Математический анализ 4 семестр

shared with ♡ by artemZholus

Содержание

1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение (Колебание на отрезке)**.**

$$\omega(f,c,d) = \sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f = (\text{по лемме из 1го семестра}) = \sup_{x',x''\in[c,d]} |f(x') - f(x'')|$$

Определение (Колебание функции в точке)**.**

$$\omega(f,x) = \lim_{\delta\to 0} \omega(f, x+\delta, x-\delta)$$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если $0 < \delta_1 < \delta_2$ то $\omega(f, x-\delta_1, x+\delta_1) < \omega(f, x-\delta_2, x+\delta_2)$. Поэтому, вышеприведенный предел существует.

Утверждение 1.1. $\omega(f,x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

Доказательство.

1. $\Leftarrow$ Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего sup и inf. Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.
2. $\Rightarrow$ $\omega(f,x) = 0$ означает, что можно подобрать такую $\delta-$окрестность для x, что она будет сколь угодно малой. Берем формулу $\sup\limits_{x',x''\in[x-\delta,x+\delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$ фиксируем $x'' = x$ (от этого sup разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в x.

□

Определение. τ : - разбиение отрезка $[a,b]$, если $\tau = \{x_j\}: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

Ведем кусочно-постоянную функцию $g(\tau,x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$, при $x \in [x_j, x_{j+1}]$

Утверждение 1.2. $g(\tau_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega(f,x)$ *почти всюду на отрезке*

Доказательство. Очевидно, мы можем подбирать τ_n так, чтобы границы отрезка, содержащего x совпали с границами из определения $\omega(f,x)$. Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду □

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int\limits_{[a,b]} g(\tau_n, x)dx \to \int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна $\int\limits_{[a,b]} g(\tau_n,x)dx = \omega(f,\tau_n)$. Получаем:

$$\lim_{rang\tau_n\to 0} \omega(f,\tau_n) = \int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx$$

Это наша рабочая формула.

Теорема 1.3 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.**
$f \in \Re(a,b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$
Пусть $\omega(f,x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx = 0 \ \Rightarrow f \in \Re[a,b]$
2. $\Leftarrow$
Пусть $f \in \Re[a,b]$. Тогда, по определению, $\omega(f,\tau_n) \to 0$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx = 0$. Но $\omega(f,x) \geqslant 0$. Значит $\omega(f,x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$ (И, по лемме, почти всюду непрерывна).

□

2 Суммируемые функции

2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера μ - полная и σ-конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что $E \in \mathcal{A}$, $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ на E.

Определение. $e \subset E$ называется допустимым для f если:

1. $\mu(e) < +\infty$
2. f - ограничена на e

Утверждение 2.1. *Непустые допустимые множества существуют.*

Доказательство. Пусть $E_n = E(n < f(x) \leqslant n+1)$. Понятно, что $E = \bigcup\limits_n E_n$. По σ-конечности $X = \bigcup\limits_m X_m$, причем X_m - конечномерны. Тогда $E = \bigcup\limits_{n,m} E_n X_m$ - допустимые множества. Если они все пустые, то E, тоже пусто. Значит среди них хотя бы одно непустое. ☐

Определение (Несобственный интеграл Лебега)**.**

$$\int\limits_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{e-\text{допустимо}} \int\limits_e f d\mu$$

Определение (Неотрицательная суммируемая функция)**.** Неотрицательная функция f называется суммируемой на множестве E, если $\int\limits_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если $\mu E < +\infty$, $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{e \subset E} \int\limits_e f d\mu$.

Проверим аддитивность и линейность.

Теорема 2.2 (σ-аддитивность несобственного интеграла Лебега)**.**
Пусть $E = \bigcup\limits_n E_n$ - дизъюнктивны. Тогда $\int\limits_E f = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом σ-аддитивность

Доказательство.

