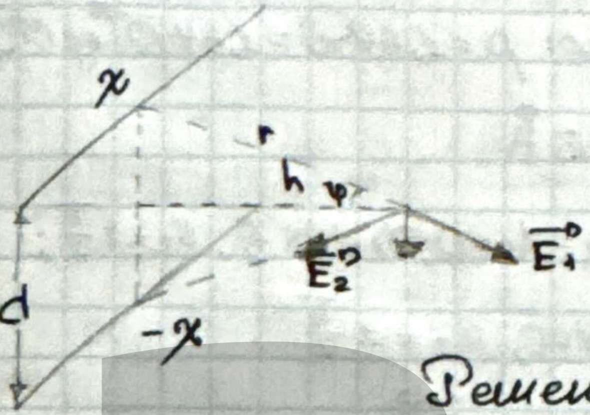
№1.14

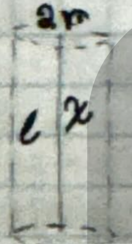


Дано: $d, \varkappa, h$

Найти: $\vec{E}$

Решение:

В силу симметрии $\vec{E_1} = E_2$, $\vec{E}$ параллельно плоскости проводов.

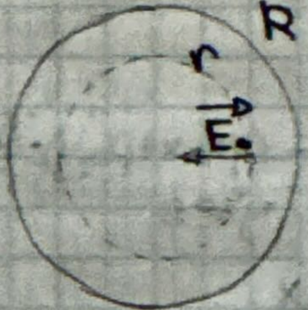


т. Гаусса: $4\pi \varkappa l = \Phi = 2\pi r l \cdot E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{2\varkappa}{r}$

$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{2}d}{r}$, $E = 2E_1 \sin\varphi = \frac{d}{r} \cdot \frac{2\varkappa}{r} = \frac{2\varkappa d}{h^2 + \frac{1}{4}d^2}$

$\boxed{\text{Ответ: } E = \frac{8\varkappa d}{4h^2 + d^2}}$

№1.21



Дано: E_0 – везде одинаково

Найти: $\rho(r)$

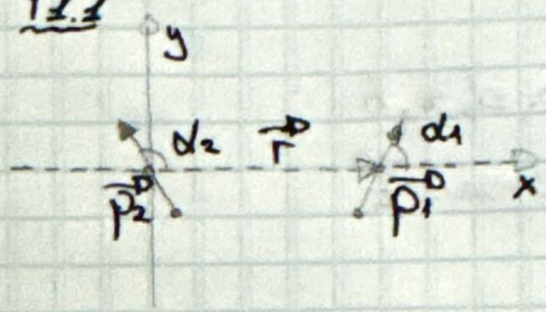
Решение:

т. Гаусса: $4\pi q(r) = 4\pi r^2 E_0$ (для любого $r < R$); $q(r) = E_0 r^2$

$\frac{dq}{dr} = 2E_0 r = 4\pi r^2 \rho(r)$; $\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}$

$\boxed{\text{Ответ: } \rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}}$

T1.1



Дано: $p = 1{,}84\,D = 1{,}84\cdot10^{-18}$ ед СГС,

$r = 35$ Å

а) $\alpha_1=\alpha_2=0$; б) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pm\frac{\pi}{2}$

Найти: $\vec{F}_1$, a_{max}

Решение:

$$\vec{E}_2 = \frac{3(\vec{p}_2,\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_2}{r^3}$$

$$E_{2x} = \frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)x}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{p_{2x}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_{2y} = \frac{3(p_{2x}x + p_{2y}y)y}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{p_{2y}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial E_{2x}}{\partial x} = 3\frac{p_{2x}x + p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + 3x\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{p_{2x}x+p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right] -$$

$$- p_{2x}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\cdot 2x =$$

$$= 3\,\frac{p_{2x}x+p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + 3x\cdot\frac{p_{2x}(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x+p_{2y}y)\cdot\frac{5}{2}\cdot *}{(x^2+y^2)^{5}}$$

$$+ 3p_{2x}\cdot\frac{x}{(x^2+y^2)^{5/2}} \qquad * = (x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2x$$

$x=r, y=0$: $$\frac{\partial E_{2x}}{\partial x} = 3\,\frac{p_{2x}r}{r^5} + 3r\cdot\frac{p_{2x}r^5 - p_{2x}r\cdot\frac{5}{2}\cdot r^3\cdot 2r}{r^{10}} +$$

$$+ 3p_{2x}\cdot\frac{r}{r^5} = \frac{3p_{2x}}{r^4} + 3p_{2x}\cdot\frac{-4}{r^4} + \frac{3p_{2x}}{r^4} = -\frac{6p_{2x}}{r^4}$$

$$\frac{\partial E_{2x}}{\partial y} = 3x\cdot\frac{p_{2y}\cdot(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x+p_{2y}y)\cdot\frac{5}{2}(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^5} -$$

$$- p_{2x}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}\cdot 2y$$

$x = r,\ y = 0:\quad \dfrac{\partial E_{2x}}{\partial y} = 3r \cdot \dfrac{p_{2y} r^5 - p_{2x} \cdot r \cdot 0}{r^{10}} + 0 =$

$= \dfrac{3p_{2y}}{r^4}$

$$\frac{\partial E_{2y}}{\partial x} = 3y \cdot \frac{p_{2x}(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x + p_{2y}y)\cdot \frac{5}{2}\cdot (x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^5} -$$

$$- p_{2y}\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$x = r,\ y = 0:\quad \dfrac{\partial E_{2y}}{\partial x} = 3p_{2y} \cdot \dfrac{r}{r^5} = \dfrac{3p_{2y}}{r^4}$

$$\frac{\partial E_{2y}}{\partial y} = \cancel{3\frac{p_{2x}x + p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + 3y \cdot \frac{p_{2y}\cdot(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x+p_{2y}y)\cdot\frac{5}{2}(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^5}} -$$

$$\cancel{- p_{2y}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}} = 3\cdot\frac{p_{2x}x + p_{2y}y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + 3y\cdot\frac{p_{2y}(x^2+y^2)^{5/2} - (p_{2x}x+p_{2y}y)\cdot\frac{5}{2}(x^2+y^2)^{3/2}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^5} + p_{2y}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$x = r,\ y = 0:\quad 3\dfrac{p_{2x} r}{r^5} = \dfrac{3p_{2x}}{r^4}$

