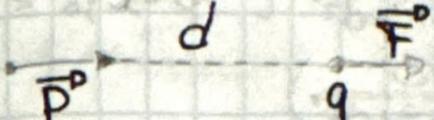
21.7



Дано: $\vec{p}, d, q$

Найти: $\vec{F}$

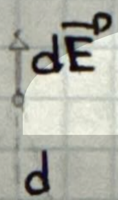
$$\vec{E}=\frac{3(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5}-\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$\vec{E}$ направлено вдоль прямой

$$E=\frac{3p}{r^3}-\frac{p}{r^3}=\frac{2p}{r^3}=\frac{2p}{d^3}$$ – вдоль прямой, $\vec{F}=q\vec{E}$

$\boxed{\text{Ответ: } F=\frac{2pq}{d^3}\text{, вдоль прямой}}$

21.10



Дано: d, R, σ

Найти: E.

Решение:

Рассмотрим кольцо радиуса r:

$$\varkappa=\frac{q}{2\pi r}$$, q – заряд кольца

$$dE=\frac{\varkappa\cdot r\,d\varphi}{r^2+d^2}\cdot\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}\Rightarrow E=\frac{dr\varkappa}{(r^2+d^2)^{3/2}}\cdot 2\pi=$$

$$=\frac{dr\cdot 2\pi}{(r^2+d^2)^{3/2}}\cdot\frac{q}{2\pi r}=\frac{qd}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$ – напряжённость создаваемая кольцом радиуса r

диск: $dq=\sigma\cdot 2\pi r\,dr$, $dE=\frac{2\pi r d\sigma\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}$

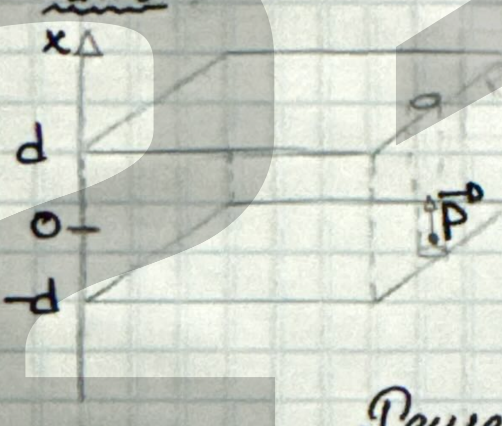
$$E=\int_0^R\frac{2\pi r d\sigma\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}}=\frac{2\pi d\sigma}{d^3}\int_0^R\frac{r\,dr}{(r^2+d^2)^{3/2}\cdot\frac{1}{d^3}}=$$

$$= \cancel{2\pi\sigma d}\, \pi\sigma d \int\limits_0^R \frac{dr^2}{(r^2+d^2)^{3/2}} = \pi\sigma d \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+d^2}} \cdot (-2) \Big|_0^R =$$

$$= -\frac{2\pi\sigma d}{\sqrt{R^2+d^2}} + \frac{2\pi\sigma d}{d} = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{R^2+d^2}}\right)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } E = 2\pi\sigma\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)}$$

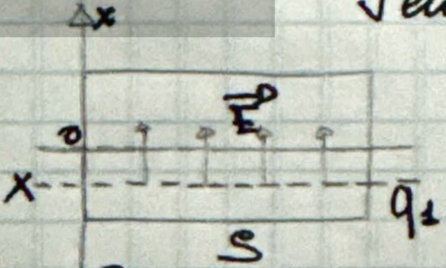
21.16



Дано: d, $\rho = \rho_0 \frac{x}{d}$, p, m

Найти: T

Решение:



Рассмотрим слой с координатой x:

Заряд того, что находится ниже x:

$$q_1 = \int\limits_{-d}^{x} \rho_0 \frac{t}{d} \cdot S\,dt = \frac{\rho_0 S}{2d} t^2 \Big|_{-d}^{x} = \frac{\rho_0 S}{2d}(x^2 - d^2)$$

т. Гаусса: $4\pi q_1 = E_1 S \Rightarrow E_1 = \frac{2\pi\rho_0}{d}(x^2 - d^2)$ $(E<0)$

Когда диполь имеет координату x:

$$\vec{F} = (\vec{p}, \nabla)\vec{E} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E} = p \left\| \begin{matrix} \frac{\partial E}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

$\vec{F}$ направлено вдоль Ox, $F = p \cdot \frac{2\pi\rho_0}{d} \cdot 2x$

Ускорение: $a = \frac{F}{m} = \frac{4\pi p \rho_0}{md} x$

Колебания возможны, когда при $x<0$ $a>0$, то есть $\vec{p}$ имеет обратное направление, либо $\rho_0<0$.

$\omega^2 = \frac{4\pi p \rho_0}{md}$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{md}{p\rho_0}} = \sqrt{\frac{\pi m d}{p \rho_0}}$

$\boxed{\text{Ответ: } T = \sqrt{\frac{\pi m d}{p\rho_0}}}$

№1.17

Дано: $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $R = 10^{-8}$ см

Найти: $\rho(r)$: колебания, ν

Решение:

Рассмотрим сферу радиуса r:

т. Гаусса: $4\pi q(r) = 4\pi r^2 E(r)$, где $q(r)$ - заряд внутри сферы.

Получаем: $q(r) = r^2 E(r)$ $\vec{E}$ - от центра.

Сила, действующая на электрон: $F = \cancel{q} eE(r)$ - к центру

$-\ddot{r} = \frac{F}{m} = \frac{eE(r)}{m}$.

Колебания при $E(r) = c\cdot r$.

