1. Простейшие типы уравнений 1-го порядка

Сд 1.2

$y = x^2 + Cx$

$\frac{y}{x} = x + C$

$\frac{y'x - y}{x^2} = 1$

$xy' - y = x^2$

Ответ: $xy' - y = x^2$.

Сд 2.5

$2xy\,dx = (1-x^2)\,dy$

$x = \pm 1$ - решение и $y = 0$ - решение. В противном сл:

~~$x \neq \pm 1$: $2x$~~

$\frac{2x}{1-x^2}dx = \frac{dy}{y}$;

$-\ln|1-x^2| = \ln|y| + C$

$\frac{1}{|1-x^2|} = C|y|$, $C > 0$, снимаем модуль:

$\frac{1}{1-x^2} = Cy$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ответ: $y(1-x^2) = C$.

Сд 2.10

$x(y+1)\,dy = (1-y^2)\,dx$

$y = -1$ - решение. $y \neq -1$:

$x\,dy = (1-y)\,dx$.

$x=0$ и $y=1$ - решения. $x\neq 0$ и $y\neq 1$:

$$\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x}$$

$$\ln\frac{1}{|1-y|}=\ln|x|+c$$

$$\frac{1}{|1-y|}=c|x|,\ c>0$$

$$\frac{1}{1-y}=cx,\ c\neq 0$$

$x(1-y)=c,\ c\in\mathbb{R}$ ($c=0$ учитывает решения $x=0$ и $y=1$)

Ответ: $x(1-y)=c,\ c\in\mathbb{R};\ y=-1.$

Со2.16

$$y'tg^2x-ctgy=0$$

$y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ - решение

$y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$:

$$\frac{dy}{dx}tg^2x=ctgy$$

$$\frac{dy}{ctgy}=\frac{dx}{tg^2x}$$

$$tgy\,dy=ctg^2x\,dx$$

$$-\ln|\cos y|=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-1\right)dx=-ctgx-x+c$$

$$\ln|\cos y|-ctgx-x=c$$

Ответ: $\ln|\cos y|-ctgx-x=c,\ c\in\mathbb{R}$

С 2.35

$$(x^3+x)y' - (3x^2-1)y = 0; \quad y(-1) = -4.$$

$$(x^3+x)\frac{dy}{dx} = (3x^2-1)y$$

$y=0$ - решение

$$\frac{dy}{y} = \frac{3x^2-1}{x(x^2+1)}dx$$

$$\frac{3x^2-1}{x(x^2+1)} = \cancel{\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1} = \frac{Ax^2+Bx+A}{x(x^2+1)}} \quad \frac{3(x^2+1)-4}{x(x^2+1)} =$$

$$= \cancel{\frac{3}{x} - \frac{4}{x(x^2+1)}}$$

$$\ln|y| = \int \frac{\frac{d}{dx}(x^3+x) - 2}{x^3+x}dx = \ln|x^3+x| - 2\int\frac{dx}{x^3+x}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

$A=1, \; A+B=0 \Rightarrow B=-1, \; C=0$

$$\ln|y| = \ln|x^3+x| - 2\int\frac{1}{x}dx + 2\int\frac{x\,dx}{x^2+1} = \ln|x^3+x| - 2\ln|x| + \ln|x^2+1| + C =$$

$$= \ln\frac{|x|\cdot|x^2+1|^2}{|x|^2} + C = \ln\frac{(x^2+1)^2}{|x|} + C.$$

$$|y| = C\frac{(x^2+1)^2}{|x|}, \; C \geq 0$$

$$y = C\frac{(x^2+1)^2}{x}.$$

$x=-1: \; y = C\cdot\frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow C=1$

Ответ: $y = \frac{(x^2+1)^2}{x}$

№2.46

$e^x = C(1-e^{-y})$

$\cancel{1-e^{-y} = \frac{1}{C}e^x}$

$\cancel{e^{-y} = 1-\frac{e^x}{C}}$

$e^x = C\cdot e^{-y}\cdot y'$

$C = \frac{e^x}{1-e^{-y}}$

$e^x = \frac{e^x}{1-e^{-y}}\cdot e^{-y}\cdot y' \Rightarrow y'\cdot e^{-y} = 1-e^{-y}$

Заменяем y' на $-\frac{1}{y'}$, чтобы получить ДУ для семейства искомых ортогональных траекторий.

$-\frac{1}{y'}\cdot e^{-y} = 1-e^{-y}$

$\frac{dx}{dy}\cdot e^{-y} = e^{-y}-1$

$\frac{e^{-y}-1}{e^{-y}}\cdot dy = dx$

$(1-e^{y})dy = dx$

$y-e^{y} = x+C$

Ответ: $e^{y}-y+x=C,\ C\in\mathbb{R}$

№2.60

$xy\,dx = (x^2-y^2)\,dy$

$y=0$ – решение, $y\neq 0$:

$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$;

$z = \frac{x}{y}$, $x'_y = z'_y y + z$

$z + z'_y y = z - \frac{1}{z}$

$z'_y y = -\frac{1}{z}$

$\frac{dz}{dy} y = -\frac{1}{z}$

$-z\,dz = \frac{dy}{y}$

$-\frac{1}{2} z^2 = \ln|y| + c$

$y = ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$, $c \in \mathbb{R}$ $(c=0 \Leftrightarrow y=0)$

Ответ: $y = ce^{-\frac{x^2}{2y^2}}$, $c \in \mathbb{R}$

№2.75

$(x-1)y' + 3x + 2y + 3 = 0$;

$y' + \frac{2}{x-1} y = -\frac{3(x+1)}{x-1}$;

Однородное: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x-1} y = 0$.

$y=0$ – решение, $y\neq 0$:

$\frac{dy}{y} = -\frac{2dx}{x-1}$

$\ln|y| = -2\ln|x-1| + c = \ln\frac{1}{(x-1)^2} + c$

$|y| = c\frac{1}{(x-1)^2}$, $c > 0$; $y = \frac{c}{(x-1)^2}$, $c \in \mathbb{R}$

Вариация постоянной:

$$y=\frac{C(x)}{(x-1)^2}$$

$$(x-1)\cdot\frac{C'_x\cdot(x-1)^2-C\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}+3x+\frac{2C}{(x-1)^2}+3=0;$$

$$\frac{C'_x}{x-1}-\frac{2C}{(x-1)^2}+3x+\frac{2C}{(x-1)^2}+3=0$$

$$C'_x=-\frac{3(x+1)(x-1)}{\cancel{x}}=3(1-x^2)$$

$$C(x)=3x-3\cdot\frac{x^3}{3}+C=3x-x^3+C$$

$$y(x)=\frac{3x-x^3+C}{(x-1)^2}$$

$$(x-1)^2y+x^3-3x=C$$

Ответ: $(x-1)^2y+x^3-3x=C,\ C\in\mathbb{R}$

CD3.20

$$(\sin x-1)y'+y\cos x=\sin x;$$

ОУ: $(\sin x-1)\frac{dy}{dx}+\cos x\cdot y=0;$

$y=0$ - решение, $y\neq0$:

$$\frac{dy}{y}+\frac{\cos x}{\sin x-1}dx=0$$

$$\ln|y|=-\ln|\sin x-1|+C=\ln\frac{1}{|\sin x-1|}+C$$

$$|y|=\frac{1}{1-\sin x}\cdot C,\ C>0$$

$$y=\frac{C}{1-\sin x},\ C\in\mathbb{R}$$

Вариация ~~переменной~~ постоянной: $y = \dfrac{C(x)}{1-\sin x}$

$$(\sin x - 1)\cdot \frac{C'_x(1-\sin x) + C\cdot\cos x}{(1-\sin x)^2} + \frac{C\cdot\cos x}{1-\sin x} = \sin x$$

$+C'_x = -\sin x \Rightarrow C(x) = \cos x + C$

Отсюда: $y = \dfrac{\cos x + C}{1-\sin x},\ C\in\mathbb{R}$

Ответ: $y = \dfrac{\cos x + C}{1-\sin x},\ C\in\mathbb{R}$

С 03.31

$(1+y^2)dx + (xy - y^3)dy = 0;$

Рассмотрим $x = x(y)$:

$(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} + yx = y^3.$

ОУ: $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} + yx = 0$

$\dfrac{dx}{x} = \dfrac{-y\,dy}{1+y^2}$

$\ln|x| = -\dfrac{1}{2}\ln|1+y^2| + C$

$x = \dfrac{C}{\sqrt{1+y^2}},\ C\in\mathbb{R}$

Вариация постоянной: $x = \dfrac{C(y)}{\sqrt{1+y^2}}$

$$(1+y^2)\cdot\frac{C'_x\sqrt{1+y^2} - C\cdot\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2} + y\cdot\frac{C}{\sqrt{1+y^2}} = y^3$$

