# 1 Топология

## 1.1 Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве

## 1.2 Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности

## 1.3 Внутренние, предельные, изолированные точки множества

идея: любая окрестность принадлежит А
$x \in X$ - внутренняя точка множества $A \subset X \Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset A$$

идея: посл из А стрем к x
$x \in X$ - предельная точка множества $A$ относительно X $\Leftrightarrow$

$$\exists \{x_k\} \subset A : \lim_{n\to\infty} x_k = x,\ x_n \neq x\ \forall n \in \mathbb{N}$$

идея: любая прокол окр точки из А пустая относительно А
$x \in X$ - изолированная точка множества $A \in X \Leftrightarrow$

$$x \in A \; and \; \exists \delta > 0 : \overset{o}{U}_\delta(x) \cap A = \emptyset$$

## 1.4 Открытые и замкнутые множества, их свойства

идея: внутренние точки
Открытое множество $\Leftrightarrow$

$$intA = A$$

идея: точки прикосновения
Замкнутое множество $\Leftrightarrow$

$$\overline{A} = A$$

Задача 4. $A$ – открыто $\Leftrightarrow R^n \setminus A$ – замкнуто.
Задача 1. a. $A_i$ – открыто $\forall i \in \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$int \cap A = \cap A$$

b. $A_i$ – открыто $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$int \cup A = \cup A$$

Наоборот с замкнутыми множествами по формуле из задачи 4.

## 1.5 Внутренность, замыкание и граница множества

идея: любая окрестность принадлежит А
Внутренность $\Leftrightarrow$

$$intA = \{x \in X : \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset A\}$$

идея: любая окрестность непустая относительно А
Замыкание $\Leftrightarrow$

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall \epsilon > 0 \hookrightarrow A \cap U_\epsilon(x) = \emptyset\}$$

идея: замыкание без внутренности
Граница $\Leftrightarrow$

$$\partial A = \overline{A} \setminus intA$$

## 1.6 Компакты

идея: к любому числу из любой посл можно выбрать подпосл к этому числу
Метрическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$

$$\forall \{x_k\} \subset X \; and \; \forall x \in X \; \exists \{x_{k_n}\} : \{x_{k_n}\} \to x$$

идея:
Теорема 2. А – компакт в метрическом пространстве X $\Rightarrow$ А ограничено и замкнуто на X. Обратное неверно.

# 2 Непрерывность

## 2.1 Предел числовой функции нескольких переменных

## 2.2 Предел функции по множеству

## 2.3 Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству

## 2.4 Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора)

## 2.5 Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области

## 2.6 Связные множества

# 3 Дифференцируемость

## 3.1 Частные производные функции нескольких переменных

## 3.2 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

## 3.3 Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

## 3.4 Дифференцируемость сложной функции

## 3.5 Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных

## 3.6 Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл

# 4 Формула Тейлора

## 4.1 Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) \Leftrightarrow$$
$$\exists U_\delta(x_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)} \; and \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} f(x_0)$$

## 4.2 Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования

идея:

$$w(t) = f(x_0+t, y_0+t) + f(x_0, y_0) - f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0+t)$$
$$\phi(x,t) = f(x, y_0+t) - f(x, y_0)$$
$$\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 t, y)$$

Теорема 1:

$$\exists U_{\delta 1}(x_0, y_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y)} \; and \; \exists U_{\delta 2}(x_0, y_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0,y_0)} \; and \lim_{x,y \to x_0, y_0} \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)$$
$$and \lim_{x \to x_0} \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)$$

## 4.3 Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных

Все ч.пр. до $(k-1)$ включительно опр. в окр. и дифф. в т.$x_0$
идея: индукция
Дифф. $k$ п. опр. по инд.:

$$d^k f(x_0) dx = d(d^{k-1} f(x) dx)\Big|_{x=x_0} dx$$

идея: индукция
Лемма 1. Ф-ия $f$ $k$ раз дифф. в т.$x_0$ $\Rightarrow$

$$d^k f(x_0) dx = \sum_{i1=1}^{n} ... \sum_{ik=1}^{n} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^{ik} ... \partial x^{i1}} dx^{ik} ... dx^{i1}$$

