

Математический анализ 4 семестр

shared with ♡ by artemZholus

Содержание

1	Критерий Лебега интегрируемости по Риману	2
2	Суммируемые функции	3
2.1	Неотрицательные суммируемые функции	3
2.2	Суммируемые функции произвольного знака	4
3	Предельный переход в классе суммируемых функций	6
3.1	Теорема Лебега о мажорируемой сходимости	6
3.2	Теорема Леви	7
3.3	Теорема Фату	8
4	Пространства L_p	9
4.1	Неравенство Гельдера	9
4.2	Неравенство Минковского	9
5	Мера подграфика	12
6	Теорема Фубини	13
7	О многократных интегралах Римана	14

1 Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение (Колебание на отрезке).

$$\omega(f, c, d) = \sup_{[c,d]} f - \inf_{[c,d]} f = (\text{по лемме из 1го семестра}) = \sup_{x', x'' \in [c,d]} |f(x') - f(x'')|$$

Определение (Колебание функции в точке).

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, x + \delta, x - \delta)$$

Очевидно, колебание на отрезке неотрицательно, и, если $0 < \delta_1 < \delta_2$ то $\omega(f, x - \delta_1, x + \delta_1) < \omega(f, x - \delta_2, x + \delta_2)$. Поэтому, вышеприведенный предел существует.

Утверждение 1.1. $\omega(f, x) = 0 \Leftrightarrow f \in C(x)$

Доказательство. 1. \Leftarrow Раз функция непрерывна, значит она достигает на отрезке своего \sup и \inf . Значит, если устремить границы отрезка к одной точке, в пределе получим разность двух одинаковых чисел.

2. \Rightarrow $\omega(f, x) = 0$ означает, что можно подобрать такую δ -окрестность для x , что она будет сколь угодно малой. Берем формулу $\sup_{x', x'' \in [x-\delta, x+\delta]} |f(x') - f(x'')| = 0$ фиксируем $x'' = x$ (от этого \sup разве что уменьшится) и получаем определение непрерывности в x . □

Определение. τ : - разбиение отрезка $[a, b]$, если $\tau = \{x_j\} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Ведем кусочно-постоянную функцию $g(\tau, x) = \omega(f, x_j, x_{j+1})$, при $x \in [x_j, x_{j+1}]$

Утверждение 1.2. $g(\tau_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega(f, x)$ почти всюду на отрезке

Доказательство. Очевидно, мы можем подбирать τ_n так, чтобы границы отрезка, содержащего x совпали с границами из определения $\omega(f, x)$. Тогда для неграничных точек получим стремление. Граничных точек на конечном шаге - конечное число, а это значит, что мы не перейдем за границу счетной мощности (danger zone - МАТЛОГИКА), и предел будет почти всюду □

Тогда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем:

$$\int_{[a,b]} g(\tau_n, x) dx \rightarrow \int_{[a,b]} \omega(f, x) dx$$

Левая часть, по лемме из первого семестра равна $\int_{[a,b]} g(\tau_n, x) dx = \omega(f, \tau_n)$. Получаем:

$$\lim_{rang \tau_n \rightarrow 0} \omega(f, \tau_n) = \int_{[a,b]} \omega(f, x) dx$$

Это наша рабочая формула.

Теорема 1.3 (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$$f \in \mathfrak{R}(a, b) \Leftrightarrow \lambda\{a : f \notin C(a)\} = 0$$

Доказательство. 1. \Rightarrow

Пусть $\omega(f, x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$. Тогда $\int_{[a,b]} \omega(f, x) dx = 0 \Rightarrow f \in \mathfrak{R}[a, b]$

2. \Leftarrow

Пусть $f \in \mathfrak{R}[a, b]$. Тогда, по определению, $\omega(f, \tau_n) \rightarrow 0$. Тогда $\int_{[a,b]} \omega(f, x) dx = 0$. Но $\omega(f, x) \geq 0$. Значит $\omega(f, x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$ (И, по лемме, почти всюду непрерывна). □

2 Суммируемые функции

2.1 Неотрицательные суммируемые функции

Здесь и далее считаем, что мера μ - полная и σ -конечная. Наша задача - распространить интеграл Лебега на более широкую ситуацию. Считаем, что $E \in \mathcal{A}$, $f : E \xrightarrow{\text{измеримо}} \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ на E .