$C'_x\sqrt{1+y^2} = y^3$

$$C'_x = \frac{y^3}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow C(y) = \int\frac{y^3\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \{y = sh\alpha\} = \int\frac{sh^3\alpha\, ch\alpha\, d\alpha}{ch\alpha} =$$

$$= \int sh^2\alpha\, d\,ch\alpha = \int(ch^2\alpha - 1)\,d\,ch\alpha = \frac{ch^3\alpha}{3} - ch\alpha + C =$$

$$= \operatorname{ch}\alpha\left(\frac{1}{3}\operatorname{ch}^2\alpha - 1\right) + C = \sqrt{1+y^2}\left(\frac{1}{3}(1+y^2) - 1\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{1+y^2}\,(1+y^2-3) + C = \frac{1}{3}\sqrt{1+y^2}\,(y^2-2) + C$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{1+y^2}\,(y^2-2) + C}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{3}(y^2-2) + \frac{C}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$(3x - y^2 + 2)\sqrt{1+y^2} = C$$

<u>Ответ:</u> $(3x - y^2 + 2)\sqrt{1+y^2} = C,\ C \in \mathbb{R}$

<u>Сб 3.35</u>

$$(1+y^2)\,dx + (2xy-1)\,dy = 0;$$

Рассмотрим $x = x(y)$:

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} + 2y\cdot x = 1$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2y}{1+y^2}x = \frac{1}{1+y^2}.$$

ОУ: $\frac{dx}{dy} + \frac{2y}{1+y^2}x = 0$, $x = 0$ - решение

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2y\,dy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| = -\ln|1+y^2| + C = \ln\frac{1}{1+y^2} + C$$

$$|x| = C\frac{1}{1+y^2},\ C > 0$$

$x = \frac{C}{1+y^2}$, $C \in \mathbb{R}$ (учитывается $x=0$)

Вариация постоянной: $x = \frac{C(y)}{1+y^2}$.

$$\frac{C'_y(1+y^2) - C\cancel{\ }\cdot 2y}{(1+y^2)^2} + \frac{2Cy}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

$$\frac{C'_y}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow C(y) = y + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{y+C}{1+y^2}$$

<u>Ответ</u>: $x(1+y^2) = y + C,\ C \in \mathbb{R}$

<u>С02.75</u>

$$(x-1)y' + 3x + 2y + 3 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x-1}y = -3\frac{x+1}{x-1}$$

Решаем ОУ:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x-1}y = 0 \qquad y=0 \text{ - решение.}$$

$$\frac{dy}{y}\cancel{z} = -\frac{2dx}{x-1}$$

$$\ln|y| = -2\ln|x-1| + C,\ C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = C \cdot \frac{1}{(x-1)^2},\ C > 0$$

$y = \frac{C}{(x-1)^2},\ C \in \mathbb{R}$ - решение ОУ (с учётом $y=0$).

Вариация постоянной: $y = \frac{C(x)}{(x-1)^2}$

$$(x-1)\cdot\frac{C'_x(x-1)^2 - C\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} + \frac{2C}{(x-1)^2} + 3(x+1) = 0$$

$$\frac{C'_x}{x-1} = -3(x+1) \Rightarrow C'_x = -3x^2 + 3 \Rightarrow C(x) = -x^3 + 3x + C$$

$$y = \frac{-x^3+3x+C}{(x-1)^2} = \frac{-x^3+3x^2-3x+1-3x^2+6x+C}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^3-3(x-1)^2+C}{(x-1)^2}$$

$$y(x-1)^2 + (x-1)^3 + 3(x-1)^2 = C$$

<u>Ответ</u>: $(x-1)^2(y+x+2) = C,\ C \in \mathbb{R}$

№3.58

$xy' + 3xy^2 = 2y$

$y' - \frac{2}{x}y = -3y^2$ — уравнение Бернулли, $y=0$ — решение

$z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$, $y = \frac{1}{z}$;

$-\frac{1}{z^2}\cdot z'_x - \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{z} = -\frac{3}{z^2}$;

$z'_x + \frac{2z}{x} = 3$

ОУ: $z'_x + \frac{2z}{x} = 0$;

$\frac{dz}{dx} = -\frac{2z}{x}$,

$\frac{dz}{z} = -2\frac{dx}{x}$;

$\ln|z| = -2\ln|x| + C = \ln\frac{1}{x^2} + C$

$|z| = C\cdot\frac{1}{x^2}$, $C>0$

$z = \frac{C}{x^2}$, $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Вариация постоянной: $z = \frac{C(x)}{x^2}$.

$\frac{C'_x x^2 - 2xC}{x^4} + \frac{2C}{x^3} = 3$

$C'_x = 3x^2 \Rightarrow C(x) = x^3 + C$

$z = \frac{x^3+C}{x^2} \cancel{= x + \frac{C}{x^2}}$

$\cancel{y = \frac{1}{z} = \frac{x^2}{x^3+C}}$

Ответ: $\frac{1}{y} = x + \frac{C}{x^2}$, $y=0$.

С03.91

$\cancel{y = e^{-x} + \frac{e^{-x}}{C-x},\ y = e^{-x}}$

$y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}$

Найдём решение вида $y = Ae^{Bx}$:

$ABe^{Bx} - e^x \cdot A^2 \cdot e^{2Bx} + 3Ae^{Bx} = e^{-x}$

$(3+B)Ae^{Bx} - A^2e^{2Bx} \cdot e^x = e^{-x}$

Рассмотрим $B = -1$:

$2Ae^{-x} - A^2e^{-x} = e^{-x}$

$A = 1$ - подходит, отсюда $y = e^{-x}$ - решение.

Замена: $y = z + e^{-x}$

$z'_x - e^{-x} - e^x \cdot (z^2 + 2ze^{-x} + e^{-2x}) + 3z + 3e^{-x} = e^{-x}$;

$z'_x - z^2e^x - 2z - e^{-x} + 3z + e^{-x} = 0$

$z'_x + z = z^2e^x$

Замена: $\tilde{z} = z^{1-2} = \frac{1}{z}$ ($z = 0$ - уже учтённое решение)

$-\frac{1}{\tilde{z}^2} \cdot \tilde{z}'_x + \frac{1}{\tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{z}^2}e^x$

$\tilde{z}'_x - \tilde{z} = -e^x$

ОУ: $\frac{d\tilde{z}}{dx} = \tilde{z} \Rightarrow \ln|\tilde{z}| = x + C \Rightarrow \tilde{z} = Ce^x,\ C \in \mathbb{R}$

Вариация постоянной: $\tilde{z} = C(x)e^x$

$C'_x e^x + Ce^x - Ce^x = -e^x \Rightarrow C'_x = -1 \Rightarrow C(x) = -x + C$

$\tilde{\tilde{z}} = (-x+c)e^x$

$\frac{1}{z} = (-x+c)e^x$

$y = z + e^{-x} = e^{-x} + \frac{1}{e^x(c-x)}$

<u>Ответ</u>: $y = e^{-x}$; $y = e^{-x} + \frac{e^{-x}}{c-x}$, $c \in \mathbb{R}$

<u>С24.9</u>

$(y^2-2x)dx + (2xy-\sin y)dy = 0$

$P(x,y) = y^2-2x$

$Q(x,y) = 2xy - \sin y$

P, Q - непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$ =>

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$

=> $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ - ур-ие в полных дифференциалах.

$u: du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = y^2 - 2x \Rightarrow u(x,y) = y^2x - x^2 + \tilde{\tilde{c}}(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + \tilde{\tilde{c}}'(y) = Q(x,y) = 2xy - \sin y \Rightarrow \tilde{\tilde{c}}(y) = \cos y - \tilde{c}$

$u(x,y) = xy^2 - x^2 + \cos y - \tilde{c}$

Общее решение: $u(x,y) = \tilde{\tilde{\tilde{c}}} \Rightarrow xy^2 - x^2 + \cos y = c$

<u>Ответ</u>: $xy^2 - x^2 + \cos y = c$

СЭ 4.22

$$(y-3x^2y^3)dx-(x+x^3y^2)dy=0;$$

$$ydx-xdy=3x^2y^3dx+x^3y^2dy$$

$y=0$ - решение, рассмотрим $y\neq0$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=3x^2ydx+x^3dy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=d(x^3y)\Rightarrow\frac{x}{y}=x^3y+C$$

Ответ: $y=0;\ \frac{x}{y}-x^3y=C,\ C\in\mathbb{R}.$

СЭ 4.25

$$x^3dy+2(y-x^2)ydx=0$$

$y=0$ - решение, рассмотрим $y\neq0$

$$x^3\frac{dy}{y^2}+2dx-\frac{2x^2}{y}\cancel{y}dx=0$$

$$x^2\frac{dy}{y^2}+2\frac{dx}{x}-\cancel{2}\cancel{y}\frac{d(x^2)}{y}=0$$

$$-x^2d\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}d(x^2)+2d(\ln|x|)=0$$

$$d\left(x^2\cdot\frac{1}{y}\right)=d(2\ln|x|)\Rightarrow\frac{x^2}{y}=2\ln|x|+C\Rightarrow$$

