

# 1 TODO TUTORIAL

. mfoermflgengler;

Make  
a  
cake  
...

wqwsqdwqdqwo

## 2 Неопределённый интеграл

### 2.1 Определение

$f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда  $F : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной (для  $f$  на  $(a; b)$ ), если  $\forall x \in (a; b) : F'(x) = f(x)$

### 2.2 Теорема 1

$f$  непрерывна  $\Rightarrow \exists F$

Потом докажут

### 2.3 Теорема 2

Пусть  $F$  первообразная для  $f$  на  $(a; b)$ ; Тогда

1.  $\forall c \in \mathbb{R} : F + C$  — первообразная

2. Других первообразных не существует : Если  $G$  первообразная для  $f$ , то  $\exists C_1 : F = G + C_1$

Доказательство:

1. Очевидно, что  $(F+C)' = F' + C' = F' + 0 = F'$

2.  $(G(x)-F(x))' = f(x) - f(x) = 0$ . Тогда  $G-F = \text{const}$ .

### 2.4 Теорема о свойствах неопределённого интеграла

Пусть  $f$  и  $g$  имеют первообразную на  $(a; b)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Тогда :

$$1. \int f + g = \int f + \int g$$

$$2. \int \alpha f = \alpha \int f$$

3.  $\varphi : (c; d) \rightarrow (a; b)$  дифф

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx | x = \varphi(t)$$

4.  $\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + C$  5.  $f$  и  $g$  дифференцируемы на  $(a; b)$   $f'g$  имеет первообразную. Тогда :

$$fg' \text{ имеет первообразную и } \int fg' = fg - \int f'g$$

Доказательство :

$$1. (F + G)' = f + g$$

$$2. (\alpha F)' = \alpha f$$

3-4. Аналогично по свойству диффа композиции

$$5. (fg)' = f'g + fg'; fg' = (fg)' - f'g$$

$$(fg - \int f'g)' = (fg' - f'g) = fg'$$

## 3 Равномерная непрерывность

### 3.1 Определение

$f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  называется равномерно непрерывной на  $(a; b)$ , если :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in (a; b), |x - x'| < \delta : f(x) - f(x') < \epsilon$$

Примеры :

1.  $f(x) = x$ ,  $(a; b) = \mathbb{R}$  равномерно непрерывна

2.  $f(x) = x^2$  не равномерно непрерывна

### 3.2 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

$f : X \rightarrow Y$  непрерывно на  $X$ ,  $X$  компактно.

Тогда  $f$  равномерно непрерывно

Доказательство:

От противного :

$$\exists \epsilon \forall \delta = \frac{1}{n} \exists x_n, x'_n \rho(x_n, x'_n) < \delta$$

$$\rho(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon$$

Образовалась последовательность  $x_n$

$$\exists x_{n_k} \rightarrow a \in X$$

$$\rho(x_{n_k}, x'_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \Rightarrow x_{n_k} \rightarrow a$$

$$\rho(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \geq \epsilon$$

Но обе последовательности стремятся к  $f(a)$ , получено противоречие.

Следствие:  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно, тогда  $f$  равномерно непрерывно (например,  $\sqrt{x}$ );

## 4 Теорема Брауэра о неподвижной точке (БЕГИ И НЕ ОГЛЯДЫВАЙСЯ)

### 4.0.1 Игра в гекс

Вдруг кто-то захочет упороться : <https://arxiv.org/pdf/1409.7890v1.pdf>

Представим себе ромбовидное поле  $n$  на  $m$ , состоящее из шестиугольников. Каждый игрок (чёрный и белый) владеет парой противоположных сторон ромба. За каждый ход игрок раскрашивает один из шестиугольников.

Лемма : Любая раскраска игровой доски определяет выигрыш кого-то из игроков. Рассмотрим левый край ромба. Выберем ребро на карте, которое разделяет чёрную и белую клетки (причём выберем ребро принадлежащее левому краю и ближайшее к нижнему левому углу). Будем идти по вершинам карты, причём каждый раз будем выбирать именно ту вершину, ребро до которой разделяет чёрную и белую клетки. Таким образом, всегда выполняется инвариант для игры : по "левую руку" от нас находится клетка одного цвета, по "правую" противоположного. Утверждается, что заиклиться мы не можем, ибо каждая вершина принадлежит трём клеткам, и если мы пошли по одному ребру и вернулись в ту же вершину, то одна и та же вершина окажется двух противоположных цветов (что, конечно же, звучит как бред). Таким образом мы сможем дойти до конца, и, так как наш путь содержит начало пути двух цветов, мы сможем точно определить победителя. Лемма доказана.

### 4.1 Теорема Брауэра

$$f : [0; 1]^n \in \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]^n$$

$f$  непрерывна.

$$\text{Тогда : } \exists x \in [0; 1]^n : f(x) = x$$

Доказательство (при  $n=2$ ) :

$$x, y \in [0; 1]$$

$$x = (x_1, x_2); y = (y_1, y_2); \rho(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

$$\text{Пусть } \forall x f(x) \neq x$$

$\forall x \rho(x, f(x)) > 0; 0 < \epsilon = \min(\rho(x, f(x)))$ , по теореме Вейерштрасса этот минимум существует.

$f$  равномерно непрерывно, значит  $\exists \delta > 0 : \forall x, y \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ .

Можно считать, что  $\epsilon > \delta$

$\exists n : \frac{1}{n} < \delta; Hex(n, n)$  — логическая доска.  $v = (v_1, v_2) \rightarrow (\frac{v_1}{n}, \frac{v_2}{n}) \in [0; 1]$  вершина доски.

$$color(v) = \min(i \in \{1, 2\} : (f(\frac{v_i}{n}) - \frac{v_i}{n}))$$

Доска покрашена.

Рассмотрим одноцветный путь (существует по лемме)  $v^0, v^1, \dots, v^n$

$$v_1^0 = 0; f_1(\frac{v_1^0}{n} - \frac{v_1^0}{n}) \geq \epsilon$$

$$v_1^n = 1; f_1(\frac{v_1^n}{n} - \frac{v_1^n}{n}) \leq -\epsilon$$

Рассмотрим расстояние между соседними вершинами

$$\rho(\frac{v^i}{n}, \frac{v^{i+1}}{n}) \leq \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta < \epsilon$$

Следовательно, мы не могли перескочить через  $2 \cdot \epsilon$ , то есть наше начальное утверждение неверно.

Теорема доказана.

## 5 Определённый интеграл

### 5.1 Площадь

#### 5.1.1 Определение площади

$E$  — совокупность всех ограниченных подмножеств в  $\mathbb{R}^2$

Площадь :  $\delta : E \rightarrow [0; +\infty]$ , причём :

1. Аддитивность :  $A = A_1 \sqcup A_2 \Rightarrow \delta A = \delta A_1 + \delta A_2$

2. Нормировка :  $\delta([a; b] \times [c; d]) = (b - a) \cdot (d - c)$

Замечание :  $\delta$  монотонна :  $A \in B \Rightarrow \delta A \leq \delta B$

#### 5.1.2 Определение ослабленной площади

1. Монотонна.

2. Нормированна.

3. Ослабленная аддитивность :  $E = E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$  вертикальный отрезок.

Тогда :  $\delta E = \delta E_1 + \delta E_2$

### 5.2 Определённый интеграл

#### 5.2.1 Срезки

$f : ]a; b[ \rightarrow \mathbb{R}$

$f^+(x) = \max(f(x), 0)$  положительная срезка.

$f^-(x) = \min(f(x), 0)$  отрицательная срезка.

### 5.3 Подграфик

Подграфиком функции  $f$  на  $[a; b]$  ( $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}; f \geq 0$ ) называют

$\Pi f([a; b]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a; b], y \in [0; f(x)]\}$

### 5.4 Определение интеграла

Определённым интегралом непрерывной функции  $f$  по промежутку  $[a; b]$  называется

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_{\Pi f([a; b])} f(x) dx = \delta \Pi f(f^+([a; b])) - \delta \Pi f(f^-([a; b]))$$

Замечание :  $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0; \int_a^a f = 0$

### 5.5 Свойства интеграла

#### 5.5.1 Аддитивность по промежутку

$c \in [a; b]; f$  непрерывна на  $[a; b]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

#### 5.5.2 Монотонность

$f, g \in C[a; b]; f \leq g$

Тогда  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$  — интегрирование неравенств

#### 5.5.3 Теорема о среднем

1  $f \in C[a; b]; \exists c \in [a; b] : \int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$

Доказательство :

По теореме Вейерштрасса  $\min(f) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \max(f)$

По теореме о промежуточном значении  $\exists c : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$

### 5.5.4 Теорема Барроу

Определение:

$$\Phi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in [a; b]$$

$\Phi(x) = \int_a^x f$  интеграл с переменным верхним пределом.