$$\vec{F}_1 = (\vec{p}_1, \nabla)\vec{E} = \left\| \begin{matrix} p_{1x}\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + p_{1y}\dfrac{\partial E_x}{\partial y} \\ p_{1x}\dfrac{\partial E_y}{\partial x} + p_{1y}\dfrac{\partial E_y}{\partial y} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} -p_{1x}\cdot\dfrac{6p_{2x}}{r^4} + p_{1y}\cdot\dfrac{3p_{2y}}{r^4} \\ p_{1x}\cdot\dfrac{3p_{2y}}{r^4} + p_{1y}\cdot\dfrac{3p_{2x}}{r^4} \end{matrix} \right\| = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} -2p_{1x}p_{2x} + p_{1y}p_{2y} \\ p_{1x}p_{2y} + p_{1y}p_{2x} \end{matrix} \right\|$$

а) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0:\ p_{1x} = p_{2x} = p,\ p_{1y} = p_{2y} = 0$

$$\vec{F} = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} -2p^2 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

б) $\alpha_1 = \frac{\pi}{2},\ \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}:\ p_{1x} = p_{2x} = 0,\ p_{1y} = p,\ p_{2y} = \pm p$

$$\vec{F} = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} \pm p^2 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

в) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \pm\frac{\pi}{2}:\ p_{1x} = p,\ p_{2x} = 0,\ p_{1y} = 0,\ p_{2y} = \pm p$

$$\vec{F} = \frac{3}{r^4}\left\| \begin{matrix} 0 \\ \pm p^2 \end{matrix} \right\|$$

$$\frac{3p^2}{r^4} = \frac{3\left(1,84\cdot 10^{-18}\ \text{ед. СГС}\right)^2}{\left(35\cdot 10^{-8}\ \text{см}\right)^4} \approx 6,8\cdot 10^{-10}\ \text{дин}$$

При произвольных α_1 и α_2:

$$p_{1x} = p\cos\alpha_1,\quad p_{1y} = p\sin\alpha_1,\quad p_{2x} = p\cos\alpha_2,\quad p_{2y} = p\sin\alpha_2$$

$$\vec{F}^0 = \frac{3p^2}{r^4}\left\|\begin{matrix} -2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2 \end{matrix}\right\|$$

$$|\vec{F}^0| - \max \text{ при } \sqrt{(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2)^2}\ \cancel{\max} = A$$

$$A^2 = \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 - 4\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + 4\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 + 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + \sin^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 =$$

$$= \sin^2\alpha_1 - 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + \cos^2\alpha_1(3\cos^2\alpha_2 + 1) =$$

$$= 1 + 3\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 - 2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$\varphi'_{\alpha_1} = -3\cos^2\alpha_2\cdot 2\cos\alpha_1\sin\alpha_1 - 2\sin\alpha_2\cos\alpha_2(\cos^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_1) =$$

$$= 3\cdot\cancel{\frac{1+2\cos\alpha_2}{2}}\ \frac{\cos 2\alpha_2 - 1}{2}\cdot\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2\cdot\cos 2\alpha_1 = 0$$

$$\varphi'_{\alpha_2} = -3\cos^2\alpha_1\cdot 2\cos\alpha_2\sin\alpha_2 - \sin 2\alpha_1(\cos^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_2) =$$

$$= -3\cdot\frac{\cos 2\alpha_1 - 1}{2}\cdot\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1\cos 2\alpha_2 = 0$$

$$\begin{cases} -3(\cos 2\alpha_1 - 1)\sin 2\alpha_2 - 2\sin 2\alpha_1\cos 2\alpha_2 = 0 \\ -3\sin 2\alpha_1(\cos 2\alpha_2 - 1) - 2\cos 2\alpha_1\sin 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

– максимум в $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow a_{max} = 4,6\cdot 10^{14}\ \frac{м}{с^2}$

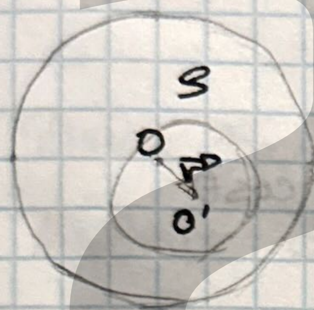
Ответ: а) $F_{1x} = -13{,}6 \cdot 10^{-10}$ дин, $F_{1y} = 0$

б) $F_{1x} = \pm 6{,}8 \cdot 10^{-10}$ дин, $F_y = 0$

в) $F_{1x} = 0$, $F_{1y} = \pm 6{,}8 \cdot 10^{-10}$ дин.

$a_{max} \approx 4{,}6 \cdot 10^{11} \frac{м}{с^2}$

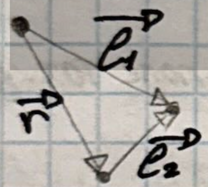
№1.22



Дано: ρ, полость с центром O', $\vec{r}$

Найти: $\vec{E}$ (в полости)

Решение:

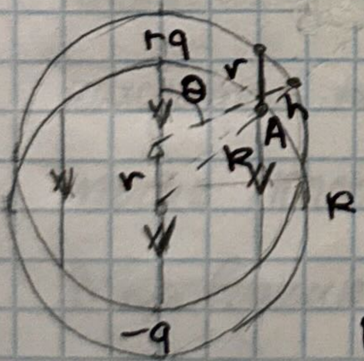


Рассмотрим полость как 2 шара с плотностями ρ и −ρ:

$\vec{E_\Sigma} = \frac{4}{3}\pi\rho \cdot \vec{l_1} + \frac{4}{3}\pi(-\rho)\vec{l_2} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$.

Ответ: $\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}$ (направлено вдоль OO')

№1.23



Дано: R, $\vec{E_0}$ - однородно

Найти: σ(θ), E - вне сферы

Решение:

Рассмотрим 2 шара с зарядами −q и +q, центры которых смещены на $\vec{r}$.