## 4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано

идея: фикс.$x$ и расс.:

$$\phi(t) = f(x_0 + \Delta x t)$$

теорема о сложной функции + формула Тейлора Лагранжа для одной переменной
Теорема 1. Ф-ия $f$ $(m+1)$ раз дифф. в окр.$x_0$. Тогда

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!}\Delta x + \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x)}{(m+1)!}\Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0,\ \theta \in (0,1)$$

# 5 Теория меры

## 5.1 Определение измеримости по Лебегу множества в n–мерном евклидовом пространстве

Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ изм. по Лебегу $\Leftrightarrow$ явл. объед. сч.числа кон.изм.мн-в
Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ кон.изм. $\Leftrightarrow$

$$\exists \{X_k\} : \ X_k \ - \ cell\ set\ and\ X_k \xrightarrow{\mu} X$$

## 5.2 Критерий измеримости

## 5.3 Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств

идея: последовательности, для клеточных, переход к пределу
Лемма 3. Пусть мн-ва $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ кон.изм. Тогда

$$X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y$$

кон.изм и

$$\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y)$$

## 5.4 Счетная аддитивность меры Лебега

идея: полуадд. - по опр., шаг 1 для кон.изм.
по лемме пред. каждое как дизъ. об., для которых уже док.
Пусть мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k, \ X_k - \ measurable\ set$$

Тогда X изм. и

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$$

## 5.5 Измеримость и мера цилиндра в (n+1) – мерном пространстве

# 6 Интеграл

## 6.1 Определенный интеграл Римана

Опр.

$$J = \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\lim_{l(T)\to 0} s = \lim_{l(T)\to 0} S = J \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, \forall T : \, l(T) < \delta \hookrightarrow |s - J| < \epsilon \; and \; |S - J| < \epsilon$$

## 6.2 Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства

Опр. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и зад. $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a, b]$
Пусть $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
Тогда

$$s = \sum^{I} (x_i - x_{i-1}) m_i$$

$$S = \sum^{I} (x_i - x_{i-1}) M_i$$

наз. соотв. н.суммой Д. и в.суммой Д.

## 6.3 Критерий интегрируемости

идея: из опр. инт. берем $\frac{\epsilon}{2}$
Теорема 1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. на $[a, b] \Leftrightarrow$

$$\lim_{l(T)\to 0} \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \, \forall T : \, l(T) \leq \delta \hookrightarrow \Delta \leq \epsilon$$

## 6.4 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва

идея: т.К., модуль непр. стр. к нулю, огр. двумя
Теорема 1. $f(x)$ непр. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

идея: рассм. один отр., по т.4 ф-я совп. за искл. кон. числа т.
Теорема 2. $f(x)$ кус. непр. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

идея: кр.инт., $w_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x' - x'')| = f(x_{i-1}) - f(x_i)$
Теорема 3. $f(x)$ мон. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

## 6.5 Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем.

идея: огр. на $[a, c]$, $|S(T) - S(T_1) - S(T_2)| \leq 2M \cdot l(T) \to 0$
Теорема 5. $f(x)$ инт-ма на $[a, b]$ и $[b, c]$
Тогда $f(x)$ инт-ма на $[a, c]$ и

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

идея: лин. инт. суммы Р.
Теорема 1. $f(x),\ g(x)$ инт-мы на $[a, b]$
То $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ инт-ма на $[a, b]$ $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

идея: $\sigma(f) \leq \sigma(g)$ пер. к пред. $J_f \leq J_g$
Теорема 2. $f(x),\ g(x)$ инт-мы на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

идея:
Теорема 3. $f(x)$ инт-ма на $[a, b] \Rightarrow |f(x)|$ инт-ма на $[a, b]$ и

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

## 6.6 Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость

идея:
Теорема 1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. на $[a, b] \Rightarrow$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ cont.\ on\ [a, b]$$

идея:
Теорема 2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непр. на $[a, b] \Rightarrow$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt\ is\ antider.\ f(x)\ on\ [a, b]$$

## 6.7 Формула Ньютона–Лейбница

идея: $F(a) = C,\ F(b) = \int_a^b f(x)dx + C \to F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$
Следствие 2. $F(x)$ перв. $f(x)$ на $[a, b],\ f(x)$ непр. $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

## 6.8 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

# 7 Геометрические приложения интеграла

## 7.1 Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой

идея: разбить на супремум и инфимум прямоугольники, их суммы равны в.сумме Д. и н.сумме Д.
Теорема 1. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. и неотр. на $[a, b]$
Тогда кр.тр.