$\Phi(a) = 0$  Теорема :  $\Phi(x)$  дифф на  $[a; b]$  и  $\forall x \in [a; b] \Phi'(x) = f(x)$

Доказательство :

$$x \in (a; b)$$

$$y > x; \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{\int_x^y f}{y - x} = \lim_{y \rightarrow x+0} f(c) = f(x)$$

Также доказывается и левосторонняя производная.

Следствие : у любой непрерывной функции есть первообразная/

### 5.5.5 Формула Ньютона-Лейбница

$f \in C[a; b]; F$  первообразная  $f$  на  $[a; b]$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство :

$\Phi$  тоже первообразная.  $F = \Phi + C$

$$\int_a^b f = \Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a)$$

## 6 Выпуклость

### 6.1 Определение

$A \subset \mathbb{R}^m$   $A$  - выпуклое множество

$$\forall x, y \in A [x, y] \subset A$$

$$[x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\}$$

### 6.2 Определение

$f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  - выпуклая функция

$$\forall \alpha \in [0, 1] f(\alpha + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

### 6.3 Лемма о трех хордах

1.  $f$ -выпуклая на  $\langle a, b \rangle$

2. Если  $x_1 < x_2 < x_3$  точки промежутка  $\langle a, b \rangle$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$(1) \Leftrightarrow (2) (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1) \leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1)$$

Док-во

$$(f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} = f(x_2)) \leq f(x_3) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + f(x_1) \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$$

Замечание.  $f$  строго выпуклая  $\Leftrightarrow$  в неравенстве (2) знаки строгие

Наблюдение  $f$  - выпуклая  $\Leftrightarrow f$  вогнутая

$f, g$  -выпуклая  $\Rightarrow f+g$  выпуклая

### 6.4 Теорема об односторонней дифференцируемости вып функций

$f$ - выпуклая на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда  $\forall x \in \langle a, b \rangle \exists f'_+(x), f'_-(x)$

и  $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle x_1 < x_2$

$$f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Док-во

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

возр на  $\langle a, x \rangle$  и на  $\langle x, b \rangle$  по лемме о трех хордах

при  $a \leq \xi_1 < x < \xi_2 < b$

$$f'_+(x_1) = \lim_{\xi \rightarrow x_1+0} g(\xi)$$

$g(\xi)$  - монотонна, ограничена снизу  $\forall$  числом  $g(\xi)$  таким, что  $\xi_0 < x$

### Замечание

На  $[a, b]$  возможна ситуация  $f'_+(a) = -\infty, f'_-(b) = +\infty$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = g(\xi) \rightarrow (\text{возр } \xi \rightarrow x_2) f'_-(x_2), x = x_2, \xi = x_1$$

$$x = x_1, \xi = x_2; g(\xi) \rightarrow (\xi \rightarrow x_1 + 0) f'_+(x_1)$$

$$g(\xi_1) \leq g(\xi_2) \text{ при } \xi_2 \rightarrow x_1 + 0$$

$$\Rightarrow g(\xi_1) \leq f'_+(x_1) \text{ при } \xi_1 \rightarrow x_1 - 0$$

$$\Rightarrow f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$$

## 6.5 Следствие

$f$  выпукла на  $\langle a, b \rangle \Rightarrow f$  -непрерывен на  $\langle a, b \rangle$

$\exists$  кон  $f'_+(x) \Rightarrow f$  непр в т.  $x$  справа

$\exists$  кон  $f'_-(x) \Rightarrow f$  непр в т.  $x$  слева

## 6.6 Теорема о выпуклостях в терминах касательных

$f$ -дифф на  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $f$  - вып вниз  $\Leftrightarrow$  График  $f$  расположен не ниже касательной

$$\forall x_0, x f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

### Доказательство

$\Rightarrow$  Это неравенство содержится в предыдущей теореме

$$\leq x_1 < x_0 < x_2$$

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad (1)$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \quad (2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_0) < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad - \text{одно из н-в о 3-х хордах экв определению выпуклости}$$

$l$ - проходит через точку  $A \in E$ ,  $E$  расположено в одной полуплоскости относительно  $l$ ,

$l$  опорная прямая множества  $E$  в т.  $A$

Для линии  $y = f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0)$ , при  $x < x_0$  график лежит ниже

Для линии  $y = f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$ , при  $x < x_0$  график лежит не ниже

$\min\{y : (x, y) \in E\} =: f(x_0)$ -вып здесь че-то не то в этой строчке

## 6.7 о дифф кр выпуклости

(1)  $f$ -непр  $\langle a, b \rangle$ , дифф  $(a, b)$

Тогда  $f$  строго вып  $\Leftrightarrow f'$  (строго) возр.

(2)  $f$ -непр  $\langle a, b \rangle$ , дважды дифф  $(a, b)$

Тогда  $f$ -вып  $\Leftrightarrow f'' \geq 0$  в  $(a, b)$

### Доказательство

(1) Доказательство

т об одностор дифф.

$$x_1 < x_2 f'(x_1) = f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) = f'(x_2)$$

$$\Leftarrow x_1 x_2 x_3 \Leftrightarrow f'(x_{12}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x_{23})$$

## 6.8 Следствие

Тогда  $f$ -дифф всюду на  $(a, b)$  кроме, быть может, НБЧС мн-ва точек

**Доказательство**

$f'_+, f'_-$  возрастает  $\Rightarrow$  множество точек разрыва не более чем счетно. Если  $f'_-(x) \neq f'_+(x)$ , то  $x$  - точка разрыва  $f'_-, f'_+$

**7 Продолжение опре интеграла****7.1 Общая схема**

$\text{Sigm} \langle a, b \rangle = \{[x, y] : x, y \in \langle a, b \rangle, x \leq y\}$

**7.2 Определение**

1)  $f : \text{Sigm} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  с палкой-функция промежутка

2) Аддитивная фп

$\forall [p, q] \in \text{Sigm} \langle a, b \rangle \forall c \in (p, q)$

$f([p, q]) = f([p, c]) + f([c, q])$

3) Плотность аддитивной фп

$f : \text{Sigm} \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$g$ -плотность  $\forall \Delta \in \text{Sigm} \langle a, b \rangle (\inf g)(\Delta) \leq (\sup g)(\Delta)$  - длина  $\Delta$

**7.3 Теорема вычисления аддитивной функции по плотности**

$\Phi$  - адд ф.п.,  $f$  - ее плотность,  $f$ -непр  $\langle a, b \rangle$

Тогда  $\forall [p, q] \Phi([p, q]) = \int_p^q f$

**Доказательство**

Монотонность  $[a, b]$  функция

$F(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \Phi([a, x]), & x \in (a, b) \end{cases}$

$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi([a, x+h]) - \Phi([a, x])}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi([x, x+h])}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + \theta h) = f(x)$

**7.4 Теорема обобщение т о плотности**

$\Phi$  - адд ф.п.,  $f$ -непр  $\forall \Delta \in \text{Sigm} \langle a, b \rangle \exists m_\Delta, M_\Delta$

(1)  $m_\Delta \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta$

(2)  $\forall x \in \Delta m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$

(3)  $\forall$  фикс  $x \in \langle a, b \rangle$

$M_\Delta - m_\Delta \Rightarrow 0$

те  $\forall \epsilon \exists \delta > 0 \forall \Delta \in \text{Sigm} \langle a, b \rangle : x \in \Delta, l(\Delta) < \delta, |M_\Delta - m_\Delta| < \epsilon$

Тогда  $f$ -плотность  $\Phi$

**Доказательство**

Аналогично предыд теореме

$m_\Delta \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq M_\Delta$

$m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq |M_\Delta - m_\Delta| = h(\Delta = [x, x+h])$

$F'_+(x) = f(x), F'_-(x) = f(x)$

**7.5 Площадь криволинейного сектора в полярных координатах**

$r > 0, \phi \in [0, 1]$

$f(\phi) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$S_{\alpha, \beta} := (r, \phi) : \phi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq r(\phi);$

$$\Phi : [\alpha, \beta] \rightarrow \sigma(S_{\alpha, \beta})$$

## 7.6 Теорема площади криволинейного сектора

$$\sigma(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi$$

**Доказательство** Проверим, что  $\frac{1}{2}r^2(\phi)$ -плотность  $\Phi[\alpha, \beta]$

По определению плотности:  $\exists[\alpha, \beta] \subset \langle a, b \rangle$

$$(\min \frac{1}{2}r^2(\phi))(\beta - \alpha) \leq \Phi([\alpha, \beta]) \leq \max(\frac{1}{2}r^2(\phi))(\beta - \alpha)$$

$$\text{Sect}[\alpha, \beta], \min(r(\phi)) \subset S_{\alpha, \beta} \subset \text{Sect}([\alpha, \beta], \max(r(\phi)))$$

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (x^2 + y^2) \frac{\frac{y'x - xy'}{1 + \frac{y'^2}{x^2}}}{1 + \frac{y'^2}{x^2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} y'(t)x(t) - x'(t)y(t) dt \end{aligned}$$

Площадь петли

$$\frac{1}{2} \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} (y'x - xy') dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2}$$

