

1 Топология

1.1 Предел последовательности точек в n -мерном евклидовом пространстве

1.2 Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности

1.3 Внутренние, предельные, изолированные точки множества

идея: любая окрестность принадлежит A
 $x \in X$ - внутренняя точка множества $A \subset X \Leftrightarrow$

$$\exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset A$$

идея: посл из A стрем к x
 $x \in X$ - предельная точка множества A относительно $X \Leftrightarrow$

$$\exists \{x_k\} \subset A : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x, x_k \neq x \forall k \in \mathbb{N}$$

идея: любая прокол окр точки из A пустая относительно A
 $x \in X$ - изолированная точка множества $A \subset X \Leftrightarrow$

$$x \in A \text{ and } \exists \delta > 0 : \overset{o}{U}_\delta(x) \cap A = \emptyset$$

1.4 Открытые и замкнутые множества, их свойства

идея: внутренние точки
Открытое множество \Leftrightarrow

$$\text{int} A = A$$

идея: точки прикосновения
Замкнутое множество \Leftrightarrow

$$\overline{A} = A$$

Задача 4. A – открыто $\Leftrightarrow R^n \setminus A$ – замкнуто.

Задача 1. а. A_i – открыто $\forall i \in \overline{1, n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\text{int} \cap A = \cap A$$

б. A_i – открыто $\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\text{int} \cup A = \cup A$$

Наоборот с замкнутыми множествами по формуле из задачи 4.

1.5 Внутренность, замыкание и граница множества

идея: любая окрестность принадлежит А

Внутренность \Leftrightarrow

$$\text{int}A = \{x \in X : \exists \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \subset A\}$$

идея: любая окрестность непустая относительно А

Замыкание \Leftrightarrow

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall \epsilon > 0 \hookrightarrow A \cap U_\epsilon(x) \neq \emptyset\}$$

идея: замыкание без внутренности

Граница \Leftrightarrow

$$\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}A$$

1.6 Компакты

идея: к любому числу из любой посл можно выбрать подпосл к этому числу

Метрическое пространство X компактно \Leftrightarrow

$$\forall \{x_k\} \subset X \text{ and } \forall x \in X \exists \{x_{k_n}\} : \{x_{k_n}\} \rightarrow x$$

идея:

Теорема 2. А – компакт в метрическом пространстве X \Rightarrow А ограничено и замкнуто на X. Обратное неверно.

2 Непрерывность

- 2.1 Предел числовой функции нескольких переменных
- 2.2 Предел функции по множеству
- 2.3 Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству
- 2.4 Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора)
- 2.5 Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области
- 2.6 Связные множества

3 Дифференцируемость

- 3.1 Частные производные функции нескольких переменных
- 3.2 Дифференцируемость функции в точке, дифференциал
- 3.3 Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных
- 3.4 Дифференцируемость сложной функции
- 3.5 Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных
- 3.6 Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл

4 Формула Тейлора

4.1 Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) \Leftrightarrow \\ \exists U_\delta(x_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial x^i} f(x)} \text{ and } \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} f(x_0)$$

4.2 Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования

идея:

$$w(t) = f(x_0 + t, y_0 + t) + f(x_0, y_0) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t) \\ \phi(x, t) = f(x, y_0 + t) - f(x, y_0) \\ \psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 t, y)$$

Теорема 1:

$$\exists U_{\delta 1}(x_0, y_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x, y)} \text{ and } \exists U_{\delta 2}(x_0, y_0) \subset X_{\frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0)} \text{ and } \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0) \\ \text{and } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0) \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x_0, y_0)$$

4.3 Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных

Все ч.пр. до $(k-1)$ включительно опр. в окр. и дифф. в т. x_0

идея: индукция

Дифф. k п. опр. по инд.:

$$d^k f(x_0) dx = d(d^{k-1} f(x) dx) \Big|_{x=x_0} dx$$

идея: индукция

Лемма 1. Ф-ия f k раз дифф. в т. $x_0 \Rightarrow$

$$d^k f(x_0) dx = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^{i_k} \dots \partial x^{i_1}} dx^{i_k} \dots dx^{i_1}$$