Отсюда $q(r) = r^2 E(r) = cr^3 \Rightarrow \rho(r) = const = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi R^3} =$
$= \frac{3e}{4\pi R^3}$.

$$E(r) = \frac{q(r)}{r^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^3 e = \frac{re}{R^3}.$$

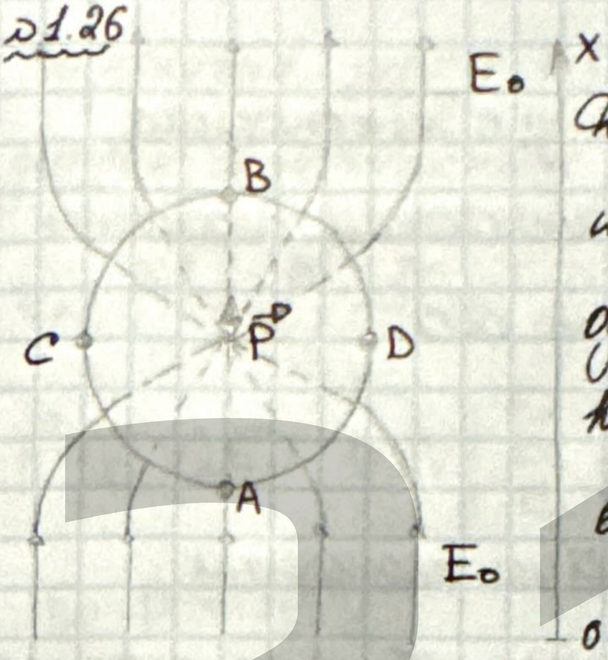
$$\ddot{r} + \frac{e}{m} \cdot \frac{e}{R^3} r = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{mR^3}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14} \cdot \sqrt{\frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл)^2}{9{,}1 \cdot 10^{-28}\,г \cdot (10^{-8}\,см)^3}} \simeq$$
$\simeq 2{,}5 \cdot 10^{15}$ Гц

$\boxed{\text{Ответ: } \rho = const = \frac{3e}{4\pi R^3},\ \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} \simeq 2{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{Гц}}$

№1.26

2 неделя



Дано: металлический шар помещён во внешнее однородном поле E_0

Как изменится поле в точках A, B, C и D?

Решение:

Как было показано в задаче 1.23: чтобы внутри шара было поле $-\vec{E_0}$: заряд должен распределиться так, чтобы он был эквивалентен диполю с $\vec{p} = -R^3(-\vec{E_0}) = \vec{E_0} \cdot R^3$

Тогда $E_{Ax} = E_0 + \frac{3(-E_0R^4)(-R)}{R^5} - \frac{E_0R^3}{R^3} = 3E_0$, $E_{Ay} = 0$

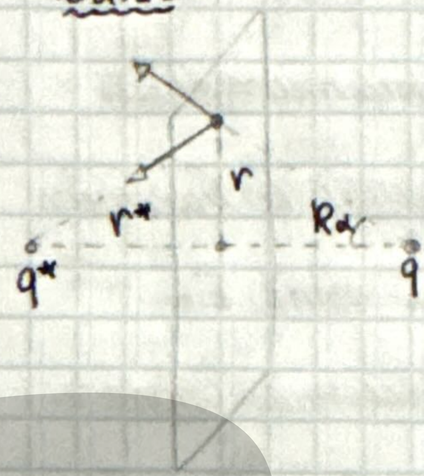
$E_{Bx} = E_0 + \frac{3(E_0R^4)R}{R^5} - \frac{E_0R^3}{R^3} = 3E_0$, $E_{By} = 0$

$E_{Cx} = E_0 + \frac{3 \cdot 0}{R^5}R - \frac{E_0R^3}{R^3} = 0$, $E_{Cy} = 0$

$E_{Dx} = E_{Dy} = 0$

Ответ: в точках A и B поле возрастёт в 3 раза, в C и D станет нулевым

№2.11



Дано: q, r, бесконечная металлическая плоскость

Найти: $\sigma(r)$

Решение:

Пусть индуцированный на плоскости заряд эквивалентен заряду $q^* = -q$ на расстоянии $r^* = R$ от плоскости. Тогда $\varphi(r) = 0$ для всех r.

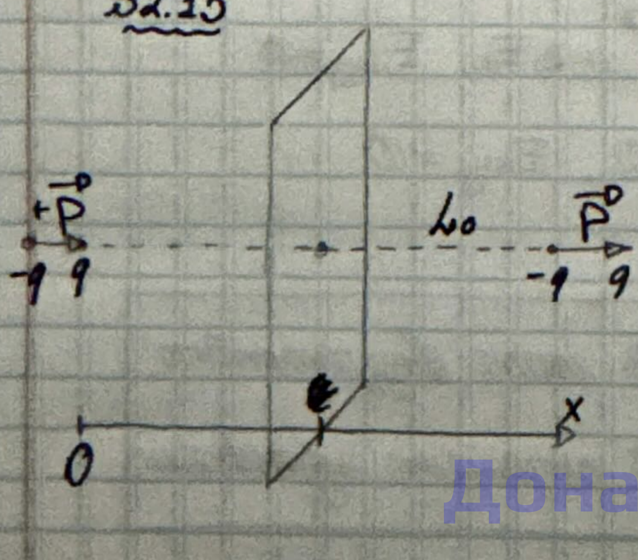
В силу теоремы единственности:

$$E(r) = 2 \cdot \frac{q}{R^2+r^2} \cdot \cos\alpha = \frac{2q}{R^2+r^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}} = \frac{2Rq}{(R^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E(r) = 2\pi\sigma(r) \Rightarrow \sigma(r) = \frac{\cancel{2}\, Rq}{2\pi(R^2+r^2)^{3/2}}$$