Для произвольной точки A: расстояние между поверхностями шаров: r

$r \ll R \Rightarrow$ можно считать, что α опирается на диаметр $\Rightarrow \alpha \approx 90^\circ$, тогда $h = \cancel{2}\, r\cos\theta$

$$\begin{cases} \sigma(\theta)\cdot S = \rho \cdot S r\cos\theta \\ E_0 = \frac{4}{3}\pi\rho r \end{cases} \Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$$

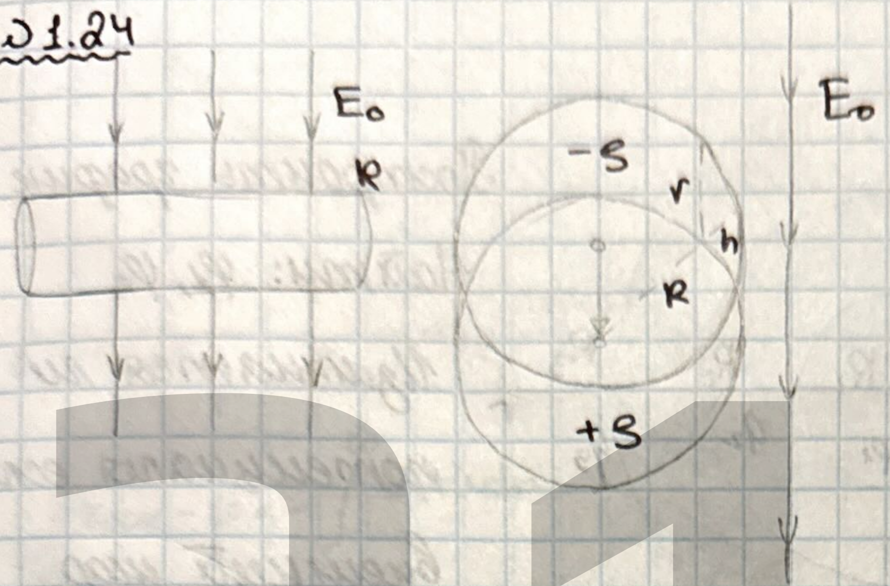
Снаружи поле сферы - поле электрического диполя с моментом (т.к. поле шаров - поле точ. зар.)

$$\vec{p} = q\vec{r} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\,\vec{r} = \frac{E_0}{r}\vec{r}\cdot R^3 = -\vec{E}_0 R^3$$

Ответ: $\boxed{\sigma(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta}$, снаружи - поле электрического диполя с моментом $\boxed{\vec{p} = -\vec{E}_0 R^3}$

№1.24

2 неделя



Дано: E_0, проводящая проволока

Найти: $\sigma(\Theta)$

Решение:

Для однородно заряженного цилиндра т. Гаусса:

$E(r)\cdot 2\pi r\cdot l = 4\pi\cdot\pi r^2 l\rho \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = 2\pi\rho\vec{r}$

~~Пусть заряды распределятся т~~

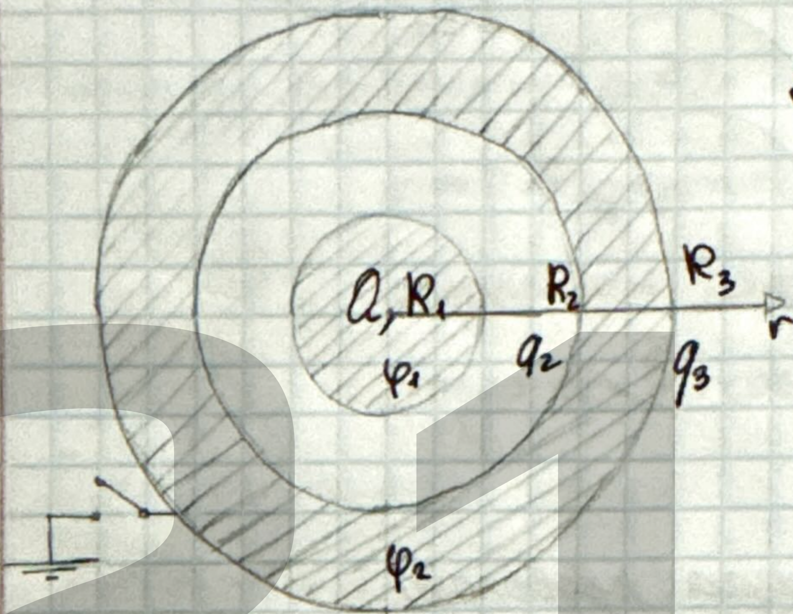
Рассмотрим 2 цилиндра, заряженных с плотностями ρ и $-\rho$, центры которых находятся на расстоянии $\vec{r}$. В произвольной точке полости: $\vec{E} = 2\pi(-\rho)\vec{l_1} + 2\pi\rho\vec{l_2} = -2\pi\rho\vec{r}$.

В проводнике поле $0 \Rightarrow \vec{E}+\vec{E_0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E_0} = 2\pi\rho\vec{r}$

Аналогично предыдущей задаче: $\sigma = \frac{\rho\cdot Sh}{S} = \frac{E_0}{2\pi}\cos\Theta$

Ответ: $\boxed{\sigma(\Theta) = \frac{E_0}{2\pi}\cos\Theta}$

№2.3



Построить график E(r)

Найти: φ_1, φ_2

Изменятся ли потенциалы если внешний шар заземлить?

Решение.

На поверхности R_2 индуцируется заряд q_2:

т. Гаусса для сферы $R_б$: $R_2 < R_б < R_3$:

$\Phi = 0 = \left(\frac{Q}{R_б^2} + \frac{q_2}{R_б^2}\right) S = 0 \Rightarrow q_2 = -Q \Rightarrow$ На поверхности R_3: $q_3 = Q$

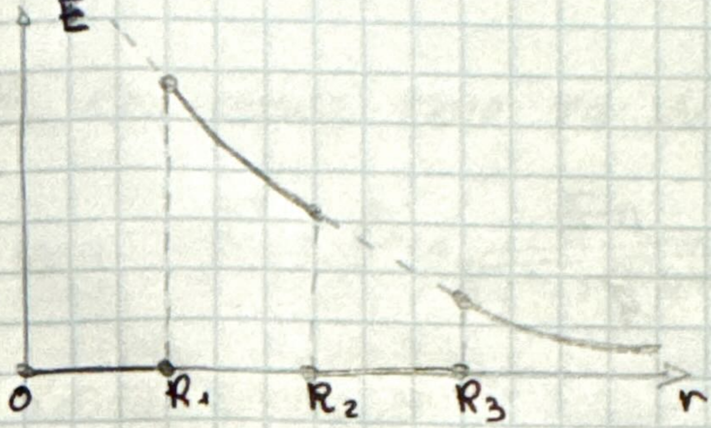
Пока $r > R_3$: $\vec{E}$ - поле точечных зарядов:

$$E = \frac{Q}{r^2} - \frac{Q}{r^2} + \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2}$$

