

# Математический анализ 4 семестр

shared with ♡ by artemZholus

## Содержание

<b>1</b>	<b>Критерий Лебега интегрируемости по Риману</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Суммируемые функции</b>	<b>3</b>
2.1	Неотрицательные суммируемые функции . . . . .	3
2.2	Суммируемые функции произвольного знака . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Предельный переход в классе суммируемых функций</b>	<b>6</b>
3.1	Теорема Лебега о мажорируемой сходимости . . . . .	6
3.2	Теорема Леви . . . . .	7
3.3	Теорема Фату . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Пространства <math>L_p</math></b>	<b>9</b>
4.1	Неравенство Гельдера . . . . .	9
4.2	Неравенство Минковского . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Мера подграфика</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Теорема Фубини</b>	<b>13</b>

# 1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

**Определение** (Колебание на отрезке).

$$\omega(f, c, d) = \sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f = (\text{по лемме из 1го семестра}) = \sup_{x', x'' \in [c,d]} |f(x') - f(x'')|$$

**Определение** (Колебание функции в точке).

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, x + \delta, x - \delta)$$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если  $0 < \delta_1 < \delta_2$  то  $\omega(f, x - \delta_1, x + \delta_1) < \omega(f, x - \delta_2, x + \delta_2)$ . Поэтому, вышеприведенный предел существует.

**Утверждение 1.1.**  $\omega(f, x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

*Доказательство.* 1.  $\Leftarrow$  Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего  $\sup$  и  $\inf$ . Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.

2.  $\Rightarrow$   $\omega(f, x) = 0$  означает, что можно подобрать такую  $\delta$ -окрестность для  $x$ , что она будет сколь угодно малой. Берем формулу  $\sup_{x', x'' \in [x-\delta, x+\delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$  фиксируем  $x'' = x$  (от этого  $\sup$  разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в  $x$ . □

**Определение.**  $\tau$  : - разбиение отрезка  $[a, b]$ , если  $\tau = \{x_j\} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Ведем кусочно-постоянную функцию  $g(\tau, x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$ , при  $x \in [x_j, x_{j+1}]$

**Утверждение 1.2.**  $g(\tau_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega(f, x)$  почти всюду на отрезке

*Доказательство.* Очевидно, мы можем подбирать  $\tau_n$  так, чтобы границы отрезка, содержащего  $x$  совпали с границами из определения  $\omega(f, x)$ . Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду □

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int_{[a,b]} g(\tau_n, x) dx \rightarrow \int_{[a,b]} \omega(f, x) dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна  $\int_{[a,b]} g(\tau_n, x) dx = \omega(f, \tau_n)$ . Получаем:

$$\lim_{rang \tau_n \rightarrow 0} \omega(f, \tau_n) = \int_{[a,b]} \omega(f, x) dx$$

Это наша рабочая формула.

**Теорема 1.3** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$$f \in \mathfrak{R}(a, b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$$

*Доказательство.* 1.  $\Rightarrow$

Пусть  $\omega(f, x) = 0$  почти всюду на  $[a, b]$ . Тогда  $\int_{[a,b]} \omega(f, x) dx = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{R}[a, b]$

2.  $\Leftarrow$

Пусть  $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ . Тогда, по определению,  $\omega(f, \tau_n) \rightarrow 0$ . Тогда  $\int_{[a,b]} \omega(f, x) dx = 0$ . Но  $\omega(f, x) \geq 0$ . Значит  $\omega(f, x) = 0$  почти всюду на  $[a, b]$  (И, по лемме, почти всюду непрерывна). □

## 2 Суммируемые функции

### 2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера  $\mu$  - полная и  $\sigma$ -конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что  $E \in \mathcal{A}$ ,  $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $E$ .