1. Пусть $E = E_1 \cup E_2$.Пусть $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ - допустимые. И любое допустимое для E множество $e = e_1 \cup e_2$. Для определенного интеграла мы знаем, что $\int\limits_e f = \int\limits_{e_1} f + \int\limits_{e_2} f \leqslant \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$
   Переходя к sup по e получаем $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$
   В обратную сторону. Считаем, что f - суммируема (иначе все тривиально). По определению sup, $\forall \varepsilon > 0\, \exists e_j \subset E_j : \int\limits_{E_j} f - \varepsilon < \int\limits_{e_j} f$.
   $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_1} f - 2\varepsilon < \int\limits_{e_1} f + \int\limits_{e_2} f = \int\limits_e f \leqslant \int\limits_E f$. Устремив $\varepsilon \to 0$ получим $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f \leqslant \int\limits_E f$.
   Значит $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f = \int\limits_E f$

2. Итак, пусть $e = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} e_n$. Очевидно $\int\limits_{e_n} f \leqslant \int\limits_{E_n} f$ и $\int\limits_e f = \sum\limits_n \int\limits_{e_n} f$. Значит $\int\limits_E f \leqslant \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$.
   Обратно. $\forall \varepsilon > 0\, \exists e_n \subset E_n$:
   $\int\limits_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int\limits_{e_n} f$. Сложим первые p неравенств:$\sum\limits_1^p \int\limits_{E_n} f - \varepsilon \sum\limits_1^p \frac{1}{2^n} < \sum\limits_1^p \int\limits_{e_n} f \leqslant \int\limits_E f$. Устремляя $p \to +\infty$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{E_n} f - \varepsilon \leqslant \int\limits_E f$. Теперь устремим $\varepsilon \to 0$ и получим обратное неравенство.

☐

Теорема 2.3 (Линейность несобственного интеграла Лебега)**.**

1. $\int\limits_E \alpha f = \alpha \int\limits_E f,\ \ \alpha > 0$

2. $\int\limits_E (f+g) = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

Доказательство. Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть $E_n = E(n < f + g \leqslant n+1)$. Тогда, очевидно, $E = \bigcup\limits_n E_n$. По σ-конечности можно написать $X = \bigcup\limits_n X_n$. От X_n мы хотим дизъюнктивности, поэтому, если они не таковы, то проделаем следующий трюк:
$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup\limits_1^{n-1} X_j) \cup \dots$. Теперь E можно разбить как $E = \bigcup\limits_{n,m} E_n X_m$ - эти множества дизъюнктивны и допустимы для $f+g$. Далее по σ-аддитивности пишем: $\int\limits_E (f+g) = \sum\limits_n \int\limits_{A_n} (f+g) =$ (по линейности определенного интеграла) $= \sum\limits_n \int\limits_{A_n} f + \sum\limits_n \int\limits_{A_n} g =$(по σ-аддитивности несобственного)$= \int\limits_E f + \int\limits_E g$ $\square$

Утверждение 2.4. *Если* $0 \leqslant f \leqslant g$, *то* $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$

Доказательство. $0 \leqslant g - f$ - по арифметике измеримости, эта функция суммируема. Раз она неотрицательна, интеграл от нее тоже.

$$0 \leqslant \int\limits_E g - f = \int\limits_E g - \int\limits_E f \ \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$$

$\square$

2.2 Суммируемые функции произвольного знака

Определение.

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , f(x) < 0 \\ f(x) & , f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Заметим, что $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. f^+ и f^- - неотрицательные суммируемые функции (если f - измерима).

Определение. f называется суммируемой на E, если одновременно f^+ и f^- - суммируемы.

$$\int\limits_E f \overset{\text{def}}{=} \int\limits_E f^+ - \int\limits_E f^-$$

Утверждение 2.5. f - *суммируема* $\Leftrightarrow |f|$ - *суммируема.*

Доказательство. f - суммируема тогда и только тогда, когда f^+ и f^- - суммируемы. $|f|$ - суммируема тогда и только тогда, когда f^+ и f^- - суммируемы. $\square$

Аналогом суммируемости функций служит абсолютная сходимость.

Проверим σ-аддитивность и линейность для случая функции произвольного знака:

Теорема 2.6 (Аддитивность в случае произвольного знака). *Пусть* $E = \bigcup\limits_n E_n$ *- дизъюнктивные, тогда* $\int\limits_E f = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$

Доказательство. $\int\limits_E f^+ = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f^+$, то же для f^-. Тогда $\int\limits_E f = \int\limits_E f^+ - \int\limits_E f^- = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f^+ - \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f^- = \sum\limits_n (\int\limits_{E_n} f^+ - f^-) = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$ □

Теорема 2.7 (Линейность в случае произвольного знака).