~~Ответ:~~ $\Rightarrow x^2-2y\ln|x|=Cy$

Ответ: $y=0;\ x^2-2y\ln|x|=Cy,\ C\in\mathbb{R};$

С 04.56

$$xy' - y = 2x^3 e^{-y/x}$$

~~ур-е не является~~

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 2x e^{-y/x},$$

$$\frac{dy \cdot x - y dx}{x^2} = 2x e^{-y/x} dx;$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = e^{-y/x} d(x^2);$$

$$e^{y/x} d\left(\frac{y}{x}\right) = d(x^2);$$

$$d(e^{y/x}) = d(x^2);$$

$$e^{y/x} = x^2 + C$$

Ответ: $e^{y/x} = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

2. Уравнения, допускающие понижение порядка

№7.10

$(y^3+y)y'' - (3y^2-1)y'^2 = 0$; — нет явно x

Сделаем замену: $y'_x = z(y)$

$y''_{xx} = (z)'_x = z'_y y'_x = zz'_y$

y считаем независимой переменной

$(y^3+y)zz'_y - (3y^2-1)z^2 = 0$

$z=0$ — решение ($y=c$ — решение), рассмотрим $z \neq 0$

$(y^3+y)\frac{dz}{dy} - (3y^2-1)z = 0$

$\frac{dz}{z} = \frac{3y^2-1}{y^3+y}dy = \left(\frac{4y}{y^2+1} - \frac{1}{y}\right)dy = \frac{2d(y^2+1)}{y^2+1} - \frac{dy}{y}$

$\ln|z| = \ln(y^2+1)^2 - \ln|y| + c_1 = \ln\frac{(y^2+1)^2}{|y|} + \tilde{c}_1$

$|z| = \frac{(y^2+1)^2}{|y|}\tilde{c}_1, \quad \tilde{c}_1 > 0$

$z = \frac{(y^2+1)^2}{y}c_1$ ($c_1 = 0$ учитывает решение $z=0$)

$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2+1)^2}{y}c_1$

$c_1 dx = \frac{y\,dy}{(y^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}d(y^2+1)}{(y^2+1)^2} = d\left(-\frac{1}{2(y^2+1)}\right) + c_2 \Rightarrow c_1 x = -\frac{1}{2(y^2+1)} + c_2$

(c_1 и c_2 далее не сохраняются)

$(c_1 x + c_2) = +\frac{1}{y^2+1} \Rightarrow (c_1 x + c_2)(y^2+1) = 1$

Ответ: $(c_1 x + c_2)(y^2+1) = 1$.

Со 7.18

$y''\sin^3x - (y'\sin^2x + y'^2)\cos x = 0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$y'=z$ (уравнение не содержит явно y)

$z'\sin^3x - (z\sin^2x + z^2)\cos x = 0$

$z=0$ – общее решение, не подходящее к данным условиям.

$$\sin^2x\,(z'\sin x - z\cos x) = z^2\cos x$$

$$\sin^2x \cdot \frac{z\cos x - z'\sin x}{z^2} = -\cos x$$

$$\left(\frac{\sin x}{z}\right)'_x = -\frac{\cos x}{\sin^2x}$$

$$d\left(\frac{\sin x}{z}\right) = -\frac{d(\sin x)}{\sin^2x} = d\left(\frac{1}{\sin x}\right) \Rightarrow \frac{\sin x}{z} = \frac{1}{\sin x} + C_1$$

$$\sin^2x = z(1 + C_1\sin x);$$

Найдём значение C_1: $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$1 = 1(1 + C_1) \Rightarrow C_1 = 0$$

$$z = \sin^2x = y'_x \Rightarrow y = \int\sin^2x\,dx = \int\frac{1-\cos2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin2x + C_2$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $4y = 2x - \pi - \sin2x$

Сд 7.35

$2(y^2+y)y'' - (y^2+y+1)y'^2 + y^3 = 0$, $y(2)=1$, $y'(2)=-1$;

В уравнении нет явно x. Замена $y' = z(y)$,

y - ~~свободная~~ независимая переменная

$\cancel{2(y^2+y)z' - (y^2+y+1)z^2 + y^3 = 0}$

$y''_{xx} = z'_x = z'_y \cdot y'_x = zz'$

$2(y^2+y)zz' - (y^2+y+1)z^2 + y^3 = 0;$

$(y^2+y)(z^2)' - (y^2+y+1)z^2 + y^3 = 0$

Замена: $t = z^2$

$(y^2+y)t' - (y^2+y+1)t = -y^3;$

Однородное уравнение: $(y^2+y)t' = (y^2+y+1)t$ ($t=0$ - реш.)

$\frac{dt}{t} = \frac{y^2+y+1}{y^2+y}dy = \left(1 + \frac{1}{y(y+1)}\right)dy = \left(1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right)dy$

$\ln|t| = y + \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| + c_1$

$|t| = e^y \cdot c_2\left|\frac{y}{y+1}\right|$, $c_2 > 0$

$t = e^y \cdot \frac{y}{y+1} \cdot c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$

Вариация постоянной: $t = \frac{c_3(y)e^y y}{y+1}$

Подставляем в неоднородное уравнение:

$y(y+1)\left(c'e^y\frac{y}{y+1} + ce^y\left(\frac{y}{y+1} + \frac{1}{(y+1)^2}\right)\right) - (y^2+y+1)\cdot$

$\cdot\frac{ce^y y}{y+1} + y^3 = 0$

$C'e^{y}y^2 + y^3 = 0;$

$C' = -ye^{-y}$

$\int -ye^{-y}dy = \int y\,de^{-y} = ye^{-y} - \int e^{-y}dy = e^{-y}(y+1)+C$

$t = e^{y}\cdot\frac{y}{y+1}\left(e^{-y}(y+1)+C\right) = \frac{y}{y+1}\left(y+1+Ce^{y}\right)$

$t = z^2 = (y')^2$

В точке $x=2$: $y=1,\ y'=-1,\ t=1$

$1 = \frac{1}{2}(2+Ce) = 1+\frac{Ce}{2} \Rightarrow C=0,\ t=y$

Получаем $y'^2 = y \Rightarrow y' = \pm\sqrt{y}$

В той же точке $x=2$: $y'=-1$ при $y=1 \Rightarrow y'=-\sqrt{y}$

$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = -x+C \Rightarrow 4y=(x+C)^2$

$x=2$: $y=1 \Rightarrow C=0$ или $C=-4$

$y' = \frac{1}{2}(x+C)$, $y'=-1 \Rightarrow C=-4$

Ответ: $4y=(x-4)^2$.

27.42

$xyy'' + yy' = xy'^2 + y^2,\ x\neq 0$ $\quad y=0$ - решение.

$y \to \lambda y$: уравнение однородное

Введём $z(x)$: $y'=yz$

$y'' = y'z + yz' = y(z^2+z')$

$x\cdot y\cdot y(z^2+z') + y\cdot yz = x\cdot(yz)^2 + y^2;$

$x(z^2+z') + z = xz^2+1$

$xz'+z=1$

Однородное ур-ие: $xz'+z=0$

$x\frac{dz}{dx} = -z$, $z=0$ – решение

$\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|x| + c \Rightarrow |z| = c\cdot\frac{1}{|x|}, c>0$

$z=\frac{c}{x}, c\in\mathbb{R}$ (учитывается решение $z=0$)

Вариация переменных: $z=\frac{c(x)}{x}$;

Неоднородное ур-ие:

$x\cdot\frac{c'x-c}{x^2}+\frac{c}{x}=1;$

$c'=1 \Rightarrow c(x)=x+c_1 \Rightarrow z=\frac{x+c_1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = y\cdot\frac{x+c_1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(1+\frac{c_1}{x}\right)dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = x + c_1\ln|x| + c_2 \Rightarrow |y| = e^x\cdot|x|^{c_1}\cdot c_2, c_2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = c_2 e^x|x|^{c_1}, c_2\in\mathbb{R}$ (учитывается $y=0$)

Ответ: $y=c_2e^x|x|^{c_1}, c_1,c_2\in\mathbb{R}$

№ 7.59

$2xy^2y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2$, $y(1) = y'(1) = -1$

Однородное уравнение. Введём $z(x)$: $y' = yz$,

$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$

$2xy^2 \cdot y(z^2+z') - 2xy(yz)^2 + 2x(yz)^3 = y^2 yz$

$y = C$ - решение.

$2x(z^2+z') - 2xz^2 + 2xz^3 = z$

$2xz' + 2xz^3 = z$;

$z = 0$ - решение (соответствующее $y = C$)

$2x \cdot \frac{z'}{z^3} + 2x = \frac{1}{z^2}$.

Замена: $u = \frac{1}{z^2}$, $u' = -\frac{2z'}{z^3}$.

$-xu' + 2x = u$,

$xu' + u = 2x$.

