

Математический анализ 4 семестр

shared with ♡ by artemZholus

Содержание

1	Критерий Лебега интегрируемости по Риману	2
2	Суммируемые функции	3
2.1	Неотрицательные суммируемые функции	3
2.2	Суммируемые функции произвольного знака	4
3	Предельный переход в классе суммируемых функций	6

1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение (Колебание на отрезке).

$$\omega(f, c, d) = \sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f = (\text{по лемме из 1го семестра}) = \sup_{x', x'' \in [c,d]} |f(x') - f(x'')|$$

Определение (Колебание функции в точке).

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, x + \delta, x - \delta)$$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если $0 < \delta_1 < \delta_2$ то $\omega(f, x - \delta_1, x + \delta_1) < \omega(f, x - \delta_2, x + \delta_2)$. Поэтому, вышеприведенный предел существует.

Утверждение 1.1. $\omega(f, x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

Доказательство. 1. \Leftarrow Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего \sup и \inf . Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.

2. $\Rightarrow \omega(f, x) = 0$ означает, что можно подобрать такую δ -окрестность для x , что она будет сколь угодно малой. Берем формулу $\sup_{x', x'' \in [x-\delta, x+\delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$ фиксируем $x'' = x$ (от этого \sup разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в x . □

Определение. τ : - разбиение отрезка $[a, b]$, если $\tau = \{x_j\} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Ведем кусочно-постоянную функцию $g(\tau, x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$, при $x \in [x_j, x_{j+1}]$

Утверждение 1.2. $g(\tau_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega(f, x)$ почти всюду на отрезке

Доказательство. Очевидно, мы можем подбирать τ_n так, чтобы границы отрезка, содержащего x совпали с границами из определения $\omega(f, x)$. Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду □

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int_{[a,b]} g(\tau_n, x) dx \rightarrow \int_{[a,b]} \omega(f, x) dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна $\int_{[a,b]} g(\tau_n, x) dx = \omega(f, \tau_n)$. Получаем:

$$\lim_{rang \tau_n \rightarrow 0} \omega(f, \tau_n) = \int_{[a,b]} \omega(f, x) dx$$

Это наша рабочая формула.

Теорема 1.3 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$$f \in \mathfrak{R}(a, b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$$

Доказательство. 1. \Rightarrow

Пусть $\omega(f, x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Тогда $\int_{[a,b]} \omega(f, x) dx = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{R}[a, b]$

2. \Leftarrow

Пусть $f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Тогда, по определению, $\omega(f, \tau_n) \rightarrow 0$. Тогда $\int_{[a,b]} \omega(f, x) dx = 0$. Но $\omega(f, x) \geq 0$. Значит $\omega(f, x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ (И, по лемме, почти всюду непрерывна). □

2 Суммируемые функции

2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера μ - полная и σ -конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что $E \in \mathcal{A}$, $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ на E .

Определение. $e \subset E$ называется допустимым для f если:

1. $\mu(e) < +\infty$
2. f - ограничена на e

Утверждение 2.1. *Непустые допустимые множества существуют.*

Доказательство. Пусть $E_n = E(n < f(x) \leq n + 1)$. Понятно, что $E = \bigcup_n E_n$. По σ -конечности $X = \bigcup_m X_m$, причем X_m - конечномерны. Тогда $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$ - допустимые множества. Если они все пустые, то E , тоже пусто. Значит среди них хотя бы одно непустое. \square

Определение (Несобственный интеграл Лебега).

$$\int_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{e \text{ - допустимо}} \int_e f d\mu$$

Определение (Неотрицательная суммируемая функция). Неотрицательная функция f называется суммируемой на множестве E , если $\int_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если $\mu E < +\infty$, $f(x) \geq 0$, то $\int_E f d\mu = \sup_{e \subset E} \int_e f d\mu$.

Проверим аддитивность и линейность.

Теорема 2.2 (σ -аддитивность несобственного интеграла Лебега).

Пусть $E = \bigcup_n E_n$ - дизъюнкты. Тогда $\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом σ -аддитивность

Доказательство. 1. Пусть $E = E_1 \cup E_2$. Пусть $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ - допустимые. И любое допустимое для E множество $e = e_1 \cup e_2$. Для определенного интеграла мы знаем, что $\int_e f = \int_{e_1} f + \int_{e_2} f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Переходя к \sup по e получаем $\int_E f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

В обратную сторону. Считаем, что f - суммируема (иначе все тривиально). По определению \sup , $\forall \varepsilon > 0 \exists e_j \subset E_j : \int_{e_j} f - \varepsilon < \int_{E_j} f$.

$\int_{E_1} f + \int_{E_2} f - 2\varepsilon < \int_{e_1} f + \int_{e_2} f = \int_e f \leq \int_E f$. Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$ получим $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f \leq \int_E f$.

Значит $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f = \int_E f$

2. Итак, пусть $e = \bigcup_{n=1}^{+\infty} e_n$. Очевидно $\int_{e_n} f \leq \int_{E_n} f$ и $\int_e f = \sum_n \int_{e_n} f$. Значит $\int_e f \leq \sum_n \int_{E_n} f$.

