Математический анализ 4 семестр

shared with ♡ by artemZholus

Содержание

1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение (Колебание на отрезке)**.**
$\omega(f,c,d) = \sup\limits_{[c,d]} f - \inf\limits_{[c,d]} f =$ (по лемме из 1го семестра) $= \sup\limits_{x',x''\in[c,d]} |f(x') - f(x'')|$

Определение (Колебание функции в точке)**.**
$\omega(f,x) = \lim\limits_{\delta\to 0} \omega(f, x+\delta, x-\delta)$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если $0 < \delta_1 < \delta_2$ то $\omega(f, x-\delta_1, x+\delta_1) < \omega(f, x-\delta_2, x+\delta_2)$. Поэтому, вышеприведенный предел существует.

Утверждение 1.1. $\omega(f,x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

Доказательство.

1. $\Leftarrow$ Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего sup и inf. Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.
2. $\Rightarrow$ $\omega(f,x) = 0$ означает, что можно подобрать такую $\delta-$окрестность для x, что она будет сколь угодно малой. Берем формулу $\sup\limits_{x',x''\in[x-\delta,x+\delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$ фиксируем $x'' = x$ (от этого sup разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в x.

$\square$

Определение. τ : - разбиение отрезка $[a,b]$, если $\tau = \{x_j\} :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

Ведем кусочно-постоянную функию $g(\tau, x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$, при $x \in [x_j, x_{j+1}]$

Утверждение 1.2. $g(\tau_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega(f,x)$ *почти всюду на отрезке*

Доказательство. Очевидно, мы можем подбирать τ_n так, чтобы границы отрезка, содержащего x совпали с границами из определения $\omega(f,x)$. Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду $\square$

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int\limits_{[a,b]} g(\tau_n, x)dx \to \int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна $\int\limits_{[a,b]} g(\tau_n,x)dx = \omega(f,\tau_n)$. Получаем:

$$\lim_{rang\tau_n\to 0} \omega(f,\tau_n) = \int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx$$

Это наша рабочая формула.

Теорема 1.3 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.**
$f \in \Re(a,b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$
   Пусть $\omega(f,x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx = 0 \ \Rightarrow f \in \Re[a,b]$
2. $\Leftarrow$
   Пусть $f \in \Re[a,b]$. Тогда, по определению, $\omega(f,\tau_n) \to 0$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx = 0$. Но $\omega(f,x) \geqslant 0$. Значит $\omega(f,x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$ (И, по лемме, почти всюду непрерывна).

$\square$

2 Суммируемые функции

2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера μ - полная и σ-конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что $E \in \mathcal{A}$, $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ на E.

Определение. $e \subset E$ называется допустимым для f если:

1. $\mu(e) < +\infty$
2. f - ограничена на e

Утверждение 2.1. *Непустые допустимые множества существуют.*

Доказательство. Пусть $E_n = E(n < f(x) \leqslant n+1)$. Понятно, что $E = \bigcup\limits_n E_n$. По σ-конечности $X = \bigcup\limits_m X_m$, причем X_m - конечномерны. Тогда $E = \bigcup\limits_{n,m} E_n X_m$ - допустимые множества. Если они все пустые, то E, тоже пусто. Значит среди них хотя бы ожно непустое. □

Определение (Несобственный интеграл Лебега)**.** $\int\limits_E f d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{e-\text{допустимо}} \int\limits_e f d\mu$

Определение (Суммируемая функция)**.** Функция f называется суммируемой на множестве E, если $\int\limits_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если $\mu E < +\infty$, $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{e \subset E} \int\limits_e f d\mu$.

Проверим аддитивность и линейность.

Теорема 2.2 (σ-аддитивность несобственного интеграла Лебега)**.**
Пусть $E = \bigcup\limits_n E_n$ *- дизъюнктны. Тогда* $\int\limits_E f = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом σ-аддитивность

Доказательство.

1. Пусть $E = E_1 \cup E_2$.Пусть $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ - допустимые. И любое допустимое для E множество $e = e_1 \cup e_2$. Для определенного интеграла мы знаем, что $\int\limits_e f = \int\limits_{e_1} f + \int\limits_{e_2} f \leqslant \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$

   Переходя к sup по e получаем $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$

   В обратную сторону. Считаем, что f - суммируема (иначе все тривиально). По определению sup, $\forall \varepsilon > 0\, \exists e_j \subset E_j : \int\limits_{E_j} f - \varepsilon < \int\limits_{e_j} f$.

   $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_1} f - 2\varepsilon < \int\limits_{e_1} f + \int\limits_{e_2} f = \int\limits_e f \leqslant \int\limits_E f$. Устремив $\varepsilon \to 0$ получим $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f \leqslant \int\limits_E f$.

   Значит $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f = \int\limits_E f$

2. Итак, пусть $e = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} e_n$. Очевидно $\int\limits_{e_n} f \leqslant \int\limits_{E_n} f$ и $\int\limits_e f = \sum\limits_n \int\limits_{e_n} f$. Значит $\int\limits_E f \leqslant \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$.

   Обратно. $\forall \varepsilon > 0\, \exists e_n \subset E_n$:

   $\int\limits_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int\limits_{e_n} f$. Сложим первые p неравенств:$\sum\limits_1^p \int\limits_{E_n} f - \varepsilon \sum\limits_1^p \frac{1}{2^n} < \sum\limits_1^p \int\limits_{e_n} f \leqslant \int\limits_E f$. Устремляя $p \to +\infty$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{E_n} f - \varepsilon \leqslant \int\limits_E f$. Теперь устремим $\varepsilon \to 0$ и получим обратное неравенство.

□

Теорема 2.3 (Линейность несобственного интеграла Лебега)**.**

1. $\int\limits_E \alpha f = \alpha \int\limits_E f, \ \ \alpha > 0$

2. $\int\limits_E (f+g) = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

Доказательство. Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть $E_n = E(n < f + g \leqslant n+1)$. Тогда, очевидно, $E = \bigcup\limits_n E_n$. По σ-конечности можно написать $X = \bigcup\limits_n X_n$. От X_n мы хотим дизъюнктности, поэтому, если они не таковы, то проделаем следующий трюк:
$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup\limits_1^{n-1} X_j) \cup \dots$. Теперь E можно разбить как $E = \bigcup\limits_{n,m} E_n X_m$ - эти множества дизъюнктны и допустимы для $f+g$. Далее по σ-аддитивности пишем: $\int\limits_E (f+g) = \sum\limits_n \int\limits_{A_n} (f+g) =$ (по линейности определенного интеграла) $= \sum\limits_n \int\limits_{A_n} f + \sum\limits_n \int\limits_{A_n} g =$ (по σ-аддитивности несобственного) $= \int\limits_E f + \int\limits_E g$ □

Утверждение 2.4. *Если* $0 \leqslant f \leqslant g$, *то* $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$

Доказательство. **TODO** □

2.2 Суммируемые функции произвольного знака

TODO