I. Неявные функции

Т1

$x^2 = y^2$

а) Сколько функций $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовл.?

$M \subset \mathbb{R}$: $y = \begin{cases} x, & x \in M \\ -x, & x \notin M \end{cases}$ - функция, удовлетворяющая уравнению.

В силу произвольности M: бесконечно много.

б) Сколько непр. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовл.?

$y = x$, $y = -x$, $y = |x|$, $y = -|x|$, остальные не непрерывны.

в) Сколько непр. $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовл. уравнению и $y(1) = 1$?

$y = x$ и $y = |x|$, в остальных непр. $y(1) = -1$.

г) Сколько непр. $y: [1;2] \to \mathbb{R}$ удовл. уравнению $y(1) = 1$?

$y = x$ и $y = |x|$ совпадают на $[1;2] \Rightarrow$ только $y = x$

Ответ: а) беск. много; б) 4; в) 2; г) 1.

§3 №68(2)

Найти du в точке $(1;1)$: $x - u = u \ln \frac{u}{y}$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}: 1 - u'_x = u'_x \ln \frac{u}{y} + u \cdot \frac{y}{u} \cdot \frac{u'_x}{y}}$;

$x = 1, y = 1$: $1 - u(1,1) = u(1,1) \ln \frac{u(1,1)}{1}$

$u_0(1+\ln u_0)=1$; $u_0=1$ – ед. корень т.к. функция слева возрастает. $(u_0=u(1,1))$

$$\frac{\partial}{\partial x}:\ 1-u'_x=u'_x\ln\frac{u}{y}+u\cdot\frac{y}{u}\cdot\frac{u'_x}{y}$$

$$1-u'_{x0}=u'_{x0}\cdot\ln\frac{1}{1}+u'_{x0}\ \Rightarrow\ u'_{x0}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}:\ -u'_y=u'_y\ln\frac{u}{y}+u\cdot\frac{y}{u}\cdot\frac{u'_y y-u}{y^2}$$

$$-u'_{y0}=u'_{y0}\ln\frac{1}{1}+\frac{u'_{y0}\cdot 1-1}{1}\ \Rightarrow\ u'_{y0}=\frac{1}{2}.$$

$$du=u'_{x0}dx+u'_{y0}dy=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy$$

Ответ: $du=\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}dy.$

§3 №64(1)

Найти du в точке а) $P=(3;-2;2)$; б) $P=(3;-2;-1)$

$u^3-xu+y=0;$

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}:\ 3u^2\cdot u'_x-u-xu'_x=0}$

а) $\cancel{12u'_x-2-3u'_x=0\Rightarrow u'_x=\frac{2}{9}}$

б) $\cancel{3u'_x+1-3u'_x=0}$ – ~~u'_x не существует~~

$F(x,y,u)=u^3-xu+y$

непрерывно
F – дифференцируема во всех точках

$F'_u=3u^2-x$

а) $F'_u(P)=12-3=9\neq 0\Rightarrow u(x,y)$ – непрерывно дифференцируема

$dF = 0 = 3u^2du - xdu - udx + dy$

$12du - 3du - 2dx + dy = 0$

$du = \frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$

б) $F'_u(P) = 3 - 3 = 0$ (не выполняется условие теорема)

Докажем, что не существует u'_x

~~При фиксированном $y = -2$:~~

$\cancel{u^3 - xu = 2}$

$\cancel{x = \frac{u^3 - 2}{u} = u^2 - \frac{2}{u}}$

$\cancel{x'_u = 2u + \frac{2}{u^2} \neq 0}$

Предположим обратное. При фиксированном y:

$u^3 - xu - 2 = 0$

Дифференцируем обе части по x:

$3u^2 \cdot u'_x - u - x \cdot u'_x = 0$

В точке P: $3u'_x + 1 - 3u'_x = 0 \Rightarrow 1 = 0$ ♀ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ предположение неверно, u'_x не существует в P $\Rightarrow$ du не существует в P (необходимое)

Ответ: а) $\frac{2}{9}dx - \frac{1}{9}dy$; б) du не существует.

§3 №71

Док-ть: $yf\left(\frac{z}{y}\right)=x^2+y^2+z^2$ определяет

дифференцируемую $z(x,y)$ =>

=> z удовлетворяет $(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$

Обе части уравнения можно продифференцировать по x и по y.

$$y\cdot\frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial x}=2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\qquad(1)$$

$$f\left(\frac{z}{y}\right)+y\cdot\frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y-z}{y^2}=2y+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\ \Big/\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{\partial f\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2y\frac{\partial z}{\partial x}+$$
$$+2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

Из (1):

$$f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y}\right)\cdot\left(2x+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2y\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$f\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial y}\cancel{+2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}-\frac{2xz}{y}-\frac{2z^2}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=$$
$$=2y\frac{\partial z}{\partial x}\cancel{+2z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}\ \Big/\cdot y$$

$$yf\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}-2xz-2z^2\frac{\partial z}{\partial x}=2y^2\frac{\partial z}{\partial x}$$

Из данного уравнения подставляем $yf\left(\frac{z}{y}\right)$

$$(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}-2xz-2z^2\frac{\partial z}{\partial x}-2y^2\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

§3.076

Найти du и dv в точке $(1;1)$ (существуют)

$$x=\sqrt{2}e^{u/x}\cos\frac{v}{y}$$

$$y=\sqrt{2}e^{u/x}\sin\frac{v}{y}$$

$$u(1,1)=0,\ v(1,1)=\frac{\pi}{4}$$

$f_1(x,y,u,v)=x-\sqrt{2}e^{u/x}\cos\frac{v}{y}=0$ - дифференцируема как композиция

$$f'_{1x}=1-\sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_x x-u}{x^2}\cos\frac{v}{y}-e^{u/x}\cdot\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_x}{y}\right)$$

$$f'_{1x}\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)=1-u'_x+v'_x=0 \Rightarrow u'_x-v'_x=1 \quad (1)$$

$f_2(x,y,u,v)=y-\sqrt{2}e^{u/x}\sin\frac{v}{y}$ - дифференцируема как композиция.