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

явл. изм. мн. и

$$\mu(E) = \int_a^b f(x)dx$$

идея: разбить на супремум и инфимум цилиндры, их суммы равны в.сумме Д. и н.сумме Д.
Теорема 2. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. и неотр. на $[a, b]$
Тогда тело вр.

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

изм. и равно

$$\mu(G) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

идея: $s' = |\overline{r}'|$
Теорема 3. Если кр. $L = \{\overline{r}(t) : t \in [a, b]\}$ непр. дифф., то

$$|L| = \int_a^b |\frac{d\overline{r}}{dt}|dt$$

## 7.2 Вычисление площади поверхности вращения (без доказательства)

Теорема 2. Пусть $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ – неотр., непр.дифф.
Тогда пл.пов.вр. сущ. и равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (\frac{df}{dx})^2}dx$$

# 8 Криволинейный интеграл I и II рода

## 8.1 Криволинейный интеграл первого рода

Определение. Пусть кр. $L = \{\overline{r},\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ зад. непр.в-р-ф-ей $\overline{r}$, пр. кот. кус.непр. на отр. $[a,b]$. Пусть на мн-ве $L$ зад. непр.скал.ф-я $f(\overline{r}(t))$
Крив.инт. 1 рода ф-ии $f$ по кр. $L$ наз.

$$\int\limits_L f ds = \int_a^b f(\overline{r}(t))|r'(t)|dt$$

идея: два аргумента, функция из аргумента 1 в аргумент 2 (непр., возр., непр.дифф.), теорема о производной сл.ф-ии
Теорема 1. Крив. инт. 1 рода не зав. от параметризации.
идея: замена $a \to -b,\ b \to -a,\ t \to -t$
Лемма 1. При изм. ориент. кр.инт. 1 рода не изм.

## 8.2 Криволинейный интеграл второго рода

Определение. Пусть кр. $L = \{\overline{r},\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ зад. непр.в-р-ф-ей $\overline{r}$, пр. кот. кус.непр. на отр. $[a,b]$. Пусть на мн-ве $L$ зад. непр.$n$-м.в-р-ф-я $\overline{F}(\overline{r}(t))$
Крив.инт. 2 рода ф-ии $\overline{F}$ по кр. $L$ наз.

$$\int\limits_L \overline{F} d\overline{r} = \int_a^b \overline{F}\overline{r}' dt$$

идея: ан-но крив. инт. 1 рода
Теорема 2. Крив. инт. 2 рода не зав. от параметризации.
идея: ан-но крив. инт. 1 рода
Лемма 2. При изм. ор. кр. крив. инт. 2 рода меняет знак.

# 9 Несобственный интеграл

## 9.1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}\ and\ \forall b > a\ f$ инт-ма на $[a, b]$
Тогда несоб. инт. наз.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

## 9.2 Критерий Коши сходимости интеграла

идея: пред. к $b$ по кр.К. сущ. пред. ф-ии
Теорема 1. Пусть $f$ инт-ма на $\forall[c, d] \subset [a, b)$
Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сх. $\Leftrightarrow$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\xi \in (a, b) :\ \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow |\int_{b1}^{b2} f(x)dx| < \epsilon$$

## 9.3 Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости

идея: супремумы отрезков меньше или равны, соотв. док. интегралы меньше/больше бесконечности по транзитивности
Теорема 2. Пусть $f\ and\ g$ инт-мы на $\forall[c, d] \subset [a, b)$ и $\forall x \in [a, b) \hookrightarrow 0 \le f(x) \le g(x)$
Тогда
а. из сх. $\int_a^b gdx \hookrightarrow$ сх. $\int_a^b fdx$
б. из расх. $\int_a^b fdx \hookrightarrow$ расх. $\int_a^b gdx$

## 9.4 Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость

Определение. $\int_a^b f(x)dx$ сх. абс. $\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ сх.
Определение. $\int_a^b f(x)dx$ не сх.абс., но сх. $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ сх.усл.
идея: кр.К. сх. инт., нер-во с модулем
Теорема 2. Пусть $f$ инт-ма на $\forall[c, d] \subset [a, b)$
$\int_a^b f(x)dx$ сх.абс. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ сх.