## 7.7 Кардиоида

$$x(\phi) = 2r\cos(\phi) - r\cos(2\phi)$$

$$y(\phi) = 2r\sin(\phi) - r\sin(2\phi)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2\cos(\phi) - \cos(2\phi))(2\sin(\phi) - \sin(2\phi)) d\phi =$$

$$\frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} 4 - 6(\cos(2\phi)\cos(\phi) + \sin(2\phi)\sin(\phi)) + 2d\phi = \frac{r^2}{2} 6\pi - 3r^2 \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \boxed{6\pi r^2}$$

## Пример. Изометрическое пространство

$G \in \mathbb{R}^2$  - замкнутая выпуклая фигура  $\text{diam} G \leq 1$

Тогда  $\sigma(G) \leq \frac{\pi}{4}$

### Доказательство

$$\forall \phi, \sup(r : (r, \phi) \in G) = f(\phi)$$

$$\sigma(G) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f^2(\phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\phi) + f^2(\phi - \frac{\pi}{2}) d\phi$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  - непрерывна

$\gamma(a)$  - начало

$\gamma(b)$  - конец

$\gamma([a, b])$  - носитель пути "кривая"

$t \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^m$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \dots \\ \gamma_m(t) \end{pmatrix}$$

## 7.8 Кривая Пеано

$[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  непрерывна на  $[0, 1]$

$$x \rightarrow \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_{\epsilon i}$$

## 7.9 Длина

Определение. Функция  $l$  определена на множестве главных путей  $\mathbb{R}^m$  называется длиной, если: 1.  $l \geq 0$



2.1 - аддитивная

$$\forall [a, b] \forall \gamma \forall c \in [a, b]$$

$$l(\gamma) = l(\gamma|_{[a, c]}) + l(\gamma|_{[c, b]})$$

3.  $\forall \gamma, \gamma_2$  - два пути

$c_\gamma, c_{\gamma_2}$  - их носители

Если  $\exists \text{bieksia} T : C_\gamma \rightarrow C_{\gamma_2}$  - сжатие, то тогда  $l(\gamma_2) \leq l(\gamma)$

4. Нормировка : для линейного пути  $\gamma$

$$l(\gamma) = \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$$

## 7.10 Теорема

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, C^1$$

$$\text{Тогда } l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Доказательство

Доп считать  $\gamma' \neq 0$

$\gamma$ -инъективная

$\Phi : \text{Sigm}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  по свойству  $\leq$  из определения

$\|\gamma'\|$  - плотность  $\Phi$

$$1. m_\Delta * l(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta * l(\Delta)$$

$$2. \forall x \in \Delta m_\Delta \leq f(x) \in M_\Delta$$

$$3. \forall x \ll \lim_{\gamma(\Delta) \rightarrow 0} m_\Delta = f(x) = \lim M_\Delta >> \\ M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$$

$$\Delta \subset [a, b] \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$$

$$m_i(\Delta) := \min |\gamma'_i(t)|, M_i(\Delta) = \max |\gamma'_i(t)|$$

$$m_\Delta := \sqrt{\sum_{i=1}^m m_i(\Delta)^2}, M_\Delta := \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i(\Delta)^2}$$

$\bar{\gamma} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  - лин путь

$$\bar{\gamma}(t) := \bar{M} * t, \text{ где } \bar{M} = (M_1(\Delta), \dots, M_m(\Delta))$$

$T : C_\gamma \rightarrow C_{\gamma_2} \Rightarrow$  растяжение

$$\gamma(t) \rightarrow \bar{\gamma}(t)$$

$$\rho(\gamma(t), \gamma(t_1)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \gamma_i(t_0)(t_0 - \gamma_i(t_1))^2} = \text{по теореме Лагранжа}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(\bar{t})(t_0 - t_1))^2} = |t_0 - t_1| \sqrt{\sum_{i=1}^m (\gamma'_i(\bar{t}))^2} \leq |t_0 - t_1| \sqrt{\sum_{i=1}^m M_i^2(\Delta)} = \\ \|\bar{M}_{vector}\| * |t_0 - t_1| = \rho(\bar{\gamma}(t_0), \bar{\gamma}(t_1))$$

$\bar{M} = M_\Delta \Rightarrow$  получим правую часть (1)

$$\Phi(\Delta) \leq M_\Delta * l_\Delta, /triangle = [p, q], t \rightarrow \bar{M} * t$$

1) Левая часть аналогично

2) очевидно заниженная оценка  $\leq \sqrt{\sum (\gamma'_i(t))} \leq$  завышенная оценка.

3) Очевидно

Пример. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x = a \cos(t) \quad y = b \sin(t)$$

$$e = \int_0^{2\pi} a \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2(t)} dt$$

$$f(x) = \int_0^x a \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2(t)} dt - \text{элл. интеграл второго рода.}$$

Пример. В полярных координатах

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi$$

Параметризуем (дописать)

## 7.11 Лемма

$$\text{Var}_a^b f < +\infty$$

Тогда  $f$  можно представить в  $f(x) = p(x) = q(x)$ , где  $p, q$  = возраст.

Доказательство

$$2p(x) = \text{Var}_a^x f + (f(x) - f(a))$$

$$2q(x) = \text{Var}_a^x f + (f(x) - f(a))$$

$$2(p(x) - q(x)) = 2(f(x) - f(a))$$

$$x < y \Rightarrow 2p(y) - 2p(x) = \text{Var}_x^y f + (f(y) - f(x)) \geq 0 \iff$$

$$\iff f(x) - f(y) \leq \text{Var}_x^a f \iff |f(x) - f(y)| \leq \text{Var}_x^y f$$

## 8 Объем фигуры вращения

$$f \geq 0$$

$$\text{Segm}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$[p, q] \rightarrow$  объем фигуры, полученный вращением  $\Pi[f, [p, q]]$  вокруг оси  $ox$

$$A = \{(x, y, z) : x \in [p, q], y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

$$p, q \mapsto V(a)$$

### 8.1 Теорема

$$\forall [p, q] \in \text{Segm}[a, b]$$

$$\Phi([p, q]) = \pi \int_p^q f^2(x) dx$$

### 8.2 Теорема

$\psi[p, q] = V(\text{Вращаем } \Pi(f, [p, q]))$  вокруг оси  $oy$

$$B = \{(x, y, z) : p^2 \leq x^2 + z^2 \leq q^2, 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2 + y^2})\}$$

### 8.3 Теорема

$$f \in C[a, b] \Rightarrow \forall [p, q] : \Psi[p, q] = 2\pi \int_p^q x f(x) dx$$

$$m_\Delta l(\Delta) \leq \Phi(\Delta) \leq M_\Delta l(\Delta)$$

$$\forall x \in \Delta \quad m_\Delta \leq f(x) \leq M_\Delta$$

$$\Delta \rightarrow x \quad M_\Delta - m_\Delta \rightarrow 0$$

**Доказательство. Обобщенная теорема о плотности**

$$V(\text{Вращения } [p, q] \times [0, \min(f)]) \leq \Psi[p, q] \leq V(\text{Вращения пр-ка } [p, q] \times [0, \max(f)])$$

$$\text{Левая часть} \implies (\pi q^2 - \pi p^2) \min(f) \geq \pi \min(2x) \min(f) (q - p)$$

$$\text{Правая часть} \implies (\pi q^2 - \pi p^2) \max(f) \leq \pi 2q \max(f) (q - p) \leq \pi \max(2x) \max(f) (q - p)$$

$$\pi \min(2x) \min(f) (q - p) \leq \Psi[p, q] \leq \pi_{x \in \square} \max 2x * \max(f(x)) (q - p)$$

## 9 Интегральные суммы

$[a, b]$  Дробление отрезка = конечный набор точек :

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (\text{Разбили отрезок на части})$$

$\max(x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n)$  - ранг дробления

**Оснащения дробления** - набор точек  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$\forall i \quad x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ , задано дробление оси

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ - интегральная сумма (=Римонова сумма)

<https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcR68FITJzmGmf5-FRtUnW83M13aXbeJxO>

## 9.1 Теорема об инт. как предела интегральной суммы

$f \in C[a, b]$

Тогда  $\forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall$  дробления  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$  со свойством

$\max(x_i - x_{i-1}) < \beta$

$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$

**Доказательство**

т.Кантора :  $\forall \epsilon \exists \beta > 0, \forall x', x'' \in [a, b] |x' - x''| < \beta, |f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$  если че ' это не производная

$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| = |\sum_{i=1}^n (\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - f(x_i)(x_i - x_{i-1}))|$

$= |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))dx| \leq \sum |\int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i))dx| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_i)|dx < \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\epsilon}{b-a}dx = \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx = \epsilon$

Замечания

1.  $\forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0 \forall$  дробление  $\max(x_i - x_{i-1}) < \beta$

$\forall$  оснащ

$|\int_a^b f(x)dx - (\psi_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon$

2б.  $\omega(\beta) := \sup |f(x') - f(x'')|$

$x' - x'' \geq \beta, x', x'' \in [a, b]$

Модуль непрерывности  $\omega_f(\beta)$

$\omega(\beta)$  -убывающая функция

а. т.Кантора:

$f \in C[a, b] \Rightarrow \omega(\beta) \rightarrow 0, \beta > 0$

б)  $f \in C^1[a, b]$

$M := \max_{[a, b]} |f'|$

Тогда  $\omega(\beta) \leq M\beta$

в)  $|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \leq (b-a)\omega(\beta)$

В частности  $f \in C^1$

$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \leq (b-a)M\beta$

Другие - равномерные  $\frac{b-a}{n}$  - для каждой части

$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \frac{((b-a)^2 M)}{n}$

## 9.2 Теорема 2. Об интегральных суммах для центральных предков

$f \in C^2[a, b], a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \beta = \max(x_i - x_{i-1})$

$t_i := \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

Тогда  $|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq$

$8 \int_a^b |f''(x)|dx$

$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{t_i}^{x_i} f(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{t_i} f(x)dx = \int_{t_i}^{x_i} f(x - x_i)'dx + \int_{x_{i-1}}^{t_i} f * (x_{i-1})'dx =$  допишите преобра-

$$\text{зования плс} = f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\phi(x)dx$$

$$\phi(x) := \begin{cases} (x - x_{i-1})^2 \\ (x - x_i)^2 \end{cases}$$

$$||\max(\phi) = \frac{\beta^2}{4}||$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n f(t_i)x_i - x_{i-1} + \int_a^b f''(x)\phi(x)dx$$

$$|\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n| = |\int_a^b f''(x)\phi(x)dx| \leq \int_a^b |f''(x)|\phi(x) \leq \frac{\beta^2}{8} \int_a^b |f''(x)|dx$$

### 9.3 Теорема о форме трапеций

$$f \in C^2[a, b] a = x_0 \leq x_0 < \dots < x_n = b$$

$$\beta := \max(x_i - x_{i-1})$$

$$|\int_a^b f - \sum \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})| \leq \frac{\beta^2}{8} \int_a^b |f''(x)|$$

**Доказательство**

$$\psi(x) = (x - x_{i-1})(x_i - x)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)(x - t_i)'dx = f(x)(x - t_i)|_{x_{i-1}}^{x=x_i} - \int_{x_{i-1}}^x f'(x)(x - t_i)dx = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i -$$

$$x_{i-1}) + (\frac{1}{2}f'(x)\psi(x)|_{x=x_{i-1}} - \frac{1}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(x)\psi(x)dx)$$

Допишите плс 2 строчки

### 9.4 Эйлера - Маклорена

$$f \in C^2[m, n], m, n \in \mathbb{R}$$

$$\text{с Тогда } \int_m^n f(x)dx = \sum_{i=m}^n f(i) - \frac{1}{2} \int_m^n f''(x)\{x\}(1 - \{x\})dx$$

**Ну ёё понятно**

$$a=m$$

$$b=n$$

дробление целых чисел

**Пример**

$$1^p + 2^p + \dots + n^p = \int_1^n x^p dx + \frac{n^{p+1}}{2} + \frac{1}{2} \int_1^n (x^p)''\{x\}(1 - \{x\})dx = \frac{n^{p+1}-1}{p+1} + \frac{n^{p+1}}{2} +$$

$$\frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\})dx$$

$$0 \leq \int_1^n x^{p-2}\{x\}(1 - \{x\}) \leq \int_1^n x^{p-2} = \frac{n^{p-1}-1}{p-1}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + O(1)$$

**Пример**

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln(i) = \int_1^n \ln(x)dx + \frac{\ln(n)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + 1 - \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx$$

$$1 - \int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx = -n$$

$$\int_1^n \frac{\{x\}(1-\{x\})}{x^2}dx \leq \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}|_1^n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$$

### 9.5 Формула Валлиса

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left[ \frac{(n-1)!!}{n!!} * \frac{\pi}{2} - n\%2 = 0 \right]$$

$$\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x, x \in [0, \pi/2]$$

$$\frac{(2k!!)}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} * \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}$$

$$\frac{1}{2k+1} * (\frac{(2k!!)}{(2k-1)!!})^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq (\frac{(2k!!)}{(2k-1)!!})^2 \frac{1}{2k} - firstmultip.is A_k$$

$$P4 - L4 = A_k \frac{1}{2k} - A_k \frac{1}{2k+1} = A_k (\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{2k}$$

$$\sqrt{\pi} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{(2k!!)}{(2k-1)!!} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2^k (k!)^2}{(2k)!} \sim \frac{2^{2k} e^{2k} k^{2k} e^{-2k}}{\sqrt{k} c (2k)^{2k} e^{2k} \sqrt{2k}} = \frac{c * k}{\sqrt{2k}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$c = \sqrt{2\pi}$$

Значит  $[n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} e^{-n} \sqrt{n}]$  – Формула Стирлинга

## 10 Верхний предел последовательности

### 10.1 Частичный предел последовательности

Частичный предел последовательности - это предел вдоль какой-либо последовательности

$x_n, n_k$  -возрастающая последовательность номеров

$x_{n_k} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} a$  Тогда  $a$  - частичный предел  $x_n$

Пример.  $x_n = (-1)^n, +1, -1$ - частичные пределы

### 10.2 Определение

Дана последовательность  $x_n$  - вещественная

$$y_n := \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$$

$$z_n := \inf(x_n, x_{n+1}, \dots)$$

Тогда:

$$1. y_n \geq y_{n+1}, z_n \geq z_{n+1}$$

$$2. z_n \geq x_n \geq y_n$$

3. Если изменить конечное число  $x_n$ , то в последовательности  $y_n$  и  $z_n$  изменится конечное число членов

$$z_1 \geq z_2 \geq \dots \geq z_n \geq x_n \geq y_n \geq y_{n+1} \geq \dots \geq 1$$

$$z_n \uparrow, \exists \lim z_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n, x_n \in \mathbb{R}$$

$$y_n \downarrow, \exists \lim y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n, x_n \in \mathbb{R}$$

### 10.3 Теорема о свойствах верхнего и нижнего предела

$$1. \lim x_n \geq \overline{\lim} x_n$$

$$2. \forall n, x_n \geq x'_n, \text{ Тогда } \underline{\lim} x_n \geq x'_n, \overline{\lim} x_n \geq \overline{\lim} x'_n$$

$$3. \lambda \geq 0, \underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n$$

$$\underline{\lim} \lambda x_n = \lambda \underline{\lim} x_n, [0 * \infty = 0]$$

$$4. \overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n, \underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim} x_n$$

$$5. \underline{\lim}(x_n + x'_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} x'_n$$

$$\underline{\lim}(x_n + x'_n) \geq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} x'_n \text{ Если правые части имеют смысл}$$

$$6. \text{ Если } t_n \rightarrow l \in \mathbb{R}, \text{ Тогда}$$

$$\overline{\lim}(x_n + t_n) = \overline{\lim} x_n + l$$

$$\underline{\lim}(x_n + t_n) = \underline{\lim} x_n + l$$

$$7. t_n \rightarrow l > 0, l \in \mathbb{R}$$

$$\overline{\lim}(x_n t_n) = \overline{\lim} x_n l$$

$$\underline{\lim}(x_n t_n) = \underline{\lim} x_n l$$

**Доказательство**

1.

2.

$$3. \sup(\lambda x_n, \lambda x_{n+1}, \dots) = \lambda \sup(x_n, x_{n+1}, \dots)$$

$$4. \overline{\lim}(-x_n) \leftarrow \sup(-x_n, -x_{n+1}, \dots) = -\inf(x_n, x_{n+1}, \dots) \rightarrow -(\underline{\lim} x_n)$$

$$5. \sup(x_n + x'_n, x_{n+1} + x'_{n+1}, \dots) \leq \sup(x_n, x_{n+1}, \dots) + \sup(x'_n, x'_{n+1}, \dots)$$

$$6. \forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall k > N_0,$$

$$x_k + l - \epsilon < x_k + t_k < x_k + l + \epsilon$$

$$y_n + l - \epsilon \leq \sup(\dots) \leq y_n + l + \epsilon$$

$$\overline{\lim}x_n + l - \epsilon \geq \overline{\lim}(x_n + t_n) \geq \overline{\lim}x_n + l + \epsilon$$

$$\overline{\lim}x_n + l \leq \overline{\lim}(x_n + t_n) \leq \overline{\lim}x_n + l$$

#### 10.4 Теорема. Техническое описание $\overline{\lim}$

1.  $\overline{\lim}x_n = +\infty \iff x_n$  не ограничена сверху

2.  $\overline{\lim}x_n = -\infty \iff x_n \mapsto -\infty$

3.  $\overline{\lim}x_n = l \in \mathbb{R} \iff \alpha + \beta$

$\alpha : \forall \epsilon > 0, \exists N, x_n < l + \epsilon$

$\beta : \forall \epsilon > 0, \exists$  бесконечно много номеров  $n: l - \epsilon < x_n$