4.4 Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано

идея: фикс. x и расс.:

$$\phi(t) = f(x_0 + \Delta x t)$$

теорема о сложной функции + формула Тейлора Лагранжа для одной переменной

Теорема 1. Ф-ия f $(m+1)$ раз дифф. в окр. x_0 . Тогда

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^m \frac{d^k f(x_0)}{k!} \Delta x + \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(m+1)!} \Delta x$$

$$\Delta x = x - x_0, \theta \in (0, 1)$$

мерном пространстве

5 Теория меры

5.1 Определение измеримости по Жордану множества в n -мерном евклидовом пространстве

Мн. $E \subset \mathbb{R}^n$ наз. изм. по Ж. \Leftrightarrow

$$\mu_*(E) = \mu^*(E) \in \mathbb{R}$$

5.2 Критерий измеримости

идея: $\text{огр. } \epsilon$ мн-ми

Теорема 1. Мн. $E \subset \mathbb{R}^n$ изм. \Leftrightarrow

огр. и $\mu(\partial E) = 0$

5.3 Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств

5.4 Конечная аддитивность меры Жордана

идея: $\text{огр. } \epsilon$ мн-ми

Мн. E_1 and E_2 изм. по Ж. и $\text{int}(E_1) \cap \text{int}(E_2) = \emptyset \Rightarrow$

$$\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$$

5.5 Измеримость и мера цилиндра в $(n+1)$ -мерном пространстве

6 Интеграл

6.1 Определенный интеграл Римана

Опр.

$$J = \int_a^b f(x)dx \Leftrightarrow$$
$$\lim_{l(T) \rightarrow 0} s = \lim_{l(T) \rightarrow 0} S = J \Leftrightarrow$$
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : l(T) < \delta \hookrightarrow |s - J| < \epsilon \text{ and } |S - J| < \epsilon$$

6.2 Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства

Опр. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и зад. $T = \{x_i\}_{i=0}^I$ отр. $[a, b]$

Пусть $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Тогда

$$s = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) m_i$$
$$S = \sum_{i=1}^I (x_i - x_{i-1}) M_i$$

наз. соотв. н.суммой Д. и в.суммой Д.

6.3 Критерий интегрируемости

идея: из опр. инт. берем $\frac{\epsilon}{2}$

Теорема 1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ инт. на $[a, b] \Leftrightarrow$

$$\lim_{l(T) \rightarrow 0} \Delta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T : l(T) \leq \delta \hookrightarrow \Delta \leq \epsilon$$

6.4 Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва

идея: т.К., модуль непр. стр. к нулю, огр. двумя

Теорема 1. $f(x)$ непр. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

идея: рассм. один отр., по т.4 ф-я совп. за искл. кон. числа т.

Теорема 2. $f(x)$ кус. непр. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

идея: кр.инт., $w_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') - f(x'')| = f(x_{i-1}) - f(x_i)$

Теорема 3. $f(x)$ мон. на $[a, b] \Rightarrow$ инт-ма на нем

6.5 Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем.

идея: огр. на $[a, c]$, $|S(T) - S(T_1) - S(T_2)| \leq 2M \cdot l(T) \rightarrow 0$

Теорема 5. $f(x)$ инт-ма на $[a, b]$ и $[b, c]$

Тогда $f(x)$ инт-ма на $[a, c]$ и

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

идея: лин. инт. суммы Р.

Теорема 1. $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a, b]$

То $\phi(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ инт-ма на $[a, b] \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

идея: $\sigma(f) \leq \sigma(g)$ пер. к пред. $J_f \leq J_g$

Теорема 2. $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] \hookrightarrow f(x) \leq g(x) \Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

идея:

Теорема 3. $f(x)$ инт-ма на $[a, b] \Rightarrow |f(x)|$ инт-ма на $[a, b]$ и

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

6.6 Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость

идея:

Теорема 1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ инт. на $[a, b] \Rightarrow$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ cont. on } [a, b]$$

идея:

Теорема 2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непр. на $[a, b] \Rightarrow$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ is antider. } f(x) \text{ on } [a, b]$$

6.7 Формула Ньютона–Лейбница

идея: $F(a) = C$, $F(b) = \int_a^b f(x)dx + C \rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$

Следствие 2. $F(x)$ перв. $f(x)$ на $[a, b]$, $f(x)$ непр. \Rightarrow

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6.8 Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

7 Геометрические приложения интеграла

7.1 Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой

идея: разбить на супремум и инфимум прямоугольники, их суммы равны в.сумме \mathcal{D} . и н.сумме \mathcal{D} .

