

# Математический анализ 4 семестр

Конспект лекций Додонова Н. Ю.

shared with ♥ by artemZholus

## Содержание

<b>1</b>	<b>Критерий Лебега интегрируемости по Риману</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Суммируемые функции</b>	<b>3</b>
2.1	Неотрицательные суммируемые функции . . . . .	3
2.2	Суммируемые функции произвольного знака . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Предельный переход в классе суммируемых функций</b>	<b>6</b>
3.1	Теорема Лебега о мажорируемой сходимости . . . . .	6
3.2	Теорема Леви . . . . .	7
3.3	Теорема Фату . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Пространства <math>L_p</math></b>	<b>9</b>
4.1	Неравенство Гельдера . . . . .	9
4.2	Неравенство Минковского . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Мера подграфика</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Теорема Фубини</b>	<b>13</b>
<b>7</b>	<b>О многократных интегралах Римана</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Криволинейные интегралы</b>	<b>14</b>
8.1	Определение . . . . .	14
8.2	Вычисление криволинейных интегралов первого рода . . . . .	15
8.3	Вычисление криволинейных интегралов второго рода . . . . .	15
8.4	Формула Грина . . . . .	16
<b>9</b>	<b>Поверхностные интегралы</b>	<b>18</b>
9.1	Поверхностный интеграл первого рода . . . . .	18
9.2	Поверхностный интеграл второго рода . . . . .	19
<b>10</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>20</b>
10.1	Определение ряда Фурье . . . . .	20
10.2	Интеграл Дирихле . . . . .	22
10.3	Лемма Римана-Лебега . . . . .	23
10.4	Принцип локализации Римана . . . . .	24
10.5	Теорема Фейера . . . . .	25
10.6	Теорема Фейера в $L_p$ . . . . .	26
10.7	Сходимость ряда Фурье в индивидуальных точках . . . . .	28

# 1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

**Определение** (Колебание на отрезке).

$$\omega(f, c, d) = \sup_{[c, d]} f - \inf_{[c, d]} f = (\text{по лемме из 1го семестра}) = \sup_{x', x'' \in [c, d]} |f(x') - f(x'')|$$

**Определение** (Колебание функции в точке).

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, x + \delta, x - \delta)$$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если  $0 < \delta_1 < \delta_2$  то  $\omega(f, x - \delta_1, x + \delta_1) < \omega(f, x - \delta_2, x + \delta_2)$ . Поэтому, вышеприведенный предел существует.

**Утверждение 1.1.**  $\omega(f, x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

*Доказательство.* 1.  $\Leftarrow$  Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего  $\sup$  и  $\inf$ . Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.

2.  $\Rightarrow \omega(f, x) = 0$  означает, что можно подобрать такую  $\delta$ -окрестность для  $x$ , что она будет сколь угодно малой. Берем формулу  $\sup_{x', x'' \in [x - \delta, x + \delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$  фиксируем  $x'' = x$  (от этого  $\sup$  разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в  $x$ . □

**Определение.**  $\tau$  : - разбиение отрезка  $[a, b]$ , если  $\tau = \{x_j\} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Ведem кусочно-постоянную функцию  $g(\tau, x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$ , при  $x \in [x_j, x_{j+1}]$

**Утверждение 1.2.**  $g(\tau_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega(f, x)$  почти всюду на отрезке

*Доказательство.* Очевидно, мы можем подбирать  $\tau_n$  так, чтобы границы отрезка, содержащего  $x$  совпали с границами из определения  $\omega(f, x)$ . Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду □

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int_{[a, b]} g(\tau_n, x) dx \rightarrow \int_{[a, b]} \omega(f, x) dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна  $\int_{[a, b]} g(\tau_n, x) dx = \omega(f, \tau_n)$ . Получаем:

$$\lim_{rang \tau_n \rightarrow 0} \omega(f, \tau_n) = \int_{[a, b]} \omega(f, x) dx$$

Это наша рабочая формула.

**Теорема 1.3** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$$f \in \mathfrak{R}(a, b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$$

*Доказательство.* 1.  $\Rightarrow$

Пусть  $\omega(f, x) = 0$  почти всюду на  $[a, b]$ . Тогда  $\int_{[a, b]} \omega(f, x) dx = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{R}[a, b]$  (Напрямую следует из утверждения 1.2)

2.  $\Leftarrow$

Пусть  $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ . Тогда, по определению,  $\omega(f, \tau_n) \rightarrow 0$ . Тогда  $\int_{[a, b]} \omega(f, x) dx = 0$ . Но  $\omega(f, x) \geq 0$ . Значит  $\omega(f, x) = 0$  почти всюду на  $[a, b]$  (И, по лемме, почти всюду непрерывна). □

## 2 Суммируемые функции

### 2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера  $\mu$  - полная и  $\sigma$ -конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что  $E \in \mathcal{A}$ ,  $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $E$ .

**Определение.**  $e \subset E$  называется допустимым для  $f$  если:

1.  $\mu(e) < +\infty$
2.  $f$  - ограничена на  $e$

**Утверждение 2.1.** *Непустые допустимые множества существуют.*

*Доказательство.* Пусть  $E_n = E(n < f(x) \leq n + 1)$ . Понятно, что  $E = \bigcup_n E_n$ . По  $\sigma$ -конечности  $X = \bigcup_m X_m$ , причем  $X_m$  - конечномерны. Тогда  $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$  - допустимые множества. Если они все пустые, то  $E$ , тоже пусто. Значит среди них хотя бы одно непустое.  $\square$

**Определение** (Несобственный интеграл Лебега).

$$\int_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{e \text{ - допустимо}} \int_e f d\mu$$

**Определение** (Неотрицательная суммируемая функция). Неотрицательная функция  $f$  называется суммируемой на множестве  $E$ , если  $\int_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если  $\mu E < +\infty$ ,  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_E f d\mu = \sup_{e \subset E} \int_e f d\mu$ .

Проверим аддитивность и линейность.

**Теорема 2.2** ( $\sigma$ -аддитивность несобственного интеграла Лебега).

Пусть  $E = \bigcup_n E_n$  - дизъюнктивны. Тогда  $\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом  $\sigma$ -аддитивность

*Доказательство.* 1. Пусть  $E = E_1 \cup E_2$ . Пусть  $e_1 \in E_1$ ,  $e_2 \in E_2$  - допустимые. И любое допустимое для  $E$  множество  $e = e_1 \cup e_2$ . Для определенного интеграла мы знаем, что  $\int_e f = \int_{e_1} f + \int_{e_2} f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Переходя к  $\sup$  по  $e$  получаем  $\int_E f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

В обратную сторону. Считаем, что  $f$  - суммируема (иначе все тривиально). По определению  $\sup$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists e_j \subset E_j : \int_{e_j} f - \varepsilon < \int_{E_j} f$ .

$\int_{E_1} f + \int_{E_2} f - 2\varepsilon < \int_{e_1} f + \int_{e_2} f = \int_e f \leq \int_E f$ . Устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим  $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f \leq \int_E f$ .

Значит  $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f = \int_E f$

2. Итак, пусть  $e = \bigcup_{n=1}^{+\infty} e_n$ . Очевидно  $\int_{e_n} f \leq \int_{E_n} f$  и  $\int_e f = \sum_n \int_{e_n} f$ . Значит  $\int_e f \leq \sum_n \int_{E_n} f$ .

Обратно.  $\forall \varepsilon > 0 \exists e_n \subset E_n$  :

$\int_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int_{e_n} f$ . Сложим первые  $p$  неравенств:  $\sum_{n=1}^p \int_{E_n} f - \varepsilon < \sum_{n=1}^p \int_{e_n} f \leq \int_e f$ . Устремляя  $p \rightarrow +\infty$ ,

получаем  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f - \varepsilon \leq \int_e f$ . Теперь устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим обратное неравенство.

$\square$

**Теорема 2.3** (Линейность несобственного интеграла Лебега).

1.  $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha > 0$
2.  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$

*Доказательство.* Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть  $E_n = E(n < f + g \leq n + 1)$ . Тогда, очевидно,  $E = \bigcup_n E_n$ . По  $\sigma$ -конечности можно написать  $X = \bigcup_n X_n$ . От  $X_n$  мы хотим дизъюнктивности, поэтому, если они не таковы, то сделаем следующий трюк:

$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup_1^{n-1} X_j) \cup \dots$ . Теперь  $E$  можно разбить как  $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$  - эти множества дизъюнктивны и допустимы для  $f + g$ . Далее по  $\sigma$ -аддитивности пишем:  $\int_E (f + g) = \sum_n \int_{A_n} (f + g) =$  (по линейности определенного интеграла)  $= \sum_n \int_{A_n} f + \sum_n \int_{A_n} g =$  (по  $\sigma$ -аддитивности несобственного)  $= \int_E f + \int_E g \quad \square$

**Утверждение 2.4.** Если  $0 \leq f \leq g$ , то  $\int_E f \leq \int_E g$

*Доказательство.*  $0 \leq g - f$  - по арифметике измеримости, эта функция суммируема. Раз она неотрицательна, интеграл от нее тоже.

$$0 \leq \int_E g - f = \int_E g - \int_E f \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$$

$\square$

## 2.2 Суммируемые функции произвольного знака

**Определение.**

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , f(x) < 0 \\ f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$ .  $f^+$  и  $f^-$  - неотрицательные суммируемые функции (если  $f$  - измерима).