Однородное ур-ие: $xu' + u = 0$

$x\frac{du}{dx} = -u$,

$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u| = -\ln|x| + C \Rightarrow u = \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Вариация постоянной: $u = \frac{c(x)}{x}$.

Неоднородное ур-ие:

$$x \cdot \frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x} = 2x \Rightarrow c' = 2x \Rightarrow c(x) = x^2 + c \Rightarrow u = \frac{x^2+c}{x}$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{x^2+c}{x}.$$

При $x = 1$: $y' = y = -1$, $y' = yz \Rightarrow z = 1$, тогда

$$1 = \frac{1+c}{1} \Rightarrow c = 0, \quad \frac{1}{z^2} = x \Rightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$x = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$ выбираем положительный знак:

$$z = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = 2\sqrt{x} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = ce^{2\sqrt{x}}, \ c > 0$$

$y = ce^{2\sqrt{x}}$, $c \in \mathbb{R}$ (учитывается решение $y = 0$)

В точке $x = 1$: $-1 = ce^2 \Rightarrow c = -e^{-2}$

$$y = -e^{-2}e^{2\sqrt{x}} = -e^{2(\sqrt{x}-1)}$$

Ответ: $y = -e^{2(\sqrt{x}-1)}$.

Сд7.66

$$x^4y'' - xyy' + 2(y - x^2)y = 0, \ y(1) = 1, \ y'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Подставляем $x \to \lambda x$, $y^{(n)} \to \lambda^{k-n}y^{(n)}$

$$\lambda^4x^4 \cdot \lambda^{k-2}y'' - \lambda x \cdot \lambda^k y \cdot \lambda^{k-1}y' + 2\lambda^{2k}y^2 - 2\lambda^2x^2 \cdot \lambda^k y = 0$$

$$\lambda^{k+2} \cdot x^4y'' - \lambda^{2k} \cdot xyy' + 2\lambda^{2k}y^2 - 2\lambda^{k+2}x^2y = 0,$$

Выбираем k: $k+2=2k=2k=k+2 \Rightarrow k=2$.

Замена $x=e^t$, $y=z(t)e^{kt}=ze^{2t}$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{e^{2t}(z'+2z)}{e^t}=e^t(z'+2z)$$

$$y''_{xx}=\frac{\partial}{\partial t}(y'_x)\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{e^t(z'+2z+z''+2z')}{e^t}=$$

$$=z''+3z'+2z.$$

$$e^{4t}(z''+3z'+2z)-e^t\cdot ze^{2t}\cdot e^t(z'+2z)+2z^2e^{4t}-2e^{2t}\cdot ze^{2t}=0;$$

$$z''+3z'+\cancel{2z}-zz'-\cancel{2z^2}+\cancel{2z^2}-\cancel{2z}=0;$$

$$z''+3z'-zz'=0;$$

Начальные условия: $x=1 \Leftrightarrow t=0$

$$z(0)\cdot e^{2\cdot 0}=y(x=1)=1 \Rightarrow z(0)=1$$

$$(z'(0)+2z(0))e^0=y'(x=1)=-\frac{1}{2} \Rightarrow z'(0)=-\frac{5}{2}.$$

В уравнении нет явно t.

z – независимая, $z'=u(z)$, $z''=uu'$

$uu'+3u-zu=0$, $u=0$ – решение, соответствующ

не подходит, т.к. $z'(0)=u=0\neq-\frac{5}{2}$.

$$u'+3-z=0$$

$$u=\frac{1}{2}z^2-3z+c$$

$z=+1$, $u=-\frac{5}{2} \Rightarrow c=0$.

Получаем $z'_t = \frac{1}{2}z^2 - 3z$

$$\frac{2dz}{z^2-6z} = dt,$$

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z-6} - \frac{1}{z}\right)dz = t$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{z-6}{z}\right| = t + c$$

$t=0,\ z=1 \Rightarrow c = \frac{\ln 5}{3}$

$$\ln\left|\frac{z-6}{5z}\right| = 3t$$

$$\left|\frac{z-6}{5z}\right| = e^{3t}$$

Уравнение рассматривается в точке $z=1 \Rightarrow$ модуль раскрывается с "–"

$$\frac{6-z}{5z} = e^{3t}$$

$$z(1+5e^{3t}) = 6$$

$$z = \frac{6}{1+5e^{3t}}$$ (в силу единств. других реш. нет)

$$y = ze^{2t} = \frac{6e^{2t}}{1+5e^{3t}} = \frac{6x^2}{1+5x^3}$$

<u>Ответ:</u> $y = \frac{6x^2}{1+5x^3}$

№1

$$y''e^y + y'^2 e^y = 2x$$

Замена: $y = \ln t \quad (t > 0)$

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{t'_x}{t}$$

$$y''_{xx} = \frac{t''_{xx}t - t'^2_x}{t^2}$$

$$\frac{t''_{xx}t - t'^2_x}{t^2} \cdot t + \frac{t'^2_x}{t^2} \cdot t = 2x;$$

$$t''_{xx} = 2x$$

$$t'_x = x^2 + C_1$$

$$t = \frac{1}{3}x^3 + C_1 x + C_2 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

<u>Ответ:</u> $y = \ln\left|\frac{1}{3}x^3 + C_1 x + C_2\right|, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3. Задача Коши для уравнения в нормальной форме

Ф 225 (б, в)

Выделить области на (x,y) в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения:

б) $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$

$f(x,y) = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$ – непрерывно дифференцируема во всех точках $\mathbb{R}^2$ кроме $y = 2x$ =>

=> в областях $\{y > 2x\}$ и $\{y < 2x\}$ – единственное решение, проходящее через каждую точку (по теореме о существовании и единственности)

в) $(x-2)\,y' = \sqrt{y} - x$

$f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y} - x}{x-2}$ – непрерывно дифференцируема при $x \neq 2$ и $y > 0$ => в областях $\{x > 2, y > 0\}$ и $\{x < 2, y > 0\}$ – единственное решение, проходящее через каждую точку (по теореме о существовании и единственности)

Ответ: б) $\{y > 2x\}$ и $\{y < 2x\}$; в) $\{x > 2, y > 0\}$ и $\{x < 2, y > 0\}$.

Ф.228 (в,е)

При каких начальных условиях существует единственное решение:

в) $(x-y)y'y'''=\ln xy$

$f(x,y,y',y'')=\dfrac{\ln xy}{(x-y)y'}$ – непрерывно дифференцируема по y, y', y''

при $x_0\neq y_0$, $y_1\neq 0$, $x_0y_0>0$

(здесь $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$)

=> (по теореме о существовании и единственности) при таких условиях решение единственно

е) $\dfrac{dx}{dt}=y^3+\ln(t+1)$, $x\dfrac{dy}{dt}=\sqrt[3]{y-t}$

$x'_t=f_1(t,x,y)=y^3+\ln(t+1)$

$y'_t=f_2(t,x,y)=\dfrac{\sqrt[3]{y-t}}{x}$

f_1 – непрерывно дифференцируема при $t_0>-1$

f_2 – непрерывно дифференцируема при $y_0\neq t_0$, $x_0\neq 0$

=> (по теореме о существовании и единственности) при таких условиях решение единственно.

Ответ: в) $x_0\neq y_0$, $y_1\neq 0$, $x_0y_0>0$

е) $t_0>-1$, $y_0\neq t_0$, $x_0\neq 0$

Ф№229

Могут ли графики двух решений пересекаться в (x_0, y_0)?

а) $y' = x + y^2 = f(x, y)$

f - непрерывна
$f'_y = 2y$ - непрерывна
$y(x_0) = y_0$ | => при заданном условии задача Коши имеет единственное решение (по теореме о существовании и единственности) -> не могут

б) $y'' = x + y^2 = f(x, y, y')$

f - непрерывна
$f'_y = 2y$ - непрерывна
$f'_{y'} = 0$ - непрерывна | => при заданном условии $y(x_0) = y_0$ ∨ $y'(x_0) = y_1$ задача Коши имеет единственное решение (по теореме о существовании и единственности).

Выбирая разные значения y_1 получаем разные решения, проходящие через (x_0, y_0)

Ответ: а) не могут; б) могут.

№230

Могут ли графики двух решений касаться в точке (x_0, y_0)?

а) $y' = x + y^2$

Из №229 (а) следует, что не могут (т.к. не могут даже пересекаться)

б) $y'' = x + y^2$.

В решении №229 (б) пропадает возможность произвольно выбрать y_1, т.к. для касания необходимо равенство значений и производных, но тогда при требовании касания получаем, что интегральные кривые должны совпадать $\Rightarrow$ не могут

в) $y''' = x + y^2 = f(x, y, y', y'')$

$f'_x, f'_y, f'_{y'}, f'_{y''}$ - непрерывны $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ и $y''(x_0) = y_2$ задача Коши имеет единственное решение.

Выбирая разные y_2 получаем пары

различных решений, с совпадающими значениями и производными в x_0 => могут.