Теорема 1. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ инт. и неотр. на $[a, b]$

Тогда кр.тр.

$$E = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

явл. изм. мн. и

$$\mu(E) = \int_a^b f(x) dx$$

идея: разбить на супремум и инфимум цилиндры, их суммы равны в.сумме \mathcal{D} . и н.сумме \mathcal{D} .

Теорема 2. Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ инт. и неотр. на $[a, b]$

Тогда тело вр.

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

изм. и равно

$$\mu(G) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

идея: $s' = |\bar{r}'|$

Теорема 3. Если кр. $L = \{\bar{r}(t) : t \in [a, b]\}$ непр. дифф., то

$$|L| = \int_a^b \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt$$

7.2 Вычисление площади поверхности вращения (без доказательства)

Теорема 2. Пусть $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — неотр., непр.дифф.

Тогда пл.пов.вр. сущ. и равна

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx$$

8 Криволинейный интеграл I и II рода

8.1 Криволинейный интеграл первого рода

Определение. Пусть кр. $L = \{\bar{r}, t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ зад. непр.в-р-ф-ей \bar{r} , пр. кот. кус.непр. на отр. $[a, b]$. Пусть на мн-ве L зад. непр.скал.ф-я $f(\bar{r}(t))$
Крив.инт. 1 рода ф-ии f по кр. L наз.

$$\int_L f ds = \int_a^b f(\bar{r}(t)) |r'(t)| dt$$

идея: два аргумента, функция из аргумента 1 в аргумент 2 (непр., возр., непр.дифф.), теорема о производной сл.ф-ии

Теорема 1. Крив. инт. 1 рода не зав. от параметризации.

идея: замена $a \rightarrow -b$, $b \rightarrow -a$, $t \rightarrow -t$

Лемма 1. При изм. ориент. кр.инт. 1 рода не изм.

8.2 Криволинейный интеграл второго рода

Определение. Пусть кр. $L = \{\bar{r}, t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ зад. непр.в-р-ф-ей \bar{r} , пр. кот. кус.непр. на отр. $[a, b]$. Пусть на мн-ве L зад. непр. n -м.в-р-ф-я $\bar{F}(\bar{r}(t))$
Крив.инт. 2 рода ф-ии \bar{F} по кр. L наз.

$$\int_L \bar{F} d\bar{r} = \int_a^b \bar{F} \bar{r}' dt$$

идея: ан-но крив. инт. 1 рода

Теорема 2. Крив. инт. 2 рода не зав. от параметризации.

идея: ан-но крив. инт. 1 рода

Лемма 2. При изм. ор. кр. крив. инт. 2 рода меняет знак.

9 Несобственный интеграл

9.1 Несобственный интеграл

Определение. Пусть $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ and $\forall b > a$ f инт-ма на $[a, b]$
Тогда несоб. инт. наз.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

9.2 Критерий Коши сходимости интеграла

идея: пред. к b по кр.К. сущ. пред. ф-ии

Теорема 1. Пусть f инт-ма на $\forall [c, d] \subset [a, b)$

Тогда $\int_a^b f(x)dx$ сх. \Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \exists \xi \in (a, b) : \forall b_1, b_2 \in (\xi, b) \hookrightarrow \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| < \epsilon$$

9.3 Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости

идея: супремумы отрезков меньше или равны, соотв. док. интегралы меньше/больше бесконечности по транзитивности

Теорема 2. Пусть f and g инт-мы на $\forall [c, d] \subset [a, b)$ и $\forall x \in [a, b) \hookrightarrow 0 \leq f(x) \leq g(x)$

Тогда

а. из сх. $\int_a^b gdx \hookrightarrow$ сх. $\int_a^b fdx$

б. из расх. $\int_a^b fdx \hookrightarrow$ расх. $\int_a^b gdx$

9.4 Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость

Определение. $\int_a^b f(x)dx$ сх. абс. $\Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx$ сх.