## 9.5 Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов

идея: по частям, $F(x)$ огр., по пр.ср., $g(x) \to 0$, не влияет
Теорема 3. Пусть $f(x)$ непр., а $g(x)$ непр.дифф на $[a, b),\ b \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть
1. $F(x)$ огр. на $[a, b)$
2. $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$

3. $\forall x \in [a, b)$ $g'(x) \leq 0$ Тогда

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

сх.

# 10 Числовые ряды

## 10.1 Числовые ряды

Определение. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – числ. посл.
Сумма ряда

$$\sum^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} a_k$$

Ряд наз. сх., если $\sum^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$, в пр. сл. расх.

## 10.2 Критерий Коши сходимости ряда

идея: кр.К. для посл.
Теорема 1.

$$\sum^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |\sum_{n+1}^{n+p} a_k| < \epsilon$$

## 10.3 Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак

идея: по т1 расс. супремумы и исп. транз.
Теорема 2.

$$0 \leq a_k \leq b_k\ \forall k \in \mathbb{N}\ \Rightarrow$$

а. из сх. $\sum^{\infty} b_k \hookrightarrow$ сх. $\sum^{\infty} a_k$
б. из расх. $\sum^{\infty} a_k \hookrightarrow$ расх. $\sum^{\infty} b_k$
идея: ср-ть с геом. прог.
Теорема 5.

$$a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$a.\ if\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ and\ q \in (0,1): \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q\ \forall k \geq k_0\ then \sum^{\infty} a_k\ conv.$$

$$b.\ if\ \exists k_0 \in \mathbb{N}: \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1\ \forall k \geq k_0\ then \sum^{\infty} a_k\ disconv.$$

идея: возвести в ст., ср-ть с геом. прог.
Теорема 6.

$$a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a.\ if\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ and\ q \in (0,1): \sqrt[k]{a_k} \leq q\ \forall k \geq k_0\ then \sum^{\infty} a_k\ conv.$$

$$b.\ if\ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{a_k} \geq 1\ \forall k \geq k_0\ then \sum^{\infty} a_k\ disconv.$$

идея: проинт. и просумм. $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, супр.
Теорема 4. $f(x)$ зад. и мон. на $[1, \infty)$
Тогда $\sum^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сх. или расх. одн-но

## 10.4 Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля

Определение. $\sum^{\infty} a_k$ наз. абс. сх., если сх. $\sum^{\infty} |a_k|$
$\sum^{\infty} a_k$ наз. усл. сх., если $\sum^{\infty} a_k$ сх., а $\sum^{\infty} |a_k|$ расх.
идея: кр.К. для рядов
Теорема 2. Ряд сх. абс. $\Rightarrow$ сх.
идея: пр-ие Абеля $A_n = \sum^{n} a_k,\ A_0 = 0$
Теорема 3.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |\sum^{n} a_k| \leq C\ and\ b_k \overset{mon}{\to} 0\ as\ k \to \infty$$

Тогда $\sum^{\infty} a_k b_k$ сх.

## 10.5 Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых

идея: исп. $M_n$ док. абс. сх., исп. $M_n$, $m_n$ и $\sigma_m$ док. рав.
Теорема 1. Р. $\sum^{\infty} a_{kj}$ пол. пер. абс. сх. р. $\sum^{\infty} a_k \Rightarrow$
$\sum^{\infty} a_{kj}$ абс. сх. и

$$\sum^{\infty} a_{kj} = \sum^{\infty} a_k$$

## 10.6 Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда (без доказательства)

идея: когда б., добирать отр., когда м., добирать пол. (разд. ряд на пол. и отр.)
Теорема 2. $\sum^{\infty} a_k$ сх. усл., то $\forall x \in \mathbb{R}$ можно пер. чл. $\sum^{\infty} a_k$ так: $\sum^{\infty} a_{kj} = x$

## 10.7 Произведение абсолютно сходящихся рядов

идея: огр. р. пр. пр. р., док. абс. сх., пост. вз. одн. соот. по диаг., р. не изм. по док.