<u>Ответ</u>: а) не могут; б) не могут; в) могут.

<u>Ф2231</u>

Сколько существует решений, удовлетворяющих $y(0)=1$, $y'(0)=2$?

$y^{(n)} = x + y^2$.

$n=1$: $y' = x + y^2$

Подставляем значения в $x=0$:

$2 = 0 + 1^2$ – неверно => таких решений нет.

$n=2$: $y'' = x + y^2 = f(x, y, y')$

$f, f'_y, f'_{y'}$ – непрерывны => задача Коши имеет единственное решение при данных начальных условиях (по теореме о существовании и единственности)

$n \geq 3$: $y^{(n)} = x + y^2 = f(x, y, \ldots y^{(n-1)})$

$f, f'_y, \ldots f'_{y^{(n-1)}}$ – непрерывны => при заданных начальных условиях $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=y_2, \ldots y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}$ задача Коши имеет единственное решение.

Выбирая различные значения $y_2, \dots y_{n-1}$ получаем бесконечно много решений ДУ, удовлетворяющих условиям.

Ответ: $n=1$: 0 решений; $n=2$: 1 решение; $n \geqslant 3$: беск. много решений.

Ф0234

$y^{(n)} = f(x, y, \dots y^{(n-1)})$, f - непрерывно - дифференцируем.

При каких n среди решений могут быть $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$.

Рассмотрим производные в точке 0:

$y_1(0) = 0 \qquad y_2(0) = 0$

$y_1'(0) = 1 \qquad y_2'(0) = 1$

$y_1''(0) = 0 \qquad y_2''(0) = 0$

$y_1'''(0) = 0 \qquad y_2'''(0) = -1$

Как было показано в задачах Ф0229 и Ф0230: при $n=1$ ($n=2$) пересечения (касания) различных решений быть не может.

Аналогично для $n=3$:

Задав начальные условия $y(0)=0, y'(0)=1, y''(0)=0$

имеем единственное решение задачи Коши (по теореме о существовании и единственности)

При $n \geq 4$ противоречий теореме о существовании и единственности нет.

Для $n \geq 4$:

$y^{(n)} = -y^{(n-2)}$:

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi(n-2)}{2} + \pi\right) = -(\sin x)^{(n-2)}$

$(x)^{(n)} = 0 = (x)^{(n-2)}$

То есть при $n \geq 4$ такое уравнение существует.

<u>Ответ</u>: при $n \geq 4$.

<u>№2</u>

Решить, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти непродолжаемое решение, удовлетворяющее условиям:

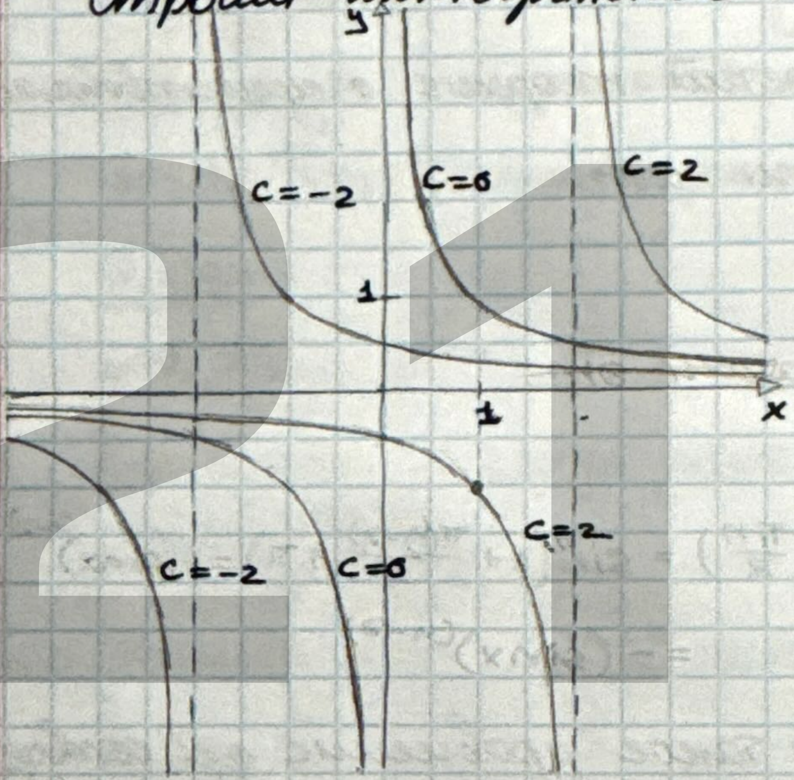
а) $y' = -y^2$, $y(1) = -1$.

$y = 0$ - решение. При $y \neq 0$:

$-\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{y} = x - c$, $y = \frac{1}{x-c}$.

Общее решение: $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\dfrac{1}{x-c} \end{array}\right.$

Строим интегральные кривые



Найдём P-дискриминантную кривую:

$p=y'$, $F(p,x,y)=p-y^2$

$\begin{cases} F=0 \\ F'_p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=y^2 \\ 1=0 \end{cases} \Rightarrow$ P-дискриминантов

кривой не существует => не существует и особых решений.

При $y(1)=-1$: $y=\dfrac{1}{x-2}$, $x<2$ - непродолжаемое на $x \geqslant 2$ решение.

Для $y'=-y^2$ при $y(1)=-1$ выполнены условия теоремы о существовании и единственности, поэтому решение однозначно определяется одним условием.

б) $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $y(-4)=-1$, $y(2)=1$.

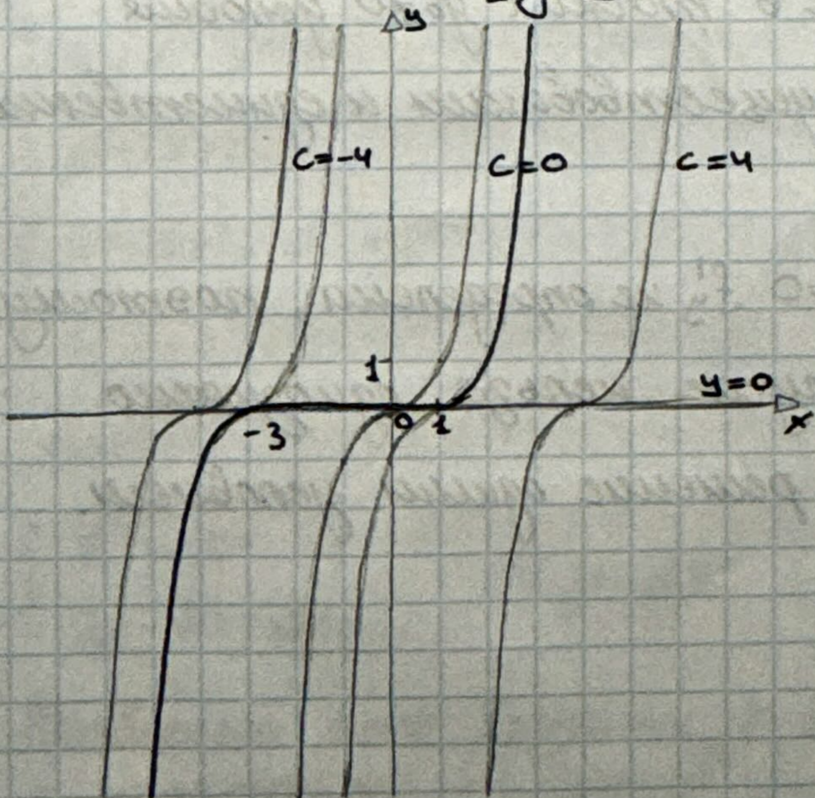
$y=0$ - решение. При $y\neq 0$:

$$\frac{1}{3}\frac{dy}{y^{2/3}}=dx;$$

$$y^{\frac{1}{3}}=x-c$$

$$y=(x-c)^3$$

Общее решение: $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=(x-c)^3 \end{array}\right.$



$y=0$ - особое решение, т.к. в каждой точке x_0 его касается не совпадающее с ним $y=(x-x_0)^3$.

При $y(-4)=-1$ и $y(2)=1$:

$(-4-c_1)^3=-1 \Rightarrow c_1+4=1 \Rightarrow c_1=-3$

$(2-c_2)^3=1 \Rightarrow 2-c_2=1 \Rightarrow c_2=1$

$$y=\begin{cases}(x+3)^3 & \text{при } x\le -3\\ 0 & \text{при } -3<x\le 1\\ (x-1)^3 & \text{при } x>1\end{cases}$$

область определения решения - $\mathbb{R}$

$f'_y=\frac{2}{\sqrt[3]{3y}}$ - ~~при~~ в точках $y_0\neq 0$ условия теоремы о существовании и единственности выполнены

В точках $y_0=0$ f'_y не определена, поэтому в данном случае нельзя однозначно определить решение одним условием.

4. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной.