Определение. $e \subset E$ называется допустимым для f если:

1. $\mu(e) < +\infty$
2. f - ограничена на e

Утверждение 2.1. *Непустые допустимые множества существуют.*

Доказательство. Пусть $E_n = E(n < f(x) \leq n + 1)$. Понятно, что $E = \bigcup_n E_n$. По σ -конечности $X = \bigcup_m X_m$, причем X_m - конечномерны. Тогда $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$ - допустимые множества. Если они все пустые, то E , тоже пусто. Значит среди них хотя бы одно непустое. \square

Определение (Несобственный интеграл Лебега).

$$\int_E f d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{e \text{ - допустимо}} \int_e f d\mu$$

Определение (Неотрицательная суммируемая функция). Неотрицательная функция f называется суммируемой на множестве E , если $\int_E f d\mu < +\infty$

Очевидно, если $\mu E < +\infty$, $f(x) \geq 0$, то $\int_E f d\mu = \sup_{e \subset E} \int_e f d\mu$.

Проверим аддитивность и линейность.

Теорема 2.2 (σ -аддитивность несобственного интеграла Лебега).

Пусть $E = \bigcup_n E_n$ - дизъюнктивны. Тогда $\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$

Докажем в два этапа. сначала конечную аддитивность, потом σ -аддитивность

Доказательство. 1. Пусть $E = E_1 \cup E_2$. Пусть $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ - допустимые. И любое допустимое для E множество $e = e_1 \cup e_2$. Для определенного интеграла мы знаем, что $\int_e f = \int_{e_1} f + \int_{e_2} f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

Переходя к \sup по e получаем $\int_E f \leq \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$

В обратную сторону. Считаем, что f - суммируема (иначе все тривиально). По определению \sup , $\forall \varepsilon > 0 \exists e_j \subset E_j : \int_{e_j} f - \varepsilon < \int f$.

$\int_{E_1} f + \int_{E_2} f - 2\varepsilon < \int_{e_1} f + \int_{e_2} f = \int_e f \leq \int_E f$. Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$ получим $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f \leq \int_E f$.

Значит $\int_{E_1} f + \int_{E_2} f = \int_E f$

2. Итак, пусть $e = \bigcup_{n=1}^{+\infty} e_n$. Очевидно $\int_{e_n} f \leq \int_{E_n} f$ и $\int_e f = \sum_n \int_{e_n} f$. Значит $\int_e f \leq \sum_n \int_{E_n} f$.

Обратно. $\forall \varepsilon > 0 \exists e_n \subset E_n$:

$\int_{E_n} f - \frac{\varepsilon}{2^n} < \int_{e_n} f$. Сложим первые p неравенств: $\sum_{n=1}^p \int_{E_n} f - \varepsilon \sum_{n=1}^p \frac{1}{2^n} < \sum_{n=1}^p \int_{e_n} f \leq \int_E f$. Устремляя $p \rightarrow +\infty$,

получаем $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f - \varepsilon \leq \int_E f$. Теперь устремим $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим обратное неравенство.

\square

Теорема 2.3 (Линейность несобственного интеграла Лебега).

$$1. \int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha > 0$$

$$2. \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство. Первое свойство следует непосредственно из определения. Докажем второе. Итак, пусть $E_n = E(n < f + g \leq n + 1)$. Тогда, очевидно, $E = \bigcup_n E_n$. По σ -конечности можно написать $X = \bigcup_n X_n$. От X_n мы хотим дизъюнктивности, поэтому, если они не таковы, то сделаем следующий трюк:

$X = X_1 \cup (X_2 \setminus X_1) \cup \dots \cup (X_n \setminus \bigcup_1^{n-1} X_j) \cup \dots$. Теперь E можно разбить как $E = \bigcup_{n,m} E_n X_m$ - эти множества дизъюнктивны и допустимы для $f + g$. Далее по σ -аддитивности пишем: $\int_E (f + g) = \sum_n \int_{A_n} (f + g) =$ (по линейности определенного интеграла) $= \sum_n \int_{A_n} f + \sum_n \int_{A_n} g =$ (по σ -аддитивности несобственного) $= \int_E f + \int_E g$ \square

Утверждение 2.4. Если $0 \leq f \leq g$, то $\int_E f \leq \int_E g$

Доказательство. $0 \leq g - f$ - по арифметике измеримости, эта функция суммируема. Раз она неотрицательна, интеграл от нее тоже.

$$0 \leq \int_E g - f = \int_E g - \int_E f \Rightarrow \int_E f \leq \int_E g$$

\square

2.2 Суммируемые функции произвольного знака

Определение.

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & , f(x) < 0 \\ f(x) & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , f(x) < 0 \\ 0 & , f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Заметим, что $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. f^+ и f^- - неотрицательные суммируемые функции (если f - измерима).