##### Доказательство

1. Очевидно.  $\overline{\lim}x_n = \lim y_n = +\infty \iff y_n = +\infty \iff x_n$  - не ограничена сверху

2.  $\Rightarrow x_n \leq y_n \rightarrow -\infty \iff x_n \rightarrow -\infty, \forall E > 0, \exists N, \forall n \geq N, x_n < -E$

$\forall E > 0, \exists N, Y_N \leq -E (Y_N \downarrow) \Rightarrow Y_N \rightarrow -\infty$

3.  $\implies \implies$

$y_n \downarrow l$

$\alpha : \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, x_n \geq y_n < l + \epsilon$

$\beta$  : Если это не так  $\exists \epsilon > 0$  Для которого чило номеров ... конечно

т.е.  $\exists K n > K,$

$x_n \leq l + \epsilon, x_{n+1} \leq l - \epsilon$

$\Rightarrow y_n \leq l - \epsilon \rightarrow \lim y_n < l - \epsilon$

$\longleftarrow \longleftarrow$

$\forall \epsilon > 0, \epsilon \dots$  **Надо дописать**

#### 10.5 Теорема

$\exists \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}} \iff \overline{\lim}x_n = \underline{\lim}x_n$

(значение прю в левой и правой части этой эквивалентности одинаковы)

##### Доказательство

$\implies \implies$

$\lim x_n = l$

1.  $l = +\infty \iff \underline{\lim}x_n = +\infty()$

$x_n$  не ограничена сверху  $\Rightarrow \overline{\lim}x_n = +\infty$

2.  $l = -\infty$  Аналогично

3.  $l \in \mathbb{R}, \overline{\lim}x_n = l$ , так как  $\forall \epsilon > 0, \exists N \forall n > N : l - \epsilon < x_n < l + \epsilon$  - п.ч. утверждение

а. Это больше, чем требуется в б.

#### 10.6 Теорема.(о характеристизации $\overline{\lim}$ как частичного)

1.  $\forall l \in \mathbb{R}$  - частичный предел,  $\underline{\lim}x_n \leq l \leq \overline{\lim}x_n$

2.  $\exists n_k : \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \overline{\lim}x_n$

$\exists m_k : \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{m_k} = \underline{\lim}x_n$

##### Доказаательство

1.  $x_{m_k} \rightarrow l, z_{n_k} \leq x_{n_k} \leq y_{n_k}, \underline{\lim}x_n \leq l \leq \overline{\lim}x_n$

2.  $\overline{\lim}x_n = l$

$l = +\infty$ , Очевидно

$l \in \mathbb{R}, \exists k, l - \frac{1}{k} < x_{n_k} < l + \frac{1}{k}$

Для  $\epsilon = \frac{1}{k}, \exists N, \forall n > N, x_n < l + \frac{1}{k}$

**Пример 1.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin n = 1$

$\exists$  беск. множежестово  $n$   $1 - \epsilon < \sin n < 1 < 1 + \epsilon$

$k = 1, \exists n_1, 1 - 1 < \sin n_1 < 1$

$k = 2, \exists n_2 > n_1, 1 - \frac{1}{2} < \sin n_2 < 1$

...

$k, \exists n_k > n_{k-1}, 1 - \frac{1}{k} < \sin n_k < 1$

## 11 Несколько неклассических неравенств

### 11.1 Неравенство Йенсена

$f$  выпукла на  $\langle a, b \rangle$

$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \langle a, b \rangle$

$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n$  : все  $\alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1$

$f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$

**Доказательство** все  $x_i$  совпадают  $\implies$  тривиально

$x^* := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , Тогда  $x^* \in \langle a, b \rangle$

$x^* \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \max(x_1 \dots x_n) = (\sum \alpha_i) \max(x_1 \dots x_n) = \max(x_1 \dots x_n)$

$x^* \geq \min(x_1 \dots x_n)$

в  $x^*$  рассмотрим опорную прямую  $y = \beta x + \gamma$  к графику

$\beta x^* + \gamma = f(x^*)$

при всех  $x \in \langle a, b \rangle$

$\beta x + \gamma \leq f(x)$

$f(x^*) = \beta x^* + \gamma = \beta \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \gamma \sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i x_i \beta + \gamma \alpha_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\beta x_i + \gamma) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$

**Пример**

$\forall a_1 \dots a_n > 0$

$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$

### 11.2 Неравенство психоделическое

1. Неравенство Йенсена,  $f$ -вып  $\langle A, B \rangle$

$\phi : a, b \rightarrow \langle A, B \rangle$  непрерывна

$\alpha : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$  непрерывна,  $\int_a^b d(x) dx = 1$

Тогда  $(\int_a^b d(x) \phi(x) dx) \leq \int_a^b \alpha(x) f(\phi(x)) dx$

$m := \inf_{x \in [a, b]} \phi(x), M = \sup_{x \in [a, b]} (\phi(x))$

$C = \int_a^b \alpha(x) \phi(x) dx \in (m, M)$

$\int_a^b \alpha(x) \phi(x) \leq \sup(\phi(x)) \int_a^b \alpha(x) dx, m \leq C \leq M$

В точке  $C$  на  $\langle A, B \rangle$  строим опорную прямую  $y = \beta x + \gamma$

$f(C) = \beta C + \gamma = \beta \int_a^b \alpha(x) \phi(x) dx + \gamma \int_a^b d(x) dx = \int_a^b \alpha(x) (\beta \phi(x) + \gamma(x) + \phi) dx \leq \int_a^b \alpha(x) f(\phi(x)) dx$

$\exp(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(f)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f$  Левая часть интегральное среднее чило.

Правая часть - интегральное среднее арифметическое

$\sqrt[n]{f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)} = \exp(\dots)$

Это неравенство Йенсена

$f(\int_A \lambda \phi) \leq \int_a^b \lambda(f_0 \phi)$

$\phi \leftrightarrow \ln f$

$f \leftrightarrow \exp$

$\lambda(x) \leftrightarrow \text{const} = \frac{1}{b-a}$

### 11.3 Неравенство Гельдера

$p > 1, q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$

Тогда:  $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

Неравенство достигается, если

$\bar{a} = (a_1^p, a_2^p \dots a_n^p)$

$$\bar{b} = (b_1^p, b_2^p \dots b_n^p)$$

$$\bar{a} || \bar{b}$$

// **Доказательство**

$$(\sum \alpha_i x_i)^p \leq \sum \alpha_i x_i^p \text{ - неравенство Йенсена}$$

$$\alpha_i := \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q}, \alpha_i \beta_i^{-\frac{1}{p-1}} (\sum_j b_j^q)$$

$$(\sum \alpha_i x_i)^p = (\sum a_i b_i^{q-\frac{1}{p-1}})^p = (\sum a_i b_i)^p, (q = \frac{p}{p-1}, p(p-1)x^{p-2} > 0, q - \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p-1})$$

$$\sum_i \frac{b_i^q}{\sum_j b_j^q} a_i^p b_i^{-\frac{1}{p-1}} (\sum_j b_j^q)^p = (\sum a_i^p) (\sum b_j^q)^{p-1}$$

$$(\sum a_i b_i) \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_j^q)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} |a_i b_i| \leq (\sum_{i=1}^{n-1} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{n=1}^n |b_j|^q)$$

$$(|a_i|^p) || (b_i)^p$$

$$\forall i, \text{sign}(a_i) = \text{sign}(b_i)$$

## 11.4 Интегральное Неравенство Гельдера

$$p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f, g \in C[a, b]$$

$$\text{Тогда } |\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

// **Доказательство**

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \xi_k = x_k$$

$$a_k := f(x_k) \left(\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, b_k = g(x_k) \left(\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) \frac{b-a}{n}| = |\sum a_k b_k| \leq (\sum |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |b_k|^q)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n})^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n |g(x_k)|^q \frac{b-a}{n})^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{При этом } (\sum_{k=1}^n |f(x_k)|^p \frac{b-a}{n}) = (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\text{и } |\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) \frac{b-a}{n}| = |\int_a^b f(x)g(x)dx|$$

$$|f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g|^q)^{\frac{1}{q}} \leq |\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) \frac{b-a}{n}| = |\int_a^b f(x)g(x)dx|$$

Место для следствия

## 11.5 Неравенство Минковского

$$p \geq 1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } (\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

// **Доказательство**  $p = 1$  очевидно

$$p > 1$$

$$\sum a_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq (\sum a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum (a_i + b_i)^{(p-1)q})$$

$$+$$

$$\sum b_i (a_i + b_i)^{p-1} \leq (\sum b_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum (a_i + b_i)^p)$$

$$=$$

$$\sum (a_i + b_i)^p \leq (\sum (a_i^p)^{\frac{1}{p}} + \sum (b_i^p)^{\frac{1}{p}}) (\sum (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$$

$$\sum |a_i + b_i|^p = \sum |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \sum |a_i| |a_i + b_i|^{p-1} + \sum |b_i| |a_i + b_i|^{p-1} \leq \dots$$

**Филосовский смысл**

$$\text{В } \mathbb{R}^m$$

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Норма!!!