Определение. $\int_a^b f(x)dx$ не сх.абс., но сх. $\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx$ сх.усл.

идея: кр.К. сх. инт., нер-во с модулем

Теорема 2. Пусть f инт-ма на $\forall [c, d] \subset [a, b)$

$\int_a^b f(x)dx$ сх.абс. $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ сх.

9.5 Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов

идея: по частям, $F(x)$ огр., по пр.ср., $g(x) \rightarrow 0$, не влияет

Теорема 3. Пусть $f(x)$ непр., а $g(x)$ непр.дифф на $[a, b)$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть

1. $F(x)$ огр. на $[a, b)$

2. $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$

3. $\forall x \in [a, b) \ g'(x) \leq 0$ Тогда

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

сх.

10 Числовые ряды

10.1 Числовые ряды

Определение. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – числ. посл.
Сумма ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Ряд наз. сх., если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R}$, в пр. сл. расх.

10.2 Критерий Коши сходимости ряда

идея: кр.К. для посл.

Теорема 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \epsilon$$

10.3 Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак

идея: по т1 расс. супремумы и исп. транз.

Теорема 2.

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

а. из сх. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \hookrightarrow$ сх. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

б. из расх. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \hookrightarrow$ расх. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

идея: ср-ть с геом. прог.

Теорема 5.

$$a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Тогда

$$a. \text{ if } \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ and } q \in (0, 1) : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \quad \forall k \geq k_0 \text{ then } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ conv.}$$

$$b. \text{ if } \exists k_0 \in \mathbb{N} : \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \quad \forall k \geq k_0 \text{ then } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ disconv.}$$

идея: возвести в ст., ср-ть с геом. прог.

Теорема 6.

$$a_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a. \text{ if } \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ and } q \in (0, 1) : \sqrt[k]{a_k} \leq q \quad \forall k \geq k_0 \text{ then } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ conv.}$$

b. if $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[k]{a_k} \geq 1 \forall k \geq k_0$ then $\sum a_k$ disconv.

идея: проинт. и просумм. $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, супр.

Теорема 4. $f(x)$ зад. и мон. на $[1, \infty)$

Тогда $\sum f(k)$ и $\int_1^\infty f(x)dx$ сх. или расх. одн-но

10.4 Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля

Определение. $\sum a_k$ наз. абс. сх., если сх. $\sum |a_k|$

$\sum a_k$ наз. усл. сх., если $\sum a_k$ сх., а $\sum |a_k|$ расх.

идея: кр.К. для рядов

Теорема 2. Ряд сх. абс. \Rightarrow сх.

идея: пр-ие Абеля $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $A_0 = 0$

Теорема 3.

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq C \text{ and } b_k \xrightarrow{mon} 0 \text{ as } k \rightarrow \infty$$

Тогда $\sum a_k b_k$ сх.

10.5 Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых

идея: исп. M_n док. абс. сх., исп. M_n, m_n и σ_m док. рав.

Теорема 1. Р. $\sum^\infty a_{kj}$ пол. пер. абс. сх. р. $\sum^\infty a_k \Rightarrow$

$\sum^\infty a_{kj}$ абс. сх. и

$$\sum^\infty a_{kj} = \sum^\infty a_k$$

10.6 Теорема Римана о перестановках членов условно сходящегося ряда (без доказательства)

идея: когда б., добирать отр., когда м., добирать пол. (разд. ряд на пол. и отр.)

Теорема 2. $\sum^\infty a_k$ сх. усл., то $\forall x \in \mathbb{R}$ можно пер. чл. $\sum^\infty a_k$ так: $\sum^\infty a_{kj} = x$

10.7 Произведение абсолютно сходящихся рядов

идея: огр. р. пр. пр. р., док. абс. сх., пост. вз. одн. соот. по диаг., р. не изм. по док.