Определение. f называется суммируемой на E , если одновременно f^+ и f^- - суммируемы.

$$\int_E f \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Утверждение 2.5. f - суммируема $\Leftrightarrow |f|$ - суммируема.

Доказательство. f - суммируема тогда и только тогда, когда f^+ и f^- - суммируемы. $|f|$ - суммируема тогда и только тогда, когда f^+ и f^- - суммируемы. \square

Аналогом суммируемости функций служит абсолютная сходимость.

Проверим σ -аддитивность и линейность для случая функции произвольного знака:

Теорема 2.6 (Аддитивность в случае произвольного знака). Пусть $E = \bigcup_n E_n$ - дизъюнктивные, тогда

$$\int_E f = \sum_n \int_{E_n} f$$

Доказательство. $\int_E f^+ = \sum_n \int_{E_n} f^+$, то же для f^- . Тогда $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_n \int_{E_n} f^+ - \sum_n \int_{E_n} f^- = \sum_n (\int_{E_n} f^+ - \int_{E_n} f^-) = \sum_n \int_{E_n} f$ \square

Теорема 2.7 (Линейность в случае произвольного знака).

$$1. \int_E \alpha f = \alpha \int_E f, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$2. \int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

Доказательство. Пункт 1 очевиден, не будем на нем останавливаться. Докажем пункт 2:

$$\int_E f + \int_E g = \left(\int_E f^+ + \int_E g^+ \right) - \left(\int_E f^- + \int_E g^- \right) = \int_E (f^+ + g^+) - \int_E (f^- + g^-) = (*) = \int_E (f+g)^+ - \int_E (f+g)^- = \int_E (f+g)$$

Проверим переход (*). Для этого нужно, чтобы выполнялось $(f^+ + g^+) = (f + g)^+$ - в общем случае, это неправда. Поэтому нужно рассмотреть много случаев:

1. $f \geq 0, g \geq 0 \Rightarrow$ пусть $E_1 = E(f \geq 0, g \geq 0)$, тогда

- $f^+ = f, g^+ = g, (f + g)^+ = f + g \Rightarrow f^+ + g^+ = f + g = (f + g)^+$
- $f^- = 0, g^- = 0, (f + g)^- = 0 \Rightarrow 0 + 0 = 0$

2. $f \leq 0, g \leq 0 \Rightarrow$ пусть $E_2 = E(f \leq 0, g \leq 0)$, разбираем аналогично пункту (1) - появятся минусы в формулах

В остальных случаях переход (*) не верен, но под-интегральные функции можно перегруппировать по другому, например $\int_E (f^+ - g^-) - \int_E (f^- - g^+) :$

3. $f \geq 0, g \leq 0 \Rightarrow$ тут нужно различить два подслучая:

(a) $f + g \geq 0 \Rightarrow$ пусть $E_3 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g \geq 0)$, тогда

- $f^+ = f, g^- = -g, (f + g)^+ = f + g \Rightarrow f^+ - g^- = f + g = (f + g)^+$
- $f^- = 0, g^+ = 0, (f + g)^- = 0 \Rightarrow 0 - 0 = 0$

(b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_4 = E(f \geq 0, g \leq 0, f + g < 0)$, тогда

- $f^+ = f, g^- = -g, (f + g)^- = -(f + g) \Rightarrow -f^+ + g^- = -(f + g) = (f + g)^-$
- $f^- = 0, g^+ = 0, (f + g)^+ = 0 \Rightarrow -0 + 0 = 0$

4. $f \leq 0, g \geq 0 \Rightarrow$ аналогично, два подслучая, разбор которых аналогичен пункту (3), если поменять f и g местами :

(a) $f + g \geq 0 \Rightarrow$ пусть $E_5 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g \geq 0)$

(b) $f + g < 0 \Rightarrow$ пусть $E_6 = E(f \leq 0, g \geq 0, f + g < 0)$

Очевидно, эти множества дизъюнктивны (на 0 забудем) и можно написать: $\int_E f = \sum_{j=1}^6 \int_{E_j} f$. \square

3 Пределный переход в классе суммируемых функций

3.1 Теорема Лебега о мажорируемой сходимости

Теорема 3.1 (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости). Пусть $f_n \Rightarrow f$ на E , $|f_n| \leq \phi$ на E , ϕ - суммируема.

Тогда:

1. f - суммируема

2. $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$

Следует иметь ввиду, что в условии теоремы достаточно требовать выполнения свойств почти всюду.