## 12 Несобственный интеграл

### 12.1 Определение

$$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ - допустима}$$

$$-\infty < a < b \leq +\infty$$



$\forall A : a < A < \text{bin}[a, A] f$ -кусочно-непрерывна

## 12.2 Определение 2

$$\Phi(A) = \int_a^f(x) dx$$

Если существует  $\lim \Phi(A)$  оно называется несобственным интегралом по промежутку  $[a, b)$

**Обозначение :**  $\int_a^{\rightarrow b} f(x) dx$

Если значение конечное : несобственный интеграл сходящийся

$\pm\infty$  : несобственный интеграл расходится

Не существует  $\lim \Phi(A)$  : несобственный интеграл расходится

## 12.3 Определение 3

Аналогично  $(a, b], \int_{\rightarrow a}^b f dx$

$$\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow 0} \int_B^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow 0+} \ln(x)|_B^1 = \lim_{B \rightarrow 0+} (-\ln(B)) = +\infty \text{ Расходится}$$

$$(\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(a)) - \ln(1) = \ln(x)|_1^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(A) = +\infty$$

**Соглашение**

На  $(a, b)$  нельзя брать  $\int_{\rightarrow a}^b \exists \lim x_n \in \mathbb{R} \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, k > N, |x_n - x_k| < \epsilon$

$\exists \text{кон. } \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) \in \mathbb{R}$

$\forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall x_1, x_2 \in (b - \beta, b) |f(x) - f(x_2)| < \epsilon$

## 13 Свойства.

### 13.1 Критерий Больцано-Коши

Сходимость интеграла  $\leftrightarrow \exists \text{кон. } \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) \leftrightarrow$

$\forall \epsilon > 0 \exists \Delta \in [a, b), \forall A, B \in (\Delta, b), |\int_A^B f(x)| < \epsilon$

Нет сходимости  $\leftrightarrow \exists \epsilon > 0, \forall \Delta \in [a, b], \exists A, B \in (\Delta, b), |\int_A^B f(x)| < \epsilon$

$\exists A_k, B_k \rightarrow b - 0, |\int_{A_k}^{B_k} f(x)| \geq \epsilon \Leftrightarrow$

### 13.2 Аддитивность

$f$  - доп  $[a, b), c \in (a, b)$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b}, \int_c^{\rightarrow b}$  сходятся и расходятся одновременно

$$\int_a^{\rightarrow b} f = \int_a^c f + \int_c^{\rightarrow b} f$$

$c < A < B; (a, c, A, b)$  - на прямой

$$\int_a^A f = \int_a^c f + \int_c^A f$$

Следствие.  $\lim_{c \rightarrow b-0} \int_c^{\rightarrow b} f = 0$  В случае, когда интегралы сходятся

### 13.3 3

$f, g$  - доп.  $[a, b), \int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$  - сходятся,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Тогда  $\lambda f, f \pm g$  - доп.

$$\int_a^{\rightarrow b} \lambda f = \lambda \int_a^{\rightarrow b} f$$

$$\int_a^{\rightarrow b} f \pm g = \int_a^{\rightarrow b} f \pm \int_a^{\rightarrow b} g$$

На  $[a, A], \lambda f, f \pm g$  - кус- непрерывна

$$\int_a^A \lambda f = \lambda \int_a^A f, A \rightarrow +\infty$$

### 13.4 4

$\int_a^{\rightarrow b} f, \int_a^{\rightarrow b} g$ - существуют в  $\overline{\mathbb{R}}$

$f, g$  - доп  $[a, b)$ ,  $f(x) \leq g(x)$  при  $x \in [a, b)$

Тогда  $\int_a^{\rightarrow b} f \leq \int_a^{\rightarrow b} g$

### 13.5 Свойство 5

$f, g$  - дифф  $[a, b)$ ,  $f', g'$  - доп.  $[a, b)$

Тогда\*  $\int_a^{\rightarrow b} f g' = f g|_a^{\rightarrow b} - \int_a^{\rightarrow b} f' g$

\* :если 2 предела из трех существуют и конечны, то существует и 3-й предел и формула верная

Доказательство  $\int_a^A f g' = f g|_a^A - \int_a^A f' g, A \rightarrow b - 0$

### 13.6 Свойство 6

$\phi : [\alpha, \beta) \rightarrow \langle A, B \rangle, \phi \in C^1, \exists \phi(\beta - 0)$

Тогда  $\int_{\alpha}^{\rightarrow \beta} (f \circ \phi) \phi' = \int_{\phi(\alpha)}^{\rightarrow \phi(\beta-0)} f$  Если существует в одной части, то существует и в другой

$\alpha < \phi < \beta$

$\int_{\alpha}^{\phi} \phi' (f \circ \phi) \phi' = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\gamma)} f$

$\alpha \rightarrow \beta - 0$

Здесь место для наблюдения

## 14 Признаки сходимости

### 14.1 1-ый признак

$f$  - доп.  $[a, b)$ ,  $f \geq 0$ ,  $\Phi(A) = \int_a^A f$

$\int_a^b f - cx \Leftrightarrow \Phi$ -огр функция

Доказательство  $\Phi(A)$ —возрастающая функция

$\int_a^b f = \lim_{A \rightarrow b-0} \Phi(A) = \sup_{A \in [a, b)} \Phi(A)$

### 14.2 2-ый признак

$f, g \geq 0$ , доп.  $[a, b)$

1.  $f \leq g$  на  $[a, b)$ ,

$\int_a^b g$ -сх.  $\Rightarrow \int_a^b f$ -сх

$\int_a^b f$  - расх.  $\Rightarrow \int_a^b g$  - расходится

2.  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in (0, +\infty)$

$\int_A^b f$  сход.  $\Leftrightarrow \int_A^b g$ —сходится

Доказательство

$\Phi(A) = \int_a^A f \leq \Psi(A) = \int_a^A g$

$\int_a^b g$  сходится  $\Rightarrow \Psi$ -огр  $= \int_a^b f$ -сходится

$\int_a^b f$  расходится  $\Rightarrow \Phi$ -неогр  $= \int_a^b g$ -расходится

2. На прямой 0, p, l, q

$\exists a_0 \in (a, b)$  при  $x \in (a_0, b)$   $p < \frac{f(x)}{g(x)} < q$

$$\int_a^b f \text{-сходится} \Leftrightarrow \int_{a_0}^b f \text{ сходится}$$

$$pg(x) < f < qg(x)$$

$$\int_a^b f \text{-сходится} \Rightarrow \int_a^b pg(x) \text{-сходится} \Rightarrow \int_a^b g(x) \text{сходится}$$

$$\int_a^b g \text{-сходится} \Rightarrow \int_a^b qg(x) \text{-сходится} \Rightarrow \int_a^b g(x) \text{сходится}$$

### Замечание

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f}{g} = 0$$

g - большая, f - маленькая

$$\text{Тогда } \int_a^b \text{-сходится} \Rightarrow \int_a^b f \text{-сходится}$$

$$\lim \frac{f}{g} = +\infty$$

f - большая, g - маленькая

$$\int_a^b F \text{ сходящаяся} \Rightarrow \int_a^b g \text{ сходящаяся}$$

## 14.3 Гамма функция Эйлера

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$$

$$1. t \in (0, 1) \text{ несобственный в нуле и на } +\infty, \int_{\rightarrow 0}^1 + \int_1^{\rightarrow +\infty} x^{t-1} e^{-x} \sim x^{t-1} \text{-сходящийся}$$

2. Сходимость на  $+\infty$

$$x^{t-1} x^{-x} = (x^{t-1} e^{-\frac{x}{2}}) e^{-\frac{x}{2}} < e^{\frac{x}{2}} \text{-сходящийся}$$

Правая часть стремится к 0 при  $x \rightarrow +\infty$

Знак меньше при больших

$$t \rightarrow x^{t-1} x^{-x} \text{ (где } x > 0, \text{ фиксировано) - вып}$$

$$\text{Тогда } t \rightarrow \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \text{ - выпуклая}$$

$$f(\alpha_1 t_1 + (1 - \alpha_1) t_2) \leq \alpha_1 f(t_1) + (1 - \alpha_1) f(t_2)$$

$$x^{\alpha_1 t_1 + (1 - \alpha_1) t_2 - 1} e^{-x} \leq \alpha_1 x^{t_1 - 1} e^{-x} + (1 - \alpha_1) x^{t_2 - 1} e^{-x}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha_1 t_1 + (1 - \alpha_1) t_2 - 1} e^{-x} dx = \alpha_1 \int_0^{+\infty} x^{t_1 - 1} e^{-x} dx + (1 - \alpha_1) \int_0^{+\infty} x^{t_2 - 1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = -x^t e^{-x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^{+\infty} t x^{t-1} e^{-x} dx$$

$$\lim_{\mathbb{R} \rightarrow +\infty} \mathbb{R}^t e^{-\mathbb{R}} = \left( \lim_{\mathbb{R} \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{R}}{e^{\frac{\mathbb{R}}{t}}} \right)^t = \left( \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} e^{\frac{R}{t}} \right) = 0$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n! \dots$$