$$f'_{2x}=-\sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_x x-u}{x^2}\sin\frac{v}{y}+e^{u/x}\cdot\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_x}{y}\right)=$$

$$f'_{2x}\left(1,1,0,\frac{\pi}{4}\right)=-u'_x-v'_x=0 \Rightarrow u'_x+v'_x=0 \quad (2)$$

$$(1,2)\Rightarrow u'_x=\frac{1}{2},\ v'_x=-\frac{1}{2}.$$

$f'_{1y} = -\sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_y}{x}\cdot\cos\frac{v}{y} - e^{u/x}\cdot\sin\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_y y - v}{y^2}\right)$

$f'_{1y} = 0 = -u'_y + v'_y - \frac{\pi}{4}$ (3)

$f'_{2y} = 1 - \sqrt{2}\left(e^{u/x}\cdot\frac{u'_y}{x}\cdot\sin\frac{v}{y} + e^{u/x}\cdot\cos\frac{v}{y}\cdot\frac{v'_y y - v}{y^2}\right)$

$f'_{2y}(1,1,0,\frac{\pi}{4}) = 1 - u'_y - v'_y + \frac{\pi}{4} = 0$ (4)

$(3,4) \Rightarrow u'_y = \frac{1}{2},\ v'_y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$

Ответ: $du = u'_x dx + u'_y dy = \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$

$dv = v'_x dx + v'_y dy = -\frac{1}{2}dx + \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dy.$

§4 ~ 43 (б)

$y - u = e^{xu}$, $u(1,1) = 0$. найти: d^2u в $(1;1)$

u - дифференцируемая

$F(x,y,u) = y - u - e^{xu} = 0$ - дифф., как композиция

$F'_x = -u'_x - e^{xu}(u'_x x + u)$

$F''_{xx} = -u''_{xx} - e^{xu}(u'_x x + u)^2 - e^{xu}(u''_{xx}\cdot x + u'_x + u'_x)$

$F'_y = 1 - u'_y - e^{xu}\cdot x\cdot u'_y$

$F''_{yy} = -u''_{yy} - e^{xu}\cdot x^2 u'^2_y - e^{xu}\cdot x\cdot u''_{yy}$

$F''_{xy} = -u''_{xy} - e^{xu}\cdot x u'_y(u'_x x + u) - e^{xu}(x u''_{xy} + u'_y)$

$F'_x(1,1,0) = -u'_x - u'_x = 0 \Rightarrow u'_x = 0$

$F'_y(1,1,0) = 1 - u'_y - u'_y = 0 \Rightarrow u'_y = \frac{1}{2}$

$$F''_{xx}(1,1,0) = -u''_{xx} - (u'_x)^2 - u''_{xx} - 2u'_x = 0$$

$$-2u''_{xx} - \frac{\cancel{1}}{9} - 0 = 0 \Rightarrow u''_{xx} = 0$$

$$\cancel{2u''_{xx} = \frac{5}{4} \Rightarrow u''_{xx} = \frac{5}{8}}$$

$$F''_{xy}(1,1,0) = -u''_{xy} - u'_y(u'_x + 0) - u''_{xy} - u'_y = 0$$

$$2u''_{xy} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow u''_{xy} = -\frac{1}{4}$$

$$F''_{yy}(1,1,0) = -u''_{yy} - u'^2_y - u''_{yy} = 0$$

$$2u''_{yy} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow u''_{yy} = -\frac{1}{8}$$

$$du = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy^2 = -\frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{8}dy^2$$

Ответ: $du = -\frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{8}dy^2$

§4.46(2)

Ур-ием $f\left(\frac{x}{u}, \frac{y}{u}\right) = 0$, где f - дважды дифференцируемая,

опр. $u(x,y)$ - дважды дифференцируемая.

$d^2u(x,y) = ?$

$\sigma = \frac{x}{u}$, $\omega = \frac{y}{u}$.

$$df = f'_\sigma d\sigma + f'_\omega d\omega = f'_\sigma \cdot \frac{udx - xdu}{u^2} + f'_\omega \cdot \frac{udy - ydu}{u^2}$$

$$df = 0 \Rightarrow u(f'_\sigma dx + f'_\omega dy) = du(f'_\sigma x + f'_\omega y) \quad (1)$$

$$d^2f = f''_{\sigma\sigma}d\sigma^2 + 2f''_{\sigma\omega}d\sigma d\omega + f''_{\omega\omega}d\omega^2 + f'_\sigma d^2\sigma + f'_\omega d^2\omega =$$

$$= f''_{\sigma\sigma} \cdot \frac{(udx - xdu)^2}{u^4} + 2f''_{\sigma\omega} \cdot \frac{(udx - xdu)(udy - ydu)}{u^4} +$$

$$+ f''_{\omega\omega} \cdot \frac{(Udy - ydU)^2}{U^4} + f'_\sigma \cdot d^2\sigma + f'_\omega \cdot d^2\omega.$$

$$d^2\sigma = d\left(\frac{Udx - xdU}{U^2}\right) = \frac{(dUdx - dUdx - xd^2U)U^2 - (Udx - xdU)2UdU}{U^4} =$$

$$= \frac{-xU^2d^2U - 2U^2dUdx + 2UxdU^2}{U^4}$$

Аналогично: $d^2\omega = \dfrac{-yU^2d^2U - 2U^2dUdy + 2UydU^2}{U^4}$

$$f'_\sigma d^2\sigma + f'_\omega d^2\omega = \frac{1}{U^4}\Big(-U^2d^2U(f'_\sigma x + f'_\omega y) - 2U^2dU \cdot$$

$$\cdot (f'_\sigma dx + f'_\omega dy) + 2UdU^2(f'_\sigma x + f'_\omega y)\Big) =$$

$$= (\text{в силу равенства } (1)) = \frac{-1}{U^4} \cdot U^2d^2U(f'_\sigma x + f'_\omega y).$$