Теорема 3.2. Пусть f - суммируема на E . Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall E' \subset E \Rightarrow \mu E' < \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| < \varepsilon$

Доказательство. По определению, можно написать $\forall \varepsilon > 0 \exists e : \int_{E \setminus e} |f| < \varepsilon$. Так как e - допустимо, f - ограничена на e и $E = (E \setminus e) \cup e$. Возьмем любое $E' \subset E$, тогда $E' = E'(E \setminus e) \cup E'e$.

$$\left| \int_{E'} f \right| \leq \left| \int_{E'(E \setminus e)} f \right| + \left| \int_{E'e} f \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{E'e} f \right|$$

Мы считаем, что $|f(x)| \leq M$. Заметим, что выбор E' не накладывал никаких ограничений на M . Тогда:

$$\int_{E'e} |f| \leq M \mu E'e \leq M \mu E'$$

Поэтому δ мы можем выбрать как $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. И получится, что $\mu E' \leq \delta \Rightarrow \left| \int_{E'} f \right| \leq 2\varepsilon$ □

Доказательство теоремы Лебега. По теореме Рисса $f_{n_k} \rightarrow f$ почти всюду, причем $|f_{n_k}(x)| \leq \phi(x)$, значит $|f(x)| \leq \phi(x) \Rightarrow f$ - суммируема. Рассмотрим $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \leq \int_E |f_n - f|$. Так как ϕ - суммируема,

$\forall \varepsilon > 0 \exists e(\text{допустимое для } \phi) : \int_{E \setminus e} \phi \leq \varepsilon$

$$\int_E |f_n - f| = \int_{E \setminus e} |f_n - f| + \int_e |f_n - f| \leq 2\varepsilon + \int_e |f_n - f|$$

Пусть $|\phi| \leq M \Rightarrow |f_n - f| \leq 2M$. Так же мы знаем, что $\int_e |f_n - f| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Значит, начиная с некоторого N_0 , $\int_e |f_n - f| < \varepsilon$. Следовательно, начиная с N_0 , $\int_E |f_n - f| \leq 3\varepsilon$ □

3.2 Теорема Леви

Теорема 3.3 (Теорема Леви). Пусть $f_n(x) \leq 0$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ на E . Тогда $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$

Доказательство. Два случая:

1. f - почти всюду конечна на E . Два подслучая:

(a) $\int_E f < +\infty$. Так как $|f_n(x)| \leq f(x) \Rightarrow f$ - суммируемая мажоранта для f_n , и теорема верна по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

(b) $\int_E f = +\infty$. (f все еще мажоранта для f_n , но уже не суммируемая) Мы поступим так. Раз $\sup_{e-\text{допустимо}} \int_e f = +\infty$, значит $\forall c > 0 \exists e - \text{допустимо}$ для $f : c < \int_e f$. В силу $f_n \leq f$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости $\int_e f_n \rightarrow \int_e f$. Это значит, начиная с некоторого N_0 , $c < \int_e f_n \leq \int_E f_n \Rightarrow \int_E f_n \rightarrow +\infty = \int_E f$

2. $\mu E(f = +\infty) > 0$ (Расслабьтесь, и будет не больно)

Очевидно, в этой ситуации может быть только $\int_E f = +\infty$. Из $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \Rightarrow \int_E f_n(x) \leq \int_E f_{n+1}(x)$.

По теореме Вейерштрасса, у последовательности $\left\{ \int_E f_n \right\}$ будет существовать предел. Причем он будет конечным тогда и только тогда, когда эта последовательность ограничена. Так что нам нужно вывести противоречие из того факта, что эта последовательность ограничена. Предположим, что это так: пусть $\int_E f_n \leq M$. Итак, зафиксируем $\forall c > 0$. Рассмотрим $E(f_n \geq c) \subset E$.

$$\int_{E(f_n \geq c)} f_n \leq M$$

$$c \mu E(f_n \geq c) \leq \int_{E(f_n \geq c)} f_n \Rightarrow \mu E(f_n \geq c) \leq \frac{M}{c}$$

Можно проверить, что:

$$E(f = +\infty) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c)$$

Доказательство. Пусть $x \in E(f = +\infty)$. Значит $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Следовательно $\forall c > 0 \exists N_x : \forall n > N_x$

$$N_x \Rightarrow f_n(x) \geq c \xrightarrow[\text{def}]{\text{by}} x \in \bigcap_{n=N_x}^{\infty} E(f_n \geq c) \quad \square$$

Заметим одну интересную штуку.