**Определение.**  $f$  называется суммируемой на  $E$ , если одновременно  $f^+$  и  $f^-$  - суммируемы.

$$\int_E f \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f^+ - \int_E f^-$$

**Утверждение 2.5.**  $f$  - суммируема  $\Leftrightarrow |f|$  - суммируема.

*Доказательство.*  $f$  - суммируема тогда и только тогда, когда  $f^+$  и  $f^-$  - суммируемы.  $|f|$  - суммируема тогда и только тогда, когда  $f^+$  и  $f^-$  - суммируемы.  $\square$

Аналогом суммируемости функций служит абсолютная сходимость.

Проверим  $\sigma$ -аддитивность и линейность для случая функции произвольного знака:

**Теорема 2.6** (Аддитивность в случае произвольного знака). Пусть  $E = \bigcup_n E_n$  - дизъюнктивные, тогда

$$\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$$

*Доказательство.*  $\int_E f^+ = \sum_n \int_{E_n} f^+$ , то же для  $f^-$ . Тогда  $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_n \int_{E_n} f^+ - \sum_n \int_{E_n} f^- = \sum_n (\int_{E_n} f^+ - \int_{E_n} f^-) = \sum_n \int_{E_n} f$   $\square$

**Теорема 2.7** (Линейность в случае произвольного знака).

$$1. \int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

*Доказательство.* Пункт 1 очевиден, не будем на нем останавливаться. Докажем пункт 2:

$$\int_E f + \int_E g = \left( \int_E f^+ + \int_E g^+ \right) - \left( \int_E f^- + \int_E g^- \right) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) = (*) = \int_E (f+g)^+ - \int_E (f+g)^- = \int_E (f+g)$$

Проверим переход (\*). Для этого нужно, чтобы выполнялось  $(f^+ + g^+) = (f + g)^+$  - в общем случае, это неправда. Поэтому нужно рассмотреть много случаев:

1.  $f \geq 0, g \geq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_1 = E(f \geq 0, g \geq 0)$ , тогда

- $f^+ = f, g^+ = g, (f + g)^+ = f + g \Rightarrow f^+ + g^+ = f + g = (f + g)^+$
- $f^- = 0, g^- = 0, (f + g)^- = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0$

2.  $f \leq 0, g \leq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_2 = E(f \leq 0, g \leq 0)$ , разбираем аналогично пункту (1) - появятся минусы в формулах

В остальных случаях переход (\*) не верен, но под-интегральные функции можно перегруппировать по другому, например  $\int_E (f^+ - g^-) - \int_E (f^- - g^+) :$

3.  $f \geq 0, g \leq 0 \Rightarrow$  тут нужно различить два подслучая:

(a)  $f + g \geq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_3 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g \geq 0)$ , тогда

- $f^+ = f, g^- = -g, (f + g)^+ = f + g \Rightarrow f^+ - g^- = f + g = (f + g)^+$
- $f^- = 0, g^+ = 0, (f + g)^- = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$

(b)  $f + g < 0 \Rightarrow$  пусть  $E_4 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g < 0)$ , тогда

- $f^+ = f, g^- = -g, (f + g)^- = -(f + g) \Rightarrow -f^+ + g^- = -(f + g) = (f + g)^-$
- $f^- = 0, g^+ = 0, (f + g)^+ = 0 \Rightarrow -0 + 0 = 0$

4.  $f \leq 0, g \geq 0 \Rightarrow$  аналогично, два подслучая, разбор которых аналогичен пункту (3), если поменять  $f$  и  $g$  местами :

(a)  $f + g \geq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_5 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g \geq 0)$

(b)  $f + g < 0 \Rightarrow$  пусть  $E_6 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g < 0)$

Очевидно, эти множества дизъюнктивны (на 0 забудем) и можно написать:  $\int_E f = \sum_{j=1}^6 \int_{E_j} f$ .  $\square$

### 3 Пределный переход в классе суммируемых функций

#### 3.1 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

**Теорема 3.1** (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$ ,  $|f_n| \leq \phi$  на  $E$ ,  $\phi$  - суммируема.

Тогда:

1.  $f$  - суммируема

$$2. \int_E f_n \rightarrow \int_E f$$

Следует иметь в виду, что в условии теоремы достаточно требовать выполнения свойств почти всюду.

**Теорема 3.2.** Пусть  $f$  - суммируема на  $E$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E' \subset E \Rightarrow \mu E' < \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| < \varepsilon$

*Доказательство.* По определению, можно написать  $\forall \varepsilon > 0 \exists e : \int_{E \setminus e} |f| < \varepsilon$ . Так как  $e$  - допустимо,  $f$  - ограничена на  $e$  и  $E = (E \setminus e) \cup e$ . Возьмем любое  $E' \subset E$ , тогда  $E' = E'(E \setminus e) \cup E'e$ .

$$\left| \int_{E'} f \right| \leq \left| \int_{E'(E \setminus e)} f \right| + \left| \int_{E'e} f \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{E'e} f \right|$$

Мы считаем, что  $|f(x)| \leq M$ . Заметим, что выбор  $E'$  не накладывал никаких ограничений на  $M$ . Тогда:

$$\int_{E'e} |f| \leq M \mu E'e \leq M \mu E'$$

Поэтому  $\delta$  мы можем выбрать как  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ . И получится, что  $\mu E' \leq \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| \leq 2\varepsilon$  □

*Доказательство теоремы Лебега.* По теореме Рисса  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду, причем  $|f_{n_k}(x)| \leq \phi(x)$ , значит  $|f(x)| \leq \phi(x) \Rightarrow f$  - суммируема. Рассмотрим  $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \leq \int_E |f_n - f|$ . Так как  $\phi$  - суммируема,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists e (\text{допустимое для } \phi) : \int_{E \setminus e} \phi \leq \varepsilon$$

$$\int_E |f_n - f| = \int_{E \setminus e} |f_n - f| + \int_e |f_n - f| \leq 2\varepsilon + \int_e |f_n - f|$$

Пусть  $|\phi| \leq M \Rightarrow |f_n - f| \leq 2M$ . Так же мы знаем, что  $\int_e |f_n - f| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0(*)$ . Значит, начиная с некоторого  $N_0$ ,  $\int_e |f_n - f| < \varepsilon$ . Следовательно, начиная с  $N_0$ ,  $\int_E |f_n - f| \leq 3\varepsilon$  □

*Доказательство звездочки.* Распишем  $e$ :

$$\begin{aligned} e &= e(|f_n - f| \geq \xi) \cup e(|f_n - f| < \xi) = e_1 \cup e_2 \\ \Rightarrow \int_e |f_n - f| &= \int_{e_1} |f_n - f| + \int_{e_2} |f_n - f| \leq 2M\lambda e_1 + \xi\lambda e_2 \end{aligned}$$

В силу сходимости по мере,  $\lambda e_1 \rightarrow 0$ ,  $\forall \xi$ , так как  $\xi$  - любое, можем устремить его к нулю. □

### 3.2 Теорема Леви

**Теорема 3.3** (Теорема Леви). Пусть  $f_n(x) \leq 0$ ,  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  на  $E$ . Тогда  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$

*Доказательство.* Два случая:

1.  $f$  - почти всюду конечна на  $E$ . Два подслучая:

(a)  $\int_E f < +\infty$ . Так как  $|f_n(x)| \leq f(x) \Rightarrow f$  - суммируемая мажоранта для  $f_n$ , и теорема верна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

(b)  $\int_E f = +\infty$ . ( $f$  все еще мажоранта для  $f_n$ , но уже не суммируемая) Мы поступим так. Раз  $\sup_{e\text{-допустимо } e} \int_e f = +\infty$ , значит  $\forall c > 0 \exists e\text{-допустимое для } f : c < \int_e f$ . В силу  $f_n \leq f$  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости  $\int_e f_n \rightarrow \int_e f$ . Это значит, начиная с некоторого  $N_0$ ,

$$c < \int_e f_n \leq \int_E f_n \Rightarrow \int_E f_n \rightarrow +\infty = \int_E f$$

2.  $\mu E(f = +\infty) > 0$  (Расслабьтесь, и будет не больно)

Очевидно, в этой ситуации может быть только  $\int_E f = +\infty$ . Из  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \Rightarrow \int_E f_n(x) \leq \int_E f_{n+1}(x)$ .

