Математический анализ 4 семестр

shared with ♡ by artemZholus

Содержание

1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение (Колебание на отрезке)**.**

$$\omega(f,c,d) = \sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f = (\text{по лемме из 1го семестра}) = \sup_{x',x''\in[c,d]} |f(x') - f(x'')|$$

Определение (Колебание функции в точке)**.**

$$\omega(f,x) = \lim_{\delta\to 0} \omega(f, x+\delta, x-\delta)$$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если $0 < \delta_1 < \delta_2$ то $\omega(f, x-\delta_1, x+\delta_1) < \omega(f, x-\delta_2, x+\delta_2)$. Поэтому, вышеприведенный предел существует.

Утверждение 1.1. $\omega(f,x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

Доказательство.

1. $\Leftarrow$ Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего sup и inf. Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.
2. $\Rightarrow$ $\omega(f,x) = 0$ означает, что можно подобрать такую $\delta-$окрестность для x, что она будет сколь угодно малой. Берем формулу $\sup\limits_{x',x''\in[x-\delta,x+\delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$ фиксируем $x'' = x$ (от этого sup разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в x.

□

Определение. τ : - разбиение отрезка $[a,b]$, если $\tau = \{x_j\} : \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Ведем кусочно-постоянную функцию $g(\tau, x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$, при $x \in [x_j, x_{j+1}]$

Утверждение 1.2. $g(\tau_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega(f,x)$ *почти всюду на отрезке*

Доказательство. Очевидно, мы можем подбирать τ_n так, чтобы границы отрезка, содержащего x совпали с границами из определения $\omega(f,x)$. Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду □

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int\limits_{[a,b]} g(\tau_n, x)dx \to \int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна $\int\limits_{[a,b]} g(\tau_n, x)dx = \omega(f, \tau_n)$. Получаем:

$$\lim_{rang\tau_n\to 0} \omega(f,\tau_n) = \int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx$$

Это наша рабочая формула.

Теорема 1.3 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману)**.**
$f \in \Re(a,b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$

Доказательство.

1. $\Rightarrow$
   Пусть $\omega(f,x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx = 0 \ \Rightarrow f \in \Re[a,b]$
2. $\Leftarrow$
   Пусть $f \in \Re[a,b]$. Тогда, по определению, $\omega(f,\tau_n) \to 0$. Тогда $\int\limits_{[a,b]} \omega(f,x)dx = 0$. Но $\omega(f,x) \geqslant 0$. Значит $\omega(f,x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$ (И, по лемме, почти всюду непрерывна).

□

2 Суммируемые функции

2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера μ - полная и σ-конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что $E \in \mathcal{A}$, $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ на E.

Определение. $e \subset E$ называется допустимым для f если:

1. $\mu(e) < +\infty$
2. f - ограничена на e

Утверждение 2.1. *Непустые допустимые множества существуют.*

Доказательство. Пусть $E_n = E(n < f(x) \leqslant n+1)$. Понятно, что $E = \bigcup\limits_n E_n$. По σ-конечности $X = \bigcup\limits_m X_m$, причем X_m - конечномерны. Тогда $E = \bigcup\limits_{n,m} E_n X_m$ - допустимые множества. Если они все пустые, то E, тоже пусто. Значит среди них хотя бы ожно непустое. $\square$

Определение (Несобственный интеграл Лебега)**.**

$$\int\limits_E f d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup_{e-\text{допустимо}} \int\limits_e f d\mu$$

Определение (Неотрицательная суммируемая функция)**.** Неотрицательная функция f называется суммируемой на множестве E, если $\int\limits_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если $\mu E < +\infty$, $f(x) \geqslant 0$, то $\int\limits_E f d\mu = \sup\limits_{e \subset E} \int\limits_e f d\mu$.

Проверим аддитивность и линейность.

Теорема 2.2 (σ-аддитивность несобственного интеграла Лебега)**.**
Пусть $E = \bigcup\limits_n E_n$ *- дизъюнктны. Тогда* $\int\limits_E f = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом σ-аддитивность

Доказательство.