№278

$y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$

$y' = p: \quad (dy = p\,dx)$

$p^2 - 2px = x^2 - 4y$

$2p\,dp - 2p\,dx - 2x\,dp = 2x\,dx - 4p\,dx$

$p\,dp + p\,dx - x\,dp = x\,dx$

$(p-x)\,dp = -(p-x)\,dx$

$$\left[\begin{array}{l} p = x \quad \cancel{y' = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + c} \\ p = -x + c \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x^2 = x^2 - 4y \\ x^2 - 2xc + c^2 + 2x^2 - 2cx = x^2 - 4y \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = \frac{c^2}{4} - \frac{(x+c)^2}{2} \end{array}\right.$$

Найдём P-дискриминантную кривую:

$$\begin{cases} p^2 - 2px = x^2 - 4y \\ 2p - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2.$$

Проверим что решение $y = \frac{1}{2}x^2$ - особое:

$\cancel{\frac{1}{2}x^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{(x+c)^2}{2}; \ \frac{c^2}{4} - cx = \frac{c^2}{2} = 0 \Rightarrow x =}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = \frac{C^2}{4} - \frac{(x+C)^2}{2} \\ x = -\frac{1}{2}\cdot 2(x+C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = \frac{C^2}{4} - \frac{(x+C)^2}{2} \\ x = -\frac{1}{2}C \end{cases}$$

Подставляем (2) в (1):

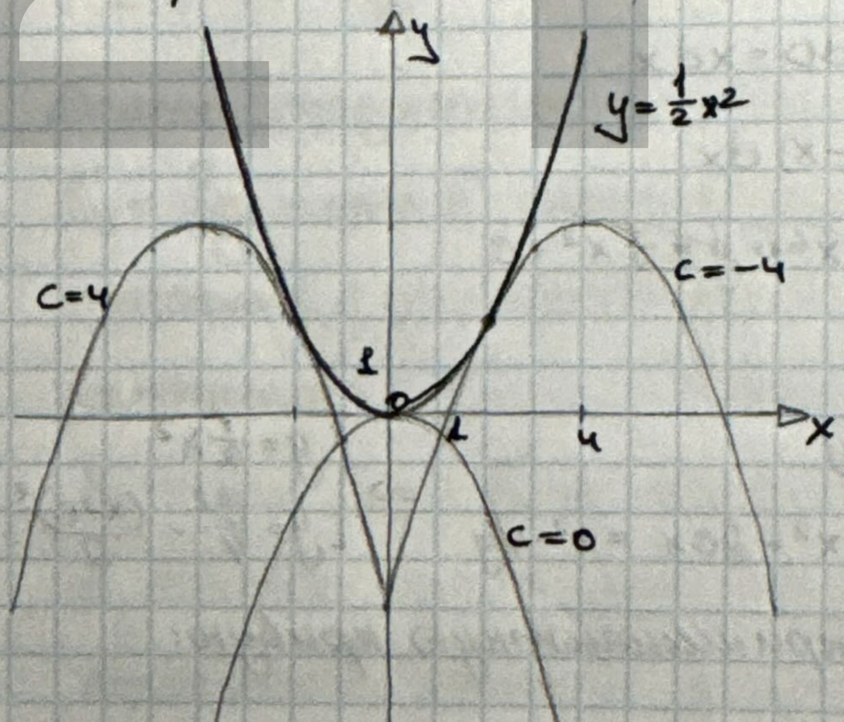
$\frac{1}{2}x^2 = \frac{4x^2}{4} - \frac{(x-2x)^2}{2} = x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ - верное равенство

$\Rightarrow$ в каждой точке $y = \frac{1}{2}x^2$ кривой касается

другое решение ДУ, не совпадающее с ним $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$ - особое. (других быть не может, т.к. совпадает с Р-диск. кривой)

Построим интегральные кривые:



~~Ответ:~~ $\cancel{y = \frac{C^2}{4} - \frac{(x+C)^2}{2},\ C\in\mathbb{R};\ y = \frac{1}{2}x^2}$ ~~- особое~~

Ответ: $y = \frac{C^2}{4} - \frac{(x+C)^2}{2},\ C\in\mathbb{R};\ y = \frac{1}{2}x^2$ - особое.

№287

$y = xy' - y'^2$

$y' = p$

$y = xp - p^2$

$dy = xdp + pdx - 2pdp$

$pdx = xdp + pdx - 2pdp$

$xdp = 2pdp$

1) $x = 2p \Rightarrow y = x \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2$

2) $dp = 0 \Rightarrow p = c \Rightarrow y = cx - c^2$

Найдём P-дискриминантную кривую:

$$\begin{cases} y = xp - p^2 \\ 0 = x - 2p \end{cases} \Rightarrow p = \frac{1}{2}x, \quad y = x \cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2$$

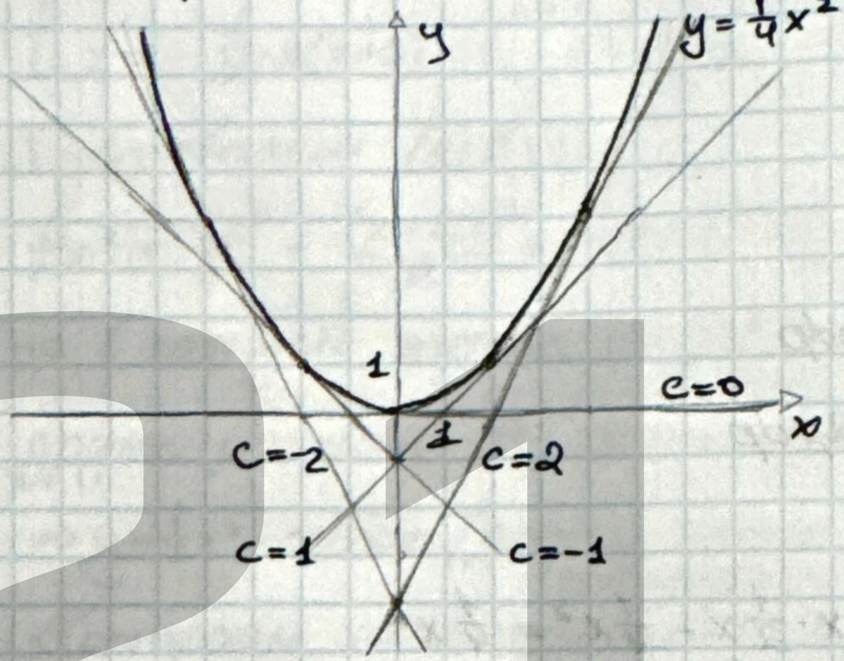
Проверим касание:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x^2 = cx - c^2 \\ \frac{1}{2}x = c \rightarrow x = 2c \end{cases} \quad c^2 = 2c^2 - c^2 \text{ - верно} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$ касается в каждой точке $y = cx - c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$ - особое решение (единственное, так как совпадает с P-дискриминантной кривой)

Построим интегральные кривые:



<u>Ответ</u>: $y = cx - c^2$, $c \in \mathbb{R}$; $y = \frac{1}{4}x^2$ — особое.

<u>Ф.289</u>

$y = 2xy' - 4y'^3$ $\quad y = 0$ — решение

$y' = p$ $\quad (p = 0$ при $y = 0)$

Далее рассматриваем $p \neq 0$:

$y = 2xp - 4p^3$

$dy = 2xdp + 2pdx - 12p^2dp$

$pdx = 2xdp + 2pdx - 12p^2dp$

$(12p^2 - 2x)dp = pdx$

$12p - 2\frac{x}{p} = \frac{dx}{dp}$

Найдём x как функцию от p:

$x'_p + 2\frac{x}{p} = 12p$ — неоднородное линейное

Решаем однородное:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p}$$

$$\ln|x| = -2\ln|p| + C \Rightarrow x = Ce^{-2\ln|p|} = \frac{C}{p^2}$$

Вариация постоянной: $x = \frac{C(p)}{p^2}$

$$\frac{C'p^2 - 2pC}{p^4} + 2\frac{C}{p^3} = 12p$$

$$\frac{C'}{p^2} = 12p$$

$$C' = 12p^3$$

$$C = 3p^4 + C \Rightarrow x(p) = \frac{3p^4 + C}{p^2} = 3p^2 + \frac{C}{p^2}$$

$$y = 2\left(3p^2 + \frac{C}{p^2}\right)p - 4p^3 = 2p^3 + \frac{2C}{p}$$

<u>Ответ:</u>
$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ \begin{cases} x = 3p^2 + \frac{C}{p^2} \\ y = 2p^3 + \frac{2C}{p} \end{cases}, C \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

С06.18

Найти все решения, исследовать особые решения и построить интегральные кривые:

$$2y^2y'^2 - 2xy'^2 + 4yy' + 1 = 0$$

$y = const$ не является решением ДУ.