При $R_2 < r < R_3$: $E = 0$

При $R_1 < r < R_2$: $E = \frac{Q}{r^2}$

При $r < R_1$: $E = 0$



$$\varphi_{беск} - \varphi = -\int_0^{\infty} E(r)\,dr$$

Потенциал шара R_1: $\varphi_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2}dr + \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q}{r^2}dr =$

$= \frac{Q}{R_1} - \frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_3} = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$

$\varphi_2 = \int_{R_3}^{+\infty} \frac{Q}{r^2}dr = \frac{Q}{R_3}$

Если внешний шар заземлить, то $\varphi_2' = 0$,

Аналогично $q_2' = -Q$, при этом

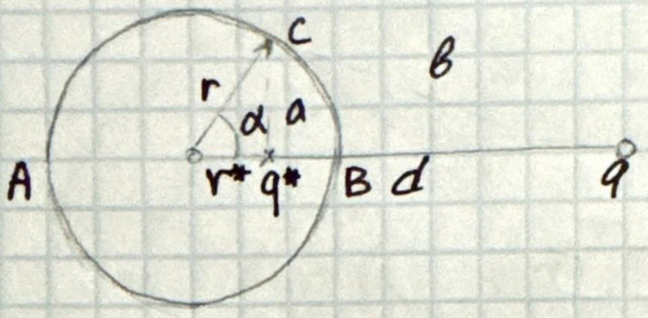
$\varphi_2' = \frac{Q}{r} - \frac{Q}{r} + \varphi_3 = 0 \Rightarrow \varphi_3 = 0$ (потенциал сферы R_3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow q_3' = 0$, тогда поле при $r < R_3$ — такое же,

а при $r > R_3$: $E = 0 \Rightarrow \varphi_1' = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2}dr = -\frac{Q}{R_2} + \frac{Q}{R_1}$

Ответ: $\boxed{\varphi_1 = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right),\ \varphi_2 = \frac{Q}{R_3};\quad \varphi_1' = Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),\ \varphi_2' = 0}$

№2.20



Дано: q; r; d; б) шар изолированн, $Q=0$; а) шар заземлён

Найти: F

Решение:

а) Пусть шар эквивалентен заряду q^* на расстоянии r^* от его центра

$$\varphi_A = \frac{q^*}{r+r^*} + \frac{q}{r+d} = 0 \qquad (1)$$

$$\varphi_B = \frac{q^*}{r-r^*} + \frac{q}{d-r} = 0 \qquad (2)$$

(1) $\Rightarrow q^* = -\frac{r+r^*}{r+d} q$. Подставляем в (2):

$$\frac{r+r^*}{r-r^*} \cdot \frac{1}{r+d} \overset{-}{\cancel{+}} \frac{1}{d-r} = 0$$

$$\frac{r+r^*}{r-r^*} = \frac{r+d}{d-r}$$

$$\cancel{rd} + r^*d - r^2 - \cancel{rr^*} = r^2 + \cancel{dr} - \cancel{rr^*} - dr^*$$

$$r^* = \frac{r^2}{d},\ q^* = -\frac{r+\frac{r^2}{d}}{r+d} q = \frac{r(r+d)}{d(r+d)} q = -\frac{r}{d} q$$

$$F = \frac{\frac{r}{d} q^2}{\left(d - \frac{r^2}{d}\right)^2} = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2}$$

~~б)~~ Докажем, что $\forall \alpha: \varphi_c = 0$:

$$\varphi_c = \frac{q^*}{a} + \frac{q}{b} = \frac{-\frac{r}{d}q}{\sqrt{r^2 + r^{*2} - 2rr^*\cos\alpha}} + \frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\alpha}}$$

Найдём α: $\varphi_c = 0$:

$$\frac{r}{d}\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\alpha} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{d^2} - 2\frac{r^3}{d}\cos\alpha} -$$

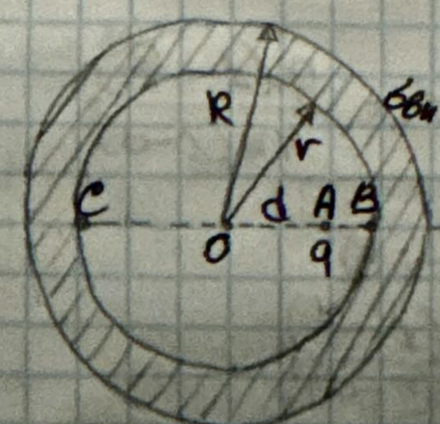
-верно при всех α => заземлённый шар эквивалентен заряду q^*.

б) Чтобы ~~поле~~ потенциал внутри шара оставался постоянным, можно лишь добавить заряд в центре шара, тогда $q_0 = -q^* = \frac{r}{d}q$

$$F = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2} - \frac{qq_0}{d^2} = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2} - \frac{rq^2}{d^3}.$$

Ответ: $\boxed{\text{а) } F = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2}, \text{ б) } F = \frac{rdq^2}{(d^2-r^2)^2} - \frac{rq^2}{d^3}}$

№2.22



Дано: d, q

Найти: 1) $\sigma_{вн}$, 2) $\varphi_б$, 3) σ_B, σ_C

Решение:

1) Рассмотрим сферу радиуса немного больше R:

по т. Гаусса: $4\pi q = 4\pi \sigma_{вн} \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow \sigma_{вн} = \dfrac{q}{4\pi R^2}$

2) Заряды на внутренней сфере распределятся так, чтобы внутри полости поля не было (следует из т. Гаусса) $\Rightarrow \varphi_{об} = \dfrac{4\pi R^2 \sigma_{вн}}{R} = \dfrac{q}{R}$

3) Найдём такой заряд q^*, чтобы во всей ~~пов~~ оболочке ~~заря~~ потенциал был одинаков и равен $\varphi_{об}$:

Пусть $OD = x$, тогда аналогично з2.20:

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{r}{x} q^* \\ x &= \frac{r^2}{d} \end{aligned}\right| \Rightarrow x = \frac{r^2}{d},\ q^* = -\frac{r}{d} q$$

Тогда система эквивалентна зарядам q^*, q и сфере с радиусом R и зарядом q.