1. $\int\limits_E \alpha f = \alpha \int\limits_E f,\ \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\int\limits_E (f+g) = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

Доказательство. Пункт 1 очевиден, не будем на нем останавливаться. Докажем пункт 2:

$$\int\limits_E f + \int\limits_E g = (\int\limits_E f^+ + \int\limits_E g^+) - (\int\limits_E f^- + \int\limits_E g^-) = \int\limits_E (f^+ + g^+) - \int\limits_E (f^- + g^-) = (*) = \int\limits_E (f+g)^+ - \int\limits_E (f+g)^- = \int\limits_E (f+g)$$

Проверим переход $(*)$. Для этого нужно, чтобы выполнялось $(f^+ + g^+) = (f+g)^+$ - в общем случае, это неправда. Поэтому нужно рассмотреть много случаев:

1. $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_1 = E(f \geqslant 0,\ g \geqslant 0)$, тогда
   - $f^+ = f,\ g^+ = g,\ (f+g)^+ = f+g \Rightarrow f^+ + g^+ = f + g = (f+g)^+$
   - $f^- = 0,\ g^- = 0,\ (f+g)^- = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0$
2. $f \leqslant 0,\ g \leqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_2 = E(f \leqslant 0,\ g \leqslant 0)$, разбираем аналогично пункту (1) - появятся минусы в формулах

В остальных случаях переход $(*)$ не верен, но под-интегральные функции можно перегруппировать по другому, например $\int\limits_E (f^+ - g^-) - \int\limits_E (f^- - g^+)$:

3. $f \geqslant 0,\ g \leqslant 0 \Rightarrow$ тут нужно различить два подслучая:
   (a) $f + g \geqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_3 = E(f \geqslant 0,\ g \leqslant 0,\ f+g \geqslant 0)$, тогда
      - $f^+ = f,\ g^- = -g,\ (f+g)^+ = f+g \Rightarrow f^+ - g^- = f + g = (f+g)^+$
      - $f^- = 0,\ g^+ = 0,\ (f+g)^- = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$

   (b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_4 = E(f \geqslant 0,\ g \leqslant 0,\ f+g < 0)$, тогда
      - $f^+ = f,\ g^- = -g,\ (f+g)^- = -(f+g) \Rightarrow -f^+ + g^- = -(f+g) = (f+g)^-$
      - $f^- = 0,\ g^+ = 0,\ (f+g)^+ = 0 \Rightarrow -0 + 0 = 0$
4. $f \leqslant 0,\ g \geqslant 0 \Rightarrow$ аналогично, два подслучая, разбор которых аналогичен пункту (3), если поменять f и g местами :
   (a) $f + g \geqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_5 = E(f \leqslant 0,\ g \geqslant 0,\ f+g \geqslant 0)$

   (b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_6 = E(f \leqslant 0,\ g \geqslant 0,\ f+g < 0)$

Очевидно, эти множества дизъюнктивны (на 0 забьем) и можно написать: $\int\limits_E f = \sum\limits_1^6 \int\limits_{E_j} f$. □

3 Предельный переход в классе суммируемых функций

3.1 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Теорема 3.1 (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E*,* $|f_n| \leqslant \phi$ *на* E*,* ϕ *- суммируема.*
Тогда:

1. f *- суммируема*
2. $\int\limits_E f_n \to \int\limits_E f$

Следует иметь ввиду, что в условии теоремы достаточно требовать выполнения свойств почти всюду.

Теорема 3.2. *Пусть* f *- суммируема на* E*. Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall E' \subset E \Rightarrow \mu E' < \delta \Rightarrow |\int\limits_{E'} f| < \varepsilon$

Доказательство. По определению, можно написать $\forall \varepsilon > 0 \; \exists e : \int\limits_{E \setminus e} |f| < \varepsilon$. Так как e - допустимо, f - ограничена на e и $E = (E \setminus e) \cup e$. Возьмем любое $E' \subset E$, тогда $E' = E'(E \setminus e) \cup E'e$.

$$\left|\int\limits_{E'} f\right| \leqslant \left|\int\limits_{E'(E\setminus e)} f\right| + \left|\int\limits_{E'e} f\right| \leqslant \varepsilon + \left|\int\limits_{E'e} f\right|$$

Мы считаем, что $|f(x)| \leqslant M$. Заметим, что выбор E' не накладывал никаких ограничений на M. Тогда:

$$\int\limits_{E'e} |f| \leqslant M\mu E'e \leqslant M\mu E'$$

Поэтому δ мы можем выбрать как $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. И получится, что $\mu E' \leqslant \delta \Rightarrow \left|\int\limits_{E'} f\right| \leqslant 2\varepsilon$ □