Подставляем в $d^2f = 0$:

$$f''_{\sigma\sigma}(Udx - xdU)^2 + 2f''_{\sigma\omega}(Udx - xdU)(Udy - ydU) +$$

$$+ f''_{\omega\omega}(Udy - ydU)^2 = U^2(f'_\sigma x + f'_\omega y)d^2U$$

$$d^2U = \frac{1}{U^2(f'_\sigma x + f'_\omega y)}\Big[f''_{\sigma\sigma}(U^2dx^2 - 2UxdUdx + x^2dU^2) +$$

$$+ 2f''_{\sigma\omega}(U^2dxdy - UxdUdy - UydUdx + xydU^2) +$$

$$+ f''_{\omega\omega}(U^2dy^2 - 2UydUdy + y^2dU^2)\Big] = (\text{подст. } (1))$$

$$= \frac{1}{(f'_\sigma x + f'_\omega y)^3}\Big[f''_{\sigma\sigma}\Big\{(f'_\sigma x + f'_\omega y)^2dx^2 - 2xdx(f'_\sigma x + f'_\omega y)(f'_\sigma dx + f'_\omega dy)$$

$$+ (f'_\sigma dx + f'_\omega dy)^2x^2\Big\}^{A} +$$

$$+ f''_{\sigma\omega}\Big\{ (f'_\sigma x + f'_\omega y)^2 dx\,dy - (f'_\sigma x + f'_\omega y)(f'_\sigma dx + f'_\omega dy)(x\,dy + y\,dx) +$$

$$\cancel{- (f'_\sigma x + f'_\omega)} + (f'_\sigma dx + f'_\omega dy)^2 x y \Big\}^{B} +$$

$$+ f''_{\omega\omega}\Big\{ (f'_\sigma x + f'_\omega y)^2 dy^2 - 2y\,dy (f'_\omega x + f'_\omega y)(f'_\sigma dx + f'_\omega dy) +$$

$$+ (f'_\sigma dx + f'_\omega dy)^2 y^2 \Big\}^{C}$$

$$A = \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx^2} + \cancel{2 f'_\sigma f'_\omega x y dx^2} + f'^2_\omega y^2 dx^2 -$$

$$- 2x\,dx \left(\cancel{f'^2_\sigma x\,dx} + \cancel{f'_\sigma f'_\omega x\,dy} + \cancel{f'_\sigma f'_\omega y\,dx} + f'^2_\omega y\,dy \right) +$$

$$+ \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx^2} + \cancel{2 f'_\sigma f'_\omega} x^2 dx\,dy + f'^2_\omega x^2 dy^2 =$$

$$= f'^2_\omega \left(y^2 dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2 dy \right) = f'^2_\omega (y\,dx - x\,dy)^2$$

Аналогично $C = f'^2_\sigma (y\,dx - x\,dy)^2$

$$\cancel{B} = \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx\,dy} + \cancel{2 f'_\sigma f'_\omega x} y\,dx\,dy + \cancel{f'^2_\omega y^2 dx\,dy} -$$

$$- \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx\,dy} - f'_\sigma f'_\omega x^2 dy^2 - \cancel{f'_\sigma f'_\omega x y\,dx\,dy} - f'^2_\omega x y\,dy^2 -$$

$$- \cancel{f'^2_\sigma} x y\,dx^2 - \cancel{f'_\sigma f'_\omega x y\,dx\,dy} - f'_\sigma f'_\omega y^2 dx^2 - \cancel{f'^2_\omega y^2 dx\,dy} +$$

$$+ \cancel{f'^2_\sigma x y\,dx^2} + 2 f'_\sigma f'_\omega x y\,dx\,dy + f'_\omega x y\,dy^2$$

$$B = \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx\,dy} + \cancel{2 f'_\sigma} f'_\omega x y\,dx\,dy + \cancel{f'^2_\omega y^2 dx\,dy} -$$

$$- \cancel{f'^2_\sigma x^2 dx\,dy} - f'_\sigma f'_\omega x^2 dy^2 - \cancel{f'_\sigma f'_\omega x y\,dx\,dy} - \cancel{f'^2_\omega x y\,dy^2} -$$

$$- \cancel{f'^2_\sigma x y\,dx^2} - \cancel{f'_\sigma f'_\omega x y\,dx\,dy} - f'_\sigma f'_\omega y^2 dx^2 - \cancel{f'_\omega y^2 dx\,dy} +$$

$$+ \cancel{f'^2_\sigma x y\,dx^2} + 2 f'_\sigma f'_\omega x y\,dx\,dy + \cancel{f'^2_\omega x y\,dy^2} =$$

$$= f'_\sigma f'_\omega \left(x^2 dy^2 - 2xy\,dx\,dy + y^2 dx^2 \right) = - f'_\sigma f'_\omega (x\,dy - y\,dx)^2$$

$$d^2u = \frac{1}{(f'_\sigma x + f'_\omega y)^3}\cdot (xdy - ydx)^2 \left(f''_{\sigma\sigma}\cdot (f'_\omega)^2 - 2f'_\sigma f'_\omega f''_{\sigma\omega} + (f'_\sigma)^2 f''_{\omega\omega}\right)$$

<u>Ответ</u>: $d^2u = \dfrac{(f'_\omega)^2 f''_{\sigma\sigma} - 2f'_\sigma f'_\omega f''_{\sigma\omega} + (f'_\sigma)^2 f''_{\omega\omega}}{(f'_\sigma x + f'_\omega y)^3} \cdot (xdy - ydx)^2.$

<u>12</u>

$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_n = 0$

$U \subset \mathbb{R}^n$ – множество $a = (a_1, \ldots a_n)$: ур-ие имеет n различных корней $x_1, \ldots x_n$.

Док-ть: U – открыто; $\forall a \in U \ \exists U_\delta(a): x_i = x_i(a_1, \ldots a_n)$ – гладкая.

$F(a_1, \ldots a_n, x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1.$

1) $F \in C^\infty$

2) $F(a_1^0, \ldots a_n^0, x_i^0) = 0$

3) $F'_x(a_1^0, \ldots a_n^0, x_i^0) = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{(x - x_1^0)\ldots(x - x_n^0)}{(x - x_j^0)}\Bigg|_{x=x_i^0} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \dfrac{(x - x_1^0)\ldots(x - x_n^0)}{(x - x_j^0)} +$

$+ (x - x_1^0)\ldots(x - x_{i-1}^0)(x - x_{i+1}^0)\ldots(x - x_n^0)\Big|_{x = x_i^0} \neq 0$ (в силу того что $x_i^0 \neq x_j^0$ при $i \neq j$)

$(1-3) \Rightarrow \exists \delta_i: x_i = x_i(a_1, \dots a_n) \in C^\infty$ (гладкая) в $U_{\delta_i}(a_1^0, \dots a_n^0)$

В силу гладкости $x_i'(a_1, \dots a_n)$ ограничена в $U_{\delta_i}(a_1^0, \dots a_n^0)$.