Ответ: $\boxed{\sigma(r) = \frac{Rq}{2\pi(R^2+r^2)^{3/2}}}$

№2.15



Дано: $p = 4 \cdot 10^{-10}$ Кл·см, $L_0 = 1$см, $L = 2$см

Найти: F, $A: L_0 \to L$

Аналогично задаче 2.11: плоскость эквивалентна диполь с моментом $\vec{p}$ на таком же расстоянии.

$$E_x = \frac{3(p\cdot 2x)\cdot 2x}{(2x)^5} - \frac{p}{(2x)^3} = \frac{2p}{8x^3}$$

$$\vec{F} = (\vec{p},\nabla)\vec{E} = p\frac{\partial}{\partial x}\begin{Vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} p\frac{\partial E_x}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$$ логично из симметрии

$$F_x = p\cdot\frac{-6p}{8x^4}$$

При $x = 2L_0$: $F = -\frac{6p^2}{(2L_0)^4} = -\frac{3p^2}{8L_0^4}$

$$A = -\frac{1}{2}\int_{2L_0}^{2L} F_x\, d\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{2L_0}^{2L}\frac{6p^2}{x^4}dx = -\frac{1}{8}\cdot\frac{6p^2}{x^3}\Bigg|_{2L_0}^{2L} = -2p^2\left(\frac{1}{8L^3}-\frac{1}{8L_0^3}\right) =$$

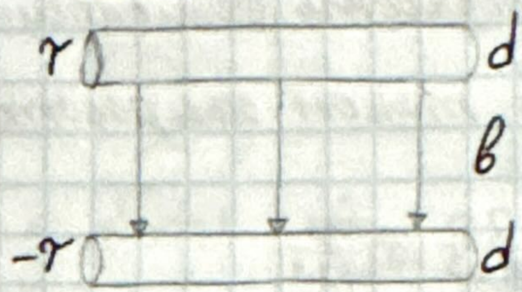
$$= \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L_0^3}-\frac{1}{L^3}\right)$$

$$|F| = \frac{3\left(4\cdot 10^{-10}\,\text{Кл}\cdot\text{см}\cdot 3\cdot 10^9\,\frac{\text{ед СГС}}{\text{Кл}}\right)^2}{8\cdot(1\,\text{см})^4} = 0{,}54\ \text{г}\cdot\frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 0{,}54\ \text{дин}$$

$$A = \frac{(1{,}2\ \text{ед СГС}\cdot\text{см})^2}{8}\left(\frac{1}{1\,\text{см}^3}-\frac{1}{8\,\text{см}^3}\right) \approx 0{,}16\ \text{эрг}$$

Ответ: $\boxed{F = \frac{3p^2}{8L_0^2} \approx 0{,}54\ \text{дин},\quad A = \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{L_0^3}-\frac{1}{L^3}\right) \approx 0{,}16\ \text{эрг}}$

№2.48



Дано: $E_{max} = 30\,\frac{кВ}{см}$,

$d = 1\,см$, $в = 5\,м$

Найти: $\Delta\varphi_{max}$

Решение:

Поле цилиндра на расстоянии r от оси $(r > \frac{d}{2})$:

$$E = \frac{2\tau}{r}$$

$$E(r) = \frac{2\tau}{r} + \frac{2\tau}{b-r} = 2\tau\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r}\right)$$

Максимум при $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r}\right)'_r = 0 \Rightarrow$ при $r = \frac{b}{2}$.

$$E_{max} = 2\tau \cdot \frac{2}{b} \cdot 2 = \frac{8\tau}{b} \Rightarrow \tau = \frac{1}{8} b E_{max}.$$

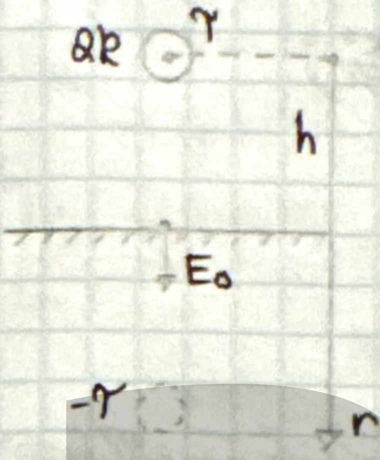
$$\Delta\varphi = -\int_{\frac{1}{2}d}^{b-\frac{1}{2}d} E\,dr = -2\tau\left(\ln r - \ln(b-r)\right)\Big|_{\frac{1}{2}d}^{b-\frac{1}{2}d} =$$

$$= -2\tau\left(\ln\left(b-\tfrac{1}{2}d\right) - \ln\left(\tfrac{1}{2}d\right) - \ln\left(\tfrac{1}{2}d\right) + \ln\left(b-\tfrac{1}{2}d\right)\right) =$$

$$= -4\tau \ln\frac{2b-d}{d} = -\frac{1}{2} b E_{max} \ln\frac{2b-d}{d}$$

Ответ: $\boxed{\Delta\varphi_{max} = \cancel{4\tau\ln\left(\frac{2b}{d}-d\right)}\ \frac{1}{2} b E_{max} \ln\frac{2b-d}{d} = 691\ ед\ СГС = \approx 207\,кВ}$

Т2.1



Дано: $R = 1$ см, $h = 4$ м, $E_0 = 750\ \frac{В}{м}$

Найти: $\varphi_{пр.}$

Решение:

Поле цилиндра на расстоянии r от оси:

$E(r) = \frac{2\tau}{r}$.

Заменяем плоскость на зеркальный провод, заряженный другим знаком.