Доказательство теоремы Лебега. По теореме Рисса $f_{n_k} \to f$ почти всюду, причем $|f_{n_k}(x)| \leqslant \phi(x)$, занчит $|f(x)| \leqslant \phi(x) \;\Rightarrow f-$ суммируема. Рассмотрим $\left|\int\limits_E f_n - \int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f_n - f|$. Так как ϕ - суммируема,
$\forall \varepsilon > 0 \;\, \exists e$(допустимое для ϕ) : $\int\limits_{E\setminus e} \phi \leqslant \varepsilon$

$$\int\limits_E |f_n - f| = \int\limits_{E\setminus e} |f_n - f| + \int\limits_e |f_n - f| \leqslant 2\varepsilon + \int\limits_e |f_n - f|$$

Пусть $|\phi| \leqslant M \Rightarrow |f_n - f| \leqslant 2M$. Так же мы знаем, что $\int\limits_e |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Значит, начиная с некоторого N_0, $\int\limits_e |f_n - f| < \varepsilon$. Следовательно, начиная с N_0, $\int\limits_E |f_n - f| \leqslant 3\varepsilon$ □

3.2 Теорема Леви

Теорема 3.3 (Теорема Леви)**.** *Пусть* $f_n(x) \leqslant 0$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ *на* E. *Тогда* $\int\limits_E f_n \to \int\limits_E f$

Доказательство. Два случая:

1. f - почти всюду конечна на E. Два подслучая:

   (a) $\int\limits_E f < +\infty$. Так как $|f_n(x)| \leqslant f(x) \Rightarrow f$ - суммируемая мажоранта для f_n, и теорема верна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

   (b) $\int\limits_E f = +\infty$. ($f$ все еще мажоранта для f_n, но уже не суммируемая) Мы поступим так. Раз $\sup\limits_{e-\text{допустимо}} \int\limits_e f = +\infty$, значит $\forall c > 0\ \exists e - \text{допустимоедля} f : c < \int\limits_e f$. В силу $f_n \leqslant f$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\int\limits_e f_n \to \int\limits_e f$. Это значит, начиная с некоторого N_0, $c < \int\limits_e f_n \leqslant \int\limits_E f_n \Rightarrow \int\limits_E f_n \to +\infty = \int\limits_E f$

2. $\mu E(f = +\infty) > 0$ (Расслабьтесь, и будет не больно)
   Очевидно, в этой ситуации может быть только $\int\limits_E f = +\infty$. Из $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \Rightarrow \int\limits_E f_n(x) \leqslant \int\limits_E f_{n+1}(x)$. По теореме Вейерштрасса, у последовательности $\left\{\int\limits_E f_n\right\}$ будет существовать предел. Причем он будет конечным тогда и только тогда, когда эта последовательность ограничена. Так что нам нужно вывести противоречие из того факта, что эта последовательность ограничена. Предположим, что это так: пусть $\int\limits_E f_n \leqslant M$. Итак, зафиксируем $\forall c > 0$. Рассмотрим $E(f_n \geqslant c) \subset E$.

$$\int\limits_{E(f_n \geqslant c)} f_n \leqslant M$$

$$c\mu E(f_n \geqslant c) \leqslant \int\limits_{E(f_n \geqslant c)} f_n \Rightarrow \mu E(f_n \geqslant c) \leqslant \frac{M}{c}$$

Можно проверить, что:

$$E(f = +\infty) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c)$$

Доказательство. Пусть $x \in E(f = +\infty)$. Значит $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Следовательно $\forall c > 0 \exists N_x : \forall n > N_x \Rightarrow f_n(x) \geqslant c \overset{by}{\underset{def}{\Longrightarrow}} x \in \bigcap\limits_{n=N_x}^{\infty} E(f_n \geqslant c)$ ∎

Заметим одну интересную штуку.

$$\forall c > 0 f_n(x) \geqslant c \Rightarrow f_{n+1}(x) \geqslant c \Rightarrow E(f_n \geqslant c) \subset E(f_{n+1} \geqslant c) \Rightarrow \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c) = E(f_m \geqslant c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c) = \lim_{m\to+\infty} E(f_m \geqslant c)$$

Отсюда делаем вывод, что:

$$\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c) \geqslant \mu E(f = +\infty)$$

$$\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c) = \mu E(f_m \geqslant c) \leqslant \frac{M}{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geqslant c) \leqslant \frac{M}{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu E(f = +\infty) \leqslant \frac{M}{c}$$

c - любое, поэтому можно устремить $c \to +\infty$. Значит $\mu E(f = +\infty) = 0$. Противоречие получено.