**Определение.**  $e \subset E$  называется допустимым для  $f$  если:

1.  $\mu(e) < +\infty$
2.  $f$  - ограничена на  $e$

**Утверждение 2.1.** *Непустые допустимые множества существуют.*

*Доказательство.* Пусть  $E_n = E(n < f(x) \leq n + 1)$ . Понятно, что  $E = \bigcup_n E_n$ . По  $\sigma$ -конечности  $X = \bigcup_m X_m$ , причем  $X_m$  - конечномерны. Тогда  $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$  - допустимые множества. Если они все пустые, то  $E$ , тоже пусто. Значит среди них хотя бы одно непустое.  $\square$

**Определение** (Несобственный интеграл Лебега).

$$\int_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{e \text{ - допустимо}} \int_e f d\mu$$

**Определение** (Неотрицательная суммируемая функция). Неотрицательная функция  $f$  называется суммируемой на множестве  $E$ , если  $\int_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если  $\mu E < +\infty$ ,  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_E f d\mu = \sup_{e \subset E} \int_e f d\mu$ .

Проверим аддитивность и линейность.

**Теорема 2.2** ( $\sigma$ -аддитивность несобственного интеграла Лебега).

Пусть  $E = \bigcup_n E_n$  - дизъюнктивны. Тогда  $\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом  $\sigma$ -аддитивность

*Доказательство.* 1. Пусть  $E = E_1 \cup E_2$ . Пусть  $e_1 \in E_1$ ,  $e_2 \in E_2$  - допустимые. И любое допустимое для  $E$  множество  $e = e_1 \cup e_2$ . Для определенного интеграла мы знаем, что  $\int_e f = \int_{e_1} f + \int_{e_2} f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Переходя к  $\sup$  по  $e$  получаем  $\int_E f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

В обратную сторону. Считаем, что  $f$  - суммируема (иначе все тривиально). По определению  $\sup$ ,  $\forall \varepsilon > 0 \exists e_j \subset E_j : \int_{e_j} f - \varepsilon < \int f$ .

$\int_{E_1} f + \int_{E_2} f - 2\varepsilon < \int_{e_1} f + \int_{e_2} f = \int_e f \leq \int_E f$ . Устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим  $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f \leq \int_E f$ .

Значит  $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f = \int_E f$

2. Итак, пусть  $e = \bigcup_{n=1}^{+\infty} e_n$ . Очевидно  $\int_{e_n} f \leq \int_{E_n} f$  и  $\int_e f = \sum_n \int_{e_n} f$ . Значит  $\int_e f \leq \sum_n \int_{E_n} f$ .

Обратно.  $\forall \varepsilon > 0 \exists e_n \subset E_n$  :

$\int_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int_{e_n} f$ . Сложим первые  $p$  неравенств:  $\sum_{n=1}^p \int_{E_n} f - \varepsilon \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n} < \sum_{n=1}^p \int_{e_n} f \leq \int_E f$ . Устремляя  $p \rightarrow +\infty$ ,

получаем  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f - \varepsilon \leq \int_E f$ . Теперь устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$  и получим обратное неравенство.

$\square$

**Теорема 2.3** (Линейность несобственного интеграла Лебега).

1.  $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha > 0$
2.  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$

*Доказательство.* Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть  $E_n = E(n < f + g \leq n + 1)$ . Тогда, очевидно,  $E = \bigcup_n E_n$ . По  $\sigma$ -конечности можно написать  $X = \bigcup_n X_n$ . От  $X_n$  мы хотим дизъюнктивности, поэтому, если они не таковы, то сделаем следующий трюк:

$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup_1^{n-1} X_j) \cup \dots$ . Теперь  $E$  можно разбить как  $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$  - эти множества дизъюнктивны и допустимы для  $f + g$ . Далее по  $\sigma$ -аддитивности пишем:  $\int_E (f + g) = \sum_n \int_{A_n} (f + g) =$  (по линейности определенного интеграла)  $= \sum_n \int_{A_n} f + \sum_n \int_{A_n} g =$  (по  $\sigma$ -аддитивности несобственного)  $= \int_E f + \int_E g \quad \square$