$$\forall c > 0 f_n(x) \geq c \Rightarrow f_{n+1}(x) \geq c \Rightarrow E(f_n \geq c) \subset E(f_{n+1} \geq c) \Rightarrow \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) = E(f_m \geq c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) = \lim_{m \rightarrow +\infty} E(f_m \geq c)$$

Отсюда делаем вывод, что:

$$\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) \geq \mu E(f = +\infty)$$

$$\begin{aligned}
\mu \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) &= \mu E(f_m \geq c) \leq \frac{M}{c} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E(f_n \geq c) &\leq \frac{M}{c} \Rightarrow \\
\Rightarrow \mu E(f = +\infty) &\leq \frac{M}{c}
\end{aligned}$$

c - любое, поэтому можно устремить $c \rightarrow +\infty$. Значит $\mu E(f = +\infty) = 0$. Противоречие получено. □

Следствие 3.4. Пусть $u_n(x) \geq 0$ и $\sum_n \int_E u_n$ - сходится. Тогда $\sum_n u_n(x)$ - сходится почти всюду на E .

Доказательство. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Так как интеграл сходится, его частичная сумма ограничена. $M \geq \sum_{n=1}^m \int_E u_n = \int_E S_m$. Обозначим $S(x) = \sum_n u_n(x)$. В силу неотрицательности $u_n(x)$, $S_n(x)$ - возрастает ($S_n \leq S_{n+1}$), и $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$. Следовательно, по теореме Леви $\int_E S_n \rightarrow \int_E S$. Следовательно, S - суммируемая функция, это значит, что она почти всюду конечна. □

Следствие 3.5. Пусть $f \geq 0$, $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ - срезка функции f . Тогда $\int_E f_n \rightarrow \int_E f$.

Доказательство. f_n удовлетворяют условиям теоремы Леви. □

3.3 Теорема Фату

Теорема 3.6 (Теорема Фату). Пусть $f_n \geq 0$, $f_n \Rightarrow f$ на E . Тогда

$$\int_E f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E f_n$$

Доказательство. Применим теорему Рисса, получив, что $f_{n_k} \rightarrow f$ почти всюду. Без ограничения общности можем считать, что $f_n \rightarrow f$ почти всюду (потому что если доказать для \sup по подпоследовательности, неравенство будет верно и для последовательности). Пусть $g_n = \min\{f_n, f\}$. Тогда $g_n \leq f$. Рассмотрим два случая:

1. f - суммируема. Тогда, по теореме Лебега, $\int_E g_n \rightarrow \int_E f$. Предел последовательности $\int_E g_n$ не превзойдет своего верхнего предела, поэтому $\int_E f \leq \sup_n \int_E g_n \leq \sup_n \int_E f_n$.
2. $\int_E f = +\infty$. Тогда $\forall e$ - допустимо для f . $\int_e f < +\infty$. Как мы показали, $\int_e f \leq \sup_n \int_e f_n$. Переходя к \sup по e получаем необходимое неравенство.

□

4 Пространства L_p

Определение. $L_p(E) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{измерима}, \int_E |f|^p < +\infty \right\}$

Нам нужно проверить, что $L_p(E)$ - НП. То есть, $f, g \in L_p \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L_p$, $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Причем, $\|f\|$ - удовлетворяет аксиомам нормы.

Утверждение 4.1. $\|f\|_p$ удовлетворяет двум свойствам:

1. $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
2. $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Доказательство. 1. Очевидно.

2. $\int_E |f + g|^p \leq \int_E (|f| + |g|)^p$. Пусть $E_1 = E(|f| \leq |g|)$, $E_2 = E(|f| > |g|)$. Тогда $E = E_1 \cup E_2$.

$$\begin{aligned} \int_E (|f| + |g|)^p &= \int_{E_1} (|f| + |g|)^p + \int_{E_2} (|f| + |g|)^p \leq \\ &\leq \int_{E_1} (2|g|)^p + \int_{E_2} (2|f|)^p < +\infty \end{aligned}$$

Следовательно $f + g \in L_p$

□

4.1 Неравенство Гельдера

Теорема 4.2 (Неравенство Гельдера). Пусть $p > 1$ и $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пусть $f \in L_p$, $g \in L_q$. Тогда

$$\int_E |f| |g| \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Юнга: $(uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q)$. Пусть $u = \frac{|f|}{\|f\|_p}$, $v = \frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\begin{aligned} \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} \\ \int_E \frac{|f| |g|}{\|f\|_p \|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \int_E \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \int_E \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