Выберем $\delta < \min\{\delta_1, \dots \delta_n, \min\limits_{i \neq j} \frac{|x_i - x_j|}{2mn}\}$, $|x_i'| \le m$, $\forall i$ (в U_δ)

теорема Лагранжа:

$x_i(a_1, \dots a_n) - x_i(a_1^0, \dots a_n^0) = x'_{i a_k}(a_1^0 + \xi(a_1 - a_1^0), \dots a_n^0 + \xi(a_n - a_n^0)) \Delta a_k$

$\xi \in (0,1)$

$|x_i(a_1, \dots a_n) - x_i(a_1^0, \dots a_n^0)| \le m \cdot n \cdot \delta < \frac{1}{2} |x_i(a_1^0, \dots a_n^0) -$

$- x_j(a_1^0, \dots a_n^0)| \quad \forall j.$

Таким образом, в $U_\delta(a_1^0, \dots a_n^0)$ сохраняется условие различимости корней.

В силу произвольности выбора $a^0 = (a_1^0, \dots a_n^0) \in U$:

$\forall a \in U: \exists U_\delta(a): \forall b \in U_\delta(a): b \in U$, т.е. U — открыто.

II. Дифференцируемые отображения, замена переменных

§3 №104

$x = r\cos^p\varphi$, $y = r\sin^p\varphi$

Найти $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{Vmatrix} = \cancel{\begin{Vmatrix} \cos^p\varphi & rp\sin^{p-1}\varphi\cos\varphi \\ \sin^p\varphi & -rp \end{Vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^p\varphi & -rp\cos^{p-1}\varphi\sin\varphi \\ \sin^p\varphi & rp\sin^{p-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = pr\sin^{p-1}\varphi\cos^{p-1}\varphi\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= pr\,(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}$$

Ответ: $pr(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}$

Т3

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$: $u = e^x\cos y$, $v = e^x\sin y$

Док-ть: $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$, но f — не биекция

Найти: E — мн-во значений f.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = e^x\cos y \cdot e^x\cos y + e^x\sin y \cdot e^x\sin y =$$

$$= e^{2x} > 0 \ \forall x.$$

Рассмотрим (x_0, y_0): $\cancel{f(x_0,y_0)}\ u_0 = e^{x_0}\cos y_0$, $v_0 = e^{x_0}\sin y_0$

$$\left.\begin{array}{l} u(x_0,y_0) = u(x_0, y_0+2\pi) \\ v(x_0,y_0) = u(x_0, y_0+2\pi) \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ — не взаимно-однозначное}$$

$u^2+v^2=e^{2x}>0 \Rightarrow (0;0)\notin E$

Рассмотрим произвольную точку $(u_1,v_1)\neq(0,0)$

$u^2+v^2=e^{2x}=u_1^2+v_1^2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(u_1^2+v_1^2)\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ln(u_1^2+v_1^2)$

$\cos y_1=\frac{u_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}}$, $\sin y_1=\frac{v_0}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}}$

$\Rightarrow \exists\,(x_1,y_1): f(x_1,y_1)=(u_0,v_0)$

Ответ: $E=\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$

<u>14</u>

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r>0$

Выразить $r'_x, r'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ как функции r и φ

$$\frac{\partial}{\partial x}:\begin{cases}1=r'_x\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\varphi'_x\\0=r'_x\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi'_x\end{cases}\cancel{\Rightarrow\begin{cases}r'_x=\frac{1+r\sin\varphi\,\varphi_x}{\cos\varphi}\\r'_x=\frac{-r\cos\varphi\cdot\varphi'_x}{\sin\varphi}\end{cases}}$$

$\cancel{\sin\varphi+r\sin^2\varphi\cdot\varphi'_x=r\cos^2\varphi\,\varphi_x}$

$\cancel{\sin\varphi=r\varphi_x\cos2\varphi\Rightarrow\varphi'_x=\frac{\sin\varphi}{r\cos2\varphi}}$

$\cancel{r'_x=-\frac{r\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r\cdot\cos2\varphi}=\frac{\cos\varphi}{\cos2\varphi}}$

$\cos\varphi=r'_x(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\Rightarrow$

$\Rightarrow r'_x=\cos\varphi$

$\varphi'_x=\frac{-r'_x\sin\varphi}{r\cos\varphi}=-\frac{\sin\varphi}{r}$

$$\frac{\partial}{\partial y}:\begin{cases}0=r'_y\cos\varphi-r\sin\varphi\cdot\varphi'_y\\1=r'_y\sin\varphi+r\cos\varphi\cdot\varphi_x\end{cases}$$

$\sin\varphi=r'_y\sin^2\varphi+r'_y\cos^2\varphi\Rightarrow r'_y=\sin\varphi$

$\varphi'_y=\frac{r'_y\cos\varphi}{r\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi}{r}$

Ответ: $r'_x=\cos\varphi$, $r'_y=\sin\varphi$, $\varphi'_x=-\frac{\sin\varphi}{r}$, $\varphi'_y=\frac{\cos\varphi}{r}$

§3 №86

$$\cancel{x\frac{\partial u}{\partial x}}\; x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Решить, преобразовав к полярным координатам.

$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r>0,\ \varphi\in[0;2\pi)$

$\cancel{r = \sqrt{x^2+y^2}}$,

Из ТЧ: $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi,\ \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r},\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}$$

Подставляем в уравнение:

$$r\cos\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right) = r\sin\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = r\frac{\partial u}{\partial r}(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, u не зависит от φ
$\frac{\partial u}{\partial r}$ – любая функция $\Big|\Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,y) = f(x^2+y^2)$, где f – дифференцируемая

Ответ: $u(x,y) = f(x^2+y^2)$, где f – дифференцируемая.