Домножим на $\frac{1}{y'^2_x} = x'^2_y$.

$$2y^2 - 2x + 4yx'_y + x'^2_y = 0$$

$$x'_y = p. \quad dx = p\,dy$$

$$x = y^2 + 2yp + \frac{1}{2}p^2$$

$$dx = 2y\,dy + 2y\,dp + 2p\,dy + p\,dp$$

$$p\,dy = 2y\,dy + 2y\,dp + 2p\,dy + p\,dp$$

$$(2y+p)\,dy = -(2y+p)\,dp$$

1) $p = -2y$

$$x = y^2 - 4y^2 + 2y^2 = -y^2$$

2) $\frac{dp}{dy} = -1 \Rightarrow p = -y + c$

$$x = y^2 + 2y(-y+c) + \frac{1}{2}(y^2 - 2cy + c^2) =$$

$$= y^2 - 2y^2 + 2cy + \frac{1}{2}y^2 - cy + \frac{1}{2}c^2 = -\frac{1}{2}y^2 + cy + \frac{1}{2}c^2.$$

Найдём P-дискриминантную кривую:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2yp + \frac{1}{2}p^2 \\ 0 = 2y + p \to p = -2y \end{cases} \to x = y^2 - 4y^2 + 2y^2 = -y^2$$

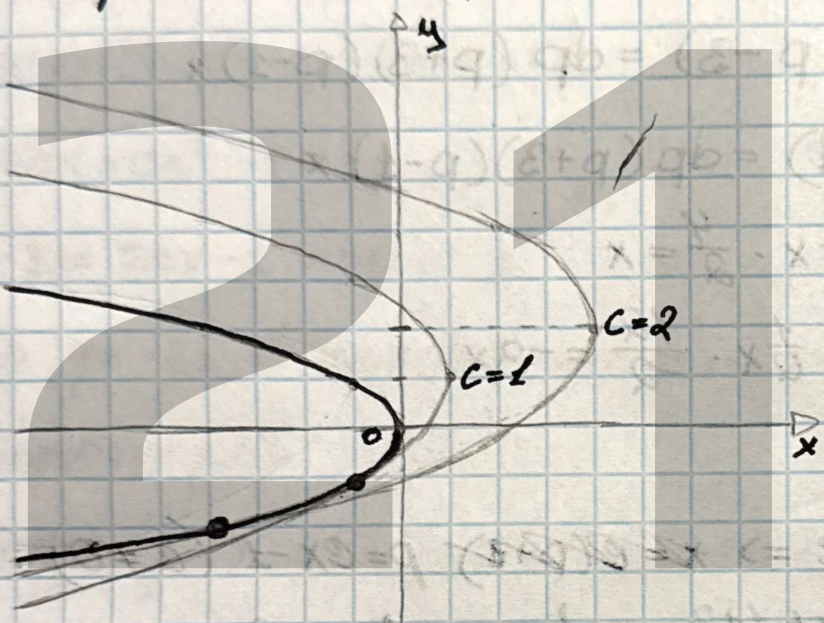
Проверим касание:

$$\begin{cases} -y^2 = -\frac{1}{2}y^2 + cy + \frac{1}{2}c^2 \\ -2y = -y + c \to c = -y \end{cases} \to -y^2 = -\frac{1}{2}y^2 - y^2 + \frac{1}{2}y^2 \text{ – верно}$$

$\Rightarrow$ $x + y^2 = 0$ – особое решение, т.к. касается другого решения в каждой своей точке.

Других особых решений нет, так как все они должны лежать на P-дискриминантной кривой.

Построим интегральные кривые:



Ответ: $x = -\frac{1}{2}y^2 + cy + \frac{1}{2}c^2$, $c \in \mathbb{R}$; $x + y^2 = 0$ – особое.

С№6.55

$2yy' + 2y - 3x = xy'^2$;

$y' = p$

$2yp + 2y - 3x = xp^2$

$2y(1+p) = x(p^2+3)$

Если $p = -1$, то $y = -x + c \Rightarrow -2(-x+c) + 2(-x+c) - 3x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = -1$ не является решением.

$$2y = x\cdot\frac{p^2+3}{p+1}$$

$$2dy = dx\cdot\frac{p^2+3}{p+1} + x\cdot\frac{2p(p+1)-(p^2+3)}{(p+1)^2}dp;$$

$$2p\,dx\,(p+1)^2 = dx\,(p^2+3)(p+1) + dp\,(p^2+2p-3)x;$$

$$dx\,(2p^3+4p^2+2p-p^3-p^2-3p-3) = dp\,(p+3)(p-1)x$$

$$dx\,(p^3+3p^2-p-3) = dp\,(p+3)(p-1)x$$

$$dx\,(p+3)(p^2-1) = dp\,(p+3)(p-1)x$$

1) $p=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x\cdot\frac{4}{2}=x$

2) $p=-3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x\cdot\frac{12}{-2}=-3x$

3) $\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p+1}$

$$\ln|x| = \ln|p+1| + c \Rightarrow \cancel{x=c(p+1)}\; p = cx-1 \quad (c\neq 0)$$

$$y=\frac{1}{2}x\cdot\frac{c^2x^2-2cx+1+3}{cx}=\frac{1}{2}cx^2-x+\frac{2}{c}=$$

$$=\{c\to 2c\}=cx^2-x+\frac{1}{c}.$$

Найдём P-дискриминантную кривую:

$$\begin{cases} 2y(1+p)=x(p^2+3) \\ 2y=2px \Rightarrow p=\frac{y}{x} \end{cases} \quad 2y\left(1+\frac{y}{x}\right)=x\left(\frac{y^2}{x^2}+3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2xy+2y^2=y^2+3x^2$$

$$y^2+2xy-3x^2=0$$

$$(y+3x)(y-x)=0.$$

Проверим касание для $y=x$ и $y=-3x$:

$$\begin{cases} x = cx^2 - x + \frac{1}{c} \\ 1 = 2cx - 1 \Rightarrow c = \frac{1}{x} \end{cases} \quad x = x - x + x \text{ - верно} \Rightarrow$$

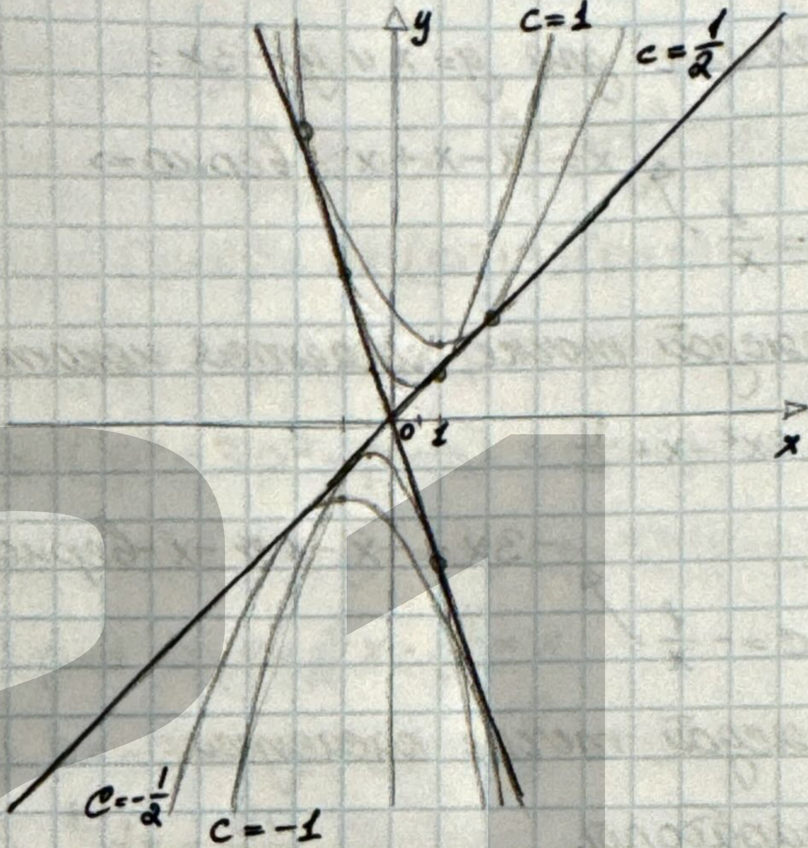
$\Rightarrow y = x$ в каждой точке касается некоторой параболы $y = cx^2 - x + \frac{1}{c}$

$$\begin{cases} -3x = cx^2 - x + \frac{1}{c} \\ -3 = 2cx - 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{x} \end{cases} \quad -3x = -x - x - x \text{ - верно} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -3x$ в каждой точке касается некоторой параболы.

Тогда $y = x$ и $y = -3x$ - особые решения. Других нет, так как их объединение совпадает с р-дискриминантной кривой.

Построим интегральные кривые:



Ответ: $y = cx^2 - x + \frac{1}{c}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$y = -3x$ и $y = x$ – особые решения

14

В задаче №287 найти решения, удовлетворяющие ~~а) $y(0)=-1$, $y(5)=6$~~ условиям.