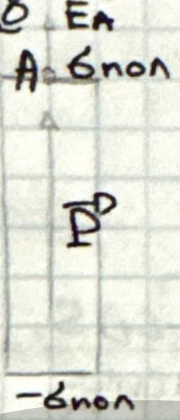
$$E_B = \frac{q}{(r-d)^2} + \frac{\frac{r}{d} q}{r^2 (r-d)^2} = \frac{q}{(r-d)^2}\left(1 + \frac{d}{r}\right) = 4\pi\sigma_B \Rightarrow$$

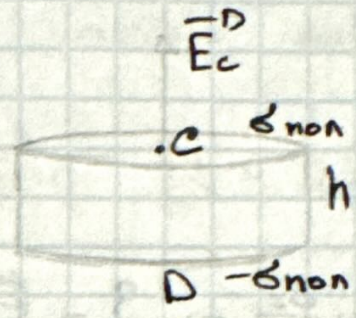
$\Rightarrow \sigma_B = \dfrac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi (r-d)^2}$. Аналогично $\sigma_C = \dfrac{q\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi (r-d)^2}$

Ответ: $\boxed{\begin{aligned} &1)\ \sigma_{вн} = \frac{q}{4\pi R^2};\ 2)\ \varphi_{об} = \frac{q}{R}; \\ &3)\ \sigma_B = \frac{q\left(1+\frac{d}{r}\right)}{4\pi (r-d)^2},\ \sigma_C = \frac{q\left(1-\frac{d}{r}\right)}{4\pi (r-d)^2} \end{aligned}}$

3 неделя

23.8





Дано: $E_A = 300\ \frac{В}{см}$,

$h = 2\cdot 10^{-2} D$

Найти: E_C

В 1-ом случае цилиндр длинный, $E_A = 2\pi\sigma_{пол}$

Во 2-ом случае E_C – поле плоскости с плотностью зарядов $\sigma_{пол}$ и диска с плотностью $-\sigma_{пол}$.

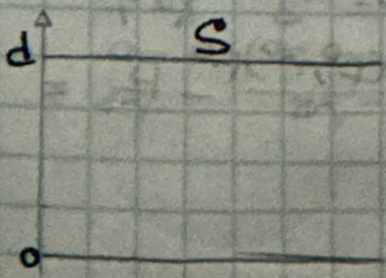
Из задачи 1.10:

$$E_C = 2\pi\sigma_{пол} - 2\pi\sigma_{пол}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + (D/2)^2}}\right) = \frac{4\pi\sigma_{пол} h}{\sqrt{4h^2 + D^2}} =$$

$$= \cancel{\frac{2E_A h}{h\sqrt{4 + \left(\frac{D}{h}\right)^2}}} \cancel{=} \cancel{\frac{E_A}{\sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}}} \cancel{\simeq} \simeq \frac{2E_A h}{D} = 2\frac{h}{D}E_A = 12\ \frac{В}{см}$$

Ответ: $\boxed{E_C \simeq 2\frac{h}{D}E_A = 12\ \frac{В}{см}}$

23.26



Дано: $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$, $\varepsilon(d) = \varepsilon_2$, d, S

ε – линейная

Найти: C.

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x + \varepsilon_1$$

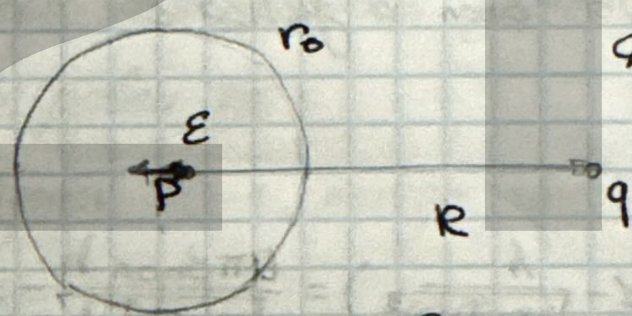
$$D = 4\pi\sigma_{ст} = \frac{4\pi q}{S}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{4\pi q}{S\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x\right)}$$

$$\Delta\varphi = \int_0^d E dx = \frac{4\pi q}{S \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}} \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \Rightarrow \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{4\pi d \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = C$$

Ответ: $\boxed{C = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) S}{4\pi d \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$

№3.39



Дано: $R \gg r_0$, $\varepsilon - 1 \ll 1$, r_0, R, q

Найти: F

Решение:

Вектор поляризации $\vec{P} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \vec{p}$

С другой стороны: $\vec{P} = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1)\vec{E}$

Тогда $\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{3} r_0^3 \vec{E}$

$\vec{E}$ – поле заряда: $E = \frac{q}{R^2}$

Дипольный момент шара $p = \frac{\varepsilon - 1}{3} \frac{r_0^3}{R^2} q$

Поле, создаваемое диполем: $\vec{E} = \frac{3(\vec{p}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} =$

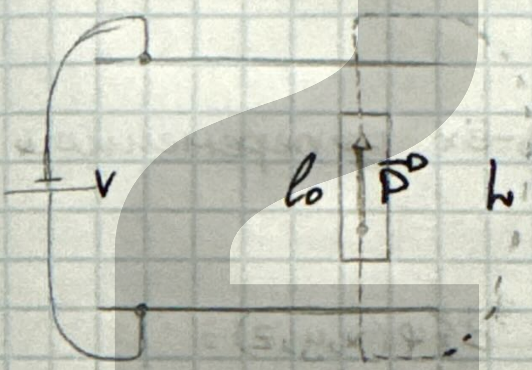
$$E = \frac{3pR^2}{R^5} - \frac{p}{R^5} = \frac{2p}{R^3}$$