§3 №88(2)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

Решить, преобразовав $x = u,\ y = uv$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x}v + \frac{\partial v}{\partial x}u \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{v}{u}$$

$$1 = \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial y}u \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{1}{u}$$

Подставляем:

$$u\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) + vu\frac{1}{u}\frac{\partial z}{\partial v} = z$$

$u\frac{\partial z}{\partial u} = z \Rightarrow z = uf(v)$, где f - дифференцируема

Ответ: $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, где f-дифференцируема

§3 №90

$$(z-x)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Преобразовать, приняв $x = x(y,z)$

$u = y,\ v = z,\ x = x(u,v)$

$dx = x'_u du + x'_v dv = x'_u dy + x'_v dz \Rightarrow$

$\Rightarrow dz = \frac{1}{x'_v}dx - \frac{x'_u}{x'_v}dy \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x'_v},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x'_u}{x'_v}$

Подставляем: $(v-x)\cdot\frac{1}{x'_v} + u\cdot\frac{x'_u}{x'_v} = 0 \Rightarrow x'_u = \frac{x-v}{u}$

Ответ: $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y}$

§4049

$\omega = u(x,y)\,\sigma(x,y)$, функции u и σ заданы неявно:

$$\begin{cases} u+\sigma^2=x \\ u^2-\sigma^3=y \end{cases}, \quad u(3;3)=2,\ \sigma(3;3)=1$$

Отображение $F:(x;y)\to(u,\sigma)$

$F_1(x,y,u,\sigma) = -x+u+\sigma^2$

$F_2(x,y,u,\sigma) = -y+u^2-\sigma^3$

$$\left.\begin{aligned} & F_1(3;3;2;1)=F_2(3;3;2;1)=0 \\ & \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,\sigma)} = \begin{vmatrix} 1 & 2\sigma \\ 2u & -3\sigma^2 \end{vmatrix} = -3\sigma^2-4u\sigma = -3-8=-11\neq 0 \\ & F_1,F_2\in C^2(3,3,2,1) \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \Leftrightarrow \begin{cases} u=u(x,y) \\ \sigma=\sigma(x,y) \end{cases}, \text{ где } u,\sigma\in C^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, u'_x, u'_y, u''_{xy}, \sigma'_x, \sigma'_y, \sigma''_{xy}$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \begin{cases} u'_x+2\sigma\sigma'_x=1 \\ 2uu'_x-3\sigma^2\sigma'_x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x+2\sigma'_x=1 \\ 4u'_x-3\sigma'_x=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u'_x(3;3)=\dfrac{3}{11},\ \sigma'_x(3;3)=\dfrac{4}{11}.$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \begin{cases} u'_y+2\sigma\sigma'_y=0 \\ 2uu'_y-3\sigma^2\sigma'_y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_y+2\sigma'_y=0 \\ 4u'_y-3\sigma'_y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u'_y(3;3)=\dfrac{2}{11},\ \sigma'_y(3;3)=-\dfrac{1}{11}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}: \begin{cases} u''_{xy} + 2v'_y v'_x + 2v v''_{xy} = 0 \\ 2u'_y u'_x + 2u u''_{xy} - 3\cdot 2v v'_y \cdot v'_x - 3v^2 v''_{xy} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u''_{xy} + 2v''_{xy} = \frac{8}{121} \\ 4u''_{xy} - 3v''_{xy} = -\frac{12}{121} - \frac{24}{121} = -\frac{36}{121} \end{cases}$$

$$11u''_{xy} = \frac{24}{121} - \frac{36\cdot 2}{121} = -\frac{48}{121} \Rightarrow u''_{xy} = -\frac{48}{1331}$$

$$2v''_{xy} = \frac{8}{121} + \frac{48}{121\cdot 11} = \frac{136}{1331} \Rightarrow v''_{xy} = \frac{68}{1331}$$

$$\frac{\partial^2 \omega(3,3)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(3,3) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(3;3) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(v u'_x + u v'_x\right)(3;3) = \left(v'_y u'_x + v u''_{xy} + u'_y v'_x + u v''_{xy}\right) =$$

$$= -\frac{1}{11}\cdot\frac{3}{11} - \frac{48}{1331} + 2\cdot\frac{68}{1331} + \frac{2}{11}\cdot\frac{4}{11} = \frac{5}{121} + \frac{8}{121} = \frac{13}{121}$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}(3;3) = \frac{13}{121}$.

§4.52(1)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad u = x - at, \quad v = x + at$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -a, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = -a\frac{\partial z}{\partial u} + a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$= -a\left(-a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + a\left(-a\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

Подставляем:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

III. Экстремумы функций многих переменных

§5 №21(4)

Найти условные экстремумы:

$u = 2x^2 + 12xy + y^2, \quad x^2 + 4y^2 = 25.$

$L = 2x^2 + 12xy + y^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 25)$

$L'_x = 4x + 12y + 2\lambda x = 0 \qquad (1)$

$L'_y = 12x + 2y + 8\lambda y = 0 \qquad (2)$

$x^2 + 4y^2 = 25 \qquad (3)$

$(1) \Rightarrow y = -\frac{1}{6}(2+\lambda)x$

Подставляем в (2):

$12x - \frac{1}{3}(2+\lambda)x - 8\lambda \cdot \frac{1}{6}(2+\lambda)x = 0$

$x = 0$ ($\Rightarrow y = 0$) не подходит в уравнении (3)

$36 - (2+\lambda) - 4\lambda(2+\lambda) = 0$

$4\lambda^2 + 9\lambda - 34 = 0$

$\lambda = \frac{-9 \pm 25}{8} = -\frac{17}{4}; 2$

1) $y = -\frac{1}{6}\left(2 - \frac{17}{4}\right)x = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4}x = \frac{3}{8}x$. Подставляем в (3):

$x^2 + 4 \cdot \frac{9}{64}x^2 = 25$

$\frac{25}{16}x^2 = 25 \Rightarrow \quad x = \pm 4, \; y = \pm\frac{3}{2}$

2) $y = -\frac{1}{6}\cdot 4x = -\frac{2}{3}x$. Подставляем в (3):

$x^2 + 4\cdot\frac{4}{9}x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 3,\ y = \mp 2$

