1 Топология

1.1 Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве

1.2 Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности

1.3 Внутренние, предельные, изолированные точки множества

идея: любая окрестность принадлежит А
$x \in X$ - внутренняя точка множества $A \subset X \Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset A$$

идея: посл из А стрем к х
$x \in X$ - предельная точка множества A относительно X $\Leftrightarrow$

$$\exists \{x_k\} \subset A : \lim_{n \to \infty} x_k = x,\ x_n \neq x\ \forall n \in \mathbb{N}$$

идея: любая прокол окр точки из А пустая относительно А
$x \in X$ - изолированная точка множества $A \in X \Leftrightarrow$

$$x \in A\ and\ \exists \delta > 0 : \overset{o}{U}_\delta(x) \cap A = \emptyset$$

1.4 Открытые и замкнутые множества, их свойства

идея: внутренние точки
Открытое множество $\Leftrightarrow$

$$intA = A$$

идея: точки прикосновения
Замкнутое множество $\Leftrightarrow$

$$\overline{A} = A$$

Задача 4. A – открыто $\Leftrightarrow R^n \setminus A$ – замкнуто.
Задача 1. a. A_i – открыто $\forall i \in \overline{1, n},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$int \cap A = \cap A$$

b. A_i – открыто $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$int \cup A = \cup A$$

Наоборот с замкнутыми множествами по формуле из задачи 4.

1.5 Внутренность, замыкание и граница множества

идея: любая окрестность принадлежит A
Внутренность $\Leftrightarrow$

$$intA = \{x \in X : \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset A\}$$

идея: любая окрестность непустая относительно A
Замыкание $\Leftrightarrow$

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall \epsilon > 0 \hookrightarrow A \cap U_\epsilon(x) = \emptyset\}$$

идея: замыкание без внутренности
Граница $\Leftrightarrow$

$$\partial A = \overline{A} \setminus intA$$

1.6 Компакты

идея: к любому числу из любой посл можно выбрать подпосл к этому числу
Метрическое пространство X компактно $\Leftrightarrow$

$$\forall \{x_k\} \subset X \; and \, \forall x \in X \; \exists \{x_{k_n}\} : \{x_{k_n}\} \to x$$

идея:
Теорема 2. A – компакт в метрическом пространстве X $\Rightarrow$ A ограничено и замкнуто на X. Обратное неверно.

2 Непрерывность

2.1 Предел числовой функции нескольких переменных

2.2 Предел функции по множеству

2.3 Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству

2.4 Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора)

2.5 Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области

2.6 Связные множества

3 Дифференцируемость

3.1 Частные производные функции нескольких переменных

3.2 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал

3.3 Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

3.4 Дифференцируемость сложной функции

3.5 Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных

3.6 Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл

4 Формула Тейлора

4.1 Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) \Leftrightarrow$$
$$\exists U_\delta(x_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)} \; and \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} f(x_0)$$

4.2 Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования

идея:

$$w(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t)$$
$$\phi(x, t) = f(x, y_0 + t) - f(x, y_0)$$
$$\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 t, y)$$

Теорема 1:

$$\exists U_{\delta 1}(x_0, y_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y)} \; and \; \exists U_{\delta 2}(x_0, y_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0,y_0)} \; and \lim_{x,y \to x_0, y_0} \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)$$

$$and \lim_{x \to x_0} \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0) \Rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)$$

4.3 Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных

Все ч.пр. до $(k-1)$ включительно опр. в окр. и дифф. в т.x_0
идея: индукция
Дифф. k п. опр. по инд.:

$$d^k f(x_0) dx = d(d^{k-1} f(x) dx)\Big|_{x=x_0} dx$$

идея: индукция
Лемма 1. Ф-ия f k раз дифф. в т.x_0 $\Rightarrow$

$$d^k f(x_0) dx = \sum_{i1=1}^{n} ... \sum_{ik=1}^{n} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^{ik} ... \partial x^{i1}} dx^{ik} ... dx^{i1}$$