□

Следствие 3.4. *Пусть* $u_n(x) \geqslant 0$ *и* $\sum\limits_n \int\limits_E u_n$ *- сходится. Тогда* $\sum\limits_n u_n(x)$ *- сходится почти всюду на* E.

Доказательство. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Так как интеграл сходится, его частичная сумма ограничена. $M \geqslant \sum\limits_{n=1}^{m} \int\limits_E u_n = \int\limits_E S_m$ Обозначим $S(x) = \sum\limits_n u_n(x)$. В силу неотрицательности $u_n(x)$, $S_n(x)$ - возрастает ($S_n \leqslant S_{n+1}$), и $S(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x)$. Следовательно, по теореме Леви $\int\limits_E S_n \to \int\limits_E S$. Следовательно, S - суммируемая функция, это значит, что она почти всюду конечна. □

Следствие 3.5. *Пусть* $f \geqslant 0$, $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ *- срезка функции* f. *Тогда* $\int\limits_E f_n \to \int\limits_E f$.

Доказательство. f_n удовлетворяют условиям теоремы Леви. □

3.3 Теорема Фату

Теорема 3.6 (Теорема Фату)**.** *Пусть* $f_n \geqslant 0$, $f_n \Rightarrow f$ *на* E. *Тогда*

$$\int\limits_E f \leqslant \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_E f_n$$

Доказательство. Применим теорему Рисса, получив, что $f_{n_k} \to f$ почти всюду. Без ограничения общности можем считать, что $f_n \to f$ почти всюду (потому что если доказать для sup по подпоследовательности, неравенство будет верно и для последовательности). Пусть $g_n = \min\{f_n, f\}$. Тогда $g_n \leqslant f$. Рассмотрим два случая:

1. f - суммируема. Тогда, по теореме Лебега, $\int\limits_E g_n \to \int\limits_E f$. Предел последовательности $\int\limits_E g_n$ не превзойдет своего верхнего предела, поэтому $\int\limits_E f \leqslant \sup\limits_n \int\limits_E g_n \leqslant \sup\limits_n \int\limits_E f_n$

2. $\int\limits_E f = +\infty$. Тогда $\forall e$ - допустимо для f. $\int\limits_e f < +\infty$ Как мы показали, $\int\limits_e f \leqslant \sup\limits_n \int\limits_E f_n$. Переходя к sup по e получаем необходимое неравенство.

□

4 Пространства L_p

Определение. $L_p(E) \overset{\text{def}}{=} \left\{ f : E \to \mathbb{R}, f - \text{измерима}, \int\limits_E |f|^p < +\infty \right\}$

Нам нужно проверить, что $L_p(E)$ - НП. То есть, $f, g \in L_p \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L_p$, $\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Причем, $\|f\|$ - удовлетворяет аксиомам нормы.

Утверждение 4.1. *$\|f\|_p$ удовлетворяет двум свойствам:*

1. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
2. $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$

Доказательство. 1. Очевидно.

2. $\int\limits_E |f+g|^p \leqslant \int\limits_E (|f| + |g|)^p$. Пусть $E_1 = E(|f| \leqslant |g|)$, $E_2 = E(|f| > |g|)$. Тогда $E = E_1 \cup E_2$.

$$\int\limits_E (|f| + |g|)^p = \int\limits_{E_1} (|f| + |g|)^p + \int\limits_{E_2} (|f| + |g|)^p \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{E_1} (2|g|)^p + \int\limits_{E_2} (2|f|)^p < +\infty$$

Следовательно $f + g \in L_p$

□

4.1 Неравенство Гельдера

Теорема 4.2 (Неравенство Гельдера)**.** *Пусть $p > 1$ и $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f \in L_p$, $g \in L_q$. Тогда*

$$\int\limits_E |f| |g| \leqslant \left(\int\limits_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Юнга: ($uv \leqslant \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$). Пусть $u = \frac{|f|}{\|f\|_p}$, $v = \frac{|g|}{\|g\|_p}$

$$\frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_p} \leqslant \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_p^q}$$
$$\int\limits_E \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_p} \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \int\limits_E \frac{|g|^q}{\|g\|_p^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

4.2 Неравенство Минковского

Теорема 4.3 (Неравенство Минковского)**.** *Пусть $p > 1$, $f, g \in L_p$. Тогда*

$$\left(\int\limits_E (|f| + |g|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Рассмотрим $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$.

$$\int\limits_E (f+g)^p = \int\limits_E f(f+g)^{p-1} + \int\limits_E g(f+g)^{p-1} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_E f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_E (f+g)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int\limits_E g^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_E (f+g)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{пусть } q = \frac{p}{p-1}$$

$$\left(\int\limits_E (f+g)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int\limits_E f^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_E g^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$$

□

Если подставить в неравенство Минковского определение нормы, то можно заметить, что мы доказали неравенство треугольника.