**Утверждение 2.4.** Если  $0 \leq f \leq g$ , то  $\int_E f \leq \int_E g$

*Доказательство.*  $0 \leq g - f$  - по арифметике измеримости, эта функция суммируема. Раз она неотрицательна, интеграл от нее тоже.

$$0 \leq \int_E g - f = \int_E g - \int_E f \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$$

$\square$

## 2.2 Суммируемые функции произвольного знака

**Определение.**

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , f(x) < 0 \\ f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что  $f = f^+ - f^-$ ,  $|f| = f^+ + f^-$ .  $f^+$  и  $f^-$  - неотрицательные суммируемые функции (если  $f$  - измерима).

**Определение.**  $f$  называется суммируемой на  $E$ , если одновременно  $f^+$  и  $f^-$  - суммируемы.

$$\int_E f \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f^+ - \int_E f^-$$

**Утверждение 2.5.**  $f$  - суммируема  $\Leftrightarrow |f|$  - суммируема.

*Доказательство.*  $f$  - суммируема тогда и только тогда, когда  $f^+$  и  $f^-$  - суммируемы.  $|f|$  - суммируема тогда и только тогда, когда  $f^+$  и  $f^-$  - суммируемы.  $\square$

Аналогом суммируемости функций служит абсолютная сходимость.

Проверим  $\sigma$ -аддитивность и линейность для случая функции произвольного знака:

**Теорема 2.6** (Аддитивность в случае произвольного знака). Пусть  $E = \bigcup_n E_n$  - дизъюнктивные, тогда

$$\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$$

*Доказательство.*  $\int_E f^+ = \sum_n \int_{E_n} f^+$ , то же для  $f^-$ . Тогда  $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_n \int_{E_n} f^+ - \sum_n \int_{E_n} f^- = \sum_n (\int_{E_n} f^+ - \int_{E_n} f^-) = \sum_n \int_{E_n} f$   $\square$

**Теорема 2.7** (Линейность в случае произвольного знака).

$$1. \int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

*Доказательство.* Пункт 1 очевиден, не будем на нем останавливаться. Докажем пункт 2:

$$\int_E f + \int_E g = \left( \int_E f^+ + \int_E g^+ \right) - \left( \int_E f^- + \int_E g^- \right) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) = (*) = \int_E (f+g)^+ - \int_E (f+g)^- = \int_E (f+g)$$

Проверим переход (\*). Для этого нужно, чтобы выполнялось  $(f^+ + g^+) = (f + g)^+$  - в общем случае, это неправда. Поэтому нужно рассмотреть много случаев:

1.  $f \geq 0, g \geq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_1 = E(f \geq 0, g \geq 0)$ , тогда

- $f^+ = f, g^+ = g, (f + g)^+ = f + g \Rightarrow f^+ + g^+ = f + g = (f + g)^+$
- $f^- = 0, g^- = 0, (f + g)^- = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0$

2.  $f \leq 0, g \leq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_2 = E(f \leq 0, g \leq 0)$ , разбираем аналогично пункту (1) - появятся минусы в формулах

В остальных случаях переход (\*) не верен, но под-интегральные функции можно перегруппировать по другому, например  $\int_E (f^+ - g^-) - \int_E (f^- - g^+) :$

3.  $f \geq 0, g \leq 0 \Rightarrow$  тут нужно различить два подслучая:

(a)  $f + g \geq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_3 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g \geq 0)$ , тогда

- $f^+ = f, g^- = -g, (f + g)^+ = f + g \Rightarrow f^+ - g^- = f + g = (f + g)^+$
- $f^- = 0, g^+ = 0, (f + g)^- = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$

(b)  $f + g < 0 \Rightarrow$  пусть  $E_4 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g < 0)$ , тогда

- $f^+ = f, g^- = -g, (f + g)^- = -(f + g) \Rightarrow -f^+ + g^- = -(f + g) = (f + g)^-$
- $f^- = 0, g^+ = 0, (f + g)^+ = 0 \Rightarrow -0 + 0 = 0$

