = \lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \rceil$$

8. Исследование на разных промежутках

- Промежуток $[0, 5]$: функция не унимодальна, метод дихотомии может застрять. - Промежуток $[2, 3]$: унимодальность соблюдается, метод сходится.

Задание 1. Аналитический этап дополнительное задание

Кирилл, пиши сюда

Задание 1. Практический этап

В данной лабораторной работе были написаны алгоритмы с использованием методов Дитохомии и Золотого сечения, согласно их описанию из условий лабораторной работы. С кодом можно онакомится в следующем репозитории:

`https://github.com/Toxele/lab_matan_1`

Далее будут представлены графики.
Положение точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Дитохомии:

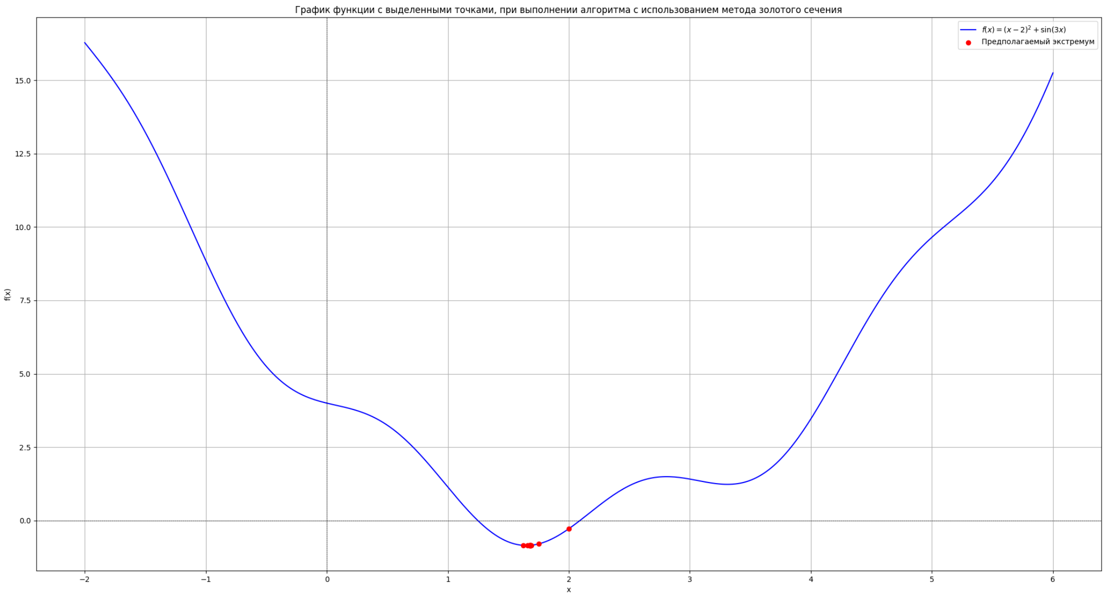

Рис. 1: Положение точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Дитохомии

Увеличенный график положения точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Дитохомии и график изменения неопределённости от количества итераций для алгоритма Дитохомии:

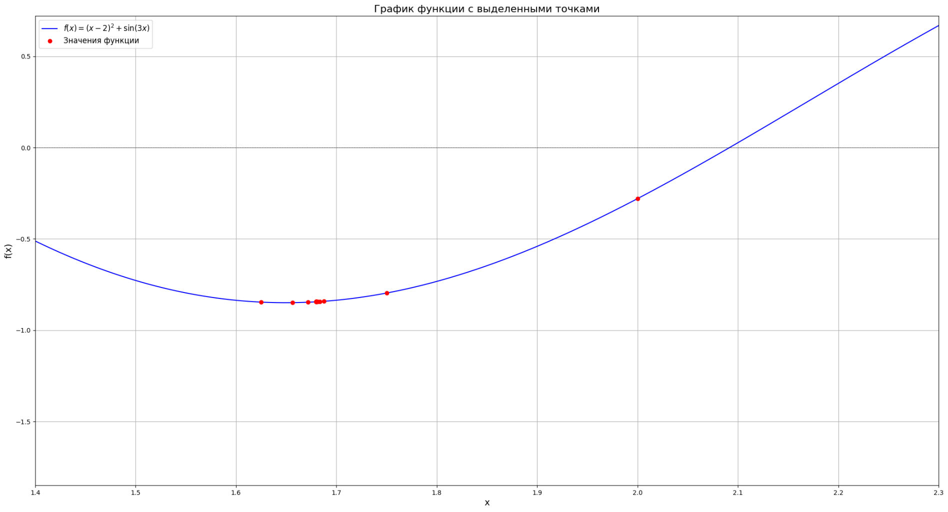

Рис. 2: Увеличенный график положения точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Дитохомии