1. Пусть $E = E_1 \cup E_2$.Пусть $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ - допустимые. И любое допустимое для E множество $e = e_1 \cup e_2$. Для определенного интеграла мы знаем, что $\int\limits_e f = \int\limits_{e_1} f + \int\limits_{e_2} f \leqslant \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$
   Переходя к sup по e получаем $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f$
   В обратную сторону. Считаем, что f - суммируема (иначе все тривиально). По определению sup, $\forall \varepsilon > 0\, \exists e_j \subset E_j : \int\limits_{E_j} f - \varepsilon < \int\limits_{e_j} f$.
   $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_1} f - 2\varepsilon < \int\limits_{e_1} f + \int\limits_{e_2} f = \int\limits_e f \leqslant \int\limits_E f$. Устремив $\varepsilon \to 0$ получим $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f \leqslant \int\limits_E f$.
   Значит $\int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f = \int\limits_E f$

2. Итак, пусть $e = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} e_n$. Очевидно $\int\limits_{e_n} f \leqslant \int\limits_{E_n} f$ и $\int\limits_e f = \sum\limits_n \int\limits_{e_n} f$. Значит $\int\limits_E f \leqslant \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$.
   Обратно. $\forall \varepsilon > 0\, \exists e_n \subset E_n$:
   $\int\limits_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int\limits_{e_n} f$. Сложим первые p неравенств:$\sum\limits_1^p \int\limits_{E_n} f - \varepsilon \sum\limits_1^p \frac{1}{2^n} < \sum\limits_1^p \int\limits_{e_n} f \leqslant \int\limits_E f$. Устремляя $p \to +\infty$, получаем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{E_n} f - \varepsilon \leqslant \int\limits_E f$. Теперь устремим $\varepsilon \to 0$ и получим обратное неравенство.

$\square$

Теорема 2.3 (Линейность несобственного интеграла Лебега)**.**

1. $\int\limits_E \alpha f = \alpha \int\limits_E f,\ \ \alpha > 0$
2. $\int\limits_E (f+g) = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

Доказательство. Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть $E_n = E(n < f+g \leqslant n+1)$. Тогда, очевидно, $E = \bigcup\limits_n E_n$. По σ-конечности можно написать $X = \bigcup\limits_n X_n$. От X_n мы хотим дизъюнктности, поэтому, если они не таковы, то проделаем следующий трюк:
$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup\limits_1^{n-1} X_j) \cup \dots$. Теперь E можно разбить как $E = \bigcup\limits_{n,m} E_n X_m$ - эти множества дизъюнктны и допустимы для $f+g$. Далее по σ-аддитивности пишем: $\int\limits_E (f+g) = \sum\limits_n \int\limits_{A_n} (f+g) =$ (по линейности определенного интеграла) $= \sum\limits_n \int\limits_{A_n} f + \sum\limits_n \int\limits_{A_n} g =$(по σ-аддитивности несобственного)$= \int\limits_E f + \int\limits_E g$ □

Утверждение 2.4. *Если* $0 \leqslant f \leqslant g$, *то* $\int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$

Доказательство. $0 \leqslant g - f$ - по арифметике измеримости, эта функция суммируема. Раз она неотрицательна, интеграл от нее тоже.

$$0 \leqslant \int\limits_E g - f = \int\limits_E g - \int\limits_E f \ \Rightarrow \int\limits_E f \leqslant \int\limits_E g$$

□

2.2 Суммируемые функции произвольного знака

Определение.

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , f(x) < 0 \\ f(x) & , f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Заметим, что $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. f^+ и f^- - неотрицательные суммируемые функции (если f - измерима).

Определение. f называется суммируемой на E, если одновременно f^+ и f^- - суммируемы.

$$\int\limits_E f \overset{\text{def}}{=} \int\limits_E f^+ - \int\limits_E f^-$$

Утверждение 2.5. f - *суммируема* $\Leftrightarrow |f|$ - *суммируема.*

Доказательство. f - суммируема тогда и только тогда когда f^+ и f^- - суммируемы. $|f|$ - суммируема тогда и только тогда, когда f^+ и f^- - суммируемы. □

Аналогом суммируемости функций служит абсолютная сходимость.

Проверим σ-аддитивность и линейность для случая функции произвольного знака:

Теорема 2.6 (Аддитивность в случае произвольного знака)**.** *Пусть* $E = \bigcup\limits_n E_n$ *- дизъюнктные, тогда* $\int\limits_E f = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$

Доказательство. $\int\limits_E f^+ = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f^+$, то же для f^-. Тогда $\int\limits_E f = \int\limits_E f^+ - \int\limits_E f^- = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f^+ - \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f^- = \sum\limits_n (\int\limits_{E_n} f^+ - f^-) = \sum\limits_n \int\limits_{E_n} f$ □

Теорема 2.7 (Линейность в случае произвольного знака)**.**

1. $\int\limits_E \alpha f = \alpha \int\limits_E f,\ \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\int\limits_E (f+g) = \int\limits_E f + \int\limits_E g$

Доказательство. Пункт 1 очевиден, не будем на нем останавливаться. Докажем пункт 2:

$$\int\limits_E f + \int\limits_E g = (\int\limits_E f^+ + \int\limits_E g^+) - (\int\limits_E f^- + \int\limits_E g^-) = \int\limits_E (f^+ + g^+) - \int\limits_E (f^- + g^-) = (*) = \int\limits_E (f+g)^+ - \int\limits_E (f+g)^- = \int\limits_E (f+g)$$