Теорема 4.4. $L_p(E)$ *- Банахово пространство.*

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 4.5. *Пусть* f_n *- измеримы, и* $\forall \delta > 0\ \mu E\left(|f_n - f_m| \geqslant \delta\right) \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$. *Тогда* $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots :$ $f_{n_k} \to f$ *почти всюду.*

Доказательство. Пусть $\delta = \frac{1}{2^k}$. Можно проверить, что (**TODO**) $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots :$
$\mu E\left(\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \geqslant \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$. Рассмотрим следующее множество:

$$E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E\left(\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| \leqslant \frac{1}{2^j}\right)$$

Рассмотрим функциональный ряд $S = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots$. Фиксируем $x \in E'$. Тогда $\exists k_x : x \in \bigcap\limits_{j=k_x}^{\infty} E\left(\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| \leqslant \frac{1}{2^j}\right)$. Это значит, что при $j > k_x$ выполняется $\left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2^j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$. Следовательно, на E' функциональный ряд S - сходится. Нам осталось проверить, что его дополнение нуль-мерно. Т. е. $\mu\overline{E'} = 0$. Очевидно:

$$\overline{E'} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E\left(\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| > \frac{1}{2^j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{E'} \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} E\left(\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| > \frac{1}{2^j}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\overline{E'} \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \mu E(\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| > \frac{1}{2^j}) \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu\overline{E'} = 0$$

□

Доказательство Теоремы. Докажем для случая $p = 1$ (общий случай напишу потом **TODO**). Итак, $f_n \in L_1(E), \|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$. Зафиксируем $\forall\delta > 0$. Тогда

$$\delta\mu E(|f_n - f_m| \geqslant \delta) \leqslant \int\limits_{E(|f_n-f_m|\geqslant\delta)} |f_n - f_m| \leqslant \int\limits_E |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1 \to 0$$

Отсюда, по лемме, $\exists(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) : f_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} f$ почти всюду на E. Коль скоро k - фиксированное, $|f_{n_k} - f_{n_m}| \xrightarrow[m\to+\infty]{} |f_{n_k} - f|$ почти всюду на E. По теореме Фату:

$$\int\limits_E |f_{n_k} - f| \leqslant \sup_m \int\limits_E |f_{n_k} - f_{n_m}|$$

В силу $\|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \xrightarrow[k,m\to+\infty]{} 0$

$$\forall\varepsilon > 0 \exists M : \forall k, m > M \Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \leqslant \varepsilon$$

Без ограничения общности можем считать, что k и m удовлетворяют вышеприведенному условию. Получаем, что

$$\forall k > M \Rightarrow \int\limits_E |f_{n_k} - f| \leqslant \varepsilon$$

Отсюда, $f_{n_k} - f$ суммируема, а значит $\in L_1$. Но, по условию, $f_{n_k} \in L_1 \Rightarrow f \in L_1$. Так же, мы знаем, что $\|f_{n_k} - f\|_1 \leqslant \varepsilon$, что, в свою очередь означает, что $f_{n_k} \to f$ по норме в L_1. Оценим $\|f_n - f\|_1$:

$$\|f_n - f\|_1 \leqslant \|f_{n_k} - f_n\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1$$
$$\|f_{n_k} - f_n\|_1 \xrightarrow[n,k\to+\infty]{} 0$$
$$\|f_{n_k} - f\|_1 \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Получаем сходимость f_n к f по норме в L_1. А значит - полноту. □

Может показаться, что требование измеримости функции f в определении пространства L_p - излишне. Это отнюдь не так.