4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано

идея: фикс.x и расс.:

$$\phi(t) = f(x_0 + \Delta x t)$$

теорема о сложной функции + формула Тейлора Лагранжа для одной переменной
Теорема 1. Ф-ия f $(m+1)$ раз дифф. в окр.x_0. Тогда

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!}\Delta x + \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta\Delta x)}{(m+1)!}\Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0,\ \theta \in (0,1)$$

5 Теория меры

5.1 Определение измеримости по Лебегу множества в n–мерном евклидовом пространстве

Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ изм. по Лебегу $\Leftrightarrow$ явл. объед. сч.числа кон.изм.мн-в
Мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$ кон.изм. $\Leftrightarrow$

$$\exists\{X_k\}:\ X_k\ -\ cell\ set\ and\ X_k \xrightarrow{\mu} X$$

5.2 Критерий измеримости

5.3 Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств

идея: последовательности, для клеточных, переход к пределу
Лемма 3. Пусть мн-ва $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ кон.изм. Тогда

$$X \cup Y, X \cap Y, X \setminus Y$$

кон.изм и

$$\mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y) = \mu(X) + \mu(Y)$$

5.4 Счетная аддитивность меры Лебега

идея: полуадд. - по опр., шаг 1 для кон.изм.
по лемме пред. каждое как дизъ. об., для которых уже док.
Пусть мн-во $X \subset \mathbb{R}^n$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k,\ X_k -\ measurable\ set$$

Тогда X изм. и

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$$

5.5 Измеримость и мера цилиндра в (n+1) – мерном пространстве

6 Интеграл

6.1 Определенный интеграл Римана

Опр.

$$J = \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\underset{l(T)\to 0}{lim}\, s = \underset{l(T)\to 0}{lim}\, S = J \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall T :\ l(T) < \delta \hookrightarrow |s - J| < \epsilon\ and\ |S - J| < \epsilon$$

6.2 Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства

Опр. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и зад. $T = \{x_i\}_{i=0}^{I}$ отр. $[a, b]$
Пусть $m_i = \underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{inf} f(x)$, $M_i = \underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{sup} f(x)$
Тогда

$$s = \sum^{I} (x_i - x_{i-1})m_i$$

$$S = \sum^{I} (x_i - x_{i-1})M_i$$

наз. соотв. н.суммой Д. и в.суммой Д.

6.3 Критерий интегрируемости

идея: из опр. инт. берем $\frac{\epsilon}{2}$
Теорема 1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. на $[a, b] \Leftrightarrow$

$$\underset{l(T)\to 0}{lim}\, \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall T :\ l(T) \le \delta \hookrightarrow \Delta \le \epsilon$$

6.4 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва

идея: т.К., модуль непр. стр. к нулю, огр. двумя
Теорема 1. $f(x)$ непр. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

идея: рассм. один отр., по т.4 ф-я совп. за искл. кон. числа т.
Теорема 2. $f(x)$ кус. непр. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

идея: кр.инт., $w_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f(x'-x'')| = f(x_{i-1}) - f(x_i)$
Теорема 3. $f(x)$ мон. на $[a,b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

6.5 Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем.

идея: огр. на $[a,c]$, $|S(T) - S(T_1) - S(T_2)| \leq 2M \cdot l(T) \to 0$
Теорема 5. $f(x)$ инт-ма на $[a,b]$ и $[b,c]$
Тогда $f(x)$ инт-ма на $[a,c]$ и

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

идея: лин. инт. суммы Р.
Теорема 1. $f(x),\ g(x)$ инт-мы на $[a,b]$
То $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ инт-ма на $[a,b]$ $\forall\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

идея: $\sigma(f) \leq \sigma(g)$ пер. к пред. $J_f \leq J_g$
Теорема 2. $f(x),\ g(x)$ инт-мы на $[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] \hookrightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