На заряд действует сила $F=qE=\frac{2pq}{R^3}=$

$$=\frac{\varepsilon-1}{3}\cdot\frac{r_0^3}{R^2}\cdot q\cdot\frac{2q}{R^3}=2\left(\frac{q}{R}\right)^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^3\cdot\frac{\varepsilon-1}{3}$$

Ответ: $\boxed{F=2\left(\frac{q}{R}\right)^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^3\cdot\frac{\varepsilon-1}{3}}$

№3.77



Дано: $\vec{P}=const$, $V\neq 0$, l_0

Найти: $\oint_L \vec{D}\,d\vec{l}$

Решение:

$\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}=0$, $\oint_L \vec{P}\,d\vec{l}=Pl_0$

$$\oint_L \vec{D}\,d\vec{l}=\oint_L \vec{E}\,d\vec{l}+4\pi\oint_L \vec{P}\,d\vec{l}=4\pi Pl_0$$

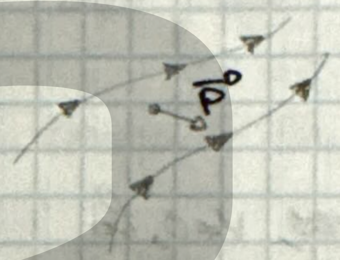
Ответ: $\boxed{\oint_L \vec{D}\,d\vec{l}=4\pi Pl_0.}$

4 неделя

№1.5

Вывести выражение для энергии диполя в поле $\vec{E}$ для:

а) жёсткого диполя с моментом $\vec{p}$



$W = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r}+\vec{l})$ - энергия двух точечных зарядов.

Ряд Тейлора для функции 3-ёх переменных $\varphi(x,y,z)$:

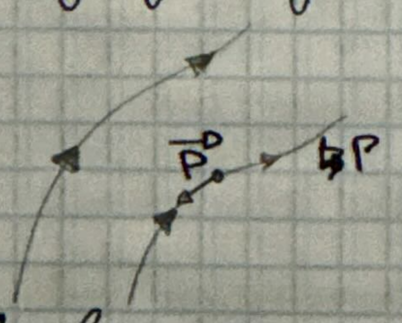
$$\varphi(x+l_x, y+l_y, z+l_z) = \varphi(x,y,z) + d\varphi(x,y,z) =$$

$$= \varphi(x,y,z) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}l_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}l_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}l_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}+\vec{l}) = \varphi(\vec{r}) + (\nabla\varphi, \vec{l})$$

$$W = -q\varphi(\vec{r}) + q\varphi(\vec{r}) + q(\nabla\varphi, \vec{l}) = (-\vec{E}, q\vec{l}) = (-\vec{E}, \vec{p})$$

б) упругого диполя с поляризуемостью α: $\vec{p} = \alpha\vec{E}$



Энергия равна работе, которую необходимо совершить, чтобы „притащить" диполь из бесконечности

Силовые линии уходят на бесконечность, иначе было бы противоречие $\oint \vec{E}d\vec{l} = 0$

Тогда можно „тащить" диполь по силовой линии, проходящей через его конечное положение

$$\vec F = -\nabla W = \nabla(\vec E, \vec p) = (\nabla \vec E, \vec p) + (\vec E, \nabla \vec p) = (\vec p, \nabla)\vec E \, -$$

— сила, действующая на диполь во внешнем поле $\vec E$.

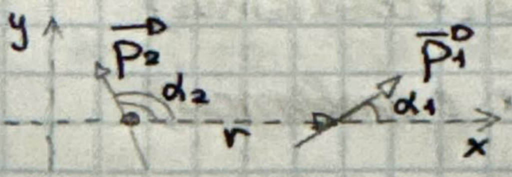
$$\delta A = -\vec F d\vec l \Rightarrow W = -\int_\Gamma (\vec p, \nabla)\vec E \, d\vec l = -\alpha \int_0^E E \frac{dE}{dl} dl =$$

$$= \cancel{-}\alpha \frac{E_0^2}{2}$$

$$W = -\frac{\alpha E^2}{2} = -\frac{1}{2}(\vec p, \vec E)$$

Ответ: $\boxed{а)\ W = -(\vec p, \vec E);\ б)\ W = -\frac{1}{2}(\vec p, \vec E)}$

Т4.1



Дано: $|\vec p_1| = |\vec p_2| = p = 1{,}84\,D$,

$r = 35$ Å, α_1, α_2

Найти: W, F_x, F_y

Решение:

Поле, создаваемое $\vec p_2$: $\vec E_2 = \frac{3(\vec p_2, \vec r)\vec r}{r^5} - \frac{\vec p_2}{r^3}$

Энергия взаимодействия: $W = -(\vec p_1, \vec E_2) =$

$$= \frac{\vec p_1 \vec p_2}{r^3} - \frac{3(\vec p_1, \vec r)(\vec p_2, \vec r)}{r^5} = \frac{p^2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}{r^3} - \frac{3p^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{r^3} =$$

$= \frac{p^2}{r^3}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)$

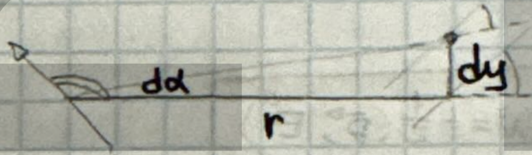
$\vec{F} = -\nabla W \Rightarrow F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -p^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)\cdot$

$\cdot \frac{-3}{r^4}\cdot \frac{x}{r} = \frac{3p^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)}{r^5}\cdot x$

$F_y = (\text{аналогично}) = \frac{3p^2(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)}{r^5}\cdot y \cancel{+} -$

$- \cancel{+} \frac{p^2}{r^3}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2)'_y$

Слагаемое добавляется, так как α_1 и α_2 зависят от y-компоненты $\vec{r}$



$d\alpha = \frac{dy}{r}$

$d\alpha_1 = d\alpha_2 = -d\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha'_{1y} = \alpha'_{2y} = -\frac{1}{r}$

Тогда $F_y = \frac{p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 + 2\sin\alpha_1\cos\alpha_2 +$

$+ 2\cos\alpha_1\sin\alpha_2) = \frac{3p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2)$

Проекции сил согласуются с ответом, полученном в п.1.1.