Утверждение 4.6. *Существует функция f такая, что ее p-я степень измерима, но сама функция - нет.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное неизмеримое множество $C \subset \mathbb{R}$. Тогда пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Очевидно, f -неизмерима (так как множество Лебега $E(f > \frac{1}{2}) =$ C - неизмеримо). Но $f^2(x) = 1$ при $x \in \mathbb{R}$ - очевидно, измеримая функция. □

Рассмотрим $f, g \in L_2$. По неравенству Гельдера, их произведение суммируемо. Положим $\langle f, g\rangle = \int\limits_E f \cdot g$. Очевидно, таким образом построенное отображение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Получается, что L_2 - гильбертово пространство с нормой, естественным образом порожденной скалярным произведением: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Приведем важный частный случай пространства $L_2(E)$: В качестве тройки множество - σ-алгебра - мера возьмем: $(X, \mathcal{A}, \mu) = \left(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu\right)$, где μ - считающая мера (количество элементов в множестве). Тогда $\int\limits_E f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$. В данном контексте суммируемость будет значить абсолютную сходимость.
Рассмотрим $L_2(\mathbb{N})$, Обозначаем $a_n = f(n)$. Тогда $f \in L_2(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum\limits_n a_n^2 < +\infty$. Принято бозначать $L_2(\mathbb{N}) = l_2$

5 Мера подграфика

Итак, рассмотрим $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Считаем, что мера - полная и σ-конечная. $f : E \xrightarrow{\text{изм.}} \mathbb{R}$, $f \geqslant 0$ почти всюду.

Определение. $G_f \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in E, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ - подграфик функции f.

Здесь и далее, в качестве $X \equiv \mathbb{R}^n$, $\mu \equiv \lambda_n$.

Теорема 5.1 (Об измеримости подграфика)**.** *Подграфик измерим, и его мера равна* $\lambda_{n+1}(G_f) = \int\limits_E f dx$

Утверждение 5.2. $G_c(E)$ *- измеримо,* $\lambda G_c(E) = c\lambda E$*, где с - константа.*

Доказательство. Пойдем от простого к сложному. Для ячейки $\mathbb{R}^n$ формула верна по определению. Пусть теперь E - открытое множество. Как известно, любое открытое множество представляется в виде $E = \bigcup\limits_m \Pi_m$, Π_m - дизъюнктные ячейки. $G(E) = \bigcup\limits_m G(\Pi_m) \Rightarrow \lambda G(E) = \sum\limits_m \lambda G(\Pi_m) = c \sum\limits_m \lambda G(\Pi_m) = c\lambda E$. Далее, без ограничения общности, можем считать, что $\mu E < +\infty$ (Потому что у нас есть σ - конечность;
$\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_m T_m$ $(T_m : \lambda T_m < +\infty) \Rightarrow E = \bigcup\limits_m ET_m$ $(\lambda ET_m < +\infty)$). Воспользуемся формулой: $\lambda^* E = \inf\limits_{E \subset G - \text{открыто}} \lambda G$
По аксиоме выбора, $\exists G_m : G_m \subset G_{m+1}, E = \bigcap\limits_m G_m$. Понятно, что тогда $\lambda G_m \to \lambda E$. Так же $G(E) = \bigcap\limits_m G(G_m)$.
Следовательно $\lambda G(G_m) = c\lambda G_m \to c\lambda E$ ☐

Доказательство теоремы. Мы умеем писать суммы Лебега-Дарбу: $\underline{S}(\tau) \leqslant \int\limits_E f \leqslant \overline{S}(\tau)$. Важно, что интеграл Лебега - единственное число, которое обладает таким свойством. $\tau : E = \bigcup\limits_m e_m$ - конечное объединение дизъюнктных множеств, и

$$\underline{S}(\tau) = \sum_p m_p \lambda e_p,\ m_p = \inf_{x \in e_p} f(x)$$
$$\overline{S}(\tau) = \sum_p M_p \lambda e_p,\ M_p = \sup_{x \in e_p} f(x)$$

Обозначим $\underline{E}_p = G_{m_p}(e_p)$. Тогда $\lambda \underline{E}_p = m_p \lambda e_p$. Пусть $\underline{E}(\tau) = \bigcup\limits_p \underline{E}_p$. Заметим, что

$$\lambda \underline{E}(\tau) = \sum_{p=1}^n \lambda \underline{E}_p = \sum_{p=1}^n m_p \lambda e_p = \underline{S}(\tau)$$
$$\lambda \overline{E}(\tau) = \sum_{p=1}^n \lambda \overline{E}_p = \sum_{p=1}^n M_p \lambda e_p = \overline{S}(\tau)$$
$$\underline{E}(\tau) \subset G_f(E) \subset \overline{E}(\tau)$$

По свйоствам сумм Лебега-Дарбу: $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon : \forall \tau \leqslant \tau_\varepsilon\ \overline{S}(\tau) - \underline{S}(\tau) \leqslant \varepsilon$
Сопоставляя это с предыдущими фактами, получаем $\underline{S}(\tau) \leqslant \lambda G_f(E) \leqslant \overline{S}(\tau)$.
И тогда, необходимо, $\lambda G_f(E) = \int\limits_E f$