$E_0 = \frac{2\tau}{h} \cdot 2 = \frac{4\tau}{h} \Rightarrow \tau = \frac{1}{4} h E_0$

$E(r) = \frac{2\tau}{r} + \frac{2\tau}{2h - r}$

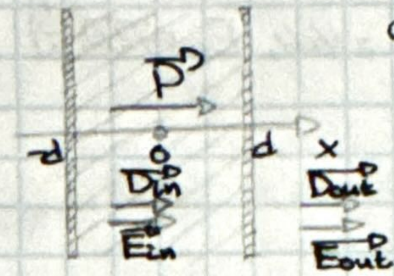
$\varphi = -\int_h^R E(r) dr = -2\tau \left(\ln \frac{r}{2h - r} \right) \Big|_h^R = -2\tau \left\{ \ln \frac{R}{2h - R} \simeq \right.$

$\simeq 2\tau \ln \frac{2h}{R} = \frac{1}{2} h E_0 \ln \frac{2h}{R}$

Ответ: $\boxed{\varphi \simeq \frac{1}{2} h E_0 \ln \frac{2h}{R} \simeq 10\text{кВ}}$

3 неделя

Т3.1



Дано: $\vec{P}(x) = \vec{P}_0\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)$

Найти: U

Решение:

~~$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi q_{ст} = 0$ (т.к. сторонних зарядов нет) => граница =>~~

Граничное условия: $D_{out} - D_{in} = 4\pi\sigma_{ст} = 0$ (т.к. сторонних зарядов нет. => $D_{in} = 0$

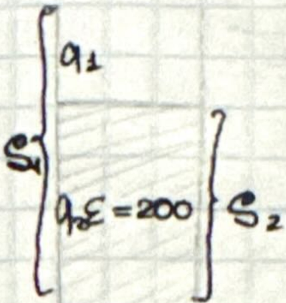
$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \Rightarrow \vec{E}(x) = -4\pi\vec{P}_0\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)$

$$U = \left|\int_{-d}^{+d} \vec{E}(x)\,d\vec{x}\right| = 4\pi P_0 \int_{-d}^{d}\left(1 + \frac{x^2}{d^2}\right)dx = 4\pi P_0\left(2d + \frac{d^3}{3d^2}\cdot 2\right) =$$

$$= \frac{32}{3}\pi P_0 d$$

Ответ: $\boxed{U = \frac{32}{3}\pi P_0 d}$

№3.30



Дано: $\varepsilon=200$, $S_1=1\,м^2$, индукция увеличивается в $\alpha=40$ раз

Найти: S_2

Решение:

До введения индукция $\vec{D}=\vec{E}_0$

После: $\vec{D}=\vec{E}_0+4\pi\vec{P}=\varepsilon\vec{E}$ (внутри области, занимаемой прокладкой)

В задаче считаем, что сохраняются заряды пластин.

$\Delta\varphi_{\text{без прокладки}}=\Delta\varphi_{\text{с прокладкой}} \Rightarrow \dfrac{q_1}{C_1}=\dfrac{q_2}{C_2}$,

$C_1=\dfrac{S_1-S_2}{4\pi d}$, $C_2=\dfrac{\varepsilon S_2}{4\pi d} \Rightarrow q_2=\dfrac{\varepsilon S_2}{S_1-S_2}q_1$.

До введения прокладки: $C_0=\dfrac{S_1}{4\pi d}$, $\Delta\varphi_0=\dfrac{4\pi d q}{S_1}$

$q_1+q_2=q \Rightarrow q_1\cdot\dfrac{S_1-S_2+\varepsilon S_2}{S_1-S_2}=q \Rightarrow q_1=\dfrac{S_1-S_2}{S_1-S_2+\varepsilon S_2}q$

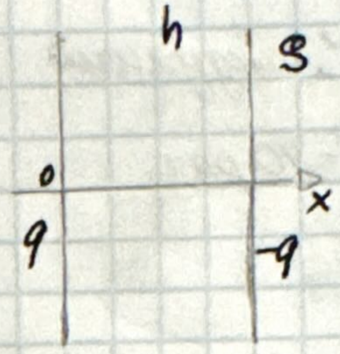
Тогда $\Delta\varphi=\dfrac{4\pi d q_1}{S_1-S_2}=\dfrac{4\pi d}{S_1-S_2}\cdot\dfrac{S_1-S_2}{S_1-S_2+\varepsilon S_2}\cdot\cancel{\dfrac{4\pi d q}{S_1}}\dfrac{S_1\Delta\varphi_0}{4\pi d}=$

$=\dfrac{S_1}{S_1-S_2+\varepsilon S_2}\Delta\varphi_0$

D увеличится в α раз, когда $\Delta\varphi$ увеличится в $\dfrac{\alpha}{\varepsilon}$ раз $\Rightarrow \alpha=\dfrac{\varepsilon S_1}{S_1-S_2+\varepsilon S_2} \Rightarrow S_2=\dfrac{\varepsilon-\alpha}{\varepsilon-1}\dfrac{S_1}{\alpha}\approx 200\,см^2$

Ответ: $\boxed{S_2=\dfrac{\varepsilon-\alpha}{\varepsilon-1}\cdot\dfrac{S_1}{\alpha}\approx 200\,см^2}$

Т3.2



Дано: $h, S, q, \varepsilon(x) = \dfrac{2}{1+\frac{x}{h}}$

Найти: $\rho_{пол}(x), C$

Решение:

$E = \dfrac{4\pi q}{\varepsilon S}$ — внутри конденсатора

$D = E + 4\pi P = \varepsilon E \Rightarrow P = \dfrac{\varepsilon - 1}{4\pi} E = (\varepsilon - 1)\dfrac{q}{\varepsilon S}$

$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_{пол} \Rightarrow \rho_{пол} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left((\varepsilon - 1)\dfrac{q}{\varepsilon S}\right) =$

$= \dfrac{-q}{S}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(1 - \dfrac{1+\frac{x}{h}}{2}\right) = +\dfrac{q}{S}\cdot\dfrac{1}{2h} = \dfrac{q}{2hS}$ — не зависит от x