идея:
Теорема 3. $f(x)$ инт-ма на $[a,b] \Rightarrow |f(x)|$ инт-ма на $[a,b]$ и

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

6.6 Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость

6.7 Формула Ньютона–Лейбница

идея: $F(a) = C,\ F(b) = \int_a^b f(x)dx + C \to F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$
Следствие 2. $F(x)$ перв. $f(x)$ на $[a,b]$, $f(x)$ непр. $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6.8 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

7 Геометрические приложения интеграла

7.1 Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой

идея: разбить на супремум и инфимум прямоугольники, их суммы равны в.сумме Д. и н.сумме Д.
Теорема 1. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. и неотр. на $[a, b]$
Тогда кр.тр.

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

явл. изм. мн. и

$$\mu(E) = \int_a^b f(x)dx$$

идея: разбить на супремум и инфимум цилиндры, их суммы равны в.сумме Д. и н.сумме Д.
Теорема 2. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ инт. и неотр. на $[a, b]$
Тогда тело вр.

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

изм. и равно

$$\mu(G) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

идея: $s' = |\overline{r}'|$
Теорема 3. Если кр. $L = \{\overline{r}(t) : t \in [a, b]\}$ непр. дифф., то

$$|L| = \int_a^b |\frac{d\overline{r}}{dt}|dt$$

7.2 Вычисление площади поверхности вращения (без доказательства)

Теорема 2. Пусть $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ – неотр., непр.дифф.
Тогда пл.пов.вр. сущ. и равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (\frac{df}{dx})^2}dx$$

8 Криволинейный интеграл I и II рода

8.1 Криволинейный интеграл первого рода

Определение. Пусть кр. $L = \{\overline{r},\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ зад. непр.в-р-ф-ей $\overline{r}$, пр. кот. кус.непр. на отр. $[a,b]$. Пусть на мн-ве L зад. непр.скал.ф-я $f(\overline{r}(t))$
Крив.инт. 1 рода ф-ии f по кр. L наз.

$$\int\limits_L f ds = \int_a^b f(\overline{r}(t))|r'(t)|dt$$

идея: два аргумента, функция из аргумента 1 в аргумент 2 (непр., возр., непр.дифф.), теорема о производной сл.ф-ии
Теорема 1. Крив. инт. 1 рода не зав. от параметризации.
идея: замена $a \to -b,\ b \to -a,\ t \to -t$
Лемма 1. При изм. ориент. кр.инт. 1 рода не изм.

8.2 Криволинейный интеграл второго рода

Определение. Пусть кр. $L = \{\overline{r},\ t \in [a,b]\} \subset \mathbb{R}^n$ зад. непр.в-р-ф-ей $\overline{r}$, пр. кот. кус.непр. на отр. $[a,b]$. Пусть на мн-ве L зад. непр.n-м.в-р-ф-я $\overline{F}(\overline{r}(t))$
Крив.инт. 2 рода ф-ии $\overline{F}$ по кр. L наз.

$$\int\limits_L \overline{F} d\overline{r} = \int_a^b \overline{F}\overline{r}' dt$$

идея: ан-но крив. инт. 1 рода
Теорема 2. Крив. инт. 2 рода не зав. от параметризации.
идея: ан-но крив. инт. 1 рода
Лемма 2. При изм. ор. кр. крив. инт. 2 рода меняет знак.

9 Несобственный интеграл

9.1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}\ and\ \forall b > a\ f$ инт-ма на $[a,b]$
Тогда несоб. инт. наз.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

9.2 Критерий Коши сходимости интеграла

идея: пред. к b по кр.К. сущ. пред. ф-ии
Теорема 1. Пусть f инт-ма на $\forall [c,d] \subset [a,b)$

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сх. $\Leftrightarrow$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\xi \in (a,b):\ \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow |\int_{b1}^{b2} f(x)dx| < \epsilon$$