$\cancel{dL = 4xdx + 12xdy + 12ydx}$

$dL = (4x + 12y + 2\lambda x)dx + (12x + 2y + 8\lambda y)dy$

$(x,y) = (4;\frac{3}{2}),\ \lambda = -\frac{17}{4}$

$dL = (16 + 18 - \frac{17}{4}\cdot 2\cdot 4)dx + (48 + 3 - 8\cdot\frac{17}{4}\cdot\frac{3}{2})dy =$

$=$

$d^2L = 4dx^2 + 12dxdy + 2\lambda dx^2 + 12dxdy + 2dy^2 + 8\lambda dy^2 =$

$= (4+2\lambda)dx^2 + 24dxdy + (2+8\lambda)dy^2$

$B = \begin{Vmatrix} 4+2\lambda & 12 \\ 12 & 2+8\lambda \end{Vmatrix}$, $\Delta_1 = 4 + 2\lambda$, $\Delta_2 = 8 + 4\lambda + 32\lambda + 16\lambda^2 - 144 =$

$= \cancel{16\lambda^2}\ 4(4\lambda^2 + 9\lambda - 34)$

$\lambda = -\frac{17}{4}$: $\Delta_1 = 4 - \frac{17}{2} < 0$, $\Delta_2 = 4\left(4\cdot\frac{17^2}{16} - \frac{9\cdot 17}{4} - 34\right) =$

$= 17(17-9) - 34\cdot 4 = 4(34-34) = 0$

$\lambda = -\frac{17}{4}$: $d^2L = -\frac{9}{2}dx^2 + 24dxdy - 32dy^2 =$

$= -\frac{1}{2}(3dx - 8dy)^2 < 0 \Rightarrow (\pm 4; \pm\frac{3}{2})$ – точки максимума

$\lambda = 2$: $d^2L = 8dx^2 + 24dxdy + 18dy^2 = 2(2dx + 3dy)^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\pm 3; \mp 2)$ – точки минимума.

$U(\pm 4; \pm\frac{3}{2}) = \frac{425}{4}$, $U(\pm 3; \mp 2) = -50$

Ответ: минимум $u(\pm3;\mp2) = -50$

максимум $u(\pm4;\pm\frac{3}{2}) = \frac{425}{4}$.

§5 №25(2)

Найти условные экстремумы:

$u = xy^2z^3$, $x+y+z=12$, $x>0, y>0, z>0$

$L = xy^2z^3 + \lambda(x+y+z-12)$

$L'_x = y^2z^3+\lambda=0$ (1)

$L'_y = 2xyz^3+\lambda=0$ (2)

$L'_y = 3xy^2z^2+\lambda=0$ (3)

Из (2) $\Rightarrow$ $x = \frac{-\lambda}{2yz^3}$. Подставляем в (3):

$-3\cdot\frac{\lambda}{2yz^3}\cdot y^2z^2+\lambda=0$

$y=\frac{2}{3} z$. Подставляем в (1):

$\frac{2^2}{3^2}z^5=-\lambda \Rightarrow z=-\frac{3^{2/5}}{2^{2/5}}\lambda^{1/5}$.

$y=\frac{2}{3} z = -\frac{2^{3/5}}{3^{3/5}}\lambda^{1/5}$

$x = -\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{3^{3/5}}{2^{3/5}}\cdot\frac{1}{\lambda^{1/5}}\cdot\frac{2^{6/5}}{3^{6/5}}\cdot\frac{1}{\lambda^{3/5}} = -\frac{1}{2^{2/5}\cdot3^{3/5}}\lambda^{1/5}$

Подставляем в условие:

$-\lambda^{1/5}\left(\frac{1}{2^{2/5}\cdot3^{3/5}}+\frac{2^{3/5}}{3^{3/5}}+\frac{3^{2/5}}{2^{2/5}}\right)=12$

$-\lambda^{1/5}\cdot\frac{1+2+3}{2^{2/5}\cdot3^{3/5}}=12 \Rightarrow \lambda^{1/5}=-2^{7/5}\cdot3^{3/5}$.

Критическая точка: $x=2$, $y=4$, $z=6$.

$dL = (y^2z^3+\lambda)dx + (2xyz^3+\lambda)dy + (3xy^2z^2+\lambda)dz$

$d^2L = (2yz^3dy + 3y^2z^2dz)dx + (2yz^3dx + 2xz^3dy + 6xyz^2dz)dy +$

$+ (3y^2z^2dx + 6xyz^2dy + 6xy^2zdz)dz =$

$= 4yz^3dxdy + 6y^2z^2dxdz + 12xyz^2dydz + 2xz^3dy^2 +$

$+ 6xy^2zdz^2$

$d^2L(2,4,6) = 2^5 \cdot 3^2 (12dxdy + 12dxdz + 12dydz + 3dy^2 + dz^2)$

Из условия: $dx = -dy - dz$:

$d^2L(2,4,6) = 2^5 \cdot 3^2 (-9dy^2 - 12dydz - 11dz^2) =$

$= -2^5 3^2 ((3dy + 2dz)^2 + 7dz^2)$

$d^2L(2,4,6) = 0$ при $dz = 3dy + 2dz = 0 \Rightarrow dx = dy = dz = 0$.

Значит d^2L - отрицательно определена в точке $(2,4,6) \Rightarrow$ 2,4,6 является точкой минимума.

Ответ: (2;4;6) - точка минимума.

§5 № 26 (1)

$u = xyz$, при $x + y - z = 3$, $x - y - z = 8$

Найти экстремумы

$L = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8)$

$$\begin{cases} L'_x = yz+\lambda_1+\lambda_2 = 0 & (1)\\ L'_y = xz+\lambda_1-\lambda_2 = 0 & (2)\\ L'_z = xy-\lambda_1-\lambda_2 = 0 & (3)\\ L'_{\lambda_1} = x+y-z-3 = 0 & (4)\\ L'_{\lambda_2} = x-y-z-8 = 0 & (5)\end{cases}$$

Вычитаем (5) из (4): $2y = -5 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$.

Складываем (1) и (2): $y(x+z) = 0 \Rightarrow x = -z$

Складываем (4) и (5): $2x - 2z = 11 \Rightarrow z = -\frac{11}{4}$, $x = \frac{11}{4}$.