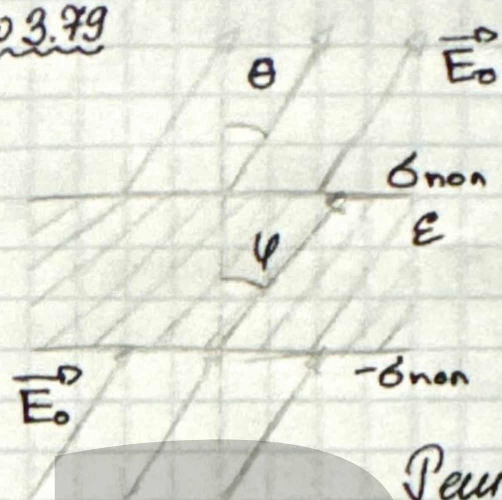
$\cancel{U = \dfrac{4\pi q}{S}\int_0^h \dfrac{2dx}{1+\frac{x}{h}} = \dfrac{8\pi q h}{S}\int_0^1 \dfrac{d\xi}{1+\xi} = \dfrac{8\pi q h}{S}}$

$U = \dfrac{4\pi q}{S}\int_0^h \dfrac{1+\frac{x}{h}}{2}dx = \dfrac{4\pi q}{2S}\cdot\left(h + \dfrac{h^2}{2h}\right) = \dfrac{2\pi q}{S}\cdot\dfrac{3}{2}h = \dfrac{3\pi q h}{S}$

$C = \dfrac{q}{U} = \dfrac{S}{3\pi h}$

Ответ: $\boxed{\rho_{пол} = \dfrac{q}{2hS},\ C = \dfrac{S}{3\pi h}.}$

№3.79



Дано: $\vec{E_0}$ - однородное, θ, ε;

Найти: 1) $\sigma_{пол}$, 2) $\vec{P}$

Решение

$D_{out\,n} - D_{in\,n} = 4\pi\sigma_{ст} = 0$ (т.к. сторонних зарядов нет) $\Rightarrow D_{out\,n} = D_{in\,n}$

$$\left.\begin{array}{l} D_{out\,n} = E_{out\,n} \\ D_{in\,n} = \varepsilon \cdot E_{in\,n} \end{array}\right| \Rightarrow E_{in\,n} = \frac{E_0 \cos\theta}{\varepsilon}$$

$E_{in\,\tau} = E_{out\,\tau}$ (граничное условие) $\Rightarrow E_{in\,\tau} = E_0 \sin\theta$.

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E}$$

$$P_n = \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \cdot \frac{E_0\cos\theta}{\varepsilon}, \quad P_\tau = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \cdot E_0 \sin\theta$$

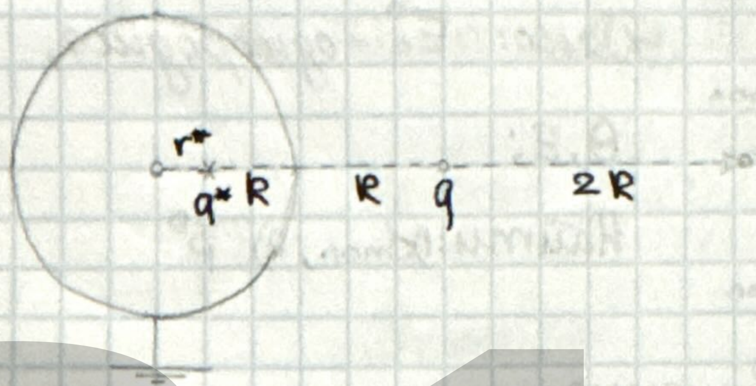
$$\sigma_{пол} = P_n = \frac{(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon} E_0 \cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{P_\tau}{P_n} = \varepsilon \operatorname{tg}\theta$$

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2 \sin^2\theta}$$

Ответ: $\boxed{1)\ \sigma_{пол} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon} E_0\cos\theta;\ 2)\ P = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\sqrt{\cos^2\theta + \varepsilon^2\sin^2\theta},\ \operatorname{tg}\varphi = \varepsilon\operatorname{tg}\theta}$

4 неделя   Т4.2



Дано: $q, 2R \to 4R, R$;

Найти: $A, \Delta W_{инд}$

Решение:

В задаче 2.20 показано, что заземлённая сфера эквивалентна $q^* = -\frac{R}{d}q$ на расстоянии $r^* = \frac{R^2}{d}$ от центра

$$F = \frac{qq^*}{(d-r^*)^2} = -\frac{q^2 R}{d\left(d-\frac{R^2}{d}\right)^2} = -\frac{q^2 R d}{(d^2-R^2)^2}$$

$$A = -\int_{2R}^{4R} \frac{q^2 R x}{(x^2-R^2)^2}dx = -\frac{1}{2}q^2R\int_{(2R)^2}^{(4R)^2}\frac{d\xi}{(\xi-R^2)^2} = \frac{1}{2}q^2R\left.\frac{1}{\xi-R^2}\right|_{4R^2}^{16R^2} =$$

$$= \frac{1}{2}q^2R\left(\frac{1}{15R^2}-\frac{1}{3R^2}\right) = -\frac{2q^2}{15R}$$

$$A_{внеш} = -A = \frac{2q^2}{15R}.$$

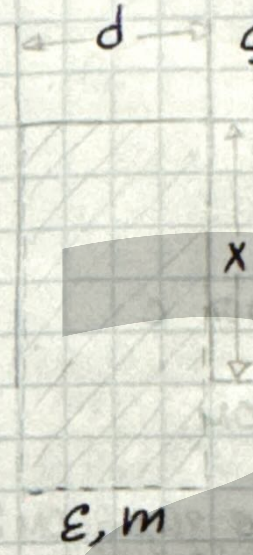
$$A_{внеш} = \Delta W_{вз} + \Delta W_{инд}$$

$$\Delta W_{вз} = \frac{q^*(4R)q}{4R-r^*(4R)} - \frac{q^*(2R)q}{2R-r^*(2R)} = \frac{-\frac{R}{4R}q^2}{4R-\frac{R^2}{4R}} - \frac{-\frac{R}{2R}q^2}{2R-\frac{R^2}{2R}} =$$

$$= -\frac{q^2}{15R} + \frac{q^2}{3R} = +\frac{4q^2}{15R} \Rightarrow \Delta W_{инд} = -\frac{2q^2}{15R}$$