9.3 Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости

идея: супремумы отрезков меньше или равны, соотв. док. интегралы меньше/больше бесконечности по транзитивности
Теорема 2. Пусть $f\ and\ g$ инт-мы на $\forall[c,d] \subset [a,b)$ и $\forall x \in [a,b) \hookrightarrow 0 \leq f(x) \leq g(x)$
Тогда
а. из сх. $\int_a^b gdx \hookrightarrow$ сх. $\int_a^b fdx$
б. из расх. $\int_a^b fdx \hookrightarrow$ расх. $\int_a^b gdx$

9.4 Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость

Определение. $\int_a^b f(x)dx$ сх. абс. $\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ сх.
Определение. $\int_a^b f(x)dx$ не сх.абс., но сх. $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ сх.усл.
идея: кр.К. сх. инт., нер-во с модулем
Теорема 2. Пусть f инт-ма на $\forall[c,d] \subset [a,b)$
$\int_a^b f(x)dx$ сх.абс. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ сх.

9.5 Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов

идея: по частям, $F(x)$ огр., по пр.ср., $g(x) \to 0$, не влияет
Теорема 3. Пусть $f(x)$ непр., а $g(x)$ непр.дифф на $[a,b),\ b \in \overline{\mathbb{R}}$
Пусть
1. $F(x)$ огр. на $[a,b)$
2. $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$
3. $\forall x \in [a,b)\ g'(x) \leq 0$ Тогда

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$$

сх.

10 Числовые ряды

10.1 Числовые ряды

Определение. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – числ. посл.
Сумма ряда

$$\sum^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum^{n} a_k$$

Ряд наз. сх., если $\sum\limits^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$, в пр. сл. расх.

10.2 Критерий Коши сходимости ряда

идея: кр.К. для посл.
Теорема 1.

$$\sum^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N \; \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow |\sum_{n+1}^{n+p} a_k| < \epsilon$$

10.3 Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак

идея: по т1 расс. супремумы и исп. транз.
Теорема 2.

$$0 \leq a_k \leq b_k \; \forall k \in \mathbb{N} \; \Rightarrow$$

а. из сх. $\sum\limits^{\infty} b_k \hookrightarrow$ сх. $\sum\limits^{\infty} a_k$
б. из расх. $\sum\limits^{\infty} a_k \hookrightarrow$ расх. $\sum\limits^{\infty} b_k$
идея: ср-ть с геом. прог.
Теорема 5.

$$a_k > 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$a. \; if \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; and \; q \in (0,1) : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \; \forall k \geq k_0 \; then \sum^{\infty} a_k \; conv.$$

$$b. \; if \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \; \forall k \geq k_0 \; then \sum^{\infty} a_k \; disconv.$$

идея: возвести в ст., ср-ть с геом. прог.
Теорема 6.

$$a_k > 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a. \; if \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; and \; q \in (0,1) : \sqrt[k]{a_k} \leq q \; \forall k \geq k_0 \; then \sum^{\infty} a_k \; conv.$$

$$b.\ if\ \exists k_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{a_k} \geq 1\ \forall k \geq k_0\ then \sum^{\infty} a_k\ disconv.$$

идея: проинт. и просумм. $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, супр.
Теорема 4. $f(x)$ зад. и мон. на $[1, \infty)$
Тогда $\sum\limits^{\infty} f(k)$ и $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сх. или расх. одн-но

10.4 Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля

Определение. $\sum\limits^{\infty} a_k$ наз. абс. сх., если сх. $\sum\limits^{\infty} |a_k|$
$\sum\limits^{\infty} a_k$ наз. усл. сх., если $\sum\limits^{\infty} a_k$ сх., а $\sum\limits^{\infty} |a_k|$ расх.
идея: кр.К. для рядов
Теорема 2. Ряд сх. абс. $\Rightarrow$ сх.
идея: пр-ие Абеля $A_n = \sum\limits^{n} a_k,\ A_0 = 0$
Теорема 3.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \hookrightarrow |\sum^{n} a_k| \leq C\ and\ b_k \overset{mon}{\to} 0\ as\ k \to \infty$$

Тогда $\sum\limits^{\infty} a_k b_k$ сх.