Критическая точка: $\left(\frac{11}{4}, -\frac{5}{2}, -\frac{11}{4}\right) = P$

$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz = 2z\,dxdy + 2y\,dxdz + 2x\,dydz$

Ограничение на T_pM, где $M = \begin{cases} x+y-z=3\\ x-y-z=8\end{cases}$:

$\begin{cases} dx+dy-dz=0\\ dx-dy-dz=0\end{cases} \Rightarrow dy=0,\ dx=dz$, тогда

$d^2L(P)|_{T_pM} = 2\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ P – точка условного максимума

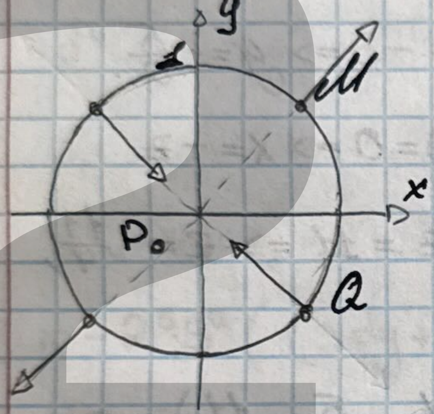
<u>Ответ:</u> $\left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{4}; -\frac{11}{4}\right)$ – точка максимума.

§5.30(1)

Найти максимум и минимум u на множестве:

$u = 3+2xy$

а) $M = \{x^2+y^2 \le 1\}$



Пусть $P \in M^\circ$, P-точка экстремума

$dU = 2x\,dy + 2y\,dx$

$dU = 0$ при $x = y = 0$

$d^2U = 4\,dx\,dy$ - неопределённая $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не является экстремумом $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ внутри нет экстремумов

Пусть $Q \in \partial M$, Q-экстремум.

$L = 3+2xy+\lambda(x^2+y^2-1)$

$L'_x = 2y + 2\lambda x = 0 \quad (1)$

$L'_y = 2x + 2\lambda y = 0 \quad (2)$

$L'_\lambda = x^2+y^2-1 = 0 \quad (3)$

$(1) \Rightarrow y = -\lambda x$. Подставляем в (2): $x - \lambda^2 x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ - не подходит.

$\lambda = \pm 1$.

Подставляя в (3) находим критические точки: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ и $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\cancel{u\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)=}$

$\operatorname{grad}u=\begin{Vmatrix}2y\\2x\end{Vmatrix}$

В точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ $\operatorname{grad}u$ направлен перпендикулярно $\{x^2+y^2=1\}$ наружу, а в точках $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$ – внутрь

$d^2L = 2\lambda dx^2 + 4dxdy + 2\lambda dy^2 \cancel{= 2(dx\pm dy)^2}$

В $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$: $\lambda=-1$, $d^2L=-2(dx-dy)^2$

Ограничение на T_pM: $2xdx+2ydy=0 \Rightarrow dx+dy=0 \Rightarrow$

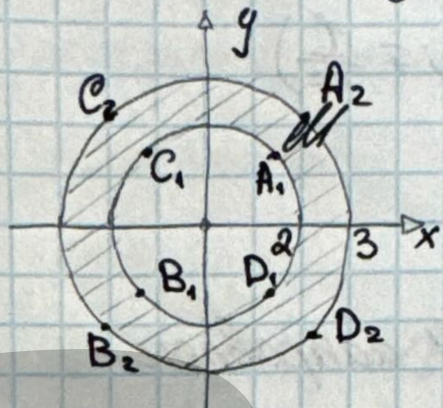
$\Rightarrow d^2L<0 \Rightarrow \left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$ являются точками ~~минимума~~ максимума на $\{x^2+y^2-1=0\}$, а из направления $\operatorname{grad}u$ следует, что они являются точками максимума на $\{x^2+y^2\le1\}$.

$u_{max} = 3+2\cdot\frac{1}{2}=4$

Аналогично точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2};\mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$ являются точками минимума:

$u_{min}=3-2\cdot\frac{1}{2}=2.$

б) $M = \{4 \le x^2+y^2 \le 9\}$



Аналогично пункту а) внутри M° нет ~~точек макс~~ экстремумов.

На границе ∂M: $A_1 = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $A_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $B_1 = (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $B_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ - точки условного максимума.

$C_1 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $C_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $D_1 = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $D_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ - точки условного минимума, при этом $\operatorname{grad} u$ направлен так же, но тогда A_1 и B_1 являются точками максимума на границе, но в них $\operatorname{grad} u$ направлен внутрь M° => не являются точками максимума. Аналогично C_1 и D_1.

$u_{max} = u(A_2) = u(B_2) = 3 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 12$

$u_{min} = u(C_2) = u(D_2) = 3 - 2 \cdot \frac{9}{2} = -6$

<u>Ответ</u>: а) $u_{max} = 4$, $u_{min} = 2$; б) $u_{max} = 12$, $u_{min} = -6$

§5 №27

Найти условные экстремумы:

1) $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, при $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $a_i > 0$

$L = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$

$L'_{x_i} = 2a_i x_i + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = \frac{-\lambda}{2a_i}$

Условие: $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-\lambda}{2a_i}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

Критическая точка: $x_i = \frac{1}{a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

$d^2 L = \sum_{i=1}^{n} 2a_i dx_i^2$ – положительно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка локального ~~максимума~~ минимума. $u = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$

2) $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ при $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} = 1$, $a_i > 0$

$L = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i} - 1\right)$

$L'_{x_i} = 2x_i + \frac{\lambda}{a_i} = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{\lambda}{2a_i}$

Условие: $\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\lambda}{2a_i^2}\right) = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}}$

Критическая точка: $x_i = \frac{1}{a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}}$

$d^2 L = \sum_{i=1}^{n} 2 dx_i^2$ – положительно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка ~~максимума~~ минимума. $u = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2}}$

3) $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$, при $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, $\alpha > 0, a > 0$

При $\alpha = 1$: $u = \sum_{i=1}^{n} x_i = a$ (далее $\alpha = 1$ не рассматривается)

$L = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right)$

$L'_{x_i} = \alpha x_i^{\alpha-1} + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = \left(\frac{-\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$

Условие: $n \cdot \left(\frac{-\lambda}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = a \Rightarrow x_i = \frac{a}{n}$

$d^2L = \sum_{i=1}^{n} \alpha(\alpha-1) x_i^{\alpha-2} dx_i^2 = \alpha(\alpha-1)\left(\frac{a}{n}\right)^{\alpha-2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$

d^2L положительно определена при $\alpha > 1$ и

отрицательно определена при $\alpha < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ минимум при $\alpha > 1$, максимум при $\alpha < 1$.