По теореме Вейерштрасса, у последовательности  $\left\{ \int_E f_n \right\}$  будет существовать предел. Причем он будет конечным тогда и только тогда, когда эта последовательность ограничена. Так что нам нужно вывести противоречие из того факта, что эта последовательность ограничена. Предположим, что это так: пусть  $\int_E f_n \leq M$ . Итак, зафиксируем  $\forall c > 0$ . Рассмотрим  $E(f_n \geq c) \subset E$ .

$$\begin{aligned} \int_{E(f_n \geq c)} f_n &\leq M \\ c\mu E(f_n \geq c) &\leq \int_{E(f_n \geq c)} f_n \Rightarrow \mu E(f_n \geq c) \leq \frac{M}{c} \end{aligned}$$

Можно проверить, что:

$$E(f = +\infty) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c)$$

*Доказательство.* Пусть  $x \in E(f = +\infty)$ . Значит  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Следовательно  $\forall c > 0 \exists N_x : \forall n > N_x$

$$N_x \Rightarrow f_n(x) \geq c \xrightarrow[def]{by} x \in \bigcap_{n=N_x}^{\infty} E(f_n \geq c) \quad \square$$

Заметим одну интересную штуку.

$$\begin{aligned} \forall c > 0 \quad f_n(x) \geq c &\Rightarrow f_{n+1}(x) \geq c \Rightarrow E(f_n \geq c) \subset E(f_{n+1} \geq c) \Rightarrow \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) = E(f_m \geq c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) = \lim_{m \rightarrow +\infty} E(f_m \geq c) \end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод, что:

$$\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) \geq \mu E(f = +\infty)$$

$$\begin{aligned}
\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) &= \mu E(f_m \geq c) \leq \frac{M}{c} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) &\leq \frac{M}{c} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu E(f = +\infty) &\leq \frac{M}{c}
\end{aligned}$$

$c$  - любое, поэтому можно устремить  $c \rightarrow +\infty$ . Значит  $\mu E(f = +\infty) = 0$ . Противоречие получено. □

**Следствие 3.4.** Пусть  $u_n(x) \geq 0$  и  $\sum_n \int_E u_n$  - сходится. Тогда  $\sum_n u_n(x)$  - сходится почти всюду на  $E$ .

*Доказательство.*  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Так как интеграл сходится, его частичная сумма ограничена.  $M \geq \sum_{n=1}^m \int_E u_n = \int_E S_m$ . Обозначим  $S(x) = \sum_n u_n(x)$ . В силу неотрицательности  $u_n(x)$ ,  $S_n(x)$  - возрастает ( $S_n \leq S_{n+1}$ ), и  $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ . Следовательно, по теореме Леви  $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$ . Следовательно,  $S$  - суммируемая функция, это значит, что она почти всюду конечна. □

**Следствие 3.5.** Пусть  $f \geq 0$ ,  $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$  - срезка функции  $f$ . Тогда  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ .

*Доказательство.*  $f_n$  удовлетворяют условиям теоремы Леви. □

### 3.3 Теорема Фату

**Теорема 3.6** (Теорема Фату). Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$ . Тогда

$$\int_E f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n$$

*Доказательство.* Применим теорему Рисса, получив, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду. Без ограничения общности можем считать, что  $f_n \rightarrow f$  почти всюду (потому что если доказать для  $\sup$  по подпоследовательности, неравенство будет верно и для последовательности). Пусть  $g_n = \min\{f_n, f\}$ . Тогда  $g_n \leq f$ . Рассмотрим два случая:

1.  $f$  - суммируема. Тогда, по теореме Лебега,  $\int_E g_n \rightarrow \int_E f$ . Предел последовательности  $\int_E g_n$  не превзойдет своего верхнего предела, поэтому  $\int_E f \leq \sup_n \int_E g_n \leq \sup_n \int_E f_n$ .
2.  $\int_E f = +\infty$ . Тогда  $\forall e$  - допустимо для  $f$ .  $\int_e f < +\infty$ . Как мы показали,  $\int_e f \leq \sup_n \int_e f_n$ . Переходя к  $\sup$  по  $e$  получаем необходимое неравенство.

□



## 4 Пространства $L_p$

**Определение.**  $a \in \mathbb{R}$ ,  $E(f < a)$ ,  $E(f \leq a)$ ,  $E(f > a)$ ,  $E(f \geq a)$  - множества Лебега функции  $f$ .

**Определение.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  называется измеримой по Лебегу, если  $\forall a \in \mathbb{R}$  множества Лебега всех четырёх типов измеримы ( $\in \sigma$ -алгебре).

**Определение.**  $L_p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{измерима}, \int_E |f|^p < +\infty \right\}$

Нам нужно проверить, что  $L_p(E)$  - НП. То есть,  $f, g \in L_p \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L_p$ ,  $\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Причем,  $\|f\|$  - удовлетворяет аксиомам нормы.

**Утверждение 4.1.**  $\|f\|_p$  удовлетворяет двум свойствам:

1.  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
2.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

*Доказательство.* 1. Очевидно.

2.  $\int_E |f + g|^p \leq \int_E (|f| + |g|)^p$ . Пусть  $E_1 = E(|f| \leq |g|)$ ,  $E_2 = E(|f| > |g|)$ . Тогда  $E = E_1 \cup E_2$ .

$$\begin{aligned} \int_E (|f| + |g|)^p &= \int_{E_1} (|f| + |g|)^p + \int_{E_2} (|f| + |g|)^p \leq \\ &\leq \int_{E_1} (2|g|)^p + \int_{E_2} (2|f|)^p < +\infty \end{aligned}$$

Следовательно  $f + g \in L_p$

□

### 4.1 Неравенство Гельдера

**Теорема 4.2** (Неравенство Гельдера). Пусть  $p > 1$  и  $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Пусть  $f \in L_p$ ,  $g \in L_q$ . Тогда

$$\int_E |f| |g| \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством Юнга:  $(uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q)$ . Пусть  $u = \frac{|f|}{\|f\|_p}$ ,  $v = \frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\begin{aligned} \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \\ \int_E \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

□

### 4.2 Неравенство Минковского

**Теорема 4.3** (Неравенство Минковского). Пусть  $p > 1$ ,  $f, g \in L_p$ . Тогда

$$\left( \int_E (|f| + |g|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$ .

$$\begin{aligned}
\int_E (f + g)^p &= \int_E f(f + g)^{p-1} + \int_E g(f + g)^{p-1} \leq \\
&\leq \left( \int_E f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E (f + g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_E g^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E (f + g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \text{пусть } q = \frac{p}{p-1} \\
&\leq \left( \int_E (f + g)^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left( \int_E f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

□

Если подставить в неравенство Минковского определение нормы, то можно заметить, что мы доказали неравенство треугольника.

**Теорема 4.4.**  $L_p(E)$  - Банахово пространство.

Докажем вспомогательную лемму:

**Лемма 4.5.** Пусть  $f_n$  - измеримы, и  $\forall \delta > 0 \mu E(|f_n - f_m| \geq \delta) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$ . Тогда  $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду.

*Доказательство.* Пусть  $\delta = \frac{1}{2^k}$ . Можно проверить, что (**TODO**)  $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : \mu E(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ . Рассмотрим следующее множество:

$$E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq \frac{1}{2^j} \right)$$

Рассмотрим функциональный ряд  $S = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots$ . Фиксируем  $x \in E'$ . Тогда

$\exists k_x : x \in \bigcap_{j=k_x}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq \frac{1}{2^j} \right)$ . Это значит, что при  $j > k_x$  выполняется  $|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \frac{1}{2^j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ .

Следовательно, на  $E'$  функциональный ряд  $S$  - сходится. Нам осталось проверить, что его дополнение нуль-мерно. Т. е.  $\mu \overline{E'} = 0$ . Очевидно:

$$\begin{aligned}
\overline{E'} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \overline{E'} \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j} \right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu \overline{E'} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu E(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu \overline{E'} = 0
\end{aligned}$$

□

*Доказательство Теоремы.* Докажем для случая  $p = 1$  (общий случай напишу потом **TODO**). Итак,  $f_n \in L_1(E)$ ,  $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$ . Зафиксируем  $\forall \delta > 0$ . Тогда

$$\delta \mu E(|f_n - f_m| \geq \delta) \leq \int_{E(|f_n - f_m| \geq \delta)} |f_n - f_m| \leq \int_E |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$$

Отсюда, по лемме,  $\exists(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) : f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f$  почти всюду на  $E$ . Коль скоро  $k$  - фиксированное,  $|f_{n_k} - f_{n_m}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} |f_{n_k} - f|$  почти всюду на  $E$ . По теореме Фату:

$$\int_E |f_{n_k} - f| \leq \sup_m \int_E |f_{n_k} - f_{n_m}|$$

В силу  $\|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \xrightarrow{k, m \rightarrow +\infty} 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall k, m > M \Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \leq \varepsilon$$

Без ограничения общности можем считать, что  $k$  и  $m$  удовлетворяют вышеприведенному условию. Получаем, что

$$\forall k > M \Rightarrow \int_E |f_{n_k} - f| \leq \varepsilon$$

Отсюда,  $f_{n_k} - f$  суммируема, а значит  $\in L_1$ . Но, по условию,  $f_{n_k} \in L_1 \Rightarrow f \in L_1$ . Так же, мы знаем, что  $\|f_{n_k} - f\|_1 \leq \varepsilon$ , что, в свою очередь означает, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  по норме в  $L_1$ . Оценим  $\|f_n - f\|_1$ :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &\leq \|f_{n_k} - f_n\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1 \\ \|f_{n_k} - f_n\|_1 &\xrightarrow{n, k \rightarrow +\infty} 0 \\ \|f_{n_k} - f\|_1 &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Получаем сходимость  $f_n$  к  $f$  по норме в  $L_1$ . А значит - полноту.  $\square$

Может показаться, что требование измеримости функции  $f$  в определении пространства  $L_p$  - излишне. Это отнюдь не так.