4.  $f \leq 0, g \geq 0 \Rightarrow$  аналогично, два подслучая, разбор которых аналогичен пункту (3), если поменять  $f$  и  $g$  местами :

(a)  $f + g \geq 0 \Rightarrow$  пусть  $E_5 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g \geq 0)$

(b)  $f + g < 0 \Rightarrow$  пусть  $E_6 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g < 0)$

Очевидно, эти множества дизъюнктивны (на 0 забудем) и можно написать:  $\int_E f = \sum_{j=1}^6 \int_{E_j} f$ .  $\square$

### 3 Пределный переход в классе суммируемых функций

#### 3.1 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

**Теорема 3.1** (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$ ,  $|f_n| \leq \phi$  на  $E$ ,  $\phi$  - суммируема.

Тогда:

1.  $f$  - суммируема

2.  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$

Следует иметь ввиду, что в условии теоремы достаточно требовать выполнения свойств почти всюду.

**Теорема 3.2.** Пусть  $f$  - суммируема на  $E$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E' \subset E \Rightarrow \mu E' < \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| < \varepsilon$

*Доказательство.* По определению, можно написать  $\forall \varepsilon > 0 \exists e : \int_{E \setminus e} |f| < \varepsilon$ . Так как  $e$  - допустимо,  $f$  - ограничена на  $e$  и  $E = (E \setminus e) \cup e$ . Возьмем любое  $E' \subset E$ , тогда  $E' = E'(E \setminus e) \cup E'e$ .

$$\left| \int_{E'} f \right| \leq \left| \int_{E'(E \setminus e)} f \right| + \left| \int_{E'e} f \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{E'e} f \right|$$

Мы считаем, что  $|f(x)| \leq M$ . Заметим, что выбор  $E'$  не накладывал никаких ограничений на  $M$ . Тогда:

$$\int_{E'e} |f| \leq M \mu E'e \leq M \mu E'$$

Поэтому  $\delta$  мы можем выбрать как  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ . И получится, что  $\mu E' \leq \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| \leq 2\varepsilon$  □

*Доказательство теоремы Лебега.* По теореме Рисса  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду, причем  $|f_{n_k}(x)| \leq \phi(x)$ , значит  $|f(x)| \leq \phi(x) \Rightarrow f$  - суммируема. Рассмотрим  $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \leq \int_E |f_n - f|$ . Так как  $\phi$  - суммируема,

$\forall \varepsilon > 0 \exists e(\text{допустимое для } \phi) : \int_{E \setminus e} \phi \leq \varepsilon$

$$\int_E |f_n - f| = \int_{E \setminus e} |f_n - f| + \int_e |f_n - f| \leq 2\varepsilon + \int_e |f_n - f|$$

Пусть  $|\phi| \leq M \Rightarrow |f_n - f| \leq 2M$ . Так же мы знаем, что  $\int_e |f_n - f| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Значит, начиная с некоторого  $N_0$ ,  $\int_e |f_n - f| < \varepsilon$ . Следовательно, начиная с  $N_0$ ,  $\int_E |f_n - f| \leq 3\varepsilon$  □

### 3.2 Теорема Леви

**Теорема 3.3** (Теорема Леви). Пусть  $f_n(x) \leq 0$ ,  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  на  $E$ . Тогда  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$

*Доказательство.* Два случая:

1.  $f$  - почти всюду конечна на  $E$ . Два подслучая:

(a)  $\int_E f < +\infty$ . Так как  $|f_n(x)| \leq f(x) \Rightarrow f$  - суммируемая мажоранта для  $f_n$ , и теорема верна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

(b)  $\int_E f = +\infty$ . ( $f$  все еще мажоранта для  $f_n$ , но уже не суммируемая) Мы поступим так. Раз  $\sup_{e-\text{допустимо}} \int_e f = +\infty$ , значит  $\forall c > 0 \exists e - \text{допустимо}$  для  $f : c < \int_e f$ . В силу  $f_n \leq f$  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости  $\int_e f_n \rightarrow \int_e f$ . Это значит, начиная с некоторого  $N_0$ ,  $c < \int_e f_n \leq \int_E f_n \Rightarrow \int_E f_n \rightarrow +\infty = \int_E f$

2.  $\mu E(f = +\infty) > 0$  (Расслабьтесь, и будет не больно)

Очевидно, в этой ситуации может быть только  $\int_E f = +\infty$ . Из  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \Rightarrow \int_E f_n(x) \leq \int_E f_{n+1}(x)$ .