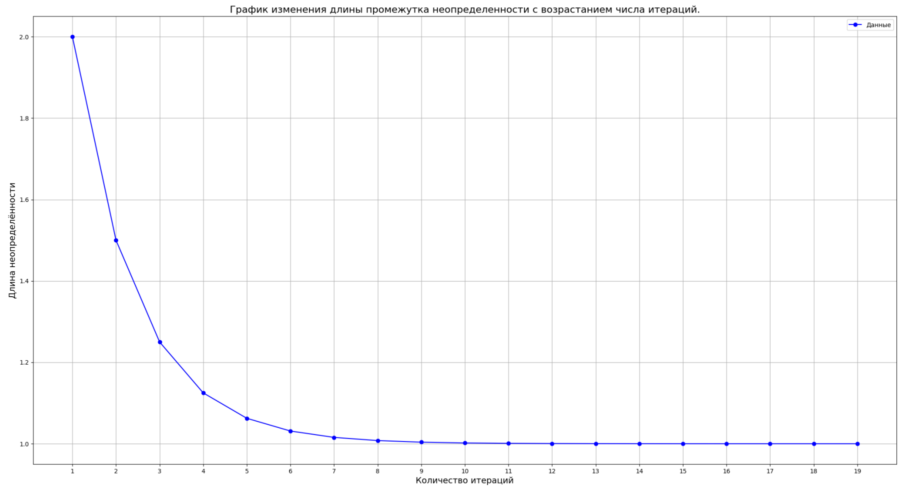

Рис. 3: График изменения неопределённости от количества итераций для алгоритма Дитохомии

Положение точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Золотого сечения:

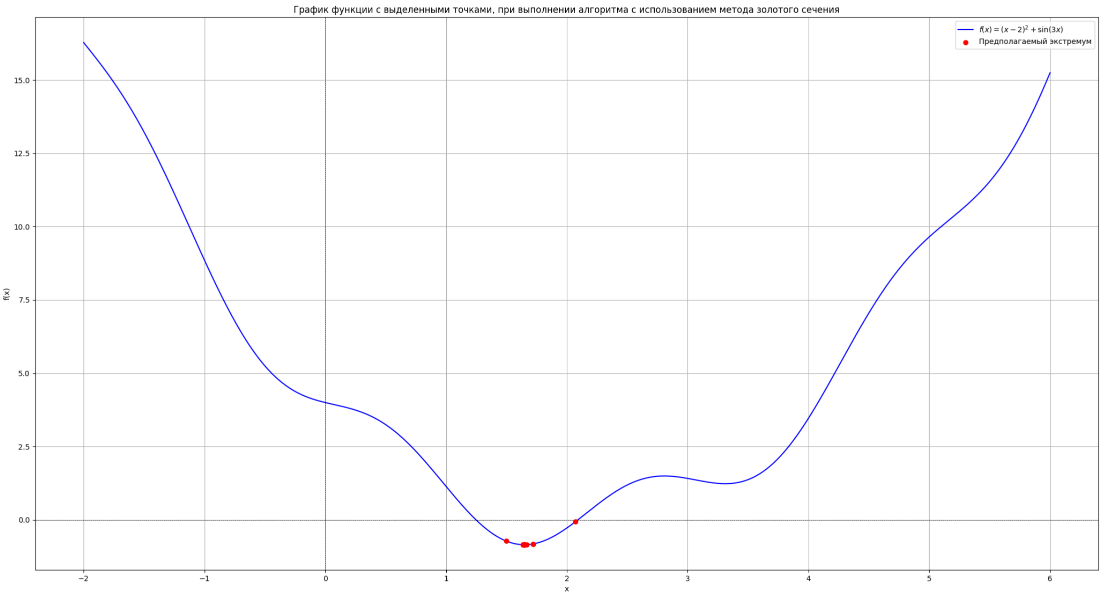

Рис. 4: Положение точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Золотого сечения

Увеличенный график положения точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Золотого сечения и график изменения неопределённости от количества итераций для алгоритма Золотого сечения:

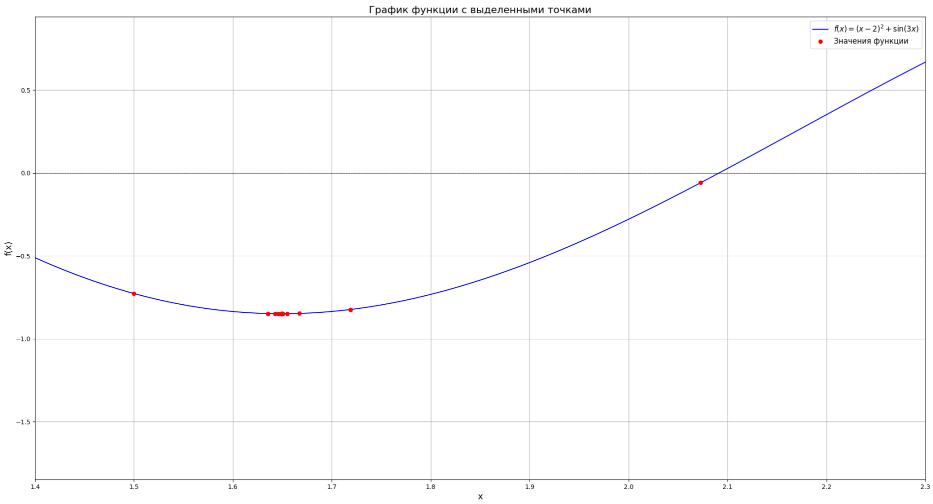

Рис. 5: Увеличенный график положения точек предполагаемого экстремума на каждой итерации алгоритма Золотого сечения

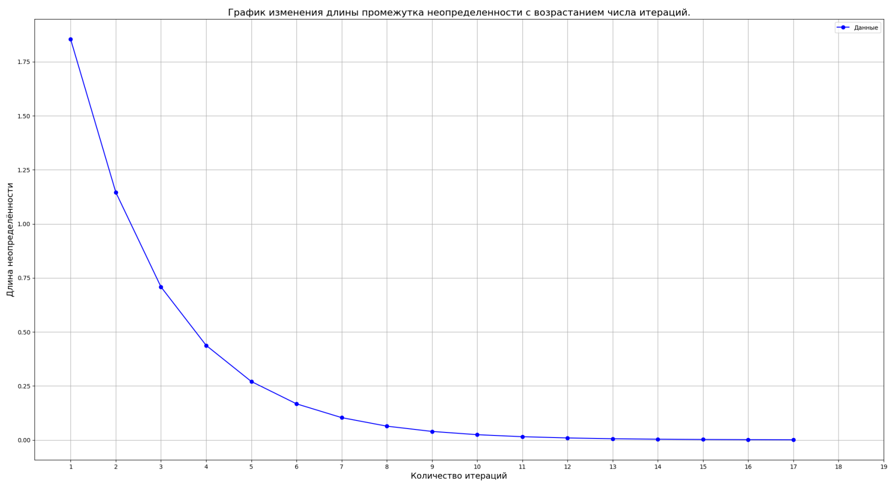

Рис. 6: График изменения неопределённости от количества итераций для алгоритма Золотого сечения

Задание 2. Аналитический этап

Кирилл, сюда тоже писать надо

Задание 2. Практический этап

I теорема Больцано-Коши говорит о том, что если функция непрерывна на $[a, b]$ и

$$f(a) < 0,\ f(b) > 0$$

или

$$f(a) > 0,\ f(b) < 0,$$

то

$$\exists c : f(c) = 0$$

Алгоритм для выполнения задания был реализован в файле `bolcano_koshi_solution.cpp`. Алгоритм использует идею из доказательства первой теоремы Больцано Коши с небольшим изменением: задатёся небольшая константа погрешности epsilon, далее отрезок $[a, b]$ делится пополам до тех пор, пока его длина не станет меньше или равна epsilon. Если

$$sign(f(a)) = sign(f(b))$$

корня не существует - не выполняется первая теорема Больцано-Коши. Число итераций будет меняться в зависимости от погрешности epsilon (чем больше погрешность - тем меньше раз отрезок будет делиться пополам) и от установленного отрезка $[a, b]$. Аналогично, чем меньше данный отрезок, тем меньше итераций будет совершено. В качестве функции для проверки работы алгоритма была выбрана парабола вида

$$x^2 - 1,$$

так как она имеет "удобные"корни

$$x = \pm 1.$$

Программа сработала корректно, а среднеквадратичная разница составила

$$\approx 0.00003$$

при

$$epsilon = 0.0001,\ a = 0,\ b = 2$$