□

4.2 Неравенство Минковского

Теорема 4.3 (Неравенство Минковского). Пусть $p > 1$, $f, g \in L_p$. Тогда

$$\left(\int_E (|f| + |g|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Рассмотрим $(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$.

$$\begin{aligned} \int_E (f + g)^p &= \int_E f(f + g)^{p-1} + \int_E g(f + g)^{p-1} \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \left(\int_E f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E (f + g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_E g^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E (f + g)^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad \text{пусть } q = \frac{p}{p-1} \\ &\left(\int_E (f + g)^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\int_E f^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E g^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

□

(1) - здесь применяется 2 раза неравенство Гельдера. Если подставить в неравенство Минковского определение нормы, то можно заметить, что мы доказали неравенство треугольника.

Теорема 4.4. $L_p(E)$ - Банахово пространство.

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 4.5. Пусть f_n - измеримы, и $\forall \delta > 0 \mu E(|f_n - f_m| \geq \delta) \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$. Тогда $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : f_{n_k} \rightarrow f$ почти всюду.

Доказательство. Пусть $\delta = \frac{1}{2^k}$. Можно проверить, что (**TODO**) $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots : \mu E(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k}$. Рассмотрим следующее множество:

$$E' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E \left(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq \frac{1}{2^j} \right)$$

Рассмотрим функциональный ряд $S = f_1 + (f_2 - f_1) + (f_3 - f_2) + \dots$. Фиксируем $x \in E'$. Тогда

$\exists k_x : x \in \bigcap_{j=k_x}^{\infty} E(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \leq \frac{1}{2^j})$. Это значит, что при $j > k_x$ выполняется $|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \frac{1}{2^j} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$.

Следовательно, на E' функциональный ряд S - сходится. Нам осталось проверить, что его дополнение нуль-мерно. Т. е. $\mu \overline{E'} = 0$. Очевидно:

$$\begin{aligned} \overline{E'} &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E \left(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{E'} \subset \bigcup_{j=k}^{\infty} E \left(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \overline{E'} \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu E(|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| > \frac{1}{2^j}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu \overline{E'} = 0 \end{aligned}$$

□

Доказательство Теоремы. Докажем для случая $p = 1$ (общий случай напишу потом **TODO**). Итак, $f_n \in L_1(E)$, $\|f_n - f_m\|_1 \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$. Зафиксируем $\forall \delta > 0$. Тогда

$$\delta \mu E(|f_n - f_m| \geq \delta) \leq \int_{E(|f_n - f_m| \geq \delta)} |f_n - f_m| \leq \int_E |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1 \rightarrow 0$$

Отсюда, по лемме, $\exists(n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots) : f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f$ почти всюду на E . Коль скоро k - фиксированное, $|f_{n_k} - f_{n_m}| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} |f_{n_k} - f|$ почти всюду на E . По теореме Фату:

$$\int_E |f_{n_k} - f| \leq \sup_m \int_E |f_{n_k} - f_{n_m}|$$

В силу $\|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \xrightarrow{k, m \rightarrow +\infty} 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M : \forall k, m > M \Rightarrow \|f_{n_k} - f_{n_m}\|_1 \leq \varepsilon$$

Без ограничения общности можем считать, что k и m удовлетворяют вышеприведенному условию. Получаем, что

$$\forall k > M \Rightarrow \int_E |f_{n_k} - f| \leq \varepsilon$$

Отсюда, $f_{n_k} - f$ суммируема, а значит $\in L_1$. Но, по условию, $f_{n_k} \in L_1 \Rightarrow f \in L_1$. Так же, мы знаем, что $\|f_{n_k} - f\|_1 \leq \varepsilon$, что, в свою очередь означает, что $f_{n_k} \rightarrow f$ по норме в L_1 . Оценим $\|f_n - f\|_1$:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_1 &\leq \|f_{n_k} - f_n\|_1 + \|f_{n_k} - f\|_1 \\ \|f_{n_k} - f_n\|_1 &\xrightarrow{n, k \rightarrow +\infty} 0 \\ \|f_{n_k} - f\|_1 &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Получаем сходимость f_n к f по норме в L_1 . А значит - полноту. \square

Может показаться, что требование измеримости функции f в определении пространства L_p - излишне. Это отнюдь не так.