10.5 Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых

10.6 Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда (без доказательства)

идея: когда б., добирать отр., когда м., добирать пол. (разд. ряд на пол. и отр.)
Теорема 2. $\sum\limits^{\infty} a_k$ сх. усл., то $\forall x \in \mathbb{R}$ можно пер. чл. $\sum\limits^{\infty} a_k$ так: $\sum\limits^{\infty} a_{kj} = x$

10.7 Произведение абсолютно сходящихся рядов

11 Функциональные последовательности и ряды

11.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Опр. $\{f_n(x)\}$ сх. к $f(x)$ на мн.$X \Leftrightarrow$

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N \; \forall x \in X \; \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Для ф. р. опр. ан-ое, расс. посл. ч. сумм

11.2 Критерий Коши равномерной сходимости

идея: $\Rightarrow$ в опр. вз. $\epsilon/2$, $\Leftarrow$ в опр. вз. $p \to \infty$
Теорема 2.

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq N \; \forall p \in \mathbb{N} \; x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \epsilon$$

Для ф. р. опр. ан-ое, расс. посл. ч. сумм

11.3 Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций

идея: $|f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon/4$, $|f_N(x) - f(x_0)| \leq \epsilon/2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$
Теорема 1. $f_n(x)$ непр. на X и

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} f(x)$$

То $f(x)$ непр. на X

11.4 Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

11.5 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

12 Степенные ряды

12.1 Степенные ряды с комплексными членами

Опр. $\{c_k\}$, $c_k, w_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - w_0)^k$$

наз. ст. р.

12.2 Первая теорема Абеля

идея: по св-ву рад. сх.
Теорема 2. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. в т.z_0
Тогда

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|$$

исх. р. сх. абс.

12.3 Круг и радиус сходимости

Опр. Рад. сх. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ наз.

$$R \in [0, \infty] : \ \frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Кр. с ц. в т.$(0,0)$ и рад. R наз. кр. сх. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

12.4 Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости

идея: ср. $|c_k z^k| \le |c_k| r^k$, сх. по св-ву рад., по пр.В.
Теорема 3. $R > 0$ ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow$

$$\forall r \in (0, R) \ series \ \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ converges \ uniform \ in \ Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$$

12.5 Непрерывность суммы степенного ряда в круге сходимости

12.6 Формула Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

12.7 Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при формальном дифференцировании и интегрировании ряда

идея: ф.К.А., из дифф. след. инт.
Теорема 5. Рад. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$ совп. с рад. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

12.8 Вторая теорема Абеля

идея: пр.А.
Теорема 4. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. в $z_1 \in \mathbb{C}$
Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равн. на $[0, z_1] = \{t z_1 : t \in [0, 1]\}$

13 Ряд Тейлора

13.1 Степенные ряды с действительными членами

13.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости

13.3 Единственность представления функции степенным рядом

13.4 Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

идея: ф.Т. по Л., $M\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \; as \; n \to \infty$
Теорема 1. $\exists \delta > 0 :\; f$ беск. дифф. в $U_\delta(x_0)$ и

$$\exists M > 0 :\; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M \;\Rightarrow$$

f рег. в т.x_0 и

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

13.5 Ряд Тейлора

Опр. $f(x)$ – беск. дифф. в т.x_0
Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

наз. р.Т. ф-ии $f(x)$ в т.x_0

13.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

13.7 Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд

идея: все пр. в нуле равны нулю
Бесконечно дифференцируемая функция, не разлагающаяся в степенной ряд

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

13.8 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций

1. e^x беск. дифф., $|(e^x)^{(n)}| \le e^\delta \ \forall x \in U_\delta(0) \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

13.9 Разложение в степенной ряд комплекснозначной экспоненты

идея: док. $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$ через произ. р. и б.Н. $k_1 = k$, $k_2 = m - k$
Теорема 2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$