4) $u = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i}$ при $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$, $a_i > 0, b_i > 0, x_i > 0$

$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - 1\right)$

$L'_{x_i} = -\frac{a_i}{x_i^2} + \lambda b_i \Rightarrow x_i^2 = \frac{a_i}{\lambda b_i}$

Условие: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{a_i b_i} = 1 \Rightarrow \lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i b_i}\right)^2$

$$x_i = \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{b_i} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j b_j}}$$

$d^2L = \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{x_i^3} dx_i^2$ – положительно определена (т.к. $x_i > 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка минимума.

$$u = \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{a_j b_j}\right)^2$$

5) $u = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$, $\alpha_i > 0$, $a > 0$

$$L = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right)$$

$$L'_{x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j} + \lambda = \frac{\alpha_i u}{x_i} + \lambda = 0 \Rightarrow x_i = -\frac{\alpha_i u}{\lambda}$$

Условие: $-\frac{u}{\lambda}\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j = a \Rightarrow \lambda = -\frac{u\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}{a}$

Критическая точка: $x_i = \frac{-\alpha_i u \cdot a}{-u\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j} = \frac{a\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}$

~~d^2L при $i=j$~~

$$L''_{x_i x_i} = \frac{-\alpha_i}{x_i^2}u + \left(\frac{\alpha_i}{x_i}\right)^2 u = \frac{\alpha_i^2 - \alpha_i}{x_i^2}u = \frac{\alpha_i^2 - \alpha_i}{a^2\alpha_i^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2 u$$

$$L''_{x_i x_j} = \frac{\alpha_i}{x_i}\cdot\frac{\alpha_j}{x_j}u = \frac{\alpha_i\alpha_j u}{a^2\alpha_i\alpha_j}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2$$

~~$L''_{x_i x_i} = \alpha_i(\alpha_i - 1)$~~

Обозначим $b = \frac{u\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\right)^2}{a^2} > 0$, тогда

$$L''_{x_i x_j} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)b & \text{при } i = j \\ b & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{d^2L}{b} = \sum_{i=1}^{n}\frac{L''_{x_i x_i}}{b}dx_i^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le n}\frac{L''_{x_i x_j}}{b}dx_i dx_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}dx_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} + 2\sum_{1 \le i < j \le n}dx_i dx_j = \left(\sum_{i=1}^{n}dx_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} =$$

$= \{$~~из~~ ограничение на $T_pM\} = -\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} \Rightarrow$

$\Rightarrow d^2L$ отрицательно определена $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ точка максимума.

в) $U=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

$$L=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1\right)$$

$$L'_{x_i} = a_i + 2\lambda x_i = 0$$

Если $\lambda = 0 \Rightarrow a_i = 0$ для всех $i \Rightarrow U = 0$ (далее не рассматривается)

Иначе:

$x_i = -\dfrac{a_i}{2\lambda}$. Подставляем в условие:

$$\frac{1}{4\lambda^2}\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}, \quad x_i = \mp\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}}$$

$$L''_{x_i x_j} = \begin{cases} 2\lambda & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i\neq j \end{cases} \Rightarrow d^2L = \pm\sum_{i=1}^{n} 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\, dx_i^2 =$$

$$= \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}\ \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$$

d^2L отрицательно определена ~~в~~ при $\lambda<0$ (максимум) и положительно определена при $\lambda>0$ (минимум)

$$U = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\mp a_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}} = \mp\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

<u>Ответ</u>: 1) Минимум $x_i = \dfrac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}$; $U = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j}}$

2) Минимум $x_i = \dfrac{1}{a_i \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}}$; $U = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}}$

3) Минимум при $\alpha>1$: $x_i=\frac{a}{n}$, $U=\frac{a^\alpha}{n^{\alpha-1}}$

Максимум при $\alpha<1$: $x_i=\frac{a}{n}$, $U=\cancel{a}\,a^\alpha n^{1-\alpha}$

$U=const=a$ при $\alpha=1$

4) Минимум $x_i=\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{a_j b_j}}\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$: $U=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\sqrt{a_j b_j}\right)^2$

5) Максимум $x_i=\frac{a\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}$: $U=\left(\frac{a}{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}\right)^{\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j}\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{\alpha_i}$

6) Максимум $x_i=\frac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}}$: $U=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}$

Минимум $x_i=-\frac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}}$: $U=-\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}a_j^2}$

§5 №36

$U=\sum\limits_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i x_k$, $a_{ik}=a_{ki}$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$.

Док-ть, что U_{max} и U_{min} равны наибольшему и наименьшему корням характеристического многочлена $A=\|a_{ik}\|$

$$L=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_i x_k \mp \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1\right)$$

$i=k$ $\qquad$ $i\neq k$

$$L'_{x_j}=2a_{jj}x_j+2\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_{kj}x_k \mp 2\lambda x_j=0$$

В методе Лагранжа получаем систему:

$$\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}x_k-2\lambda x_j=0\\ j=\overline{1\ldots n}\end{cases}$$

Матрица этой системы равна $A-\lambda E$, а ненулевые решения (которые не подходят из условия $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$) существуют, когда $\det(A-\lambda E)=0$, то есть λ являются собственными значениями матрицы A.

При этом $\forall j: \sum_{k=1}^{n} a_{kj} x_k = \lambda x_j \Rightarrow$

$\Rightarrow U = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в критических точках значение U совпадает с λ.

Таким образом доказано, что если точка P является ~~минимумом или максимумом~~ критической при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1$, то λ есть корень характеристического многочлена A (а также в обратную сторону) и $U(P)=\lambda \Rightarrow$ Максимальное и минимальное значение U совпадают с максимальным и минимальным корнями характеристического уравнения матрицы $\|a_{ik}\|$