**Утверждение 4.6.** *Существует функция  $f$  такая, что ее  $p$ -я степень измерима, но сама функция - нет.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное неизмеримое множество  $C \subset \mathbb{R}$ . Тогда пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Очевидно,  $f$  - неизмерима (так как множество Лебега  $E(f > \frac{1}{2}) = C$  - неизмеримо). Но  $f^2(x) = 1$  при  $x \in \mathbb{R}$  - очевидно, измеримая функция.  $\square$

Рассмотрим  $f, g \in L_2$ . По неравенству Гельдера, их произведение суммируемо. Положим  $\langle f, g \rangle = \int_E f \cdot g$ . Очевидно, таким образом построенное отображение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Получается, что  $L_2$  - гильбертово пространство с нормой, естественным образом порожденной скалярным произведением:  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .

Приведем важный частный случай пространства  $L_2(E)$ : В качестве тройки (множество,  $\sigma$ -алгебра, мера) возьмем:  $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ , где  $\mu$  - считающая мера (количество элементов в множестве). Тогда  $\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ . В данном контексте суммируемость будет значить абсолютную сходимость.

Рассмотрим  $L_2(\mathbb{N})$ , Обозначаем  $a_n = f(n)$ . Тогда  $f \in L_2(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum_n a_n^2 < +\infty$ . Принято обозначать  $L_2(\mathbb{N}) = l_2$

## 5 Мера подграфика

Итак, рассмотрим  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Считаем, что мера - полная и  $\sigma$ -конечная.  $f : E \xrightarrow{\text{изм.}} \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  почти всюду.

**Определение.**  $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$  - подграфик функции  $f$ .

Здесь и далее, в качестве  $X \equiv \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \equiv \lambda_n$ .

**Теорема 5.1** (Об измеримости подграфика). *Подграфик измерим, и его мера равна  $\lambda_{n+1}(G_f) = \int_E f dx$*

**Утверждение 5.2.**  $G_c(E)$  - измеримо,  $\lambda G_c(E) = c\lambda E$ , где  $c$  - константа.

*Доказательство.* Пойдем от простого к сложному. Для ячейки  $\mathbb{R}^n$  формула верна по определению. Пусть теперь  $E$  - открытое множество. Как известно, любое открытое множество представляется в виде  $E = \bigcup_m \Pi_m$ ,  $\Pi_m$  - дизъюнктные ячейки.  $G(E) = \bigcup_m G(\Pi_m) \Rightarrow \lambda G(E) = \sum_m \lambda G(\Pi_m) = c \sum_m \lambda G(\Pi_m) = c\lambda E$ . Далее, без ограничения общности, можем считать, что  $\mu E < +\infty$  (Потому что у нас есть  $\sigma$  - конечность;  $\mathbb{R}^n = \bigcup_m T_m$  ( $T_m : \lambda T_m < +\infty$ )  $\Rightarrow E = \bigcup_m ET_m$  ( $\lambda ET_m < +\infty$ )). Воспользуемся формулой:  $\lambda^* E = \inf_{E \subset G - \text{открыто}} \lambda G$ . По аксиоме выбора,  $\exists G_m : G_m \subset G_{m+1}, E = \bigcap_m G_m$ . Понятно, что тогда  $\lambda G_m \rightarrow \lambda E$ . Так же  $G(E) = \bigcap_m G(G_m)$ . Следовательно  $\lambda G(G_m) = c\lambda G_m \rightarrow c\lambda E$   $\square$

*Доказательство теоремы.* Мы умеем писать суммы Лебега-Дарбу:  $\underline{S}(\tau) \leq \int_E f \leq \overline{S}(\tau)$ . Важно, что интеграл Лебега - единственное число, которое обладает таким свойством.  $\tau : E = \bigcup_m e_m$  - конечное объединение дизъюнктных множеств, и

$$\begin{aligned} \underline{S}(\tau) &= \sum_p m_p \lambda e_p, \quad m_p = \inf_{x \in e_p} f(x) \\ \overline{S}(\tau) &= \sum_p M_p \lambda e_p, \quad M_p = \sup_{x \in e_p} f(x) \end{aligned}$$

Обозначим  $\underline{E}_p = G_{m_p}(e_p)$ . Тогда  $\lambda \underline{E}_p = m_p \lambda e_p$ . Пусть  $\underline{E}(\tau) = \bigcup_p \underline{E}_p$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda \underline{E}(\tau) &= \sum_{p=1}^n \lambda \underline{E}_p = \sum_{p=1}^n m_p \lambda e_p = \underline{S}(\tau) \\ \lambda \overline{E}(\tau) &= \sum_{p=1}^n \lambda \overline{E}_p = \sum_{p=1}^n M_p \lambda e_p = \overline{S}(\tau) \\ \underline{E}(\tau) &\subset G_f(E) \subset \overline{E}(\tau) \end{aligned}$$

По свойствам сумм Лебега-Дарбу:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon : \forall \tau \leq \tau_\varepsilon \quad \overline{S}(\tau) - \underline{S}(\tau) \leq \varepsilon$ . Сопоставляя это с предыдущими фактами, получаем  $\underline{S}(\tau) \leq \lambda G_f(E) \leq \overline{S}(\tau)$ . И тогда, необходимо,  $\lambda G_f(E) = \int_E f$   $\square$

## 6 Теорема Фубини

**Определение** (Линейное сечение множества  $E$ ).  $E_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$

*Пример.* Пусть  $E = [a, b] \times [c, d]$ . Тогда

$$E_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin [a, b] \\ [c, d], x \in [a, b] \end{cases}$$

**Теорема 6.1.** Пусть  $\lambda E < +\infty$ , тогда

1. Любое  $E_x$  - измеримо.
2.  $\lambda E_x$  - измеримая, почти всюду конечная функция.
3.  $\lambda E_x = \int_{\mathbb{R}} E_x dx$

*Доказательство.* Пусть для начала  $E = G$  - открытое множество. Тогда  $G = \bigcup_m \Pi_m$  - дизъюнктные ячейки. Очевидно,  $G_x = \bigcup_m \Pi_{m,x}$ . По  $\sigma$ . По  $\sigma$  - аддитивности,  $\lambda G_x = \sum_m \lambda \Pi_{m,x}$ . Каждое слагаемое, как функция, измеримо, значит, очевидно, будет измерима и сумма. Поэтому, по теореме Леви, данное равенство можно интегрировать.

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda G_x = \sum_m \int_{\mathbb{R}} \lambda \Pi_{m,x} = \sum_m \lambda \Pi_m = \lambda G$$

Далее, пусть  $E$  - произвольное измеримое множество. Воспользуемся формулой  $\lambda E = \inf_{E \subset G} \lambda G$ , где  $G$  - открытые. **TODO** □

**Определение.** Пусть  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f$  - измерима и неотрицательна. Тогда  $\int_E f(x, y) d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \iint_E f(x, y) dx dy$

Теперь мы можем сформулировать теорему Фубини:

**Теорема 6.2** (Теорема Фубини). Пусть  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f$  - суммируема на  $E$ , тогда почти всюду  $f(x, \cdot)$  - суммируема на  $E_x$ ,  $\int_{E_x} f(x, y) dy$  - суммируема на  $\mathbb{R}$  и

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{E_x} f(x, y) dy$$

*Доказательство.* Достаточно доказать для неотрицательных функций. Для функций произвольного знака это будет следовать из линейности двойного интеграла. Итак, мы знаем, что подграфик  $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in E, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  измерим.  $\iint_E f(x, y) dx dy = \lambda G_f$ .

$$\begin{aligned} G_{f,x} &= \{(y, z) : (x, y) \in E, 0 \leq z \leq f(x, y)\} = \\ &= \{(y, z) : y \in E_x, 0 \leq z \leq f(x, y)\} = G_{f(x, \cdot)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{по теореме о мере подграфика} \Rightarrow \lambda G_{f,x} = \int_{E_x} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Подставляя это в исходную формулу, получаем формулу повторного интегрирования. □