Проверим переход $(*)$. Для этого нужно, чтобы выполнялось $(f^+ + g^+) = (f+g)^+$ - в общем случае, это неправда. Поэтому нужно рассмотреть много случаев:

1. $f \geqslant 0,\ g \geqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_1 = E(f \geqslant 0,\ g \geqslant 0)$
2. $f \leqslant 0,\ g \leqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_2 = E(f \leqslant 0,\ g \leqslant 0)$
3. $f \geqslant 0,\ g \leqslant 0 \Rightarrow$ тут нужно различить два подслучая:
   (a) $f + g \geqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_3 = E(f \geqslant 0,\ g \leqslant 0, f + g \geqslant 0)$
   (b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_4 = E(f \geqslant 0,\ g \leqslant 0, f + g < 0)$
4. $f \leqslant 0,\ g \geqslant 0 \Rightarrow$ аналогично, два подслучая:
   (a) $f + g \geqslant 0 \Rightarrow$ пусть $E_5 = E(f \leqslant 0,\ g \geqslant 0, f + g \geqslant 0)$
   (b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_6 = E(f \leqslant 0,\ g \geqslant 0, f + g < 0)$

Очевидно, эти множества дизъюнктны (на 0 забьем) и можно написать: $\int\limits_E f = \sum\limits_1^6 \int\limits_{E_j} f$. Дальше идет нудный разбор случаев, я потом напишу **TODO** □

3 Предельный переход в классе суммируемых функций

3.1 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Теорема 3.1 (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости). *Пусть* $f_n \rightrightarrows f$ *на* E, $|f_n| \leqslant \phi$ *на* E, ϕ *- суммируема.*
Тогда:

1. f *- суммируема*
2. $\int\limits_E f_n \to \int\limits_E f$

Следует иметь ввиду, что в условии теоремы достаточно требовать выполнения свойств почти всюду.

Теорема 3.2. *Пусть* f *- суммируема на* E. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall E' \subset E \Rightarrow \mu E' < \delta \Rightarrow |\int\limits_{E'} f| < \varepsilon$

Доказательство. По определению, можно написать $\forall \varepsilon > 0\ \exists e : \int\limits_{E \setminus e} |f| < \varepsilon$. Так как e - допустимо, f - ограничена на e и $E = (E \setminus e) \cup e$. Возьмем любое $E' \subset E$, тогда $E' = E'(E \setminus e) \cup E'e$.

$$\left|\int\limits_{E'} f\right| \leqslant \left|\int\limits_{E'(E \setminus e)} f\right| + \left|\int\limits_{E'e} f\right| \leqslant \varepsilon + \left|\int\limits_{E'e} f\right|$$

Мы считаем, что $|f(x)| \leqslant M$. Заметим, что выбор E' не накладывал никаких ограничений на M. Тогда:

$$\int\limits_{E'e} |f| \leqslant M \mu E'e \leqslant M \mu E'$$

Поэтому δ мы можем выбрать как $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. И получится, что $\mu E' \leqslant \delta \Rightarrow \left|\int\limits_{E'} f\right| \leqslant 2\varepsilon$ □

Доказательство теоремы Лебега. По теореме Рисса $f_{n_k} \to f$ почти всюду, причем $|f_{n_k}(x)| \leqslant \phi(x)$, занчит $|f(x)| \leqslant \phi(x) \Rightarrow f-$ суммируема. Рассмотрим $\left|\int\limits_E f_n - \int\limits_E f\right| \leqslant \int\limits_E |f_n - f|$. Так как ϕ - суммируема, $\forall \varepsilon > 0\ \exists e$(допустимое для ϕ) : $\int\limits_{E \setminus e} \phi \leqslant \varepsilon$

$$\int\limits_E |f_n - f| = \int\limits_{E \setminus e} |f_n - f| + \int\limits_e |f_n - f| \leqslant 2\varepsilon + \int\limits_e |f_n - f|$$

Пусть $|\phi| \leqslant M \Rightarrow |f_n - f| \leqslant 2M$. Так же мы знаем, что $\int\limits_e |f_n - f| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Значит, начиная с некоторого N_0, $\int\limits_e |f_n - f| < \varepsilon$. Следовательно, начиная с N_0, $\int\limits_E |f_n - f| \leqslant 3\varepsilon$ □

3.2 Теорема Леви

Теорема 3.3 (Теорема Леви)**.** *Пусть* $f_n(x) \leqslant 0$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ *на* E. *Тогда* $\int\limits_E f_n \to \int\limits_E f$

Доказательство. $\square$