Утверждение 4.6. *Существует функция f такая, что ее p -я степень измерима, но сама функция - нет.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное неизмеримое множество $C \subset \mathbb{R}$. Тогда пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in C \\ -1 & , x \notin C \end{cases}$$

Очевидно, f - неизмерима (так как множество Лебега $E(f > \frac{1}{2}) = C$ - неизмеримо). Но $f^2(x) = 1$ при $x \in \mathbb{R}$ - очевидно, измеримая функция. \square

Рассмотрим $f, g \in L_2$. По неравенству Гельдера, их произведение суммируемо. Положим $\langle f, g \rangle = \int_E f \cdot g$. Очевидно, таким образом построенное отображение удовлетворяет аксиомам скалярного произведения. Получается, что L_2 - гильбертово пространство с нормой, естественным образом порожденной скалярным произведением: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Приведем важный частный случай пространства $L_2(E)$: В качестве тройки множество - σ -алгебра - мера возьмем: $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, где μ - считающая мера (количество элементов в множестве). Тогда

$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$. В данном контексте суммируемость будет значить абсолютную сходимость.

Рассмотрим $L_2(\mathbb{N})$, Обозначаем $a_n = f(n)$. Тогда $f \in L_2(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum_n a_n^2 < +\infty$. Принято обозначать $L_2(\mathbb{N}) = l_2$

5 Мера подграфика

Итак, рассмотрим (X, \mathcal{A}, μ) . Считаем, что мера - полная и σ -конечная. $f : E \xrightarrow{\text{изм.}} \mathbb{R}$, $f \geq 0$ почти всюду.

Определение. $G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\}$ - подграфик функции f .

Здесь и далее, в качестве $X \equiv \mathbb{R}^n$, $\mu \equiv \lambda_n$.

Теорема 5.1 (Об измеримости подграфика). *Подграфик измерим, и его мера равна $\lambda_{n+1}(G_f) = \int_E f dx$*

Утверждение 5.2. $G_c(E)$ - измеримо, $\lambda G_c(E) = c\lambda E$, где c - константа.

Доказательство. Пойдем от простого к сложному. Для ячейки \mathbb{R}^n формула верна по определению. Пусть теперь E - открытое множество. Как известно, любое открытое множество представляется в виде $E = \bigcup_m \Pi_m$, Π_m - дизъюнктные ячейки. $G(E) = \bigcup_m G(\Pi_m) \Rightarrow \lambda G(E) = \sum_m \lambda G(\Pi_m) = c \sum_m \lambda G(\Pi_m) = c\lambda E$. Далее, без ограничения общности, можем считать, что $\mu E < +\infty$ (Потому что у нас есть σ - конечность; $\mathbb{R}^n = \bigcup_m T_m$ ($T_m : \lambda T_m < +\infty$) $\Rightarrow E = \bigcup_m ET_m$ ($\lambda ET_m < +\infty$)). Воспользуемся формулой: $\lambda^* E = \inf_{E \subset G - \text{открыто}} \lambda G$. По аксиоме выбора, $\exists G_m : G_m \subset G_{m+1}, E = \bigcap_m G_m$. Понятно, что тогда $\lambda G_m \rightarrow \lambda E$. Так же $G(E) = \bigcap_m G(G_m)$. Следовательно $\lambda G(G_m) = c\lambda G_m \rightarrow c\lambda E$ \square

Доказательство теоремы. Мы умеем писать суммы Лебега-Дарбу: $\underline{S}(\tau) \leq \int_E f \leq \overline{S}(\tau)$. Важно, что интеграл Лебега - единственное число, которое обладает таким свойством. $\tau : E = \bigcup_m e_m$ - конечное объединение дизъюнктных множеств, и

$$\begin{aligned} \underline{S}(\tau) &= \sum_p m_p \lambda e_p, \quad m_p = \inf_{x \in e_p} f(x) \\ \overline{S}(\tau) &= \sum_p M_p \lambda e_p, \quad M_p = \sup_{x \in e_p} f(x) \end{aligned}$$

Обозначим $\underline{E}_p = G_{m_p}(e_p)$. Тогда $\lambda \underline{E}_p = m_p \lambda e_p$. Пусть $\underline{E}(\tau) = \bigcup_p \underline{E}_p$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \lambda \underline{E}(\tau) &= \sum_{p=1}^n \lambda \underline{E}_p = \sum_{p=1}^n m_p \lambda e_p = \underline{S}(\tau) \\ \lambda \overline{E}(\tau) &= \sum_{p=1}^n \lambda \overline{E}_p = \sum_{p=1}^n M_p \lambda e_p = \overline{S}(\tau) \\ \underline{E}(\tau) &\subset G_f(E) \subset \overline{E}(\tau) \end{aligned}$$