Теорема 3. Пусть $\sum^{\infty} a_k$ и $\sum^{\infty} b_k$ абс. сх., а $(m_j, n_j) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ вз. одн.
Тогда $\sum^{\infty} a_{m_j} b_{n_j}$ абс. сх. и

$$\sum^{\infty} a_{m_j} b_{n_j} = \sum^{\infty} a_k \cdot \sum^{\infty} b_k$$

11 Функциональные последовательности и ряды

11.1 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

Опр. $\{f_n(x)\}$ сх. к $f(x)$ на мн. $X \Leftrightarrow$

$$f_n(x) \rightrightarrows_X f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Для ф. р. опр. ан-ое, расс. посл. ч. сумм

11.2 Критерий Коши равномерной сходимости

идея: \Rightarrow в опр. вз. $\epsilon/2$, \Leftarrow в опр. вз. $p \rightarrow \infty$

Теорема 2.

$$f_n(x) \rightrightarrows_X f(x) \Leftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall p \in \mathbb{N} x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq \epsilon$$

Для ф. р. опр. ан-ое, расс. посл. ч. сумм

11.3 Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций

идея: $|f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon/4$, $|f_N(x) - f(x_0)| \leq \epsilon/2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$

Теорема 1. $f_n(x)$ непр. на X и

$$f_n(x) \rightrightarrows_X f(x)$$

То $f(x)$ непр. на X

11.4 Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

идея: $|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (b-a) \sup(f_n(x) - f(x)) \rightarrow 0$

Теорема 3. $f_n(x)$ непр. на $[a, b]$ и $f_n(x) \rightrightarrows_X f(x) \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$$

11.5 Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 5.

$$1. \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in X \hookrightarrow |A_n(x)| \leq C$$

$$2. b_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0 \text{ as } k \rightarrow \infty$$

$$3. \forall x \in X \forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow b_{k+1}(x) \leq b_k(x) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \text{ uniform converges on } X$$

12 Степенные ряды

12.1 Степенные ряды с комплексными членами

Опр. $\{c_k\}$, $c_k, w_0 \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - w_0)^k$$

наз. ст. р.

12.2 Первая теорема Абеля

идея: по св-ву рад. сх.

Теорема 2. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. в т. z_0

Тогда

$$\forall z \in \mathbb{C} : |z| < |z_0|$$

исх. р. сх. абс.

12.3 Круг и радиус сходимости

Опр. Рад. сх. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ наз.

$$R \in [0, \infty] : \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

Кр. с ц. в т. $(0, 0)$ и рад. R наз. кр. сх. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

12.4 Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости

идея: ср. $|c_k z^k| \leq |c_k| r^k$, сх. по св-ву рад., по пр.В.

Теорема 3. $R > 0$ ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \Rightarrow$

$$\forall r \in (0, R) \text{ series } \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \text{ converges uniform in } Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

12.5 Непрерывность суммы степенного ряда в круге сходимости

12.6 Формула Коши–Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$$

12.7 Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при формальном дифференцировании и интегрировании ряда

идея: ф.К.А., из дифф. след. инт.

Теорема 5. Рад. ст. р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^{k-1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$ совп. с рад. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

12.8 Вторая теорема Абеля

идея: пр.А.

Теорема 4. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. в $z_1 \in \mathbb{C}$

Тогда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сх. равн. на $[0, z_1] = \{tz_1 : t \in [0, 1]\}$

13 Ряд Тейлора

13.1 Степенные ряды с действительными членами

13.2 Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости

13.3 Единственность представления функции степенным рядом

13.4 Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд

идея: ф.Т. по Л., $M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

Теорема 1. $\exists \delta > 0 : f$ беск. дифф. в $U_\delta(x_0)$ и

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow |f^{(n)}(x)| \leq M \Rightarrow$$

f рег. в т. x_0 и

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

13.5 Ряд Тейлора

Опр. $f(x)$ – беск. дифф. в т. x_0

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

наз. р.Т. ф-ии $f(x)$ в т. x_0

13.6 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

13.7 Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд

идея: все пр. в нуле равны нулю

Бесконечно дифференцируемая функция, не разлагающаяся в степенной ряд

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

13.8 Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций

1. e^x беск. дифф., $|(e^x)^{(n)}| \leq e^\delta \forall x \in U_\delta(0) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

13.9 Разложение в степенной ряд комплекснозначной экспоненты

идея: док. $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$ через произ. р. и б.Н. $k_1 = k$, $k_2 = m - k$

Теорема 2.

$$\forall z \in \mathbb{C} \hookrightarrow \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$