По теореме Вейерштрасса, у последовательности  $\left\{ \int_E f_n \right\}$  будет существовать предел. Причем он будет конечным тогда и только тогда, когда эта последовательность ограничена. Так что нам нужно вывести противоречие из того факта, что эта последовательность ограничена. Предположим, что это так: пусть  $\int_E f_n \leq M$ . Итак, зафиксируем  $\forall c > 0$ . Рассмотрим  $E(f_n \geq c) \subset E$ .

$$\int_{E(f_n \geq c)} f_n \leq M$$

$$c \mu E(f_n \geq c) \leq \int_{E(f_n \geq c)} f_n \Rightarrow \mu E(f_n \geq c) \leq \frac{M}{c}$$

Можно проверить, что:

$$E(f = +\infty) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c)$$

*Доказательство.* Пусть  $x \in E(f = +\infty)$ . Значит  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Следовательно  $\forall c > 0 \exists N_x : \forall n > N_x$

$$N_x \Rightarrow f_n(x) \geq c \xrightarrow[\text{def}]{\text{by}} x \in \bigcap_{n=N_x}^{\infty} E(f_n \geq c) \quad \square$$

Заметим одну интересную штуку.

$$\forall c > 0 f_n(x) \geq c \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq c \Rightarrow E(f_n \geq c) \subset E(f_{n+1} \geq c) \Rightarrow \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) = E(f_m \geq c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) = \lim_{m \rightarrow +\infty} E(f_m \geq c)$$

Отсюда делаем вывод, что:

$$\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) \geq \mu E(f = +\infty)$$

$$\begin{aligned}
\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) &= \mu E(f_m \geq c) \leq \frac{M}{c} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) &\leq \frac{M}{c} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu E(f = +\infty) &\leq \frac{M}{c}
\end{aligned}$$

$c$  - любое, поэтому можно устремить  $c \rightarrow +\infty$ . Значит  $\mu E(f = +\infty) = 0$ . Противоречие получено. □

**Следствие 3.4.** Пусть  $u_n(x) \geq 0$  и  $\sum_n \int_E u_n$  - сходится. Тогда  $\sum_n u_n(x)$  - сходится почти всюду на  $E$ .

*Доказательство.*  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ . Так как интеграл сходится, его частичная сумма ограничена.  $M \geq \sum_{n=1}^m \int_E u_n = \int_E S_m$ . Обозначим  $S(x) = \sum_n u_n(x)$ . В силу неотрицательности  $u_n(x)$ ,  $S_n(x)$  - возрастает ( $S_n \leq S_{n+1}$ ), и  $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ . Следовательно, по теореме Леви  $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$ . Следовательно,  $S$  - суммируемая функция, это значит, что она почти всюду конечна. □

**Следствие 3.5.** Пусть  $f \geq 0$ ,  $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$  - срезка функции  $f$ . Тогда  $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$ .