Обратно. $\forall \varepsilon > 0 \exists e_n \subset E_n :$

$\int_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int_{e_n} f$. Сложим первые p неравенств: $\sum_{n=1}^p \int_{E_n} f - \varepsilon \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n} < \sum_{n=1}^p \int_{e_n} f \leq \int_E f$. Устремляя $p \rightarrow +\infty$,

получаем $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f - \varepsilon \leq \int_E f$. Теперь устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим обратное неравенство.

\square

Теорема 2.3 (Линейность несобственного интеграла Лебега).

$$1. \int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \quad \alpha > 0$$

$$2. \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство. Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть $E_n = E(n < f + g \leq n + 1)$. Тогда, очевидно, $E = \bigcup_n E_n$. По σ -конечности можно написать $X = \bigcup_n X_n$. От X_n мы хотим дизъюнктности, поэтому, если они не таковы, то проделаем следующий трюк:

$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup_1^{n-1} X_j) \cup \dots$. Теперь E можно разбить как $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$ - эти множества дизъюнктны и допустимы для $f + g$. Далее по σ -аддитивности пишем: $\int_E (f + g) = \sum_n \int_{A_n} (f + g) =$ (по линейности определенного интеграла) $= \sum_n \int_{A_n} f + \sum_n \int_{A_n} g =$ (по σ -аддитивности несобственного) $= \int_E f + \int_E g$ \square

Утверждение 2.4. Если $0 \leq f \leq g$, то $\int_E f \leq \int_E g$

Доказательство. $0 \leq g - f$ - по арифметике измеримости, эта функция суммируема. Раз она неотрицательна, интеграл от нее тоже.

$$0 \leq \int_E g - f = \int_E g - \int_E f \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$$

\square

2.2 Суммируемые функции произвольного знака

Определение.

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , f(x) < 0 \\ f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. f^+ и f^- - неотрицательные суммируемые функции (если f - измерима).

Определение. f называется суммируемой на E , если одновременно f^+ и f^- - суммируемы.

$$\int_E f \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Утверждение 2.5. f - суммируема $\Leftrightarrow |f|$ - суммируема.

Доказательство. f - суммируема тогда и только тогда когда f^+ и f^- - суммируемы. $|f|$ - суммируема тогда и только тогда, когда f^+ и f^- - суммируемы. \square

Проверим σ -аддитивность и линейность для случая функции произвольного знака:

Теорема 2.6 (Аддитивность в случае произвольного знака). Пусть $E = \bigcup_n E_n$ - дизъюнктные, тогда

$$\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$$

Доказательство. $\int_E f^+ = \sum_n \int_{E_n} f^+$, то же для f^- . Тогда $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_n \int_{E_n} f^+ - \sum_n \int_{E_n} f^- = \sum_n (\int_{E_n} f^+ - \int_{E_n} f^-) = \sum_n \int_{E_n} f$ \square

Теорема 2.7 (Линейность в случае произвольного знака).

$$1. \int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство. Пункт 1 очевиден, не будем на нем останавливаться. Докажем пункт 2:

$$\int_E f + \int_E g = \left(\int_E f^+ - \int_E f^- \right) + \left(\int_E g^+ - \int_E g^- \right) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) = (*) = \int_E (f+g)^+ - \int_E (f+g)^- = \int_E (f+g)$$

Проверим переход (*). Для этого нужно, чтобы выполнялось $(f^+ + g^+) = (f + g)^+$ - в общем случае, это неправда. Поэтому нужно рассмотреть много случаев:

1. $f \geq 0, g \geq 0 \Rightarrow$ пусть $E_1 = E(f \geq 0, g \geq 0)$
2. $f \leq 0, g \leq 0 \Rightarrow$ пусть $E_2 = E(f \leq 0, g \leq 0)$
3. $f \geq 0, g \leq 0 \Rightarrow$ тут нужно различить два подслучая:
 - (a) $f + g \geq 0 \Rightarrow$ пусть $E_3 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g \geq 0)$
 - (b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_4 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g < 0)$
4. $f \leq 0, g \geq 0 \Rightarrow$ аналогично, два подслучая:
 - (a) $f + g \geq 0 \Rightarrow$ пусть $E_5 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g \geq 0)$
 - (b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_6 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g < 0)$

Очевидно, эти множества дизъюнктны (на 0 забьем) и можно написать: $\int_E f = \sum_{j=1}^6 \int_{E_j} f$. Дальше идет нудный разбор случаев, я потом напишу **TODO** \square

3 Пределный переход в классе суммируемых функций

Теорема 3.1 (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть $f_n \Rightarrow f$ на E , $|f_n| \leq \phi$ на E , ϕ - суммируема.

Тогда:

1. f - суммируема

2. $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$

Следует иметь ввиду, что в условии теоремы достаточно требовать выполнения свойств почти всюду.

Теорема 3.2. Пусть f - суммируема на E . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E' \subset E \Rightarrow \mu E' < \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| < \varepsilon$