Ответ:
$$\boxed{\begin{aligned} W &= \frac{p^2}{r^3}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2) \\ F_x &= \frac{3p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2) \\ F_y &= \frac{3p^2}{r^4}(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2) \end{aligned}}$$

№3.44

Дано: масса электрона определяется из $W = mc^2$, W - электростатическая энергия заряда электрона.

1) $\rho = \text{const}$; 2) $\sigma = \text{const}$

Найти: r_0

Решение:

$w = \frac{E^2}{8\pi}$; $W = \int\limits_{\text{пр-во}} w\,dV$

1) $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot 4\pi \Rightarrow E = \frac{4}{3}\pi r \rho$ - внутри шара

$\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho = e \Rightarrow E = \frac{r}{r_0^3} e$

Снаружи: $E = \frac{e}{r^2}$

$W = \int\limits_0^{r_0} \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{r^2 e^2}{r_0^6} \cdot 4\pi r^2 dr + \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{e^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr =$

$= \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{r_0^6}\int\limits_0^{r_0} r^4 dr + \int\limits_{r_0}^{+\infty}\frac{dr}{r^2}\right) = \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{5r_0} + \frac{1}{r_0}\right) = \frac{3e^2}{5r_0}$

$mc^2 = \frac{3e^2}{5r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{3e^2}{5mc^2} = \frac{3(4{,}8\cdot 10^{-10}\text{ ед. СГС})^2}{5\cdot 9{,}1\cdot 10^{-28}\text{ г}\cdot(3\cdot 10^{10}\text{ см/с})^2} \approx$

$\approx 1{,}7\cdot 10^{-13}$ см

2) Внутри $E=0$, снаружи $E = \frac{e}{r^2}$

$W = \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{8\pi}\left(\frac{e}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{2r_0}$

$mc^2 = \frac{e^2}{2r_0} \Rightarrow r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} = \frac{5}{6}$ (значение пункта 1) $\approx$

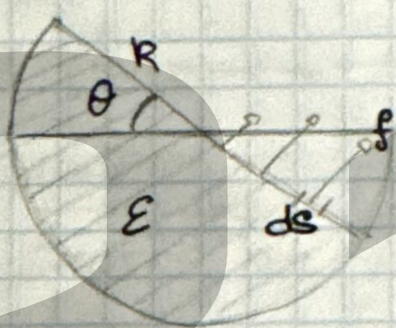
$\approx 1{,}4\cdot 10^{-13}$ см.

Ответ: $\boxed{1)\ r_0 = \frac{3e^2}{5mc^2} \approx 1{,}7\cdot 10^{-13}\ \text{см};\ 2)\ r_0 = \frac{e^2}{2mc^2} \approx 1{,}4\cdot 10^{-13}\ \text{см}}$

№3.67

Дано: R, d, V, ε

Найти: M



Решение:

$$C_1 = \frac{\varepsilon S_1}{4\pi d} = \frac{1}{4\pi d}\cdot\frac{(\pi-\theta)R^2}{2}\cdot\varepsilon = \frac{(\pi-\theta)\varepsilon R^2}{8\pi d}$$

$$C_2 = \frac{S_2}{4\pi d} = \frac{\theta R^2}{8\pi d}$$

$$C = C_1 + C_2 = \frac{R^2}{8\pi d}\left((\pi-\theta)\varepsilon + \theta\right)$$

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{R^2V^2}{16\pi d}\left(\pi\varepsilon - (\varepsilon-1)\theta\right)$$

Рассмотрим силы, действующие на единицу площади.

$$d\delta A = f\,dS\cdot r\,d\theta = dM\cdot d\theta$$

Суммируем: $\delta A = M\,d\theta$.

$$\delta A = dW \Rightarrow M = W'_\theta = -\frac{R^2V^2}{16\pi d}(\varepsilon-1)$$

Ответ: $\boxed{M = \frac{(\varepsilon-1)R^2V^2}{16\pi d}}$

__03.08__

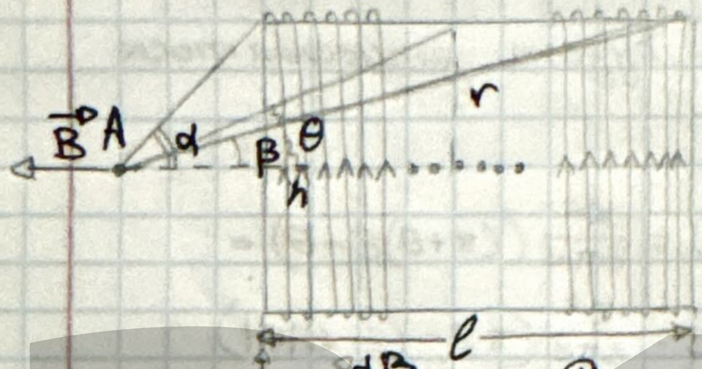
Если $\theta < 0$, то ёмкость будет записываться иначе:

$$C = \frac{R^2}{8\pi d}\left((-\theta) + (\pi - (-\theta))\varepsilon\right) = \frac{R^2}{8\pi d}\left((\pi+\theta)\varepsilon - \theta\right) =$$

$$= \frac{R^2}{8\pi d}\left(\pi\varepsilon + (\varepsilon - 1)\theta\right), \text{ т.е. } C = \frac{R^2}{8\pi d}\left(\pi\varepsilon - (\varepsilon-1)|\theta|\right)$$

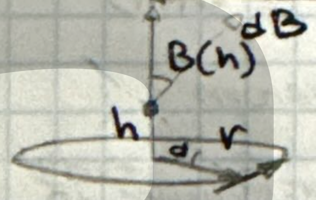
То есть C, а следовательно W, имеют излом в точке $\theta = 0$, а значит производная $\frac{dW}{d\theta}$ не существует.