## 7 О многократных интегралах Римана

Обобщим понятие интеграла Римана на множества большей размерности (для упрощения будем вести речь в терминах  $\mathbb{R}^2$ ). Итак, рассмотрим  $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ ,  $\tau_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $\tau_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ . Тогда  $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ , и  $\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ,  $\Pi \equiv \bigcup_{i,j} \Pi_{ij}$ . Теперь мы можем составить суммы Римана:

$$\sigma(f, \tau) = \sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Положим  $\text{rang}\tau \equiv \max_{ij} \{\text{diam}\Pi_{ij}\}$ . Тогда:

$$\lim_{\text{rang}\tau \rightarrow +\infty} \sigma(f, \tau) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

Если вышеприведенный предел существует, то он называется двойным интегралом Римана. Ясно, что функция интегрируемая по Риману на прямоугольнике интегрируема по Лебегу. Это позволяет воспользоваться теоремой Фубини:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

В общем случае, это не означает, что  $\int_a^b f(x, y) dy$  - интегрируема по Риману. Далее, встает вопрос - как обобщить кратный интеграл на произвольное плоское множество? Можно воспользоваться двумя равносильными подходами:

1. Пусть  $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f} = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin E \\ f(x, y), & \text{otherwise} \end{cases}$$

Так как  $E$  - ограничено, его можно поместить в прямоугольник  $\Pi$  и тогда:

$$\iint_E f \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Pi} \bar{f}$$

Если  $f \equiv 1$  на  $E$  то тогда  $\iint_E f = \lambda E$

2. \*Выводим аналог формулы замены переменной для функционалов\* **TODO** (там много картинок, ничего сложного)

## 8 Криволинейные интегралы

### 8.1 Определение

Интегралы, которые будут рассмотрены в данном параграфе будут частными случаями интегралов по многообразиям от дифференциальных форм.

Итак, рассмотрим кривую  $\Gamma : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Здесь и далее считаем координатные функции непрерывно-дифференцируемыми, а дугу - спрямляемой (на всякий случай: эти понятия эквивалентны). Напомним, что спрямляемость означает существование интеграла  $l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$

Мы будем рассматривать 2 случая:

1.  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

В силу спрямляемости дуги  $\exists l(\widehat{P_k P_{k+1}})$ . Как всегда, рассматриваем разбиение  $\tau : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ . У нас появилось множество точек  $P_k = (x(t_k), y(t_k), z(t_k))$ . Пусть  $\tilde{P}_k = (x(\tilde{t}_k), y(\tilde{t}_k), z(\tilde{t}_k))$ , где  $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k+1}]$ . Составляем интегральную сумму:

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{P}_k) l(\widehat{P_k P_{k+1}}) \quad (1)$$

**Определение.**  $\text{rang}\tau = \max_k l(\widehat{P_k P_{k+1}})$

**Определение** (Криволинейный интеграл первого рода). Если  $\exists \lim_{rang\tau \rightarrow 0} \sigma(\tau)$ , и он не зависит от выбора промежуточных разбиений, то он называется криволинейным интегралом первого рода

2.  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ .  $\tau$  и  $\widetilde{P}_k$  определяем так же. Пусть

$$\Delta x_k = x(t_{k+1}) - x(t_k), \Delta y_k = y(t_{k+1}) - y(t_k), \Delta z_k = z(t_{k+1}) - z(t_k).$$

Составим три интегральные суммы:

$$\sigma_x(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f_x(\widetilde{P}_k) \Delta x_k \quad (2)$$

$$\sigma_y(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f_y(\widetilde{P}_k) \Delta y_k \quad (3)$$

$$\sigma_z(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f_z(\widetilde{P}_k) \Delta z_k \quad (4)$$

**Определение** (Криволинейный интеграл второго рода). Если  $\exists \lim_{rang\tau \rightarrow 0} \sigma_x(\tau) = I_x, \exists \lim_{rang\tau \rightarrow 0} \sigma_y(\tau) = I_y, \exists \lim_{rang\tau \rightarrow 0} \sigma_z(\tau) = I_z$  Причем, они не зависят от выбора промежуточных разбиений, то они называются криволинейными интегралами второго рода по координатным функциям и обозначаются:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f_x(x, y, z) dx &\stackrel{\text{def}}{=} I_x \\ \int_{\Gamma} f_y(x, y, z) dy &\stackrel{\text{def}}{=} I_y \\ \int_{\Gamma} f_z(x, y, z) dz &\stackrel{\text{def}}{=} I_z \end{aligned}$$

## 8.2 Вычисление криволинейных интегралов первого рода

**Теорема 8.1** (О вычислении криволинейных интегралов первого рода). Если  $f$  - непрерывна вдоль  $\Gamma$ , и  $\Gamma$  - гладкая, то криволинейный интеграл первого рода существует, и равен

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$$

*Доказательство.* Мы составляли интегральные суммы вида:

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\widetilde{P}_k) l(\widehat{P_k P_{k+1}})$$

Так как  $f(\widetilde{P}_k) = f(x(\widetilde{t}_k), y(\widetilde{t}_k), z(\widetilde{t}_k))$ , а  $l(\widehat{P_k P_{k+1}}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \Rightarrow \frac{dl}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ , причем

последняя производная одна и та же для всех  $k$ . Тогда  $\int_{\Gamma} f dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) l' dt =$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt \quad \square$$

## 8.3 Вычисление криволинейных интегралов второго рода

**Теорема 8.2** (О вычислении криволинейных интегралов второго рода). Если  $f$  - непрерывна вдоль  $\Gamma$ , и  $\Gamma$  - гладкая, то

$$\int_{\Gamma} f_x dx + f_y dy + f_z dz = \int_a^b f_x(x(t), y(t), z(t)) x' dt + f_y(x(t), y(t), z(t)) y' dt + f_z(x(t), y(t), z(t)) z' dt$$

*Доказательство.* для простоты докажем формулу  $\int_{\Gamma} f_x dx = \int_a^b f_x(x(t), y(t), z(t)) x' dt$ . Исходная получается аналогичным доказательством двух оставшихся, и применением свойства линейности. Рассмотрим следующую интегральную сумму:

$$\sigma(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{P}_k) x'(\bar{t}_k) \Delta t_k \xrightarrow{\text{rang } \tau \rightarrow 0} \int_a^b f x' dt$$

Теперь оценим модуль разности:

$$|\sigma_x(\tau) - \sigma(\tau)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| f_x(\tilde{P}_k) - f_x(\bar{P}_k) \right| |x'(\bar{t}_k)| \Delta t_k$$

По теореме Кантора,  $f_x(t)$  - равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , это значит, что

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \text{rang } \tau \leq \delta &\Rightarrow \forall t', t'' |f_x(t') - f_x(t'')| \leq \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow |\sigma_x(\tau) - \sigma(\tau)| &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} x'(\bar{t}_k) \Delta t_k \leq \varepsilon M \end{aligned}$$

□

## 8.4 Формула Грина

Существует связь между криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру и двойным интегралом по внутренности этого контура. Она выражается в следующей теореме:

**Теорема 8.3** (Формула Грина). Пусть  $P$  и  $Q$  - непрерывно-дифференцируемы в односвязной области  $G$ . Пусть  $\Gamma = \partial G$ . Тогда:

$$\int_{\Gamma_+} P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$\Gamma_+$  - означает, что обход такой, что внутренность  $G$  всегда слева.

**Лемма 8.4.** Пусть  $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$  Пусть в  $G \exists P$  - непрерывная и  $\exists \frac{\partial P}{\partial y}$  - непрерывная. Тогда:

$$\int_{\partial G_+} P dx = - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

*Доказательство.* По теореме Фубини:

$$\begin{aligned} - \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= - \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx \end{aligned}$$

Разделим интеграл на 4:

$$\int_{\partial G_+} P dx = \int_I P dx + \int_{II} P dx + \int_{III} P dx + \int_{IV} P dx$$



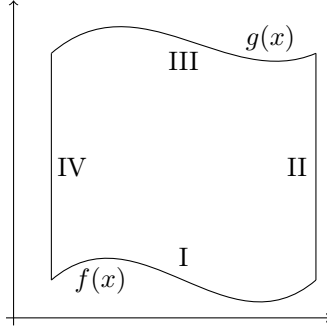


Рис. 1: множество  $G$

$$\text{I} : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \Rightarrow \int_{\text{I}} P dx = \int_a^b P(t, f(t)) dt$$

$$\text{III} : \begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \int_{\text{III}} P dx = \int_a^b P(t, g(t)) dt$$

На II и IV  $x = \text{const} \Rightarrow \int_{\text{II}} P dx = \int_{\text{IV}} P dx = 0$ . Складывая, получаем, что правая часть формулы из условия, равна левой части  $\square$

**Н. В. 8.5.** Если  $G = \{c \leq y \leq d, f(y) \leq x \leq g(y)\}$ , то

$$\int_{\partial G_+} Q dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

*Доказательство формулы Грина.* Возьмем две точки на границе  $G$ . Соединим их жордановой кривой, через внутренность  $G$ , тогда  $G$  разделится на две области -  $G_1$  и  $G_2$ , и

$$\int_{\Gamma_+} P dx + Q dy = \int_{\partial G_{1+}} P dx + Q dy + \int_{\partial G_{2+}} P dx + Q dy$$

Если мы научимся доказывать теорему для каких-то конкретных разделений  $G$  на  $G_1$  и  $G_2$ , то, теорема юдет доказана. Можно показать, что  $G$  можно разбить на области удовлетворяющие лемме. По аддитивности и линейности интеграла, в сумме они дают, исходную формулу.  $\square$

## 9 Поверхностные интегралы

В этом параграфе рассматриваем двумерные поверхности в трехмерном пространстве:

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), & (u, v) \in G \subset \mathbb{R}^2 \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Можно говорить о двусторонних и односторонних поверхностях. Для этого сначала введем понятие нормали к поверхности:

**Определение** (Нормаль к поверхности). Пусть

$$k_u = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), k_v = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

$$\text{Тогда вектор нормали } n = k_u \times k_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

**Определение** (Двусторонняя поверхность). Поверхность называется двусторонней если ее вектор нормали непрерывен на ней.