## 14.4 Интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

$$\text{Сходятся при } x > x_0, e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$$

$$x > 0, 1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Следует из неравенства  $e^t \geq 1 + t$

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{Л.ч.} = \int_{x=\cos(t)}^0 \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\text{Средняя часть } \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx = \left( x = \frac{y}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\text{Л.ч.} = \int_{x=tg}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} t dt = \left( t = \frac{\pi}{2} - y \right) \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, n \% 2 = 0 \\ \frac{(n-1)!!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, n \% 2 \neq 0 \end{cases}$$

$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \frac{1}{\sqrt{k}} \Rightarrow \sqrt{\pi}$  -формула Валлиса

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sqrt{n} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2} \sqrt{n} = \frac{1}{\frac{(2n-1)!!}{(2n-3)!! \sqrt{2n-1}}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \frac{\pi}{2}$$

Левая часть стремится к  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

## 15 Абсолютно сходящийся интеграл

$f$ - доп. на  $\langle a, b \rangle$

$\int_a^b f$  — абсолютно сходящийся, если : 1. Он сходится

2.  $\int_a^b |f|$  сходится

### 15.1 Теорема

$f$  - доп на  $\langle a, b \rangle$

Экв 1.  $\int_a^b f$  абс сходится

2.  $\int_a^b |f|$  —сходится

3.  $\int_a^b f_+$ ,  $\int_a^b f_-$  —оба сходятся

$$1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3 : f_+ \leq |f|, f_- \leq |f|$$

$$3 \Rightarrow 1 : f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$$

$$\int_a^b f = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_-$$

Пример:  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$

$$1 < p, \text{абсолютная сх. } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx - cx, \frac{|\sin x|}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}, p > 1$$

$$0 < p \leq 1 \text{ сходится } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} = -\frac{\cos x}{x^p} \Big|_{x=1}^{x=+\infty} - p \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p+1}} dx,$$

$$\text{сходимость неабсолютная: } p \in [0, 1], \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{1}{10^6} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = +\infty$$

$$\text{Фокус: } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p} (=+\infty) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p} \leftarrow \text{сходится}$$

## 16 Теорема. Признак Абеля-Дирихле

D.1  $f$ -доп. на  $[a, b)$ ,

$$F(A) = \int_a^A f \text{ —ограничена}$$

$$\exists K, \forall A \in (a, b), \left| \int_a^A f \right| \leq K$$

$$2. g \in C^1[a, b), g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0, x \rightarrow b - 0$$

$g(x)$  —монотонна

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)g(x)dx - \text{сходится}$$

A.1.  $f$ - доп.  $\int_a^b f$  — сход. (не обязательно абсолютно)

2.  $g \in C^1[a, b), g(x)$  —монотонна

$g$  —ограничена, т.е.  $\exists L, \forall x \in [a, b), |g(x)| \leq L$

// Тогда  $\int_a^b fg$  —сход. // **Доказательство.D По частям**

$$\int_a^R f(x)g(x)dx = F(x)g(x) \Big|_a^R \text{ огр. и б.м. } - \int_a^R F(x)g'(x)dx = F(R)g(R) - F(a)g(a) -$$

$$\int_a^R F(x)g'(x) \text{ существует конечный предел при } R \rightarrow b - 0, \text{ т.к. } \int_a^b Fg' \text{ —абс. сходится:}$$

$$\int_a^b |Fg'| \leq k \int_a^b |g'| \text{ —с пост знаком} = \pm k \int_a^b g' \leftarrow \text{сходится}$$

$$\int_a^b g' = g|_a^b = -g(a) \text{ — сущ}$$

**Доказательство. А**

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow b-0} g(x)$$

$$fg = f\alpha + f(g - \alpha)$$

$$\int_a^b \alpha f \text{-сходится, т.к. } \int_a^b f \text{-сходится}$$

$$\int_a^b f(g - \alpha) \text{-сходится по признаку Дирихле}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{dx^p} \text{-сходится при } p > 0$$

$$f \leftrightarrow \sin x, F = \cos x \text{-огр.}$$

$$g = \frac{1}{x^p}, g \rightarrow 0 \text{ (} p > 0 \text{)}$$

$g$  -монотонна

$$\text{Пример } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \text{-принцип Дирихле}$$

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2\sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\pi \cos kx = \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^\pi = 0$$

$$0 = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\sin(n + \frac{1}{2}x)}{2\sin \frac{x}{2}} dx - \frac{\pi}{2}$$

$$\left[ \int_0^\pi h(x) \sin Ax dx \rightarrow_{A \rightarrow +\infty} 0 \right] \text{ - если } h(x) \in C^1[0, \pi]$$

**17 Ряды****17.1 Простейшие свойства**

$$S_N := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n \text{-частичная сумма}$$

Если существует  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S \in \overline{\mathbb{R}}$ , то он называется **сумма ряда**

$S \in \mathbb{R}$ - ряд сходится

$S = \pm\infty$  или  $\text{not} \exists \lim S_N$  -ряд расходится

$$\text{Наблюдение: } a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 \text{ т.е. } a_n = 0, \forall n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty, S_N = N$$

**17.2 m-ый остаток ряда**

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n = R_m$$

**17.3 Свойства**

$$1. \sum a_n, \sum b_n \text{-сходятся}$$

$$c_n = a_n + b_n \text{ при всех } n$$

$$\text{Тогда } \left[ \sum c_n \text{-сходится и } \sum c_n = \sum a_n + \sum b_n \right]$$

$$\text{Очевидно, } S_N^{(c)} = S_N^{(a)} + S_N^{(b)}$$

$$2. \sum a_n \text{-сходится } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Тогда } \left[ \sum (\lambda a_n) \text{-сходится, } (\sum \lambda a_n) = \lambda \sum a_n \right]$$

$$S_N^{(\lambda a)} = \lambda S_N^{(a)}$$

$$3a. \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{-сходящ} \Rightarrow \forall m \geq 1 \text{-m-ый остаток есть сходящийся ряд}$$

$$3б. \text{Если какой-нибудь остаток сх-ся} \Rightarrow \sum a_n \text{-сходящийся}$$

Зв. ряд  $\sum a_n$  сходящ.  $\Leftrightarrow R_m \rightarrow_{m \rightarrow +\infty} 0$

**Доказательство**

а.  $\sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^N a_n$ , (при  $N > m$ ) (\*)

В частности  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m-1} a_n + \sum_{n=m}^{+\infty} a_n$

б.  $m$ -ый остаток сходится  $\rightarrow$  в форме (\*)  $N \rightarrow +\infty, \Rightarrow \sum a_n$  — сходится

## 17.4 Теорема (необходимое условие сходимости)

$\sum a_k = cx$ , Тогда

$$\boxed{a_k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0}$$

**Доказательство**

$$a_k = S_k - S_{k-1} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} S - S = 0$$

$a_k \rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_k c_k$  **НЕВЕРНО!**

$$\frac{1}{k} \rightarrow 0, \sum \frac{1}{k} \text{ расходится } \boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n}$$

Пример.  $\sum_{k=1}^{+\infty} \sin k$  — расходится:  $\sin k \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0$

## 17.5 Критерий Больцано-Коши

$\sum a_n$  — сходится  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall k > N, \forall p \in \mathbb{N}$

$$|\sum_{i=1}^p a_{k+i}| < \epsilon$$

$$|\sum_{n=k+1}^{k+p} a_{k+i}| < \epsilon$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k \in \mathbb{R}, |S_{k+p} - S_k| < \epsilon$$

$$\boxed{\exists \epsilon > 0, \forall N, \exists k > N, \exists p, |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+p}| \geq \epsilon}$$

## 18 Сходимость положительных рядов

### 18.1 Лемма 1

$a_n \geq 0$ , Тогда

$$\boxed{\sum a_n \text{ — сходится } \Leftrightarrow \text{плотность } S_n \text{ — ограничена}}$$

**Доказательство**

$$a_n \geq 0 \rightarrow S_n \uparrow$$

$$\sum a_n \text{ — сходится } \Leftrightarrow \exists \text{кон. } \lim S_n \Leftrightarrow S_n \text{ — ограничена}$$

### 18.2 Признак сравнения

$$(A) \sum a_k, (B) \sum b_k, a_k \geq 0, b_k \geq 0$$

1.  $\forall n, a_n \leq b_n$ , Тогда

$$(B) \text{—сх.} \Rightarrow (A) \text{—сходится.}$$

$$(A) \text{—расх.} \Rightarrow (B) \text{—расходится}$$

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$ , Тогда  $0l < +\infty, (A) \text{—сх} \Leftrightarrow (B) \text{—сх.}$

$$l = 0 : (B) \text{—сх.} \Rightarrow (A) \text{—сх.}$$

$$(A) \text{—расх.} \Rightarrow (B) \text{—расходится}$$

$$l = +\infty : (A) \text{—сх.} \Rightarrow (B) \text{—сх.}$$

$$(B) \text{—расх.} \Rightarrow (A) \text{—расходится}$$

**Доказательство**

$$1) S_n^{(a)} \leq S_n^{(b)}$$

По лемме  $(B) - cx. \Rightarrow S_n^{(b)} - \text{огр.} \Rightarrow S_n^{(a)} - \text{огр} \Rightarrow (A) - cx. (A) - \text{расх} \Rightarrow S_n^{(a)} \rightarrow +\infty \Rightarrow S_n^{(b)} \Rightarrow +\infty \Rightarrow (B) - \text{расх.}$