*Доказательство.*  $f_n$  удовлетворяют условиям теоремы Леви. □

### 3.3 Теорема Фату

**Теорема 3.6** (Теорема Фату). Пусть  $f_n \geq 0$ ,  $f_n \Rightarrow f$  на  $E$ . Тогда

$$\int_E f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n$$

*Доказательство.* Применим теорему Рисса, получив, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду. Без ограничения общности можем считать, что  $f_n \rightarrow f$  почти всюду (потому что если доказать для  $\sup$  по подпоследовательности, неравенство будет верно и для последовательности). Пусть  $g_n = \min\{f_n, f\}$ . Тогда  $g_n \leq f$ . Рассмотрим два случая:

1.  $f$  - суммируема. Тогда, по теореме Лебега,  $\int_E g_n \rightarrow \int_E f$ . Предел последовательности  $\int_E g_n$  не превзойдет своего верхнего предела, поэтому  $\int_E f \leq \sup_n \int_E g_n \leq \sup_n \int_E f_n$ .
2.  $\int_E f = +\infty$ . Тогда  $\forall e$  - допустимо для  $f$ .  $\int_e f < +\infty$  Как мы показали,  $\int_e f \leq \sup_n \int_e f_n$ . Переходя к  $\sup$  по  $e$  получаем необходимое неравенство.

□



## 4 Пространства $L_p$

**Определение.**  $L_p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{измерима}, \int_E |f|^p < +\infty \right\}$

Нам нужно проверить, что  $L_p(E)$  - НП. То есть,  $f, g \in L_p \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L_p$ ,  $\|f\|_p = \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Причем,  $\|f\|$  - удовлетворяет аксиомам нормы.

**Утверждение 4.1.**  $\|f\|_p$  удовлетворяет двум свойствам:

1.  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
2.  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

*Доказательство.* 1. Очевидно.

2.  $\int_E |f + g|^p \leq \int_E (|f| + |g|)^p$ . Пусть  $E_1 = E(|f| \leq |g|)$ ,  $E_2 = E(|f| > |g|)$ . Тогда  $E = E_1 \cup E_2$ .

$$\begin{aligned} \int_E (|f| + |g|)^p &= \int_{E_1} (|f| + |g|)^p + \int_{E_2} (|f| + |g|)^p \leq \\ &\leq \int_{E_1} (2|g|)^p + \int_{E_2} (2|f|)^p < +\infty \end{aligned}$$

Следовательно  $f + g \in L_p$

□

### 4.1 Неравенство Гельдера

**Теорема 4.2** (Неравенство Гельдера). Пусть  $p > 1$  и  $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Пусть  $f \in L_p$ ,  $g \in L_q$ . Тогда

$$\int_E |f| |g| \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

*Доказательство.* Воспользуемся неравенством Юнга:  $(uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q)$ . Пусть  $u = \frac{|f|}{\|f\|_p}$ ,  $v = \frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\begin{aligned} \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \\ \int_E \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

□

### 4.2 Неравенство Минковского

**Теорема 4.3** (Неравенство Минковского). Пусть  $p > 1$ ,  $f, g \in L_p$ . Тогда

$$\left( \int_E (|f| + |g|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$ .

$$\begin{aligned} \int_E (f + g)^p &= \int_E f(f + g)^{p-1} + \int_E g(f + g)^{p-1} \leq \\ &\leq \left( \int_E f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E (f + g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_E g^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_E (f + g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \text{пусть } q = \frac{p}{p-1} \\ &\left( \int_E (f + g)^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left( \int_E f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

□

Если подставить в неравенство Минковского определение нормы, то можно заметить, что мы доказали неравенство треугольника.

**Теорема 4.4.**  $L_p(E)$  - Банахово пространство.

Докажем вспомогательную лемму:

**Лемма 4.5.** Пусть  $f_n$  - измеримы, и  $\forall \delta > 0 \mu E(|f_n - f_m| \geq \delta) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$ . Тогда  $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : f_{n_k} \rightarrow f$  почти всюду.

*Доказательство.* Пусть  $\delta = \frac{1}{2^k}$ . Можно проверить, что (**TODO**)  $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : \mu E(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$ . Рассмотрим следующее множество:

$$E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq \frac{1}{2^j} \right)$$

Рассмотрим функциональный ряд  $S = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots$ . Фиксируем  $x \in E'$ . Тогда

$\exists k_x : x \in \bigcap_{j=k_x}^{\infty} E(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq \frac{1}{2^j})$ . Это значит, что при  $j > k_x$  выполняется  $|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \frac{1}{2^j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ .

Следовательно, на  $E'$  функциональный ряд  $S$  - сходится. Нам осталось проверить, что его дополнение нуль-мерно. Т. е.  $\mu \overline{E'} = 0$ . Очевидно:

$$\begin{aligned} \overline{E'} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{E'} \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} E \left( |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \overline{E'} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu E(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \overline{E'} = 0 \end{aligned}$$

□

*Доказательство Теоремы.* Докажем для случая  $p = 1$  (общий случай напишу потом **TODO**). Итак,  $f_n \in L_1(E)$ ,  $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$ . Зафиксируем  $\forall \delta > 0$ . Тогда

$$\delta \mu E(|f_n - f_m| \geq \delta) \leq \int_{E(|f_n - f_m| \geq \delta)} |f_n - f_m| \leq \int_E |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$$

Отсюда, по лемме,  $\exists(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) : f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f$  почти всюду на  $E$ . Коль скоро  $k$  - фиксированное,  $|f_{n_k} - f_{n_m}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} |f_{n_k} - f|$  почти всюду на  $E$ . По теореме Фату:

$$\int_E |f_{n_k} - f| \leq \sup_m \int_E |f_{n_k} - f_{n_m}|$$

В силу  $\|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \xrightarrow{k, m \rightarrow +\infty} 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall k, m > M \Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \leq \varepsilon$$

Без ограничения общности можем считать, что  $k$  и  $m$  удовлетворяют вышеприведенному условию. Получаем, что

$$\forall k > M \Rightarrow \int_E |f_{n_k} - f| \leq \varepsilon$$

Отсюда,  $f_{n_k} - f$  суммируема, а значит  $\in L_1$ . Но, по условию,  $f_{n_k} \in L_1 \Rightarrow f \in L_1$ . Так же, мы знаем, что  $\|f_{n_k} - f\|_1 \leq \varepsilon$ , что, в свою очередь означает, что  $f_{n_k} \rightarrow f$  по норме в  $L_1$ . Оценим  $\|f_n - f\|_1$ :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &\leq \|f_{n_k} - f_n\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1 \\ \|f_{n_k} - f_n\|_1 &\xrightarrow{n, k \rightarrow +\infty} 0 \\ \|f_{n_k} - f\|_1 &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Получаем сходимость  $f_n$  к  $f$  по норме в  $L_1$ . А значит - полноту.  $\square$

Может показаться, что требование измеримости функции  $f$  в определении пространства  $L_p$  - излишне. Это отнюдь не так.

**Утверждение 4.6.** *Существует функция  $f$  такая, что ее  $p$ -я степень измерима, но сама функция - нет.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное неизмеримое множество  $C \subset \mathbb{R}$ . Тогда пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Очевидно,  $f$  - неизмерима (так как множество Лебега  $E(f > \frac{1}{2}) = C$  - неизмеримо). Но  $f^2(x) = 1$  при  $x \in \mathbb{R}$  - очевидно, измеримая функция.  $\square$

Рассмотрим  $f, g \in L_2$ . По неравенству Гельдера, их произведение суммируемо. Положим  $\langle f, g \rangle = \int_E f \cdot g$ . Очевидно, таким образом построенное отображение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Получается, что  $L_2$  - гильбертово пространство с нормой, естественным образом порожденной скалярным произведением:  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .

Приведем важный частный случай пространства  $L_2(E)$ : В качестве тройки множество -  $\sigma$ -алгебра - мера возьмем:  $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ , где  $\mu$  - считающая мера (количество элементов в множестве). Тогда

$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ . В данном контексте суммируемость будет значить абсолютную сходимость.

Рассмотрим  $L_2(\mathbb{N})$ , Обозначаем  $a_n = f(n)$ . Тогда  $f \in L_2(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum_n a_n^2 < +\infty$ . Принято обозначать  $L_2(\mathbb{N}) = l_2$

## 5 Мера подграфика

Итак, рассмотрим  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Считаем, что мера - полная и  $\sigma$ -конечная.  $f : E \xrightarrow{\text{изм.}} \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  почти всюду.