По определению, модуль векторного произведения, равен площади параллелограмма, построенного на множителях, это значит, что можно считать площадь поверхностей следующим образом:

$$\overline{N}_x = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \left| \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right|; \overline{N}_y = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \left| \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right|; \overline{N}_z = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|$$

Тогда площадь бесконечно малого сегмента поверхности равна  $\sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} dudv$

Тогда площадь поверхности

$$mes(S) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_G \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} dudv$$

Дальше как всегда, делаем разбиение:

$$\tau = t_{11} < t_{12} < \dots < t_{1n}$$

$$t_{21} < t_{22} < \dots < t_{2n}$$

...

$$t_{n1} < t_{n2} < \dots < t_{nn}, t_{ij} \in G, t_{1j}, t_{i1}, t_{nj}, t_{in} \in \partial G \text{ и}$$

$$S_{ij} = \{(x, y, z) : x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in G, t_{ij} \leq u \leq t_{i+1j}, t_{ij} \leq v \leq t_{ij+1}\},$$

$P_{ij} \in S_{ij}$ . Теперь у нас все готово для определения поверхностного интеграла.

### 9.1 Поверхностный интеграл первого рода

Рассмотрим функционал  $f(x, y, z), (x, y, z) \in S$ . Можно составить интегральную сумму

$$\sigma(\tau) = \sum_{ij} f(P_{ij}) mes(S_{ij}) \xrightarrow{\text{rang } \tau \rightarrow 0} \iint_S f(x, y, z) dS$$

И тогда

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} dudv$$

## 9.2 Поверхностный интеграл второго рода

Рассмотрим функцию  $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Интегральные суммы определяются аналогично - умножаем координатную функцию на элемент площади. Тогда

$$\iint_S \vec{f}_x dydz + \vec{f}_y dzdx + \vec{f}_z dxdy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S (\vec{f}, \vec{n}) dS$$

Приведем некоторые определения из дифференциального исчисления:

**Определение** (Оператор Гамильтона (набла)).

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

**Определение** (Градиент скалярного поля).

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } f$$

**Определение** (Дивергенция векторного поля).

$$(\nabla, \vec{F}) = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{=} \text{div } \vec{F}$$

**Определение** (Ротор векторного поля).

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{F}_x & \vec{F}_y & \vec{F}_z \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } \vec{F}$$

**Определение** (Оператор Лапласа (Лапласиан)).

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Теорема 9.1** (О треугольниках).

$$\nabla^2 = \Delta$$

*Доказательство.*

$$\nabla^2 = (\nabla, \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

□

Следующая теорема позволяет сводить контурные интегралы второго рода к поверхностным интегралам второго рода.

**Теорема 9.2** (Теорема Стокса (без доказательства)).

$$\oint_{\partial S_+} \vec{F}_x dx + \vec{F}_y dy + \vec{F}_z dz = \iint_S (\text{rot } \vec{F}, \vec{n}) dS$$

Теорема Остроградского-Гаусса позволяет вычислять криволинейные интегралы по замкнутому контуру через поверхностные интегралы второго рода

**Теорема 9.3** (Теорема Остроградского-Гаусса (без доказательства)). Пусть  $T = \partial S$

$$\iint_S (\vec{F}, \vec{r}) dS = \iiint_T \text{div } \vec{F} dxdydz$$

**Н. В. 9.4.** Все эти теоремы являются частным случаем одной, доказанной Анри Картаном в XX веке:

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

Где  $S$  - многообразие,  $\omega$  - дифференциальная форма

## 10 Ряды Фурье

### 10.1 Определение ряда Фурье

Далее, если не оговорено обратного, все интегралы будут интегралами Лебега.

**Определение** (Тригонометрический ряд). Тригонометрическим рядом называется сумма вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Частичные суммы тригонометрического ряда обозначаются  $T_n(x)$

Докажем несколько вспомогательных утверждений:

**Утверждение 10.1.** Если  $m \neq n$  то

$$\int_Q \cos(nx) \sin(mx) dx = \int_Q \cos(nx) \cos(mx) dx = \int_Q \sin(nx) \sin(mx) dx = 0$$

*Доказательство.* 1.

$$\begin{aligned} \int_Q \cos(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_Q (\sin(x(n+m)) - \sin(x(n-m))) dx = \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{n+m} \cos(x(n+m)) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-m} \sin(x(n-m)) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_Q \cos(nx) \cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_Q (\cos(x(n-m)) + \cos(x(n+m))) dx = \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-m} \sin(x(n-m)) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+m} \sin(x(n+m)) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} &= 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_Q \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_Q (\cos(x(n-m)) - \cos(x(n+m))) dx = \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-m} \sin(x(n-m)) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+m} \sin(x(n+m)) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} &= 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 10.2.** Пусть тригонометрический ряд сходится в пространстве  $L_1$ . Тогда для его коэффициентов выполнены формулы Эйлера-Фурье:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_Q f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_Q f(x) \cos(nx) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_Q f(x) \sin(nx) dx \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $m, n \in \mathbb{N}, n > m$ . Оценим следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_Q (f(x) \cos(mx) - T_n(x) \cos(mx)) dx \right| = \\
& \left| \int_Q f(x) \cos(mx) dx - \int_Q \sum_{k=0}^n A_k(x) \cos(mx) dx \right| \\
& \int_Q \sum_{k=0}^n A_k(x) \cos(mx) dx = \sum_{k=0}^n \int_Q A_k(x) \cos(mx) dx = \\
& \frac{a_0}{2} \int_Q \cos(mx) dx + \sum_{k=0}^n \left( a_k \int_Q \cos(kx) \cos(mx) dx + b_k \int_Q \sin(kx) \cos(mx) dx \right) = a_m \int_Q \cos^2(mx) dx = \pi a_m \\
& \Rightarrow \left| a_m \pi - \int_Q f(x) \cos(mx) dx \right|
\end{aligned}$$

С другой стороны, нельзя не согласиться, что

$$\begin{aligned}
& \left| \int_Q (f(x) \cos(mx) - T_n(x) \cos(mx)) dx \right| \leq \\
& \int_Q |f(x) - T_n(x)| |\cos(mx)| \leq \int_Q |f(x) - T_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \\
& \left| a_m \pi - \int_Q f(x) \cos(mx) dx \right| = 0
\end{aligned}$$

□

**Следствие 10.3.** Если тригонометрический ряд равномерно сходится на  $Q$ , то его коэффициенты вычисляются по формулам Эйлера-Фурье.

**Определение.** Пусть  $f \in L_1$ , тогда тригонометрический ряд с коэффициентами, вычисленными по формулам Эйлера-Фурье, называется рядом Фурье функции  $f$ .

**Н. В. 10.4.** Существуют сходящиеся тригонометрические ряды, которые не являются рядами Фурье своих сумм.

## 10.2 Интеграл Дирихле

Итак, для вывода интеграла Дирихле, рассмотрим частичную сумму ряда Фурье:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \int_Q f(t) \frac{dt}{2\pi} + \sum_{k=1}^n \left( \int_Q f(t) \frac{1}{\pi} \cos(kt) dt \right) \cos(kx) + \left( \int_Q f(t) \frac{1}{\pi} \sin(kt) dt \right) \sin(kx) = \\ &= \int_Q f(t) \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx) \right) dt = \\ &= \int_Q f(t) \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) dt \end{aligned}$$

**Определение** (Ядро Дирихле).

$$D_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right)$$

**Определение** (Интеграл Дирихле). Частичные суммы тригонометрического ряда в следующем виде называют интегралом Дирихле.

$$T_n(x) = \int_Q f(t) D_n(x-t) dt$$

Так как  $D_n(t) = D_n(-t) \Rightarrow T_n(x) = \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt$  (Здесь мы пользуемся периодичностью  $f$ ).