Ответ: $\boxed{A_{внеш} = \frac{2q^2}{15R},\ \Delta W_{инд} = -\frac{2q^2}{15R}}$

№3.73



$S = a^2$ Дано: пластины-квадратные,

$S = a^2, d, \varepsilon, m$

Найти: x - положение равновесия

Решение:

$C_1 = \frac{a(a-x)}{4\pi d}$, $C_2 = \frac{\varepsilon a x}{4\pi d}$, $C = C_1 + C_2 = \frac{a}{4\pi d}(a - x + \varepsilon x)$

Заряд пластин сохраняется => $W_E = \frac{q^2}{2C}$ - зависит только от x.

В положении равновесия $W = W_E + W_{mg}$ - минимальна =>

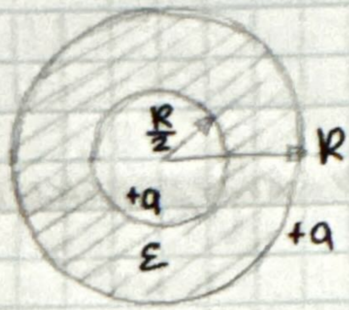
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2q^2\pi d}{a(a-x+\varepsilon x)} + mgx\right) = 0;$$

$$\frac{2q^2\pi d}{a} \cdot \frac{-1}{(a-x+\varepsilon x)^2} \cdot (\varepsilon - 1) + mg = 0$$

$$(a + (\varepsilon-1)x)^2 = \frac{2\pi q^2 d(\varepsilon-1)}{mga} \Rightarrow x = \frac{1}{\varepsilon-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi q^2 d(\varepsilon-1)}{mga}} - a\right)$$

Ответ: $\boxed{x = \frac{1}{\varepsilon-1}\left(\sqrt{\frac{2\pi q^2 d(\varepsilon-1)}{mga}} - a\right)}$

Т 4.3



Дано: R, q, $\varepsilon = 2$

Найти: W

Решение:

Рассмотрим систему как две сферы с зарядами $+q$ и $-q$ с диэлектриком (конденсатор) и сферу радиуса R с зарядом $2q$.

$$\Delta\varphi = \int_{R/2}^{R} \frac{q}{r^2}dr = q\left(-\frac{1}{R} + \frac{2}{R}\right) = \frac{q}{R} = C_0 = R$$

С диэлектриком: $C = \varepsilon R$, тогда

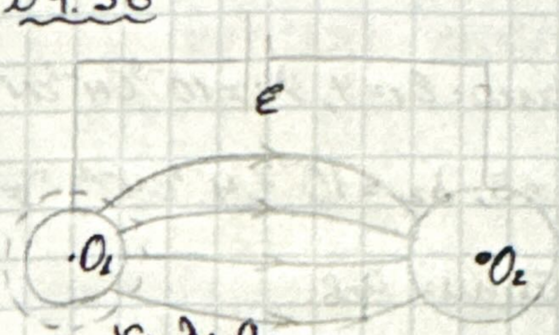
$$W_{конд} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon R}$$

$$W_{сф} = \int_{R}^{+\infty} \left(\frac{q}{r^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi} \cdot 4\pi r^2 dr = 2q^2 \int_{R}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{2q^2}{R}$$

$$W = W_{конд} + W_{сф} = \frac{q^2}{R}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + 2\right) = \frac{9}{4}\frac{q^2}{R}$$

Ответ: $\boxed{W = \frac{q^2}{R}\left(2 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) = \frac{9}{4}\frac{q^2}{R}}$

№4.36



r_1, λ_1, q_1 $\qquad$ r_2, λ_2, q_2

Дано: $r_1, r_2, \lambda_1, \lambda_2, \mathcal{E}$

Найти: q_1, q_2

Решение:

Окружим „r_1" поверхностью:

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi q_1$$

Закон Ома: $\vec{j}_1 = \lambda_1 \vec{E}$

$$I_1 = \oint \vec{j}\, d\vec{S} = \lambda_1 \oint \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi \lambda_1 q_1$$

Аналогично:

$$I_2 = 4\pi \lambda_2 q_2$$

Токи равны => $\lambda_1 q_1 = -\lambda_2 q_2$ (-, т.к. I_1 - вытекает, I_2 - втекает)

$$\Delta\varphi = \int_{O_2}^{\infty} \frac{q_2}{r^2} dr + \int_{\infty}^{O_1} \frac{q_1}{r^2} dr = \frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2} = \mathcal{E}$$

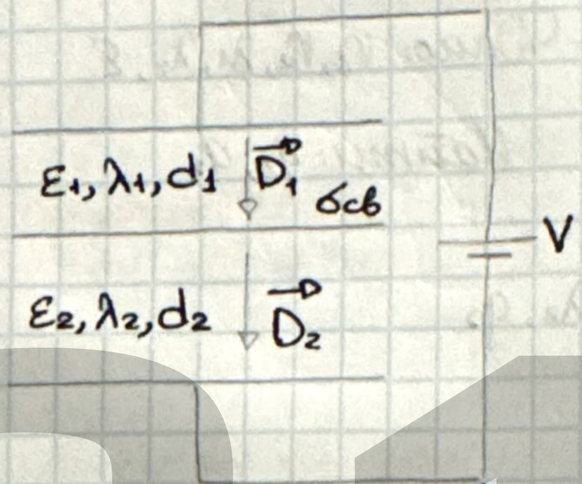
$$q_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} q_2$$

$$-q_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \mathcal{E} \Rightarrow q_2 = \frac{-\mathcal{E} r_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{r_1}{r_2}}$$

$$q_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 r_2}\right) = \mathcal{E} \Rightarrow q_1 = \frac{\mathcal{E} r_2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{r_2}{r_1}}$$