**Определение.**  $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$  - подграфик функции  $f$ .

Здесь и далее, в качестве  $X \equiv \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \equiv \lambda_n$ .

**Теорема 5.1** (Об измеримости подграфика). *Подграфик измерим, и его мера равна  $\lambda_{n+1}(G_f) = \int_E f dx$*

**Утверждение 5.2.**  $G_c(E)$  - измеримо,  $\lambda G_c(E) = c\lambda E$ , где  $c$  - константа.

*Доказательство.* Пойдем от простого к сложному. Для ячейки  $\mathbb{R}^n$  формула верна по определению. Пусть теперь  $E$  - открытое множество. Как известно, любое открытое множество представляется в виде  $E = \bigcup_m \Pi_m$ ,  $\Pi_m$  - дизъюнктные ячейки.  $G(E) = \bigcup_m G(\Pi_m) \Rightarrow \lambda G(E) = \sum_m \lambda G(\Pi_m) = c \sum_m \lambda G(\Pi_m) = c\lambda E$ . Далее, без ограничения общности, можем считать, что  $\mu E < +\infty$  (Потому что у нас есть  $\sigma$  - конечность;  $\mathbb{R}^n = \bigcup_m T_m$  ( $T_m : \lambda T_m < +\infty$ )  $\Rightarrow E = \bigcup_m ET_m$  ( $\lambda ET_m < +\infty$ )). Воспользуемся формулой:  $\lambda^* E = \inf_{E \subset G - \text{открыто}} \lambda G$ . По аксиоме выбора,  $\exists G_m : G_m \subset G_{m+1}, E = \bigcap_m G_m$ . Понятно, что тогда  $\lambda G_m \rightarrow \lambda E$ . Так же  $G(E) = \bigcap_m G(G_m)$ . Следовательно  $\lambda G(G_m) = c\lambda G_m \rightarrow c\lambda E$   $\square$

*Доказательство теоремы.* Мы умеем писать суммы Лебега-Дарбу:  $\underline{S}(\tau) \leq \int_E f \leq \overline{S}(\tau)$ . Важно, что интеграл Лебега - единственное число, которое обладает таким свойством.  $\tau : E = \bigcup_m e_m$  - конечное объединение дизъюнктных множеств, и

$$\begin{aligned} \underline{S}(\tau) &= \sum_p m_p \lambda e_p, \quad m_p = \inf_{x \in e_p} f(x) \\ \overline{S}(\tau) &= \sum_p M_p \lambda e_p, \quad M_p = \sup_{x \in e_p} f(x) \end{aligned}$$

Обозначим  $\underline{E}_p = G_{m_p}(e_p)$ . Тогда  $\lambda \underline{E}_p = m_p \lambda e_p$ . Пусть  $\underline{E}(\tau) = \bigcup_p \underline{E}_p$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda \underline{E}(\tau) &= \sum_{p=1}^n \lambda \underline{E}_p = \sum_{p=1}^n m_p \lambda e_p = \underline{S}(\tau) \\ \lambda \overline{E}(\tau) &= \sum_{p=1}^n \lambda \overline{E}_p = \sum_{p=1}^n M_p \lambda e_p = \overline{S}(\tau) \\ \underline{E}(\tau) &\subset G_f(E) \subset \overline{E}(\tau) \end{aligned}$$

По свойствам сумм Лебега-Дарбу:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon : \forall \tau \leq \tau_\varepsilon \quad \overline{S}(\tau) - \underline{S}(\tau) \leq \varepsilon$ . Сопоставляя это с предыдущими фактами, получаем  $\underline{S}(\tau) \leq \lambda G_f(E) \leq \overline{S}(\tau)$ . И тогда, необходимо,  $\lambda G_f(E) = \int_E f$   $\square$

## 6 Теорема Фубини