**Утверждение 10.5.**

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sin \frac{t}{2} D_n(t) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \sin \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sin(n + \frac{1}{2})t \end{aligned}$$

□

Из формулы ясно, что  $D_n(t)$  меняет знак с увеличением  $n$  все чаще, и можно показать, что

$$\int_Q |D_n(t) dt| \sim \ln n$$

Это заметно усложняет изучение рядов Фурье в отдельных точках.

Очевидно,  $\int_Q D_n(t) dt = 1$ , следовательно  $f(x) = \int_0^\pi 2f(x) D_n(t) dt$ . Тогда можно записать разность в следующем виде:

$$T_n(x) - f(x) = \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)) D_n(t) dt$$

Обозначим  $\phi(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))$   
И тогда получится

$$T_n(x) - f(x) = \int_0^\pi \phi(x, t) D_n(t) dt$$

Эта формула нам пригодится в дальнейшем.

### 10.3 Лемма Римана-Лебега

**Лемма 10.6** (Лемма Римана-Лебега). Пусть  $f \in L_1$  - суммируема на  $\mathbb{R}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos nx dx &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin nx dx &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

**Следствие 10.7.** Если  $f \in L_1$ , то  $a_n, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

*Доказательство следствия.*  $\pi a_n(f) = \int_Q f(x) \cos nx dx$ . Пусть

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Тогда  $\int_{\mathbb{R}} |g| = \int_Q |f| < +\infty$ . Следовательно  $g$  - суммируема на числовой оси. Следовательно  $\int_{\mathbb{R}} g \cos nx dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Но  $\int_{\mathbb{R}} |g| = \int_Q |f| = \pi a_n(f)$  □

*Доказательство Леммы.* Для доказательства леммы воспользуемся теоремой Лузина. Для забывчивых, напомним ее формулировку:

**Теорема 10.8** (Теорема Лузина). Пусть  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  - измерима на  $E$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \phi$  - непрерывная на  $\mathbb{R}^n$  :  $\mu(f \neq \phi) < \varepsilon$ . И если  $|f(x)| \leq M$  на  $E$ , то  $|\phi(x)| \leq M$  на  $\mathbb{R}$ .

Доказательство будем вести в несколько этапов. Сначала покажем, что для любой функции суммируемой на оси и  $\forall \varepsilon > 0 \exists g$  - непрерывная и ограниченная на оси, такая, что  $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ .

Так как  $\int_{\mathbb{R}} f < +\infty$ , то, по свойствам интеграла,  $\forall \varepsilon > 0$  существует множество конечной меры  $E$  на котором функция  $f$  - ограничена, и при этом  $\int_{\mathbb{R} \setminus E} |f| < \varepsilon$ . Теперь, по теореме Лузина, подберем  $g$  - непрерывную на  $\mathbb{R}$  и ограниченную  $M$  функцию. Определим

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Тогда  $\int_{\mathbb{R}} |f - \hat{f}| dx = \int_{\mathbb{R} \setminus E} |f| < \varepsilon$ . Ясно, что, так как  $f$  - ограничена на  $E$ , то  $\hat{f}$  - ограничена той же константой на всей оси. По теореме Лузина,  $\lambda(\mathbb{R}(f \neq g)) < \frac{\varepsilon}{M}$ ; обозначим  $E' = \mathbb{R}(f \neq g)$ . Теперь

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - \hat{f}| + \int_{\mathbb{R}} |\hat{f} - g|$$

$$1. \int_{\mathbb{R}} |\hat{f} - f| < \varepsilon$$

$$2. \int_{\mathbb{R}} |\hat{f} - g| = \int_{E'} |\hat{f} - g| \leq 2M\lambda E' = 2M\frac{\varepsilon}{M} = 2\varepsilon$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq 3\varepsilon$$

Теперь проверим лемму Римана-Лебега для  $g$ . Мера Лебега  $\sigma$ -конечна, из этого следует, что (это надо чекнуть **TODO**) в качестве  $E$  можно брать конечный промежуток.  $E = \langle a, b \rangle$ . Рассмотрим  $\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cos nx dx \right| =$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus \langle a, b \rangle} |g(x) \cos nx| dx + \int_{\langle a, b \rangle} |g(x) \cos nx| dx$$

$$1. \int_{\mathbb{R} \setminus \langle a, b \rangle} |g(x) \cos nx| dx \leq \int_{\mathbb{R} \setminus \langle a, b \rangle} |g(x)| dx < \varepsilon$$

$$2. \left| \int_{\langle a, b \rangle} g(x) \cos nx dx \right| = \left| \int_a^b g(x) d\left(\frac{1}{n} \sin nx\right) \right| \leq \left| g(x) \frac{1}{n} \sin nx \right|_a^b + \left| \frac{1}{n} \int_a^b \sin nx d(g(x)) \right|$$

$$(a) \left| g(x) \frac{1}{n} \sin nx \right|_a^b \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$(b) \left| \frac{1}{n} \int_a^b \sin nx d(g(x)) \right| \leq \frac{1}{n} \int_a^b |d(g(x))| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Теперь докажем лемму для } f. \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos nx dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - g| |\cos nx| dx + \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cos nx dx \right|.$$

$$1. \int_{\mathbb{R}} |f - g| |\cos nx| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f - g| dx < \varepsilon$$

$$2. \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cos nx dx \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Для синуса аналогично. □

Из этой леммы вытекает важное свойство рядов Фурье, описанное в следующем параграфе.

## 10.4 Принцип локализации Римана

**Теорема 10.9** (Принцип локализации Римана). Пусть  $g, f$  - суммируемы и  $2\pi$  - периодичны, а так же в  $\delta$ -окрестности некоторой точки  $x$  их значения совпадают, тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, x) - S_n(g, x) = 0$$

*Доказательство.* Для простоты, представим, что у нас  $x = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - S_n(g, x) &= \int_Q (f(x+t) - g(x+t)) D_n(t) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x+t) - g(x+t)) D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) - g(x+t)) D_n(t) dt \end{aligned}$$

Будем оценивать такой интеграл (для остальных аналогично):

$$\int_{\delta}^{\pi} f(x+t) \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}$$

Перепишем  $D_n(t)$ :

$$\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin nt \cos \frac{t}{2} + \cos nt \sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} = \sin nt \operatorname{ctg} \frac{t}{2} + \cos nt$$

Далее, заметим важную вещь, которая заставляет все работать: При  $\frac{\delta}{2} \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{t}{2}$  - ограничен. Получается, что  $f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$  и  $f(x+t)$  - обе суммируемые функции, а значит, для них выполнены условия леммы Римана-Лебега, отсюда получаем требуемое. □



## 10.5 Теорема Фейера

**Определение** (Сумма Фейера).

$$\sigma_n(f, x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x)$$

Получим ее форму через интеграл:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_Q f(x+t) D_k(t) dt = \int_Q f(x+t) \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) \right) dt$$

**Определение** (Ядро Фейера).

$$\Phi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t)$$

**Определение** (Интеграл Фейера).

$$\sigma_n(f, x) = \int_Q f(x+t) \Phi_n(t) dt$$

**Утверждение 10.10.**

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left( \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

**Теорема 10.11** (Теорема Фейера). Пусть  $f \in L_1$ ,  $f$  - периодична с периодом  $T$ . Пусть

$$\phi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2S. \text{ Пусть } \frac{1}{t} \int_0^t |\phi_x(t)| dt \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \text{ Тогда}$$

$$\sigma_n(f, x) \xrightarrow{n \rightarrow 0} S$$

*Доказательство.* Пусть  $h_n = \frac{1}{n+1}$ .  $\sigma_n(f, x) - S = \int_0^\pi \phi_x(t) \Phi(t) dt$ . Разобьем интеграл на два  $\int_0^\pi = \int_0^{h_n} + \int_{h_n}^\pi$ .

$$|\sigma_n(f, x) - s| \leq \int_0^{h_n} |\phi_x(t)| \Phi(t) dt + \int_{h_n}^\pi |\phi_x(t)| \Phi(t) dt$$

Заметим, что  $|\sin nt| \leq n |\sin t| \Rightarrow \Phi_n(t) \leq \frac{1}{2\pi h_n}$ , следовательно  $\int_0^{h_n} |\phi_x(t)| \Phi(t) dt \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} |\phi_x(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow 0} 0$

Рассмотрим  $\int_{h_n}^\pi |\phi_x(t)| \Phi(t) dt$ . При  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ , тогда  $\Phi_n(t) \leq \frac{h_n}{2\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{h_n}{2\pi} \frac{1}{(\frac{2}{\pi} \frac{t}{2})^2} = \frac{\pi h_n}{2} \frac{1}{t^2}$ .

$$\begin{aligned} \int_{h_n}^\pi |\phi_x(t)| \Phi(t) dt &\leq \frac{h_n \pi}{2} \int_{h_n}^\pi |\phi_x(t)| \frac{1}{t^2} dt = \frac{\pi h_n}{2} \int_{h_n}^\pi \frac{1}{t^2} d \left( \int_0^t |\phi_x(y)| dy \right) = \\ &= \frac{\pi h_n}{2} \left( \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi |\phi_x(y)| dy - \frac{1}{h_n^2} \int_0^{h_n} |\phi_x(y)| dy + 2 \int_{h_n}^\pi \frac{dt}{t^3} \int_0^t |\phi_x(y)| dy \right) \end{aligned}$$