По свойствам сумм Лебега-Дарбу: $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau_\varepsilon : \forall \tau \leq \tau_\varepsilon \quad \overline{S}(\tau) - \underline{S}(\tau) \leq \varepsilon$
Сопоставляя это с предыдущими фактами, получаем $\underline{S}(\tau) \leq \lambda G_f(E) \leq \overline{S}(\tau)$.
И тогда, необходимо, $\lambda G_f(E) = \int_E f$ \square

6 Теорема Фубини

Определение (Линейное сечение множества E). $E_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$

Пример. Пусть $E = [a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$E_x = \begin{cases} \emptyset, x \notin [a, b] \\ [c, d], x \in [a, b] \end{cases}$$

Теорема 6.1. Пусть $\lambda E < +\infty$, тогда

1. Любое E_x - измеримо.
2. λE_x - измеримая, почти всюду конечная функция.
3. $\lambda E_x = \int_{\mathbb{R}} E_x dx$

Доказательство. Пусть для начала $E = G$ - открытое множество. Тогда $G = \bigcup_m \Pi_m$ - дизъюнктивные ячейки. Очевидно, $G_x = \bigcup_m \Pi_{m,x}$. По σ -аддитивности, $\lambda G_x = \sum_m \lambda \Pi_{m,x}$. Каждое слагаемое, как функция, измеримо, значит, очевидно, будет измерима и сумма. Поэтому, по теореме Леви, данное равенство можно интегрировать.

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda G_x = \sum_m \int_{\mathbb{R}} \lambda \Pi_{m,x} = \sum_m \lambda \Pi_m = \lambda G$$

Далее, пусть E - произвольное измеримое множество. Воспользуемся формулой $\lambda E = \inf_{E \subset G} \lambda G$, где G - открытые. **TODO** □

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$, f - измерима и неотрицательна. Тогда $\int_E f(x, y) d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \iint_E f(x, y) dx dy$

Теперь мы можем сформулировать теорему Фубини:

Теорема 6.2 (Теорема Фубини). Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$, f - суммируема на E , тогда почти всюду $f(x, \cdot)$ - суммируема на E_x , $\int_{E_x} f(x, y) dy$ - суммируема на \mathbb{R} и

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{E_x} f(x, y) dy$$

Доказательство. Достаточно доказать для неотрицательных функций. Для функций произвольного знака это будет следовать из линейности двойного интеграла. Итак, мы знаем, что подграфик $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in E, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ измерим. $\iint_E f(x, y) dx dy = \lambda G_f$.

$$\begin{aligned} G_{f,x} &= \{(y, z) : (x, y) \in E, 0 \leq z \leq f(x, y)\} = \\ &= \{(y, z) : y \in E_x, 0 \leq z \leq f(x, y)\} = G_{f(x, \cdot)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{по теореме о мере подграфика} \Rightarrow \lambda G_{f,x} = \int_{E_x} f(x, y) dy \end{aligned}$$

Подставляя это в исходную формулу, получаем формулу повторного интегрирования. □

7 О многократных интегралах Римана

Обобщим понятие интеграла Римана на множества большей размерности (для упрощения будем вести речь в терминах \mathbb{R}^2). Итак, рассмотрим $\Pi = [a, b] \times [c, d]$, $\tau_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\tau_2 : c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$. Тогда $\tau = \tau_1 \times \tau_2$, и $\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$, $\Pi \equiv \bigcup_{i,j} \Pi_{ij}$. Теперь мы можем составить суммы Римана:

$$\sigma(f, \tau) = \sum_{i,j} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Положим $\text{rang} \tau \equiv \max_{i,j} \{\text{diam} \Pi_{ij}\}$. Тогда:

$$\lim_{\text{rang} \tau \rightarrow +\infty} \sigma(f, \tau) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

Если вышеприведенный предел существует, то он называется двойным интегралом Римана. Ясно, что функция интегрируемая по Риману на прямоугольнике интегрируема по Лебегу. Это позволяет воспользоваться теоремой Фубини:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

В общем случае, это не означает, что $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy$ - интегрируема по Риману. Далее, встает вопрос - как обобщить кратный интеграл на произвольное плоское множество? Можно воспользоваться двумя равносильными подходами:

1. Пусть $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bar{f} = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin E \\ f(x, y), & \text{otherwise} \end{cases}$$

Так как E - ограничено, его можно поместить в прямоугольник Π и тогда:

$$\iint_E f \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Pi} \bar{f}$$

Если $f \equiv 1$ на E то тогда $\iint_E f = \lambda E$

2. *Выводим аналог формулы замены переменной для функционалов* **TODO** (там много картинок, ничего сложного)