$y = xy' - y'^2$.

Решение:

$y = cx - c^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ - общее решение

а) $y(0) = -1$, $y(5) = 6$)

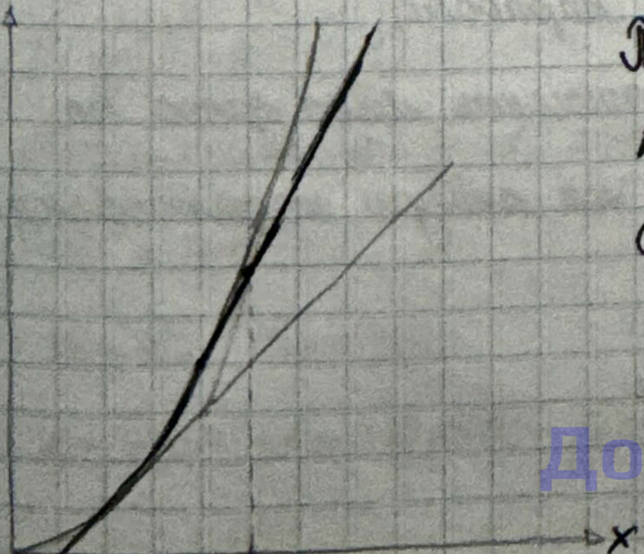
Проведём касательные через точки $(0;-1)$ и $(5;6)$

(в ~~этих точ~~ окрестностях этих точек решение определено единственным образом)

$-1 = c_1 \cdot 0 - c_1^2 \Rightarrow c_1 = 1$ ($c_1 = -1$ соответствует касанию при $x<0$, которое создаст излом)

$6 = 5c - c^2 \Rightarrow c^2 - 5c - 6 = 0$

$D = 25 - 24$, $c = \frac{5 \pm 1}{2} = 2; 3$



По рисунку видно, что необходимо выбирать $c_2 = 2$

(при $c=3$: $\frac{1}{4}x^2 = 3x - 9$

$x^2 - 12x + 36 = 0$

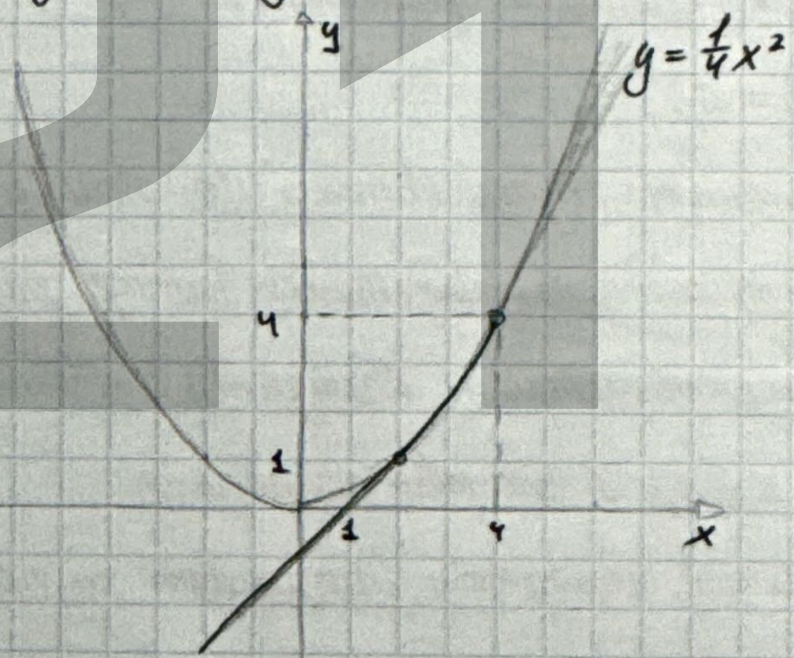
$(x-6)^2 = 0$ - касание в точке $x=6$

$y = x - 1 = \frac{1}{4}x^2$ - касание в $x=2$

$y = 2x - 4 = \frac{1}{4}x^2$ - касание в $x = 4$.

Тогда искомая функция: $y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \le 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 2x-4 & \text{при } x > 4 \end{cases}$

б) $y(0) = -1$, $y(4) = 4$



Аналогично а): $y = x - 1$ при $x \le 2$

Точка $(4;4)$ лежит на параболе

Решение можно продолжить либо далее по параболе, либо уйти на любую касательную в точке $x = A \ge 4$:

$y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \le 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при } x > 2 \end{cases}$

Касание в точке $(A; \frac{1}{4}A^2)$:

$$\frac{1}{4}A^2 = CA - C^2$$

$$A^2 - 4AC + 4C^2 = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}A$$

$$y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \le 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при } 2 < x \le A \\ \frac{1}{2}Ax - \frac{1}{4}A^2 & \text{при } x > A. \end{cases}$$

<u>Ответ</u>: а) $y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \le 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при } 2 < x \le 4 \\ 2x-4 & \text{при } x > 4 \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \le 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при } x > 2 \end{cases}$ или $y = \begin{cases} x-1 & \text{при } x \le 2 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при } 2 < x \le A, \; A > 4 \\ \frac{1}{2}Ax - \frac{1}{4}A^2 & \text{при } x > A \end{cases}$

<u>№5</u>

$$y'^2 = 4y^3(1-y)$$

$y=0$ и $y=1$ - решения, рассматриваем $y \ne 0$ и $y \ne 1$:

$$\frac{y'^2}{y^4} = 4\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

$$\left(-\frac{y'}{y^2}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

$$\left(\left(\frac{1}{y}\right)'\right)^2 = 4\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

Обозначим $z = \frac{1}{y} - 1$, тогда

$$z_x'^2 = 4z$$

$$p = z'_x, \; dz = p\,dx$$

$$z = \frac{1}{4}p^2, \; dz = \frac{1}{2}p\,dp = p\,dx$$

$p=0$ - решение, соответствующее $y=1$, не рассматривается,

$$dp = 2dx \Rightarrow p = 2x + c$$

$$z = \frac{1}{4}(2x+c)^2 = x^2 + xc + \frac{c^2}{4} = \frac{1}{y} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2 + xc + \frac{c^2}{4} + 1} = \left\{ \frac{c}{2} \to c \right\} = \frac{1}{1 + (x+c)^2}$$

Найдём P-дискриминантную кривую:

$$\begin{cases} p^2 = 4z \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 1.$$

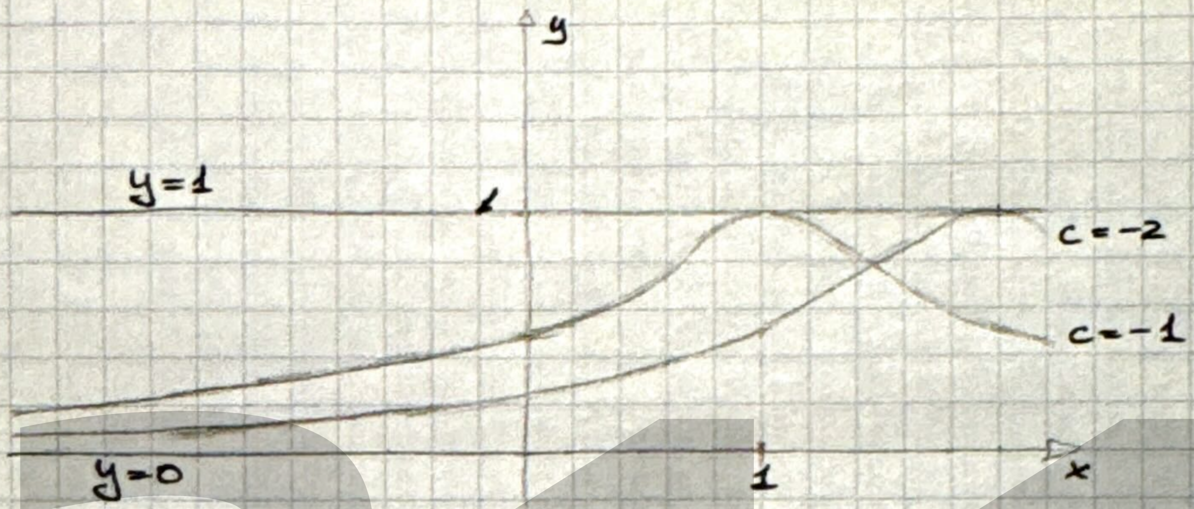
Проверим касание:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{(x+c)^2 + 1} \to x = -c \\ 0 = \dfrac{-1}{((x+c)^2+1)^2} \cdot 2(x+c) \to 0 \end{cases} \text{ - верно} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y=1$ является особым решением.

Других особых решений нет, так как $y=1$ совпадает с P-дискриминантной кривой.

Построим интегральные кривые:



<u>Ответ:</u> $y=\dfrac{1}{1+(x+c)^2}$, $y=0$, $y=1$ - особое решение.