☐

6 Теорема Фубини

Определение (Линейное сечение множества E)**.** $E_x \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$

Пример. Пусть $E = [a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$E_x = \begin{cases} \varnothing, x \notin [a, b] \\ [c, d], x \in [a, b] \end{cases}$$

Теорема 6.1. *Пусть $\lambda E < +\infty$, тогда*

1. *Любое E_x - измеримо.*
2. *λE_x - измеримая, почти всюду конечная функция.*
3. *$\lambda E_x = \int\limits_{\mathbb{R}} E_x dx$*

Доказательство. Пусть для начала $E = G$ - открытое множество. Тогда $G = \bigcup\limits_m \Pi_m$ - дизъюнктные ячейки. Очевидно, $G_x = \bigcup\limits_m \Pi_{n,x}$. По σ. По σ - аддитивности, $\lambda G_x = \sum\limits_m \lambda \Pi_{m,x}$. Каждое слагаемое, как функция, измеримо, значит, очевидно, будет измерима и сумма. Поэтому, по теореме Леви, данное равенство можно интегрировать.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \lambda G_x = \sum_m \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda \Pi_{m,x} = \sum_m \lambda \Pi_m = \lambda G$$

Далее, пусть E - произвольное измеримое множество. Воспользуемся формулой $\lambda E = \inf\limits_{E \subset G} \lambda G$, где G - открытые. **TODO** □

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$, f - измерима и неотрицательна. Тогда $\int\limits_E f(x, y) d\lambda \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_E f(x, y) dx dy$

Теперь мы можем сформулировать теорему Фубини:

Теорема 6.2 (Теорема Фубини)**.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$, f - суммируема на E, тогда почти всюду $f(x, \cdot)$ - суммируема на E_x, $\int\limits_{E_x} f(x, y) dy$ - суммируема на $\mathbb{R}$ и*

$$\iint\limits_E f(x, y) dx dy = \int\limits_{\mathbb{R}} dx \int\limits_{E_x} f(x, y) dy$$

Доказательство. Достаточно доказать для неотрицательных функций. Для функций произвольного знака это будет следовать из линейности двойного интеграла. Итак, мы знаем, что подграфик
$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in E, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\}$ измерим. $\iint\limits_E f(x, y) dx dy = \lambda G_f$.

$$\begin{gathered} G_{f,x} = \{(y, z) : (x, y) \in E, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\} = \\ = \{(y, z) : y \in E_x, 0 \leqslant z \leqslant f(x, y)\} = G_{f(x,\cdot)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ по теореме о мере подграфика } \Rightarrow \lambda G_{f,x} = \int\limits_{E_x} f(x, y) dy \end{gathered}$$

Подставляя это в исходную формулу, получаем формулу повторного интегрирования. □

7 О многократных интегралах Римана

Обобщим понятние интеграла Римана на множества большей размерности (для упрощения будем вести речь в терминах $\mathbb{R}^2$). Итак, рассмотрим $\Pi = [a, b] \times [c, d]$, $\tau_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $\tau_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$. Тогда $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, и $\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$, $\Pi \equiv \bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}$. Теперь мы можем составить суммы Римана:

$$\sigma(f, \tau) = \sum_{ij} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

Положим $rang\tau \equiv \max\limits_{ij} \{diam\Pi_{ij}\}$. Тогда:

$$\lim_{rang\tau \to +\infty} \sigma(f, \tau) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)dxdy$$

Если вышеприведенный предел существует , то он называется двойным интегралом Римана. Ясно, что функция интегрируемая по Риману на прямоугольнике интегрируема по Лебегу. Это позволяет воспользоваться теоремой Фубини:

$$\int\limits_a^b f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$$

В общем случае, это не означает, что $\int\limits_a^b f(x, y)dy$ - интегрируема по Риману. Далее, встает вопрос - как обобщить кратный интеграл на произвольное плоское множество? Можно воспользоваться двумя равносильными подходами:

1. Пусть $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$

$$\overline{f} = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin E \\ f(x, y), & \text{otherwise} \end{cases}$$

Так как E - ограничено, его можно поместить в прямоугольник Π и тогда:

$$\iint\limits_E f \stackrel{\text{def}}{=} \iint\limits_\Pi \overline{f}$$

Если $f \equiv 1$ на E то тогда $\iint\limits_E f = \lambda E$