Теорема 3. Пусть $\sum^{\infty} a_k$ и $\sum^{\infty} b_k$ абс. сх., а $(m_j, n_j) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ вз. одн. Тогда $\sum^{\infty} a_{mj} b_{nj}$ абс. сх. и

$$\sum^{\infty} a_{mj} b_{nj} = \sum^{\infty} a_k \cdot \sum^{\infty} b_k$$

# 11 Функциональные последовательности и ряды

## 11.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Опр. $\{f_n(x)\}$ сх. к $f(x)$ на мн.$X \Leftrightarrow$

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \forall x \in X\ \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Для ф. р. опр. ан-ое, расс. посл. ч. сумм

## 11.2 Критерий Коши равномерной сходимости

идея: $\Rightarrow$ в опр. вз. $\epsilon/2$, $\Leftarrow$ в опр. вз. $p \to \infty$
Теорема 2.

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \epsilon$$

Для ф. р. опр. ан-ое, расс. посл. ч. сумм

## 11.3 Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций

идея: $|f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon/4$, $|f_N(x) - f(x_0)| \leq \epsilon/2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$
Теорема 1. $f_n(x)$ непр. на $X$ и

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$$

То $f(x)$ непр. на $X$

## 11.4 Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

идея: $|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (b-a)\sup(f_n(x) - f(x)) \to 0$
Теорема 3. $f_n(x)$ непр. на $[a, b]$ и $f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow$

$$\underset{n\to\infty}{lim}(\int_a^b f_n(x)dx) = \int_a^b (\underset{n\to\infty}{lim} f_n(x))dx$$

## 11.5 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 5.

$$1.\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in X \hookrightarrow |A_n(x)| \leq C$$

$$2.\ b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0\ as\ k \to \infty$$

$$3.\ \forall x \in X\ \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x)\ \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) b_k(x)\ uniform\ converges\ on\ X$$

# 12 Степенные ряды

## 12.1 Степенные ряды с комплексными членами

Опр. $\{c_k\}$, $c_k, w_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - w_0)^k$$

наз. ст. р.

## 12.2 Первая теорема Абеля

идея: по св-ву рад. сх.
Теорема 2. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. в т.$z_0$
Тогда

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|$$

исх. р. сх. абс.

## 12.3 Круг и радиус сходимости

Опр. Рад. сх. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ наз.

$$R \in [0, \infty] : \ \frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Кр. с ц. в т.$(0,0)$ и рад. $R$ наз. кр. сх. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

## 12.4 Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости

идея: ср. $|c_k z^k| \le |c_k| r^k$, сх. по св-ву рад., по пр.В.
Теорема 3. $R > 0$ ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow$

$$\forall r \in (0, R)\ series\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\ converges\ uniform\ in\ Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$$

## 12.5 Непрерывность суммы степенного ряда в круге сходимости

## 12.6 Формула Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$$

## 12.7 Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при формальном дифференцировании и интегрировании ряда

идея: ф.К.А., из дифф. след. инт.
Теорема 5. Рад. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$ совп. с рад. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

## 12.8 Вторая теорема Абеля

идея: пр.А.
Теорема 4. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. в $z_1 \in \mathbb{C}$
Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равн. на $[0, z_1] = \{tz_1 : t \in [0,1]\}$

# 13 Ряд Тейлора

## 13.1 Степенные ряды с действительными членами

## 13.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости

## 13.3 Единственность представления функции степенным рядом

## 13.4 Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

идея: ф.Т. по Л., $M\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \; as \; n \to \infty$
Теорема 1. $\exists \delta > 0 :$ $f$ беск. дифф. в $U_\delta(x_0)$ и

$$\exists M > 0 : \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M \; \Rightarrow$$

$f$ рег. в т.$x_0$ и

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

## 13.5 Ряд Тейлора

Опр. $f(x)$ – беск. дифф. в т.$x_0$
Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

наз. р.Т. ф-ии $f(x)$ в т.$x_0$

## 13.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

## 13.7 Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд

идея: все пр. в нуле равны нулю
Бесконечно дифференцируемая функция, не разлагающаяся в степенной ряд

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

## 13.8 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций

1. $e^x$ беск. дифф., $|(e^x)^{(n)}| \leq e^\delta \ \forall x \in U_\delta(0) \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

## 13.9 Разложение в степенной ряд комплекснозначной экспоненты

идея: док. $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$ через произ. р. и б.Н. $k_1 = k$, $k_2 = m - k$
Теорема 2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$