Ответ: $\boxed{q_1 = \frac{\mathcal{E} r_2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{r_2}{r_1}}, \quad q_2 = \frac{-\mathcal{E} r_1}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{r_1}{r_2}}}$

№4.23



Дано: $\varepsilon_1=4$, $\lambda_1=10^{-9}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$;

$\varepsilon_2=3$, $\lambda_2=10^{-12}$ Ом$^{-1}$см$^{-1}$; $J=10^{-7}$ A

Найти: $q_{св}$.

Решение:

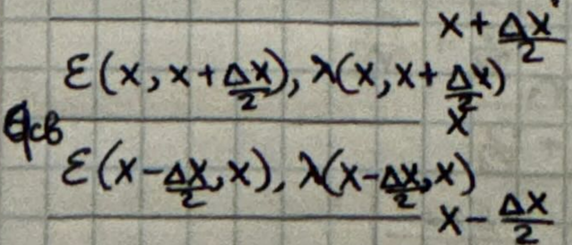
Рассмотрим сначала конденсатор, состоящий из двух диэлектриков...

Граничные условия: $D_2-D_1=4\pi\sigma_{св} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma_{св}=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1)=\frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon_2\frac{j}{\lambda_2}-\varepsilon_1\frac{j}{\lambda_1}\right)=$$

$$=\frac{J}{4\pi S}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}-\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right)\Rightarrow q_{св}=\frac{J}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2}-\frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right)$$

Если $\lambda(x)$ и $\varepsilon(x)$ – произвольные непрерывные функции, то разбиваем конденсатор на множество очень тонких толщиной Δx:



Для каждой полоски $q_{св}(x) = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon(x, x+\frac{\Delta x}{2})}{\lambda(x, x+\frac{\Delta x}{2})} - \right.$

$$\left. - \frac{\varepsilon(x-\frac{\Delta x}{2}, x)}{\lambda(x-\frac{\Delta x}{2}, x)}\right)$$

$$q_{св} = \sum_{x=\frac{\Delta x}{2}}^{d-\frac{\Delta x}{2}} q_{св}(x) = \{\text{ряд свёртывается}\} =$$

$$= \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon(d-\frac{\Delta x}{2}; d)}{\lambda(d-\frac{\Delta x}{2}; d)} - \frac{\varepsilon(0, \frac{\Delta x}{2})}{\lambda(0, \frac{\Delta x}{2})}\right)$$

При стремлении Δx к нулю: $q_{св} = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) =$

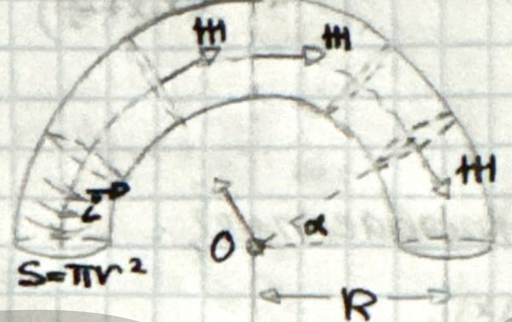
$$= \frac{10^{-7}\,\text{А} \cdot \frac{c}{10}\,\frac{\text{ед. СГС}}{\text{А}}}{4\pi}\left(\frac{\text{В}}{[illegible]} - \frac{\text{В}}{10^{-9}}\right)\text{Ом}\cdot\text{см}\cdot\frac{10^{9}}{c^2}\,\frac{\text{ед СГС}}{\text{Ом}} \approx$$

≈ 79 ед. СГС

Ответ: $\boxed{q_{св} = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) \approx 79 \text{ ед. СГС}}$

5 неделя

№5.12



Дано: r, R, i

Найти: B в точке O.

Решение:

Разобьём соленоид на маленькие витки с током.

Будем считать, что $R \gg r$, тогда поле, создаваемое одним витком - поле на оси этого витка, рассчитываемое как поле магнитного диполя.

$$\vec{m} = \frac{I\vec{S}}{c}$$

$$d\vec{B} = -\frac{\vec{m}}{R^3} = -\frac{I\vec{S}}{cR^3}$$

$$dB_x = -\frac{IS}{cR^3}\sin\alpha$$

$$dB_y = +\frac{IS}{cR^3}\cos\alpha$$

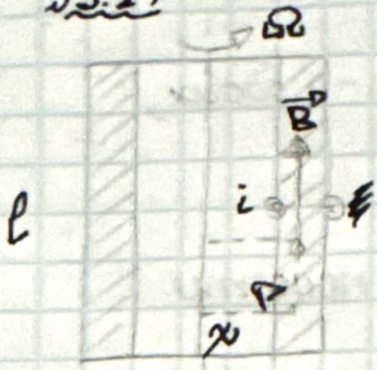
$$B_x = +\frac{IS}{cR^3}\cos\alpha\Big|_0^{\pi} = \frac{2IS}{cR^3}$$

$$B_y = \frac{IS}{cR^3}\sin\alpha\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$B = \frac{2IS}{cR^3} = \frac{2\pi r^2 I}{cR^3} = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Ответ: $B = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2$

№5.14



Дано: $\varkappa = 1$ ед.СГС, $\Omega = 1000\ \frac{рад}{с}$

1) цилиндр из металла

2) цилиндр из диэлектрика $\varepsilon = 3$

Найти: B, B_{in} и B_{out} в сл 1 и 2

Решение:

1) На внутренней поверхности: $-\sigma$, такой что

$l \cdot \varkappa = 2\pi r l \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{\varkappa}{2\pi r}$ (поле внутри металла 0)

На поверхностях образуется ток с поверхностной плотностью $i = v\sigma = \Omega r \cdot \frac{\varkappa}{2\pi r} = \frac{\varkappa \Omega}{2\pi}$.