5 неделя №5.5



Дано: α, β, I, N, l

Найти: B



Решение:

$$d\vec{B} = \frac{I}{c}\frac{[d\vec{l} \times \vec{R}]}{R^3}$$

$$dB = \frac{I\,dl \cdot R}{cR^3}$$

$$dB_{верт} = dB \cdot \cos\alpha = dB \cdot \frac{r}{R} = \frac{I\,dl\,r}{cR^3}$$

$$B = \int_0^{2\pi r} \frac{I r\,dl}{cR^3} = \frac{2\pi r^2 I}{c(r^2+h^2)^{3/2}}$$ – поле витка с током

В точке A:

$$dB = \frac{2\pi r^2 I}{c(r^2+h^2)^{3/2}} \cdot \frac{N\,dh}{l} = \frac{2\pi r^2 I N}{cl} \cdot \frac{dh}{(r^2+h^2)^{3/2}} =$$

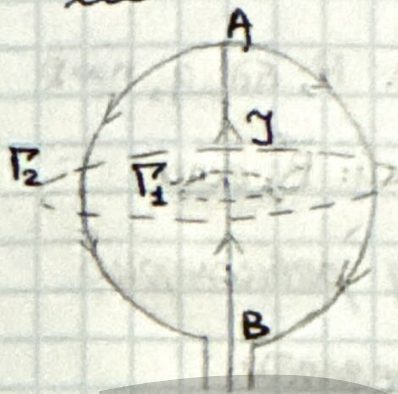
$$= \frac{2\pi I N}{cl} \cdot \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}},$$ где $\xi = \frac{h}{r} = ctg\,\theta$

$$dB = \frac{2\pi I N}{cl} \cdot \frac{d\theta}{\sin^2\theta \, \frac{1}{\sin^3\theta}} = \frac{2\pi I N}{cl} \cdot \sin\theta\,d\theta$$

$$B = \int_\beta^\alpha dB = \frac{2\pi I N}{cl}(\cos\beta - \cos\alpha)$$

Ответ: $B = \frac{2\pi I N}{cl}(\cos\beta - \cos\alpha)$

№5.10



Дано: Ток I течёт по проводу от B к A, а затем по сфере от A к B

Найти: B_{in}, B_{out}

Рассмотрим контур Γ_1: полностью внутри сферы.

Теорема циркуляции: $B_{in}\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow B_{in} = \frac{2I}{cr}$

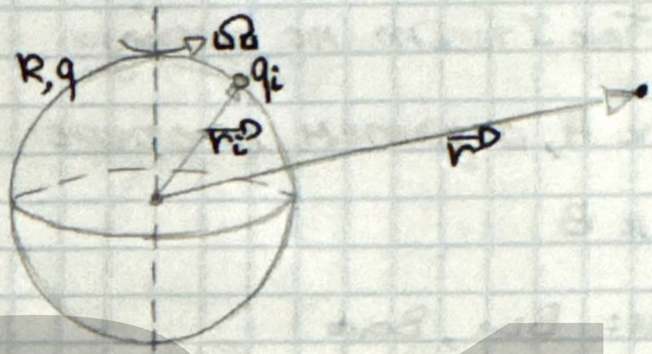
В силу симметрии $B_{in\,\tau} = const$ (по углам), $B_{in\,r} = 0$, т.к. иначе поток не нулевой, поэтому левая часть в уравнении записывается как $B_{in}\cdot 2\pi r$.

Аналогично для Γ_2 (вне сферы):

$B_{out}\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}(I - I) = 0 \Rightarrow B_{out} = 0$

Ответ: $\boxed{B_{in} = \frac{2I}{cr},\ B_{out} = 0}$

№5.17



Дано: R, Ω, q, $r \gg R$

Найти: $\vec{B}$, если заряд равномерно распределён:

1) по поверхности

2) по объёму

Решение:

Магнитный момент системы зарядов:

$$\vec{M} = \frac{1}{2c}\sum q_i[\vec{r}_i \times \vec{v}_i] = \frac{q}{2cm}\sum m[\vec{r}_i \times \vec{v}_i] =$$

$$= \frac{q}{2cm}\vec{L}.$$

$\vec{L} = I\vec{\Omega}$, I - момент инерции

$$\vec{M} = \frac{qI}{2cm}\vec{\Omega}$$

1) заряд распределён по поверхности $\Rightarrow I = \frac{2}{3}mR^2$

Тогда $\vec{M} = \frac{q}{2cm}\cdot\frac{2}{3}mR^2\vec{\Omega} = \frac{qR^2}{3c}\vec{\Omega}$

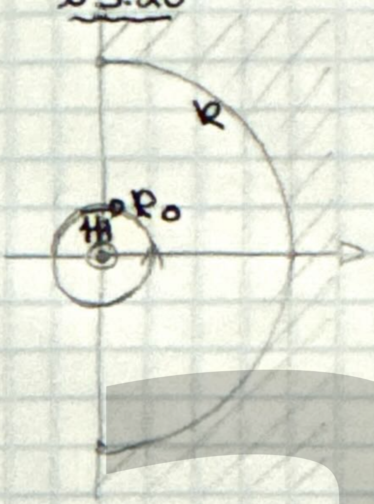
$$\vec{B} = \frac{3(\vec{M}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3} = \frac{qR^2}{3cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)$$

2) $I = \frac{2}{5}mR^2$, $\vec{M} = \frac{q}{2cm}\cdot\frac{2}{5}mR^2\vec{\Omega} = \frac{qR^2}{5c}\vec{\Omega}$

$$\vec{B} = \frac{qR^2}{5cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)$$

Ответ: $\boxed{1)\ \vec{B} = \frac{qR^2}{3cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)\ 2)\ \vec{B} = \frac{qR^2}{5cr^3}\left(\frac{3(\vec{\Omega}\vec{r})\vec{r}}{r^2} - \vec{\Omega}\right)}$

№5.26



Дано: R_0, I, $R = 10R_0$

Найти: Φ - через заштрихованную часть плоскости

Решение:

Считаем, что $R \gg R_0$ $\left(\frac{R_0}{R} = 0{,}1\right)$, тогда поле $\vec{B}$ - есть поле магнитного диполя

$$m = \frac{IS}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m}\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} = -\frac{\vec{m}}{r^3}$$

$$\Phi = \int_R^{+\infty} \frac{m}{r^3} \cdot \frac{1}{2} 2\pi r\, dr = \pi m \int_R^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\pi m}{R} = \frac{\pi^2 R_0^2 I}{c \cdot 10R_0} =$$

$$= \frac{\pi^2 R_0 I}{10c}$$

Ответ: $\boxed{\Phi = \frac{\pi^2 R_0 I}{10c}}$