Замечание. Утверждение остается верным, если известно, что  $a_n \leq b_n$  при  $n \geq N_0$

$$2) 0 < l < +\infty \Rightarrow (\text{Для } \epsilon = \frac{1}{2}) \exists N_0, \forall n > N_0$$

$$\frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} l b_n$$

$\Rightarrow (B) - \text{расходится} \Rightarrow (A) - \text{расходится}, (B) - \text{сходится} \Rightarrow (A) - \text{сх.}$

$$l = \infty, \text{Для } \epsilon = 1 \exists N_0, \forall n > N_0, b_n < a_n$$

$$l = 0, \text{Для } \epsilon = 1 \exists N_0, \forall n > N_0, a_n < b_n$$

### Пример

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{2018} e^{-k} - \text{сходится}$$

При больших  $k$ :  $k^{2018} e^{-k} \leq \frac{1}{k^2} = b_n, \leftarrow \exists N_0, \forall k > N_0$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{k^{2020}}{e^k} \rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2020}}{e^x} = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2020}}} \right)^{2020}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}} - \text{сх.}$$

$$e^{-\sqrt{k}} < \frac{1}{k^2} = e^{-2 \ln k} - \text{при больших } k, \sqrt{k} > 2 \ln k$$

## 18.3 Признак сходимости ряда Коши

$$\sum a_n, a_n \geq 0, K_n := \sqrt[n]{a_n}$$

*light* : 1)  $\exists q < 1, K_n \leq q$ , НСНМ, Тогда (A) -сходится

$K_n \geq 1$ , для беск. кол-во  $n$ . Тогда (A) -расходится

*pro* :  $K := \overline{\lim} K_n, 1) K > 1 \Rightarrow (A) - \text{сх.}$

2)  $K < 1 \rightarrow (A) - \text{расх.}$

Замечание. 1)  $K = 1$  ПРИЗНАК НЕ РАБОТАЕТ

$$\sum \frac{1}{n}, k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{e^{\frac{\ln n}{n}}} = 1$$

$$\sum \frac{1}{n^2}, k = \lim \left( \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = 1$$

### Доказательство

$$1. K_n \leq q, a_n^{\frac{1}{n}} \leq q, a_n \leq q^n, \text{НСНМ}$$

(B) -сходится  $\rightarrow (A) - \text{сх.}$

2.  $K_n \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$  для бесконечного числа номеров  $\rightarrow a_n \text{ not! } \rightarrow 0 \Rightarrow (A) - \text{расходится}$

$$\text{pro1. } \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} < 1 \text{ (По тех описанию)}$$

$$\forall q : \overline{\lim} (a_n)^{\frac{1}{n}} < q < 1 \text{ вып :}$$

$$\exists N, \forall n > N, (a_n)^{\frac{1}{n}} < q \rightarrow_{l.1} (A) - \text{сходится}$$

$$\text{pro2. } \overline{\lim} (a_n)^{\frac{1}{n}} = k > 1$$

$$\exists \text{беск номеров } (a_n)^{\frac{1}{n}} > 1 \rightarrow_{l.2} (A) - \text{расходится}$$

## 19 Признак Даламбера

$$\sum a_k, a_k > 0, D_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

*Light* : 1)  $\exists q < 1, D_n < q$  нснм  $\Rightarrow (A) \Rightarrow (A) - \text{сходится}$

2)  $D_n \geq 1$  нснм  $\Rightarrow (A) - \text{расходится}$

*Pro* : Пусть существует  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = D$

1)  $D < 1, (A) - \text{сх.}$

2)  $D > 1, (A) - \text{расходится}$

### Доказательство

$$1) \exists N, D_N = \frac{a_{N+1}}{a_N} < q,$$

$a_{N+1} < q < a_N$  Далее умножаем для неравенств от 1 до  $K$  и получаем  $0 < a_{N+K} < q^K a_N - \text{const}$

$$(A) - \text{сх} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_{N+K} - \text{сх.}$$

$$a_{N+K} \leq \text{const} q^k$$

$$\sum q^k - cx \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_{N+K} - cx.$$

$$2. \exists N \text{ при } n \geq N, a_{n+1} \geq a_n$$

$$\Rightarrow a_n \text{ при } n \geq N \Rightarrow a_n \text{ not } \rightarrow 0 \Rightarrow A\text{-расходится}$$

$$\text{pro1. } \lim D_n = D < 1, \text{ Пусть } D < q < 1$$

$$\text{Тогда } \exists N, \forall n > N, D_n < q, \text{ т.е. по 1.1 (A) -сх.}$$

$$\text{pro2. } \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = D > 1, \exists n, \forall n > N, D_n > 1 \Rightarrow (A)\text{-расх.}$$

## 20 Лемма

$$a_{n1} b_n > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ НСНМ}$$

$$(\sum b_n) - cx \Rightarrow (\sum a_n) - cx.$$

$$\sum b_n - cx \Rightarrow (\sum a_n) - cx.$$

$$\text{или } \sum a_n - rasx \Rightarrow (\sum b_n)\text{-расходится}$$

**Доказательство. нснм = 1**

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}$$

$$\text{и тд до } \frac{a_N}{a_{N-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

$$\text{Перемножим и получим } a_n \leq b_n \frac{a_1}{b_1}$$

## 21 Признак Раабе

$$a_n > 0, R_n := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

$$1. R_n \geq r > 1 \text{ НСНМ } \Rightarrow (A) - cx.$$

$$2. R_n \leq 1 \text{ нснм } \Rightarrow (A)\text{- расходится}$$

**Доказательство**

$$1. R_n \geq r, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n^s}, \frac{b_n}{b_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s$$

$$2. R_n < 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\sum \frac{1}{n}\text{-расх} \Rightarrow \sum a_n\text{-расходится}$$

Нужен  
при-  
мер..Кохася

### 21.1 Следствие

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$$

$$r > 1 - cx$$

$$r < 1 - \text{расх}$$

**Доказательство**

$$1. r > 1, r > r_0 > 1$$

$$\lim R_n = r, \text{ НСНМ } R_n > r_0 \Rightarrow_{P.1} (A) - cx.$$

$$r < 1 \text{ НСНМ } R_n \leq 1 \Rightarrow_{P.2} (A)\text{-расходится}$$

**Замечание**

$$\lim R_n = r, \text{ то тогда } a_n \approx \frac{1}{n^r}$$

**Пример**

Нужен  
при-  
мер..Кохася



## 22 Интегральный признак Коши

$f$  - монотонна на  $[1, +\infty)$  - непрерывна,  $f >$

Тогда  $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ ,  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ , сожигтся и расходится одновременно

$|S_n - \int_1^{n+1} f(x)dx| = \Delta$ -площадь фигуры закрашенной в первом столбике

$\Delta_n \leq |f(1) - f(n+1)|$

$\Delta_n \uparrow$ ,  $\Delta_n$ -ограничена

$\exists \lim \Delta_n \in \mathbb{R}$

Если  $f \uparrow$  и  $\sum, \int$  очевидно  $= +\infty$

$$\sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^n (\int_k^{k+1} f(k)dx - \int_k^{k+1} f(x)dx) = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (f(k) - f(x))dx \leq \int_k^{k+1} (f(k) - f(k+1))dx = \sum_{k=1}^n (f(k) - f(k+1)) = f(1) - f(n+1)$$

Нужна  
кар-  
тин-  
ка

## 23 Абсолютная сходимость

$\sum a_n$ - абсолютно . сходится, если 1.  $\sum a_n = cx$ .

2.  $\sum |a_n| = cx$ .

**Пример**  $\sum a_n = cx \text{ not} \Rightarrow \sum a_n$  абсолютно сходится

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 = x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \int_0^1 \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = (1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots (-1)^n \frac{1}{2n+1}) + \Delta_n$$

$$\Delta_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

$$|\Delta_n| \leq \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

## 24 Теорема

$a_n$ -произвольные слагаемые Экв: 1) Ряд  $\sum a_n$  абс сходится

2)  $\sum |a_n|$ -сходится

3)  $\sum a_n^+, \sum a_n^-$  оба сходятся

**Доказательство**

1  $\Rightarrow$  2 Трив

2  $\Rightarrow$  3,  $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$

3  $\Rightarrow$  1 :  $a_n = a_n^+ - a_n^-, |a_n| = a_n^+ + a_n^-$