1.  $\frac{h_n}{2\pi} \int_0^\pi |\phi_x(y)| dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$
2.  $\frac{\pi}{2h_n} \int_0^{h_n} |\phi_x(y)| dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  (по условию).
3.  $h_n \int_{h_n}^\pi \frac{dt}{t^3} \int_0^t |\phi_x(y)| dy$  : По условию,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : 0 < t \leq \delta \Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t |\phi_x(y)| dy \leq \varepsilon$ . Так как  $h_n \rightarrow 0 \Rightarrow$  начиная с некоторого  $n_0, h_n \leq \delta$ . Разобьем интеграл по  $h_{n_0}$  :

$$\begin{aligned} h_n \int_{h_n}^\pi \frac{dt}{t^3} \int_0^t |\phi_x(y)| dy &= h_n \int_{h_n}^{h_{n_0}} \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{t} \int_0^t |\phi_x(y)| dy \right) dt + h_n \int_{h_{n_0}}^\pi \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{t} \int_0^t |\phi_x(y)| dy \right) dt = \\ &\leq h_n \varepsilon \int_{h_n}^{h_{n_0}} \frac{dt}{t^2} + h_n \varepsilon \int_{h_{n_0}}^\pi \frac{dt}{t^2} = h_n \varepsilon \left( -\frac{1}{t} \Big|_{h_n}^{h_{n_0}} \right) + h_n \varepsilon M \leq \varepsilon(1 + M) \end{aligned}$$

□

**Определение.** Если в точке  $x$  существует два односторонних предела, то она называется регулярной.

**Следствие 10.12.** Если  $x$  - регулярная точка, то

$$\sigma_n(f, x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

*Доказательство.* Пусть  $S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ . Тогда  $|\phi_x(t)| \leq |f(x+t) - f(x+0)| + |f(x-t) - f(x-0)| \leq 2\varepsilon$   
 $\Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t |\phi_x(t)| dt \leq 2\varepsilon$

□

**Следствие 10.13.** Пусть  $x$  - точка непрерывности, тогда

$$\sigma(f, x) = f(x)(CA)$$

Последнее свойство может быть существенно усилено, в следующей теореме:

**Теорема 10.14** (О сходимости сумм Фейера в  $C$ ). Пусть  $f \in C$ , тогда суммы Фейера равномерно сходятся к  $f$  на всей оси.

*Доказательство.* В силу  $2\pi$  периодичности функции и ее непрерывности, получаем равномерную непрерывность. Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |\phi_x(t)| < \varepsilon$  Следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R} \frac{1}{t} \int_0^t |\phi_x(y)| dy < \varepsilon$ , при  $t < \delta$ . Теперь, все рассуждения в теореме Фейера становятся независимыми от  $x$ , и получается равномерная сходимость.

□

## 10.6 Теорема Фейера в $L_p$

**Утверждение 10.15.** Пространство  $C$  всюду плотно в  $L_p$ . ( $\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L_p \exists g \in C : \|f - g\|_p < \varepsilon$ )

*Доказательство.* Раз  $f$  - суммируема, то  $\forall \varepsilon > 0$  можно подобрать  $e$  - допустимое для  $f$ . Пусть

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \begin{cases} f, & x \in e \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \text{ тогда} \\ \int_Q |f - \hat{f}|^p &= \int_{Q \setminus e} |f|^p < \varepsilon \end{aligned}$$

Это значит, что множество ограниченных функций всюду плотно в  $L_p$ , теперь, проверим, что  $C$  всюду плотно в этом множестве.

Итак, пусть  $f$  - ограничена на  $Q$ . По теореме Лузина,  $\exists \phi$  - непрерывная на  $\mathbb{R}$  и ограниченная функция, такая, что  $\lambda Q(f \neq \phi) < \varepsilon$ . Сравним эти две функции в  $L_p$  норме:

$$\int_Q |f - \phi|^p = \int_{Q(f \neq \phi)} |f - \phi|^p \leq (2M)^p \lambda Q(f \neq \phi) \leq (2M)^p \varepsilon$$

Видим, что в  $L_p$  эти две функции сколь угодно мало отличаются. Осталось решить проблему с  $2\pi$  - периодичностью.

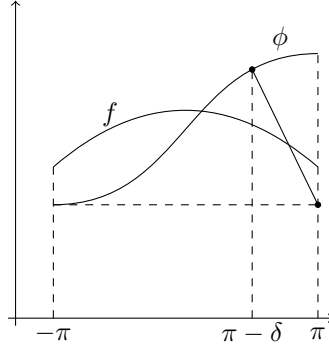


Рис. 2: КАРТИНКА

В данном Случае можно просто линейно проинтерполировать нужную точку и значение на границе  $\delta$ -окрестности (непрерывность при этом сохранится).

$$\int_Q |\phi - f| = \int_{\pi - \delta}^{\pi} |f - \phi| \leq 2M\delta \leq \varepsilon$$

□

Из свойств интеграла Фейера следует, что это линейный оператор, а значит, для него определена норма линейного оператора.

**Утверждение 10.16.** Пусть  $f \in L_p$ , тогда  $\|\sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p$

*Доказательство.* Применим неравенство Гельдера.

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(f, x)\|_p^p &= \int_Q |\sigma_n(f, x)|^p dx = \int_Q \left| \int_Q f(x+t) \Phi_n(t) dt \right|^p dx \leq \int_Q \left( \int_Q |f(x+t)| \Phi_n(t) dt \right)^p dx = (\star) \\ \int_Q |f(x+t)| \Phi_n(t) dt &= \int_Q \left( |f(x+t)| \Phi_n^{\frac{1}{p}}(t) \right) \Phi_n^{\frac{1}{q}}(t) dt \leq \left( \int_Q |f(x+t)|^p \Phi_n(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_Q \Phi_n(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \left( \text{так как } \int_Q \Phi_n(t) dt = 1 \right) = \left( \int_Q |f(x+t)|^p \Phi_n(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ (\star) &\leq \int_Q \left( \int_Q |f(x+t)|^p \Phi_n(t) dt \right) dx \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_Q \left( \int_Q |f(x+t)|^p \Phi_n(t) dx \right) dt = \int_Q \Phi_n(t) \left( \int_Q |f(x+t)|^p dx \right) dt = \\ &\quad (\text{в силу } 2\pi\text{-периодичности } f, \int_Q |f(x+t)|^p dx - \text{ не зависит от } t) = \|f\|_p^p \end{aligned}$$

Следовательно,  $\|\sigma_n(f)\|_p^p \leq \|f\|_p^p$

□

**Теорема 10.17** (Теорема Фейера в  $L_p$ ). Пусть  $f \in L_p$ , тогда  $\|\sigma_n(f) - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

*Доказательство.* Пусть  $G_n(f) = \|f - \sigma_n(f)\|_p \leq \|f\|_p + \|\sigma_n(f)\|_p \leq 2\|f\|_p$ .

Замечание 1 Пусть  $g \in C$ ,  $|g(x)| \leq \|g(x)\|_C \stackrel{\text{def}}{=} \max_Q |g(x)|$

Замечание 2  $\|g(x)\|_p \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \|g(x)\|_C$

По всюду плотности  $C$  в  $L_p$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists g_\varepsilon \in C : \|f - g_\varepsilon\|_p < \varepsilon$

Замечание 3  $G_n(f_1 + f_2) = \|f_2 - \sigma_n(f_2) + f_1 - \sigma_n(f_1)\|_p \leq G_n(f_1) + G_n(f_2)$ . Это называется полуаддитивность функционала.

$$G_n(f) = G_n(f - g_\varepsilon + g_\varepsilon) \leq G_n(f - g_\varepsilon) + G_n(g_\varepsilon) \leq \varepsilon + G_n(g_\varepsilon) \leq \varepsilon + (2\pi)^{\frac{1}{p}} \|g_\varepsilon - G_n(g_\varepsilon)\|_C \\ \|g_\varepsilon - G_n(g_\varepsilon)\|_C \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (в силу непрерывности } g_\varepsilon)$$

Следовательно,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N G_n(f) \leq (1 + (2\pi)^{\frac{1}{p}}) \varepsilon$  □

**Следствие 10.18** (Теорема Вейерштрасса в  $L_p$ ).  $\forall \varepsilon > 0 \forall f \in L_p \exists T$  - тригонометрический полином :  $\|f - T\|_p \leq \varepsilon$

*Доказательство.* По теореме Фейера,  $\|f - \sigma_n(f)\|_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Значит  $\exists n_0 : \|f - \sigma_{n_0}(f)\|_p \leq \varepsilon$ , теперь вспомним, что  $\sigma_n(f)$  - тригонометрический полином. □

## 10.7 Сходимость ряда Фурье в индивидуальных точках