Теорема о циркуляции для контура Γ:

$B \cdot l = \frac{4\pi}{c} \cdot il \Rightarrow B = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\varkappa \Omega}{2\pi} = \frac{2\varkappa\Omega}{c}$

Для контура меньшего размера:

$B_{in} l = 0 \Rightarrow B_{in} = 0$, аналогично $B_{out} = 0$

2) $E + 4\pi P = \varepsilon E \Rightarrow P = \frac{1}{4\pi}(\varepsilon - 1) \cdot \frac{2\varkappa}{\varepsilon r}$

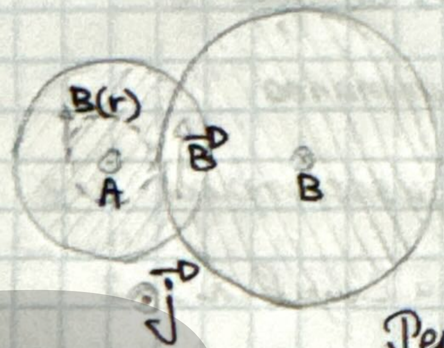
Внутри и снаружи аналогично: $B_{in} = B_{out} = 0$

$\sigma = P = \frac{(\varepsilon-1)\varkappa}{2\pi r}$, $B = \frac{4\pi}{c} \cdot i = \frac{4\pi}{c} \cdot \Omega r \cdot \frac{(\varepsilon-1)\varkappa}{\varepsilon 2\pi r} =$

$= \frac{2(\varepsilon-1)\varkappa\Omega}{\varepsilon c}$

Ответ: $\boxed{B_{in} = B_{out} = 0;\ 1)\ B = \frac{2\varkappa\Omega}{c} \approx 0{,}7 \cdot 10^{-7}\ Гс;\ 2)\ B = \frac{2(\varepsilon-1)\varkappa\Omega}{\varepsilon c} \approx 0{,}44 \cdot 10^{-7}\ Гс}$

№5.23



Дано: $j = 10^3 \frac{A}{см^2}$ – в обоих,

$AB = d = 5 см$

Найти: $\vec{B}$ – в полости

Решение:

Будем считать $\vec{j}$ направленным на наблюдателя.

Теорема о циркуляции для цилиндра:

$B(r) \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \cdot j \cdot \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{2\pi}{c} r j$

Для A: $\vec{B}_A = \frac{2\pi}{c} [\vec{r}_A \times \vec{j}]$

Для B: $\vec{B}_B = -\frac{2\pi}{c} [\vec{r}_B \times \vec{j}]$

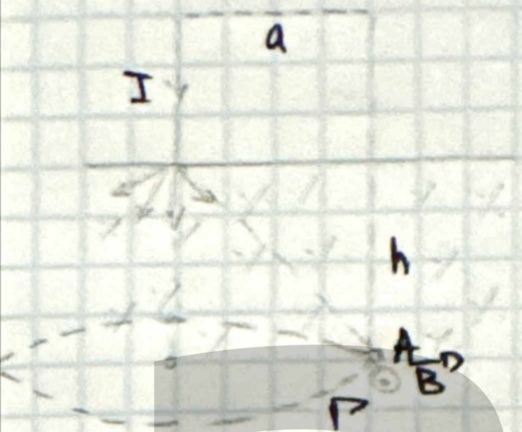
$\vec{B} = \frac{2\pi}{c} [\vec{r}_A - \vec{r}_B \times \vec{j}] = \frac{2\pi}{c} [\vec{BA} \times \vec{j}]$ –

– на рисунке вверх.

$B = \frac{2\pi}{c} j d = \frac{2\pi}{c} \cdot \left(10^3 \frac{A}{см^2} \cdot \frac{c}{10} \frac{ед.СГС}{A}\right) \cdot 5 см \simeq 3141 Гс$

Ответ. $\boxed{\vec{B} \text{ на рисунке вверх, } B = \frac{2\pi}{c} j d \simeq 3141 Гс}$

Т5.1



Дано: $I, a, h = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Найти: B в точке A

Решение:

Рассмотрим контур Γ. В силу симметрии:

$$B_A \cdot 2\pi a = \frac{4\pi}{c} I_\Gamma$$

$$I_\Gamma = I \cdot \frac{\Omega}{4\pi/2}$$

Площадь сегмента: $S = 2\pi\sqrt{a^2+h^2} \cdot x =$

$$= 2\pi\sqrt{a^2+h^2}\left(\sqrt{a^2+h^2} - h\right)$$

$$\Omega = \frac{S}{a^2+h^2} = 2\pi \cdot \frac{\left(a^2+h^2 - h\sqrt{a^2+h^2}\right)}{a^2+h^2} =$$

$$= 2\pi\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right).$$

Тогда $B \cdot a = \frac{2}{c} \cdot I \cdot \frac{2\pi}{2\pi}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \frac{2I}{ca}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = \frac{2I}{ca}\left(1 - \frac{a/\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+\frac{1}{3}a^2}}\right) =$$

$$= \frac{2I}{ca}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{I}{ca}$$

Ответ: $\vec{B}$ направлено на наблюдателя

$$\boxed{B = \frac{2I}{ca}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) = \frac{I}{ca}}$$